COMILLAS
UNIVERSIDAD PONTIFICIA

APUNTES DE MATEMÁTICAS DE LAS OPERACIONES FINANCIERAS PARA ADMINISTRACIÓN Y DIRECCIÓN DE EMPRESAS

Prof. Susana Carabias

FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y EMPRESARIALES

Título original: Apuntes de Matemáticas de las Operaciones Financieras para Administración y Dirección de Empresas.

2023, Susana Carabias López

Departamento de Métodos Cuantitativos.
Facultad de CC. Económicas y Empresariales.
Universidad Pontificia Comillas. ICADE.

Madrid, España

ISBN: 978-84-09-53324-4

Índice

Tema 1. Capital financiero y operación financiera

1.1. Concepto de capital financiero

1.1.1. El valor del dinero en el tiempo en las matemáticas financieras

Las matemáticas financieras parten del supuesto de que los individuos prefieren recibir los bienes lo antes posible. Lo más sencillo es razonar, pensando que se trata de dinero. Hay varias maneras de justificarlo. La más sencilla es pensar que, si dispongo del dinero ahora, puedo elegir entre gastarlo ahora o dentro de un año. Si dispongo del dinero dentro de un año, no puedo gastarlo ahora. En ocasiones, este principio se denomina, con dudoso acierto, principio de subestimación de las necesidades futuras. Disponer del dinero más tarde da menos posibilidades que tenerlo ahora. Es posible pensar en casos en los que no se cumpla este principio, pero quedarían fuera de la racionalidad de la matemática financiera.

Cuanto un agente (A) entrega una cantidad de dinero a otro agente (B) que lo devolverá después, normalmente exigirá una compensación por haber adelantado la disponibilidad del dinero. Si B entregase la misma cantidad en un momento posterior, tendría menor valor que lo aportado por A. Por esta razón, cuando se intercambian bienes en momentos diferentes del tiempo, surge el problema de calcular las compensaciones derivadas del paso del tiempo entre los distintos momentos de entrega. Este es el problema fundamental que tratan de resolver las matemáticas financieras.

Estos intercambios de bienes que se entregan en distintos momentos, que se formalizan con matemáticas financieras, reciben el nombre de operaciones financieras.

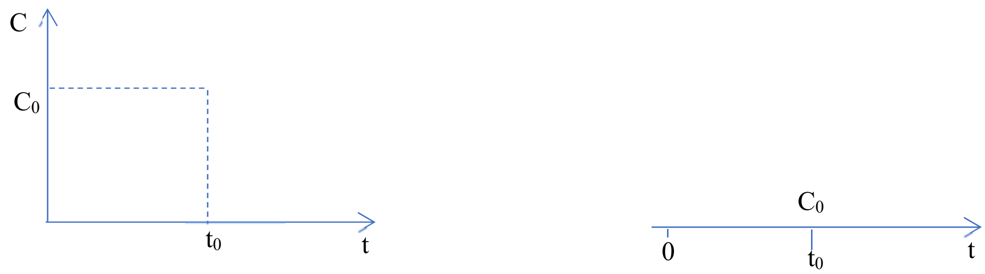
1.1.2. El concepto de capital financiero

Dado que el momento en el que se entregan los bienes es una variable relevante, para que la entrega del bien quede definida de forma completa, es necesario especificar este momento, además de indicar la cuantía que se entrega, que sería la cantidad de dinero o el valor del bien. Por esta razón, los bienes que se intercambian en las operaciones financieras se representan por un par de valores, (C,t). Estos pares de valores se denominan capitales financieros.
El primer valor del par se denomina cuantía y representa la cuantía que se entrega y se mide en unidades monetarias.

El segundo valor se denomina vencimiento y representa el momento del tiempo en el que se entrega el bien. El vencimiento se mide en unidades de tiempo transcurridos desde un momento dado que se denomina origen de la variable tiempo.

Los capitales financieros se pueden representar gráficamente. Contrariamente a la práctica habitual en matemáticas, la cuantía, que es el primer valor del par, se representa el eje de ordenadas; mientras que el vencimiento se representa en el eje de abscisas. También es frecuente representar únicamente un eje de tiempo y escribir la cuantía del capital en el momento correspondiente.

Representación gráfica del capital (C_0,t_0)



1.2. Operaciones financieras

1.2.1. Concepto y elementos de una operación financiera

En una operación financiera se produce un intercambio de dos conjuntos de capitales financieros con vencimientos diferentes.

Se denomina origen de la operación al primero de estos vencimientos y se denomina final al último. La duración de la operación es el tiempo transcurrido entre el origen y el final.

El conjunto de capitales que contiene el primer capital (esto es, aquel que vence en el origen) se denomina prestación y, el otro conjunto se denomina contraprestación.
A quien entrega la prestación se le conoce como prestamista y a quien entrega la contraprestación, como prestatario.
Representar la prestación y la contraprestación de una operación financiera en dos ejes temporales facilita la identificación de los elementos esenciales.

Imaginemos una operación financiera consistente en la compra de un electrodoméstico a plazos. Supongamos que su precio al contado es de 1400€ y se paga en tres plazos de 500€ que vencen a los tres, seis y nueve meses desde la venta. Obsérvese que, al retrasar el pago, la cuantía es mayor.

El prestamista será el vendedor del electrodoméstico y el prestatario, el comprador.
La prestación será el capital que representa la entrega del electrodoméstico: (1400, 0), si empezamos a contar el tiempo desde el momento de la compra y consideramos ese momento como t = 0.
La contraprestación de la operación es el conjunto formado por los tres capitales entregados por el prestatario: {(500, 3 meses), (500, 6 meses), (500, 9 meses)}
El momento de la compra, t = 0 es el origen de la operación y el final será t=9 meses, momento en el que se entrega el último capital de la operación. La duración de la operación es de 9 meses.

Podemos representar la operación en dos ejes temporales:

1400			
t = 0			
	500	500	500
	3 meses	6 meses	9 meses

1.2.2. Clasificación de las operaciones financieras

Las operaciones financieras pueden clasificarse de acuerdo con múltiples criterios.

En función de la duración: Operaciones a corto y a largo plazo.

La frontera entre el corto y el largo plazo suele establecerse en un año.

Un ejemplo de operación a corto plazo podría ser la venta a plazo de un electrodoméstico descrita en el apartado anterior.

Un ejemplo significativo de operación a largo plazo es un préstamo hipotecario, en el que el prestamista entrega una cantidad de dinero, en muchas ocasiones de gran cuantía comparada con la capacidad adquisitiva del prestatario. La operación da comienzo con la entrega de este capital, que constituye la prestación. A cambio, el prestatario entrega capitales periódicamente, durante un largo periodo de tiempo. Este conjunto de capitales entregados por el prestatario constituye la contraprestación del préstamo.

En función del número de capitales que intervienen: operaciones simples y compuestas.

Se dice que una operación financiera es simple cuando tanto la prestación como la contraprestación están formadas por un único capital. En caso contrario, se dice que la operación es compuesta.

En una operación financiera simple sólo intervienen dos capitales, uno entregado por el prestamista y otro entregado por el prestatario. Obsérvese que, ni la operación de venta a plazo del electrodoméstico propuesta como ejemplo, ni el préstamo hipotecario cumplen este requisito. En ambos casos, la prestación sí está formada por un solo capital, pero la contraprestación es múltiple, esto es, incluye varios capitales financieros: tres capitales, en el caso de la venta del electrodoméstico. En préstamo hipotecario con una duración de, por ejemplo, 20 años y pagos mensuales, la contraprestación estaría formada por 240 capitales.

Dentro de las operaciones financieras compuestas, podemos encontrar ejemplos en los que la prestación es múltiple, tanto con prestación única, como con contraprestación también múltiple.

Las denominadas *operaciones de constitución de un capital* son un ejemplo clásico de operaciones financieras con prestación múltiple y prestación única. Se trata de operaciones en las que el prestamista es un ahorrador que entrega capitales periódicamente (llamados imposiciones), para retirar a cambio un capital final, que constituye la contraprestación.

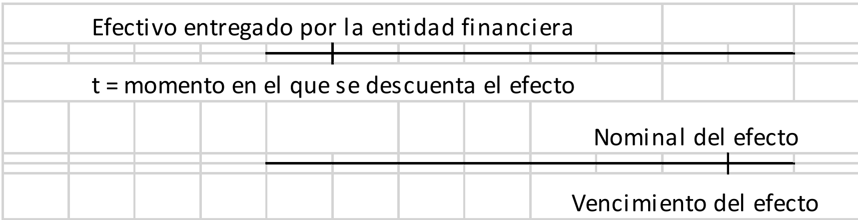
Las *cuentas corrientes* son un ejemplo de operaciones financieras con prestación y contraprestación múltiples. Las cuentas corrientes que resultan más familiares son las *cuentas a la vista*. Se sugiere tratar de identificar en ellas prestamista, prestatario, prestación y contraprestación. Hay otros contratos de cuenta corriente interesantes, como pueden ser las *cuentas de crédito*, en las que se permite a una empresa que vaya disponiendo de capitales, hasta un límite determinado, a cambio de lo cual deberá entregar una contraprestación (única o múltiple) que resulte equivalente.

Un ejemplo significativo de operación simple es el *descuento de un efecto*. El término efecto se refiere a un derecho de cobro futuro formalizado, por ejemplo, en una letra de cambio o en un pagaré. Estos efectos dan derecho a cobrar su *Nominal* en un momento futuro que se denomina *Vencimiento* del efecto.

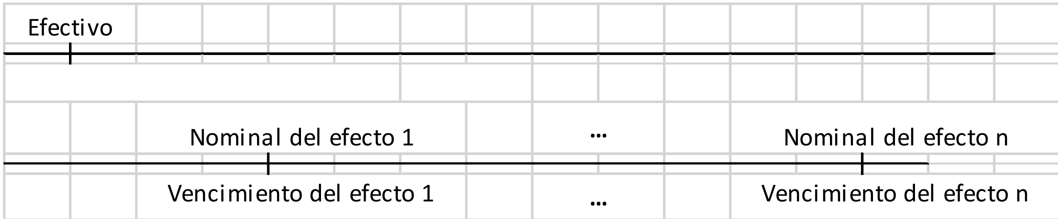
En ocasiones, quienes tienen derecho a cobrar un efecto en el futuro prefieren recibir el efectivo antes de su vencimiento, aunque sea a costa de recibir una cantidad inferior y esto es lo que permite la operación de descuento. En ella se cede el derecho de cobro futuro a una entidad financiera que, a cambio entrega un capital que vence antes, pero tiene una cuantía inferior. Este capital constituye la prestación de la operación de descuento: (Efectivo, t= momento en el que se descuenta el efecto). La contraprestación es el capital que representa el derecho de cobro futuro: (Nominal del efecto, Vencimiento del efecto).

Obsérvese que el prestamista es la entidad financiera y el prestatario es aquél que tenía inicialmente el derecho de cobro y lo cede.

Podríamos esquematizar la operación de descuento de un efecto del siguiente modo:



Si una empresa descontara varios efectos en una operación, sería compuesta, con prestación única y contraprestación múltiple:



En función del objetivo: operaciones de inversión, de financiación y mixtas.

Cuando se entregan capitales para recibir a cambio, con posterioridad, otros capitales de mayor cuantía, se dice que se realiza una operación de inversión. El objetivo de estas operaciones es obtener *rentabilidad*.

Cuando se reciben capitales y, a cambio se entregan, con posterioridad, otros capitales de mayor cuantía, se dice que se realiza una operación de financiación. El objetivo de estas operaciones es adelantar la disponibilidad de los capitales y, para conseguirlo, será necesario asumir un *coste*.

Este criterio de clasificación está referido al sujeto que emprende la operación. Por ejemplo, para un préstamo bancario, la operación será de financiación desde el punto de vista del prestatario, pero será de inversión desde el punto de vista del banco. Por esta razón, los objetivos de las dos partes que intervienen en la operación son opuestos: el banco desea obtener la máxima rentabilidad, mientras que el cliente busca obtener el mínimo coste.

Existen operaciones que tienen periodos de inversión y otros de financiación, que se conocen como operaciones mixtas.

En función de la posición crediticia: operaciones de crédito unilateral y de crédito recíproco.

Aquellas operaciones en las que el prestatario mantiene la posición deudora hasta el momento final se conocen como operaciones de crédito unilateral. Se denomina operaciones de crédito recíproco a aquellas en las que el prestamista pasa a ser deudor en algún periodo de la operación.

Como ejemplo emblemático de operación de crédito unilateral podría plantearse un préstamo. En él, el prestamista entrega un capital al comienzo y durante toda la operación el prestatario mantiene su posición deudora hasta el final, momento en el que desaparece la deuda.

El concepto de operación de crédito recíproco puede intuirse pensando en un contrato de cuenta corriente en el que, en unos periodos es deudor el cliente (lo que sería lo normal en una cuenta de crédito), mientras que, en otros, el cliente tiene dinero a su favor en la cuenta, lo que quiere decir que es deudor el banco.

En función de los sujetos que intervienen: operaciones bancarias y no bancarias.

Frecuentemente, una de las partes que intervienen en una operación financiera es un banco y, en este caso, se dice que se trata de una operación bancaria. Cuando se trata de una operación de inversión para el banco, se habla de operación bancaria activa y cuando es una operación de financiación desde el punto de vista del banco, se denomina operación bancaria pasiva.

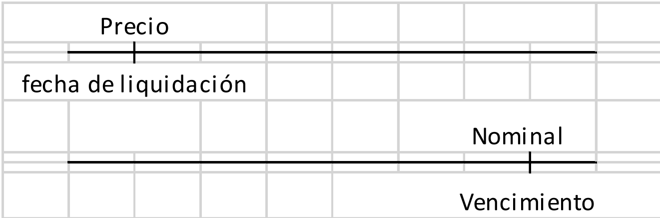
El ejemplo clásico de operación bancaria activa es el de un préstamo bancario y el de operación bancaria pasiva los *depósitos a plazo*. Un depósito a plazo es una operación financiera por la que un cliente entrega una cantidad dinero a la entidad durante un plazo determinado y a su finalización obtiene una cantidad mayor. Obsérvese que, en un depósito, el prestamista es el cliente, mientras que el banco se está financiando.

Cuando en la operación no interviene una entidad bancaria, se dice que se trata de una operación financiera no bancaria. Entraría en esta categoría el ejemplo de venta a plazo de un electrodoméstico.

Un ejemplo muy relevante de operación no bancaria es el de suscripción de títulos de deuda. En especial, se estudiarán las operaciones de suscripción de títulos de Deuda Pública.

Los títulos de Deuda Pública a corto plazo se denominan Letras del Tesoro y definen operaciones simples. Se paga por ellos un precio y se recibe, a cambio, una cantidad denominada Nominal. A la fecha en la que se paga el precio se le denomina fecha de liquidación, mientras que a la fecha en la que se entrega el Nominal se le denomina fecha de vencimiento. Se sugiere identificar los elementos de esta operación y clasificarla de acuerdo con los distintos criterios estudiados.

El esquema de una operación de suscripción de Letras del Tesoro sería el siguiente:



Los títulos de Deuda Pública a medio y largo plazo se denominan Bonos y Obligaciones del Estado. También se paga por ellos un precio en la llamada fecha de liquidación, pero dan derecho a cobrar más de un capital, por lo que constituyen una operación compuesta. Se estudiarán en el último tema de la asignatura.

1.2.3. Formalización del concepto de operación financiera

Los textos de matemáticas financieras suelen incluir en la definición de operación financiera que las partes implicadas hayan pactado una ley financiera, bajo la cual la prestación y la contraprestación resulten financieramente equivalentes.

Para comprender esta definición, es necesario presentar dos conceptos nuevos:

- El concepto de ley financiera, al que se dedicará el tema 2
- El concepto de equivalencia financiera entre dos conjuntos de capitales, al que se dedicará el tema 3.

Tema 2. Leyes financieras

2.1. Las leyes financieras como criterio de proyección de capitales

2.1.1. Comparación de capitales

En las operaciones financieras se intercambiarán capitales financieros, por lo que será necesario saber compararlos. Algunas comparaciones son inmediatas, como en el caso de que los capitales tuvieran el mismo vencimiento (caso en que también sería inmediata la agregación); no habría problema tampoco en el caso de que tuvieran la misma cuantía y distinto vencimiento, o si el que tiene mayor cuantía tiene un vencimiento anterior. Sin embargo, no resulta evidente la comparación cuando el capital con mayor cuantía tiene un vencimiento posterior.

Para elaborar criterios de comparación en los casos en que no es inmediato, partiremos del siguiente principio: es posible encontrar un sustituto para cualquier capital en un momento del tiempo fijo: p (punto de valoración, punto de comparación de capitales). Diremos que estamos proyectando el capital hasta este momento del tiempo p.

Podemos escribirlo del siguiente modo:

Así, fijado un momento, p, y dado un capital (c, t) se encuentra una cuantía x tal que:

$$(c, t) \approx (x, p)$$

donde leemos $\approx$ como "es equivalente"; o decimos que (x, p) es el sustituto de (c, t).

Obsérvese que, de acuerdo con el llamado "principio de subestimación de los capitales fututos", si proyectamos hacia adelante en el tiempo, los sustitutos deberán tener una cuantía mayor ($x > c$). Mientras que, de acuerdo con este principio, si proyectamos hacia atrás en el tiempo, el sustituto debería tener una cuantía menor que la del capital que se ha proyectado ($x < c$).

Este principio determina el criterio de comparación en que se basa toda la asignatura: dos capitales serán equivalentes si tienen el mismo sustituto en p. Este criterio resolverá las comparaciones no inmediatas y el problema de agregación o "suma" de capitales.

2.1.2. Procedimiento para proyectar capitales

Para buscar el sustituto de los capitales, se comienza por buscar el sustituto de una unidad monetaria proyectada durante el mismo periodo de tiempo.

Supongamos que queremos proyectar 1.000€ desde hoy hasta $p = 2\ años$. (Buscamos cómo sustituir de 1.000€ entregados en este momento, por un capital que se entregaría dentro de dos años. Por ejemplo, cuánto tendría que devolver dentro de dos años, por un préstamo de 1.000€).

Debemos comenzar por proyectar 1€ desde hoy hasta $p = 2\ años$. Con un criterio dado (caja negra en este momento), hemos encontrado que el sustituto del capital $(1€, 0)$ dentro de dos años es 1,2€. Esto es:

$$(1€, 0) \approx (1{,}2€\ ,2)$$

Se entiende, entonces, que el sustituto del capital $(2€, 0)$ dentro de dos años es 2,40€. Esto es, multiplicamos por dos el sustituto de un euro.

El sustituto de $(1.000€, 0)$ dentro de dos años que buscábamos será:

$$1.000 \cdot 1{,}2 = 1.200€.$$

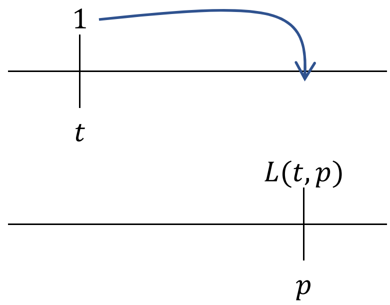
Las leyes financieras abrirán la caja negra del procedimiento anterior. Son las funciones que dan el sustituto en p de una unidad monetaria. Por esta razón, pueden denominarse leyes financieras *unitarias*, pero, para simplificar, se denominarán simplemente leyes financieras.

2.1.3. Concepto de ley financiera. Leyes de capitalización y descuento

Fijado el punto de comparación, p, llamamos ley financiera (de valoración en p) a una función matemática, cuya variable dependiente es la cuantía que, entregada en p, sustituye al capital $(1, t)$.

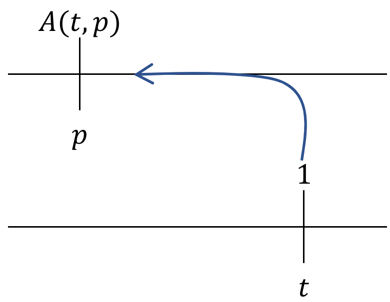
Cuando las leyes financieras proyectan hacia adelante en el tiempo ($t < p$), se denominan *leyes financieras de capitalización* y se representan por $L(t,p)$.

Podríamos representar la proyección con una ley financiera de capitalización del siguiente modo:



Cuando las leyes financieras proyectan hacia atrás en el tiempo ($t > p$), se denominan *leyes financieras de descuento* o *de actualización* y se representan por $A(t,p)$.

Podríamos representar la proyección con una ley financiera de descuento del siguiente modo:



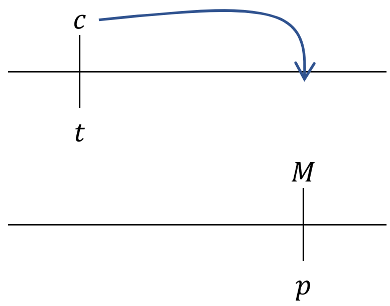
En ocasiones, se utilizará la notación genérica para leyes de capitalización y de descuento, $F(t,p)$.

Como se indicaba en el apartado anterior, la proyección hasta p de un (c,t) obtiene multiplicando la cuantía del capital por el sustituto de una unidad monetaria, esto es, por la ley financiera (unitaria).

Se denomina *Montante* (M) a la proyección en p de un capital (c,t) con una ley financiera de capitalización.

$$M = c \cdot L(t,p)$$

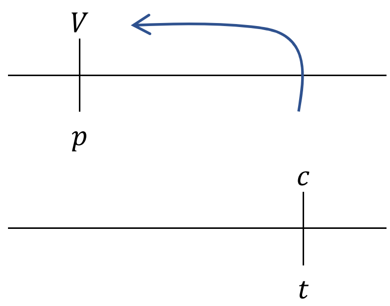
Podríamos representarlo del siguiente modo:



Se denomina *Valor descontado* (V) a la proyección en p de un capital (c, t) con una ley financiera de descuento.

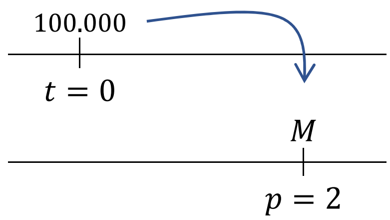
$$V = c \cdot A(t, p)$$

Podríamos representarlo del siguiente modo:



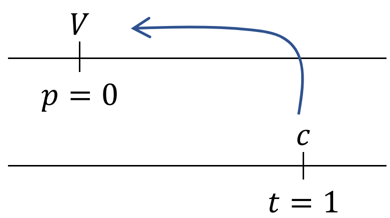
Ejemplos I:

- Fijamos $p = 2$; ley. Con la ley $L(t, p) = 1 + 0{,}1 \cdot (p - t)$, se pide encontrar el sustituto en p del capital $(100.000, 0)$



$$M = 100.000 \cdot L(0, 2) = 100.000 \cdot [1 + 0{,}1.(2 - 0)] = 120.000$$

- Fijamos $p = 0$. Con la ley: $A(t, p) = \frac{1}{1+0{,}2(t-p)}$, se pide encontrar el sustituto en p del capital $(150.000, 1)$:



$$V = 150.000\, A(1\,,0) = 150.000 \frac{1}{1 + 0{,}2\,(1-0)} = 125.000$$

2.1.4. Leyes financieras estacionarias

En la práctica suele trabajarse con leyes estacionarias, lo que quiere decir que las leyes se puedan expresar en función del tiempo que media entre el vencimiento del capital y el punto de comparación, por lo que se pueden representar por funciones de dos variables. Esta variable se denomina *tiempo interno*, y se define de modo que sea siempre positivo:

$z = p - t$, cuando se trabaja con una ley de capitalización

$z = t - p$, cuando se trabaja con una ley de descuento.

Las leyes de capitalización se representarán por $L(z)$ con $z = p - t \geq 0$

Las leyes de descuento se representarán por $A(z)$ con $z = t - p \geq 0$

Ejemplos II:

Expresar las leyes financieras de los ejemplos como leyes estacionarias.

La ley $L(t,p) = 1 + 0{,}1 \cdot (p - t)$, puede escribirse como $L(z) = 1 + 0{,}1 \cdot z,\ donde\ z = p - t.$

La ley $A(t,p) = \frac{1}{1\,+\,0{,}2\,(t-p)}$, puede escribirse como $A(z) = \frac{1}{1+0{,}2\,z},\ donde\ z = t - p.$

2.1.5. Sustituto de un capital en un momento distinto de $\boldsymbol{p}$

Obsérvese cómo se está valorando el tiempo. Un criterio objetivo de valoración vendrá dado por una ley financiera y un punto de valoración de capitales. Fijado un criterio objetivo, ya puede decirse cuándo dos capitales son equivalentes, de acuerdo con el principio de que dos capitales son equivalentes si tienen el mismo sustituto en p.

Ejemplos III:

- Fijado $p = 2$, con la ley: $L(z) = 1 + 0{,}1 \cdot z$, se pide:

a) encontrar el sustituto en el momento 2 del capital $(100.000, 0)$:

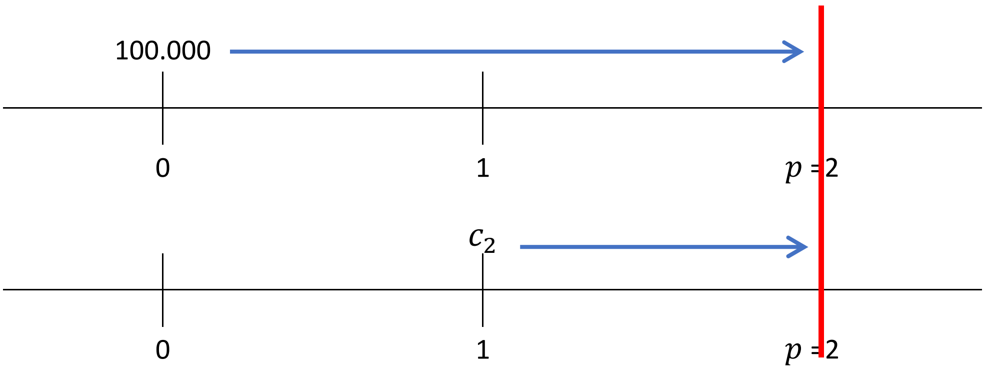
$$M = 100.000\ \ L(2) = 100.000\,[1 + 0{,}1 \cdot (2 - 0)] = 120.000$$

(Este ejemplo coincide con el primero. El único cambio es que se ha expresado la ley como estacionaria. En adelante, siempre se hará así)

b) Calcular la cuantía c_2 del capital que vence en 1 equivalente a $(100.000, 0)$.

Los capitales $(100.000, 0)$ y $(c_2, 1)$ serán equivalentes si tienen el mismo sustituto en p

Podría ser de ayuda apoyarse en un esquema:



Por el apartado anterior, sabemos que el sustituto en $p = 2$ del capital $(100.000, 0)$ es 120.000. Luego, el capital $(c_2, 1)$ debe tener el mismo sustituto.

$$c_2\, L(1) = 120.000 \Rightarrow c_2 = 109.090{,}9$$

Obsérvese que, en el ejemplo anterior, los capitales (c_1, t_1) y (c_2, t_2) son equivalentes porque tienen el mismo sustituto en p; verifican:

$$c_1\, L(z_1) = c_2\, L(z_2)$$

$$z_1 = p - t_1 \qquad z_2 = p - t_2$$

De esta ecuación, hemos despejado c_2:

$$c_2 = c_1 \frac{L(z_1)}{L(z_2)}$$

Observamos que, para encontrar el sustituto de un capital en un momento del tiempo, se multiplica la cuantía del capital de partida por un número; si el momento de "destino" es el punto de comparación, ese número es la ley, y si no, en general, es diferente a la ley y se denomina factor. En el caso planteado se trata de un *factor de capitalización*, pero si la incógnita hubiese sido c_1 sería un *factor de contracapitalización*.

Con leyes de descuento, se tendrían *factores de descuento y de contradescuento*. Los factores son *magnitudes derivadas* de las leyes financieras. Los factores y otras las magnitudes derivadas no se estudiarán aquí, buscando un enfoque práctico. Como se ha comprobado en el ejemplo, basta plantear la ecuación que surge de aplicar el criterio de equivalencia y despejar la magnitud deseada. Solamente se estudiarán las magnitudes derivadas más significativas.

2.1.6. Magnitudes derivadas de las leyes financieras

Interés y Descuento:

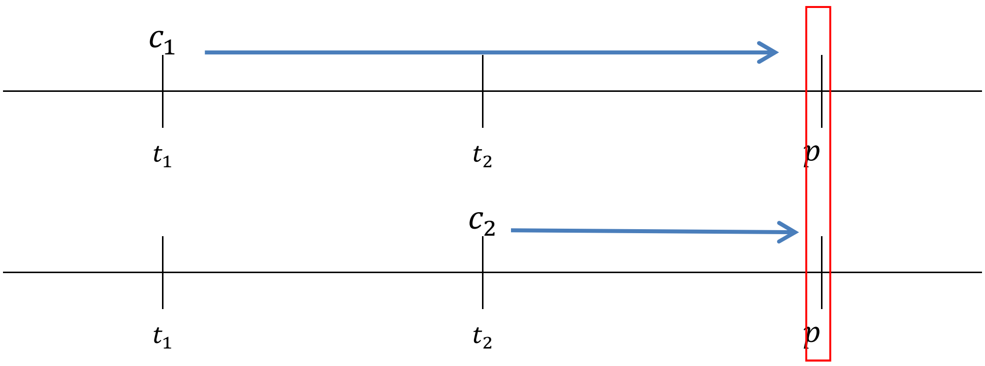
Dados dos capitales (c_1, t_1) y (c_2, t_2), con $t_1 < t_2$, equivalentes con un $p \geq t_2$, y una ley de capitalización dada, $L(z)$:

$$c_1\, L(z_1) = c_2\, L(z_2) \qquad \text{donde} \qquad z_1 = p - t_1 \qquad z_2 = p - t_2$$

se denomina *interés* a la variación en la cuantía debida al cambio de vencimiento:

$$I = c_2 - c_1$$

El interés se define para una equivalencia con ley financiera de capitalización ($p \geq t_2 \geq t_1$):



$$I = c_2 - c_1$$

El descuento se define en los casos en los que la equivalencia se ha establecido con una ley financiera de descuento ($p \leq t_1 \leq t_2$)

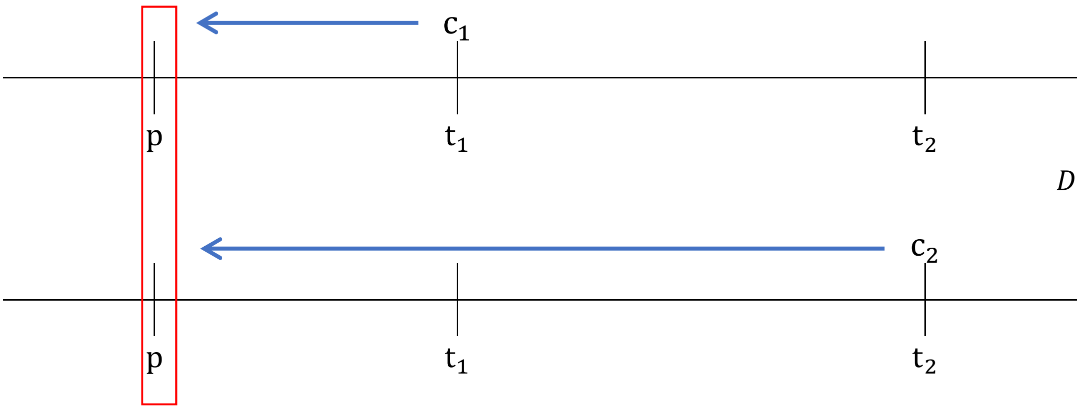
Dados dos capitales (c_1, t_1) y (c_2, t_2), con $t_1 < t_2$, equivalentes con un $p \leq t_1$, y una ley de descuento dada, $A(z)$:

$$c_1\, A(z_1) = c_2\, A(z_2) \qquad \text{donde} \qquad z_1 = t_1 - p \qquad z_2 = t_2 - p$$

se denomina *descuento* a la variación en la cuantía debida al cambio de vencimiento:

$$D = c_2 - c_1$$

Puede observarse que el interés y el descuento tienen definiciones análogas. La diferencia está en el tipo de ley que se utiliza para establecer la equivalencia financiera.



$$D = c_2 - c_1$$

De acuerdo con el principio de subestimación de las necesidades futuras, el capital que vence después tendría siempre una cuantía mayor que el que vence antes. Por esta razón, el interés y el descuento serán positivos, de acuerdo con este principio.

Nótese que, tanto el interés como el descuento se miden en unidades monetarias, puesto que se obtienen como una diferencia entre cuantías.

Obsérvese que el interés y el descuento son una primera aproximación a la rentabilidad o coste de un intercambio financiero. Pero no sería una buena medida, pues es necesario medir la variación de cuantía por unidad de cuantía y por unidad de tiempo.

Tanto:

Se llamará *tanto* a la variación de cuantía, debida a la variación en el vencimiento, por unidad de cuantía y por unidad de tiempo.

Un ejemplo consistiría en indicar que, al invertir un capital durante un tiempo, la cuantía ha aumentado un 2% de la cuantía inicial por cada año. Diríamos que el tanto es 0,02.

Existen distintos tipos de tanto, pero no estudiaremos esta diversidad. El tanto será una buena medida de rentabilidad o coste de una operación. Para comparar dos operaciones a través del tanto será necesario utilizar tantos homogéneos para ellas; inicialmente puede parecer complicado, puesto que no se estudian los distintos tipos, pero el problema tendrá sencilla solución.

2.1.7. Leyes sumativas y multiplicativas

Para terminar la sección de estudio general de leyes financieras, se comentará una segunda "clasificación"[1] de las leyes financieras que distingue entre ***leyes sumativas y multiplicativas*.** Sin plantear estos conceptos con rigor podemos indicar que las leyes sumativas no acumulan los intereses, mientras que sí lo harán las leyes multiplicativas. Se tratará de provocar la intuición de esta diferencia con un ejemplo.

- Sea la ley financiera $L(z) = 1 + 0{,}1\,z$, con $z = p - t \geq 0$.

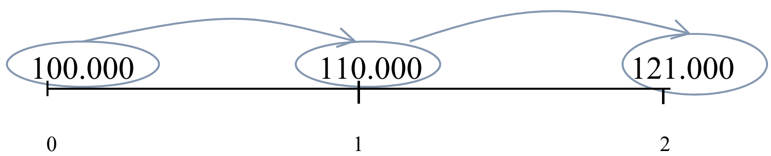
En primer lugar, llevaremos el capital $(100.000, 0)$ al punto $p = 1$, y se obtiene:

$$100.000\ \ (1 + 0{,}1) = 110.000 \Rightarrow \text{Interés} = 10.000$$

A continuación, llevamos el capital obtenido (110.000,1) a p =2:

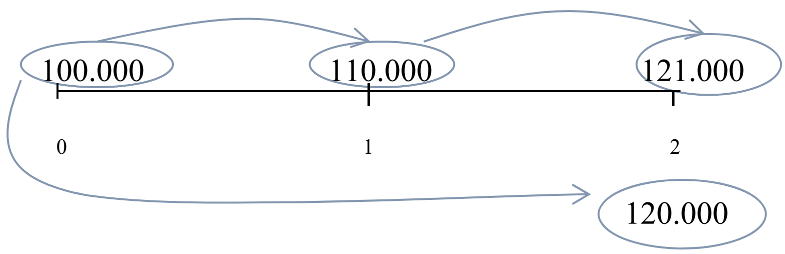
$$110.000 \cdot (1 + 0{,}1) = 121.000 \Rightarrow \text{Interés} = 11.000$$

Podemos observarlo gráficamente:



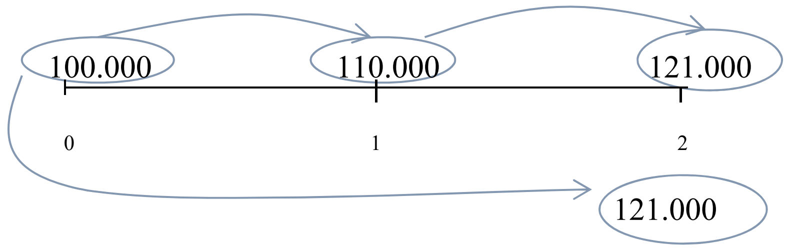
Si llevamos directamente el capital $(100.000, 0)$ hasta $p = 2$, queda:

$$100.000 \cdot (1 + 0{,}1.2) = 120.000 \Rightarrow \text{Interés} = 20.000$$



[1] En sentido estricto no puede decirse que sea una clasificación, puesto que hay leyes que no son ni sumativas ni multiplicativas.

- Podemos repetir ahora el ejercicio con la ley $L(z) = (1 + 0{,}1)^z$ con $z = p - t \geq 0$, y observamos que queda:



La primera ley no acumula los intereses, es sumativa: los intereses son la suma de los que se obtendrían teniendo un capital de 100.000€ el primer periodo, y un capital de 100.000€ el segundo periodo. En cambio, la segunda es multiplicativa, el capital final es el mismo que se obtiene si transcurrido un periodo, acumulamos los intereses generados al capital, de forma que puedan generar nuevos intereses.

En general se tenderá a utilizar leyes sumativas a corto plazo, y multiplicativas a largo.

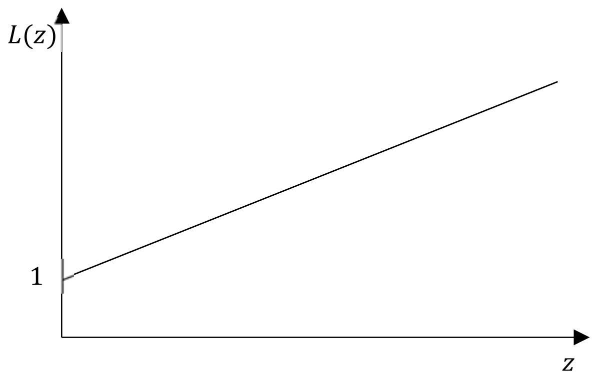
2.2. Leyes de capitalización que se utilizan en la práctica

2.2.1. Ley financiera de capitalización simple

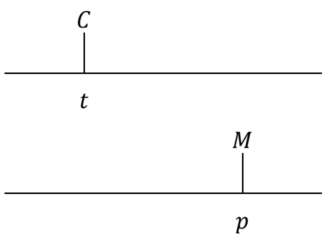
Su expresión matemática es la siguiente:

$$\boxed{L(z) = 1 + iz, \text{ con } z = p - t \geq 0}$$

Se trata de una ley sumativa que se utiliza normalmente para operaciones a corto plazo. Formalmente no habría ningún problema para aplicarla a largo plazo.



Su aplicación más inmediata es la de facilitar el montante que resulta de capitalizar durante z periodos un capital financiero.



$(C, t) \rightarrow p$

$M = C \cdot (1 + iz)$, con $z = p - t$

Los intereses generados son: $I = M - C$

$I = C \cdot (1 + iz) - C = C\,i\,z$

La expresión de los intereses es muy sencilla (ley sumativa)

La ley depende de un parámetro, que se representa por i y tiene significado de tanto.

En esta ley es sencillo intuir este significado. Se había definido el tanto como la diferencia de cuantía entre capitales equivalentes (en este caso interés) por unidad de cuantía y por unidad de tiempo de referencia. Vemos que, efectivamente, si dividimos la expresión de los intereses entre la cuantía inicial y el tiempo transcurrido entre los dos capitales, obtenemos el valor de i.

$$\frac{I}{Cz} = \frac{Ciz}{Cz} = i$$

La primera consecuencia de saber que es un tanto es que mide la rentabilidad o el coste de la operación pactada con esta ley.

La segunda consecuencia es que irá referido a un periodo de tiempo y es necesario que exista coherencia entre este periodo y la unidad en que se mide el tiempo interno, z.

Si no hay aclaraciones adicionales, se entiende que el tanto es anual y z se medirá en años.

Si el tanto no es anual, se representará por i_m , donde m se denomina frecuencia de fraccionamiento e indica el número de veces que el periodo está contenido en un año. Así i_{12} representaría un tanto mensual, i_2, un tanto semestral e i_4, un tanto trimestral.

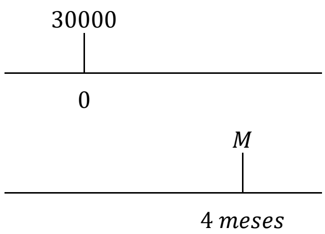
Para que exista coherencia, si se trabaja con un tanto mensual, z tendrá que medirse en meses, si se trabaja con un tanto semestral, en semestres, etc.

Veamos algún ejemplo para ilustrar la coherencia necesaria entre el periodo al que va referido el tanto y la unidad de medida del tiempo interno.

- Con la ley financiera de capitalización simple, obtener el montante y los intereses que produce:

- Un capital de treinta mil euros colocado durante 4 meses al 1,5% mensual.

$L(z) = 1 + iz$, con $z = p - t$, con i_{12}= 0,015 (por lo que z vendrá medido en meses)

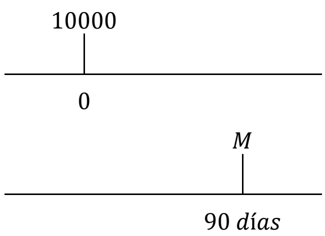


$M = 30000 \cdot (1 + 0{,}015.4) = 31800$

Los intereses generados son: $I = 31800 - 30000 = 1800$

- Un capital de diez mil euros colocados al 6% anual durante 90 días.

$L(z) = 1 + iz$, con $z = p - t$, con i= 0,06 (por lo que z vendrá medido en años)



Tenemos el tiempo expresado en días y lo necesitamos en años.
Para pasar de días a años, pueden pactarse varios convenios.
Si no hay mayor aclaración, lo sensato parecería dividir los días entre 365.
Este convenio suele denominarse $\frac{Actual}{365}$
(Actual se interpreta como nº de días reales)

$M = 10000 \cdot \left(1 + 0{,}06.\frac{90}{365}\right)$ = 10147,95
Los intereses generados son: $I = 10147{,}95 - 10000$ = 147,95

Al pasar los días a años, puede tenerse en cuenta si el año es bisiesto, en caso de que se disponga de dicha información. Este convenio suele denominarse $\frac{Actual}{Actual}$.

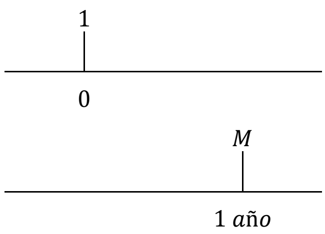
Hay un tercer criterio que se ha utilizado tradicionalmente, que consiste en dividir los días reales entre 360. No se ajusta a la realidad, pero todavía se utiliza en ocasiones. Se denomina $\frac{Actual}{360}$. Este criterio se denomina, en ocasiones, *año comercial*, frente a los anteriores que se conocen como *año civil*. Nosotros haremos uso del *año comercial* sólo cuando sea necesario, porque se haya pactado expresamente o porque estemos imitando un cálculo en el que se utiliza este convenio.

Puede ocurrir que nos den la información de un tanto anual y a nosotros nos resultase más cómodo trabajar, por ejemplo, con un tanto mensual. O, que nos dieran, por ejemplo, la información de un tanto semestral y nos resultase más cómodo trabajar con un tanto anual. Para estas situaciones, presentaremos el concepto de tantos equivalentes.

Diremos que dos tantos son equivalentes cuando están referidos a periodos diferentes de tiempo, pero dan lugar a las mismas equivalencias y, por tanto, iguales montante e intereses.

Para cada ley financiera, estudiaremos qué relación tiene que existir entre dos tantos para que sean equivalentes. Para obtenerlo, utilizaremos la definición, esto es, exigiremos que, al capitalizar con ellos, se obtenga el mismo montante. Trabajaremos siempre con el caso más sencillo, el de capitalizar 1€ durante un año. Puede demostrarse que la relación obtenida sería la misma trabajando con cualquier otra cuantía y cualquier otro periodo de tiempo.

Comenzaremos por un caso particular, buscando la relación entre el tanto anual y el tanto mensual para que sean equivalentes con la ley financiera de capitalización simple.



Obtengamos, en primer lugar, el montante si se trabaja con el tanto anual

$L(z) = 1 + iz$, con $z = p - t$, medido en años

$M = 1 \cdot (1 + i \cdot 1) = 1 + i$

Con el tanto mensual $L(z) = 1 + i_{12}z$, con $z = p - t$, medido en meses

$M = 1 \cdot (1 + i_{12} \cdot 12) = 1 + i_{12} \cdot 12$

Ahora, exigimos que los montantes obtenidos sean iguales, para los tantos sean equivalentes:

$$1 + i = 1 + i_{12} \cdot 12$$

Simplificando, tenemos:

$$i = i_{12} \cdot 12 \iff i_{12} = \frac{i}{12}$$

Esto es, con la ley financiera de capitalización simple, por ejemplo, sería indiferente trabajar con un tanto anual del $i = 0{,}06$, que con un tanto mensual $i_{12} = 0{,}005$.

Buscaremos ahora la **relación entre el tanto anual $\boldsymbol{i}$ y el tanto $\boldsymbol{i_m}$, para cualquier valor de m, para que estos tantos sean equivalentes con ley financiera de capitalización simple.**

Como en nuestro caso anterior, proyectamos 1€ durante un año con los dos tantos y exigimos montantes iguales.

Si se trabaja con el tanto anual, $L(z) = 1 + iz$, con $z = p - t$, medido en años

$$M = 1 + i$$

Con el tanto i_m, $L(z) = 1 + i_m z$,

con $z = p - t$, medido en m *-ésimos* de año (meses, si m=12, semestres, si m =2,…)

$$M = 1 + i_m \cdot m$$

Por último, exigimos que los montantes sean iguales y simplificamos, con lo que obtenemos la relación buscada:

$$\boxed{1 + i = 1 + i_m \cdot m \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{i = i_m \cdot m} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{i_m = \frac{i}{m}}}$$

Para ilustrar la relación, vamos a capitalizar 60.000€ durante seis meses, con la ley financiera de capitalización simple y un tanto anual $i = 0{,}06$.

Podríamos trabajar directamente con el tanto anual y el tiempo en años

$L(z) = 1 + i.z$, con $z = p - t$, con z en años.

M = 60000 $\left(1 + 0{,}06\ \frac{6}{12}\right)$ = 61800

En segundo lugar, se trabajará con el tanto mensual. El tanto mensual equivalente al tanto anual dado será $i_{12} = \frac{0{,}06}{12} = 0{,}005$

$L(z) = 1 + i_{12}.z$, con $z = p - t$, con $i_{12} = 0{,}005$

M = 60000 $(1 + 0{,}005\ \cdot 6)$=61800

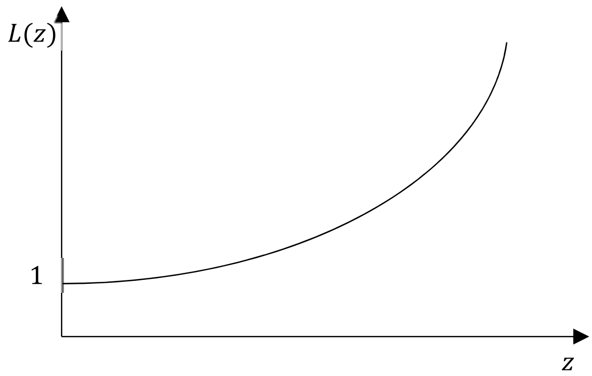
Tal y como esperábamos, el montante obtenido es el mismo.

2.2.2. Ley financiera de capitalización compuesta

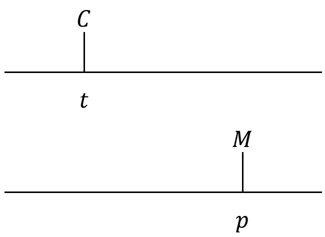
Su expresión matemática es la siguiente:

$$\boxed{L(z) = (1+i)^z, \text{ con } z = p - t \geq 0}$$

Se trata de una ley multiplicativa cuya aplicación fundamental es formalizar el equilibrio en las operaciones a largo plazo. Formalmente no habría problema en aplicarla a corto plazo.



Su aplicación más inmediata es la de facilitar el montante que resulta de capitalizar durante z periodos un capital financiero.



$(C, t) \to p$

$M = C \cdot (1+i)^z$, con $z = p - t$

Los intereses generados son: $I = M - C$

$I = C \cdot (1+i)^z - C = C \cdot [(1+i)^z - 1]$

La expresión de los intereses no es tan sencilla como en las leyes sumativas. No es necesario recordarla.

La ley depende de un parámetro, que se representa por i y tiene significado de tanto. En este caso, ya no se intuye esta interpretación como con la ley financiera de capitalización simple.

Sabemos que, por ser un tanto, el valor de i da una medida de la rentabilidad o el coste de la operación pactada con esta ley.

Sabemos también que el tanto va referido a un periodo de tiempo y es necesario que exista coherencia entre este periodo y la unidad en que se mide el tiempo interno, z. Como ocurrirá en todas las leyes financieras, si no hay aclaraciones adicionales, se entiende que el tanto es anual y z se medirá en años. Si el tanto no es anual, se representará por i_m, donde m se denomina frecuencia de fraccionamiento e indica el número de veces que el periodo está contenido en un año.

Al igual que en la ley de capitalización simple, es interesante conocer qué relación tiene que existir entre dos tantos para que sean equivalentes. Para obtenerla seguiremos el procedimiento ya conocido. Exigiremos que, al capitalizar 1€ durante un año con los dos tantos, se obtenga el mismo montante.

Comenzaremos por un caso particular, buscando la relación entre el tanto anual y el tanto semestral para que sean equivalentes con la ley financiera de capitalización compuesta.

Obtengamos, en primer lugar, el montante si se trabaja con el tanto anual

$L(z) = (1+i)^z$, con $z = p - t$, medido en años

$M = 1 \cdot (1+i)^1 = 1 + i$

Con el tanto semestral $L(z) = (1+i_2)^z$, con $z = p - t$, medido en semestres

$M = 1 \cdot (1+i_2)^2 = (1+i_2)^2$

Por último, exigimos que el resultado sea el mismo: $\mathbf{1 + \boldsymbol{i} = (1 + \boldsymbol{i_2})^2}$

Si, conocido el tanto i_2 , quisiéramos conocer el valor del tanto anual equivalente, basta despejar restando 1: $i = (1 + i_2)^2 - 1$

Si, conocido el tanto i, quisiéramos determinar el valor de i_2, debemos despejarlo de la ecuación.

En primer lugar, tomamos la raíz cuadrada de los dos miembros, o lo que es lo mismo, elevamos los dos miembros a $\frac{1}{2}$: $(1+i)^{\frac{1}{2}} = 1 + i_2$

En segundo lugar, restamos 1: $i_2 = (1+i)^{\frac{1}{2}} - 1$.

Buscaremos ahora la **relación entre el tanto anual $\boldsymbol{i}$ y el tanto $\boldsymbol{i_m}$, para cualquier valor de m, para que estos tantos sean equivalentes con ley financiera de capitalización compuesta.**

Como en nuestro caso anterior, proyectamos 1€ durante un año con los dos tantos y exigimos montantes iguales.

Si se trabaja con el tanto anual, $L(z) = (1+i)^z$, con $z = p - t$, medido en años

$$M = 1 + i$$

Con el tanto i_m, $L(z) = (1+i_m)^z$

con $z = p - t$, medido en m *-ésimos* de año (meses, si m=12, semestres, si m =2, etc.)

$$M = (1+i_m)^m$$

Por último, exigimos que los montantes sean iguales, con lo que obtenemos la relación buscada:

$$\mathbf{1 + \boldsymbol{i} = (1 + \boldsymbol{i_m})^{\boldsymbol{m}}}$$

De esta expresión, podemos despejar el tanto cuyo valor queremos conocer en función del tanto conocido:

$$i = (1+i_m)^m - 1 \qquad\qquad i_m = (1+i)^{\frac{1}{m}} - 1$$

La relación ya no es de proporcionalidad, como ocurría con la ley financiera de capitalización simple. Un tanto semestral del 1% no equivale a un tanto anual del 2%.

Efectivamente, si aplicamos la relación: $1+i = (1+\ i_2\ )^2\ \Rightarrow i = (1+\ i_2\ )^2 - 1$, tenemos:

$i = (1+\ 0{,}01\ )^2 - 1$= 0,0201

A primera vista, podría pensarse que la diferencia entre un 2% anual y un 2,01% es despreciable. Es importante saber que el error que se arrastra por un cuarto decimal en un tanto será de un orden de magnitud mucho mayor al calcular cuantías con él. El número de decimales que se deben toman en un tanto dependerán de la magnitud de las cuantías con la que se está trabajando. En cualquier caso, se recomienda no tomar menos de cuatro decimales en un tanto anual y no menos de seis decimales en un tanto referido a un periodo inferior a un año. En las cuantías en euros, como es habitual, se tomarán dos decimales.

Trataremos de intuir por qué un tanto semestral del 1% no equivale a un tanto anual del 2%. La clave está en que la ley financiera es multiplicativa y los intereses generados se acumulan para generar nuevos intereses.

Proyectemos 100.000€ durante un año en capitalización compuesta a un tanto semestral $i_2 = 0{,}01$

$M =\ 100000 \cdot (1+0{,}01)^2$= 102010€

Podríamos reescribirlo del siguiente modo:

$M =\ 100000\ \cdot\ (1+0{,}01).(1+0{,}01)$

Y admite la siguiente interpretación:

$100000\cdot(1+0{,}01)$= 101000€ sería el montante alcanzado al final del primer semestre. Se habrían generado unos intereses de 1000€, un 1% de la cuantía inicial, tal y como indicaba el tanto semestral.

Sustituimos ahora la cuantía que obtuvimos al final del primer semestre.

$M =\ 100000 \cdot (1+0{,}01)\cdot(1+0{,}01)$ = 101000 · $(1+0{,}01)$=101000 + 101000 · 0,01= 102.010

Observamos que, en el segundo semestre, se han generado unos intereses del 1%, pero no sobre la cuantía inicial, sino sobre la cuantía que había al final del primer semestre. Por tanto, estos intereses son más de un 1% si se toma como referencia la cuantía inicial y, finalmente, un 1% semestral equivale a un tanto anual superior al 2%.

La relación entre tantos equivalentes con la ley financiera de capitalización no se intuye con la misma facilidad que la proporcionalidad de leyes simples. Si a una persona sin conocimientos de matemática financiera le indican que le van a cobrar unos intereses del 1% al semestre y, finalmente, le cobran más de un 2%, probablemente piense que le han engañado. Tampoco entendería bien que le ofrecieran pagarle un interés del 2,01% al año si luego recibe un 1% al semestre. Pensaría que la información no era clara y el 0,01% había desaparecido.

Cuando una Entidad informa sobre las operaciones, tienen que incluir, entre otra información, un tanto anualizado de manera proporcional, como si se estuviera trabajando en capitalización simple. Tiene la ventaja de que será comprensible para quienes no tienen conocimientos de matemática financiera, pero el resultado no es un tanto que pueda sustituirse en la ley. Se denomina tanto nominal (anual) capitalizable por *m-ésimos* de año y se representa por $J(m)$.

En el ejemplo en el que estábamos trabajando, con $i_2 = 0{,}01$, valor del tanto nominal capitalizable por semestres es $J(2) = 2 \cdot 0{,}01 = 0{,}02$. El tanto nominal no puede sustituirse en la ley ni mide rentabilidad o coste. Estas dos funciones son cumplidas por el tanto i, que en este caso toma el valor 0,0201. La función que cumple el tanto nominal es informar. Si un cliente, sin conocimientos financieros, recibe la operación de que su operación ser realzará a un tanto nominal anual del 2% capitalizable (o también se puede decir pagadero) por semestres, entenderá inmediatamente un 1% semestral. También lo comprendería un cliente con conocimientos financieros, porque conoce la definición de tanto nominal.

Como se ha indicado, el tanto nominal no es una medida rentabilidad ni coste. Para ilustrarlo, supongamos que, para una operación dada, podemos elegir entre que nos apliquen un tanto nominal (anual) capitalizable por semestres del 2%, esto es $J(2) = 0{,}02$, o un tanto nominal (anual) capitalizable por trimestres del 2%, es decir $J'(4) = 0{,}02$.

En primer lugar, debemos tener claro que, dado que no es una medida de coste o rentabilidad, el hecho de que tomen el mismo valor no es significativo. Debemos obtener el valor del tanto anual que corresponde a cada caso.

Sabemos que $J(2) = 2i_2$, de donde, $i_2 = \frac{J(2)}{2} = \frac{0{,}02}{2} = 0{,}01$

El tanto anual equivalente, se obtendrá a partir de la relación entre tantos equivalentes de capitalización compuesta: $1 + i = (1 + i_2)^2$, de dónde:

$$i = (1 + i_2)^2 - 1 = (1 + 0{,}01)^2 - 1 = 0{,}0201$$

Partimos ahora de la definición del tanto nominal (anual) capitalizable por trimestres, $J'(4) = 4i'_4$, de donde, $i'_4 = \frac{J'(4)}{4} = \frac{0{,}02}{4} = 0{,}005$

El tanto anual equivalente, se obtendrá a partir de la relación entre tantos equivalentes de capitalización compuesta: $1 + i' = (1 + i'_4)^4$, de dónde:

$$i' = (1 + i'_4)^4 - 1 = (1 + 0{,}01)^2 = 0{,}02015$$

Vemos que el tanto anual que corresponde a $J'(4) = 0{,}02$ es mayor que el que corresponde a $J(2) = 0{,}02$. Por lo tanto, si se tratase de una operación de inversión, sería recomendable elegir $J'(4) = 0{,}02$, al que correspondería un tanto anual $i' = 0{,}02015$; mientras que, para una operación de financiación, debería elegirse el tanto e $J(2) = 0{,}02$, al que correspondería un tanto $i = 0{,}0201$.

Obsérvese un pequeño detalle de notación. Dado que los dos tantos nominales iniciales no iban a conducir al mismo tanto anual, en el segundo se ha incluido una "prima" en la notación, que se ha mantenido en toda la colección de tantos equivalentes. Si no se hubiera incorporado, habríamos llegado a dos tantos anuales diferentes que tendrían el mismo nombre, lo que habría resultado confuso. Si en lugar de dos colecciones de tantos equivalentes, hubiera tres, podrían utilizarse dos símbolos, y tener: i, i' , i'', y así, sucesivamente. Podría utilizarse otro símbolo para diferenciarlos, pero no deberían ser subíndices numéricos, ya que representan frecuencias de fraccionamiento.

Para cerrar el concepto de tanto nominal (anual) capitalizable por $m - ésimos$ de año, recordamos que se define, para la ley financiera de capitalización compuesta del siguiente modo.

$$J(m) = m\, i_m$$

No puede sustituirse en la ley ni mide rentabilidad o coste. Su única utilidad es dar la información sobre el tanto i_m, que puede obtenerse, a partir de la definición, como $i_m = \frac{J(m)}{m}$.

Luego, del tanto nominal, lo importante es conocer su definición. Hay algunos detalles que conviene recordar.

El primero es que un tanto nominal siempre es anual, y da igual que se indique o no. Es lo mismo hablar de tanto nominal anual capitalizable por $m - ésimos$ de año o simplemente de tanto nominal capitalizable por $m - ésimos$ de año. Por esa razón, se ha escrito anual entre paréntesis.

No existe ningún tanto nominal con frecuencia $m = 1$. Coincidiría con el tanto i, por lo que no tendría ninguna utilidad.

Cuando se da el dato del tanto nominal aplicado a una operación y no se indica la frecuencia de fraccionamiento, hay que entender que es la frecuencia de fraccionamiento que tenga la operación. Por ejemplo, si se tratase de un préstamo mensual, nos estarían dando $J(12)$.

Recuérdese que, con la ley financiera de capitalización simple no se definen tantos nominales. Su necesidad ha surgido con la ley compuesta, por el hecho de ser multiplicativa.

2.3. Leyes de descuento que se utilizan en la práctica

2.3.1. Ley financiera de descuento simple comercial

Su expresión matemática es la siguiente:

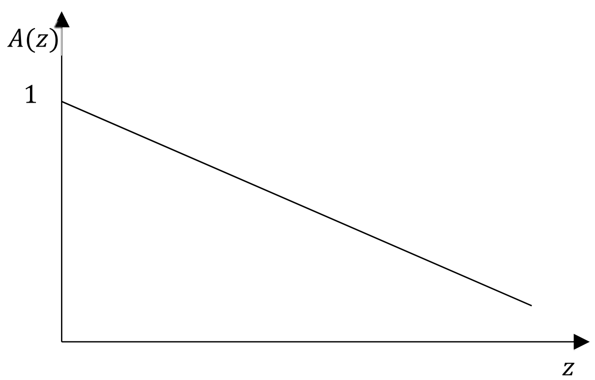
$$\boxed{A(z) = 1 - dz, \text{ con } z = t - p,\ 0 \leq z < \frac{1}{d}}$$

Como en todas las leyes financieras, el tiempo interno se define de modo que sea no negativo. En esta ley el tiempo interno tiene una restricción adicional. No puede superar el valor $\frac{1}{d}$, para que la ley no tome valores negativos.

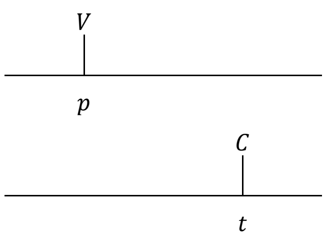
Para reflexionar:

Dependiendo de los autores, puede verse esta restricción estricta $\left(z < \frac{1}{d}\right)$ o no $\left(z \leq \frac{1}{d}\right)$. Si no es estricta, se acepta que la ley financiera pueda tomar valor nulo. Es interesante pensar en qué significaría. Si te ofrecen regalarte un euro dentro de mucho tiempo, ¿Cuánto valdría ahora para ti? ¿Y si te regalaran 100.000€ dentro de mucho tiempo? Recuerda que el valor de los 100.000€ debe obtenerse multiplicando el valor de 1€ por 100.000.

Se trata de una ley sumativa que se utiliza normalmente para operaciones a corto plazo (por lo que la restricción $z < \frac{1}{d}$ no genera problema.



Su aplicación más inmediata es la de facilitar el valor descontado que resulta de descontar durante z periodos un capital financiero.



$(C, t) \rightarrow p$

$V = C \cdot (1 - dz)$, con $z = t - p$

El descuento será: $D = C - V$

$D = C - C \cdot (1 - dz) = Cd\,z$

La expresión del descuento es muy sencilla

(Recuerda a capitalización simple. ley sumativa.)

La ley depende de un parámetro, que se representa por d y tiene significado de tanto. Como ocurría en la ley financiera de capitalización simple, con esta ley es sencillo intuir este significado. Se había definido el tanto como la diferencia de cuantía entre capitales equivalentes (en este caso descuento) por unidad de cuantía (en este caso cuantía final) y por unidad de tiempo de referencia. Vemos que, efectivamente, si dividimos la expresión del descuento entre la cuantía del capital y el tiempo de descuento, obtenemos el valor de d.

$$\frac{D}{Cz} = \frac{Cdz}{Cz} = d$$

Como sabemos, la primera consecuencia de saber que es un tanto es que mide la rentabilidad o el coste de la operación pactada con esta ley. Y la segunda consecuencia es que irá referido a un periodo de tiempo y es necesario que exista coherencia entre este periodo y la unidad en que se mide el tiempo interno, z. Si no hay aclaraciones adicionales, se entiende que el tanto es anual y z se medirá en años. Si el tanto no es anual, se representará por d_m, donde m se denomina frecuencia de fraccionamiento e indica el número de veces que el periodo está contenido en un año. Así d_{12} representaría un tanto mensual, d_2, un tanto semestral e d_4, un tanto trimestral, de manera análoga a la estudiada en leyes anteriores. Para que exista coherencia, si se trabaja con un tanto mensual, z tendrá que medirse en meses, si se trabaja con un tanto semestral, en semestres, etc.

Buscaremos ahora la **relación entre el tanto anual d y un tanto d_m, para que estos tantos sean equivalentes con ley financiera de descuento simple comercial.**

Como en los casos anteriores, proyectamos 1€ durante un año con los dos tantos y exigimos sustitutos iguales, en este caso, iguales valores descontados.

Si se trabaja con el tanto anual, $A(z) = 1 - dz$, con $z = t - p$, medido en años

$$V = 1 - d$$

Con el tanto d_m, $A(z) = 1 - d_m z$,

con $z = t - p$, medido en m *-ésimos* de año (meses, si m=12, semestres, si m =2,…)

$$V = 1 - d_m \cdot m$$

Por último, exigimos que los valores descontados sean iguales y simplificamos, con lo que obtenemos la relación buscada:

$$\boxed{1 - d = 1 - d_m \cdot m \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{d = d_m \cdot m} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{d_m = \frac{d}{m}}}$$

Podemos observar la analogía entre los resultados obtenidos con descuento simple comercial y con capitalización simple. Cabe preguntarse si estas leyes son tan parecidas que llevan a las mismas equivalencias. Se sugiere resolver el siguiente ejercicio para reflexionar.

Cierta empresa cobra a sus clientes con letras a 6 meses de diez mil euros., que inmediatamente descuenta en su banco a un tanto de descuento comercial del 10% anual. Se pide:

a) Calcular la cuantía, x, que recibe la empresa al descontar una letra.

b) En un momento la empresa necesita liquidez, pero no tiene papel comercial para descontar. Solicita entonces un préstamo por la cuantía x, a 6 meses, en capitalización simple y a un tanto de interés del 10% anual. ¿Debe su banco aceptar esta oferta?

2.3.2. Ley financiera de descuento compuesto

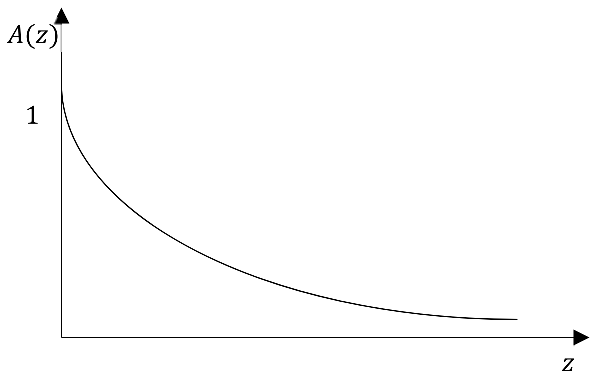
La expresión matemática que se utiliza en la práctica es la siguiente:

$$\boxed{A(z) = (1+i)^{-z}, \text{ con } z = t - p \geq 0}$$

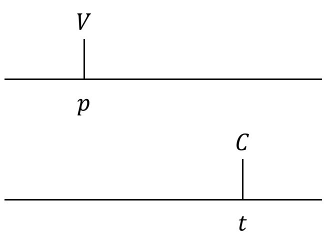
Como ocurría con las leyes estudiadas anteriormente, el parámetro tiene significado de tanto. Cabe resaltar que es posible dar otras expresiones de la ley en función de otros tantos (recordemos que hay diferentes tipos de tantos, aunque se ha estudiado esta tipología). Con fines ilustrativos, se da otra expresión de la ley, que no se aplica habitualmente en la práctica para formalizar las operaciones financieras y, por tanto, no se utilizará en esta asignatura.

$$A(z) = (1-d)^{z}, \text{ con } z = t - p \geq 0$$

Se trata de una ley multiplicativa cuya aplicación fundamental es formalizar el equilibrio en las operaciones a largo plazo. Formalmente no habría problema en aplicarla a corto plazo.



Su aplicación más inmediata es la de facilitar el valor descontado que resulta de proyectar durante z periodos un capital financiero.



$(C, t) \rightarrow p$

$V = C \cdot (1+i)^{-z}$, con $z = t - p$

El valor del descuento será: $D = C - V$

$D = C - C \cdot (1+i)^{-z} = C \cdot [1 - (1+i)^{-z}]$

Sabemos que, por ser un tanto, el valor de i da una medida de la rentabilidad o el coste de la operación pactada con esta ley y que el tanto va referido a un periodo de tiempo. Es necesario que exista coherencia entre este periodo y la unidad en que se mide el tiempo interno, z.

Como ocurrirá en todas las leyes financieras, si no hay aclaraciones adicionales, se entiende que el tanto es anual y z se medirá en años. Si el tanto no es anual, se representará por i_m, donde m es la frecuencia de fraccionamiento.

A continuación, buscaremos qué relación tiene que existir entre dos tantos para que sean equivalentes. Para obtenerla seguiremos el procedimiento ya conocido. Exigiremos que, al proyectar 1€ durante un año con los dos tantos, se obtenga el mismo sustituto.

Si se trabaja con el tanto anual, $A(z) = (1+i)^{-z}$, con $z = t - p$, medido en años

$$V = (1+i)^{-1}$$

Con el tanto i_m, $A(z) = (1+i_m)^{-z}$

con $z = t - p$, medido en m *-ésimos* de año (meses, si m=12, semestres, si m =2, etc.)

$$V = (1+i_m)^{-m}$$

Exigimos que los valores descontados sean iguales, con lo que obtenemos la relación buscada:

$$(1+i)^{-1} = (1+i_m)^{-m} \Leftrightarrow \frac{1}{1+i} = \frac{1}{(1+i_m)^m} \Leftrightarrow 1+i = (1+i_m)^m$$

Observamos que se obtiene la misma expresión que con la ley de capitalización compuesta y recordamos cómo despejar el tanto cuyo valor queremos conocer en función del tanto conocido:

$$i = (1+i_m)^m - 1 \qquad\qquad i_m = (1+i)^{\frac{1}{m}} - 1$$

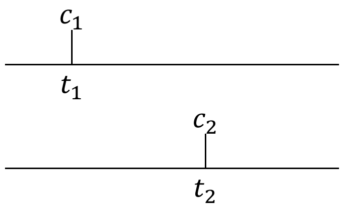
Al igual que con capitalización compuesta, la información de un tanto i_m puede facilitarse a través del tanto nominal (anual) capitalizable por $m - ésimos$ de año:

$$J(m) = m\, i_m$$

Recordamos que nunca puede sustituirse en la ley ni mide rentabilidad o coste. Su única utilidad es dar la información sobre el tanto i_m, que puede obtenerse, a partir de la definición, como $i_m = \frac{J(m)}{m}$.

Para terminar con el estudio de la ley financiera de descuento compuesto, vamos a compararla con la ley financiera de capitalización compuesta, con la cual se ha observado similitudes. Para comparar las dos leyes, partiremos de un par de capitales y observaremos la relación que debe darse entre ellos para que sean equivalentes con cada una de las leyes para un valor concreto del tanto.

Dados dos capitales (c_1, t_1) y (c_2, t_2), con $t_1 < t_2$, vamos a plantear la equivalencia entre ellos con la ley financiera de capitalización compuesta y con la ley financiera de descuento compuesto. En ambos casos, trabajaremos para un valor del tanto i.



Si trabajamos con capitalización compuesta, fijaremos $p = t_2$ y, para que los capitales sean equivalentes, deberá cumplirse la ecuación:

$$c_1\ (1+i)^{(t_2-t_1)} = c_2$$

Si trabajamos con descuento compuesto, fijaremos $p = t_1$ y, para que los capitales sean equivalentes, deberá cumplirse la ecuación:

$$c_1 = c_2\ (1+i)^{-(t_2-t_1)}$$

Podemos observar que las dos ecuaciones son, de hecho, la misma. La diferencia que podemos observar es que, en el primer caso, aparece despejada la cuantía c_2, mientras que, en el segundo, aparece despejada la cuantía c_1.

El resultado obtenido es muy relevante en la matemática financiera y, a continuación, vamos a expresarlo de maneras diferentes.

Hemos comprobado que, si dos capitales son equivalentes con capitalización compuesta para un valor del tanto, son también equivalentes en descuento compuesto para el mismo valor del tanto. Podemos decir que ambas leyes conducen a las mismas equivalencias entre capitales.

Dicho de otro modo, si proyectamos un capital hacia el futuro con capitalización compuesta y, a continuación, descontamos el montante obtenido, con descuento compuesto, durante el mismo periodo de tiempo y el mismo valor del tanto, se obtiene el capital inicial.

A las parejas de leyes financieras que verifican esta propiedad se les denomina leyes conjugadas. Por lo tanto, las leyes financieras de capitalización compuesta y de descuento compuesto son leyes conjugadas.

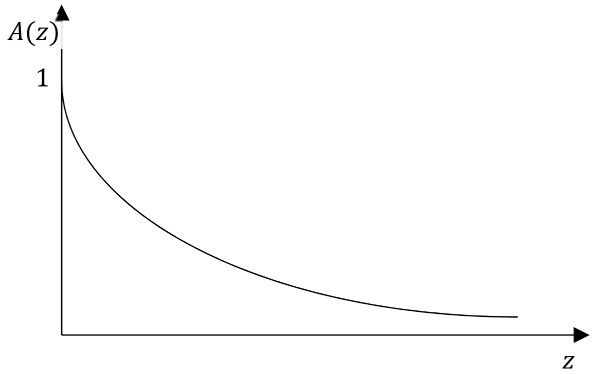
Cuestión:

¿Son leyes conjugadas las leyes financieras de capitalización simple y de descuento simple comercial? Para encontrar la respuesta se sugiere examinar la respuesta al ejercicio propuesto al final del estudio de la ley financiera de descuento simple comercial.

2.3.3. Ley financiera de descuento simple racional

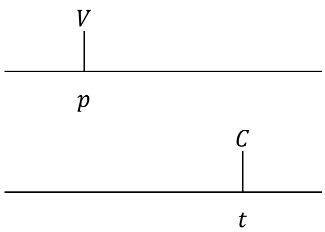
La expresión matemática que se utiliza en la práctica es la siguiente:

$$\boxed{A(z) = \frac{1}{1+iz} \quad \text{con } z = t - p \geq 0}$$



Obsérvese que la forma de su gráfica recuerda a la de la ley financiera de descuento compuesto.

Su aplicación más inmediata es la de facilitar el valor descontado que resulta de proyectar durante z periodos un capital financiero.



$(C, t) \to p \qquad V = C \cdot \frac{1}{1+iz}$ con $z = t - p$

El valor del descuento será: $D = C - V$

Vamos a desarrollar esta expresión (que no es necesario recordar)

$$D = C - C \cdot \frac{1}{1+iz} = C \cdot \left[1 - \frac{1}{1+iz}\right] = C \cdot \left[\frac{1+iz-1}{1+iz}\right] = \frac{Ciz}{1+iz}$$

Podemos interpretar que es el interés de capitalización simple descontado

El parámetro i tiene significado de tanto y da una medida de la rentabilidad o el coste de la operación pactada con esta ley. Como sabemos, el tanto va referido a un periodo de tiempo y es necesario que exista coherencia entre este periodo y la unidad en que se mide el tiempo interno, z.

Como ocurrirá en todas las leyes financieras, si no hay aclaraciones adicionales, se entiende que el tanto es anual y z se medirá en años. Si el tanto no es anual, se representará por i_m, donde m es la frecuencia de fraccionamiento.

A continuación, buscaremos qué relación tiene que existir entre dos tantos para que sean equivalentes. Para obtenerla, exigiremos que, al proyectar 1€ durante un año con los dos tantos, se obtenga el mismo sustituto.

Si se trabaja con el tanto anual, $A(z) = \frac{1}{1+iz}$ con $z = t - p$, medido en años, $V = \frac{1}{1+i}$

Con el tanto i_m, $A(z) = \frac{1}{1+i_m z}$

con $z = t - p$, medido en m *-ésimos* de año (meses, si m=12, semestres, si m =2, etc.)

$$V = \frac{1}{1+i_m \cdot m}$$

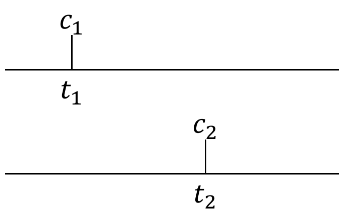
Exigimos que los valores descontados sean iguales, con lo que obtenemos la relación buscada:

$$\frac{1}{1+i} = \frac{1}{1+i_m \cdot m} \Leftrightarrow 1+i = 1+i_m \cdot m \Leftrightarrow i = m \cdot i_m$$

Observamos que se obtiene la misma expresión que con la ley financiera de capitalización simple y confirmamos que, a pesar de que la forma de la gráfica recordase a la de descuento compuesto, estamos obteniendo resultados que recuerdan a los de las leyes simples. Efectivamente, la ley financiera de descuento racional se utiliza para formalizar operaciones a corto plazo.

Para terminar con el estudio de la ley financiera de descuento simple racional, vamos a compararla con la ley financiera de capitalización simple, para tratar de observar si son leyes conjugadas. Seguiremos un procedimiento análogo al de las leyes compuestas. Partiremos de un par de capitales y observaremos la relación que debe darse entre ellos para que sean equivalentes con cada una de las leyes para un valor concreto del tanto.

Dados dos capitales (c_1, t_1) y (c_2, t_2), con $t_1 < t_2$, vamos a plantear la equivalencia entre ellos con la ley financiera de capitalización simple y con la ley financiera de descuento simple racional. En ambos casos, trabajaremos para un valor del tanto i.



Si trabajamos con capitalización simple, fijaremos $p = t_2$ y, para que los capitales sean equivalentes, deberá cumplirse la ecuación:

$$c_1 \left[1 + i \cdot (t_2 - t_1)\right] = c_2$$

Si trabajamos con descuento simple racional, fijaremos $p = t_1$ y, para que los capitales sean equivalentes, deberá cumplirse la ecuación:

$$c_1 = c_2 \frac{1}{1 + i \cdot (t_2 - t_1)}$$

Podemos observar que las dos ecuaciones son, de hecho, la misma. La diferencia que podemos observar es que, en el primer caso, aparece despejada la cuantía c_2, mientras que, en el segundo, aparece despejada la cuantía c_1. Concluimos que, efectivamente, las leyes de capitalización simple y de descuento simple racional son leyes conjugadas y llevan a las mismas equivalencias para un mismo valor del tanto.

Tema 3. Equilibrio financiero

3.1. La ecuación de equivalencia financiera

3.1.1. Criterio de comparación entre dos capitales. Selección del punto de comparación de capitales

En los temas 1 y 2, se ha trabajado con la equivalencia entre dos capitales y sabemos que dos capitales son equivalentes si tienen el mismo sustituto en el punto de comparación, p. Para proyectar los capitales hasta p utilizamos las leyes financieras. Una vez que se ha elegido la ley financiera para proyectar (incluido el valor del tanto) y el punto p hasta el cual se proyecta, la comparación es inmediata.

A continuación, vamos a dejarlo escrito de modo formal.

El criterio para la comparación es una ley financiera, $F(z)$, y un punto de comparación p.

Con este criterio, $(c_1, t_1) \sim (c_2, t_2)$ [*leemos* (c_1, t_1) *es equivalente a* (c_2, t_2)]

Si se verifica que:

$$c_1\, F(z_1) = c_2\, F(z_2)$$

donde,

$$z_1 = \begin{cases} p - t_1, \text{si } F \text{ es ley financiera de capitalización} \\ t_1 - p, \text{si } F \text{ es una ley financiera de descuento} \end{cases}$$

$$z_2 = \begin{cases} p - t_2, \text{si } F \text{ es ley financiera de capitalización} \\ t_2 - p, \text{si } F \text{ es una ley financiera de descuento} \end{cases}$$

Si dos capitales son equivalentes con un criterio dado, para dos partes (por ejemplo, dos personas) que estén de acuerdo en utilizar ese criterio, los dos capitales serían equivalentes y, por lo tanto, intercambiables.

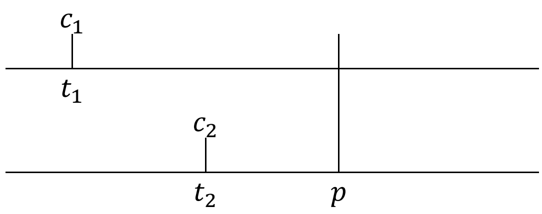
El tipo de ley con la que se pacta una operación suele estar estandarizado. Un préstamo hipotecario siempre se pacta con leyes compuestas, el descuento de efectos se pacta con la ley de descuento simple comercial, las cuentas corrientes, con capitalización simple, etc. El valor del tanto dependerá de las circunstancias y el poder negociador de las partes de la operación.

Sabemos que la elección del punto de comparación, p, depende de si estamos trabajando con una ley de capitalización o de descuento. Si se trabaja con una ley de capitalización, se fijará en el vencimiento del último capital o en un momento posterior. Mientras que, si se trabaja con una ley de descuento, se fijará en el vencimiento del primer capital o en un momento anterior.

Se intuye muy bien que dos capitales que son equivalentes con una ley, para un valor del tanto, no serán equivalentes para un valor del tanto diferente. También se intuye que dos capitales que sean equivalentes para una ley, no lo serán, en general, para una ley diferente. Ahora nos preguntamos si, dada una ley y un valor del tanto, los capitales que son equivalentes para un valor del momento de comparación p, lo serán también para un momento de comparación diferente, $p´$. Vamos a plantearlo sobre ejemplos teóricos, con un par de leyes financieras.

Sabemos que, dados dos capitales (c_1, t_1) y (c_2, t_2), con $t_1 < t_2$, equivalentes con un $p \geq t_2$, y una ley de capitalización dada, $L(z)$:

$$c_1\, L(z_1) = c_2\, L(z_2) \qquad \text{donde} \qquad z_1 = p - t_1 \qquad z_2 = p - t_2$$

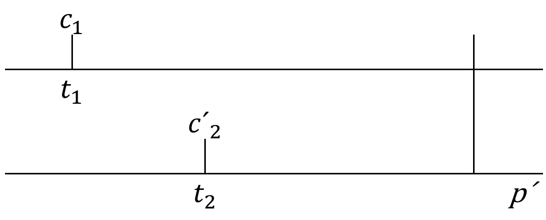


- **Si trabajamos con la ley financiera de capitalización simple**, $L(z) = 1 + iz$, con $z = p - t$, quedará:

  $$c_1\, [1 + i\,(p - t_1)] = c_2\, [1 + i\,(p - t_2)]$$

  Si, nuestra incógnita fuera c_2, despejaríamos y obtendríamos $c_2 = c_1 \frac{1+i\,(p-t_1)}{1+i\,(p-t_2)}$

  En caso de haber trabajado con un punto de proyección diferente, $p´$, el procedimiento sería análogo:



  $$c_1\, [1 + i\,(p´ - t_1)] = c´_2\, [1 + i\,(p´ - t_2)]$$

  Si, nuestra incógnita fuera $c´_2$, despejaríamos y obtendríamos $c´_2 = c_1 \frac{1+i\,(p´-t_1)}{1+i\,(p´-t_2)}$

  Podemos observar que $c´_2 \neq c_2$. Efectivamente, el factor que multiplica a c_1 para obtener la cuantía del capital equivalente depende del valor de p fijado.

La conclusión es que, con la ley financiera de capitalización simple y un valor del tanto, los capitales que son equivalentes para un valor del momento de comparación p no son equivalentes para un momento de comparación diferente, $p´$. Dicho de otro modo, con la ley financiera de capitalización simple, la equivalencia depende de dónde se fije el punto de comparación.

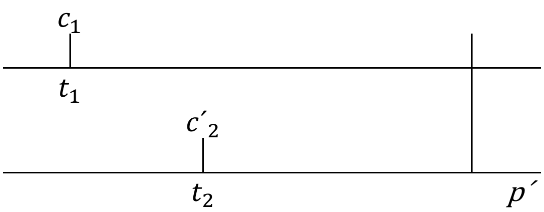
- **Si trabajamos con la ley financiera de capitalización compuesta**, $L(z) = (1+i)^z$, con $z = p - t$, quedará:

$$c_1\,(1+i\,)^{(p-t_1)} = c_2\,(1+i\,)^{(p-t_2)}$$

Si, nuestra incógnita fuera c_2, despejaríamos y obtendríamos $c_2 = c_1\,\frac{(1+i\,)^{(p-t_1)}}{(1+i\,)^{(p-t_2)}}$

Operando, $c_2 = c_1(1+i\,)^{(t_2-t_1)}$

En caso de haber trabajado con un punto de proyección diferente, $p´$, el procedimiento sería análogo:



$$c_1\,(1+i\,)^{(p´-t_1)} = c´_2\,(1+i\,)^{(p´-t_2)}$$

Si, nuestra incógnita fuera $c´_2$, despejaríamos y obtendríamos $c´_2 = c_1(1+i\,)^{(t_2-t_1)}$ Podemos observar que $c´_2 = c_2$. Efectivamente, el factor que multiplica a c_1 para obtener la cuantía del capital equivalente no depende del valor de p fijado.

La conclusión es que, con la ley financiera de capitalización compuesta y un valor del tanto, los capitales que son equivalentes para un valor del momento de comparación p también son equivalentes para un momento de comparación diferente, $p´$. Dicho de otro modo, con la ley financiera de capitalización compuesta, la equivalencia no depende de dónde se fije el punto de comparación. Obsérvese que es importante elegir un punto p y proyectar todos los capitales a ese punto, pero el resultado final es el mismo que si se hubiera elegido un punto diferente y se hubieran proyectado a él todos los capitales.

El resultado que se ha obtenido para la ley financiera de capitalización simple sería análogo si se trabajase con el resto de las leyes simples (descuento simple comercial o descuento racional). Con todas las leyes simples, las equivalencias financieras dependen de punto de comparación elegido.

También el resultado obtenido para la ley financiera de capitalización compuesta sería análogo para la ley financiera de descuento compuesto. Para las dos leyes compuestas, las equivalencias son independientes del punto de comparación elegido. Como, además, son leyes conjugadas, si dos capitales son equivalentes con capitalización compuesta para un valor del tanto, lo son para cualquier punto de comparación, tanto con capitalización compuesta como con descuento compuesto. Por lo tanto, en la práctica, es indiferente pactar una operación con capitalización compuesta o con descuento compuesto. En cualquier caso, hay que ser coherente con el tipo de ley utilizada y el punto de comparación elegido. Si se está trabajando con capitalización, se fijará p al final de la operación o después. Si se está trabajando con descuento, se fijará al comienzo de la operación, o antes.

3.1.2. Criterio de comparación entre dos conjuntos de capitales

Hasta el momento, hemos pensado en el intercambio de un capital por otro y cómo se establece la equivalencia entre ellos, fijado un criterio. Ahora generalizaremos este planteamiento al caso de dos conjuntos de capitales. De nuevo, partiremos de un criterio de proyección, formado por una ley financiera, $F(z)$ y un punto de comparación, p, y nos preguntaremos qué condición tiene que darse para que dos conjuntos de capitales sean equivalentes.

Supongamos que el primer conjunto está formado por n capitales:

$$\{(c_1, t_1), (c_2, t_2), \dots, (c_n, t_n)\}$$

y, el segundo conjunto está formado por m capitales:

$$\{(c'_1, t'_1), (c'_2, t'_2), \dots, (c'_m, t'_m)\}$$

Podemos pensar si tiene sentido una generalización inmediata: dos conjuntos de capitales son equivalentes si tienen el mismo sustituto en p.

¿Cómo obtener el sustituto en p de un conjunto de capitales?

¿Cuál sería el sustituto en p de $\{(c_1, t_1), (c_2, t_2), \dots, (c_n, t_n)\}$?

Ya sabemos obtener el sustituto de cada uno de los capitales del conjunto.

El sustituto en p de (c_1, t_1) sería $c_1\, F(z_1)$

Donde, $z_1 = \begin{cases} p - t_1, si\ F\ es\ \ ley\ financiera\ de\ capitalización \\ t_1 - p, si\ F\ es\ \ una\ ley\ financiera\ de\ descuento \end{cases}$

El sustituto en p de (c_2, t_2) sería $c_2\, F(z_2)$

Donde, $z_2 = \begin{cases} p - t_2, si\ F\ es\ \ ley\ financiera\ de\ capitalización \\ t_2 - p, si\ F\ es\ \ una\ ley\ financiera\ de\ descuento \end{cases}$

Y, el sustituto en p de (c_n, t_n) sería $c_n\, F(z_n)$

Donde, $z_n = \begin{cases} p - t_n, si\ F\ es\ \ ley\ financiera\ de\ capitalización \\ t_n - p, si\ F\ es\ \ una\ ley\ financiera\ de\ descuento \end{cases}$

Nos preguntamos ahora, ¿tendría sentido sumar las cuantías de los sustitutos en p de los capitales del conjunto?

Tenemos claro que no podemos sumar las cuantías c_1 y c_2, porque no tienen el mismo vencimiento. Sin embargo, $c_1\, F(z_1)$ tiene vencimiento p, y $c_2\, F(z_2)$ también tiene vencimiento p. Tiene sentido que, si el capital (c_1, t_1) es equivalente a la cuantía $c_1\, F(z_1)$, entregada en el momento p, y el capital (c_2, t_2) es equivalente a la cuantía $c_2\, F(z_2)$ entregada en p, entonces, el conjunto de los dos capitales sea equivalente a la suma $c_1\, F(z_1) + c_2\, F(z_2)$, en p.

Razonando de este modo, podemos llegar a la expresión del sustituto en p de un conjunto. En concreto **el sustituto en $\boldsymbol{p}$ del conjunto $\{(\boldsymbol{c_1}, \boldsymbol{t_1}), (\boldsymbol{c_2}, \boldsymbol{t_2}), \dots, (\boldsymbol{c_n}, \boldsymbol{t_n})\}$ será:**

$$\boldsymbol{c_1\, F(z_1) + c_2\, F(z_2) + \cdots + c_n\, F(z_n)}$$

Donde, $z_1 = \begin{cases} p - t_1, si\ F\ es\ \ ley\ financiera\ de\ capitalización \\ t_1 - p, si\ F\ es\ \ una\ ley\ financiera\ de\ descuento \end{cases}$

$z_2 = \begin{cases} p - t_2, si\ F\ es\ \ ley\ financiera\ de\ capitalización \\ t_2 - p, si\ F\ es\ \ una\ ley\ financiera\ de\ descuento \end{cases}$

…

$z_n = \begin{cases} p - t_n, si\ F\ es\ \ ley\ financiera\ de\ capitalización \\ t_n - p, si\ F\ es\ \ una\ ley\ financiera\ de\ descuento \end{cases}$

Como la definición del tiempo interno es muy repetitiva, para escribir menos, podemos indicar el significado del tiempo interno con la ayuda de un índice i, que va tomando los valores $1, 2, \dots, n$.

$z_i = \begin{cases} p - t_i, si\ F\ es\ \ ley\ financiera\ de\ capitalización \\ t_i - p, si\ F\ es\ \ una\ ley\ financiera\ de\ descuento \end{cases}$ para $i = 1, 2, \dots, n$

De manera análoga, **el sustituto en $\boldsymbol{p}$ del conjunto $\{(\boldsymbol{c'_1}, \boldsymbol{t'_1}), (\boldsymbol{c'_2}, \boldsymbol{t'_2}), \dots, (\boldsymbol{c'_m}, \boldsymbol{t'_m})\}$ será:**

$$\boldsymbol{c'_1\, F(z'_1) + c'_2\, F(z'_2) + \cdots + c'_m\, F(z'_m)}$$

Con $z'_j = \begin{cases} p - t'_j, si\ F\ es\ \ ley\ financiera\ de\ capitalización \\ t'_j - p, si\ F\ es\ \ una\ ley\ financiera\ de\ descuento \end{cases}$ para $j = 1, 2, \dots, m$

Una vez que sabemos obtener el sustituto en p de los capitales de un conjunto, retomamos nuestra propuesta de generalización de equivalencia financiera de dos capitales a dos conjuntos: dos conjuntos de capitales son equivalentes si tienen el mismo sustituto en p. A continuación, lo escribiremos de manera formal.

Con el criterio formado por la ley financiera $F(z)$ y el punto de comparación p,

$\{(c_1, t_1), (c_2, t_2), \dots, (c_n, t_n)\}$ ***será equivante al conjunto*** $\{(c'_1, t'_1), (c'_2, t'_2), \dots, (c'_m, t'_m)\}$

Si se verifica que:

$$c_1\, F(z_1) + c_2\, F(z_2) + \cdots + c_n\, F(z_n) = c'_1\, F(z'_1) + c'_2\, F(z'_2) + \cdots + c'_m\, F(z'_m)$$

Con $z_i = \begin{cases} p - t_i, si\ F\ es\ \ ley\ financiera\ de\ capitalización \\ t_i - p, si\ F\ es\ \ una\ ley\ financiera\ de\ descuento \end{cases}$ **para** $i = 1, 2, \dots, n$

$z'_j = \begin{cases} p - t'_j, si\ F\ es\ \ ley\ financiera\ de\ capitalización \\ t'_j - p, si\ F\ es\ \ una\ ley\ financiera\ de\ descuento \end{cases}$ **para** $j = 1, 2, \dots, m$

Esta ecuación recibe el nombre de ecuación de equivalencia financiera.

Haremos tres observaciones al respecto:

La primera es que puede utilizarse un símbolo para indicar la equivalencia entre los conjuntos y escribir $\{(c_1, t_1), (c_2, t_2), \dots, (c_n, t_n)\} \sim \{(c'_1, t'_1), (c'_2, t'_2), \dots, (c'_m, t'_m)\}$

La segunda observación es que la equivalencia entre dos capitales que se había planteado previamente es un caso particular de la ecuación de equivalencia financiera. Basta tomar dos conjuntos formados por un único capital. Esto es $n = 1$ y $m = 1$.

La tercera observación se refiere a otro caso particular interesante es aquel en el que uno de los dos conjuntos de capitales es unitario y el otro, no. Supongamos que $m = 1$. Planteamos, a continuación, este caso.

Con el criterio formado por $F(z)$ y p, $\{(c_1, t_1), (c_2, t_2), \dots, (c_n, t_n)\} \sim (c'_1, t'_1)$, si se verifica:

$$c_1\, F(z_1) + c_2\, F(z_2) + \cdots + c_n\, F(z_n) = c'_1\, F(z'_1)$$

Con $z_i = \begin{cases} p - t_i, si\ F\ es\ \ ley\ financiera\ de\ capitalización \\ t_i - p, si\ F\ es\ \ una\ ley\ financiera\ de\ descuento \end{cases}$ para $i = 1, 2, \dots, n$

$z'_1 = \begin{cases} p - t'_1, si\ F\ es\ \ ley\ financiera\ de\ capitalización \\ t'_1 - p, si\ F\ es\ \ una\ ley\ financiera\ de\ descuento \end{cases}$

En este caso, la cuantía del capital del conjunto unitario (c'_1) se denomina, en ocasiones, **suma financiera** y su vencimiento (t'_1), se puede denominar **vencimiento común**. De manera que, si se nos pide en algún momento la suma financiera o el vencimiento común de un conjunto de capitales, bastará plantear la ecuación de equivalencia financiera y despejar la incógnita correspondiente.

3.2. Equilibrio financiero de una operación financiera

Se ha definido una operación financiera como el intercambio entre dos conjuntos de capitales (con vencimientos diferentes), que se han denominado prestación y contraprestación. La primera cuestión que se debe resolver en el estudio de las operaciones financieras es cómo se determinan las cuantías y vencimientos de dichos capitales y la respuesta es la siguiente: la prestación y la contraprestación deben ser equivalentes con el criterio pactado entre las partes.

Esto significa que, con la ley financiera pactada, el valor en p de los capitales entregados por el prestamista coincida con el valor en p de los capitales entregados por el prestatario. Se dice, entonces, que se ha alcanzado el equilibrio financiero de la operación.

La formalización de este planteamiento coincidirá con la del apartado anterior.

Representamos la prestación de la operación por el conjunto de capitales $\{(c_1, t_1), (c_2, t_2), \dots, (c_n, t_n)\}$ y la contraprestación por el conjunto $\{(c\'_1, t\'_1), (c\'_2, t\'_2), \dots, (c\'_m, t\'_m)\}$.

Con el criterio pactado, formado por la ley $F(z)$ y el punto de comparación p, se alcanzará el equilibrio financiero, si se verifica la ecuación de equivalencia financiera entre la prestación y la contraprestación:

$$c_1\, F(z_1) + c_2\, F(z_2) + \cdots + c_n\, F(z_n) = c\'_1\, F(z\'_1) + c\'_2\, F(z\'_2) + \cdots + c\'_m\, F(z\'_m)$$

Con $z_i = \begin{cases} p - t_i, si\ F\ es\ \ ley\ financiera\ de\ capitalización \\ t_i - p, si\ F\ es\ \ una\ ley\ financiera\ de\ descuento \end{cases}$ para $i = 1, 2, \dots, n$

$z\'_j = \begin{cases} p - t\'_j, si\ F\ es\ \ ley\ financiera\ de\ capitalización \\ t\'_j - p, si\ F\ es\ \ una\ ley\ financiera\ de\ descuento \end{cases}$ para $j = 1, 2, \dots, m$

Obsérvese que la clave para que las cuantías y vencimientos tomen unos valores determinados está en el criterio pactado por las partes.

Como sabemos el criterio está formado por la ley financiera y el punto de comparación p. El punto de comparación suele fijarse al final de la operación, cuando se trabaja con una ley financiera de capitalización, y al comienzo de la operación, cuando se trabaja con una ley financiera de descuento.

Como ya se ha indicado, la ley aplicada suele estar estandarizada en función del tipo de operación.

Por lo tanto, la negociación entre las partes suele quedar reducida al valor del tanto. Quien tiene un objetivo de inversión perseguirá un tanto con el mayor valor posible, mientras que quien se financia buscará el menor valor para el tanto que pueda conseguir.

3.3. Tantos medios efectivos. Normativa del B.E.: TAE

3.3.1. El tanto como medida de rentabilidad o coste

El concepto de tanto se presentó como la variación de cuantía entre capitales equivalentes, por unidad de cuantía de referencia y por unidad de tiempo. Es muy útil en el estudio de las operaciones financieras porque nos facilita una medida del coste o la rentabilidad de la operación (dependiendo de que se trate de una operación de financiación o de inversión). **El tanto que se aplica para establecer el equilibrio financiero de una operación financiera debe ser acordado por las partes y se presentaría, inicialmente, como la medida de coste o rentabilidad de la operación. Sin embargo, pueden darse circunstancias bajo las cuales no lo midan correctamente.**

La primera circunstancia en la que el tanto pactado no permite medir la rentabilidad o el coste de una operación es que no sea único. Si el valor del tanto cambia a lo largo de la vida de la operación, no se tiene una medida. Supongamos un préstamo en el que nos cobran un 3% el primer año y un 4% durante los siguientes. No tenemos una medida clara del coste.

La segunda circunstancia es que, como consecuencia de la operación, se entreguen o se reciban capitales adicionales a los incluidos en la ecuación de equivalencia financiera que garantizaba el equilibrio financiero con el criterio pactado, como comisiones, impuestos, subvenciones o cualquier otro tipo de gasto o ingreso que se genere como consecuencia de participar en la operación. Este tipo de capitales se denominan características comerciales.

Obsérvese que algunas características comerciales que afecten a las dos partes de una operación, como una comisión bancaria. Afecta al cliente, porque la paga, y afecta a la Entidad Financiera, porque la cobra. Este tipo de capitales se denominan características comerciales bilaterales. En cambio, hay características comerciales que sólo afectan a una de las partes, que entrega o recibe el capital de un tercero. Se denominan características comerciales unilaterales. Un ejemplo clásico es el de un impuesto.

El coste o la rentabilidad de una operación suele medirse con el objetivo de comparar alternativas. **Para que la comparación sea coherente, es necesario que los dos tantos sean homogéneos**. En primer lugar, siempre se suele medir a través de los tantos anuales y, en segundo lugar, es necesario que estén calculados con la misma ley financiera. En este sentido las leyes financieras de capitalización compuesta y de descuento compuesto pueden considerarse la misma ley, ya que conducen siempre a las mismas equivalencias.

Puede ocurrir que, en el proceso de comparar el coste o la rentabilidad de dos operaciones, encontremos que en ambos casos se aplica un tanto único y no existen características comerciales, pero la ley aplicada no coincide. En este caso, en ambas operaciones el tanto daría una medida correcta del coste o rentabilidad, pero las medidas no serían adecuadas para la comparación.

A continuación, estudiaremos cómo medir el coste o la rentabilidad de una operación financiera, cuando los tantos aplicados para establecer el equilibrio financiero no nos faciliten una medida adecuada, por cualquiera de las razones explicadas.

Antes de estudiar cómo obtener esta medida, vamos a alertar frente a un error cometido frecuentemente por quienes no tienen suficientes conocimientos de matemática financiera, que consiste en sumar las cuantías de los capitales que entrega o recibe y elegir la operación en la que la cuantía es menor o mayor respectivamente. No hay que olvidar la importancia del vencimiento de los capitales.

Hay muy pocos casos en los que el coste o la rentabilidad pueda compararse a través de los capitales. Sí se podría en el caso de que dos operaciones fuesen idénticas, salvo en el valor de una cuantía o de un vencimiento. En general, debemos medir el coste o la rentabilidad a partir de concepto de tanto medio efectivo. Se explicará este concepto y el procedimiento para su obtención con el apoyo de un ejercicio.

3.3.2. Ejemplo de comparación de dos operaciones financieras

Cierto individuo va a solicitar un préstamo de 12.000 euros a corto plazo: lo devolverá en dos pagos de igual cuantía entre sí, uno a los seis meses de la compra y otro al año. Se pide razonar qué entidad le conviene elegir, teniendo en cuenta la siguiente información: En la Entidad A le ofrecen el préstamo al 9% anual en capitalización simple, sin comisiones, mientras que en la Entidad B le ofrecen un tanto del 8% anual en capitalización simple, pero tiene una comisión de apertura del 0,75% (90 euros).

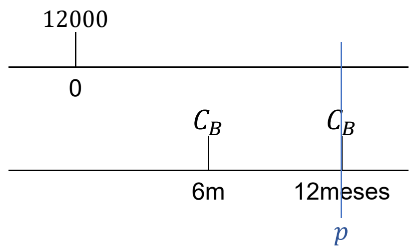
Obsérvese que se quieren comparar dos alternativas para solicitar un préstamo. Al tratarse de una operación de financiación, será preferible aquella que tenga un coste menor. En la Entidad A el coste queda correctamente medido por el tanto que se aplica, ya que es único y la operación no tiene características comerciales. Podemos asegura que el coste, en la Entidad A es del 9% en capitalización simple. Es importante indicar la ley financiera, para asegurarnos posteriormente de que comparamos tantos homogéneos.

En cambio, en la Entidad B, el coste no está bien medido. La operación exige el pago de una comisión que (por el propio concepto de comisión) se paga además de los capitales que resultan de aplicar el tanto pactado. Por esta razón, ese tanto del 8% no incluye el coste de la comisión. **Cuando queremos medir el coste o la rentabilidad de una operación financiera, el primer paso siempre será determinar todos los capitales**.

Comenzamos por obtener los capitales que se derivan de aplicar la ley y el tanto pactados (que sabemos no incluyen las características comerciales). Este intercambio de capitales suele denominarse **operación pura** y debe estar en equilibrio con el criterio pactado en la Entidad B:

$L(z) = 1 + iz$, con $z = p - t$, con un tanto $i = 0{,}08$

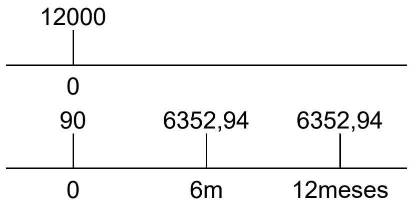
El esquema de la operación pura es el siguiente:



Para obtener el valor de C_B, planteamos la ecuación de equivalencia financiera con $p = 1\ año$:

$$12000\ (1 + 0{,}08) = C_B \left(1 + 0{,}08\ \tfrac{1}{2}\right) + C_B \ \Rightarrow\ C_B = 6352{,}94€$$

Si no hubiera más capitales en la operación, el coste sería de 8% en capitalización simple, pero como, al pago de los capitales de la operación pura, hay que añadir el pago de una comisión de 90€, el coste será mayor. Para determinarlo, comenzamos por presentar en un esquema de dos ejes temporales el conjunto de todos los capitales de la operación, incluyendo tanto los de la operación pura como las características comerciales.



Queremos medir el coste de la operación que acabamos de esquematizar. El coste será el tanto al que se hagan equivalentes todos los capitales entregados y recibidos al que denominaremos tanto medio efectivo de coste de la operación. Como el objetivo es compararlo con el coste de la Entidad A, que era un tanto de capitalización simple, utilizaremos esta ley para determinarlo.

$L(z) = 1 + iz$, con $z = p - t$

Es importante utilizar una notación clara, que permita diferenciar los diferentes tantos. Al tanto medio efectivo de la operación de préstamo en la Entidad B, lo denominaremos i_B^*. Para determinarlo, plateamos la ecuación de equivalencia financiera tomado todos los capitales de la operación (que ya hemos recogido en un esquema), con la ley elegida.

Fijamos p al final de la operación, puesto que estamos trabajando con una ley de capitalización. La ecuación de equivalencia financieras resulta de proyectar todos los capitales hasta $p = 1\ año$, con el tanto i_B^*, que es nuestra incógnita:

$$12000\ (1 + i_B^*) = 90\ (1 + i_B^*) + 6352{,}94\left(1 + i_B^*\ \frac{1}{2}\right) + 6352{,}94$$

De donde obtenemos $\boldsymbol{i_B^* = 0{,}09129}$

Obsérvese que, si se hubiera seguido un procedimiento análogo para la operación con la Entidad A y se calculase el tanto efectivo en capitalización simple se habría obtenido $\boldsymbol{i_A^* = 0{,}09}$. Al no existir características comerciales, la operación pura coincide con la operación completa. Y, al aplicarse un tanto único, este coincide con el tanto medio efectivo, si se calcula con la misma ley que se ha aplicado.

Tenemos, por lo tanto, el coste de la operación con dos entidades, medido por sus tantos medios efectivos en capitalización simple. Al individuo le convendría elegir la Entidad A, ya que tiene un coste más bajo.

En este caso, la ley con la que se ha calculado el tanto medio efectivo coincide con la ley pactada, pero esta coincidencia no es necesaria. Sí es imprescindible que los tantos que se comparan estén calculados con la misma ley.

3.3.3. Definición general de tanto medio efectivo

Llamaremos, así**, tanto medio efectivo de una operación** al que hace equivalentes todos los capitales entregados y recibidos. El tanto medio efectivo debe calcularse con la ley financiera que permita la comparación.

Cuando se calcula para una operación en la que no hay características comerciales, pero se aplica más de un tanto, se suele denominar tanto medio.

Cuando se calcula para una operación en la que el tanto aplicado es único, pero tiene características comerciales, se suele denominar tanto efectivo.

Para simplificar, utilizaremos siempre el nombre de tanto medio efectivo.

Cuando una operación tiene **características comerciales unilaterales**, el esquema de capitales entregados y recibidos no es el mismo para las dos partes. Por esta razón tampoco coincidirán el tanto medio efectivo del prestamista y del prestatario y deberán calcularse por separado. El **tanto medio efectivo para el prestamista** será el que haga equivalentes los capitales entregados y recibidos por el prestamista. El **tanto efectivo para el prestatario** será el que haga equivalentes los capitales entregados y recibidos por el prestatario.

3.3.4. Normativa del Banco de España. TAE.

En España, como en la mayoría de los países, cuando las Entidades Bancarias informan de una operación, deben informar del criterio aplicado y, además, dar una medida del coste o rentabilidad de la operación a través de un tanto medio efectivo. Es fundamental que ese tanto esté calculado de manera estandarizada para que sea comparable entre las diferentes entidades. En el caso de España, recibe el nombre de **TAE (Tasa anual equivalente)**. Cada operación financiera puede tener normas concretas para el cálculo de la TAE, pero los principios generales (para los que puede haber excepciones) son los siguientes:

- se calcula con leyes compuestas
- toma en consideración todas las características comerciales bilaterales, esto es que afectan a la Entidad Financiera y al cliente, pero no las características comerciales unilaterales. Obsérvese que no tendría sentido informar al cliente de aquello que no le afecta, por lo que es razonable no informar de las características unilaterales de la Entidad Bancaria. Por otro lado, la Entidad Bancaria no tiene por qué tener conocimiento de los gastos que el cliente tendrá con terceros, aun cuando se deriven de la operación, por lo que no es razonable pedir que lo tome en consideración.

3.4. Saldo financiero. Concepto y métodos de obtención

3.4.1. Concepto y ejemplo inicial

Se denomina saldo financiero en momento intermedio de una operación financiera a la cuantía de capital que tendría que entregar en ese momento una de las partes para equilibrar la operación de acuerdo con el criterio pactado. La interpretación concreta del saldo dependerá de la operación concreta.

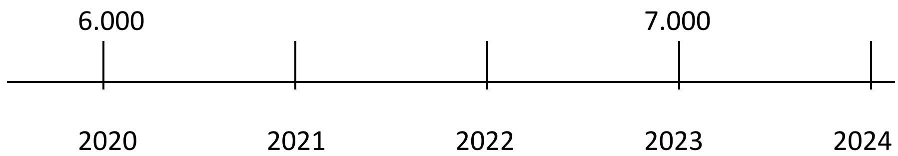
Obsérvese que, dado que estamos aplicando el criterio pactado, para el cálculo del saldo se trabaja con la operación pura y no influyen en su obtención las características comerciales.

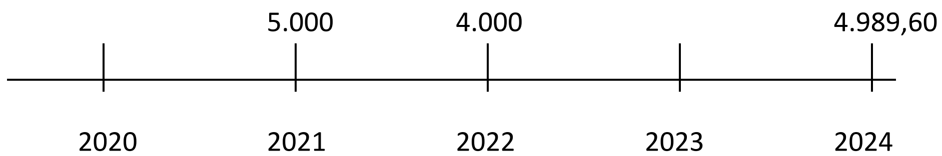
Puesto que, al entregar el saldo, se alcanza el equilibrio financiero, el valor en p de los capitales entregados por el prestamista coincide con el valor en p de los capitales entregados por el prestatario.

Para calcular el saldo, es necesario tener muy clara la diferencia entre un capital, la cuantía de ese capital y el valor en p del capital. Para reforzar esta idea, vamos a trabajar con una operación pactada con capitalización compuesta, a un tanto del 10%.

$L(z) = (1+i)^z$, con $z = p - t,\ i = 0{,}1$

A continuación, se representan en dos ejes la prestación y la contraprestación.





Podemos comprobar que se verifica la ecuación de equivalencia financiera. Fijamos p=2024:

$$6000.(1+0{,}1)^4 + 7000.(1+0{,}1) = 5000.(1+0{,}1)^3 + 4000.(1+0{,}1)^2 + 4989{,}60$$

El valor en p del capital (6000,2020) es $6000.(1+0{,}1)^4$ = 8.784,60 €

El valor en p del capital (7000,2023) es $7000.(1+0{,}1)$ = 7.700€

El valor en p del capital (5000,2021) es $5000.(1+0{,}1)^3$ = 6.655 €

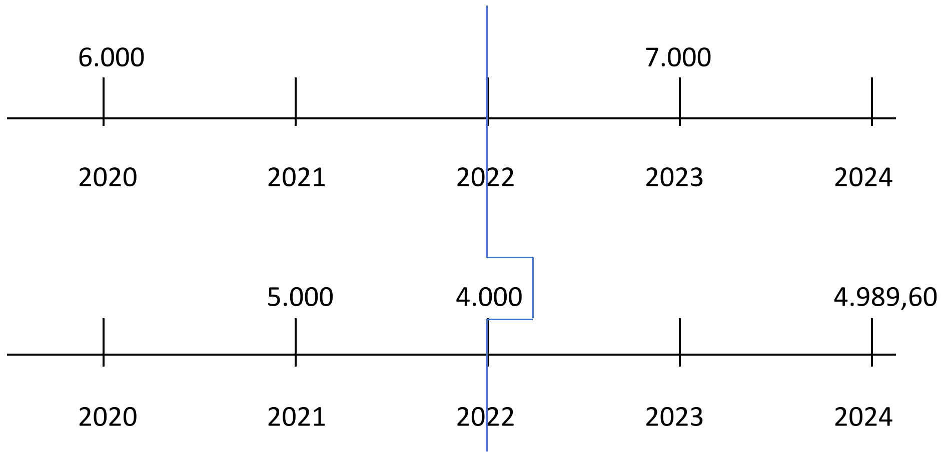
El valor en p del capital (4000,2022) es $4000.(1+0{,}1)^2$ = 4.840 €

El valor en p del capital (4989,60 , 2020) es 4.989,60 €

Podemos comprobar que, obviamente: 8.784,60 + 7.700 = 6.655 + 4.840 + 4989,60

Hay que tener siempre presente que la cantidad entregada en el momento del vencimiento es la cuantía del capital, pero para conseguir el equilibrio financiero, tienen que igualarse los valores en p, de acuerdo con el criterio pactado.

Pensemos que se desea interrumpir esta operación en 2022, justo después de que el prestatario entregue el capital de 4000€.



En primer lugar, nos preguntamos si la operación estaría equilibrada. Sabemos que la condición de equilibrio es que el valor en p de los capitales entregados por el prestamista coincida con el valor en p de los capitales entregados por el prestatario. Recordamos que p = 2024, y comprobamos que no hay coincidencia:

El valor en p de los capitales entregados por el prestamista hasta ese momento es:

$6000.(1+0{,}1)^4$ = 8.784,60

El valor en p de los capitales entregados por el prestatario hasta ese momento es:

$5000.(1+0{,}1)^3$ + $4000.(1+0{,}1)^2$ = 6.655 + 4.840 = 11.495

Efectivamente, los capitales entregados por el prestamista tienen un valor en p menor que el valor en p de los capitales entregados por el prestatario. Para alcanzar el equilibrio en ese momento, el prestamista tendría que "añadir valor en p" hasta igualar 11.495€, esto es, tendría que añadir valor en p por un importe de 2710,40€.

La manera de "añadir valor en p" es entregar capitales. Nuestra pregunta es ¿qué cuantía, x, tendría que entregar en 2022 para que su valor en p fuera de 2710,40. Planteamos la ecuación correspondiente:

$x.(1+0{,}1)^2$ =2710,40€, de dónde $x = 2.240$€.

Si el prestamista entrega el capital (2240,2022), cuyo valor en p es $2240.(1+0{,}1)^2$ = 2710,40, se alcanza el equilibrio. El valor en p de los capitales entregados por el prestamista y por el prestatario, coincidirán.

Tratemos de plantear este tipo de problemas de manera general.

3.4.2. Procedimiento del cálculo del saldo

Supongamos una operación genérica, pactada con la ley $F(z)$ y el punto de comparación p. Nos planteamos interrumpir la operación en un momento intermedio, que llamamos τ (se lee tau). Para ver si la operación está equilibrada en ese momento, tenemos que comparar el valor en p de los capitales entregados hasta el momento por el prestamista y el prestatario. Para facilitar la explicación, les daremos un "nombre". Sean:

Q_1= valor en p de los capitales entregados por el prestamista hasta el momento τ

Q'_1= valor en p de los capitales entregados por el prestatario hasta el momento τ

Nota: En nuestro ejemplo previo, τ = 2022,

Q_1=$6000.(1+0,1)^4$= 8.784,60 Q'_1= $5000.(1+0,1)^3$+ $4000.(1+0,1)^2$ = =11.495

Si, en un momento de una operación ocurriera que Q_1= Q'_1, entonces la operación estaría equilibrada y el saldo sería cero.

La situación más frecuente es que Q_1> Q'_1El prestamista ha entregado capitales que tienen mayor valor en p que los entregados por el prestatario. Para equilibrar la operación en τ, el prestatario tendría que entregar el saldo, que queremos determinar.

Representaremos el saldo como S_τ.

El valor en p del saldo será el resultado de multiplicarlo por la ley correspondiente, hasta el momento p fijado: $S_\tau.F(z_\tau)$, donde $z_\tau = \begin{cases} p - t_\tau, si\ F\ es\ \ ley\ financiera\ de\ capitalización \\ t_\tau - p, si\ F\ es\ \ una\ ley\ financiera\ de\ descuento \end{cases}$

Si Q_1> Q'_1el prestatario tendrá que entregar la cantidad S_τ, cuyo valor en p, consiga el equilibrio:

$S_\tau.F(z_\tau)$ = Q_1- Q'_1, de donde despejamos el valor del saldo, S_τ.

Cuando ocurre que Q_1< Q'_1. El prestamista ha entregado capitales que tienen menor valor en p que los entregados por el prestatario. Para equilibrar la operación en τ, el prestamista tendría que entregar el saldo, que queremos determinar. En este caso, menos frecuente que el anterior, el saldo se determina del mismo modo:

$S_\tau.F(z_\tau)$ = Q_1- Q'_1, de donde despejamos el valor del saldo, S_τ.

Pero, en este caso, tendrá signo negativo.

De hecho, en la práctica, no se comprueba si es mayor Q_1o Q'_1. Directamente, se calcula el saldo y, dependiendo de su signo se sabe si la cantidad tiene que ser entregada por el prestatario a favor de prestamista (en caso de que sea positivo) o debe ser entregada por el prestamista a favor del prestatario (en caso de que sea negativo).

Si hubiésemos trabajado de esta manera en nuestro ejemplo para calcular el saldo S_{2022}, plantearíamos la ecuación:

$S_{2022}.(1+0,1)^2$ = $6000.(1+0,1)^4$ -[$5000.(1+0,1)^3 +\ \ 4000.(1+0,1)^2$], de dónde

S_{2022}= - 2.240€

Lo que significa que, para alcanzar el equilibrio financiero en 2022, el prestamista tendría que entregar al prestatario la cantidad de 2.240€.

El método presentado para la obtención del saldo se denomina **método retrospectivo** de cálculo del saldo, puesto que se apoya en los capitales de la operación ya entregados:

$$\boldsymbol{S_\tau . F(z_\tau) = Q_1 - Q'_1}, \text{ de donde despejamos el valor del saldo, } \boldsymbol{S_\tau}$$

Este nombre hace sospechar que exista, al menos, un método más. Así será, y el nuevo método se apoyará en la información de los capitales de la operación todavía no entregados.

Para presentar este nuevo método, presentamos nueva notación. Sean:

Q_2= valor en p de los capitales a entregar por el prestamista a partir del momento τ

Q'_2= valor en p de los capitales a entregar por el prestatario a partir del momento τ

Obsérvese que, con esta nueva notación podríamos escribir la ecuación de equivalencia financiera, con la que se establece el equilibrio de la operación completa, necesario para que la operación exista, del siguiente modo:

$$\boldsymbol{Q_1 + Q_2 = Q'_1 + Q'_2}$$

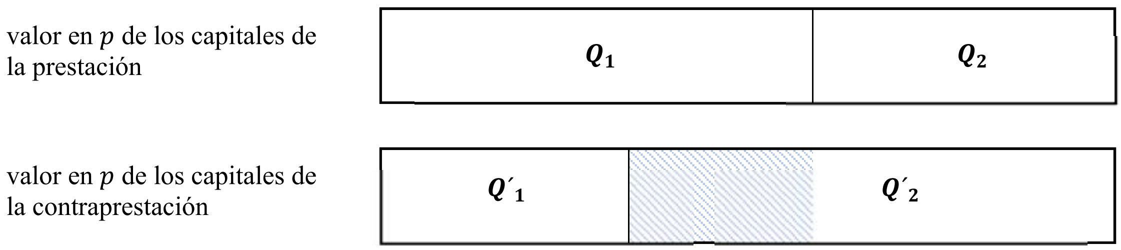
Nos indica que el valor en p de todos los capitales de la prestación (los que vencen hasta τ y los que vencen después de τ) debe coincidir con el valor en p de todos los capitales de la contraprestación.

Reorganizando los términos de esta igualdad, podemos escribir:

$$\boldsymbol{Q_1 - Q'_1 = Q'_2 - Q_2}$$

En el primer miembro observamos el desequilibrio de valor en p que se produce al interrumpir la operación en el momento τ, medido haciendo uso de la información de los capitales de la operación que se entregan hasta el momento τ. El segundo miembro da el mismo valor, luego es también este desequilibrio, medido haciendo uso de la información de los capitales de la operación que se entregan a partir del momento τ.

Nótese que ahora hay que restar el valor en p de los capitales de la contraprestación que vencen a partir del momento τ menos el valor en p de los capitales de la prestación que vencen a partir del momento τ. Así el desequilibrio será idéntico, tanto en valor absoluto, como en signo. Puede ayudar a entenderlo representar el valor en p de los capitales en forma de barra.



Obsérvese cómo la zona sombreada, que representa el valor en p del saldo, puede obtenerse como Q_1 - Q'_1 o bien como Q'_2- Q_2.

El cálculo del saldo midiendo el desequilibrio con los capitales futuros, se denomina **método prospectivo de cálculo del saldo**:

$$\boldsymbol{S_\tau . F(z_\tau) = Q'_2 - Q_2}, \textbf{ de donde despejamos el valor del saldo, } \boldsymbol{S_\tau}$$

Si calculamos, ahora por este método, el saldo S_{2022} en nuestro ejemplo, tendríamos que Q'_2 = 4989,60 y $Q_2 = 7700$

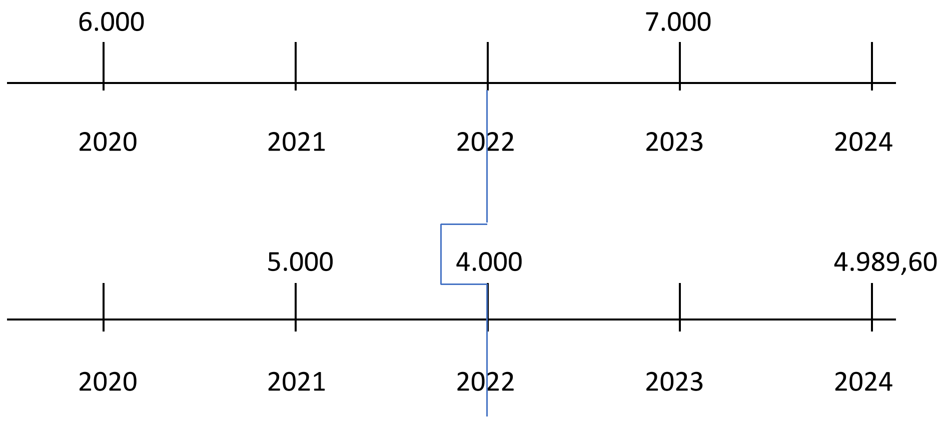
$S_{2022}.\,(1+0{,}1)^2$ = 4989,60 - $7000.\,(1+0{,}1)$, de dónde S_{2022}=- 2.240€.

Obviamente, el resultado es el mismo que el obtenido por el método retrospectivo, ya que son dos formas diferentes de obtener la misma magnitud.

Presentados los dos métodos fundamentales de obtención del saldo, vamos a explicar en qué consiste calcular un **saldo por la derecha o por la izquierda**. Esta diferenciación se presenta cuando algún capital vence justo en el momento en el que estamos calculando el saldo. En nuestro ejemplo, ocurría así, y hemos calculado el saldo después de que se haya entregado el capital. Se dice, entonces, que se ha calculado el saldo por la derecha y se representa con un superíndice con el signo +:

$$S^+_{2022}\text{=- 2.240€.}$$

Un problema diferente habría sido calcular el saldo, también en 2022, pero justo antes de que se entregase el capital de 4000€. Diríamos que estamos calculando el saldo en 2022 por la izquierda y lo representaríamos por S^-_{2022}.



A continuación, lo obtenemos por el método retrospectivo:

$S^-_{2022}.\,(1+0{,}1)^2 = 6000.\,(1+0{,}1)^4 - 5000.\,(1+0{,}1)^3$, de dónde S^-_{2022} = 1.760€

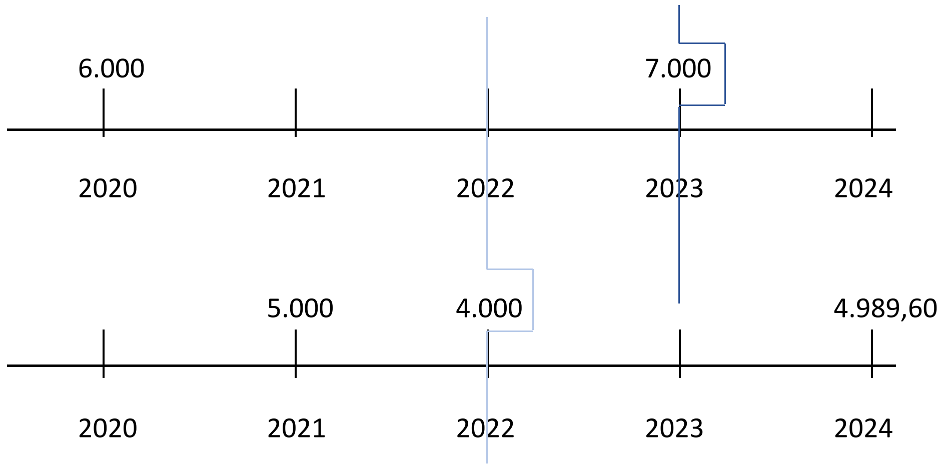
Por el método prospectivo:

$S^-_{2022}.\,(1+0{,}1)^2$ = 4989,60 + $4000.\,(1+0{,}1)^2$ - $7000.\,(1+0{,}1)$, de dónde S^-_{2022} = 1.760€

Hay un tercer método para obtener el saldo financiero de una operación, que se denomina **método recurrente** y se puede aplicar cuando conocemos el saldo financiero en algún momento anterior.

Comenzaremos por ver la lógica del método recurrente a partir de nuestro ejemplo y, posteriormente, generalizaremos.

Supongamos que queremos determinar el saldo de la operación en 2023 por la derecha



Vamos a plantear su obtención por el método retrospectivo:

$S^{+}_{2023}.(1+0{,}1)$ = $6000.(1+0{,}1)^4 + 7000(1+0{,}1)$ - $[5000.(1+0{,}1)^3 + 4000.(1+0{,}1)^2]$

De dónde bastaría despejar S^{+}_{2023}

Comparemos esta expresión con la del cálculo del saldo en 2022, también por el método retrospectivo.

$S^{+}_{2022}.(1+0{,}1)^2$ = $6000.(1+0{,}1)^4$ -$[5000.(1+0{,}1)^3 + \ 4000.(1+0{,}1)^2]$

Si comparamos los segundos miembros de las dos ecuaciones, la única diferencia está en el término $7000(1+0{,}1)$. Este término se corresponde con el único capital que se ha entregado entre 2022 y 2023.

Efectivamente, todos los términos asociados a capitales entregados hasta 2022 están recogidos en el segundo miembro de la segunda ecuación. Por lo tanto, podríamos escribir:

$S^{+}_{2023}.(1+0{,}1)$ = $S^{+}_{2022}.(1+0{,}1)^2$ $+7000(1+0{,}1)$

$S^{+}_{2023}.(1+0{,}1)$ = - 2.240. $(1+0{,}1)^2$ $+7000(1+0{,}1)$, de dónde S^{+}_{2023} =4.536 €

Obsérvese que el término $+7000(1+0{,}1)$ aparece sumando porque el capital (7000 , 2023) pertenece a la prestación. Si hubiera habido algún capital en la contraprestación entre 2022 y 2023, en la ecuación del método recurrente se habría restado su valor en p.

Es importante resaltar que el método recurrente se aplica siempre para determinar el saldo a partir de un saldo conocido en un momento anterior. Nunca se toma como dato el saldo en un momento posterior. Quizá, porque lo normal es conocer primero aquello que ocurre antes.

A continuación, escribiremos el planteamiento del método de manera general y literaria. En otras fuentes puede encontrarse con una mayor formalización matemática.

Dada una operación financiera, pactada con la ley $F(z)$ y el punto de comparación p. El médodo recurrente permite determinar el saldo financiero en un momento intermedio, τ, a partir del saldo conocido en algún momento anterior τ´< τ, del siguiente modo:

Valor en p del saldo en τ = valor en p del saldo en τ´ $+$

$+$ valor en p de los capitales de la prestación que vencen entre los momentos τ´y τ $-$

$-$ valor en p de los capitales de la contraprestación que vencen entre los momentos τ´y τ.

Recuérdese que el valor en p del saldo en τ es:

$S_\tau . F(z_\tau)$, donde $z_\tau = \begin{cases} p - t_\tau, si\ F\ es\ \ ley\ financiera\ de\ capitalización \\ t_\tau - p, si\ F\ es\ \ una\ ley\ financiera\ de\ descuento \end{cases}$

Y el valor en p del saldo en τ´ es:

$S_{\tau'} . F(z_{\tau'})$, donde $z_{\tau'} = \begin{cases} p - t_{\tau'}, si\ F\ es\ \ ley\ financiera\ de\ capitalización \\ t_{\tau'} - p, si\ F\ es\ \ una\ ley\ financiera\ de\ descuento \end{cases}$

De la expresión anterior, se despejaría el valor del saldo buscado S_τ.

Tema 4. Valoración de rentas con leyes compuestas

4.1. Introducción a la valoración de rentas

La valoración de rentas en matemáticas financieras no aporta conceptos nuevos desde el punto de vista conceptual. Aporta una mayor eficiencia al descontar o capitalizar varios capitales, ya que, en lugar de sumar los valores proyectados uno a uno, se utilizan procedimientos que permitan sumar de un modo más rápido.

4.1.1. Base matemática para la valoración de rentas

En los casos que estudiaremos, el único procedimiento de matemáticas que necesitaremos conocer la expresión de la suma de los términos de una progresión geométrica.

Decimos que una sucesión forma una progresión geométrica cuando, cada término es igual al anterior multiplicado por un número (siempre el mismo). Este número se denomina razón de la progresión.

Un ejemplo de términos progresión geométrica sería la siguiente:

10, 20, 40, 80, 160, 320, 640, 1280

La razón de la progresión sería 2.

Podemos sumar estos números como lo hacemos habitualmente:

10 + 20 + 40 + 80 + 160 + 320 + 640 + 1280

Pero, se puede demostrar (demostración sencilla y fácil de encontrar) que la suma puede obtenerse del siguiente modo:

Suma de términos de una progresión geométrica = $\frac{Primer\ término - último\ término \times razón}{1 - razón}$

La suma que hemos planteado como ejemplo sería:

$$\frac{10 - 1280 \times 2}{1 - 2}$$

Dependiendo del caso, puede resultarnos más eficiente sumar directamente o utilizando esta expresión. Si tenemos muchos sumandos, suele compensar utilizar la expresión de la suma como progresión geométrica.

4.1.2. El concepto de renta

Se denomina renta a una colección de capitales asociados a un conjunto de periodos de tiempo consecutivos, de manera que, a cada periodo corresponde un único capital. Por lo tanto, el número de periodos (duración de la renta) y el número de capitales de una renta siempre coinciden.

Un ejemplo de renta serían los pagos mensuales que debe entregar una persona para devolver su préstamo hipotecario. Otro ejemplo serían los pagos por alquiler que se entregan a lo largo de un año.

4.1.3. Terminología de la valoración y clasificación de las rentas

Los capitales de la renta suelen denominarse términos de la renta.

Sólo trabajaremos con rentas en las cuales los periodos tienen la misma duración entre sí. En el desarrollo teórico supondremos que los periodos son años. Sobre ejercicios, generalizaremos al caso en que sean meses, semestres…

Hay dos momentos importantes en la renta:

- El origen es el extremo inicial del primer periodo
- El final es el extremo final del último periodo

Cuando hablamos de valoración de rentas, nos referimos al cálculo del valor de todos los capitales que forman la renta en un momento del tiempo.

- Si valoramos en el origen, se habla de valor actual de la renta inmediata

(yo me imagino situado en el origen, haciendo la valoración, y la renta empieza ya)

- Si valoramos en el final, se habla de valor final de la renta inmediata

(yo me imagino situado en el final, haciendo la valoración, y la renta acaba de terminar)

- Si valoramos antes del origen, se habla de valor actual de la renta diferida

(yo me imagino situado antes del origen, haciendo la valoración, y la renta empieza empezará dentro de un tiempo)

- Si valoramos después del final, se habla de valor final de una renta anticipada
  (yo me imagino situado después del final, haciendo la valoración, y la renta terminó hace un tiempo)

Las rentas pueden clasificarse según múltiples criterios. Si todos los capitales que forman la renta tienen la misma cuantía, se habla de rentas constantes y, en caso contrario, rentas variables. Si los capitales se entregan al final de cada periodo, se dice que la renta es pospagable, mientras que, si se entregan al principio de cada periodo, se dice que la renta es prepagable. Hasta ahora, estamos suponiendo que las rentas tienen un origen y un final, esto es, estamos pensando en rentas temporales; pero hay rentas que nunca terminan y se denominan perpetuas.

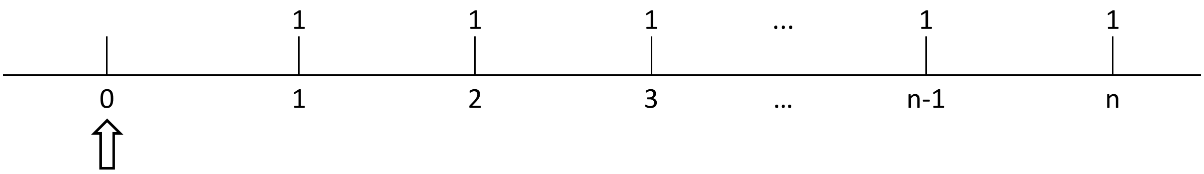
A continuación, vamos a obtener el valor de distintos tipos de rentas.

Comenzaremos por la valoración de rentas constantes. El caso más importante es el primero, porque a partir de él se desarrollan todos los demás. Proyectaremos los capitales con leyes compuestas (capitalización, cuando proyectamos hacia el futuro y descuento, cuando proyectamos hacia el pasado). Puesto que supondremos que los periodos son años, trabajaremos con un tanto anual que representamos por i.

4.2. Valor actual y final de rentas constantes con leyes compuestas y tanto de valoración constante i

a) Determinación del valor en el origen (valor actual de una renta inmediata) de una renta temporal pospagable (en nuestro caso dura n años) unitaria.

Se dice que una renta es unitaria cuando todos los capitales tienen cuantía igual a 1.



Obsérvese que, al ser la renta pospagable, el origen no coincide con el vencimiento del primer capital de la renta.

El origen de la renta es el momento t=0, ya que se ha definido como el extremo inicial del primer periodo, mientras que, por tratarse de una renta pospagable, el primer capital se entrega al final del primer periodo, esto es en t=1.

Queremos el valor en el origen, esto es en t=0.

Este valor (valor actual de una renta inmediata pospagable unitaria de n periodos, valorada al tanto i) se representa por $a_{n\rceil i}$.

Podemos obtener el valor descontado todos los capitales hasta t=0 y sumando estos valores descontados.

$$a_{n\rceil i} = (1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + (1+i)^{-3} + \ldots + (1+i)^{-(n-1)} + (1+i)^{-n}$$

Si observamos esta suma, podemos comprobar que se trata de la suma de los términos de una progresión geométrica de razón $(1+i)^{-1}$, lo que nos permite el procedimiento "rápido" que presentamos en el primer apartado:

Suma de términos de una progresión geométrica = $\frac{Primer\ término - último\ término \times razón}{1 - razón}$

Sustituimos:

Primer término de la suma = $(1+i)^{-1}$

Último término de la suma= $(1+i)^{-n}$

Razón = $(1+i)^{-1}$

Por tanto:

$$a_{n\rceil i} = \frac{(1+i)^{-1} - (1+i)^{-n}\,(1+i)^{-1}}{1 - (1+i)^{-1}}$$

Para simplificar esta expresión, y que quede más sencilla, multiplicamos el numerador y el denominador por (1+i), sabiendo que su valor no cambia:

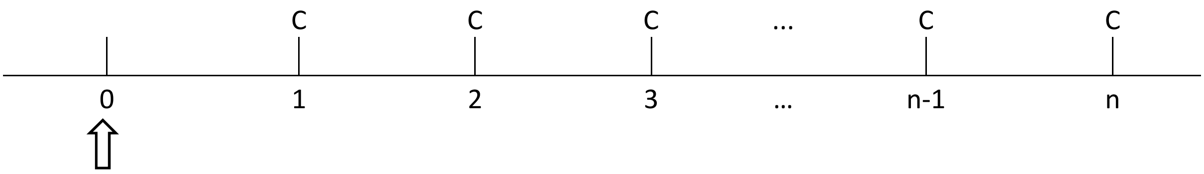
$$a_{n]i} = \frac{\left[(1+i)^{-1} - (1+i)^{-n}\,(1+i)^{-1}\right](1+i)}{\left[1-(1+i)^{-1}\right](1+i)}$$

Y, operando, llegamos a la expresión más utilizada en la valoración de rentas:

$$\boxed{a_{n]i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}$$

b) Determinación del valor en el origen (valor actual de una renta inmediata) de una renta temporal pospagable (en nuestro caso dura n años)

La novedad respecto del caso anterior es que los capitales no tienen por qué tomar valor igual a la unidad.



De nuevo, queremos el valor en el origen, esto es en t=0, y podemos obtener el valor descontado todos los capitales hasta t=0 y sumando estos valores descontados.

$$C.(1+i)^{-1} + C.(1+i)^{-2} + C.(1+i)^{-3} + \ldots + C.(1+i)^{-(n-1)} + C.(1+i)^{-n} =$$

(sacando factor común de C)

$$= C.\left[(1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + (1+i)^{-3} + \ldots + (1+i)^{-(n-1)} + (1+i)^{-n}\right]$$

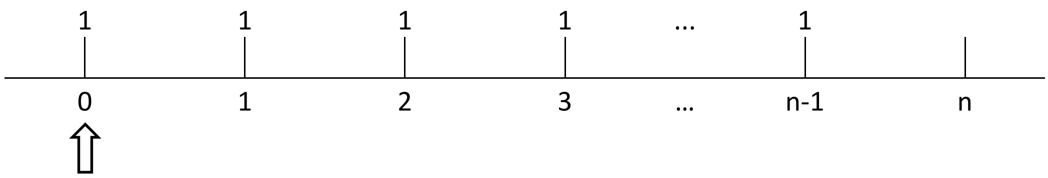
Observamos que, dentro del corchete, ha quedado el valor actual del caso a) por lo que el valor actual de una renta inmediata pospagable de cuantía constante C, de n periodos, valorada al tanto i, quedaría:

$$\boxed{C.a_{n]i} = C\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}$$

c) Determinación del valor en el origen (valor actual de una renta inmediata) de una renta temporal prepagable (en nuestro caso dura n años) unitaria.

A partir de este punto, dentro de las rentas constantes, sólo vamos a estudiar las rentas unitarias. Cuando una renta constante no sea unitaria y sus términos tengan cuantía C, como ocurría en el caso b), el valor de la renta siempre podrá obtenerse multiplicando esta cuantía C por el valor de la renta unitaria. Podría demostrarse caso por caso, pero no vamos a hacerlo. Es sencillo ver que siempre se cumpliría. Por esta razón, ya no plantearemos más casos de rentas constantes no unitarias.

Situados en el caso c), el cambio respecto del caso a) es que ahora la renta que valoramos es prepagable:



Al entregarse los capitales al comienzo de cada periodo, ahora el origen sí coincide con el vencimiento del primer capital, pero ahora el final no coincide con el vencimiento del último capital.

Vamos a determinar el valor en el origen, por lo que, en este caso, vamos a determinar el valor en el momento en el que se entrega el primer capital. Obsérvese que en el caso a) no era así.

En la notación estándar de las rentas, el hecho de que una renta sea prepagable se representa con una diéresis. Por tanto, la notación para el valor actual de esta renta será: $\ddot{a}_{n]i}$.

Como en todos los casos, podemos obtener el valor descontado todos los capitales hasta t=0 y sumando estos valores descontados.

$\ddot{a}_{n]i}$= 1+ $(1+i)^{-1}$ + $(1+i)^{-2}$ + $(1+i)^{-3}$ + ... + $(1+i)^{-(n-1)}$

Obsérvese que la igualdad anterior es igual que la que se escribe a continuación:

$$\boxed{\ddot{a}_{n]i} = (1+i).\left[(1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + (1+i)^{-3} + \dots + (1+i)^{-(n-1)} + (1+i)^{-n}\right]}$$

Efectivamente, se puede comprobar que:

$$(1+i).(1+i)^{-1} = 1$$

$$(1+i).(1+i)^{-2} = (1+i)^{-1}$$

Y así, sucesivamente, hasta

$$(1+i).(1+i)^{-n} = (1+i)^{-n+1} = (1+i)^{-(n-1)}$$

En la expresión recuadrada, podemos observar que, dentro del corchete, ha quedado el valor actual del caso a) por lo que el valor actual de una renta inmediata prepagable unitaria, de n años, valorada al tanto i, quedaría:

$$\boxed{\ddot{a}_{n]i} = (1+i).a_{n]i}}$$

Hemos obtenido que el valor de la renta prepagable se obtenga multiplicando el valor de la renta análoga pospagable por uno más el tanto.

Entendemos por renta análoga pospagable la que tiene todas las características iguales, salvo el carácter de pospagable.

Respecto de este resultado que acabamos de obtener, vamos a hacer unas cuantas observaciones:

Observación primera:

La primera es que el hecho de que se generaliza a todos los casos. Nosotros lo hemos demostrado para el caso del valor actual de una renta inmediata temporal, pero se verifica también para valores finales, rentas que no sean inmediatas y rentas perpetuas. No lo vamos a demostrar para todos los casos, por ser prácticos, pero es muy sencillo hacer estas demostraciones.

Esta primera observación puede producirnos cierta satisfacción si pensamos en sus implicaciones. Al contemplar el esquema del tema de valoración de rentas y fijarnos en el árbol del apartado 4.2 que queremos completar, podemos afirmar que nuestra tarea ha quedado reducida a la mitad. El valor de las rentas en todas las ramas que corresponden a prepagables se obtendrá siempre de manera sencilla a partir de la rama que corresponde a la pospagable. Basta multiplicar por uno más el tanto.

Observación segunda:

En nuestro desarrollo teórico estamos trabajando con rentas anuales, pero en la práctica generalizaremos al caso de que los periodos no sean años. Bastará sustituir el tanto anual por el del periodo que corresponda. Si quisiéramos obtener el valor actual de una renta inmediata prepagable unitaria de 120 meses, nos apoyaríamos en la relación:

$$\ddot{a}_{120\rceil i_{12}} = (1 + i_{12}).\, a_{120\rceil i_{12}}$$

Es muy importante recordar que no es lo mismo una renta de 120 meses, en la que la cuantía se entrega una vez al mes, que una renta de 10 años, en la que la cuantía se entrega una vez al año.

Observación tercera:

Podríamos sustituir $a_{n\rceil i}$ por su expresión y operar, para obtener una nueva expresión de valoración de rentas para el caso de que la renta sea prepagable, pero no lo hacemos. Nuestro objetivo va a ser reconducir todos los casos que podamos al caso que consideramos básico, que es nuestro caso a). Queremos ser rápidos valorando rentas y esto se consigue recordando el caso básico y un par de reglas para obtener el resto de los casos a partir de él.

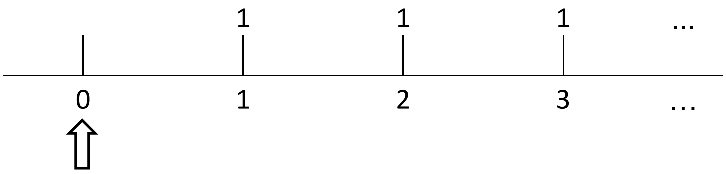
d) Determinación del valor en el origen (valor actual de una renta inmediata) de una renta perpetua, pospagable, unitaria.

La diferencia respecto de nuestro caso básico ahora es que la renta dura para siempre.

Para un ejemplo de una situación real, se puede ver el ejercicio primero del tema. (Una persona desea instituir un premio cultural de periodicidad anual que se desea pagar siempre, en el futuro…). En el ejemplo, la renta es perpetua de cuantía constante, pero no unitaria.

Recordamos que, como se indicaba al comienzo del apartado c), dentro de las rentas constantes, sólo vamos a estudiar las rentas unitarias porque, cuando una renta constante no es unitaria y sus términos tienen cuantía C, el valor de la renta podrá obtenerse multiplicando esta cuantía C por el valor de la renta unitaria.

Como no podemos representar por completo algo que no termina, utilizamos unos puntos suspensivos para indicar que la renta continuaría periodo tras periodo:



Queremos determinar el valor en el origen. Recordamos que, al tratarse de una renta pospagable, no coincide con el vencimiento del primer capital.

La notación coincide con la del caso básico, salvo en la duración, que sustituiremos por el símbolo de infinito: $a_{\infty\rceil i}$.

El valor de una renta perpetua se obtiene como el límite cuando n tiende a infinito del valor de la renta análoga temporal. Entendemos por renta análoga temporal la que tiene todas las características iguales, salvo el carácter de temporal.

$$a_{\infty\rceil i} = \lim_{n\to\infty} a_{n\rceil i} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Puesto que $\lim_{n\to\infty}(1+i)^{-n} = 0$, el valor actual de la renta perpetua inmediata pospagable queda:

$$\boxed{a_{\infty\rceil i} = \frac{1}{i}}$$

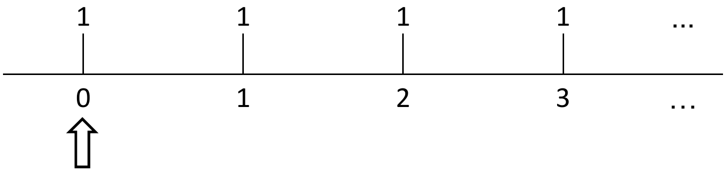
Como en los casos anteriores, se ha supuesto que los periodos son años. En caso de que no fuera así, habría que trabajar con el tanto que correspondiera:

$$\boxed{a_{\infty\rceil i_m} = \frac{1}{i_m}}$$

Donde m=12, si los capitales se entregaran mensualmente, m=2, si fueran semestrales, etc.

e) Determinación del valor en el origen (valor actual de una renta inmediata) de una renta perpetua, prepagable, unitaria.

La representación de la renta en un eje temporal en este caso quedaría así:



Queremos determinar el valor en el origen. Como siempre ocurre en las rentas prepagables, el origen coincide con el vencimiento del primer capital de la renta.

La notación coincidiría con la del caso anterior, salvo en que incluiríamos la diéresis que nos indica que la renta es prepagable: $\ddot{a}_{\infty\rceil i}$.

Podríamos obtener el valor de $\ddot{a}_{\infty\rceil i}$ calculando el límite, cuando n tiende a infinito de $\ddot{a}_{n\rceil i}$, o bien aplicar el principio de que el valor de una renta prepagable se puede obtener multiplicando el valor de la renta análoga pospagable por uno más el tanto. Por cualquiera de los dos caminos, llegaríamos al resultado:

$\ddot{a}_{\infty\rceil i}=\frac{(1+i)}{i}$, para el caso de que la renta fuera anual

$\ddot{a}_{\infty\rceil i_m} = \frac{(1+i_m)}{i_m}$, para el caso de que la renta se pagase cada m-ésimo de año

Si observamos el esquema del tema, podemos comprobar que, con este caso hemos terminado de obtener los valores actuales de las rentas inmediatas. Esto es, hemos aprendido a calcular el valor de las rentas en el origen. A partir de ahora, tendremos que calcular el valor de las rentas en otros momentos del tiempo.

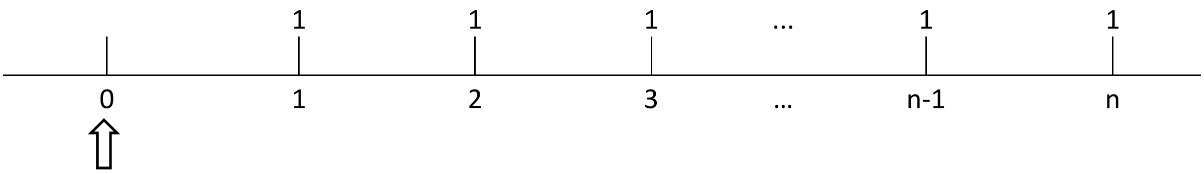
Comenzaremos por calcular el valor de la renta en un momento anterior al origen. Esto es, estaremos situados antes de que comience a devengarse y, por eso se dice que está diferida respecto de nosotros.

A continuación, calcularemos el valor final de las rentas inmediatas. Esto es, calcularemos el valor en el final de la renta. Obsérvese que, en las rentas pospagables, el final coincidirá con el vencimiento del último capital, pero no ocurrirá así con las prepagables.

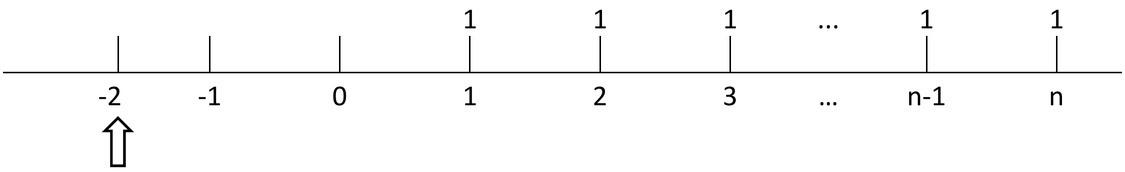
Por último, habrá que calcular el valor de la renta en un momento posterior al final, lo que significa que nos situamos después de que la renta haya finalizado, por lo que se dice que la renta está anticipada respecto de nosotros.

f) Determinación del valor antes del origen (valor actual de una renta diferida) de una renta temporal pospagable (en nuestro caso dura n años) unitaria.

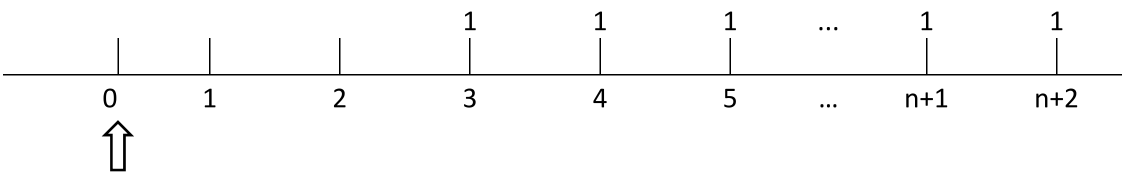
Tomemos como referencia el esquema de nuestro caso básico:



Ahora queremos el valor de esta misma renta, pero en un momento del tiempo anterior, por lo que tenemos que prolongar el eje temporal. Imaginemos, por ejemplo, que queremos el valor de la renta dos periodos antes del origen, en cuyo caso diremos que la renta está diferida dos periodos. El esquema sería el siguiente:



Por comodidad, hasta el momento, siempre hemos llamado al origen t=0, pero esto no es necesario. La renta sería idéntica si llamásemos t=0, por ejemplo, al momento en que valoramos la renta:



Puesto que estamos trabajando con una renta pospagable, el origen siempre es el comienzo del periodo en el que vence el primer capital o, dicho de otro modo, un periodo antes del vencimiento del primer capital. Y queremos obtener el valor dos periodos antes. Es importante observar que prolongar el eje temporal no aumenta la duración de la renta. Sólo aumenta la duración de la renta si aumentamos el número de capitales.

Para indicar que la renta está diferida dos periodos escribimos 2/ delante de la notación que corresponda al valor en el origen: $2/a_{n|i}$.

Una vez más, podemos obtener el valor descontado todos los capitales hasta el momento en el que queremos valorar y sumando estos valores descontados.

$$2/a_{n|i} = (1+i)^{-3} + (1+i)^{-4} + (1+i)^{-5} + \dots + (1+i)^{-(n+2)}$$

Obsérvese que la igualdad anterior es igual que la que se escribe a continuación:

$$\boxed{2/a_{n|i} = (1+i)^{-2}.[(1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + (1+i)^{-3} + \dots + (1+i)^{-n}]}$$

En la expresión recuadrada, podemos observar que, dentro del corchete, ha quedado el valor actual del caso a) por lo que el valor actual de una renta pospagable unitaria, de n años, diferida dos años y valorada al tanto i, quedaría:

$$2/a_{n|i} = (1+i)^{-2}.a_{n|i}$$

Este resultado puede generalizarse a un número cualquiera de años de diferimiento. El valor actual de una renta pospagable unitaria, de n años, diferida d años y valorada al tanto i, quedaría:

$$\boxed{d/a_{n]i} = \ (1+i)^{-d}.\,a_{n]i}}$$

Este resultado admite una interpretación que debe reconfortarnos porque implica que nuestro trabajo teórico con las rentas prácticamente ha finalizado. Efectivamente, podemos interpretar que, si queremos el valor de la renta en un momento anterior al origen, basta encontrar el valor en el origen y descontarlo hasta el momento adecuado. Puesto que ya sabemos obtener el valor en el origen de todos los tipos de renta que estudiaremos, si queremos obtener el valor de la renta diferida correspondiente, bastará descontarlo el número de periodos necesario. Operando de este modo, los siguientes casos resultan triviales:

g) Determinación del valor antes del origen (valor actual de una renta diferida) de una renta temporal prepagable (en nuestro caso dura n años) unitaria.

$$d/\ddot{a}_{n]i} = \ (1+i)^{-d}.\,\ddot{a}_{n]i}$$

h) Determinación del valor antes del origen (valor actual de una renta diferida) de una renta perpetua pospagable unitaria.

$$d/a_{\infty i} = \ (1+i)^{-d}.\,a_{\infty]i}$$

i) Determinación del valor antes del origen (valor actual de una renta diferida) de una renta perpetua prepagable unitaria.

$$d/\ddot{a}_{\infty]i} = \ (1+i)^{-d}.\,\ddot{a}_{\infty]i}$$

En el desarrollo teórico, como siempre, hemos supuesto que los periodos son años, pero si no fuera así, tanto d como n tienen que venir expresadas en las mismas unidades y deben ser coherentes con el tanto al que se valora. Por ejemplo, si queremos encontrar el valor actual de una renta pospagable que dura 60 meses y está diferida 12 meses, tendríamos que expresarlo del siguiente modo:

$$12/a_{60]i_{12}} = \ (1+i_{12})^{-12}.\,a_{60]i_{12}}$$

Sabemos que $(1+i_{12})^{-12} = (1+i)^{-1}$, siempre que i e i_{12} sean tantos equivalentes, por lo que podríamos calcularlo del siguiente modo:

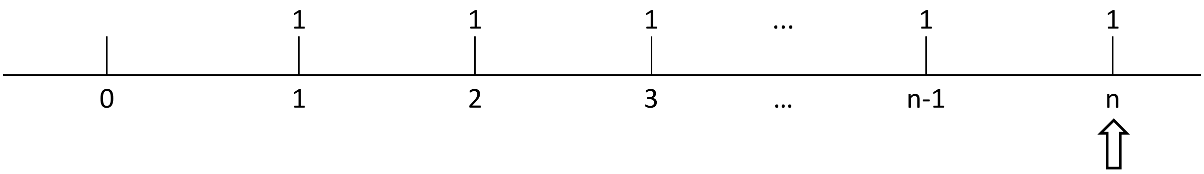
$$12/a_{60]i_{12}} = \ (1+i)^{-1}.\,a_{60]i_{12}}$$

IMPORTANTE:

Sin embargo, hay que recordar que $a_{60]i_{12}} \neq a_{5]i}$. No es lo mismo pagar 1 unidad monetaria al mes durante 5 años que pagar 1 unidad monetaria al año durante ese tiempo.

j) Determinación del valor en el final (valor final de una renta inmediata) de una renta temporal pospagable (en nuestro caso dura n años) unitaria.

Se dice que una renta es unitaria cuando todos los capitales tienen cuantía igual a 1.



Estamos, de nuevo ante la renta de nuestro caso básico, pero ahora queremos su valor en el momento final, esto es en t=n.

Este valor (valor final de una renta inmediata pospagable unitaria de n periodos, valorada al tanto i) se representa por $s_{n\rceil i}$.

Podemos obtener el valor capitalizando todos los capitales hasta t=n y sumando:

$$s_{n\rceil i} = (1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-3} + \dots + (1+i) + 1$$

Obsérvese que la igualdad anterior es igual que la que se escribe a continuación:

$$\boxed{s_{n\rceil i} = (1+i)^{n}.\left[(1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + (1+i)^{-3} + \dots + (1+i)^{-(n-1)} + (1+i)^{-n}\right]}$$

En la expresión recuadrada, podemos observar que, dentro del corchete, ha quedado el valor actual del caso a) por lo que el valor final de una renta inmediata pospagable unitaria, de n años, valorada al tanto i, quedaría:

$$\boxed{s_{n\rceil i} = (1+i)^{n}.a_{n\rceil i}}$$

Podemos interpretar este resultado de manera análoga al de las rentas diferidas. Si queremos el valor de la renta en el final, basta encontrar el valor en el origen y capitalizarlo hasta el final de la renta. Puesto que ya sabemos obtener el valor en el origen de todos los tipos de renta que estudiaremos, si queremos obtener el valor final de la renta correspondiente, bastará capitalizarlo n periodos. Operando de este modo, el siguiente caso resulta trivial.

Siempre puede sustituirse $a_{n\rceil i}$ por su valor y operar, con lo que se obtiene una expresión para el valor final. A continuación, se presenta el resultado para este caso, pero no es necesario memorizarlo:

$$s_{n\rceil i} = (1+i)^{n}.a_{n\rceil i} = (1+i)^{n}.\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{(1+i)^{n}-1}{i}$$

k) Determinación del valor en el final (valor final de una renta inmediata) de una renta temporal prepagable (en nuestro caso dura n años) unitaria.

$$\ddot{s}_{n]i} = (1+i)^n . \ddot{a}_{n]i}$$

l) Determinación del valor después del final (valor final de una renta anticipada) de una renta temporal pospagable (en nuestro caso dura n años) unitaria.

Tras todos los casos estudiados, podemos intuir que basta obtener el valor de la renta en un momento cualquiera y proyectarlo hasta el punto en el que deseamos tener ese valor.

Si la renta estuviera anticipada, por ejemplo, dos periodos, el esquema sería el siguiente:

	1	1	1	...	1	1		
0	1	2	3	...	n-1	n	n+1	n+2

Para indicar que la renta está anticipada dos periodos escribimos 2/ delante de la notación que corresponda al valor en el final: $2/s_{n]i}$.

Dado lo repetitivo que resulta respecto de los casos anteriores, no desarrollamos los cálculos, confiando en que se intuya fácilmente el resultado siguiente:

$$2/s_{n]i} = (1+i)^2 . s_{n]i} = (1+i)^{(n+2)} . a_{n]i}$$

Este resultado puede generalizarse a un número cualquiera de años de anticipación. El valor final de una renta pospagable unitaria, de n años, anticipada k años y valorada al tanto i, quedaría:

$$k/s_{n]i} = (1+i)^k . s_{n]i} = (1+i)^{(n+k)} . a_{n]i}$$

Todas las generalizaciones y comentarios explicados en los casos anteriores son aplicables a este.

El último caso que aparece en el esquema es el que difiere de este sólo en que la renta es prepagable, que se presenta a continuación. En el esquema de valores finales, obviamente, no hay rentas perpetuas, puesto que no tienen final.

m) Determinación del valor después del final (valor final de una renta anticipada) de una renta temporal prepagable (en nuestro caso dura n años) unitaria.

$$k/\ddot{s}_{n]i} = (1+i)^k . \ddot{s}_{n]i} = (1+i)^{(n+k)} . \ddot{a}_{n]i}$$

Estas notas informales deben complementarse con el resto de materiales del curso, la indicación de tareas a realizar y la resolución de dudas por parte de los profesores. Siempre sería un buen apoyo un libro de texto.

4.3. Valoración de rentas con términos variables en progresión geométrica con leyes compuestas y tanto de valoración constante i

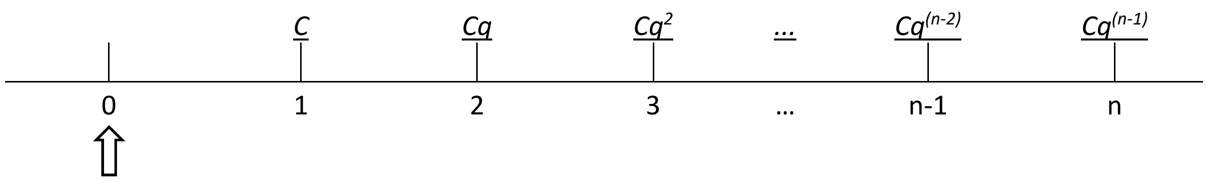
Antes de leer estas notas conviene tener claro cómo modelizaría un conjunto de capitales que crecen a una tasa constante acumulativa y preguntarse uno mismo si tiene sentido estudiar rentas con términos variables en progresión geométrica.

Puede ser interesante también tratar de representar como una renta los dividendos esperados de la empresa del siguiente ejercicio: Cierta empresa, ya consolidada, del sector de la electricidad anuncia un pago de dividendo para el próximo año de 15 céntimos por acción. Se espera que los dividendos de la empresa crezcan en el futuro al 0,5% anual a perpetuidad.

Efectivamente, es frecuente que en las operaciones financieras y en los problemas de valoración financiera aparezcan rentas con términos crecientes en progresión geométrica. Por esa razón las estudiamos. Seguiremos un esquema análogo y una forma de trabajar con los que ya estamos familiarizados tras el estudio de la valoración de rentas constantes. El cambio es que ahora los términos no tienen la misma cuantía entre sí. Denominaremos C a la cuantía del primer capital y q a la razón de la progresión geométrica. Podemos pararnos a pensar cuál sería el valor de C y el valor de q en el ejercicio cuyos datos tenemos en el párrafo anterior.

Determinación del valor en el origen (valor actual de una renta inmediata) de una renta pospagable temporal (en nuestro caso dura n años):

Comenzamos por representar la renta sobre un eje temporal.



Recuérdese que, al ser la renta pospagable, el origen no coincide con el vencimiento del primer capital de la renta. Queremos el valor en el origen, esto es en t=0.

Este valor (valor actual de una renta inmediata pospagable con término variables en progresión geométrica, donde el primer término toma valor C y la razón toma valor q, de n periodos, valorada al tanto i) se representa por $A(C;q)_{n]i}$.

Podemos obtener el valor descontado todos los capitales hasta t=0 y sumando estos valores descontados.

$$A(C;q)_{n]i} = C(1+i)^{-1} + Cq(1+i)^{-2} + Cq^2(1+i)^{-3} + \dots + Cq^{(n-1)}(1+i)^{-n}$$

Si observamos esta suma, podemos comprobar que los valores descontados de los términos forman una nueva progresión geométrica de razón $q\,(1+i)^{-1}$, lo que nos permite el procedimiento "rápido" que presentamos en el primer apartado:

Suma de términos de una progresión geométrica = $\frac{Primer\ término - último\ término \times razón}{1 - razón}$

Sustituimos:

Primer término de la suma = $C(1+i)^{-1}$

Último término de la suma= $Cq^{(n-1)}\ (1+i)^{-n}$

Razón = $q(1+i)^{-1}$

Por tanto: $$A(C;q)_{n]i} = \frac{C(1+i)^{-1} - Cq^{(n-1)}(1+i)^{-n}\ q(1+i)^{-1}}{1-\ q(1+i)^{-1}}$$

Sacando factor común de C y operando en el numerador, podemos escribir:

$$A(C;q)_{n]i} = C\,\frac{(1+i)^{-1} -\ q^{n}(1+i)^{-n}\ (1+i)^{-1}}{1-\ q(1+i)^{-1}}$$

Para simplificar esta expresión, y que quede más sencilla, multiplicamos el numerador y el denominador por (1+i), sabiendo que su valor no cambia:

$$A(C;q)_{n]i} = C\,\frac{\left[(1+i)^{-1} - q^{n}(1+i)^{-n}\ (1+i)^{-1}\right](1+i)}{\left[1-\ q(1+i)^{-1}\right](1+i)}$$

De donde llegamos a la forma que se utiliza habitualmente:

$$A(C;q)_{n]i} = C\,\frac{1-\ q^{n}(1+i)^{-n}}{1+i-q} = C\,\frac{1-\left(\frac{q}{1+i}\right)^{n}}{1+i-q}$$

Tenemos dos observaciones importantes, respecto de esta fórmula:

La primera es que en el caso particular de $q=1$, se obtiene la expresión del valor actual de una renta inmediata pospagable, de cuantía constante. Obsérvese que el resultado es razonable, ya que si $q=1$, los términos no varían.

La segunda observación es que en el caso particular de que $q=1+i$, la expresión anterior no tiene sentido, puesto que se anularía el denominador. Se hace necesario, por tanto, analizar este caso. Para ello, volvemos a la expresión inicial en que teníamos todos los términos descontados:

$$A(C;q)_{n]i} = C(1+i)^{-1} + Cq(1+i)^{-2} + Cq^{2}(1+i)^{-3} + \ldots + Cq^{(n-1)}\ (1+i)^{-n}$$

Y calculamos su valor para este caso particular. Esto es, hacemos $q=1+i$

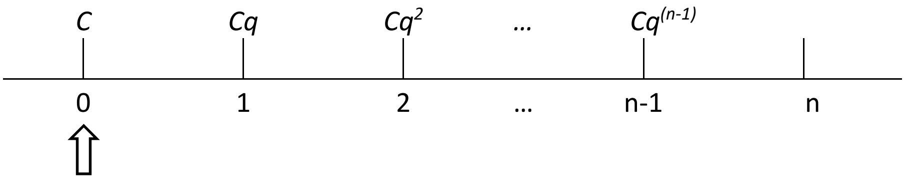
$$A(C;q=1+i)_{n]i} = C(1+i)^{-1} + C(1+i)(1+i)^{-2} + C(1+i)^{2}(1+i)^{-3} + \ldots +$$

$$+C(1+i)^{(n-1)}(1+i)^{-n} = C(1+i)^{-1} + C(1+i)^{-1} + C(1+i)^{-1} + \ldots + C(1+i)^{-1} = n\,C(1+i)^{-1}$$

Por lo tanto, el valor actual de una renta inmediata pospagable con términos en progresión geométrica tiene dos expresiones diferentes dependiendo de si la razón de la progresión formada por los términos coincide o no con $1+i$. Resumimos a continuación:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Si } q \neq 1+i, \quad A(C;q)_{n]i} = C\,\dfrac{1-\left(\frac{q}{1+i}\right)^{n}}{1+i-q} \\[2ex] \text{Si } q = 1+i, \quad A(C;q)_{n]i} = n\,C(1+i)^{-1} \end{array}}$$

Determinación del valor en el origen (valor actual de una renta inmediata) de una renta prepagable temporal (en nuestro caso dura n años):



Como en la valoración de rentas constantes, el hecho de que la renta sea prepagable se indica con una diéresis, por lo que la notación para el valor actual de esta renta será: $\ddot{A}(C;q)_{n]i}$.

Como en todos los casos, podemos obtener el valor descontado todos los capitales hasta t=0 y sumando estos valores descontados.

$$\ddot{A}(C;q)_{n]i} = C + Cq(1+i)^{-1} + Cq^2(1+i)^{-2} + \ldots + Cq^{(n-1)}(1+i)^{-(n-1)}$$

Obsérvese que la igualdad anterior es igual que la que se escribe a continuación:

$$\boxed{\ddot{A}(C;q)_{n]i} = (1+i).\left[C(1+i)^{-1} + Cq(1+i)^{-2} + Cq^2(1+i)^{-3} + \ldots + Cq^{(n-1)}(1+i)^{-n}\right]}$$

En la expresión recuadrada, podemos observar que, dentro del corchete, ha quedado el valor actual del caso pospagable por lo que confirmamos que, en las rentas con términos variables en progresión geométrica se sigue verificando la relación entre valor de rentas prepagables y pospagables que obtuvimos en las rentas constantes.

$$\boxed{\ddot{A}(C;q)_{n]i} = (1+i)\,A(C;q)_{n]i}}$$

La expresión que se debe utilizar para $A(C;q)_{n]i}$ dependerá de si $q = 1+i$ o bien $q \neq 1+i$.

Al igual que en las rentas constante, esta relación se generaliza a todos los casos.

Si las rentas no fueran anuales, habría que trabajar con los tantos referidos al periodo correspondiente:

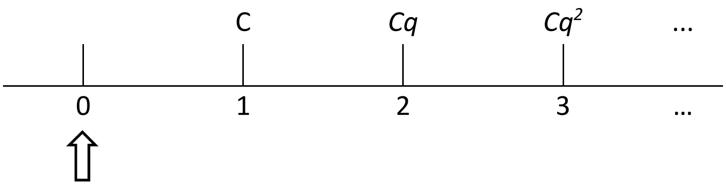
$$\ddot{A}(C;q)_{n]i_m} = (1+i_m)\,A(C;q)_{n]i_m}$$

Determinación del valor en el origen (valor actual de una renta inmediata) de una renta pospagable, perpetua, con términos variables en progresión geométrica:

La diferencia respecto de nuestro caso básico ahora es que la renta dura para siempre.

Para un ejemplo de una situación real, se puede pensar la empresa del ejercicio 4.5: Cierta empresa, ya consolidada, del sector de la electricidad anuncia un pago de dividendo para el próximo año de 15 céntimos por acción. Se espera que los dividendos de la empresa crezcan en el futuro al 0,5% anual a perpetuidad.

Como no podemos representar por completo algo que no termina, utilizamos unos puntos suspensivos para indicar que la renta continuaría periodo tras periodo:



Queremos determinar el valor en el origen.

La notación coincide con la del caso básico, salvo en la duración, que sustituiremos por el símbolo de infinito: $A(C;q)_{\infty]i}$.

El valor de una renta perpetua se obtiene como el límite cuando n tiende a infinito del valor de la renta análoga temporal. Pero, en este caso, la renta temporal tiene dos expresiones diferentes dependiendo de si la razón de la progresión formada por los términos coincide o no con $1+i$.

Comenzamos con el caso más concreto. Veamos qué ocurre si $q = 1 + i$

$$A(C;q=1+i)_{\infty]i} = \lim_{n\to\infty} A(C;q=1+i)_{n]i} = \lim_{n\to\infty} nC\,(1+i)^{-1}$$

Observamos que este límite no existe. El valor tiende a ∞. Inicialmente, puede llamar la atención la diferencia respecto del caso de las rentas constantes. En ellas, era posible depositar una cantidad inicial y retirar a perpetuidad capitales constantes al final de cada periodo, aunque inicialmente pudiera sorprender que fuera así. Recuérdese el ejercicio 4.1. Lo que no vemos ahora que no ya es posible es retirar a perpetuidad cantidades que vayan creciendo a una tasa $q = 1 + i$. La conclusión es que $A(C;q=1+i)_{\infty]i}$ no existe.

Si hemos comprendido el último párrafo, seguramente seremos capaces de predecir qué ocurrirá si $q > 1 + i$. Si no es posible, a cambio de una cantidad inicial, retirar a perpetuidad cantidades que vayan creciendo a una tasa $q = 1 + i$, con menos razón será posible si las cantidades aumentan a un ritmo aún más rápido.

Comprobémoslo:

$$A(C; q > 1+i)_{\infty\rceil i} = \lim_{n\to\infty} A(C; q > 1+i)_{n\rceil i} = \lim_{\substack{n\to\infty \\ q>1+i}} \mathrm{C}\ \frac{1-\left(\frac{q}{1+i}\right)^n}{1+i-q}$$

Si observamos, n sólo aparece en el término $\left(\frac{q}{1+i}\right)^n$, donde $\frac{q}{1+i} > 1$, puesto que $q > 1+i$. Por lo cual, si $n \to \infty$, $\left(\frac{q}{1+i}\right) \to \infty$.

Por tanto, $\frac{1-\left(\frac{q}{1+i}\right)^n}{1+i-q}$ también tenderá a ∞, puesto que el numerador tiende a $-\infty$ y el denominador es negativo.

Luego confirmamos que, tal y como esperábamos, $A(C; q > 1+i)_{\infty\rceil i}$ no existe.

El único caso en el que podría existir el valor de una renta perpetua con términos variables en progresión geométrica es aquél en el que la razón de la progresión, q, sea menor que $1+i$. Se trata ahora de obtener el siguiente límite:

$$A(C; q < 1+i)_{\infty\rceil i} = \lim_{n\to\infty} A(C; q < 1+i)_{n\rceil i} = \lim_{\substack{n\to\infty \\ q<1+i}} \mathrm{C}\ \frac{1-\left(\frac{q}{1+i}\right)^n}{1+i-q}$$

Puesto que ahora $q < 1+i$, se verifica que $\frac{q}{1+i} < 1$, y el término $\left(\frac{q}{1+i}\right)^n$ tiende a cuero cuando $n \to \infty$.

Si alguien tiene dificultad en intuirlo, puede multiplicar 0,5 por sí mismo y observar cómo cada vez va quedando la mitad y se va aproximando más y más a cero.

Por lo tanto:

$$A(C; q < 1+i)_{\infty\rceil i} = \lim_{n\to\infty} A(C; q < 1+i)_{n\rceil i} = \lim_{\substack{n\to\infty \\ q<1+i}} \mathrm{C}\ \frac{1-\left(\frac{q}{1+i}\right)^n}{1+i-q} = \mathrm{C}\ \frac{1}{1+i-q}$$

La conclusión de este apartado es que el valor actual de una renta pospagable perpetua con términos variables en progresión geométrica sólo existe si la razón de la progresión, q, es menor que $1+i$, y en ese caso, el valor es:

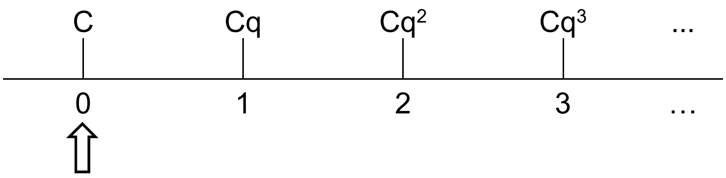
$$\boxed{A(C; q < 1+i)_{\infty\rceil i} = \mathrm{C}\ \frac{1}{1+i-q}}$$

Este resultado tiene especial aplicación en la teoría financiera. El ejercicio 4.5. trata de acercarnos a esta aplicación.

Puede comprobarse que la expresión que se obtuvo para las rentas de cuantía constante es el caso particular en que q=1. Esto es: $A(C=1; q=1)_{n\rceil i} = a_{n\rceil i}$.

Determinación del valor en el origen (valor actual de una renta inmediata) de una renta prepagable, perpetua, con términos variables en progresión geométrica:

La representación de la renta en un eje temporal en este caso quedaría así:



La notación coincidiría con la del caso anterior, salvo en que incluiríamos la diéresis que nos indica que la renta es prepagable, el valor se obtendría, como siempre, multiplicando el valor de la renta análoga pospagable por uno más el tanto.

$$\ddot{A}(C;q<1+i)_{\infty\rceil i}=(1+i).A(C;q<1+i)_{\infty\rceil i}=\mathrm{C}\,\frac{(1+i)}{1+i-q}$$

Determinación del valor en momentos diferentes al origen de rentas con términos variables en progresión geométrica.

Tal y como se estudió en la valoración de rentas constantes, basta proyectar el valor desde el origen hasta el momento en el que se quiere valorar la renta.

$$d/A(C;q)_{n\rceil i} = (1+i)^{-d}.A(C;q)_{n\rceil i} \qquad d/\ddot{A}(C;q)_{n\rceil i} = (1+i)^{-d}.\ddot{A}(C;q)_{n\rceil i}$$

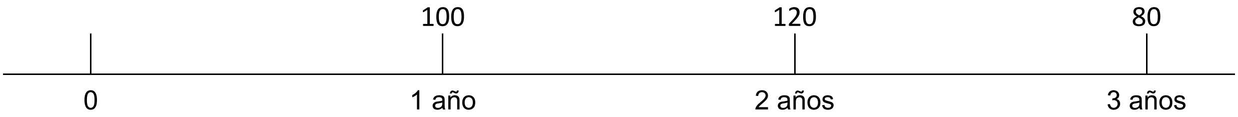
$$d/A(C;q)_{\infty\rceil i} = (1+i)^{-d}.A(C;q)_{\infty\rceil i} \qquad d/\ddot{A}(C;q)_{\infty\rceil i} = (1+i)^{-d}.\ddot{A}(C;q)_{\infty\rceil i}$$

$$S(C;q)_{n\rceil i} = (1+i)^{n}.A(C;q)_{n\rceil i} \qquad \ddot{S}(C;q)_{n\rceil i} = (1+i)^{n}.\ddot{A}(C;q)_{n\rceil i}$$

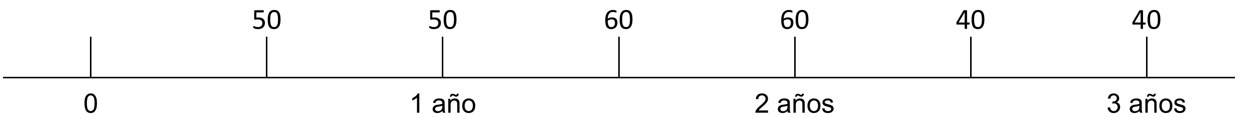
$$K/S(C;q)_{n\rceil i} = (1+i)^{K}.S(C;q)_{n\rceil i} \qquad K/\ddot{S}(C;q)_{n\rceil i} = (1+i)^{K}.\ddot{S}(C;q)_{n\rceil i}$$

4.4. Valoración de rentas fraccionadas con leyes compuestas y tanto de valoración constante i

En lugar de definir el concepto de renta fraccionada, vamos a pensar si intuimos qué puede significar. Partimos de una renta determinada. Por ejemplo:



Imagina que te pidieran fraccionarla por semestres. ¿Qué harías? Quizá darías la siguiente renta:

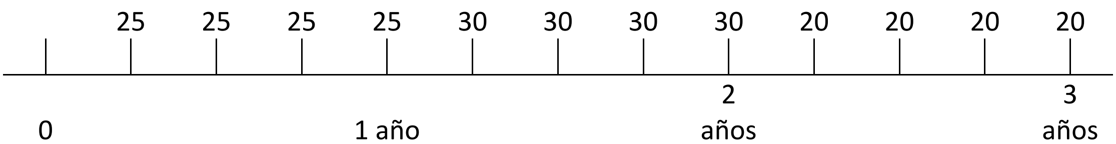


¿Y crees que esta renta tiene el mismo valor que la primera?

Bien, pues efectivamente, esto es fraccionar una renta. Pero eso no quiere decir que las dos rentas tengan el mismo valor.

No tiene el mismo valor entregar (o recibir) 100€ al final de cada año, que 50€ al final del primer semestre y 50€ al final del segundo semestre. Esta es la base de todas las matemáticas financieras.

¿Y si pidieran fraccionarla por trimestres? La renta fraccionada por semestres de la renta inicial sería la siguiente:



El valor de esta renta no coincidiría con el valor de la renta sin fraccionar, ni con el valor de la renta fraccionada por semestre.

¿Qué vamos a aprender de las rentas fraccionadas?

En primer lugar, aprenderemos qué es fraccionar una renta. Sólo fraccionaremos rentas anuales.

En segundo lugar, aprenderemos que el valor de una renta y de su fraccionada no coinciden, pero están relacionados. La relación entre una renta fraccionada y la renta sin fraccionar es muy sencilla y nos va a permitir "rentabilizar" lo que ya hemos aprendido.

Comenzaremos por indicar cuál es esa relación, cómo se aplica y en qué casos es útil. Finalmente, se indicará cómo demostrarla. La relación es la siguiente:

El valor de una renta fraccionada por m-ésimos de año = valor de la renta sin fraccionar x $\frac{i}{J(m)}$

Dónde:

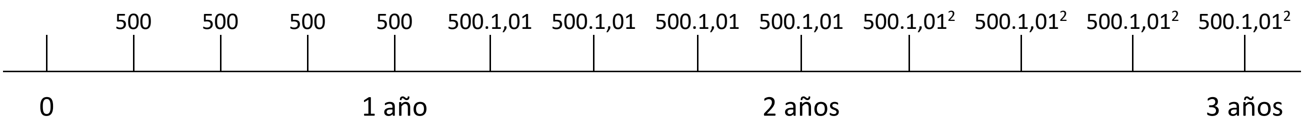
m es la frecuencia de fraccionamiento. Si la renta está fraccionada por semestres, diremos m=2.

i es el tanto anual al que estamos valorando

$J(m) = mi_m$ es el tanto nominal anual con frecuencia de fraccionamiento *m*

¿Para qué es útil esta relación? Trataremos de comprenderlo con ayuda de un ejemplo.

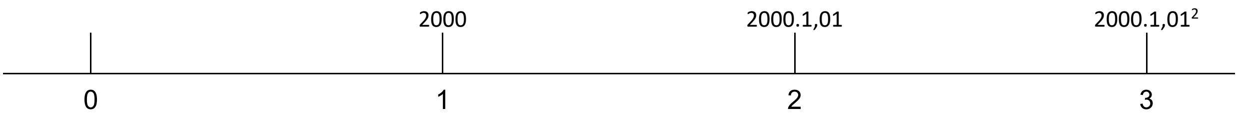
Propongamos una renta que se paga trimestralmente, pero aumenta anualmente a una tasa constante. Puede ser un pago de la empresa por mantenimiento. Durante el primer año, los pagos trimestrales son de 500€ y se incrementa anualmente un 1%. El esquema sería el siguiente:



En primer lugar, es importante tener claro que no se trata de una renta con términos variables en progresión geométrica. Para que lo fuera, todos los términos tendrían que poder obtenerse como el anterior multiplicado por un número (siempre el mismo), al que denominamos razón.

Claramente, esto no se cumple en esta renta. Sólo se multiplica por 1,01 cuando cambia el año.

Podemos interpretar esta renta como la fraccionada de una renta anual. La renta anual sería:



Esta renta no es la que queremos valorar, pero es interesante para nosotros, porque su valor está relacionado con la renta cuyo valor buscamos. Y esta renta anual sí tiene términos variables en progresión geométrica, luego podríamos obtener su valor. Su valor en t=0 sería:

$$A(2000; 1{,}01)_{3]i}$$

A partir del él, ya podríamos obtener el valor de su renta fraccionada, que sería:

$$A(2000; 1{,}01)_{3]i}\ \frac{i}{J(4)}$$

Si el valor del tanto anual fuera, por ejemplo, el 3%, el valor sería:

$$A(2000; 1{,}01)_{3]i}\ \frac{i}{J(4)} = 2000\,\frac{1-\left(\frac{1.01}{1+0.03}\right)^n}{1+0.03-1.01}\,\frac{0.03}{4i_4},\ \text{siendo } i_4 = (1+0{,}03)^{\frac{1}{4}} - 1$$

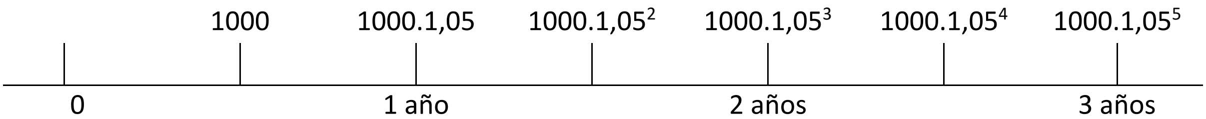
Diremos que hemos valorado nuestra renta como fraccionada de una renta con términos variables en progresión geométrica. En este caso, se utiliza una notación para la renta que incluye todos los datos de la renta sin fraccionar y añade, como superíndice entre paréntesis, la frecuencia de fraccionamiento. Para nuestro ejemplo, quedaría del siguiente modo:

$$A(2000;1{,}01)^{(4)}_{3\rceil i} = A(2000;1{,}01)_{3\rceil i}\ \frac{i}{J(4)}$$

El planteamiento general y la demostración de la obtención del valor actual de una renta con términos variables en progresión geométrica fraccionada se facilita en documento aparte.

Es importante resaltar que esta forma de trabajar nos será útil siempre que tengamos rentas que tienen términos constantes durante el año y varían anualmente a un ritmo constante. No constituyen rentas con términos variables en progresión geométrica porque la frecuencia de entrega de los capitales no coincide con la frecuencia de crecimiento de los capitales. Es importante no confundirlo con la valoración de rentas variables en progresión geométrica que no tienen frecuencia anual. Veamos un ejemplo.

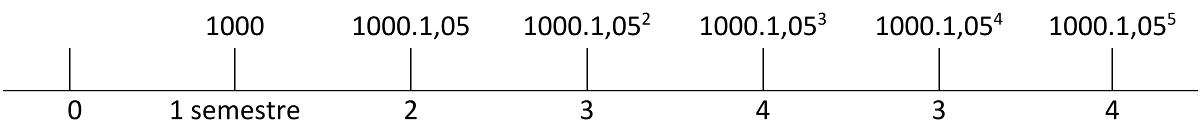
Sea una renta semestral con términos crecientes al 5%. Podríamos representar la renta así:



Se trata de una renta con términos en progresión geométrica semestral. No es una renta fraccionada. Su valor en el origen sería:

$$A(1000;1{,}05)_{6\rceil i_2}$$

La diferencia está en que ahora el ritmo de entrega de los pagos y el ritmo de crecimiento de los pagos coinciden. En ambos casos es semestral. Podría resultar más cómodo hacer el esquema marcando el tiempo en semestres, pero esquematizar de un modo otro no es determinante. Marcando el tiempo en semestres, el esquema quedaría:



Para finalizar, podemos comentar que podrían definirse rentas constantes fraccionadas, pero no lo necesitamos. Al fraccionar una renta constante, queda otra renta constante, que ya sabemos valorar. La utilidad para nosotros se deriva de que, al fraccionar una renta con términos variables en progresión geométrica, la renta que obtenemos no mantiene este patrón.

4.5. Aplicación a la toma de decisiones financieras. cálculo del VAN y la TIR

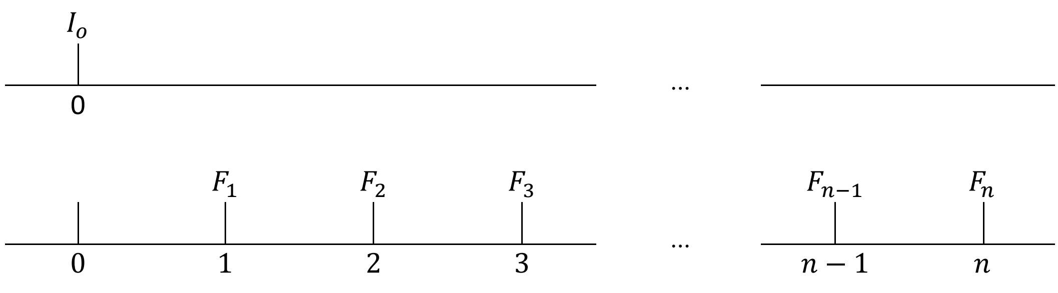
En la clasificación de operaciones financieras estudiada al comienzo del curso se distinguía entre operaciones de inversión, de financiación y mixtas, en función de su objetivo. Este apartado se centrará en el estudio de operaciones de inversión en las que se aplica la valoración de rentas.

La estructura habitual de una inversión es que requiera un desembolso inicial al comienzo y, a lo largo de la operación se generen cobros y pagos. Trabajaremos bajo el supuesto de que, desde el comienzo se conocen los cobros y pagos que se van a generar. En este caso, se dice que la inversión se desarrolla en ambiente de certeza. En la realidad, la situación no suele ser esta, sino que hay incertidumbre acerca de los pagos y cobros que se generarán. Se dice, entonces, que la inversión se desarrolla en ambiente de riesgo o en ambiente de incertidumbre. El estudio de inversiones en ambiente de riesgo o incertidumbre se plantea como generalización del caso en que se desarrollan en ambiente de certeza, que se considera el caso básico. En esta asignatura se estudiará el caso básico y se generalizará su estudio en asignaturas posteriores.

Al tratar teóricamente las inversiones, no se suele trabajar por separado con las corrientes de cobros y pagos, sino que, se entiende que, para cada periodo, puede restarse el cobro menos el pago y la diferencia se denomina Flujo neto de caja.

Vamos a representar por I_0 el desembolso inicial de una inversión que se desarrolla en ambiente de certeza y dura n periodos (podemos suponer que son años para el tratamiento teórico). Y representaremos por $F_1, F_2, \dots, F_n$ los flujos de caja netos que se generan al final de cada periodo.

El esquema de la operación de inversión sería el siguiente:



El tanto medio de rendimiento de esta inversión sería i^* tal que:

$$I_0 = F_1.(1+i^*)^{-1} + F_2.(1+i^*)^{-2} + F_3.(1+i^*)^{-3} + \cdots + F_{n-1}.(1+i^*)^{-(n-1)} + F_n.(1+i^*)^{-n}$$

Se puede simplificar la notación, sustituyendo la suma de valores descontados de los flujos de caja netos por una expresión que indique Valor actual de los flujos descontado al tipo i^*:

$$I_0 = VA_{i^*}(F_1, F_2, \dots, F_n)$$

El tanto medio de rendimiento de una inversión suele conocerse como TIR de la inversión. TIR se utiliza por tasa interna de rendimiento. El tanto medio de rendimiento o TIR de una inversión puede tomarse como punto de partida para la toma de diferentes decisiones financieras.

En primer lugar, para ordenar y establecer preferencias entre proyectos. Así, entre dos proyectos de inversión, en igualdad de condiciones, será preferible aquella que tenga una TIR mayor.

En segundo lugar, para tomar la decisión de si se emprende o no un determinado proyecto. Para tomar este tipo de decisiones, es necesario haber fijado previamente qué rentabilidad debe alcanzar un proyecto para que sea aceptable. Esta rentabilidad se denomina rentabilidad exigida, y la representaremos por i_e.

Fijada la rentabilidad exigida, la regla de decisión sería la siguiente:

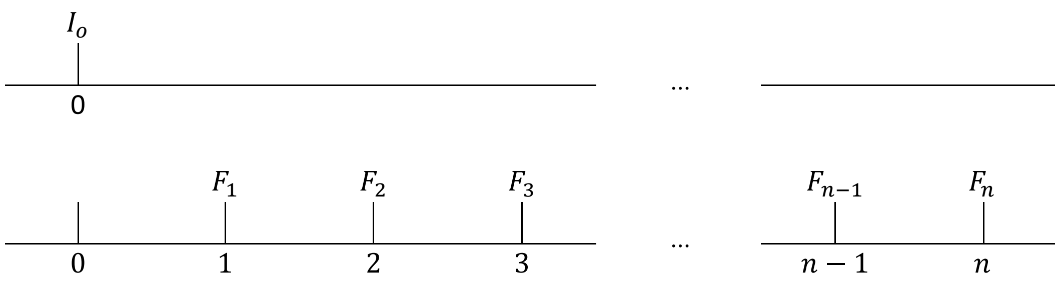
Si $i^*> i_e$, debemos emprender el proyecto de inversión

Si $i^*< i_e$, no debemos emprender el proyecto de inversión

Para fijar la rentabilidad exigida para un proyecto se toman en consideración variables como el coste de los recursos financieros que se necesitan para emprender el proyecto o las rentabilidades ofrecidas en los mercados. La determinación de la rentabilidad exigida excede del objetivo de esta asignatura y supondremos siempre que se trata de un dato ya determinado por la empresa.

Además de decidir con un criterio basado en el cálculo de la TIR, es posible tomar la decisión apoyándose en otro concepto, en este caso novedoso, denominado Valor actual neto del proyecto o VAN. El VAN de un proyecto se define como el valor descontado hasta el momento actual de todos los cobros menos el valor descontado de todos los pagos.

Continuamos suponiendo que el esquema de la operación de inversión es el siguiente:



El Valor actual neto del proyecto quedaría definido del siguiente modo:

$$\text{VAN} = -I_0 + F_1.(1+i)^{-1} + F_2.(1+i)^{-2} + \cdots + F_{n-1}.(1+i)^{-(n-1)} + F_n.(1+i)^{-n}$$

Y la regla de decisión sería la siguiente:

Si VAN > 0, debemos emprender el proyecto de inversión

Si VAN < 0, no debemos emprender el proyecto de inversión

Esta regla es muy intuitiva. Tener valor es bueno. Si es positivo, el proyecto merece la pena. Si es negativo, no debemos seguir adelante con él.

Sin embargo, si reflexionamos, podemos darnos cuenta de que esta regla no es seria. Si no nos indican con qué tipo de interés tenemos que descontar, podemos conseguir el VAN que queramos.

Obsérvese que, si se descuenta con la TIR, el valor del VAN sería cero.

VAN $(descontando\ al\ tipo\ i^{*}) = -I_0 + F_1.(1+i^{*})^{-1} + F_2.(1+i^{*})^{-2} + \cdots + F_n.(1+i^{*})^{-n}$= 0

De hecho, en algunos textos, se define la TIR como el tipo de interés que anula el VAN. Para nosotros era más natural definirlo como tanto medio efectivo, que es un concepto ya conocido.

Ahora, es importante recordar que, como ya se ha comentado en varias ocasiones, si se descuenta a un tipo más alto, el valor actual es más bajo.

Teniendo en cuenta esta relación, si descontamos a un tipo menor que TIR, el VAN será positivo y, si descontamos a un tipo mayor que la TIR, el VAN será negativo.

VAN $(descontando\ con\ i < i^{*}) = -I_0 + F_1.(1+i)^{-1} + F_2.(1+i)^{-2} + \cdots + F_n.(1+i)^{-n} > 0$

VAN $(descontando\ con\ i > i^{*}) = -I_0 + F_1.(1+i)^{-1} + F_2.(1+i)^{-2} + \cdots + F_n.(1+i)^{-n} < 0$

Obsérvese que, tal cual se ha presentado la regla de decisión del VAN, permitiría todo tipo de manipulaciones. Por ejemplo, si tengo interés en que un proyecto poco rentable salga adelante, lo descuento con un tipo de interés muy bajito y consigo un valor positivo… Esto no sería serio. Es necesario fijar el tipo al que hay que descontar para determinar el VAN si queremos que sea útil para tomar decisiones de inversión.

Para que el valor del VAN sea útil para tomar decisiones de inversión, debe calcularse descontando los flujos de caja con la rentabilidad exigida, que hemos denominado i_e. Entonces sí queda bien definida nuestra regla de decisión:

Si VAN $(descontando\ al\ tipo\ \ i_e\ )$ > 0, debemos emprender el proyecto de inversión

Si VAN $(descontando\ al\ tipo\ \ i_e\ )$ < 0, no debemos emprender el proyecto de inversión

De hecho, podemos comprobar que esta regla nos llevaría a las mismas decisiones que si hubiéramos utilizado la regla basada en la TIR.

Efectivamente, si VAN $(descontando\ al\ tipo\ \ i_e\ )$ > 0, esto implica que la rentabilidad exigida es inferior a la TIR. La rentabilidad del proyecto, medida por la TIR, supera la rentabilidad exigida. Esto es, i^{*}> i_e, y los dos criterios nos invitan a emprender el proyecto de inversión.

En cambio, si VAN $(descontando\ al\ tipo\ \ i_e\ )$ < 0, esto implica que la rentabilidad exigida es superior a la TIR. La rentabilidad del proyecto, medida por la TIR, es inferior a la rentabilidad exigida. Esto es, i^{*}< i_e, y los dos criterios nos desaconsejan emprender el proyecto de inversión.

Tema 5. Préstamos

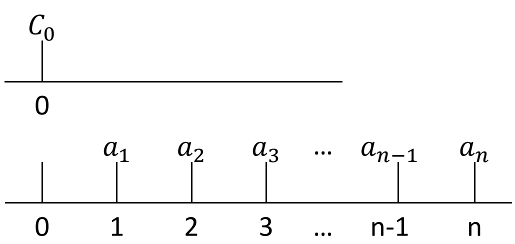
5.1. Concepto y planteamiento general

5.1.1. Concepto y caso objeto de estudio

Un préstamo es un tipo de operación financiera. Posiblemente, el tipo más importante. La definición más general de préstamo es las siguiente: se trata de una operación financiera con prestación única.

Al capital único de la prestación se le denomina capital prestado y a los capitales de la contraprestación términos amortizativos.

En este tema no vamos a estudiar todos los préstamos, sino que nos centraremos en préstamos a largo plazo, pactados con leyes financieras compuestas y, en los cuales la contraprestación está formada por n términos amortizativos (no necesariamente iguales) que se entregan al final de n periodos de igual duración. Los préstamos que estudiaremos se ajustarán al esquema siguiente:



Para el desarrollo teórico supondremos que los periodos son años y que el tanto pactado para la operación es constante. En los ejercicios prácticos generalizaremos al caso de que los periodos no sean años y los tantos puedan ser diferentes para los distintos periodos.

5.1.2. Ecuación de equivalencia financiera

Como cualquier operación financiera, todo préstamo tiene que verificar la **ecuación de equivalencia financiera** con el criterio pactado. Habitualmente se plantea la ecuación fijando p en el momento inicial, por lo que trabajamos con la ley de descuento compuesto. Denominando i al tanto aplicado, y la ecuación quedaría escrita del siguiente modo:

$$C_0 = a_1.(1+i)^{-1} + a_2.(1+i)^{-2} + a_3.(1+i)^{-3} + \cdots + a_{n-1}.(1+i)^{-(n-1)} + a_n.(1+i)^{-n}$$

Con esta ecuación consideramos el préstamo de manera global y tenemos una visión estática de la operación. Además, es importante tener una visión dinámica. Esto es, saber describir su evolución. La variable más importante para describir la evolución de una operación financiera es el saldo financiero.

5.1.3. Saldo financiero de un préstamo. Capital vivo.

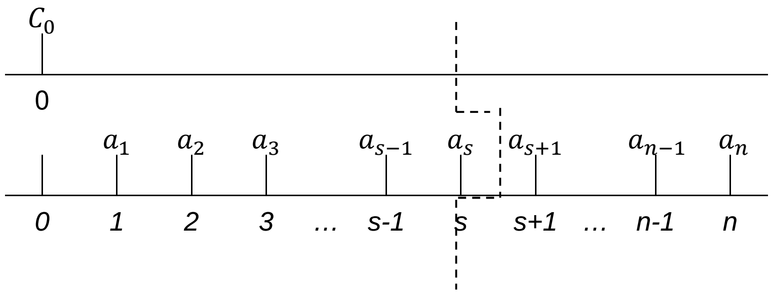
Un préstamo siempre es una operación de crédito unilateral. El deudor es siempre el prestatario y el saldo indica la cantidad que debería entregar el prestatario para reestablecer el equilibrio financiero de la operación. El saldo financiero de un préstamo se conoce habitualmente como capital vivo de préstamo en un momento determinado. El estándar es calcularlo siempre por la derecha, esto es, justo después de haber entregado cada término amortizativo.

Para calcular el capital vivo (saldo financiero) de un préstamo en un momento determinado pueden utilizarse los tres métodos estudiados en el tema 3: retrospectivo, prospectivo y recurrente. Al aplicar estos métodos, haremos un par de matizaciones.

En primer lugar, recordamos que, para calcular un saldo, debemos mantener el criterio pactado, tanto la ley financiera como el punto de valoración. Sin embargo, dado que las equivalencias con leyes compuestas son independientes del punto de valoración elegido, en el cálculo de capitales vivos fijaremos p en el momento en el que se está calculando el saldo. La razón es que el resultado es el mismo y el cálculo queda más sencillo. Puesto que el cálculo en los préstamos es, en muchas ocasiones, laborioso, merece la pena esta simplificación.

La segunda es que, cuando hablamos del método recurrente de obtención del saldo en un préstamo, habitualmente no nos referimos al obtenerlo a partir de algún saldo anterior conocido, como en el tema 3, sino a partir del saldo inmediatamente anterior.

Sobre el préstamo definido como caso objeto de estudio, vamos a calcular en capital vivo (saldo financiero por la derecha) en un momento intermedio de la operación $\tau = s$, donde s podría tomar el valor s=0, 1, 2, …, n. Representaremos el capital vivo por C_s.[2]



Cálculo del capital vivo por el método retrospectivo p= s

De acuerdo con este método, el valor en p del saldo es el valor en p de la prestación pasada menos el valor en p de la contraprestación pasada.

$$C_s = C_0.(1+i)^s - [a_1.(1+i)^{s-1} + a_2.(1+i)^{s-2} + a_3.(1+i)^{s-3} + \cdots + a_{s-1}.(1+i) + a_s]$$

[2] Obsérvese que el saldo en el momento inicial, s=0, será el capital prestado, C_0. Por otro lado, el saldo en el momento final s=n, siempre será C_n=0, puesto que, si no fuera así, el préstamo no habría finalizado.

Cálculo del capital vivo por el método prospectivo p= s

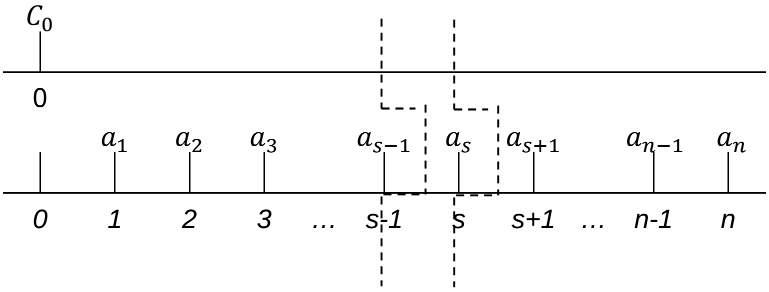
De acuerdo con este método, el valor en p del saldo es el valor en p de la contraprestación futura menos el valor en p de la prestación futura.

$$C_s = a_{s+1}.(1+i)^{-1} + a_{s+2}.(1+i)^{-2} + \cdots + a_{n-1}.(1+i)^{-(n-1-s)} + a_n.(1+i)^{-(n-s)}$$

El método prospectivo suele resultar bastante cómodo para determinar el capital vivo de los préstamos.

Cálculo del capital vivo por el método recurrente p= s

Como se ha indicado, en este contexto, entenderemos como método recurrente la obtención del capital vivo (saldo) C_s a partir del capital vivo del periodo inmediatamente anterior, C_{s-1}, que se supone conocido.



De acuerdo con este método, el valor en p del saldo (C_s) es el valor en p del saldo anterior conocido (C_{s-1}), más el valor en p de los capitales de la prestación de los capitales de la prestación que han vencido desde entonces (entre $s-1$ y s) menos el valor en p de los capitales de la contraprestación que han vencido desde entonces (entre $s-1$ y s).

$$C_s = C_{s-1}.(1+i) - a_s$$

5.1.4. Cuotas de interés y cuotas de amortización

5.1.4.1. Definición

En los préstamos se suelen definir unas magnitudes o variables que ayudan a estudiar su evolución. No son capitales. Por el momento, lo más importante es no olvidar su definición.

La primera de estas definiciones es la de **cuotas de interés**. Se denomina cuota de interés al interés generado en un periodo sobre la deuda pendiente al comienzo de dicho periodo. Se representa por I_s.

$$\boldsymbol{I_s = C_{s-1}.i}$$

donde s puede tomar los valores 1, 2, 3, …, n.

La segunda definición es la de **cuotas de amortización**. Se denominará cuota de amortización a la disminución del capital vivo entre dos periodos consecutivos. Estas variables suelen representarse como A_s.

$$\boldsymbol{A_s = C_{s-1} - C_s}$$

donde s puede tomar los valores 1, 2, 3, …, n.

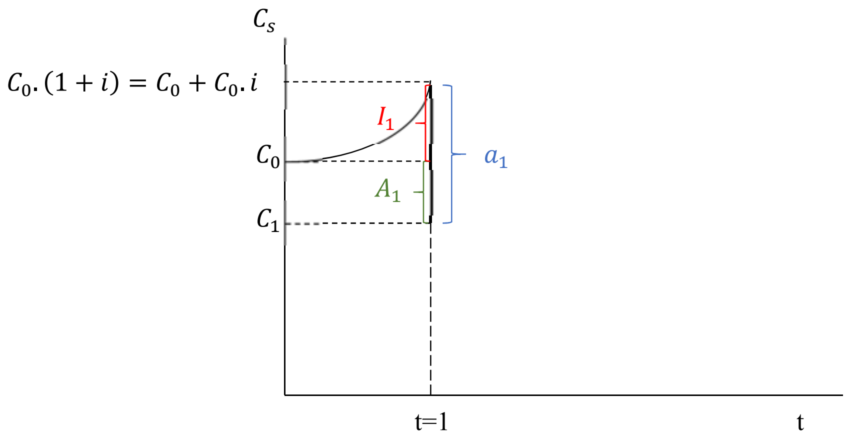
Para intuir mejor la utilidad de estas magnitudes, trataremos de describir minuciosamente la evolución de un préstamo, apoyándonos en una representación gráfica.

5.1.4.2. Representación gráfica de la evolución de las magnitudes

En el momento inicial de un préstamo, el prestamista entrega C_0€. Cuando transcurre el tiempo, la deuda va aumentando y, al final del periodo, justo antes de que el prestatario entregue el primer capital, la deuda tendrá un valor de $C_0.(1+i) = C_0 + C_0.i$.

En ese momento, el prestatario entrega el capital de cuantía a_1, por lo que el importe de la deuda será $C_1 = C_0.(1+i) - a_1$.

Podemos representarlo gráficamente, midiendo el tiempo en el eje de abscisas y el capital vivo (saldo) en el eje de ordenadas.



La representación gráfica puede ayudar a observar como el término amortizativo cumple dos finalidades:

La primera es pagar los intereses generados en el periodo cuya cuantía es $I_1 = C_0.i$

La segunda es disminuir la deuda pendiente. La parte del término que no se ha destinado a pagar los intereses generados reduce el capital vivo. Esta es la cuota de amortización $A_1 = C_0 - C_1$

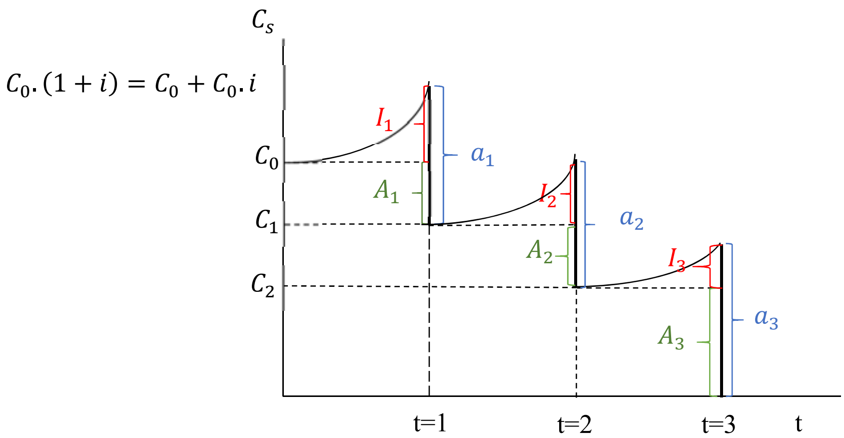
Veremos que esta estructura se repite periodo tras periodo. El término amortizativo siempre es la suma de la cuota de interés y la cuota de amortización del periodo:

$$\boldsymbol{a_s = I_s + A_s,\ para\ s = 1, 2, \dots, n}$$

Se ha finalizado el primer periodo con una deuda de C_1, y los intereses generados en el segundo periodo serán inferiores a los del primero, ya que la deuda es menor: $I_2 = C_1.i$. En ese momento el prestatario entrega el segundo término amortizativo, a_2, y la parte del término que no se destina a pagar intereses, reduce la deuda: $a_2 - I_2 = A_2$, donde $A_2 = C_1 - C_2$.

El segundo periodo finaliza con un capital vivo de cuantía C_2, y los intereses generados en el tercer periodo serán: $I_3 = C_2.i$. En ese momento el prestatario entrega el tercer término amortizativo, a_3, que se podrá descomponer como suma de las dos cuotas: $a_3 = I_3 + A_3$, donde $A_3 = C_2 - C_3$.

Si suponemos que el préstamo dura tres años, la deuda al final de este tercer año, C_3, será igual a cero.



Esta representación puede ayudar a intuir las relaciones fundamentales entre las variables. Aunque todas las relaciones que vamos a presentar se pueden demostrar, aquí se buscará un enfoque intuitivo que permita trabajar con agilidad sobre un préstamo. Quien tenga interés en las demostraciones teóricas puede encontrarlas en textos de Matemáticas Financieras.

5.1.4.3. Aplicaciones de las cuotas de amortización

Vamos a apoyarnos en esta representación, para trabajar con las cuotas de amortización. Recordamos que no son capitales. Son la parte del capital que excede a la cuota de interés y, por tanto, la disminución de deuda de cada periodo. De manera informal, podemos decir que son los escalones de la escalera que marca la reducción de la deuda. De manera formal, decimos que definen la dinámica amortizativa.

Un primer requisito que deben cumplir es que *la suma de todas las cuotas de amortización debe ser el capital prestado*. De manera informal, podemos ver que la altura de la escalera tiene que ser la suma de las alturas de los escalones.

$$C_0 = A_1 + A_2 + \cdots + A_{n-1} + A_n$$

Puede recordar a la ecuación de equivalencia financiera planteada con los términos amortizativos, pero ahora no se descuenta, porque las cuotas de amortización no son capitales. Para incidir en el tema podría decirse que el capital prestado es la suma financiera de los términos amortizativos y es la suma aritmética de las cuotas de amortización.

Si son conocidas las cuotas de amortización, también pueden utilizarse para calcular el saldo financiero, en lugar de trabajar con los términos amortizativos. Supongamos que queremos determinar C_s, esto es, el capital vivo en el momento s. Ya hemos visto cómo determinarlo a partir de los capitales (los términos amortizativos). Ahora vamos a ver cómo podría determinarse a partir de las cuotas de amortización. En la práctica, se utilizará un camino u otro dependiendo del tipo de préstamo con el que estemos trabajando y de la información de la que dispongamos. Siempre serán válidos todos los caminos, pero suele haber algunos que resultan más sencillos que otros. No se demostrará teóricamente, sino que se buscará la intuición.

Si *partimos de las cuotas de amortización anteriores al momento* s, el saldo (la altura de la escalera) puede obtenerse restando a la altura inicial la altura de los escalones que ya se han descendido:

$C_s = C_0 - [A_1 + A_2 + \cdots + A_s]$, para $s = 1, 2, \dots, n$

Si partimos de las cuotas de amortización posteriores al momento s, el saldo (la altura de la escalera) puede obtenerse sumándolas. La altura de la escalera es la suma de las alturas de los escalones que aún no se han bajado:

$C_s = A_{s+1} + A_{s+2} + \cdots + A_n$, para $s = 1, 2, \dots, n$

Si conocemos la deuda que teníamos en el periodo anterior, C_{s-1}, basta restarle la altura del escalón que bajamos ahora, para llegar a la altura al final del periodo:

$C_s = C_{s-1} - A_s$, para $s = 1, 2, \dots, n$

Obsérvese que estas relaciones recuerdan a los métodos retrospectivo, prospectivo y recurrente, pero sin capitalizar ni descontar. Las cuotas de amortización no son capitales.

Quizá, ahora que estamos bastante familiarizados con las cuotas de amortización, como reducciones de deuda de cada periodo, sea buen momento para comentar una posible confusión terminológica. En muchas ocasiones, en la práctica a los términos amortizativos (los capitales de la contraprestación) se les denomina cuotas y a las cuotas de amortización también se les llama cuotas. Esto no ocurrirá en el entorno académicos, pero sí en el entorno bancario. El contexto dejará claro de qué se está hablando.

5.1.5. Comentarios finales

Antes de concluir el planteamiento general, recordamos, como la mayor novedad, la división de los términos amortizativos en cuota de interés y cuota de amortización.

$$\boldsymbol{a_s = I_s + A_s,\ para\ s = 1, 2, \dots, n}$$

$$\boldsymbol{I_s = C_{s-1} . i}$$

$$\boldsymbol{A_s = C_{s-1} - C_s}$$

En muchas ocasiones, se define una última variable que se denomina capital amortizado, se representa como M_s y se define como la diferencia entre el capital prestado el capital vivo.

$M_s = C_0 - C_s,\ para\ s = 1, 2, \dots, n$

Da una información interesante, pero no se recomienda utilizarla como punto de partida para otros cálculos.

Como comentario final de este planteamiento general, obsérvese la importancia del capital vivo. Conocidos los valores de C_s, $\mathrm{para\ s} = 1, 2, \dots, \mathrm{n}$, todas las magnitudes se obtendrían fácilmente a partir de ellos.

A continuación, se estudiarán casos particulares. Todo lo visto hasta ahora será siempre válido, pero, al exponer, no se repetirán todas las relaciones en todos los casos. Únicamente se resaltarán aquellas que sean más importantes porque queden simplificadas en cada caso particular.

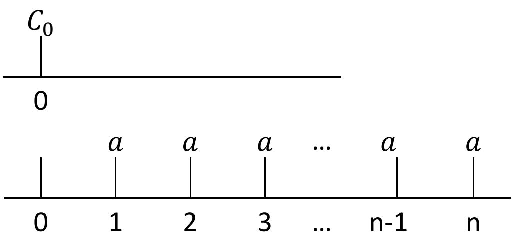
5.2. Métodos clásicos de amortización

5.2.1. Método de amortización francés (términos amortizativos constantes)

Este método de amortización se caracteriza porque el prestatario entrega la misma cantidad todos los periodos. Esto es:

$$a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1} = a_n = a$$

Este tipo de préstamos es el que más se utiliza en la práctica. El esquema del préstamo de n años quedaría así:



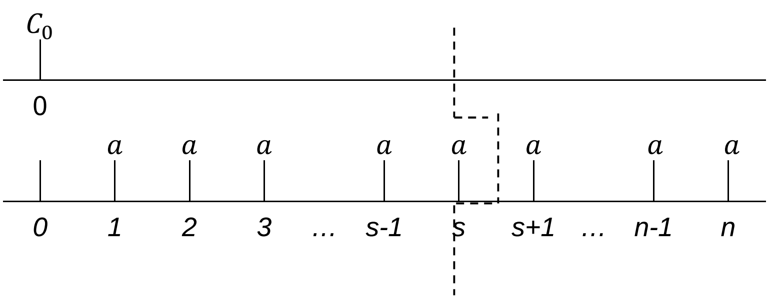
Lo primero que podemos observar es cómo se simplifica la ecuación de equivalencia financiera, por el hecho de que podemos utilizar la valoración de rentas constantes:

$$C_0 = a.a_{n]i}$$

Normalmente, los datos que conocemos de un préstamo suelen ser el capital prestando, el número de periodos en que queremos finalizar la operación y el tanto aplicado. En ese caso, nuestra incógnita sería la cantidad a pagar en cada periodo, que obtendríamos despejando de la ecuación anterior:

$$a = \frac{C_0}{a_{n]i}}$$

También quedan simplificadas las expresiones para obtener el saldo financiero a partir de los métodos retrospectivo, prospectivo y recurrente en un momento intermedio, s, de la vida del préstamo:



Cálculo del capital vivo por el método retrospectivo p= s

$$C_s = C_0.(1+i)^s - a.s_{s]i}$$

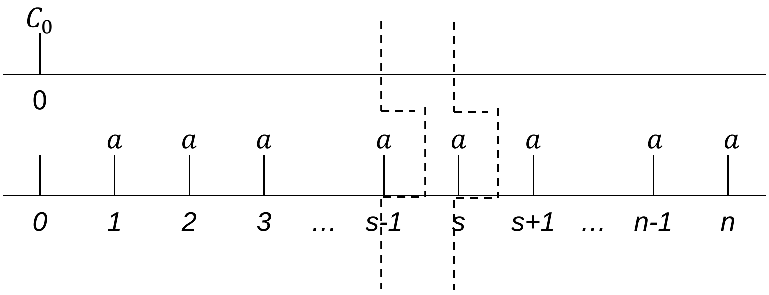
Obsérvese que en la expresión del método recurrente se utiliza s tanto para el valor final de la renta como para el número de periodos. Podría generar confusión, pero se mantienen las dos notaciones, puesto que son estándares y la coincidencia es anecdótica.

Cálculo del capital vivo por el método prospectivo p= s

$$C_s = a.a_{n-s\rceil i}$$

El método prospectivo es especialmente cómodo en este caso

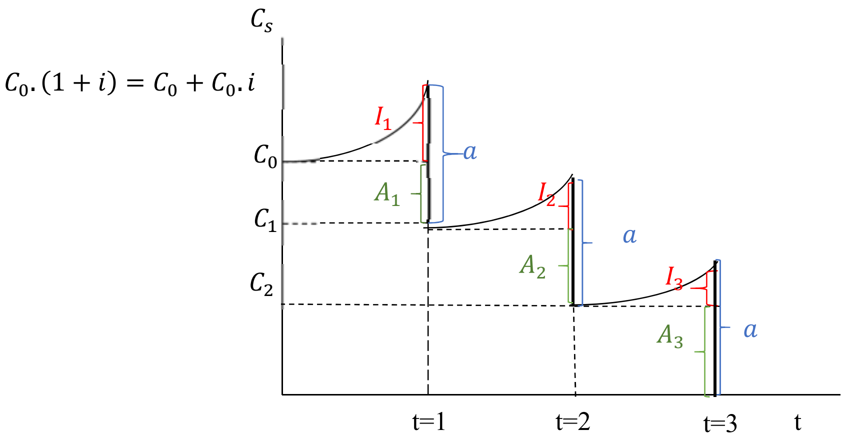
Cálculo del capital vivo por el método recurrente p= s



Conocida la deuda en el periodo anterior, C_{s-1}:

$$C_s = C_{s-1}.(1+i) - a$$

representación gráfica de la evolución del saldo sería similar al del caso general. Sólo debemos tener en cuenta que los pagos tendrían la misma cuantía entre sí.



Por supuesto, podemos descomponer los términos amortizativos (ahora constantes) en cuota de interés y cuota de amortización.

a=$I_s + A_s,\ para\ s = 1, 2, \ldots, n$ $\qquad I_s = C_{s-1}.i \qquad A_s = C_{s-1} - C_s$

Obsérvese que las cuotas de interés serán cada vez menores, puesto que el capital vivo va disminuyendo. Cada vez el interés consumirá una parte menor del término amortizativo y, por tanto, las cuotas de amortización son crecientes. Es sencillo demostrar cómo crecen las cuotas (en progresión geométrica de razón 1+i), pero no es un resultado fundamental y lo dejamos para quien tenga curiosidad.

Es habitual recoger toda la información de las variables de un préstamo en un cuadro, que se denomina cuadro de amortización de un préstamo.

Se recomienda construir en Excel el cuadro de amortización del ejercicio primero del tema de préstamos. Se trata de un préstamo amortizado por el método francés, con una duración de 5 años, valorado al tipo de interés del 10%. Inicialmente, partiríamos del cuadro en blanco:

número de años	capital prestado	tanto de interés
5	100.000	0,1

Año	Anualidad	Cuota de Intereses	Cuota de Amortización	Capital Amortizado	Capital Vivo
0					100.000,00
1					
2					
3					
4					
5					

El primer paso será determinar la cuantía del término amortizativo constante y completar la columna correspondiente. Al pagarse por años, puede denominarse anualidad.

$$a = \frac{100.000}{a_{5\rceil 0,1}} = 26.379{,}75$$

número de años	capital prestado	tanto de interés
5	100.000	0,1

Año	Anualidad	Cuota de Intereses	Cuota de Amortización	Capital Amortizado	Capital Vivo
0					100.000,00
1	26.379,75				
2	26.379,75				
3	26.379,75				
4	26.379,75				
5	26.379,75				

A continuación, podemos determinar la cuota de interés del primer periodo, con su definición:

número de años	capital prestado	tanto de interés
5	100.000	0,1

Año	Anualidad	Cuota de Intereses	Cuota de Amortización	Capital Amortizado	Capital Vivo
0					100.000,00
1	26.379,75	=F6*E3			
2	26.379,75				
3	26.379,75				
4	26.379,75				
5	26.379,75				

Obsérvese que conviene anclar la celda de tipo de interés, para poder copiar la celda hacia abajo.

El paso siguiente podría ser obtener la cuota de amortización del primer periodo, restando al total pagado la cantidad que ha ido destinada al pago de intereses.

número de años	capital prestado	tanto de interés
5	100.000	0,1

Año	Anualidad	Cuota de Intereses	Cuota de Amortización	Capital Amortizado	Capital Vivo
0					100.000,00
1	26.379,75	10.000,00	16.379,75		
2	26.379,75				
3	26.379,75				
4	26.379,75				
5	26.379,75				

Conocida la cuota de amortización, es inmediato obtener el capital vivo de periodo siguiente, restándosela a la deuda pendiente que había al comienzo del periodo.

número de años	capital prestado	tanto de interés
5	100.000	0,1

Año	Anualidad	Cuota de Intereses	Cuota de Amortización	Capital Amortizado	Capital Vivo
0					100.000,00
1	26.379,75	10.000,00	16.379,75		83.620,25
2	26.379,75				
3	26.379,75				
4	26.379,75				
5	26.379,75				

La cuota de interés del segundo periodo se calcularía a partir de la deuda que tenemos al final del primer año:

número de años	capital prestado	tanto de interés
5	100.000	0,1

Año	Anualidad	Cuota de Intereses	Cuota de Amortización	Capital Amortizado	Capital Vivo
0					100.000,00
1	26.379,75	10.000,00	16.379,75		83.620,25
2	26.379,75	8.362,03			
3	26.379,75				
4	26.379,75				
5	26.379,75				

De esta manera, podríamos seguir trabajando periodo tras periodo. Si las celdas se han anclado convenientemente, bastaría copiar arrastrando con el ratón, para completar los periodos hasta en quinto, en el que la deuda final pendiente debería ser nula.

número de años	capital prestado	tanto de interés
5	100.000	0,1

Año	Anualidad	Cuota de Intereses	Cuota de Amortización	Capital Amortizado	Capital Vivo
0					100.000,00
1	26.379,75	10.000,00	16.379,75		83.620,25
2	26.379,75	8.362,03	18.017,72		65.602,53
3	26.379,75	6.560,25	19.819,50		45.783,03
4	26.379,75	4.578,30	21.801,44		23.981,59
5	26.379,75	2.398,16	23.981,59		0,00

La columna del capital amortizado aporta una información redundante. Es la diferencia entre los 100.000€ prestados inicialmente y el capital vivo. Se recomienda cumplimentarla al final.

número de años	capital prestado	tanto de interés
5	100.000	0,1

Año	Anualidad	Cuota de Intereses	Cuota de Amortización	Capital Amortizado	Capital Vivo
0					100.000,00
1	26.379,75	10.000,00	16.379,75	16.379,75	83.620,25
2	26.379,75	8.362,03	18.017,72	34.397,47	65.602,53
3	26.379,75	6.560,25	19.819,50	54.216,97	45.783,03
4	26.379,75	4.578,30	21.801,44	76.018,41	23.981,59
5	26.379,75	2.398,16	23.981,59	100.000,00	0,00

Es importante saber llegar a las magnitudes sin necesidad de obtener el cuadro completo. Se recomienda tratar de resolver el resto de los apartados del ejercicio primero del tema.

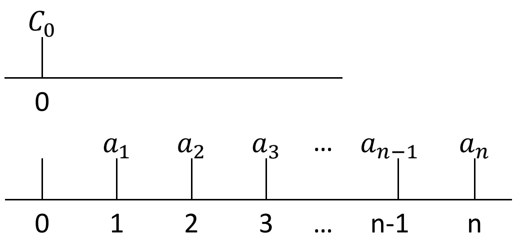
5.2.2. Método de amortización italiano (cuotas de amortización constantes)

Este método de amortización se caracteriza porque la reducción de deuda es la misma en todos los periodos. Esto es:

$$A_1 = A_2 = \dots = A_n = A$$

En este caso, las cantidades a pagar serán variables: $a_s = I_s + A,\ para\ s = 1, 2, \dots, n$

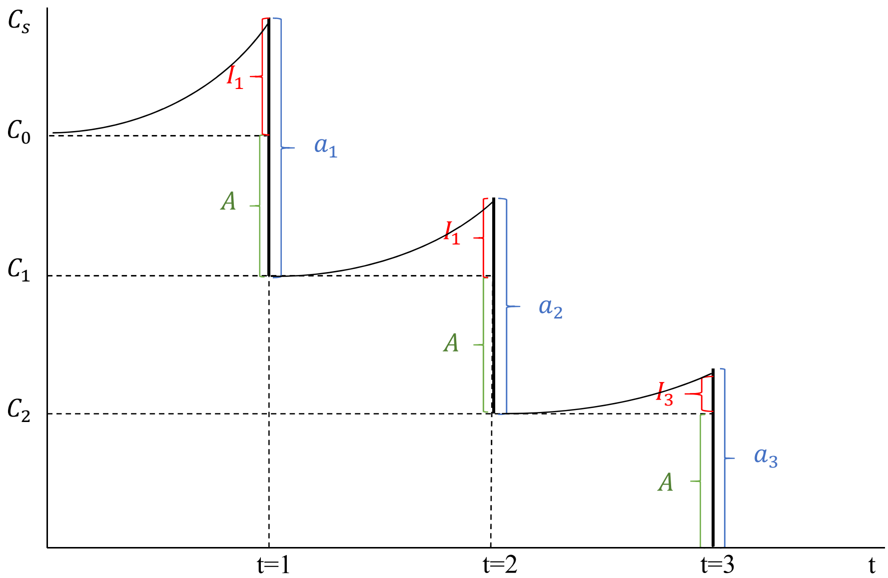
De hecho, se puede ver que los pagos serán cada vez menores, puesto que a la cuota constante se le suman las cuotas de interés que serán decrecientes. El esquema y la ecuación de equivalencia financiera no tendrán simplificación respecto del caso general.



$$C_0 = a_1.(1+i)^{-1} + a_2.(1+i)^{-2} + a_3.(1+i)^{-3} + \dots + a_{n-1}.(1+i)^{-(n-1)} + a_n.(1+i)^{-n}$$

Tampoco habrá ninguna simplificación en el cálculo del saldo por los métodos retrospectivo, prospectivo y recurrente. Por esta razón, no se repiten aquí.

En la representación de la evolución del saldo, ahora será constante la reducción de deuda de cada periodo ("la altura de los escalones de la escalera").



Las expresiones que quedan simplificadas en este caso son las relacionadas con las cuotas de amortización. Así, la condición de que su suma sea el capital prestado quedará:

$$C_0 = n.A$$

El estudio de estos préstamos suele comenzar determinando el valor de la cuota constante como:

$$A = \frac{C_0}{n}$$

También quedarán simplificadas las expresiones para determinar el saldo partiendo de las cuotas de amortización, al tener todas ellas la misma cuantía.

Si *partimos de las cuotas de amortización anteriores al momento* s en el que determinamos el saldo, su valor será:

$$C_s = C_0 - s.A, \text{ para } s = 1, 2, \dots, n$$

Si partimos de las cuotas de amortización posteriores al momento s, el saldo se puede obtener como:

$$C_s = (n - s).A, \text{ para } s = 1, 2, \dots, n$$

Si partimos de la deuda que teníamos en el periodo anterior, C_{s-1}, quedará:

$$C_s = C_{s-1} - A, \text{ para } s = 1, 2, \dots, n$$

Obsérvese que, por cualquiera de estos métodos, conocido el valor de la cuota constante es inmediato conocer los saldos (capitales vivos). Y, conocidos los capitales vivos, se determinan las cuotas de interés a partir de su definición: $I_s = C_{s-1}.i$. Conocidas las cuotas de amortización y las cuotas de interés, los términos amortizativos pueden calcularse como la suma de las dos cuotas. Luego, todas las variables relevantes quedarían determinadas.

Para construir un cuadro de amortización de un préstamo amortizado por el método de cuotas de amortización constantes no se seguiría en mismo orden que en el método de amortización francés. Podría ser cómodo empezar por las cuotas de amortización constantes, capitales vivos, cuotas de interés y términos amortizativos como suma de las dos cuotas de amortización. En cualquier caso, es importante también aprender a obtener una magnitud concreta sin necesidad de elaborar todo el cuadro de amortización.

5.2.3. Método americano (todas las cuotas de amortización, menos la última son nulas)

Este método de amortización es importante porque se utiliza mayoritariamente para los títulos de Deuda Pública a largo plazo.

La descripción dada del método es que $A_1 = A_2 = \dots = A_{n-1} = 0$.

A partir de esta condición vamos a deducir el valor del resto de las variables del préstamo.

¿Cuál será el valor de la última cuota de amortización del préstamo?

Para encontrar la respuesta, basta recordar que la suma de todas las cuotas de amortización debe ser el capital prestado, C_0. Si todas las anteriores son nulas, el valor de la última cuota de amortización debe tomar este valor: $A_n = C_0$.

¿Cómo evolucionará el capital vivo de este préstamo?

Para encontrar la respuesta, debemos recordar que las cuotas de amortización nos indican la reducción de la deuda pendiente, del capital vivo, del saldo: $A_s = C_{s-1} - C_s$. El hecho de que las $n-1$ primeras cuotas sean nulas nos informa de que los $n-1$ primeros periodos el saldo no varía y se mantiene igual al capital prestado: $C_1 = C_2 = \dots = C_{n-1} = C_0$.

En el último periodo, la cuota es $A_n = C_0$. La deuda se reduce en esta cuantía: $C_n = C_0 - C_0 = 0$. De hecho, si la deuda no fuera nula, no estaríamos en el final del préstamo.

¿Cuál será el valor de las cuotas de interés?

Partimos de la definición: $I_s = C_{s-1}.i$, para $s = 1, 2, \dots, n$

$$I_1 = C_0.i$$

$I_2 = C_1.i$, pero puesto que el capital vivo no había cambiado $C_1 = C_0$, y la cuota del segundo periodo, $I_2 = C_0.i$, coincide con la del primer periodo.

Podríamos repetir el razonamiento para el tercer periodo $I_3 = C_2.i$, pero puesto que el capital vivo no había cambiado $C_2 = C_0$, $I_3 = C_0.i$.

Podríamos seguir periodo a periodo hasta el último.

$I_n = C_{n-1}.i$, pero $C_{n-1} = C_0$, y la cuota de interés del último periodo coincide con todas las anteriores, $I_n = C_0.i$.

Luego, la conclusión es que en un préstamo que se amortiza por el método americano, todas las cuotas de interés tienen el mismo valor:

$$I_1 = I_2 = \ldots = I_n = C_0.i$$

¿Y cuál será, por último, el valor de los términos amortizativos?

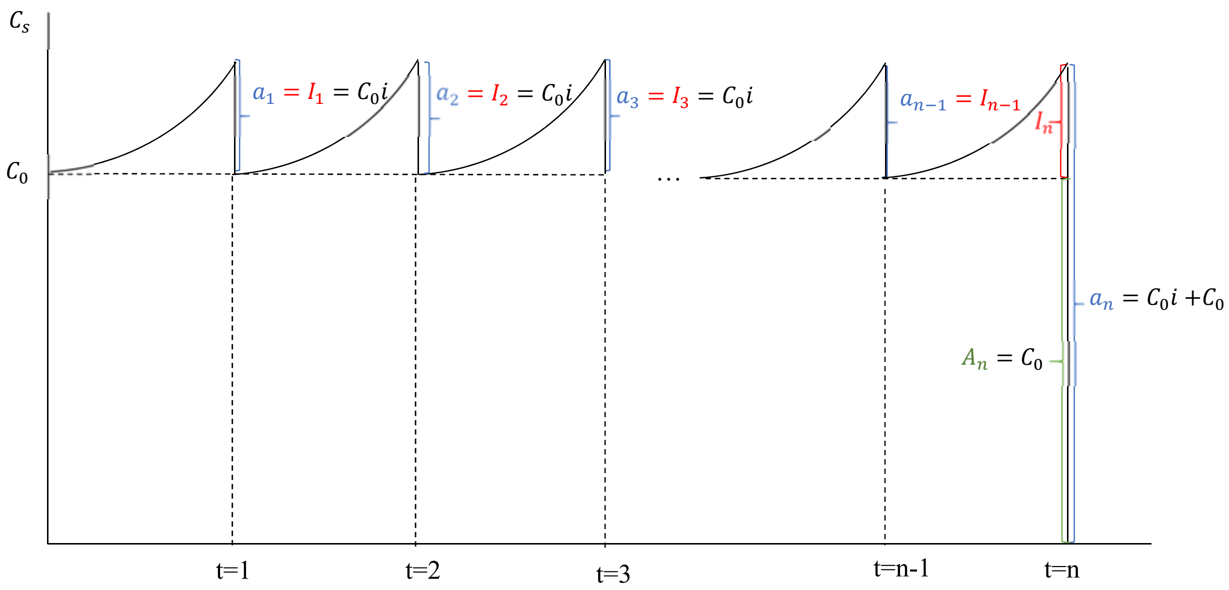
Lo obtendremos como suma de la cuota de amortización y la cuota de interés. Salvo en el último periodo, la cuota de amortización es nula, por lo que los términos amortizativos coincidirán con la cuota de interés:

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-1} = C_0.i$$

El último término amortizativo será la suma de la cuota de interés $I_n = C_0.i$ y la cuota de amortización $A_n = C_0$.

$$a_n = C_0.i + C_0$$

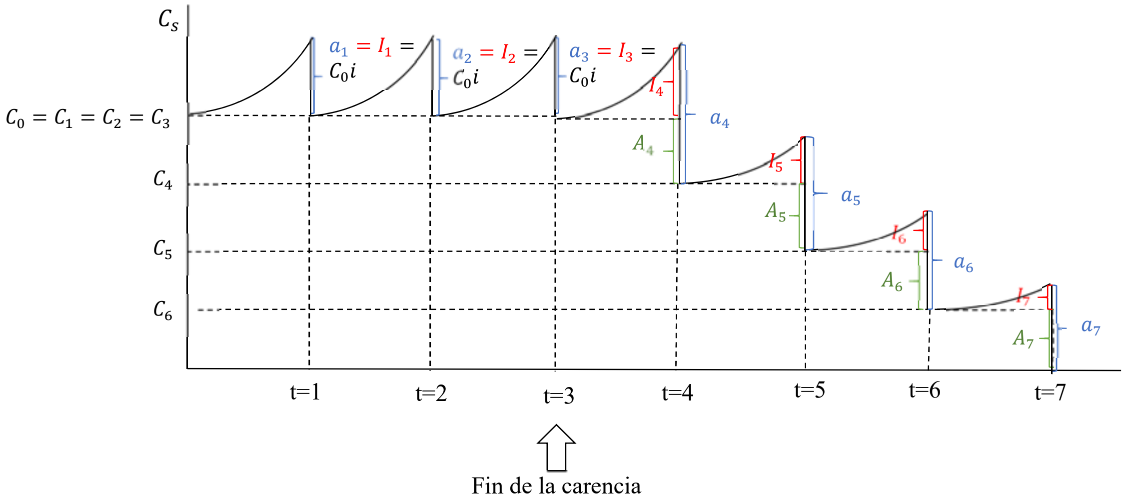
Para finalizar, veamos la forma tan característica de un préstamo de tipo americano de la representación de la evolución del capital vivo:



5.2.4. Préstamos con k periodos de carencia (k cuotas de amortización nulas)

Si un préstamo tiene los k primeros periodos de carencia, comienza como si fuera un préstamo americano, pero a diferencia de este, no se amortiza toda la deuda en un solo periodo, sino en los n-k periodos restantes.

A continuación, se da la representación gráfica de un préstamo de 7 años con 3 de carencia.



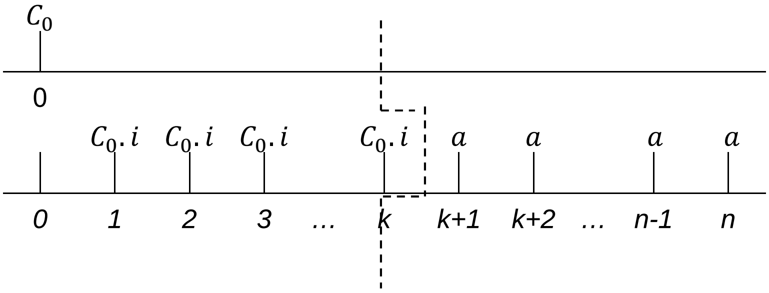
Las magnitudes durante el periodo de carencia tomarían los siguientes valores:

$$C_1 = C_2 = \ldots = C_k = C_0 \qquad I_1 = I_2 = \ldots = I_k = C_0 . i \qquad a_1 = a_2 = \ldots = a_k = C_0 . i$$

Después de la carencia, puede utilizarse cualquier método de amortización. Para calcular las magnitudes, es importante tener presente que el saldo al final de la carencia sigue es el capital prestado.

Caso particular a) Después de la carencia, los términos amortizativos son constantes.

El esquema de la operación quedaría así:



La forma más cómoda de determinar el valor de a es plantear la ecuación del capital vivo en t=k (cuyo valor sabemos que es C_0) por el método prospectivo, y despejar.

$$C_k = C_0 = a.\,a_{n-k\rceil i} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{C_0}{a_{n-k\rceil i}}$$

Obsérvese la analogía con la determinación de a en el método francés (sin carencia).

Caso particular b) Después de la carencia, las cuotas de amortización son constantes.

La forma más cómoda de determinar el valor constante de las cuotas de amortización de los términos posteriores a la carencia, que llamamos A, es plantear el cálculo del capital vivo en t=k (cuyo valor sabemos que es C_0) a partir de las cuotas de amortización futuras, y despejar.

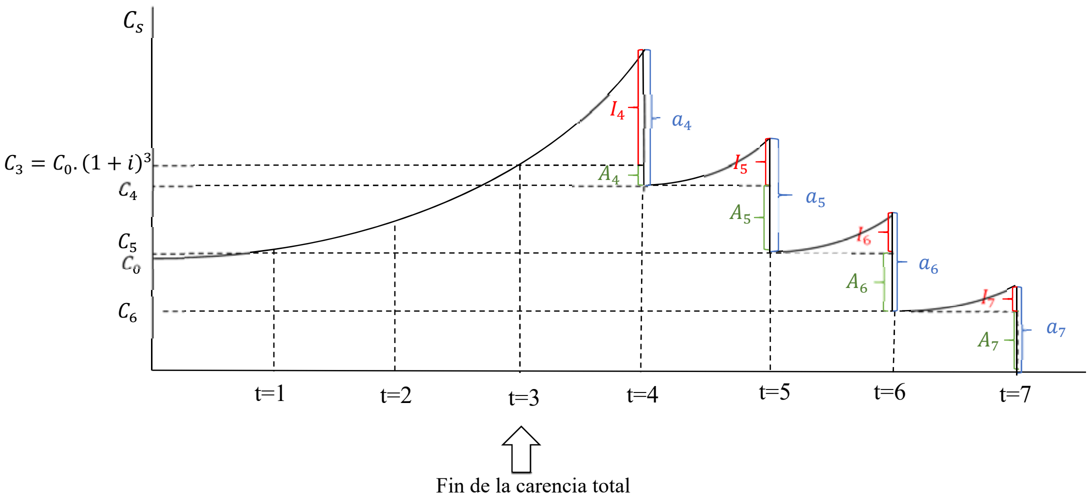
$$C_k = C_0 = (n-k).\,A \qquad A = \frac{C_0}{n-k}$$

Obsérvese la analogía con la determinación de A en el método italiano (sin carencia).

5.2.5. Préstamos con k periodos de carencia total (k términos amortizativos nulos)

Si un préstamo tiene los k primeros periodos de carencia total, durante ese periodo no se paga nada. A diferencia de la carencia (o carencia simple), no se pagan los intereses generados, por lo que la deuda va aumentando y, al final de la carencia, el capital vivo será $C_k = C_0.(1+i)^k$.

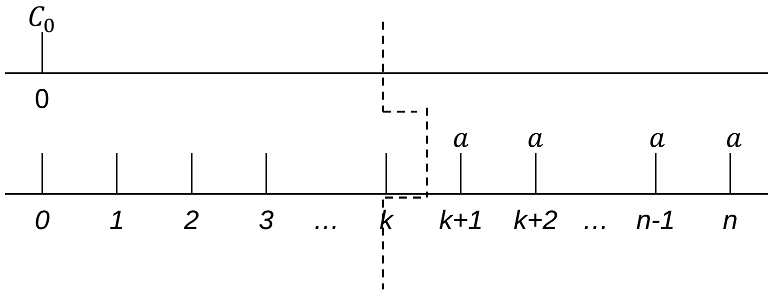
A continuación, se da la representación gráfica de un préstamo de 7 años con 3 de carencia total.



Durante la carencia, los términos amortizativos son nulos $a_1 = a_2 = \ldots = a_k = 0$. Ni siquiera se pagan las cuotas de interés y la deuda va aumentando. Las cuotas de amortización serían negativas. Después de la carencia, puede utilizarse cualquier método de amortización. Para calcular las magnitudes, es importante tener presente que el saldo al final de la carencia es el capital prestado capitalizado tantos periodos como dure la carencia total: $C_k = C_0.(1+i)^k$.

Caso particular a) Después de la carencia total, los términos amortizativos son constantes.

El esquema de la operación quedaría así:



La forma más cómoda de determinar el valor de a es plantear la ecuación del capital vivo en t=k (cuyo valor sabemos que es $C_0.(1+i)^k$por el método prospectivo, y despejar.

$$C_k = C_0.(1+i)^k = a.a_{n-k]i} \qquad \Rightarrow \qquad a = \frac{C_0.(1+i)^k}{a_{n-k]i}}$$

Obsérvese la analogía con la determinación de a en el caso de términos amortizativos constantes tras una carencia simple.

Caso particular b) Después de la carencia, las cuotas de amortización son constantes.

La forma más cómoda de determinar el valor constante de las cuotas de amortización de los términos posteriores a la carencia, que llamamos A, es plantear el cálculo del capital vivo en t=k (cuyo valor sabemos que es $C_0.(1+i)^k$) a partir de las cuotas de amortización futuras, y despejar.

$$C_k = C_0 \cdot (1+i)^k = (n-k) \cdot A \qquad A = \frac{C_0.(1+i)^k}{n-k}$$

Obsérvese la analogía con la determinación de A en el caso de cuotas de amortización constantes tras una carencia simple.

5.3. Préstamos hipotecarios

Un préstamo no tiene características especiales por el hecho de contar con garantía hipotecaria. Suelen tener gastos asociados característicos, pero las comisiones y gastos no afectan a la determinación de los términos amortizativos, que se calculan con el tanto pactado y aplicado a la operación pura. Los gastos pueden ser comisiones cobradas por la Entidad Financiera, gastos de tasación, que corren normalmente a cargo del prestatario (y que cobra la empresa tasadora) y otros gastos (notaría, registro, impuestos) que, con la legislación actual debe abonar la Entidad prestamista. Estas comisiones y gastos afectarán al coste y rentabilidad de las operaciones.

Los préstamos hipotecarios suelen tener un capital prestado de cuantía elevada para la capacidad adquisitiva del prestatario, por lo que suelen tener duración superior a la de otros tipos de préstamos. Por esta razón, las condiciones del mercado pueden cambiar mucho a lo largo de la vida del préstamo, lo que deriva en que, además de los préstamos pactados a un tipo de interés fijo, como los estudiados hasta el momento, se pactan frecuentemente préstamos a un tipo de interés variable, referenciado a un tipo de mercado. Vamos a estudiar este tipo de préstamos sobre un ejemplo.

Andrea, en un momento de su vida, considera la posibilidad de comprar una vivienda. Teniendo en cuenta los ahorros que tiene y el tipo de vivienda que desea, ha calculado que pediría un préstamo de 100.000€ y se plantea devolverlo a 25 años.

Tiene un familiar que trabaja en un banco y le pide que le informe al respecto. Su familiar le recomienda un préstamo a tipo de interés variable. Le facilita las condiciones que le ofrecería el banco y un cuadro de amortización. Sobre el cuadro, le hace el siguiente comentario: "Lo normal es aplicar un método de amortización francés. Fíjate en el primer año. Ese es real. Ahí tienes lo que pagarás mes a mes y lo que deberás al final del primer año. La información que aparece a partir del segundo año sólo es una estimación. Lo que pagues a partir del segundo año, dependerá de cómo evolucione el Euribor. La información que se da de los tipos que se aplican siempre es la del tanto nominal"

Las condiciones de préstamo son las siguientes:

Características del préstamo							
Principal (€)	Plazo (años)	Comisiones bancarias (apertura)	Interés nom. (primer añol)	Índice ref. (euribor)	Diferencial (+)	Cuota/mes (primer año)	T.A.E.
100.000	25	1%	3,50%	3,40%	0,50%	500,62	4,03%

A continuación, se facilita la primera parte del cuadro de amortización (los primeros tres años y medio). Junto a estas notas, se facilita un archivo de Excel. El cuadro completo está en la primera hoja, denominada "cuadro en t=0"

Año	Mes	Mensualidad	Cuota de interés	Cuota de amortización	Capital vivo
0					100.000,00
1	1	500,62	291,67	208,96	99.791,04
1	2	500,62	291,06	209,57	99.581,48
1	3	500,62	290,45	210,18	99.371,30
1	4	500,62	289,83	210,79	99.160,51
1	5	500,62	289,22	211,41	98.949,10
1	6	500,62	288,60	212,02	98.737,08
1	7	500,62	287,98	212,64	98.524,44
1	8	500,62	287,36	213,26	98.311,18
1	9	500,62	286,74	213,88	98.097,30
1	10	500,62	286,12	214,51	97.882,79
1	11	500,62	285,49	215,13	97.667,66
1	12	500,62	284,86	215,76	97.451,90
2	1	521,60	316,72	204,88	97.247,02
2	2	521,60	316,05	205,54	97.041,48
2	3	521,60	315,38	206,21	96.835,27
2	4	521,60	314,71	206,88	96.628,39
2	5	521,60	314,04	207,55	96.420,83
2	6	521,60	313,37	208,23	96.212,60
2	7	521,60	312,69	208,90	96.003,70
2	8	521,60	312,01	209,58	95.794,12
2	9	521,60	311,33	210,27	95.583,85
2	10	521,60	310,65	210,95	95.372,90
2	11	521,60	309,96	211,63	95.161,27
2	12	521,60	309,27	212,32	94.948,95
3	1	521,60	308,58	213,01	94.735,94
3	2	521,60	307,89	213,70	94.522,23
3	3	521,60	307,20	214,40	94.307,83
3	4	521,60	306,50	215,10	94.092,74
3	5	521,60	305,80	215,79	93.876,94
3	6	521,60	305,10	216,50	93.660,45

Andrea sabe algo de matemáticas financieras y querría simular el cuadro, pero no entiende qué es un préstamo con tipo de interés variable. Sí sabe trabajar con un préstamo a tipo fijo. Decide probar a calcular la mensualidad y el cuadro de amortización si el préstamo estuviera pactado a tipo fijo y su valor fuera el que le van a aplicar el primer año.

En la información se le indica que el tanto nominal que le van a aplicar el primer año es el 3,5%. Puesto que el préstamo se paga mensualmente, interpreta que este es el valor de $J(12)$. A partir de este dato, calcula la mensualidad que tendría un préstamo a tipo fijo con estas condiciones.

$$J(12) = 0{,}035 \Rightarrow i_{12} = \frac{0{,}035}{12} = 0{,}0029167$$

La ecuación de equivalencia financiera necesaria para determinar el valor de la mensualidad sería la siguiente:

$$100.000 = a.\, a_{300]0{,}0029167}$$

Despeja el valor de la mensualidad de la ecuación y obtiene a= 500,62. Comprueba, con satisfacción, que ha llegado al valor de la mensualidad que pagará el primer año. Bastaba trabajar como si el préstamo se hubiese pactado a tipo fijo con el valor que le aplicarán durante el primer año.

Animada por los buenos resultados, decide abrir un archivo de Excel y tratar de hacer el cuadro de un préstamo de 100.000€ a 25 años en el que se aplicase un tipo de interés nominal $J(12) = 0{,}035$. Es consciente de que este no sería su préstamo real, porque el suyo está pactado a tipo variable, pero empezar trabajando con este préstamo teórico le está dando buenos resultados hasta el momento. Este cuadro está en la segunda hoja del archivo de Excel. Su nombre es “préstamo teórico a tipo fijo”. Tal y como ella sospechaba, el primer año coincide exactamente con el del cuadro que le habían dado del banco. Ya sabe calcular cuánto pagaría a mes durante el primer año y cuándo debería al final de cada mes. En cualquier caso, le habían comentado que esta era la parte más importante del cuadro, porque todavía no se podía saber lo que pagaría a partir del segundo año.

Terminado el primer año, tendría una deuda de 97.451,90€, tal y como había visto ya en el cuadro del banco. El valor de la deuda pendiente al final del primer año le parece un dato interesante. Es la frontera entre lo que conoce en este momento (el primer año) y los años en los que todavía no entiende los cálculos. Recuerda que el valor de la deuda pendiente al final del primer año podía obtenerse sin necesidad de elaborar el cuadro de amortización y decide comprobarlo.

Primero comprueba por el método retrospectivo:

$$C_{12} = 100000.(1 + 0{,}0029167)^{12} - 500{,}62.\, s_{12]0{,}0029167} = 97.451{,}90€$$

Y, luego, por el método prospectivo:

$$C_{12} = 500{,}62.\, a_{12]0{,}0029167} = 97.451{,}90€$$

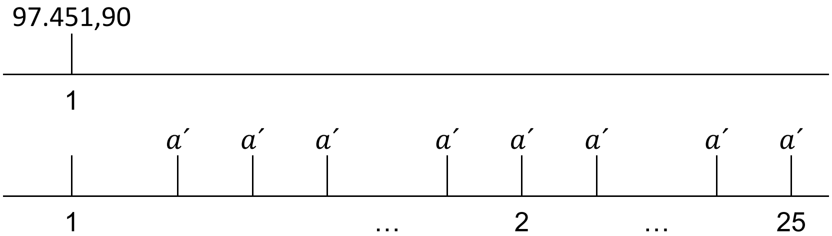
Le resultaba extraño aplicar el método prospectivo, porque se apoya en la parte del préstamo que no es real. Pero comprueba que cuadra y esto le alegra, ya que en los préstamos es más sencillo que el retrospectivo.

Llegada a este punto, le gustaría entender cómo van a calcular lo que pagará el segundo año. Habla con su familiar y le explica que el tipo de interés que le aplicarán se obtiene a partir del Euribor a un año. Esta es la media de los tipos de interés a los que los bancos de la zona euro se prestan dinero entre sí. El valor del Euribor va variando en el tiempo.

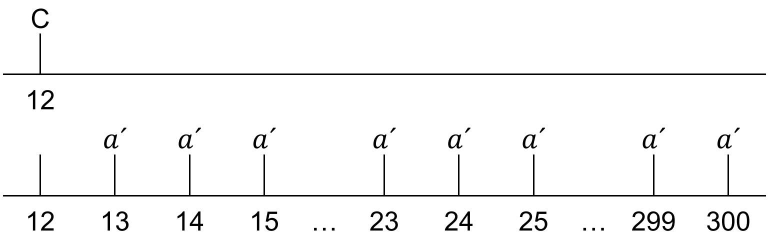
El tipo nominal que se aplica el segundo año se obtendrá sumando al valor del Euribor el diferencial que, como aparece en las condiciones, es del 0,5%. Así, si al final del primer año el Euribor fuera del 3%, el tipo nominal que se aplicaría el segundo año sería $J'(12) = 0{,}035$ y todo seguiría igual, porque el tipo aplicado no habría cambiado. En cambio, si al final del primer año el Euribor fuera del 2%, el tipo nominal que se aplicaría el segundo año sería $J'(12) = 0{,}025$ y el segundo año pagarías mensualidades menores que las del primero. En cambio, si al final del primer año el Euribor fuera del 4,5%, el tipo nominal que se aplicaría el segundo año sería $J'(12) = 0{,}05$ y el segundo año pagarías mensualidades superiores a las del primero.

Una vez que se sabe calcular el tipo de interés que se aplicará el segundo año, basta tener en cuenta la deuda que hay en ese momento y el número de meses en los que se va a devolver. Al igual que con los cálculos del momento inicial, se trabajará como si siempre fuese a aplicarse, en el futuro el mismo tipo de interés.

La situación en t=1 es que se deben 97.451,90€ y se amortizarán en 24 años (288 meses).



Obsérvese que la parte real es la que corresponde al segundo año. A partir del tercero los pagos dependerán del valor del Euribor en t=2. También podemos hacer el esquema en meses.



En cualquier caso, la ecuación para determinar el valor de a' sería la siguiente:

$$97.451{,}90 = a' . a_{288]i'_{12}}$$

Si, al final del primer año el Euribor fuera del 2%, el tipo nominal que se aplicaría el segundo año sería $J'(12) = 0{,}025$, y el tanto mensual sería $i'_{12} = \frac{J'(12)}{12} = \frac{0{,}025}{12} = 0{,}002083$. Entonces:

$$97.451{,}90 = a' . a_{288]0{,}002083} \Rightarrow a' = 450{,}32€$$

En el archivo de Excel puede encontrarse el cuadro del préstamo que quedaría en la hoja "Teórico desde t=1. Escenario A" y el cuadro que integra los dos primeros años en la hoja "Años 1 y 2 reales. Escenario A".

Si, al final del primer año el Euribor fuera del 4,5%, el tipo nominal que se aplicaría el segundo año sería $J'(12) = 0{,}05$, y el tanto mensual sería $i'_{12} = \frac{J'(12)}{12} = \frac{0{,}05}{12} = 0{,}004167$. Entonces:

$$97.451{,}90 = a'.\, a_{288]0{,}004167} \Rightarrow a' = 581{,}69€$$

En el archivo de Excel puede encontrarse el cuadro del préstamo que quedaría en la hoja "Teórico desde t=1. Escenario B" y el cuadro que integra los dos primeros años en la hoja "Años 1 y 2 reales. Escenario B".

Por lo tanto, en el momento t=1, conoceríamos la cantidad a pagar en los 12 meses siguientes, así como la deuda con la que llegaríamos al final del segundo año. En el Escenario A, el capital vivo en t=2 sería de 94.450,12€, mientras que, en el Escenario B, sería de 95.295,26€. Si en t=1, el Euribor fuera del 3%, el tanto nominal aplicado en el segundo año sería del 3,5% y el esquema del segundo año coincidiría con el del préstamo teórico elaborado en t=0 con tipo de interés constante y la deuda pendiente en t=2 sería de 94.813,17€.

Con este capital vivo y con 276 meses por delante, nos encontraríamos con la siguiente revisión del tipo de interés, de acuerdo con la cual se obtendrían los pagos del tercer año. El tipo de interés nominal a aplicar en el tercer año se obtendría sumando el diferencial al valor que tomase el Euribor en el momento t=2. Imaginemos que el Euribor en t=2 fuera del 2,5%. Entonces, el tercer año nos aplicarían un tanto nominal $J''(12) = 0{,}03$, y el tanto mensual sería $i'_{12} = \frac{J'(12)}{12} = \frac{0{,}03}{12} = 0{,}0025$.

La ecuación para determinar el pago del tercer año, en el Escenario A sería:

$$94.450{,}12 = a''.\, a_{276]0{,}0025} \Rightarrow a'' = 474{,}15\ € \text{ (Escenario AC)}$$

La ecuación para determinar el pago del tercer año, en el Escenario B sería:

$$95.295{,}26 = a''.\, a_{276]0{,}0025} \Rightarrow a'' = 478{,}40\ € \text{ (Escenario BC)}$$

En el archivo de Excel puede encontrarse los cuadros de los préstamos que quedarían en las hojas "Teórico desde t=2. Escenario AC", "Teórico desde t=2. Escenario BC" y el cuadro que integra los dos primeros años en la hoja "Años 1, 2 y 3 reales. Escenario AC", "Años 1, 2 y 3 reales. Escenario BC".

Así, sucesivamente, al final de cada año se determinarían los pagos del año siguiente en función del valor que tomase el Euribor.

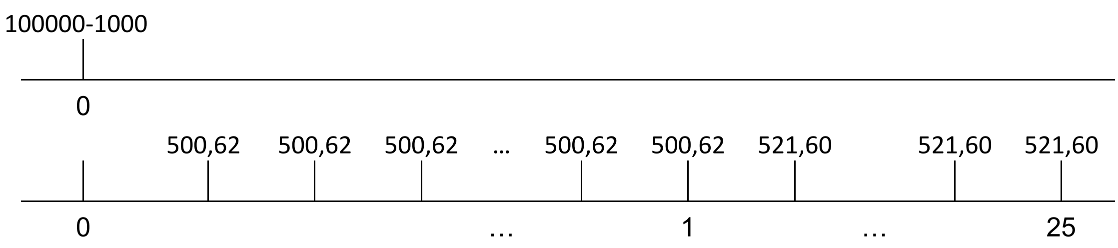
Andrea ya ha comprendido que, en t=0 sólo se podían conocer los datos del año 1, pero le queda la duda de cómo se elaboró el cuadro del préstamo que le facilitó el banco a partir del segundo año.

Su familiar le explica que, como no se sabe qué valores irá tomando el Euribor, de acuerdo con la normativa del Banco de España, los pagos a partir del segundo año se estimaron bajo el supuesto de que el valor del Euribor se mantuviera siempre en el valor que tenía en el momento de solicitar el préstamo. Comprueba que, el valor del Euribor en ese momento era de 3,40%. Si el Euribor tomase este valor al final del primer año, el tanto nominal a aplicar sería igual a $\hat{J}(12) = 0{,}039$ (Euribor + diferencial), y el tipo de interés mensual sería $\hat{\imath}_{12} = \frac{\hat{J}(12)}{12} = \frac{0{,}039}{12}$ = 0,003250. Y el pago se determinaría con a partir de la ecuación ya estudiada:

$$97.451{,}90 = \hat{a}.\, a_{288]0{,}003250} \Rightarrow \hat{a} = 521{,}60$$

Andrea revisa el cuadro inicial y ya entiende todo. De la información que recibió, únicamente le falta entender cómo se calcula la TAE. Su familiar le indica que se calcular con los criterios habituales. Será el tanto anual que hace equivalentes, con leyes compuestas que hace equivalentes los capitales que intercambiarán el cliente y la Entidad, por lo que incluirá tanto los capitales de la operación pura como las características comerciales bilaterales. Como al comienzo no se conocen los capitales de la operación pura, salvo los del primer año, se utilizará la estimación basada en el supuesto de que el índice de referencia (en este caso el Euribor) mantuviera su valor. Por esta circunstancia la TAE se denominará TAEVariable.

La única característica comercial bilateral que tiene el préstamo es una comisión de apertura de 1000€. Por lo tanto, el esquema para el cálculo de la TAEVariable será el siguiente:



Habría que buscar el tanto i_{12}^{*} tal que:

$$99000 = 500{,}62.\, a_{12]i_{12}^{*}} + 521{,}60.\, a_{288]i_{12}^{*}}.\,(1 + i_{12}^{*})^{-12}$$

La TAEVariable sería $i^{*} = (1 + i_{12}^{*})^{12} - 1$

Sabemos que i_{12}^{*} no puede despejarse de la ecuación. Puede obtenerse con Excel utilizando la función buscar objetivo.

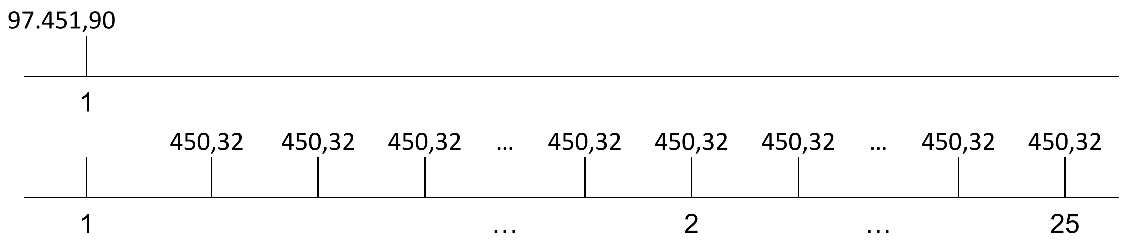
Puesto que, en este caso entre todos los pagos hay una diferencia de un mes, también puede obtenerse utilizando la función TIR. Basta escribir todas las cuantías de los capitales de la ecuación en una columna, con signos diferentes según estén en la prestación o en la contraprestación, de manera que entre dos capitales siempre haya el mismo intervalo de tiempo. En este caso sería un mes.

Lo más cómodo es añadir una columna al lado del cuadro de amortización, donde tenemos recogidos todos los capitales, salvo la comisión de apertura. La aplicación de la función TIR y la obtención de la TAE está en archivo de Excel en una hoja llamada "TAEVariable". El valor obtenido coincide con el facilitado en las condiciones: 4,03%.

Para terminar de estudiar todos los conceptos asociados a los préstamos con tipo de interés variable, únicamente quedaría el concepto de Coste efectivo remanente (CER). El CER es un tanto anual que como la TAEVariable hace equivalentes los capitales que intercambiarán el cliente y la Entidad, pero que no se calcula al comienzo de la operación, sino en los momentos en los que se revisa el tipo de interés.

El CER es una estimación del coste de lo que queda de operación, incorporando toda la información de la que se dispone. En el momento de revisar el tipo de interés se conocerán los términos amortizativos del año que comienza, pero no de los siguientes, por lo que se estimarán con la hipótesis de que el índice de referencia mantiene su valor en el último conocido.

Si quisiéramos obtener el CER transcurrido un año desde el comienzo de la operación en el escenario A (Euribor del 2% en t=1), el esquema de los capitales a tomar en consideración sería el siguiente:



Los capitales del próximo año (el segundo del préstamo, entre t=1 y t=2) son los que efectivamente se entregarán. Los capitales posteriores son una estimación bajo el supuesto de que el Euribor seguiría siendo del 2% durante toda la vida del préstamo. La ecuación para la obtención del CER en t=1 en el escenario A sería:

$$97.451{,}90 = 450{,}32.\, a_{288\rceil i_{12}^{CER1A}}$$

La obtención del valor del tanto mensual con la función TIR de Excel puede verse en la jora "CER en t=1. Escen A" del archivo adjunto. El resultado, $i_{12}^{CER1A} = 0{,}002083$ era de esperar, si recordamos cómo se obtuvo el valor de la mensualidad en este escenario:

$$97.451{,}90 = a'.\, a_{288\rceil 0{,}002083} \Rightarrow a' = 450{,}32€$$

El valor del Coste Efectivo Remanente en t=1 para este escenario sería el tanto anual equivalente:

$$i^{CER1A} = \left(1 + i_{12}^{CER1A}\right)^{12} - 1$$

El procedimiento sería el mismo para otros escenarios y para los siguientes periodos.

Tema 6. Operaciones de renta fija

6.1. Letras del Tesoro

Si buscamos en el sitio web del Tesoro Público información sobre las Letras del Tesoro, encontramos lo siguiente:

▾ Características de las Letras, Bonos y Obligaciones del Estado.

LETRAS: Son valores de renta fija a corto plazo (3-6-9 y 12 meses), se emiten a través de subastas. Generalmente, las Letras a 3 y 9 meses se subastan el cuarto martes de cada mes y las Letras a 6 y 12 meses se subastan generalmente el tercer martes de cada mes.

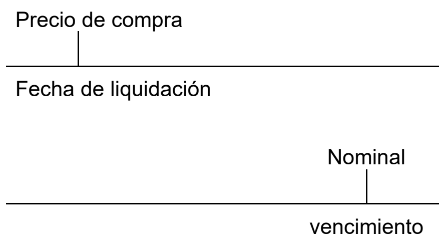
Se emiten al descuento por lo que el precio de compra será inferior al valor nominal, salvo en el caso de rentabilidades negativas.

VALOR NOMINAL: 1.000 € por título.

En caso de invertir una cantidad mayor, siempre ha de ser en múltiplos de 1.000 euros.

La rentabilidad obtenida por las Letras al final del periodo es la diferencia entre lo que se paga por ellas y lo que nos devuelven a fecha de vencimiento, que es el nominal solicitado, en este caso los 1.000 € .

En esta asignatura no vamos a interesarnos por todos los detalles de las letras del Tesoro, sino solamente por su modelización como operación financiera y por la medición de su rentabilidad. Las Letras del Tesoro tienen una estructura muy sencilla. Constituyen operaciones financieras simples. En ellas se intercambian dos capitales: el precio de compra a cambio del nominal. El momento en el que se entrega el precio de compra se denomina fecha de liquidación y el momento en el que se entrega el Nominal, se denomina fecha de vencimiento. El esquema de la operación de inversión Letras del Tesoro es el siguiente:



Como se indica la información del Tesoro Público, el Nominal tiene que ser múltiplo de 1.000€. En lo sucesivo, por simplificar, en los ejemplos supondremos un nominal de 1.000€.

Actualmente, los vencimientos son 3, 6, 9 y 12 meses, pero son vencimientos aproximados. La diferencia entre la fecha de vencimiento la fecha de liquidación se mide en días.

Los datos de las emisiones de Letras del Tesoro se publican en la página web del Tesoro Público. En el enlace Resultados de las últimas subastas se dan la información de la última emisión a cada plazo. Y en el enlace Resultados de subastas anteriores, actualmente, se da la información desde 2014. A continuación, se da la información de la subasta más antigua publicada en este momento. No vamos a trabajar con toda la información que se publica, sino solo con aquella que necesitamos para definir la operación.

LETRAS DEL TESORO

(Importes en millones de euros)

Plazo	12 MESES
Fecha subasta	21/01/2014
Fecha vencimiento	23/01/2015
Fecha de liquidación	24/01/2014
Nominal solicitado	7.134,46
Nominal adjudicado	2.960,33
Nominal adjudicado (2ª vuelta)	127,55
Precio mínimo aceptado	99,258
Tipo de interés marginal	0,740
Precio medio	99,272
Tipo de interés medio	0,726
Adjudicado al marginal	275,00
1er precio no admitido	99,255
Volumen peticiones a ese precio	100,00
Peticiones no competitivas	55,33
Efectivo solicitado	7.075,97
Efectivo adjudicado	2.938,63
Efectivo adjudicado (2ª vuelta)	126,62
Porcentaje de prorrateo	-
Ratio de cobertura	2,41
Anterior tipo marginal	0,905

Como se ha indicado, en los ejemplos, trabajaremos para un Nominal = 1.000€.

Identificamos como datos interesantes:

- la fecha de vencimiento, que la fecha en la que finaliza la operación con la entrega del Nominal:

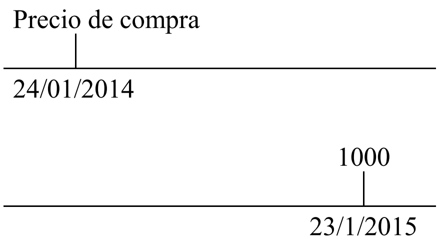
Fecha vencimiento	23/01/2015

- la fecha de liquidación, que la fecha en la que comienza la operación con la entrega del Precio:

Fecha de liquidación	24/01/2014

Observamos que la duración de la operación es de 364 días que, efectivamente, son aproximadamente los 12 meses de plazo que se indican.

Ya podemos completar la mayor parte del esquema:



Para completar el esquema, únicamente, nos falta conocer el precio. En la información, siempre se da el precio como porcentaje del Nominal. Si miramos la información, encontramos que aparecen dos precios:

Precio mínimo aceptado	99,258
Precio medio	99,272

La razón es que, efectivamente, no todos los inversores pagan el mismo precio, como consecuencia de que, como nos indicaban al comienzo, se emiten a través de subastas. Si buscamos la definición de subasta en el Glosario del Tesoro, encontramos:

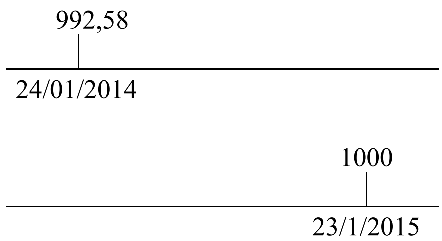
Subasta

Procedimiento de emisión utilizado con carácter general por el Tesoro. Los inversores presentan al emisor su peticiones, que pueden ser competitivas (refleja los precios que están dispuestos a pagar por los valores) o no competitivas (no reflejan dichos precios). El emisor decide el precio mínimo que acepta recibir, rechazando todas las peticiones a precios inferiores al mismo.

Las peticiones de Letras del Tesoro de los inversores deben informar de que solicitan Letras por un Nominal determinado (siempre múltiplo de 1.000€) y pueden indicar qué precio están dispuestos a pagar (se dice, entonces, que la petición es competitiva).

En la subasta de 21 de enero de 2014, de la que tenemos información, quienes ofrecieron un precio inferior al 99,258% del Nominal, no recibieron los títulos. Quienes consiguieron las Letras al precio más bajo fueron quienes ofrecieron 992,58€ por cada 1.000€ de Nominal. Esto es lo que significa que el precio mínimo aceptado fuera de 99,258.

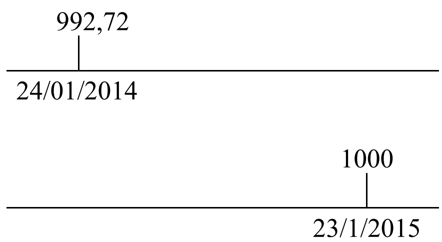
El esquema, para quienes compraron al precio mínimo aceptado, para 1.000€ de Nominal, sería el siguiente:



Los precios aceptados fueron todos los que superaron el valor de 99,258. De todos los precios aceptados se calcula una media, a la que se denomina precio medio. En la subasta de 21 de enero de 2014, el precio medio fue de 99,272. Como siempre, viene dado como porcentaje del Nominal. Este será el precio que pagarán:

- Quienes hicieron peticiones no competitivas. Esto es, indicaron el Nominal que querían, pero no dieron indicación del precio que estarían dispuestos a pagar
- Quienes hicieron peticiones competitivas y ofrecieron un precio igual o superior al precio medio.

El esquema, para quienes compraron al precio medio, para 1.000€ de Nominal, quedaría así:



Obsérvese que nadie pagará una cantidad superior al precio medio. Quieres indicaron en una petición competitiva un precio entre el mínimo y el medio, pagarán el precio que indicaron.

La rentabilidad de estas operaciones se mediría, del mismo modo que todas las operaciones financieras, por el tanto al que se hacen equivalentes los capitales entregados y recibidos. Sería necesario incluir todos gastos derivados de la operación y se elegiría la ley financiera que nos permitiera comparar o responder a la pregunta buscada.

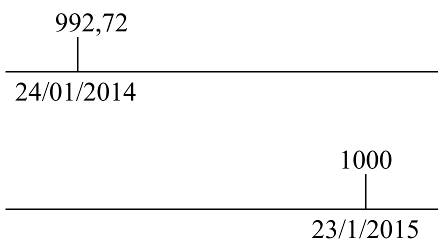
Además, en estas operaciones, estudiaremos el cálculo de la rentabilidad que publica el Tesoro en su información para quienes compraron al precio medio, que se denomina Tipo de interés medio y para quienes compraron al precio mínimo aceptado, que se denomina Tipo de interés marginal.

Los criterios utilizados por el Tesoro son los siguientes:

- Ley financiera:
  Descuento simple racional, cuando la operación es menor o igual a un año natural (lo que ocurre en la mayoría de las emisiones)
  Descuento compuesto, cuando la operación dura más de un año natural
- Convenio para pasar los días a años:
  Actual/360. Esto es, se cuentan los días naturales entre la fecha de liquidación y la fecha de vencimiento y se transforma en años dividiendo entre 360.
  En este convenio la forma de calcular el numerador y el denominador son inconsistentes, pero se ha utilizado de forma tradicional y se mantiene para trabajar con diversas operaciones financieras.

Podemos comprobar, con estos criterios el cálculo de los tipos medio y marginal de la subasta que hemos elegido a modo de ejemplo.

Para el cálculo del tipo medio, tomamos el esquema para el precio medio:



Puesto que la duración es menor de un año natural, el tanto se calculará con la ley financiera de descuento simple racional: $A(z) = \frac{1}{1+i\cdot z}$ con $z = t - p$

La duración es de 364 días, que expresaremos en años con el convenio Actual/360.

Situamos p en el inicio de la operación y la ecuación para el tipo de interés medio quedará:

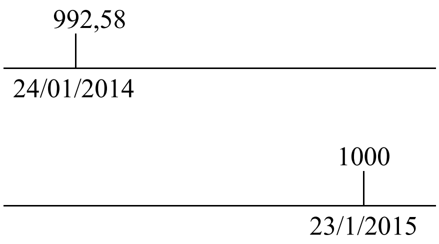
$$992{,}72 = 1000 \cdot \frac{1}{1+i^*_{medio}\cdot\frac{364}{360}}$$

Si despejamos el tipo de interés de esta ecuación, queda: i^*_{medio}=0,0072528

Expresado en tanto por ciento con tres decimales sería 0,725%.

Obsérvese que hay una ligera diferencia con el tipo publicado, que es del 0,726%. Es frecuente que ocurra así, porque no se publican todos los decimales del precio.

Para el cálculo del tipo marginal, tomamos el esquema para el precio mínimo aceptado:



Puesto que la duración es menor de un año natural, el tanto se calculará con la ley financiera de descuento simple racional: $A(z) = \frac{1}{1+i.z}$ con $z = p - t$

La duración es de 364 días, que expresaremos años con el convenio Actual/360.

Situamos p en el inicio de la operación y la ecuación para el tipo de interés marginal quedará:

$$992{,}58 = 1000 . \frac{1}{1+i^*_{marginal} \cdot \frac{364}{360}}$$

Si despejamos el tipo de interés de esta ecuación, queda: $i^*_{marginal}$= 0,00739332

Expresado en tanto por ciento con tres decimales sería 0,739%. Como en el caso anterior, hay una ligera diferencia con el tipo publicado del 0,740%.

Como comentario final, podemos observar que, desde hace un tiempo, la rentabilidad de las subastas de Letras del Tesoro es negativa. Excede el objetivo de nuestra asignatura explicar las causas. Podemos indicar que, como inversión, en sí mismas, no parecen atractivas y apuntar que son valiosas en determinadas carteras por su aportación reduciendo el nivel de riesgo.

6.2. Obligaciones y Bonos del Estado

Si buscamos en el sitio web del Tesoro Público información sobre las Obligaciones y Bonos del Estado, encontramos lo siguiente:

> - BONOS Y OBLIGACIONES: Son valores de renta fija a medio y largo plazo, se emiten a través de subastas. Los bonos y las obligaciones tienen las mismas características y funcionan igual, la única diferencia son los plazos.
>
> VALOR NOMINAL: 1.000 € por título.
>
> En caso de invertir una cantidad mayor, siempre ha de ser en múltiplos de 1.000 euros.
>
> BONOS: a 2, 3 y 5 años, se subastan generalmente el primer jueves de cada mes.
>
> OBLIGACIONES: a 10, 15 y 30 años, se subastan generalmente el tercer jueves de cada mes

Vemos elementos comunes con las Letras del Tesoro: son títulos de Deuda Pública, emitidos por subasta. Se paga por estos títulos el precio que corresponda (entre el precio mínimo aceptado en la subasta y el precio medio) en la fecha de liquidación. El nominal solicitado tiene que ser múltiplo de 1.000€.

Como primera diferencia con las Letras del Tesoro, tenemos el plazo de la operación.

La diferencia más importante desde el punto de vista de las matemáticas financieras es la estructura de la operación. Mientras que las Letras del Tesoro constituyen una operación simple, las Obligaciones y Bonos del Estado tienen estructura de préstamo americano. La única diferencia entre las Obligaciones y lo Bonos del Estado es el plazo. Por lo tanto, al final de cada año, el prestamista debe recibir los intereses generados en ese año y en el vencimiento del título recibirá los intereses del último año y la devolución del nominal.

Dentro de esta estructura de préstamo americano, podemos resaltar algunas características especiales. La primera característica curiosa es terminológica. Los intereses periódicos que recibe el tenedor del título suelen denominarse cupones.

Estos cupones (intereses) se determinan multiplicando el tipo de interés del Bono u Obligación por el nominal. El tipo al que se calcula el cupón es un dato esencial para definir la operación. En la información que facilita el Tesoro Público se da como DENOMINACIÓN junto a la letra B, si se trata de un bono o la letra O, si es una obligación.

Conocido vencimiento del título y el tipo del cupón, queda definida la contraprestación:

- El último capital se entrega en la fecha de vencimiento. Su cuantía será igual al Nominal (suponemos 1.000) más el importe del cupón (intereses).
- El penúltimo capital se entrega un año antes de la fecha de vencimiento. Su cuantía será igual al importe del cupón.
- Así sucesivamente cada cupón se entregaría un año antes, hasta completar el número total.

A continuación, se da una tabla informativa de una subasta de Bonos del Estado a 3 años. Al igual que en el caso de las Letras del Tesoro, nuestro objetivo actual no es entender todo, sino saber extraer la información que es relevante para nosotros.

BONOS DEL ESTADO

(Importes en millones de euros)

Mostrar

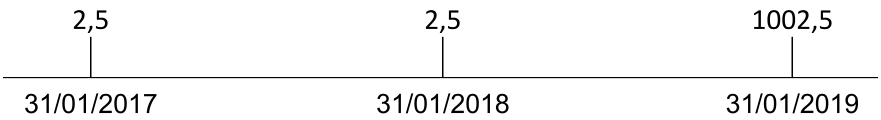
Plazo	3 AÑOS
Denominación	B 0,25%
Fecha subasta	17/03/2016
Fecha vencimiento	31/01/2019
Fecha de liquidación	22/03/2016
Nominal solicitado	2.644,74
Nominal adjudicado	1.159,74
Nominal adjudicado (2ª vuelta)	0,00
Precio mínimo aceptado	100,380
Tipo de interés marginal	0,116
Precio medio ex-cupón	100,394
Precio medio de compra	100,434
Tipo de interés medio	0,111
Adjudicado al marginal	475,00
1er precio no admitido	100,370
Volumen peticiones a ese precio	200,00
Peticiones no competitivas	4,74

Como se ha indicado, para identificar los capitales de la contraprestación, para un Nominal de 1000€, los datos relevantes son:

Plazo	3 AÑOS
Denominación	B 0,25%
Fecha vencimiento	31/01/2019

Los cupones tendrán un importe del 0,25% del nominal, esto es 2,50€.

El capital a vencimiento tendrá una cuantía de 1002,50€, un año antes, se entregará un cupón de 2,50€ y el año anterior el primero de los tres cupones, con el mismo importe. Podemos representarlo en un eje temporal:



En un préstamo americano, el capital único de la prestación estaría situada un año antes del primer cupón. El esquema de esta operación teórica sería el siguiente:

Sin embargo, una de las peculiaridades de este tipo de títulos es que el origen real de la operación no suele estar un año antes del primer cupón. Tomar esta fecha como referencia teórica sí es interesante y, en el futuro, nos referiremos a ella como origen teórico de la operación.

Sabemos que el origen real de la operación es la fecha en la que se entrega el capital único de la prestación, que es la fecha de liquidación. En este caso:

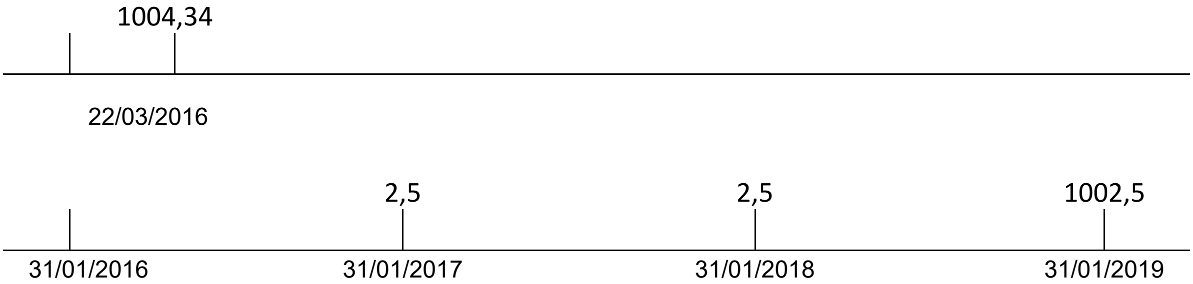
Fecha de liquidación	22/03/2016

La cuantía del capital de la prestación será el precio pagado. Vamos a suponer que el Bono se compró al precio medio (porque se hizo una petición no competitiva o se ofreció un precio mayor o igual que el medio). En la tabla informativa observamos que aparecen dos valores del precio medio. El que paga quien compra al precio medio es el llamado Precio medio de compra. Todos los precios vienen expresados como porcentaje de Nominal.

Precio medio de compra	100,434

Luego, para un Nominal de 1.000€, el precio medio de compra fue de 1.004,34€.

Tenemos los datos para completar el esquema de la operación:



La rentabilidad de estas operaciones se mediría, del mismo modo que todas las operaciones financieras, por el tanto al que se hacen equivalentes los capitales entregados y recibidos. Sería necesario incluir todos gastos derivados de la operación y se trabajaría siempre con leyes compuestas, por tratarse de una operación a largo plazo.

Además, en estas operaciones, estudiaremos el cálculo de la rentabilidad que publica el Tesoro en su información para quienes compraron al precio medio, que se denomina Tipo de interés medio.

Los criterios utilizados por el Tesoro son los siguientes:

- Ley financiera: Leyes compuestas
- Convenio para pasar los días a años: Actual/Actual.
  El convenio sólo se utilizará para los periodos inferiores a un año. En estos, se dividirá el número de días entre 365 o 366 en el caso de que el año sea bisiesto.

Podemos comprobar, con estos criterios el cálculo del tipo medio de la subasta que hemos elegido a modo de ejemplo. La ecuación para la obtención del tanto medio efectivo sería la siguiente:

$$1004{,}34 = \left[2{,}5\, a_{3|\mathrm{i}^*_{medio}} + 1000.(1+\mathrm{i}^*_{medio})^{-3}\right].(1+\mathrm{i}^*_{medio})^{51/366}$$

Obsérvese que los términos que aparecen entre corchetes están valorados en el origen teórico, por lo que es necesario capitalizarlo 51 días para situarlo en la fecha de liquidación (29 días de febrero más 22 de marzo). Estos 51 días se expresan en años dividiendo entre 366. Entre el 31/01/2016 y el 31/01/2017 está mes de febrero de 2016 que tuvo 29 días, por lo que entre estas dos fechas hay 366 días.

Si se sustituye el tanto medio de 0,111% en la ecuación, el precio que se obtiene es de 1004,32. Al igual que ocurría en las Letras del Tesoro, puede haber pequeñas diferencias, por no trabajar con todos los decimales. El tanto medio da medida de rentabilidad del bono y no el tipo del cupón, como interpretan con frecuencia quienes no tienen conocimientos de matemática financiera. El tanto medio coincidiría con el tipo del cupón bajo determinadas condiciones. Por ejemplo, si la fecha de liquidación estuviera en el origen teórico y el precio coincidiera con el Nominal.

Se da aquí alguna información adicional importante que puede responder inquietudes de alumnos especialmente curiosos. El hecho de que la fecha de liquidación no se sitúe un año antes del primer cupón puede resultar falto de sentido. La razón es que la contraprestación de un Bono o de una Obligación del Estado se suele subastar en varias fechas (emisión por tramos), lo que impide que todas ellas estuvieran a un año del cupón.

De una misma emisión de Bonos u Obligaciones, se pueden realizar varios tramos, todos los tramos tienen las mismas condiciones en cuanto a:

- Misma fecha de pago de cupón.

- Mismo cupón (interés anual, aplicado al valor nominal).

- Misma fecha de vencimiento.

Como ejemplo, pueden verse los datos de la subasta de bonos a 3 años que se celebró un mes antes de la de nuestro ejemplo:

BONOS DEL ESTADO

Plazo	3 AÑOS
Denominación	B 0,25%
Fecha subasta	18/02/2016
Fecha vencimiento	31/01/2019
Fecha de liquidación	23/02/2016
Precio mínimo aceptado	99,980
Tipo de interés marginal	0,256
Precio medio ex-cupón	99,993
Precio medio de compra	100,013

Obsérvese que la contraprestación coincide con la de la subasta con la que hemos trabajado.

Hay muchos temas que se pueden estudiar relacionados con la emisión por tramos, como sus ventajas, la relación entre los precios y las rentabilidades de sucesivas subastas, concepto de cupón corrido o precio ex-cupón.

6.3. Valor de mercado de un préstamo

Hace unos años, compré Bonos del Estado con cupón al 4%. Ahora falta un año para su vencimiento (acabo de cobrar el cupón) y quiero venderlo en el mercado secundario. ¿Qué precio me darían? Vamos a razonar, bajo ausencia de comisiones u otros tipos de gastos. La operación que encuentra un comprador potencial es la siguiente:

Precio

0

1040

1

Quizá, alguna persona podría pensar que el precio sensato es 1000€, coincidiendo con el Nominal. Si yo ofreciera este título por 1000€ en el mercado, estaría ofreciendo Deuda Pública española a un año con una rentabilidad del 4%.

El hecho de encontrar o no compradores para un precio de 1.000€ dependería de la rentabilidad que estuviera dando en este momento la Deuda Pública a un año. Imaginemos que fuera del 1% (no trabajaremos con los datos de la actualidad). Cualquier inversor interesado en comprar Deuda Pública a un año estaría interesado en comprar a 1000€ y conseguir una rentabilidad del 4%, frente al 1% que se consigue en los mercados.

Visto esto, decido subir el precio hasta 1020€. En este caso, la rentabilidad que tendría un comprador sería de: $\frac{1040-1020}{1020} =$ 0,01961. Todavía es superior al 1%, por lo que se seguiría considerando un precio bajo en el mercado.

Me planteo, incluso vender por 1030, pero parece que a este precio no me comprarían. La rentabilidad quedaría por debajo del 1% y preferirían las otras operaciones de Deuda Pública española a un año.

El precio sería aquél que diera al comprador la misma rentabilidad que dan las operaciones análogas en riesgo y en plazo. En nuestro caso habíamos supuesto un 1%. Para conseguir este precio, basta descontar el capital futuro a este tipo de interés.

El precio sería aproximadamente $1040\cdot(1+0{,}01)^{-1}= 1029{,}70$

Efectivamente, de este modo, la rentabilidad será: $\frac{1040-1029{,}70}{1029{,}70}$ =0,01.

Este principio se generaliza al caso de que quedaran pendientes más capitales, más plazos o estuviéramos en otros niveles de riesgo.

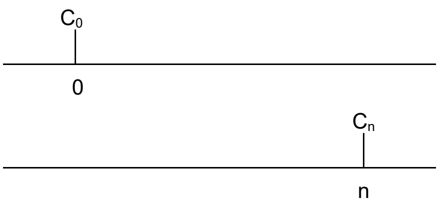
Si se quiere vender en el mercado un título al que le quedan 4 años de vida y da derecho a cupones de 20€ y la devolución de un valor nominal del 1000€, su valor teórico de mercado (precio aproximado) se obtendría descontando los capitales futuros a los tipos de mercado para las operaciones análogas en riesgo y en plazo.

¿Y dónde se obtienen estos tipos de interés necesarios para valorar los títulos de renta fija? En nuestro primer ejemplo, es relativamente sencillo encontrar una aproximación, ya que las Letras del Tesoro son títulos de Deuda Pública española a un año. Bastaría mirar qué rentabilidad están dando.

6.4. Estructura temporal de los tipos de interés

Para casos más generales, la manera de trabajar para definir los tipos de mercado que utilizaremos para valorar es análoga. En primer lugar, debemos centrarnos en el nivel de riesgo correspondiente. Si queremos valorar Deuda Pública alemana, tendremos que buscar en la rentabilidad que están dando sus títulos y si estamos valorando títulos de deuda privada, situarnos en el sector correspondiente.

En cuanto al plazo, los únicos títulos para los que se puede hablar de su plazo sin ningún tipo de confusión son los que definen operaciones simples. Esto es, en los que se intercambia un capital por otro. En renta fija, este tipo de títulos se denominan cupón cero, y tienen la siguiente forma:



En esta operación, el plazo claramente es n. En un bono que paga cupones al final de cada año, se va recuperando cada año una parte de la inversión, por lo que no se puede afirmar con propiedad que el plazo al que se recupera la inversión sea el vencimiento. Por esta razón, en la definición de los tipos de interés de mercado tienen especial protagonismo los llamados bonos cupón cero.

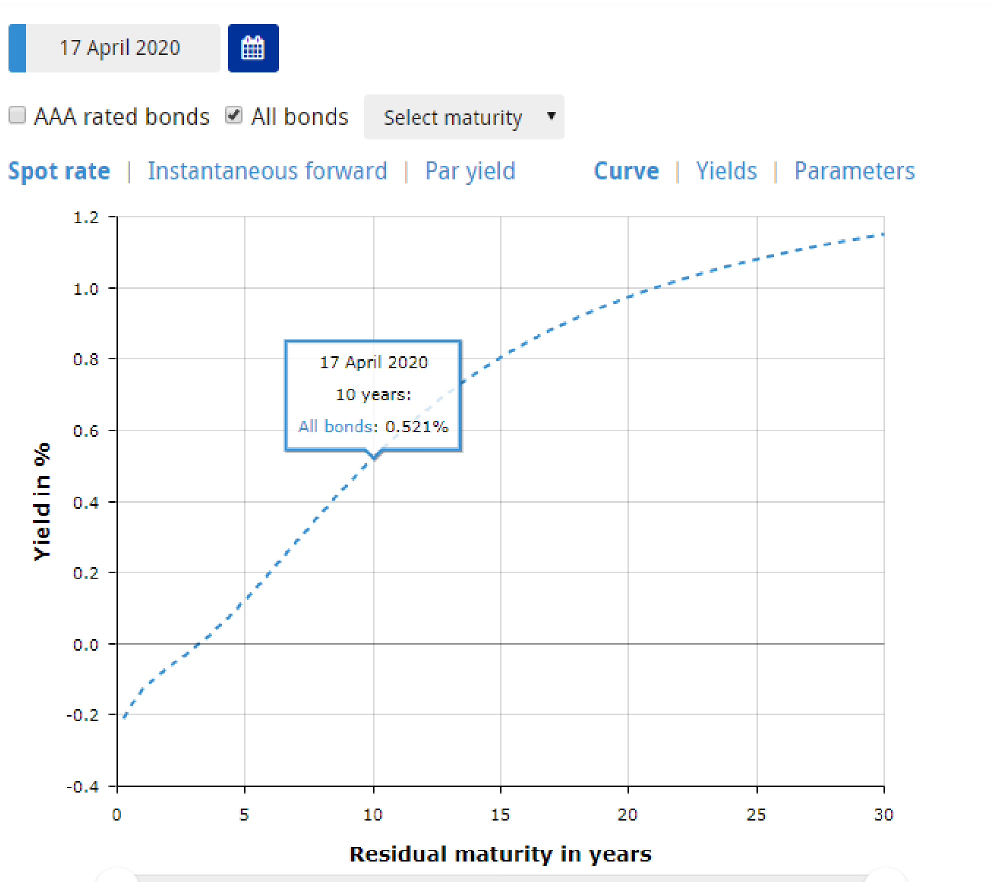
Al tipo de rentabilidad de un bono cupón cero pactado en t=0, que comienza en t=0 y finaliza n años después, se le denomina tipo al contado a n años. En ocasiones, se utiliza la terminología en inglés y se les llama *spot rates*.

A la función que, asigna a cada plazo el tipo de interés al contado a ese plazo se le denomina Estructura Temporal de los Tipos de Interés (ETTI) y a su representación gráfica, curva cupón cero.

Un ejemplo muy significativo de curva cupón cero es la que publica diariamente el Banco Central Europeo para identificar los tipos de interés de mercado de la deuda pública de la zona euro. Cada día publica dos curvas, una se refiere a la media de los países considerados con menor riesgo (identificados como países con calificación AAA) y otra curva que se refiere a la media de todos los países. El enlace en el que se pueden encontrar estas curvas es:

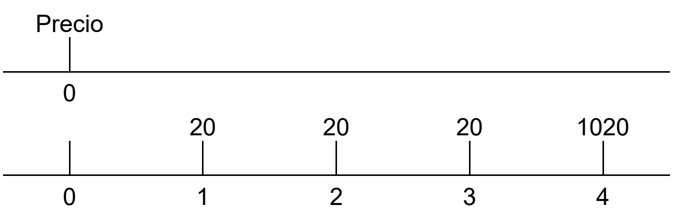
https://www.ecb.europa.eu/stats/financial_markets_and_interest_rates/euro_area_yield_curves/html/index.en.html

A continuación, se muestra una imagen de la curva cupón cero del 17 de abril de 2020 para la media de todos los países de la zona euro. Cada punto de la curva indica el tipo al contado al plazo correspondiente Se ha resaltado, a modo de ejemplo, el tipo a 10 años.



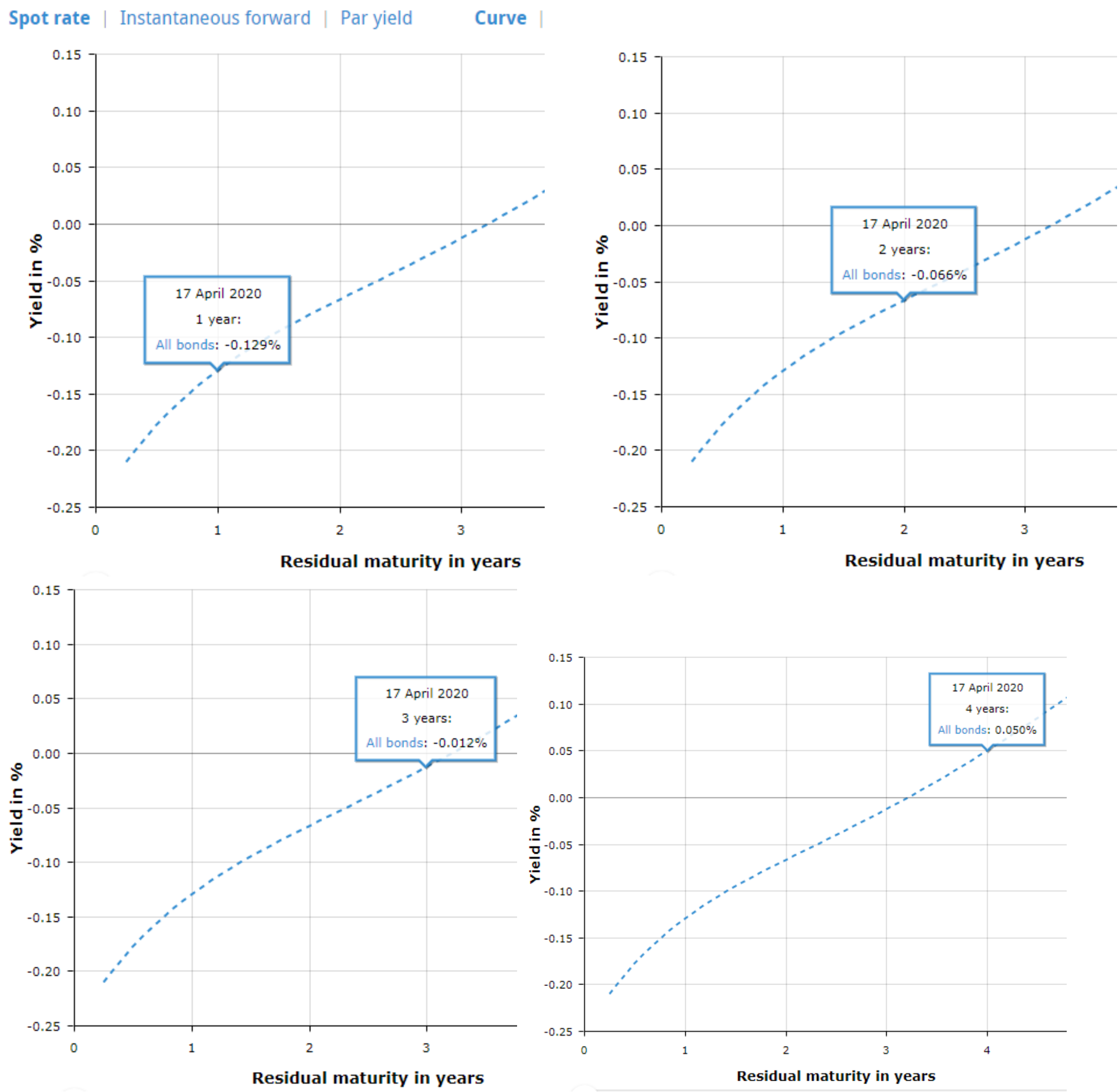
Si quisiéramos encontrar el valor de mercado de un bono para el que fuera adecuado este nivel de riesgo, tendríamos que descontar los pagos futuros a los tipos al contado a cada plazo.

Supongamos que queremos vender en el mercado un título, de esta categoría de riesgo, al que le quedan 4 años de vida y da derecho a cupones de 20€ y la devolución de un valor nominal del 1000€. El esquema de la operación sería el siguiente:



Para encontrar el precio que debería tener el bono en el mercado, debemos descontar el cupón que vence dentro de un año con el tipo al contado a un año, el cupón que vence dentro de dos años, con el tipo a dos años, análogamente el cupón que de dentro de tres años con el tipo al contado a tres años y, el capital final, con el tipo al contado a cuatro años.

Encontraremos dichos tipos en la curva cupón cero para el nivel de riesgo que corresponda. Suponiendo que fuera el de la media de los bonos de la zona euro serían los siguientes:



$$\text{Precio} = 20 \cdot [1+(-0{,}00129)]^{-1} + 20 \cdot [1+(-0{,}00066)]^{-2} + 20 \cdot [1+(-0{,}00012)]^{-3} + 1020 \cdot [1+0{,}00050]^{-4}$$

Junto con los tipos al contado (spot) suelen definirse unos tipos de interés también asociados a los bonos cupón cero, pero en aquellos casos en los que los términos de la operación se pactan antes de que la operación comience, que se denominan tipos a plazo o tipos forward. En la literatura pueden encontrarse múltiples notaciones diferentes para los tipos al contado y los tipos forward. Aquí vamos a proponer una notación con tres subíndices: el primero será el momento en el que se pacta la operación, el segundo subíndice indicará el momento en el que comienza la operación y el tercer subíndice será el momento en el que finaliza la operación. De esta manera, si los dos primeros subíndices coinciden, se tratará de un tipo al contado y, si no coinciden se tratará de tipo forward.

Si denominamos t=0 al 17 de abril, los tipos al contado utilizados para la valoración de nuestro ejemplo han sido:

$i_{0,0,1}$= -0,00129 $i_{0,0,2}$= -0,00066 $i_{0,0,3}$= -0,00012 $i_{0,0,4}$= 0,00050

Estos tipos se habían definido como los tantos de rentabilidad de bonos cupón cero, pero su determinación en la práctica no es sencilla, porque no existen bonos cupón cero en todo momento a todos los plazos y para todas las categorías de riesgo. La determinación de curvas cupón cero necesita complejos procedimientos de estimación, pero estas curvas no dejan nunca de estimarse y publicarse porque son esenciales para la valoración de títulos de renta fija.

Los tipos forward también se han definido como los tantos de rentabilidad de bonos cupón cero que se pactan antes de que comience su vida. Por ejemplo, el tipo $i_{0,1,4}$ es el de una operación que comienza en t=1 y termina en t=4, por lo que dura 3 años, pero se pacta en t=0. Se denomina tipo a tres años de dentro de un año. Obsérvese la diferencia con el tipo $i_{1,1,4}$, que también se referiría al periodo entre t=1 y t=4, pero se pactaría en t=1 y no se conocería hasta ese momento.

Los contratos basados en tipos forward pueden utilizarse en la práctica para asegurarse pagar o cobrar un tipo de interés determinado en un periodo futuro, sin exponerse al riesgo de que llegado el momento tuviera que pagar un tipo muy alto o cobrar un tipo muy bajo. La determinación del valor de los tipos forward se consigue también a través de la curva cupón cero, por una relación de coherencia con los tipos al contado que deben verificar.

La relación de coherencia entre los tipos de interés forward y los tipos al contado se basa en que, en un mercado que funciona razonablemente bien, una operación debe tener siempre la misma rentabilidad, aunque se implemente de dos formas diferentes.

Vamos a razonar esta relación sobre un ejemplo concreto. Tratemos de determinar el valor que debería tomar el tipo $i_{0,1,4}$ el día 17 de abril de 2020 (t=0). Esto es el tipo que se pactaría en esa fecha para una operación que comenzase el 17 de abril de 2021 (t=1) y finalizase el 17 de abril de 2024 (t=4).

Una unidad monetaria (podría ser un millón de euros), puede invertirse de t=0 a t= 4 de dos maneras diferentes.

La primera manera sería invertirlo directamente, utilizando el tipo al contado $i_{0,0,4}$. La cantidad que obtendría al final sería $(1 + i_{0,0,4})^4$.

La segunda manera sería invertirlo, en primer lugar, hasta t=1, utilizando el tipo al contado $i_{0,0,1}$. La cantidad que obtendría en t=1 sería $(1 + i_{0,0,1})$. Además, en t=0, se dejaría pactada la reinversión de la cantidad $(1 + i_{0,0,1})$ desde t=1 hasta t=4 al tipo $i_{0,1,4}$, lo que daría una cantidad final de $(1 + i_{0,0,1}). (1 + i_{0,1,4})^3$. La cantidad final debe ser la misma que con la primera manera:

$(1 + i_{0,0,4})^4 = (1 + i_{0,0,1}). (1 + i_{0,1,4})^3$

Tomamos el valor de los tipos al contado de la curva cupón cero y lo sustituimos en la igualdad:

$i_{0,0,1}= -0,00129$ $i_{0,0,4}= 0,00050$ $\Rightarrow$ $(1 + 0,00050)^4 = (1 - 0,00129). (1 + i_{0,1,4})^3$

De donde podemos despejar el valor del tipo de interés forward que buscábamos:

$i_{0,1,4}=0,00023681$

Bibliografía

Bonilla Musoles, M, Ivars Escortell, A. & Ismael Moya C. (2006). *Matemática de las operaciones financieras: teoría y práctica.* Thomson.

Bonilla Musoles, MA & Ivars Escortell, MA 1994, *Matemáticas de las operaciones financieras: (teoría y práctica). AC*.

Broverman, S.A., 2017 *Mathematics of Investment and Credit*, ACTEX

Francis, J. and Ruckman, C., (2018). *Interest Theory – Financial Mathematics and Deterministic Valuation*. ActuarialBrew

Gil Peláez, L., Baquero, M., Gil, MA & Maestro, M. (1991). *Matemática de las operaciones financieras: problemas resueltos.* AC.

Kellison, S. (2009). *The theory of interest*. McGraw-Hill.

Pablo López, AN 2000, *Manual práctico de matemática comercial y financiera.* Centro de Estudios Ramón Areces.

Pablo López, A. (2002). *Valoración financiera.* Centro de Estudios Ramón Areces.

Pablo López, A. (2003). *Matemática de las operaciones financieras I*. Madrid.

Vaaler, L.J.F., Harper, S.K. & Daniel, J.W. *Mathematical Interest Theory* (2019). The Mathematical Association of America.