



MÁSTER UNIVERSITARIO EN INGENIERÍA INDUSTRIAL

TRABAJO FIN DE MÁSTER

Nuevo Método Numérico Basado en Wavelets de
Chelyshkov para las Ecuaciones no Lineales de
Benjamin–Bona–Mahony y de Klein–Gordon

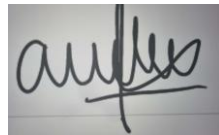
Autor: Alejandro Pedraza Lázaro

Directores: Fco. Javier Rodríguez Gómez; Alberto Rodríguez Gómez

Madrid

Julio de 2026

Declaro, bajo mi responsabilidad, que el Proyecto presentado con el título
Nuevo Método Numérico Basado en Wavelets de Chelyshkov para las Ecuaciones no
Lineales de Benjamin–Bona–Mahony y de Klein–Gordon
en la ETS de Ingeniería - ICAI de la Universidad Pontificia Comillas en el
curso académico 2025/26 es de mi autoría, original e inédito y
no ha sido presentado con anterioridad a otros efectos.
El Proyecto no es plagio de otro, ni total ni parcialmente y la información que ha sido
tomada de otros documentos está debidamente referenciada.

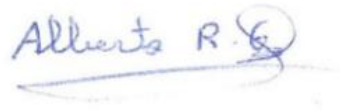


Fdo.: Alejandro Pedraza Lázaro

Fecha: ...07.../ 07.../ 2026...

Autorizada la entrega del proyecto

LOS DIRECTORES DEL PROYECTO



Fdo.: Fco. Javier Rodríguez Gómez; Alberto Rodríguez Gómez

Fecha: ...07.../ ...07.../ ...2026...

Nuevo Método Numérico Basado en Wavelets de Chelyshkov para las Ecuaciones no Lineales de Benjamin–Bona–Mahony y de Klein–Gordon

Autor: Pedraza Lázaro, Alejandro.

Directores: Rodríguez Gómez, Alberto; Rodríguez Gómez, Fco. Javier.

RESUMEN

Introducción

Las ecuaciones en derivadas parciales no lineales y de orden fraccionario desempeñan un papel central en la modelización de ondas, fenómenos dispersivos y difusión anómala. Entre ellas, las ecuaciones de Benjamin–Bona–Mahony (BBM) y de Klein–Gordon (KG) describen la propagación de ondas viajeras y comportamientos oscilatorios ([KUMB23]). Su naturaleza no lineal dificulta la obtención de soluciones exactas y motiva el desarrollo de métodos numéricos eficientes. En este Trabajo de Fin de Máster se desarrolla, implementa y valida un nuevo método de colocación basado en las *Wavelets* de Chelyshkov de orden fraccionario (Fractional-Order Chelyshkov Wavelets Collocation Method, FChWCM), aprovechando su ortogonalidad y la esparsidad de las matrices que generan ([RAHI19], [MARA22]).

Metodología

El método se aplica a tres modelos: la ecuación de advección–dispersión móvil–inmóvil de orden distribuido, la ecuación BBM y la ecuación KG, cuyas formulaciones son:

$$u_t + u_x + u u_x - u_{xx} = 0 \quad (0.0.1)$$

$$u_{tt} - u_{xx} + f(u) = 0 \quad (0.0.2)$$

$$\alpha_1 Z_t + \alpha_2 \mathbb{D}_t^\mu Z = -\alpha_3 Z_x + \alpha_4 Z_{xx} + h(x, t) \quad (0.0.3)$$

La solución se aproxima mediante una expansión truncada en Wavelets de Chelyshkov fraccionarias, agrupadas en el vector $\Lambda(x)$, con coeficientes $D(t)$:

$$u(x, t) \approx \Lambda(x)^T D(t) \quad (0.0.4)$$

Las derivadas espaciales se sustituyen por productos con las matrices operacionales de integración, construidas a partir del operador integral fraccionario de Riemann–Liouville de orden α :

$$I_t^\alpha Z(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-u)^{\alpha-1} Z(u) du \quad (0.0.5)$$

$$u_x(x, t) \approx \Lambda(x)^T A_x D(t) \quad (0.0.6)$$

$$u_{xx}(x, t) \approx \Lambda(x)^T A_{xx} D(t) \quad (0.0.7)$$

Proyectando sobre la base y aprovechando la ortogonalidad, la ecuación en derivadas parciales se reduce a un sistema de ecuaciones algebraicas en los coeficientes, que se resuelve con el método iterativo de *Newton*. Para la BBM se obtiene un sistema de la forma:

$$M_1 D'(t) + M_2 D(t) + N(D(t)) = 0 \quad (0.0.8)$$

mientras que para la Klein–Gordon, discretizando la segunda derivada temporal por diferencias centradas, se llega en cada paso de tiempo a:

$$\frac{D_{n+1} - 2 D_n + D_{n-1}}{(\Delta t)^2} - K D_n + F(D_n) = 0 \quad (0.0.9)$$

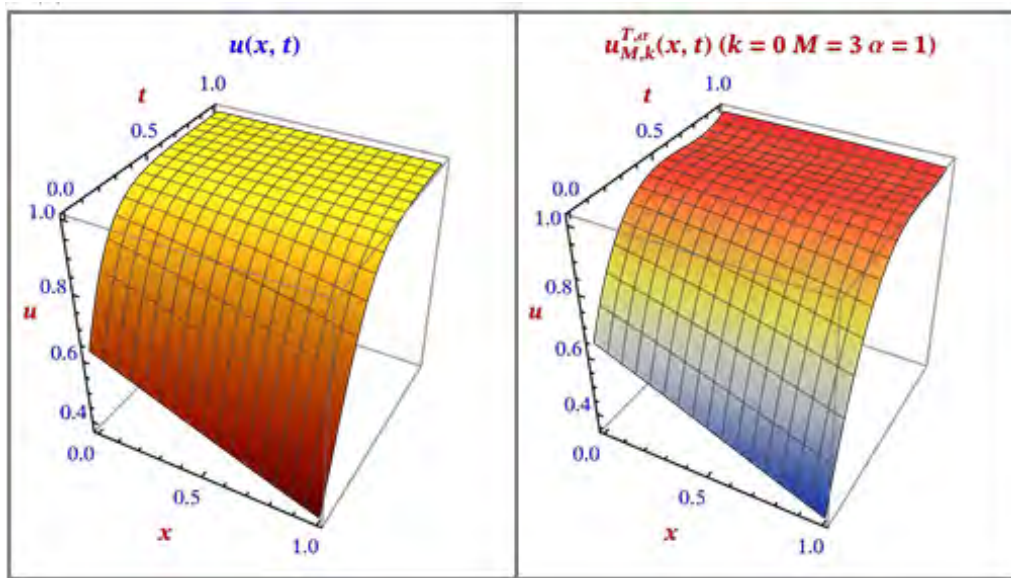


Figura 1. Expansión de $u(x, t)$ en Wavelets de Chelyshkov Fraccionarias.

Resultados

El método se ha validado sobre problemas de referencia con solución exacta conocida tomados de la literatura: la ecuación de Klein–Gordon con solución $u(x, t) = x \sin\left(\frac{\pi}{2} t\right)$ ([KUM B23]), la ecuación BBM ([RAHAN23]) y la de advección–dispersión de orden distribuido ([MARA22]). El error se cuantifica con las normas L_∞ (error absoluto máximo), L_2 y el error cuadrático medio (RMS):

$$L_\infty = \max_{i,j} |u(x_i, t_j) - \tilde{u}(x_i, t_j)| \quad (0.0.10)$$

$$\text{RMS} = \left(\frac{1}{NM} \sum_{i,j} |u(x_i, t_j) - \tilde{u}(x_i, t_j)|^2 \right)^{1/2} \quad (0.0.11)$$

En los tres casos se obtienen errores pequeños con un número moderado de funciones base, lo que confirma la rápida convergencia del método. Las matrices operacionales resultan dispersas y bien condicionadas, con un coste computacional reducido frente a los métodos clásicos de diferencias finitas. Las superficies de solución reproducen los perfiles de onda viajera (BBM) y oscilatorios (Klein–Gordon) esperados.

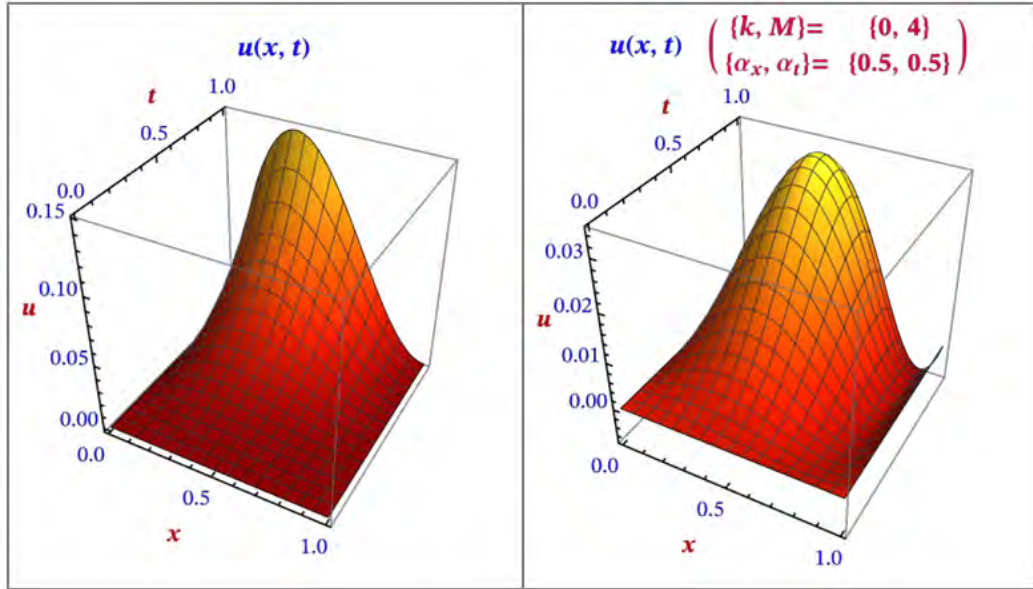


Figura 2. Solución de la ecuación de advección–dispersión de orden distribuido: superficies exacta y aproximada y error absoluto.

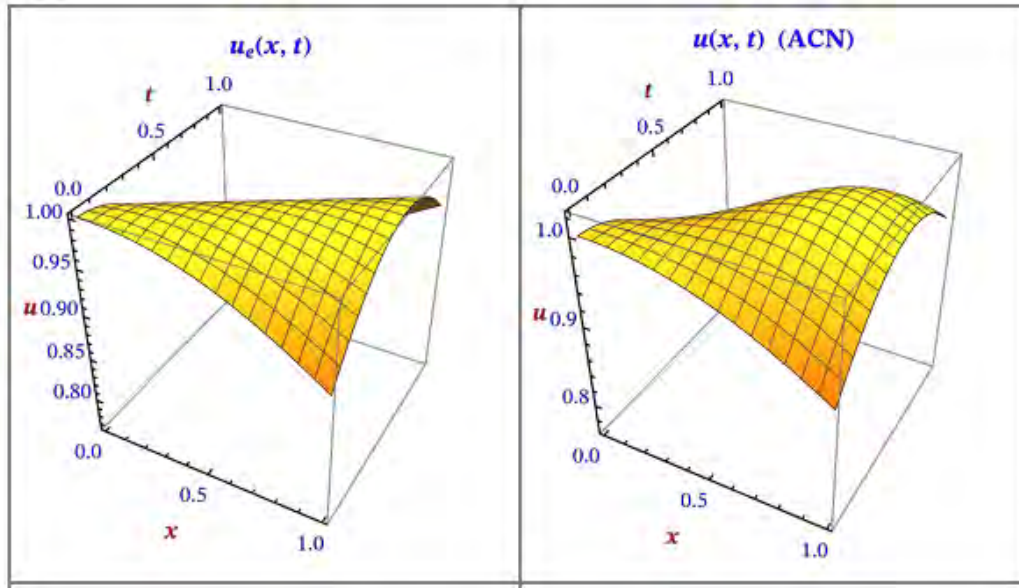


Figura 3. Superficie de la solución de la ecuación BBM obtenida con el FChWCM (exacta frente a aproximada).

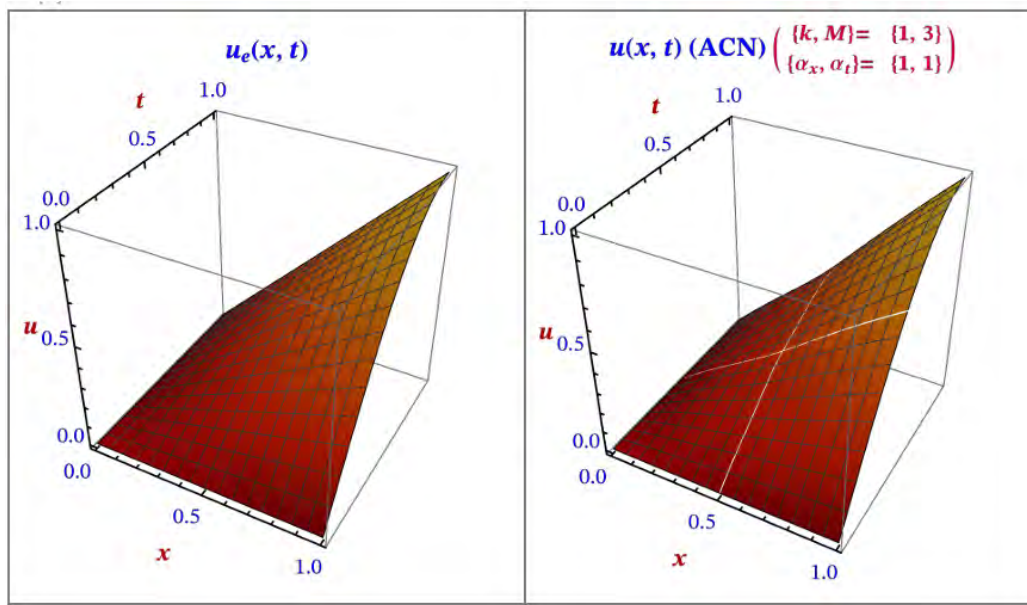


Figura 4. Superficie de la solución de la ecuación de Klein–Gordon obtenida con el FChWCM (exacta frente a aproximada).

Conclusiones

Los resultados confirman que la base de Wavelets de Chelyshkov fraccionarias reúne las propiedades que la teoría le atribuye (ortogonalidad, soporte compacto y matrices dispersas), permitiendo transformar cada ecuación fraccionaria no lineal en un sistema algebraico de tamaño reducido resoluble con Newton.

El esquema FChWCM se ha aplicado con éxito a los tres modelos, tratando el término no lineal sin linealizaciones previas y alcanzando errores pequeños en las normas L_∞ , L_2 y RMS. Frente a otras aproximaciones basadas en *Wavelets* (Bernoulli, [KUMB23]; Hermite, [SHIR21]), las de Chelyshkov ofrecen resultados competitivos con una formulación más sencilla, lo que las convierte en una herramienta eficaz, precisa y de bajo coste.

Palabras clave: Wavelets de Chelyshkov, cálculo fraccionario, método de colocación, matriz operacional de Riemann–Liouville, ecuación de Benjamin–Bona–Mahony, ecuación de Klein–Gordon, método de Newton.

Líneas futuras de investigación

Entre las principales líneas de continuación destacan: la comparación cuantitativa de las tablas de error con los resultados publicados por otros métodos (Bernoulli, Haar); la comparación sistemática con otras familias de wavelets; la extensión a ecuaciones de orden variable y a dimensiones superiores; y el desarrollo de estrategias de colocación adaptativa y multirresolución.

ABSTRACT

Introduction

Non-linear and fractional-order partial differential equations play a central role in the modeling of waves, dispersive phenomena, and anomalous diffusion. Among these, the Benjamin-Bona-Mahony (BBM) and Klein-Gordon (KG) equations describe the propagation of traveling waves and oscillatory behaviors ([KUMB23]). Their non-linear nature complicates the derivation of exact solutions and motivates the development of efficient numerical methods. In this Master's Thesis, a novel collocation method based on Fractional-Order Chelyshkov Wavelets (Fractional-Order Chelyshkov Wavelets Collocation Method, FChWCM) is developed, implemented, and validated, taking advantage of their orthogonality and the sparsity of the resulting matrices ([RAHI19], [MARA22]).

Methodology

The method is applied to three models: the distributed-order mobile-immobile advection-dispersion equation, the BBM equation, and the KG equation, whose formulations are:

$$u_t + u_x + u u_x - u_{xx} = 0 \quad (0.0.12)$$

$$u_{tt} - u_{xx} + f(u) = 0 \quad (0.0.13)$$

$$\alpha_1 Z_t + \alpha_2 \mathbb{D}_t^\mu Z = -\alpha_3 Z_x + \alpha_4 Z_{xx} + h(x, t) \quad (0.0.14)$$

The solution is approximated by a truncated expansion in fractional Chelyshkov wavelets, grouped in the vector $\Lambda(x)$, with coefficients $D(t)$:

$$u(x, t) \approx \Lambda(x)^T D(t) \quad (0.0.15)$$

The spatial derivatives are replaced by products with the operational matrices of integration, constructed from the Riemann-Liouville fractional integral operator of order α :

$$I_t^\alpha Z(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-u)^{\alpha-1} Z(u) du \quad (0.0.16)$$

$$u_x(x, t) \approx \Lambda(x)^T A_x D(t) \quad (0.0.17)$$

$$u_{xx}(x, t) \approx \Lambda(x)^T A_{xx} D(t) \quad (0.0.18)$$

By projecting onto the basis and exploiting orthogonality, the partial differential equation is reduced to a system of algebraic equations for the coefficients, which is solved using Newton's iterative method. For the BBM equation, a system of the following form is obtained:

$$M_1 D'(t) + M_2 D(t) + N(D(t)) = 0 \quad (0.0.19)$$

while for the Klein-Gordon equation, by discretizing the second time derivative using central differences, one obtains at each time step:

$$\frac{D_{n+1} - 2 D_n + D_{n-1}}{(\Delta t)^2} - K D_n + F(D_n) = 0 \quad (0.0.20)$$

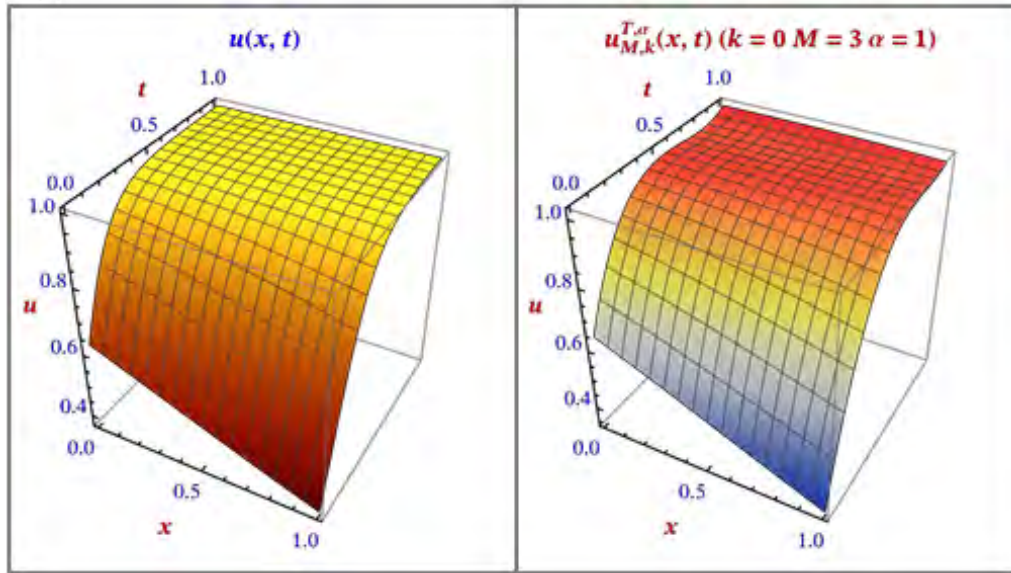


Figure 1. Expansion of $u(x, t)$ in Fractional Chelyshkov Wavelets.

Results

The method has been validated on benchmark problems with known exact solutions taken from the literature: the Klein-Gordon equation with solution $u(x, t) = x \sin\left(\frac{\pi}{2} t\right)$ ([KUMB23]), the BBM equation ([RAHAN23]), and the distributed-order advection-dispersion equation ([MARA22]). The error is quantified using the L_{∞} (maximum absolute error) and L_2 norms, and the root mean square (RMS) error:

$$L_{\infty} = \max_{i,j} |u(x_i, t_j) - \tilde{u}(x_i, t_j)| \quad (0.0.21)$$

$$\text{RMS} = \left(\frac{1}{NM} \sum_{i,j} |u(x_i, t_j) - \tilde{u}(x_i, t_j)|^2 \right)^{1/2} \quad (0.0.22)$$

In all three cases, small errors are obtained with a moderate number of basis functions, which confirms the rapid convergence of the method. The operational matrices turn out to be sparse and well-conditioned, with a reduced computational cost compared to classical finite difference methods. The solution surfaces reproduce the expected traveling wave (BBM) and oscillatory (Klein-Gordon) profiles.

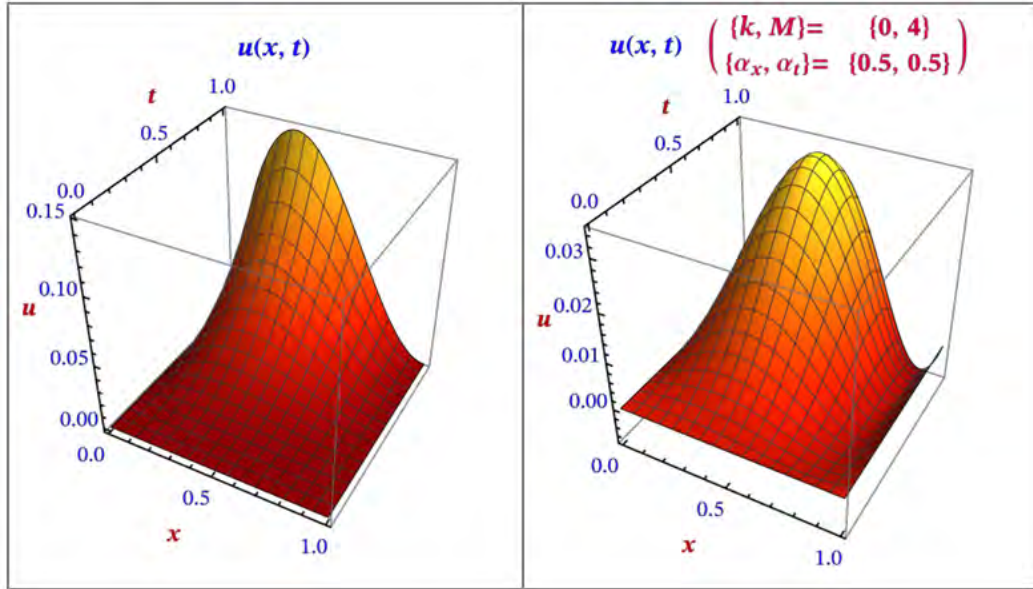


Figure 2. Solution of the distributed-order advection-dispersion equation: exact and approximate surfaces, and absolute error.

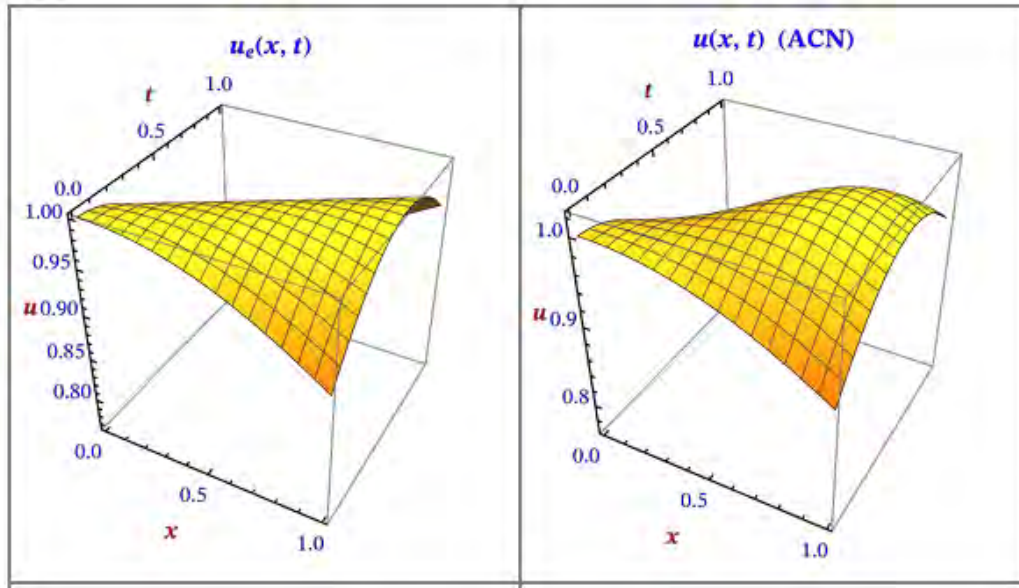


Figure 3. Solution surface of the BBM equation obtained with the FChWCM (exact versus approximate).

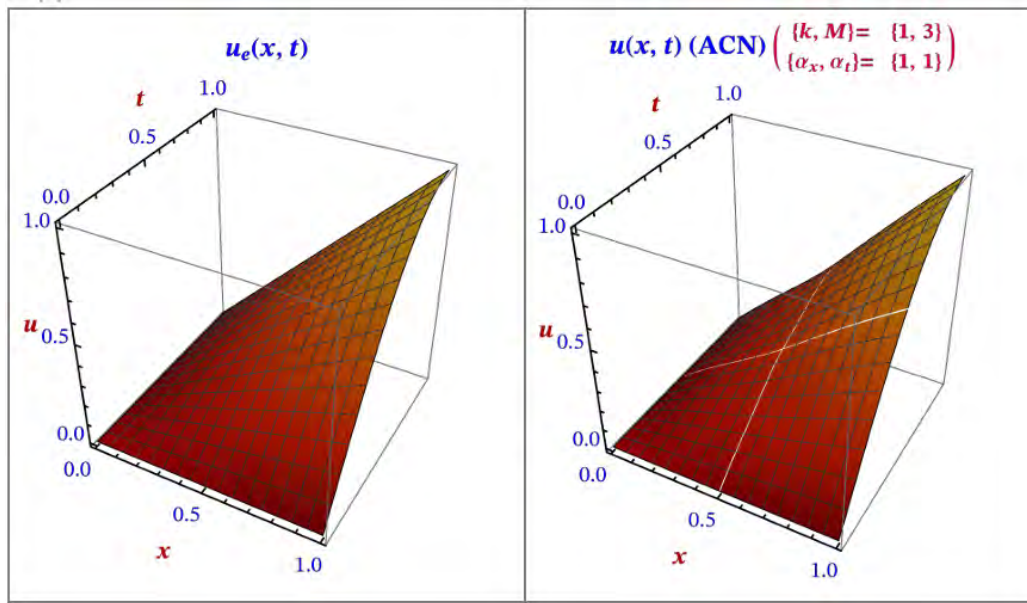


Figure 4. Solution surface of the Klein-Gordon equation obtained with the FChWCM (exact versus approximate).

Conclusions

The results confirm that the fractional Chelyshkov wavelet basis possesses the properties attributed to it by theory (orthogonality, compact support, and sparse matrices), allowing each non-linear fractional equation to be transformed into a reduced-size algebraic system solvable by Newton's method.

The FChWCM scheme has been successfully applied to the three models, treating the non-linear term without prior linearizations and achieving small errors in the L_∞ , L_2 and RMS norms. Compared to other wavelet-based approximations (Bernoulli, [KUMB23]; Hermite, [SHIR21]), Chelyshkov wavelets offer competitive results with a simpler formulation, making them an effective, accurate, and low-cost tool.

Keywords: Chelyshkov wavelets, fractional calculus, collocation method, Riemann–Liouville operational matrix, Benjamin–Bona–Mahony equation, Klein–Gordon equation, Newton's method.

Future lines of research

Among the main lines of future work, the following stand out: the quantitative comparison of error tables with results published for other methods (Bernoulli, Haar); the systematic comparison with other wavelet families; the extension to variable-order equations and higher dimensions; and the development of adaptive and multiresolution collocation strategies.

Nuevo Método Numérico Basado en *Wavelets* de Chelyshkov para las Ecuaciones no lineales de Benjamin-Bona-Mahony y de Klein-Gordon

Índice

Capítulo 1	1
1.1. Introducción	1
1.2. Objetivos	2
1.3. Metodología	4
1.3.1. Plan de Trabajo	5
1.3.2. Recursos	5
1. 4. Estado del Arte	6
1.4.1. Investigaciones Actuales	6
1.4.2. Modelos no Lineales de Ondas: Ecuaciones BBM y Klein-Gordon	7
1.4.3. Aproximación de la Solución Mediante <i>Wavelets</i> de Chelyshkov	9
1.4.4. Reducción de la Ecuación BBM al Sistema en Coeficientes	10
1.4.5. Aplicación del Método a la Ecuación de Klein-Gordon	11
1.4.6. Condiciones de Contorno y Esquema de Resolución	12
1. 5. Objetivos de Desarrollo Sostenible	13
Capítulo 2	15
2. Polinomios y <i>Wavelets</i> de Chelyshkov Fraccionarios	15
2.1. Introducción	15
2.1.1. Definición de los Polinomios de Chelyshkov Fraccionarios	15
2.1.2. Aproximación de Funciones por Polinomios de Chelyshkov	26
2.1.3. Análisis de Convergencia y Cotas del Error	35
2.1.4. Problemas	38
2. Wavelets de Chelyshkov	51
2.1. Wavelets de Chelyshkov	51
2.1.1. Funciones Wavelets de Chelyshkov ([RAHI19], [MARA22])	51
2.1.2. Funciones Wavelets de Chelyshkov de Orden Fraccionario ([RAHI19], [MARA22])	53
2.1.3. Funciones Wavelets de Chelyshkov Fraccionarias	55
2.1.4. Aproximación de Funciones por Wavelets de Chelyshkov de Orden Fraccionario	108
2.1.5. Ejemplos	112
2.1.6. Aproximación de Funciones de dos Variables por Wavelets de Chelyshkov Fraccionarias	136
2.2. Matrices Operacionales	146

2.2.1. Introducción	146
2.2.2. Conceptos Preliminares	147
2.2.3. Operador Integral Fraccionario de Riemann–Liouville	152
2.2.4. Matriz Operacional Fraccionaria de Riemann–Liouville Orden β	194
2.2.5. Problemas	247
0.0.0. Matriz Operacional Producto $\tilde{C}$ de $\Psi^{T,\alpha}(x)$	253
Capítulo 3	255
3. Método Wavelet de Chelyshkov Fraccionario	255
3.1. Introducción	255
3.2. Método Wavelet de Chelyshkov Fraccionario en PDE	257
3.2.1. Preliminares y Notaciones	257
3.2.2. Polinomios de Chelyshkov Fraccionarios	259
3.2.3. Funciones Wavelets de Chelyshkov Fraccionarias	262
3.2.4. Aproximación de Funciones por Wavelets de Chelyshkov Fraccionarias	265
3.2.5. Método FChWM. Ecuación de Advección–Dispersión Móvil–Inmóvil de Orden Distribuido Fraccionario en el Tiempo	270
3.2.6. Errores en el Método Wavelet de Chelyshkov Fraccionario (FChWM)	281
3.2.7. Ejemplo	282
3.2.8. Problemas	286
3.2.9. Ecuación No Lineal de Benjamina–Bona–Mohany (BBM)	316
3.2.10. Ejemplos	317
3.2.11. Problemas (BBM)	338
3.2.12. Ecuación No Lineal de Klein–Gordon (KG)	350
3.2.13. Ejemplos	352
3.2.14. Problemas	355
Capítulo 4	357
4. Conclusiones y Líneas Futuras de Investigación	357
4.1. Conclusiones	357
4.2. Líneas Futuras de Investigación	358
Bibliografía	361
Referencias Bibliográficas	361

Lista de Acrónimos

Acrónimo	Descripción
ACN	Affine Covariant Newton—variante del método de Newton usada como solver
BBM	Ecuación de Benjamin–Bona–Mahony
ChWM	Chelyshkov Wavelet Method—Método Wavelet de Chelyshkov
EDP	Ecuación en Derivadas Parciales (equivalente a PDE)
FChWM	Fractional Chelyshkov Wavelet Method—Método Wavelet de Chelyshkov Fraccionario
FChWCM	Fractional Chelyshkov Wavelet Collocation Method— Método de Colocación Wavelet de Chelyshkov Fraccionario
FOGCW	Fractional – Order Generalized Chelyshkov Wavelet— Wavelets de Chelyshkov Generalizadas de Orden Fraccionario
FPDE	Fractional Partial Differential Equation—Ecuación en Derivadas Parciales Fraccionaria
GPU	Graphics Processing Unit—Unidad de Procesamiento Gráfico
KG	Ecuación de Klein–Gordon
ODE	Ordinary Differential Equation—Ecuación Diferencial Ordinaria
ODS	Objetivos de Desarrollo Sostenible
PDE	Partial Differential Equation—Ecuación en Derivadas Parciales
RMS	Root Mean Square—Error Cuadrático Medio

Capítulo 1

1. Introducción

1.1. Introducción

Las ecuaciones diferenciales parciales no lineales desempeñan un papel central en la modelización de ondas, fenómenos dispersivos y dinámica de medios continuos [CHEN10], [LI07]. Entre ellas, la ecuación de Benjamin–Bona–Mahony (BBM) y la ecuación de Klein–Gordon (KG) destacan por describir con precisión la propagación de ondas viajeras y comportamientos oscilatorios en diferentes contextos físicos [KUMB23]. A pesar de su relevancia, la naturaleza no lineal y dispersiva de estos modelos dificulta la obtención de soluciones exactas y motiva el desarrollo de métodos numéricos eficientes.

En los últimos años, las técnicas basadas en *Wavelets* se han consolidado como una alternativa potente a los métodos numéricos clásicos. Las *Wavelets* permiten representar funciones con alta precisión y reducir las ecuaciones diferenciales a sistemas algebraicos manejables mediante el uso de matrices operacionales. Dentro de este ámbito, las *Wavelets* de Chelyshkov han mostrado un rendimiento especialmente notable debido a su estructura simple, su ortogonalidad y la esparsidad de las matrices que generan, lo que se traduce en algoritmos rápidos y de bajo coste computacional [RAHI19], [MARA22].

A partir de estos desarrollos, en este trabajo se propone un nuevo método numérico basado en *Wavelets* de Chelyshkov para aproximar soluciones de las ecuaciones no lineales de BBM y Klein–Gordon. El objetivo es construir un esquema de colocación que aproveche las propiedades de estas bases para mejorar la eficiencia y la precisión en problemas donde la dispersión y la no linealidad desempeñan un papel fundamental [CETI23], [GANI24].

1.2. Objetivos

El objetivo principal es presentar un estudio, análisis extenso y desarrollo de un novedoso método numérico que utilizando las funciones *Wavelets* de Chelyshkov permita resolver las ecuaciones en derivadas parciales (PDE) no lineales tales como

(a) la ecuación de Benjamina-Bona-Mohany de dos parámetros singularmente perturbadas, con diferentes casos y

(b) la ecuación no lineal de Klein-Gordon.

Así pues, los objetivos establecidos para este proyecto serán los siguientes:

1. Tras un capítulo introductorio, el segundo capítulo se centrará en presentar las definiciones de las funciones *Wavelets* de Chelyshkov, el operador integral y la matriz operacional de integración de Riemann–Liouville de orden α .

Así mismo, se definirán las aproximaciones de cualquier función bidimensional mediante la expansión en las funciones *Wavelets* de Chelyshkov como el estudio de la convergencia de dicha aproximación.

2. En los siguientes capítulos se diseñará un novedoso algoritmo numérico denominado método *Wavelet* de Chelyshkov (*Chelyshkov Wavelet Method*– ChWM) que se fundamenta en la base de las funciones *Wavelets* de Chelyshkov, con la construcción de las matrices operacionales de integración con el enfoque de Galerkin que resuelva las ecuaciones en derivadas parciales (PDE) no lineales reduciendo dicha la ecuación PDE a un sistema de ecuaciones algebraicas.
3. Se realizará una aplicación práctica codificada en el lenguaje *Mathematica*/MATLAB que implemente los algoritmos numéricos diseñados con la base *Wavelet* de Chelyshkov.
4. Aplicación del método *Wavelet* de Chelyshkov a ecuaciones conocidas, denominadas ecuaciones diferenciales parciales no lineales como (a) la ecuación de Benjamina-Bona-Mohany de dos parámetros singularmente perturbadas, con diferentes casos y (b) la ecuación no lineal de Klein-Gordon.
5. Una vez obtenidos los resultados de la implementación, se compararán las soluciones exactas de la ecuación PDE con las soluciones obtenidas con el método mediante tablas y gráficos 2D y 3D.

6. Como último paso, se realizará un análisis de las líneas de desarrollo futuras y se estudiarán cuáles son los posibles siguientes avances que se pueden producir en este tipo de proyectos.

1.3. Metodología

En el desarrollo del Proyecto se procederá de la siguiente manera:

- **A)** En los primeros capítulos se introducen todas las definiciones matemáticas asociadas con los polinomios y funciones *Wavelets* de Chelyshkov.
- **B)** Se establecen las bases y pasos que van a definir el método *Wavelet* de Chelyshkov (*Chelyshkov Wavelet Method*– ChWM) con la definición de los puntos de colocación que dará lugar a una solución aproximada de la ecuación PDE en el capítulo 3.
- **C)** Se implementarán los distintos algoritmos numéricos diseñados en el lenguaje técnico-científico de *Mathematica*, programa matemático muy utilizado en sectores científicos con amplias funciones para el desarrollo simbólico, numérico y gráfico.
- **D)** Aplicación del método numérico diseñado en las ecuaciones en derivadas parciales no lineales: ecuación de Benjamin-Bona-Mohany y la ecuación no lineal de Klein-Gordon en el capítulo 4.
- **E)** Se evaluarán los distintos resultados numéricos obtenidos de la implementación.

Se emplearán tablas y gráficos 2D y 3D para facilitar la comparación.

- **F)** Finalmente, en el capítulo 5, se establecerán las conclusiones y las futuras líneas de investigación.

1.3.1. Plan de Trabajo

El desarrollo de este proyecto se ajustará al cronograma mostrado en la Figura 1.1, donde se detallan las actividades a realizar y los tiempos a emplear.

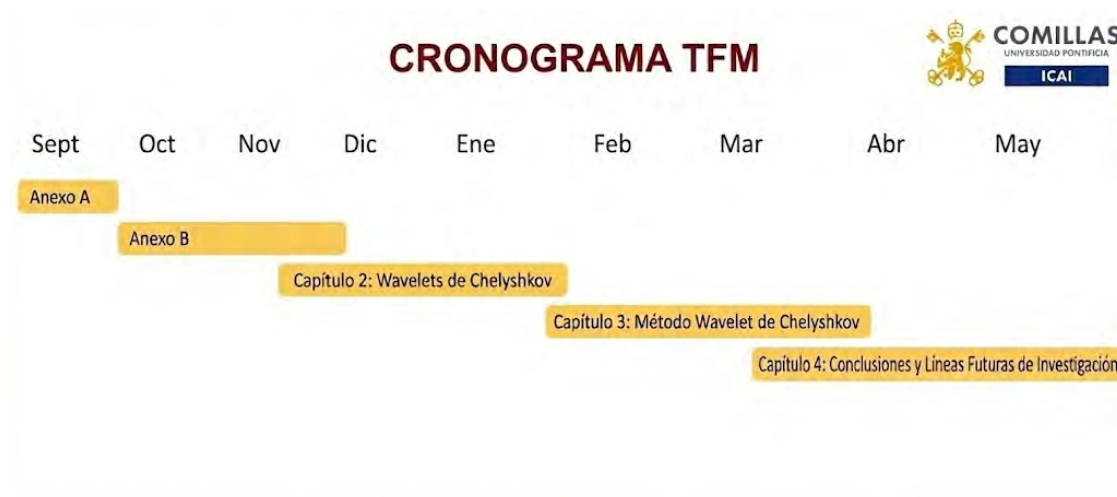


Figura 1.1. Cronograma orientativo del TFM.

1.3.2. Recursos

Se citan los diferentes recursos a emplear en la realización del presente Proyecto/Trabajo:

- Procesador de textos Microsoft Office®.
- Procesador científico del software *Mathematica* 14®.
- Software simbólico y numérico:

Mathematica 14® y MATLAB 2024®.

- Software para la creación de gráficos, esquemas, organigramas, diseño de circuitos: PowerPoint®.

1.4. Estado del Arte

1.4.1. Investigaciones Actuales

En Rahimkhani, Ordokhani y Lima [[RAHI19](#)] se introduce por primera vez una familia de funciones fraccionarias basada en *Wavelets* de Chelyshkov para resolver ecuaciones diferenciales fraccionarias de orden distribuido, en una y dos variables. El punto de partida del trabajo es la formulación de las derivadas fraccionarias en el sentido de Caputo y la construcción de *Wavelets* de Chelyshkov de orden fraccionario adaptadas a este contexto. A partir de estas funciones, los autores derivan operadores integrales fraccionarios y construyen matrices operacionales asociadas.

La idea clave es aproximar la solución como una combinación truncada de *Wavelets* de Chelyshkov y aplicar un método de colocación compuesto en una partición del dominio. De esta forma, el problema diferencial original (ODE o PDE fraccionaria) se transforma en un sistema de ecuaciones algebraicas que puede resolverse mediante técnicas estándar, como esquemas iterativos tipo *Newton*. Los resultados numéricos que presentan muestran errores muy pequeños y una buena estabilidad del método para distintos ejemplos de ecuaciones de orden distribuido.

Posteriormente, Marasi y Derakhshan [[MARA22](#)] desarrollan un método de colocación compuesto similar, también basado en *Wavelets* de Chelyshkov de orden fraccionario, pero aplicado a un problema más específico: la ecuación fraccionaria de advección–dispersión móvil–inmóvil de orden distribuido. En este caso, además de construir las matrices operacionales correspondientes, los autores ponen énfasis en el análisis teórico del método, proporcionando resultados de convergencia y estimaciones de error.

Al igual que en [[RAHI19](#)], la solución de la ecuación fraccionaria se reduce a la resolución de un sistema de ecuaciones algebraicas que se trata con el *método iterativo de Newton*. Los ejemplos numéricos incluidos en el artículo indican que el esquema propuesto es preciso y eficiente, y que el uso de las *Wavelets* de Chelyshkov permite mantener matrices dispersas y bien condicionadas, lo que reduce el coste computacional

1.4.2. Modelos no Lineales de Ondas: Ecuaciones BBM y Klein–Gordon

En el estudio de la propagación de ondas no lineales en medios continuos aparecen de forma recurrente dos ecuaciones modelo: la ecuación de Benjamin–Bona–Mahony (BBM) y la ecuación de Klein–Gordon (KG). Ambas describen fenómenos ondulatorios donde intervienen simultáneamente efectos dispersivos y no lineales, pero lo hacen desde contextos físicos distintos.

La ecuación de Benjamin–Bona–Mahony se utiliza como alternativa a la ecuación de Korteweg–de Vries en problemas de ondas en agua poco profunda y otros medios dispersivos. Una forma habitual de escribirla es: [\[SHIR21\]](#), [\[KUMB23\]](#)

$$u_t + u_x + u u_x - u_{xx} = 0 \quad (1.4.1)$$

donde $u(x, t)$ representa el perfil de la onda,

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial t} \quad u_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.4.2)$$

El término u_{xx} introduce la dispersión de una manera que suele ser más estable numéricamente que en otros modelos afines.

La ecuación de Klein–Gordon no lineal aparece, por su parte, en la teoría de campos, en sistemas oscilatorios acoplados y en distintos modelos de propagación de ondas. Una forma prototípica es: [\[SHIR21\]](#), [\[KUMB23\]](#):

$$u_{tt} + u_{xx} + f(u) = 0 \quad (1.4.3)$$

donde

$$u_{tt} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.4.4)$$

El término $f(u)$ resume la no linealidad del sistema, que suele adoptarse como una combinación polinómica de u , dependiendo del fenómeno que se quiera describir [\[KUMB23\]](#), [\[CETI23\]](#).

A lo largo de las últimas décadas se han desarrollado numerosos esquemas numéricos para aproximar estas ecuaciones: métodos de diferencias finitas, técnicas espectrales clásicas, formulaciones de Galerkin y distintos esquemas implícitos y explícitos [\[CHEN10\]](#), [\[LI07\]](#). Sin embargo, cuando se pretende capturar con precisión estructuras locales (frentes, picos, solitones, etc.) o trabajar en escalas múltiples, muchos de estos métodos requieren mallas muy finas o un coste computacional elevado.

En este contexto, los métodos basados en *Wavelets* se han consolidado como una alternativa interesante, combinando buena resolución local con matrices estructuralmente más manejables [[LI07](#)], [[SHIR21](#)] .

1.4.3. Aproximación de la Solución Mediante *Wavelets* de Chelyshkov

La idea básica del enfoque *Wavelet* es aproximar la solución como una combinación de funciones base localizadas, en este caso *Wavelets* de Chelyshkov. Estas funciones se construyen a partir de polinomios de Chelyshkov reescalados y trasladados, de forma que resultan orto-gonales y, al mismo tiempo, concentradas en intervalos específicos del dominio [RAHI19], [MARA22].

Sea $u(x, t)$ la solución de la ecuación considerada. Se postula una aproximación de la forma

$$u(x, t) \approx \sum_{M,N} d_{M,N}(t) \Psi_{M,N}(x) \quad (1.4.5)$$

donde $\Psi_{M,N}(x)$ son los *Wavelets* de Chelyshkov y $d_{M,N}(t)$ los coeficientes dependientes del tiempo. Para simplificar la notación, se agrupan las funciones $\Psi_{M,N}$ en un vector columna:

$$\Lambda(x) = (\Psi_{1,0}(x), \Psi_{1,1}(x), \dots, \Psi_{K,L}(x))^T \quad (1.4.6)$$

y los coeficientes en un vector

$$D(t) = (d_{1,0}(t), d_{1,1}(t), \dots, d_{K,L}(t))^T \quad (1.4.7)$$

Con esta notación, la aproximación se escribe de manera compacta como

$$u(x, t) \approx \Lambda(x)^T D(t) \quad (1.4.8)$$

A partir de esta representación se construyen las matrices operacionales que aproximan las derivadas espaciales. En particular, se definen matrices A_x y A_{xx} tales que

$$\begin{aligned} u_x(x, t) &\approx \Lambda(x)^T A_x D(t) \\ u_{xx}(x, t) &\approx \Lambda(x)^T A_{xx} D(t) \end{aligned} \quad (1.4.9)$$

Estas matrices se obtienen utilizando las propiedades de derivación e integración de los *Wavelets de Chelyshkov* y permiten sustituir las derivadas espaciales por productos matriciales [RAHI19], [MARA22]. De este modo, las ecuaciones diferenciales en $u(x, t)$ se transforman en ecuaciones en los coeficientes $D(t)$.

1.4.4. Reducción de la Ecuación BBM al Sistema en Coeficientes

Considérese de nuevo la ecuación BBM:

$$u_t + u_x + u u_x - u_{xx} = 0. \quad (1.4.10)$$

Se introduce la aproximación en *Wavelets* tanto para u como para sus derivadas espaciales. En particular:

$$u_x(x, t) \approx \Lambda(x)^T A_x D(t) \quad (1.4.11)$$

y, para la derivada mixta, se tiene

$$u_{xx}(x, t) \approx \Lambda(x)^T A_{xx} D'(t) \quad (1.4.12)$$

donde $D'(t)$ denota la derivada temporal de los coeficientes. Si además se escribe

$$u(x, t) \approx \Lambda(x)^T D(t) \quad (1.4.13)$$

el término no lineal se puede expresar, de forma aproximada, como

$$u(x, t) u_x(x, t) \approx (\Lambda(x)^T D(t)) (\Lambda(x)^T A_x D(t)). \quad (1.4.14)$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación BBM y proyectando sobre la base $\Lambda(x)$ (mediante integración en el dominio espacial y aprovechando la ortogonalidad de los *Wavelets*), se obtiene un sistema de ecuaciones en los coeficientes de la forma

$$M_1 D'(t) + M_2 D(t) + N(D(t)) = 0. \quad (1.4.15)$$

Las matrices M_1 y M_2 recogen las contribuciones lineales de la ecuación, mientras que $N(D(t))$ agrupa los términos no lineales derivados del producto $u u_x$. Este sistema constituye un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias en el tiempo para el vector $D(t)$.

Su resolución puede abordarse mediante esquemas de integración temporal estándar combinados con métodos iterativos (por ejemplo, *Newton*) para tratar la parte no lineal [CHEN10], [LI07].

Una vez calculada la evolución de $D(t)$, la aproximación de la solución en el dominio físico se obtiene recuperando:

1.4.5. Aplicación del Método a la Ecuación de Klein–Gordon

En el caso de la ecuación de Klein–Gordon:

$$u_{tt} - u_{xx} + f(u) = 0 \quad (1.4.16)$$

se sigue una estrategia similar. Se mantiene la aproximación

$$u(x, t) \approx \Lambda(x)^T D(t) \quad (1.4.17)$$

y se utiliza de nuevo la matriz A_{xx} para la segunda derivada espacial:

$$u_{xx}(x, t) \approx \Lambda(x)^T A_{xx} D(t). \quad (1.4.18)$$

La segunda derivada temporal se discretiza mediante un esquema de diferencias centradas. En un instante temporal t_n , se puede aproximar

$$u_{tt}(x, t_n) \approx \frac{u(x, t_{n+1}) - 2u(x, t_n) + u(x, t_{n-1}))}{(\Delta t)^2} \quad (1.4.19)$$

donde Δt es el paso del tiempo. Al sustituir $u(x, t_n) \approx \Lambda(x)^T D_n$ con $D_n = D(t_n)$, y proyectar de nuevo sobre $\Lambda(x)$, se obtiene, para cada paso de tiempo, un sistema de la forma

$$\frac{D_{n+1} - 2D_n + D_{n-1}}{(\Delta t)^2} - K \cdot D_n + F(D_n) = 0. \quad (1.4.20)$$

Aquí, la matriz K proviene de la discretización espacial y la proyección del término u_{xx} , mientras que $F(D_n)$ representa la contribución de la no linealidad $f(u)$, evaluada con la aproximación *Wavelet*. El problema se reduce así a resolver, en cada instante, un sistema no lineal en los coeficientes D_n [CHEN10].

Este planteamiento permite capturar soluciones oscilatorias y perfiles localizados característicos de la ecuación de Klein–Gordon, aprovechando la capacidad de los *Wavelets* de Chelyshkov para adaptarse a estructuras espaciales complejas.

1.4.6. Condiciones de Contorno y Esquema de Resolución

Para completar el método, es necesario introducir las condiciones de contorno e iniciales propias de cada modelo. En la ecuación BBM, por ejemplo, se suelen imponer condiciones de tipo Dirichlet o periódicas en los extremos del dominio, mientras que en la ecuación de Klein–Gordon suelen especificarse tanto $u(x, 0)$ como $u_t(x, 0)$.

Estas condiciones se traducen en restricciones sobre los coeficientes $D(t)$. Evaluando la aproximación:

$$u(x, t) \approx \Lambda(x)^T D(t) \quad (1.4.21)$$

en los puntos de contorno y en el instante inicial, se obtienen ecuaciones adicionales que se incorporan al sistema principal. En la práctica, el procedimiento completo puede esquematizarse en los siguientes pasos:

1. Construcción de la base de *Wavelets* de Chelyshkov en el dominio espacial y cálculo de las matrices operacionales A_x , A_{xx} , etc.
2. Sustitución de las derivadas espaciales por sus representaciones matriciales en las ecuaciones BBM y Klein–Gordon.
3. Proyección sobre la base *Wavelet* para obtener sistemas en los coeficientes $D(t)$ o en D_n .
4. Incorporación de las condiciones iniciales y de contorno como ecuaciones adicionales.
5. Resolución de los sistemas resultantes mediante esquemas de integración temporal e iteraciones para los términos no lineales [CHEN10], [LI07].
6. Reconstrucción de la solución aproximada en el dominio físico a partir de los coeficientes obtenidos.

Una de las ventajas del uso de *Wavelets* de Chelyshkov es que las matrices que aparecen en el método son, en general, dispersas y presentan una estructura que reduce el coste computacional [RAHI19], [MARA22]. Además, la localización espacial de los *Wavelets* hace que el método sea especialmente adecuado para el estudio numérico de ecuaciones no lineales dispersas como la BBM y la de Klein–Gordon, permitiendo una buena resolución de los detalles del perfil de onda sin necesidad de mallas excesivamente finas [KUMB23].

1.5. Objetivos de Desarrollo Sostenible

Aunque este trabajo es principalmente teórico y se centra en métodos numéricos para las ecuaciones de BBM y Klein–Gordon, sí se puede relacionar con varios ODS de forma indirecta. A continuación se comenta, uno por uno, dónde puede tener cierto impacto o utilidad futura.

- 1. Energía asequible y no contaminante.** Las ecuaciones tipo BBM y Klein–Gordon aparecen en modelos de propagación de ondas, transporte y vibraciones que se usan en ingeniería de materiales, transmisión de señales y, en general, en el diseño de sistemas físicos. Contar con métodos numéricos más eficientes y precisos facilita, a medio y largo plazo, la simulación de estructuras o procesos relacionados con energías renovables y con un uso más racional de los recursos. Es una contribución indirecta, pero encaja con la idea de disponer de mejores herramientas para analizar sistemas complejos ligados a la energía.



Figura 1.2. Energía asequible y no contaminante.

- 2. Industria, innovación e infraestructuras.** Los métodos numéricos robustos para ecuaciones dispersivas permiten simular con más fiabilidad fenómenos que aparecen en telecomunicaciones, transporte de fluidos, dinámica de medios elásticos o propagación de señales en distintos tipos de infraestructuras. Un esquema basado en *Wavelets* de Chelyshkov, si se integra en modelos industriales más amplios, puede ayudar a reducir tiempos de cálculo y a mejorar la calidad de las simulaciones. En la práctica, esto se traduce en herramientas que pueden apoyar procesos de diseño y de innovación en ingeniería.



Figura 1.3. Industria, Innovación e Infraestructura.

3. Acción por el clima. Numerosos modelos relacionados con el clima, la propagación de ondas en la atmósfera o en océanos, y ciertos problemas de difusión y transporte, se apoyan en ecuaciones no lineales similares a las estudiadas en este trabajo. Disponer de métodos numéricos más eficientes abre la puerta a simulaciones más detalladas o a estudios de sensibilidad con un coste computacional menor. El trabajo no aborda explícitamente un problema climático, pero sí aporta una pieza más dentro del conjunto de herramientas matemáticas que se pueden utilizar en ese ámbito.



Figura 1.4. Acción por el clima.

Capítulo 2

2. Polinomios y *Wavelets* de Chelyshkov Fraccionarios

2.1. Introducción

Es objeto del presente capítulo el estudio de los polinomios y las funciones *Wavelets* de Chelyshkov de orden fraccionario, así como la derivación de la matriz operacional de integración fraccionaria que permita diseñar un algoritmo numérico con el enfoque de Galerkin basado en estas matrices operativas que resuelva ecuaciones en derivadas parciales PDE (*Partial Differential Equations*–PDE) que reduzca la ecuación diferencial a un sistema de ecuaciones algebraicas no lineales. ([RAHI19], [MARA22], [LI07]).

2.1.1. Definición de los Polinomios de Chelyshkov Fraccionarios

Se definen previamente los polinomios de Chelyshkov.

- **Definición 2.1. Polinomios de Chelyshkov.**

Los polinomios de *Chelyshkov* se definen de forma explícita: [MOHA18], [CHEL06], [ERMA23]

$$C_{M,n}(x) = \sum_{k=0}^{M-n} \underbrace{(-1)^k \binom{M-n}{k} \binom{M+n+k+1}{M-n}}_{a_{kn}} x^{n+k} \quad n = 0, 1, \dots, M \quad (2.1.1)$$

donde la constante a_{kn} se define por

$$a_{kn} = (-1)^k \binom{M-n}{k} \binom{M+n+k+1}{M-n} \quad (2.1.2)$$

Estos polinomios son ortogonales sobre el intervalo $[0, 1]$ con respecto a la función peso $w(x) = 1$,

$$\int_0^1 C_{M,n}(x) C_{M,m}(x) dx = \frac{1}{m+n+1} \delta_{nm} \quad (2.1.3)$$

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

siendo δ_{nm} la funcion delta de Kronecker.

Los polinomios *Chelyshkov* se derivan también con la fórmula de Rodrigues, de la forma:

$$C_{M,n}(x) = \frac{1}{(M-n)!} \frac{1}{x^{n+1}} \frac{d^{M-n}}{dx^{M-n}} (x^{M+n+1} (1-x)^{M-n}) \quad n = 0, 1, \dots, M \quad (2.1.4)$$

Observaciones 2.1.1.

- (i) Los polinomios de *Chelyshkov* $C_{M,n}(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots, M$ constituyen una base de *polinomios ortogonales*.
- (ii) De acuerdo con la definición de los polinomios de *Chelyshkov*, para un número entero fijo M , las funciones $C_{M,n}(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots, M$ son polinomios exactamente de grado M .
- (iii) Esta puede ser la diferencia clave entre los polinomios de *Chelyshkov* y otros opolinomios ortogonales en el intervalo $[0, 1]$, como los polinomios de Legendre desplazados, o los polinomios de Chebyshev, y los polinomios de Chebyshev del segundo tipo donde el k – ésimo polinomio tiene grado k .
- (iv) Los polinomios de *Chelyshkov* son ortogonales con respecto al peso $w(x) = 1$, por lo tanto, su aplicación a la solución aproximada de ecuaciones funcionales es más eficiente y confiable en comparación con los polinomios de Chebyshev de segunda clase y los polinomios de Chebyshev desplazados.
- (v) Los polinomios de *Chelyshkov* $C_{M,n}(x)$ tiene un cero en $x = 0$ con orden de multiplicidad n y $M - n$ ceros reales distintos en el intervalo unidad.

El polinomio $C_{0,M}(x)$ tiene exactamente M raíces simples en el intervalo unidad $[0, 1]$.

De la expresión de Rodrigues se deduce la fórmula

$$\int_0^1 C_{M,n}(x) (x) dx = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{M+1} \quad n = 0, 1, \dots, M \quad (2.1.5)$$

Sea la matriz $\Phi(x)$ formada por los polinomios de *Chelyshkov*

$$\Phi(x) = \{C_{M,n}(x)\}_{n=0,1,\dots,M} = \begin{pmatrix} C_{M,0}(x) \\ C_{M,1}(x) \\ \vdots \\ C_{M,M}(x) \end{pmatrix}. \quad (2.1.6)$$

Se define la *matriz dual* de $\Phi(x)$ a la matriz definida por

$$D = \int_0^1 \Phi(x) \Phi^T(x) dx = \text{diag} \left\{ \frac{1}{2n+1} \right\}_{n=0}^M. \quad (2.1.7)$$

• **Definición 2.2. Polinomios de Chelyshkov Fraccionarios. Pendiente**

Los polinomios de *Chelyshkov* se definen de forma explícita: [MOHA18],[CHEL06]

$$C_{M,n}(x) = \sum_{k=0}^{M-n} \underbrace{(-1)^k \binom{M-n}{k} \binom{M+n+k+1}{M-n}}_{a_{kn}} x^{n+k} \quad n = 0, 1, \dots, M \quad (2.1.8)$$

donde la constante a_{kn} se define por

$$a_{kn} = (-1)^k \binom{M-n}{k} \binom{M+n+k+1}{M-n} \quad (2.1.9)$$

Estos polinomios son ortogonales sobre el intervalo $[0, 1]$ con respecto a la función peso $w(x) = 1$,

$$\int_0^1 C_{M,n}(x) C_{M,m}(x) dx = \frac{1}{m+n+1} \delta_{nm} \quad (2.1.10)$$

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

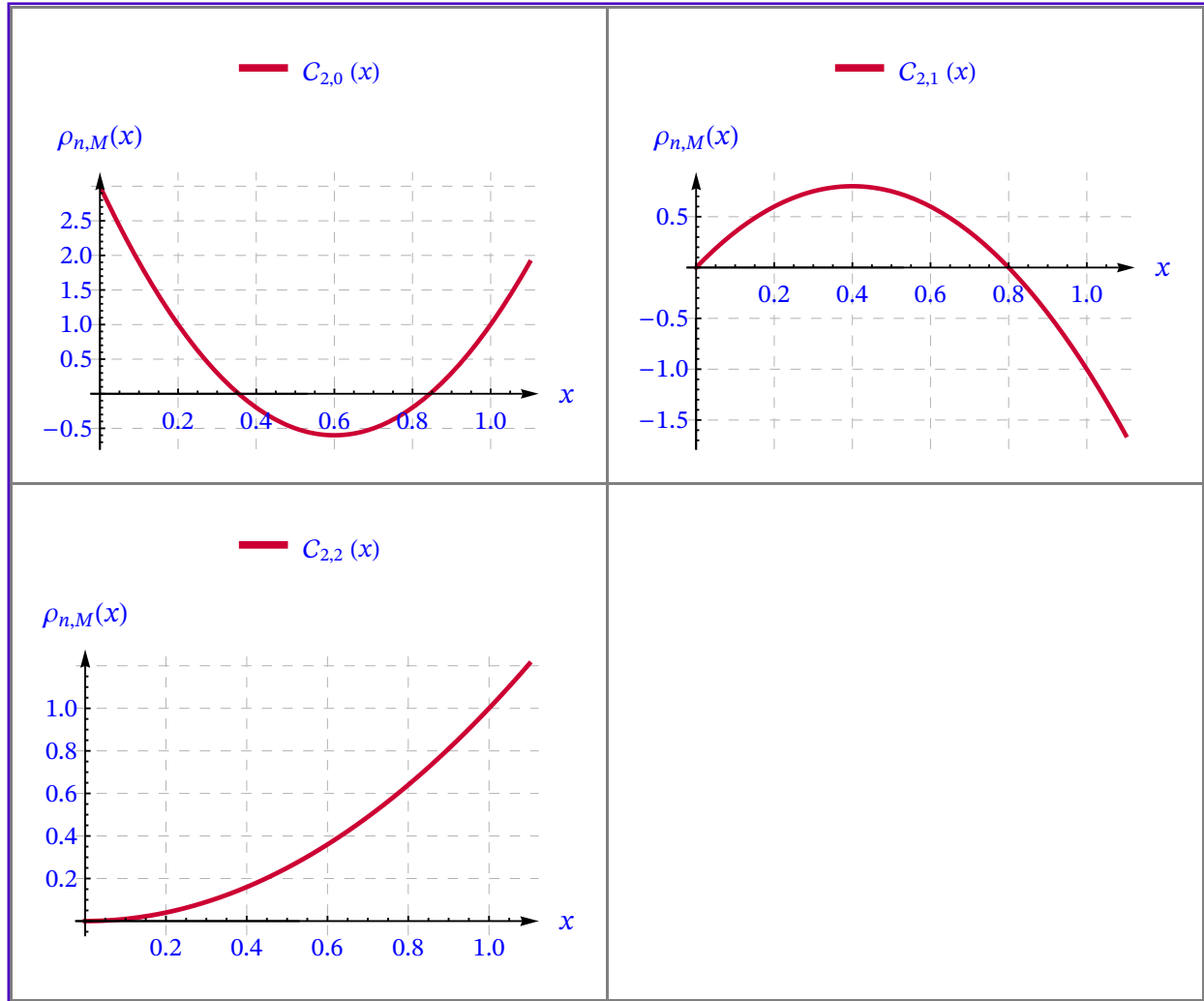
siendo δ_{nm} la función delta de Kronecker.

Los polinomios *Chelyshkov* se derivan también con la fórmula de Rodrigues, de la forma:

$$C_{M,n}(x) = \frac{1}{(M-n)!} \frac{1}{x^{n+1}} \frac{d^{M-n}}{dx^{M-n}} (x^{M+n+1} (1-x)^{M-n}) \quad n = 0, 1, \dots, M \quad (2.1.11)$$

Ejemplo 2.1.1.

- (a) Calcúlense los polinomios de *Chelyshkov* $C_{M,n}(x)$, con $M = 2$ y $n = 0, 1, 2, \dots, M$.
- (b) Represéntense los primeros polinomios $C_{M,n}(x)$.


SOLUCIÓN

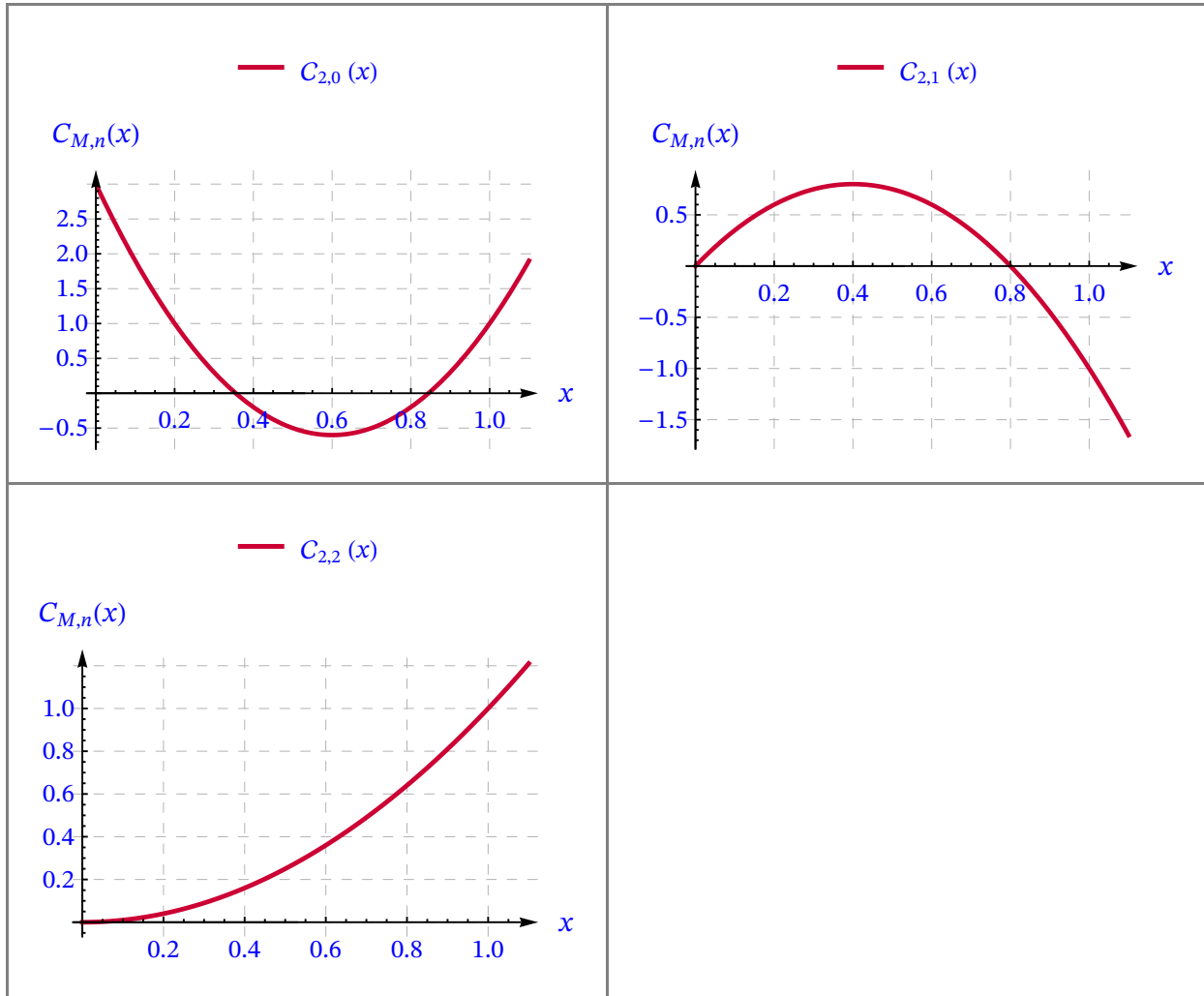
(a)

Out[•]//TableForm=

$C_{2,0}(x)$	$10x^2 - 12x + 3$
$C_{2,1}(x)$	$4x - 5x^2$
$C_{2,2}(x)$	x^2

(b)

Out[•]=



■ Ejemplo 2.1.2.

(a) Calcúlense los polinomios de *Chelyshkov* $C_{M,n}(x)$, con $M = 3$ y $n = 0, 1, 2, \dots, M$.

(b) Represéntense los primeros polinomios $C_{M,n}(x)$.

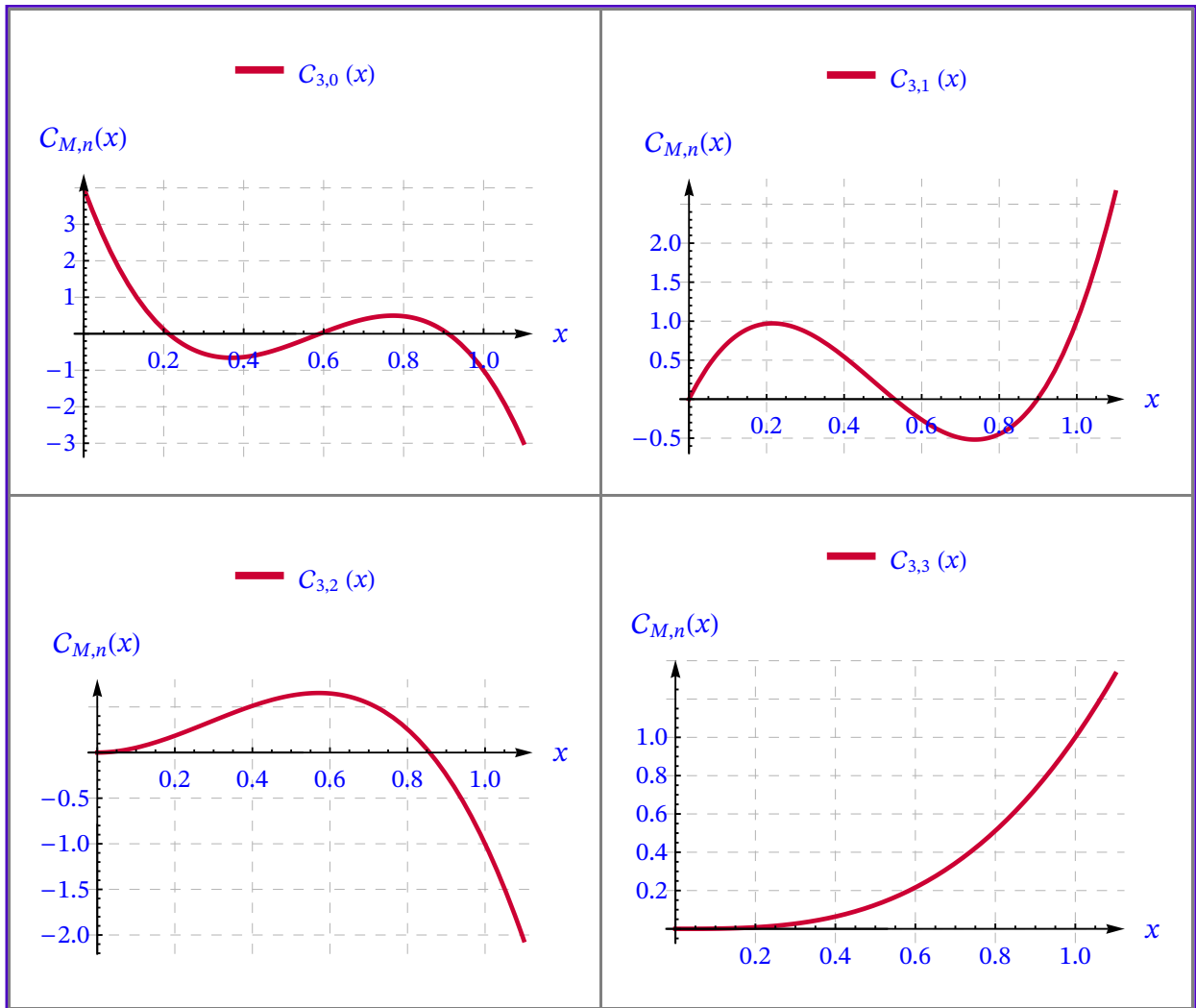
Indicación:

$$C_{3,0}(x) = -35x^3 + 60x^2 - 30x + 4$$

$$C_{3,1}(x) = 21x^3 - 30x^2 + 10x$$

$$C_{3,2}(x) = 6x^2 - 7x^3$$

$$C_{3,3}(x) = x^3$$

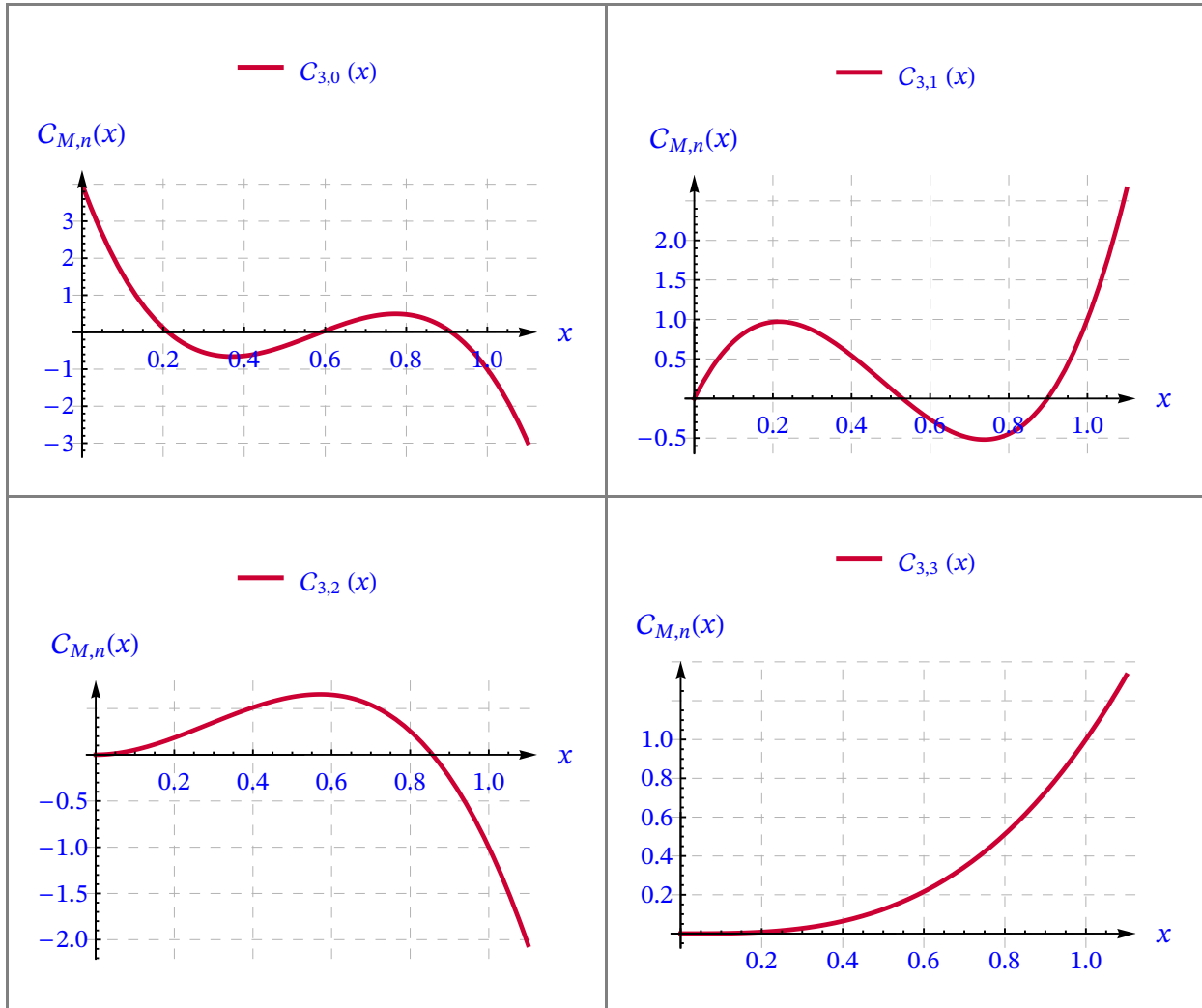


SOLUCIÓN**(a)**`Out[•]//TableForm=`

$$\begin{array}{lcl} C_{3,0}(x) & = & -35 x^3 + 60 x^2 - 30 x + 4 \\ C_{3,1}(x) & = & 21 x^3 - 30 x^2 + 10 x \\ C_{3,2}(x) & = & 6 x^2 - 7 x^3 \\ C_{3,3}(x) & = & x^3 \end{array}$$

(b)

Out[*]=



▼ **Teorema 2.1. Polinomios Ortogonales de Chelyshkov.**

Sean $\{C_{M,n}(x)\}_{n=0}^M$ la familia de polinomios de Chelyshkov de grado M , entonces los polinomios de Chelyshkov forman un sistema *ortogonal* en el espacio $L^2([0, 1])$ con respecto al producto interno:

$$\langle C_{M,n}, C_{M,m} \rangle = \int_0^1 C_{M,n}(x) C_{M,m}(x) dx = \frac{1}{m+n+1} \delta_{nm} \quad \delta_{nm} = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

con la función peso $w(x) = 1$.

Los polinomios de Chelyshkov $C_{M,k}(x)$ tienen propiedades análogas a las de los polinomios ortogonales clásicos. De hecho, estos polinomios son un ejemplo de tales alternativas ortogonales, que no son soluciones de ecuaciones del tipo hipergeométrico, pero se puede expresar en términos de los polinomios de Jacobi. Además, también se pueden conectar a funciones hipergeométricas, polinomios exponenciales ortogonales y polinomios de Jacobi $P_k^{(\alpha,\beta)}$ mediante la relación:

$$C_{M,n}(x) = (-1)^{M-n} x^n P_{M-n}^{(0,2n+1)}(2x-1) \quad n = 0, 1, \dots, M. \quad (2.1.12)$$

■ Ejemplo 2.1.3.

Determinense los polinomios de *Chelyshkov* de grado M definidos en $[A, B] = [0, 1]$,

$$\mathcal{B} = \{C_{M,k}(x)\} \quad \left\{ \begin{array}{l} k = 0, 1, \dots, M \end{array} \right.$$

mediante las expresiones:

$$(i) \quad C_{M,n}(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{M-n} (-1)^k \binom{M-n}{k} \binom{M+n+k+1}{M-n}}_{a_{kn}} x^{n+k} \quad n = 0, 1, \dots, M$$

$$(ii) \quad C_{M,n}(x) = (-1)^{M-n} x^n P_{M-n}^{(0,2n+1)}(2x-1) \quad n = 0, 1, \dots, M$$

donde $P_{M-n}^{(0,2n+1)}$ es el polinomio de Jacobi.

$$(a) \quad M = 4 \quad (b) \quad M = 7.$$

SOLUCIÓN

(a)

Polinomios de *Chelyshkov*:

$$M = 4$$

$$(i) \quad C_{M,n}(x) = \begin{pmatrix} 126x^4 - 280x^3 + 210x^2 - 60x + 5 \\ -84x^4 + 168x^3 - 105x^2 + 20x \\ 36x^4 - 56x^3 + 21x^2 \\ 8x^3 - 9x^4 \\ x^4 \end{pmatrix}$$

$$(ii) \quad C_{M,n}(x) = (-1)^{M-n} x^n P_{M-n}^{(0,2n+1)}(2x-1)$$

$$C_{M,n}(x) = \begin{pmatrix} 126x^4 - 280x^3 + 210x^2 - 60x + 5 \\ -84x^4 + 168x^3 - 105x^2 + 20x \\ 36x^4 - 56x^3 + 21x^2 \\ 8x^3 - 9x^4 \\ x^4 \end{pmatrix}$$

(b)

Polinomios de *Chelyshkov*:

$$M = 7$$

$$(i) C_{M,n}(x) =$$

$$\begin{pmatrix} -6435 x^7 + 24024 x^6 - 36036 x^5 + 27720 x^4 - 11550 x^3 + 2520 x^2 - 252 x + 8 \\ 5005 x^7 - 18018 x^6 + 25740 x^5 - 18480 x^4 + 6930 x^3 - 1260 x^2 + 84 x \\ -3003 x^7 + 10010 x^6 - 12870 x^5 + 7920 x^4 - 2310 x^3 + 252 x^2 \\ 1365 x^7 - 4004 x^6 + 4290 x^5 - 1980 x^4 + 330 x^3 \\ -455 x^7 + 1092 x^6 - 858 x^5 + 220 x^4 \\ 105 x^7 - 182 x^6 + 78 x^5 \\ 14 x^6 - 15 x^7 \\ x^7 \end{pmatrix}$$

$$(ii) C_{M,n}(x) = (-1)^{M-n} x^n P_{M-n}^{(0,2n+1)}(2x-1)$$

$$C_{M,n}(x) =$$

$$\begin{pmatrix} -6435 x^7 + 24024 x^6 - 36036 x^5 + 27720 x^4 - 11550 x^3 + 2520 x^2 - 252 x + 8 \\ 5005 x^7 - 18018 x^6 + 25740 x^5 - 18480 x^4 + 6930 x^3 - 1260 x^2 + 84 x \\ -3003 x^7 + 10010 x^6 - 12870 x^5 + 7920 x^4 - 2310 x^3 + 252 x^2 \\ 1365 x^7 - 4004 x^6 + 4290 x^5 - 1980 x^4 + 330 x^3 \\ -455 x^7 + 1092 x^6 - 858 x^5 + 220 x^4 \\ 105 x^7 - 182 x^6 + 78 x^5 \\ 14 x^6 - 15 x^7 \\ x^7 \end{pmatrix}$$

2.1.2. Aproximación de Funciones por Polinomios de Chelyshkov

2.1.2.1. Aproximación de Funciones

Sea $\mathcal{H} = L^2([0, 1])$ un espacio de Hilbert formado por las funciones cuadrado integrables y sea $Y = \mathcal{H}_M = \text{span} \{C_{M,0}(x), C_{M,1}(x), C_{M,2}, \dots, C_{M,M}(x)\}$ un subespacio de dimensión finita y cerrado, y en consecuencia $Y = \mathcal{H}_M$ es un subespacio completo de $\mathcal{H}$. Si $f(x)$ es una función arbitraria elemento de $\mathcal{H} = L^2([0, 1])$ tiene una única mejor aproximación en $Y = \mathcal{H}_M$ tal como $\tilde{f}(x)$ que cumple

$$\exists \tilde{f}(x) \in Y = \mathcal{H}_M \Rightarrow \forall y(x) \in Y \quad \|f(x) - \tilde{f}(x)\| \leq \|f(x) - y(x)\|$$

lo que implica que

$$\forall y(x) \in Y \quad \langle f(x) - \tilde{f}(x), y(x) \rangle = 0 \quad (2.1.13)$$

donde $\langle, \rangle$ denota el producto interno.

Dado que $\tilde{f}(x) \in Y = \mathcal{H}_M = \text{span} \{C_{M,0}(x), C_{M,1}(x), C_{M,2}, \dots, C_{M,M}(x)\}$ existen unos únicos coeficientes $(c_k) = \{c_0, c_1, \dots, c_M\}$ tal que la función $f(x)$ se puede aproximar por $\tilde{f}(x)$:

$$f(x) \simeq \tilde{f}(x) = \sum_{k=0}^M c_k C_{M,k}(x) = C \cdot \Phi(x) \quad x \in [0, 1] \quad (2.1.14)$$

donde C es un vector fila y $\Phi(x)$ un vector columna de dimensión $(M + 1)$ dados por

$$C = (c_0 \ c_1 \ \dots \ c_M)$$

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} C_{M,0}(x) \\ C_{M,1}(x) \\ \vdots \\ C_{M,M}(x) \end{pmatrix}. \quad (2.1.15)$$

De la ecuación $\langle f(x) - \tilde{f}(x), y(x) \rangle = 0$ se tiene

$$\left\langle f(x) - \underbrace{C \cdot \Phi(x)}_{\tilde{f}(x)}, C_{M,k}(x) \right\rangle = 0 \quad k = 0, 1, \dots, M.$$

Por simplicidad se escribe que

$$\langle f(x), \Phi(x) \rangle - C \langle \Phi(x), \Phi(x) \rangle = 0 \Rightarrow C \langle \Phi(x), \Phi(x) \rangle = \langle f(x), \Phi(x) \rangle$$

donde $\langle \Phi(x), \Phi(x) \rangle$ es una matriz de dimensión $(M + 1) \times (M + 1)$. Se establece la matriz D

$$D = \langle \Phi(x), \Phi(x) \rangle = \int_0^1 \Phi(x) \Phi^T(x) dx = \text{diag} \left\{ \frac{1}{2n+1} \right\}_{n=0}^M. \quad (2.1.16)$$

De las ecuaciones $C \langle \Phi(x), \Phi(x) \rangle = \langle f(x), \Phi(x) \rangle$ y $D = \langle \Phi(x), \Phi(x) \rangle$ se deduce que

$$C = \langle f(x), \Phi(x) \rangle \cdot D^{-1} \\ C = \langle f(x), \Phi(x) \rangle \cdot \left[\int_0^1 \Phi(x) \Phi^T(x) dx \right]^{-1}. \quad (2.1.17)$$

El siguiente Teorema establece la expansión de una función arbitraria en términos del sub-espacio completo formado por los polinomios de *Chelyshkov* $C_{M,k}(x)$.

▼ **Teorema 2.1.2. Expansión en los Polinomios de *Chelyshkov*.**

Sea la función arbitraria $f(x) \in L^2([0, 1])$ cuadrado integrable definida en $x \in [0, 1]$, y sea la base $\mathcal{B}(x) = \mathcal{H}_M = \text{span} \{C_{M,0}(x), C_{M,1}(x), C_{M,2}, \dots, C_{M,M}(x)\}$ el subespacio de Hilbert completo formado por los polinomios de *Chelyshkov* de grado M .

La función $f(x)$ se puede expandir o desarrollar en serie con los polinomios de *Chelyshkov* con un número infinito de términos de la forma siguiente:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k C_{M,k}(x) \quad x \in [0, 1] \quad (2.1.18)$$

y se puede aproximar mediante la suma finita:

$$f(x) \simeq \tilde{f}(x) = \sum_{k=0}^M c_k C_{M,k}(x) = C \cdot \Phi(x) = C \cdot \mathcal{B}(x) \quad x \in [0, 1] \quad (2.1.19)$$

donde C es un vector fila formada por los coeficientes c_k de *Chelyshkov*, $\Phi(x) = \mathcal{B}(x)$ es un vector columna de dimensión $(M+1)$ dados por las expresiones matriciales:

$$C = (c_0 \ c_1 \ \dots \ c_M) \quad \mathcal{B}(x) = \Phi(x) = \begin{pmatrix} C_{M,0}(x) \\ C_{M,1}(x) \\ \vdots \\ C_{M,M}(x) \end{pmatrix} \quad (2.1.20)$$

Los coeficientes del vector C se calculan mediante la fórmula:

$$C = \langle f(x), \Phi(x) \rangle \cdot D^{-1} \\ C = \langle f(x), \Phi(x) \rangle \cdot \left[\int_0^1 \Phi(x) \Phi^T(x) dx \right]^{-1} \quad (2.1.21)$$

$$c_k = (2k + 1) \int_0^1 C_{M,k}(x) f(x) dx$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto interno definido para dos funciones $f, g \in L^2([0, 1])$ como

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_0^1 f(x) g(x) dx$$

y siendo

$$\begin{aligned} & \bullet \langle f(x), \Phi(x) \rangle = \left(\int_0^1 f(x) C_{M,0}(x) dx \int_0^1 f(x) C_{M,0}(x) dx \cdots \int_0^1 f(x) C_{M,0}(x) dx \right) \\ & \bullet D = \langle \Phi(x), \Phi(x) \rangle = \int_0^1 \Phi(x) \Phi^T(x) dx \Rightarrow D^{-1} = \left[\int_0^1 \Phi(x) \Phi^T(x) dx \right]^{-1} \\ & \bullet c_k = \frac{\langle f(x), C_{M,k}(x) \rangle}{\langle C_{M,k}(x), C_{M,k}(x) \rangle} = (2k + 1) \langle f(x), C_{M,k}(x) \rangle \\ & \bullet c_k = (2k + 1) \int_0^1 C_{M,k}(x) f(x) dx \quad k = 0, 1, \dots, M \end{aligned} \quad (2.1.22)$$

Observaciones 2.1.2.

- (i) El Teorema establece que dadoa que los polinomios de *Chelyshkov* son ortogonales con respecto a la función peso $w(x) = 1$ en el intervalo $[0, 1]$, cualquier función integrable en el intervalo $[0, 1)$ se puede expresar como el desarrollo en serie de los polinomios de *Chelyshkov*:

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^M C_{M,k}(x) \rho_{kM}(x) = C \cdot \Phi(x) \quad x \in [0, 1] \quad (2.1.23)$$

$$c_k = (2k + 1) \int_0^1 C_{M,k}(x) f(x) dx \quad k = 0, 1, \dots, M$$

donde C es un vector fila y $\Phi(x)$ un vector columna de dimensión $(M + 1)$ dados por

$$C = (c_0 \ c_1 \ \cdots \ c_M) \quad \Phi(x) = \begin{pmatrix} C_{M,0}(x) \\ C_{M,1}(x) \\ \vdots \\ C_{M,M}(x) \end{pmatrix}. \quad (2.1.24)$$

En el siguiente ejemplo se determina la expansión de una función $f(x) \in L^2([0, 1])$ definida en $[0, 1]$ en términos de la base ortogonal formada por los polinomios de Chelyshkov.

■ **Ejemplo 2.1.4. Desarrollo en Serie de los Polinomios de Chelyshkov.**

Sea la función $f(x)$ definida en el intervalo $[A, B] = [0, 1]$,

(a) $f(x) = x^{\alpha+1}$.

(i) Determinénse los polinomios de Chelyshkov de grado M :

$$\mathcal{B} = \{\rho_{kM}(x)\} \quad \left\{ \begin{array}{l} k = 0, 1, \dots, M \\ M = 2. \end{array} \right.$$

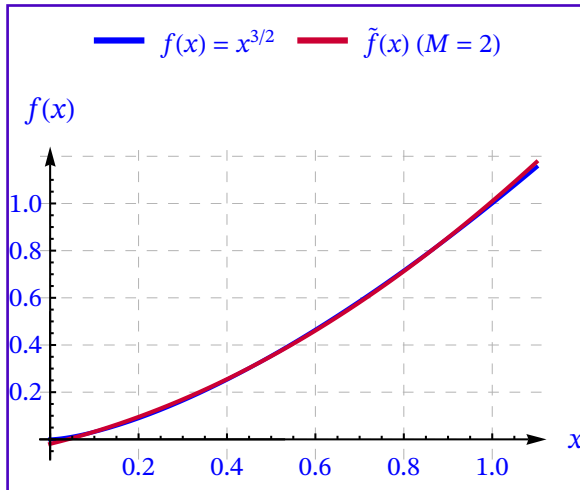
(ii) Represéntense las gráficas de los polinomios de Chelyshkov.

(b) Con $\alpha = \frac{1}{2}$, se pide:

(i) Hállese la función $\tilde{f}(x) = f_M(k)$ que aproxima a $f(x)$ mediante el desarrollo en serie de los polinomios de Chelyshkov.

(ii) Represéntense los coeficientes Wavelets, la función $f(x)$ y su aproximación $\tilde{f}(x)$.

(iii) Créese una tabla con los valores de x , $f(x)$, $\tilde{f}(x)$ y el error absoluto $|f(x) - \tilde{f}(x)|$ cometido en cada punto para $x \in [0, 1]$.



SOLUCIÓN

(a)

Polinomios de *Chelyshkov* $C_{M,n}(x)$

$$\left(\begin{array}{l} [A, B] = [0, 1] \\ M = 2 \\ n = 0, 1, \dots, M = \{0, 1, 2\} \end{array} \right)$$

(a) Definición de los polinomios de Chelyshkov de grado M

$$C_{M,n}(x) = \sum_{k=0}^{M-n} a_{kn} x^{n+k} \quad n = 0, 1, \dots, M$$

$$\bullet a_{kM} = (-1)^k \binom{M-n}{n} \binom{M+n+k-1}{M-n}$$

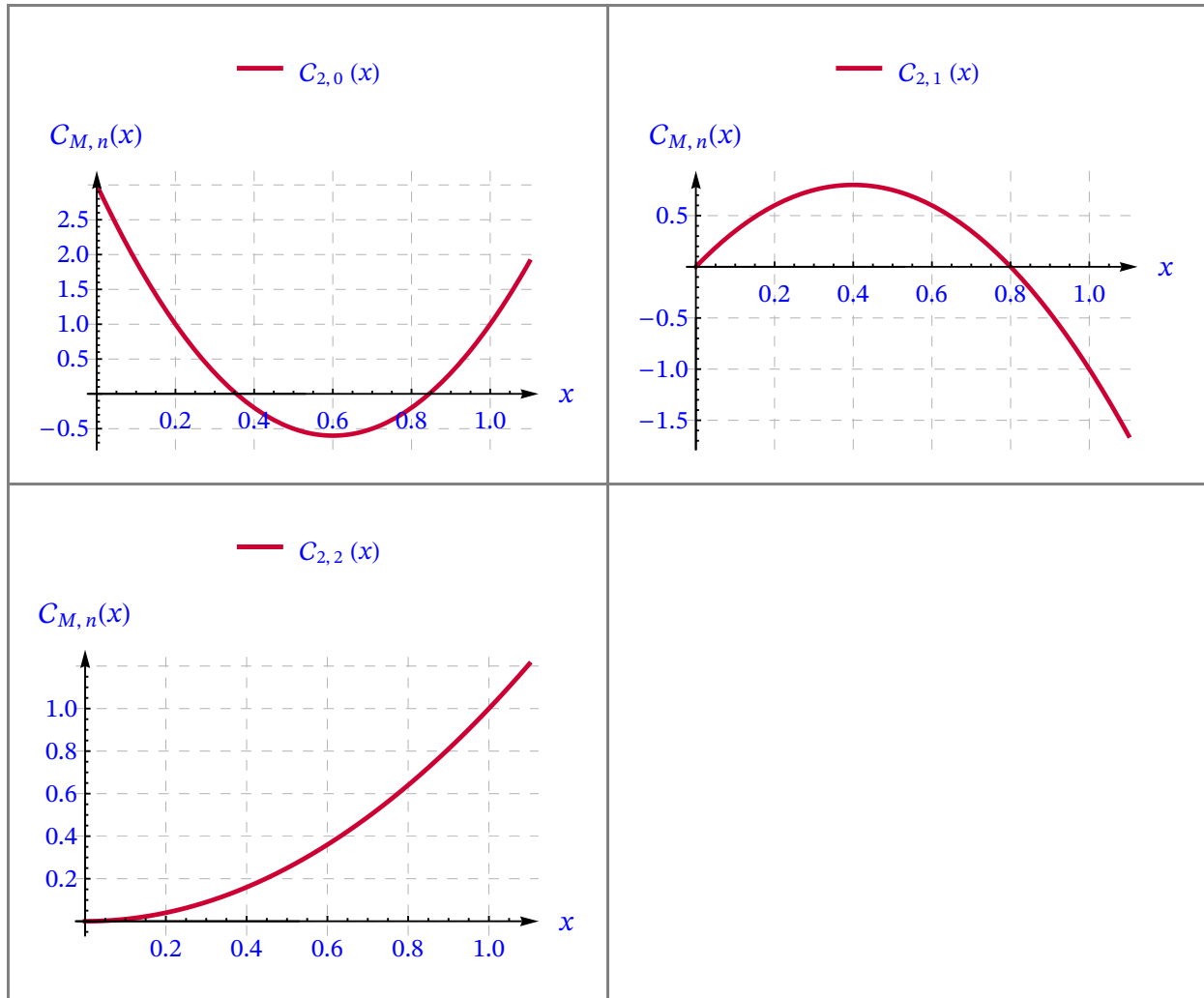
$$\left(\begin{array}{l} C_{2,0}(x) = 10x^2 - 12x + 3 \\ C_{2,1}(x) = 4x - 5x^2 \\ C_{2,2}(x) = x^2 \end{array} \right)$$

$$C_{2,0}(x) = 10x^2 - 12x + 3$$

$$C_{2,1}(x) = 4x - 5x^2$$

$$C_{2,2}(x) = x^2$$

Out[•]=



(b)

 Desarrollo en serie de los polinomios de *Chelyshkov* de la función

$$f(x) = x^{\alpha+1} \quad [A, B] = [0, 1]$$

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^M c_k C_{M,k}(x) \quad x \in [0, 1]$$

$$\bullet c_k = (2k+1) \int_0^1 f(x) C_{M,k}(x) dx$$

 Polinomios de Chelyshkov $C_{M,k}(x)$

$$\left(\begin{array}{l} [A, B] = [0, 1] \\ M = 2 \\ n = 0, \dots, M = \{0, 1, 2\} \end{array} \right)$$

 (a) Definición de los polinomios de Chelyshkov de grado M

$$C_{M,k}(x) = \sum_{k=0}^{M-n} a_{k,n} x^{n+k} \quad n = 0, 1, \dots, M$$

$$\bullet a_{k,n} = (-1)^k \binom{M-n}{n} \binom{M+n+k-1}{M-n}$$

$$\left(\begin{array}{l} C_{2,0}(x) = 10x^2 - 12x + 3 \\ C_{2,1}(x) = 4x - 5x^2 \\ C_{2,2}(x) = x^2 \end{array} \right)$$

 (b) Cálculo de los coeficientes c_k de Chelyshkov

$$c_k = \left(\begin{array}{l} c_0 = \frac{(\alpha-1)\alpha}{(\alpha+2)(\alpha+3)(\alpha+4)} \text{ if } \operatorname{Re}(\alpha) > -2 \\ c_1 = 3 \left(\frac{4}{\alpha+3} - \frac{5}{\alpha+4} \right) \text{ if } \operatorname{Re}(\alpha) > -3 \\ c_2 = \frac{5}{\alpha+4} \text{ if } \operatorname{Re}(\alpha) > -4 \end{array} \right)$$

(c) Desarrollo en serie de los polinomios de Chelyshkov de $f(x)$:

$$\tilde{f}(x) = \sum_{k=0}^M c_k C_{M,k}(x)$$

$$\tilde{f}(x) = \frac{5x^2}{\alpha+4} + 3(4x - 5x^2) \left(\frac{4}{\alpha+3} - \frac{5}{\alpha+4} \right) + \frac{(10x^2 - 12x + 3)(\alpha-1)\alpha}{(\alpha+2)(\alpha+3)(\alpha+4)}$$

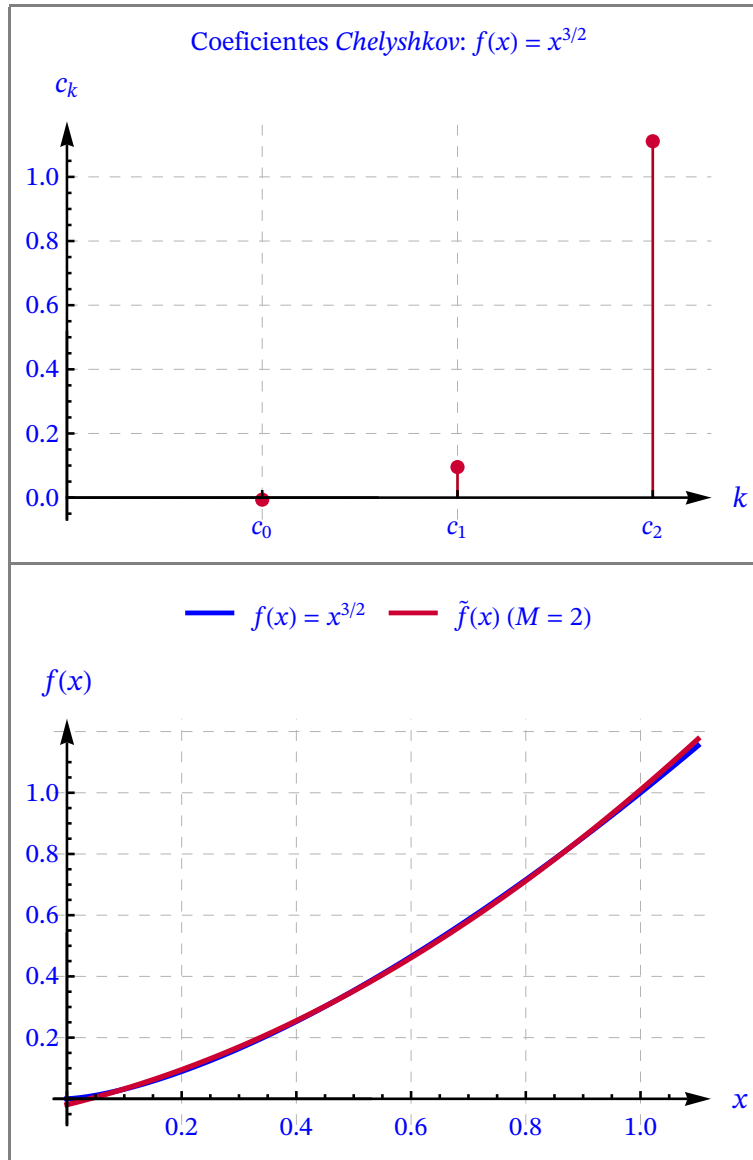
if $\text{Re}(\alpha) > -2$

$$\tilde{f}(x) = -\frac{60x^2}{\alpha+3} + \frac{10\alpha^2 x^2}{(\alpha+2)(\alpha+3)(\alpha+4)} - \frac{10\alpha x^2}{(\alpha+2)(\alpha+3)(\alpha+4)} + \frac{80x^2}{\alpha+4} +$$

$$\frac{48x}{\alpha+3} - \frac{12\alpha^2 x}{(\alpha+2)(\alpha+3)(\alpha+4)} + \frac{12\alpha x}{(\alpha+2)(\alpha+3)(\alpha+4)} - \frac{60x}{\alpha+4} +$$

$$\frac{3\alpha^2}{(\alpha+2)(\alpha+3)(\alpha+4)} - \frac{3\alpha}{(\alpha+2)(\alpha+3)(\alpha+4)} \quad \text{if } \text{Re}(\alpha) > -2$$

Out[•]=



2.1.3. Análisis de Convergencia y Cotas del Error

Se estudian los teoremas que determinan la convergencia y la cota de error en el desarrollo en serie de una función en términos de los polinomios de Chelyshkov $C_{M,k}(x)$. Se indica que dichas expansiones convergen uniformemente a $f(x)$ [MOHA18], [MORA19], [HAMI19], [HAMib20].

▼ Teorema 2.1.3. Expansión en Polinomios Chelyshkov. Cota de Error.

Sea una función continua $f(x) \in C^{M+1}([0, 1])$ definida en el intervalo $[0, 1]$, cuya derivada $(M + 1)$ –ésima está acotada $|f^{(M+1)}(x)| \leq L$ para alguna constante L , entonces se puede expandir como una serie de *polinomios* de Chelyshkov convergiendo la serie uniformemente a $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) &\simeq f_M(x) = \sum_{k=0}^M c_k C_{M,k}(x) \quad x \in [0, 1] \\ c_k &= \langle f(x), C_{M,k}(x) \rangle \end{aligned} \quad (2.1.25)$$

siendo c_k el producto interno entre $f(x)$ y $C_{M,k}(x)$ definido como

$$c_k = \langle f(x), C_{M,k}(x) \rangle = \int_0^1 f(x) C_{M,k}(x) dx$$

y además la estimación de la cota de error viene dada por

$$\begin{aligned} \|f(x) - f_M(x)\|_2 &\leq \frac{L}{\sqrt{(2M+3)(M+1)!}} \\ \bullet \|f(x)\|_2^2 &= \int_0^1 |f(x)|^2 dx \end{aligned} \quad (2.1.26)$$

donde $L = \max_{x \in [0,1]} |f^{(M+1)}(x)|$.

Demostración

El desarrollo en serie de Taylor del polinomio $q(x)$ es

$$q(x) = f(0) + \frac{1}{1!} f'(0)x + \frac{1}{2!} f''(0)x^2 + \cdots + \frac{1}{M!} f^{(M)}(0)x^M$$

y existe un valor $\xi \in (0, 1)$ tal que

$$|f(x) - f_M(\xi)| \leq \left| \frac{1}{(M+1)!} f^{(M+1)}(\xi) x^{M+1} \right|.$$

Ahora, haciendo uso de la propiedad de mejor aproximación de $f_M(x)$, (*Kreyszig approximation*) y tomando

$$L = \max_{x \in [0,1]} |f^{(M+1)}(x)|$$

se deduce que

$$\begin{aligned} \|f(x) - f_M(x)\|_2^2 &\leq \|f(x) - q(x)\|_2^2 = \int_0^1 \left(\frac{1}{(M+1)!} f^{(M+1)}(\xi) x^{M+1} \right)^2 dx \leq \frac{L^2}{(2M+3)((M+1)!)^2} \\ &\cdot \int_0^1 \left(\frac{1}{(M+1)!} f^{(M+1)}(\xi) x^{M+1} \right)^2 \leq \int_0^1 \left(\frac{1}{(M+1)!} L x^{M+1} \right)^2 = \frac{L^2}{(2M+3)((M+1)!)^2} \end{aligned}$$

y por tanto

$$\|f(x) - f_M(x)\|_2 \leq \frac{L}{\sqrt{(2M+3)((M+1)!)^2}} \quad L = \max_{x \in [0,1]} |f^{(M+1)}(x)|.$$

▼ Teorema 2.1.4. Expansión en Polinomios Chelyshkov.

Sea una función continua $f(x) \in C^{M+1}([0, 1])$ definida en $[0, 1]$, entonces se puede expandir como una serie de *polinomios de Chelyshkov*

$$\begin{aligned} f(x) &\simeq f_M(x) = \sum_{k=0}^M c_k C_{M,k}(x) \quad x \in [0, 1] \\ c_k &= \langle f(x), c_k C_{M,k}(x) \rangle \end{aligned} \tag{2.1.27}$$

y se cumple la siguiente relación:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \|f(x) - f_M(x)\| = 0. \tag{2.1.28}$$

Demostración

De la definición de la aproximación $f_M(x)$ se puede escribir:

$$\begin{aligned} \|f(x) - f_M(x)\|_2^2 &= \int_0^1 (f(x) - f_M(x))^2 dx \\ &= \int_0^1 \left(f(x) - \sum_{k=0}^M c_k C_{M,k}(x) \right)^2 dx \end{aligned}$$

Se simplifica la expresión y se aplica el límite:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \|f(x) - f_M(x)\| = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^1 \left(f(x) - \sum_{k=0}^M c_k C_{M,k}(x) \right)^2 dx = 0.$$

▼ **Teorema 2.1.5. Expansión en Polinomios Chelyshkov. Convergencia Uniforme.**

Sea la expansión de una función continua $f(x)$ en términos de los polinomios de Chelyshkov con convergencia uniforme. Por lo tanto, la expansión converge a $f(x)$.

Demostración

Sea la serie de los polinomios de Chelyshkov

$$f_M(x) = \sum_{n=0}^M c_n C_{M,n}(x)$$

donde $c_n = \langle f_M(x), C_{M,n}(x) \rangle$.

Se fija un determinado valor de $n = k$, y se aplica la relación anterior con $C_{M,k}(x)$, y se integra en el intervalo $[0, 1]$, y se tiene:

$$\begin{aligned} \langle f_M(x), C_{M,k}(x) \rangle &= \left\langle \sum_{n=0}^M c_n C_{M,n}(x), C_{M,k}(x) \right\rangle \\ &= \sum_{n=0}^M c_n \langle C_{M,n}(x), C_{M,k}(x) \rangle = c_{k^*} \end{aligned}$$

Por tanto, las funciones $f(x)$ y $f_M(x)$ tienen el mismo desarrollo en serie de polinomios de Chelyshkov, y en consecuencia $f_M(x) = f(x)$ para $x \in [0, 1]$.

Out[*]=

$$\frac{L^2}{(2M+3)((M+1)!)^2} \text{ if } \operatorname{Re}(M) > -\frac{3}{2}$$

2.1.4. Problemas

■ Desarrollo en Serie de los Polinomios de *Chelyshkov*.

Sea la función $f(x)$ definida en el intervalo $[A, B] = [0, 1]$,

- (a) (i) Determinénse los polinomios de *Chelyshkov* de grado M :

$$\mathcal{B} = \{\rho_{kM}(x)\} \quad \left\{ \begin{array}{l} k = 0, 1, \dots, M \end{array} \right.$$

- (ii) Represéntense las gráficas de los polinomios de *Chelyshkov*.

(b)

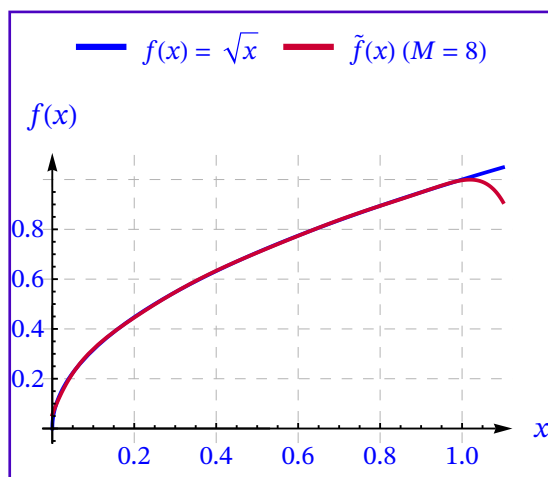
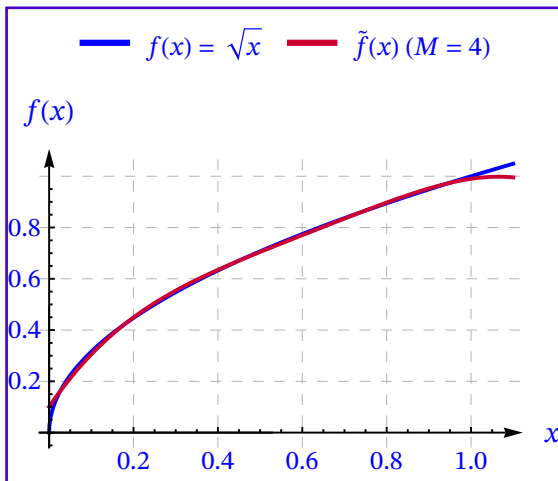
- (i) Hállese la función $\tilde{f}(x) = f_M(k)$ que aproxima a $f(x)$ mediante el desarrollo en serie de los polinomios de *Chelyshkov*.

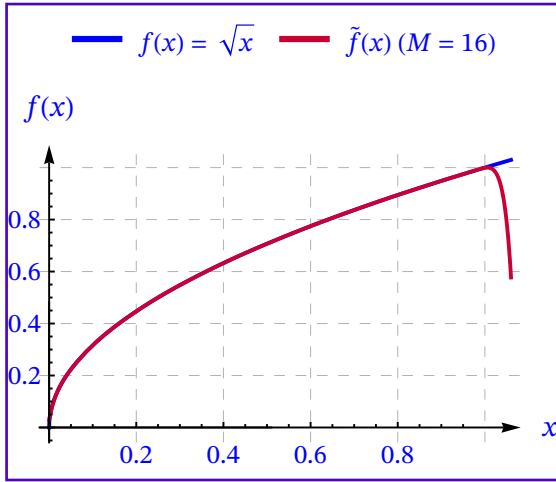
- (ii) Represéntense los coeficientes *Wavelets*, la función $f(x)$ y su aproximación $\tilde{f}(x)$.

- (iii) Créese una tabla con los valores de x , $f(x)$, $\tilde{f}(x)$ y el error absoluto $|f(x) - \tilde{f}(x)|$ cometido en cada punto para $x \in [0, 1]$.

■ Problema 2.1.1.

- (a) $f(x) = \sqrt{x}$ $M = 4, 8, 16$.





SOLUCIÓN

(a)

Polinomios de Chelyshkov $C_{M,n}(x)$

$$\left(\begin{array}{l} [A, B] = [0, 1] \\ M = 4 \\ n = 0, 1, \dots, M = \{0, 1, 2, 3, 4\} \end{array} \right)$$

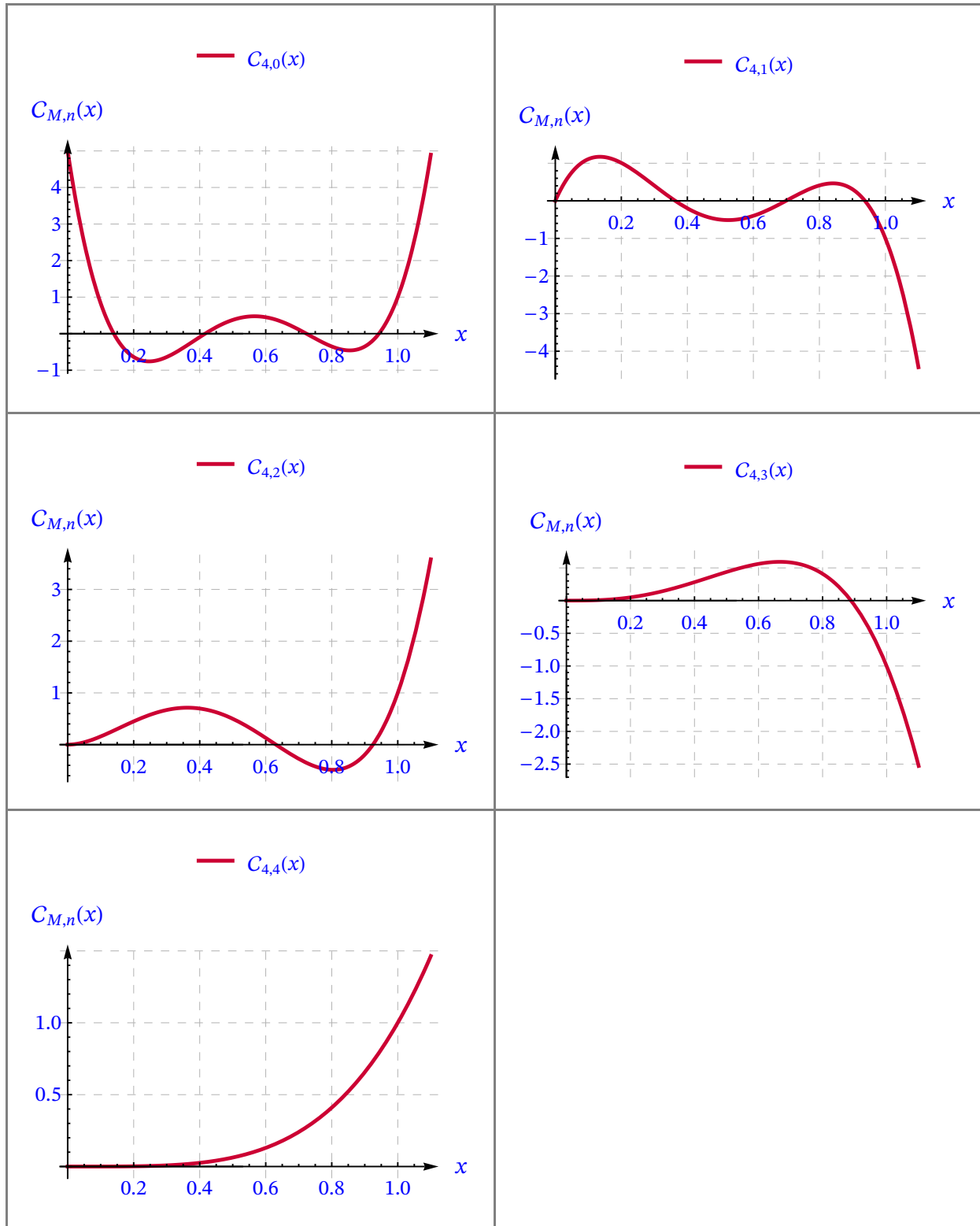
(a) Definición de los polinomios de Chelyshkov de grado M

$$C_{M,n}(x) = \sum_{k=0}^{M-n} a_{kn} x^{n+k} \quad n = 0, 1, \dots, M$$

$$\bullet a_{kM} = (-1)^k \binom{M-n}{n} \binom{M+n+k-1}{M-n}$$

$$\left(\begin{array}{l} C_{40}(x) = 126x^4 - 280x^3 + 210x^2 - 60x + 5 \\ C_{41}(x) = -84x^4 + 168x^3 - 105x^2 + 20x \\ C_{42}(x) = 36x^4 - 56x^3 + 21x^2 \\ C_{43}(x) = 8x^3 - 9x^4 \\ C_{44}(x) = x^4 \end{array} \right)$$

Out[•]=



(b)

 Desarrollo en serie de los polinomios de *Chelyshkov* de la función

$$f(x) = \sqrt{x} \quad [A, B] = [0, 1]$$

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^M c_k C_{M,k}(x) \quad x \in [0, 1]$$

$$\bullet c_k = (2k + 1) \int_0^1 f(x) C_{M,k}(x) dx$$

 Polinomios de Chelyshkov $C_{M,k}(x)$

$$\left(\begin{array}{l} [A, B] = [0, 1] \\ M = 4 \\ n = 0, \dots, M = \{0, 1, 2, 3, 4\} \end{array} \right)$$

 (a) Definición de los polinomios de Chelyshkov de grado M

$$C_{M,k}(x) = \sum_{k=0}^{M-n} a_{k,n} x^{n+k} \quad n = 0, 1, \dots, M$$

$$\bullet a_{k,n} = (-1)^k \binom{M-n}{n} \binom{M+n+k-1}{M-n}$$

$$\left(\begin{array}{l} C_{4,0}(x) = 126x^4 - 280x^3 + 210x^2 - 60x + 5 \\ C_{4,1}(x) = -84x^4 + 168x^3 - 105x^2 + 20x \\ C_{4,2}(x) = 36x^4 - 56x^3 + 21x^2 \\ C_{4,3}(x) = 8x^3 - 9x^4 \\ C_{4,4}(x) = x^4 \end{array} \right)$$

 (b) Cálculo de los coeficientes c_k de Chelyshkov

$$c_k = \left(\begin{array}{l} c_0 = \frac{2}{99} \\ c_1 = \frac{2}{11} \\ c_2 = \frac{50}{99} \\ c_3 = \frac{98}{99} \\ c_4 = \frac{18}{11} \end{array} \right)$$

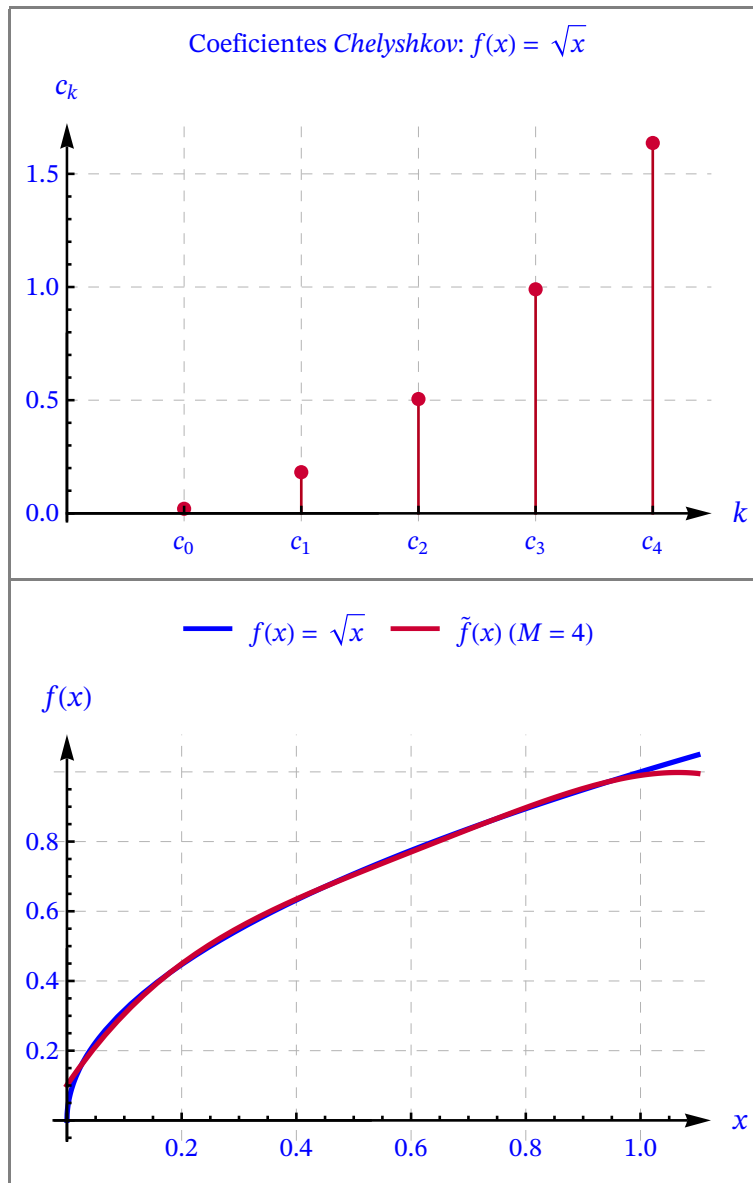
(c) Desarrollo en serie de los polinomios de Chelyshkov de $f(x)$:

$$\tilde{f}(x) = \sum_{k=0}^M c_k C_{M,k}(x)$$

$$\tilde{f}(x) = \frac{18x^4}{11} + \frac{2}{11}(-84x^4 + 168x^3 - 105x^2 + 20x) + \frac{98}{99}(8x^3 - 9x^4) + \frac{50}{99}(36x^4 - 56x^3 + 21x^2) + \frac{2}{99}(126x^4 - 280x^3 + 210x^2 - 60x + 5)$$

$$\tilde{f}(x) = -\frac{20x^4}{11} + \frac{448x^3}{99} - \frac{140x^2}{33} + \frac{80x}{33} + \frac{10}{99}$$

Out[*]=



(c)

Desarrollo en serie de los polinomios de *Chelyshkov* de la función

$$f(x) = \sqrt{x} \quad [A, B] = [0, 1]$$

$$f(x) \simeq \sum_{k=0}^M c_k C_{M,k}(x) \quad x \in [0, 1]$$

$$\bullet c_k = (2k + 1) \int_0^1 f(x) C_{M,k}(x) dx$$

Polinomios de Chelyshkov $C_{M,k}(x)$

$$\left(\begin{array}{l} [A, B] = [0, 1] \\ M = 8 \\ n = 0, \dots, M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \end{array} \right)$$

(a) Definición de los polinomios de Chelyshkov de grado M

$$C_{M,k}(x) = \sum_{k=0}^{M-n} a_{k,n} x^{n+k} \quad n = 0, 1, \dots, M$$

$$\bullet a_{k,n} = (-1)^k \binom{M-n}{n} \binom{M+n+k-1}{M-n}$$

$$\left(\begin{array}{lcl} C_{8,0}(x) & = & 24\,310\,x^8 - 102\,960\,x^7 + 180\,180\,x^6 - 168\,168\,x^5 + 90\,090\,x^4 - 27\,720\,x^3 + 4\,000\,x^2 - 400\,x + 1 \\ C_{8,1}(x) & = & -19\,448\,x^8 + 80\,080\,x^7 - 135\,135\,x^6 + 120\,120\,x^5 - 60\,060\,x^4 + 16\,632\,x^3 - 2\,880\,x^2 + 288\,x - 16 \\ C_{8,2}(x) & = & 12\,376\,x^8 - 48\,048\,x^7 + 75\,075\,x^6 - 60\,060\,x^5 + 25\,740\,x^4 - 5\,544\,x^3 + 792\,x^2 - 96\,x + 4 \\ C_{8,3}(x) & = & -6\,188\,x^8 + 21\,840\,x^7 - 30\,030\,x^6 + 20\,020\,x^5 - 6\,435\,x^4 + 792\,x^3 - 96\,x^2 + 8\,x - 1 \\ C_{8,4}(x) & = & 2\,380\,x^8 - 7\,280\,x^7 + 8\,190\,x^6 - 4\,004\,x^5 + 715\,x^4 - 84\,x^3 + 4\,x^2 - 2\,x + 1 \\ C_{8,5}(x) & = & -680\,x^8 + 1\,680\,x^7 - 1\,365\,x^6 + 364\,x^5 - 44\,x^4 + 2\,x^3 - 2\,x^2 + x - 1 \\ C_{8,6}(x) & = & 136\,x^8 - 240\,x^7 + 105\,x^6 - 18\,x^5 + 1\,x^4 - 2\,x^3 + x^2 - x + 1 \\ C_{8,7}(x) & = & 16\,x^7 - 17\,x^8 \\ C_{8,8}(x) & = & x^8 \end{array} \right)$$

(b) Cálculo de los coeficientes c_k de Chelyshkov

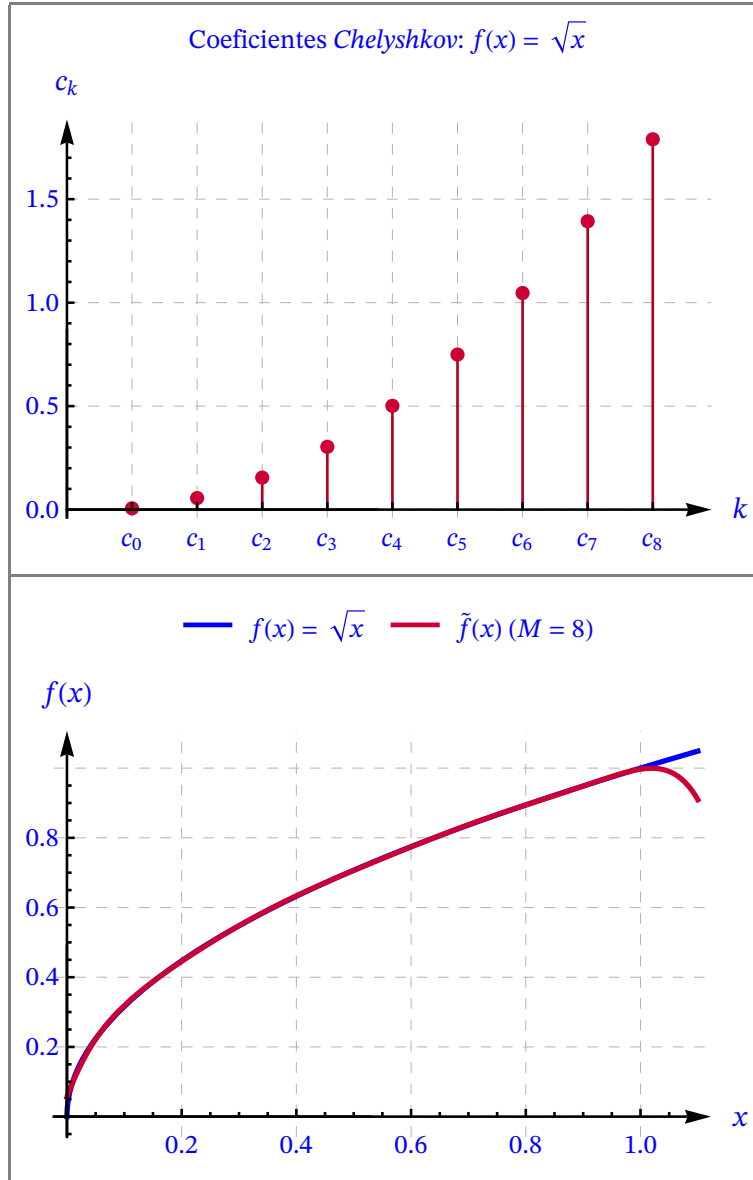
$$c_k = \begin{pmatrix} c_0 = \frac{2}{323} \\ c_1 = \frac{18}{323} \\ c_2 = \frac{50}{323} \\ c_3 = \frac{98}{323} \\ c_4 = \frac{162}{323} \\ c_5 = \frac{242}{323} \\ c_6 = \frac{338}{323} \\ c_7 = \frac{450}{323} \\ c_8 = \frac{34}{19} \end{pmatrix}$$

(c) Desarrollo en serie de los polinomios de Chelyshkov de $f(x)$:

$$\tilde{f}(x) = \sum_{k=0}^M c_k C_{M,k}(x)$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) = & \frac{34 x^8}{19} + \frac{18}{323} (-19\,448 x^8 + 80\,080 x^7 - 135\,135 x^6 + 120\,120 x^5 - 60\,060 x^4 + \\ & 16\,632 x^3 - 2310 x^2 + 120 x) + \\ & \frac{98}{323} (-6188 x^8 + 21\,840 x^7 - 30\,030 x^6 + 20\,020 x^5 - 6435 x^4 + 792 x^3) + \\ & \frac{242}{323} (-680 x^8 + 1680 x^7 - 1365 x^6 + 364 x^5) + \\ & \frac{450}{323} (16 x^7 - 17 x^8) + \frac{338}{323} (136 x^8 - 240 x^7 + 105 x^6) + \\ & \frac{162}{323} (2380 x^8 - 7280 x^7 + 8190 x^6 - 4004 x^5 + 715 x^4) + \\ & \frac{50}{323} (12\,376 x^8 - 48\,048 x^7 + 75\,075 x^6 - 60\,060 x^5 + 25\,740 x^4 - 5544 x^3 + 462 x^2) + \\ & \frac{2}{323} (24\,310 x^8 - 102\,960 x^7 + 180\,180 x^6 - \\ & 168\,168 x^5 + 90\,090 x^4 - 27\,720 x^3 + 4620 x^2 - 360 x + 9) \\ \tilde{f}(x) = & -\frac{1716 x^8}{19} + \frac{126\,720 x^7}{323} - \frac{229\,320 x^6}{323} + \\ & \frac{224\,224 x^5}{323} - \frac{128\,700 x^4}{323} + \frac{44\,352 x^3}{323} - \frac{9240 x^2}{323} + \frac{1440 x}{323} + \frac{18}{323} \end{aligned}$$

Out[•]=



(d)

 Desarrollo en serie de los polinomios de *Chelyshkov* de la función

$$f(x) = \sqrt{x} \quad [A, B] = [0, 1]$$

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^M c_k C_{M,k}(x) \quad x \in [0, 1]$$

$$c_k = (2k + 1) \int_0^1 f(x) C_{M,k}(x) dx$$

Polinomios de Chelyshkov $C_{M,k}(x)$

$$\left(\begin{array}{l} [A, B] = \\ M = \\ n = 0, \dots, M = \end{array} \begin{array}{l} [0, 1] \\ 16 \\ \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\} \end{array} \right)$$

(a) Definición de los polinomios de Chelyshkov de grado M

$$C_{M,k}(x) = \sum_{k=0}^{M-n} a_{k,n} x^{n+k} \quad n = 0, 1, \dots, M$$

$$\bullet a_{k,n} = (-1)^k \binom{M-n}{n} \binom{M+n+k-1}{M-n}$$

$$\left(\begin{array}{l} C_{16,0}(x) = \\ C_{16,1}(x) = \\ C_{16,2}(x) = \\ C_{16,3}(x) = \\ C_{16,4}(x) = \\ C_{16,5}(x) = \\ C_{16,6}(x) = \\ C_{16,7}(x) = \\ C_{16,8}(x) = \\ C_{16,9}(x) = \\ C_{16,10}(x) = \\ C_{16,11}(x) = \\ C_{16,12}(x) = \\ C_{16,13}(x) = \\ C_{16,14}(x) = \\ C_{16,15}(x) = \\ C_{16,16}(x) = \end{array} \begin{array}{l} 1\,166\,803\,110\,x^{16} - 9\,617\,286\,240\,x^{15} + 36\,064\,823\,400\,x^{14} - 81\,436\,698\,000 \\ -1\,037\,158\,320\,x^{16} + 8\,485\,840\,800\,x^{15} - 31\,556\,720\,475\,x^{14} + 70\,578\,47 \\ 818\,809\,200\,x^{16} - 6\,600\,098\,400\,x^{15} + 24\,131\,609\,775\,x^{14} - 52\,9 \\ -573\,166\,440\,x^{16} + 4\,515\,856\,800\,x^{15} - 16\,087\,739\,850\, \\ 354\,817\,320\,x^{16} - 2\,709\,514\,080\,x^{15} + 9\,313\,9 \\ -193\,536\,720\,x^{16} + 1\,419\,269\,280\,x \\ 92\,561\,040\,x^{16} - 645\,12 \\ -38\,567\,100\, \\ 1 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right)$$

(b) Cálculo de los coeficientes c_k de Chelyshkov

$$c_k = \begin{pmatrix} c_0 = \frac{2}{1155} \\ c_1 = \frac{6}{385} \\ c_2 = \frac{10}{231} \\ c_3 = \frac{14}{165} \\ c_4 = \frac{54}{385} \\ c_5 = \frac{22}{105} \\ c_6 = \frac{338}{1155} \\ c_7 = \frac{30}{77} \\ c_8 = \frac{578}{1155} \\ c_9 = \frac{722}{1155} \\ c_{10} = \frac{42}{55} \\ c_{11} = \frac{1058}{1155} \\ c_{12} = \frac{250}{231} \\ c_{13} = \frac{486}{385} \\ c_{14} = \frac{1682}{1155} \\ c_{15} = \frac{1922}{1155} \\ c_{16} = \frac{66}{35} \end{pmatrix}$$

(c) Desarrollo en serie de los polinomios de Chelyshkov de $f(x)$:

$$\tilde{f}(x) = \sum_{k=0}^M c_k C_{M,k}(x)$$

$$\tilde{f}(x) = \frac{66 x^{16}}{35} +$$

$$\frac{6}{385} (-1\,037\,158\,320 x^{16} + 8\,485\,840\,800 x^{15} - 31\,556\,720\,475 x^{14} + 70\,578\,471\,600 x^{13} -$$

$$105\,867\,707\,400 x^{12} + 112\,438\,806\,480 x^{11} - 87\,006\,219\,300 x^{10} +$$

$$49\,717\,839\,600 x^9 - 21\,034\,470\,600 x^8 + 6\,544\,057\,520 x^7 - 1\,472\,412\,942 x^6 +$$

$$232\,792\,560 x^5 - 24\,690\,120 x^4 + 1\,627\,920 x^3 - 58\,140 x^2 + 816 x) +$$

$$\frac{14}{165} (-573\,166\,440 x^{16} + 4\,515\,856\,800 x^{15} - 16\,087\,739\,850 x^{14} +$$

$$34\,251\,317\,100 x^{13} - 48\,522\,699\,225 x^{12} + 48\,188\,059\,920 x^{11} -$$

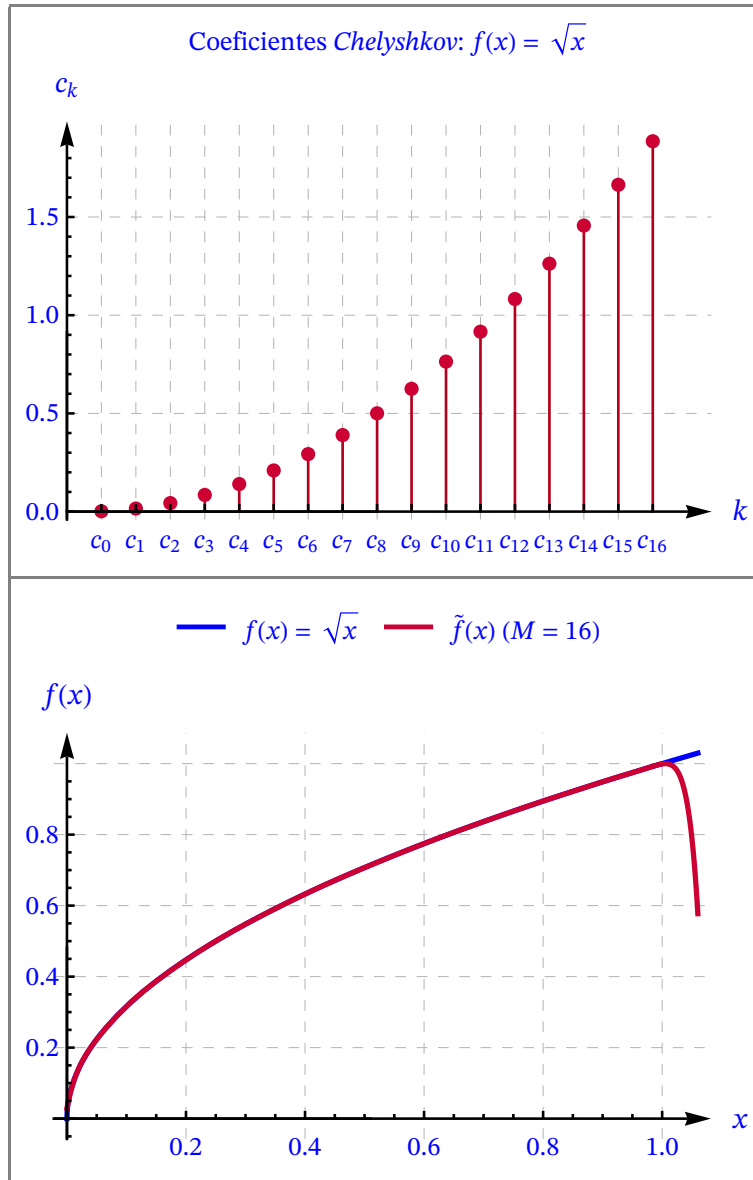
$$34\,420\,042\,800 x^{10} + 17\,847\,429\,600 x^9 - 6\,692\,786\,100 x^8 + 1\,784\,742\,960 x^7 -$$

$$327\,202\,876 x^6 + 38\,798\,760 x^5 - 2\,645\,370 x^4 + 77\,520 x^3) +$$

$$\begin{aligned}
& \frac{22}{105} \left(-193\,536\,720\,x^{16} + 1\,419\,269\,280\,x^{15} - 4\,656\,977\,325\,x^{14} + 9\,013\,504\,500\,x^{13} - \right. \\
& \quad 11\,417\,105\,700\,x^{12} + 9\,921\,071\,160\,x^{11} - 6\,023\,507\,490\,x^{10} + 2\,549\,632\,800\,x^9 - \\
& \quad \left. 735\,471\,000\,x^8 + 137\,287\,920\,x^7 - 14\,872\,858\,x^6 + 705\,432\,x^5 \right) + \\
& \frac{30}{77} \left(-38\,567\,100\,x^{16} + 252\,439\,200\,x^{15} - 725\,762\,700\,x^{14} + 1\,201\,800\,600\,x^{13} - \right. \\
& \quad 1\,261\,890\,630\,x^{12} + 870\,269\,400\,x^{11} - 393\,693\,300\,x^{10} + \\
& \quad \left. 112\,483\,800\,x^9 - 18\,386\,775\,x^8 + 1\,307\,504\,x^7 \right) + \\
& \frac{1}{1155} \times 722 \left(-4\,272\,048\,x^{16} + 23\,560\,992\,x^{15} - 55\,221\,075\,x^{14} + 71\,253\,000\,x^{13} - \right. \\
& \quad \left. 54\,627\,300\,x^{12} + 24\,864\,840\,x^{11} - 6\,216\,210\,x^{10} + 657\,800\,x^9 \right) + \\
& \frac{1}{1155} \times 1058 \left(-237\,336\,x^{16} + 1\,006\,880\,x^{15} - 1\,699\,110\,x^{14} + \right. \\
& \quad \left. 1\,425\,060\,x^{13} - 593\,775\,x^{12} + 98\,280\,x^{11} \right) + \\
& \frac{486}{385} \left(-5456\,x^{16} + 14\,880\,x^{15} - 13\,485\,x^{14} + 4060\,x^{13} \right) + \\
& \frac{1922(32\,x^{15} - 33\,x^{16})}{1155} + \\
& \frac{1682(528\,x^{16} - 992\,x^{15} + 465\,x^{14})}{1155} + \\
& \frac{250}{231} \left(40\,920\,x^{16} - 143\,840\,x^{15} + 188\,790\,x^{14} - 109\,620\,x^{13} + 23\,751\,x^{12} \right) + \\
& \frac{42}{55} \left(1\,107\,568\,x^{16} - 5\,437\,152\,x^{15} + 11\,044\,215\,x^{14} - \right. \\
& \quad \left. 11\,875\,500\,x^{13} + 7\,125\,300\,x^{12} - 2\,260\,440\,x^{11} + 296\,010\,x^{10} \right) + \\
& \frac{1}{1155} \times 578 \left(13\,884\,156\,x^{16} - 84\,146\,400\,x^{15} + 220\,884\,300\,x^{14} - \right. \\
& \quad 327\,763\,800\,x^{13} + 300\,450\,150\,x^{12} - 174\,053\,880\,x^{11} + \\
& \quad \left. 62\,162\,100\,x^{10} - 12\,498\,200\,x^9 + 1\,081\,575\,x^8 \right) + \\
& \frac{1}{1155} \times 338 \left(92\,561\,040\,x^{16} - 645\,122\,400\,x^{15} + 1\,995\,847\,425\,x^{14} - \right. \\
& \quad 3\,605\,401\,800\,x^{13} + 4\,206\,302\,100\,x^{12} - 3\,307\,023\,720\,x^{11} + 1\,771\,619\,850\,x^{10} - \\
& \quad \left. 637\,408\,200\,x^9 + 147\,094\,200\,x^8 - 19\,612\,560\,x^7 + 1\,144\,066\,x^6 \right) + \\
& \frac{54}{385} \left(354\,817\,320\,x^{16} - 2\,709\,514\,080\,x^{15} + 9\,313\,954\,650\,x^{14} - 19\,028\,509\,500\,x^{13} + \right. \\
& \quad \left. 25\,688\,487\,825\,x^{12} - 24\,094\,029\,960\,x^{11} + 16\,062\,686\,640\,x^{10} - 7\,648\,898\,400\,x^9 + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2\,574\,148\,500\,x^8 - 594\,914\,320\,x^7 + 89\,237\,148\,x^6 - 7\,759\,752\,x^5 + 293\,930\,x^4) + \\
& \frac{10}{231} (818\,809\,200\,x^{16} - 6\,600\,098\,400\,x^{15} + 24\,131\,609\,775\,x^{14} - 52\,933\,853\,700\,x^{13} + \\
& 77\,636\,318\,760\,x^{12} - 80\,313\,433\,200\,x^{11} + 60\,235\,074\,900\,x^{10} - \\
& 33\,145\,226\,400\,x^9 + 13\,385\,572\,200\,x^8 - 3\,926\,434\,512\,x^7 + 818\,007\,190\,x^6 - \\
& 116\,396\,280\,x^5 + 10\,581\,480\,x^4 - 542\,640\,x^3 + 11\,628\,x^2) + \frac{1}{1155} \times \\
& 2(1\,166\,803\,110\,x^{16} - 9\,617\,286\,240\,x^{15} + 36\,064\,823\,400\,x^{14} - 81\,436\,698\,000\,x^{13} + \\
& 123\,512\,325\,300\,x^{12} - 132\,882\,225\,840\,x^{11} + 104\,407\,463\,160\,x^{10} - \\
& 60\,766\,248\,400\,x^9 + 26\,293\,088\,250\,x^8 - 8\,413\,788\,240\,x^7 + 1\,963\,217\,256\,x^6 - \\
& 325\,909\,584\,x^5 + 37\,035\,180\,x^4 - 2\,713\,200\,x^3 + 116\,280\,x^2 - 2448\,x + 17) \\
\tilde{f}(x) = & -\frac{7\,755\,876\,x^{16}}{7} + \frac{707\,478\,528\,x^{15}}{77} - \frac{2\,671\,468\,400\,x^{14}}{77} + \\
& \frac{868\,658\,112\,x^{13}}{11} - \frac{1\,329\,739\,320\,x^{12}}{11} + \frac{1\,446\,337\,152\,x^{11}}{11} - 104\,669\,136\,x^{10} + \\
& \frac{1\,299\,812\,800\,x^9}{21} - \frac{191\,222\,460\,x^8}{7} + \frac{62\,760\,192\,x^7}{7} - \frac{10\,816\,624\,x^6}{5} + \\
& \frac{1\,881\,152\,x^5}{5} - \frac{503\,880\,x^4}{11} + \frac{41\,344\,x^3}{11} - \frac{15\,504\,x^2}{77} + \frac{3264\,x}{385} + \frac{34}{1155}
\end{aligned}$$

Out[•]=



2. Wavelets de Chelyshkov

2.1. Wavelets de Chelyshkov

2.1.1. Funciones Wavelets de Chelyshkov ([RAHI19], [MARA22])

Las *wavelets* constituyen una familia de funciones construidas mediante operaciones de dilatación y traslación a partir de una función generadora, denominada *wavelet* madre. En el marco discreto, la elección de una malla diádica para los parámetros de escala y desplazamiento conduce a bases ortogonales particularmente adecuadas para aproximación numérica, ya que permiten representar funciones con distintos niveles de resolución. Este planteamiento puede formalizarse mediante el enfoque de análisis multirresolución, donde se considera una sucesión creciente de subespacios cerrados $V\{v_j\}_{j \in \mathbb{Z}} \subset L^2(\mathbb{R})$, que aproximan progresivamente el espacio completo y proporcionan una estructura jerárquica de aproximación [RAHI19].

En este contexto, las *Wavelets* de Chelyshkov se definen como una familia de funciones con soporte compacto en subintervalos diádicos de $[0, 1)$, construidas a partir de los polinomios de Chelyshkov. Para fijar notación, sea k el nivel de resolución y sea N el índice asociado al subintervalo, con $N = 1, 2, \dots, 2^{k-1}$. Denotando $\hat{n} = N - 1$, las *wavelets* de Chelyshkov pueden escribirse de forma seccionada como

$$\psi_{N,M\hat{M}}(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2M+1}{2^{k-1}}} P_{M,\hat{M}}(2^{k-1}x - \hat{n}), & \frac{\hat{n}}{2^{k-1}} \leq x < \frac{\hat{n}+1}{2^{k-1}}, \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (2.1.1)$$

donde M recorre los órdenes polinomiales y $P_{M,\hat{M}}$ denota el polinomio de Chelyshkov definido en $[0, 1]$.

La construcción anterior hereda la ortogonalidad de los polinomios en el intervalo unidad. En particular, los polinomios $P_{M,\hat{M}}(x)$ admiten una representación explícita en potencias y satisfacen una condición de ortogonalidad en $[0, 1]$ con respecto al peso constante, de manera que el producto interno entre dos polinomios distintos se anula y, en el caso coincidente, queda normalizado por un factor proporcional a $(M + N + 1)^{-1}$. Esta propiedad es la que permite que, al restringirlos a subintervalos diádicos mediante el cambio afín $x \mapsto 2^{k-1}x - \hat{n}$ y al introducir la constante de normalización adecuada, se obtenga una familia ortogonal en $L^2[0, 1)$.

A efectos prácticos, resulta conveniente agrupar estas funciones en un vector base, ya que

la aproximación y el paso a sistemas algebraicos se expresan de forma más clara. Esta organización vectorial se utilizará de forma sistemática en los apartados posteriores, especialmente al introducir aproximaciones truncadas y operadores integrales fraccionarios aplicados a la base.

2.1.2. Funciones Wavelets de Chelyshkov de Orden Fraccionario ([RAHI19], [MARA22])

En problemas fraccionarios, y en particular cuando intervienen integrales o derivadas no enteras, suele ser ventajoso adaptar la base de aproximación a la regularidad esperada de la solución. Con este objetivo, se introducen las funciones y *Wavelets* de Chelyshkov de orden fraccionario, que se obtienen mediante un cambio de variable del tipo $x \mapsto x^\lambda$ o $x \mapsto x^n$, con parámetro positivo. Este procedimiento modifica el comportamiento en el origen y conduce naturalmente a un producto interno ponderado.

Siguiendo esta idea, las funciones de Chelyshkov de orden fraccionario se definen a partir de los polinomios clásicos mediante el cambio $x \mapsto x^\lambda$ (con $\lambda > 0$), obteniendo una familia en $[0, 1]$ que conserva una estructura analítica en potencias fraccionarias. En concreto, se obtiene una expresión explícita donde aparecen monomios de la forma $x^{r\lambda}$.

La consecuencia más relevante de esta transformación es que la ortogonalidad deja de ser respecto al peso constante y pasa a serlo respecto al peso:

$$\omega^{(\lambda)}(x) = x^{\lambda-1} \quad (2.1.2)$$

de modo que la condición de ortogonalidad se expresa mediante un producto interno ponderado en $[0, 1]$ y un factor de normalización que incorpora λ .

De manera análoga, en la notación utilizada para el parámetro n , el peso se escribe como $W^{(n)}(x) = x^{n-1}$ y la ortogonalidad se obtiene con una constante proporcional a $\frac{1}{n(N+M+1)}$.

A partir de estas funciones fraccionarias, se definen las *Wavelets* fraccionarias de Chelyshkov sobre un intervalo $[0, h)$ o, más generalmente, sobre $[0, \eta')$. Manteniendo la estructura por tramos en subintervalos diádicos, una forma típica de definición es

$$\psi^{(\lambda, h)}_{N, M \hat{M}}(x) = \begin{cases} \sqrt{(2M+1)\lambda 2^{\lambda-1}} P^{(\lambda)}_{M, \hat{M}}\left(\frac{2^{k-1}}{h} x - \hat{n}\right), & \frac{\hat{n}}{2^{k-1}} \leq x < \frac{\hat{n}+1}{2^{k-1}} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (2.1.3)$$

donde $P^{(\lambda)}_{M, \hat{M}}$ son las funciones fraccionarias construidas desde los polinomios clásicos y el factor de normalización se elige para preservar la ortogonalidad en el producto interno ponderado.

En el caso formulado sobre $[0, \eta')$, la definición se expresa de forma equivalente incorporando el escalado η' en el argumento y una constante de normalización dependiente de n .

Estas familias resultan especialmente útiles en modelos donde la solución presenta variaciones rápidas cerca del origen o regularidad no entera, ya que la presencia de potencias fraccionarias en la base permite capturar con mayor fidelidad el comportamiento local sin

necesidad de incrementar excesivamente la resolución global.

2.1.3. Funciones Wavelets de Chelyshkov Fraccionarias

En los últimos años, las funciones *Wavelets* se han utilizado en numerosos campos diferentes de la Ciencia y la Ingeniería. Constituyen una familia de funciones construidas a partir de la dilatación y traslación de una función única denominada *Wavelet madre*. Cuando el parámetro de dilatación a y el parámetro de traslación b varían continuamente, se tiene la siguiente familia de *Wavelets* continuas [MOHA18], [MOHS20], [SAMA24]

$$\psi_{a,b}(x) = |a|^{\frac{1}{2}} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \quad a, b \in \mathbb{R} \quad a \neq 0. \quad (2.1.4)$$

Las *Wavelets* son un conjunto de funciones que se definen a partir de la dilatación y traslación de otra función *Wavelet* madre, denominada función ψ . Al variar continuamente los parámetros de dilatación a y el de traslación b se tiene una familia de *Wavelets* continuas.

• **Definición 2.1.1. Wavelets de Chelyshkov.**

Las *Wavelets* de Chelyshkov ψ_{nm} se definen en el intervalo $[0, 1)$ mediante la expresión [MOHA18], [MOHS20], [SAMA24]

$$\psi_{nm}(x) = \begin{cases} \sqrt{2m+1} 2^{\frac{k}{2}} C_{M,m}(2^k x - n) & \frac{n}{2^k} \leq x < \frac{n+1}{2^k} \\ 0 & \text{Resto} \end{cases} \quad (2.1.5)$$

$$\begin{cases} n = 0, 1, \dots, 2^k - 1 & k = 0, 1, 2, \dots \\ m = 0, 1, \dots, M & \text{(grado del polinomio de Chelyshkov)} \end{cases}$$

$C_{M,m}(x) \equiv$ polinomios de Chelyshkov de grado M .

$$C_{M,n}(x) = \sum_{k=0}^{M-n} \underbrace{(-1)^k \binom{M-n}{k} \binom{M+n+k+1}{M-n}}_{a_{kn}} x^{n+k} \quad n = 0, 1, \dots, M \quad (2.1.6)$$

$$a_{kn} = (-1)^k \binom{M-n}{k} \binom{M+n+k+1}{M-n} \quad (2.1.7)$$

El conjunto de *Wavelets* de Chelyshkov $\psi_{nm}(x)$, $n = 0, 1, \dots, 2^k - 1$ y $m = 0, 1, \dots, M$, constituyen una base ortonormal en el intervalo $[0, 1]$ respecto de la función peso $w(x) = 1$.

▼ **Teorema 2.1. Base Ortonormal de Chelyshkov.**

Sea el conjunto de *Wavelets* de Chelyshkov $\psi_{nm}(x)$, $n = 0, 1, \dots, 2^k - 1$ y $m = 0, 1, \dots, M$ de grado M , entonces constituyen un conjunto ortonormal en el intervalo $[0, 1]$ respecto del

producto interno:

$$\langle \psi_{nm}(x), \psi_{n^*m^*}(x) \rangle = \int_0^1 \psi_{nm}(x) \psi_{n^*m^*}(x) dx = \begin{cases} 1 & n = m \text{ y } n^* = m^* \\ 0 & n \neq m \text{ o } n^* \neq m^* \end{cases}$$

con la función peso $w(x) = 1$.

Se define la *matriz dual* de $\Psi(x)$ a la matriz D definida por el producto interno:

$$D = \langle \Psi(x), \Psi(x) \rangle = \int_0^1 \Psi(x) \Psi(x)^T w(x) dx = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I \quad (2.1.8)$$

$$w(x) = 1.$$

siendo I la matriz identidad.

Observaciones 2.1.1.

- (i) Las *Wavelets* de *Chelyshkov* $\psi_{nm}(x)$ son polinomios de grado M en el intervalo $\left[\frac{n}{2^k}, \frac{n+1}{2^k}\right)$
- (ii) Dada la base de *Wavelets* de *Chelyshkov* $\mathcal{B} = \{\psi_{nm}(x)\}$ con $n = 0, 1, \dots, 2^k - 1$ y $m = 0, 1, \dots, M$, siendo M el grado de cada polinomio, se verifica

$$\mathcal{B} = \Psi(x) = \{\psi_{0,0}(x), \psi_{0,1}(x), \dots, \psi_{0,M}(x), \psi_{1,0}(x), \psi_{1,1}(x), \dots, \psi_{1,M}(x), \dots, \psi_{2^k-1,0}(x), \psi_{2^k-1,1}(x), \dots, \psi_{2^k-1,M}(x)\} \quad (2.1.9)$$

$$\text{Dimensión } (\Psi(x)) = m^* (\text{n}^\circ \text{ elementos}) = 2^k (M + 1).$$

- (iii) Se define también el vector base $\Psi(x)$ también como:

$$\Psi(x) = (\psi_1(x) \ \psi_2(x) \ \cdots \ \psi_{m^*}(x)) \quad m^* = 2^k (M + 1) \quad (2.1.10)$$

$$\psi_i(x) = \psi_{nm}(x) \quad i = n(M + 1) + (m + 1)$$

siendo el índice:

$$i = n(M + 1) + (m + 1) \quad \begin{cases} n = 0, 1, \dots, 2^k - 1 \\ m = 0, 1, \dots, M \end{cases} \quad (2.1.11)$$

■ Ejemplo 2.1.1. Base Ortonormal de Wavelets de Chelyshkov.

Sean las Wavelets de Chelyshkov $\psi_{nm}(x)$ dadas por la definición siguiente:

$$\psi_{nm}(x) = \begin{cases} \sqrt{2^{m+1}} 2^{\frac{k}{2}} C_{M,m}(x) (2^k x - n) & \frac{n}{2^k} \leq x \leq \frac{n+1}{2^k} \\ 0 & \text{Resto} \end{cases}$$

Calcúlense las bases ortonormales de Wavelets de Chelyshkev $\{\psi_{nm}(x)\}$ en el intervalo $[0, 1]$ respecto de la función peso $w(x) = 1$ para los parámetros dados:

- (a) $k = 0 \quad M = 3 \quad \begin{cases} n = 0, 1, \dots, 2^k - 1 = 0 \\ m = 0, 1, \dots, M = 0, 1, 2, 3 \end{cases}$
- (b) $k = 1 \quad M = 3 \quad \begin{cases} n = 0, 1, \dots, 2^k - 1 = 0, 1 \\ m = 0, 1, \dots, M = 0, 1, 2, 3 \end{cases}$
- (c) $k = 2 \quad M = 3 \quad \begin{cases} n = 0, 1, \dots, 2^k - 1 = 0, 1, 2, 3 \\ m = 0, 1, \dots, M = 0, 1, 2, 3 \end{cases}$

SOLUCIÓN

(a)

Out[•]//TableForm=

$$\begin{array}{l} \psi_{0,0}(x) \quad \begin{cases} -35x^3 + 60x^2 - 30x + 4 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{0,1}(x) \quad \begin{cases} \sqrt{3}(-35x^3 + 60x^2 - 30x + 4) & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{0,2}(x) \quad \begin{cases} \sqrt{5}(-35x^3 + 60x^2 - 30x + 4) & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{0,3}(x) \quad \begin{cases} \sqrt{7}(-35x^3 + 60x^2 - 30x + 4) & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \end{array}$$

(b)

Out[•]//TableForm=

$$\begin{array}{ll} \psi_{0,0}(x) & \begin{cases} \sqrt{2} (-280 x^3 + 240 x^2 - 60 x + 4) & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{0,1}(x) & \begin{cases} 4 \sqrt{6} x (42 x^2 - 30 x + 5) & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{0,2}(x) & \begin{cases} -8 \sqrt{10} x^2 (7 x - 3) & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{0,3}(x) & \begin{cases} 8 \sqrt{14} x^3 & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{1,0}(x) & \begin{cases} \sqrt{2} (-280 x^3 + 660 x^2 - 510 x + 129) & \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{1,1}(x) & \begin{cases} \sqrt{6} (168 x^3 - 372 x^2 + 266 x - 61) & \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{1,2}(x) & \begin{cases} -\sqrt{10} (1 - 2 x)^2 (14 x - 13) & \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{1,3}(x) & \begin{cases} \sqrt{14} (2 x - 1)^3 & \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \end{array}$$

(c)

Out[•]//TableForm=

$$\begin{array}{ll}
 \psi_{0,0}(x) & \begin{cases} -8(560x^3 - 240x^2 + 30x - 1) & 0 \leq x < \frac{1}{4} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\
 \psi_{0,1}(x) & \begin{cases} 16\sqrt{3}x(168x^2 - 60x + 5) & 0 \leq x < \frac{1}{4} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\
 \psi_{0,2}(x) & \begin{cases} -64\sqrt{5}x^2(14x - 3) & 0 \leq x < \frac{1}{4} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\
 \psi_{0,3}(x) & \begin{cases} 128\sqrt{7}x^3 & 0 \leq x < \frac{1}{4} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\
 \psi_{1,0}(x) & \begin{cases} -4480x^3 + 5280x^2 - 2040x + 258 & \frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\
 \psi_{1,1}(x) & \begin{cases} 2\sqrt{3}(1344x^3 - 1488x^2 + 532x - 61) & \frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\
 \psi_{1,2}(x) & \begin{cases} -2\sqrt{5}(1 - 4x)^2(28x - 13) & \frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\
 \psi_{1,3}(x) & \begin{cases} 2\sqrt{7}(4x - 1)^3 & \frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\
 \psi_{2,0}(x) & \begin{cases} -16(280x^3 - 540x^2 + 345x - 73) & \frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{4} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\
 \psi_{2,1}(x) & \begin{cases} 8\sqrt{3}(336x^3 - 624x^2 + 382x - 77) & \frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{4} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\
 \psi_{2,2}(x) & \begin{cases} -32\sqrt{5}(1 - 2x)^2(7x - 5) & \frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{4} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\
 \psi_{2,3}(x) & \begin{cases} 2\sqrt{7}(4x - 2)^3 & \frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{4} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\
 \psi_{3,0}(x) & \begin{cases} -4480x^3 + 12000x^2 - 10680x + 3158 & \frac{3}{4} \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\
 \psi_{3,1}(x) & \begin{cases} 2\sqrt{3}(1344x^3 - 3504x^2 + 3028x - 867) & \frac{3}{4} \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\
 \psi_{3,2}(x) & \begin{cases} -2\sqrt{5}(3 - 4x)^2(28x - 27) & \frac{3}{4} \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\
 \psi_{3,3}(x) & \begin{cases} 2\sqrt{7}(4x - 3)^3 & \frac{3}{4} \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases}
 \end{array}$$

■ Ejemplo 2.1.2. Wavelets de Chelyshkov.

(i) Cálculense las expresiones analíticas de las Wavelets de Chelyshkov $\psi_{nm}(x)$, para los valores dados de k y M .

(ii) Represéntense las gráficas de las Wavelets de Chelyshkov $\psi_{nm}(x)$.

(a) $k = 0 \quad M = 1$.

(b) $k = 1 \quad M = 1$.

(c) $k = 2 \quad M = 1$.

(d) $k = 3 \quad M = 1$.

(polinomios de grado $M = 1$) $\begin{cases} n = 0, 1, \dots, 2^k - 1 \\ m = 0, 1, \dots, M \end{cases}$

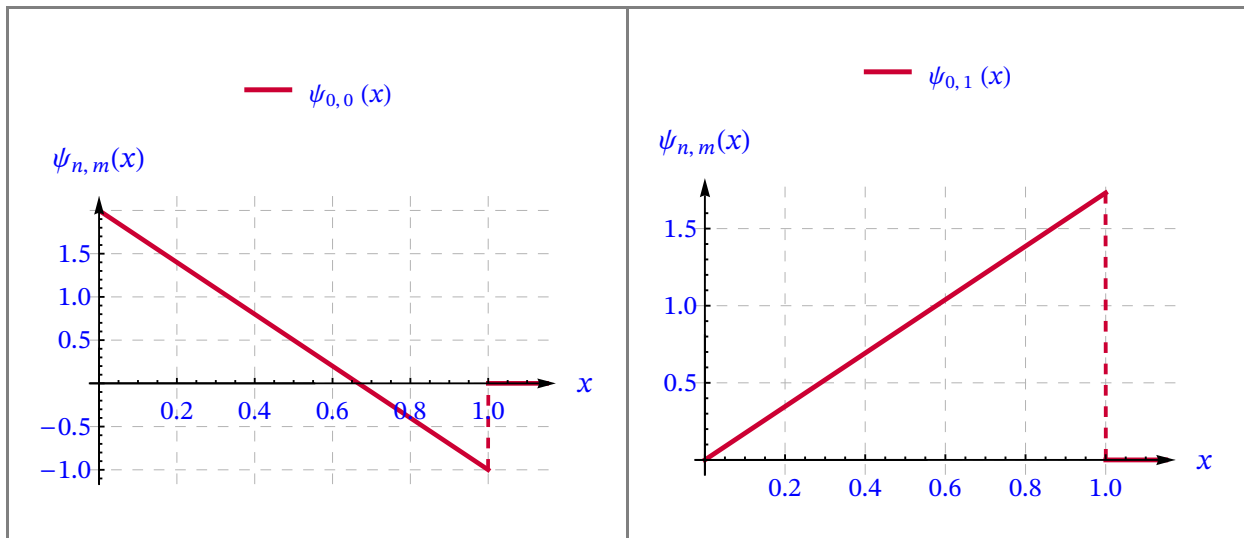
SOLUCIÓN

(a)

Out[•]//TableForm=

$$\begin{array}{ll} k = 0 & \psi_{0,0}(x) \quad \begin{cases} 2 - 3x & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ k = 0 & \psi_{0,1}(x) \quad \begin{cases} \sqrt{3} x & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \end{array}$$

Out[•]=

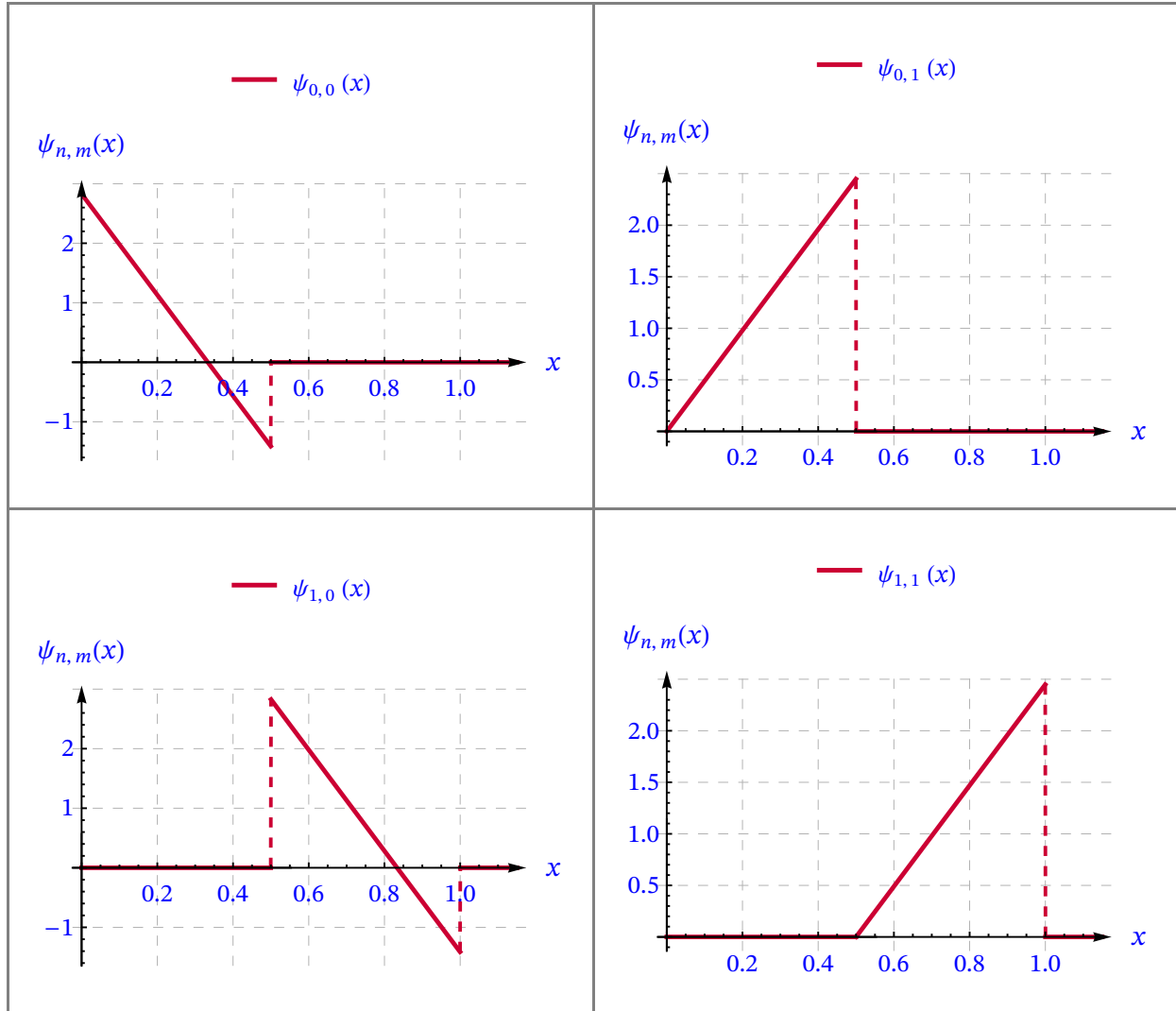


(b)

Out[•]//TableForm=

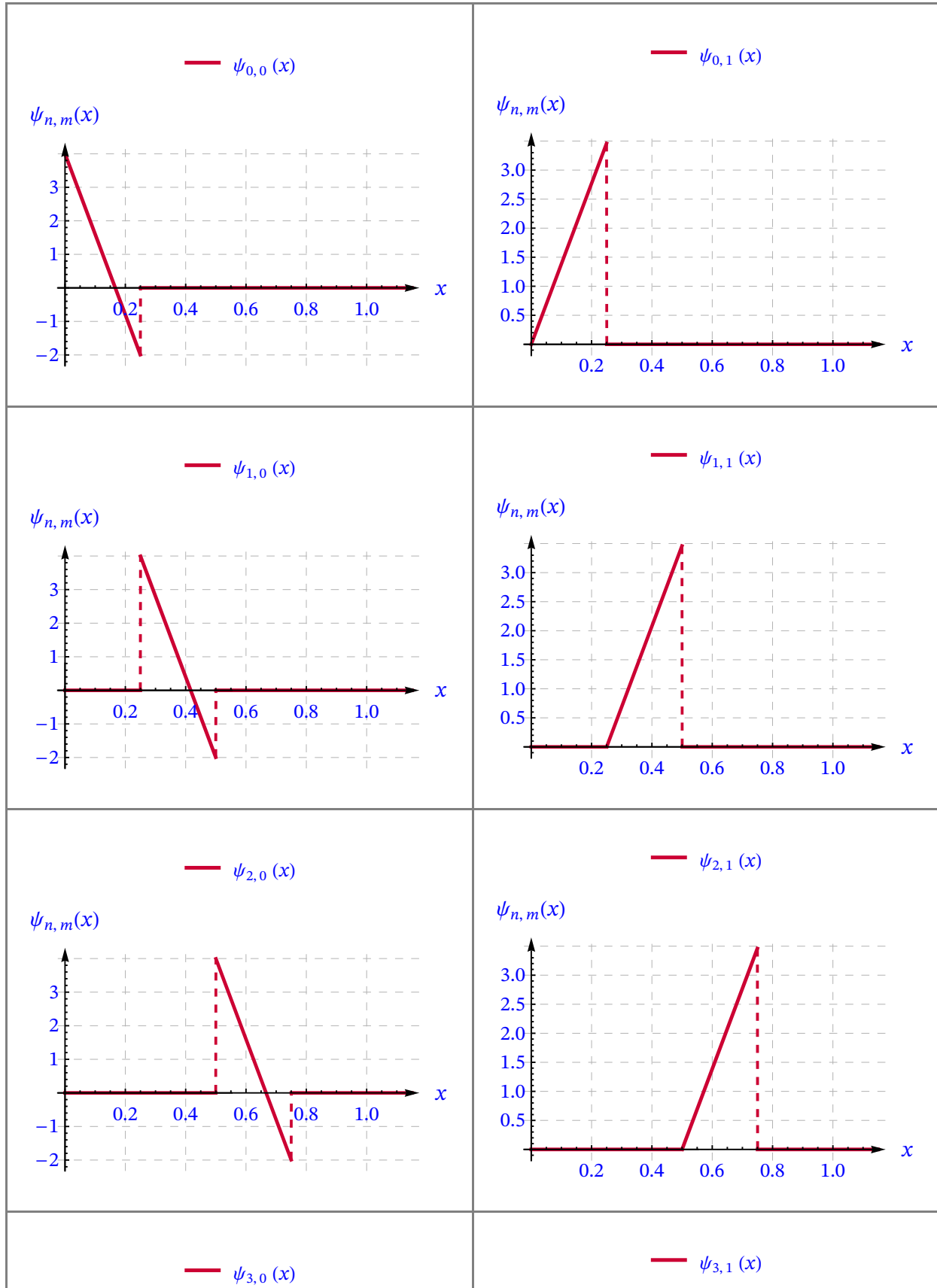
$$\begin{array}{ll}
 k = 1 & \psi_{0,0}(x) \quad \begin{cases} \sqrt{2} (2 - 6x) & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\
 k = 1 & \psi_{0,1}(x) \quad \begin{cases} 2\sqrt{6} x & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\
 k = 1 & \psi_{1,0}(x) \quad \begin{cases} \sqrt{2} (2 - 3(2x - 1)) & \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\
 k = 1 & \psi_{1,1}(x) \quad \begin{cases} \sqrt{6} (2x - 1) & \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases}
 \end{array}$$

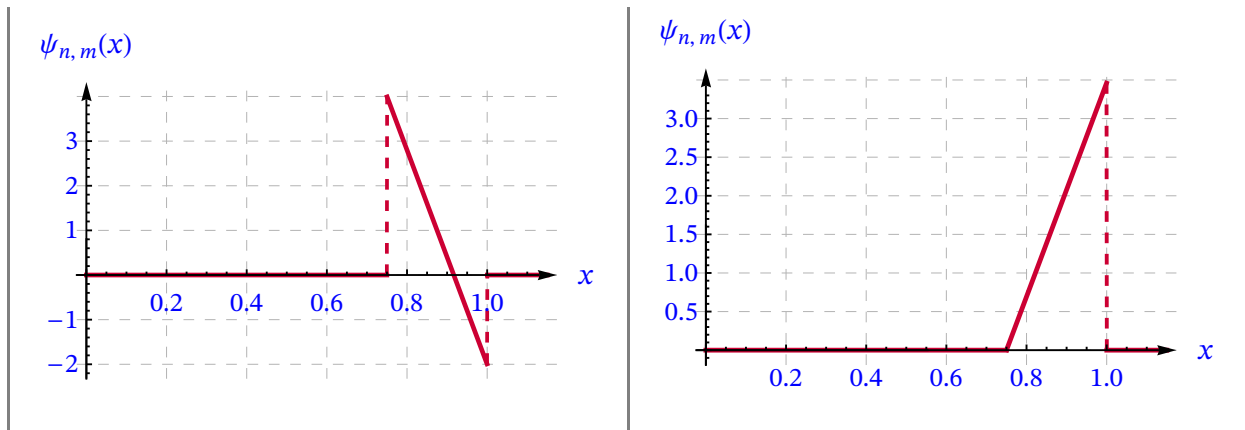
Out[•]=



(c)

Out[*]=





■ **Ejemplo 2.1.3. Wavelets de Chelyshkov.**

(i) Cálculense las expresiones analíticas de las *Wavelets* de Chelyshkov $\psi_{nm}(x)$, para los valores dados de k y M .

(ii) Representéntense las gráficas de las *Wavelets* de Chelyshkov $\psi_{nm}(x)$.

(a) $k = 0 \quad M = 2$.

(b) $k = 1 \quad M = 2$.

(c) $k = 2 \quad M = 2$.

(d) $k = 3 \quad M = 2$.

(polinomios de grado $M = 2$). $\begin{cases} n = 0, 1, \dots, 2^k - 1 \\ m = 0, 1, \dots, M \end{cases}$

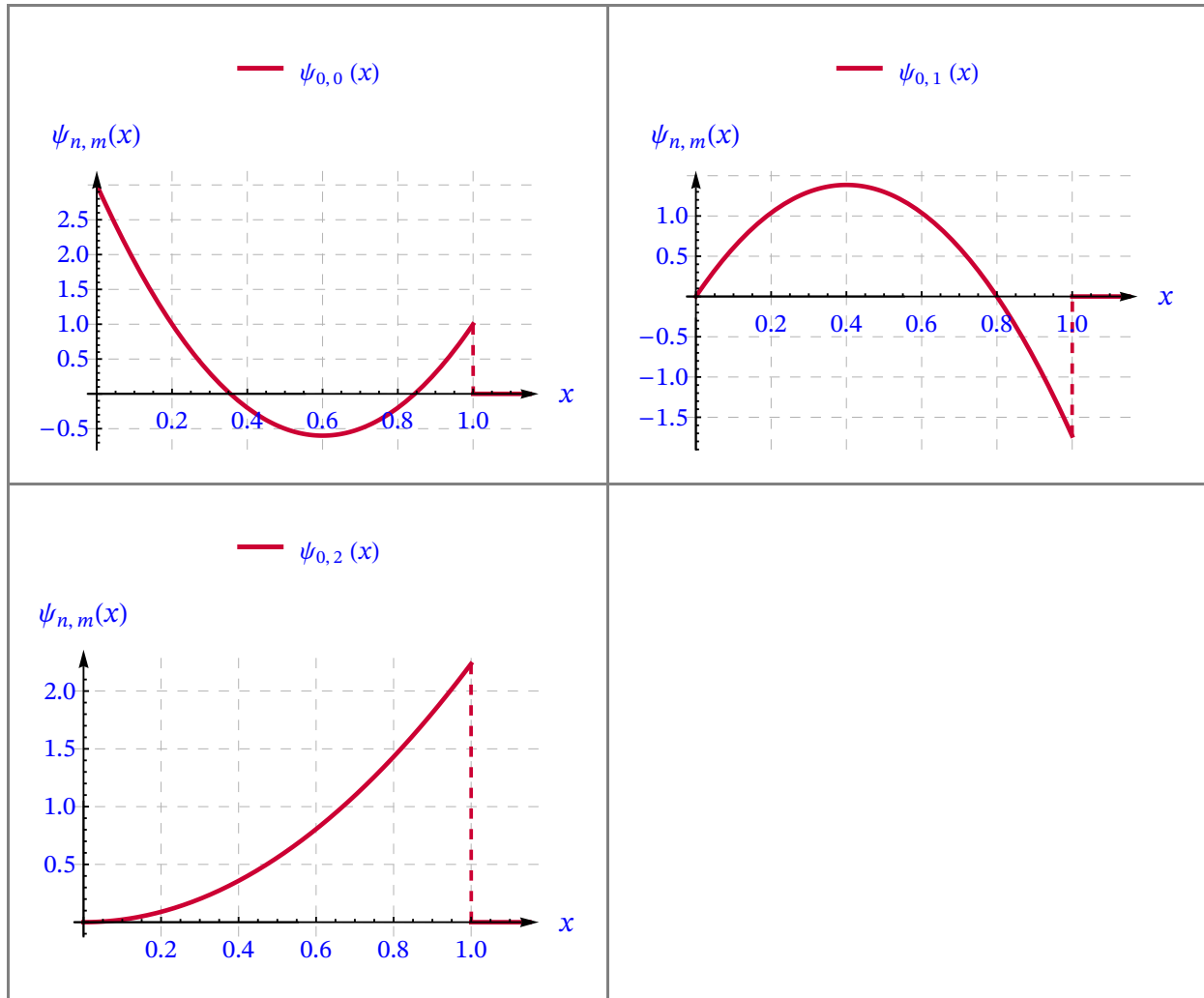
SOLUCIÓN

(a)

`Out[•]//TableForm=`

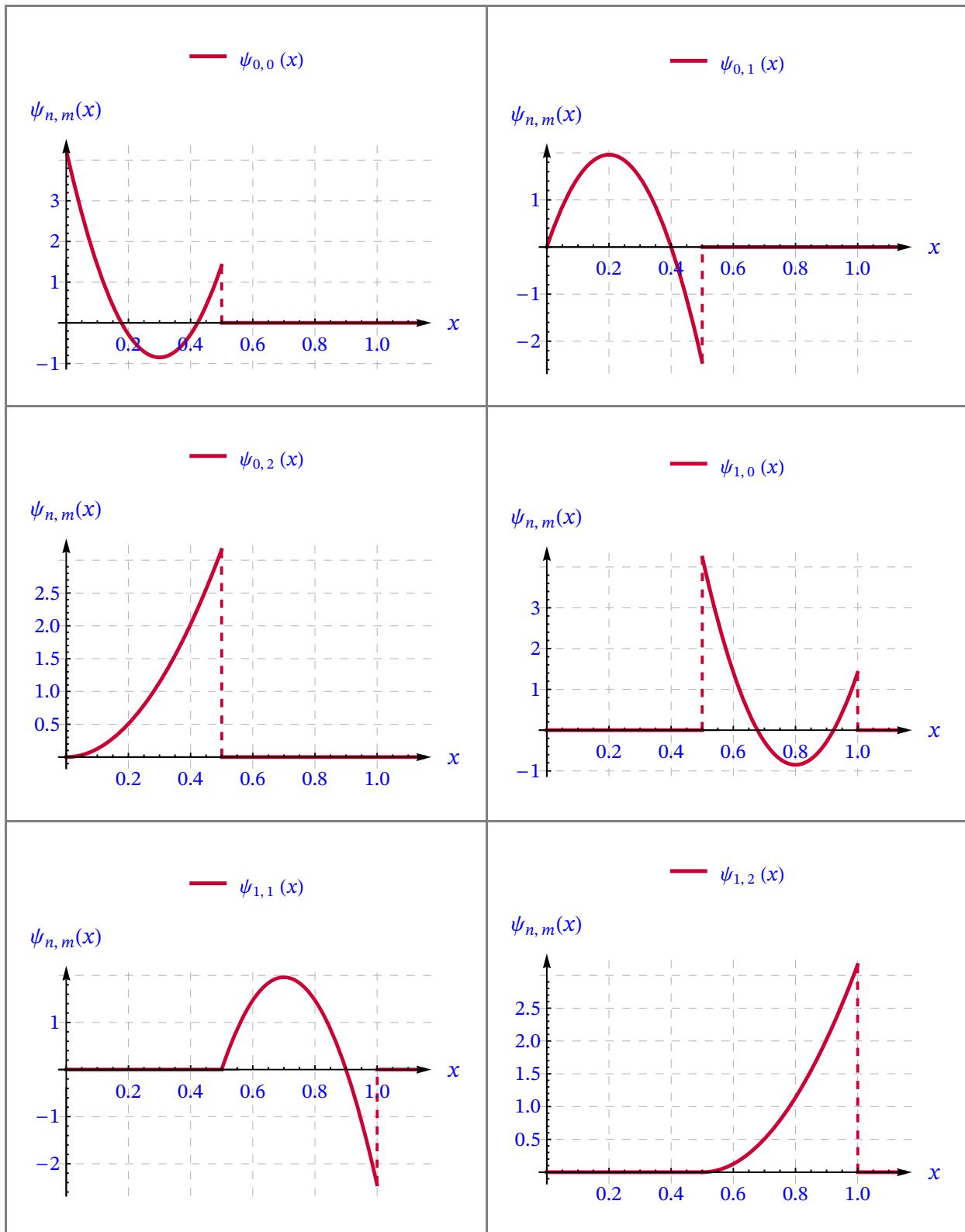
$$\begin{array}{lll}
 k = 0 & \psi_{0,0}(x) & \begin{cases} 10x^2 - 12x + 3 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\
 k = 0 & \psi_{0,1}(x) & \begin{cases} \sqrt{3}(4x - 5x^2) & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\
 k = 0 & \psi_{0,2}(x) & \begin{cases} \sqrt{5}x^2 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases}
 \end{array}$$

Out[•]=



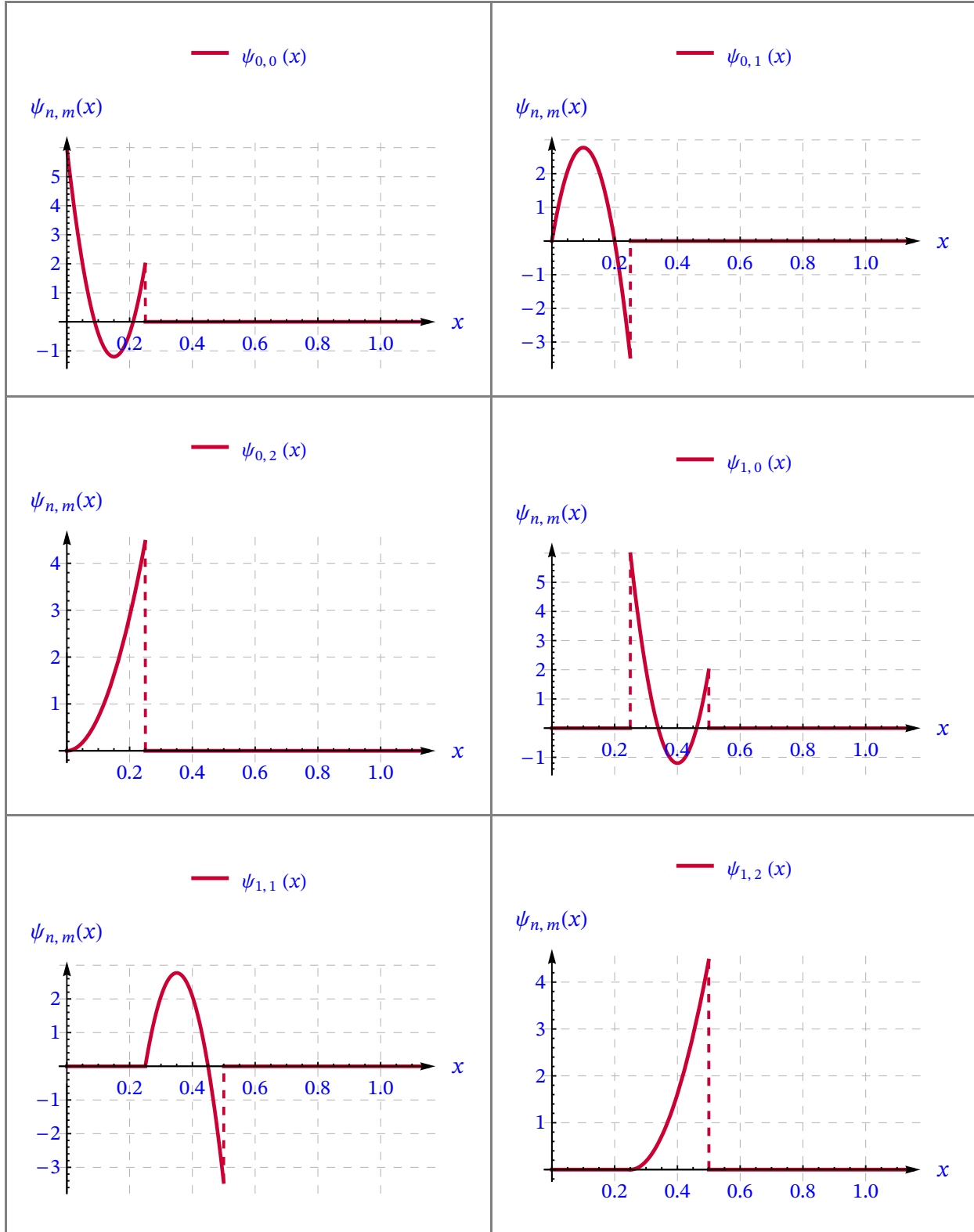
(b)

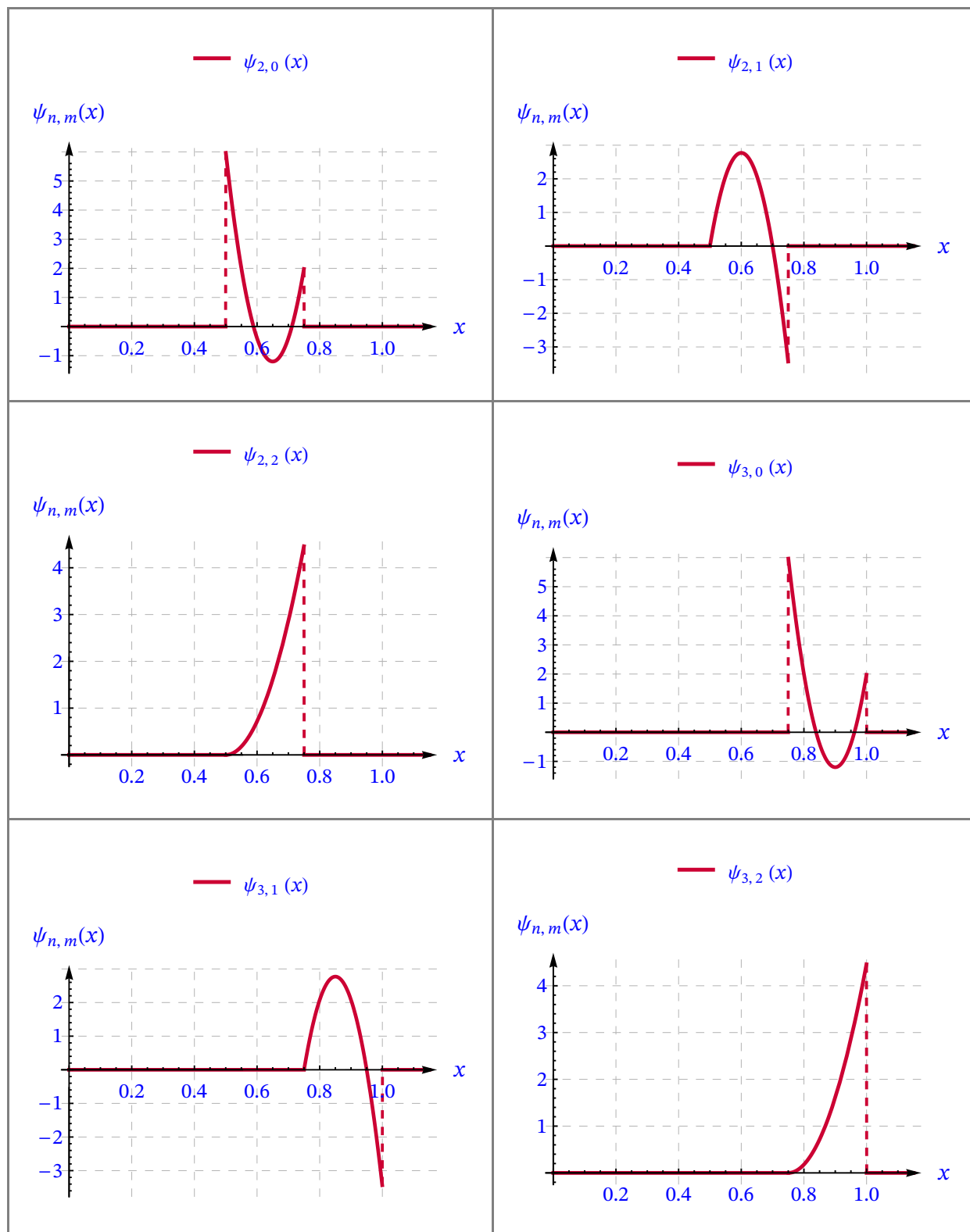
Out[*]=



(c)

Out[*]=





■ Ejemplo 2.1.4. Base Wavelets de Chelyshkov.

Sea el conjunto de Wavelets de Chelyshkov $\{\psi_{nm}(x)\} \subset L^2([0, 1])$

$$\begin{cases} n = 0, 1, \dots, 2^k - 1 \\ m = 0, 1, \dots, M \end{cases}$$

- (i) Calcúlense las Wavelets de Chelyshkov $\psi_{nm}(x)$.
- (ii) Calcúlese el producto interno dado por la expresión:

$$\int_0^1 \psi_{nm}(x) \psi_{n^*m^*}(x) dx = \begin{cases} 1 & n = m \text{ y } n^* = m^* \\ a & n \neq m \text{ o } n^* \neq m^* \end{cases}$$

- (iii) Calcúlese la matriz D

$$D = \int_0^1 \Psi(x) \Psi(x)^T dx \quad \Psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_{1,0}(x) \\ \psi_{1,1}(x) \\ \vdots \\ \psi_{2^{k-1},M-1}(x) \end{pmatrix}$$

$$(a) \quad k = 0, \quad M = 2 \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(b) \quad k = 1, \quad M = 2 \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

SOLUCIÓN

(a)

Out[*]=

$$\begin{pmatrix} k = & 0 \\ M = & 2 \\ n = 0, \dots, 2^k - 1 = & \{0\} \\ m = 0, \dots, M = & \{0, 1, 2\} \end{pmatrix}$$

Out[•]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \psi_{0,0}(x) & \begin{cases} 10x^2 - 12x + 3 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{0,1}(x) & \begin{cases} \sqrt{3}(4x - 5x^2) & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{0,2}(x) & \begin{cases} \sqrt{5}x^2 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \end{pmatrix}$$

$$\langle \psi_{0,0}, \psi_{0,0} \rangle = 1$$

$$\langle \psi_{0,0}, \psi_{0,1} \rangle = 0$$

$$\langle \psi_{0,0}, \psi_{0,2} \rangle = 0$$

$$\langle \psi_{0,1}, \psi_{0,1} \rangle = 1$$

$$\langle \psi_{0,1}, \psi_{0,2} \rangle = 0$$

$$\langle \psi_{0,2}, \psi_{0,2} \rangle = 1$$

$$D = \int_0^1 \begin{pmatrix} \psi_{0,0}(x) \\ \psi_{0,1}(x) \\ \psi_{0,2}(x) \end{pmatrix} \cdot (\psi_{0,0}(x) \ \psi_{0,1}(x) \ \psi_{0,2}(x)) \, dx$$

$$D = \int_0^1 \begin{pmatrix} \psi_{0,0}(x)^2 & \psi_{0,0}(x) \psi_{0,1}(x) & \psi_{0,0}(x) \psi_{0,2}(x) \\ \psi_{0,0}(x) \psi_{0,1}(x) & \psi_{0,1}(x)^2 & \psi_{0,1}(x) \psi_{0,2}(x) \\ \psi_{0,0}(x) \psi_{0,2}(x) & \psi_{0,1}(x) \psi_{0,2}(x) & \psi_{0,2}(x)^2 \end{pmatrix} dx$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b)

Out[•]=

$$\begin{pmatrix} k = & 1 \\ M = & 2 \\ n = 0, \dots, 2^k - 1 = & \{0, 1\} \\ m = 0, \dots, M = & \{0, 1, 2\} \end{pmatrix}$$

Out[•]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \psi_{0,0}(x) & \begin{cases} \sqrt{2} (40 x^2 - 24 x + 3) & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{0,1}(x) & \begin{cases} \sqrt{6} (8 x - 20 x^2) & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{0,2}(x) & \begin{cases} 4 \sqrt{10} x^2 & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{1,0}(x) & \begin{cases} \sqrt{2} (10 (2 x - 1)^2 - 12 (2 x - 1) + 3) & \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{1,1}(x) & \begin{cases} \sqrt{6} (4 (2 x - 1) - 5 (2 x - 1)^2) & \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{1,2}(x) & \begin{cases} \sqrt{10} (2 x - 1)^2 & \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \end{pmatrix}$$

$$D = \int_0^1 \begin{pmatrix} \psi_{0,0}(x) \\ \psi_{0,1}(x) \\ \psi_{0,2}(x) \\ \psi_{1,0}(x) \\ \psi_{1,1}(x) \\ \psi_{1,2}(x) \end{pmatrix} \cdot (\psi_{0,0}(x) \ \psi_{0,1}(x) \ \psi_{0,2}(x) \ \psi_{1,0}(x) \ \psi_{1,1}(x) \ \psi_{1,2}(x)) \, dx$$

$$D = \int_0^1 \begin{pmatrix} \psi_{0,0}(x)^2 & \psi_{0,0}(x) \psi_{0,1}(x) & \psi_{0,0}(x) \psi_{0,2}(x) & \psi_{0,0}(x) \psi_{1,0}(x) & \psi_{0,0}(x) \psi_{1,1}(x) & \psi_{0,0}(x) \psi_{1,2}(x) \\ \psi_{0,0}(x) \psi_{0,1}(x) & \psi_{0,1}(x)^2 & \psi_{0,1}(x) \psi_{0,2}(x) & \psi_{0,1}(x) \psi_{1,0}(x) & \psi_{0,1}(x) \psi_{1,1}(x) & \psi_{0,1}(x) \psi_{1,2}(x) \\ \psi_{0,0}(x) \psi_{0,2}(x) & \psi_{0,1}(x) \psi_{0,2}(x) & \psi_{0,2}(x)^2 & \psi_{0,2}(x) \psi_{1,0}(x) & \psi_{0,2}(x) \psi_{1,1}(x) & \psi_{0,2}(x) \psi_{1,2}(x) \\ \psi_{0,0}(x) \psi_{1,0}(x) & \psi_{0,1}(x) \psi_{1,0}(x) & \psi_{0,2}(x) \psi_{1,0}(x) & \psi_{1,0}(x)^2 & \psi_{1,0}(x) \psi_{1,1}(x) & \psi_{1,0}(x) \psi_{1,2}(x) \\ \psi_{0,0}(x) \psi_{1,1}(x) & \psi_{0,1}(x) \psi_{1,1}(x) & \psi_{0,2}(x) \psi_{1,1}(x) & \psi_{1,0}(x) \psi_{1,1}(x) & \psi_{1,1}(x)^2 & \psi_{1,1}(x) \psi_{1,2}(x) \\ \psi_{0,0}(x) \psi_{1,2}(x) & \psi_{0,1}(x) \psi_{1,2}(x) & \psi_{0,2}(x) \psi_{1,2}(x) & \psi_{1,0}(x) \psi_{1,2}(x) & \psi_{1,1}(x) \psi_{1,2}(x) & \psi_{1,2}(x)^2 \end{pmatrix} dx$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Las funciones *Wavelets* de Chelyshkov son una familia *ortonormal* basadas en los polinomios de Chelyshkov.

Se construyen las funciones *Wavelets* de Chelyshkov *generalizadas de orden fraccionario* (*Fractional–Order Generalized Chelyshkov Wavelet–FOGCW*) que representan una generalización de las *Wavelets* de Chelyshkov.

• **Definición 2.1.2. Wavelets de Chelyshkov Generalizadas de Orden Fraccionario.**

Las *Wavelets* de Chelyshkov *generalizadas de orden fraccionario* (*Fractional–Order Generalized Chelyshkov Wavelet–FOGCW*) de orden α , $\psi_{nm}^{T,\alpha}$ se definen en el intervalo $[0, T)$ mediante la expresión [MOHS20], [NGO22], [ERMA23],

$$\psi_{nm}^{T,\alpha}(x) = \begin{cases} \sqrt{2m+1} 2^{\frac{k}{2}} C_{M,m} \left(2^k \left(\frac{x}{T} \right)^\alpha - n \right) & \frac{x}{T} \in \left[\left(\frac{n}{2^k} \right)^\frac{1}{\alpha}, \left(\frac{n+1}{2^k} \right)^\frac{1}{\alpha} \right) \\ 0 & \text{Resto} \end{cases} \quad (2.1.12)$$

$$\begin{cases} n = 0, 1, \dots, 2^k - 1 & k = 0, 1, 2, \dots \\ m = 0, 1, \dots, M & \text{(grado del polinomio de Chelyshkov)} \end{cases}$$

$C_{M,m}(x) \equiv$ polinomios de Chelyshkov de grado M .

donde M, h son enteros no negativos y α es un número positivo real que representa el orden fraccionario.

Observaciones 2.1.2.

- (i) Las funciones *Wavelets* de Chelyshkov *generalizadas* fraccionarias de orden α , que se denotan por $\psi_{nm}^{T,\alpha}(x)$, se deducen estableciendo el cambio de variable en las *Wavelets* definidas en el intervalo $[0, T]$, ([GHAN22])

$$x = h \left(\frac{z}{h} \right)^\alpha \quad z \in [0, h] \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{T} = \left(\frac{z}{T} \right)^\alpha \quad z \in [0, T] \quad (2.1.13)$$

para $\alpha > 0$ sobre el intervalo $[0, T]$. Con esta transformación la función $\psi_{nm}^T(x)$ se convierte en la *Wavelet* FOGCW:

$$\psi_{nm}^T(x) = \begin{cases} \sqrt{2m+1} 2^{\frac{k}{2}} C_{M,m} \left(2^k \frac{x}{T} - n \right) & \frac{n}{2^k} \leq \frac{x}{T} < \frac{n+1}{2^k} \\ 0 & \text{Resto} \end{cases} \quad \frac{x}{T} \in [0, 1] \quad \Leftrightarrow$$

$$\psi_{nm}^{T,\alpha}(z) = \begin{cases} \sqrt{2m+1} 2^{\frac{k}{2}} C_{M,m} \left(2^k \left(\frac{z}{T} \right)^\alpha - n \right) & \frac{z}{T} \in \left[\left(\frac{n}{2^k} \right)^\frac{1}{\alpha}, \left(\frac{n+1}{2^k} \right)^\frac{1}{\alpha} \right) \\ 0 & \text{Resto} \end{cases}$$

▼ **Teorema 2.2. Base Ortonormal de las Wavelets de Chelyshkov Fraccionarias.**

Sea el conjunto de Wavelets de Chelyshkov Generalizadas Fraccionarias $\psi_{nm}^{T,\alpha}(x)$, $n = 0, 1, \dots, 2^k - 1$ y $m = 0, 1, \dots, M$ de grado M , entonces constituyen un conjunto ortonormal en el intervalo $[0, T]$ respecto del producto interno y la función peso $w^\alpha(x) = \alpha \frac{x^{\alpha-1}}{T^\alpha}$

$$\langle \psi_{nm}^{T,\alpha}(x), \psi_{n^*m^*}^{T,\alpha}(x) \rangle = \int_0^T \psi_{nm}^{T,\alpha}(x) * \psi_{n^*m^*}^{T,\alpha}(x) w^\alpha(x) dx = \begin{cases} 1 & n = m \text{ y } n^* = m^* \\ 0 & n \neq m \text{ o } n^* \neq m^* \end{cases}$$

Matriz D.

Se define la *matriz dual* de $\Psi^{T,\alpha}(x)$ a la matriz D como el producto escalar:

$$D = \langle \Psi^{T,\alpha}(x), \Psi^{T,\alpha}(x) \rangle = \int_0^T \Psi^{T,\alpha} \cdot [\Psi^{T,\alpha}]^T w^\alpha(x) dx$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$\Psi^{T,\alpha}(x) = \begin{pmatrix} \psi_{0,0}^{T,\alpha}(x) \\ \psi_{0,1}^{T,\alpha}(x) \\ \vdots \\ \psi_{2^k-1,M}^{T,\alpha}(x) \end{pmatrix} \quad w^\alpha(x) = \alpha \frac{x^{\alpha-1}}{T^\alpha}.$$
(2.1.15)

Observaciones 2.1.3.

(i) Las Wavelets de Chelyshkov generalizadas fraccionarias $\psi_{nm}^{T,\alpha}(x)$ son polinomios de grado M en el intervalo

$$\frac{x}{T} \in \left[\left(\frac{n}{2^k} \right)^\frac{1}{\alpha}, \left(\frac{n+1}{2^k} \right)^\frac{1}{\alpha} \right), \begin{cases} n = 0, 1, \dots, 2^k - 1 & k = 0, 1, 2, \dots \\ m = 0, 1, \dots, M & \text{(grado polinomio de Chelyshkov)} \end{cases}$$

(ii) Dada la base de Wavelets de Chelyshkov generalizadas fraccionarias $\mathcal{B} = \{\psi_{nm}^{T,\alpha}(x)\}$ con $n = 0, 1, \dots, 2^k - 1$ y $m = 0, 1, \dots, M$, siendo M el grado de cada polinomio, se verifica

$$\mathcal{B} = \Psi(x) = \{\psi_{0,0}^{T,\alpha}(x), \psi_{0,1}^{T,\alpha}(x), \dots, \psi_{0,M}^{T,\alpha}(x), \psi_{1,0}^{T,\alpha}(x), \psi_{1,1}^{T,\alpha}(x), \dots, \psi_{1,M}^{T,\alpha}(x), \dots, \psi_{2^k-1,0}^{T,\alpha}(x), \psi_{2^k-1,1}^{T,\alpha}(x), \dots, \psi_{2^k-1,M}^{T,\alpha}(x)\} \quad (2.1.16)$$

Dimensión $(\mathcal{B} = \Psi(x)) = m^*$ (nº elementos) $= 2^k (M + 1)$.

(iii) Se define también el vector base $\Psi(x)$ también como sigue:

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= (\psi_1(x) \ \psi_2(x) \ \dots \ \psi_{m^*}^{T,\alpha}(x)) \quad m^* = 2^k (M + 1) \\ \psi_i(x) &= \psi_{nm}(x) \quad i = n(M + 1) + (m + 1) \end{aligned} \quad (2.1.17)$$

siendo el índice:

$$i = n(M + 1) + (m + 1) \quad \begin{cases} n = 0, 1, \dots, 2^k - 1 \\ m = 0, 1, \dots, M \end{cases} \quad (2.1.18)$$

■ **Ejemplo 2.1.5. Wavelets de Chelyshkov Generalizadas Fraccionarias.**

(i) Calcúlense las expresiones analíticas de las *Wavelets* de Chelyshkov Generalizadas Fraccionarias $\psi_{nm}^{T,\alpha}(x)$, de orden α para los valores dados de k y M .

(ii) Representéntense las gráficas de las *Wavelets* de Chelyshkov fraccionarias $\psi_{nm}^{T,\alpha}(x)$.

(a) $k = 0 \quad M = 2 \quad [0, T) = [0, 1) \quad \alpha = 1.$

(b) $k = 1 \quad M = 2 \quad [0, T) = [0, 1) \quad \alpha = 1.$

(c) $k = 1 \quad M = 2 \quad [0, T) = [0, 1) \quad \alpha = \frac{1}{2} \quad ([\text{NGO22}], [\text{ERMA23}])$

(d) $k = 1 \quad M = 2 \quad [0, T) = [0, 1) \quad \alpha = 2.$

(polinomios de grado $M = 2$). $\begin{cases} n = 0, 1, \dots, 2^k - 1 \\ m = 0, 1, \dots, M \end{cases}$

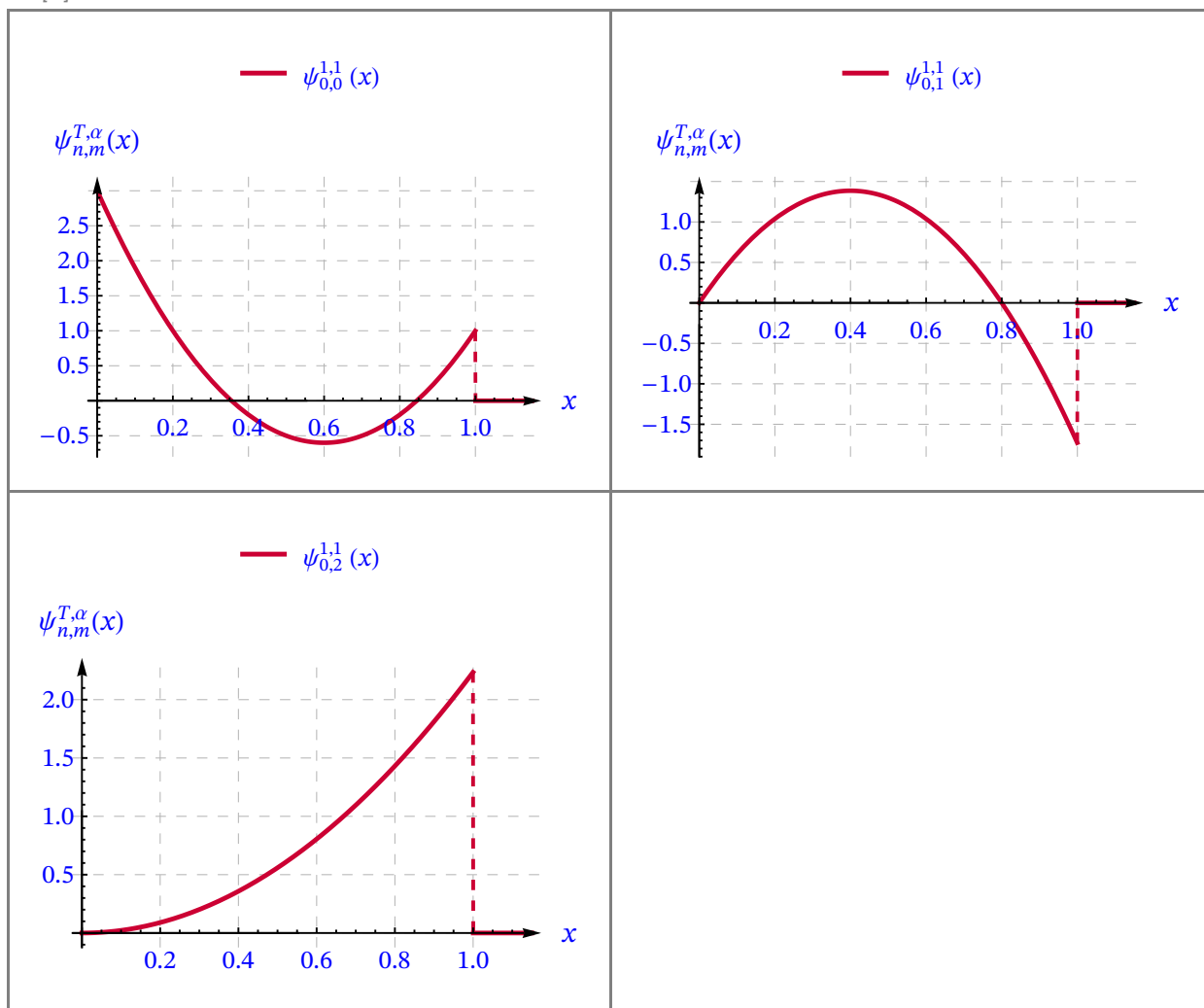
SOLUCIÓN

(a)

Out[•]//TableForm=

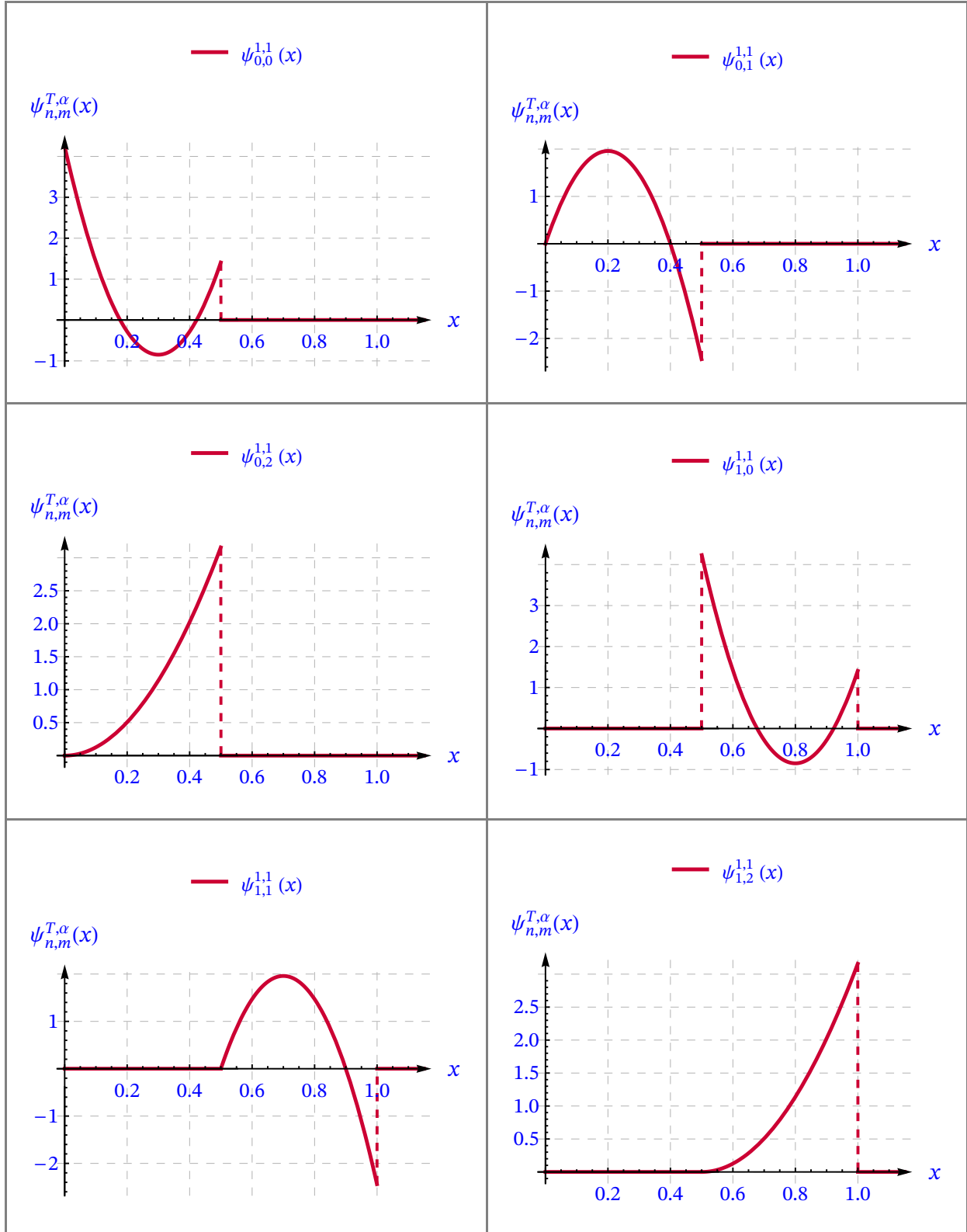
$$\begin{array}{lll} k = 0 & \psi_{0,0}^{1,1}(x) & \begin{cases} 10x^2 - 12x + 3 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ k = 0 & \psi_{0,1}^{1,1}(x) & \begin{cases} \sqrt{3}(4 - 5x)x & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ k = 0 & \psi_{0,2}^{1,1}(x) & \begin{cases} \sqrt{5}x^2 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \end{array}$$

Out[•]=



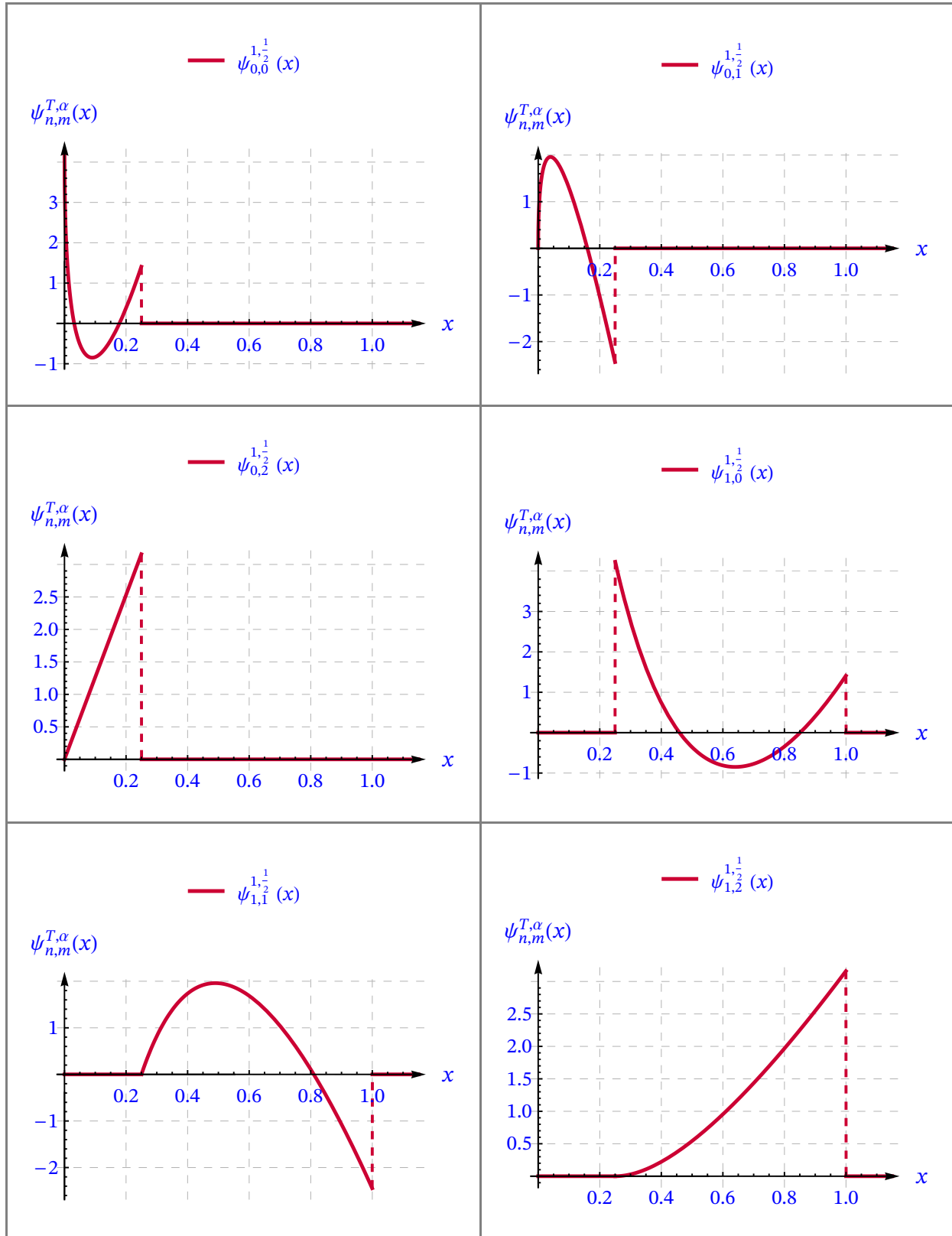
(b)

Out[*]=



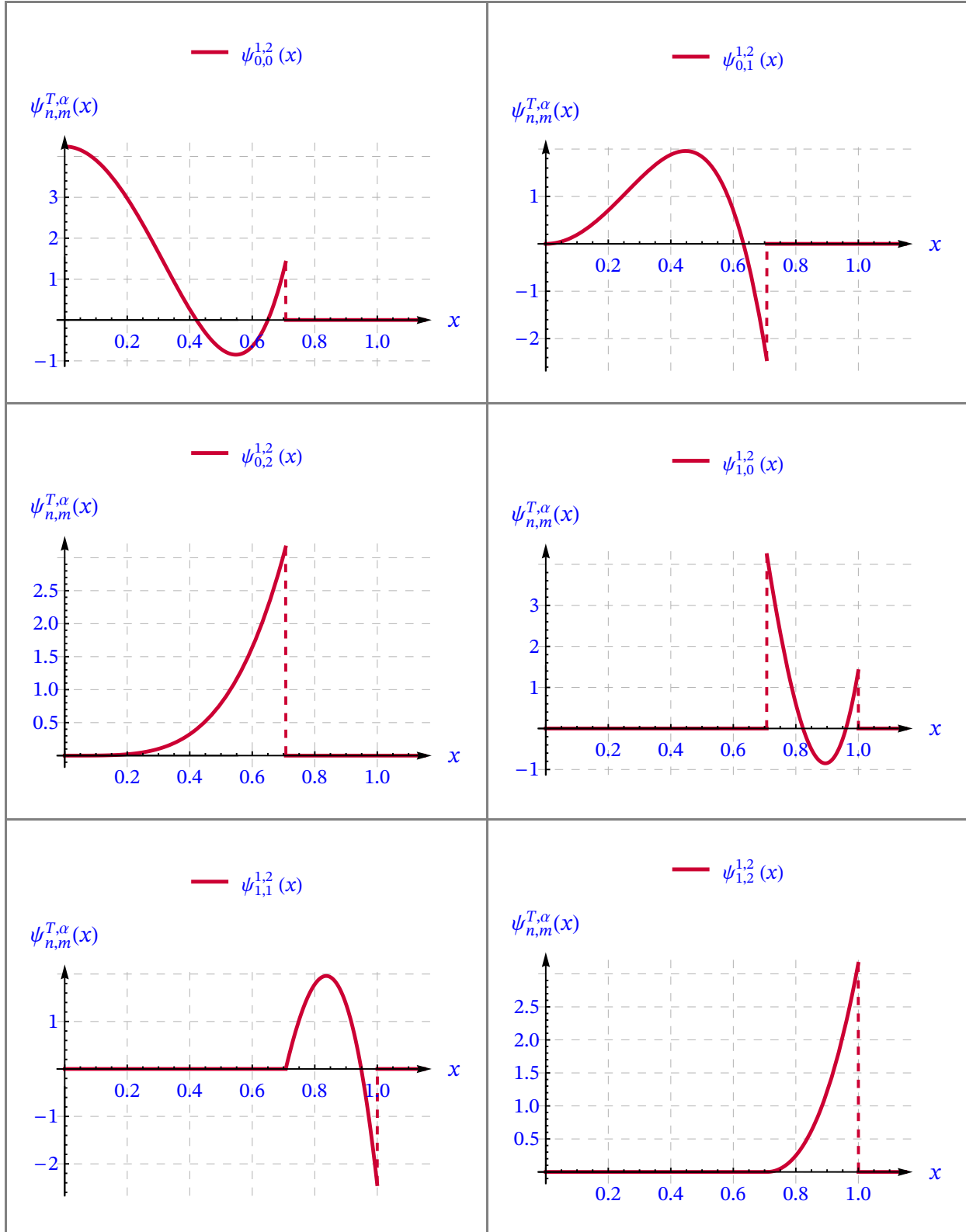
(c)

Out[*]=



(d)

Out[*]=



■ Ejemplo 2.1.6. Wavelets de Chelyshkov Generalizadas Fraccionarias.

(i) Calcúlense las expresiones analíticas de las *Wavelets* de Chelyshkov Generalizadas Fraccionarias $\psi_{nm}^{T,\alpha}(x)$, de orden α para los valores dados de k y M .

(ii) Represéntense las gráficas de las *Wavelets* de Chelyshkov fraccionarias $\psi_{nm}^{T,\alpha}(x)$.

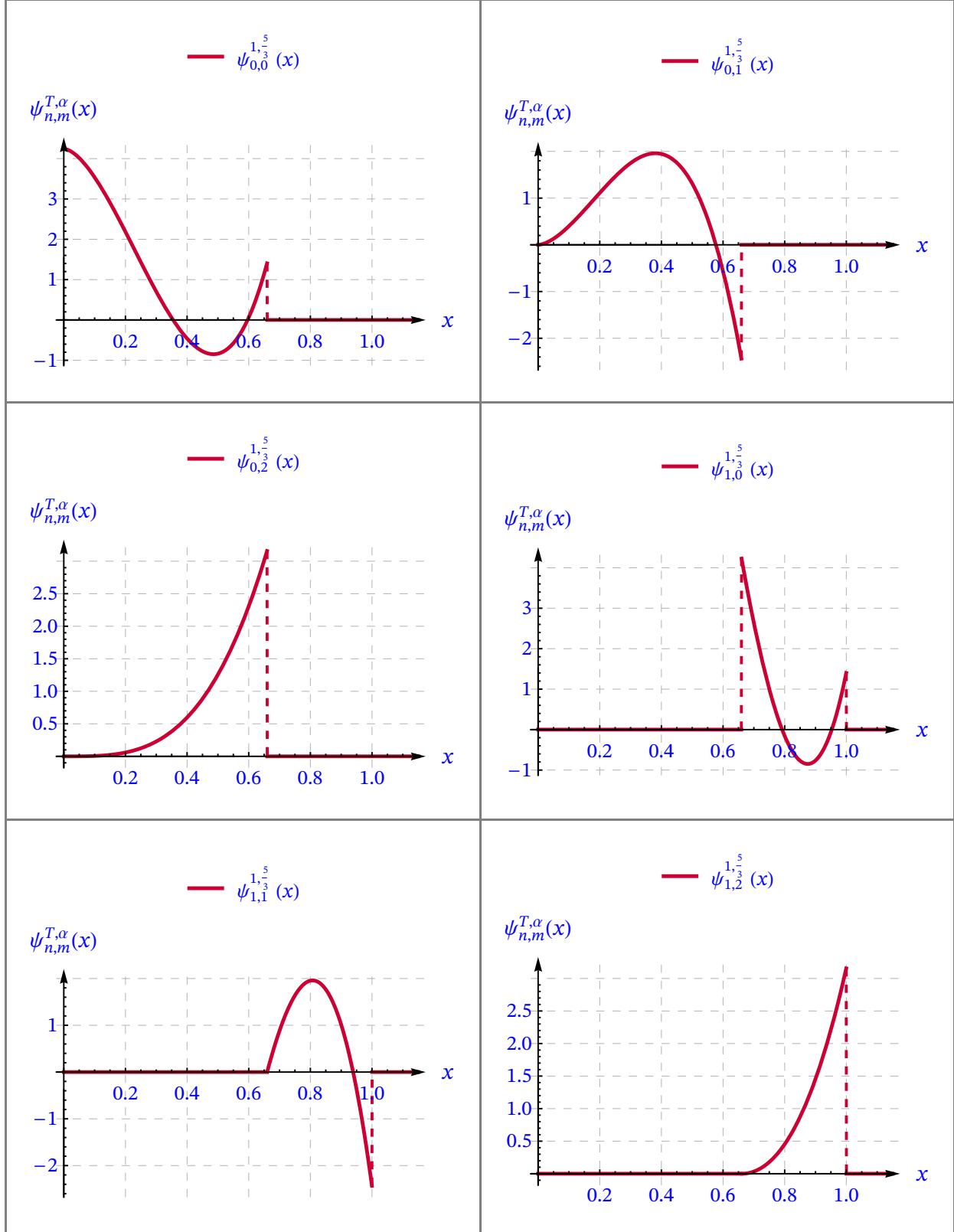
(a) $k = 2$ $M = 2$ $[0, T) = [0, 1)$ $\alpha = 5/3$.

(polinomios de grado $M = 2$). $\begin{cases} n = 0, 1, \dots, 2^k - 1 \\ m = 0, 1, \dots, M \end{cases}$.

SOLUCIÓN

(a)

Out[*]=



■ Ejemplo 2.1.7. Base Wavelets de Chelyshkov Generalizadas Fraccionarias.

Sea el conjunto de Wavelets de Chelyshkov generalizadas fraccionarias:

$$\{\psi_{n,m}^{T,\alpha}(x)\} \subset L^2([0, T]) \quad \begin{cases} n = 0, 1, \dots, 2^k - 1 \\ m = 0, 1, \dots, M \end{cases}.$$

(i) Calcúlense las Wavelets de Chelyshkov fraccionarias $\psi_{n,m}^{T,\alpha}(x)$.

(ii) Calcúlese el producto interno dado por la expresión:

$$\int_0^T \psi_{n,m}^{T,\alpha}(x) * \psi_{n^*,m^*}^{T,\alpha}(x) w^\alpha(x) dx = \begin{cases} 1 & n = m \text{ y } n^* = m^* \\ 0 & n \neq m \text{ o } n^* \neq m^* \end{cases}.$$

(iii) Calcúlese la matriz D dada por la expresión:

$$D = \int_0^T \Psi^{T,\alpha}(x) \cdot [\Psi^{T,\alpha}(x)]^T w^\alpha(x) dx \quad \Psi^{T,\alpha}(x) = \begin{pmatrix} \psi_{0,0}^{T,\alpha}(x) \\ \psi_{0,1}^{T,\alpha}(x) \\ \vdots \\ \psi_{2^k-1,M}^{T,\alpha}(x) \end{pmatrix}.$$

(a) $k = 0, M = 2 \quad [A, B] = [0, T] = [0, 1] \quad \alpha = 1.$

(b) $k = 0, M = 2 \quad [A, B] = [0, T] = [0, 5] \quad \alpha = 1.$

(c) $k = 0, M = 2 \quad [A, B] = [0, T] = [0, 5] \quad \alpha = \frac{1}{3}.$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(d) $k = 1, M = 2 \quad [A, B] = [0, T] = [0, 4] \quad \alpha = \frac{1}{2}.$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

SOLUCIÓN
(a)
 $Out[*]=$

$$\left(\begin{array}{rcl} T = & & 1 \\ \alpha = & & 1 \\ k = & & 0 \\ M = & & 2 \\ n = 0, \dots, 2^k - 1 = & & \{0\} \\ m = 0, \dots, M = & & \{0, 1, 2\} \end{array} \right)$$

 $Out[*]//MatrixForm=$

$$\left(\begin{array}{rcl} \psi_{0,0}^{1,1}(x) & \left\{ \begin{array}{ll} 10x^2 - 12x + 3 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{array} \right. & \\ \psi_{0,1}^{1,1}(x) & \left\{ \begin{array}{ll} \sqrt{3}(4 - 5x)x & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{array} \right. & \\ \psi_{0,2}^{1,1}(x) & \left\{ \begin{array}{ll} \sqrt{5}x^2 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{array} \right. & \end{array} \right)$$

$$D = \int_0^T \begin{pmatrix} \psi_{0,0}^{1,1}(x) \\ \psi_{0,1}^{1,1}(x) \\ \psi_{0,2}^{1,1}(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \psi_{0,0}^{1,1}(x) & \psi_{0,1}^{1,1}(x) & \psi_{0,2}^{1,1}(x) \end{pmatrix} dx$$

$$D = \int_0^T \begin{pmatrix} \psi_{0,0}^{1,1}(x)^2 & \psi_{0,0}^{1,1}(x) \psi_{0,1}^{1,1}(x) & \psi_{0,0}^{1,1}(x) \psi_{0,2}^{1,1}(x) \\ \psi_{0,0}^{1,1}(x) \psi_{0,1}^{1,1}(x) & \psi_{0,1}^{1,1}(x)^2 & \psi_{0,1}^{1,1}(x) \psi_{0,2}^{1,1}(x) \\ \psi_{0,0}^{1,1}(x) \psi_{0,2}^{1,1}(x) & \psi_{0,1}^{1,1}(x) \psi_{0,2}^{1,1}(x) & \psi_{0,2}^{1,1}(x)^2 \end{pmatrix} dx$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b)
 $Out[*]=$

$$\left(\begin{array}{rcl} T = & & 5 \\ \alpha = & & 1 \\ k = & & 0 \\ M = & & 2 \\ n = 0, \dots, 2^k - 1 = & & \{0\} \\ m = 0, \dots, M = & & \{0, 1, 2\} \end{array} \right)$$

Out[•]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \psi_{0,0}^{5,1}(x) & \begin{cases} \frac{2x^2}{5} - \frac{12x}{5} + 3 & 0 \leq \frac{x}{5} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{0,1}^{5,1}(x) & \begin{cases} -\frac{1}{5} \sqrt{3} (x-4)x & 0 \leq \frac{x}{5} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{0,2}^{5,1}(x) & \begin{cases} \frac{x^2}{5\sqrt{5}} & 0 \leq \frac{x}{5} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \end{pmatrix}$$

$$D = \int_0^T \begin{pmatrix} \psi_{0,0}^{5,1}(x) \\ \psi_{0,1}^{5,1}(x) \\ \psi_{0,2}^{5,1}(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \psi_{0,0}^{5,1}(x) & \psi_{0,1}^{5,1}(x) & \psi_{0,2}^{5,1}(x) \end{pmatrix} dx$$

$$D = \int_0^T \begin{pmatrix} \psi_{0,0}^{5,1}(x)^2 & \psi_{0,0}^{5,1}(x) \psi_{0,1}^{5,1}(x) & \psi_{0,0}^{5,1}(x) \psi_{0,2}^{5,1}(x) \\ \psi_{0,0}^{5,1}(x) \psi_{0,1}^{5,1}(x) & \psi_{0,1}^{5,1}(x)^2 & \psi_{0,1}^{5,1}(x) \psi_{0,2}^{5,1}(x) \\ \psi_{0,0}^{5,1}(x) \psi_{0,2}^{5,1}(x) & \psi_{0,1}^{5,1}(x) \psi_{0,2}^{5,1}(x) & \psi_{0,2}^{5,1}(x)^2 \end{pmatrix} dx$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(c)

Out[•]=

$$\begin{pmatrix} T = & 5 \\ \alpha = & \frac{1}{3} \\ k = & 0 \\ M = & 2 \\ n = 0, \dots, 2^k - 1 = & \{0\} \\ m = 0, \dots, M = & \{0, 1, 2\} \end{pmatrix}$$

Out[•]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \psi_{0,0}^{5,\frac{1}{3}}(x) & \begin{cases} 2\sqrt[3]{5} x^{2/3} - \frac{12\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{5}} + 3 & 0 \leq \frac{x}{5} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{0,1}^{5,\frac{1}{3}}(x) & \begin{cases} \sqrt{3} \left(\frac{4\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{5}} - \sqrt[3]{5} x^{2/3} \right) & 0 \leq \frac{x}{5} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{0,2}^{5,\frac{1}{3}}(x) & \begin{cases} \frac{x^{2/3}}{\sqrt[3]{5}} & 0 \leq \frac{x}{5} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \end{pmatrix}$$

$$D = \int_0^T \begin{pmatrix} \psi_{0,0}^{5,\frac{1}{3}}(x) \\ \psi_{0,1}^{5,\frac{1}{3}}(x) \\ \psi_{0,2}^{5,\frac{1}{3}}(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \psi_{0,0}^{5,\frac{1}{3}}(x) & \psi_{0,1}^{5,\frac{1}{3}}(x) & \psi_{0,2}^{5,\frac{1}{3}}(x) \end{pmatrix} dx$$

$$D = \int_0^T \begin{pmatrix} \psi_{0,0}^{5,\frac{1}{3}}(x)^2 & \psi_{0,0}^{5,\frac{1}{3}}(x) \psi_{0,1}^{5,\frac{1}{3}}(x) & \psi_{0,0}^{5,\frac{1}{3}}(x) \psi_{0,2}^{5,\frac{1}{3}}(x) \\ \psi_{0,0}^{5,\frac{1}{3}}(x) \psi_{0,1}^{5,\frac{1}{3}}(x) & \psi_{0,1}^{5,\frac{1}{3}}(x)^2 & \psi_{0,1}^{5,\frac{1}{3}}(x) \psi_{0,2}^{5,\frac{1}{3}}(x) \\ \psi_{0,0}^{5,\frac{1}{3}}(x) \psi_{0,2}^{5,\frac{1}{3}}(x) & \psi_{0,1}^{5,\frac{1}{3}}(x) \psi_{0,2}^{5,\frac{1}{3}}(x) & \psi_{0,2}^{5,\frac{1}{3}}(x)^2 \end{pmatrix} dx$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(d)

Out[•]=

$$\begin{pmatrix} T = & 4 \\ \alpha = & \frac{1}{2} \\ k = & 1 \\ M = & 2 \\ n = 0, \dots, 2^k - 1 = & \{0, 1\} \\ m = 0, \dots, M = & \{0, 1, 2\} \end{pmatrix}$$

Out[•]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \psi_{0,0}^{4,\frac{1}{2}}(x) & \begin{cases} \sqrt{2} (10x - 12\sqrt{x} + 3) & 0 \leq \frac{x}{4} < \frac{1}{4} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{0,1}^{4,\frac{1}{2}}(x) & \begin{cases} \sqrt{6} (4\sqrt{x} - 5x) & 0 \leq \frac{x}{4} < \frac{1}{4} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{0,2}^{4,\frac{1}{2}}(x) & \begin{cases} \sqrt{10} x & 0 \leq \frac{x}{4} < \frac{1}{4} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{1,0}^{4,\frac{1}{2}}(x) & \begin{cases} \sqrt{2} (10x - 32\sqrt{x} + 25) & \frac{1}{4} \leq \frac{x}{4} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{1,1}^{4,\frac{1}{2}}(x) & \begin{cases} \sqrt{6} (-5x + 14\sqrt{x} - 9) & \frac{1}{4} \leq \frac{x}{4} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{1,2}^{4,\frac{1}{2}}(x) & \begin{cases} \sqrt{10} (\sqrt{x} - 1)^2 & \frac{1}{4} \leq \frac{x}{4} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \end{pmatrix}$$

$$D = \int_0^T \begin{pmatrix} \psi_{0,0}^{4,\frac{1}{2}}(x) \\ \psi_{0,1}^{4,\frac{1}{2}}(x) \\ \psi_{0,2}^{4,\frac{1}{2}}(x) \\ \psi_{1,0}^{4,\frac{1}{2}}(x) \\ \psi_{1,1}^{4,\frac{1}{2}}(x) \\ \psi_{1,2}^{4,\frac{1}{2}}(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \psi_{0,0}^{4,\frac{1}{2}}(x) & \psi_{0,1}^{4,\frac{1}{2}}(x) & \psi_{0,2}^{4,\frac{1}{2}}(x) & \psi_{1,0}^{4,\frac{1}{2}}(x) & \psi_{1,1}^{4,\frac{1}{2}}(x) & \psi_{1,2}^{4,\frac{1}{2}}(x) \end{pmatrix} dx$$

$$D = \int_0^T \begin{pmatrix} \psi_{0,0}^{4,\frac{1}{2}}(x)^2 & \psi_{0,0}^{4,\frac{1}{2}}(x) \psi_{0,1}^{4,\frac{1}{2}}(x) & \psi_{0,0}^{4,\frac{1}{2}}(x) \psi_{0,2}^{4,\frac{1}{2}}(x) & \psi_{0,0}^{4,\frac{1}{2}}(x) \psi_{1,0}^{4,\frac{1}{2}}(x) & \psi_{0,0}^{4,\frac{1}{2}}(x) \psi_{1,1}^{4,\frac{1}{2}}(x) & \psi_{0,0}^{4,\frac{1}{2}}(x) \psi_{1,2}^{4,\frac{1}{2}}(x) \\ \psi_{0,0}^{4,\frac{1}{2}}(x) \psi_{0,1}^{4,\frac{1}{2}}(x) & \psi_{0,1}^{4,\frac{1}{2}}(x)^2 & \psi_{0,1}^{4,\frac{1}{2}}(x) \psi_{0,2}^{4,\frac{1}{2}}(x) & \psi_{0,1}^{4,\frac{1}{2}}(x) \psi_{1,0}^{4,\frac{1}{2}}(x) & \psi_{0,1}^{4,\frac{1}{2}}(x) \psi_{1,1}^{4,\frac{1}{2}}(x) & \psi_{0,1}^{4,\frac{1}{2}}(x) \psi_{1,2}^{4,\frac{1}{2}}(x) \\ \psi_{0,0}^{4,\frac{1}{2}}(x) \psi_{0,2}^{4,\frac{1}{2}}(x) & \psi_{0,1}^{4,\frac{1}{2}}(x) \psi_{0,2}^{4,\frac{1}{2}}(x) & \psi_{0,2}^{4,\frac{1}{2}}(x)^2 & \psi_{0,2}^{4,\frac{1}{2}}(x) \psi_{1,0}^{4,\frac{1}{2}}(x) & \psi_{0,2}^{4,\frac{1}{2}}(x) \psi_{1,1}^{4,\frac{1}{2}}(x) & \psi_{0,2}^{4,\frac{1}{2}}(x) \psi_{1,2}^{4,\frac{1}{2}}(x) \\ \psi_{0,0}^{4,\frac{1}{2}}(x) \psi_{1,0}^{4,\frac{1}{2}}(x) & \psi_{0,1}^{4,\frac{1}{2}}(x) \psi_{1,0}^{4,\frac{1}{2}}(x) & \psi_{0,2}^{4,\frac{1}{2}}(x) \psi_{1,0}^{4,\frac{1}{2}}(x) & \psi_{1,0}^{4,\frac{1}{2}}(x)^2 & \psi_{1,0}^{4,\frac{1}{2}}(x) \psi_{1,1}^{4,\frac{1}{2}}(x) & \psi_{1,0}^{4,\frac{1}{2}}(x) \psi_{1,2}^{4,\frac{1}{2}}(x) \\ \psi_{0,0}^{4,\frac{1}{2}}(x) \psi_{1,1}^{4,\frac{1}{2}}(x) & \psi_{0,1}^{4,\frac{1}{2}}(x) \psi_{1,1}^{4,\frac{1}{2}}(x) & \psi_{0,2}^{4,\frac{1}{2}}(x) \psi_{1,1}^{4,\frac{1}{2}}(x) & \psi_{1,0}^{4,\frac{1}{2}}(x) \psi_{1,1}^{4,\frac{1}{2}}(x) & \psi_{1,1}^{4,\frac{1}{2}}(x)^2 & \psi_{1,1}^{4,\frac{1}{2}}(x) \psi_{1,2}^{4,\frac{1}{2}}(x) \\ \psi_{0,0}^{4,\frac{1}{2}}(x) \psi_{1,2}^{4,\frac{1}{2}}(x) & \psi_{0,1}^{4,\frac{1}{2}}(x) \psi_{1,2}^{4,\frac{1}{2}}(x) & \psi_{0,2}^{4,\frac{1}{2}}(x) \psi_{1,2}^{4,\frac{1}{2}}(x) & \psi_{1,0}^{4,\frac{1}{2}}(x) \psi_{1,2}^{4,\frac{1}{2}}(x) & \psi_{1,1}^{4,\frac{1}{2}}(x) \psi_{1,2}^{4,\frac{1}{2}}(x) & \psi_{1,2}^{4,\frac{1}{2}}(x)^2 \end{pmatrix} dx$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

■ Ejemplo 2.1.8. Base de Wavelets de Chelyshkov Generalizadas Fraccionarias.

Sea el conjunto ortonormal de Wavelets de Chelyshkov genralizadas fraccionarias definidas en el intervalo $[A, B] = [0, 1]$ para los valores de los parámetros indicados:

(i) Determinése la base ortonormal de Wavelets de Chelyshkov generalizadas fraccionarias.

$$\mathcal{B} = \{\psi_{nm}(x)\} \begin{cases} n = 0, 1, \dots, 2^k - 1 \\ m = 0, 1, \dots, M \end{cases}$$

(ii) Represéntense las gráficas de las Wavelets de Chelyshkov fraccionarias.

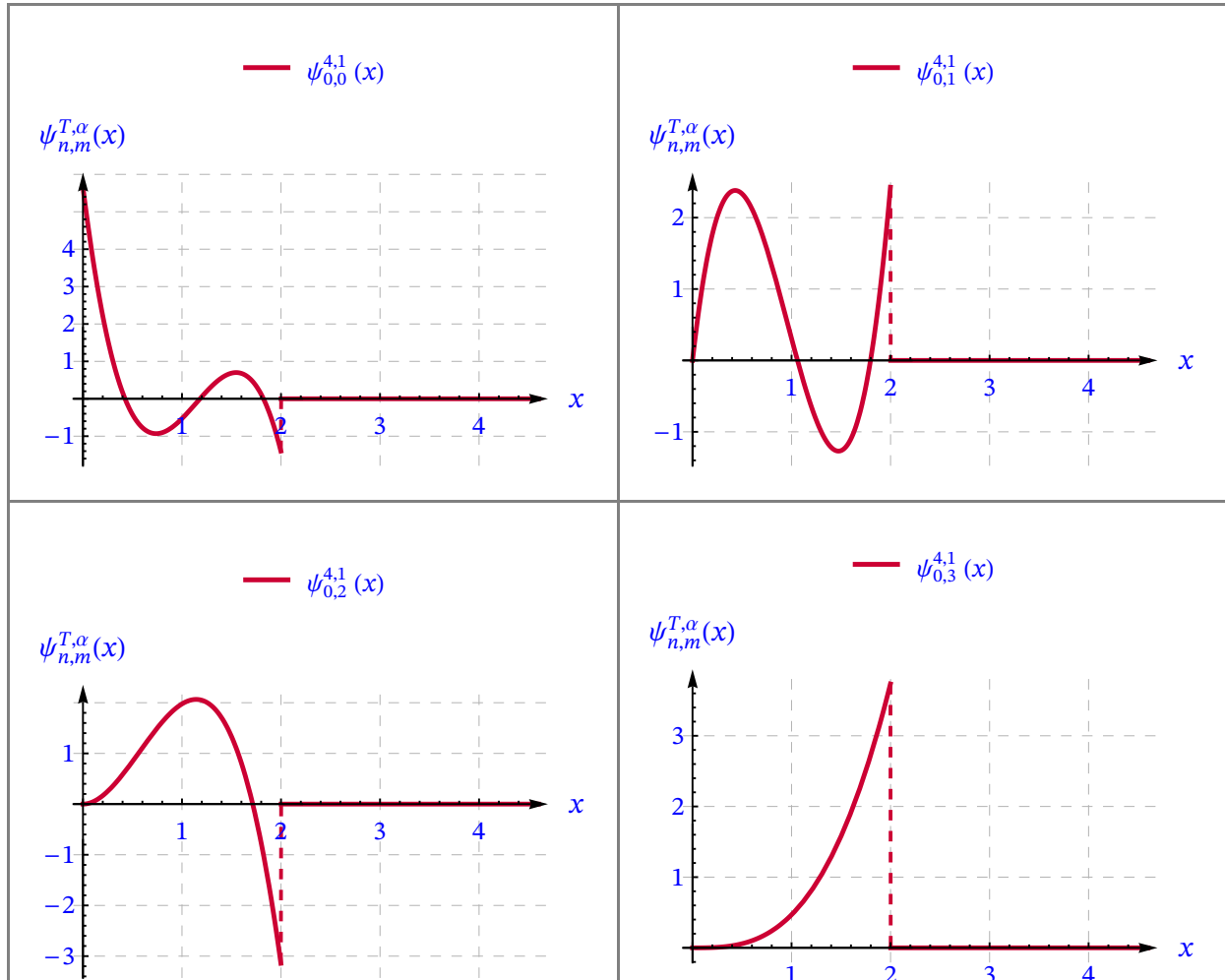
(a) $[A, B] = [0, T] = [0, 4]$ $k = 1$ $M = 3$ $\alpha = 1$.

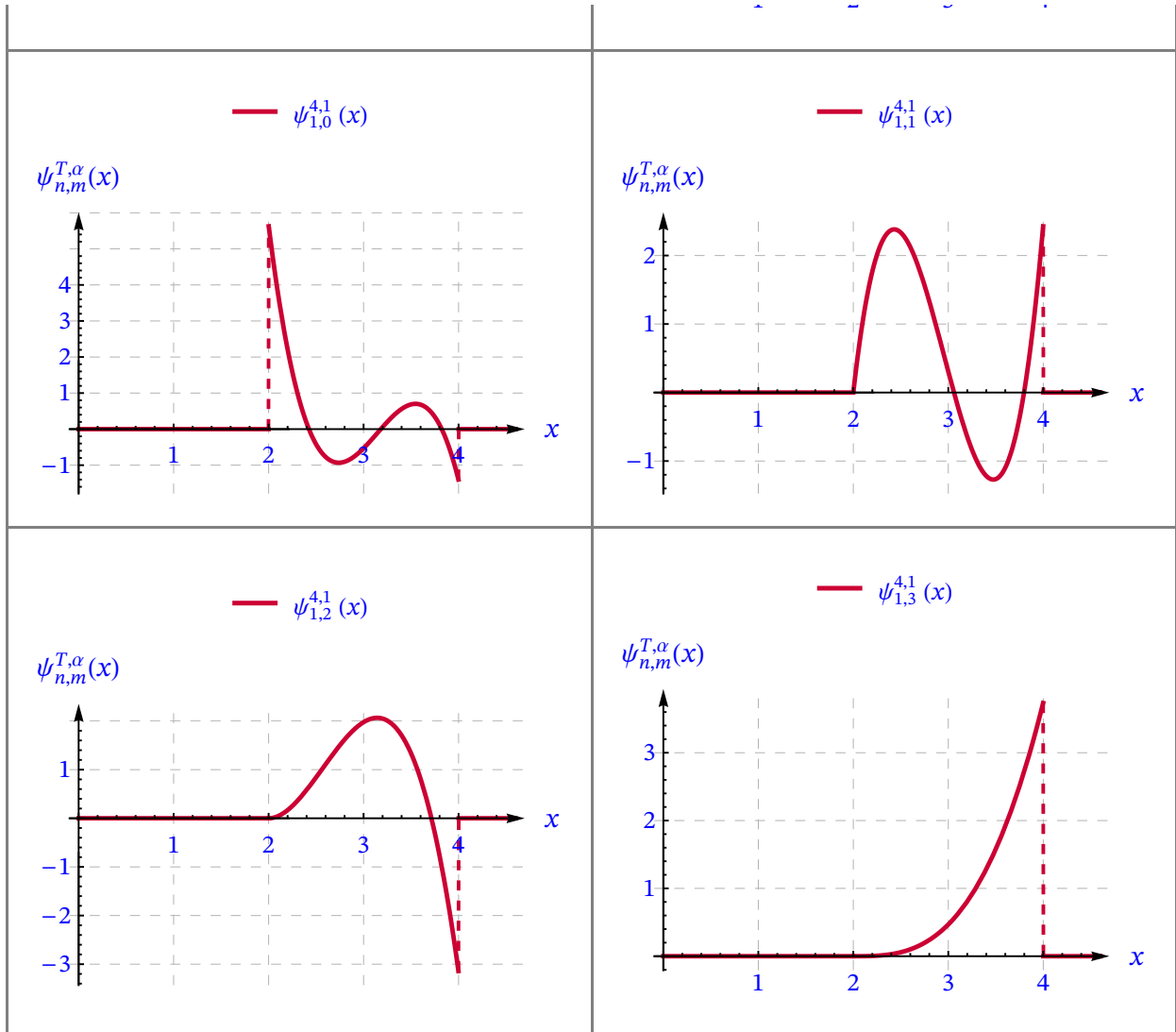
(b) $[A, B] = [0, T] = [0, 4]$ $k = 1$ $M = 3$ $\alpha = 1/3$.

SOLUCIÓN

(a)

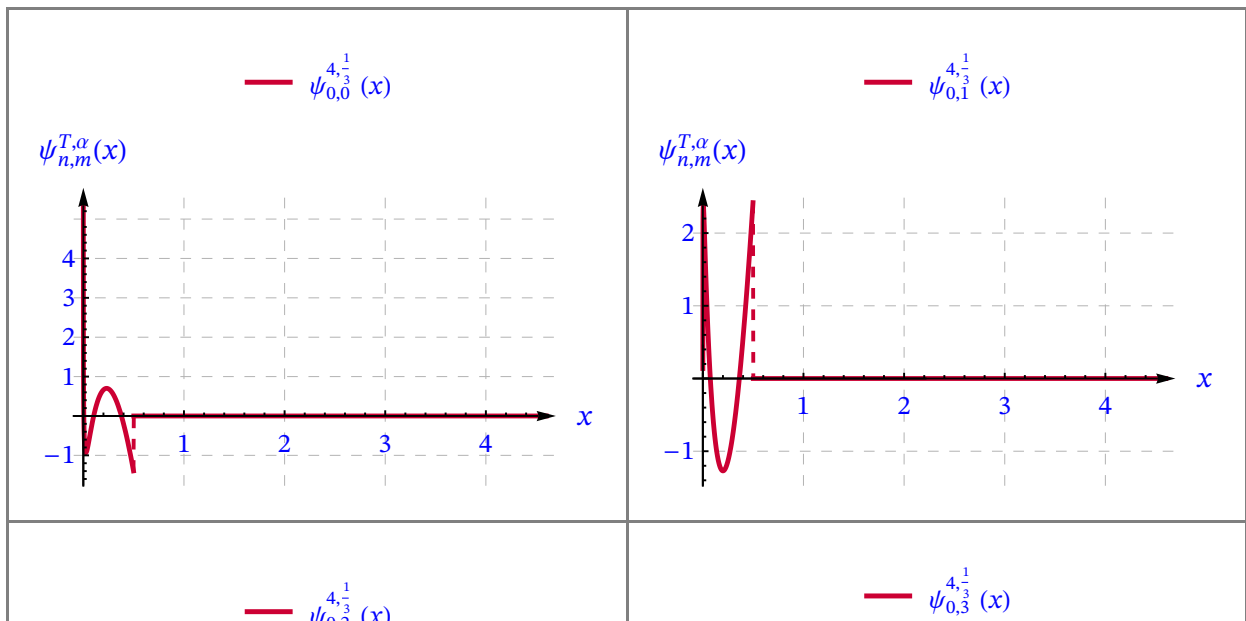
Out[*]=

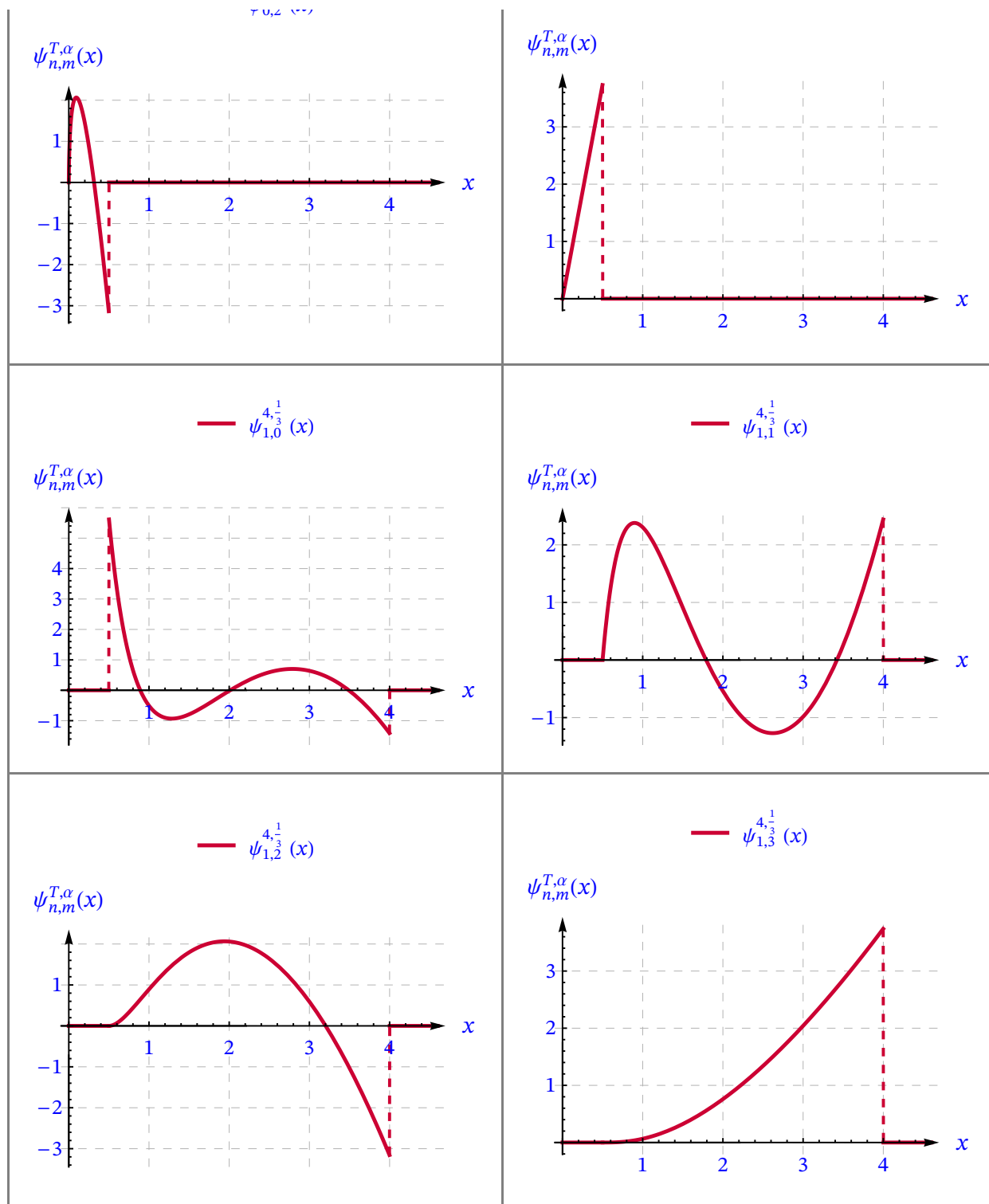




(b)

Out[*]=





Observaciones 2.1.4.

- (i) El número de *Wavelets* de *Chelyshkov generalizadas* fraccionarias de orden α , $\psi_{nm}^{T,\alpha}(x)$, viene determinado por los valores de los parámetros k y M , siendo su valor $m^* = 2^k (M + 1)$.
- (ii) El número de subintervalos $\frac{x}{T} \in \left[\left(\frac{n}{2^k} \right)^{\frac{1}{\alpha}}, \left(\frac{n+1}{2^k} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right)$ en que se divide el intervalo de estudio $[A, B] = [0, T]$ viene indicado por el parámetro k siendo su valor igual a 2^k .
- (iii) Cuando el orden de las funciones *Wavelets* de *Chelyshkov generalizadas* fraccionarias es $\alpha = 1$ el ancho de cada subintervalos h es igual cada uno de ellos, mientras que si el orden $\alpha \neq 1$ los subintervalos tiene un ancho h desigual.

Con el fin de generalizar el concepto de *Wavelets* de Chelyshkov, que están definidas en el intervalo $[0, 1]$, se establece una definición generalizada para las funciones *Wavelets* de Chelyshkov definidas en el intervalo genérico $[0, T]$, que se denotan por $\psi_{nm}^T(x)$ [[RAHI17b](#)].

• **Definición 2.1.3. Wavelets de Chelyshkov Definidas en $[0, T]$.**

Se definen las *Wavelets de Chelyshkov generalizadas* en el intervalo $[0, T]$, y se denotan por $\psi_{nm}^T(x) = \psi^T(k, n, m, x, T)$ como una función con cinco argumentos:

- $n = 0, 1, \dots, 2^k - 1$, siendo k un entero positivo,
- m es el orden del polinomio de *Chelyshkov* y
- x es la variable normalizada.
- T es el ancho del intervalo $[0, T]$.

Las *Wavelets de Chelyshkov generalizada* $\psi_{nm}^T(x) = \psi^T(k, n, m, x, T)$ se definen en el intervalo $[0, T)$ mediante la expresión:

$$\psi_{nm}^T(x) = \begin{cases} \sqrt{2m+1} 2^{\frac{k}{2}} C_{M,m}\left(\frac{x}{T}\right) \left(2^k \left(\frac{x}{T}\right) - n\right) & \left(\frac{x}{T}\right) \in \left[\frac{n}{2^k}, \frac{n+1}{2^k}\right) \\ 0 & \text{Resto} \end{cases} \quad (2.1.19)$$

$$\begin{cases} n = 0, 1, \dots, 2^k - 1 & k = 0, 1, 2, \dots \\ m = 0, 1, \dots, M & \text{(grado del polinomio de Chelyshkov)} \end{cases}$$

$C_{M,m}(x) \equiv$ polinomios de Chelyshkov de grado M .

donde

$$C_{M,n}(x) = \sum_{k=0}^{M-n} \underbrace{(-1)^k \binom{M-n}{k} \binom{M+n+k+1}{M-n}}_{a_{kn}} x^{n+k} \quad n = 0, 1, \dots, M \quad (2.1.20)$$

■ Ejemplo 2.1.9. Wavelets de Chelyshkov en $[0, T]$.

(i) Calcúlense las expresiones analíticas de las *Wavelets* de Chelyshkov $\psi_{nm}^T(x)$, definidas en el intervalo $[0, T] = [0, 10]$ para los valores dados de k y M .

(ii) Representéntense las gráficas de las *Wavelets* de Chelyshkov $\psi_{nm}(x)$.

(a) $k = 0 \quad M = 2$.

(b) $k = 1 \quad M = 2$.

(c) $k = 2 \quad M = 2$.

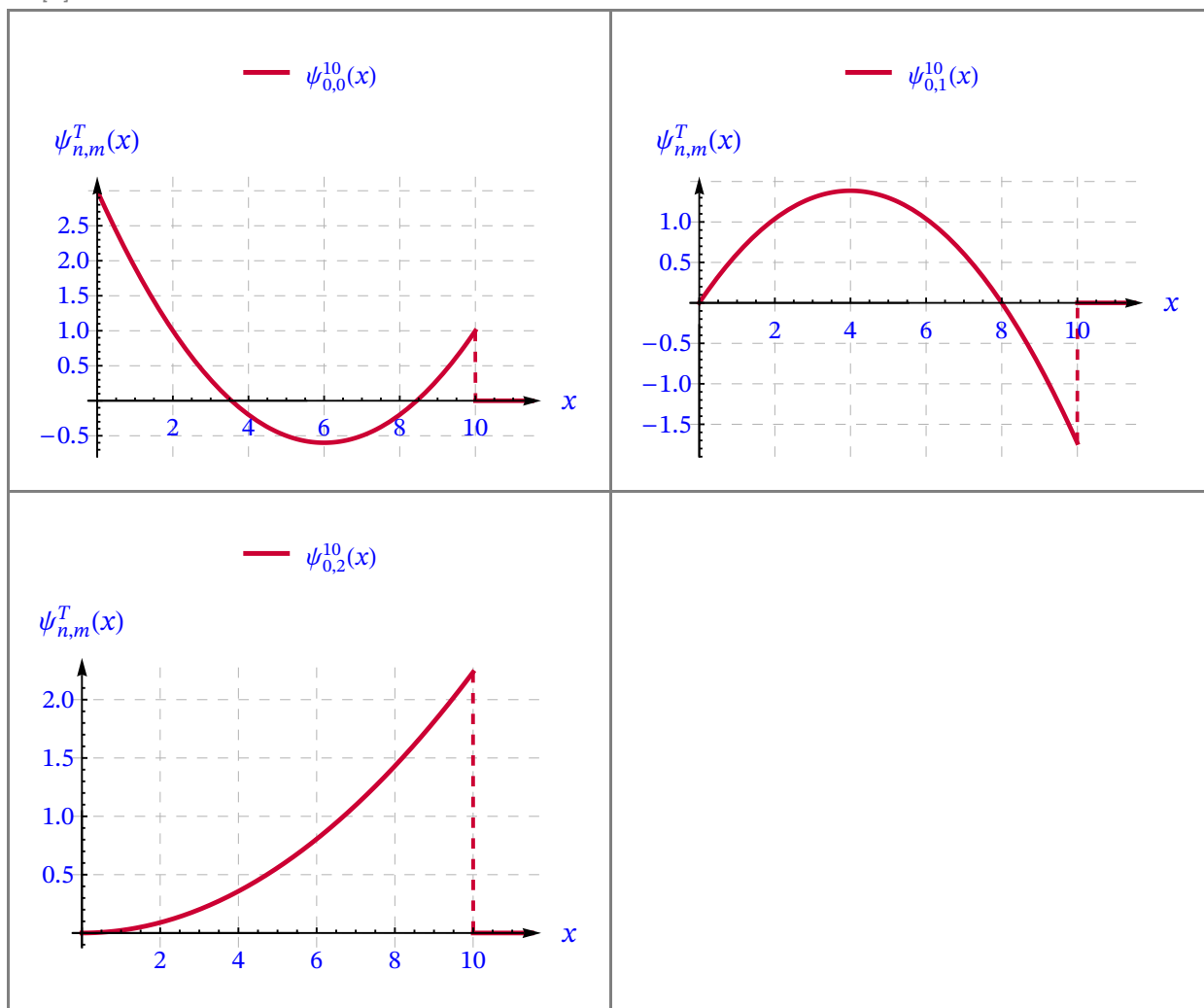
(d) $k = 3 \quad M = 2$.

Indicación: Cambio de intervalo $x \in [0, 1] \implies \frac{x}{T} = \frac{x}{10} \in [0, 10]$.

SOLUCIÓN

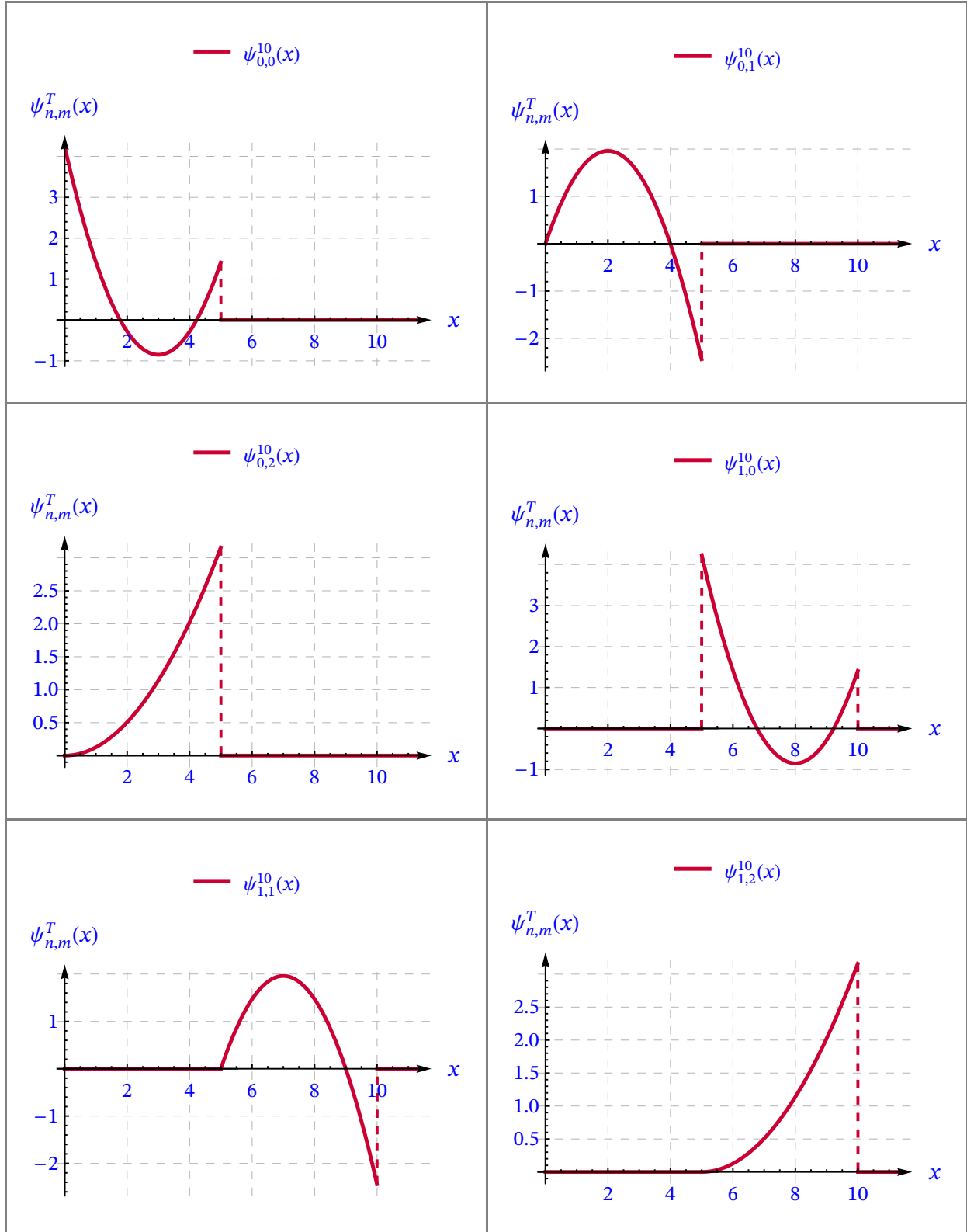
(a)

Out[•]=



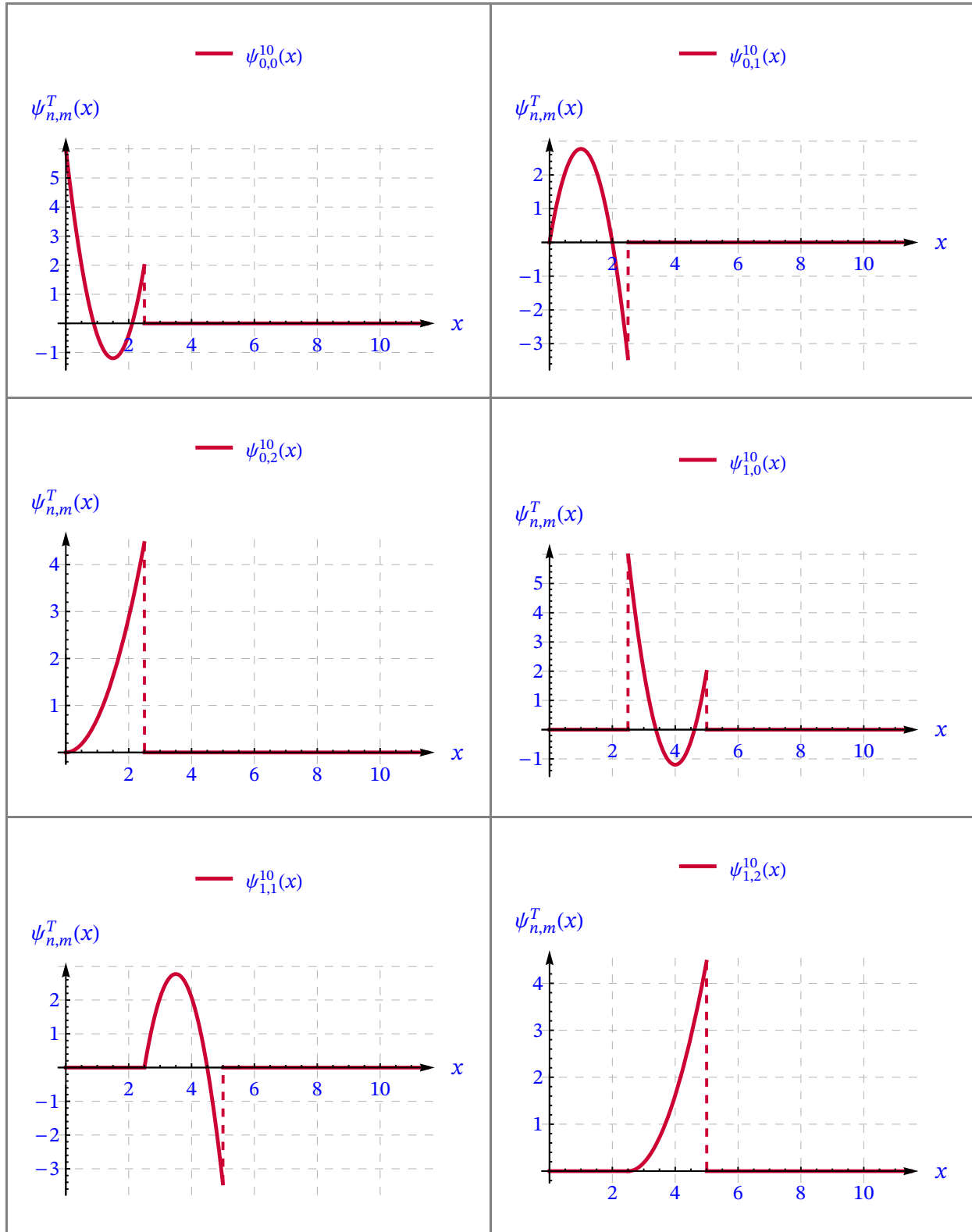
(b)

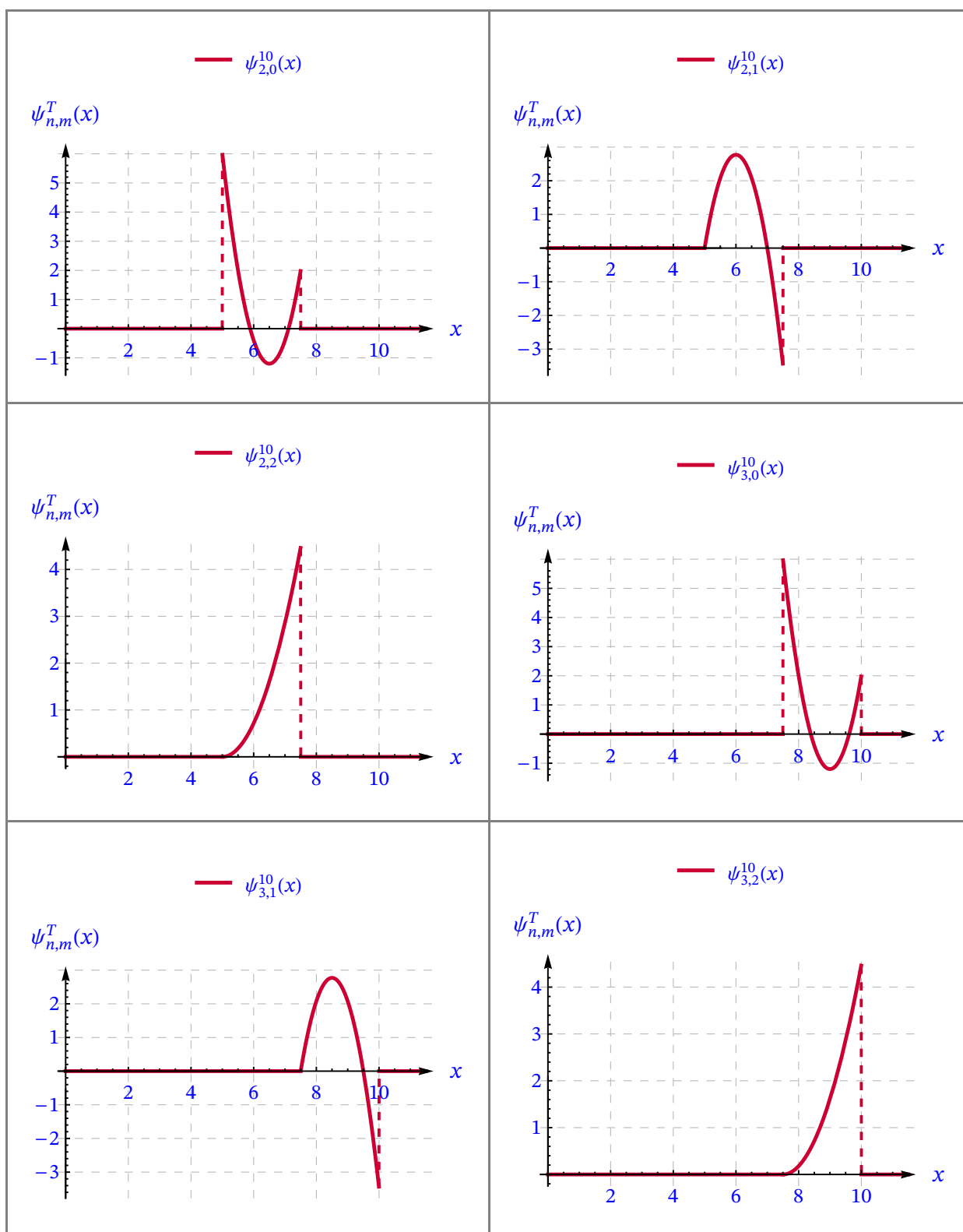
Out[*]=



(c)

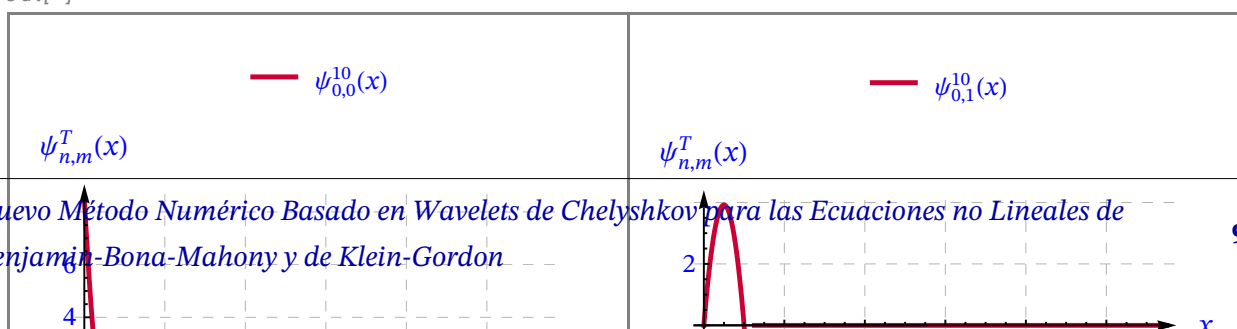
Out[*]=

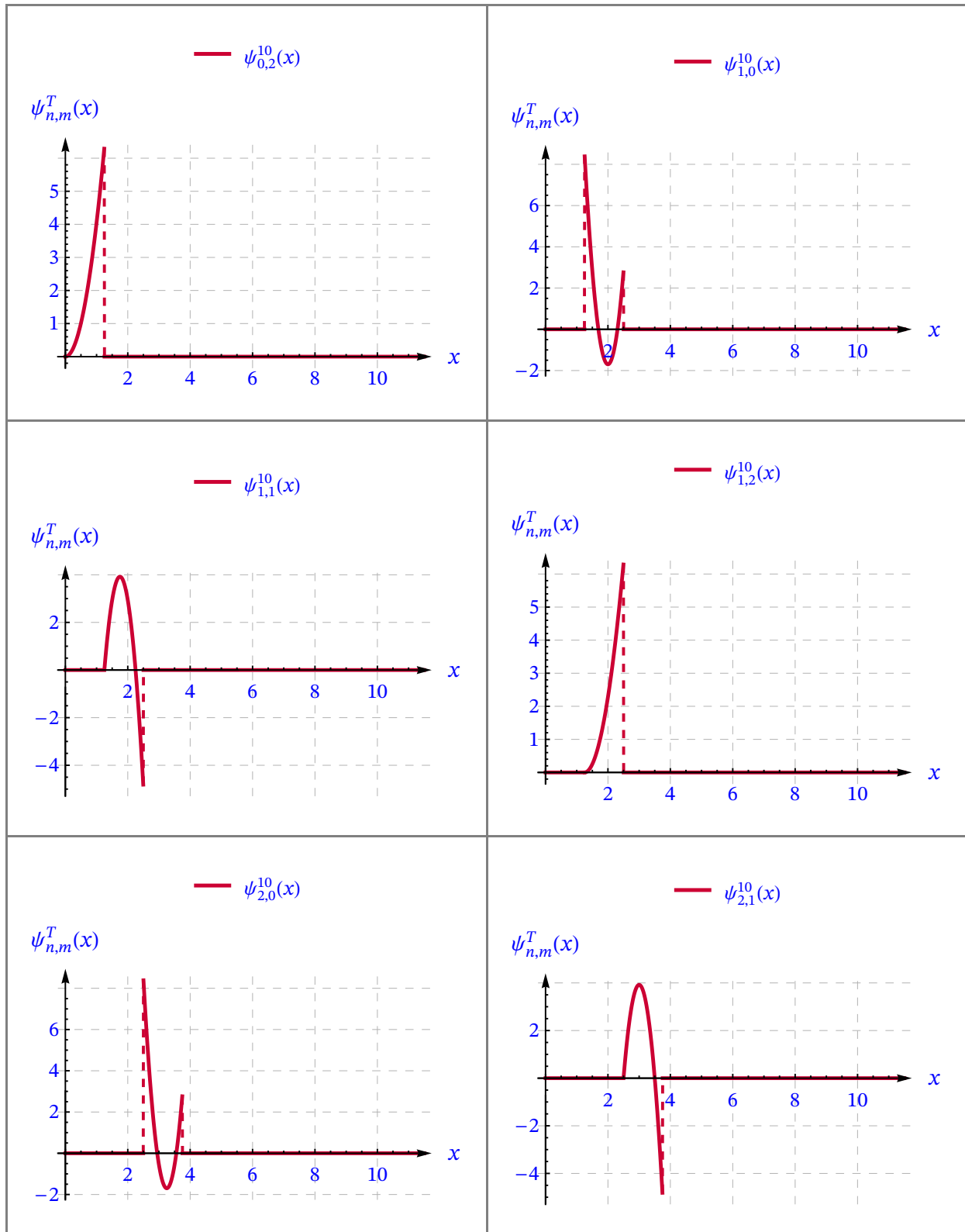


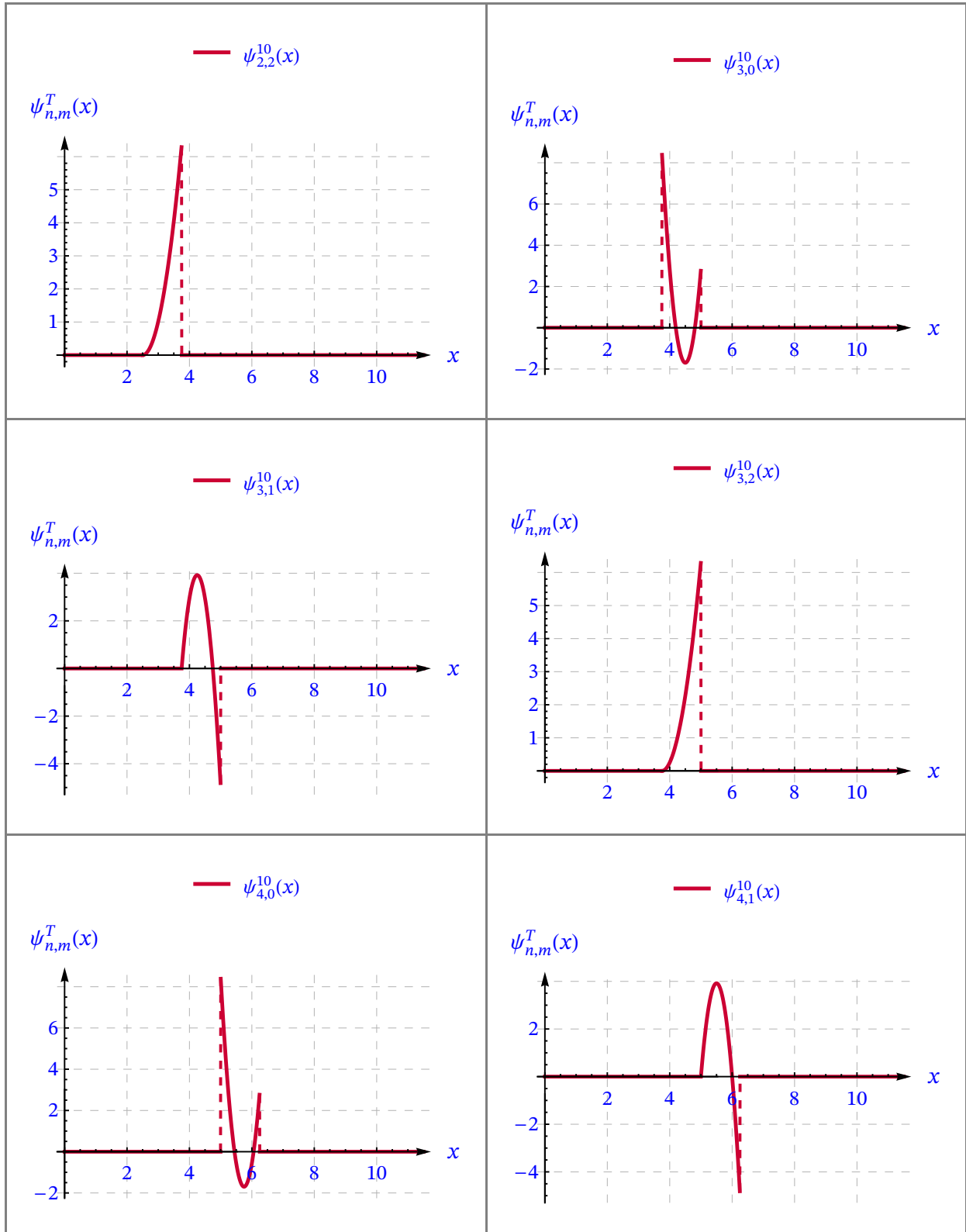


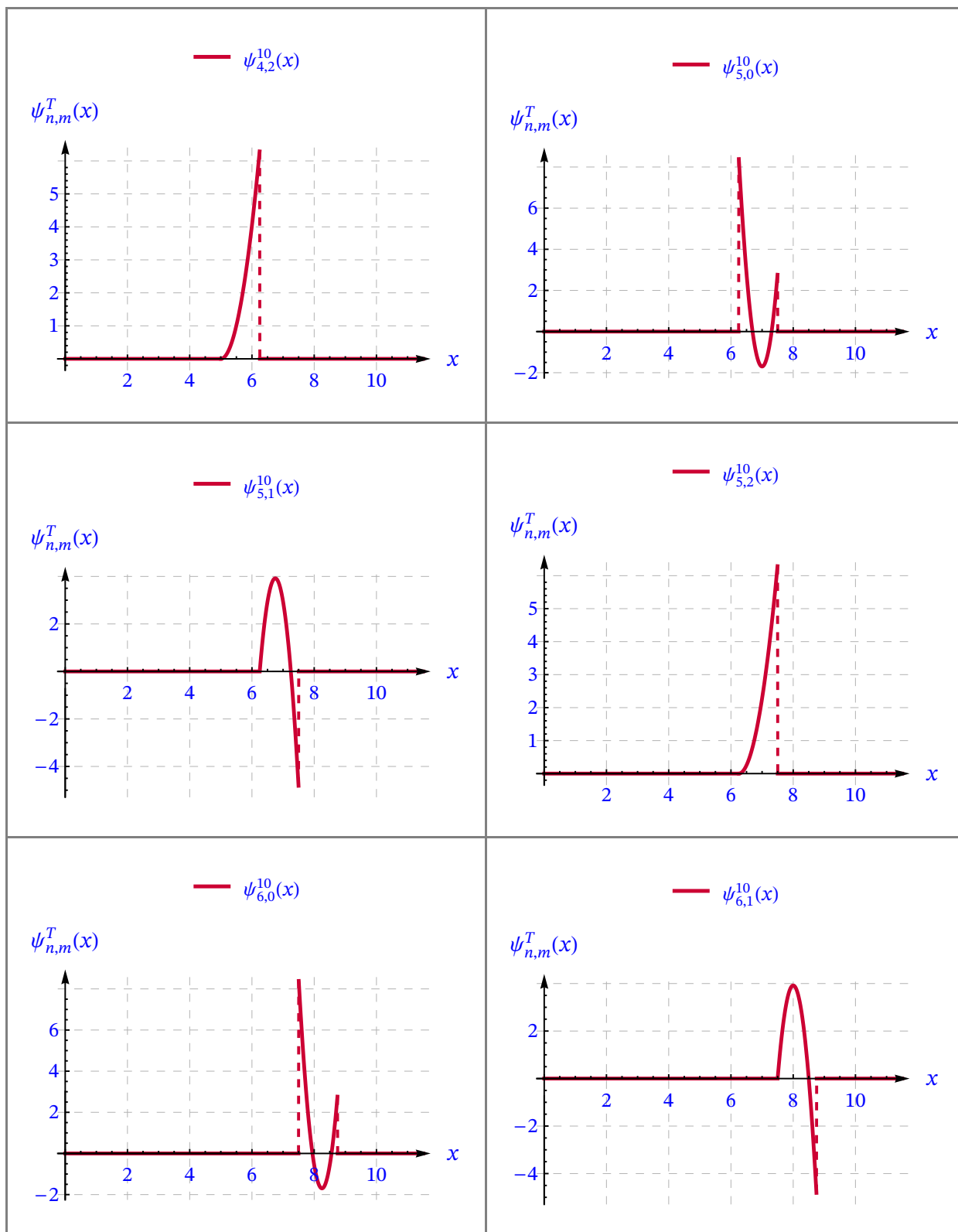
(d)

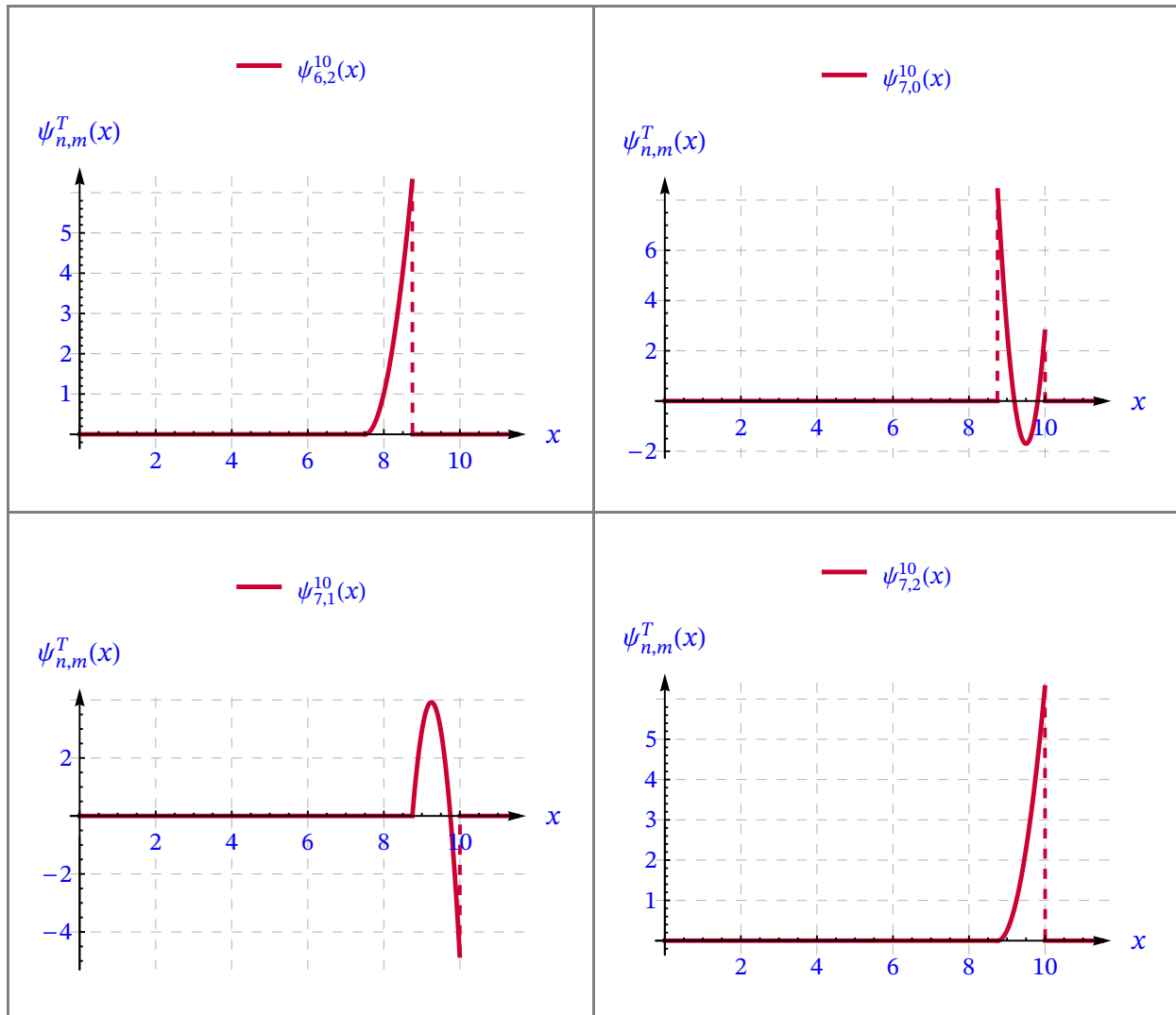
Out[]=











2.1.4. Aproximación de Funciones por Wavelets de Chelyshkov de Orden Fraccionario

La aplicación principal de las *Wavelets* fraccionarias de Chelyshkov en métodos numéricos consiste en aproximar funciones en espacios L^2 mediante expansiones en serie respecto a dicha base. La formulación se apoya en la ortogonalidad ponderada y conduce, tras truncación, a representaciones matriciales muy convenientes para construir esquemas de colocación y reducir ecuaciones diferenciales (fraccionarias) a sistemas algebraicos.

Funciones de una variable

Sea $Z(x) \in L^2([0, \eta'])$ puede expandirse en términos de las *Wavelets* fraccionarias de Chelyshkov mediante una serie doble indexada por el nivel de resolución y el orden polinomial. En su forma truncada, la aproximación se escribe como

$$Z(x) \simeq \sum d_{M,N} \psi_{M,N,N_b}^{(n,\eta')}(x), \quad (2.1.21)$$

y se expresa de manera compacta en forma vectorial como

$$Z(x) \simeq \Delta^T \Lambda^{(n,\eta')}(x), \quad (2.1.22)$$

donde Δ recoge los coeficientes $d_{M,N}$ y $\Lambda^{(n,\eta')}(x)$ agrupa las *wavelets* en x .

Los coeficientes se obtienen mediante el producto interno ponderado asociado al peso fraccionario, esto es

$$d_{M,N} = \int_0^{\eta'} \psi_{M,N,N_b}^{(n,\eta')}(x) Z(x) W^{(n)}(x) dx, \quad (2.1.23)$$

lo que refleja que la expansión es una proyección en un espacio de Hilbert con producto interno modificado por el peso.

En una notación equivalente, puede considerarse directamente una serie en $[0, h)$ y escribir la truncación como

$$U(x) \simeq C^T \vartheta^{(\lambda,h)}(x), \quad (2.1.24)$$

donde C es el vector de coeficientes y $\vartheta^{(\lambda,h)}(x)$ es el vector de *Wavelets* fraccionarias. En este caso, los coeficientes también se calculan por producto interno con peso $\omega^{(\lambda)}(x) = x^{\lambda-1}$.

Esta representación truncada es la que se utiliza de forma efectiva en implementación numérica. El número total de funciones de la base depende del nivel de resolución y del orden máximo considerado, y su estructura por tramos conduce a matrices dispersas cuando

se evalúa en puntos de colocación, lo que resulta ventajoso computacionalmente.

Funciones de dos variables

Cuando se consideran funciones $Z(x, t)$ definidas en un dominio producto, el desarrollo se realiza mediante productos tensoriales de las bases unidimensionales. Para $Z(x, t) \in L^2([0, \eta'] \times [0, \eta'])$, una aproximación natural es

$$Z(x, t) \simeq \sum d'_{M,N,M',N'} \psi_{M,N,N_b}^{(n,\eta')}(x) \psi_{M',N',N'_b}^{(n,\eta')}(t), \quad (2.1.25)$$

que, en forma matricial, se puede escribir como

$$Z(x, t) \simeq (\Lambda^{(n,\eta')}(x))^T \Omega \Lambda^{(n,\eta')}(t), \quad (2.1.26)$$

donde Ω es una matriz de coeficientes que recoge la información de la expansión bidimensional.

Los coeficientes bidimensionales se calculan, de nuevo, mediante un producto interno ponderado doble,

$$d'_{M,N,M',N'} = \int_0^{\eta'} \int_0^{\eta'} Z(x, t) \psi_{M,N,N_b}^{(n,\eta')}(x) \psi_{M',N',N'_b}^{(n,\eta')}(t) W^{(n)}(x) W^{(n)}(t) dx dt. \quad (2.1.27)$$

En la formulación alternativa sobre $[0, h) \times [0, h)$, la misma idea se expresa como una truncación de una serie cuádruple y se compacta en la forma

$$U(x, t) \simeq \vartheta^{(\lambda,h)}(x)^T A \vartheta^{(\lambda',h)}(t), \quad (2.1.28)$$

donde A es la matriz de coeficientes.

Desde el punto de vista teórico, estas expansiones convergen en el sentido natural de L^2 al aumentar el nivel de resolución y el orden de truncación. En particular, se establece la convergencia de las series truncadas tanto en el caso unidimensional como en el bidimensional cuando los parámetros de resolución tienden a infinito, utilizando argumentos estándar de sucesiones de Cauchy en espacios de Hilbert y propiedades como la desigualdad de Bessel.

La importancia práctica de estas aproximaciones reside en que permiten representar incógnitas y términos auxiliares de un modelo fraccionario mediante un número finito de coeficientes. En consecuencia, una vez se dispone de expresiones matriciales para operadores como la integral fraccionaria de *Riemann–Liouville* actuando sobre la base, el problema continuo puede transformarse en un sistema algebraico que se resuelve numéricamente con técnicas estándar.

Se establece en el siguiente Teorema la expansión de una función $f(x) \in L^2([0, T])$ en términos de una base ortonormal de *Wavelets* de Chelyshkov Fraccionarias ([NGO22], [ERMA23]).

2.1.4.1. Expansión de una Función en Wavelets de Chelyshkov Fraccionarias

▼ Teorema 2.1.3.

Sea la función $f = f(x)$ cuadrado integrable en $x \in [0, T]$, $f(x) \in L^2([0, T])$ donde

$$L^2([0, T]) := \{f \mid f \text{ en } [0, T], \text{ y } \int_0^T f(x)^2 dx < \infty\}$$

y sea la base de las *Wavelets* de Chelyshkov generalizadas fraccionarias:

$$\Psi(x) = \{\psi_{n,m}^{T,\alpha}(x)\} \subset L^2([0, T]) \quad n = 0, 1, 2, \dots, 2^k - 1 \text{ y } m = 0, 1, \dots, M.$$

La función $f(x)$ se puede expandir o desarrollar en serie con las funciones *Wavelets* de Chelyshkov fraccionarias de la forma siguiente:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} c_{nm} \psi_{n,m}^{T,\alpha}(x) \quad x \in [0, T] \quad (2.1.29)$$

donde una aproximación viene dada mediante la truncación de la serie:

$$f(x) \simeq f_{M,k}^{T,\alpha} = \sum_{n=0}^{2^k-1} \sum_{m=0}^M c_{nm} \psi_{n,m}^{T,\alpha}(x) = C \cdot \Psi_{n,m}^{T,\alpha}(x) \quad x \in [0, T] \quad (2.1.30)$$

$$c_{nm} = \langle f(x), \psi_{n,m}^{T,\alpha}(x) \rangle$$

donde $c_{nm} = \langle f(x), \psi_{n,m}^{T,\alpha}(x) \rangle$ son los *coeficientes Wavelet de Chelyshkov fraccionarias* y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto interno. Los *coeficientes Wavelet de Chebyshev fraccionarias* tienen la expresión:

$$c_{nm} = \langle f(x), \psi_{n,m}^{T,\alpha}(x) \rangle = \int_0^T f(x) \psi_{n,m}^{T,\alpha} w^\alpha(x) dx \quad (2.1.31)$$

$$C = \langle f(x), \Psi_{n,m}^{T,\alpha}(x) \rangle = \int_0^T f(x) [\Psi_{n,m}^{T,\alpha}(x)]^T w^\alpha(x) dx$$

con la función peso

$$w^\alpha(x) = \alpha \frac{x^{\alpha-1}}{T^\alpha} \quad x \in [0, T].$$

El desarrollo en serie de las funciones *Wavelets* de Chelyshkov generalizadas fraccionarias de la función $f(x)$ se puede expresar

$$f(x) \simeq f_{M,k}^{T,\alpha} = \sum_{n=0}^{2^k-1} \sum_{m=0}^M c_{nm} \psi_{n,m}^{T,\alpha}(x) = C^T \cdot \Psi^{T,\alpha}(x) \quad (2.1.32)$$

donde C y $\Psi(x)$ son matrices de dimensión $2^k(M+1) \times 1$ (vectores columna de $\hat{m} = 2^k(M+1)$ dadas por los vectores columna:

$$C = \begin{pmatrix} c_{0,0} \\ c_{0,1} \\ \vdots \\ c_{0,M} \\ c_{1,0} \\ c_{1,1} \\ \vdots \\ c_{1,M} \\ \dots \\ c_{2^k-1,0} \\ c_{2^k-1,1} \\ \vdots \\ c_{2^k-1,M} \end{pmatrix} \quad \Psi^{T,\alpha}(x) = \begin{pmatrix} \psi_{0,0}^{T,\alpha}(x) \\ \psi_{0,1}^{T,\alpha}(x) \\ \vdots \\ \psi_{0,M}^{T,\alpha}(x) \\ \psi_{1,0}^{T,\alpha}(x) \\ \psi_{1,1}^{T,\alpha}(x) \\ \vdots \\ \psi_{1,M}^{T,\alpha}(x) \\ \dots \\ \psi_{2^k-1,0}^{T,\alpha}(x) \\ \psi_{2^k-1,1}^{T,\alpha}(x) \\ \vdots \\ \psi_{2^k-1,M}^{T,\alpha}(x) \end{pmatrix} \quad \begin{cases} n = 0, 1, \dots, 2^k - 1 \\ m = 0, 1, \dots, M \end{cases}$$

El desarrollo en serie con las funciones *Wavelets* de Chelyshkov generalizadas fraccionarias también se puede escribir:

$$f(x) \simeq f_{M,k}^{T,\alpha} = \sum_{i=1}^{m^*} c_i \psi_i^{T,\alpha}(x) = C^T \cdot \Psi^{T,\alpha}(x) \quad (2.1.33)$$

donde

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{m^*} \end{pmatrix} \quad \Psi^{T,\alpha}(x) = \begin{pmatrix} \psi_1^{T,\alpha}(x) \\ \psi_2^{T,\alpha}(x) \\ \vdots \\ \psi_{m^*}^{T,\alpha}(x) \end{pmatrix} \quad (2.1.34)$$

$$\begin{cases} c_i = c_{nm} \\ \psi_i^{T,\alpha}(x) = \psi_{n,m}^{T,\alpha}(x) \end{cases} \quad i = n(M+1) + (m+1).$$

$$m^*(\text{n}^\circ \text{ elementos}) = 2^k(M+1)$$

donde $C^T = (c_1 \ c_2 \ \dots \ c_{m^*})$ es el vector de coeficientes *Wavelets* de Chelyshkov.

2.1.5. Ejemplos

■ Ejemplo 2.1.10. Desarrollo en Serie de Wavelets de Chelyshkov Fraccionarias.

Sea la función definida en el intervalo $[A, B] = [0, 1]$:

(a) $f(x) = e^{-x} \sin(2\pi x)$.

(i) Determinéense la base ortonormal de Wavelets de Chelyshkov fraccionarias

$$\mathcal{B} = \{\psi_{n,m}^{T,\alpha}(x)\} \begin{cases} n = 0, 1, \dots, 2^k - 1 \\ m = 0, 1, \dots, M \end{cases} \quad k = 3 \quad M = 3 \quad \alpha = 0.5$$

(ii) Represéntense las gráficas de las Wavelets de Chelyshkov fraccionarias.

(b) (i) Hállese la función $\tilde{f}(x) = f_{M,k}^{T,\alpha}$ que aproxima a $f(x)$ mediante el desarrollo en serie de Wavelets de Chelyshkov fraccionarias.

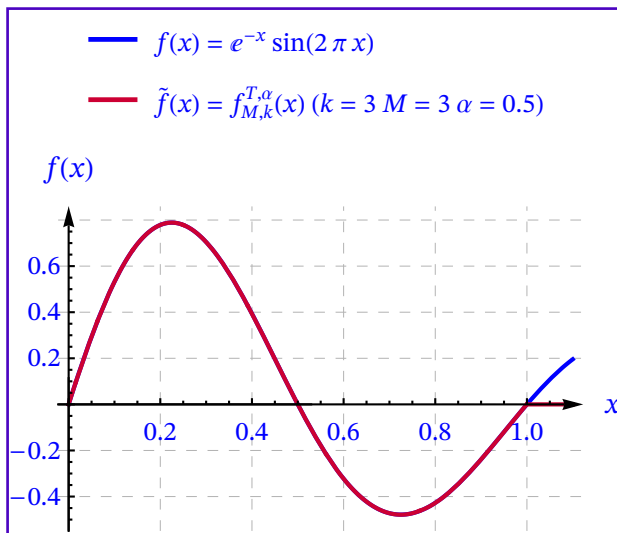
(ii) Represéntense los coeficientes Wavelets, la función $f(x)$ y su aproximación $\tilde{f}(x)$.

(iii) Créese una tabla con los valores de x , $f(x)$, $\tilde{f}(x)$ y el error absoluto $|f(x) - \tilde{f}(x)|$ cometido en cada punto para $x \in [0, 1]$.

(iii) Créese una tabla de valores en el intervalo $x \in [0, 1]$, con los valores de x , $\tilde{f}(x)$, $f(x)$ y el error absoluto $|\tilde{f}(x) - f(x)|$ cometido en cada punto:

$$x_j, f(x_j) \text{ (CWM)}, f(x_j), |f(x_j) \text{ (CWM)} - f(x_j)|.$$

(iv) Hállense los errores L_∞ , L_2 y el error RMS.



SOLUCIÓN

(a)

Wavelets de Chelyshkov fraccionarias $\psi_{nm}^{T,\alpha}(x)$

$$\left(\begin{array}{ll} [A, B] = & [0, 1] \\ T = & 1 \\ \alpha = & 0.5 \\ k = & 3 \\ M = & 3 \\ n = 0, \dots, 2^k - 1 = & \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \\ m = 0, \dots, M = & \{0, 1, 2, 3\} \end{array} \right)$$

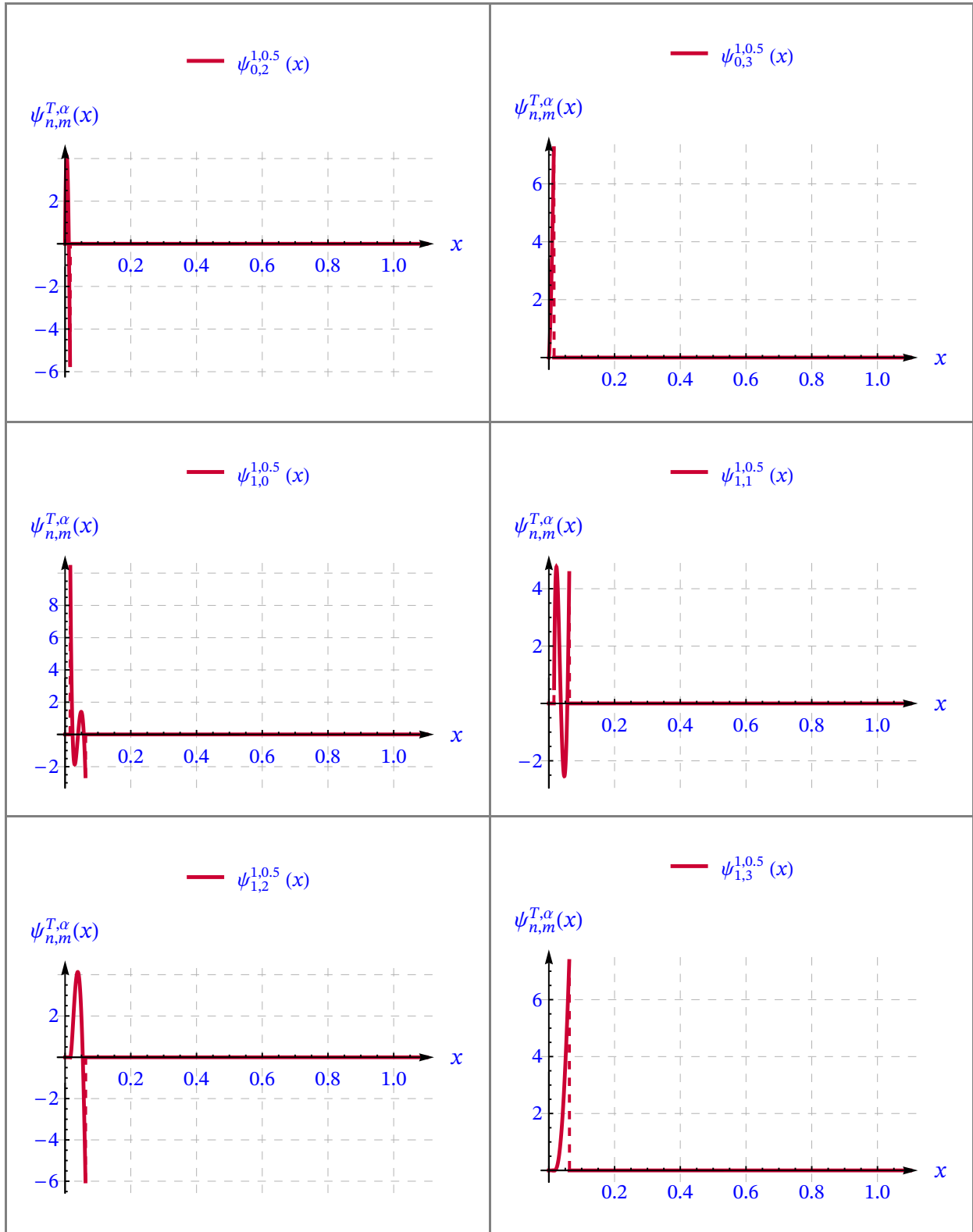
(a) Definición de las Wavelets de Chelyshkov fraccionarias $\psi_{nm}^{T,\alpha}(x)$

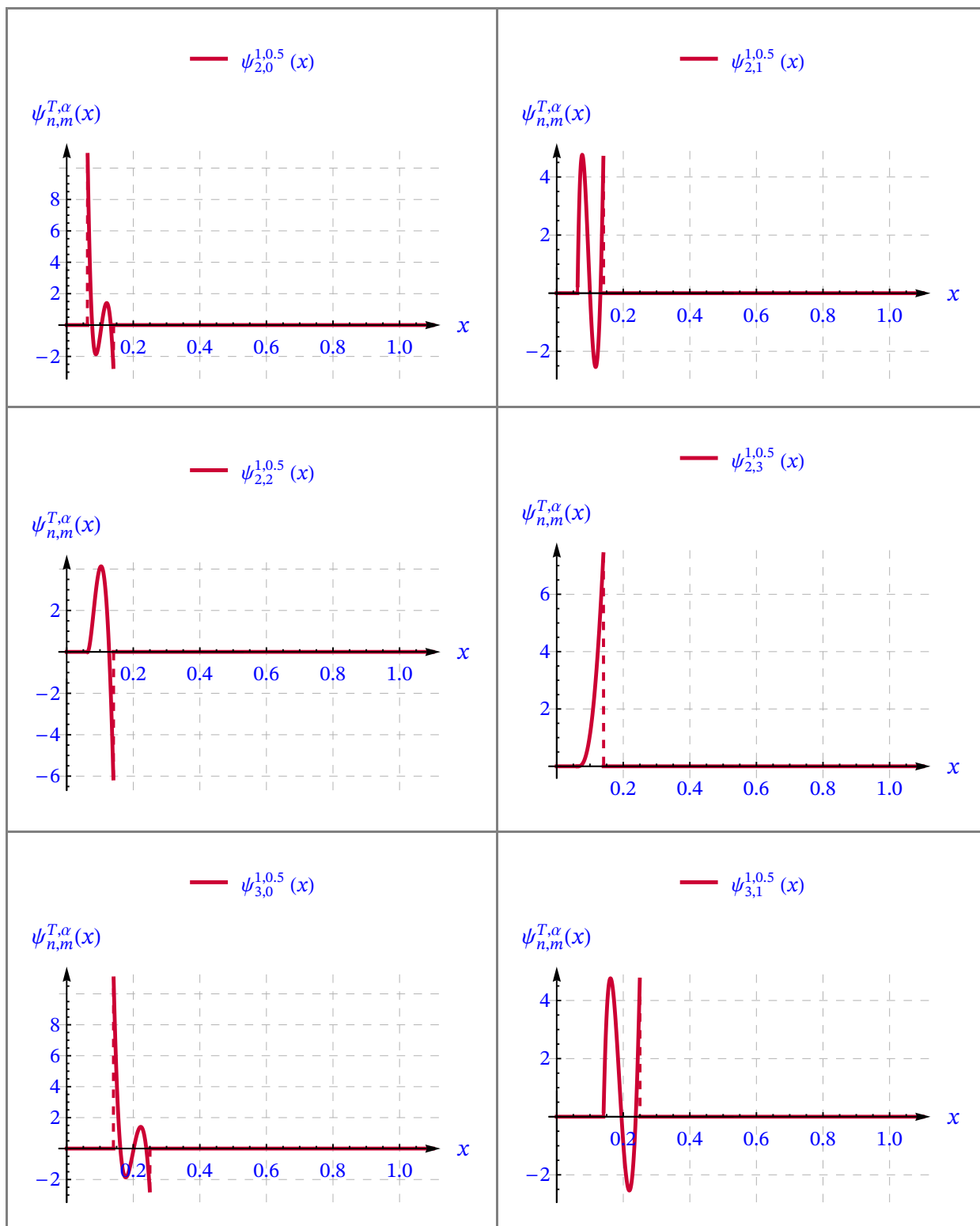
$$\psi_{nm}^{T,\alpha}(x) = \begin{cases} \sqrt{2m+1} \ 2^{\frac{k}{2}} C_{M,m} \left(2^k \left(\frac{x}{T} \right)^\alpha - n \right) & \left(\frac{x}{T} \right) \in \left[\left(\frac{n}{2^k} \right)^\frac{1}{\alpha}, \left(\frac{n+1}{2^k} \right)^\frac{1}{\alpha} \right) \\ 0 & \text{Resto} \end{cases}$$

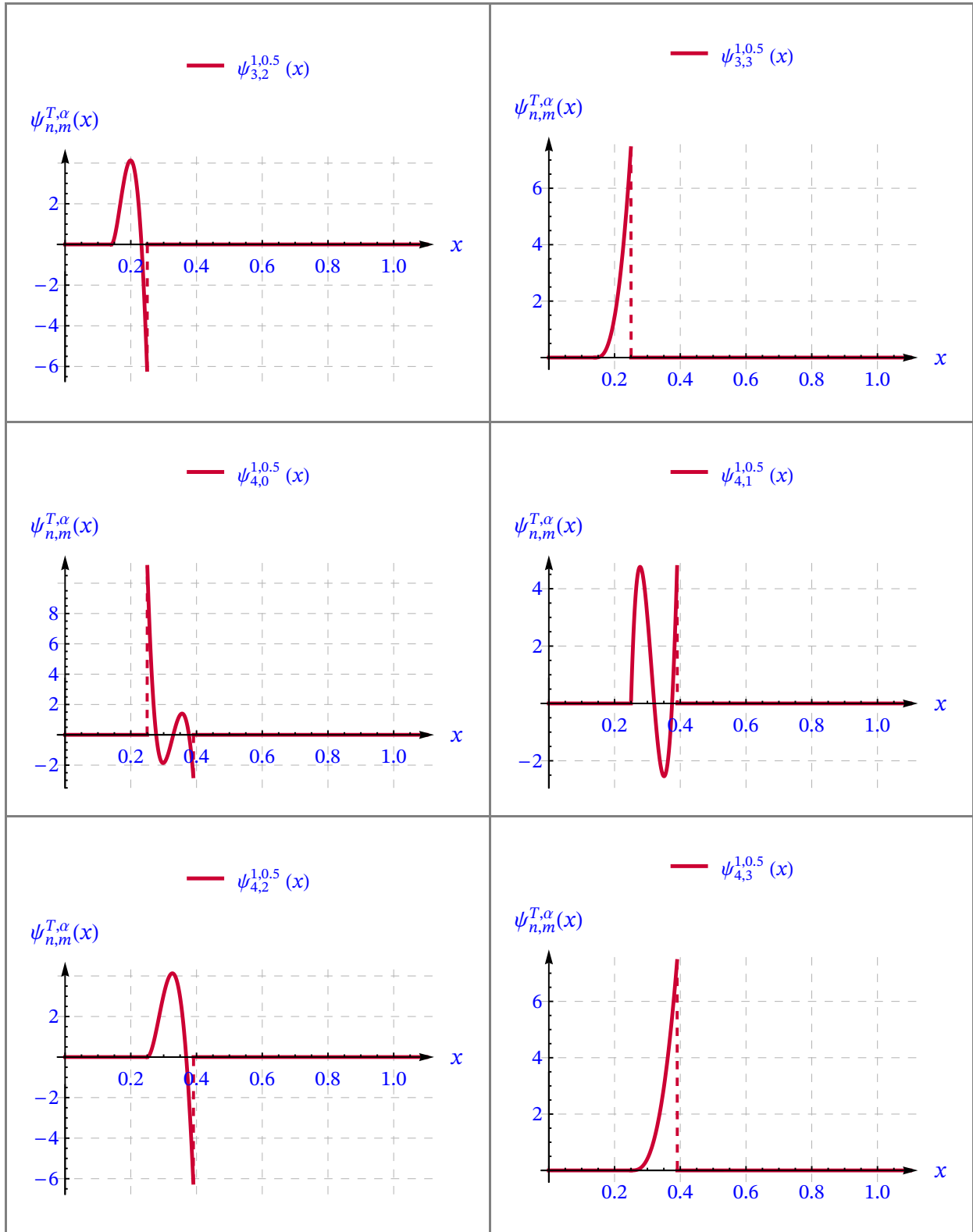
$$\begin{cases} n = 0, 1, \dots, 2^k - 1 & k = 1, 2, \dots \\ m = 0, 1, \dots, M & \text{grado del polinomio} \end{cases}$$

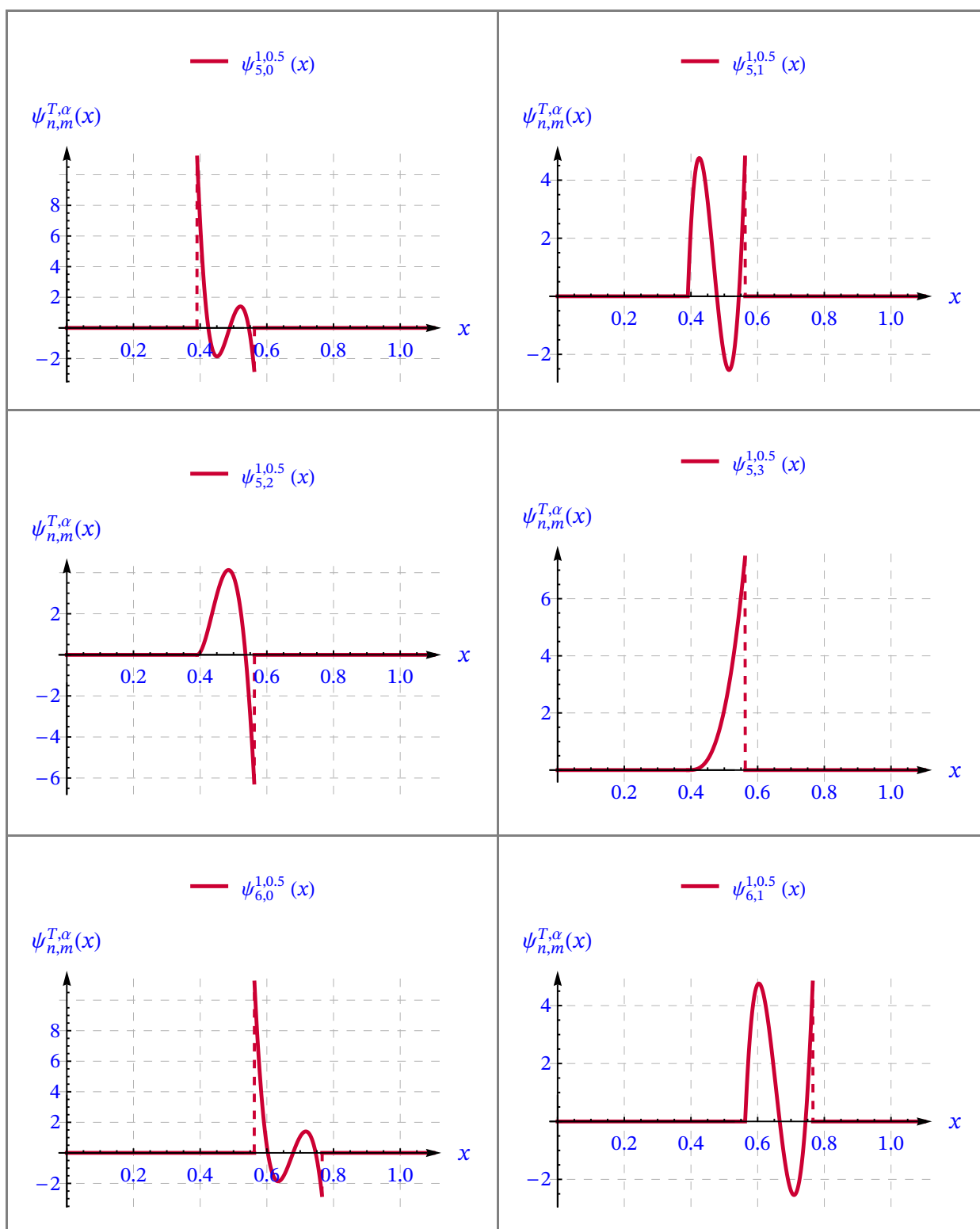
$C_{M,m}(x) \equiv$ polinomios de Chelyshkov de grado m

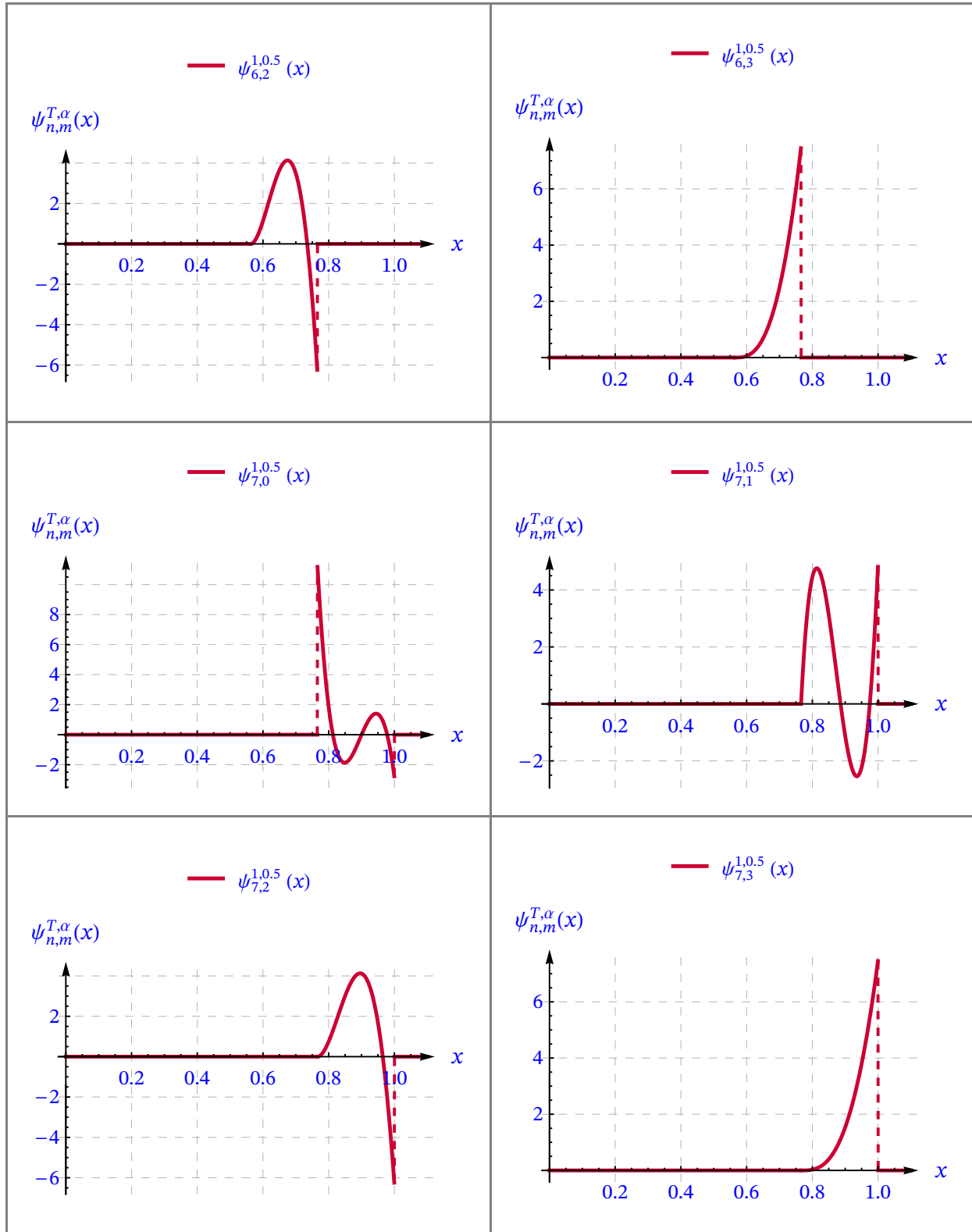
$$\begin{aligned}
 \psi_{0,0}^{1,0.5}(x) & \begin{cases} -8\sqrt{2}(4480x^{1.5} - 960x^1 + 60x^{0.5} - 1) & 0 \leq x < 0.015625 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\
 \psi_{0,1}^{1,0.5}(x) & \begin{cases} 32\sqrt{6}(672x^{1.5} - 120x^1 + 5x^{0.5}) & 0 \leq x < 0.015625 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\
 \psi_{0,2}^{1,0.5}(x) & \begin{cases} 256\sqrt{10}(3x^1 - 28x^{1.5}) & 0 \leq x < 0.015625 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\
 \psi_{0,3}^{1,0.5}(x) & \begin{cases} 1024\sqrt{14}x^{1.5} & 0 \leq x < 0.015625 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\
 \psi_{1,0}^{1,0.5}(x) & \begin{cases} -2\sqrt{2}(17920x^{1.5} - 10560x^1 + 2040x^{0.5} - 129) & 0.015625 \leq x < 0.0625 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\
 \psi_{1,1}^{1,0.5}(x) & \begin{cases} 2\sqrt{6}(10752x^{1.5} - 5952x^1 + 1064x^{0.5} - 61) & 0.015625 \leq x < 0.0625 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\
 \psi_{1,2}^{1,0.5}(x) & \begin{cases} -2\sqrt{10}(1 - 8x^{0.5})^2(56x^{0.5} - 13) & 0.015625 \leq x < 0.0625 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\
 \psi_{1,3}^{1,0.5}(x) & \begin{cases} 2\sqrt{14}(8x^{0.5} - 1)^3 & 0.015625 \leq x < 0.0625 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\
 \psi_{2,0}^{1,0.5}(x) & \begin{cases} -16\sqrt{2}(2240x^{1.5} - 2160x^1 + 690x^{0.5} - 73) & 0.0625 \leq x < 0.140625 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\
 \psi_{2,1}^{1,0.5}(x) & \begin{cases} 8\sqrt{6}(2688x^{1.5} - 2496x^1 + 764x^{0.5} - 77) & 0.0625 \leq x < 0.140625 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\
 \psi_{2,2}^{1,0.5}(x) & \begin{cases} -32\sqrt{10}(1 - 4x^{0.5})^2(14x^{0.5} - 5) & 0.0625 \leq x < 0.140625 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\
 \psi_{2,3}^{1,0.5}(x) & \begin{cases} 2\sqrt{14}(8x^{0.5} - 2)^3 & 0.0625 \leq x < 0.140625 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\
 \psi_{3,0}^{1,0.5}(x) & \begin{cases} -2\sqrt{2}(17920x^{1.5} - 24000x^1 + 10680x^{0.5} - 1579) & 0.140625 \leq x < 0.25 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\
 \psi_{3,1}^{1,0.5}(x) & \begin{cases} 2\sqrt{6}(10752x^{1.5} - 14016x^1 + 6056x^{0.5} - 867) & 0.140625 \leq x < 0.25 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\
 \psi_{3,2}^{1,0.5}(x) & \begin{cases} -2\sqrt{10}(3 - 8x^{0.5})^2(56x^{0.5} - 27) & 0.140625 \leq x < 0.25 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\
 \psi_{3,3}^{1,0.5}(x) & \begin{cases} 2\sqrt{14}(8x^{0.5} - 3)^3 & 0.140625 \leq x < 0.25 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\
 \psi_{4,0}^{1,0.5}(x) & \begin{cases} -8\sqrt{2}(4480x^{1.5} - 7680x^1 + 4380x^{0.5} - 831) & 0.25 \leq x < 0.390625 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\
 \psi_{4,1}^{1,0.5}(x) & \begin{cases} 16\sqrt{6}(1344x^{1.5} - 2256x^1 + 1258x^{0.5} - 233) & 0.25 \leq x < 0.390625 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\
 \psi_{4,2}^{1,0.5}(x) & \begin{cases} -64\sqrt{10}(1 - 2x^{0.5})^2(28x^{0.5} - 17) & 0.25 \leq x < 0.390625 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\
 \psi_{4,3}^{1,0.5}(x) & \begin{cases} 2\sqrt{14}(8x^{0.5} - 4)^3 & 0.25 \leq x < 0.390625 \\ 0 & \text{True} \end{cases}
 \end{aligned}$$











(b)

Desarrollo en serie de Wavelets de Chelyshkov fraccionarias de la función

$$f(x) = e^{-x} \sin(2\pi x) \quad \text{en} \quad [A, B] = [0, T] = [0, 1]$$

$$f(x) \simeq \tilde{f}(x) = f_{M,k}^{T,\alpha}(x) = \sum_{n=0}^{2^k-1} \sum_{m=0}^M c_{nm} \psi_{nm}^{T,\alpha}(x) = C \cdot \Psi_{nm}^{T,\alpha}(x) \quad x \in [0, T]$$

$$C = \langle f(x), \Psi_{nm}^{T,\alpha}(x) \rangle \cdot D^{-1}$$

$$C = \int_0^T f(x) [\Psi_{nm}^{T,\alpha}(x)]^T w^\alpha(x) dx \cdot D^{-1} \quad D = \int_0^T \Psi_{nm}^{T,\alpha}(x) [\Psi_{nm}^{T,\alpha}(x)]^T w(x) dx$$

Wavelets de Chelyshkov fraccionarias $\psi_{nm}^{T,\alpha}(x)$

$$\left(\begin{array}{ll} [A, B] = & [0, 1] \\ T = & 1 \\ \alpha = & 0.5 \\ k = & 3 \\ M = & 3 \\ n = 0, \dots, 2^k-1 = & \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \\ m = 0, \dots, M = & \{0, 1, 2, 3\} \end{array} \right)$$

(a) Definición de las Wavelets de Chelyshkov fraccionarias $\psi_{nm}^{T,\alpha}(x)$

$$\psi_{nm}^{T,\alpha}(x) = \begin{cases} \sqrt{2m+1} \ 2^{\frac{k}{2}} C_{M,m} \left(2^k \left(\frac{x}{T} \right)^\alpha - n \right) & \left(\frac{x}{T} \right) \in \left[\left(\frac{n}{2^k} \right)^\frac{1}{\alpha}, \left(\frac{n+1}{2^k} \right)^\frac{1}{\alpha} \right) \\ 0 & \text{Resto} \end{cases}$$

$$\begin{cases} n = 0, 1, \dots, 2^k - 1 & k = 1, 2, \dots \\ m = 0, 1, \dots, M & \text{grado del polinomio} \end{cases}$$

$C_{M,m}(x) \equiv$ polinomios de Chelyshkov de grado m

$$\Psi_{nm}^{T,\alpha}(x) = \begin{cases} \psi_{0,0}^{1,0.5}(x) & \begin{cases} -8\sqrt{2}(4480x^{1.5} - 960x^1 + 60x^{0.5} - 1) & 0. \leq x < 0.015625 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{0,1}^{1,0.5}(x) & \begin{cases} 32\sqrt{6}(672x^{1.5} - 120x^1 + 5x^{0.5}) & 0. \leq x < 0.015625 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{0,2}^{1,0.5}(x) & \begin{cases} 256\sqrt{10}(3x^1 - 28x^{1.5}) & 0. \leq x < 0.015625 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{0,3}^{1,0.5}(x) & \begin{cases} 1024\sqrt{14}x^{1.5} & 0. \leq x < 0.015625 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{1,0}^{1,0.5}(x) & \begin{cases} -2\sqrt{2}(17920x^{1.5} - 10560x^1 + 2040x^{0.5} - 129) & 0.015625 \leq x < 0.0625 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{1,1}^{1,0.5}(x) & \begin{cases} 2\sqrt{6}(10752x^{1.5} - 5952x^1 + 1064x^{0.5} - 61) & 0.015625 \leq x < 0.0625 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{1,2}^{1,0.5}(x) & \begin{cases} -2\sqrt{10}(1 - 8x^{0.5})^2(56x^{0.5} - 13) & 0.015625 \leq x < 0.0625 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{1,3}^{1,0.5}(x) & \begin{cases} 2\sqrt{14}(8x^{0.5} - 1)^3 & 0.015625 \leq x < 0.0625 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{2,0}^{1,0.5}(x) & \begin{cases} -16\sqrt{2}(2240x^{1.5} - 2160x^1 + 690x^{0.5} - 73) & 0.0625 \leq x < 0.140625 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{2,1}^{1,0.5}(x) & \begin{cases} 8\sqrt{6}(2688x^{1.5} - 2496x^1 + 764x^{0.5} - 77) & 0.0625 \leq x < 0.140625 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{2,2}^{1,0.5}(x) & \begin{cases} -32\sqrt{10}(1 - 4x^{0.5})^2(14x^{0.5} - 5) & 0.0625 \leq x < 0.140625 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{2,3}^{1,0.5}(x) & \begin{cases} 2\sqrt{14}(8x^{0.5} - 2)^3 & 0.0625 \leq x < 0.140625 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{3,0}^{1,0.5}(x) & \begin{cases} -2\sqrt{2}(17920x^{1.5} - 24000x^1 + 10680x^{0.5} - 1579) & 0.140625 \leq x < 0.25 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{3,1}^{1,0.5}(x) & \begin{cases} 2\sqrt{6}(10752x^{1.5} - 14016x^1 + 6056x^{0.5} - 867) & 0.140625 \leq x < 0.25 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{3,2}^{1,0.5}(x) & \begin{cases} -2\sqrt{10}(3 - 8x^{0.5})^2(56x^{0.5} - 27) & 0.140625 \leq x < 0.25 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{3,3}^{1,0.5}(x) & \begin{cases} 2\sqrt{14}(8x^{0.5} - 3)^3 & 0.140625 \leq x < 0.25 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{4,0}^{1,0.5}(x) & \begin{cases} -8\sqrt{2}(4480x^{1.5} - 7680x^1 + 4380x^{0.5} - 831) & 0.25 \leq x < 0.390625 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{4,1}^{1,0.5}(x) & \begin{cases} 16\sqrt{6}(1344x^{1.5} - 2256x^1 + 1258x^{0.5} - 233) & 0.25 \leq x < 0.390625 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{4,2}^{1,0.5}(x) & \begin{cases} -64\sqrt{10}(1 - 2x^{0.5})^2(28x^{0.5} - 17) & 0.25 \leq x < 0.390625 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{4,3}^{1,0.5}(x) & \begin{cases} 2\sqrt{14}(8x^{0.5} - 4)^3 & 0.25 \leq x < 0.390625 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \end{cases}$$

(b) Cálculo de los coeficientes $C = (c_{nm})$ Wavelets de Chelyshkov fraccionarios.

$$C = \langle f(x), \Psi_{n,m}^{T,\alpha}(x) \rangle = \int_0^T f(x) [\Psi_{n,m}^{T,\alpha}(x)]^T w^\alpha(x) dx$$

$$\bullet c_{nm} = \langle f(x), \psi_{n,m}^{T,\alpha}(x) \rangle = \int_0^T f(x) \psi_{n,m}^{T,\alpha}(x) w^\alpha(x) dx$$

$$\bullet w^\alpha(x) = \alpha \frac{x^{\alpha-1}}{T^\alpha}$$

$$c_{nm} = \begin{pmatrix} c_{00} = 2.53486 \times 10^{-6} \\ c_{01} = -7.04444 \times 10^{-6} \\ c_{02} = 0.00261255 \\ c_{03} = 0.0151129 \\ c_{10} = 0.00853589 \\ c_{11} = 0.0186199 \\ c_{12} = 0.0363978 \\ c_{13} = 0.0698492 \\ c_{20} = 0.0317838 \\ c_{21} = 0.0615106 \\ c_{22} = 0.0971416 \\ c_{23} = 0.143603 \\ c_{30} = 0.0593558 \\ c_{31} = 0.108174 \\ c_{32} = 0.150749 \\ c_{33} = 0.183082 \\ c_{40} = 0.0688013 \\ c_{41} = 0.117341 \\ c_{42} = 0.139379 \\ c_{43} = 0.124287 \\ c_{50} = 0.0379146 \\ c_{51} = 0.0539469 \\ c_{52} = 0.0338494 \\ c_{53} = -0.0215458 \\ c_{60} = -0.0192113 \\ c_{61} = -0.0453709 \\ c_{62} = -0.0826718 \\ c_{63} = -0.109166 \\ c_{70} = -0.0408349 \\ c_{71} = -0.0677257 \\ c_{72} = -0.0664077 \\ c_{73} = -0.0271342 \end{pmatrix}$$

(c) Aproximación Wavelet de Chelyshkov fraccionaria de $f(x)$:

$$f(x) \simeq \tilde{f}(x) = f_{M,k}^{T,\alpha}(x) = \sum_{n=0}^{2^k-1} \sum_{m=0}^M c_{nm} \psi_{nm}^{T,\alpha}(x)$$

$$f(x) \simeq \tilde{f}(x) = f_{M,k}^{T,\alpha}(x) =$$

$$\begin{aligned} & -0.0826718 \left(\begin{cases} -64 \sqrt{10} (3 - 4x^{0.5})^2 (7x^{0.5} - 6) & 0.5625 \leq x < 0.765625 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right) - \\ & 0.0271342 \left(\begin{cases} 2 \sqrt{14} (8x^{0.5} - 7)^3 & 0.765625 \leq x < 1. \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right) - \\ & 0.109166 \left(\begin{cases} 2 \sqrt{14} (8x^{0.5} - 6)^3 & 0.5625 \leq x < 0.765625 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right) - \\ & 0.0215458 \left(\begin{cases} 2 \sqrt{14} (8x^{0.5} - 5)^3 & 0.390625 \leq x < 0.5625 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right) + \\ & 0.124287 \left(\begin{cases} 2 \sqrt{14} (8x^{0.5} - 4)^3 & 0.25 \leq x < 0.390625 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right) + \\ & 0.183082 \left(\begin{cases} 2 \sqrt{14} (8x^{0.5} - 3)^3 & 0.140625 \leq x < 0.25 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right) + \\ & 0.143603 \left(\begin{cases} 2 \sqrt{14} (8x^{0.5} - 2)^3 & 0.0625 \leq x < 0.140625 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right) + \\ & 0.0698492 \left(\begin{cases} 2 \sqrt{14} (8x^{0.5} - 1)^3 & 0.015625 \leq x < 0.0625 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right) + \\ & 0.0971416 \left(\begin{cases} -32 \sqrt{10} (1 - 4x^{0.5})^2 (14x^{0.5} - 5) & 0.0625 \leq x < 0.140625 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right) + \\ & 0.139379 \left(\begin{cases} -64 \sqrt{10} (1 - 2x^{0.5})^2 (28x^{0.5} - 17) & 0.25 \leq x < 0.390625 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right) - \\ & 0.0664077 \left(\begin{cases} -2 \sqrt{10} (7 - 8x^{0.5})^2 (56x^{0.5} - 55) & 0.765625 \leq x < 1. \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right) + \\ & 0.0338494 \left(\begin{cases} -2 \sqrt{10} (5 - 8x^{0.5})^2 (56x^{0.5} - 41) & 0.390625 \leq x < 0.5625 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right) + \\ & 0.150749 \left(\begin{cases} -2 \sqrt{10} (3 - 8x^{0.5})^2 (56x^{0.5} - 27) & 0.140625 \leq x < 0.25 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right) + \\ & 0.0363978 \left(\begin{cases} -2 \sqrt{10} (1 - 8x^{0.5})^2 (56x^{0.5} - 13) & 0.015625 \leq x < 0.0625 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right) + \\ & 0.0151129 \left(\begin{cases} 1024 \sqrt{14} x^{1.5} & 0. \leq x < 0.015625 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right) + \\ & 0.00261255 \left(\begin{cases} 256 \sqrt{10} (3x^1 - 28x^{1.5}) & 0. \leq x < 0.015625 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 7.04444 \times 10^{-6} \left(\begin{cases} 32 \sqrt{6} (672 x^{1.5} - 120 x^1 + 5 x^{0.5}) & 0. \leq x < 0.015625 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right) - 0.0192113 \\
& \left(\begin{cases} -32 \sqrt{2} (1120 x^{1.5} - 2760 x^1 + 2265 x^{0.5} - 619) & 0.5625 \leq x < 0.765625 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right) + \\
& 0.117341 \left(\begin{cases} 16 \sqrt{6} (1344 x^{1.5} - 2256 x^1 + 1258 x^{0.5} - 233) & 0.25 \leq x < 0.390625 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right) + \\
& 0.0317838 \\
& \left(\begin{cases} -16 \sqrt{2} (2240 x^{1.5} - 2160 x^1 + 690 x^{0.5} - 73) & 0.0625 \leq x < 0.140625 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right) - \\
& 0.0453709 \\
& \left(\begin{cases} 8 \sqrt{6} (2688 x^{1.5} - 6528 x^1 + 5276 x^{0.5} - 1419) & 0.5625 \leq x < 0.765625 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right) + \\
& 0.0615106 \left(\begin{cases} 8 \sqrt{6} (2688 x^{1.5} - 2496 x^1 + 764 x^{0.5} - 77) & 0.0625 \leq x < 0.140625 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right) + \\
& 0.0688013 \left(\begin{cases} -8 \sqrt{2} (4480 x^{1.5} - 7680 x^1 + 4380 x^{0.5} - 831) & 0.25 \leq x < 0.390625 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right) + \\
& 2.53486 \times 10^{-6} \left(\begin{cases} -8 \sqrt{2} (4480 x^{1.5} - 960 x^1 + 60 x^{0.5} - 1) & 0. \leq x < 0.015625 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right) - \\
& 0.0677257 \\
& \left(\begin{cases} 2 \sqrt{6} (10752 x^{1.5} - 30144 x^1 + 28136 x^{0.5} - 8743) & 0.765625 \leq x < 1. \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right) + \\
& 0.0539469 \\
& \left(\begin{cases} 2 \sqrt{6} (10752 x^{1.5} - 22080 x^1 + 15080 x^{0.5} - 3425) & 0.390625 \leq x < 0.5625 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right) + \\
& 0.108174 \left(\begin{cases} 2 \sqrt{6} (10752 x^{1.5} - 14016 x^1 + 6056 x^{0.5} - 867) & 0.140625 \leq x < 0.25 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right) + \\
& 0.0186199 \\
& \left(\begin{cases} 2 \sqrt{6} (10752 x^{1.5} - 5952 x^1 + 1064 x^{0.5} - 61) & 0.015625 \leq x < 0.0625 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right) - \\
& 0.0408349 \\
& \left(\begin{cases} -2 \sqrt{2} (17920 x^{1.5} - 50880 x^1 + 48120 x^{0.5} - 15159) & 0.765625 \leq x < 1. \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right) + \\
& 0.0379146 \\
& \left(\begin{cases} -2 \sqrt{2} (17920 x^{1.5} - 37440 x^1 + 26040 x^{0.5} - 6029) & 0.390625 \leq x < 0.5625 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right) +
\end{aligned}$$

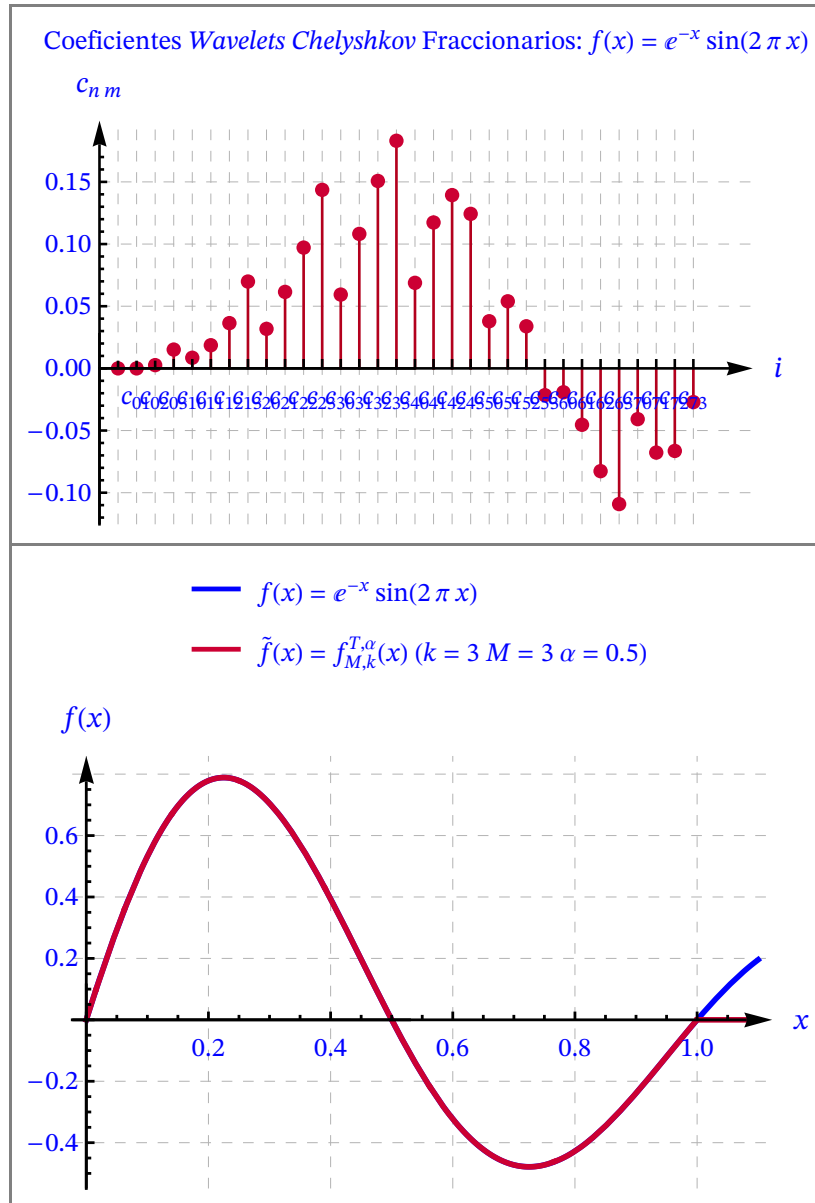
0.0593558

$$\left(\begin{cases} -2 \sqrt{2} (17920 x^{1.5} - 24000 x^1 + 10680 x^{0.5} - 1579) & 0.140625 \leq x < 0.25 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right) +$$

0.00853589

$$\left(\begin{cases} -2 \sqrt{2} (17920 x^{1.5} - 10560 x^1 + 2040 x^{0.5} - 129) & 0.015625 \leq x < 0.0625 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right)$$

Out[*]=



Error L_∞ :

$$\text{error-}L_\infty = \text{Máx}_{0 \leq j \leq N-1} (|f(x_j) - f(x_j)(\text{CWM})|) = 3.36527 \times 10^{-4}$$

Error- L_2 :

$$\text{error-}L_2 = \left(\sum_{j=0}^{N-1} |f(x_j) - f(x_j)(\text{CWM})|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = 4.9408 \times 10^{-4}$$

Error-RMS:

$$\text{error-RMS} = \frac{1}{N} \left(\sum_{j=0}^{N-1} |f(x_j) - f(x_j)(\text{CWM})|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = 4.9408 \times 10^{-5}$$

■ **Ejemplo 2.1.11. Desarrollo en Serie de Wavelets de Chelyshkov Fraccionarias.**

Sea la función definida en el intervalo $[A, B] = [0, 3]$:

(a) $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$.

(i) Determinéense la base ortonormal de *Wavelets* de Chelyshkov fraccionarias

$$\mathcal{B} = \{\psi_{n,m}^{T,\alpha}(x)\} \begin{cases} n = 0, 1, \dots, 2^k - 1 \\ m = 0, 1, \dots, M \end{cases} \quad k = 1 \quad M = 4 \quad \alpha = 0.60$$

(ii) Represéntense las gráficas de las *Wavelets* de Chelyshkov fraccionarias.

(b) (i) Hállese la función $\tilde{f}(x) = f_{M,k}^{T,\alpha}$ que aproxima a $f(x)$ mediante el desarrollo en serie de *Wavelets* de Chelyshkov fraccionarias.

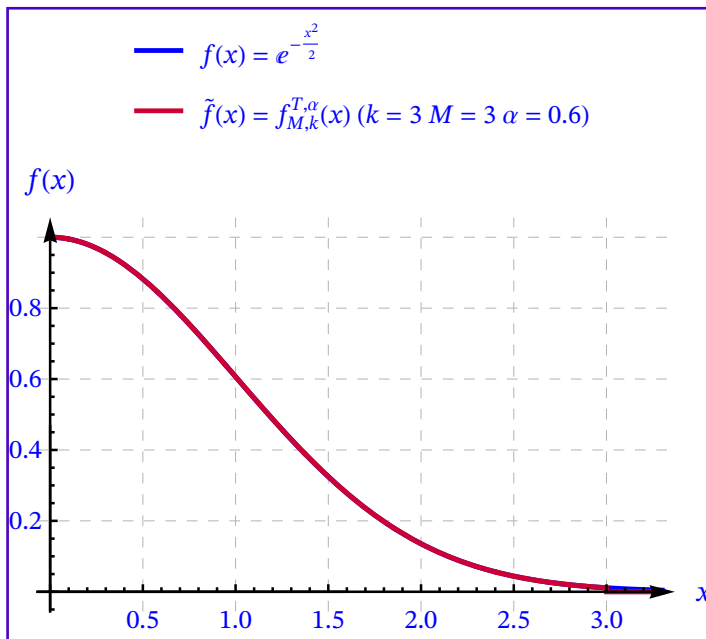
(ii) Represéntense los coeficientes *Wavelets*, la función $f(x)$ y su aproximación $\tilde{f}(x)$.

(iii) Créese una tabla con los valores de x , $f(x)$, $\tilde{f}(x)$ y el error absoluto $|f(x) - \tilde{f}(x)|$ cometido en cada punto para $x \in [0, 1]$.

(iii) Créese una tabla de valores en el intervalo $x \in [0, 1]$, con los valores de x , $\tilde{f}(x)$, $f(x)$ y el error absoluto $|\tilde{f}(x) - f(x)|$ cometido en cada punto:

$$x_j, f(x_j) \text{ (CWM)}, f(x_j), |f(x_j) \text{ (CWM)} - f(x_j)|.$$

(iv) Hállense los errores L_∞ , L_2 y el error RMS.



SOLUCIÓN

(a)

Wavelets de Chelyshkov fraccionarias $\psi_{nm}^{T,\alpha}(x)$

$$\left(\begin{array}{ll} [A, B] = & [0, 3] \\ T = & 3 \\ \alpha = & 0.6 \\ k = & 1 \\ M = & 4 \\ n = 0, \dots, 2^k - 1 = & \{0, 1\} \\ m = 0, \dots, M = & \{0, 1, 2, 3, 4\} \end{array} \right)$$

(a) Definición de las Wavelets de Chelyshkov fraccionarias $\psi_{n,m}^{T,\alpha}(x)$

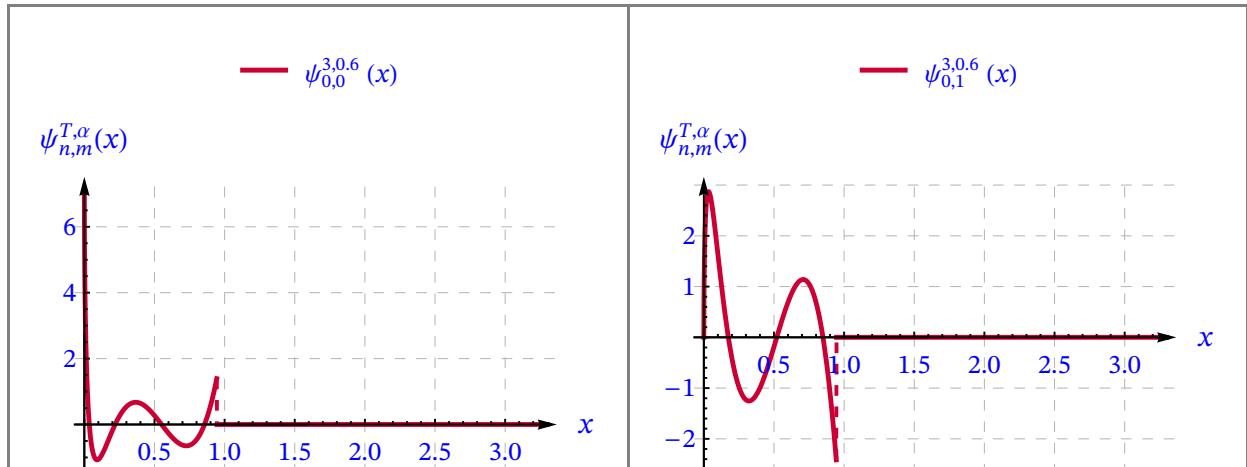
$$\psi_{n,m}^{T,\alpha}(x) = \begin{cases} \sqrt{2m+1} 2^{\frac{k}{2}} C_{M,m} \left(2^k \left(\frac{x}{T} \right)^\alpha - n \right) & \left(\frac{x}{T} \right) \in \left[\left(\frac{n}{2^k} \right)^\frac{1}{\alpha}, \left(\frac{n+1}{2^k} \right)^\frac{1}{\alpha} \right] \\ 0 & \text{Resto} \end{cases}$$

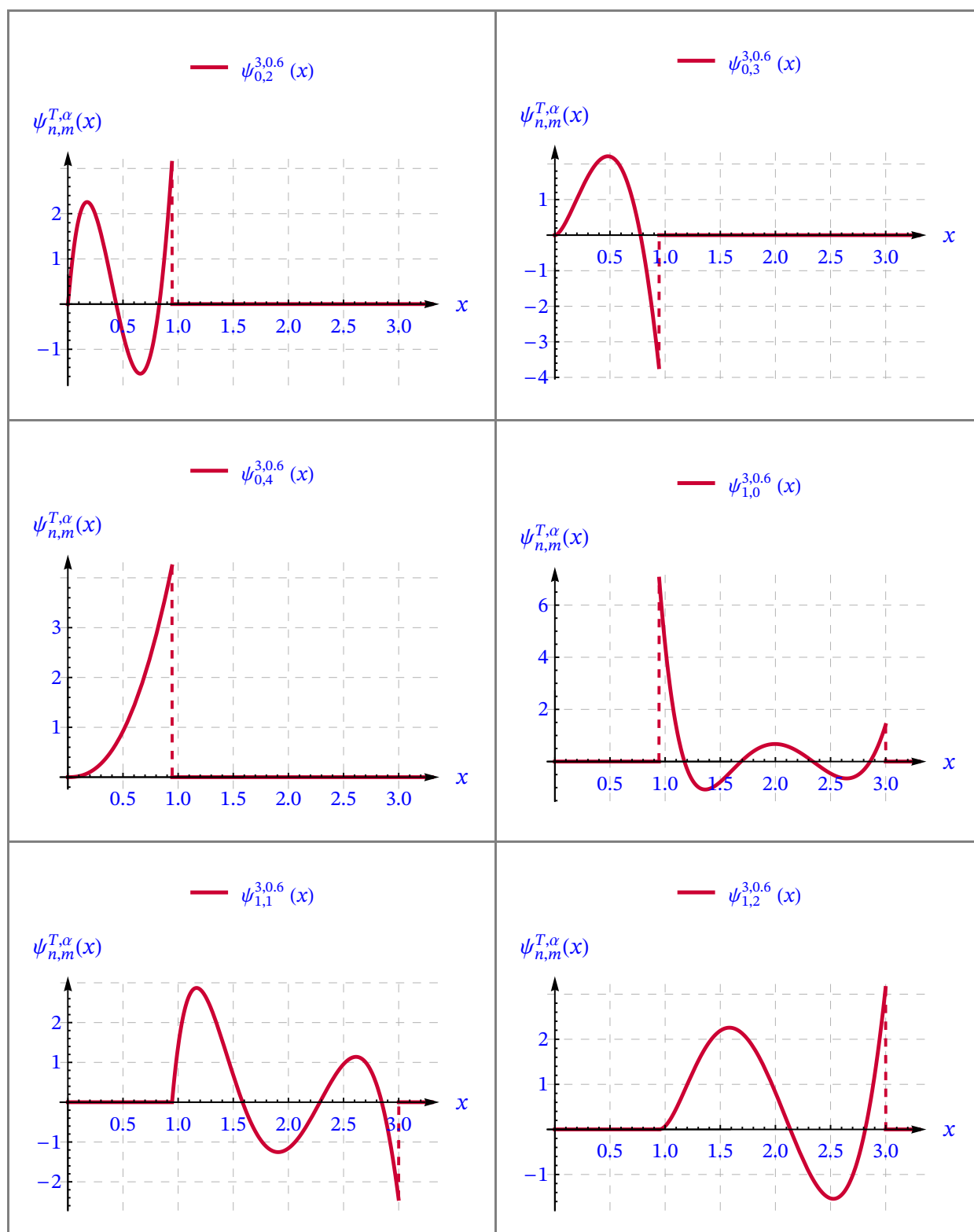
$$\begin{cases} n = 0, 1, \dots, 2^k - 1 & k = 1, 2, \dots \\ m = 0, 1, \dots, M & \text{grado del polinomio} \end{cases}$$

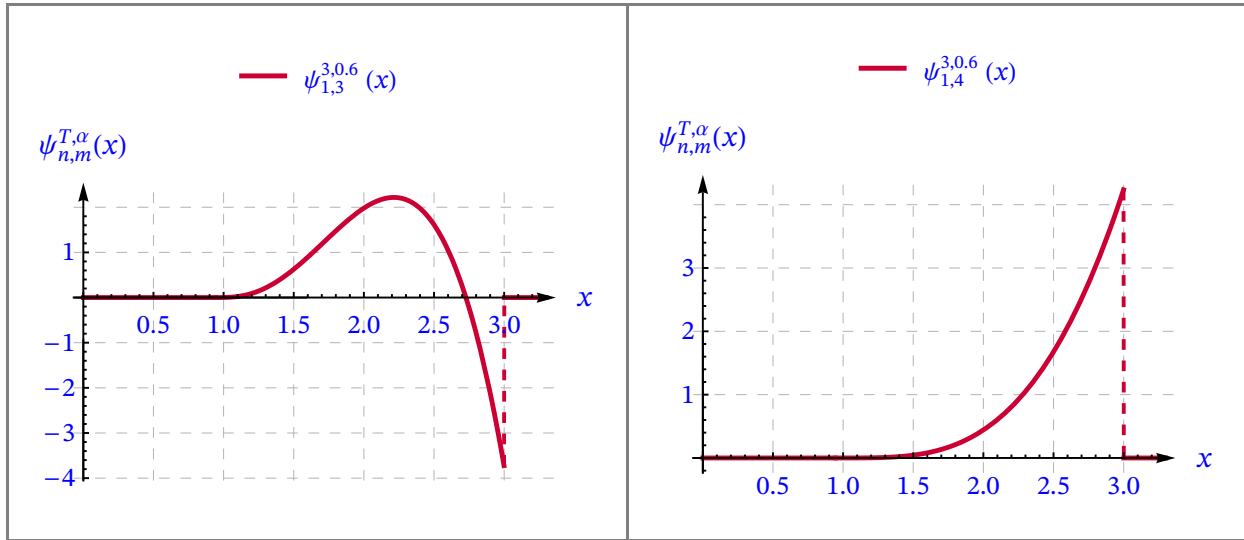
$C_{M,m}(x) \equiv$ polinomios de Chelyshkov de grado m

$$\begin{aligned} \psi_{0,0}^{3,0.6}(x) & \begin{cases} 204.134 x^{2.4} - 438.475 x^{1.8} + 317.869 x^{1.2} - 87.7856 x^{0.6} + 7.07107 & 0. \leq \frac{x}{3} < \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{0,1}^{3,0.6}(x) & \begin{cases} -235.713 x^{2.4} + 455.677 x^{1.8} - 275.283 x^{1.2} + 50.6831 x^{0.6} & 0. \leq \frac{x}{3} < 0.3 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{0,2}^{3,0.6}(x) & \begin{cases} 130.416 x^{2.4} - 196.092 x^{1.8} + 71.0778 x^{1.2} & 0. \leq \frac{x}{3} < 0.31498 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{0,3}^{3,0.6}(x) & \begin{cases} 33.1456 x^{1.8} - 38.5776 x^{2.4} & 0. \leq \frac{x}{3} < 0.31498 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{0,4}^{3,0.6}(x) & \begin{cases} 4.86032 x^{2.4} & 0. \leq \frac{x}{3} < 0.31498 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{1,0}^{3,0.6}(x) & \begin{cases} 204.134 x^{2.4} - 1227.73 x^{1.8} + 2733.68 x^{1.2} - 2668.68 x^{0.6} + 963.079 & 0.31498 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{1,1}^{3,0.6}(x) & \begin{cases} -235.713 x^{2.4} + 1367.03 x^{1.8} - 2918. x^{1.2} + 2711.54 x^{0.6} - 923.458 & 0.31498 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{1,2}^{3,0.6}(x) & \begin{cases} 130.416 x^{2.4} - 700.328 x^{1.8} + 1370.79 x^{1.2} - 1158.14 x^{0.6} + 357.337 & 0.31498 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{1,3}^{3,0.6}(x) & \begin{cases} -38.5776 x^{2.4} + 182.301 x^{1.8} - 312.373 x^{1.2} + 232.259 x^{0.6} - 63.6082 & 0.3149 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{1,4}^{3,0.6}(x) & \begin{cases} 4.86032 (0.966591 - 1. x^{0.6})^4 & 0.31498 \leq \frac{x}{3} < 1. \\ 0 & \text{True} \end{cases} \end{aligned}$$

Out[*]=







(b)

Desarrollo en serie de Wavelets de Chelyshkov fraccionarias de la función

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{en} \quad [A, B] = [0, T] = [0, 3]$$

$$f(x) \simeq \tilde{f}(x) = f_{M,k}^{T,\alpha}(x) = \sum_{n=0}^{2^k-1} \sum_{m=0}^M c_{nm} \psi_{nm}^{T,\alpha}(x) = C \cdot \Psi_{nm}^{T,\alpha}(x) \quad x \in [0, T]$$

$$C = \langle f(x), \Psi_{nm}^{T,\alpha}(x) \rangle \cdot D^{-1}$$

$$C = \int_0^T f(x) [\Psi_{nm}^{T,\alpha}(x)]^T w^\alpha(x) dx \cdot D^{-1} \quad D = \int_0^T \Psi_{nm}^{T,\alpha}(x) [\Psi_{nm}^{T,\alpha}(x)]^T w(x) dx$$

 Wavelets de Chelyshkov fraccionarias $\psi_{nm}^{T,\alpha}(x)$

$$\left(\begin{array}{ll} [A, B] = & [0, 3] \\ T = & 3 \\ \alpha = & 0.6 \\ k = & 1 \\ M = & 4 \\ n = 0, \dots, 2^k-1 = & \{0, 1\} \\ m = 0, \dots, M = & \{0, 1, 2, 3, 4\} \end{array} \right)$$

(a) Definición de las *Wavelets* de Chelyshkov fraccionarias $\psi_{nm}^{T,\alpha}(x)$

$$\psi_{nm}^{T,\alpha}(x) = \begin{cases} \sqrt{2m+1} 2^{\frac{k}{2}} C_{M,m} \left(2^k \left(\frac{x}{T} \right)^\alpha - n \right) & \left(\frac{x}{T} \right) \in \left[\left(\frac{n}{2^k} \right)^\frac{1}{\alpha}, \left(\frac{n+1}{2^k} \right)^\frac{1}{\alpha} \right) \\ 0 & \text{Resto} \end{cases}$$

$$\begin{cases} n = 0, 1, \dots, 2^k - 1 & k = 1, 2, \dots \\ m = 0, 1, \dots, M & \text{grado del polinomio} \end{cases}$$

$C_{M,m}(x) \equiv$ polinomios de Chelyshkov de grado m

$$\Psi_{nm}^{T,\alpha}(x) = \begin{cases} \psi_{0,0}^{3,0.6}(x) & \begin{cases} 204.134 x^{2.4} - 438.475 x^{1.8} + 317.869 x^{1.2} - 87.7856 x^{0.6} + 7.0710 \\ 0 \end{cases} \\ \psi_{0,1}^{3,0.6}(x) & \begin{cases} -235.713 x^{2.4} + 455.677 x^{1.8} - 275.283 x^{1.2} + 50.6831 x^{0.6} & 0 \\ 0 & T \end{cases} \\ \psi_{0,2}^{3,0.6}(x) & \begin{cases} 130.416 x^{2.4} - 196.092 x^{1.8} + 71.0778 x^{1.2} & 0. \leq \frac{x}{3} < (\\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{0,3}^{3,0.6}(x) & \begin{cases} 33.1456 x^{1.8} - 38.5776 x^{2.4} & 0. \leq \frac{x}{3} < 0.31498 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{0,4}^{3,0.6}(x) & \begin{cases} 4.86032 x^{2.4} & 0. \leq \frac{x}{3} < 0.31498 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{1,0}^{3,0.6}(x) & \begin{cases} 204.134 x^{2.4} - 1227.73 x^{1.8} + 2733.68 x^{1.2} - 2668.68 x^{0.6} + 963.07 \\ 0 \end{cases} \\ \psi_{1,1}^{3,0.6}(x) & \begin{cases} -235.713 x^{2.4} + 1367.03 x^{1.8} - 2918. x^{1.2} + 2711.54 x^{0.6} - 923.458 \\ 0 \end{cases} \\ \psi_{1,2}^{3,0.6}(x) & \begin{cases} 130.416 x^{2.4} - 700.328 x^{1.8} + 1370.79 x^{1.2} - 1158.14 x^{0.6} + 357.33 \\ 0 \end{cases} \\ \psi_{1,3}^{3,0.6}(x) & \begin{cases} -38.5776 x^{2.4} + 182.301 x^{1.8} - 312.373 x^{1.2} + 232.259 x^{0.6} - 63.608 \\ 0 \end{cases} \\ \psi_{1,4}^{3,0.6}(x) & \begin{cases} 4.86032 (0.966591 - 1. x^{0.6})^4 & 0.31498 \leq \frac{x}{3} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \end{cases}$$

(b) Cálculo de los coeficientes $C = (c_{nm})$ *Wavelets* de Chelyshkov fraccionarios.

$$C = \langle f(x), \Psi_{nm}^{T,\alpha}(x) \rangle = \int_0^T f(x) [\Psi_{nm}^{T,\alpha}(x)]^T w^\alpha(x) dx$$

$$\bullet c_{nm} = \langle f(x), \psi_{nm}^{T,\alpha}(x) \rangle = \int_0^T f(x) \psi_{nm}^{T,\alpha}(x) w^\alpha(x) dx$$

$$\bullet w^\alpha(x) = \alpha \frac{x^{\alpha-1}}{T^\alpha}$$

$$c_{nm} = \begin{pmatrix} c_{00} = 0.141598 \\ c_{01} = 0.244497 \\ c_{02} = 0.317597 \\ c_{03} = 0.361768 \\ c_{04} = 0.326816 \\ c_{10} = 0.0904256 \\ c_{11} = 0.137618 \\ c_{12} = 0.119322 \\ c_{13} = 0.0642362 \\ c_{14} = 0.0194895 \end{pmatrix}$$

(c) Aproximación *Wavelet* de Chelyshkov fraccionaria de $f(x)$:

$$f(x) \simeq \tilde{f}(x) = f_{M,k}^{T,\alpha}(x) = \sum_{n=0}^{2^k-1} \sum_{m=0}^M c_{nm} \psi_{nm}^{T,\alpha}(x)$$

$$f(x) \simeq \tilde{f}(x) = f_{M,k}^{T,\alpha}(x) = 0.0194895$$

$$\left(\begin{pmatrix} 4.86032 (0.966591 - 1. x^{0.6})^4 & 0.31498 \leq \frac{x}{3} < 1. \\ 0 & \text{True} \end{pmatrix} + \right.$$

$$0.326816 \left(\begin{pmatrix} 4.86032 x^{2.4} & 0. \leq \frac{x}{3} < 0.31498 \\ 0 & \text{True} \end{pmatrix} + 0.244497 \right.$$

$$\left(\begin{pmatrix} -235.713 x^{2.4} + 455.677 x^{1.8} - 275.283 x^{1.2} + 50.6831 x^{0.6} & 0. \leq \frac{x}{3} < 0.31498 \\ 0 & \text{True} \end{pmatrix} + \right.$$

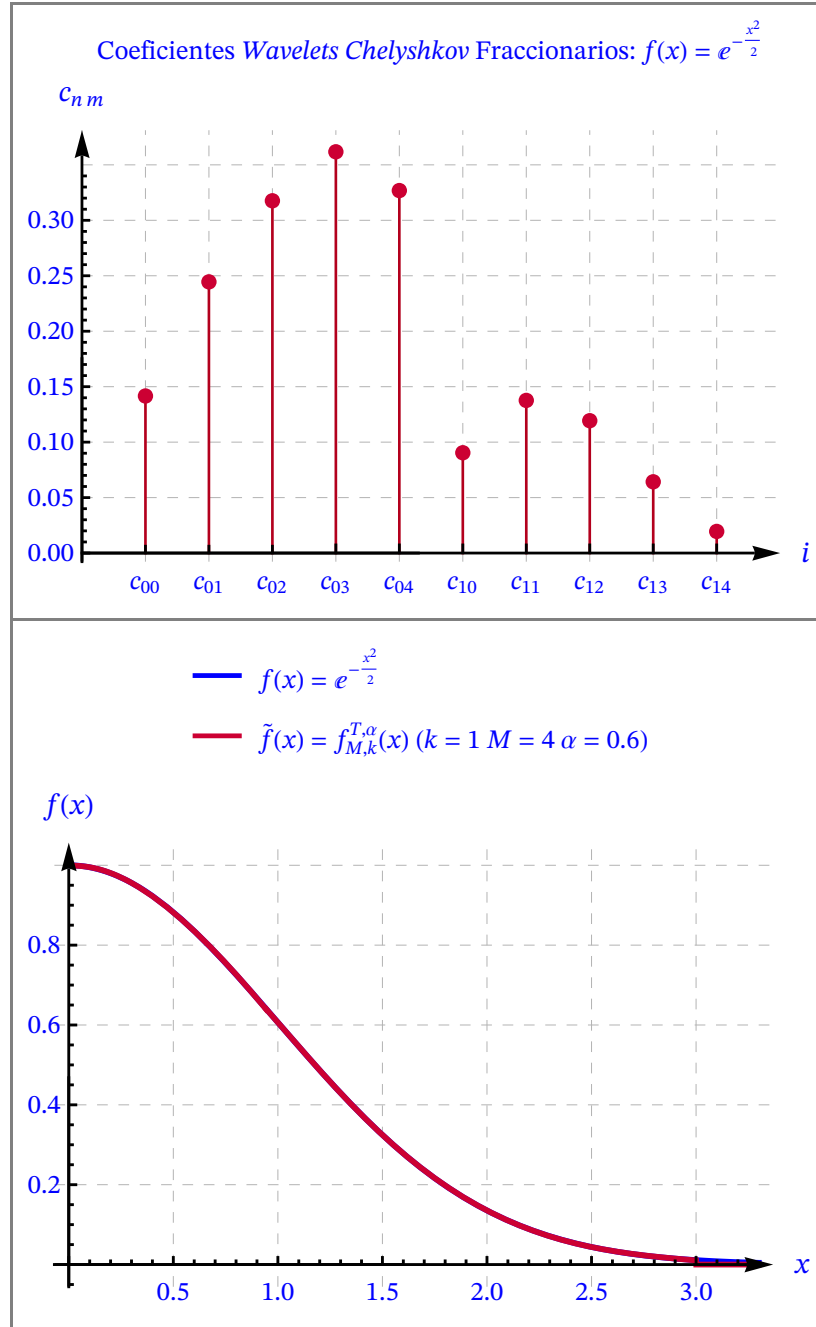
$$0.137618 \left(\begin{pmatrix} -235.713 x^{2.4} + 1367.03 x^{1.8} - 2918. x^{1.2} + 2711.54 x^{0.6} - 923.458 & 0.31498 \leq \\ 0 & \text{True} \end{pmatrix} + \right.$$

$$0.0642362 \left(\begin{pmatrix} -38.5776 x^{2.4} + 182.301 x^{1.8} - 312.373 x^{1.2} + 232.259 x^{0.6} - 63.6082 & 0.3149 \\ 0 & \text{True} \end{pmatrix} + \right.$$

$$0.317597 \left(\begin{pmatrix} 130.416 x^{2.4} - 196.092 x^{1.8} + 71.0778 x^{1.2} & 0. \leq \frac{x}{3} < 0.31498 \\ 0 & \text{True} \end{pmatrix} + \right.$$

$$0.0904256 \left(\begin{pmatrix} 204.134 x^{2.4} - 1227.73 x^{1.8} + 2733.68 x^{1.2} - 2668.68 x^{0.6} + 963.079 & 0.31498 \\ 0 & \text{True} \end{pmatrix} + \right.$$

Out[•]=



Error L_∞ :

$$\text{error-}L_\infty = \text{Máx}_{0 \leq j \leq N-1} (|f(x_j) - f(x_j)(\text{CWM})|) = 1.25067 \times 10^{-3}$$

Error- L_2 :

$$\text{error-}L_2 = \left(\sum_{j=0}^{N-1} |f(x_j) - f(x_j)(\text{CWM})|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = 1.36289 \times 10^{-3}$$

Error-RMS:

$$\text{error-RMS} = \frac{1}{N} \left(\sum_{j=0}^{N-1} |f(x_j) - f(x_j)(\text{CWM})|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = 1.36289 \times 10^{-4}$$

2.1.6. Aproximación de Funciones de dos Variables por Wavelets de Chelyshkov Fraccionarias

Se establece en el siguiente Teorema la expansión de una función de dos variables $u(x, t) \in L^2([0, T] \times [0, T])$ en términos de una base ortonormal de *Wavelets* de Chelyshkov Fraccionarias ([RAHI19], [MARA22], [DO25]).

▼ Teorema 2.1.4.

Sea la función $u = u(x, t)$ cuadrado integrable en el dominio $(x, t) \in [0, T] \times [0, T]$, $u(x, t) \in L^2([0, T] \times [0, T])$ donde

$$L^2([0, T] \times [0, T]) := \{u(x, t) \in L^2([0, T] \times [0, T]), \text{ y } \int_0^T \int_0^T f(x)^2 dx < \infty\}.$$

y sea la base de las *Wavelets* de Chelyshkov generalizadas fraccionarias:

$$\Psi^{T,\alpha}(x) = \{\psi_{n,m}^{T,\alpha}(x)\} \subset L^2([0, T]) \quad n = 0, 1, 2, \dots, 2^k - 1 \text{ y } m = 0, 1, \dots, M.$$

La función $u(x, t)$ se puede expandir o desarrollar en serie con las funciones *Wavelets* de Chelyshkov fraccionarias de la forma siguiente:

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n^*=0}^{\infty} \sum_{m^*=0}^{\infty} c_{n,m,n^*,m^*} \psi_{n,m}^{T,\alpha}(x) \psi_{n^*,m^*}^{T,\alpha}(t) \quad (x, t) \in [0, T] \times [0, T] \quad (2.1.35)$$

donde una aproximación viene dada mediante la truncación de la serie:

$$u(x, t) \simeq u_{M,k}^{T,\alpha}(x, t) = \sum_{n=0}^{2^k-1} \sum_{m=0}^M \sum_{n^*=0}^{2^{k^*}-1} \sum_{m^*=0}^{M^*} c_{n,m,n^*,m^*} \psi_{n,m}^{T,\alpha}(x) \psi_{n^*,m^*}^{T,\alpha}(t) \quad (2.1.36)$$

$$u(x, t) \simeq \underbrace{(\Psi^{T,\alpha}(x))^T}_{(1, 2^k (M+1))} \cdot C \cdot \underbrace{\Psi^{T,\alpha}(t)}_{(2^{k^*} (M^*+1), 1)}$$

donde C es una matriz de dimensión $(2^k (M+1) \times 2^{k^*} (M^*+1))$ y c_{n,m,n^*,m^*} son los *coeficientes Wavelet de Chelyshkov fraccionarias* y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto interno.

Los *coeficientes Wavelet de Chelyshkov fraccionarias* tienen la expresión:

$$c_{n,m,n^*,m^*} = \langle u(x, t), \psi_{n,m}^{T,\alpha}(x) \psi_{n^*,m^*}^{T,\alpha}(t) \rangle$$

$$c_{n,m,n^*,m^*} = \int_0^T \int_0^T u(x, t) \psi_{n,m}^{T,\alpha}(x) \psi_{n^*,m^*}^{T,\alpha}(t) w^\alpha(x) w^\alpha(t) dx dt \quad (2.1.37)$$

$$C = \langle u(x, t), \psi_{n,m}^{T,\alpha}(x) \psi_{n^*,m^*}^{T,\alpha}(t) \rangle$$

$$C = \int_0^T \int_0^T u(x, t) [\Psi_{n,m}^{T,\alpha}(x)] [\Psi_{n^*,m^*}^{T,\alpha}(t)]^T w^\alpha(x) w^\alpha(t) dx dt$$

con la función peso

$$w^\alpha(x) = \alpha \frac{x^{\alpha-1}}{T^\alpha} \quad x \in [0, T], \quad w^\alpha(t) = \alpha \frac{t^{\alpha-1}}{T^\alpha} \quad t \in [0, T].$$

La expansión de la una función de dos variables $u(x, t)$ en la base de las funciones *Wavelets* de Chelyshkov generalizadas fraccionarias se puede expresar matricialmente:

$$u(x, t) \simeq u_{M,k}^{T,\alpha}(x, t) = \sum_{n=0}^{2^k-1} \sum_{m=0}^M \sum_{n^*=0}^{2^{k^*}-1} \sum_{m^*=0}^{M^*} c_{n,m,n^*,m^*} \psi_{n,m}^{T,\alpha}(x) \psi_{n^*,m^*}^{T,\alpha}(t)$$

$$u(x, t) \simeq \underbrace{(\Psi^{T,\alpha}(x))^T}_{(1, 2^k (M+1))} \cdot C \cdot \underbrace{\Psi^{T,\alpha}(t)}_{(2^{k^*} (M^*+1), 1)} \quad (2.1.38)$$

$$C = (c_{n,m,n^*,m^*})$$

siendo C es la matriz de coeficientes de dimensión $(2^k (M+1) \times 2^{k^*} (M^*+1))$ y $\Psi^{T,\alpha}(x)$, $\Psi^{T,\alpha}(t)$ son vectores de *Wavelets* de Chelyshkov generalizadas fraccionarias dados por los vectores columna:

$$C = \begin{pmatrix} c_{0,0} \\ c_{0,1} \\ \vdots \\ c_{0,M} \\ c_{1,0} \\ c_{1,1} \\ \vdots \\ c_{1,M} \\ \dots \\ c_{2^k-1,0} \\ c_{2^k-1,1} \\ \vdots \\ c_{2^k-1,M} \end{pmatrix} \quad \Psi^{T,\alpha}(x) = \begin{pmatrix} \psi_{0,0}^{T,\alpha}(x) \\ \psi_{0,1}^{T,\alpha}(x) \\ \vdots \\ \psi_{0,M}^{T,\alpha}(x) \\ \psi_{1,0}^{T,\alpha}(x) \\ \psi_{1,1}^{T,\alpha}(x) \\ \vdots \\ \psi_{1,M}^{T,\alpha}(x) \\ \dots \\ \psi_{2^k-1,0}^{T,\alpha}(x) \\ \psi_{2^k-1,1}^{T,\alpha}(x) \\ \vdots \\ \psi_{2^k-1,M}^{T,\alpha}(x) \end{pmatrix} \quad \Psi^{T,\alpha}(t) = \begin{pmatrix} \psi_{0,0}^{T,\alpha}(x) \\ \psi_{0,1}^{T,\alpha}(x) \\ \vdots \\ \psi_{0,M^*}^{T,\alpha}(x) \\ \psi_{1,0}^{T,\alpha}(x) \\ \psi_{1,1}^{T,\alpha}(x) \\ \vdots \\ \psi_{1,M^*}^{T,\alpha}(x) \\ \dots \\ \psi_{2^{k^*}-1,0}^{T,\alpha}(x) \\ \psi_{2^{k^*}-1,1}^{T,\alpha}(x) \\ \vdots \\ \psi_{2^{k^*}-1,M^*}^{T,\alpha}(x) \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} n = 0, 1, \dots, 2^k - 1 \\ m = 0, 1, \dots, M \end{cases} \quad \begin{cases} n^* = 0, 1, \dots, 2^{k^*} - 1 \\ m^* = 0, 1, \dots, M^* \end{cases}$$

Observaciones 2.1.5. ([[DO25](#)])

- (i) Las *Wavelets* de Chelyshkov de orden fraccionario generan una base ortogonal que ofrece simplicidad teórica y ventajas prácticas para el cálculo numérico.

Su estructura algebraica permite una manipulación sencilla y una integración eficiente en el marco de discretización espectral.

- (ii) Una característica fundamental es que la integral de Riemann–Liouville de orden variable de cada función base puede calcularse en forma cerrada, lo que simplifica significativamente el desarrollo del algoritmo numérico.
- (iii) Los parámetros de ajuste, k y M determinan el nivel de resolución y el grado del polinomio, respectivamente, lo que influye en el número de elementos base y la capacidad expresiva del espacio de aproximación.

Si bien el aumento de los parámetros k y M suele mejorar la precisión, también aumenta las exigencias computacionales. Para mayor flexibilidad, se introduce un parámetro de escala α , que ajusta la distribución y el comportamiento de las funciones base. Este parámetro permite una mayor precisión con un coste computacional fijo y contribuye a la robustez del método espectral propuesto.

■ **Ejemplo 2.1.12.** Expansión de $u(x, t)$ en *Wavelets* de Chelyshkov Fraccionarias.

Sea la función de dos variables $u(x, t)$ definida en el intervalo $(x, t) = [0, T] \times [0, T]$:

$$u(x, t) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{tgh} \left(\frac{-\alpha \delta}{2(\delta+1)} \left(x - \left(\frac{\alpha}{\delta+1} + \frac{\beta(\delta+1)}{\alpha} \right) t \right) \right) \right)^{\frac{1}{\delta}}$$

siendo $\{\alpha, \beta, \delta\} = \{2, 5, \frac{3}{2}\}$.

(i) Hállese la función $u_{M,k}^{T,\alpha}(x, t)$ que aproxima a $u(x, t)$ mediante la expansión en la base de las funciones *Wavelets* de Chelyshkov fraccionarias para los valores de k, M, T, α dados.

(ii) Represéntese la solución exacta $u(x, t)$ y la solución aproximada $u_{M,k}^{T,\alpha}(x, t)$ obtenida con las funciones *Wavelets* de Chelyshkov fraccionarias.

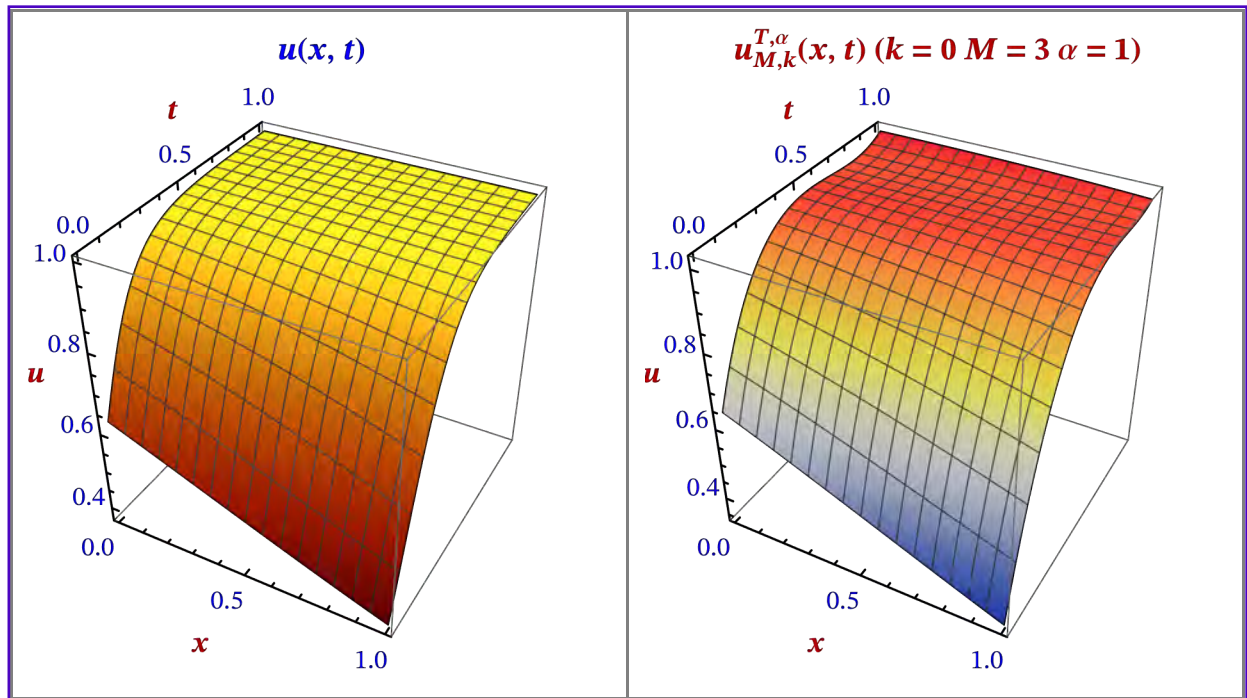
(iii) Créese una tabla de valores en el intervalo $(x, t) = [0, T] \times [0, T]$, con los valores indicados:

(s, l)	x_s	t_l	$u(x_s, t_l)$	$u_{M,k}^{T,\alpha}(x_s, t_l)$	$ u(x_s, t_l) - u_{M,k}^{T,\alpha}(x_s, t_l) $
----------	-------	-------	---------------	--------------------------------	--

con el error absoluto cometido en cada punto para cada grupo de valores k, M, T, α .

(iv) Hállense los errores L_∞, L_2 y el error RMS.

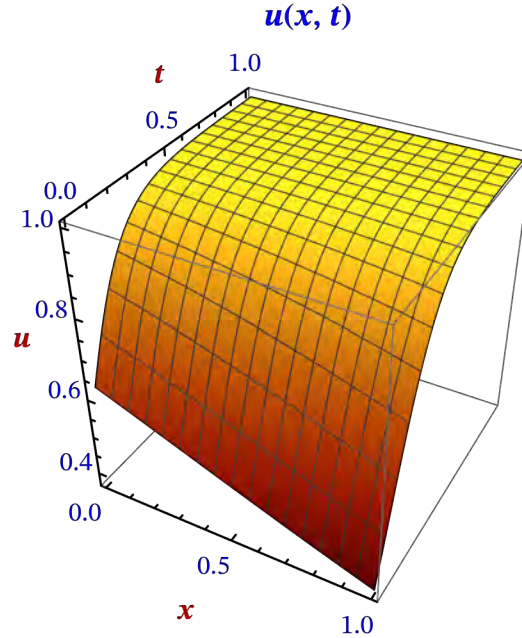
(a) $\begin{pmatrix} k & M & \alpha \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $[A, B] = [0, T] = [0, 1]$.



SOLUCIÓN

(a)

Out[*]=


 Expansión de la función $u(x, t)$ en *Wavelets* de Chelyshkov fraccionarias:

$$u(x, t) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \tanh \left(\frac{3}{5} \left(x - \frac{141 t}{20} \right) \right) \right)^{2/3} \quad (x, t) \in [0, T] \times [0, T] = [0, 1] \times [0, 1]$$

$$u(x, t) \simeq u_{M,k}^{T,\alpha}(x, t) = \sum_{n=0}^{2^k-1} \sum_{m=0}^M \sum_{n^*=0}^{2^{k^*}-1} \sum_{m^*=0}^{M^*} c_{n,m,n^*,m^*} \psi_{n,m}^{T,\alpha}(x) \cdot \psi_{n^*,m^*}^{T,\alpha}(t)$$

$$u(x, t) \simeq [\psi_{n,m}^{T,\alpha}(x)]^T \cdot C \cdot \psi_{n^*,m^*}^{T,\alpha}(t) \quad (x, t) \in [0, T] \times [0, T]$$

$$c_{n,m,n^*,m^*} = \int_0^T \int_0^T u(x, t) \psi_{n,m}^{T,\alpha}(x) \cdot \psi_{n^*,m^*}^{T,\alpha}(t) w^\alpha(x) w^\alpha(t) dx dt$$

$$C = \int_0^T \int_0^T u(x, t) [\psi_{n,m}^{T,\alpha}(x)] \cdot [\psi_{n^*,m^*}^{T,\alpha}(t)]^T w^\alpha(x) w^\alpha(t) dx dt$$

Wavelets de Chelyshkov fraccionarias $\psi_{nm}^{T,\alpha}(x)$ y $\psi_{n^*,m^*}^{T,\alpha}(t)$

$$\left(\begin{array}{ll} [A, B] = & [0, 1] \\ T = & 1 \\ \alpha = & 1 \\ k = & 0 \\ M = & 3 \\ n = 0, \dots, 2^k - 1 = & \{0\} \\ m = 0, \dots, M = & \{0, 1, 2, 3\} \end{array} \right)$$

(a) Definición de las Wavelets de Chelyshkov fraccionarias $\psi_{nm}^{T,\alpha}(x)$

$$\psi_{nm}^{T,\alpha}(x) = \begin{cases} \sqrt{2m+1} 2^{\frac{k}{2}} C_{M,m}(2^k (\frac{x}{T})^\alpha - n) & (\frac{x}{T}) \in \left[\left(\frac{n}{2^k}\right)^{\frac{1}{\alpha}}, \left(\frac{n+1}{2^k}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \right) \\ 0 & \text{Resto} \end{cases}$$

$$\begin{cases} n = 0, 1, \dots, 2^k - 1 & k = 1, 2, \dots \\ m = 0, 1, \dots, M & \text{grado del polinomio} \end{cases}$$

$C_{M,m}(x) \equiv$ polinomios de Chelyshkov de grado m

$$\Psi_{nm}^{T,\alpha}(x) = \begin{pmatrix} \psi_{0,0}^{1,1}(x) & \begin{cases} -35x^3 + 60x^2 - 30x + 4 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{0,1}^{1,1}(x) & \begin{cases} \sqrt{3}x(21x^2 - 30x + 10) & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{0,2}^{1,1}(x) & \begin{cases} \sqrt{5}(6 - 7x)x^2 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{0,3}^{1,1}(x) & \begin{cases} \sqrt{7}x^3 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \end{pmatrix}$$

$$\Psi_{n^*,m^*}^{T,\alpha}(t) = \begin{pmatrix} \psi_{0,0}^{1,1}(t) & \begin{cases} -35t^3 + 60t^2 - 30t + 4 & 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{0,1}^{1,1}(t) & \begin{cases} \sqrt{3}t(21t^2 - 30t + 10) & 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{0,2}^{1,1}(t) & \begin{cases} \sqrt{5}(6 - 7t)t^2 & 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{0,3}^{1,1}(t) & \begin{cases} \sqrt{7}t^3 & 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \end{pmatrix}$$

(b) Cálculo de los coeficientes $C = (c_{n m n^* m^*})$ Wavelets de Chelyshkov fraccionarios.

$$c_{n,m,n^* m^*} = \int_0^T \int_0^T u(x, t) \psi_{n,m}^{T,\alpha}(x) \cdot \psi_{n^*,m^*}^{T,\alpha}(t) w^\alpha(x) w^\alpha(t) dx dt$$

$$C = \int_0^T \int_0^T u(x, t) [\Psi_{n,m}^{T,\alpha}(x)] \cdot [\psi_{n^*,m^*}^{T,\alpha}(t)]^T w^\alpha(x) w^\alpha(t) dx dt$$

$$\bullet w^\alpha(x) = \alpha \frac{x^{\alpha-1}}{T^\alpha} \quad \bullet w^\alpha(t) = \alpha \frac{t^{\alpha-1}}{T^\alpha}$$

Matriz de coeficientes:

$$C = \begin{pmatrix} 0.0402389 & 0.0935306 & 0.135884 & 0.164883 \\ 0.0657396 & 0.158764 & 0.234392 & 0.285456 \\ 0.0735784 & 0.194863 & 0.299504 & 0.368111 \\ 0.066982 & 0.207692 & 0.346185 & 0.434349 \end{pmatrix}$$

(c) Aproximación Wavelet de Chelyshkov fraccionaria de $u(x, t)$:

$$(a) u(x, t) \simeq u_{M,k}^{T,\alpha}(x, t) = \sum_{n=0}^{2^k-1} \sum_{m=0}^M \sum_{n^*=0}^{2^{k^*}-1} \sum_{m^*=0}^{M^*} c_{n,m,n^* m^*} \psi_{n,m}^{T,\alpha}(x) \psi_{n^*,m^*}^{T,\alpha}(t)$$

$$(c.1) u(x, t) \simeq u_{M,k}^{T,\alpha}(x, t) =$$

$$\begin{aligned} & 0.299504 \left(\begin{pmatrix} \sqrt{5} (6-7t)t^2 & 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{True} \end{pmatrix} \right) \left(\begin{pmatrix} \sqrt{5} (6-7x)x^2 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{pmatrix} \right) + \\ & 0.368111 \left(\begin{pmatrix} \sqrt{7} t^3 & 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{True} \end{pmatrix} \right) \left(\begin{pmatrix} \sqrt{5} (6-7x)x^2 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{pmatrix} \right) + \\ & 0.194863 \left(\begin{pmatrix} \sqrt{3} t(21t^2 - 30t + 10) & 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{True} \end{pmatrix} \right) \left(\begin{pmatrix} \sqrt{5} (6-7x)x^2 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{pmatrix} \right) + \\ & 0.0735784 \left(\begin{pmatrix} -35t^3 + 60t^2 - 30t + 4 & 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{True} \end{pmatrix} \right) \left(\begin{pmatrix} \sqrt{5} (6-7x)x^2 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{pmatrix} \right) + \\ & 0.346185 \left(\begin{pmatrix} \sqrt{5} (6-7t)t^2 & 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{True} \end{pmatrix} \right) \left(\begin{pmatrix} \sqrt{7} x^3 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{pmatrix} \right) + \\ & 0.434349 \left(\begin{pmatrix} \sqrt{7} t^3 & 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{True} \end{pmatrix} \right) \left(\begin{pmatrix} \sqrt{7} x^3 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{pmatrix} \right) + \\ & 0.207692 \left(\begin{pmatrix} \sqrt{3} t(21t^2 - 30t + 10) & 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{True} \end{pmatrix} \right) \left(\begin{pmatrix} \sqrt{7} x^3 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{pmatrix} \right) + \\ & 0.066982 \left(\begin{pmatrix} -35t^3 + 60t^2 - 30t + 4 & 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{True} \end{pmatrix} \right) \left(\begin{pmatrix} \sqrt{7} x^3 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{pmatrix} \right) + \\ & 0.234392 \left(\begin{pmatrix} \sqrt{5} (6-7t)t^2 & 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{True} \end{pmatrix} \right) \left(\begin{pmatrix} \sqrt{3} x(21x^2 - 30x + 10) & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{pmatrix} \right) + \end{aligned}$$

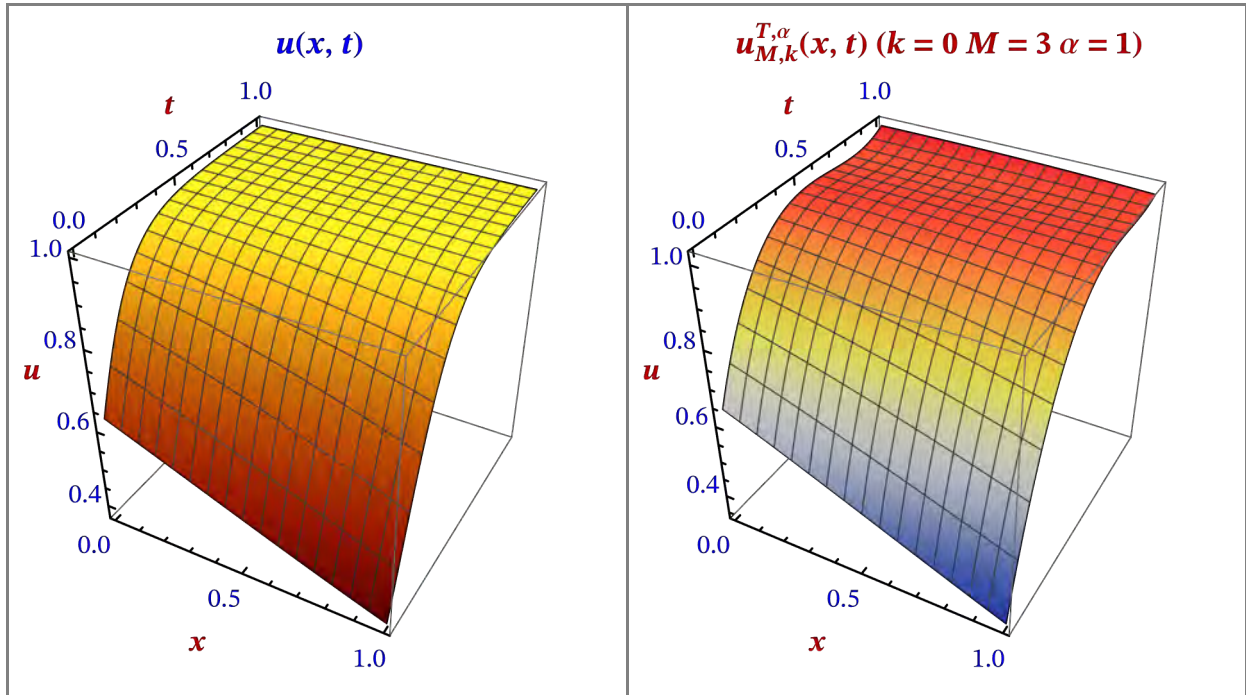
$$\begin{aligned}
 & 0.285456 \left(\begin{Bmatrix} \sqrt{7} t^3 & 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{True} \end{Bmatrix} \right) \left(\begin{Bmatrix} \sqrt{3} x (21 x^2 - 30 x + 10) & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{Bmatrix} \right) + \\
 & 0.158764 \left(\begin{Bmatrix} \sqrt{3} t (21 t^2 - 30 t + 10) & 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{True} \end{Bmatrix} \right) \\
 & \left(\begin{Bmatrix} \sqrt{3} x (21 x^2 - 30 x + 10) & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{Bmatrix} \right) + 0.0657396 \\
 & \left(\begin{Bmatrix} -35 t^3 + 60 t^2 - 30 t + 4 & 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{True} \end{Bmatrix} \right) \left(\begin{Bmatrix} \sqrt{3} x (21 x^2 - 30 x + 10) & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{Bmatrix} \right) + \\
 & 0.135884 \left(\begin{Bmatrix} \sqrt{5} (6 - 7 t) t^2 & 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{True} \end{Bmatrix} \right) \left(\begin{Bmatrix} -35 x^3 + 60 x^2 - 30 x + 4 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{Bmatrix} \right) + \\
 & 0.164883 \left(\begin{Bmatrix} \sqrt{7} t^3 & 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{True} \end{Bmatrix} \right) \left(\begin{Bmatrix} -35 x^3 + 60 x^2 - 30 x + 4 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{Bmatrix} \right) + \\
 & 0.0935306 \left(\begin{Bmatrix} \sqrt{3} t (21 t^2 - 30 t + 10) & 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{True} \end{Bmatrix} \right) \\
 & \left(\begin{Bmatrix} -35 x^3 + 60 x^2 - 30 x + 4 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{Bmatrix} \right) + 0.0402389 \\
 & \left(\begin{Bmatrix} -35 t^3 + 60 t^2 - 30 t + 4 & 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{True} \end{Bmatrix} \right) \left(\begin{Bmatrix} -35 x^3 + 60 x^2 - 30 x + 4 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{Bmatrix} \right) \\
 (c.2) \quad u(x, t) & \simeq u_{M,k}^{T,\alpha}(x, t) \simeq [\psi_{n,m}^{T,\alpha}(x)]^T \cdot C \cdot \psi_{n^*,m^*}^{T,\alpha}(t)
 \end{aligned}$$

$$u(x, t) \simeq \begin{pmatrix} \begin{Bmatrix} -35 x^3 + 60 x^2 - 30 x + 4 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{Bmatrix}^T \\ \begin{Bmatrix} \sqrt{3} x (21 x^2 - 30 x + 10) & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} \sqrt{5} (6 - 7 x) x^2 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} \sqrt{7} x^3 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{Bmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0.0402389 & 0.0935306 & 0.135884 & 0.164883 \\ 0.0657396 & 0.158764 & 0.234392 & 0.285456 \\ 0.0735784 & 0.194863 & 0.299504 & 0.368111 \\ 0.066982 & 0.207692 & 0.346185 & 0.434349 \end{pmatrix}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} \begin{cases} -35 t^3 + 60 t^2 - 30 t + 4 & 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{3} t (21 t^2 - 30 t + 10) & 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{5} (6 - 7 t) t^2 & 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{7} t^3 & 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \end{pmatrix}$$

Out[*]=



Error L_∞ :

$$\text{error-}L_\infty = \text{Máx}_{\substack{0 \leq s < N \\ 0 \leq l < N}} (|u(x_s, t_l) - u_{M,k}^{T,\alpha}(x_s, t_l)|) = 2.5924 \times 10^{-2}$$

Error- L_2 :

$$\text{error-}L_2 = \left(\sum_{s=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} |u(x_s, t_l) - u_{M,k}^{T,\alpha}(x_s, t_l)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = 5.94786 \times 10^{-2}$$

Error-RMS:

$$\text{error-RMS} = \frac{1}{N \times N} \left(\sum_{s=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} |u(x_s, t_l) - u_{M,k}^{T,\alpha}(x_s, t_l)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = 5.94786 \times 10^{-4}$$

2.2. Matrices Operacionales

2.2.1. Introducción

En la formulación numérica basada en funciones base ortogonales, una estrategia habitual consiste en aproximar la solución desconocida de una ecuación en derivadas parciales mediante una combinación lineal finita de funciones bien escogidas. En el presente trabajo, dicha base se apoya en *Wavelets* de Chelyshkov (y sus extensiones de orden fraccionario), por su estructura local, su ortogonalidad y la conveniencia computacional que proporciona al construir sistemas discretos.

Una vez fijada la expansión aproximada, el paso esencial para transformar el problema continuo en un problema algebraico es disponer de representaciones matriciales para los operadores que aparecen en la ecuación diferencial. A estas representaciones se las denomina *matrices operacionales*. La idea es que, si una función u que se aproxima mediante un vector base ψ y un vector de coeficientes C , entonces la acción de un operador lineal $\mathcal{L}$ sobre u pueda reescribirse aproximadamente como una multiplicación por una matriz constante dependiente solo de la base ([RAHI19], [MARA22]). En términos generales, si

$$u(x) \approx C^T \Psi(x) \quad (2.2.1)$$

se busca una matriz P tal que

$$\mathcal{L}\{u(x)\} \approx C^T P \Psi(x). \quad (2.2.2)$$

Esta filosofía permite que derivadas e integrales, incluyendo las fraccionarias, se conviertan en operaciones matriciales sencillas, facilitando así su implementación con técnicas de colocación o proyección tipo Galerkin; llegando a sistemas algebraicos resolubles numéricamente.

2.2.2. Conceptos Preliminares

Se introducen las definiciones de la *matriz operacional de integración fraccionaria de Riemann–Liouville*, con la construcción de dicha matriz como la *matriz operacional producto* asociadas a la base *Wavelets* de Chelyshkov fraccionarias $\Psi(x)$ ([RAHI19], [MARA22]).

Posteriormente, se darán las expresiones de las respectivas matrices y el operador fraccionario que servirán de base en el diseño del método numérico eficiente basado en un método de colocación compuesto que utiliza las *Wavelets* de Chelyshkov de orden fraccionario para resolver numéricamente la ecuación en derivadas parciales.

2.2.2.1. Matriz Operacional de Integración de Riemann–Liouville

Sea $\alpha > 0$. La integral fraccionaria de *Riemann–Liouville* (R–L) de orden α aplicada a una función suficientemente regular f se define por

$$(I^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-s)^{\alpha-1} f(s) ds, \quad x \in [0, 1], \quad (2.2.3)$$

donde $\Gamma(\cdot)$ es la función Gamma. Esta definición generaliza la integral clásica, en el sentido de que para $\alpha = 1$ se recupera la integral usual y para $\alpha = n \in \mathbb{N}$ se obtiene la integral iterada n veces.

En un método basado en expansión en una base finita, interesa representar la acción de I^α sobre el vector base. Considérese una aproximación

$$f(x) \approx C^T \Psi(x), \quad (2.2.4)$$

con $\Psi(x) = [\psi_1(x), \dots, \psi_N(x)]^T$. Si existe una matriz $P^{(\alpha)} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ tal que

$$I^\alpha \Psi(x) \approx P^{(\alpha)} \Psi(x), \quad (2.2.5)$$

entonces se obtiene directamente

$$I^\alpha f(x) \approx C^T I^\alpha \Psi(x) \approx C^T P^{(\alpha)} \Psi(x). \quad (2.2.6)$$

La matriz $P^{(\alpha)}$ se denomina *matriz operacional de integración fraccionaria* de Riemann–Liouville asociada a la base Ψ . Su construcción depende del tipo de base. En el caso de *Wavelets*, se explota normalmente su definición por tramos y su representación polinómica local para evaluar integrales del tipo anterior y proyectar el resultado sobre el mismo subespacio generado por Ψ .

Cuando el dominio temporal se toma como $[0, T]$, se utiliza la forma escalada del operador:

$$(I^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad \tau \in [0, T]. \quad (2.2.7)$$

En la práctica, existen dos opciones equivalentes: trabajar directamente en $[0, T]$ construyendo una base $\psi_T(t)$, o realizar el cambio de variable $t = T\hat{t}$ para llevar el problema a $[0, 1]$. Este escalado introduce factores de T^α en la integral fraccionaria, de manera que, si $\hat{f}(\hat{t}) = f(T\hat{t})$, se tiene

$$(I^\alpha f)(T\hat{t}) = T^\alpha (I^\alpha \hat{f})(\hat{t}). \quad (2.2.8)$$

Esta observación es útil porque permite reutilizar una matriz operacional calculada en $[0, 1]$ y adaptada al intervalo $[0, T]$ mediante un factor de escala, tal como se hace habitualmente en esquemas *Wavelet* en tiempo y en espacio.

2.2.2.2. Relación Operador–Matriz

El objetivo de este apartado es fijar con claridad la relación “operador–matriz” que se utilizará posteriormente en la discretización. Si Ψ es el vector base en $[0, 1]$ y $V = \langle \psi_1, \dots, \psi_N \rangle$, el procedimiento para obtener $P^{(\alpha)}$ consiste en imponer que el residuo:

$$R(x) = I^\alpha \Psi(x) - P^{(\alpha)} \Psi(x) \quad (2.2.9)$$

sea pequeño en un sentido apropiado, por ejemplo en el producto interno L^2 (proyección tipo Galerkin) o en un conjunto de puntos de colocación (colocación).

En una formulación tipo Galerkin, una forma natural es imponer

$$\left\langle I^\alpha \psi_j - \sum_{i=1}^N p_{ij}^{(\alpha)} \psi_i, \psi_l \right\rangle = 0, \quad l = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, N. \quad (2.2.10)$$

Esto conduce a sistemas lineales donde aparece la matriz de Gram de la base. Cuando la base es ortogonal o “casi ortogonal” en su subespacio, el cálculo se simplifica notablemente.

En una formulación por colocación, se seleccionan puntos $\{x_r\}_{r=1}^N$ en $[0, 1]$ (por ejemplo nodos tipo diádico o nodos asociados a la base), y se impone

$$I^\alpha \Psi(x_r) = P^{(\alpha)} \Psi(x_r), \quad r = 1, \dots, N, \quad (2.2.11)$$

lo que permite construir $P^{(\alpha)}$ evaluando integrales y resolviendo un sistema lineal. En el contexto de colocación compuesta con *Wavelets* fraccionarias, esta vía resulta especialmente adecuada porque la estructura por tramos de la base produce sistemas con buena estructura computacional.

Para el intervalo $[0, T]$ el planteamiento es análogo. Si se define un vector base temporal

$\psi_T(t)$, se busca una matriz $P_T^{(\alpha)}$ tal que

$$I^\alpha \Psi_T(t) \approx P_T^{(\alpha)} \Psi_T(t). \quad (2.2.12)$$

Si se trabaja mediante el cambio $t = T\hat{t}$, puede expresarse directamente

$$P_T^{(\alpha)} = T^\alpha P^{(\alpha)}, \quad (2.2.13)$$

siempre que $\psi_T(t)$ sea la versión escalada de la base en $[0, 1]$. Esta relación es útil para mantener una notación uniforme entre el operador espacial y el operador temporal en los capítulos aplicados.

2.2.2.3. Construcción de la Matriz Operacional Fraccionaria

Cuando la base Ψ se elige como *Wavelets* de Chelyshkov (o *Wavelets* de Chelyshkov de orden fraccionario), la construcción de $P^{(\alpha)}$ se apoya en dos hechos. En primer lugar, cada *Wavelet* está soportada en un subintervalo pequeño, de manera que las integrales implicadas se evalúan localmente. En segundo lugar, dentro de cada subintervalo la *Wavelet* se expresa como un polinomio (o una combinación de potencias fraccionarias), lo que permite computar de forma explícita o semiexplícita la integral fraccionaria.

Si $u(x) \approx C^T \Psi(x)$ y Ψ es una base de *Wavelets* fraccionarias en $[0, 1]$ o en $[0, \eta')$, se define la matriz operacional $P^{(\alpha)}$ por

$$I^\alpha \Psi(x) \approx P^{(\alpha)} \Psi(x). \quad (2.2.14)$$

En términos prácticos, esta matriz se obtiene proyectando $I^\alpha \psi_j$ sobre el subespacio generado por Ψ , ya sea por Galerkin o por colocación. En los desarrollos basados en *Wavelets* de Chelyshkov fraccionarias, es habitual construir primero la expansión de $I^\alpha \psi_j$ en la base y luego ensamblar los coeficientes en la matriz $P^{(\alpha)}$. Este objeto es el que permite reemplazar el operador integral fraccionario por una multiplicación matricial y, en consecuencia, reducir la ecuación diferencial fraccionaria (o el término fraccionario dentro de una PDE) a un término algebraico en el sistema final.

En problemas bidimensionales, la idea se extiende mediante productos tensoriales. Si

$$u(x, t) \simeq \Lambda(x)^T \Omega \Lambda(t), \quad (2.2.15)$$

y se requiere aplicar I_x^α sobre la variable espacial, se obtiene una representación del tipo

$$I_x^\alpha u(x, t) \simeq \Lambda(x)^T P_x^{(\alpha)} \Omega \Lambda(t), \quad (2.2.16)$$

mientras que, si el operador actúa en el tiempo,

$$I_x^\alpha u(x, t) \simeq \Lambda(x)^T \Omega P_t^{(\alpha)} \Lambda(t), \quad (2.2.17)$$

Este esquema es el que hace viable el paso de PDE (o FPDE) a un sistema algebraico en la matriz de coeficientes Ω , tal como se plantea en el enfoque de colocación compuesta con wavelets fraccionarias ([MARA22]) y en desarrollos relacionados ([RAHI19]).

2.2.2.4. Matriz Operacional Producto $\tilde{C}$ de $\Psi(x)$

En PDE no lineales, además de operadores lineales (derivadas e integrales), aparecen productos de funciones, por ejemplo u^2 , uu_x o $f(u)$, tras aproximar u mediante una expansión en la base *Wavelet*, estos términos requieren una representación adicional para permanecer dentro del mismo subespacio discreto. Por ello se introduce la matriz operacional de producto.

Sea

$$u(x) \simeq C^T \psi(x), \quad v(x) \simeq D^T \psi(x). \quad (2.2.18)$$

Entonces el producto $u(x) v(x)$ se expresa como

$$u(x) v(x) \simeq (C^T \psi(x)) (D^T \psi(x)) = \psi(x)^T (C D^T) \psi(x) \quad (2.2.19)$$

lo cual no es, en general, una combinación lineal directa de las ψ_i . La idea consiste en aproximar el producto de componentes de la base por una combinación lineal dentro del mismo espacio:

$$\psi(x) \psi(x)^T \simeq \sum_{k=1}^N \tilde{C}_k \psi_k(x), \quad (2.2.20)$$

o de forma equivalente, construir una matriz $\tilde{C}$ tal que, para un vector de coeficientes C ,

$$u(x)^2 = C^T \tilde{C} \psi(x) \quad (2.2.21)$$

donde $\tilde{C}$ depende de C y de integrales de productos triples de funciones base. En una formulación tipo Galerkin, los elementos se obtienen a partir de integrales de la forma

$$\int_0^1 \psi_i(x) \psi_j(x) \psi_k(x) dx \quad (2.2.22)$$

que actúan como “coeficientes de acoplamiento”. En una formulación por colocación, es habitual evaluar $\psi(x)$ en los nodos, computar el producto punto a punto y proyectarlo de vuelta al subespacio mediante un sistema lineal. Esta segunda alternativa suele ser más directa en implementación y se adapta bien a la estructura por tramos de las *Wavelets*,

además de mantener matrices con alta dispersión de ceros, lo que beneficia el coste computacional.

Este paso es esencial para tratar los términos no lineales en el método *Wavelet* de Chelyshkov, puesto que permite cerrar el sistema discreto en los coeficientes sin abandonar el espacio de aproximación. En la práctica, tras introducir $\tilde{C}$, la PDE no lineal se convierte en un sistema algebraico no lineal, que se resuelve con métodos iterativos como Newton o variantes cuasi-Newton, tal como es habitual en este tipo de aproximaciones ([RAHI19], [MARA22]).

2.2.3. Operador Integral Fraccionario de Riemann–Liouville

Se desea deducir la expresión del operador integral fraccionario de Riemann–Liouville aplicado a las *Wavelets* de Chelyshkov *fraccionarias* $J^\alpha[\psi_{n,m}^{T,\alpha}(x)]$, y posteriormente construir una matriz operacional de integración fraccionaria de Riemann–Liouville $P^{(\beta)}$ de orden β .

Se derivará la matriz operacional en términos de las funciones beta regularizadas. Las funciones beta regularizadas son funciones hipergeométricas típicas. ([NGO22], [ERMA23]).

• **Definición 2.2.1. Función Beta Regularizada.** ([NGO22], [ERMA23]).

Se define la función *Beta regularizada* $I(x; a, b)$ (*regularized beta function*) por la expresión:

$$I(x; a, b) = \frac{B(x; a, b)}{a, b} \quad (2.2.23)$$

donde la función beta incompleta es

$$B(x; a, b) = \int_0^x t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt. \quad a > 0, \quad b > 0, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (2.2.24)$$

y la función beta completa

$$B(a, b) = \frac{\Gamma(a) \Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}. \quad (2.2.25)$$

La función *beta regularizada* con cuatro argumentos se define como:

$$I(x, y; a, b) = I(x; a, b) - I(y; a, b). \quad (2.2.26)$$

Las funciones de *Mathematica* que calculan la función *Beta regularizada* son:

Mathematica

$$I(x; a, b) \equiv \text{BetaRegularized}[x, a, b] = \frac{\text{Beta}[x, a, b]}{\text{Beta}[a, b]} = \frac{B_x(a, b)}{B(a, b)}$$

$$\begin{aligned} I(x, y; a, b) &= I(x; a, b) - I(y; a, b) \equiv \text{BetaRegularized}[y, x, a, b] \\ &= \text{BetaRegularized}[x, a, b] - \text{BetaRegularized}[y, a, b]. \end{aligned}$$

■ Ejemplo 2.2.1.

Sean las siguientes funciones Beta regularizada:

$$(i) I(x; a, b) = \begin{cases} \text{BetaRegularized}[x, a, b] \\ \frac{\text{Beta}(x, a, b)}{\text{Beta}(a, b)} \end{cases}$$

$$(ii) I(x, y; a, b) = \begin{cases} \text{BetaRegularized}[y, x, a, b] \\ \text{BetaRegularized}[x, a, b] - \text{BetaRegularized}[y, a, b] \end{cases}$$

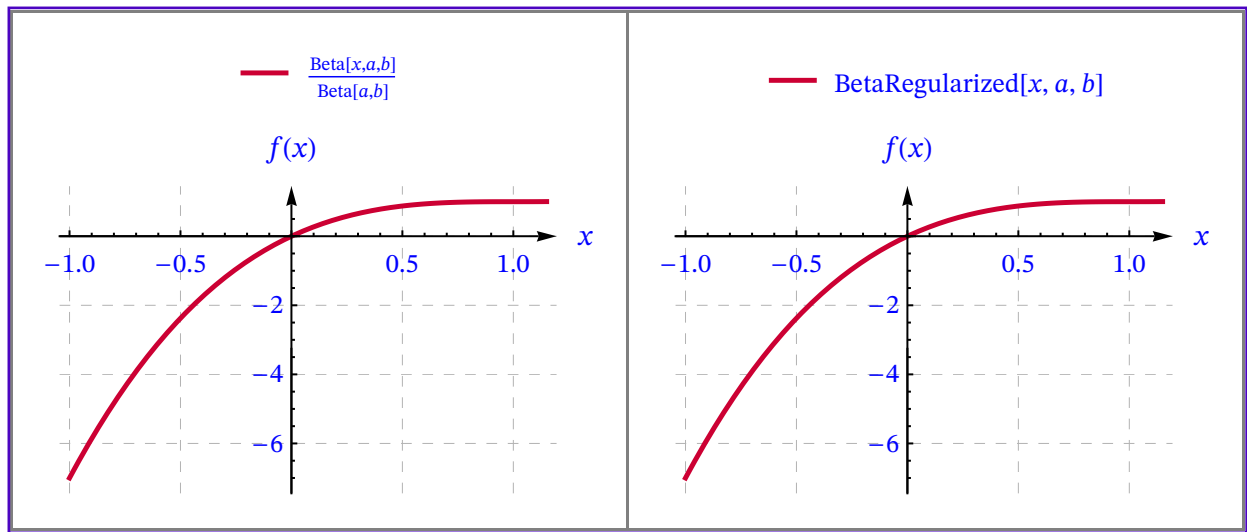
Calcúlense las funciones *Beta regularizada* indicadas para los valores de los parámetros así como su representación gráfica en el intervalo $x \in [-1, 1]$, $y = 2$.

(a) $a = 1, b = 3$.

(b) $a = 0.5, b = 3$.

Indicación:

(a)



SOLUCIÓN

(a)

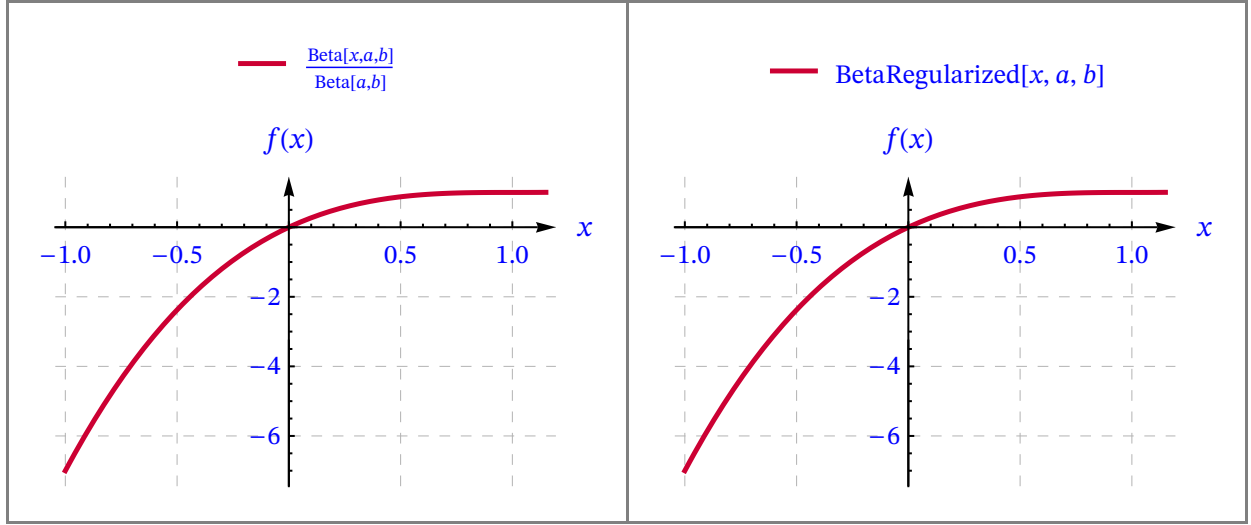
Out[•]=

$$\left\{ I(x; a, b) = \frac{\text{Beta}(x, a, b)}{\text{Beta}(a, b)} = , 1 - (1 - x)^3 \right\}$$

Out[•]=

$$\left\{ \text{BetaRegularized}[x, a, b] = , 1 - (1 - x)^3 \right\}$$

Out[•]=



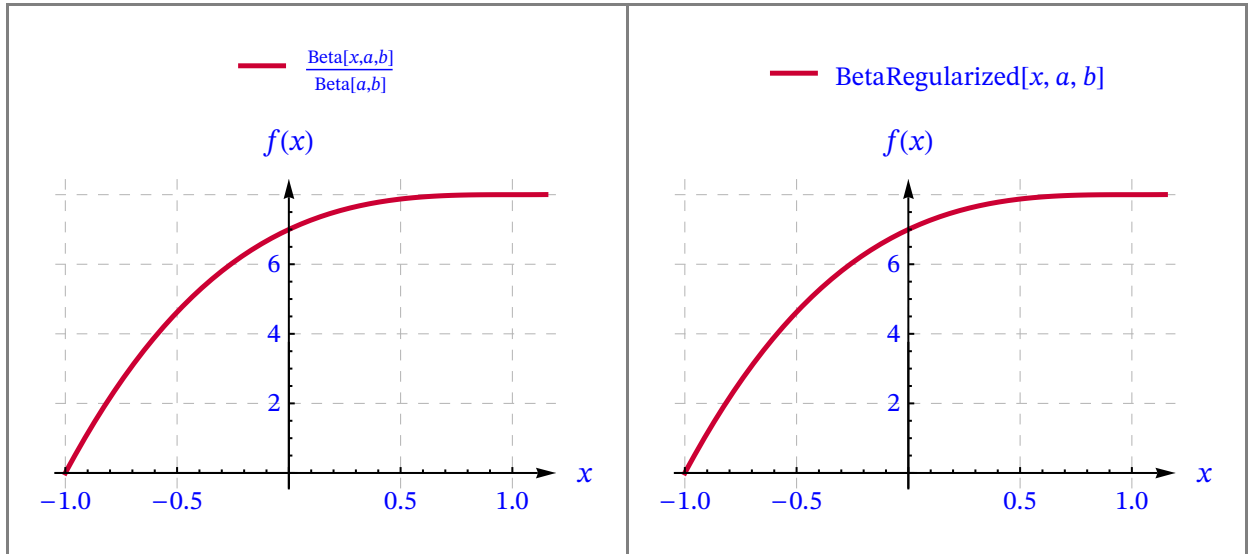
Out[•]=

$$\{I(y, x; a, b) = , (1 - y)^3 - (1 - x)^3\}$$

Out[•]=

$$\{I(y, x; a, b) = \text{BetaRegularized}[x, a, b] - \text{BetaRegularized}[y, a, b] = , (1 - y)^3 - (1 - x)^3\}$$

Out[•]=



(b)

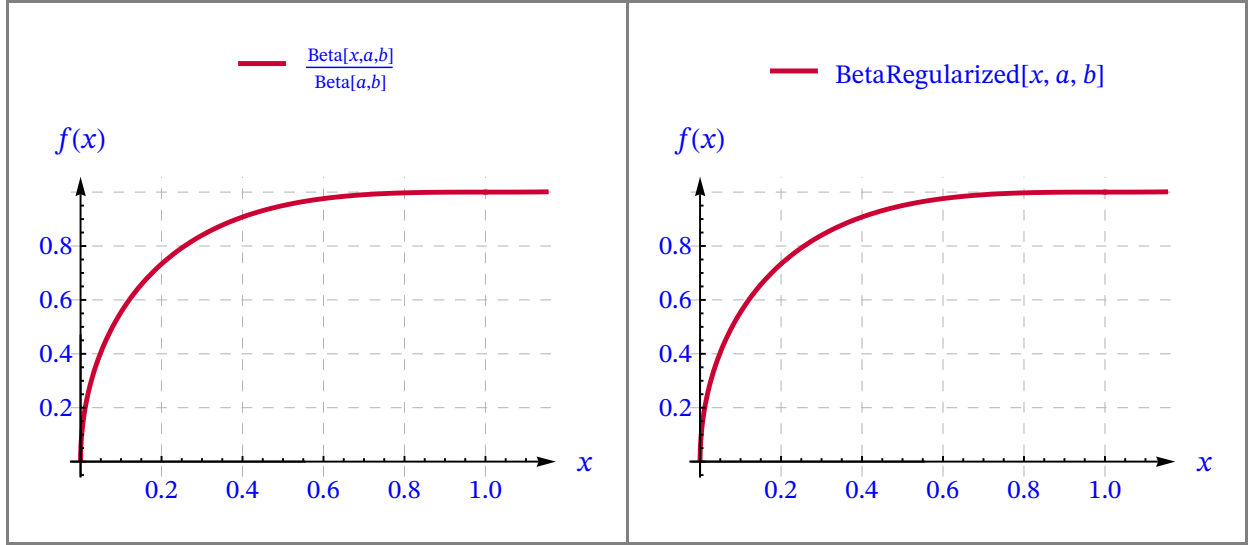
Out[•]=

$$\{I(x; a, b) = \frac{\text{Beta}(x, a, b)}{\text{Beta}(a, b)} = , 0.9375 B_x(0.5, 3)\}$$

Out[•]=

$$\{\text{BetaRegularized}[x, a, b] = , I_x(0.5, 3)\}$$

Out[*]=



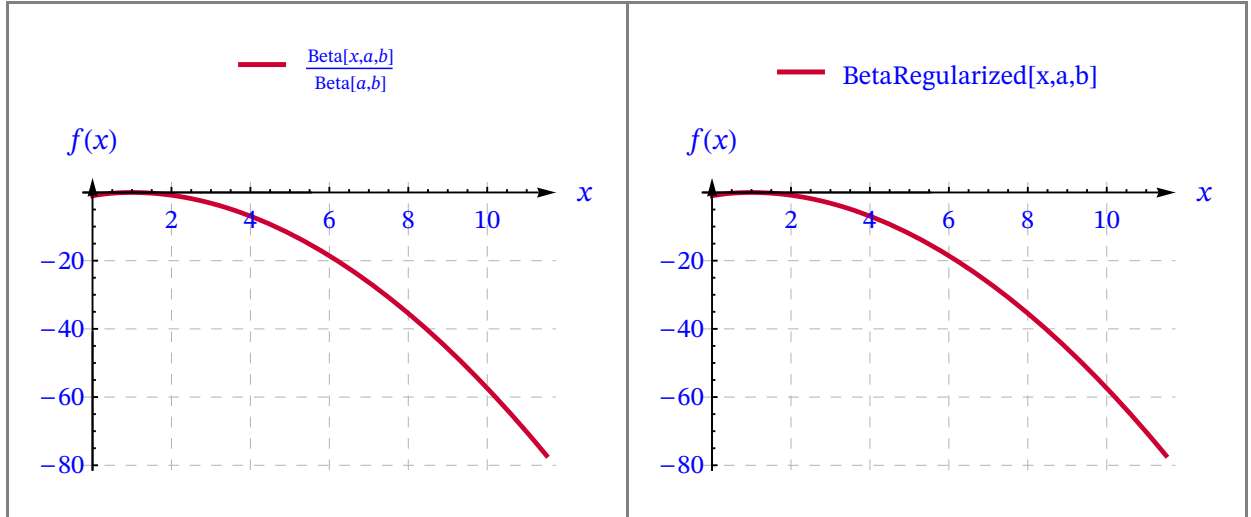
Out[*]=

$$\{I(y, x; a, b) = , I_{(y,x)}(0.9, 2)\}$$

Out[*]=

$$\{I(y, x; a, b) = \text{BetaRegularized}[x, a, b] - \text{BetaRegularized}[y, a, b] = , I_x(0.9, 2) - I_y(0.9, 2)\}$$

Out[*]=



Se establecen algunas propiedades de la integral fraccionaria de Riemann–Liouville relacionadas con la función *beta regularizada* $I(x; a, b)$

1. Si β es un número real no negativo:

$$J^\beta[x^\nu \mu_c(x)] = \frac{\Gamma(\nu + 1)}{\Gamma(\nu + \beta + 1)} x^{\nu+\beta} \left[1 - I\left(\frac{c}{x}; \nu + 1, \beta\right) \right] \mu_c(x). \quad (2.2.27)$$

2. Para $\nu > \beta - 1 > -1$ y $n = \lceil \beta \rceil$ se cumple:

$$D^\beta[x^\nu \mu_c(x)] = \frac{\Gamma(\nu + 1)}{\Gamma(\nu - \beta + 1)} x^{\nu-\beta} \left[1 - I\left(\frac{c}{x}; \nu - n + 1, n - \beta\right) \right] \mu_c(x) \quad (2.2.28)$$

siendo $\mu_c(x)$ la función paso unitario:

$$\mu_c(x) = \begin{cases} 1 & x \geq c \\ 0 & x < c \end{cases}$$

2.2.3.1. Cálculo del Operador Integral Fraccionario de Riemann–Liouville de la Wavelet Chelyshkov Fraccionaria

Se definen dos teoremas que proporciona la fórmula exacta para el operador integral fraccionario de R–L de la *Wavelet* de Chelyshkov fraccionaria en términos de las funciones *beta* regularizadas.

▼ **Teorema 2.2.1. Operador Integral Fraccionario de R–L de la Wavelet Chelyshkov Fraccionaria.** ($\alpha > 0$, $n > 0$) ([NGO22], [ERMA23]).

Sea $\Psi^{T,\alpha}(x) = \{\psi_{nm}^{T,\alpha}(x)\}$ el vector de *Wavelets* de Chelyshkov fraccionarias de grado M de dimensión $m^* = 2^k (M + 1)$, y sea $\alpha > 0$, entonces el operador integral fraccionario J^β tiene la expresión:

$$J^\beta [\psi_{nm}^{T,\alpha}(x)] = \begin{cases} 0 & x \leq c_1 \\ U(x) & c_1 \leq x \leq c_2 \\ V(x) & x \geq c_2 \end{cases} \quad (\alpha > 0, n > 0) \quad (2.2.29)$$

donde

$$U(x) = \sqrt{2m+1} \, 2^{\frac{k}{2}} \sum_{s=0}^{M-m} a_{s,m} \sum_{r=0}^{s+m} \binom{s+m}{r} \frac{2^{\alpha r}}{T^{\alpha r}} (-n)^{s+m-r} \times \frac{\Gamma(\alpha r + 1)}{\Gamma(\alpha r + \beta + 1)} x^{\alpha r + \beta} \left[1 - I\left(\frac{c_1}{x}; \alpha r + 1, \beta\right) \right] \quad (2.2.30)$$

$$V(x) = \sqrt{2m+1} \, 2^{\frac{k}{2}} \sum_{s=0}^{M-m} a_{s,m} \sum_{r=0}^{s+m} \binom{s+m}{r} \left(\frac{2^{\alpha r}}{T^{\alpha r}} (-n)^{s+m-r} \right) \times \frac{\Gamma(\alpha r + 1)}{\Gamma(\alpha r + 1 + \beta)} x^{\alpha r + \beta} I\left(\frac{c_2}{x}, \frac{c_1}{x}; \alpha r + 1, \beta\right) \quad (2.2.31)$$

siendo c_1 y c_2 :

$$c_1 = T \left(\frac{n}{2^k} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad c_2 = T \left(\frac{n+1}{2^k} \right)^{\frac{1}{\alpha}}. \quad (2.2.32)$$

▼ **Teorema 2.2.2. Operador Integral Fraccionario de R–L de las Wavelets Chelyshkov Fraccionarias.** ($\alpha > 0$, $n = 0$). ([NGO22], [ERMA23]).

Sea $\Psi^{T,\alpha}(x) = \{\psi_{nm}^{T,\alpha}(x)\}$ el vector de *Wavelets* de Chelyshkov fraccionarias de grado M de dimensión $m^* = 2^k (M + 1)$, y sea $\alpha > 0$ y $n = 0$, entonces el operador integral fraccionario J^β tiene la expresión:

$$J^\beta [\psi_{nm}^{T,\alpha}(x)] = \begin{cases} 0 & x \leq c_1 \\ U(x) & c_1 = 0 \leq x \leq c_2 \\ V(x) & x \geq c_2 \end{cases} \quad (\alpha > 0, n = 0) \quad (2.2.33)$$

donde

$$U(x) = \sqrt{2m+1} 2^{\frac{k}{2}} \sum_{s=0}^{M-m} a_{sm} \left(\frac{2^{k(m+s)}}{T^{\alpha(m+s)}} \right) \times \left(\frac{\Gamma(\alpha(m+s)+1)}{\Gamma(\alpha(m+s)+\beta+1)} x^{\alpha(m+s)+\beta} \right) \quad (2.2.34)$$

$$V(x) = \sqrt{2m+1} 2^{\frac{k}{2}} \sum_{s=0}^{M-m} a_{sm} \left(\frac{2^{k(m+s)}}{T^{\alpha(m+s)}} \right) \times \left(\frac{\Gamma(\alpha(m+s)+1)}{\Gamma(\alpha(m+s)+\beta+1)} x^{\alpha(m+s)+\beta} \left(I\left(\frac{c_2}{x}; \alpha(m+s)+1, \beta\right) \right) \right). \quad (2.2.35)$$

siendo c_1 y c_2 :

$$(\alpha > 0, n = 0) \\ c_1 = T \left(\frac{n}{2^k} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad c_2 = T \left(\frac{n+1}{2^k} \right)^{\frac{1}{\alpha}} = T \left(\frac{1}{2^k} \right)^{\frac{1}{\alpha}}. \quad (2.2.36)$$

Observaciones 2.2.1.

- (i) El operador integral fraccionario $J^\beta [\psi_{nm}^{T,\alpha}(x)]$ aplicado a la *Wavelets* de Chelyshkov fraccionarias, define una función en el intervalo $\left[T \left(\frac{n}{2^k} \right)^{\frac{1}{\alpha}}, T \left(\frac{n+1}{2^k} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right) \cup \left[T \left(\frac{n+1}{2^k} \right)^{\frac{1}{\alpha}}, T \right]$
- (ii) Si $T = 1$, $\alpha = 1$, el intervalo es

$$J^\beta [\psi_{nm}^{T,\alpha}(x)] \in \left[\frac{n}{2^k}, \frac{n+1}{2^k} \right) \cup \left[\frac{n+1}{2^k}, 1 \right].$$

■ **Ejemplo 2.2.2. Operador Integral Fraccionario de las Wavelets de Chelyshkov Fraccionarias.**

Sean las *Wavelets* de Chelyshkov Fraccionarias $\psi_{nm}^{T,\alpha}(x)$ como funciones definidas por intervalos con los parámetros k, M .

(i) Cálculense las *Wavelets* de Chelyshkov fraccionarias $\psi_{nm}^{T,\alpha}(x)$ y la integral fraccionaria de Riemann–Liouville de orden α aplicando las definiciones dadas:

$$\bullet \psi_{nm}^{T,\alpha}(x) = \begin{cases} \sqrt{2m+1} 2^{\frac{k}{2}} C_{M,m} \left(2^k \left(\frac{x}{T} \right)^\alpha - n \right) & \frac{x}{T} \in \left[\left(\frac{n}{2^k} \right)^\frac{1}{\alpha}, \left(\frac{n+1}{2^k} \right)^\frac{1}{\alpha} \right) \\ 0 & \text{Resto} \end{cases} \text{(definición por partes)}$$

▪ Definición de integral fraccionaria de Riemann–Liouville:

$$\bullet I_1 = J^\beta [\psi_{nm}^{T,\alpha}(x)] = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^x [(x-t)^{\beta-1} \psi_{nm}^{T,\alpha}(x)] dt \quad (\alpha > 0) \quad \text{(definición)}$$

▪ Operador integral fraccionario de Riemann–Liouville de $\psi_{nm}^{T,\beta}(x)$:

• $I_2 = J^\beta [\psi_{nm}^{T,\alpha}(x)]$ (Teoremas del Operador Integral Fraccionario de R–L de la *Wavelet* Chelyshkov Fraccionaria para $(\alpha > 0, n = 0)$ y $(\alpha > 0, n \neq 0)$).

(ii) Represéntense las gráficas de la función $\psi_{nm}^{T,\beta}(x)$ y las integrales I_1, I_2 .

(iii) Créese una tabla con los datos $x, I_1(x), I_2(x)$ para $x \in [0, 1]$.

$$(a) \quad k = 0, M = 2 \quad \beta = 1 \quad [A, B] = [0, T] = [0, 1] \quad T = 1, \alpha = 1$$

$$(b) \quad k = 1, M = 2 \quad \beta = 1 \quad [A, B] = [0, T] = [0, 1] \quad T = 1, \alpha = 1.$$

$$(c) \quad k = 2, M = 2 \quad \beta = 1 \quad [A, B] = [0, T] = [0, 1] \quad T = 1, \alpha = 1.$$

SOLUCIÓN

(a)

Operador Integral Fraccionario de las *Wavelets* de Chelyshkov Fraccionarias.

$$\left(\begin{array}{lll} [A, B] = & [0, 1] & \text{(intervalo } x) \\ \{T, \alpha\} = & \{1, 1\} & \\ \{k, 2^k\} = & \{0, 1\} & \text{(máxima resolución)} \\ M = & 2 & \text{(máx. grado polinomio)} \\ m^* = 2^k(M+1) = & 3 & \text{Dimensión } \mathcal{B} = \{\psi_k\} \\ \{\beta\} = & \{1\} & \end{array} \right)$$

(a) Matriz con las *Wavelets* de Chelyshkov Fraccionarias $\Psi^{T,\alpha}(x)$

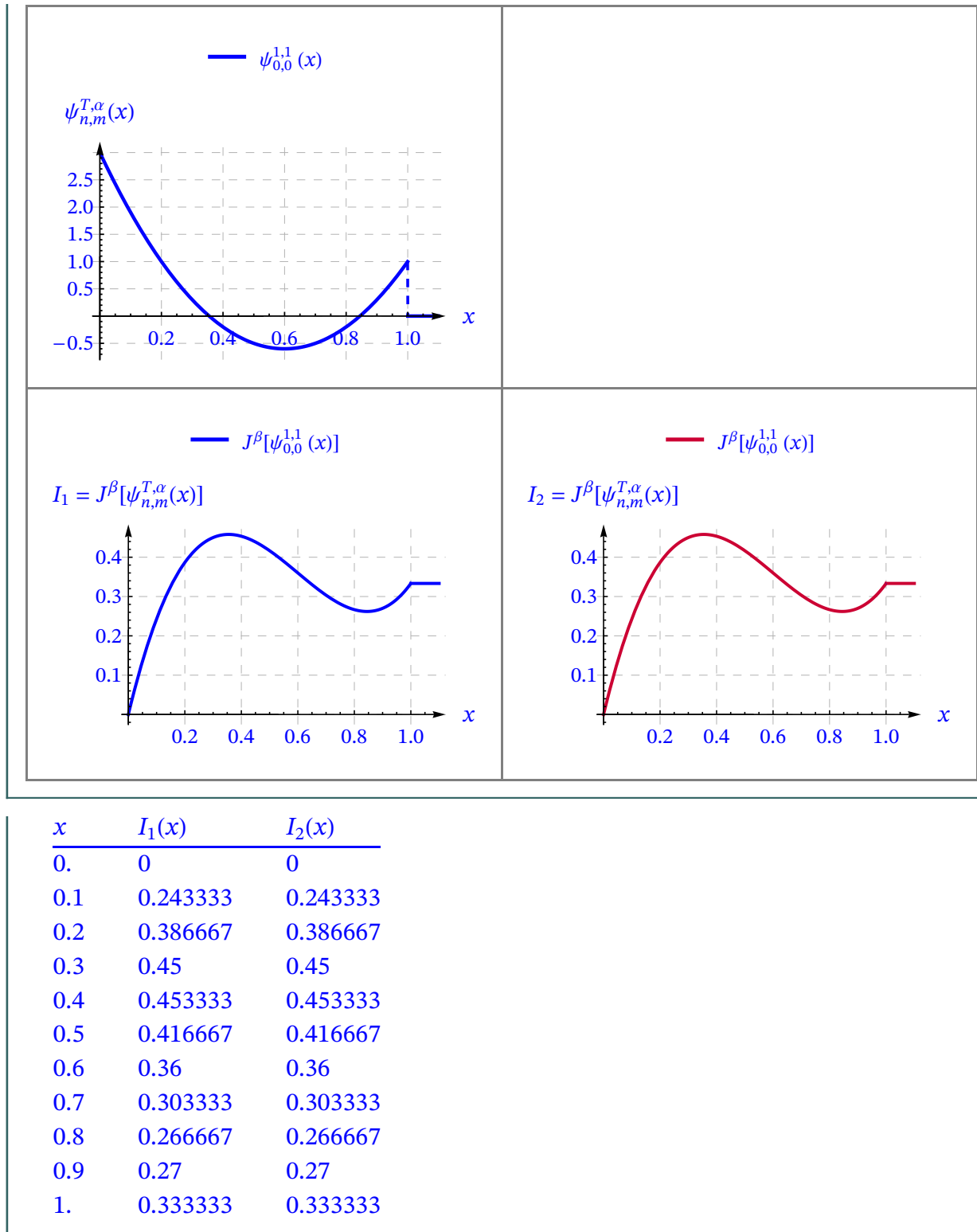
$$\Psi^{T,\alpha}(x) = \begin{pmatrix} \begin{cases} 10x^2 - 12x + 3 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{3}(4-5x)x & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{5}x^2 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \end{pmatrix}$$

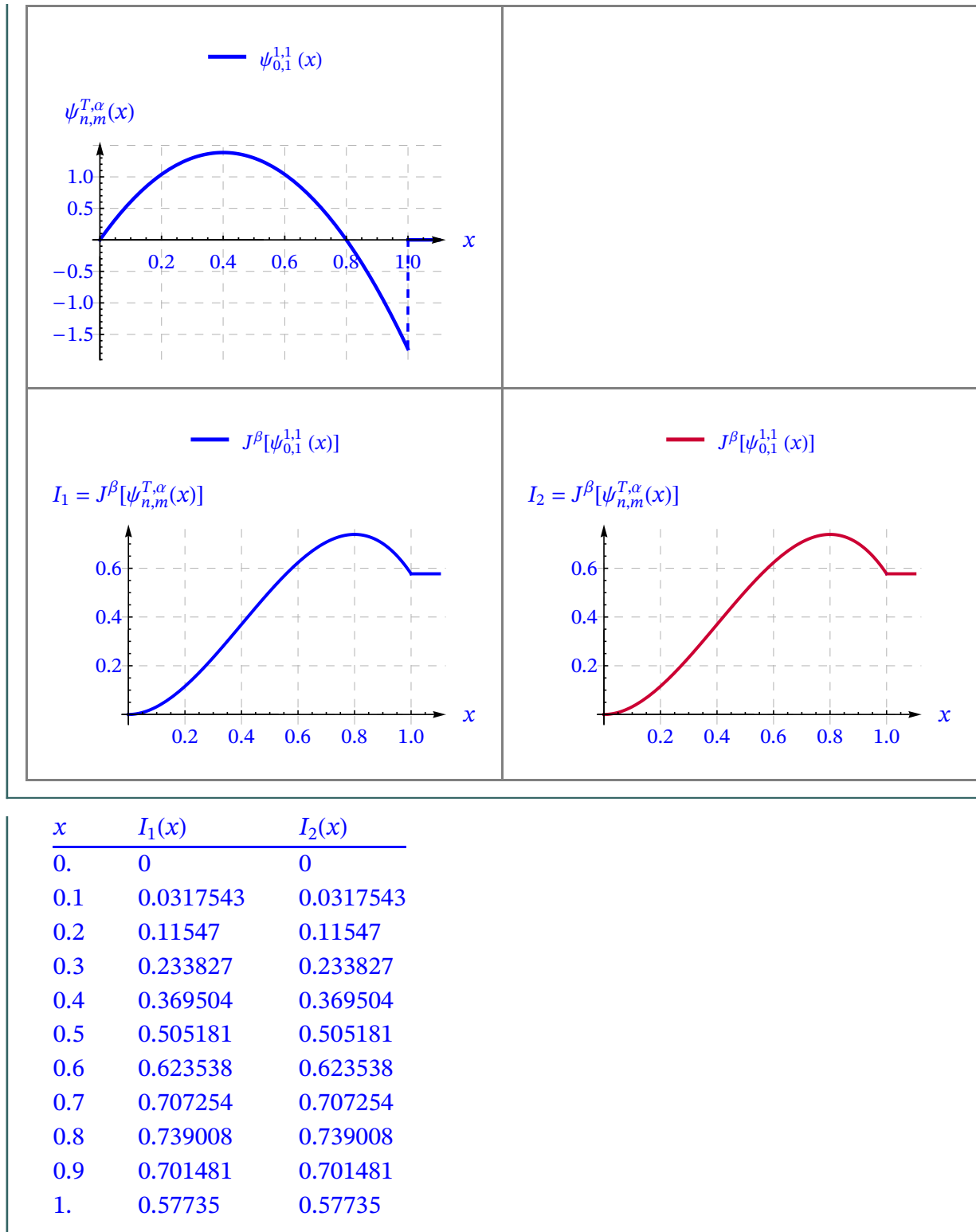
(b) Matriz con las integrales fraccionarias R–L de orden $\beta = 1$ calculadas con la definición de integral de Riemann–Liouville:

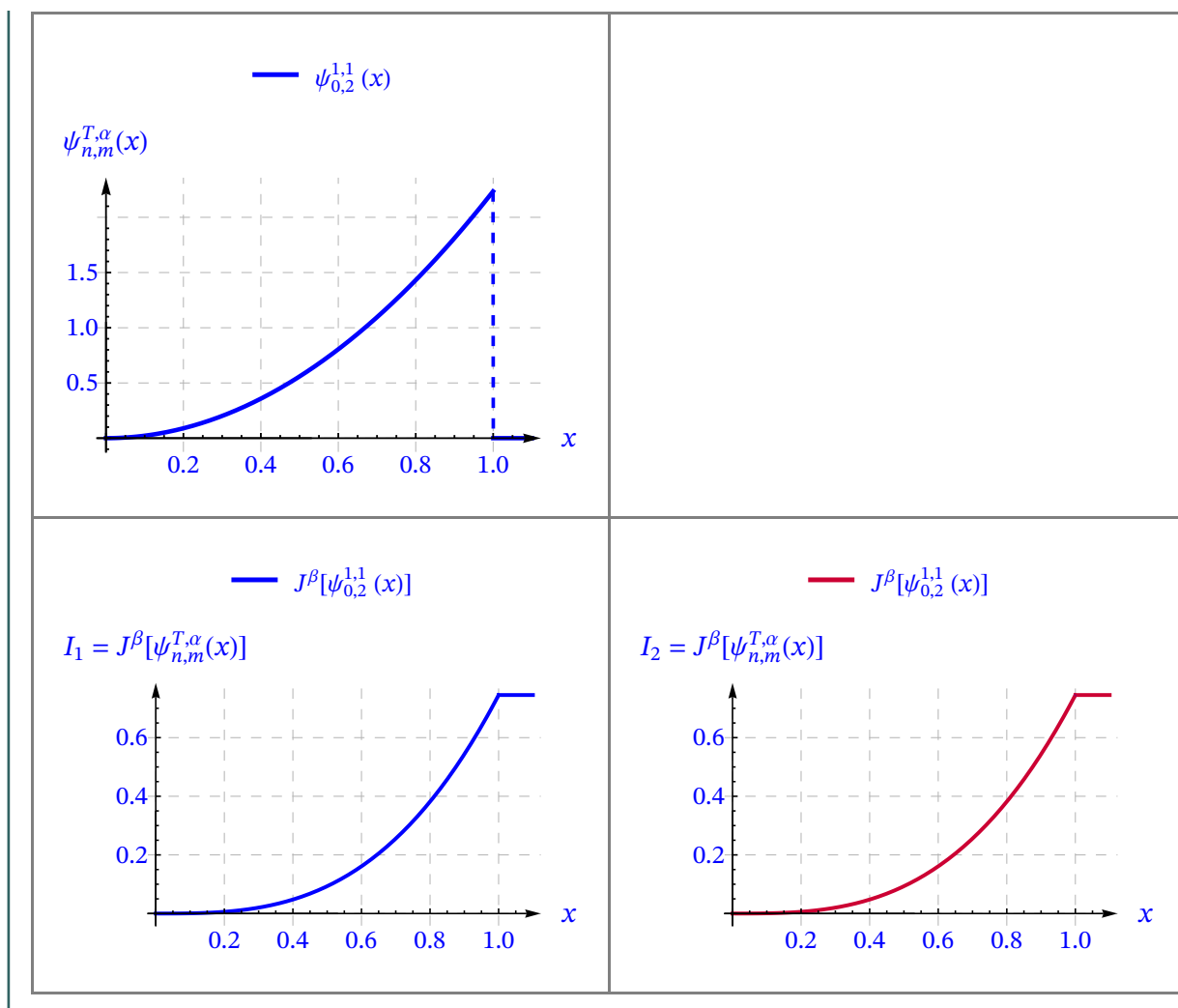
$$I_1 = J^{(\beta)}[\Psi^{T,\alpha}(x)] = \begin{pmatrix} \begin{cases} \frac{1}{3} & x > 1 \\ \frac{1}{3}x(10x^2 - 18x + 9) & 0 < x \leq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{3}} & x > 1 \\ \frac{(6-5x)x^2}{\sqrt{3}} & 0 < x \leq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{\sqrt{5}}{3} & x > 1 \\ \frac{\sqrt{5}x^3}{3} & 0 < x \leq 1 \end{cases} \end{pmatrix}$$

(c) Matriz con las integrales fraccionarias R–L de orden $\beta = 1$ calculadas con el operador integral fraccionario de Riemann–Liouville de $\psi_{n,m}^{T,\alpha}$:

$$I_2 = J^{(\beta)}[\Psi^{T,\alpha}(x)] = \begin{pmatrix} \begin{cases} \frac{1}{3} & x > 1 \\ \frac{1}{3}x(10x^2 - 18x + 9) & 0 < x \leq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{3}} & x > 1 \\ -\frac{x^2(5x-6)}{\sqrt{3}} & 0 < x \leq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{\sqrt{5}}{3} & x > 1 \\ \frac{\sqrt{5}x^3}{3} & 0 < x \leq 1 \end{cases} \end{pmatrix}$$



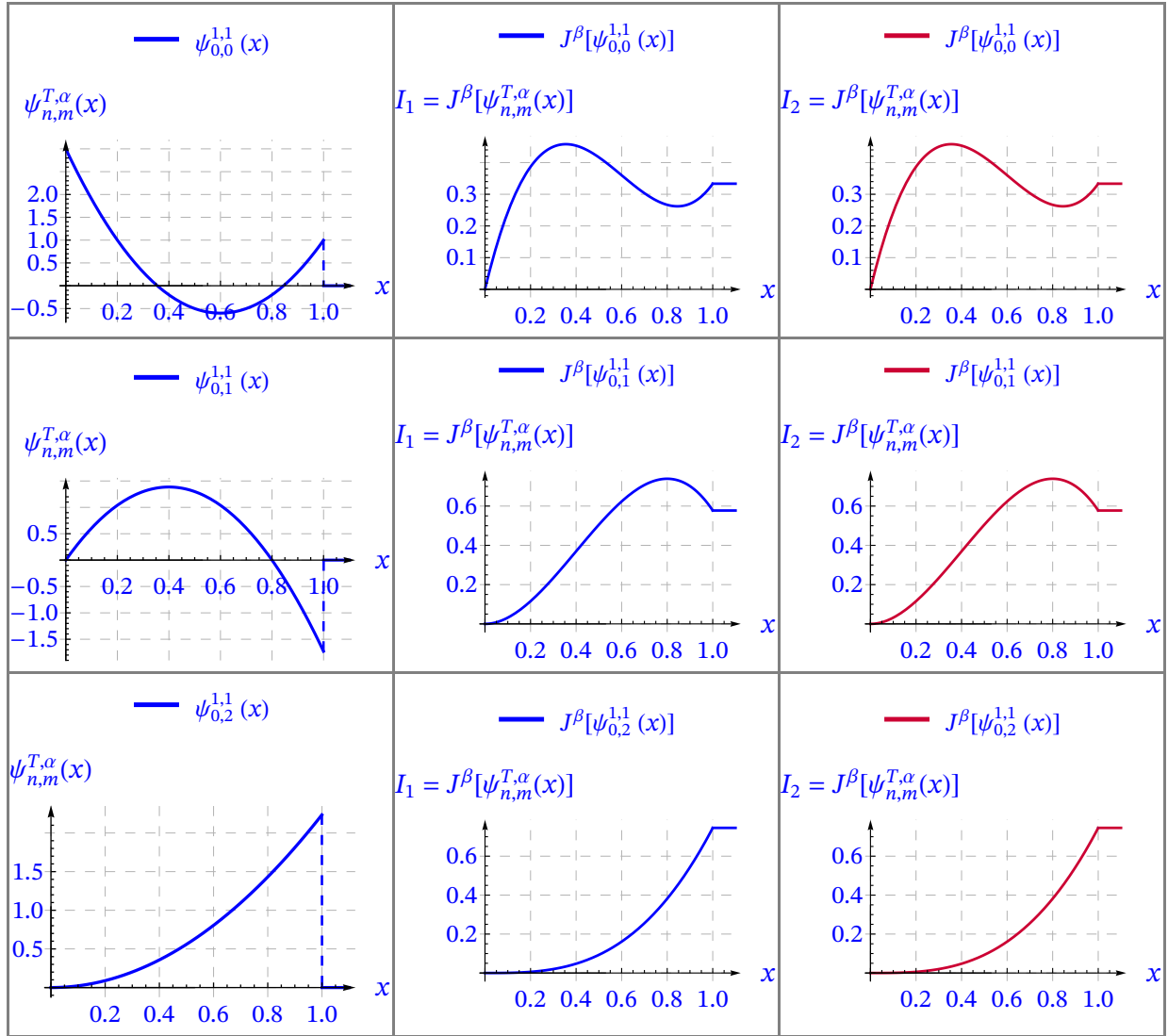




x	$I_1(x)$	$I_2(x)$
0.	0	0
0.1	0.000745356	0.000745356
0.2	0.00596285	0.00596285
0.3	0.0201246	0.0201246
0.4	0.0477028	0.0477028
0.5	0.0931695	0.0931695
0.6	0.160997	0.160997
0.7	0.255657	0.255657
0.8	0.381622	0.381622
0.9	0.543365	0.543365
1.	0.745356	0.745356

Gráficas de la función $\psi_{n,m}^{T,\alpha}(x)$ y las integrales I_1 e I_2 .

Out[•]=



(b)

Operador Integral Fraccionario de las Wavelets de Chelyshkov Fraccionarias.

$$\left(\begin{array}{lll} [A, B] = & [0, 1] & (\text{intervalo } x) \\ \{T, \alpha\} = & \{1, 1\} & \\ \{k, 2^k\} = & \{1, 2\} & (\text{m}{\acute{a}}x\text{ima resoluci}{\acute{o}}n) \\ M = & 2 & (\text{m}{\acute{a}}x.\text{ grado polinomio}) \\ m^* = 2^k(M+1) = & 6 & \text{Dimensi}{\acute{o}}n \mathcal{B} = \{\psi_k\} \\ \{\beta\} = & \{1\} & \end{array} \right)$$

 (a) Matriz con las Wavelets de Chelyshkov Fraccionarias $\Psi^{T,\alpha}(x)$

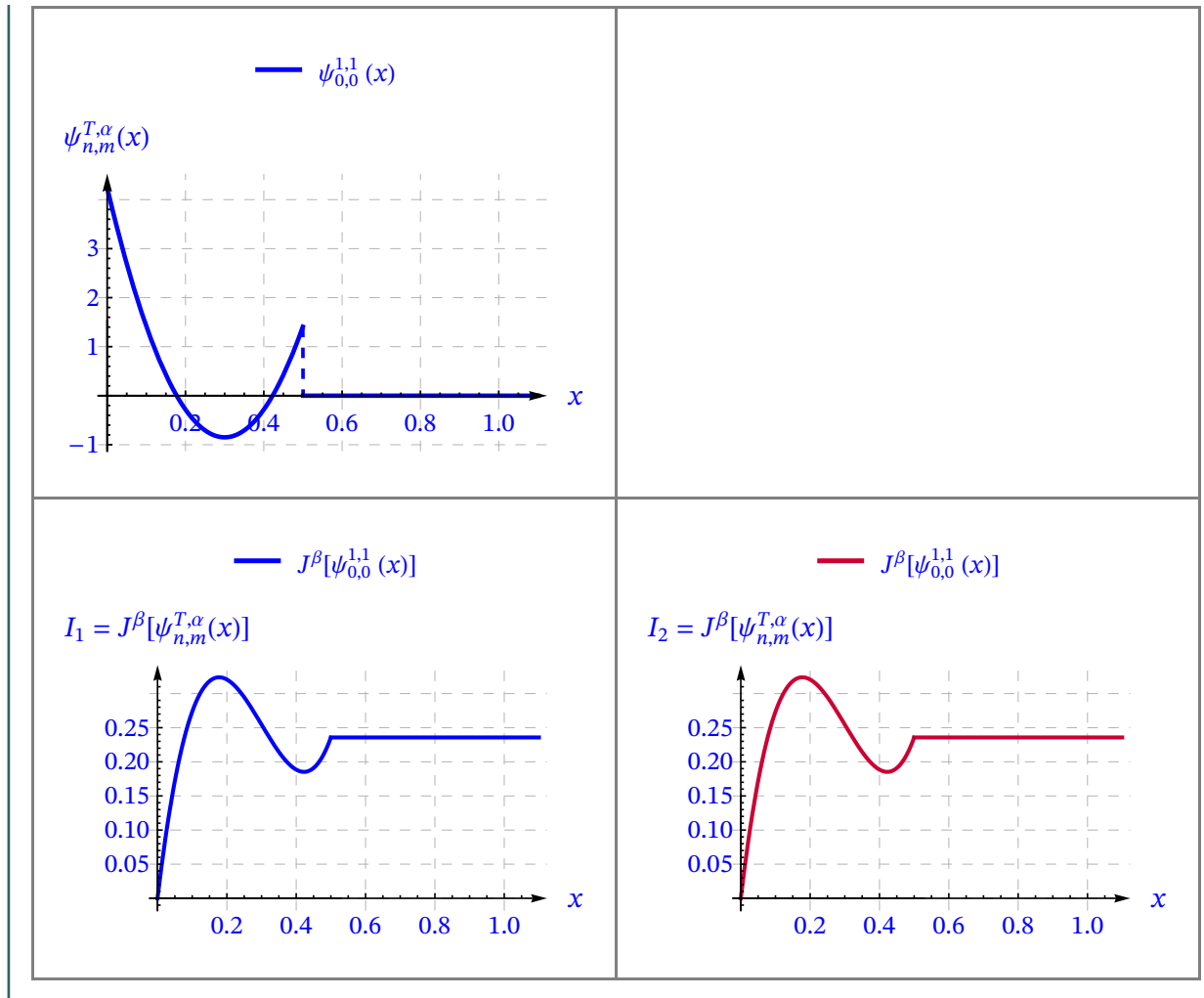
$$\Psi^{T,\alpha}(x) = \begin{pmatrix} \begin{cases} \sqrt{2} (40x^2 - 24x + 3) & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \begin{cases} 4\sqrt{6} (2 - 5x)x & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \begin{cases} 4\sqrt{10} x^2 & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{2} (40x^2 - 64x + 25) & \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{6} (-20x^2 + 28x - 9) & \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{10} (1 - 2x)^2 & \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \end{pmatrix}$$

(b) Matriz con las integrales fraccionarias R–L de orden $\beta = 1$ calculadas con la definición de integral de Riemann–Liouville:

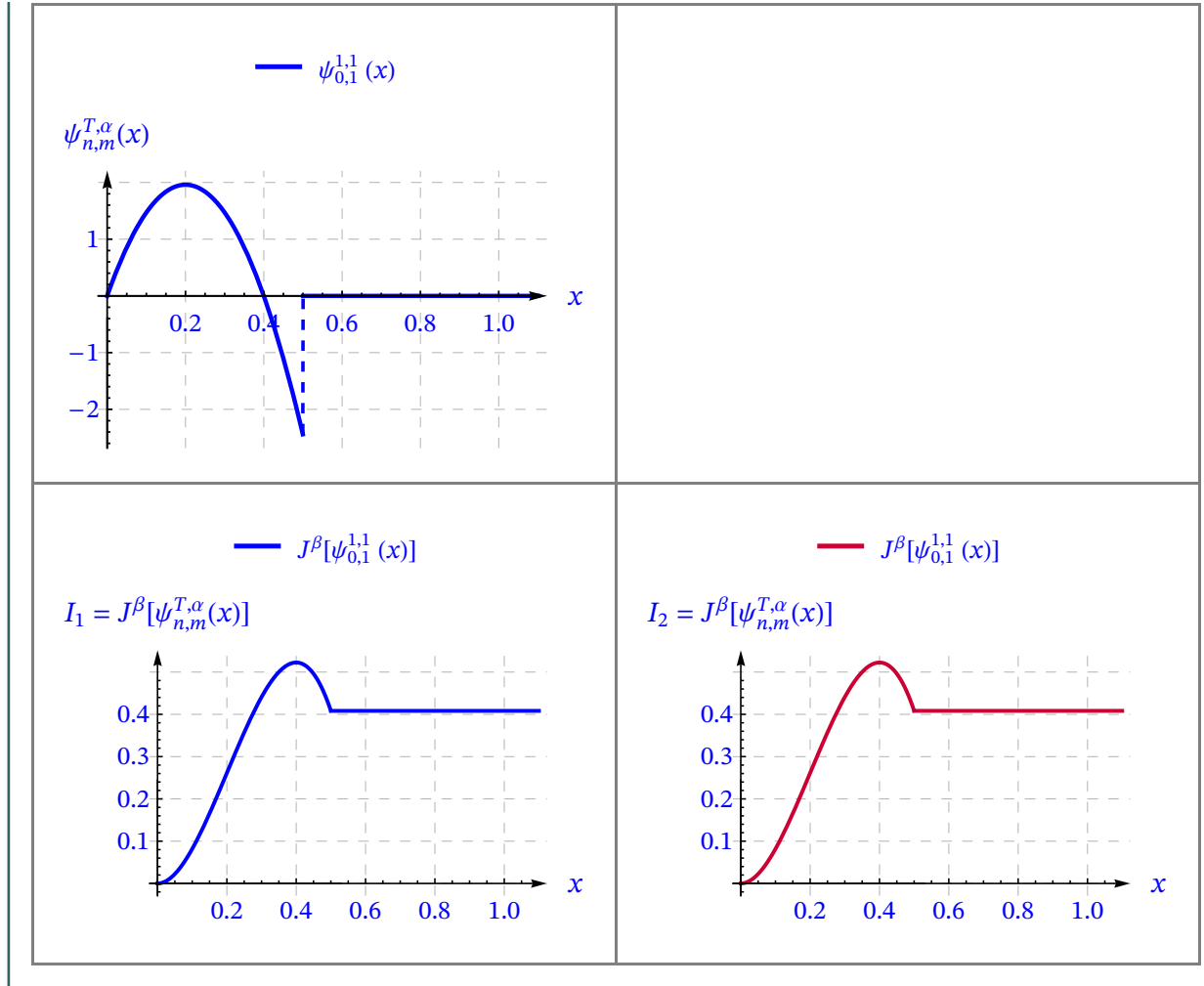
$$I_1 = J^{(\beta)}[\Psi^{T,\alpha}(x)] = \begin{pmatrix} \begin{cases} \frac{1}{3\sqrt{2}} & 2x > 1 \\ \frac{1}{3}\sqrt{2}x(40x^2 - 36x + 9) & 0 < x \leq \frac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{6}} & 2x > 1 \\ 4\sqrt{\frac{2}{3}}(3 - 5x)x^2 & 0 < x \leq \frac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{\sqrt{\frac{5}{2}}}{3} & x > \frac{1}{2} \\ \frac{4\sqrt{10}x^3}{3} & 0 < x \leq \frac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{1}{3\sqrt{2}} & x > 1 \\ \frac{80x^3 - 192x^2 + 150x - 37}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{6}} & x > 1 \\ -\frac{(1-2x)^2(10x-11)}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{\sqrt{\frac{5}{2}}}{3} & x > 1 \\ \frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{2}}(2x-1)^3 & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases} \end{pmatrix}$$

(c) Matriz con las integrales fraccionarias R–L de orden $\beta = 1$ calculadas con el operador integral fraccionario de Riemann–Liouville de $\psi_{n,m}^{T,\alpha}$:

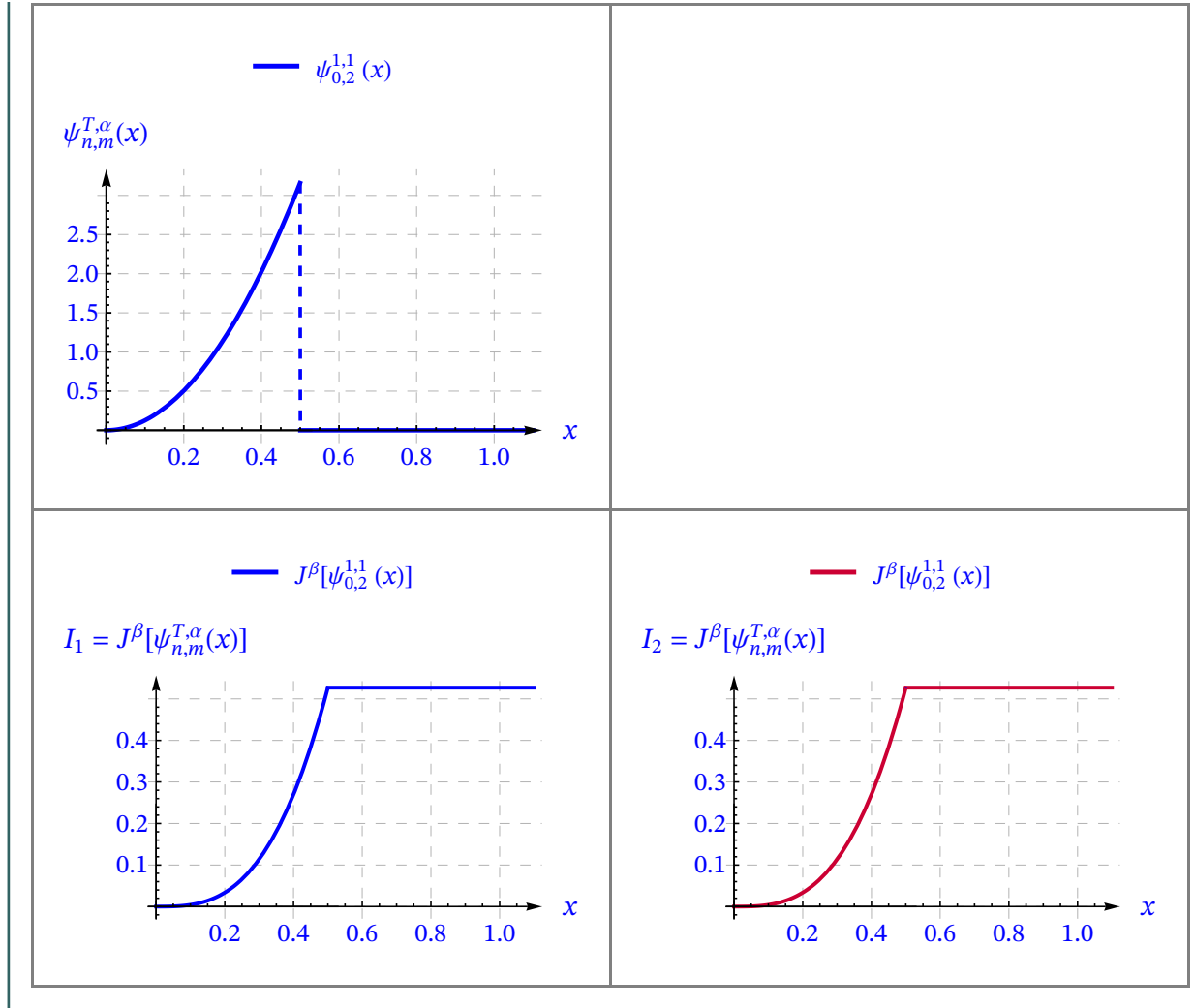
$$I_2 = J^{(\beta)}[\Psi^{T,\alpha}(x)] = \left(\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{3\sqrt{2}} & x > \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3}\sqrt{2}x(40x^2 - 36x + 9) & 0 < x \leq \frac{1}{2} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{\sqrt{6}} & x > \frac{1}{2} \\ -4\sqrt{\frac{2}{3}}x^2(5x - 3) & 0 < x \leq \frac{1}{2} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\sqrt{\frac{5}{2}}}{3} & x > \frac{1}{2} \\ \frac{4\sqrt{10}x^3}{3} & 0 < x \leq \frac{1}{2} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{3\sqrt{2}} & x > 1 \\ \frac{(2x-1)(40x^2-76x+37)}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{\sqrt{6}} & x > 1 \\ -\frac{(2x-1)^2(10x-11)}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\sqrt{\frac{5}{2}}}{3} & x > 1 \\ \frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{2}}(2x-1)^3 & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{array} \right. \end{array} \right)$$



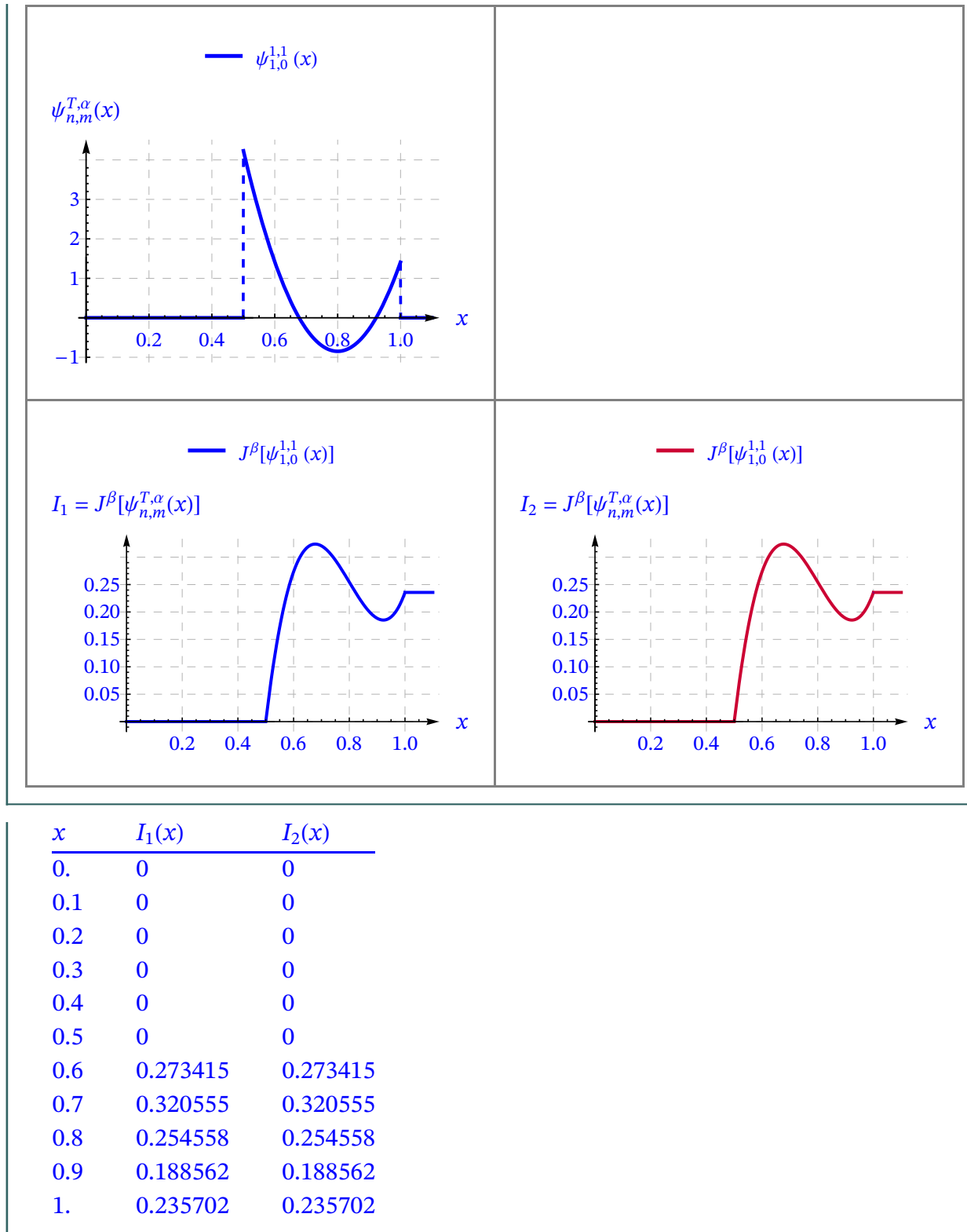
x	$I_1(x)$	$I_2(x)$
0.	0	0
0.1	0.273415	0.273415
0.2	0.320555	0.320555
0.3	0.254558	0.254558
0.4	0.188562	0.188562
0.5	0.235702	0.235702
0.6	$\frac{1}{3\sqrt{2}}$	$\frac{1}{3\sqrt{2}}$
0.7	$\frac{1}{3\sqrt{2}}$	$\frac{1}{3\sqrt{2}}$
0.8	$\frac{1}{3\sqrt{2}}$	$\frac{1}{3\sqrt{2}}$
0.9	$\frac{1}{3\sqrt{2}}$	$\frac{1}{3\sqrt{2}}$
1.	$\frac{1}{3\sqrt{2}}$	$\frac{1}{3\sqrt{2}}$

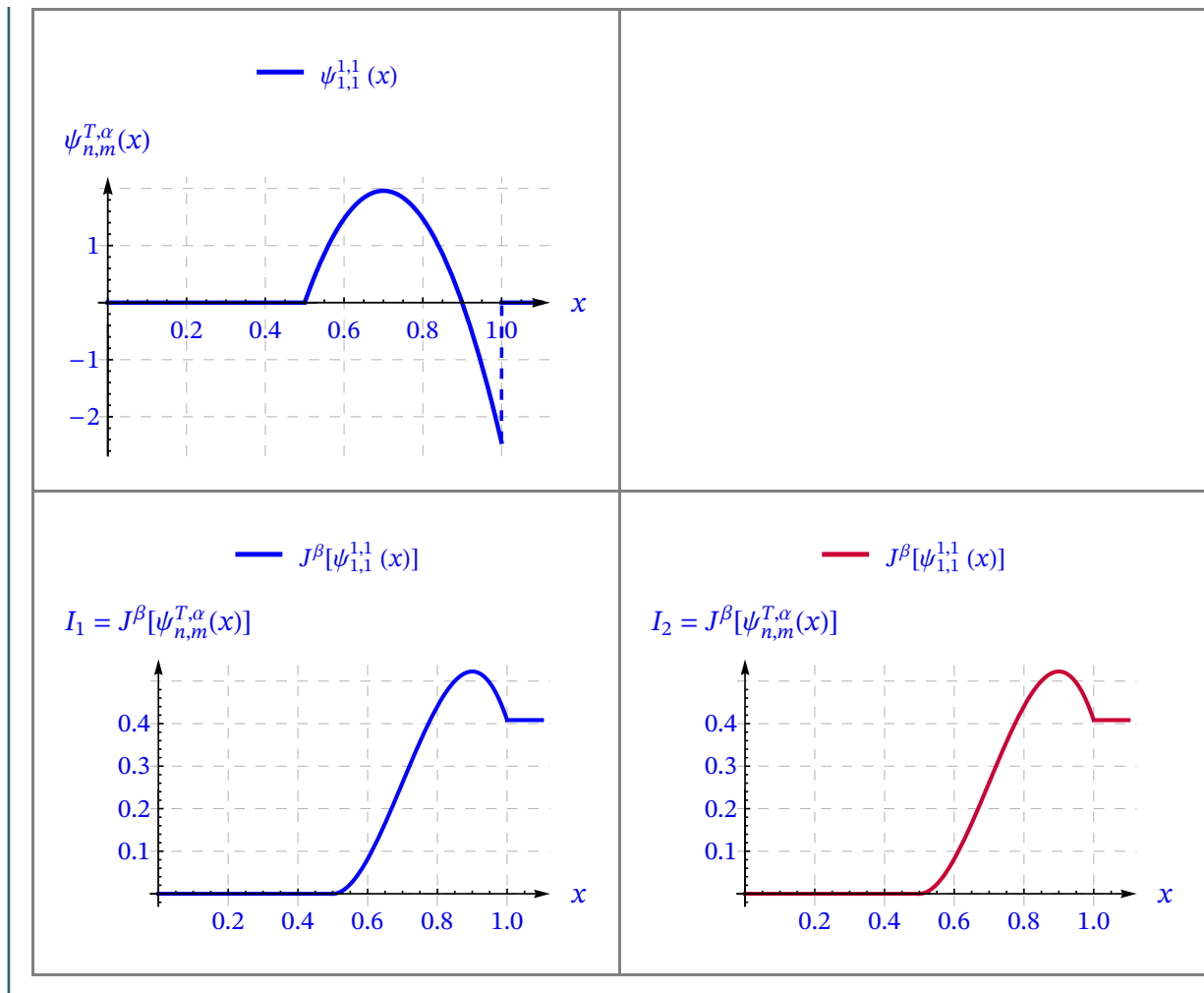


x	$I_1(x)$	$I_2(x)$
0.	0	0
0.1	0.0816497	0.0816497
0.2	0.261279	0.261279
0.3	0.440908	0.440908
0.4	0.522558	0.522558
0.5	0.408248	0.408248
0.6	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$
0.7	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$
0.8	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$
0.9	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$
1.	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$

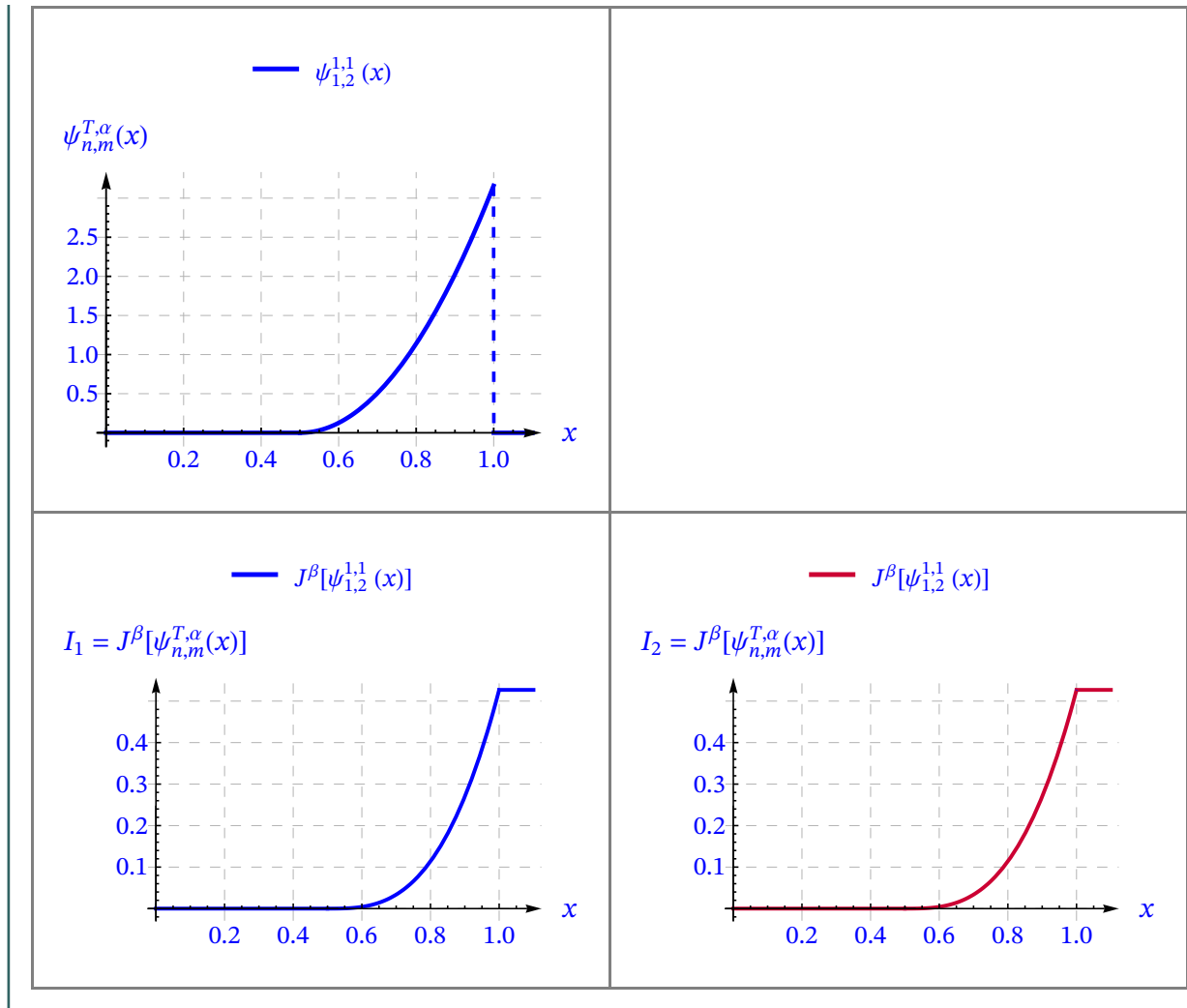


x	$I_1(x)$	$I_2(x)$
0.	0	0
0.1	0.00421637	0.00421637
0.2	0.033731	0.033731
0.3	0.113842	0.113842
0.4	0.269848	0.269848
0.5	0.527046	0.527046
0.6	$\frac{\sqrt{\frac{5}{2}}}{3}$	$\frac{\sqrt{\frac{5}{2}}}{3}$
0.7	$\frac{\sqrt{\frac{5}{2}}}{3}$	$\frac{\sqrt{\frac{5}{2}}}{3}$
0.8	$\frac{\sqrt{\frac{5}{2}}}{3}$	$\frac{\sqrt{\frac{5}{2}}}{3}$
0.9	$\frac{\sqrt{\frac{5}{2}}}{3}$	$\frac{\sqrt{\frac{5}{2}}}{3}$
1.	$\frac{\sqrt{\frac{5}{2}}}{3}$	$\frac{\sqrt{\frac{5}{2}}}{3}$





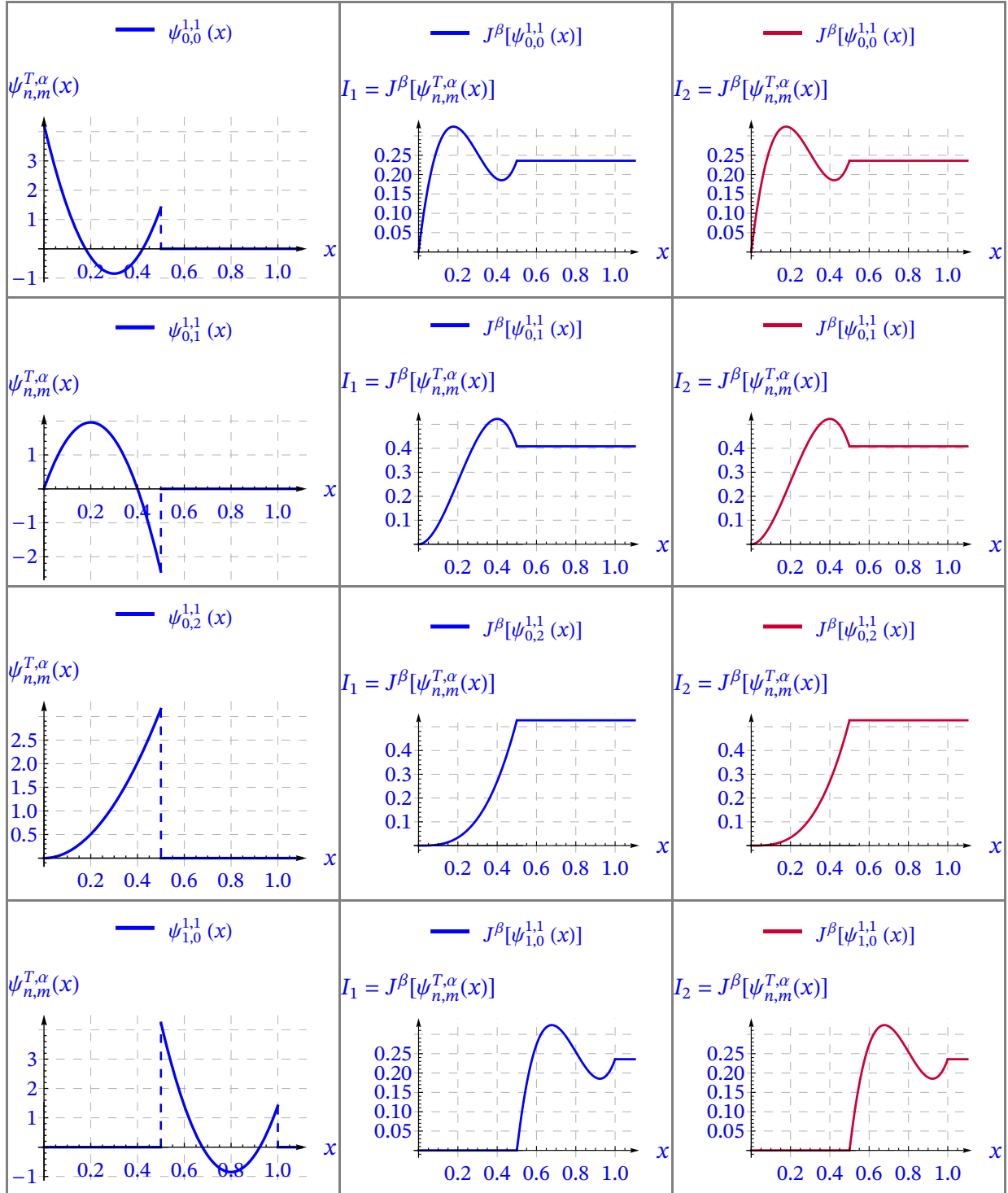
x	$I_1(x)$	$I_2(x)$
0.	0	0
0.1	0	0
0.2	0	0
0.3	0	0
0.4	0	0
0.5	0	0
0.6	0.0816497	0.0816497
0.7	0.261279	0.261279
0.8	0.440908	0.440908
0.9	0.522558	0.522558
1.	0.408248	0.408248

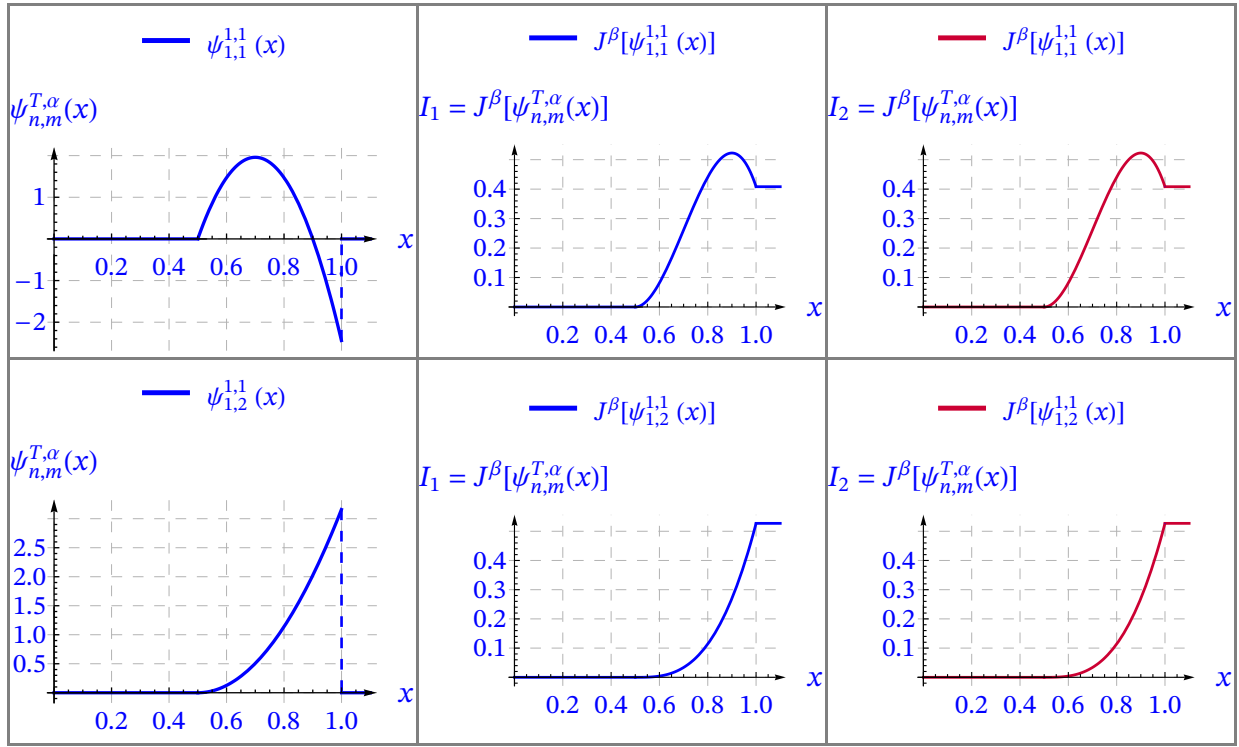


x	$I_1(x)$	$I_2(x)$
0.	0	0
0.1	0	0
0.2	0	0
0.3	0	0
0.4	0	0
0.5	0	0
0.6	0.00421637	0.00421637
0.7	0.033731	0.033731
0.8	0.113842	0.113842
0.9	0.269848	0.269848
1.	0.527046	0.527046

Gráficas de la función $\psi_{n,m}^{T,\alpha}(x)$ y las integrales I_1 e I_2 .

Out[*]=





(c)

Operador Integral Fraccionario de las Wavelets de Chelyshkov Fraccionarias.

$$\left(\begin{array}{lll} [A, B] = & [0, 1] & (\text{intervalo } x) \\ \{T, \alpha\} = & \{1, 1\} & \\ \{k, 2^k\} = & \{2, 4\} & (\text{m}{\acute{a}}\text{xima resoluci}{\acute{o}}\text{n}) \\ M = & 2 & (\text{m}{\acute{a}}\text{x. grado polinomio}) \\ m^* = 2^k(M+1) = & 12 & \text{Dimensi}{\acute{o}}\text{n } \mathcal{B} = \{\psi_k\} \\ \{\beta\} = & \{1\} & \end{array} \right)$$

 (a) Matriz con las Wavelets de Chelyshkov Fraccionarias $\Psi^{T,\alpha}(x)$

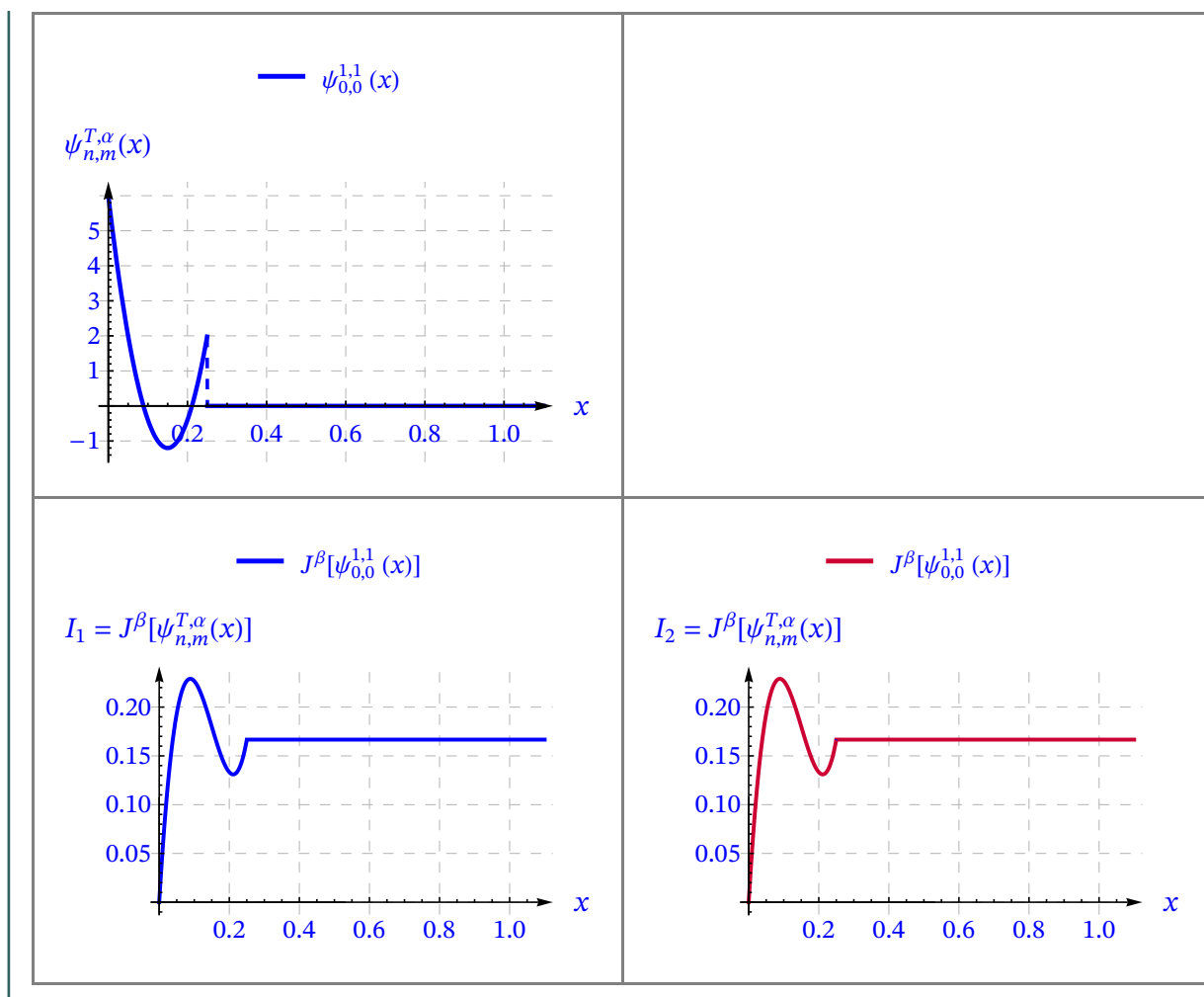
$$\Psi^{T,\alpha}(x) = \left(\begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{ll} 320x^2 - 96x + 6 & 0 \leq x < \frac{1}{4} \\ 0 & \text{True} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{ll} -32\sqrt{3}x(5x-1) & 0 \leq x < \frac{1}{4} \\ 0 & \text{True} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{ll} 32\sqrt{5}x^2 & 0 \leq x < \frac{1}{4} \\ 0 & \text{True} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{ll} 320x^2 - 256x + 50 & \frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{ll} -2\sqrt{3}(80x^2 - 56x + 9) & \frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{ll} 2\sqrt{5}(1-4x)^2 & \frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{ll} 320x^2 - 416x + 134 & \frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{4} \\ 0 & \text{True} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{ll} -8\sqrt{3}(20x^2 - 24x + 7) & \frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{4} \\ 0 & \text{True} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{ll} 8\sqrt{5}(1-2x)^2 & \frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{4} \\ 0 & \text{True} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{ll} 320x^2 - 576x + 258 & \frac{3}{4} \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{ll} -2\sqrt{3}(80x^2 - 136x + 57) & \frac{3}{4} \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{ll} 2\sqrt{5}(3-4x)^2 & \frac{3}{4} \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{array} \right. \end{array} \right)$$

(b) Matriz con las integrales fraccionarias R–L de orden $\beta = 1$ calculadas con la definición de integral de Riemann–Liouville:

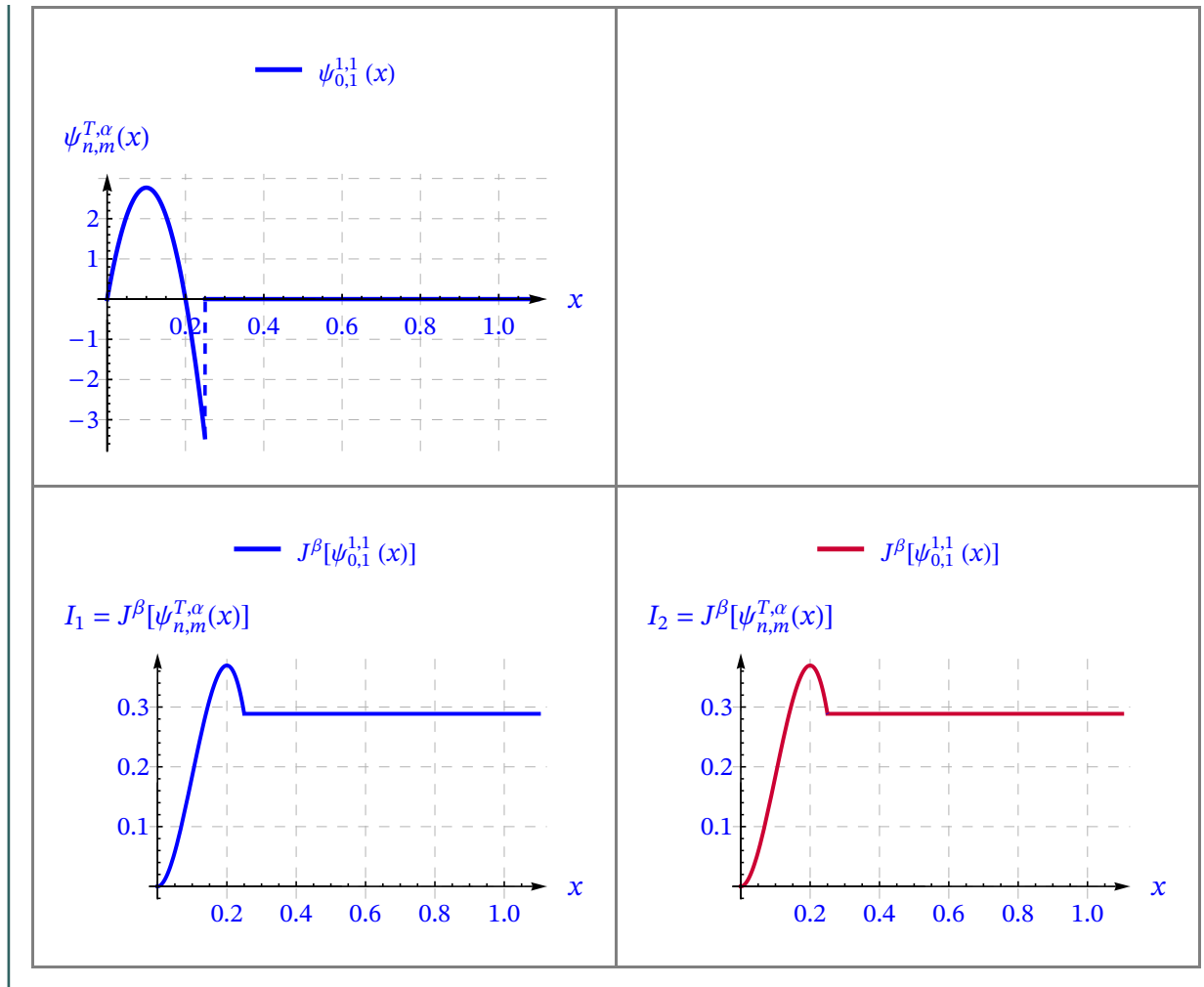
$$I_1 = J^{(\beta)}[\Psi^{T,\alpha}(x)] = \begin{pmatrix} \begin{cases} \frac{1}{6} & 4x > 1 \\ \frac{2}{3} x (160x^2 - 72x + 9) & 0 < x \leq \frac{1}{4} \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{3}} & 4x > 1 \\ \frac{16(3-10x)x^2}{\sqrt{3}} & 0 < x \leq \frac{1}{4} \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{\sqrt{5}}{6} & x > \frac{1}{4} \\ \frac{32\sqrt{5}x^3}{3} & 0 < x \leq \frac{1}{4} \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{1}{6} & 2x > 1 \\ \frac{320x^3}{3} - 128x^2 + 50x - \frac{37}{6} & \frac{1}{4} < x \leq \frac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{3}} & 2x > 1 \\ -\frac{(1-4x)^2(20x-11)}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{4} < x \leq \frac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{\sqrt{5}}{6} & x > \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6}\sqrt{5}(4x-1)^3 & \frac{1}{4} < x \leq \frac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{1}{6} & x > \frac{3}{4} \\ \frac{1}{3}(320x^3 - 624x^2 + 402x - 85) & \frac{1}{2} < x \leq \frac{3}{4} \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{3}} & 4x > 3 \\ -\frac{8(1-2x)^2(5x-4)}{\sqrt{3}} & \frac{1}{2} < x \leq \frac{3}{4} \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{\sqrt{5}}{6} & x > \frac{3}{4} \\ \frac{4}{3}\sqrt{5}(2x-1)^3 & \frac{1}{2} < x \leq \frac{3}{4} \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{1}{6} & x > 1 \\ \frac{320x^3}{3} - 288x^2 + 258x - \frac{153}{2} & \frac{3}{4} < x \leq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{3}} & x > 1 \\ -\frac{(3-4x)^2(20x-21)}{2\sqrt{3}} & \frac{3}{4} < x \leq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{\sqrt{5}}{6} & x > 1 \\ \frac{1}{6}\sqrt{5}(4x-3)^3 & \frac{3}{4} < x \leq 1 \end{cases} \end{pmatrix}$$

(c) Matriz con las integrales fraccionarias R–L de orden $\beta = 1$ calculadas con el operador integral fraccionario de Riemann–Liouville de $\psi_{n,m}^{T,\alpha}$:

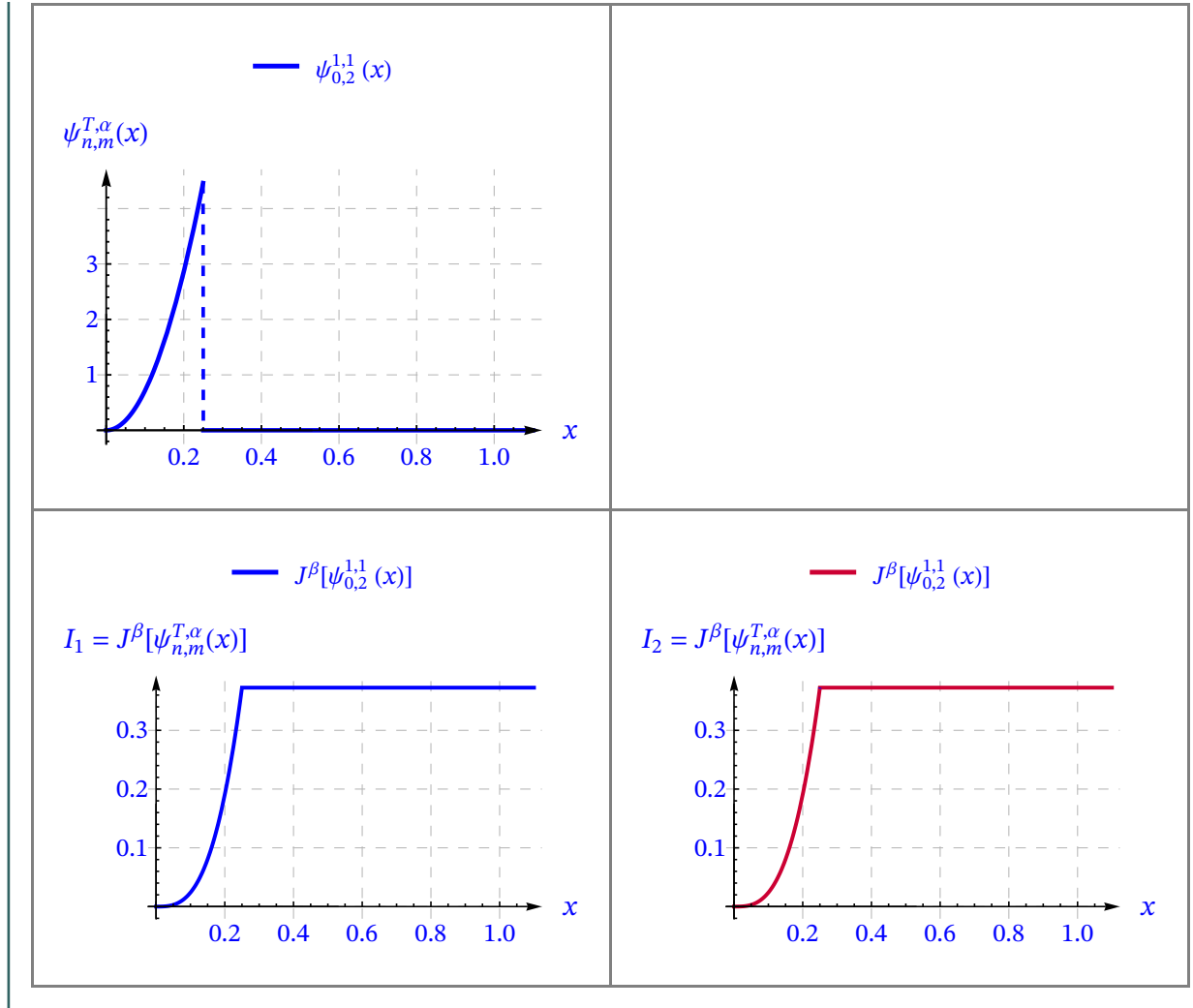
$$I_2 = J^{(\beta)}[\Psi^{T,\alpha}(x)] = \left(\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{6} & x > \frac{1}{4} \\ \frac{2}{3} x (160 x^2 - 72 x + 9) & 0 < x \leq \frac{1}{4} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{2 \sqrt{3}} & x > \frac{1}{4} \\ -\frac{16 x^2 (10 x - 3)}{\sqrt{3}} & 0 < x \leq \frac{1}{4} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\sqrt{5}}{6} & x > \frac{1}{4} \\ \frac{32 \sqrt{5} x^3}{3} & 0 < x \leq \frac{1}{4} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{6} & x > \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} (4 x - 1) (160 x^2 - 152 x + 37) & \frac{1}{4} < x \leq \frac{1}{2} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{2 \sqrt{3}} & x > \frac{1}{2} \\ -\frac{(4 x - 1)^2 (20 x - 11)}{2 \sqrt{3}} & \frac{1}{4} < x \leq \frac{1}{2} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\sqrt{5}}{6} & x > \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} \sqrt{5} (4 x - 1)^3 & \frac{1}{4} < x \leq \frac{1}{2} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{6} & x > \frac{3}{4} \\ \frac{1}{3} (2 x - 1) (160 x^2 - 232 x + 85) & \frac{1}{2} < x \leq \frac{3}{4} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{2 \sqrt{3}} & x > \frac{3}{4} \\ -\frac{8 (2 x - 1)^2 (5 x - 4)}{\sqrt{3}} & \frac{1}{2} < x \leq \frac{3}{4} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\sqrt{5}}{6} & x > \frac{3}{4} \\ \frac{4}{3} \sqrt{5} (2 x - 1)^3 & \frac{1}{2} < x \leq \frac{3}{4} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{6} & x > 1 \\ \frac{1}{6} (4 x - 3) (160 x^2 - 312 x + 153) & \frac{3}{4} < x \leq 1 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{2 \sqrt{3}} & x > 1 \\ -\frac{(4 x - 3)^2 (20 x - 21)}{2 \sqrt{3}} & \frac{3}{4} < x \leq 1 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\sqrt{5}}{6} & x > 1 \\ \frac{1}{6} \sqrt{5} (4 x - 3)^3 & \frac{3}{4} < x \leq 1 \end{array} \right. \end{array} \right)$$



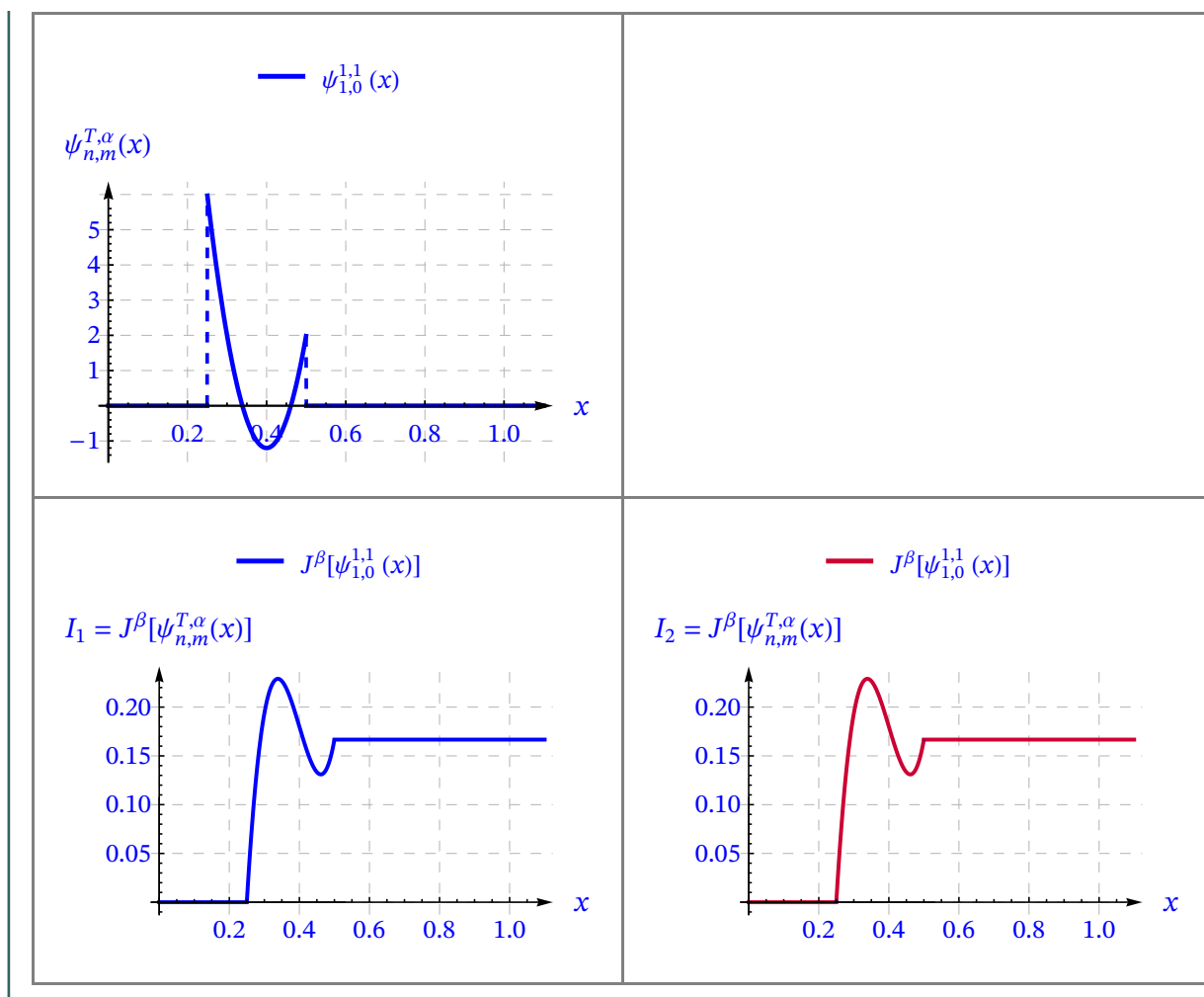
x	$I_1(x)$	$I_2(x)$
0.	0	0
0.1	0.226667	0.226667
0.2	0.133333	0.133333
0.3	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
0.4	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
0.5	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
0.6	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
0.7	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
0.8	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
0.9	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
1.	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$



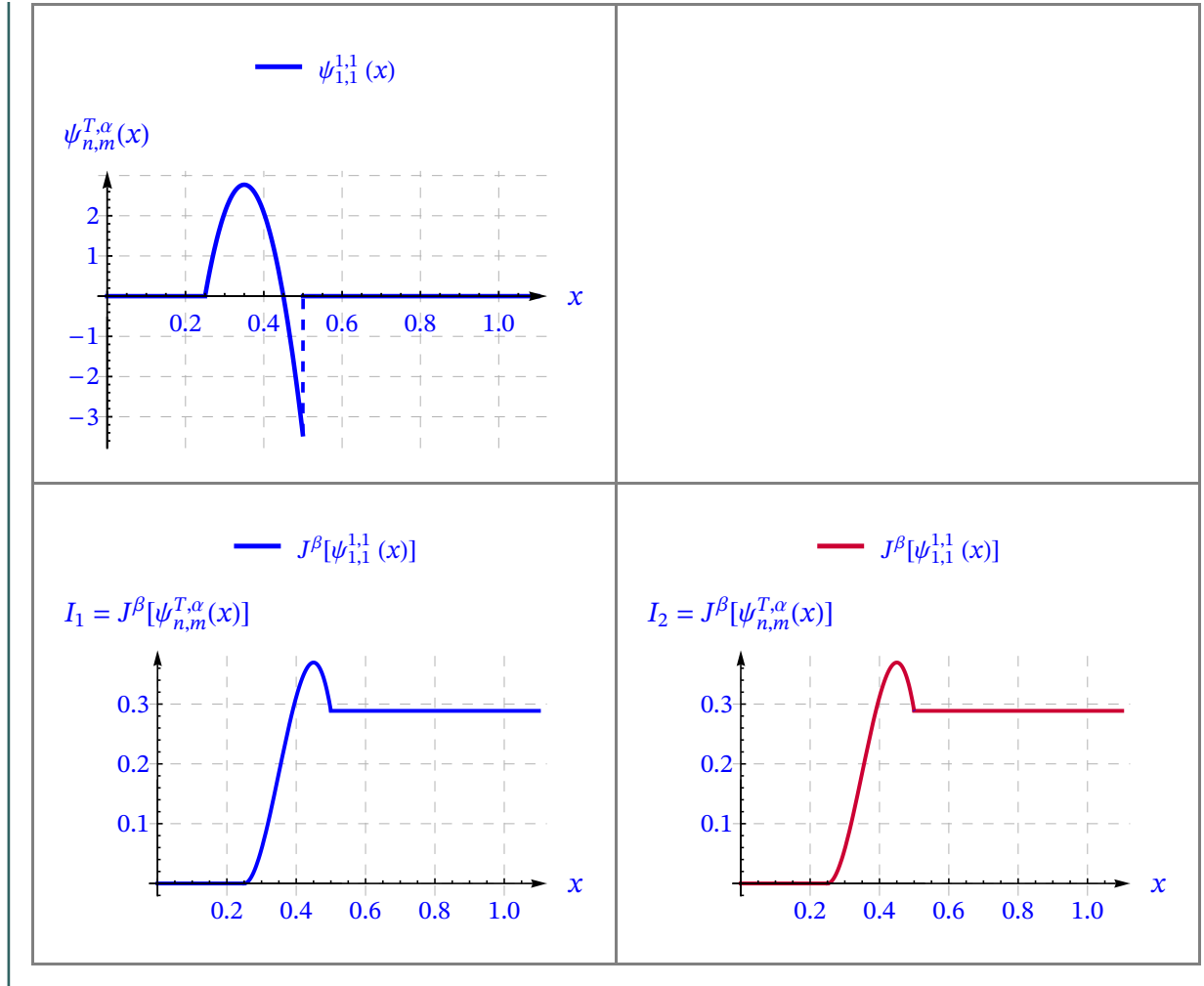
x	$I_1(x)$	$I_2(x)$
0.	0	0
0.1	0.184752	0.184752
0.2	0.369504	0.369504
0.3	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$
0.4	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$
0.5	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$
0.6	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$
0.7	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$
0.8	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$
0.9	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$
1.	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$



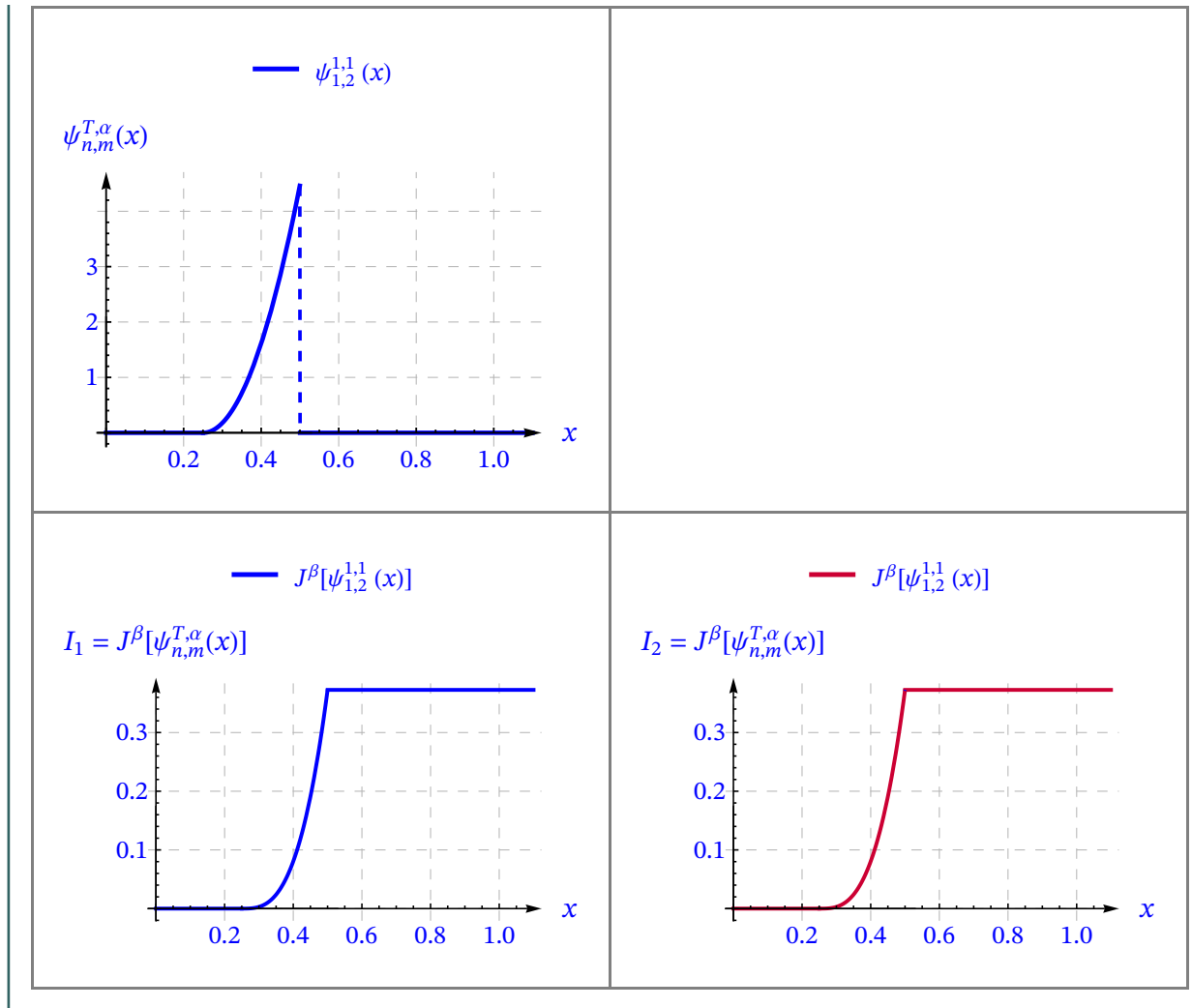
x	$I_1(x)$	$I_2(x)$
0.	0	0
0.1	0.0238514	0.0238514
0.2	0.190811	0.190811
0.3	$\frac{\sqrt{5}}{6}$	$\frac{\sqrt{5}}{6}$
0.4	$\frac{\sqrt{5}}{6}$	$\frac{\sqrt{5}}{6}$
0.5	$\frac{\sqrt{5}}{6}$	$\frac{\sqrt{5}}{6}$
0.6	$\frac{\sqrt{5}}{6}$	$\frac{\sqrt{5}}{6}$
0.7	$\frac{\sqrt{5}}{6}$	$\frac{\sqrt{5}}{6}$
0.8	$\frac{\sqrt{5}}{6}$	$\frac{\sqrt{5}}{6}$
0.9	$\frac{\sqrt{5}}{6}$	$\frac{\sqrt{5}}{6}$
1.	$\frac{\sqrt{5}}{6}$	$\frac{\sqrt{5}}{6}$



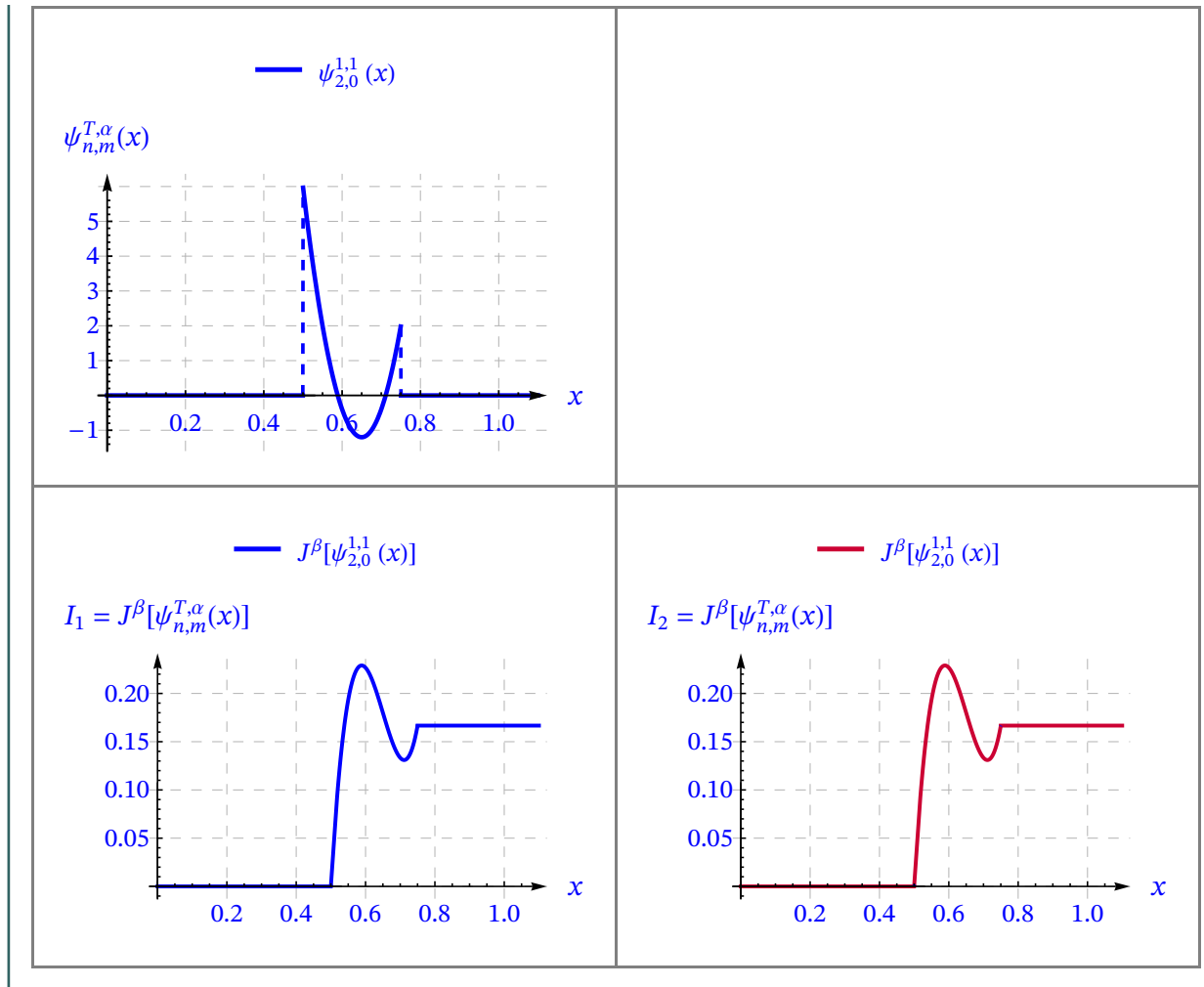
x	$I_1(x)$	$I_2(x)$
0.	0	0
0.1	0	0
0.2	0	0
0.3	0.193333	0.193333
0.4	0.18	0.18
0.5	0.166667	0.166667
0.6	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
0.7	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
0.8	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
0.9	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
1.	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$



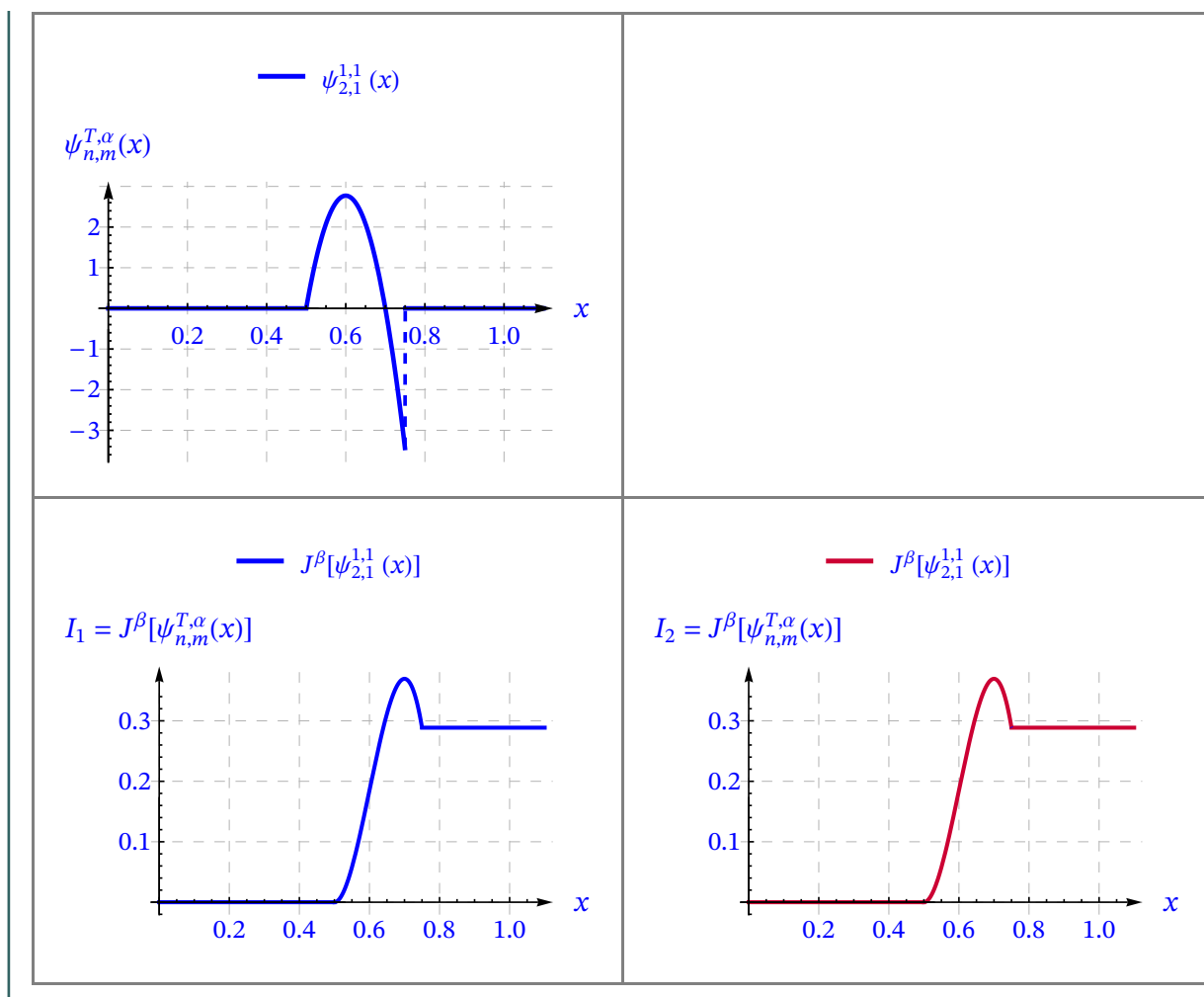
x	$I_1(x)$	$I_2(x)$
0.	0	0
0.1	0	0
0.2	0	0
0.3	0.057735	0.057735
0.4	0.311769	0.311769
0.5	0.288675	0.288675
0.6	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$
0.7	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$
0.8	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$
0.9	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$
1.	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$



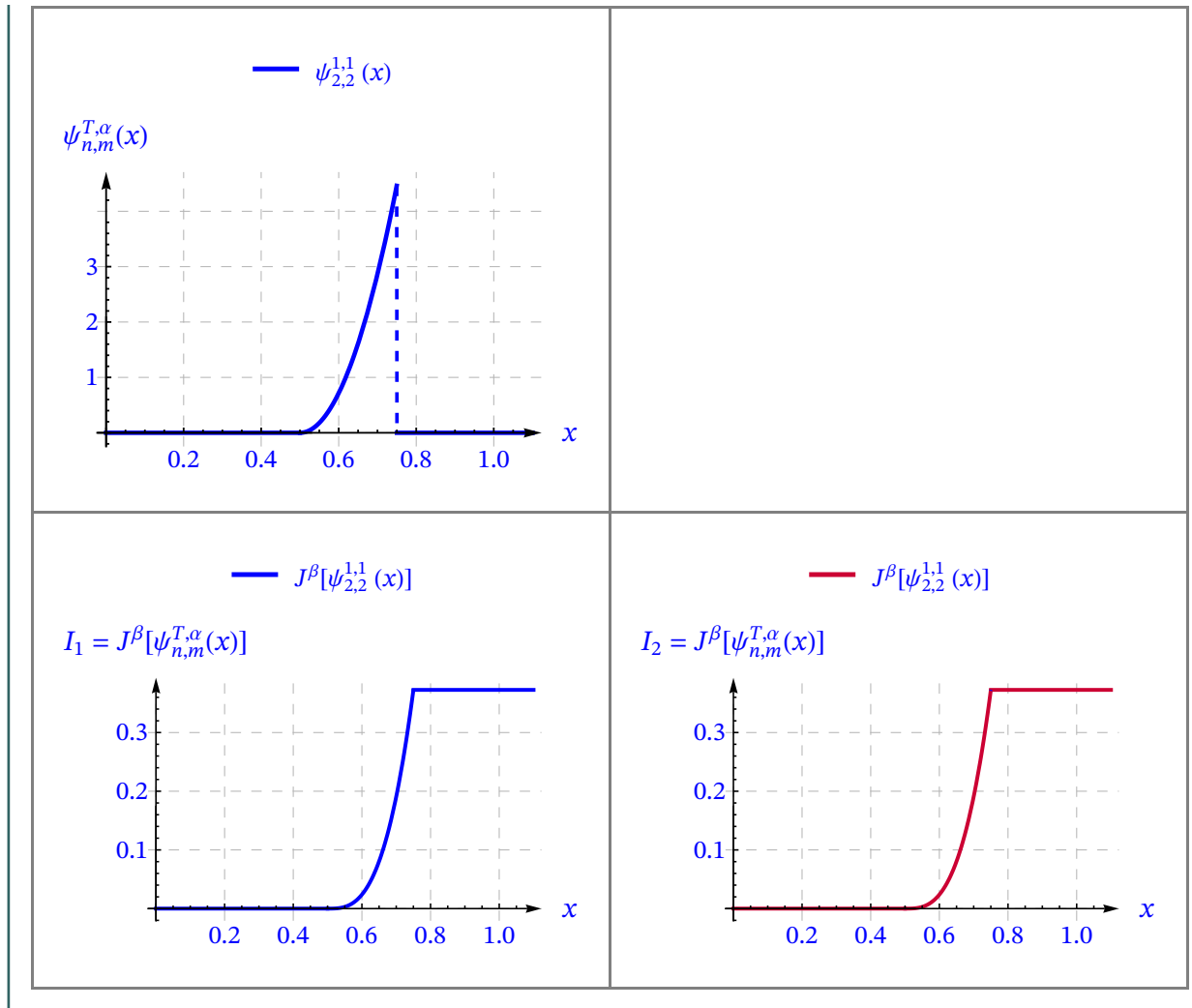
x	$I_1(x)$	$I_2(x)$
0.	0	0
0.1	0	0
0.2	0	0
0.3	0.00298142	0.00298142
0.4	0.0804984	0.0804984
0.5	0.372678	0.372678
0.6	$\frac{\sqrt{5}}{6}$	$\frac{\sqrt{5}}{6}$
0.7	$\frac{\sqrt{5}}{6}$	$\frac{\sqrt{5}}{6}$
0.8	$\frac{\sqrt{5}}{6}$	$\frac{\sqrt{5}}{6}$
0.9	$\frac{\sqrt{5}}{6}$	$\frac{\sqrt{5}}{6}$
1.	$\frac{\sqrt{5}}{6}$	$\frac{\sqrt{5}}{6}$



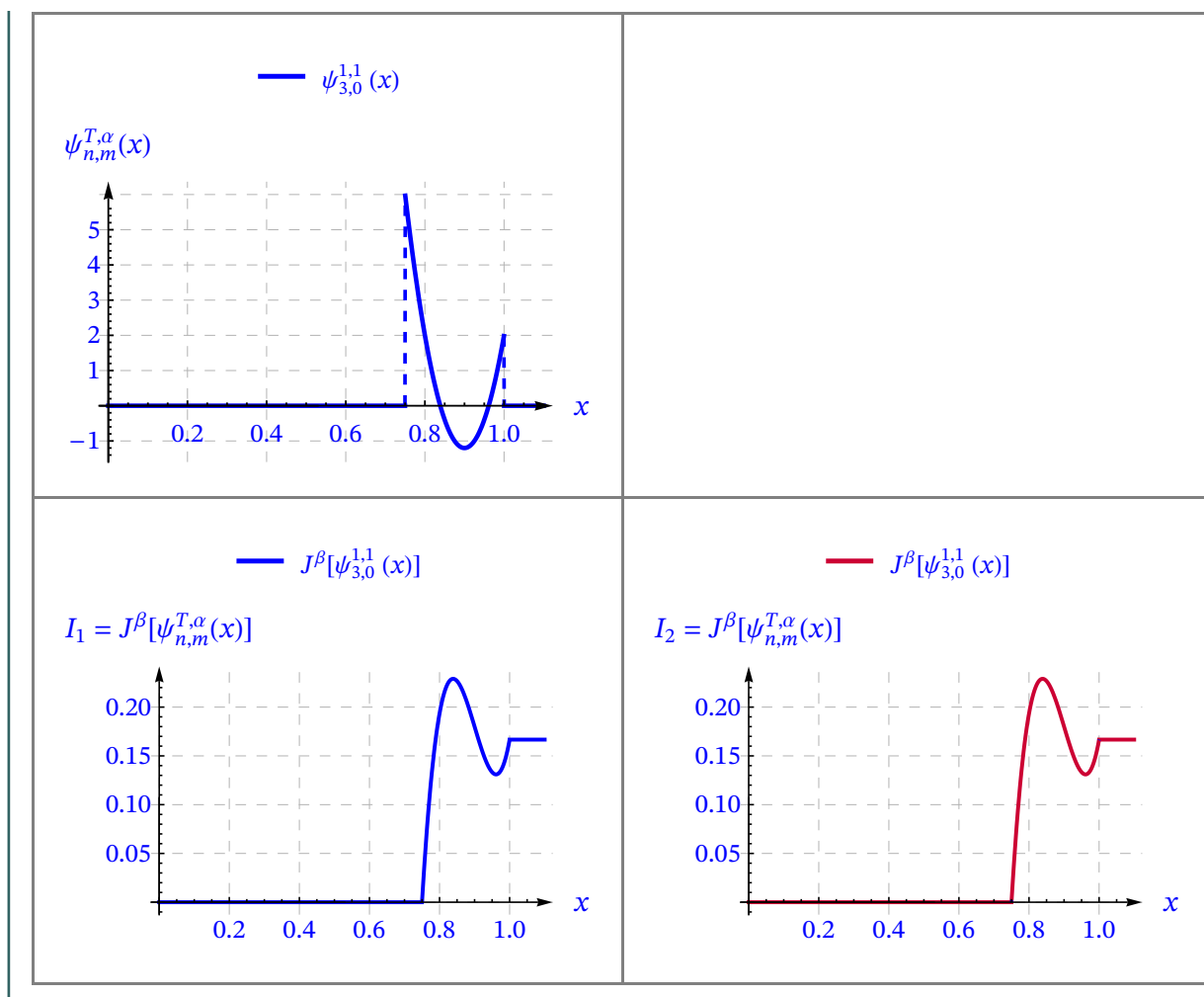
x	$I_1(x)$	$I_2(x)$
0.	0	0
0.1	0	0
0.2	0	0
0.3	0	0
0.4	0	0
0.5	0	0
0.6	0.226667	0.226667
0.7	0.133333	0.133333
0.8	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
0.9	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
1.	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$



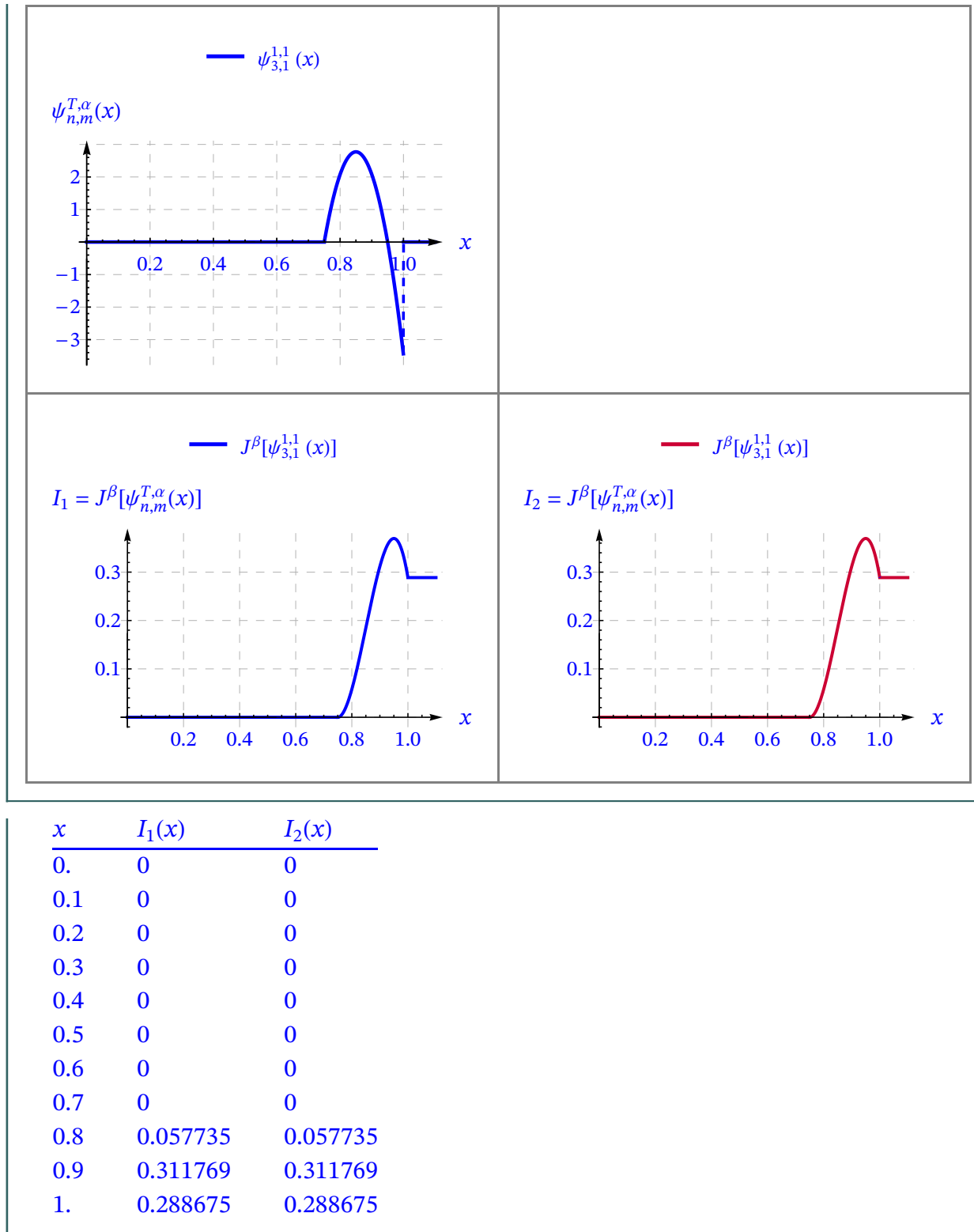
x	$I_1(x)$	$I_2(x)$
0.	0	0
0.1	0	0
0.2	0	0
0.3	0	0
0.4	0	0
0.5	0	0
0.6	0.184752	0.184752
0.7	0.369504	0.369504
0.8	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$
0.9	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$
1.	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$

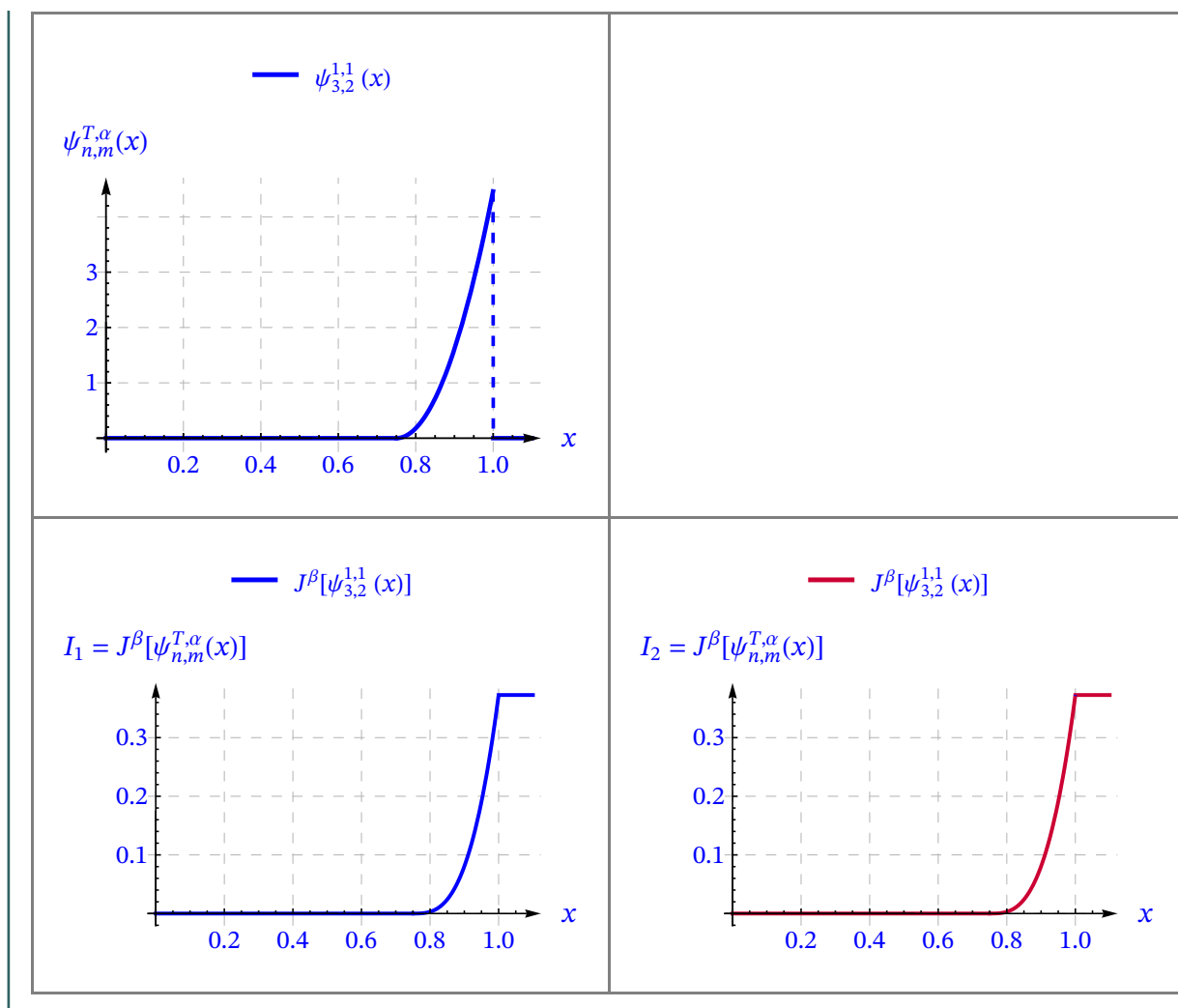


x	$I_1(x)$	$I_2(x)$
0.	0	0
0.1	0	0
0.2	0	0
0.3	0	0
0.4	0	0
0.5	0	0
0.6	0.0238514	0.0238514
0.7	0.190811	0.190811
0.8	$\frac{\sqrt{5}}{6}$	$\frac{\sqrt{5}}{6}$
0.9	$\frac{\sqrt{5}}{6}$	$\frac{\sqrt{5}}{6}$
1.	$\frac{\sqrt{5}}{6}$	$\frac{\sqrt{5}}{6}$



x	$I_1(x)$	$I_2(x)$
0.	0	0
0.1	0	0
0.2	0	0
0.3	0	0
0.4	0	0
0.5	0	0
0.6	0	0
0.7	0	0
0.8	0.193333	0.193333
0.9	0.18	0.18
1.	0.166667	0.166667

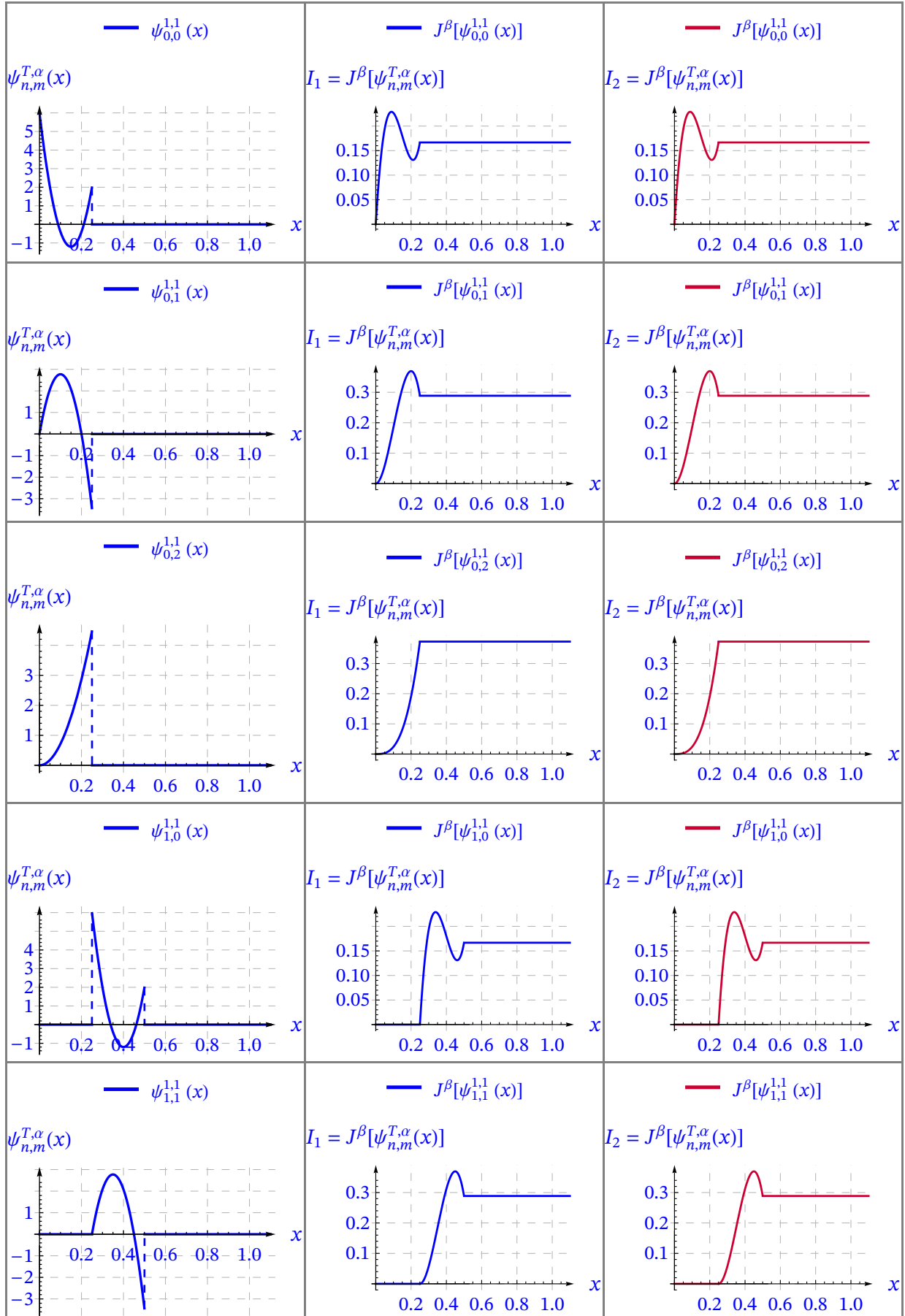


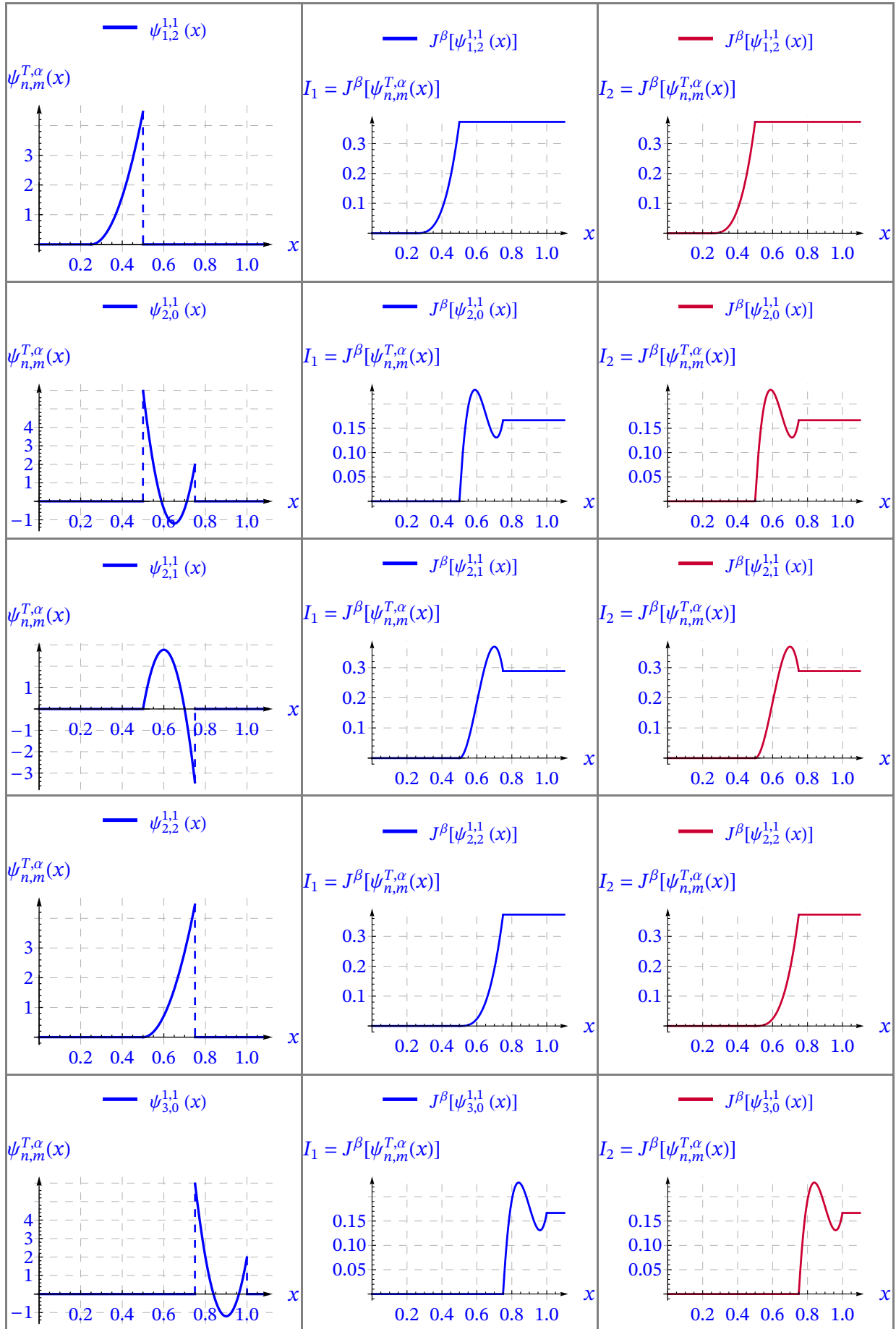


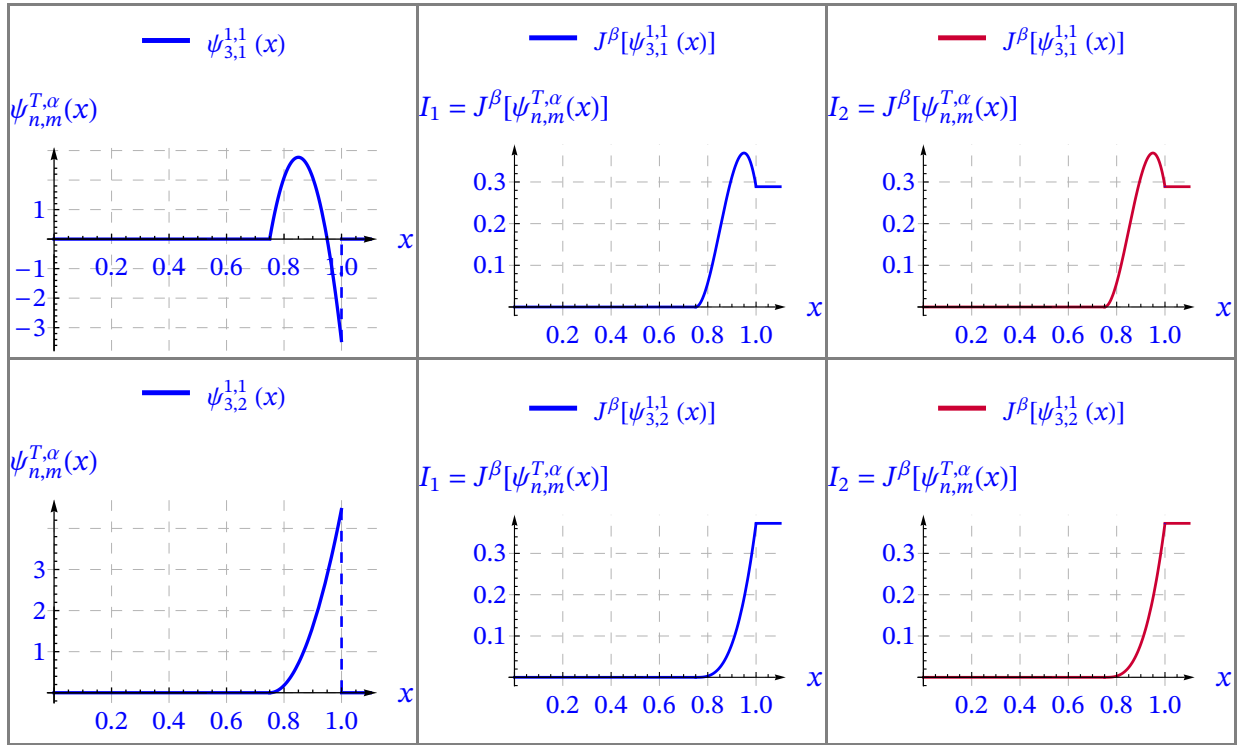
x	$I_1(x)$	$I_2(x)$
0.	0	0
0.1	0	0
0.2	0	0
0.3	0	0
0.4	0	0
0.5	0	0
0.6	0	0
0.7	0	0
0.8	0.00298142	0.00298142
0.9	0.0804984	0.0804984
1.	0.372678	0.372678

Gráficas de la función $\psi_{n,m}^{T,\alpha}(x)$ y las integrales I_1 e I_2 .

Out[•]=







2.2.4. Matriz Operacional Fraccionaria de Riemann–Liouville Orden β

Se pretende deducir la *matriz operacional integral fraccionaria de Riemann–Liouville* asociada a la base *Wavelet* de Chelyshkov fraccionarias $\{\psi_{nm}^{T,\alpha}(x)\}$, que cumpla la relación:

$$J^\beta[\psi^{T,\alpha}(x)] \simeq P^{(\beta)} \cdot \Psi^{T,\alpha}(x). \quad (2.2.37)$$

2.2.4.1. Matriz Integral Fraccionaria de Riemann–Liouville $P^{(\beta)}$ en $[0, T]$ (Operador Integral Fraccionario)

En el siguiente teorema se deduce la expresión de la matriz operacional integral fraccionaria de Riemann–Liouville de las *Wavelets* de Chelyshkov fraccionarias aplicando el operador fraccionario integral.

▼ **Teorema 2.2.3. Matriz Integral Fraccionaria de Riemann–Liouville de Orden β con el Operador Integral Fraccionario.**

Sea $\Psi^{T,\alpha}(x)$ el vector de *Wavelets* de Chelyshkov fraccionarias de grado M de dimensión $m^* = 2^k (M + 1)$ definido por:

■ Ejemplo 2.2.3. Matriz Integral Fraccionaria (Definición).

Calcúlese la matriz $P^{(\beta)}$ operacional de integración fraccionaria de Riemann–Liouville de orden β para la matriz $\Psi^{T,\alpha}(x)$ de las *Wavelets* de Chelyshkov fraccionarias:

$$J^\beta [\Psi^{T,\alpha}] \simeq P^{(\beta)} \cdot \Psi^{T,\alpha}(x)$$

realizando la expansión en la base *Wavelet* de Chelyshkov fraccionaris de las funciones $J^\beta [\Psi^{T,\alpha}]$ de forma directa aplicando las correspondientes definiciones:

- $J^\beta [\psi_i^{T,\alpha}(x)] = J^\beta [\psi_{nm}^{T,\alpha}(x)] = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \left(\int_0^x (x-t)^{\alpha-1} \psi_{nm}^{T,\alpha}(x) dt \right).$
- $P_{i,j}^{(\beta)} = \langle J^\beta [\psi^{T,\alpha}(x)], \psi_{nm}^{T,\alpha}(x) \rangle = \int_0^T J^\beta [\psi^{T,\alpha}(x)] \times \psi_{n_2 m_2}^{T,\alpha}(x) w^\alpha(x) dx$
- $P^{(\beta)} = C = \langle J^\beta [\psi^{T,\alpha}(x)], \Psi_{n,m}^{T,\alpha}(x) \rangle = \int_0^T J^\beta [\psi^{T,\alpha}(x)] [\Psi^{T,\alpha}(x)]^T w^\alpha(x) dx \quad x \in [0, T]$

$$\begin{cases} n = 0, 1, \dots, 2^k - 1 \\ m = 0, 1, \dots, M \\ i = n(M+1) + (m+1) \end{cases} \quad w^\alpha(x) = \alpha \frac{x^{\alpha-1}}{T^\alpha} \quad x \in [0, T]$$

(a) $k = 1, M = 1 \quad \beta = 1 \quad [A, B] = [0, T] = [0, 1] \quad \alpha = 1.$

$$P^{(\beta)} = \begin{pmatrix} 0.0625 & 0.252591 & 0.125 & 0.216506 \\ -0.0360844 & 0.1875 & 0.216506 & 0.375 \\ 0. & 0. & 0.0625 & 0.252591 \\ 0. & 0. & -0.0360844 & 0.1875 \end{pmatrix}.$$

SOLUCIÓN

(a) Expansión de las Integrales Fraccionarias en la base ChW Fraccionarias.

Matriz Integral Fraccionaria de las *Wavelets* de Chelyshkov Fraccionarias.

$$P^{(\beta)} = \langle J^\beta [\psi^{T,\alpha}(x)], \Psi^{T,\alpha}(x) \rangle$$

$$P^{(\beta)} = \int_0^T J^\beta [\psi^{T,\alpha}(x)] \cdot [\Psi^{T,\alpha}(x)]^T * w^\alpha(x) dx$$

$$w^\alpha(x) = \alpha \frac{x^{\alpha-1}}{T^\alpha}$$

$$\left(\begin{array}{ll} [A, B] = & [0, 1] \quad (\text{intervalo } x) \\ \{T, \alpha\} = & \{1, 1\} \\ \{k, 2^k\} = & \{1, 2\} \quad (\text{máxima resolución}) \\ M = & 1 \quad (\text{máx. grado polinomio}) \\ m^* = 2^k(M+1) = & 4 \quad \text{Dimensión } \mathcal{B} = \{\psi_k\} \\ \{\beta\} = & \{1\} \end{array} \right)$$

(a) Matriz con las *Wavelets* de Chelyshkov Fraccionarias $\Psi^{T,\alpha}(x)$

$$\Psi^{T,\alpha}(x) = \left(\begin{array}{l} \psi_{0,0}^{1,1}(x) = \begin{cases} \sqrt{2} (2 - 6x) & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{0,1}^{1,1}(x) = \begin{cases} 2\sqrt{6} x & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{1,0}^{1,1}(x) = \begin{cases} \sqrt{2} (5 - 6x) & \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{1,1}^{1,1}(x) = \begin{cases} \sqrt{6} (2x - 1) & \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \end{array} \right)$$

(b) Matriz con las integrales fraccionarias R–L de orden $\beta = 1$ calculadas con la definición de integral de Riemann–Liouville:

$$I_1 = J^{(\beta)}[\Psi^{T,\alpha}(x)] = \left(\begin{array}{l} \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{2}} & 2x > 1 \\ \sqrt{2} (2 - 3x)x & 0 < x \leq \frac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{\sqrt{\frac{3}{2}}}{2} & x > \frac{1}{2} \\ \sqrt{6} x^2 & 0 < x \leq \frac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{2}} & x > 1 \\ -\frac{12x^2 - 20x + 7}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{\sqrt{\frac{3}{2}}}{2} & x > 1 \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}(1 - 2x)^2 & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases} \end{array} \right)$$

(c) Matriz con las integrales fraccionarias R–L de orden $\beta = 1$ calculadas con el operador integral fraccionario de Riemann–Liouville de $\psi_{n,m}^{T,\alpha}$:

$$I_2 = J^{(\beta)}[\Psi^{T,\alpha}(x)] = \begin{pmatrix} \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{2}} & x > \frac{1}{2} \\ -\sqrt{2}x(3x-2) & 0 < x \leq \frac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{\sqrt{\frac{3}{2}}}{2} & x > \frac{1}{2} \\ \sqrt{6}x^2 & 0 < x \leq \frac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{2}} & x > 1 \\ -\frac{12x^2-20x+7}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{\sqrt{\frac{3}{2}}}{2} & x > 1 \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}(2x-1)^2 & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases} \end{pmatrix}$$

$$P^{(\beta)} = \int_0^T J^\beta[\psi^{T,\alpha}(x)] \cdot [\Psi^{T,\alpha}(x)]^T * w^\alpha(x) dx$$

$$P^{(\beta)} = \begin{pmatrix} 0.0625 & 0.252591 & 0.125 & 0.216506 \\ -0.0360844 & 0.1875 & 0.216506 & 0.375 \\ 0. & 0. & 0.0625 & 0.252591 \\ 0. & 0. & -0.0360844 & 0.1875 \end{pmatrix}$$

■ Ejemplo 2.2.4. Matriz Integral Fraccionaria.

Calcúlese la matriz $P^{(\beta)}$ operacional de integración fraccionaria de Riemann–Liouville de orden β para la matriz $\Psi^{T,\alpha}(x)$ de las *Wavelets* de Chelyshkov fraccionarias:

$$J^\beta [\Psi^{T,\alpha}] \simeq P^{(\beta)} \cdot \Psi^{T,\alpha}(x).$$

- (i) Calcúlese las *Wavelets* de Chelyshkov $\psi_{nm}^{T,\alpha}(x)$ fraccionarias y la matriz $\Psi^{T,\alpha}(x)$.
 - (ii) Determinése las integrales fraccionarias de orden α de Riemann-Liouville de $\psi_{nm}^{T,\alpha}(x)$.
 - (iii) Calcúlese la matriz $P^{(\beta)}$ aplicando el operador integral fraccionario $J^\beta [\Psi^{T,\alpha}(x)]$.
- (a) $k = 0, M = 1 \quad \beta = 1 \quad [A, B] = [0, T] = [0, 1] \quad \alpha = 1.$
 - (b) $k = 0, M = 2 \quad \beta = 1 \quad [A, B] = [0, T] = [0, 1] \quad \alpha = 1.$
 - (c) $k = 1, M = 1 \quad \beta = 1 \quad [A, B] = [0, T] = [0, 1] \quad \alpha = 1.$
 - (d) $k = 1, M = 1 \quad \beta = 1/2 \quad [A, B] = [0, T] = [0, 1] \quad \alpha = 1.$
 - (e) $k = 2, M = 1 \quad \beta = 1 \quad [A, B] = [0, T] = [0, 1] \quad \alpha = 1.$

SOLUCIÓN

(a)

Matriz Integral Fraccionaria de las *Wavelets* de Chelyshkov Fraccionarias.

$$P^{(\beta)} = \langle J^\beta [\psi^{T,\alpha}(x)], \Psi^{T,\alpha}(x) \rangle$$

$$P^{(\beta)} = \int_0^T J^\beta [\psi^{T,\alpha}(x)] \cdot [\Psi^{T,\alpha}(x)]^T * w^\alpha(x) dx$$

$$w^\alpha(x) = \alpha \frac{x^{\alpha-1}}{T^\alpha}$$

$$\left(\begin{array}{lll} [A, B] = & [0, 1] & (\text{intervalo } x) \\ \{T, \alpha\} = & \{1, 1\} & \\ \{k, 2^k\} = & \{0, 1\} & (\text{máxima resolución}) \\ M = & 1 & (\text{máx. grado polinomio}) \\ m^* = 2^k(M+1) = & 2 & \text{Dimensión } \mathcal{B} = \{\psi_k\} \\ \{\beta\} = & \{1\} & \end{array} \right)$$

(a) Polinomios de Chelyshkov $\Phi(x)$:

$$\Phi(x) = (C_{M,n}(x)) = \begin{pmatrix} C_{1,0}(x) \\ C_{1,1}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 3x \\ x \end{pmatrix}$$

(b) Matriz con las *Wavelets* de Chelyshkov Fraccionarias $\Psi^{T,\alpha}(x)$:

$$\Psi^{T,\alpha}(x) = \begin{pmatrix} \psi_{0,0}^{1,1}(x) = \begin{cases} 2 - 3x & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{0,1}^{1,1}(x) = \begin{cases} \sqrt{3} x & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \end{pmatrix}$$

(c) Matriz con las integrales fraccionarias R–L de orden $\beta = 1$ calculadas con la definición de integral de Riemann–Liouville:

$$I_1 = J^{(\beta)}[\Psi^{T,\alpha}(x)] = \begin{pmatrix} \begin{cases} \frac{1}{2} & x > 1 \\ \frac{1}{2} (4 - 3x)x & 0 < x \leq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2} & x > 1 \\ \frac{\sqrt{3} x^2}{2} & 0 < x \leq 1 \end{cases} \end{pmatrix}$$

(d) Matriz con las integrales fraccionarias R–L de orden $\beta = 1$ calculadas con el operador integral fraccionario de Riemann–Liouville de $\psi_{n,m}^{T,\alpha}$:

$$I_2 = J^{(\beta)}[\Psi^{T,\alpha}(x)] = \begin{pmatrix} \begin{cases} \frac{1}{2} & x > 1 \\ -\frac{1}{2} x (3x - 4) & 0 < x \leq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2} & x > 1 \\ \frac{\sqrt{3} x^2}{2} & 0 < x \leq 1 \end{cases} \end{pmatrix}$$

(e) Matriz Integral Fraccionaria de las *Wavelets* de Chelyshkov Fraccionarias:

$$J^{(\beta)}[\Psi^{T,\alpha}(x)] = P^{(\beta)} \cdot \Psi^{T,\alpha}(x)$$

$$P^{(\beta)} = \int_0^T J^\beta[\psi^{T,\alpha}(x)] \cdot [\Psi^{T,\alpha}(x)]^T * w^\alpha(x) dx$$

$$P^{(\beta)} = \begin{pmatrix} 0.125 & 0.505181 \\ -0.0721688 & 0.375 \end{pmatrix}$$

(b)

Matriz Integral Fraccionaria de las *Wavelets* de Chelyshkov Fraccionarias.

$$P^{(\beta)} = \langle J^\beta[\psi^{T,\alpha}(x)], \Psi^{T,\alpha}(x) \rangle$$

$$P^{(\beta)} = \int_0^T J^\beta[\psi^{T,\alpha}(x)] \cdot [\Psi^{T,\alpha}(x)]^T * w^\alpha(x) dx$$

$$w^\alpha(x) = \alpha \frac{x^{\alpha-1}}{T^\alpha}$$

$$\left(\begin{array}{lll} [A, B] = & [0, 1] & (\text{intervalo } x) \\ \{T, \alpha\} = & \{1, 1\} & \\ \{k, 2^k\} = & \{0, 1\} & (\text{máxima resolución}) \\ M = & 2 & (\text{máx. grado polinomio}) \\ m^* = 2^k(M+1) = & 3 & \text{Dimensión } \mathcal{B} = \{\psi_k\} \\ \{\beta\} = & \{1\} & \end{array} \right)$$

Polinomios de Chelyshkov $\Phi(x)$:

$$\Phi(x) = (C_{M,n}(x)) = \begin{pmatrix} C_{2,0}(x) \\ C_{2,1}(x) \\ C_{2,2}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10x^2 - 12x + 3 \\ 4x - 5x^2 \\ x^2 \end{pmatrix}$$

(b) Matriz con las *Wavelets* de Chelyshkov Fraccionarias $\Psi^{T,\alpha}(x)$

$$\Psi^{T,\alpha}(x) = \begin{pmatrix} \psi_{0,0}^{1,1}(x) = \begin{cases} 10x^2 - 12x + 3 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{0,1}^{1,1}(x) = \begin{cases} \sqrt{3}(4 - 5x)x & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{0,2}^{1,1}(x) = \begin{cases} \sqrt{5}x^2 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \end{pmatrix}$$

(c) Matriz con las integrales fraccionarias R–L de orden $\beta = 1$ calculadas con la definición de integral de Riemann–Liouville:

$$I_1 = J^{(\beta)}[\Psi^{T,\alpha}(x)] = \begin{pmatrix} \begin{cases} \frac{1}{3} & x > 1 \\ \frac{1}{3}x(10x^2 - 18x + 9) & 0 < x \leq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{3}} & x > 1 \\ \frac{(6-5x)x^2}{\sqrt{3}} & 0 < x \leq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{\sqrt{5}}{3} & x > 1 \\ \frac{\sqrt{5}x^3}{3} & 0 < x \leq 1 \end{cases} \end{pmatrix}$$

(d) Matriz con las integrales fraccionarias R–L de orden $\beta = 1$ calculadas con el operador integral fraccionario de Riemann–Liouville de $\psi_{n,m}^{T,\alpha}$:

$$I_2 = J^{(\beta)}[\Psi^{T,\alpha}(x)] = \begin{pmatrix} \begin{cases} \frac{1}{3} & x > 1 \\ \frac{1}{3}x(10x^2 - 18x + 9) & 0 < x \leq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{3}} & x > 1 \\ -\frac{x^2(5x-6)}{\sqrt{3}} & 0 < x \leq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{\sqrt{5}}{3} & x > 1 \\ \frac{\sqrt{5}x^3}{3} & 0 < x \leq 1 \end{cases} \end{pmatrix}$$

(e) Matriz Integral Fraccionaria de las *Wavelets* de Chelyshkov Fraccionarias:

$$J^{(\beta)}[\Psi^{T,\alpha}(x)] = P^{(\beta)} \cdot \Psi^{T,\alpha}(x)$$

$$P^{(\beta)} = \int_0^T J^\beta[\psi^{T,\alpha}(x)] \cdot [\Psi^{T,\alpha}(x)]^T * w^\alpha(x) dx$$

$$P^{(\beta)} = \begin{pmatrix} 0.0555556 & 0.240563 & 0.236029 \\ -0.0481125 & 0.166667 & 0.473365 \\ 0.0124226 & -0.0430331 & 0.277778 \end{pmatrix}$$

(c)

Matriz Integral Fraccionaria de las *Wavelets* de Chelyshkov Fraccionarias.

$$P^{(\beta)} = \langle J^\beta[\psi^{T,\alpha}(x)], \Psi^{T,\alpha}(x) \rangle$$

$$P^{(\beta)} = \int_0^T J^\beta[\psi^{T,\alpha}(x)] \cdot [\Psi^{T,\alpha}(x)]^T * w^\alpha(x) dx$$

$$w^\alpha(x) = \alpha \frac{x^{\alpha-1}}{T^\alpha}$$

$$\left(\begin{array}{ll} [A, B] = & [0, 1] \quad (\text{intervalo } x) \\ \{T, \alpha\} = & \{1, 1\} \\ \{k, 2^k\} = & \{1, 2\} \quad (\text{máxima resolución}) \\ M = & 1 \quad (\text{máx. grado polinomio}) \\ m^* = 2^k(M+1) = & 4 \quad \text{Dimensión } \mathcal{B} = \{\psi_k\} \\ \{\beta\} = & \{1\} \end{array} \right)$$

(a) Polinomios de Chelyshkov $\Phi(x)$:

$$\Phi(x) = (C_{M,n}(x) = \begin{pmatrix} C_{1,0}(x) \\ C_{1,1}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 3x \\ x \end{pmatrix})$$

(b) Matriz con las *Wavelets* de Chelyshkov Fraccionarias $\Psi^{T,\alpha}(x)$:

$$\Psi^{T,\alpha}(x) = \begin{pmatrix} \psi_{0,0}^{1,1}(x) = \begin{cases} \sqrt{2} (2 - 6x) & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{0,1}^{1,1}(x) = \begin{cases} 2 \sqrt{6} x & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{1,0}^{1,1}(x) = \begin{cases} \sqrt{2} (5 - 6x) & \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{1,1}^{1,1}(x) = \begin{cases} \sqrt{6} (2x - 1) & \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \end{pmatrix}$$

(c) Matriz con las integrales fraccionarias R–L de orden $\beta = 1$ calculadas con la definición de integral de Riemann–Liouville:

$$I_1 = J^{(\beta)}[\Psi^{T,\alpha}(x)] = \begin{pmatrix} \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{2}} & 2x > 1 \\ \sqrt{2}(2-3x)x & 0 < x \leq \frac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{\sqrt{\frac{3}{2}}}{2} & x > \frac{1}{2} \\ \sqrt{6}x^2 & 0 < x \leq \frac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{2}} & x > 1 \\ -\frac{12x^2-20x+7}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{\sqrt{\frac{3}{2}}}{2} & x > 1 \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}(1-2x)^2 & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases} \end{pmatrix}$$

(d) Matriz con las integrales fraccionarias R–L de orden $\beta = 1$ calculadas con el operador integral fraccionario de Riemann–Liouville de $\psi_{n,m}^{T,\alpha}$:

$$I_2 = J^{(\beta)}[\Psi^{T,\alpha}(x)] = \begin{pmatrix} \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{2}} & x > \frac{1}{2} \\ -\sqrt{2}x(3x-2) & 0 < x \leq \frac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{\sqrt{\frac{3}{2}}}{2} & x > \frac{1}{2} \\ \sqrt{6}x^2 & 0 < x \leq \frac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{2}} & x > 1 \\ -\frac{12x^2-20x+7}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{\sqrt{\frac{3}{2}}}{2} & x > 1 \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}(2x-1)^2 & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases} \end{pmatrix}$$

(e) Matriz Integral Fraccionaria de las *Wavelets* de Chelyshkov Fraccionarias:

$$J^{(\beta)}[\Psi^{T,\alpha}(x)] = P^{(\beta)} \cdot \Psi^{T,\alpha}(x)$$

$$P^{(\beta)} = \int_0^T J^\beta[\psi^{T,\alpha}(x)] \cdot [\Psi^{T,\alpha}(x)]^T * w^\alpha(x) dx$$

$$P^{(\beta)} = \begin{pmatrix} 0.0625 & 0.252591 & 0.125 & 0.216506 \\ -0.0360844 & 0.1875 & 0.216506 & 0.375 \\ 0. & 0. & 0.0625 & 0.252591 \\ 0. & 0. & -0.0360844 & 0.1875 \end{pmatrix}$$

(d)

Matriz Integral Fraccionaria de las *Wavelets* de Chelyshkov Fraccionarias.

$$P^{(\beta)} = \langle J^\beta[\psi^{T,\alpha}(x)], \Psi^{T,\alpha}(x) \rangle$$

$$P^{(\beta)} = \int_0^T J^\beta[\psi^{T,\alpha}(x)] \cdot [\Psi^{T,\alpha}(x)]^T * w^\alpha(x) dx$$

$$w^\alpha(x) = \alpha \frac{x^{\alpha-1}}{T^\alpha}$$

$$\left(\begin{array}{ll} [A, B] = & [0, 1] \quad (\text{intervalo } x) \\ \{T, \alpha\} = & \{1, 1\} \\ \{k, 2^k\} = & \{1, 2\} \quad (\text{máxima resolución}) \\ M = & 1 \quad (\text{máx. grado polinomio}) \\ m^* = 2^k(M+1) = & 4 \quad \text{Dimensión } \mathcal{B} = \{\psi_k\} \\ \{\beta\} = & \{\frac{1}{2}\} \end{array} \right)$$

(a) Polinomios de Chelyshkov $\Phi(x)$:

$$\Phi(x) = (C_{M,n}(x) = \begin{pmatrix} C_{1,0}(x) \\ C_{1,1}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 3x \\ x \end{pmatrix})$$

(b) Matriz con las *Wavelets* de Chelyshkov Fraccionarias $\Psi^{T,\alpha}(x)$:

$$\Psi^{T,\alpha}(x) = \begin{pmatrix} \psi_{0,0}^{1,1}(x) = \begin{cases} \sqrt{2} (2 - 6x) & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{0,1}^{1,1}(x) = \begin{cases} 2 \sqrt{6} x & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{1,0}^{1,1}(x) = \begin{cases} \sqrt{2} (5 - 6x) & \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{1,1}^{1,1}(x) = \begin{cases} \sqrt{6} (2x - 1) & \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \end{pmatrix}$$

(c) Matriz con las integrales fraccionarias R–L de orden $\beta = \frac{1}{2}$ calculadas con la definición de integral de Riemann–Liouville:

$$I_1 = J^{(\beta)}[\Psi^{T,\alpha}(x)] =$$

$$\begin{pmatrix} \begin{cases} -4 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{x} (2x - 1) & 0 < x \leq \frac{1}{2} \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} (-8x^{3/2} + 4\sqrt{4x-2}x + 4\sqrt{x} - \sqrt{4x-2}) & 2x > 1 \end{cases} \\ \begin{cases} 8 \sqrt{\frac{2}{3\pi}} x^{3/2} & 0 < x \leq \frac{1}{2} \\ -\sqrt{\frac{2}{3\pi}} (-8x^{3/2} + 4\sqrt{4x-2}x + \sqrt{4x-2}) & 2x > 1 \end{cases} \\ \begin{cases} -\frac{8(x-1)\sqrt{2x-1}}{\sqrt{\pi}} & \frac{1}{2} < x \leq 1 \\ -2\sqrt{\frac{2}{\pi}} (-4\sqrt{x-1}x + 2\sqrt{4x-2}x + 3\sqrt{x-1} - 2\sqrt{4x-2}) & x > 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{4(2x-1)^{3/2}}{\sqrt{3\pi}} & \frac{1}{2} < x \leq 1 \\ 2\sqrt{\frac{2}{3\pi}} (-4\sqrt{x-1}x + 2\sqrt{4x-2}x + \sqrt{x-1} - \sqrt{4x-2}) & x > 1 \end{cases} \end{pmatrix}$$

(d) Matriz con las integrales fraccionarias R–L de orden $\beta = \frac{1}{2}$ calculadas con el operador integral fraccionario de Riemann–Liouville de $\psi_{n,m}^{T,\alpha}$:

$$I_2 = J^{(\beta)}[\Psi^{T,\alpha}(x)] =$$

$$\left(\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{ll} 0 & x \leq 0 \\ 4 \sqrt{\frac{2}{\pi}} (1-2x) \sqrt{x} & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ -2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{x} \left(4x I_{\frac{1}{2x}} \left(2, \frac{1}{2} \right) + \sqrt{4 - \frac{2}{x}} - 2 \right) & \text{True} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{ll} 8 \sqrt{\frac{2}{3\pi}} x^{3/2} & 0 < x \leq \frac{1}{2} \\ 2 \sqrt{\frac{6}{\pi}} x^{3/2} B_{\frac{1}{2x}} \left(2, \frac{1}{2} \right) & x > \frac{1}{2} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{ll} 0 & 2x \leq 1 \\ -\frac{8(x-1)\sqrt{2x-1}}{\sqrt{\pi}} & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ -2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} (-4 \sqrt{x-1} x + 2 \sqrt{4x-2} x + 3 \sqrt{x-1} - 2 \sqrt{4x-2}) & \text{True} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{ll} 0 & 2x \leq 1 \\ \frac{4(2x-1)^{3/2}}{\sqrt{3\pi}} & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ 2 \sqrt{\frac{2}{3\pi}} (-4 \sqrt{x-1} x + 2 \sqrt{4x-2} x + \sqrt{x-1} - \sqrt{4x-2}) & \text{True} \end{array} \right. \end{array} \right)$$

(e) Matriz Integral Fraccionaria de las *Wavelets* de Chelyshkov Fraccionarias:

$$J^{(\beta)}[\Psi^{T,\alpha}(x)] = P^{(\beta)} \cdot \Psi^{T,\alpha}(x)$$

$$P^{(\beta)} = \int_0^T J^{\beta}[\psi^{T,\alpha}(x)] \cdot [\Psi^{T,\alpha}(x)]^T * w^{\alpha}(x) dx$$

$$P^{(\beta)} = \begin{pmatrix} 0.303956 & 0.31588 & 0.0680897 & 0.125684 \\ -0.0526467 & 0.455934 & 0.304523 & 0.31647 \\ 0. & 0. & 0.303956 & 0.31588 \\ 0. & 0. & -0.0526467 & 0.455934 \end{pmatrix}$$

(e)

Matriz Integral Fraccionaria de las *Wavelets* de Chelyshkov Fraccionarias.

$$P^{(\beta)} = \langle J^{\beta}[\psi^{T,\alpha}(x)], \Psi^{T,\alpha}(x) \rangle$$

$$P^{(\beta)} = \int_0^T J^{\beta}[\psi^{T,\alpha}(x)] \cdot [\Psi^{T,\alpha}(x)]^T * w^{\alpha}(x) dx$$

$$w^{\alpha}(x) = \alpha \frac{x^{\alpha-1}}{T^{\alpha}}$$

$$\left(\begin{array}{ll} [A, B] = & [0, 1] \quad (\text{intervalo } x) \\ \{T, \alpha\} = & \{1, 1\} \\ \{k, 2^k\} = & \{2, 4\} \quad (\text{máxima resolución}) \\ M = & 1 \quad (\text{máx. grado polinomio}) \\ m^* = 2^k(M+1) = & 8 \quad \text{Dimensión } \mathcal{B} = \{\psi_k\} \\ \{\beta\} = & \{1\} \end{array} \right)$$

(a) Polinomios de Chelyshkov $\Phi(x)$:

$$\Phi(x) = (C_{M,n}(x) = \begin{pmatrix} C_{1,0}(x) \\ C_{1,1}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 3x \\ x \end{pmatrix})$$

(b) Matriz con las Wavelets de Chelyshkov Fraccionarias $\Psi^{T,\alpha}(x)$:

$$\Psi^{T,\alpha}(x) = \left(\begin{array}{ll} \psi_{0,0}^{1,1}(x) = & \begin{cases} 4 - 24x & 0 \leq x < \frac{1}{4} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{0,1}^{1,1}(x) = & \begin{cases} 8\sqrt{3}x & 0 \leq x < \frac{1}{4} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{1,0}^{1,1}(x) = & \begin{cases} 10 - 24x & \frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{1,1}^{1,1}(x) = & \begin{cases} 2\sqrt{3}(4x - 1) & \frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{2,0}^{1,1}(x) = & \begin{cases} 16 - 24x & \frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{4} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{2,1}^{1,1}(x) = & \begin{cases} 4\sqrt{3}(2x - 1) & \frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{4} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{3,0}^{1,1}(x) = & \begin{cases} 22 - 24x & \frac{3}{4} \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{3,1}^{1,1}(x) = & \begin{cases} 2\sqrt{3}(4x - 3) & \frac{3}{4} \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \end{array} \right)$$

(c) Matriz con las integrales fraccionarias R–L de orden $\beta = 1$ calculadas con la definición de integral de Riemann–Liouville:

$$I_1 = J^{(\beta)}[\Psi^{T,\alpha}(x)] = \begin{pmatrix} \begin{cases} \frac{1}{4} & 4x > 1 \\ 4(1-3x)x & 0 < x \leq \frac{1}{4} \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{4} & x > \frac{1}{4} \\ 4\sqrt{3}x^2 & 0 < x \leq \frac{1}{4} \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{1}{4} & 2x > 1 \\ -12x^2 + 10x - \frac{7}{4} & \frac{1}{4} < x \leq \frac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{4} & 2x > 1 \\ \frac{1}{4}\sqrt{3}(1-4x)^2 & \frac{1}{4} < x \leq \frac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{1}{4} & x > \frac{3}{4} \\ -12x^2 + 16x - 5 & \frac{1}{2} < x \leq \frac{3}{4} \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{4} & 4x > 3 \\ \sqrt{3}(1-2x)^2 & \frac{1}{2} < x \leq \frac{3}{4} \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{1}{4} & x > 1 \\ -12x^2 + 22x - \frac{39}{4} & \frac{3}{4} < x \leq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{4} & x > 1 \\ \frac{1}{4}\sqrt{3}(3-4x)^2 & \frac{3}{4} < x \leq 1 \end{cases} \end{pmatrix}$$

(d) Matriz con las integrales fraccionarias R–L de orden $\beta = 1$ calculadas con el operador integral fraccionario de Riemann–Liouville de $\psi_{n,m}^{T,\alpha}$:

$$I_2 = J^{(\beta)}[\Psi^{T,\alpha}(x)] = \begin{pmatrix} \begin{cases} \frac{1}{4} & x > \frac{1}{4} \\ -4x(3x-1) & 0 < x \leq \frac{1}{4} \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{4} & x > \frac{1}{4} \\ 4\sqrt{3}x^2 & 0 < x \leq \frac{1}{4} \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{1}{4} & 2x > 1 \\ -12x^2 + 10x - \frac{7}{4} & \frac{1}{4} < x \leq \frac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{4} & x > \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4}\sqrt{3}(4x-1)^2 & \frac{1}{4} < x \leq \frac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{1}{4} & x > \frac{3}{4} \\ -12x^2 + 16x - 5 & \frac{1}{2} < x \leq \frac{3}{4} \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{4} & x > \frac{3}{4} \\ \sqrt{3}(2x-1)^2 & \frac{1}{2} < x \leq \frac{3}{4} \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{1}{4} & x > 1 \\ -12x^2 + 22x - \frac{39}{4} & \frac{3}{4} < x \leq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{4} & x > 1 \\ \frac{1}{4}\sqrt{3}(4x-3)^2 & \frac{3}{4} < x \leq 1 \end{cases} \end{pmatrix}$$

(e) Matriz Integral Fraccionaria de las Wavelets de Chelyshkov Fraccionarias:

$$J^{(\beta)}[\Psi^{T,\alpha}(x)] = P^{(\beta)} \cdot \Psi^{T,\alpha}(x)$$

$$P^{(\beta)} = \int_0^T J^{(\beta)}[\psi^{T,\alpha}(x)] \cdot [\Psi^{T,\alpha}(x)]^T * w^\alpha(x) dx$$

$$P^{(\beta)} = \begin{pmatrix} 0.03125 & 0.126295 & 0.0625 & 0.108253 & 0.0625 & 0.108253 & 0.062 \\ -0.0180422 & 0.09375 & 0.108253 & 0.1875 & 0.108253 & 0.1875 & 0.1082 \\ 0. & 0. & 0.03125 & 0.126295 & 0.0625 & 0.108253 & 0.062 \\ 0. & 0. & -0.0180422 & 0.09375 & 0.108253 & 0.1875 & 0.1082 \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0.03125 & 0.126295 & 0.062 \\ 0. & 0. & 0. & 0. & -0.0180422 & 0.09375 & 0.1082 \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0.03125 \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & -0.0180422 \end{pmatrix}$$

■ Ejemplo 2.2.5. Matriz Integral Fraccionaria $P^{(\beta)}$ en $[0, T]$.

Se quiere diseñar la matriz $P^{(\beta)}$ operacional de integración fraccionaria de Riemann–Liouville orden β para la matriz $\Psi^{T,\alpha}(x)$ de las *Wavelets* de Chelyshkov fraccionarias:

$$J^\beta [\Psi^{T,\alpha}] \simeq P^{(\beta)} \cdot \Psi^{T,\alpha}(x) \quad x \in [0, T]$$

empleando el producto interno:

$$P^{(\beta)} = C = \langle J^\beta [\Psi^{T,\alpha}(x)], \Psi^{T,\alpha}(x) \rangle = \int_0^T J^\beta [\psi^{T,\alpha}(x)] [\Psi^{T,\alpha}(x)]^T w^\alpha(x) dx \quad x \in [0, T]$$

$$\begin{cases} n = 0, 1, \dots, 2^k - 1 \\ m = 0, 1, \dots, M \\ i = n(M+1) + (m+1) \end{cases} \quad w^\alpha(x) = \alpha \frac{x^{\alpha-1}}{T^\alpha} \quad x \in [0, T]$$

(i) Calcúlese la matriz integral fraccionaria $P^{(\beta)}$ aplicando el operador integral fraccionario de Riemann–Liouville de $\Psi^{T,\alpha}(x)$.

(ii) Hállense las expansiones de las funciones $J^\beta [\Psi^{T,\alpha}(x)]$ en serie de las *Wavelets* de Chelyshkov fraccionarias hasta el grado M .

$$f(x) = J^\beta [\psi_{n,m}^{T,\alpha}(x)] \simeq \tilde{f}(x) = \sum_{n=0}^{2^k-1} \sum_{m=0}^M c_{n,m} \psi_{n,m}^{T,\alpha}(x) \quad x \in [0, T]$$

$$C = \langle f(x), \Psi_{n,m}^{T,\alpha}(x) \rangle = \int_0^T f(x) [\Psi_{n,m}^{T,\alpha}(x)]^T w^\alpha(x) dx \quad w^\alpha(x) = \alpha \frac{x^{\alpha-1}}{T^\alpha} \quad x \in [0, T].$$

(iii) Compruébese que los coeficientes calculados en las expansiones (c_k) coinciden con los valores de la matriz $P^{(\beta)}$.

$$(a) \quad k = 0 \quad M = 3 \quad \beta = 1 \quad [A, B] = [0, T] = [0, 10] \quad \alpha = 1.$$

$$P^{(\beta)} = (c_k) = \begin{pmatrix} 0.3125 & 1.40729 & 1.25779 & 1.67722 \\ -0.32476 & 0.9375 & 2.82405 & 2.79592 \\ 0.139754 & -0.403436 & 1.5625 & 3.96166 \\ -0.0236228 & 0.0681931 & -0.264111 & 2.1875 \end{pmatrix}.$$

$$(b) \quad k = 1 \quad M = 2 \quad \beta = 1 \quad [A, B] = [0, T] = [0, 10] \quad \alpha = 1/2.$$

$$P^{(\beta)} = (c_k) = \begin{pmatrix} 0.677204 & 0.666775 & 0.276803 & 0.180193 & 0.228026 & 0.241209 \\ -0.174892 & 1.04857 & 1.05288 & 0.181251 & 0.378122 & 0.434115 \\ 0.026052 & -0.105288 & 1.22334 & 0.715506 & 0.792572 & 0.725545 \\ 0. & 0. & 0. & 0.677204 & 0.666775 & 0.276803 \\ 0. & 0. & 0. & -0.174892 & 1.04857 & 1.05288 \\ 0. & 0. & 0. & 0.026052 & -0.105288 & 1.22334 \end{pmatrix}.$$

SOLUCIÓN

(a)

Matriz Integral Fraccionaria de las *Wavelets* de Chelyshkov Fraccionarias.

$$P^{(\beta)} = \langle J^\beta[\psi^{T,\alpha}(x)], \Psi^{T,\alpha}(x) \rangle$$

$$P^{(\beta)} = \int_0^T J^\beta[\psi^{T,\alpha}(x)] \cdot [\Psi^{T,\alpha}(x)]^T * w^\alpha(x) dx$$

$$w^\alpha(x) = \alpha \frac{x^{\alpha-1}}{T^\alpha}$$

$$\left(\begin{array}{lll} [A, B] = & [0, 10] & (\text{intervalo } x) \\ \{T, \alpha\} = & \{10, 1\} & \\ \{k, 2^k\} = & \{0, 1\} & (\text{máxima resolución}) \\ M = & 3 & (\text{máx. grado polinomio}) \\ m^* = 2^k(M+1) = & 4 & \text{Dimensión } \mathcal{B} = \{\psi_k\} \\ \{\beta\} = & \{1\} & \end{array} \right)$$

(a) Polinomios de Chelyshkov $\Phi(x)$:

$$\Phi(x) = (C_{M,n}(x)) = \begin{pmatrix} C_{3,0}(x) \\ C_{3,1}(x) \\ C_{3,2}(x) \\ C_{3,3}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -35x^3 + 60x^2 - 30x + 4 \\ 21x^3 - 30x^2 + 10x \\ 6x^2 - 7x^3 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

(b) Matriz con las *Wavelets* de Chelyshkov Fraccionarias $\Psi^{T,\alpha}(x)$:

$$\Psi^{T,\alpha}(x) = \begin{pmatrix} \psi_{0,0}^{10,1}(x) = \begin{cases} -\frac{7x^3}{200} + \frac{3x^2}{5} - 3x + 4 & 0 \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{0,1}^{10,1}(x) = \begin{cases} \sqrt{3} \left(\frac{21x^3}{1000} - \frac{3x^2}{10} + x \right) & 0 \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{0,2}^{10,1}(x) = \begin{cases} \frac{(60-7x)x^2}{200\sqrt{5}} & 0 \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{0,3}^{10,1}(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{7}x^3}{1000} & 0 \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \end{pmatrix}$$

(c) Matriz con las integrales fraccionarias R–L de orden $\beta = 1$ calculadas con la definición de integral de Riemann–Liouville:

$$I_1 = J^{(\beta)}[\Psi^{T,\alpha}(x)] = \begin{pmatrix} \begin{cases} \frac{5}{2} & x > 10 \\ -\frac{7x^4}{800} + \frac{x^3}{5} - \frac{3x^2}{2} + 4x & 0 < x \leq 10 \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{5\sqrt{3}}{2} & x > 10 \\ \frac{\sqrt{3}x^2(21x^2-400x+2000)}{4000} & 0 < x \leq 10 \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{5\sqrt{5}}{2} & x > 10 \\ \frac{(80-7x)x^3}{800\sqrt{5}} & 0 < x \leq 10 \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{5\sqrt{7}}{2} & x > 10 \\ \frac{\sqrt{7}x^4}{4000} & 0 < x \leq 10 \end{cases} \end{pmatrix}$$

(d) Matriz con las integrales fraccionarias R–L de orden $\beta = 1$ calculadas con el operador integral fraccionario de Riemann–Liouville de $\psi_{n,m}^{T,\alpha}$:

$$I_2 = J^{(\beta)}[\Psi^{T,\alpha}(x)] = \begin{pmatrix} \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ -\frac{7x^4}{800} + \frac{x^3}{5} - \frac{3x^2}{2} + 4x & 0 \leq x \leq 10 \end{cases} \\ \frac{5}{2} \text{ True} \\ \begin{cases} \frac{5\sqrt{3}}{2} & x > 10 \\ \frac{\sqrt{3}x^2(21x^2-400x+2000)}{4000} & 0 < x \leq 10 \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{5\sqrt{5}}{2} & x > 10 \\ -\frac{x^3(7x-80)}{800\sqrt{5}} & 0 < x \leq 10 \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{5\sqrt{7}}{2} & x > 10 \\ \frac{\sqrt{7}x^4}{4000} & 0 < x \leq 10 \end{cases} \end{pmatrix}$$

(e) Matriz Integral Fraccionaria de las *Wavelets* de Chelyshkov Fraccionarias:

$$J^{(\beta)}[\Psi^{T,\alpha}(x)] = P^{(\beta)} \cdot \Psi^{T,\alpha}(x)$$

$$P^{(\beta)} = \int_0^T J^\beta[\psi^{T,\alpha}(x)] \cdot [\Psi^{T,\alpha}(x)]^T * w^\alpha(x) dx$$

$$P^{(\beta)} = \begin{pmatrix} 0.3125 & 1.40729 & 1.25779 & 1.67722 \\ -0.32476 & 0.9375 & 2.82405 & 2.79592 \\ 0.139754 & -0.403436 & 1.5625 & 3.96166 \\ -0.0236228 & 0.0681931 & -0.264111 & 2.1875 \end{pmatrix}$$

Desarrollo en serie de las funciones $f(x) = J^\beta[\psi_{nm}^{T,\alpha}(x)]$.

$$\left(\begin{array}{ll} [A, B] = & [0, 10] \quad (\text{intervalo } x) \\ \{T, \alpha\} = & \{10, 1\} \\ \{k, 2^k\} = & \{k, 1\} \quad (\text{máxima resolución}) \\ M = & 3 \quad (\text{máx. grado polinomio}) \\ m^* = 2^k(M+1) = & 4 \quad \text{Dimensión } \mathcal{B} = \{\psi_k\} \\ \{\beta\} = & \{1\} \end{array} \right)$$

(a) Matriz con las Wavelets de Chelyshkov fraccionarias $\Psi_{nm}^{T,\alpha}(x)$ en $[0, T]$:

$$\Psi_{nm}^{T,\alpha}(x) = \left(\begin{array}{ll} \left\{ \begin{array}{ll} -\frac{7x^3}{200} + \frac{3x^2}{5} - 3x + 4 & 0 \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{ll} \sqrt{3} \left(\frac{21x^3}{1000} - \frac{3x^2}{10} + x \right) & 0 \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{ll} \frac{(60-7x)x^2}{200\sqrt{5}} & 0 \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\sqrt{7}x^3}{1000} & 0 \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{array} \right. \end{array} \right)$$

(b) Matriz con las integrales fraccionarias R–L de orden $\beta =$

1 calculadas con la

integral de Riemann–Liouville:

$$I_1 = J^{(\beta)}[\Psi_{nm}^{T,\alpha}(x)] = \left(\begin{array}{ll} \left\{ \begin{array}{ll} \frac{5}{2} & x > 10 \\ -\frac{7x^4}{800} + \frac{x^3}{5} - \frac{3x^2}{2} + 4x & 0 < x \leq 10 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{ll} \frac{5\sqrt{3}}{2} & x > 10 \\ \frac{\sqrt{3}x^2(21x^2-400x+2000)}{4000} & 0 < x \leq 10 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{ll} \frac{5\sqrt{5}}{2} & x > 10 \\ \frac{(80-7x)x^3}{800\sqrt{5}} & 0 < x \leq 10 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{ll} \frac{5\sqrt{7}}{2} & x > 10 \\ \frac{\sqrt{7}x^4}{4000} & 0 < x \leq 10 \end{array} \right. \end{array} \right)$$

Desarrollo en serie de *Wavelets* de Chelyshkov fraccionarias de la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{5}{2} & x > 10 \\ -\frac{7x^4}{800} + \frac{x^3}{5} - \frac{3x^2}{2} + 4x & 0 < x \leq 10 \end{cases} \quad \text{en} \quad [A, B] = [0, T] = [0, 10]$$

$$f(x) \simeq \tilde{f}(x) = f_{M,k}^{T,\alpha}(x) = \sum_{n=0}^{2^k-1} \sum_{m=0}^M c_{nm} \psi_{nm}^{T,\alpha}(x) = C \cdot \Psi_{nm}^{T,\alpha}(x) \quad x \in [0, T]$$

$$C = \langle f(x), \Psi_{nm}^{T,\alpha}(x) \rangle \cdot D^{-1}$$

$$C = \int_0^T f(x) [\Psi_{nm}^{T,\alpha}(x)]^T w^\alpha(x) dx \cdot D^{-1} \quad D = \int_0^T \Psi_{nm}^{T,\alpha}(x) [\Psi_{nm}^{T,\alpha}(x)]^T w(x) dx$$

Wavelets de Chelyshkov fraccionarias $\psi_{nm}^{T,\alpha}(x)$

$$\left(\begin{array}{ll} [A, B] = & [0, 10] \\ T = & 10 \\ \alpha = & 1 \\ k = & 0 \\ M = & 3 \\ n = 0, \dots, 2^k-1 = & \{0\} \\ m = 0, \dots, M = & \{0, 1, 2, 3\} \end{array} \right)$$

(a) Definición de las *Wavelets* de Chelyshkov fraccionarias $\psi_{nm}^{T,\alpha}(x)$

$$\psi_{nm}^{T,\alpha}(x) = \begin{cases} \sqrt{2m+1} \ 2^{\frac{k}{2}} C_{M,m} \left(2^k \left(\frac{x}{T} \right)^\alpha - n \right) & \left(\frac{x}{T} \right) \in \left[\left(\frac{n}{2^k} \right)^\frac{1}{\alpha}, \left(\frac{n+1}{2^k} \right)^\frac{1}{\alpha} \right) \\ 0 & \text{Resto} \end{cases}$$

$$\begin{cases} n = 0, 1, \dots, 2^k - 1 & k = 1, 2, \dots \\ m = 0, 1, \dots, M & \text{grado del polinomio} \end{cases}$$

$C_{M,m}(x) \equiv$ polinomios de Chelyshkov de grado m

$$\Psi_{nm}^{T,\alpha}(x) = \left(\begin{array}{ll} \psi_{0,0}^{10,1}(x) & \begin{cases} -\frac{7x^3}{200} + \frac{3x^2}{5} - 3x + 4 & 0 \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{0,1}^{10,1}(x) & \begin{cases} \sqrt{3} \left(\frac{21x^3}{1000} - \frac{3x^2}{10} + x \right) & 0 \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{0,2}^{10,1}(x) & \begin{cases} \frac{(60-7x)x^2}{200\sqrt{5}} & 0 \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{0,3}^{10,1}(x) & \begin{cases} \frac{\sqrt{7}x^3}{1000} & 0 \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \end{array} \right)$$

(b) Cálculo de los coeficientes $C = (c_{nm})$ Wavelets de Chelyshkov fraccionarios.

$$C = \langle f(x), \Psi_{n,m}^{T,\alpha}(x) \rangle = \int_0^T f(x) [\Psi_{n,m}^{T,\alpha}(x)]^T w^\alpha(x) dx$$

$$\bullet c_{nm} = \langle f(x), \psi_{n,m}^{T,\alpha}(x) \rangle = \int_0^T f(x) \psi_{n,m}^{T,\alpha}(x) w^\alpha(x) dx$$

$$\bullet w^\alpha(x) = \alpha \frac{x^{\alpha-1}}{T^\alpha}$$

Matriz de coeficientes:

$$C = (0.3125 \quad 1.40729 \quad 1.25779 \quad 1.67722)$$

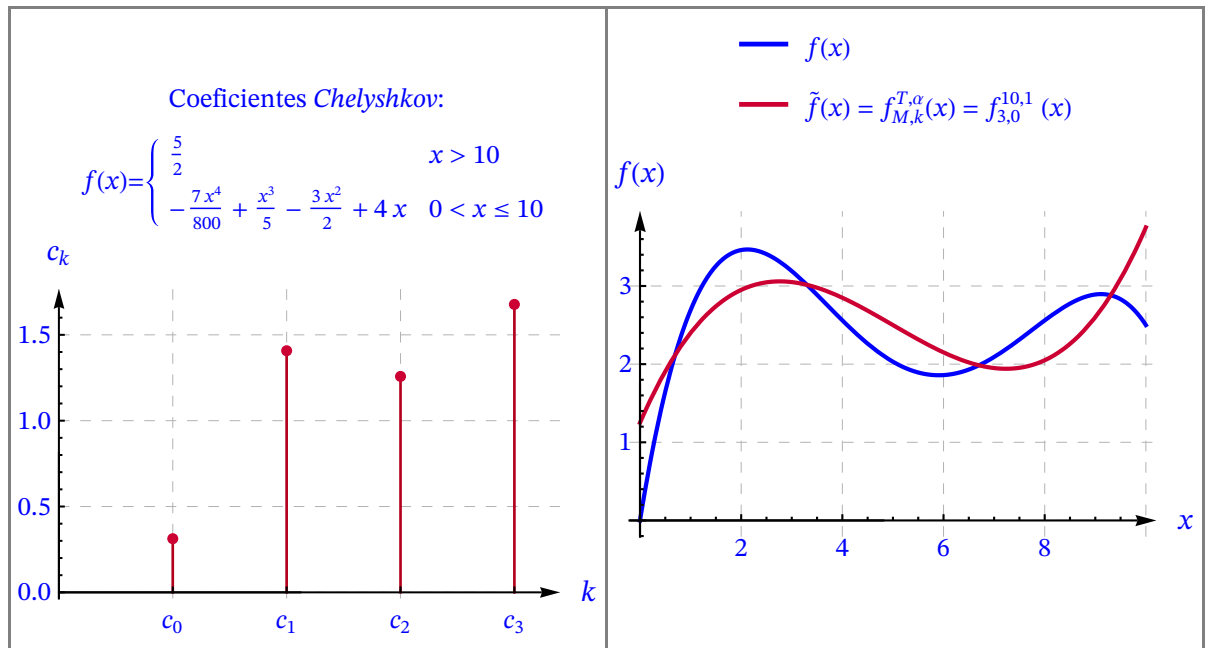
(c) Aproximación Wavelet de Chelyshkov fraccionaria de $f(x)$:

$$f(x) \simeq \tilde{f}(x) = f_{M,k}^{T,\alpha}(x) = \sum_{n=0}^{2^k-1} \sum_{m=0}^M c_{nm} \psi_{nm}^{T,\alpha}(x)$$

$$f(x) \simeq \tilde{f}(x) = f_{M,k}^{T,\alpha}(x) = 1.25779 \left(\begin{cases} \frac{(60-7x)x^2}{200\sqrt{5}} & 0 \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right) +$$

$$1.67722 \left(\begin{cases} \frac{\sqrt{7}x^3}{1000} & 0 \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right) + 0.3125 \left(\begin{cases} -\frac{7x^3}{200} + \frac{3x^2}{5} - 3x + 4 & 0 \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right) +$$

$$1.40729 \left(\begin{cases} \sqrt{3} \left(\frac{21x^3}{1000} - \frac{3x^2}{10} + x \right) & 0 \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right)$$



Desarrollo en serie de *Wavelets* de Chelyshkov fraccionarias de la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{5\sqrt{3}}{2} & x > 10 \\ \frac{\sqrt{3} x^2 (21x^2 - 400x + 2000)}{4000} & 0 < x \leq 10 \end{cases} \quad \text{en} \quad [A, B] = [0, T] = [0, 10]$$

$$f(x) \simeq \tilde{f}(x) = f_{M,k}^{T,\alpha}(x) = \sum_{n=0}^{2^k-1} \sum_{m=0}^M c_{nm} \psi_{nm}^{T,\alpha}(x) = C \cdot \Psi_{nm}^{T,\alpha}(x) \quad x \in [0, T]$$

$$C = \langle f(x), \Psi_{nm}^{T,\alpha}(x) \rangle \cdot D^{-1}$$

$$C = \int_0^T f(x) [\Psi_{nm}^{T,\alpha}(x)]^T w^\alpha(x) dx \cdot D^{-1} \quad D = \int_0^T \Psi_{nm}^{T,\alpha}(x) [\Psi_{nm}^{T,\alpha}(x)]^T w(x) dx$$

Wavelets de Chelyshkov fraccionarias $\psi_{nm}^{T,\alpha}(x)$

$$\left(\begin{array}{ll} [A, B] = & [0, 10] \\ T = & 10 \\ \alpha = & 1 \\ k = & 0 \\ M = & 3 \\ n = 0, \dots, 2^k-1 = & \{0\} \\ m = 0, \dots, M = & \{0, 1, 2, 3\} \end{array} \right)$$

(a) Definición de las *Wavelets* de Chelyshkov fraccionarias $\psi_{nm}^{T,\alpha}(x)$

$$\psi_{nm}^{T,\alpha}(x) = \begin{cases} \sqrt{2m+1} 2^{\frac{k}{2}} C_{M,m} \left(2^k \left(\frac{x}{T} \right)^\alpha - n \right) & \left(\frac{x}{T} \right) \in \left[\left(\frac{n}{2^k} \right)^{\frac{1}{\alpha}}, \left(\frac{n+1}{2^k} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right) \\ 0 & \text{Resto} \end{cases}$$

$$\begin{cases} n = 0, 1, \dots, 2^k - 1 & k = 1, 2, \dots \\ m = 0, 1, \dots, M & \text{grado del polinomio} \end{cases}$$

$C_{M,m}(x) \equiv$ polinomios de Chelyshkov de grado m

$$\Psi_{nm}^{T,\alpha}(x) = \left(\begin{array}{ll} \psi_{0,0}^{10,1}(x) & \begin{cases} -\frac{7x^3}{200} + \frac{3x^2}{5} - 3x + 4 & 0 \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{0,1}^{10,1}(x) & \begin{cases} \sqrt{3} \left(\frac{21x^3}{1000} - \frac{3x^2}{10} + x \right) & 0 \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{0,2}^{10,1}(x) & \begin{cases} \frac{(60-7x)x^2}{200\sqrt{5}} & 0 \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{0,3}^{10,1}(x) & \begin{cases} \frac{\sqrt{7}x^3}{1000} & 0 \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \end{array} \right)$$

(b) Cálculo de los coeficientes $C = (c_{nm})$ Wavelets de Chelyshkov fraccionarios.

$$C = \langle f(x), \Psi_{n,m}^{T,\alpha}(x) \rangle = \int_0^T f(x) [\Psi_{n,m}^{T,\alpha}(x)]^T w^\alpha(x) dx$$

$$\bullet c_{nm} = \langle f(x), \psi_{n,m}^{T,\alpha}(x) \rangle = \int_0^T f(x) \psi_{n,m}^{T,\alpha}(x) w^\alpha(x) dx$$

$$\bullet w^\alpha(x) = \alpha \frac{x^{\alpha-1}}{T^\alpha}$$

Matriz de coeficientes:

$$C = (-0.32476 \quad 0.9375 \quad 2.82405 \quad 2.79592)$$

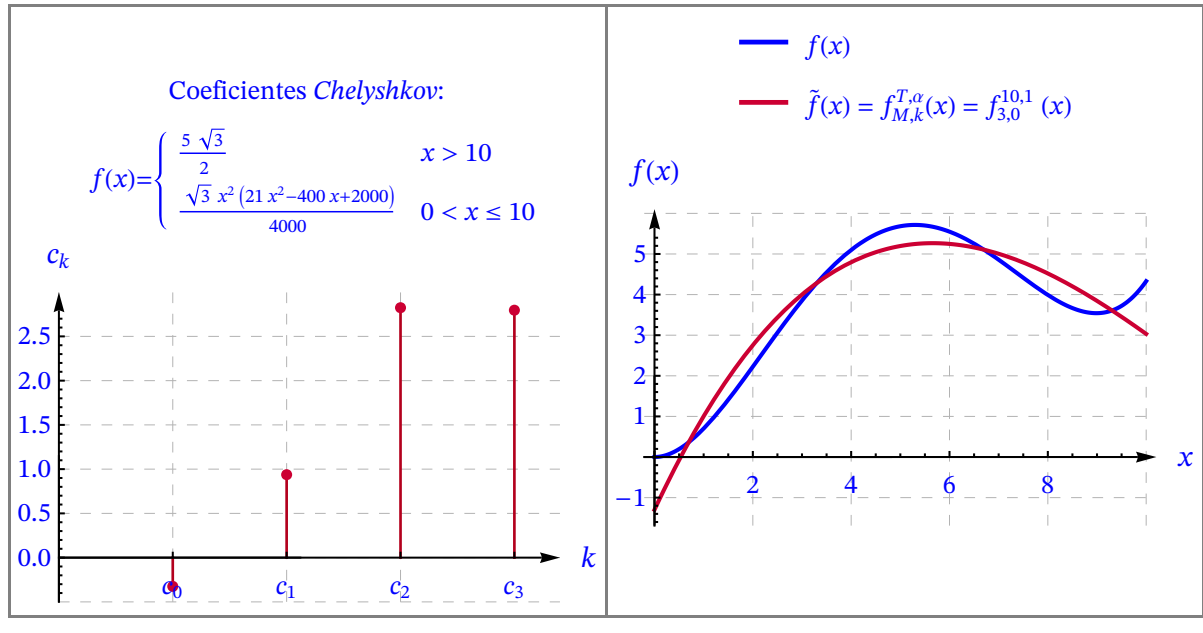
(c) Aproximación Wavelet de Chelyshkov fraccionaria de $f(x)$:

$$f(x) \simeq \tilde{f}(x) = f_{M,k}^{T,\alpha}(x) = \sum_{n=0}^{2^k-1} \sum_{m=0}^M c_{nm} \psi_{nm}^{T,\alpha}(x)$$

$$f(x) \simeq \tilde{f}(x) = f_{M,k}^{T,\alpha}(x) = 2.82405 \left(\begin{cases} \frac{(60-7x)x^2}{200\sqrt{5}} & 0 \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right) +$$

$$2.79592 \left(\begin{cases} \frac{\sqrt{7}x^3}{1000} & 0 \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right) - 0.32476 \left(\begin{cases} -\frac{7x^3}{200} + \frac{3x^2}{5} - 3x + 4 & 0 \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right) +$$

$$0.9375 \left(\begin{cases} \sqrt{3} \left(\frac{21x^3}{1000} - \frac{3x^2}{10} + x \right) & 0 \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right)$$



Desarrollo en serie de *Wavelets* de Chelyshkov fraccionarias de la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{5\sqrt{5}}{2} & x > 10 \\ \frac{(80-7x)x^3}{800\sqrt{5}} & 0 < x \leq 10 \end{cases} \quad \text{en} \quad [A, B] = [0, T] = [0, 10]$$

$$f(x) \simeq \tilde{f}(x) = f_{M,k}^{T,\alpha}(x) = \sum_{n=0}^{2^k-1} \sum_{m=0}^M c_{nm} \psi_{nm}^{T,\alpha}(x) = C \cdot \Psi_{nm}^{T,\alpha}(x) \quad x \in [0, T]$$

$$C = \langle f(x), \Psi_{nm}^{T,\alpha}(x) \rangle \cdot D^{-1}$$

$$C = \int_0^T f(x) [\Psi_{nm}^{T,\alpha}(x)]^T w^\alpha(x) dx \cdot D^{-1} \quad D = \int_0^T \Psi_{nm}^{T,\alpha}(x) [\Psi_{nm}^{T,\alpha}(x)]^T w(x) dx$$

Wavelets de Chelyshkov fraccionarias $\psi_{nm}^{T,\alpha}(x)$

$$\left(\begin{array}{ll} [A, B] = & [0, 10] \\ T = & 10 \\ \alpha = & 1 \\ k = & 0 \\ M = & 3 \\ n = 0, \dots, 2^k-1 = & \{0\} \\ m = 0, \dots, M = & \{0, 1, 2, 3\} \end{array} \right)$$

(a) Definición de las *Wavelets* de Chelyshkov fraccionarias $\psi_{nm}^{T,\alpha}(x)$

$$\psi_{nm}^{T,\alpha}(x) = \begin{cases} \sqrt{2m+1} 2^{\frac{k}{2}} C_{M,m} \left(2^k \left(\frac{x}{T} \right)^\alpha - n \right) & \left(\frac{x}{T} \right) \in \left[\left(\frac{n}{2^k} \right)^\frac{1}{\alpha}, \left(\frac{n+1}{2^k} \right)^\frac{1}{\alpha} \right) \\ 0 & \text{Resto} \end{cases}$$

$$\begin{cases} n = 0, 1, \dots, 2^k - 1 & k = 1, 2, \dots \\ m = 0, 1, \dots, M & \text{grado del polinomio} \end{cases}$$

$C_{M,m}(x) \equiv$ polinomios de Chelyshkov de grado m

$$\Psi_{nm}^{T,\alpha}(x) = \begin{pmatrix} \psi_{0,0}^{10,1}(x) & \begin{cases} -\frac{7x^3}{200} + \frac{3x^2}{5} - 3x + 4 & 0 \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{0,1}^{10,1}(x) & \begin{cases} \sqrt{3} \left(\frac{21x^3}{1000} - \frac{3x^2}{10} + x \right) & 0 \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{0,2}^{10,1}(x) & \begin{cases} \frac{(60-7x)x^2}{200\sqrt{5}} & 0 \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{0,3}^{10,1}(x) & \begin{cases} \frac{\sqrt{7}x^3}{1000} & 0 \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \end{pmatrix}$$

(b) Cálculo de los coeficientes $C = (c_{nm})$ Wavelets de Chelyshkov fraccionarios.

$$C = \langle f(x), \Psi_{n,m}^{T,\alpha}(x) \rangle = \int_0^T f(x) [\Psi_{n,m}^{T,\alpha}(x)]^T w^\alpha(x) dx$$

$$\bullet c_{nm} = \langle f(x), \psi_{n,m}^{T,\alpha}(x) \rangle = \int_0^T f(x) \psi_{n,m}^{T,\alpha}(x) w^\alpha(x) dx$$

$$\bullet w^\alpha(x) = \alpha \frac{x^{\alpha-1}}{T^\alpha}$$

Matriz de coeficientes:

$$C = (0.139754 \quad -0.403436 \quad 1.5625 \quad 3.96166)$$

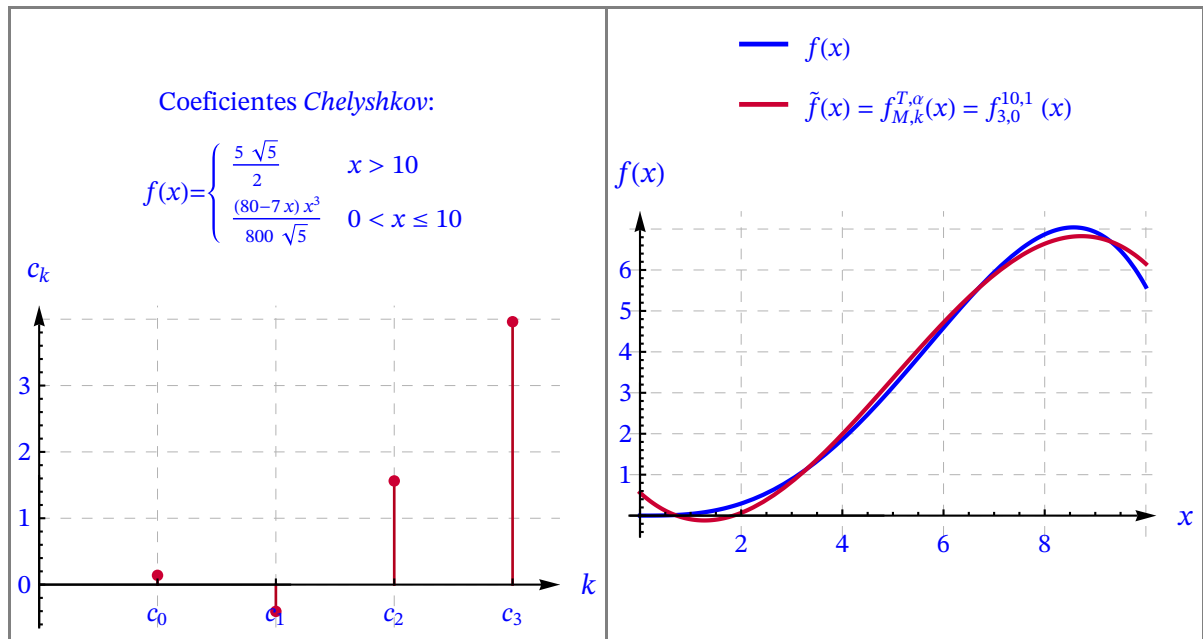
(c) Aproximación Wavelet de Chelyshkov fraccionaria de $f(x)$:

$$f(x) \simeq \tilde{f}(x) = f_{M,k}^{T,\alpha}(x) = \sum_{n=0}^{2^k-1} \sum_{m=0}^M c_{nm} \psi_{nm}^{T,\alpha}(x)$$

$$f(x) \simeq \tilde{f}(x) = f_{M,k}^{T,\alpha}(x) = 1.5625 \left(\begin{cases} \frac{(60-7x)x^2}{200\sqrt{5}} & 0 \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right) +$$

$$3.96166 \left(\begin{cases} \frac{\sqrt{7}x^3}{1000} & 0 \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right) + 0.139754 \left(\begin{cases} -\frac{7x^3}{200} + \frac{3x^2}{5} - 3x + 4 & 0 \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right) -$$

$$0.403436 \left(\begin{cases} \sqrt{3} \left(\frac{21x^3}{1000} - \frac{3x^2}{10} + x \right) & 0 \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right)$$



Desarrollo en serie de *Wavelets* de Chelyshkov fraccionarias de la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{5\sqrt{7}}{2} & x > 10 \\ \frac{\sqrt{7}x^4}{4000} & 0 < x \leq 10 \end{cases} \quad \text{en} \quad [A, B] = [0, T] = [0, 10]$$

$$f(x) \simeq \tilde{f}(x) = f_{M,k}^{T,\alpha}(x) = \sum_{n=0}^{2^k-1} \sum_{m=0}^M c_{nm} \psi_{nm}^{T,\alpha}(x) = C \cdot \Psi_{nm}^{T,\alpha}(x) \quad x \in [0, T]$$

$$C = \langle f(x), \Psi_{nm}^{T,\alpha}(x) \rangle \cdot D^{-1}$$

$$C = \int_0^T f(x) [\Psi_{nm}^{T,\alpha}(x)]^T w^\alpha(x) dx \cdot D^{-1} \quad D = \int_0^T \Psi_{nm}^{T,\alpha}(x) [\Psi_{nm}^{T,\alpha}(x)]^T w(x) dx$$

Wavelets de Chelyshkov fraccionarias $\psi_{nm}^{T,\alpha}(x)$

$$\left(\begin{array}{ll} [A, B] = & [0, 10] \\ T = & 10 \\ \alpha = & 1 \\ k = & 0 \\ M = & 3 \\ n = 0, \dots, 2^k-1 = & \{0\} \\ m = 0, \dots, M = & \{0, 1, 2, 3\} \end{array} \right)$$

(a) Definición de las *Wavelets* de Chelyshkov fraccionarias $\psi_{nm}^{T,\alpha}(x)$

$$\psi_{nm}^{T,\alpha}(x) = \begin{cases} \sqrt{2m+1} 2^{\frac{k}{2}} C_{M,m} \left(2^k \left(\frac{x}{T} \right)^\alpha - n \right) & \left(\frac{x}{T} \right) \in \left[\left(\frac{n}{2^k} \right)^\frac{1}{\alpha}, \left(\frac{n+1}{2^k} \right)^\frac{1}{\alpha} \right) \\ 0 & \text{Resto} \end{cases}$$

$$\begin{cases} n = 0, 1, \dots, 2^k - 1 & k = 1, 2, \dots \\ m = 0, 1, \dots, M & \text{grado del polinomio} \end{cases}$$

$C_{M,m}(x) \equiv$ polinomios de Chelyshkov de grado m

$$\Psi_{nm}^{T,\alpha}(x) = \left(\begin{array}{ll} \psi_{0,0}^{10,1}(x) & \begin{cases} -\frac{7x^3}{200} + \frac{3x^2}{5} - 3x + 4 & 0 \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{0,1}^{10,1}(x) & \begin{cases} \sqrt{3} \left(\frac{21x^3}{1000} - \frac{3x^2}{10} + x \right) & 0 \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{0,2}^{10,1}(x) & \begin{cases} \frac{(60-7x)x^2}{200\sqrt{5}} & 0 \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{0,3}^{10,1}(x) & \begin{cases} \frac{\sqrt{7}x^3}{1000} & 0 \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \end{array} \right)$$

(b) Cálculo de los coeficientes $C = (c_{nm})$ Wavelets de Chelyshkov fraccionarios.

$$C = \langle f(x), \Psi_{n,m}^{T,\alpha}(x) \rangle = \int_0^T f(x) [\Psi_{n,m}^{T,\alpha}(x)]^T w^\alpha(x) dx$$

$$\bullet c_{nm} = \langle f(x), \psi_{n,m}^{T,\alpha}(x) \rangle = \int_0^T f(x) \psi_{n,m}^{T,\alpha}(x) w^\alpha(x) dx$$

$$\bullet w^\alpha(x) = \alpha \frac{x^{\alpha-1}}{T^\alpha}$$

Matriz de coeficientes:

$$C = (-0.0236228 \quad 0.0681931 \quad -0.264111 \quad 2.1875)$$

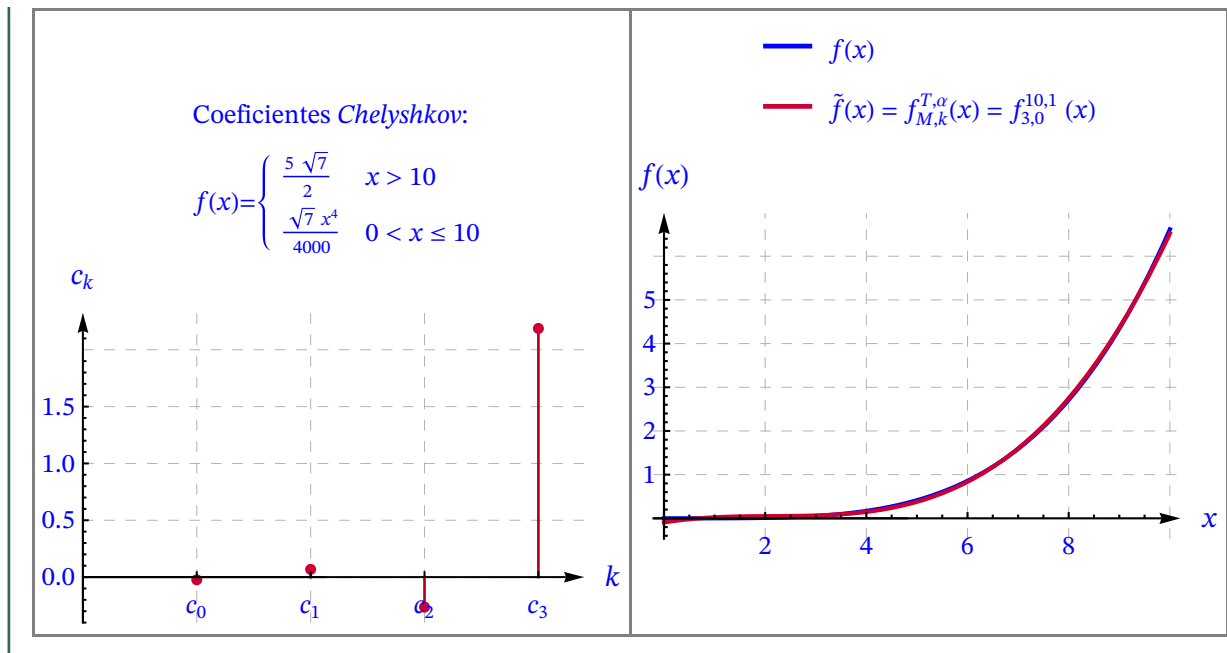
(c) Aproximación Wavelet de Chelyshkov fraccionaria de $f(x)$:

$$f(x) \simeq \tilde{f}(x) = f_{M,k}^{T,\alpha}(x) = \sum_{n=0}^{2^k-1} \sum_{m=0}^M c_{nm} \psi_{nm}^{T,\alpha}(x)$$

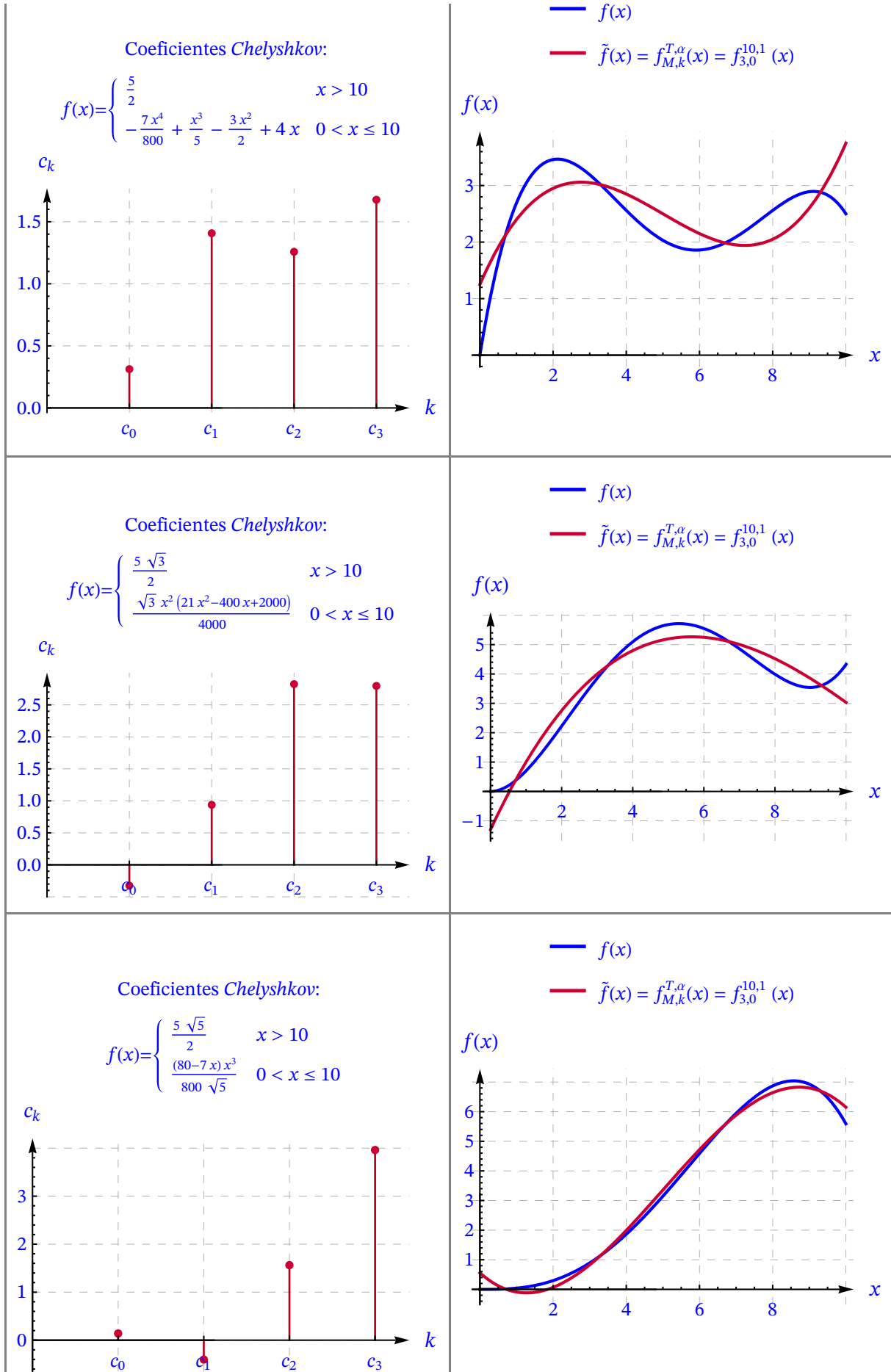
$$f(x) \simeq \tilde{f}(x) = f_{M,k}^{T,\alpha}(x) = -0.264111 \left(\begin{cases} \frac{(60-7x)x^2}{200\sqrt{5}} & 0 \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right) +$$

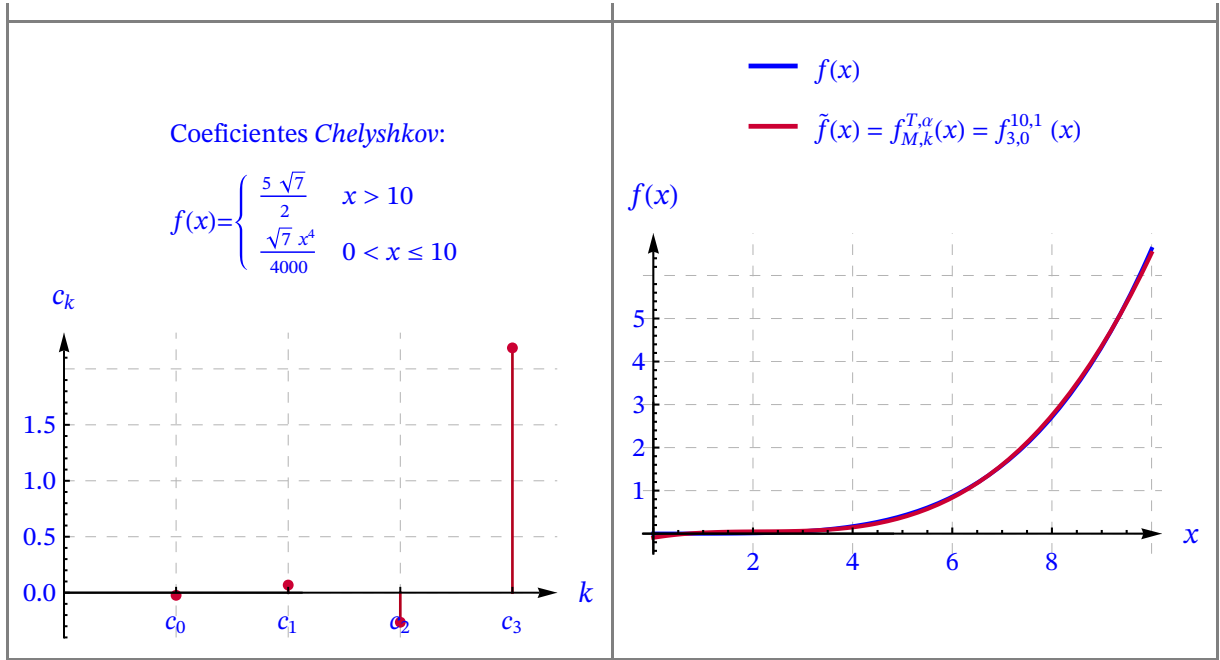
$$2.1875 \left(\begin{cases} \frac{\sqrt{7}x^3}{1000} & 0 \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right) - 0.0236228 \left(\begin{cases} -\frac{7x^3}{200} + \frac{3x^2}{5} - 3x + 4 & 0 \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right) +$$

$$0.0681931 \left(\begin{cases} \sqrt{3} \left(\frac{21x^3}{1000} - \frac{3x^2}{10} + x \right) & 0 \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right)$$



Out[*]=





Matriz Integral Fraccionaria de las Wavelets de Chelyshkov Fraccionarias y

Matriz de coeficientes c_k :

$$P^{(\beta)} = \begin{pmatrix} 0.3125 & 1.40729 & 1.25779 & 1.67722 \\ -0.32476 & 0.9375 & 2.82405 & 2.79592 \\ 0.139754 & -0.403436 & 1.5625 & 3.96166 \\ -0.0236228 & 0.0681931 & -0.264111 & 2.1875 \end{pmatrix}$$

$$(c_k) = \begin{pmatrix} 0.3125 & 1.40729 & 1.25779 & 1.67722 \\ -0.32476 & 0.9375 & 2.82405 & 2.79592 \\ 0.139754 & -0.403436 & 1.5625 & 3.96166 \\ -0.0236228 & 0.0681931 & -0.264111 & 2.1875 \end{pmatrix}$$

(b)

Matriz Integral Fraccionaria de las Wavelets de Chelyshkov Fraccionarias.

$$P^{(\beta)} = \langle J^\beta[\psi^{T,\alpha}(x)], \Psi^{T,\alpha}(x) \rangle$$

$$P^{(\beta)} = \int_0^T J^\beta[\psi^{T,\alpha}(x)] \cdot [\Psi^{T,\alpha}(x)]^T * w^\alpha(x) dx$$

$$w^\alpha(x) = \alpha \frac{x^{\alpha-1}}{T^\alpha}$$

$$\left(\begin{array}{lll} [A, B] = & [0, 10] & (\text{intervalo } x) \\ \{T, \alpha\} = & \{10, 1\} & \\ \{k, 2^k\} = & \{1, 2\} & (\text{máxima resolución}) \\ M = & 2 & (\text{máx. grado polinomio}) \\ m^* = 2^k(M+1) = & 6 & \text{Dimensión } \mathcal{B} = \{\psi_k\} \\ \{\beta\} = & \{\frac{1}{2}\} & \end{array} \right)$$

(a) Polinomios de Chelyshkov $\Phi(x)$:

$$\Phi(x) = (C_{M,n}(x) = \begin{pmatrix} C_{2,0}(x) \\ C_{2,1}(x) \\ C_{2,2}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10x^2 - 12x + 3 \\ 4x - 5x^2 \\ x^2 \end{pmatrix})$$

(b) Matriz con las Wavelets de Chelyshkov Fraccionarias $\Psi^{T,\alpha}(x)$:

$$\Psi^{T,\alpha}(x) = \begin{pmatrix} \psi_{0,0}^{10,1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} \sqrt{2} (2x^2 - 12x + 15) & 0 \leq \frac{x}{10} < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{0,1}^{10,1}(x) = \begin{cases} -\frac{1}{5} \sqrt{6} (x - 4)x & 0 \leq \frac{x}{10} < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{0,2}^{10,1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} \sqrt{\frac{2}{5}} x^2 & 0 \leq \frac{x}{10} < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{1,0}^{10,1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} \sqrt{2} (2x^2 - 32x + 125) & \frac{1}{2} \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{1,1}^{10,1}(x) = \begin{cases} -\frac{1}{5} \sqrt{6} (x^2 - 14x + 45) & \frac{1}{2} \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{1,2}^{10,1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} \sqrt{\frac{2}{5}} (x - 5)^2 & \frac{1}{2} \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \end{pmatrix}$$

(c) Matriz con las integrales fraccionarias R–L de orden $\beta = \frac{1}{2}$ calculadas con la definición de integral de Riemann–Liouville:

$$I_1 = J^{(\beta)}[\Psi^{T,\alpha}(x)] = \begin{pmatrix} \begin{cases} \frac{2}{75} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (15 - 4x)^2 \sqrt{x} \\ \frac{2}{75} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (4x - 15) (4x^{3/2} - (4\sqrt{(x-5)x} + 15) \sqrt{x} + 5\sqrt{5}) \end{cases} \\ \begin{cases} -\frac{16}{25} \sqrt{\frac{2}{3\pi}} (x-5)x^{3/2} \\ -\frac{2}{25} \sqrt{\frac{2}{3\pi}} (8x^{5/2} - 8(\sqrt{(x-5)x} + 5)x^{3/2} + 20\sqrt{x-5}x + 25\sqrt{5}) \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{16}{75} \sqrt{\frac{2}{5\pi}} x^{5/2} \\ -\frac{2}{75} \sqrt{\frac{2}{5\pi}} (-8x^{5/2} + 8\sqrt{x-5}x^2 + 20\sqrt{x-5}x + 75\sqrt{5}) \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{2}{75} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{x-5} (4x-35)^2 \\ -\frac{2}{75} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (4x-35) (4\sqrt{x-10}x - 4\sqrt{x-5}x - 25\sqrt{x-10} + 25\sqrt{5}) \end{cases} \\ \begin{cases} -\frac{16}{25} \sqrt{\frac{2}{3\pi}} (x-10)(x-5)^{3/2} \\ \frac{2}{25} \sqrt{\frac{2}{3\pi}} (8(\sqrt{x-10} - \sqrt{x-5})x^2 - 20(5\sqrt{x-10} - 6\sqrt{x-5})x + 275\sqrt{x-10} - 400\sqrt{x-5}) \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{16}{75} \sqrt{\frac{2}{5\pi}} (x-5)^{5/2} \\ -\frac{2}{75} \sqrt{\frac{2}{5\pi}} (8(\sqrt{x-10} - \sqrt{x-5})x^2 + (80\sqrt{x-5} - 60\sqrt{x-10})x + 25(7\sqrt{x-10} - 8\sqrt{x-5})) \end{cases} \end{pmatrix}$$

(d) Matriz con las integrales fraccionarias R-L de orden $\beta = \frac{1}{2}$ calculadas con el operador integral fraccionario de Riemann-Liouville de $\psi_{n,m}^{T,\alpha}$:

$$I_2 = J^{(\beta)}[\Psi^{T,\alpha}(x)] = \begin{cases} \begin{cases} \frac{2}{75} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{x} (4x-15)^2 \\ \frac{2}{75} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (4x-15) (4x^{3/2} - 4\sqrt{x-5}x - 15\sqrt{x} + 5\sqrt{x-5}) \\ -\frac{16}{25} \sqrt{\frac{2}{3\pi}} (x-5)x^{3/2} & 0 < x \\ -\frac{1}{5} \sqrt{\frac{6}{\pi}} x^{3/2} \left(x B_{\frac{5}{x}}(3, \frac{1}{2}) - 4 B_{\frac{5}{x}}(2, \frac{1}{2}) \right) & x > 5 \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{16}{75} \sqrt{\frac{2}{5\pi}} x^{5/2} & 0 < x \leq 5 \\ \frac{1}{5} \sqrt{\frac{2}{5\pi}} x^{5/2} B_{\frac{5}{x}}(3, \frac{1}{2}) & x > 5 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2}{75} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{x-5} (4x-35)^2 \\ -\frac{2}{75} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (4x-35) (4\sqrt{x-10}x - 4\sqrt{x-5}x - 25\sqrt{x-10} + 3 \\ 0 \\ -\frac{16}{25} \sqrt{\frac{2}{3\pi}} (x-10)(x-5)^{3/2} \\ \frac{2}{25} \sqrt{\frac{2}{3\pi}} (4x(2(\sqrt{x-10} - \sqrt{x-5})x - 25\sqrt{x-10} + 30\sqrt{x-5} \\ 275\sqrt{x-10} - 400\sqrt{x-5}) \\ 0 \\ \frac{16}{75} \sqrt{\frac{2}{5\pi}} (x-5)^{5/2} \\ \frac{2}{75} \sqrt{\frac{2}{5\pi}} (25(8\sqrt{x-5} - 7\sqrt{x-10}) + \\ 4x(-2\sqrt{x-10}x + 2\sqrt{x-5}x + 15\sqrt{x-10} - 20\sqrt{x-5} \end{cases}$$

(e) Matriz Integral Fraccionaria de las Wavelets de Chelyshkov Fraccionarias:

$$J^{(\beta)}[\Psi^{T,\alpha}(x)] = P^{(\beta)} \cdot \Psi^{T,\alpha}(x)$$

$$P^{(\beta)} = \int_0^T J^\beta[\psi^{T,\alpha}(x)] \cdot [\Psi^{T,\alpha}(x)]^T * w^\alpha(x) dx$$

$$P^{(\beta)} = \begin{pmatrix} 0.677204 & 0.666775 & 0.276803 & 0.180193 & 0.228026 & 0.241209 \\ -0.174892 & 1.04857 & 1.05288 & 0.181251 & 0.378122 & 0.434115 \\ 0.026052 & -0.105288 & 1.22334 & 0.715506 & 0.792572 & 0.725545 \\ 0. & 0. & 0. & 0.677204 & 0.666775 & 0.276803 \\ 0. & 0. & 0. & -0.174892 & 1.04857 & 1.05288 \\ 0. & 0. & 0. & 0.026052 & -0.105288 & 1.22334 \end{pmatrix}$$

Desarrollo en serie de las funciones $f(x) = J^\beta[\psi_{nm}^{T,\alpha}(x)]$.

$$\left(\begin{array}{ll} [A, B] = & [0, 10] \quad (\text{intervalo } x) \\ \{T, \alpha\} = & \{10, 1\} \\ \{k, 2^k\} = & \{k, 2\} \quad (\text{máxima resolución}) \\ M = & 2 \quad (\text{máx. grado polinomio}) \\ m^* = 2^k(M+1) = & 6 \quad \text{Dimensión } \mathcal{B} = \{\psi_k\} \\ \{\beta\} = & \{\frac{1}{2}\} \end{array} \right)$$

(a) Matriz con las Wavelets de Chelyshkov fraccionarias $\Psi_{nm}^{T,\alpha}(x)$ en $[0, T]$:

$$\Psi_{nm}^{T,\alpha}(x) = \left(\begin{array}{ll} \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{5} \sqrt{2} (2x^2 - 12x + 15) & 0 \leq \frac{x}{10} < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{array} \right. & \\ \left\{ \begin{array}{ll} -\frac{1}{5} \sqrt{6} (x-4)x & 0 \leq \frac{x}{10} < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{array} \right. & \\ \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{5} \sqrt{\frac{2}{5}} x^2 & 0 \leq \frac{x}{10} < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{array} \right. & \\ \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{5} \sqrt{2} (2x^2 - 32x + 125) & \frac{1}{2} \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{array} \right. & \\ \left\{ \begin{array}{ll} -\frac{1}{5} \sqrt{6} (x^2 - 14x + 45) & \frac{1}{2} \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{array} \right. & \\ \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{5} \sqrt{\frac{2}{5}} (x-5)^2 & \frac{1}{2} \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{array} \right. & \end{array} \right)$$

(b) Matriz con las integrales fraccionarias R–L de orden $\beta =$

$$\frac{1}{2} \text{ calculadas con la}$$

integral de Riemann–Liouville:

$$I_1 = J^{(\beta)}[\Psi_{nm}^{T,\alpha}(x)] = \begin{cases} \left\{ \begin{aligned} &\frac{2}{75} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (15 - 4x)^2 \sqrt{x} \\ &\frac{2}{75} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (4x - 15) (4x^{3/2} - (4\sqrt{(x-5)x} + 15)\sqrt{x} + 5\sqrt{x-5}) \\ &-\frac{16}{25} \sqrt{\frac{2}{3\pi}} (x-5)x^{3/2} \\ &-\frac{2}{25} \sqrt{\frac{2}{3\pi}} (8x^{5/2} - 8(\sqrt{(x-5)x} + 5)x^{3/2} + 20\sqrt{x-5}x + 2) \\ &\frac{16}{75} \sqrt{\frac{2}{5\pi}} x^{5/2} \\ &-\frac{2}{75} \sqrt{\frac{2}{5\pi}} (-8x^{5/2} + 8\sqrt{x-5}x^2 + 20\sqrt{x-5}x + 75\sqrt{x-5}) \end{aligned} \right. \\ \left\{ \begin{aligned} &\frac{2}{75} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{x-5} (4x-35)^2 \\ &-\frac{2}{75} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (4x-35) (4\sqrt{x-10}x - 4\sqrt{x-5}x - 25\sqrt{x-10} + \\ &-\frac{16}{25} \sqrt{\frac{2}{3\pi}} (x-10)(x-5)^{3/2} \\ &\frac{2}{25} \sqrt{\frac{2}{3\pi}} (8(\sqrt{x-10} - \sqrt{x-5})x^2 - \\ &\quad 20(5\sqrt{x-10} - 6\sqrt{x-5})x + 275\sqrt{x-10} - 400\sqrt{x-5}) \\ &\frac{16}{75} \sqrt{\frac{2}{5\pi}} (x-5)^{5/2} \\ &-\frac{2}{75} \sqrt{\frac{2}{5\pi}} (8(\sqrt{x-10} - \sqrt{x-5})x^2 + \\ &\quad (80\sqrt{x-5} - 60\sqrt{x-10})x + 25(7\sqrt{x-10} - 8\sqrt{x-5})) \end{aligned} \right. \end{cases}$$

Desarrollo en serie de Wavelets de Chelyshkov fraccionarias de la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{75} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (15 - 4x)^2 \sqrt{x} & 0 < x \leq 5 \\ \frac{2}{75} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (4x - 15) (4x^{3/2} - (4\sqrt{(x-5)x} + 15)\sqrt{x} + 5\sqrt{x-5}) & x > 5 \end{cases}$$

en $[A, B] = [0, T] = [0, 10]$

$$f(x) \simeq \tilde{f}(x) = f_{M,k}^{T,\alpha}(x) = \sum_{n=0}^{2^k-1} \sum_{m=0}^M c_{nm} \psi_{nm}^{T,\alpha}(x) = C \cdot \Psi_{nm}^{T,\alpha}(x) \quad x \in [0, T]$$

$$C = \langle f(x), \Psi_{nm}^{T,\alpha}(x) \rangle \cdot D^{-1}$$

$$C = \int_0^T f(x) [\Psi_{n,m}^{T,\alpha}(x)]^T w^\alpha(x) dx \cdot D^{-1} \quad D = \int_0^T \Psi_{n,m}^{T,\alpha}(x) [\Psi_{n,m}^{T,\alpha}(x)]^T w(x) dx$$

Wavelets de Chelyshkov fraccionarias $\psi_{nm}^{T,\alpha}(x)$

$$\left(\begin{array}{ll} [A, B] = & [0, 10] \\ T = & 10 \\ \alpha = & 1 \\ k = & 1 \\ M = & 2 \\ n = 0, \dots, 2^k - 1 = & \{0, 1\} \\ m = 0, \dots, M = & \{0, 1, 2\} \end{array} \right)$$

(a) Definición de las Wavelets de Chelyshkov fraccionarias $\psi_{nm}^{T,\alpha}(x)$

$$\psi_{nm}^{T,\alpha}(x) = \begin{cases} \sqrt{2m+1} 2^{\frac{k}{2}} C_{M,m}(2^k (\frac{x}{T})^\alpha - n) & (\frac{x}{T}) \in \left[\left(\frac{n}{2^k}\right)^{\frac{1}{\alpha}}, \left(\frac{n+1}{2^k}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \right) \\ 0 & \text{Resto} \end{cases}$$

$$\begin{cases} n = 0, 1, \dots, 2^k - 1 & k = 1, 2, \dots \\ m = 0, 1, \dots, M & \text{grado del polinomio} \end{cases}$$

$C_{M,m}(x) \equiv$ polinomios de Chelyshkov de grado m

$$\Psi_{nm}^{T,\alpha}(x) = \left(\begin{array}{ll} \psi_{0,0}^{10,1}(x) & \begin{cases} \frac{1}{5} \sqrt{2} (2x^2 - 12x + 15) & 0 \leq \frac{x}{10} < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{0,1}^{10,1}(x) & \begin{cases} -\frac{1}{5} \sqrt{6} (x-4)x & 0 \leq \frac{x}{10} < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{0,2}^{10,1}(x) & \begin{cases} \frac{1}{5} \sqrt{\frac{2}{5}} x^2 & 0 \leq \frac{x}{10} < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{1,0}^{10,1}(x) & \begin{cases} \frac{1}{5} \sqrt{2} (2x^2 - 32x + 125) & \frac{1}{2} \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{1,1}^{10,1}(x) & \begin{cases} -\frac{1}{5} \sqrt{6} (x^2 - 14x + 45) & \frac{1}{2} \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{1,2}^{10,1}(x) & \begin{cases} \frac{1}{5} \sqrt{\frac{2}{5}} (x-5)^2 & \frac{1}{2} \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \end{array} \right)$$

(b) Cálculo de los coeficientes $C = (c_{nm})$ Wavelets de Chelyshkov fraccionarios.

$$C = \langle f(x), \Psi_{n,m}^{T,\alpha}(x) \rangle = \int_0^T f(x) [\Psi_{n,m}^{T,\alpha}(x)]^T w^\alpha(x) dx$$

$$\bullet c_{nm} = \langle f(x), \psi_{n,m}^{T,\alpha}(x) \rangle = \int_0^T f(x) \psi_{n,m}^{T,\alpha}(x) w^\alpha(x) dx$$

$$\bullet w^\alpha(x) = \alpha \frac{x^{\alpha-1}}{T^\alpha}$$

Matriz de coeficientes:

$$C = (0.677204 \quad 0.666775 \quad 0.276803 \quad 0.180193 \quad 0.228026 \quad 0.241209)$$

(c) Aproximación Wavelet de Chelyshkov fraccionaria de $f(x)$:

$$f(x) \simeq \tilde{f}(x) = f_{M,k}^{T,\alpha}(x) = \sum_{n=0}^{2^k-1} \sum_{m=0}^M c_{nm} \psi_{nm}^{T,\alpha}(x)$$

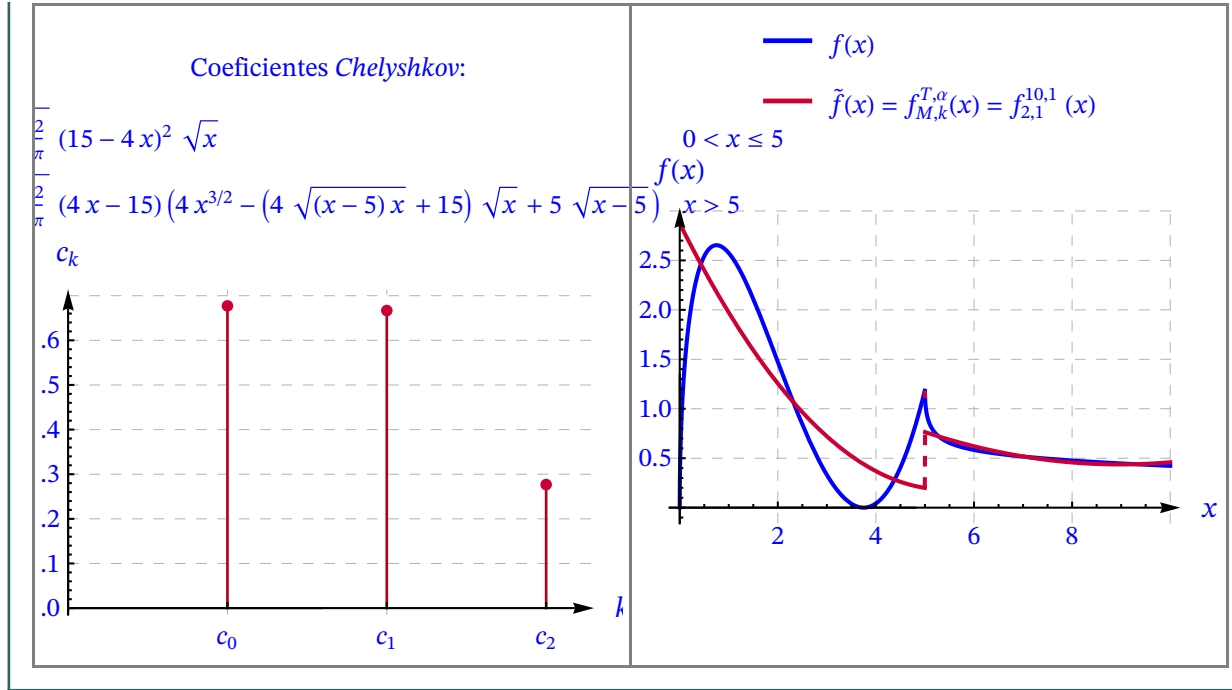
$$f(x) \simeq \tilde{f}(x) = f_{M,k}^{T,\alpha}(x) = 0.241209 \left(\begin{cases} \frac{1}{5} \sqrt{\frac{2}{5}} (x-5)^2 & \frac{1}{2} \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right) +$$

$$0.666775 \left(\begin{cases} -\frac{1}{5} \sqrt{6} (x-4)x & 0 \leq \frac{x}{10} < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right) + 0.276803 \left(\begin{cases} \frac{1}{5} \sqrt{\frac{2}{5}} x^2 & 0 \leq \frac{x}{10} < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right) +$$

$$0.228026 \left(\begin{cases} -\frac{1}{5} \sqrt{6} (x^2 - 14x + 45) & \frac{1}{2} \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right) +$$

$$0.180193 \left(\begin{cases} \frac{1}{5} \sqrt{2} (2x^2 - 32x + 125) & \frac{1}{2} \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right) +$$

$$0.677204 \left(\begin{cases} \frac{1}{5} \sqrt{2} (2x^2 - 12x + 15) & 0 \leq \frac{x}{10} < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right)$$



Desarrollo en serie de Wavelets de Chelyshkov fraccionarias de la función

$$f(x) =$$

$$\begin{cases} -\frac{16}{25} \sqrt{\frac{2}{3\pi}} (x-5) x^{3/2} & 0 < x \leq 5 \\ -\frac{2}{25} \sqrt{\frac{2}{3\pi}} (8x^{5/2} - 8(\sqrt{(x-5)x} + 5)x^{3/2} + 20\sqrt{x-5}x + 25\sqrt{x-5}) & x > 5 \end{cases}$$

$$\text{en } [A, B] = [0, T] = [0, 10]$$

$$f(x) \simeq \tilde{f}(x) = f_{M,k}^{T,\alpha}(x) = \sum_{n=0}^{2^k-1} \sum_{m=0}^M c_{nm} \psi_{nm}^{T,\alpha}(x) = C \cdot \Psi_{nm}^{T,\alpha}(x) \quad x \in [0, T]$$

$$C = \langle f(x), \Psi_{nm}^{T,\alpha}(x) \rangle \cdot D^{-1}$$

$$C = \int_0^T f(x) [\Psi_{nm}^{T,\alpha}(x)]^T w^\alpha(x) dx \cdot D^{-1} \quad D = \int_0^T \Psi_{nm}^{T,\alpha}(x) [\Psi_{nm}^{T,\alpha}(x)]^T w(x) dx$$

Wavelets de Chelyshkov fraccionarias $\psi_{nm}^{T,\alpha}(x)$

$$\begin{pmatrix} [A, B] = & [0, 10] \\ T = & 10 \\ \alpha = & 1 \\ k = & 1 \\ M = & 2 \\ n = 0, \dots, 2^k-1 = & \{0, 1\} \\ m = 0, \dots, M = & \{0, 1, 2\} \end{pmatrix}$$

(a) Definición de las *Wavelets* de Chelyshkov fraccionarias $\psi_{nm}^{T,\alpha}(x)$

$$\psi_{nm}^{T,\alpha}(x) = \begin{cases} \sqrt{2m+1} 2^{\frac{k}{2}} C_{M,m} \left(2^k \left(\frac{x}{T} \right)^\alpha - n \right) & \left(\frac{x}{T} \right) \in \left[\left(\frac{n}{2^k} \right)^\frac{1}{\alpha}, \left(\frac{n+1}{2^k} \right)^\frac{1}{\alpha} \right) \\ 0 & \text{Resto} \end{cases}$$

$$\begin{cases} n = 0, 1, \dots, 2^k - 1 & k = 1, 2, \dots \\ m = 0, 1, \dots, M & \text{grado del polinomio} \end{cases}$$

$C_{M,m}(x) \equiv$ polinomios de Chelyshkov de grado m

$$\Psi_{nm}^{T,\alpha}(x) = \begin{pmatrix} \psi_{0,0}^{10,1}(x) & \begin{cases} \frac{1}{5} \sqrt{2} (2x^2 - 12x + 15) & 0 \leq \frac{x}{10} < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{0,1}^{10,1}(x) & \begin{cases} -\frac{1}{5} \sqrt{6} (x-4)x & 0 \leq \frac{x}{10} < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{0,2}^{10,1}(x) & \begin{cases} \frac{1}{5} \sqrt{\frac{2}{5}} x^2 & 0 \leq \frac{x}{10} < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{1,0}^{10,1}(x) & \begin{cases} \frac{1}{5} \sqrt{2} (2x^2 - 32x + 125) & \frac{1}{2} \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{1,1}^{10,1}(x) & \begin{cases} -\frac{1}{5} \sqrt{6} (x^2 - 14x + 45) & \frac{1}{2} \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{1,2}^{10,1}(x) & \begin{cases} \frac{1}{5} \sqrt{\frac{2}{5}} (x-5)^2 & \frac{1}{2} \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \end{pmatrix}$$

(b) Cálculo de los coeficientes $C = (c_{nm})$ *Wavelets* de Chelyshkov fraccionarios.

$$C = \langle f(x), \Psi_{nm}^{T,\alpha}(x) \rangle = \int_0^T f(x) [\Psi_{nm}^{T,\alpha}(x)]^T w^\alpha(x) dx$$

$$\bullet c_{nm} = \langle f(x), \psi_{nm}^{T,\alpha}(x) \rangle = \int_0^T f(x) \psi_{nm}^{T,\alpha}(x) w^\alpha(x) dx$$

$$\bullet w^\alpha(x) = \alpha \frac{x^{\alpha-1}}{T^\alpha}$$

Matriz de coeficientes:

$$C = (-0.174892 \quad 1.04857 \quad 1.05288 \quad 0.181251 \quad 0.378122 \quad 0.434115)$$

(c) Aproximación *Wavelet* de Chelyshkov fraccionaria de $f(x)$:

$$f(x) \simeq \tilde{f}(x) = f_{M,k}^{T,\alpha}(x) = \sum_{n=0}^{2^k-1} \sum_{m=0}^M c_{nm} \psi_{nm}^{T,\alpha}(x)$$

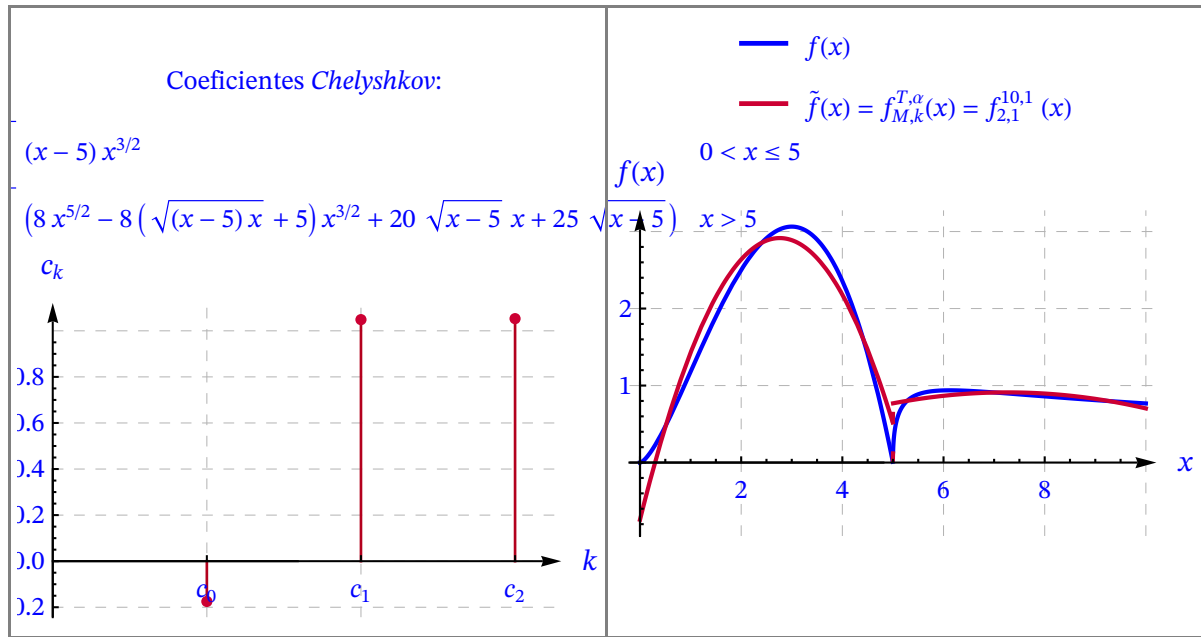
$$f(x) \simeq \tilde{f}(x) = f_{M,k}^{T,\alpha}(x) = 0.434115 \left(\begin{cases} \frac{1}{5} \sqrt{\frac{2}{5}} (x-5)^2 & \frac{1}{2} \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right) +$$

$$1.04857 \left(\begin{cases} -\frac{1}{5} \sqrt{6} (x-4)x & 0 \leq \frac{x}{10} < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right) + 1.05288 \left(\begin{cases} \frac{1}{5} \sqrt{\frac{2}{5}} x^2 & 0 \leq \frac{x}{10} < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right) +$$

$$0.378122 \left(\begin{cases} -\frac{1}{5} \sqrt{6} (x^2 - 14x + 45) & \frac{1}{2} \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right) +$$

$$0.181251 \left(\begin{cases} \frac{1}{5} \sqrt{2} (2x^2 - 32x + 125) & \frac{1}{2} \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right) -$$

$$0.174892 \left(\begin{cases} \frac{1}{5} \sqrt{2} (2x^2 - 12x + 15) & 0 \leq \frac{x}{10} < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right)$$



Desarrollo en serie de *Wavelets* de Chelyshkov fraccionarias de la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{16}{75} \sqrt{\frac{2}{5\pi}} x^{5/2} & 0 < x \leq 5 \\ -\frac{2}{75} \sqrt{\frac{2}{5\pi}} (-8x^{5/2} + 8\sqrt{x-5}x^2 + 20\sqrt{x-5}x + 75\sqrt{x-5}) & x > 5 \end{cases}$$

$$\text{en } [A, B] = [0, T] = [0, 10]$$

$$f(x) \simeq \tilde{f}(x) = f_{M,k}^{T,\alpha}(x) = \sum_{n=0}^{2^k-1} \sum_{m=0}^M c_{nm} \psi_{nm}^{T,\alpha}(x) = C \cdot \Psi_{nm}^{T,\alpha}(x) \quad x \in [0, T]$$

$$C = \langle f(x), \Psi_{nm}^{T,\alpha}(x) \rangle \cdot D^{-1}$$

$$C = \int_0^T f(x) [\Psi_{nm}^{T,\alpha}(x)]^T w^\alpha(x) dx \cdot D^{-1} \quad D = \int_0^T \Psi_{nm}^{T,\alpha}(x) [\Psi_{nm}^{T,\alpha}(x)]^T w(x) dx$$

Wavelets de Chelyshkov fraccionarias $\psi_{nm}^{T,\alpha}(x)$

$$\left(\begin{array}{ll} [A, B] = & [0, 10] \\ T = & 10 \\ \alpha = & 1 \\ k = & 1 \\ M = & 2 \\ n = 0, \dots, 2^k-1 = & \{0, 1\} \\ m = 0, \dots, M = & \{0, 1, 2\} \end{array} \right)$$

(a) Definición de las Wavelets de Chelyshkov fraccionarias $\psi_{nm}^{T,\alpha}(x)$

$$\psi_{nm}^{T,\alpha}(x) = \begin{cases} \sqrt{2m+1} \ 2^{\frac{k}{2}} C_{M,m} \left(2^k \left(\frac{x}{T} \right)^\alpha - n \right) & \left(\frac{x}{T} \right) \in \left[\left(\frac{n}{2^k} \right)^\frac{1}{\alpha}, \left(\frac{n+1}{2^k} \right)^\frac{1}{\alpha} \right) \\ 0 & \text{Resto} \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} n = 0, 1, \dots, 2^k - 1 & k = 1, 2, \dots \\ m = 0, 1, \dots, M & \text{grado del polinomio} \end{array} \right.$$

$C_{M,m}(x) \equiv$ polinomios de Chelyshkov de grado m

$$\Psi_{nm}^{T,\alpha}(x) = \left(\begin{array}{ll} \psi_{0,0}^{10,1}(x) & \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{5} \sqrt{2} (2x^2 - 12x + 15) & 0 \leq \frac{x}{10} < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{array} \right. \\ \psi_{0,1}^{10,1}(x) & \left\{ \begin{array}{ll} -\frac{1}{5} \sqrt{6} (x-4)x & 0 \leq \frac{x}{10} < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{array} \right. \\ \psi_{0,2}^{10,1}(x) & \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{5} \sqrt{\frac{2}{5}} x^2 & 0 \leq \frac{x}{10} < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{array} \right. \\ \psi_{1,0}^{10,1}(x) & \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{5} \sqrt{2} (2x^2 - 32x + 125) & \frac{1}{2} \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{array} \right. \\ \psi_{1,1}^{10,1}(x) & \left\{ \begin{array}{ll} -\frac{1}{5} \sqrt{6} (x^2 - 14x + 45) & \frac{1}{2} \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{array} \right. \\ \psi_{1,2}^{10,1}(x) & \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{5} \sqrt{\frac{2}{5}} (x-5)^2 & \frac{1}{2} \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{array} \right. \end{array} \right)$$

(b) Cálculo de los coeficientes $C = (c_{nm})$ Wavelets de Chelyshkov fraccionarios.

$$C = \langle f(x), \Psi_{n,m}^{T,\alpha}(x) \rangle = \int_0^T f(x) [\Psi_{n,m}^{T,\alpha}(x)]^T w^\alpha(x) dx$$

$$\bullet c_{nm} = \langle f(x), \psi_{n,m}^{T,\alpha}(x) \rangle = \int_0^T f(x) \psi_{n,m}^{T,\alpha}(x) w^\alpha(x) dx$$

$$\bullet w^\alpha(x) = \alpha \frac{x^{\alpha-1}}{T^\alpha}$$

Matriz de coeficientes:

$$C = (0.026052 \quad -0.105288 \quad 1.22334 \quad 0.715506 \quad 0.792572 \quad 0.725545)$$

(c) Aproximación Wavelet de Chelyshkov fraccionaria de $f(x)$:

$$f(x) \simeq \tilde{f}(x) = f_{M,k}^{T,\alpha}(x) = \sum_{n=0}^{2^k-1} \sum_{m=0}^M c_{nm} \psi_{nm}^{T,\alpha}(x)$$

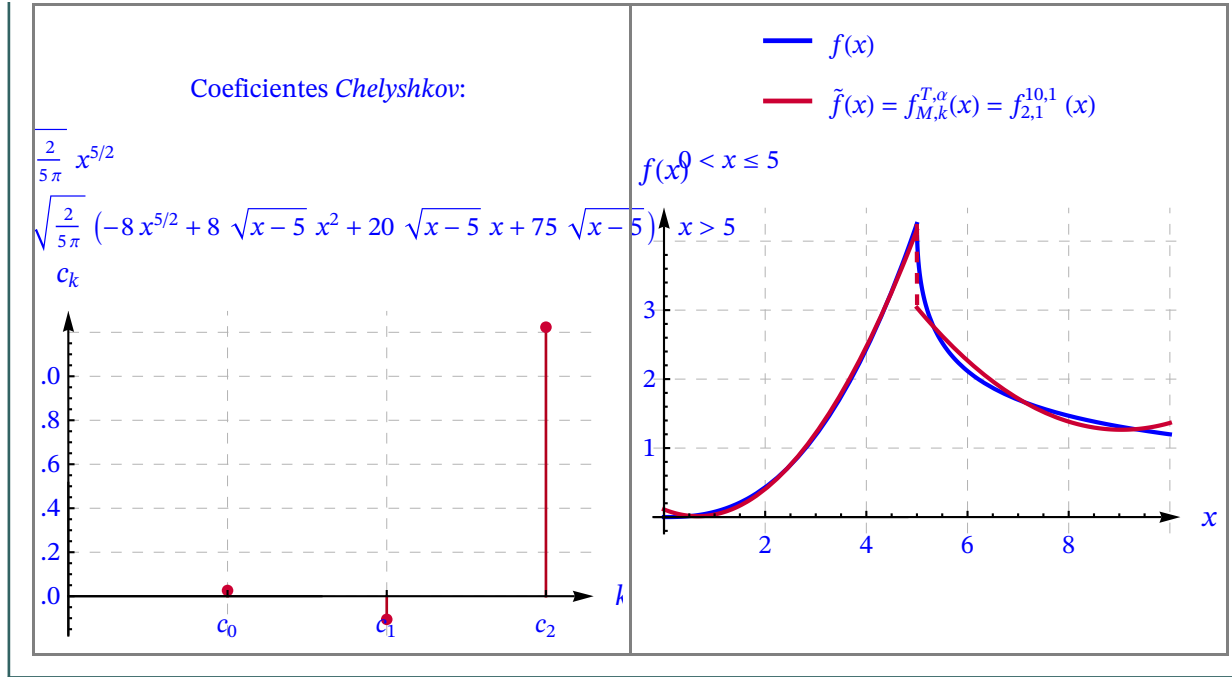
$$f(x) \simeq \tilde{f}(x) = f_{M,k}^{T,\alpha}(x) = 0.725545 \left(\begin{cases} \frac{1}{5} \sqrt{\frac{2}{5}} (x-5)^2 & \frac{1}{2} \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right) -$$

$$0.105288 \left(\begin{cases} -\frac{1}{5} \sqrt{6} (x-4)x & 0 \leq \frac{x}{10} < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right) + 1.22334 \left(\begin{cases} \frac{1}{5} \sqrt{\frac{2}{5}} x^2 & 0 \leq \frac{x}{10} < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right) +$$

$$0.792572 \left(\begin{cases} -\frac{1}{5} \sqrt{6} (x^2 - 14x + 45) & \frac{1}{2} \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right) +$$

$$0.715506 \left(\begin{cases} \frac{1}{5} \sqrt{2} (2x^2 - 32x + 125) & \frac{1}{2} \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right) +$$

$$0.026052 \left(\begin{cases} \frac{1}{5} \sqrt{2} (2x^2 - 12x + 15) & 0 \leq \frac{x}{10} < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right)$$



Desarrollo en serie de Wavelets de Chelyshkov fraccionarias de la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{75} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{x-5} (4x-35)^2 & 5 < x \\ -\frac{2}{75} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (4x-35) (4 \sqrt{x-10} x - 4 \sqrt{x-5} x - 25 \sqrt{x-10} + 35 \sqrt{x-5}) & x > 5 \end{cases}$$

$$f(x) \simeq \tilde{f}(x) = f_{M,k}^{T,\alpha}(x) = \sum_{n=0}^{2^k-1} \sum_{m=0}^M c_{nm} \psi_{nm}^{T,\alpha}(x) = C \cdot \Psi_{nm}^{T,\alpha}(x) \quad x \in [0, T]$$

$$C = \langle f(x), \Psi_{nm}^{T,\alpha}(x) \rangle \cdot D^{-1}$$

$$C = \int_0^T f(x) [\Psi_{nm}^{T,\alpha}(x)]^T w^\alpha(x) dx \cdot D^{-1} \quad D = \int_0^T \Psi_{nm}^{T,\alpha}(x) [\Psi_{nm}^{T,\alpha}(x)]^T w(x) dx$$

Wavelets de Chelyshkov fraccionarias $\psi_{nm}^{T,\alpha}(x)$

$$\left(\begin{array}{ll} [A, B] = & [0, 10] \\ T = & 10 \\ \alpha = & 1 \\ k = & 1 \\ M = & 2 \\ n = 0, \dots, 2^k-1 = & \{0, 1\} \\ m = 0, \dots, M = & \{0, 1, 2\} \end{array} \right)$$

(a) Definición de las *Wavelets* de Chelyshkov fraccionarias $\psi_{nm}^{T,\alpha}(x)$

$$\psi_{nm}^{T,\alpha}(x) = \begin{cases} \sqrt{2m+1} 2^{\frac{k}{2}} C_{M,m} \left(2^k \left(\frac{x}{T} \right)^\alpha - n \right) & \left(\frac{x}{T} \right) \in \left[\left(\frac{n}{2^k} \right)^\frac{1}{\alpha}, \left(\frac{n+1}{2^k} \right)^\frac{1}{\alpha} \right) \\ 0 & \text{Resto} \end{cases}$$

$$\begin{cases} n = 0, 1, \dots, 2^k - 1 & k = 1, 2, \dots \\ m = 0, 1, \dots, M & \text{grado del polinomio} \end{cases}$$

$C_{M,m}(x) \equiv$ polinomios de Chelyshkov de grado m

$$\Psi_{nm}^{T,\alpha}(x) = \begin{pmatrix} \psi_{0,0}^{10,1}(x) & \begin{cases} \frac{1}{5} \sqrt{2} (2x^2 - 12x + 15) & 0 \leq \frac{x}{10} < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{0,1}^{10,1}(x) & \begin{cases} -\frac{1}{5} \sqrt{6} (x-4)x & 0 \leq \frac{x}{10} < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{0,2}^{10,1}(x) & \begin{cases} \frac{1}{5} \sqrt{\frac{2}{5}} x^2 & 0 \leq \frac{x}{10} < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{1,0}^{10,1}(x) & \begin{cases} \frac{1}{5} \sqrt{2} (2x^2 - 32x + 125) & \frac{1}{2} \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{1,1}^{10,1}(x) & \begin{cases} -\frac{1}{5} \sqrt{6} (x^2 - 14x + 45) & \frac{1}{2} \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{1,2}^{10,1}(x) & \begin{cases} \frac{1}{5} \sqrt{\frac{2}{5}} (x-5)^2 & \frac{1}{2} \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \end{pmatrix}$$

(b) Cálculo de los coeficientes $C = (c_{nm})$ *Wavelets* de Chelyshkov fraccionarios.

$$C = \langle f(x), \Psi_{nm}^{T,\alpha}(x) \rangle = \int_0^T f(x) [\Psi_{nm}^{T,\alpha}(x)]^T w^\alpha(x) dx$$

$$\bullet c_{nm} = \langle f(x), \psi_{nm}^{T,\alpha}(x) \rangle = \int_0^T f(x) \psi_{nm}^{T,\alpha}(x) w^\alpha(x) dx$$

$$\bullet w^\alpha(x) = \alpha \frac{x^{\alpha-1}}{T^\alpha}$$

Matriz de coeficientes:

$$C = (0. \ 0. \ 0. \ 0.677204 \ 0.666775 \ 0.276803)$$

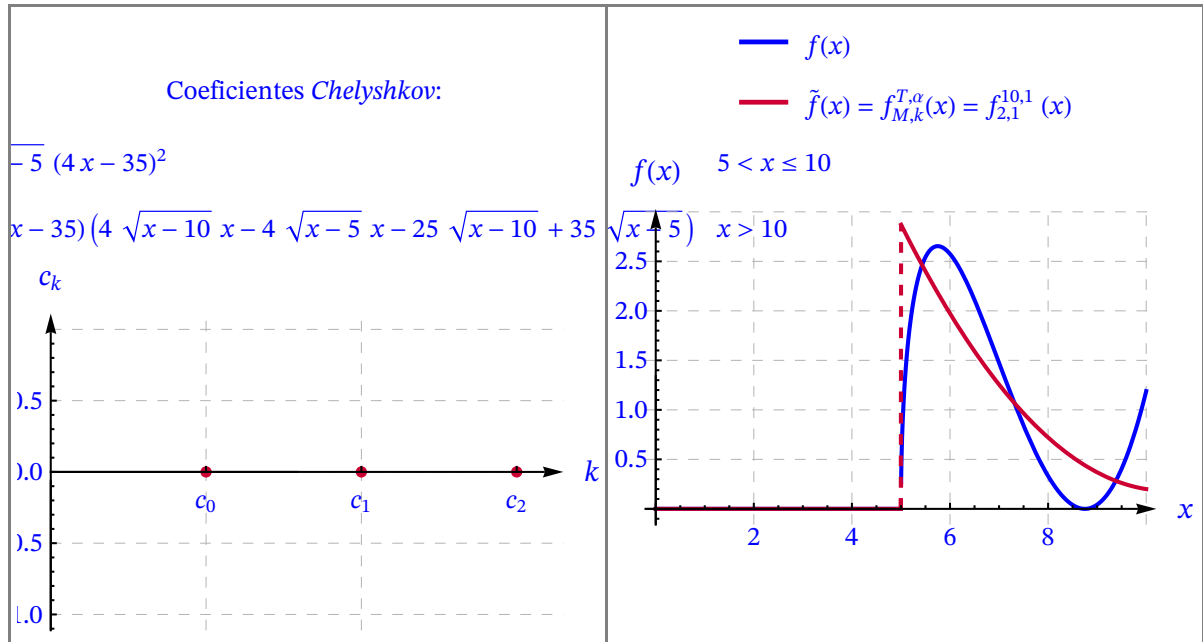
(c) Aproximación *Wavelet* de Chelyshkov fraccionaria de $f(x)$:

$$f(x) \simeq \tilde{f}(x) = f_{M,k}^{T,\alpha}(x) = \sum_{n=0}^{2^k-1} \sum_{m=0}^M c_{nm} \psi_{nm}^{T,\alpha}(x)$$

$$f(x) \simeq \tilde{f}(x) = f_{M,k}^{T,\alpha}(x) = 0.276803 \left(\begin{cases} \frac{1}{5} \sqrt{\frac{2}{5}} (x-5)^2 & \frac{1}{2} \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right) +$$

$$0.666775 \left(\begin{cases} -\frac{1}{5} \sqrt{6} (x^2 - 14x + 45) & \frac{1}{2} \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right) +$$

$$0.677204 \left(\begin{cases} \frac{1}{5} \sqrt{2} (2x^2 - 32x + 125) & \frac{1}{2} \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right) + 0.$$



Desarrollo en serie de *Wavelets* de Chelyshkov fraccionarias de la función

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{16}{25} \sqrt{\frac{2}{3\pi}} (x-10)(x-5)^{3/2} & 5 < x \leq 10 \\ \frac{2}{25} \sqrt{\frac{2}{3\pi}} (8(\sqrt{x-10} - \sqrt{x-5})x^2 - 20(5\sqrt{x-10} - 6\sqrt{x-5})x + 275\sqrt{x-10} - 400\sqrt{x-5}) & x > 10 \end{cases}$$

$$f(x) \simeq \tilde{f}(x) = f_{M,k}^{T,\alpha}(x) = \sum_{n=0}^{2^k-1} \sum_{m=0}^M c_{nm} \psi_{nm}^{T,\alpha}(x) = C \cdot \Psi_{nm}^{T,\alpha}(x) \quad x \in [0, T]$$

$$C = \langle f(x), \Psi_{nm}^{T,\alpha}(x) \rangle \cdot D^{-1}$$

$$C = \int_0^T f(x) [\Psi_{nm}^{T,\alpha}(x)]^T w^\alpha(x) dx \cdot D^{-1} \quad D = \int_0^T \Psi_{nm}^{T,\alpha}(x) [\Psi_{nm}^{T,\alpha}(x)]^T w(x) dx$$

Wavelets de Chelyshkov fraccionarias $\psi_{nm}^{T,\alpha}(x)$

$$\left(\begin{array}{ll} [A, B] = & [0, 10] \\ T = & 10 \\ \alpha = & 1 \\ k = & 1 \\ M = & 2 \\ n = 0, \dots, 2^k-1 = & \{0, 1\} \\ m = 0, \dots, M = & \{0, 1, 2\} \end{array} \right)$$

(a) Definición de las Wavelets de Chelyshkov fraccionarias $\psi_{nm}^{T,\alpha}(x)$

$$\psi_{nm}^{T,\alpha}(x) = \begin{cases} \sqrt{2m+1} \ 2^{\frac{k}{2}} C_{M,m} (2^k (\frac{x}{T})^\alpha - n) & (\frac{x}{T}) \in \left[\left(\frac{n}{2^k} \right)^\frac{1}{\alpha}, \left(\frac{n+1}{2^k} \right)^\frac{1}{\alpha} \right) \\ 0 & \text{Resto} \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} n = 0, 1, \dots, 2^k - 1 & k = 1, 2, \dots \\ m = 0, 1, \dots, M & \text{grado del polinomio} \end{array} \right.$$

$C_{M,m}(x) \equiv$ polinomios de Chelyshkov de grado m

$$\Psi_{nm}^{T,\alpha}(x) = \left(\begin{array}{ll} \psi_{0,0}^{10,1}(x) & \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{5} \sqrt{2} (2x^2 - 12x + 15) & 0 \leq \frac{x}{10} < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{array} \right. \\ \psi_{0,1}^{10,1}(x) & \left\{ \begin{array}{ll} -\frac{1}{5} \sqrt{6} (x-4)x & 0 \leq \frac{x}{10} < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{array} \right. \\ \psi_{0,2}^{10,1}(x) & \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{5} \sqrt{\frac{2}{5}} x^2 & 0 \leq \frac{x}{10} < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{array} \right. \\ \psi_{1,0}^{10,1}(x) & \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{5} \sqrt{2} (2x^2 - 32x + 125) & \frac{1}{2} \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{array} \right. \\ \psi_{1,1}^{10,1}(x) & \left\{ \begin{array}{ll} -\frac{1}{5} \sqrt{6} (x^2 - 14x + 45) & \frac{1}{2} \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{array} \right. \\ \psi_{1,2}^{10,1}(x) & \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{5} \sqrt{\frac{2}{5}} (x-5)^2 & \frac{1}{2} \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{array} \right. \end{array} \right)$$

(b) Cálculo de los coeficientes $C = (c_{nm})$ Wavelets de Chelyshkov fraccionarios.

$$C = \langle f(x), \Psi_{n,m}^{T,\alpha}(x) \rangle = \int_0^T f(x) [\Psi_{n,m}^{T,\alpha}(x)]^T w^\alpha(x) dx$$

$$\bullet c_{nm} = \langle f(x), \psi_{n,m}^{T,\alpha}(x) \rangle = \int_0^T f(x) \psi_{n,m}^{T,\alpha}(x) w^\alpha(x) dx$$

$$\bullet w^\alpha(x) = \alpha \frac{x^{\alpha-1}}{T^\alpha}$$

Matriz de coeficientes:

$$C = (0. \quad 0. \quad 0. \quad -0.174892 \quad 1.04857 \quad 1.05288)$$

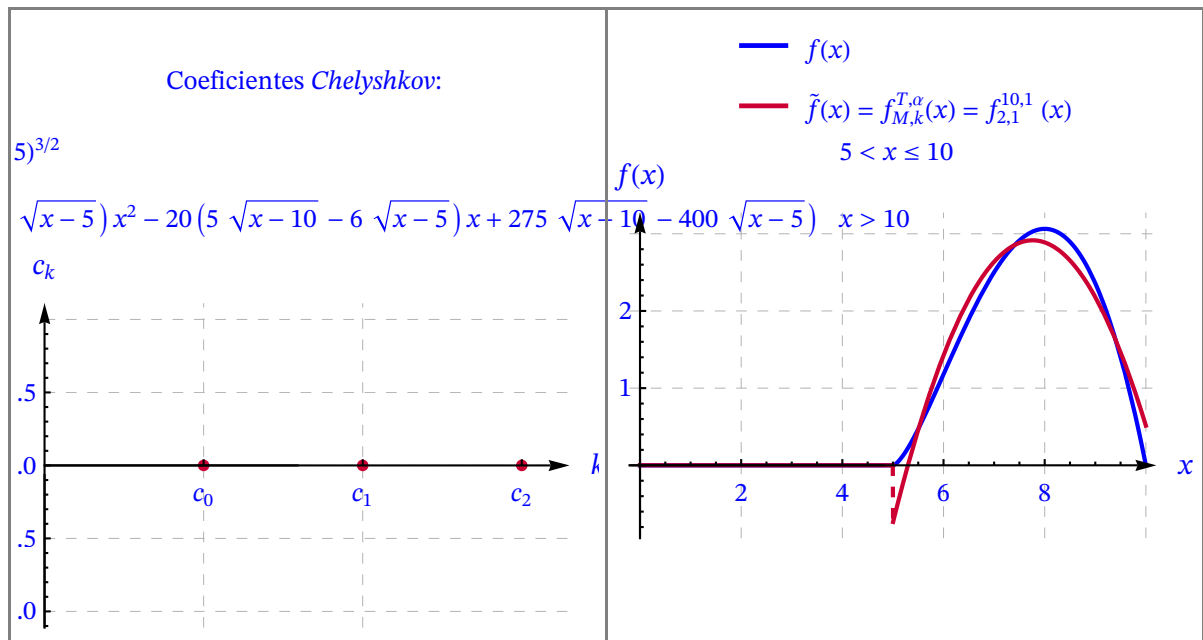
(c) Aproximación Wavelet de Chelyshkov fraccionaria de $f(x)$:

$$f(x) \simeq \tilde{f}(x) = f_{M,k}^{T,\alpha}(x) = \sum_{n=0}^{2^k-1} \sum_{m=0}^M c_{nm} \psi_{nm}^{T,\alpha}(x)$$

$$f(x) \simeq \tilde{f}(x) = f_{M,k}^{T,\alpha}(x) = 1.05288 \left(\begin{cases} \frac{1}{5} \sqrt{\frac{2}{5}} (x-5)^2 & \frac{1}{2} \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right) +$$

$$1.04857 \left(\begin{cases} -\frac{1}{5} \sqrt{6} (x^2 - 14x + 45) & \frac{1}{2} \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right) -$$

$$0.174892 \left(\begin{cases} \frac{1}{5} \sqrt{2} (2x^2 - 32x + 125) & \frac{1}{2} \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right) + 0.$$



Desarrollo en serie de *Wavelets* de Chelyshkov fraccionarias de la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{16}{75} \sqrt{\frac{2}{5\pi}} (x-5)^{5/2} \\ -\frac{2}{75} \sqrt{\frac{2}{5\pi}} (8(\sqrt{x-10} - \sqrt{x-5})x^2 + \\ (80\sqrt{x-5} - 60\sqrt{x-10})x + 25(7\sqrt{x-10} - 8\sqrt{x-5})) \end{cases}$$

$$f(x) \simeq \tilde{f}(x) = f_{M,k}^{T,\alpha}(x) = \sum_{n=0}^{2^k-1} \sum_{m=0}^M c_{nm} \psi_{nm}^{T,\alpha}(x) = C \cdot \Psi_{nm}^{T,\alpha}(x) \quad x \in [0, T]$$

$$C = \langle f(x), \Psi_{nm}^{T,\alpha}(x) \rangle \cdot D^{-1}$$

$$C = \int_0^T f(x) [\Psi_{nm}^{T,\alpha}(x)]^T w^\alpha(x) dx \cdot D^{-1} \quad D = \int_0^T \Psi_{nm}^{T,\alpha}(x) [\Psi_{nm}^{T,\alpha}(x)]^T w(x) dx$$

Wavelets de Chelyshkov fraccionarias $\psi_{nm}^{T,\alpha}(x)$

$$\left(\begin{array}{ll} [A, B] = & [0, 10] \\ T = & 10 \\ \alpha = & 1 \\ k = & 1 \\ M = & 2 \\ n = 0, \dots, 2^k-1 = & \{0, 1\} \\ m = 0, \dots, M = & \{0, 1, 2\} \end{array} \right)$$

(a) Definición de las *Wavelets* de Chelyshkov fraccionarias $\psi_{nm}^{T,\alpha}(x)$

$$\psi_{nm}^{T,\alpha}(x) = \begin{cases} \sqrt{2m+1} 2^{\frac{k}{2}} C_{M,m} \left(2^k \left(\frac{x}{T} \right)^\alpha - n \right) & \left(\frac{x}{T} \right) \in \left[\left(\frac{n}{2^k} \right)^\frac{1}{\alpha}, \left(\frac{n+1}{2^k} \right)^\frac{1}{\alpha} \right) \\ 0 & \text{Resto} \end{cases}$$

$$\begin{cases} n = 0, 1, \dots, 2^k - 1 & k = 1, 2, \dots \\ m = 0, 1, \dots, M & \text{grado del polinomio} \end{cases}$$

$C_{M,m}(x) \equiv$ polinomios de Chelyshkov de grado m

$$\Psi_{nm}^{T,\alpha}(x) = \begin{pmatrix} \psi_{0,0}^{10,1}(x) & \begin{cases} \frac{1}{5} \sqrt{2} (2x^2 - 12x + 15) & 0 \leq \frac{x}{10} < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{0,1}^{10,1}(x) & \begin{cases} -\frac{1}{5} \sqrt{6} (x-4)x & 0 \leq \frac{x}{10} < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{0,2}^{10,1}(x) & \begin{cases} \frac{1}{5} \sqrt{\frac{2}{5}} x^2 & 0 \leq \frac{x}{10} < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{1,0}^{10,1}(x) & \begin{cases} \frac{1}{5} \sqrt{2} (2x^2 - 32x + 125) & \frac{1}{2} \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{1,1}^{10,1}(x) & \begin{cases} -\frac{1}{5} \sqrt{6} (x^2 - 14x + 45) & \frac{1}{2} \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{1,2}^{10,1}(x) & \begin{cases} \frac{1}{5} \sqrt{\frac{2}{5}} (x-5)^2 & \frac{1}{2} \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \end{pmatrix}$$

(b) Cálculo de los coeficientes $C = (c_{nm})$ *Wavelets* de Chelyshkov fraccionarios.

$$C = \langle f(x), \Psi_{nm}^{T,\alpha}(x) \rangle = \int_0^T f(x) [\Psi_{nm}^{T,\alpha}(x)]^T w^\alpha(x) dx$$

$$\bullet c_{nm} = \langle f(x), \psi_{nm}^{T,\alpha}(x) \rangle = \int_0^T f(x) \psi_{nm}^{T,\alpha}(x) w^\alpha(x) dx$$

$$\bullet w^\alpha(x) = \alpha \frac{x^{\alpha-1}}{T^\alpha}$$

Matriz de coeficientes:

$$C = (0. \ 0. \ 0. \ 0.026052 \ -0.105288 \ 1.22334)$$

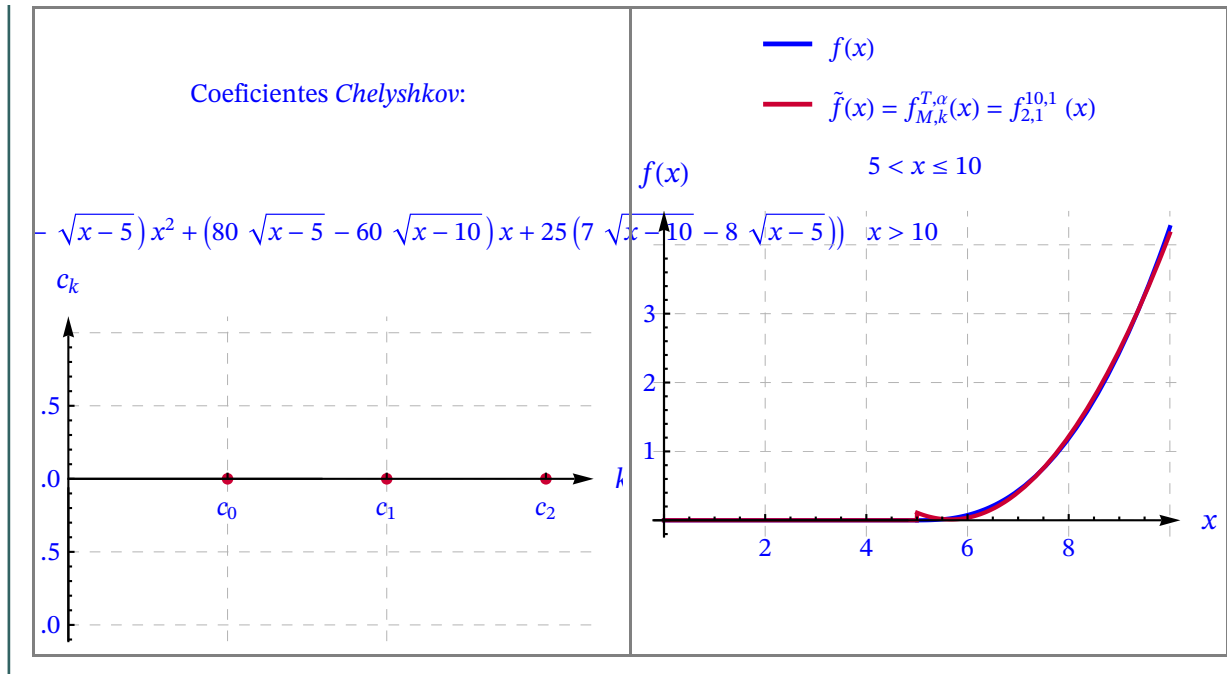
(c) Aproximación *Wavelet* de Chelyshkov fraccionaria de $f(x)$:

$$f(x) \simeq \tilde{f}(x) = f_{M,k}^{T,\alpha}(x) = \sum_{n=0}^{2^k-1} \sum_{m=0}^M c_{nm} \psi_{nm}^{T,\alpha}(x)$$

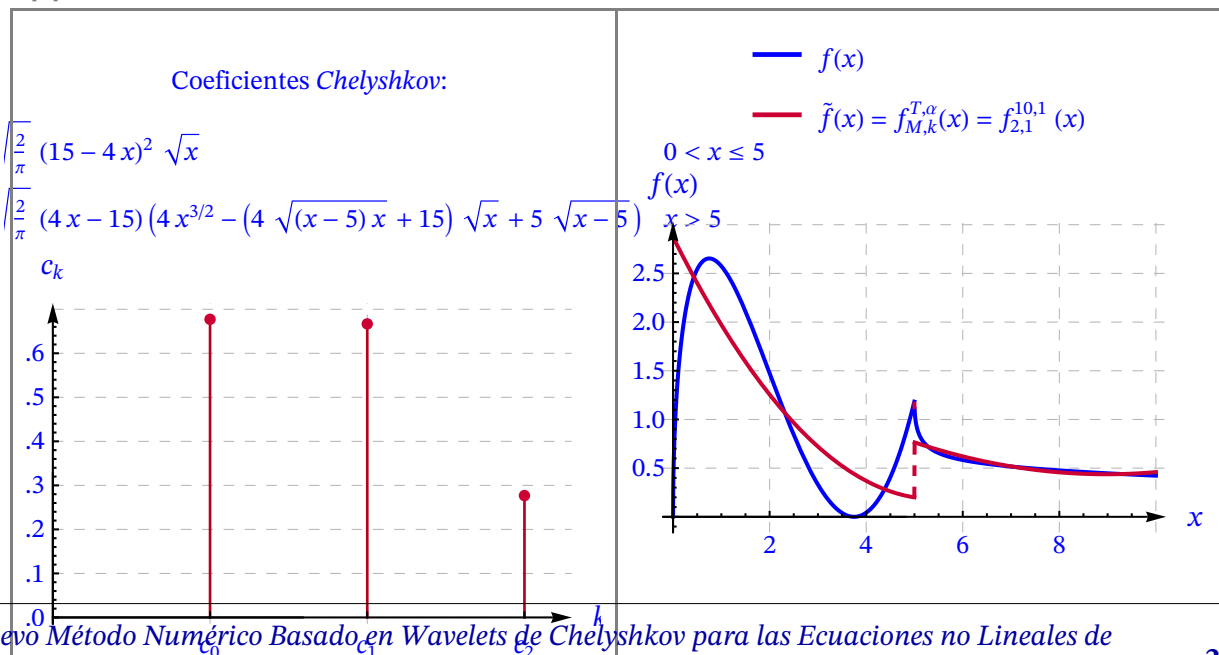
$$f(x) \simeq \tilde{f}(x) = f_{M,k}^{T,\alpha}(x) = 1.22334 \left(\begin{cases} \frac{1}{5} \sqrt{\frac{2}{5}} (x-5)^2 & \frac{1}{2} \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right) -$$

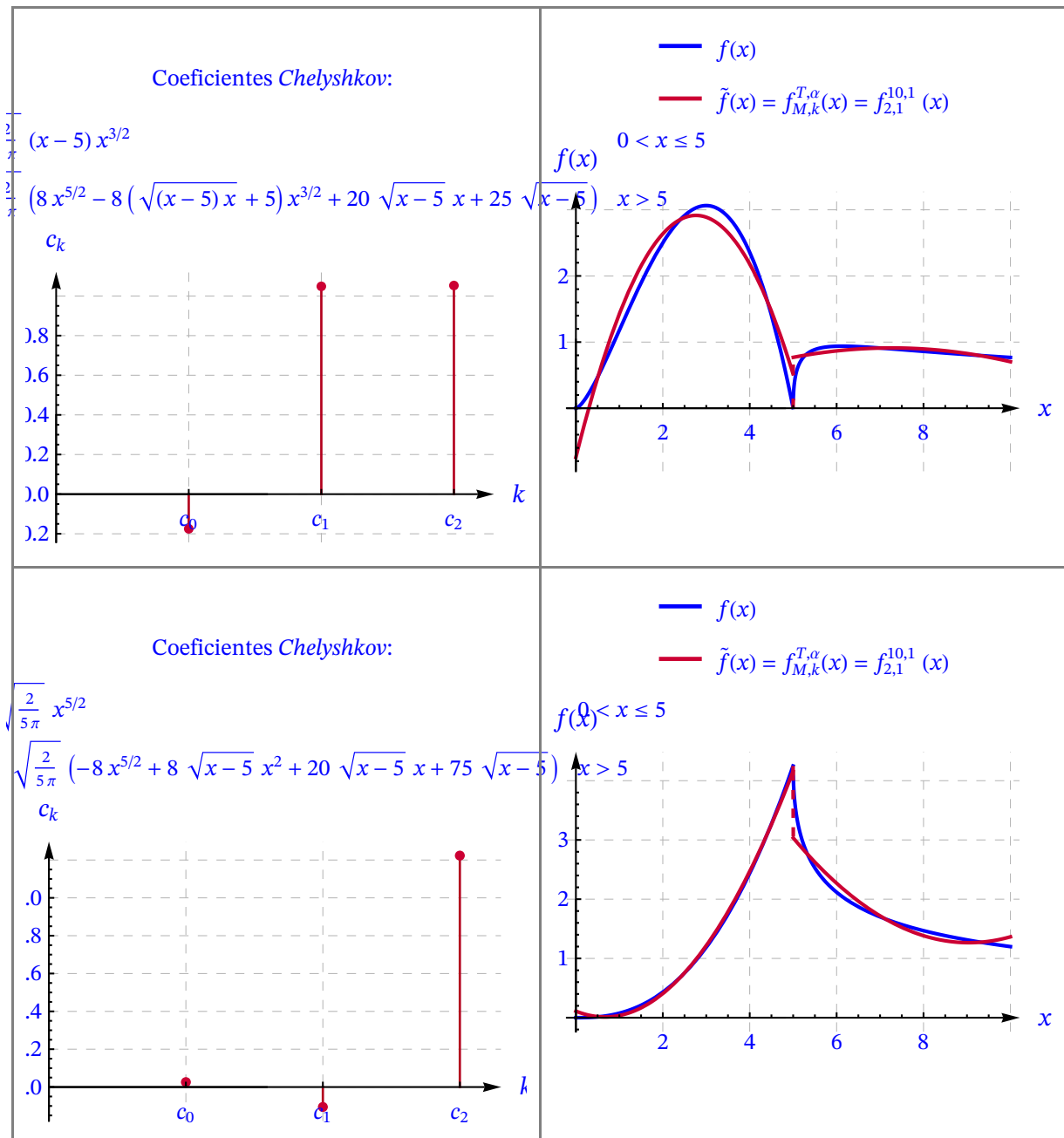
$$0.105288 \left(\begin{cases} -\frac{1}{5} \sqrt{6} (x^2 - 14x + 45) & \frac{1}{2} \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right) +$$

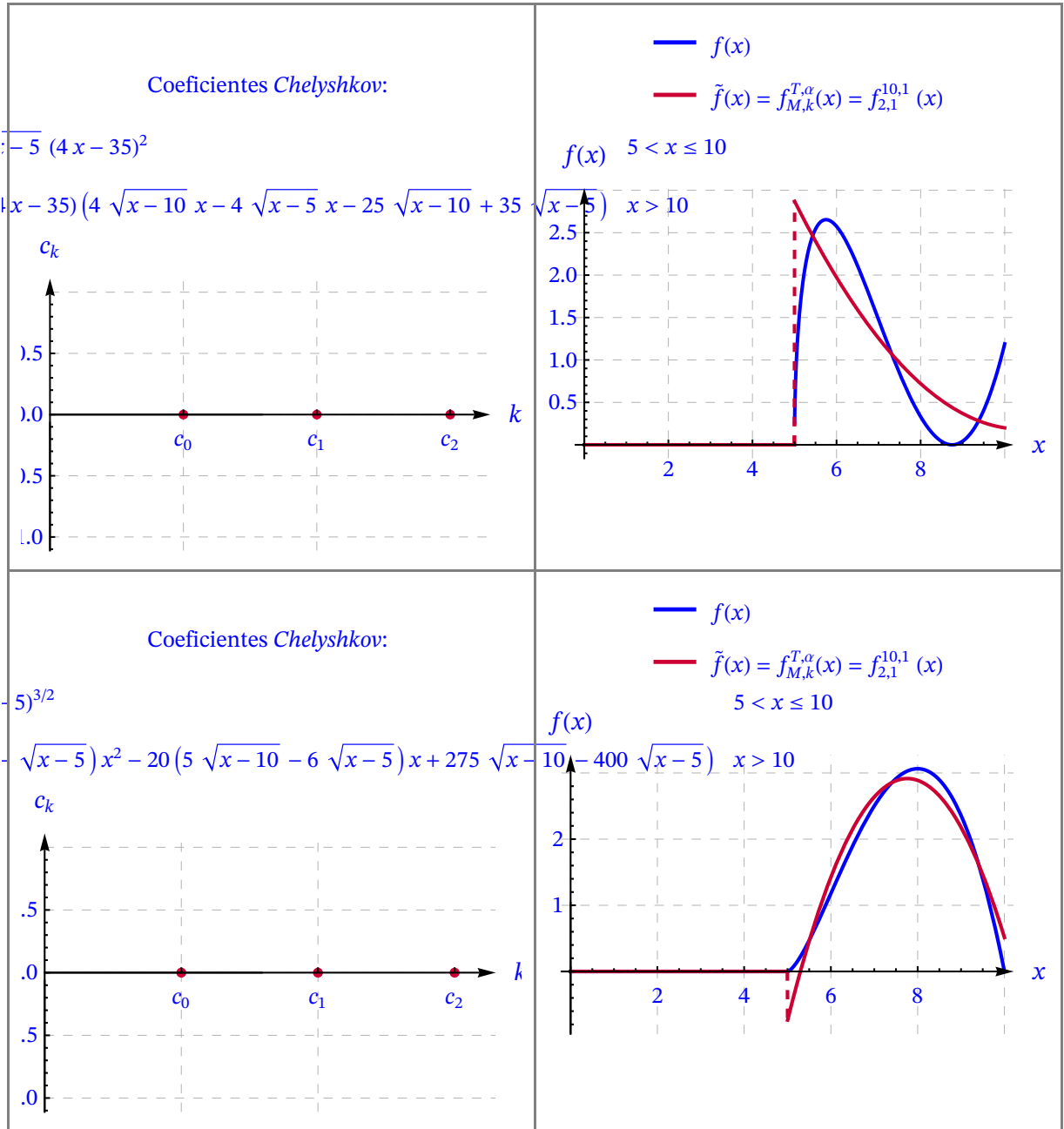
$$0.026052 \left(\begin{cases} \frac{1}{5} \sqrt{2} (2x^2 - 32x + 125) & \frac{1}{2} \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right) + 0.$$

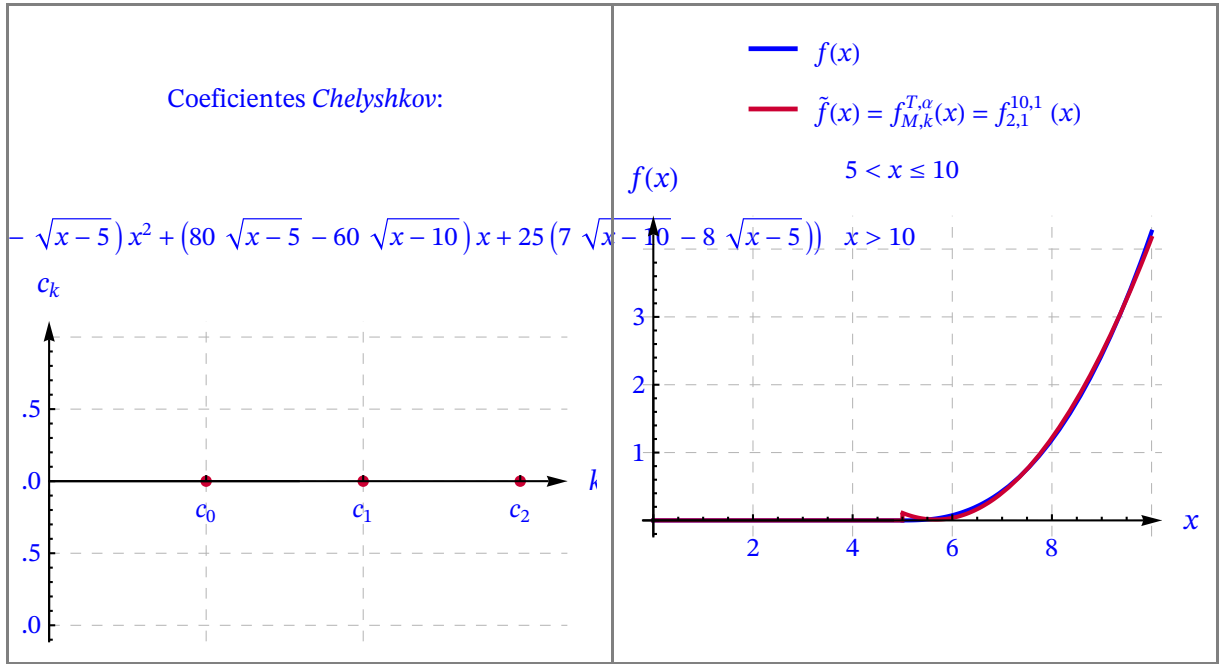


Out[]=









Matriz Integral Fraccionaria de las *Wavelets* de Chelyshkov Fraccionarias y

Matriz de coeficientes c_k :

$$P^{(\beta)} =$$

$$\begin{pmatrix} 0.677204 & 0.666775 & 0.276803 & 0.180193 & 0.228026 & 0.241209 \\ -0.174892 & 1.04857 & 1.05288 & 0.181251 & 0.378122 & 0.434115 \\ 0.026052 & -0.105288 & 1.22334 & 0.715506 & 0.792572 & 0.725545 \\ 0. & 0. & 0. & 0.677204 & 0.666775 & 0.276803 \\ 0. & 0. & 0. & -0.174892 & 1.04857 & 1.05288 \\ 0. & 0. & 0. & 0.026052 & -0.105288 & 1.22334 \end{pmatrix}$$

$$(c_k) = \begin{pmatrix} 0.677204 & 0.666775 & 0.276803 & 0.180193 & 0.228026 & 0.241209 \\ -0.174892 & 1.04857 & 1.05288 & 0.181251 & 0.378122 & 0.434115 \\ 0.026052 & -0.105288 & 1.22334 & 0.715506 & 0.792572 & 0.725545 \\ 0. & 0. & 0. & 0.677204 & 0.666775 & 0.276803 \\ 0. & 0. & 0. & -0.174892 & 1.04857 & 1.05288 \\ 0. & 0. & 0. & 0.026052 & -0.105288 & 1.22334 \end{pmatrix}$$

2.2.5. Problemas

2.2.5.1. Operador Integral Fraccionario de Riemann–Liouville en $[0, T]$

■ Problema 2.2.1.

$$(a) \quad k = 0, M = 2 \quad \beta = \frac{1}{2} \quad [A, B] = [0, T] = [0, 7] \quad T = 7, \alpha = 1/2.$$

SOLUCIÓN

(a)

Operador Integral Fraccionario de las *Wavelets* de Chelyshkov Fraccionarias.

$$\left(\begin{array}{ll} [A, B] = & [0, 7] \quad (\text{intervalo } x) \\ \{T, \alpha\} = & \{7, \frac{1}{2}\} \\ \{k, 2^k\} = & \{0, 1\} \quad (\text{máxima resolución}) \\ M = & 2 \quad (\text{máx. grado polinomio}) \\ m^* = 2^k(M+1) = & 3 \quad \text{Dimensión } \mathcal{B} = \{\psi_k\} \\ \{\beta\} = & \{\frac{1}{2}\} \end{array} \right)$$

(a) Matriz con las *Wavelets* de Chelyshkov Fraccionarias $\Psi^{T,\alpha}(x)$

$$\Psi^{T,\alpha}(x) = \left(\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{ll} \frac{10x}{7} - \frac{12\sqrt{x}}{\sqrt{7}} + 3 & 0 \leq \frac{x}{7} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{7} \sqrt{3} (4\sqrt{7} \sqrt{x} - 5x) & 0 \leq \frac{x}{7} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\sqrt{5}x}{7} & 0 \leq \frac{x}{7} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{array} \right. \end{array} \right)$$

(b) Matriz con las integrales fraccionarias R–L de orden $\beta = \frac{1}{2}$ calculadas con

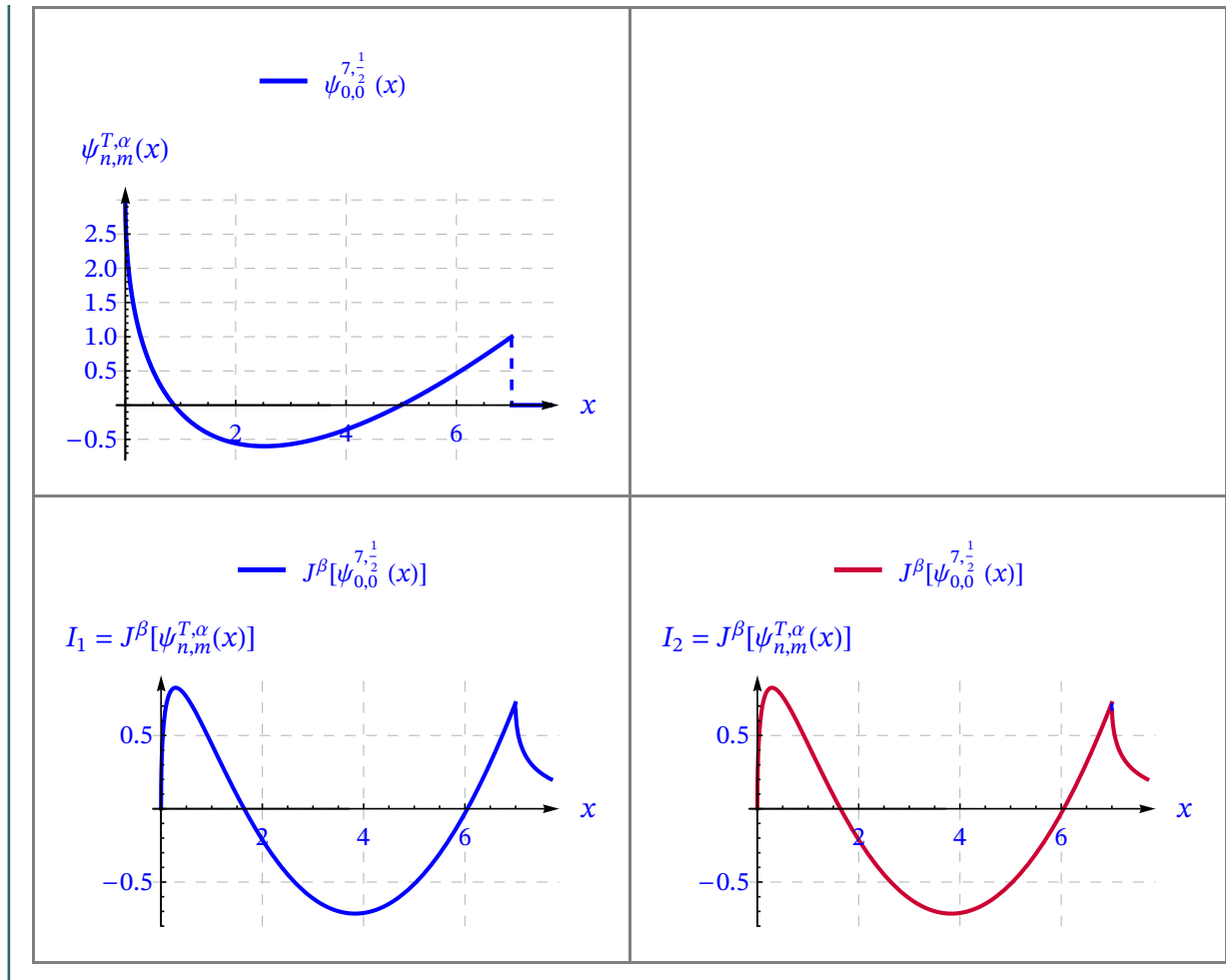
la definición de integral de Riemann–Liouville:

$$I_1 = J^{(\beta)}[\Psi^{T,\alpha}(x)] =$$

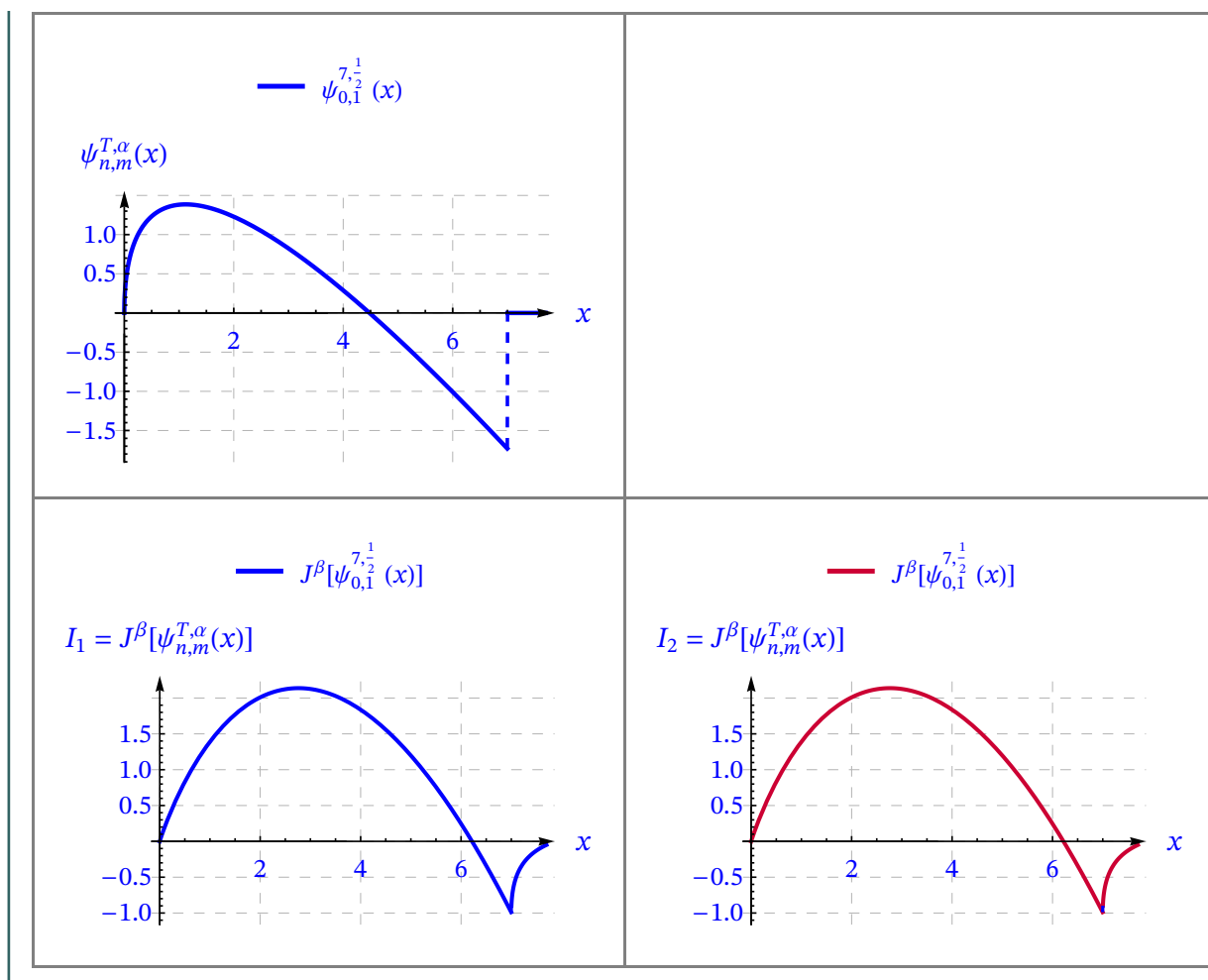
$$\left(\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{ll} \frac{2 \sqrt{x} (20x-9 \sqrt{7} \pi \sqrt{x}+63)}{21 \sqrt{\pi}} & 0 < x \leq 7 \\ -\frac{2 \left(-20x^{3/2}+18 \sqrt{7} \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{x}}\right)x+20 \sqrt{x-7} x-63 \sqrt{x}+7 \sqrt{x-7} \right)}{21 \sqrt{\pi}} & x > 7 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{ll} \frac{2(3 \sqrt{7} \pi-10 \sqrt{x})x}{7 \sqrt{3} \pi} & 0 < x \leq 7 \\ \frac{2 \left(-10x^{3/2}+6 \sqrt{7} \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{x}}\right)x+10 \sqrt{x-7} x-7 \sqrt{x-7} \right)}{7 \sqrt{3} \pi} & x > 7 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{ll} \frac{4}{21} \sqrt{\frac{5}{\pi}} x^{3/2} & 0 < x \leq 7 \\ -\frac{2}{21} \sqrt{\frac{5}{\pi}} \left(-2x^{3/2}+2 \sqrt{x-7} x+7 \sqrt{x-7} \right) & x > 7 \end{array} \right. \end{array} \right)$$

(c) Matriz con las integrales fraccionarias R–L de orden $\beta = \frac{1}{2}$ calculadas con el operador integral fraccionario de Riemann–Liouville de $\psi_{n,m}^{T,\alpha}$:

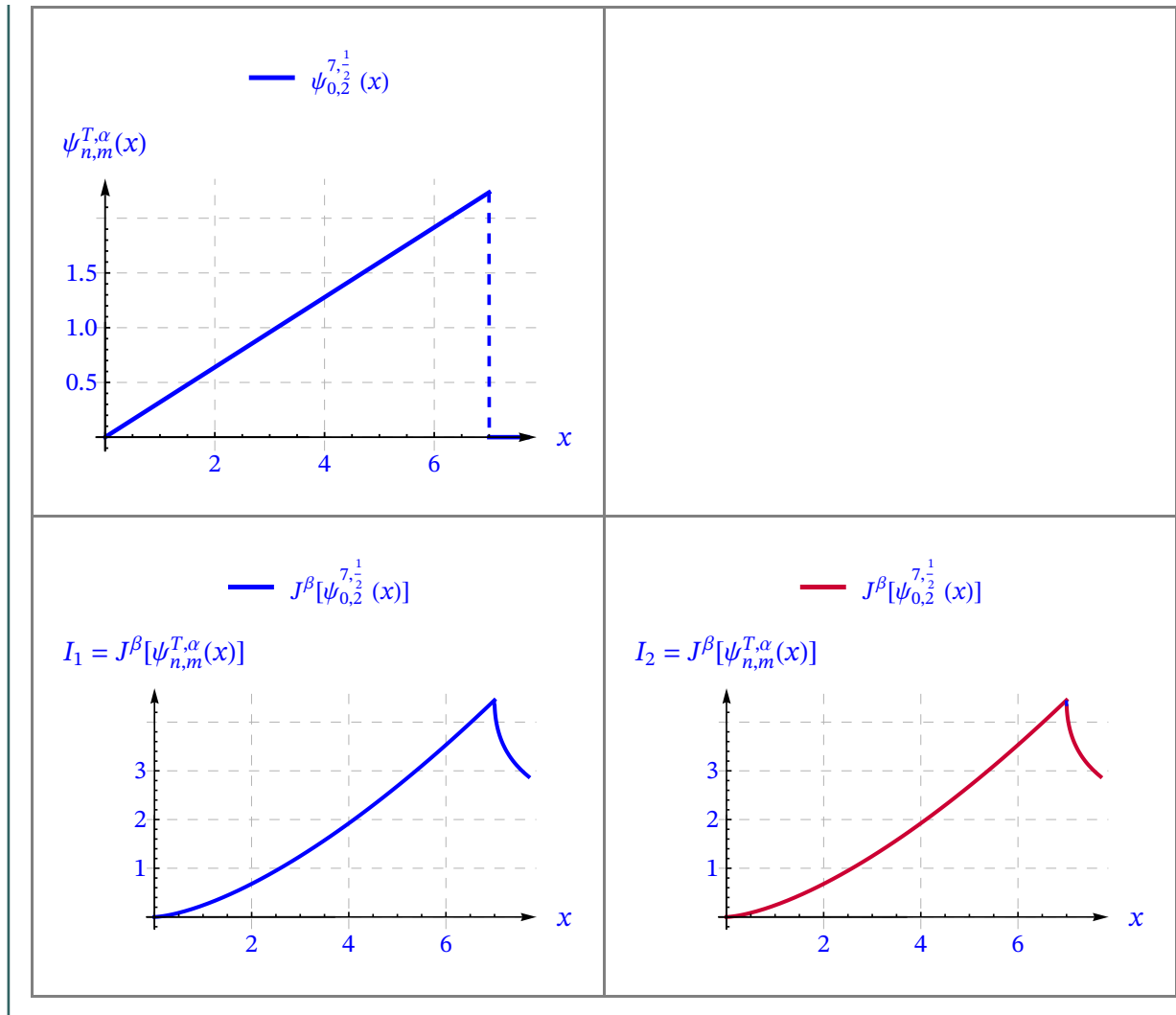
$$I_2 = J^{(\beta)}[\Psi^{T,\alpha}(x)] = \left(\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{ll} 0 & x \leq 0 \\ \frac{2 \sqrt{x} (20x-9 \sqrt{7} \pi \sqrt{x}+63)}{21 \sqrt{\pi}} & 0 \leq x \leq 7 \\ \frac{2 \left(5 B_{\frac{7}{x}}\left(2, \frac{1}{2}\right) x^{3/2}-6 \sqrt{7} B_{\frac{7}{x}}\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) x+21 (\sqrt{x}-\sqrt{x-7}) \right)}{7 \sqrt{\pi}} & \text{True} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{ll} \frac{2(3 \sqrt{7} \pi x-10 x^{3/2})}{7 \sqrt{3} \pi} & 0 < x \leq 7 \\ \frac{4 \left(3 \sqrt{7} x B_{\frac{7}{x}}\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)-5 x^{3/2} I_{\frac{7}{x}}\left(2, \frac{1}{2}\right) \right)}{7 \sqrt{3} \pi} & x > 7 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{ll} \frac{4}{21} \sqrt{\frac{5}{\pi}} x^{3/2} & 0 < x \leq 7 \\ \frac{1}{7} \sqrt{\frac{5}{\pi}} x^{3/2} B_{\frac{7}{x}}\left(2, \frac{1}{2}\right) & x > 7 \end{array} \right. \end{array} \right)$$



x	$I_1(x)$	$I_2(x)$
0.	0	0
0.7	0.647906	0.647906
1.4	0.158137	0.158137
2.1	-0.265166	-0.265166
2.8	-0.555276	-0.555276
3.5	-0.698724	-0.698724
4.2	-0.694675	-0.694675
4.9	-0.546184	-0.546184
5.6	-0.257529	-0.257529
6.3	0.166734	0.166734
7.	0.722137	0.722137



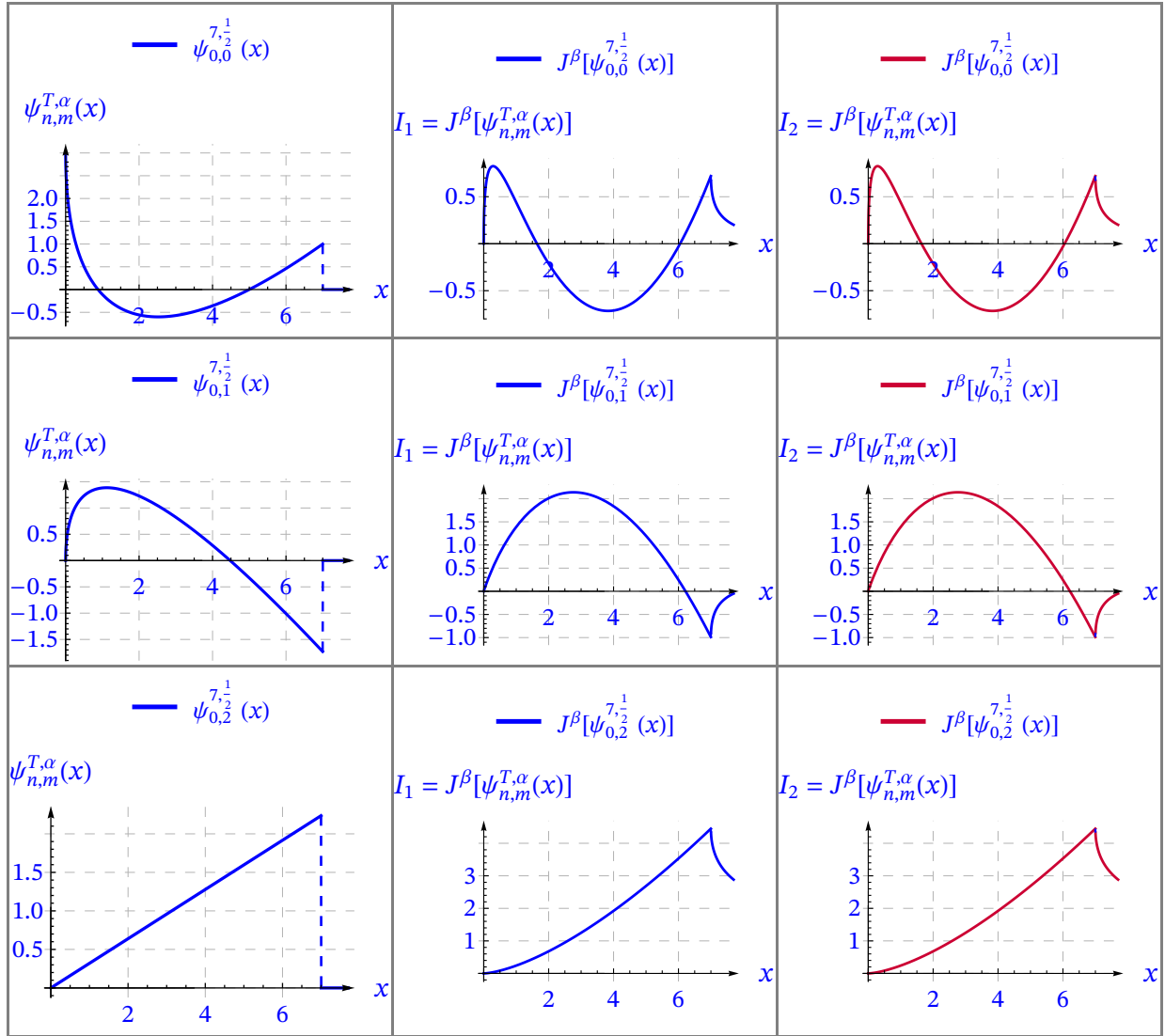
x	$I_1(x)$	$I_2(x)$
0.	0	0
0.7	1.07942	1.07942
1.4	1.7073	1.7073
2.1	2.04123	2.04123
2.8	2.13745	2.13745
3.5	2.02846	2.02846
4.2	1.73619	1.73619
4.9	1.27673	1.27673
5.6	0.662571	0.662571
6.3	-0.0962638	-0.0962638
7.	-0.991469	-0.991469



x	$I_1(x)$	$I_2(x)$
0.	0	0
0.7	0.140734	0.140734
1.4	0.398055	0.398055
2.1	0.731273	0.731273
2.8	1.12587	1.12587
3.5	1.57345	1.57345
4.2	2.06835	2.06835
4.9	2.60642	2.60642
5.6	3.18444	3.18444
6.3	3.79981	3.79981
7.	4.45039	4.45039

Gráficas de la función $\psi_{n,m}^{T,\alpha}(x)$ y las integrales I_1 e I_2 .

Out[•]=



2.2.6. Matriz Operacional Producto $\tilde{C}$ de $\Psi^{T,\alpha}(x)$

Se va a estudiar el producto de dos *Wavelets* de Chelyshkov $\Psi^{T,\alpha}(x)$ y $[\Psi^{T,\alpha}]^T$ con el vector C de dimensión $2^k(M+1)$, como una expansión en *Wavelets* de Chelyshkov fraccionarias [MOHS20], de modo que permita definir la matriz operacional producto $\tilde{C}$ de dos matrices de *Wavelets* de Chelyshkov fraccionarias $\Psi^{T,\alpha}(x)$ definida por la expansión siguiente:

$$\begin{aligned} \Psi^{T,\alpha}(x) \cdot [\Psi^{T,\alpha}]^T C &\simeq \tilde{C} \cdot \Psi^{T,\alpha}(x) \\ \tilde{C} &= \langle \Psi^{T,\alpha}(x) \cdot [\Psi^{T,\alpha}(x)]^T C, \Psi^{T,\alpha}(x) \rangle. \end{aligned} \quad (2.2.42)$$

El teorema siguiente define la matriz operacional producto $\tilde{C}$ de dos vectores *Wavelets* de Chelyshkov fraccionarios.

▼ Teorema 2.2.4. Matriz Operacional Producto de *Wavelets* $\Psi^{T,\alpha}(x)$.

Sea $\Psi^{T,\alpha}(x)$ el vector de *Wavelets* de Chelyshkov fraccionario de grado M de dimensión $m^* \times 1$ definido por

$$\begin{aligned} \Psi^{T,\alpha}(x) &= \begin{pmatrix} \psi_{0,0}^{T,\alpha}(x) \\ \psi_{0,1}^{T,\alpha}(x) \\ \vdots \\ \psi_{2^k-1,M}^{T,\alpha}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1^{T,\alpha}(x) \\ \psi_2^{T,\alpha}(x) \\ \vdots \\ \psi_{m^*}^{T,\alpha}(x) \end{pmatrix} \\ \begin{cases} \psi_i^{T,\alpha}(x) = \psi_{n,m}^{T,\alpha}(x) \\ i = 1, \dots, m^* \\ i = n(M+1) + (m+1) \end{cases} & \quad m^* = 2^k(M+1) \end{aligned} \quad (2.2.43)$$

y sea C un vector arbitrario de dimensión $m^* \times 1$. Se puede escribir la aproximación

$$\begin{aligned} \Psi^{T,\alpha}(x) \cdot [\Psi^{T,\alpha}(x)]^T C &\simeq \tilde{C} \cdot \Psi^{T,\alpha}(x) \\ C &= \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_{m^*} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.2.44)$$

donde $\tilde{C}$ es la matriz operacional producto, siendo su elemento (i, j) –ésimo

$$\tilde{C}_{i,j} = \sum_{k=1}^{m^*} C_k \int_0^T \psi_k^{T,\alpha}(x) \psi_i^{T,\alpha}(x) \psi_j^{T,\alpha}(x) w^\alpha(x) dx \quad i, j = 1, 2, \dots, m^* \quad (2.2.45)$$

I

$$w^\alpha(x) = \alpha \frac{x^{\alpha-1}}{T^\alpha}.$$

Capítulo 3

3. Método Wavelet de Chelyshkov Fraccionario

3.1. Introducción

En los últimos años, las ecuaciones diferenciales parciales fraccionarias (FPDEs) con operadores fraccionarios en espacio o tiempo han cobrado gran relevancia en la modelización de fenómenos físicos, dinámica de fluidos y problemas matemáticos diversos, debido a la naturaleza no local de los operadores fraccionarios ([RAHI19], [MARA22]). En particular, las ecuaciones diferenciales de orden distribuido (*distributed-order FDEs*) constituyen una extensión natural de las ecuaciones fraccionarias multi-término y han sido aplicadas en la modelización de difusión super-lenta, procesamiento de señales y relaciones tensión-deformación en materiales dieléctricos.

Las técnicas de aproximación basadas en funciones ortogonales y métodos espectrales se han convertido en herramientas fundamentales para la resolución numérica de sistemas dinámicos. Su ventaja principal radica en que permiten convertir las ecuaciones consideradas en sistemas de ecuaciones algebraicas, simplificando enormemente el problema. Entre las familias de funciones ortogonales más utilizadas se encuentran las *Wavelets*, que poseen propiedades de ortogonalidad, soporte compacto y análisis multirresolución ([RAHI19]).

En este capítulo se presenta el método de *Wavelets de Chelyshkov de Orden Fraccionario* (*Fractional-Order Chelyshkov Wavelets Method*, FChWM). Este método fue introducido por Rahimkhani, Ordokhani y Lima ([RAHI19]) y posteriormente extendido por Marasi y Derakhshan ([MARA22]) para resolver ecuaciones diferenciales fraccionarias de orden distribuido. La idea central consiste en construir las *Wavelets* de Chelyshkov de orden fraccionario, calcular su operador de integración fraccionaria de Riemann–Liouville y aplicar un método de colocación compuesto que reduce la FPDE a un sistema de ecuaciones algebraicas resoluble mediante el método iterativo de *Newton*.

Las *Wavelets* de Chelyshkov fraccionarias presentan ventajas significativas frente a otras bases: su estructura es dispersa (*sparse*), lo que reduce la complejidad computacional del sistema algebraico resultante; poseen alta precisión y convergencia rápida; y su formulación es más sencilla que la de otras familias de *Wavelets* fraccionarias ([[RAHI19](#)], [[MARA22](#)]).

3.2. Método Wavelet de Chelyshkov Fraccionario en PDE

3.2.1. Preliminares y Notaciones

En esta sección se presentan las definiciones, lemas y propiedades fundamentales del cálculo fraccionario y de las *Wavelets* de Chelyshkov de orden fraccionario que se utilizarán a lo largo del capítulo. La exposición sigue principalmente el desarrollo realizado por Rahimkhani, Ordokhani y Lima ([RAHI19]) así como la extensión posterior de Marasi y Derakhshan ([MARA22]) al caso bidimensional con orden distribuido. Se introducen primero los espacios funcionales y los operadores fraccionarios de Riemann–Liouville y de Caputo; a continuación los polinomios de Chelyshkov clásicos y su versión fraccionaria; y, finalmente, las *Wavelets* fraccionarias y las fórmulas de aproximación de funciones de una y dos variables que se emplean en el método numérico.

Cálculo Fraccionario. Antes de introducir los operadores fraccionarios resulta conveniente precisar el espacio funcional en el que estos están bien definidos. Una función $Z(t)$, con $t > 0$, pertenece al espacio C_λ , con $\lambda \in \mathbb{R}$, si existe un número real $\sigma > \lambda$ tal que $Z(t) = t^\sigma Z_1(t)$, con $Z_1 \in C[0, \infty)$. Análogamente, $Z \in C_\lambda^n$ si y sólo si su derivada $Z^{(n)}$ pertenece a C_λ . Esta clase de funciones es la habitual en el contexto del cálculo fraccionario porque acomoda de forma natural las singularidades de tipo potencial que aparecen al integrar o derivar fraccionariamente.

Sobre dicho espacio se definen los dos operadores fraccionarios que se utilizarán en lo sucesivo.

• **Definición 3.2.1. Integral Fraccionaria de Riemann–Liouville.**

La integral fraccionaria de Riemann–Liouville de orden $0 < \alpha \leq 1$, aplicada a una función $Z \in C_\lambda$ con $\lambda \geq -1$, se define como:

$$I_t^\alpha Z(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-u)^{\alpha-1} Z(u) du \quad (3.2.1)$$

es decir, una convolución con el núcleo de Riemann $\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$.

La derivada fraccionaria de Caputo, por su parte, se obtiene aplicando primero la derivada clásica y, a continuación, integrando fraccionariamente; con ello se evita el inconveniente de que las constantes tengan derivada no nula, problema que sí presenta la derivada de Riemann–Liouville.

• **Definición 3.2.2. Derivada Fraccionaria de Caputo.**

Se define la *derivada fraccionaria de Caputo* de orden $\alpha \in \mathbb{C}$ ($\text{Re}(\alpha) > 0$) de la función $f \in AC^n[a, b]$ para $f \in C_{-1}$ y $0 < \alpha \leq 1$ como:

$$D_t^{\alpha C} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-u)^{-\alpha} f'(u) du = I_t^{1-\alpha} f'(t) \quad (3.2.2)$$

Se demuestra que la derivada de Caputo de orden α coincide con la integral de Riemann–Liouville de orden $1-\alpha$ aplicada a la derivada clásica de la función. Ambas operaciones están estrechamente relacionadas: cuando se aplican una detrás de otra, devuelven la función original módulo los términos asociados a las condiciones iniciales, propiedad que se explota después para reformular la ecuación diferencial como una ecuación integral en términos de las *Wavelets*. Estas relaciones quedan recogidas en el siguiente lema.

▼ **Lema 3.2.1.**

Las integrales fraccionarias de Riemann–Liouville y las derivadas de Caputo satisfacen las siguientes relaciones ([RAHI19], [MARA22]):

$$D_t^{\alpha C} I_t^\alpha Z(t) = Z(t), \quad I_t^\alpha D_t^{\alpha C} Z(t) = Z(t) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{t^j}{j!} Z^{(j)}(0) \quad (3.2.3)$$

Además, para una potencia t^γ con $\gamma > \alpha - 1$, se cumple la regla de potencias $D_t^{\alpha C} t^\gamma = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)} t^{\gamma-\alpha}$, que constituye la herramienta básica para diferenciar fraccionariamente los polinomios y, por extensión, los polinomios de Chelyshkov fraccionarios que se introducen a continuación.

3.2.2. Polinomios de Chelyshkov Fraccionarios

3.2.2.1. Definición de los Polinomios de Chelyshkov (I)

Se definen previamente los polinomios de Chelyshkov dada por [RAHI19] y [MARA22].

- **Definición 3.2.3. Polinomios de Chelyshkov.** ([RAHI19], [MARA22])

Los polinomios de *Chelyshkov*, que se denotan por $C_{N,N^*}(x)$, se definen en el intervalo $[0, 1]$ por:

$$C_{N,N^*}(x) = \sum_{i=N}^{N^*} (-1)^{i-N} \binom{N^*-N}{i-N} \binom{N^*+i+1}{N^*-N} x^i \quad N = 0, 1, \dots, N^* \quad (3.2.4)$$

Estos polinomios son ortogonales sobre el intervalo $[0, 1]$ con respecto a la función peso $w(x) = 1$ y verifican la condición de ortogonalidad:

$$\int_0^1 C_{N,N^*}(x) C_{M,N^*}(x) dx = \frac{1}{N+M+1} \delta_{NM} \quad (3.2.5)$$

$$\delta_{NM} = \begin{cases} 1 & N = M \\ 0 & N \neq M \end{cases}$$

siendo δ_{NM} la función delta de Kronecker.

Los polinomios de Chelyshkov $C_{N,N^*}(x)$ son una familia de polinomios definidos en el intervalo $[0, 1]$ mediante una combinación binomial doble. A diferencia de las familias ortogonales más habituales (Legendre, Chebyshev, Jacobi), todos los polinomios de Chelyshkov del mismo grado máximo N^* comparten el mismo grado y se distinguen únicamente por el índice N inicial de la suma.

La propiedad de ortogonalidad es lo que permite expandir cualquier función de cuadrado integrable como una serie en términos de los polinomios de Chelyshkov, en analogía con las series clásicas de Fourier.

La adaptación al contexto fraccionario se realiza mediante un sencillo cambio de variable $x \rightarrow x^\alpha$ con $\alpha > 0$. Esta sustitución permite generar polinomios capaces de capturar con mayor precisión el comportamiento singular cerca del origen que suelen exhibir las soluciones de las ecuaciones fraccionarias.

- **Definición 3.2.4. Polinomios de Chelyshkov de Orden Fraccionario.**

([RAHI19], [MARA22]).

Los polinomios de *Chelyshkov* de orden fraccionario que se denotan por $C_{N,N^*}^{(\alpha)}(x)$ se definen en el intervalo $[0, 1]$ por la expresión:

$$C_{N,N^*}^{(\alpha)}(x) = \sum_{i=N}^{N^*} (-1)^{i-N} \binom{N^*-N}{i-N} \binom{N^*+i+1}{N^*-N} x^{i\alpha} \quad N = 0, 1, \dots, N^*. \quad (3.2.6)$$

Se construyen las funciones de Chelyshkov de orden fraccionario partiendo de las funciones polinómicas de *Chelyshkov* considerando el cambio de variable:

$$x \longrightarrow x^\alpha. \quad (3.2.7)$$

Los polinomios de Chelyshkov de orden fraccionario son ortogonales sobre el intervalo $[0, 1]$ respecto a la función peso $w^{(\alpha)}(x) = x^{\alpha-1}$, como expresa el siguiente teorema.

▼ **Teorema 2.2. Polinomios Ortogonales de *Chelyshkov* de Orden Fraccionario.**

([RAHI19], [MARA22]).

Sean $\{C_{N,N^*}^{(\alpha)}(x)\}_{N=0}^{N^*}$ la familia de polinomios de *Chelyshkov* fraccionarios de grado N^* , entonces los polinomios de *Chelyshkov* fraccionarios forman un sistema *ortogonal* en el espacio $L^2([0, 1])$ con respecto al producto interno:

$$\langle C_{N,N^*}^{(\alpha)}, C_{M,N^*}^{(\alpha)} \rangle = \int_0^1 C_{N,N^*}^{(\alpha)}(x) C_{M,N^*}^{(\alpha)}(x) w(x) dx = \frac{1}{\alpha(N+M+1)} \delta_{NM} \quad \delta_{NM} = \begin{cases} 1 & N = M \\ 0 & N \neq M \end{cases}$$

con la función peso $w(x) = x^{\alpha-1}$.

La demostración se obtiene de manera inmediata efectuando el cambio de variable $x \rightarrow x^\alpha$ en la condición de ortogonalidad clásica de los polinomios de Chelyshkov ([MARA22]).

3.2.2.2. Definición de los Polinomios de Chelyshkov (II)

A continuación, se definen los polinomios de Chelyshkov dada en [MOHA18], [CHEL06], [ERMA23].

- **Definición 2.5. Polinomios de Chelyshkov.**

Los polinomios de *Chelyshkov* se definen de forma explícita:

$$C_{M,n}(x) = \sum_{k=0}^{M-n} \underbrace{(-1)^k \binom{M-n}{k} \binom{M+n+k+1}{M-n}}_{a_{kn}} x^{n+k} \quad n = 0, 1, \dots, M \quad (3.2.8)$$

donde la constante a_{kn} se define por

$$a_{kn} = (-1)^k \binom{M-n}{k} \binom{M+n+k+1}{M-n} \quad (3.2.9)$$

Estos polinomios son ortogonales sobre el intervalo $[0, 1]$ con respecto a la función peso $w(x) = 1$,

$$\int_0^1 C_{M,n}(x) C_{M,m}(x) dx = \frac{1}{m+n+1} \delta_{nm} \quad (3.2.10)$$

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

siendo δ_{nm} la función delta de Kronecker.

3.2.3. Funciones Wavelets de Chelyshkov Fraccionarias

A partir de los polinomios fraccionarios se construyen las *Wavelets* de Chelyshkov fraccionarias mediante una combinación de dilatación y traslación diádica. Concretamente, sobre el espacio $L^2[0, T)$ se definen tanto las funciones *Wavelets* de Chelyshkov como las *Wavelets* de Chelyshkov de orden fraccionario, como sigue.

3.2.3.1. Definición de las Wavelets de Chelyshkov (I)

- **Definición 3.2.6. *Wavelets de Chelyshkov.*** ([RAHI19], [MARA22]).

Las *Wavelets* de Chelyshkov $\psi_{M,N,N^*}(x)$ se definen en el intervalo $[0, 1)$ mediante la expresión:

$$\psi_{M,N,N^*}(x) = \begin{cases} \sqrt{2N+1} 2^{\frac{k-1}{2}} C_{N,N^*}(x) (2^{k-1}x - m^*) & \frac{m^*}{2^{k-1}} \leq x < \frac{m^*+1}{2^{k-1}} \\ 0 & \text{Resto} \end{cases}$$

$$\begin{cases} M = 1, 2, \dots, 2^k - 1 & m^* = M - 1 \\ N = 0, 1, \dots, \frac{N^*}{M-1} & \text{(grado del polinomio de Chelyshkov)} \end{cases} \quad (3.2.11)$$

$C_{N,N^*}(x) \equiv$ polinomios de Chelyshkov de grado N^* .

El conjunto de *Wavelets* de Chelyshkov $\psi_{M,N,N^*}(x)$ constituyen un conjunto ortonormal en el intervalo $[0, 1]$ respecto de la función peso $w(x) = 1$.

- **Definición 3.2.7. *Wavelets de Chelyshkov de Orden Fraccionario.***

([RAHI19], [MARA22])

Las *Wavelets* de Chelyshkov de orden fraccionario $\psi_{M,N,N^*}^{(T,\alpha)}(x)$ definidas en $[0, T]$, se definen en el intervalo $[0, T)$ mediante la expresión:

$$\psi_{M,N,N^*}^{(T,\alpha)}(x) = \begin{cases} \sqrt{(2N+1)} 2^{\frac{k-1}{2}} C_{N,N^*}\left(2^{k-1}\left(\frac{x}{T}\right)^\alpha - m^*\right) & \frac{m^*}{2^{k-1}} \leq \left(\frac{x}{T}\right)^\alpha < \frac{m^*+1}{2^{k-1}} \\ 0 & \text{Resto} \end{cases}$$

$$\begin{cases} M = 1, 2, \dots, 2^k - 1 & m^* = M - 1 \\ N = 0, 1, \dots, \frac{N^*}{M-1} & \text{(grado del polinomio de Chelyshkov)} \end{cases} \quad (3.2.12)$$

$C_{N,N^*}(x) \equiv$ polinomio de Chelyshkov en $[0, 1]$ de grado N^* .

donde $C_{N,N^*}(x)$ representa las funciones o polinomios de Chelyshkov de orden fraccionario

de grado N^* definida en el intervalo $[0, 1]$.

Se construyen las *funciones* o *polinomios* de Chelyshkov de orden fraccionario mediante el cambio de variable en los polinomios de Chelyshkov:

$$x \longrightarrow x^\alpha \quad (\alpha > 0). \quad (3.2.13)$$

$$C_{N,N^*}^{(\alpha)}(x) = \sum_{i=N}^{N^*} (-1)^{i-N} \binom{N^*-N}{i-N} \binom{N^*+i+1}{N^*-N} x^{i\alpha} \quad N = 0, 1, \dots, N^*. \quad (3.2.14)$$

El parámetro k controla la dilatación diádica y m^* la traslación. La ventaja fundamental de esta construcción es que combina la localización espacial típica de las *Wavelets* con la capacidad de los polinomios fraccionarios para representar de manera precisa las soluciones de FPDEs.

3.2.3.2. Definición de las Wavelets de Chelyshkov (II)

Las funciones *Wavelets* de Chelyshkov son una familia *ortonormal* basadas en los polinomios de Chelyshkov.

Se construyen las funciones *Wavelets* de Chelyshkov *generalizadas de orden fraccionario* (*Fractional–Order Generalized Chelyshkov Wavelet–FOGCW*) que representan una generalización de las *Wavelets* de Chelyshkov, [MOHS20], [NGO22], [ERMA23].

• Definición 3.2.8. Wavelets de Chelyshkov Generalizadas de Orden Fraccionario.

Las *Wavelets* de Chelyshkov *generalizadas de orden fraccionario* (*Fractional–Order Generalized Chelyshkov Wavelet–FOGCW*) de orden α , $\psi_{nm}^{T,\alpha}$ se definen en el intervalo $[0, T)$ mediante la expresión [MOHS20], [NGO22], [ERMA23],

$$\psi_{nm}^{T,\alpha}(x) = \begin{cases} \sqrt{2m+1} \, 2^{\frac{k}{2}} C_{M,m} \left(2^k \left(\frac{x}{T} \right)^\alpha - n \right) & \frac{x}{T} \in \left[\left(\frac{n}{2^k} \right)^\frac{1}{\alpha}, \left(\frac{n+1}{2^k} \right)^\frac{1}{\alpha} \right) \\ 0 & \text{Resto} \end{cases} \quad (3.2.15)$$

$$\begin{cases} n = 0, 1, \dots, 2^k - 1 & k = 0, 1, 2, \dots \\ m = 0, 1, \dots, M & \text{(grado del polinomio de Chelyshkov)} \end{cases}$$

$$C_{M,m}(x) \equiv \text{polinomios de Chelyshkov de grado } M.$$

donde M, k son enteros no negativos y α es un número positivo real que representa el orden fraccionario.

▼ **Teorema 2.3. Base Ortonormal de las Wavelets de Chelyshkov Fraccionarias.**

Sea el conjunto de Wavelets de Chelyshkov Generalizadas Fraccionarias $\psi_{nm}^{T,\alpha}(x)$, $n = 0, 1, \dots, 2^k - 1$ y $m = 0, 1, \dots, M$ de grado M , entonces constituyen un conjunto ortonormal en el intervalo $[0, T]$ respecto del producto interno y la función peso $w^\alpha(x) = \alpha \frac{x^{\alpha-1}}{T^\alpha}$

$$\langle \psi_{nm}^{T,\alpha}(x), \psi_{n^*m^*}^{T,\alpha}(x) \rangle = \int_0^T \psi_{nm}^{T,\alpha}(x) * \psi_{n^*m^*}^{T,\alpha}(x) w^\alpha(x) dx = \begin{cases} 1 & n = m \text{ y } n^* = m^* \\ 0 & n \neq m \text{ o } n^* \neq m^* \end{cases}$$

Observaciones 3.2.1.

(i) Las Wavelets de Chelyshkov generalizadas fraccionarias $\psi_{nm}^{T,\alpha}(x)$ son polinomios de grado M en el intervalo

$$\frac{x}{T} \in \left[\left(\frac{n}{2^k} \right)^\frac{1}{\alpha}, \left(\frac{n+1}{2^k} \right)^\frac{1}{\alpha} \right), \begin{cases} n = 0, 1, \dots, 2^k - 1 & k = 0, 1, 2, \dots \\ m = 0, 1, \dots, M & \text{(grado polinomio de Chelyshkov)} \end{cases}$$

(ii) Dada la base de Wavelets de Chelyshkov generalizadas fraccionarias $\mathcal{B} = \{\psi_{nm}^{T,\alpha}(x)\}$ con $n = 0, 1, \dots, 2^k - 1$ y $m = 0, 1, \dots, M$, siendo M el grado de cada polinomio, se verifica

$$\begin{aligned} \mathcal{B} = \Psi(x) &= \{\psi_{0,0}^{T,\alpha}(x), \psi_{0,1}^{T,\alpha}(x), \dots, \psi_{0,M}^{T,\alpha}(x), \psi_{1,0}^{T,\alpha}(x), \psi_{1,1}^{T,\alpha}(x), \dots, \\ &\quad \psi_{1,M}^{T,\alpha}(x), \dots, \psi_{2^k-1,0}^{T,\alpha}(x), \psi_{2^k-1,1}^{T,\alpha}(x), \dots, \psi_{2^k-1,M}^{T,\alpha}(x)\} \\ \text{Dimensión } (\mathcal{B} = \Psi(x)) &= m^* (\text{n}^\circ \text{ elementos}) = 2^k (M + 1). \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

(iii) Se define también el vector base $\Psi(x)$ también como sigue:

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= (\psi_1(x) \ \psi_2(x) \ \dots \ \psi_{m^*}^{T,\alpha}(x)) \quad m^* = 2^k (M + 1) \\ \psi_i(x) &= \psi_{nm}(x) \quad i = n(M + 1) + (m + 1) \end{aligned} \quad (3.2.17)$$

siendo el índice:

$$i = n(M + 1) + (m + 1) \quad \begin{cases} n = 0, 1, \dots, 2^k - 1 \\ m = 0, 1, \dots, M \end{cases} \quad (3.2.18)$$

3.2.4. Aproximación de Funciones por Wavelets de Chelyshkov Fraccionarias

3.2.4.1. Expansión de una Función en Wavelets de Chelyshkov Fraccionarias

Se establece en el siguiente Teorema la expansión de una función $f(x) \in L^2([0, T])$ en términos de una base ortonormal de *Wavelets* de Chelyshkov Fraccionarias ([NGO22], [ERMA23]).

▼ Teorema 3.2.4.

Sea la función $f = f(x)$ cuadrado integrable en $x \in [0, T]$, $f(x) \in L^2([0, T])$ donde

$$L^2([0, T]) := \{f \mid f[0, T], \text{ y } \int_0^T f(x)^2 dx < \infty\}$$

y sea la base de las *Wavelets* de Chelyshkov generalizadas fraccionarias:

$$\Psi(x) = \{\psi_{n,m}^{T,\alpha}(x)\} \subset L^2([0, T]) \quad n = 0, 1, 2, \dots, 2^k - 1 \text{ y } m = 0, 1, \dots, M.$$

La función $f(x)$ se puede expandir o desarrollar en serie con las funciones *Wavelets* de Chelyshkov fraccionarias de la forma siguiente:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} c_{nm} \psi_{n,m}^{T,\alpha}(x) \quad x \in [0, T] \quad (3.2.19)$$

donde una aproximación viene dada mediante la truncación de la serie:

$$f(x) \simeq f_{M,k}^{T,\alpha} = \sum_{n=0}^{2^k-1} \sum_{m=0}^M c_{nm} \psi_{n,m}^{T,\alpha}(x) = C \cdot \Psi_{n,m}^{T,\alpha}(x) \quad x \in [0, T] \quad (3.2.20)$$

$$c_{nm} = \langle f(x), \psi_{n,m}^{T,\alpha}(x) \rangle$$

donde $c_{nm} = \langle f(x), \psi_{n,m}^{T,\alpha}(x) \rangle$ son los *coeficientes Wavelet de Chelyshkov* fraccionarias y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto interno. Los *coeficientes Wavelet de Chebyshev* fraccionarias tienen la expresión:

$$c_{nm} = \langle f(x), \psi_{n,m}^{T,\alpha}(x) \rangle = \int_0^T f(x) \psi_{n,m}^{T,\alpha}(x) w^\alpha(x) dx \quad (3.2.21)$$

$$C = \langle f(x), \Psi_{n,m}^{T,\alpha}(x) \rangle = \int_0^T f(x) [\Psi_{n,m}^{T,\alpha}(x)]^T w^\alpha(x) dx$$

con la función peso

$$w^\alpha(x) = \alpha \frac{x^{\alpha-1}}{T^\alpha} \quad x \in [0, T].$$

El desarrollo en serie de las funciones *Wavelets* de Chelyshkov generalizadas fraccionarias de la función $f(x)$ se puede expresar

$$f(x) \simeq f_{M,k}^{T,\alpha} = \sum_{n=0}^{2^k-1} \sum_{m=0}^M c_{nm} \psi_{n,m}^{T,\alpha}(x) = C^T \cdot \Psi^{T,\alpha}(x) \quad (3.2.22)$$

donde C y $\Psi(x)$ son matrices de dimensión $2^k(M+1) \times 1$ (vectores columna de $\hat{m} = 2^k(M+1)$) dadas por los vectores columna:

$$C = \begin{pmatrix} c_{0,0} \\ c_{0,1} \\ \vdots \\ c_{0,M} \\ c_{1,0} \\ c_{1,1} \\ \vdots \\ c_{1,M} \\ \dots \\ c_{2^k-1,0} \\ c_{2^k-1,1} \\ \vdots \\ c_{2^k-1,M} \end{pmatrix} \quad \Psi^{T,\alpha}(x) = \begin{pmatrix} \psi_{0,0}^{T,\alpha}(x) \\ \psi_{0,1}^{T,\alpha}(x) \\ \vdots \\ \psi_{0,M}^{T,\alpha}(x) \\ \psi_{1,0}^{T,\alpha}(x) \\ \psi_{1,1}^{T,\alpha}(x) \\ \vdots \\ \psi_{1,M}^{T,\alpha}(x) \\ \dots \\ \psi_{2^k-1,0}^{T,\alpha}(x) \\ \psi_{2^k-1,1}^{T,\alpha}(x) \\ \vdots \\ \psi_{2^k-1,M}^{T,\alpha}(x) \end{pmatrix} \quad \begin{cases} n = 0, 1, \dots, 2^k - 1 \\ m = 0, 1, \dots, M \end{cases}$$

El desarrollo en serie con las funciones *Wavelets* de Chelyshkov generalizadas fraccionarias también se puede escribir:

$$f(x) \simeq f_{M,k}^{T,\alpha} = \sum_{i=1}^{m^*} c_i \psi_i^{T,\alpha}(x) = C^T \cdot \Psi^{T,\alpha}(x) \quad (3.2.23)$$

donde

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{m^*} \end{pmatrix} \quad \Psi^{T,\alpha}(x) = \begin{pmatrix} \psi_1^{T,\alpha}(x) \\ \psi_2^{T,\alpha}(x) \\ \vdots \\ \psi_{m^*}^{T,\alpha}(x) \end{pmatrix} \quad (3.2.24)$$

$$\begin{cases} c_i = c_{nm} \\ \psi_i^{T,\alpha}(x) = \psi_{n,m}^{T,\alpha}(x) \end{cases} \quad i = n(M+1) + (m+1).$$

$$m^*(n^\circ \text{ elementos}) = 2^k (M+1)$$

3.2.4.2. Expansión de una Función de dos Variables en Wavelets de Chelyshkov Fraccionarias

Se establece en el siguiente Teorema la expansión de una función de dos variables $u(x, t) \in L^2([0, T] \times [0, T])$ en términos de una base ortonormal de *Wavelets* de Chelyshkov Fraccionarias ([RAHI19], [MARA22], [DO25]).

▼ Teorema 3.2.5.

Sea la función $u = u(x, t)$ cuadrado integrable en el dominio $(x, t) \in [0, T] \times [0, T]$, $u(x, t) \in L^2([0, T] \times [0, T])$ donde

$$L^2([0, T] \times [0, T]) := \{u(x, t) \in L^2([0, T] \times [0, T]), \text{ y } \int_0^T \int_0^T f(x)^2 dx < \infty\}.$$

y sea la base de las *Wavelets* de Chelyshkov generalizadas fraccionarias:

$$\Psi^{T,\alpha}(x) = \{\psi_{n,m}^{T,\alpha}(x)\} \subset L^2([0, T]) \quad n = 0, 1, 2, \dots, 2^k - 1 \text{ y } m = 0, 1, \dots, M.$$

La función $u(x, t)$ se puede expandir o desarrollar en serie con las funciones *Wavelets* de Chelyshkov fraccionarias de la forma siguiente:

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n^*=0}^{\infty} \sum_{m^*=0}^{\infty} c_{n,m,n^*,m^*} \psi_{n,m}^{T,\alpha}(x) \psi_{n^*,m^*}^{T,\alpha}(t) \quad (x, t) \in [0, T] \times [0, T] \quad (3.2.25)$$

donde una aproximación viene dada mediante la truncación de la serie:

$$u(x, t) \simeq u_{M,k}^{T,\alpha}(x, t) = \sum_{n=0}^{2^k-1} \sum_{m=0}^M \sum_{n^*=0}^{2^{k^*}-1} \sum_{m^*=0}^{M^*} c_{n,m,n^*,m^*} \psi_{n,m}^{T,\alpha}(x) \psi_{n^*,m^*}^{T,\alpha}(t) \quad (3.2.26)$$

$$u(x, t) \simeq \underbrace{(\Psi^{T,\alpha}(x))^T}_{(1, 2^k (M+1))} \cdot C \cdot \underbrace{\Psi^{T,\alpha}(t)}_{(2^{k^*} (M^*+1), 1)}$$

donde C es una matriz de dimensión $(2^k (M+1) \times 2^{k^*} (M^*+1))$ y c_{n,m,n^*,m^*} son los *coeficientes Wavelet de Chelyshkov* fraccionarias y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto interno.

Los *coeficientes Wavelet de Chelyshkov* fraccionarias tienen la expresión:

$$c_{n,m,n^*,m^*} = \langle u(x, t), \psi_{n,m}^{T,\alpha}(x) \psi_{n^*,m^*}^{T,\alpha}(t) \rangle$$

$$\begin{aligned}
 c_{n,m,n^*,m^*} &= \int_0^T \int_0^T u(x, t) \psi_{n,m}^{T,\alpha}(x) \psi_{n^*,m^*}^{T,\alpha}(t) w^\alpha(x) w^\alpha(t) dx dt \\
 C &= \langle u(x, t), \psi_{n,m}^{T,\alpha}(x) \psi_{n^*,m^*}^{T,\alpha}(t) \rangle \\
 C &= \int_0^T \int_0^T u(x, t) [\Psi_{n,m}^{T,\alpha}(x)] [\Psi_{n^*,m^*}^{T,\alpha}(t)]^T w^\alpha(x) w^\alpha(t) dx dt
 \end{aligned}$$

con la función peso

$$w^\alpha(x) = \alpha \frac{x^{\alpha-1}}{T^\alpha} \quad x \in [0, T], \quad w^\alpha(t) = \alpha \frac{t^{\alpha-1}}{T^\alpha} \quad t \in [0, T].$$

La expansión de la una función de dos variables $u(x, t)$ en la base de las funciones *Wavelets* de Chelyshkov generalizadas fraccionarias se puede expresar matricialmente:

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &\simeq u_{M,k}^{T,\alpha}(x, t) = \sum_{n=0}^{2^k-1} \sum_{m=0}^M \sum_{n^*=0}^{2^{k^*}-1} \sum_{m^*=0}^{M^*} c_{n,m,n^*,m^*} \psi_{n,m}^{T,\alpha}(x) \psi_{n^*,m^*}^{T,\alpha}(t) \\
 u(x, t) &\simeq \underbrace{(\Psi^{T,\alpha}(x))^T}_{(1,2^k(M+1))} \cdot C \cdot \underbrace{\Psi^{T,\alpha}(t)}_{(2^{k^*}(M^*+1),1)} \quad (3.2.28) \\
 C &= (c_{n,m,n^*,m^*})
 \end{aligned}$$

siendo C es la matriz de coeficientes de dimensión $(2^k(M+1) \times 2^{k^*}(M^*+1))$ y $\Psi^{T,\alpha}(x)$, $\Psi^{T,\alpha}(t)$ son vectores de *Wavelets* de Chelyshkov generalizadas fraccionarias dados por los vectores columna:

$$\begin{aligned}
 C &= \begin{pmatrix} c_{0,0} \\ c_{0,1} \\ \vdots \\ c_{0,M} \\ c_{1,0} \\ c_{1,1} \\ \vdots \\ c_{1,M} \\ \dots \\ c_{2^k-1,0} \\ c_{2^k-1,1} \\ \vdots \\ c_{2^k-1,M} \end{pmatrix} \quad \Psi^{T,\alpha}(x) = \begin{pmatrix} \psi_{0,0}^{T,\alpha}(x) \\ \psi_{0,1}^{T,\alpha}(x) \\ \vdots \\ \psi_{0,M}^{T,\alpha}(x) \\ \psi_{1,0}^{T,\alpha}(x) \\ \psi_{1,1}^{T,\alpha}(x) \\ \vdots \\ \psi_{1,M}^{T,\alpha}(x) \\ \dots \\ \psi_{2^k-1,0}^{T,\alpha}(x) \\ \psi_{2^k-1,1}^{T,\alpha}(x) \\ \vdots \\ \psi_{2^k-1,M}^{T,\alpha}(x) \end{pmatrix} \quad \Psi^{T,\alpha}(t) = \begin{pmatrix} \psi_{0,0}^{T,\alpha}(x) \\ \psi_{0,1}^{T,\alpha}(x) \\ \vdots \\ \psi_{0,M^*}^{T,\alpha}(x) \\ \psi_{1,0}^{T,\alpha}(x) \\ \psi_{1,1}^{T,\alpha}(x) \\ \vdots \\ \psi_{1,M^*}^{T,\alpha}(x) \\ \dots \\ \psi_{2^{k^*}-1,0}^{T,\alpha}(x) \\ \psi_{2^{k^*}-1,1}^{T,\alpha}(x) \\ \vdots \\ \psi_{2^{k^*}-1,M^*}^{T,\alpha}(x) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} n = 0, 1, \dots, 2^k - 1 \\ m = 0, 1, \dots, M \end{cases} \quad \begin{cases} n^* = 0, 1, \dots, 2^{k^*} - 1 \\ m^* = 0, 1, \dots, M^* \end{cases}$$

3.2.4.3. Expansión de una Función Wavelets de Chelyshkov Fraccionarias

([RAHI19], [MARA22])

Se indican las ecuaciones que permitan aproximar una función $Z(t)$ empleando la definición de las funciones *Wavelets* de Chelyshkov dada en [RAHI19], y [MARA22].

Aproximación de funciones.

Una función $Z \in L^2[0, h]$ puede aproximarse mediante una serie truncada de *Wavelets* de Chelyshkov fraccionarias del modo siguiente:

$$Z(t) \approx \sum_{N=1}^{2^{k-1}} \sum_{M=0}^{\hat{M}} c_{N,M} \psi_{N,M,\hat{M}}^{(\lambda,h)}(t) = C^T \Phi^{(\lambda,h)}(t) \quad (3.2.29)$$

donde el vector de coeficientes C agrupa los productos internos $c_{N,M} = \int_0^h \psi_{N,M,\hat{M}}^{(\lambda,h)}(t) Z(t) \omega^{(\lambda)}(t) dt$ y $\Phi^{(\lambda,h)}(t)$ es el vector que contiene todas las *Wavelets* hasta el nivel de truncamiento prescrito. Esta es la pieza clave que posteriormente convierte la ecuación (FPDE) en un sistema algebraico, ya que la incógnita pasa a ser, simplemente, el vector C .

Análogamente, una función de dos variables $Z(x, t)$ definida en el rectángulo $[0, h] \times [0, h]$ admite una aproximación por producto tensorial ([RAHI19], [MARA22]):

$$Z(x, t) \approx \left(\Phi^{(\lambda,h)}(x) \right)^T \Omega \Phi^{(\lambda,h)}(t) \quad (3.2.30)$$

donde Ω es ahora una matriz de coeficientes desconocidos de dimensión $(2^{k-1} M) \times (2^{k'-1} M')$. Cuando los índices de truncamiento M, M' y los niveles k, k' tienden a infinito, esta serie converge a $Z(x, t)$ en norma L^2 , como se demuestra en [RAHI19], y [MARA22] al estudiar la convergencia del método numérico.

3.2.5. Método FChWM. Ecuación de Advección–Dispersión Móvil–Inmóvil de Orden Distribuido Fraccionario en el Tiempo

Se pretende diseñar un método numérico eficiente basado en un método de colocación compuesto que utiliza las *Wavelets* de Chelyshkov de orden fraccionario para resolver numéricamente la ecuación de advección–dispersión móvil–inmóvil de orden distribuido (*Distributed-Order Fractional Mobile-Immobile Advection-Dispersion Equation*). [RAHI19], [MARA22].

El algoritmo se denomina Método de Colocación *Wavelet* de Chelyshkov Frccionario (*Fractional Order Chelyshkov Wavelets Method*–FChWCM) que permite dar una solución numérica a la ecuación no lineal (FPDE).

Planteamiento del problema. La metodología propuesta se aplica a la ecuación de advección–dispersión móvil–inmóvil de orden distribuido fraccionario en el tiempo, que aparece de forma natural en la modelización del transporte de solutos en medios porosos heterogéneos ([MARA22]). En su forma canónica se escribe como

$$\alpha_1 Z_t(x, t) + \alpha_2 \mathbb{D}_t^\mu Z(x, t) = -\alpha_3 Z_x(x, t) + \alpha_4 Z_{xx}(x, t) + h(x, t) \quad (3.2.31)$$

donde los coeficientes satisfacen $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 \geq 0$, $\alpha_3 > 0$ y $\alpha_4 > 0$. Estos parámetros admiten una interpretación física directa: α_1 y α_2 gobiernan la fracción móvil e inmóvil del soluto, α_3 controla la advección y α_4 la dispersión. Las condiciones inicial y de contorno asociadas son $Z(x, 0) = f_1(x)$, $Z(0, t) = f_2(t)$ y $Z(1, t) = f_3(t)$. El operador de orden distribuido $\mathbb{D}_t^\mu$ se interpreta en el sentido de Caputo y se obtiene integrando la derivada fraccionaria sobre todo el rango de órdenes ponderada por una función de distribución $\rho(\mu)$:

$$\mathbb{D}_t^{\rho(\mu)} Z(x, t) = \int_0^1 \rho(\mu) D_t^{\mu C} Z(x, t) d\mu \quad (3.2.32)$$

Conviene destacar que esta formulación generaliza simultáneamente las ecuaciones clásicas de advección–dispersión y los modelos fraccionarios de un único orden. En particular, escogiendo distintas funciones $\rho(\mu)$ se recuperan modelos clásicos como casos particulares (por ejemplo, $\rho(\mu) = \delta(\mu - \mu_0)$ da lugar a la ecuación móvil–inmóvil fraccionaria de orden único). Esta versatilidad justifica el interés en disponer de métodos numéricos eficientes y precisos adaptados al caso más general.

Estrategia general del algoritmo FChWCM. La filosofía del método consiste en transformar la FPDE en un sistema algebraico no lineal cuyas incógnitas son los coeficientes Ω de la expansión *Wavelet* ([RAHI19], [MARA22]). El esquema completo se desarrolla en cinco etapas fundamentales que se exponen a continuación.

En primer lugar, se *expande la derivada mixta de mayor orden* presente en la ecuación en términos del producto tensorial de *wavelets* de Chelyshkov fraccionarias en las variables x y t :

$$\frac{\partial^3 Z(x, t)}{\partial x^2 \partial t} = \left(\Phi^{(\lambda, h')}(x) \right)^T \Omega \Phi^{(\lambda_1, h')}(t) \quad (3.2.33)$$

La elección de la derivada de mayor orden no es casual: al expresarla directamente en términos de las *wavelets*, todas las demás derivadas y la propia función se recuperan por integración, lo que evita acumulación de errores de derivación numérica y permite incorporar de forma exacta las condiciones iniciales y de contorno como constantes de integración.

En segundo lugar se *recuperan las derivadas inferiores y la función incógnita* mediante integración sucesiva respecto a t y x , aplicando en cada paso las condiciones de contorno y las condiciones iniciales para fijar las constantes de integración. Se obtienen así expresiones cerradas para $\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial Z}{\partial x}$, $\frac{\partial Z}{\partial t}$ y para la propia función $Z(x, t)$ en términos lineales de la matriz Ω y del operador $Q(t, \alpha, \lambda)$, que representa la integral fraccionaria de Riemann–Liouville del vector de *Wavelets* calculada mediante la transformada de Laplace. Esta cantidad se calcula una sola vez de forma simbólica ([RAHI19]) y, una vez disponible, basta con sustituir en las relaciones correspondientes para obtener cualquier derivada de orden inferior.

El tercer paso consiste en *aplicar la derivada fraccionaria de Caputo* de orden μ respecto a t a la expresión obtenida para $Z(x, t)$. Gracias a la regla de potencias del Lema 1, esta operación se reduce a sustituir el operador de integración $Q(t, 1, \lambda_1)$ por su versión con orden $1 - \mu$, y las condiciones de contorno se incorporan a través de las derivadas de Caputo de las funciones f_2 y f_3 . Una vez sustituidas todas las expresiones (derivadas espaciales y temporales, derivada fraccionaria, término fuente) en la ecuación original, se llega a una identidad que debe verificarse en todo el dominio.

El cuarto paso aborda el principal reto computacional del problema: la *integral sobre el orden distribuido*. Esta integral, que en general no admite solución cerrada, se aproxima mediante una cuadratura de Gauss–Legendre adaptada al intervalo $[0, 1]$:

$$\int_0^1 \rho(\mu) F(\mu) d\mu \approx \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\bar{k}} \zeta_k \rho\left(\frac{1 + \tau_k}{2}\right) F\left(\frac{1 + \tau_k}{2}\right) \quad (3.2.34)$$

donde τ_k son los nodos y ζ_k los pesos de Gauss–Legendre en $[-1, 1]$. La elección de esta cuadratura es óptima en el sentido de que una fórmula con $\bar{k} + 1$ puntos integra exactamente polinomios de grado hasta $2\bar{k} + 1$, lo que en la práctica permite obtener un error de discretización despreciable con un número moderado de nodos.

Por último, en la quinta etapa se realiza la *colocación*: la ecuación resultante se evalúa en una malla de puntos compuestos definida por

$$x_{M,N} = \frac{x_N + M - 1}{2^{m-1}}, \quad t_{M',N'} = \frac{t_{N'} + M' - 1}{2^{m'-1}} \quad (3.2.35)$$

donde x_N y $t_{N'}$ son los ceros de los polinomios de Legendre desplazados al intervalo $[0, 1]$. La elección de los ceros de Legendre como nodos de colocación no es arbitraria: estos puntos minimizan, en cierto sentido, el error de interpolación y proporcionan una distribución no uniforme que se ajusta naturalmente al carácter espectral del método, evitando el fenómeno de Runge propio de los nodos equiespaciados.

El resultado de imponer la ecuación diferencial en cada uno de estos puntos es un sistema algebraico no lineal con un total de $(2^{m-1} M) \times (2^{m'-1} M')$ ecuaciones, cuyas incógnitas son las entradas de la matriz Ω . Este sistema se resuelve mediante el método iterativo de Newton, que es de uso preferente debido a su convergencia cuadrática. Una vez determinada Ω , la solución aproximada $Z(x, t)$ se reconstruye sustituyendo los coeficientes en la expresión integral obtenida en la segunda etapa, sin necesidad de derivaciones adicionales.

Resulta importante destacar dos características que confieren eficiencia al algoritmo. Por una parte, la matriz Ω resultante es estructuralmente dispersa (*sparse*), lo que reduce de forma significativa los requisitos de almacenamiento y el coste computacional del método de Newton frente a los obtenidos con otras familias de *Wavelets*. Por otra parte, los operadores de integración fraccionaria Q se calculan una sola vez fuera del bucle iterativo, lo que también contribuye a reducir el tiempo de cómputo total. Estas dos características, junto con la alta precisión y la convergencia rápida de las *wavelets* de Chelyshkov fraccionarias, hacen del FChWCM una herramienta particularmente adecuada para el tratamiento de FPDEs de orden distribuido ([[MARA22](#)]).

3.2.5.1. Método Colocación Wavelet de Chelyshkov Fraccionario (FChWCM)

Considérese la siguiente ecuación de Advección–Dispersión Móvil–Inmóvil de orden Distribuido Fraccionario en el Tiempo: ([[RAHI19](#)], [[MARA22](#)])

$$\begin{aligned} (\text{FPDE}) \equiv & \begin{cases} \frac{\alpha_1 u_t(x, t)}{F_1(x, t)} + \frac{\alpha_2 \mathbb{D}_t^\beta u(x, t)}{F_2(x, t)} = \frac{-\alpha_3 u_x(x, t)}{F_3(x, t)} + \frac{\alpha_4 u_{xx}(x, t)}{F_4(x, t)} + \frac{h(x, t)}{F_5(x, t)} \\ u(x, 0) = f_1(x) & x \in [0, 1] \\ u(0, t) = f_2(t) \quad u(1, t) = f_3(t) & t \in [0, 1] \end{cases} \end{aligned} \quad (3.2.36)$$

$$(FPDE) \equiv F_1(x, t) + F_2(x, t) = F_3(x, t) + F_4(x, t) + F_5(x, t)$$

donde $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 \geq 0$, $\alpha_3 > 0$, $\alpha_4 > 0$, y el operador fraccionario de orden distribuido $\mathbb{D}_t^\alpha$ es en el sentido de Caputo que viene definido como sigue:

$$\bullet \mathbb{D}_t^{\rho(\beta)} u(x, t) = \int_0^1 \rho(\beta) {}^C D_t^\beta u(x, t) d\beta \quad (3.2.37)$$

y donde ${}^C D_t^\alpha u(x, t)$ denota la derivada fraccionaria en el tiempo de Caputo:

$${}^C D_t^\beta u(x, t) := \begin{cases} \frac{d^n u(x, t)}{dx^n} & \beta = n \in \mathbb{N} \\ \frac{1}{\Gamma(n-\beta)} \int_0^t (x-\tau)^{n-\beta-1} \frac{\partial^n u(x, \tau)}{\partial \tau^n} d\tau & t > 0 \quad \beta \in (n-1, n] \\ n \in \mathbb{N} \quad n = \lceil \beta \rceil \end{cases} \quad (3.2.38)$$

Se detalla el algoritmo de Colocación *Wavelet* de Chelyshkov Frccionario (*Fractional Order Chelyshkov Wavelets Collocation Method*–FChWCM) que permite dar una solución numérica a la ecuación no lineal (FPDE).

1. Se busca una solución donde la expresión $\frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^2 \partial t}$ se pueda representar como una expansión en términos de las funciones *Wavelets* de Chelyshkov fraccionarias:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^2 \partial t} &\simeq \sum_{n=0}^{2^k-1} \sum_{m=0}^M \sum_{n^*=0}^{2^{k^*}-1} \sum_{m^*=0}^{M^*} c_{n,m,n^*,m^*} \psi_{n,m}^{T,\alpha}(x) \psi_{n^*,m^*}^{T,\alpha_1}(t) \\ \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^2 \partial t} &\simeq \underbrace{(\Psi^{T,\alpha}(x))^T}_{(1,2^k(M+1))} \cdot \underbrace{C \cdot \Psi^{T,\alpha_1}(t)}_{(2^{k^*}(M^*+1),1)} \end{aligned} \quad (3.2.39)$$

2. Cálculo de $\left(\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right)$.

Se realiza la integración fraccionaria de orden β la ecuación

$\frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^2 \partial t} = (\Psi^{T,\alpha}(x))^T \cdot C \cdot \Psi^{T,\alpha_1}(t)$ con respecto a la variable t :

$$\begin{aligned} \bullet J^{(\beta)} [\Psi^{T,\alpha}(x)] &= Q(x, \beta, \alpha) \quad \bullet J^{(\beta)} [\Psi^{T,\alpha_1}(t)] = Q(t, \beta, \alpha_1) \\ \int_0^t \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^2 \partial t} dt &= \int_0^t (\Psi^{T,\alpha}(x))^T \cdot C \cdot \Psi^{T,\alpha_1}(t) dt \\ \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} &= (\Psi^{T,\alpha}(x))^T \cdot C \cdot J^{(1)} [\Psi^{T,\alpha_1}(t)] + \underbrace{\left[(\Psi^{T,\alpha}(x))^T \cdot C \cdot J^{(1)} [\Psi^{T,\alpha_1}(t)] \right]_{x=0}}_{=0} \\ &\quad + \left(\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right)_{t=0} \end{aligned}$$

$$\bullet u(x, 0) = f_1(x) \Rightarrow \left(\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right)_{t=0} = \left(\frac{\partial^2 u(x, 0)}{\partial x^2} \right) = \left(\frac{\partial^2 f_1(x)}{\partial x^2} \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} &= (\Psi^{T, \alpha}(x))^T \cdot \underbrace{C \cdot J^{(1)}[\Psi^{T, \alpha_1}(t)]}_{Q(t, 1, \alpha_1)} + \left(\frac{\partial^2 f_1(x)}{\partial x^2} \right) \\ \bullet \left[\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} &= (\Psi^{T, \alpha}(x))^T \cdot C \cdot Q(t, 1, \alpha_1) + \left(\frac{\partial^2 f_1(x)}{\partial x^2} \right) \right] \quad (1) \end{aligned}$$

3. Cálculo de $\left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right)$.

Se integra la ecuación $\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$ con respecto a la variable x :

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} dx &= \int_0^x (\Psi^{T, \alpha}(x))^T \cdot C \cdot Q(t, 1, \alpha_1) dx + \int_0^x \left(\frac{\partial^2 f_1(x)}{\partial x^2} \right) dx \\ \bullet \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} &= [Q(x, 1, \alpha)]^T \cdot C \cdot Q(t, 1, \alpha_1) + \left(\frac{\partial f_1(x)}{\partial x} \right) - \left(\frac{\partial f_1(x)}{\partial x} \right)_{x=0} + \underbrace{\left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right)_{x=0}}. \end{aligned}$$

La función desconocida $\left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right)_{x=0}$ se aproxima integrando la expresión $\left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right)$ entre los valores de 0 y 1.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} dx &= \int_0^1 [Q(x, 1, \alpha)]^T \cdot C \cdot Q(t, 1, \alpha_1) dx \\ &+ \int_0^1 \left(\left(\frac{\partial f_1(x)}{\partial x} \right) - \left(\frac{\partial f_1(x)}{\partial x} \right)_{x=0} \right) dx + \underbrace{\int_0^1 \left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right)_{x=0} dx}_{\left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right)_{x=0}} \\ \bullet \left[\int_0^1 \left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right)_{x=0} dx &= \left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right)_{x=0} \right] \\ \bullet \left[\int_0^1 \left(\frac{\partial f_1(x)}{\partial x} \right)_{x=0} dx &= \left(\frac{\partial f_1(x)}{\partial x} \right)_{x=0} \right] \\ [u(x, t)]_0^1 &= \int_0^1 [Q(x, 1, \alpha)]^T \cdot C \cdot Q(t, 1, \alpha_1) dx + (f_1(1) - f_1(0)) \\ &- \left(\frac{\partial f_1(x)}{\partial x} \right)_{x=0} + \left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right)_{x=0} \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta las condiciones de contorno:

$$u(1, t) - u(0, t) =$$

$$\int_0^1 [Q(x, 1, \alpha)]^T \cdot C \cdot Q(t, 1, \alpha_1) dx + (f_1(1) - f_1(0)) - \left(\frac{\partial f_1(x)}{\partial x} \right)_{x=0} + \left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right)_{x=0}$$

$$f_3(t) - f_2(t) =$$

$$\int_0^1 [Q(x, 1, \alpha)]^T \cdot C \cdot Q(t, 1, \alpha_1) dx + (f_1(1) - f_1(0)) - \left(\frac{\partial f_1(x)}{\partial x} \right)_{x=0} + \underbrace{\left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right)_{x=0}}$$

Despejando, resulta

$$\bullet \underbrace{\left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right)_{x=0}} =$$

$$f_3(t) - f_2(t) - \left[\int_0^1 [Q(x, 1, \alpha)]^T \cdot C \cdot Q(t, 1, \alpha_1) dx \right] - (f_1(1) - f_1(0)) + \left(\frac{\partial f_1(x)}{\partial x} \right)_{x=0}$$

$$\bullet \boxed{\begin{aligned} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} &= [Q(x, 1, \alpha)]^T \cdot C \cdot Q(t, 1, \alpha_1) + \left(\frac{\partial f_1(x)}{\partial x} \right) - \left(\frac{\partial f_1(x)}{\partial x} \right)_{x=0} \\ &+ f_3(t) - f_2(t) - \left[\int_0^1 [Q(x, 1, \alpha)]^T \cdot C \cdot Q(t, 1, \alpha_1) dx \right] - (f_1(1) - f_1(0)) + \left(\frac{\partial f_1(x)}{\partial x} \right)_{x=0} \end{aligned}}$$

4. Cálculo de $\left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right)$.

A continuación, se realiza la integración fraccionaria de orden β la ecuación

$$\frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^2 \partial t} = \left(\Psi^{T, \alpha}(x) \right)^T \cdot C \cdot \Psi^{T, \alpha_1}(t) \text{ con respecto a la variable } x:$$

$$\int_0^x \int_0^x \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^2 \partial t} dx dx = \int_0^x \int_0^x \left(\Psi^{T, \alpha}(x) \right)^T \cdot C \cdot \Psi^{T, \alpha_1}(t) dx dx$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \simeq Q^T(x, 2, \alpha) \cdot C \cdot \Psi^{T, \alpha_1}(t) + \left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right)_{x=0} + x \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right)_{x=0}}$$

Se evalúa esta ecuación para $x = 1$ y se aplican las condiciones de contorno:

$$\bullet u(0, t) = f_2(t)$$

$$\bullet u(1, t) = f_2(t)$$

$$x = 1$$

$$\underbrace{\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}}_{\left(\frac{\partial f_3(t)}{\partial t} \right)} \simeq Q^T(1, 2, \alpha) \cdot C \cdot \Psi^{T, \alpha_1}(t) + \underbrace{\left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right)_{x=0}}_{\left(\frac{\partial f_2(t)}{\partial t} \right)} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right)_{x=0}}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right)_{x=0} \simeq -Q^T(1, 2, \alpha).C.\Psi^{T, \alpha_1}(t) + \left(\frac{\partial f_3(t)}{\partial t} \right) - \left(\frac{\partial f_2(t)}{\partial t} \right).$$

Se sustituye en la ecuación de la expresión $\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \simeq Q^T(x, 2, \alpha).C.\Psi^{T, \alpha_1}(t) + \left(\frac{\partial f_2(t)}{\partial t} \right) + x \left(-Q^T(1, 2, \alpha).C.\Psi^{T, \alpha_1}(t) + \left(\frac{\partial f_3(t)}{\partial t} \right) - \left(\frac{\partial f_2(t)}{\partial t} \right) \right)$$

$$\bullet \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \simeq Q^T(x, 2, \alpha).C.\Psi^{T, \alpha_1}(t) - x Q^T(1, 2, \alpha).C.\Psi^{T, \alpha_1}(t) + (1-x) \left(\frac{\partial f_2(t)}{\partial t} \right) + x \left(\frac{\partial f_3(t)}{\partial t} \right)$$

5. Cálculo de $u(x, t)$.

Se realiza la integración de la ecuación $\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$ con respecto a la variable t y se deduce:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \simeq Q^T(x, 2, \alpha).C.\Psi^{T, \alpha_1}(t) - x Q^T(1, 2, \alpha).C.\Psi^{T, \alpha_1}(t) + (1-x) \left(\frac{\partial f_2(t)}{\partial t} \right) + x \left(\frac{\partial f_3(t)}{\partial t} \right)$$

$$\int_0^t \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \simeq \int_0^t \left[Q^T(x, 2, \alpha).C.\Psi^{T, \alpha_1}(t) - x Q^T(1, 2, \alpha).C.\Psi^{T, \alpha_1}(t) + (1-x) \left(\frac{\partial f_2(t)}{\partial t} \right) + x \left(\frac{\partial f_3(t)}{\partial t} \right) \right] dt$$

$$u(x, t) \simeq Q^T(x, 2, \alpha).C.Q(t, 1, \alpha_1) - x [Q^T(1, 2, \alpha).C.Q(t, 1, \alpha_1)] + (1-x) (f_2(t) - f_2(0)) + x (f_3(t) - f_3(0)) + \underbrace{[u(x, t)]_{t=0}}_{f_1(x)}$$

$$\bullet u(x, 0) = f_1(x)$$

Se deduce la expresión aproximada de $u(x, t)$:

$$\bullet \quad u(x, t) = Q(x, 2, \alpha)^T.C.Q(t, 1, \alpha_1) - x [Q(1, 2, \alpha)]^T.C.Q(t, 1, \alpha_1) + (1-x) (f_2(t) - f_2(0)) + x (f_3(t) - f_3(0)) + f_1(x)$$

6. Cálculo de ${}^C D_t^\beta u(x, t)$.

Se realiza la derivada fraccionaria de Caputo de orden β con respecto a t en ambos lados de la ecuación de $u(x, t)$, se tiene:

$$\bullet \quad {}^C D_t^\beta u(x, t) = Q^T(x, 2, \alpha).C.Q(t, 1 - \beta, \alpha_1) - x Q^T(1, 2, \alpha).C.Q(t, 1 - \beta, \alpha_1) \\ + (1 - x) {}^C D_t^\beta [f_2(t)] + x {}^C D_t^\beta [f_3(t)]$$

7. Cálculo de ${}^C \mathbb{D}_t^{\rho(\beta)} u(x, t)$.

Se aproxima el término integral ${}^C \mathbb{D}_t^{\rho(\beta)} u(x, t) = \int_0^1 \rho(\beta) {}^C D_t^\beta u(x, t) d\beta$ mediante la integración numérica de Gauss–Legendre:

$$\bullet \quad \int_0^1 f(x) dx \approx \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n w_k f\left(\frac{1+x_k}{2}\right) \quad (\text{Integración Gauss – Legendre})$$

$$\bullet \quad {}^C D_t^\beta u(x, t) = Q^T(x, 2, \alpha).C.Q(t, 1 - \beta, \alpha_1) - x Q^T(1, 2, \alpha).C.Q(t, 1 - \beta, \alpha_1) \\ + (1 - x) {}^C D_t^\beta [f_2(t)] + x {}^C D_t^\beta [f_3(t)]$$

$$\mathbb{D}_t^{\rho(\beta)} u(x, t) = \int_0^1 \rho(\beta) {}^C D_t^\beta u(x, t) d\beta$$

$$\bullet \quad \mathbb{D}_t^{\rho(\beta)} u(x, t) = \int_0^1 \rho(\beta) [Q^T(x, 2, \alpha).C.Q(t, 1 - \beta, \alpha_1) \\ - x Q^T(1, 2, \alpha).C.Q(t, 1 - \beta, \alpha_1) + (1 - x) {}^C D_t^\beta [f_2(t)] + x {}^C D_t^\beta [f_3(t)]] d\beta$$

8. Ecuación FPDE

$$(\text{FPDE}) \equiv \underbrace{\alpha_1 u_t(x, t)}_{F_1(x,t)} + \underbrace{\alpha_2 \mathbb{D}_t^\beta u(x, t)}_{F_2(x,t)} = \underbrace{-\alpha_3 u_x(x, t)}_{F_3(x,t)} + \underbrace{\alpha_4 u_{xx}(x, t)}_{F_4(x,t)} + \underbrace{h(x, t)}_{F_5(x,t)}$$

$$u(x, 0) = f_1(x) \quad x \in [0, 1]$$

$$u(0, t) = f_2(t)$$

$$u(1, t) = f_3(t) \quad t \in [0, 1]$$

(3.2.40)

$$(\text{FPDE}) \equiv F_1(x, t) + F_2(x, t) = F_3(x, t) + F_4(x, t) + F_5(x, t)$$

$$\bullet \quad \mathbb{D}_t^{\rho(\beta)} u(x, t) = \int_0^1 \rho(\beta) {}^C D_t^\beta u(x, t) d\beta$$

Expresiones de la ecuación FPDE

$$F_1(x, t) = \alpha_1 u_t(x, t) \\ = \alpha_1 [Q^T(x, 2, \alpha).C.\Psi^{T,\alpha_1}(t) - x Q^T(1, 2, \alpha).C.\Psi^{T,\alpha_1}(t)]$$

$$+ (1-x) \left(\frac{\partial f_2(t)}{\partial t} \right) + x \left(\frac{\partial f_3(t)}{\partial t} \right) \Bigg]$$

$$F_2(x, t) = \alpha_2 \mathbb{D}_t^{\rho(\beta)} u(x, t) = \alpha_2 \int_0^1 \rho(\beta) {}^C D_t^\alpha u(x, t) d\beta$$

$$\begin{aligned} F_2(x, t) = \alpha_2 \mathbb{D}_t^\beta u(x, t) = \\ + \alpha_2 \int_0^1 \rho(\beta) \left[Q^T(x, 2, \alpha).C.Q(t, 1-\beta, \alpha_1) - x \left[Q^T(1, 2, \alpha).C.Q(t, 1-\beta, \alpha_1) \right] \right. \\ \left. + (1-x) {}^C D_t^\beta [f_2(t)] + x {}^C D_t^\beta [f_3(t)] \right] d\beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_3(x, t) = \alpha_3 u_x(x, t) \\ = \alpha_3 \left[Q^T(x, 1, \alpha).C.Q(t, 1, \alpha_1) + \left(\frac{\partial f_1(x)}{\partial x} \right) - \left(\frac{\partial f_1(x)}{\partial x} \right)_{x=0} + f_3(t) - f_2(t) \right. \\ \left. - \left[\int_0^1 Q^T(x, 1, \alpha).C.Q(t, 1, \alpha_1) dx \right] - \underbrace{(f_1(1) - f_1(0))}_{=0} + \left(\frac{\partial f_1(x)}{\partial x} \right)_{x=0} \right] \end{aligned}$$

$$F_4(x, t) = \alpha_4 u_{xx}(x, t) = \alpha_4 \left[\left(\Psi^{T,\alpha}(x) \right)^T .C.Q(t, 1, \alpha_1) + \left(\frac{\partial^2 f_1(x)}{\partial x^2} \right) \right]$$

$$F_5(x, t) = h(x, t).$$

9. Se aplica la integración numérica de Gauss–Legendre al término integral para aproximar su valor:

$$\begin{aligned} F_2(x, t) = \\ + \alpha_2 \int_0^1 \rho(\beta) \left[Q^T(x, 2, \alpha).C.Q(t, 1-\beta, \alpha_1) - x \left[Q^T(1, 2, \alpha).C.Q(t, 1-\beta, \alpha_1) \right] \right. \\ \left. + (1-x) {}^C D_t^\beta [f_2(t)] + x {}^C D_t^\beta [f_3(t)] \right] d\beta \\ F_2(x, t) = \alpha_2 \left[\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n w_k \rho \left(\frac{1+x_k}{2} \right) \left[Q^T(x, 2, \alpha).C.Q \left(t, 1 - \frac{1+x_k}{2}, \alpha_1 \right) \right. \right. \\ \left. \left. - x Q^T(1, 2, \alpha).C.Q \left(t, 1 - \frac{1+x_k}{2}, \alpha_1 \right) \right. \right. \\ \left. \left. + (1-x) {}^C D_t^{\frac{1+x_k}{2}} [f_2(t)] + x {}^C D_t^{\frac{1+x_k}{2}} [f_3(t)] \right] \right] \end{aligned} \quad (3.2.42)$$

donde x_k y w_k son los nodos y los pesos, respectivamente de la fórmula de Cuadratura de Gauss–Legendre.

10. *Método de colocación.* Creación de un sistema algebraico de ecuaciones.

el vector de coeficientes $C^T = C_{i,j}$, ($i, j = 1, 2, \dots, m^*$).

Se puede emplear como puntos de colocación los (a) ceros de los polinomios de Legendre desplazados o (b) los puntos compuestos de una malla.

a. Ceros de los polinomios de Legendre desplazados:

Se crea un sistema algebraico de ecuaciones con el *método de colocación* considerando como puntos de colocación los ceros de los polinomios de *Legendre desplazados* de orden m^* del intervalo $[A, B] = [0, T]$:

$$\begin{aligned}
 P_{m^*}(x) &\equiv \text{polinomio de Legendre de orden } m^* = 2^k (M + 1) \quad x \in [-1, 1] \\
 L_{m^*}(x) &\equiv \text{polinomio de Legendre desplazado de orden } m^* = 2^k (M + 1) \quad x \in [0, T] \\
 x \in [-1, 1] &\xrightarrow{x \rightarrow (2 \frac{x}{T} - 1)} x \in [0, T] \\
 L_{m^*}(x) &= P_{m^*}\left(2 \frac{x}{T} - 1\right) \\
 \text{ceros de } L_{m^*}(x) &= \{x_1, x_2, \dots, x_{m^*}\} \in [0, T] \\
 \text{ceros de } L_{m^*}(t) &= \{t_1, t_2, \dots, t_{m^*}\} \in [0, T]
 \end{aligned}$$

b. Malla de puntos compuestos ($x_{n,m}, t_{n^*,m^*}$).

Se crea un sistema algebraico de ecuaciones con el *método de colocación* considerando como puntos los definidos por:

$$\begin{aligned}
 x_{n,m} &= \frac{x_m + n - 1}{2^k - 1} \quad \begin{cases} n = 0, 1, \dots, 2^k - 1 \\ m = 0, 1, \dots, M \end{cases} \\
 t_{n^*,m^*} &= \frac{t_{m^*} + n^* - 1}{2^{k^*} - 1} \quad \begin{cases} n^* = 0, 1, \dots, 2^{k^*} - 1 \\ m^* = 0, 1, \dots, M^* \end{cases}
 \end{aligned}$$

11. Se resuelve el sistema no lineal de ecuaciones en $C_{i,j}$ ($i, j = 1, \dots, m^*$) con el método de *Newton–Raphson* o el método *Affine Covariant Newton*.
12. Se deduce la expresión aproximada de $u(x, t)$ de la ecuación FPDE:

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= Q(x, 2, \alpha)^T \cdot C \cdot Q(t, 1, \alpha_1) - x \left[[Q(1, 2, \alpha)]^T \cdot C \cdot Q(t, 1, \alpha_1) \right] \\
 &\quad + (1 - x) (f_2(t) - f_2(0)) + x(f_3(t) - f_3(0)) + f_1(x).
 \end{aligned}$$

3.2.5.2. Ecuaciones del Método Wavelet de Chelyshkov Fraccionario

Se indican las ecuaciones a emplear en el método FChWCM para la resolución del problema (FPDE) para la ecuación de Advección–Dispersión Móvil–Inmóvil de orden Distribuido Fraccionario en el Tiempo:

$$u_{xxt}(x, t) = \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^2 \partial t} \simeq \underbrace{(\Psi^{T,\alpha}(x))^T}_{(1, 2^k(M+1))} \cdot C \cdot \underbrace{\Psi^{T,\alpha_1}(t)}_{(2^{k^*}(M^*+1), 1)}$$

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = (\Psi^{T,\alpha}(x))^T \cdot C \cdot Q(t, 1, \alpha_1) + \left(\frac{\partial^2 f_1(x)}{\partial x^2} \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} &= [Q(x, 1, \alpha)]^T \cdot C \cdot Q(t, 1, \alpha_1) + \left(\frac{\partial f_1(x)}{\partial x} \right) - \left(\frac{\partial f_1(x)}{\partial x} \right)_{x=0} \\ &+ f_3(t) - f_2(t) - \left[\int_0^1 [Q(x, 1, \alpha)]^T \cdot C \cdot Q(t, 1, \alpha_1) dx \right] - (f_1(1) - f_1(0)) + \left(\frac{\partial f_1(x)}{\partial x} \right)_{x=0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} &\simeq Q^T(x, 2, \alpha) \cdot C \cdot \Psi^{T,\alpha_1}(t) - x Q^T(1, 2, \alpha) \cdot C \cdot \Psi^{T,\alpha_1}(t) \\ &+ (1-x) \left(\frac{\partial f_2(t)}{\partial t} \right) + x \left(\frac{\partial f_3(t)}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} &\simeq Q^T(x, 2, \alpha) \cdot C \cdot D_t(\Psi^{T,\alpha_1}(t)) - x Q^T(1, 2, \alpha) \cdot C \cdot D_t(\Psi^{T,\alpha_1}(t)) \\ &+ (1-x) \left(\frac{\partial^2 f_2(t)}{\partial t^2} \right) + x \left(\frac{\partial^2 f_3(t)}{\partial t^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(x, t) &= Q(x, 2, \alpha)^T \cdot C \cdot Q(t, 1, \alpha_1) - x [Q(1, 2, \alpha)]^T \cdot C \cdot Q(t, 1, \alpha_1) \\ &+ (1-x) (f_2(t) - f_2(0)) + x (f_3(t) - f_3(0)) + f_1(x) \end{aligned}$$

Derivada fraccionaria de Caputo de orden β

$$\begin{aligned} {}^C D_t^\beta u(x, t) &= Q^T(x, 2, \alpha) \cdot C \cdot Q(t, 1 - \beta, \alpha_1) - x Q^T(1, 2, \alpha) \cdot C \cdot Q(t, 1 - \beta, \alpha_1) \\ &+ (1-x) {}^C D_t^\beta [f_2(t)] + x {}^C D_t^\beta [f_3(t)] \end{aligned}$$

Operador fraccionario de orden distribuido $\mathbb{D}_t^\alpha$ en el sentido de Caputo:

$$\bullet \mathbb{D}_t^{\rho(\beta)} u(x, t) = \int_0^1 \rho(\beta) {}^C D_t^\beta u(x, t) d\beta$$

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_t^{\rho(\beta)} u(x, t) &= \int_0^1 \rho(\beta) [Q^T(x, 2, \alpha) \cdot C \cdot Q(t, 1 - \beta, \alpha_1) \\ &- x Q^T(1, 2, \alpha) \cdot C \cdot Q(t, 1 - \beta, \alpha_1) + (1-x) {}^C D_t^\beta [f_2(t)] + x {}^C D_t^\beta [f_3(t)]] d\beta \end{aligned}$$

3.2.6. Errores en el Método Wavelet de Chelyshkov Fraccionario (FChWM)

La precisión y la eficiencia del método *Wavelet* de Chelyshkov de orden fraccionario (FChWCM) se basa en la determinación de la exactitud de los resultados numéricos obtenidos, y se miden en términos de las normas de errores definidos a continuación. Se desea medir el error absoluto (L_∞), el error L_2 y el error cuadrático medio *RMS*.

Se supone conocida la solución exacta $u(x, t)$ de la FPDE, así como la solución aproximada proporcionada por el método FChWCM y se denota por $u(x_i, t_j)$ (FChWCM):

$$\begin{cases} \text{solución exacta } u(x, t) \equiv u(x_i, t_j)^{\text{exacto}} \equiv u(x, t) \\ \text{solución aproximada de } u(x, t) \equiv u(x_i, t_j)^{\text{numérico}} = u(x, t) \text{ (FChWCM)} \end{cases}$$

y con los puntos de la cuadrícula:

$$(x_i, t_j) \equiv \begin{cases} h = \frac{B-A}{N} & [A, B] = [0, T] \\ x \in [0, T] & t \in [0, T] \\ x_i = x_0 + h i & i = 1, \dots, N \\ t_j = t_0 + h j & j = 1, \dots, N \end{cases}.$$

Se definen las normas de los errores siguientes:

1. *Error L_∞ absoluto estimado e_a :*

$$\begin{aligned} \text{error-}L_\infty &= \|u(x_i, t_j) - u(x_i, t_j) \text{ (FChWCM)}\|_\infty \\ \text{error-}L_\infty &= \text{Máx}_{\substack{0 \leq i < N \\ 0 \leq j < N}} |u(x_i, t_j) - u(x_i, t_j) \text{ (FChWCM)}| \end{aligned} \quad (3.2.43)$$

donde N es el número total de puntos t_j y x_i de la cuadrícula.

2. *Error L_2 :*

$$\begin{aligned} \text{error-}L_2 &= \|u(x_i, t_j) - u(x_i, t_j) \text{ (M)}\|_2 \\ \text{error-}L_2 &= \left(\sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} |u(x_i, t_j) - u(x_i, t_j) \text{ (FChWCM)}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (3.2.44)$$

3. *Error cuadrático medio RMS:*

$$\text{error-RMS} = \frac{1}{N \times N} \left(\sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} |u(x_i, t_j) - u(x_i, t_j) \text{ (FChWCM)}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.2.45)$$

3.2.7. Ejemplo

■ Ejemplo 3.2.1.

Sea ecuación de Advección–Dispersión Móvil–Inmóvil de orden Distribuido Fraccionario en el tiempo con las condiciones iniciales y de contorno dadas:

$$(FPDE) \equiv \begin{cases} u_t(x, t) + \int_0^1 \Gamma(3.5 - \beta) {}^C D_t^\beta u(x, t) d\beta = -u_x(x, t) + u_{xx}(x, t) + h_1(x, t) + h_2(x, t) \\ u(x, 0) = f_1(x) = 0 & x \in [0, 1] \\ u(0, t) = f_2(t) = 0 \quad u(1, t) = f_3(t) = 0 & t \in [0, 1] \end{cases}$$

$$x \in (0, 1) \quad t \in [0, T]$$

$$h_1(x, t) = t^{5/2} ((x-1)^2) + 2 t^{5/2} (x-1)x + \frac{5}{2} t^{\frac{3}{2}} x (x-1)^2$$

$$h_2(x, t) = \frac{1}{8 \log(t)} \left(15 \sqrt{\pi} t^{\frac{3}{2}} (x-1)^2 x (t-1) \right) - 2 t^{5/2} (3x-2).$$

La solución exacta viene dada por la expresión:

$$u(x, t) = t^{\frac{5}{2}} (x-1)^2 x.$$

(a) Represéntese la gráfica de $u(x, t)$ para $x \in [0, 1]$ y $t \in [0, 1]$.

(b) (i) Hállese la derivada fraccionaria de Caputo ${}^C D_t^\beta u(x, t)$ con $0 < \alpha < 1$ y tomando $n = 1$.

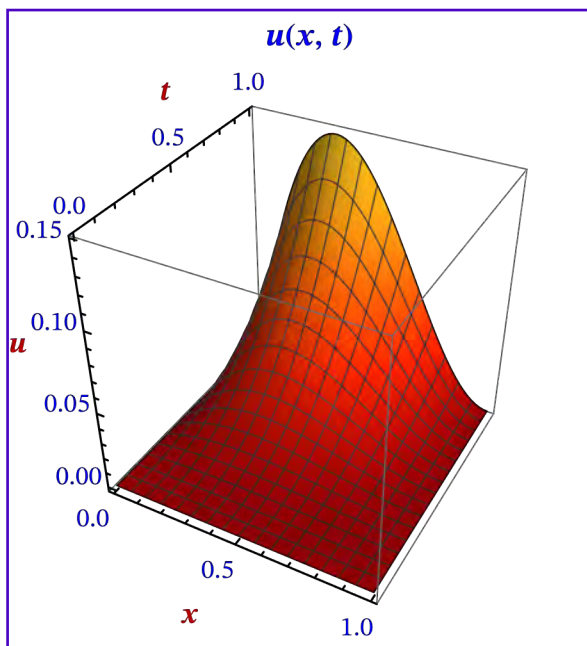
(ii) Hállese el operador fraccionario de orden distribuido $\mathbb{D}_t^\alpha$ en el sentido de Caputo definido por:

$${}^C \mathbb{D}_t^{\rho(\beta)} u(x, t) = \int_0^1 \rho(\beta) {}^C D_t^\beta u(x, t) d\beta$$

$$\int_0^1 \Gamma(3.5 - \beta) {}^C D_t^\beta u(x, t) d\beta.$$

(c) Compuébese que la solución $u(x, t)$ satisface el problema (FPDE).

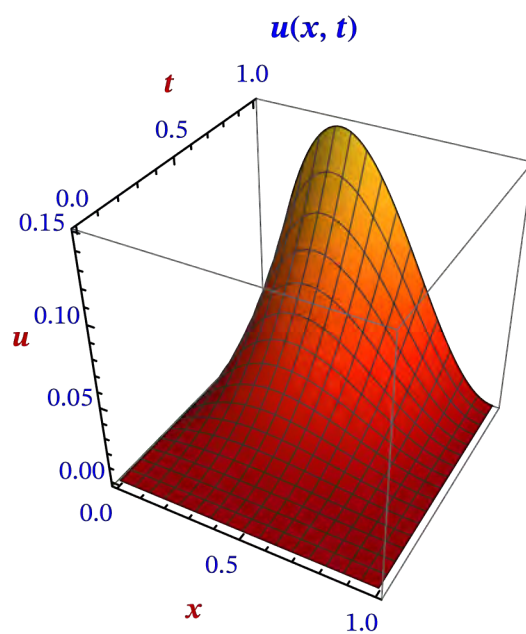
Indicación:



SOLUCIÓN

(a)

Out[•]=



(b)

Out[•]=

$$\{u(x, t) = , t^{5/2} (x - 1)^2 x\}$$

Out[*]=

$$\left\{ {}^C D_t^\beta u(x, t) = , \frac{15 \sqrt{\pi} t^{\frac{5}{2}-\beta} (x-1)^2 x}{8 \Gamma\left(\frac{7}{2} - \beta\right)} \text{ if } \operatorname{Re}(\beta) < 1 \wedge \operatorname{Re}(t) > 0 \wedge \operatorname{Im}(t) = 0 \right\}$$

Out[*]=

$$\left\{ \int_0^1 \Gamma(3.5 - \beta) {}^C D_t^\beta u(x, t) d\beta = , \frac{15 \sqrt{\pi} (t-1) t^{3/2} (x-1)^2 x}{8 \log(t)} \text{ if } \operatorname{Re}(t) > 0 \wedge \operatorname{Im}(t) = 0 \right\}$$

Out[*]=

$$\left\{ \int_0^1 \Gamma(3.5 - \beta) {}^C D_t^\beta u(x, t) d\beta = , \frac{15 \sqrt{\pi} (t-1) t^{3/2} (x-1)^2 x}{8 \log(t)} \text{ if } \operatorname{Re}(t) > 0 \wedge \operatorname{Im}(t) = 0 \right\}$$

(c)

Out[*]=

$$\left(\begin{array}{l} u(x, t) = t^{5/2} (x-1)^2 x \\ F11(x, t) = \frac{5 t^{3/2} (x-1)^2 x (3 \sqrt{\pi} t + 4 \log(t) - 3 \sqrt{\pi})}{8 \log(t)} \text{ if } \operatorname{Re}(t) > 0 \wedge \operatorname{Im}(t) = 0 \\ F12(x, t) = \frac{5 t^{3/2} (x-1)^2 x (3 \sqrt{\pi} t + 4 \log(t) - 3 \sqrt{\pi})}{8 \log(t)} \end{array} \right)$$

Out[*]=

$$\left(\begin{array}{l} (u(x, 0) = 0) \\ \left(\begin{array}{l} u(0, t) = 0 \\ u(1, t) = 0 \end{array} \right) \end{array} \right)$$

Out[•]//TableForm=

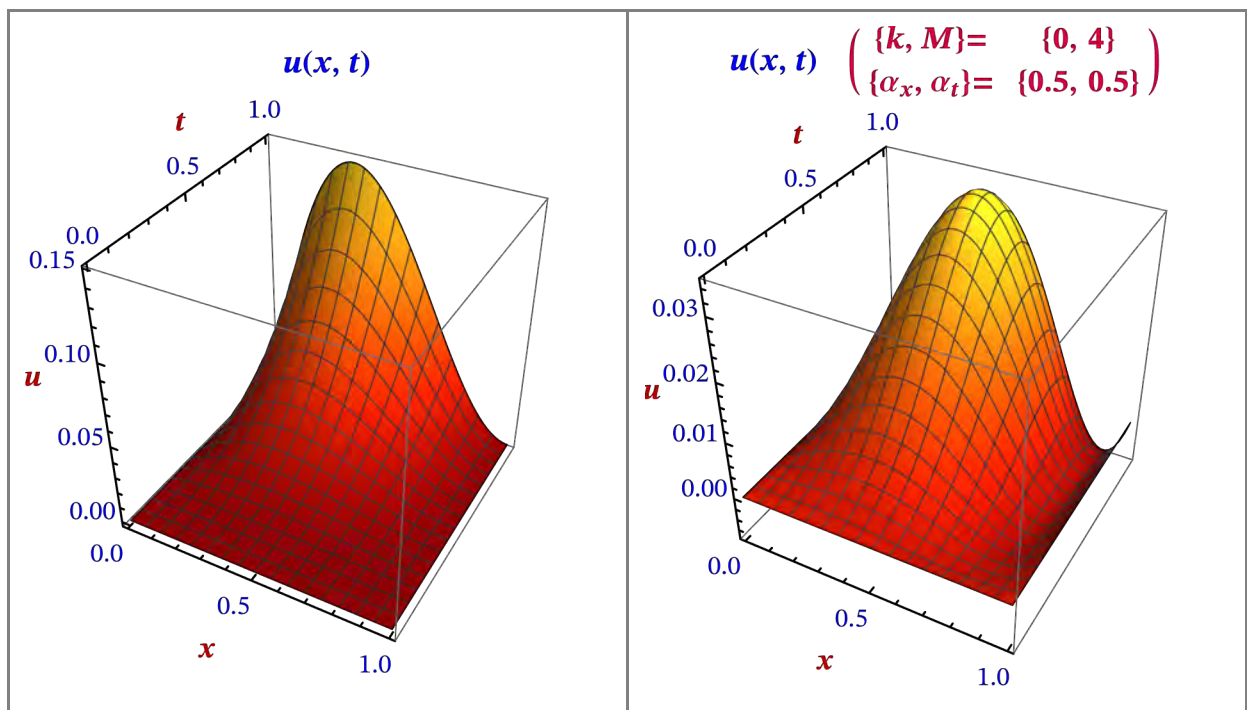
(x, t)	$F11(x, t)$	$F12(x, t)$
(0.1 0.1)	0.00973088	0.00973088
(0.1 0.3)	0.0589914	0.0589914
(0.1 0.5)	0.140248	0.140248
(0.1 0.7)	0.251201	0.251201
(0.1 0.9)	0.391043	0.391043
(0.3 0.1)	0.0176597	0.0176597
(0.3 0.3)	0.107058	0.107058
(0.3 0.5)	0.254524	0.254524
(0.3 0.7)	0.455883	0.455883
(0.3 0.9)	0.709671	0.709671
(0.5 0.1)	0.0150168	0.0150168
(0.5 0.3)	0.0910361	0.0910361
(0.5 0.5)	0.216432	0.216432
(0.5 0.7)	0.387655	0.387655
(0.5 0.9)	0.603462	0.603462
(0.7 0.1)	0.00756846	0.00756846
(0.7 0.3)	0.0458822	0.0458822
(0.7 0.5)	0.109082	0.109082
(0.7 0.7)	0.195378	0.195378
(0.7 0.9)	0.304145	0.304145
(0.9 0.1)	0.00108121	0.00108121
(0.9 0.3)	0.0065546	0.0065546
(0.9 0.5)	0.0155831	0.0155831
(0.9 0.7)	0.0279112	0.0279112
(0.9 0.9)	0.0434493	0.0434493

3.2.8. Problemas

■ Problema 3.2.1.

Ecuación de Advección–Dispersión Móvil–Inmóvil de orden Distribuido Fraccionario en el tiempo:

$$(a) \quad \left(\begin{array}{rcl} [A, B] = & \{0, 1\} \\ T = & 1 \\ \{k, M\} = & \{0, 4\} \\ m^* = 2^k (M + 1) = & 5 \\ \{\alpha_x, \alpha_t\} = & \{0.5, 0.5\} \end{array} \right).$$



SOLUCIÓN

(a)

Out[*]=

$$\left(\begin{array}{rcl} [A, B] = & \{0, 1\} \\ T = & 1 \\ \{k, M\} = & \{0, 4\} \\ m^* = 2^k (M + 1) = & 5 \\ \{\alpha_x, \alpha_t\} = & \{0.5, 0.5\} \end{array} \right)$$

Método de Colocación *Wavelet* de Chelyshkov Fraccionario (FChWCM).
Ecuación de Advección–Dispersión Móvil–Inmóvil de orden Distribuido
Fraccionario en el tiempo.

$$\begin{aligned}
 \text{(FPDE)} \equiv & \begin{cases} \underbrace{\alpha_1 u_t(x, t)}_{F_1(x,t)} + \underbrace{\alpha_2 \int_0^1 \rho(\beta) {}^C D_t^\beta u(x, t) d\beta}_{F_2(x,t)} = & x \in (0, 1) \\ \underbrace{-\alpha_3 u_x(x, t)}_{F_3(x,t)} + \underbrace{\alpha_4 u_{xx}(x, t)}_{F_4(x,t)} + \underbrace{h(x, t)}_{F_5(x,t)} & \\ u(x, 0) = f_1(x) & x \in [0, 1] \\ u(0, t) = f_2(t) \quad u(1, t) = f_3(t) & t > 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\text{(FPDE)} \equiv \begin{pmatrix} \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\} = & \{1, 1, -1, 1\} \\ \rho(\beta) = & \Gamma(3.5 - \beta) \\ (u(x, 0) = 0) & x \in [0, 1] \\ (u(0, t) = 0 \quad u(1, t) = 0) & t \in [0, 1] \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} [A, B] = & [0, 1] & \text{(intervalo de } x \text{ y } t) \\ T = & 1 & \text{(ancho intervalo)} \\ \{k, M\} = & \{0, 4\} & \text{(resolución,} \\ & & \text{máx. grado polinomio)} \\ 2^k = & 1 & \text{(nº subintervalos)} \\ m^* = 2^k (M + 1) = & 5 & \text{nº de Wavelets} \\ \{\alpha_x, \alpha_t\} = & \{0.5, 0.5\} & \text{orden fraccionario} \end{pmatrix}$$

(i) Fórmula de la Cuadratura de Gauss–Legendre:

$$\bullet \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{x+1}{2}\right) dx \approx \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n w_k f\left(\frac{1+x_k}{2}\right).$$

Raíces y pesos en el intervalo $[-1, 1]$ para $n = 10$

x_k (G–L)	w_k
–0.973907	0.0666713
–0.865063	0.149451
–0.67941	0.219086
–0.433395	0.269267
–0.148874	0.295524
0.148874	0.295524
0.433395	0.269267
0.67941	0.219086
0.865063	0.149451
0.973907	0.0666713

(a.1) Matriz con los polinomios de Chelyshkov $\Phi(x)$.

$$\Phi(x) = C_{M,n}(x) = \begin{pmatrix} C_{4,0}(x) \\ C_{4,1}(x) \\ C_{4,2}(x) \\ C_{4,3}(x) \\ C_{4,4}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 126x^4 - 280x^3 + 210x^2 - 60x + 5 \\ -84x^4 + 168x^3 - 105x^2 + 20x \\ 36x^4 - 56x^3 + 21x^2 \\ 8x^3 - 9x^4 \\ x^4 \end{pmatrix}$$

(a.2) Matrices con las Wavelets de Chelyshkov fraccionarias $\Psi^{T,\alpha_1}(x)$, $\Psi^{T,\alpha_2}(t)$

$$\Psi^{T,\alpha}(x) =$$

$$\left(\begin{array}{l} \psi_{0,0}^{1,0.5}(x) = \begin{cases} -60.(-2.1x^2 + 4.66667x^{1.5} - 3.5x^1 + x^{0.5} - 0.0833333) & 0. \leq x < 1. \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{0,1}^{1,0.5}(x) = \begin{cases} \sqrt{3}(-84x^2 + 168x^{1.5} - 105x^1 + 20x^{0.5}) & 0. \leq x < 1. \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{0,2}^{1,0.5}(x) = \begin{cases} \sqrt{5}(36x^2 - 56x^{1.5} + 21x^1) & 0. \leq x < 1. \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{0,3}^{1,0.5}(x) = \begin{cases} \sqrt{7}(8x^{1.5} - 9x^2) & 0. \leq x < 1. \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{0,4}^{1,0.5}(x) = \begin{cases} 3x^2 & 0. \leq x < 1. \\ 0 & \text{True} \end{cases} \end{array} \right)$$

$$\Psi^{T,\alpha_x}(x) = \begin{pmatrix} \begin{cases} -60.(-2.1 x^{2\cdot} + 4.66667 x^{1.5} - 3.5 x^{1\cdot} + x^{0.5} - 0.0833333) & 0. \leq x < 1. \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{3}(-84 x^{2\cdot} + 168 x^{1.5} - 105 x^{1\cdot} + 20 x^{0.5}) & 0. \leq x < 1. \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{5}(36 x^{2\cdot} - 56 x^{1.5} + 21 x^{1\cdot}) & 0. \leq x < 1. \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{7}(8 x^{1.5} - 9 x^{2\cdot}) & 0. \leq x < 1. \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \begin{cases} 3 x^{2\cdot} & 0. \leq x < 1. \\ 0 & \text{True} \end{cases} \end{pmatrix}$$

$$\Psi^{T,\alpha_t}(t) = \begin{pmatrix} \begin{cases} -60.(-2.1 t^{2\cdot} + 4.66667 t^{1.5} - 3.5 t^{1\cdot} + t^{0.5} - 0.0833333) & 0. \leq t < 1. \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{3}(-84 t^{2\cdot} + 168 t^{1.5} - 105 t^{1\cdot} + 20 t^{0.5}) & 0. \leq t < 1. \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{5}(36 t^{2\cdot} - 56 t^{1.5} + 21 t^{1\cdot}) & 0. \leq t < 1. \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{7}(8 t^{1.5} - 9 t^{2\cdot}) & 0. \leq t < 1. \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \begin{cases} 3 t^{2\cdot} & 0. \leq t < 1. \\ 0 & \text{True} \end{cases} \end{pmatrix}$$

(b.1) Matrices integrales fraccionarias de $\Psi^{T,\alpha}$.

Operador integral fraccionario de Riemann–Liouville.

$$\begin{aligned}
 (J^{(1)}[\Psi^{T, \alpha_x}(x)]): & \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 42. x^3 - 112. x^{2.5} + 105. x^2 - 40. x^{1.5} + 5. x^1 \\ 42. \left(\frac{1}{x}\right)^3 x^3 - 112. \left(\frac{1}{x}\right)^{2.5} x^{2.5} + 105. \left(\frac{1}{x}\right)^2 x^2 - 40. \left(\frac{1}{x}\right)^{1.5} x^{1.5} + 5. \end{array} \right. \\
 & \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ -48.4974 x^3 + 116.394 x^{2.5} - 90.9327 x^2 + 23.094 x^{1.5} \\ -48.4974 \left(\frac{1}{x}\right)^3 x^3 + 116.394 \left(\frac{1}{x}\right)^{2.5} x^{2.5} - 90.9327 \left(\frac{1}{x}\right)^2 x^2 + 23.094 \left(\frac{1}{x}\right)^{1.5} x^{1.5} \end{array} \right. \\
 & \left\{ \begin{array}{ll} 0 & x \leq 0 \\ 26.8328 x^3 - 50.0879 x^{2.5} + 23.4787 x^2 & 0. \leq x \leq 1. \\ 26.8328 \left(\frac{1}{x}\right)^3 x^3 - 50.0879 \left(\frac{1}{x}\right)^{2.5} x^{2.5} + 23.4787 \left(\frac{1}{x}\right)^2 x^2 & \text{True} \end{array} \right. \\
 & \left\{ \begin{array}{ll} 0 & x \leq 0 \\ 8.4664 x^{2.5} - 7.93725 x^3 & 0. \leq x \leq 1. \\ 8.4664 \left(\frac{1}{x}\right)^{2.5} x^{2.5} - 7.93725 \left(\frac{1}{x}\right)^3 x^3 & \text{True} \end{array} \right. \\
 & \left\{ \begin{array}{ll} 1. x^3 & 0 < x \leq 1. \\ 1. \left(\frac{1}{x}\right)^3 x^3 & x > 1. \end{array} \right. \\
 \\
 J^{(2)}[\Psi^{T, \alpha_x}(x)]: & \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 10.5 x^4 - 32. x^{3.5} + 35. x^3 - 16. x^{2.5} + 2.5 x^2 \\ 10.5 I_{\frac{1}{x}}(3., 2) x^4 - 32. I_{\frac{1}{x}}(2.5, 2) x^{3.5} + \\ 35. I_{\frac{1}{x}}(2., 2) x^3 - 16. I_{\frac{1}{x}}(1.5, 2) x^{2.5} + 2.5 x^2 - 2.5 (x - 1.)^2. \end{array} \right. \\
 & \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ -12.1244 x^4 + 33.2554 x^{3.5} - 30.3109 x^3 + 9.2376 x^{2.5} \\ -12.1244 I_{\frac{1}{x}}(3., 2) x^4 + 33.2554 I_{\frac{1}{x}}(2.5, 2) x^{3.5} - \\ 30.3109 I_{\frac{1}{x}}(2., 2) x^3 + 9.2376 I_{\frac{1}{x}}(1.5, 2) x^{2.5} \end{array} \right. \\
 & \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 6.7082 x^4 - 14.3108 x^{3.5} + 7.82624 x^3 \\ 6.7082 I_{\frac{1}{x}}(3., 2) x^4 - 14.3108 I_{\frac{1}{x}}(2.5, 2) x^{3.5} + 7.82624 I_{\frac{1}{x}}(2., 2) x^3 \end{array} \right. \\
 & \left\{ \begin{array}{ll} 0 & x \leq 0 \\ 2.41897 x^{3.5} - 1.98431 x^4 & 0. \leq x \leq 1. \\ 2.41897 x^{3.5} I_{\frac{1}{x}}(2.5, 2) - 1.98431 x^4 I_{\frac{1}{x}}(3., 2) & \text{True} \end{array} \right. \\
 & \left\{ \begin{array}{ll} 0.25 x^4 & 0 < x \leq 1. \\ 0.25 x^4 I_{\frac{1}{x}}(3., 2) & x > 1. \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

$$J^{(1)}[\Psi^{T, \alpha_t}(t)]: \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{ll} 0 & t \leq 0 \\ 42. t^3 - 112. t^{2.5} + 105. t^2 - 40. t^{1.5} + 5. t^1 & 0. \leq t \leq 1. \\ 42. \left(\frac{1}{t}\right)^3. t^3 - 112. \left(\frac{1}{t}\right)^{2.5} t^{2.5} + 105. \left(\frac{1}{t}\right)^2. t^2 - 40. \left(\frac{1}{t}\right)^{1.5} t^{1.5} + 5. & \text{True} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{ll} 0 & t \leq 0 \\ -48.4974 t^3 + 116.394 t^{2.5} - 90.9327 t^2 + 23.094 t^{1.5} & 0. \leq t \leq 1. \\ -48.4974 \left(\frac{1}{t}\right)^3. t^3 + 116.394 \left(\frac{1}{t}\right)^{2.5} t^{2.5} - 90.9327 \left(\frac{1}{t}\right)^2. t^2 + 23.094 \left(\frac{1}{t}\right)^{1.5} t^{1.5} & \text{True} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{ll} 0 & t \leq 0 \\ 26.8328 t^3 - 50.0879 t^{2.5} + 23.4787 t^2 & 0. \leq t \leq 1. \\ 26.8328 \left(\frac{1}{t}\right)^3. t^3 - 50.0879 \left(\frac{1}{t}\right)^{2.5} t^{2.5} + 23.4787 \left(\frac{1}{t}\right)^2. t^2 & \text{True} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{ll} 0 & t \leq 0 \\ 8.4664 t^{2.5} - 7.93725 t^3 & 0. \leq t \leq 1. \\ 8.4664 \left(\frac{1}{t}\right)^{2.5} t^{2.5} - 7.93725 \left(\frac{1}{t}\right)^3. t^3 & \text{True} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{ll} 1. t^3 & 0 < t \leq 1. \\ 1. \left(\frac{1}{t}\right)^3. t^3 & t > 1. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$J^{(1-\beta)} [\Psi^{T, \alpha_t}(t)]: \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ t^{-\beta} \left(\frac{252 \cdot t^3}{\Gamma(4, -\beta)} - \frac{372.215 \cdot t^{2.5}}{\Gamma(3.5, -\beta)} + \frac{210 \cdot t^2}{\Gamma(3, -\beta)} - \frac{53.1736 \cdot t^{1.5}}{\Gamma(2.5, -\beta)} + \frac{5 \cdot t^1}{\Gamma(2, -\beta)} \right) \\ t^{-\beta} \left(\frac{252 \cdot I_{\frac{t}{t}}(3, 1-\beta) \cdot t^3}{\Gamma(4, -\beta)} - \frac{372.215 \cdot I_{\frac{t}{t}}(2.5, 1-\beta) \cdot t^{2.5}}{\Gamma(3.5, -\beta)} + \right. \\ \left. \frac{210 \cdot I_{\frac{t}{t}}(2, 1-\beta) \cdot t^2}{\Gamma(3, -\beta)} - \frac{53.1736 \cdot I_{\frac{t}{t}}(1.5, 1-\beta) \cdot t^{1.5}}{\Gamma(2.5, -\beta)} + \frac{(5 \cdot 5 \cdot (\frac{t-1}{t})^{1, -1, \beta}) \cdot t^1}{\Gamma(2, -\beta)} \right) \\ 0 \\ t^{-\beta} \left(-\frac{290.985 \cdot t^3}{\Gamma(4, -\beta)} + \frac{386.817 \cdot t^{2.5}}{\Gamma(3.5, -\beta)} - \frac{181.865 \cdot t^2}{\Gamma(3, -\beta)} + \frac{30.6998 \cdot t^{1.5}}{\Gamma(2.5, -\beta)} \right) \\ t^{-\beta} \left(-\frac{290.985 \cdot I_{\frac{t}{t}}(3, 1-\beta) \cdot t^3}{\Gamma(4, -\beta)} + \right. \\ \left. \frac{386.817 \cdot I_{\frac{t}{t}}(2.5, 1-\beta) \cdot t^{2.5}}{\Gamma(3.5, -\beta)} - \frac{181.865 \cdot I_{\frac{t}{t}}(2, 1-\beta) \cdot t^2}{\Gamma(3, -\beta)} + \frac{30.6998 \cdot I_{\frac{t}{t}}(1.5, 1-\beta) \cdot t^{1.5}}{\Gamma(2.5, -\beta)} \right) \\ 0 \\ t^{-\beta} \left(\frac{160.997 \cdot t^3}{\Gamma(4, -\beta)} - \frac{166.46 \cdot t^{2.5}}{\Gamma(3.5, -\beta)} + \frac{46.9574 \cdot t^2}{\Gamma(3, -\beta)} \right) \\ t^{-\beta} \left(\frac{160.997 \cdot I_{\frac{t}{t}}(3, 1-\beta) \cdot t^3}{\Gamma(4, -\beta)} - \frac{166.46 \cdot I_{\frac{t}{t}}(2.5, 1-\beta) \cdot t^{2.5}}{\Gamma(3.5, -\beta)} + \frac{46.9574 \cdot I_{\frac{t}{t}}(2, 1-\beta) \cdot t^2}{\Gamma(3, -\beta)} \right) \\ \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ t^{-\beta} \left(\frac{28.1368 \cdot t^{2.5}}{\Gamma(3.5, -\beta)} - \frac{47.6235 \cdot t^3}{\Gamma(4, -\beta)} \right) \\ t^{-\beta} \left(\frac{28.1368 \cdot t^{2.5} \cdot I_{\frac{t}{t}}(2.5, 1-\beta)}{\Gamma(3.5, -\beta)} - \frac{47.6235 \cdot t^3 \cdot I_{\frac{t}{t}}(3, 1-\beta)}{\Gamma(4, -\beta)} \right) \end{array} \right. \begin{array}{l} t \leq 0 \\ 0. \leq t \leq \\ \text{True} \end{array} \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{6 \cdot t^{3, -1, \beta}}{\Gamma(4, -\beta)} \\ \frac{6 \cdot t^{3, -1, \beta} \cdot I_{\frac{t}{t}}(3, 1-\beta)}{\Gamma(4, -\beta)} \end{array} \right. \begin{array}{l} 0 < t \leq 1. \\ t > 1. \end{array} \end{array} \right.$$

(b.2) Matriz de coeficientes:

$$C = (C_{i,j}) = \begin{pmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} & C_{1,3} & C_{1,4} & C_{1,5} \\ C_{2,1} & C_{2,2} & C_{2,3} & C_{2,4} & C_{2,5} \\ C_{3,1} & C_{3,2} & C_{3,3} & C_{3,4} & C_{3,5} \\ C_{4,1} & C_{4,2} & C_{4,3} & C_{4,4} & C_{4,5} \\ C_{5,1} & C_{5,2} & C_{5,3} & C_{5,4} & C_{5,5} \end{pmatrix}$$

(c) Método de Colocación.

- Los puntos de colocación compuestos son las raíces del polinomio Legendre desplazado.

- Polinomio de Legendre desplazado en $[0, T]$ de grado $m^* = 25$:

$$L_{m^*}(x) = 126\,410\,606\,437\,752\,t^{25} - 1\,580\,132\,580\,471\,900\,t^{24} + 9\,287\,309\,860\,732\,800\,t^{23} - 34\,117\,964\,696\,719\,800\,t^{22} + 87\,835\,611\,240\,491\,400\,t^{21} - 168\,415\,237\,204\,594\,380\,t^{20} + 249\,504\,055\,117\,917\,600\,t^{19} - 292\,438\,194\,472\,624\,200\,t^{18} + 275\,435\,973\,863\,750\,700\,t^{17} - 210\,584\,646\,684\,190\,350\,t^{16} + 131\,486\,998\,905\,250\,560\,t^{15} - 67\,237\,669\,894\,730\,400\,t^{14} + 28\,159\,366\,024\,288\,800\,t^{13} - 9\,633\,467\,324\,098\,800\,t^{12} + 2\,678\,029\,526\,390\,400\,t^{11} - 600\,076\,986\,468\,960\,t^{10} + 107\,156\,604\,726\,600\,t^9 - 15\,016\,756\,025\,700\,t^8 + 1\,617\,966\,979\,200\,t^7 - 130\,395\,365\,100\,t^6 + 7\,571\,343\,780\,t^5 - 300\,450\,150\,t^4 + 7\,534\,800\,t^3 - 105\,300\,t^2 + 650\,t - 1 \quad x \in [0, T]$$

- Ceros de $L_{m^*}(x)$: $x_k, t_k \in [0, T] \quad (k = 1, 2, \dots, m^*)$

$$x_k = \begin{pmatrix} x_1 & 0.00222152 \\ x_2 & 0.011668 \\ x_3 & 0.0285127 \\ x_4 & 0.052504 \\ x_5 & 0.0832787 \\ x_6 & 0.12037 \\ x_7 & 0.163217 \\ x_8 & 0.211169 \\ x_9 & 0.263499 \\ x_{10} & 0.319414 \\ x_{11} & 0.378067 \\ x_{12} & 0.438568 \\ x_{13} & 0.5 \\ x_{14} & 0.561432 \\ x_{15} & 0.621933 \\ x_{16} & 0.680586 \\ x_{17} & 0.736501 \\ x_{18} & 0.788831 \\ x_{19} & 0.836783 \\ x_{20} & 0.87963 \\ x_{21} & 0.916721 \\ x_{22} & 0.947496 \\ x_{23} & 0.971487 \\ x_{24} & 0.988332 \\ x_{25} & 0.997778 \end{pmatrix} \quad t_k = \begin{pmatrix} t_1 & 0.00222152 \\ t_2 & 0.011668 \\ t_3 & 0.0285127 \\ t_4 & 0.052504 \\ t_5 & 0.0832787 \\ t_6 & 0.12037 \\ t_7 & 0.163217 \\ t_8 & 0.211169 \\ t_9 & 0.263499 \\ t_{10} & 0.319414 \\ t_{11} & 0.378067 \\ t_{12} & 0.438568 \\ t_{13} & 0.5 \\ t_{14} & 0.561432 \\ t_{15} & 0.621933 \\ t_{16} & 0.680586 \\ t_{17} & 0.736501 \\ t_{18} & 0.788831 \\ t_{19} & 0.836783 \\ t_{20} & 0.87963 \\ t_{21} & 0.916721 \\ t_{22} & 0.947496 \\ t_{23} & 0.971487 \\ t_{24} & 0.988332 \\ t_{25} & 0.997778 \end{pmatrix}$$

(d) Resolución del sistema de ecuaciones en los coeficientes $C_{i,j}$ ($i, j = 1, \dots, m^*$)

• Método *Affine Covariant Newton* (ACN): • Método de *Newton*: (NW)

$$C [ACN] = \begin{pmatrix} C_{1,1} \rightarrow -0.630031 \\ C_{1,2} \rightarrow 0.548352 \\ C_{1,3} \rightarrow -0.803192 \\ C_{1,4} \rightarrow 0.997324 \\ C_{1,5} \rightarrow -0.0290403 \\ C_{2,1} \rightarrow -0.962225 \\ C_{2,2} \rightarrow -0.664099 \\ C_{2,3} \rightarrow 0.481549 \\ C_{2,4} \rightarrow -0.509386 \\ C_{2,5} \rightarrow -0.223176 \\ C_{3,1} \rightarrow -0.447055 \\ C_{3,2} \rightarrow 0.374337 \\ C_{3,3} \rightarrow -0.78442 \\ C_{3,4} \rightarrow -0.191594 \\ C_{3,5} \rightarrow 0.093056 \\ C_{4,1} \rightarrow -0.670745 \\ C_{4,2} \rightarrow -0.729709 \\ C_{4,3} \rightarrow 0.270296 \\ C_{4,4} \rightarrow 0.477804 \\ C_{4,5} \rightarrow -0.367817 \\ C_{5,1} \rightarrow -0.070447 \\ C_{5,2} \rightarrow -0.744019 \\ C_{5,3} \rightarrow 0.147977 \\ C_{5,4} \rightarrow 0.0075015 \\ C_{5,5} \rightarrow -0.305249 \end{pmatrix} \quad C [Newton] = \begin{pmatrix} C_{1,1} \rightarrow 0.00030819 \\ C_{1,2} \rightarrow -0.0271744 \\ C_{1,3} \rightarrow -0.213366 \\ C_{1,4} \rightarrow 0.102201 \\ C_{1,5} \rightarrow 0.000180697 \\ C_{2,1} \rightarrow 0.020625 \\ C_{2,2} \rightarrow 0.0571131 \\ C_{2,3} \rightarrow -0.167644 \\ C_{2,4} \rightarrow 0.0409687 \\ C_{2,5} \rightarrow 0.151278 \\ C_{3,1} \rightarrow -0.100995 \\ C_{3,2} \rightarrow -0.0139775 \\ C_{3,3} \rightarrow -0.0158887 \\ C_{3,4} \rightarrow -0.0532586 \\ C_{3,5} \rightarrow 0.220571 \\ C_{4,1} \rightarrow -0.0284306 \\ C_{4,2} \rightarrow -0.082574 \\ C_{4,3} \rightarrow -0.127759 \\ C_{4,4} \rightarrow -0.331815 \\ C_{4,5} \rightarrow -0.233394 \\ C_{5,1} \rightarrow 0.132107 \\ C_{5,2} \rightarrow 0.120875 \\ C_{5,3} \rightarrow 0.173021 \\ C_{5,4} \rightarrow 0.103917 \\ C_{5,5} \rightarrow 0.167296 \end{pmatrix}$$

• Método *NSolve* (NS)

• Método de la *Secante* (SC):

$$\begin{pmatrix} C_{1,1} \rightarrow 0.00032833 \\ C_{1,2} \rightarrow -0.0306724 \\ C_{1,3} \rightarrow -0.235942 \\ C_{1,4} \rightarrow 0.0985618 \\ C_{1,5} \rightarrow 0.000194537 \\ C_{2,1} \rightarrow 0.0231098 \\ C_{2,2} \rightarrow 0.0614094 \\ C_{2,3} \rightarrow -0.185569 \\ C_{2,4} \rightarrow 0.0337934 \\ C_{2,5} \rightarrow 0.147611 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} C_{1,1} \rightarrow 0.000242622 \\ C_{1,2} \rightarrow -0.022616 \\ C_{1,3} \rightarrow -0.151979 \\ C_{1,4} \rightarrow 0.0397698 \\ C_{1,5} \rightarrow 0.000138401 \\ C_{2,1} \rightarrow 0.0170976 \\ C_{2,2} \rightarrow 0.0338012 \\ C_{2,3} \rightarrow -0.129424 \\ C_{2,4} \rightarrow -0.0359957 \\ C_{2,5} \rightarrow 0.123492 \end{pmatrix}$$

C [NSolve] =	$\begin{pmatrix} C_{3,1} \rightarrow -0.107745 \\ C_{3,2} \rightarrow -0.0151613 \\ C_{3,3} \rightarrow -0.0197424 \\ C_{3,4} \rightarrow -0.0534766 \\ C_{3,5} \rightarrow 0.230031 \\ C_{4,1} \rightarrow -0.023544 \\ C_{4,2} \rightarrow -0.0815724 \\ C_{4,3} \rightarrow -0.135249 \\ C_{4,4} \rightarrow -0.343145 \\ C_{4,5} \rightarrow -0.218725 \\ C_{5,1} \rightarrow 0.128885 \\ C_{5,2} \rightarrow 0.117887 \\ C_{5,3} \rightarrow 0.189224 \\ C_{5,4} \rightarrow 0.119843 \\ C_{5,5} \rightarrow 0.150193 \end{pmatrix}$	C [Secante] =	$\begin{pmatrix} C_{3,1} \rightarrow -0.0499256 \\ C_{3,2} \rightarrow 0.00661418 \\ C_{3,3} \rightarrow -0.00693996 \\ C_{3,4} \rightarrow -0.104212 \\ C_{3,5} \rightarrow 0.175197 \\ C_{4,1} \rightarrow -0.00958039 \\ C_{4,2} \rightarrow -0.0554314 \\ C_{4,3} \rightarrow -0.102919 \\ C_{4,4} \rightarrow -0.321974 \\ C_{4,5} \rightarrow -0.248319 \\ C_{5,1} \rightarrow 0.0550851 \\ C_{5,2} \rightarrow 0.0648311 \\ C_{5,3} \rightarrow 0.12457 \\ C_{5,4} \rightarrow 0.0569455 \\ C_{5,5} \rightarrow 0.233063 \end{pmatrix}$
----------------	---	-----------------	--

- Método de *Newton* (valores iniciales aleatorios en $[-1, 1]$) :

$$C = (C_{i,j}) = \begin{pmatrix} C_{1,1} \rightarrow 0.00030819 \\ C_{1,2} \rightarrow -0.0271744 \\ C_{1,3} \rightarrow -0.213366 \\ C_{1,4} \rightarrow 0.102201 \\ C_{1,5} \rightarrow 0.000180697 \\ C_{2,1} \rightarrow 0.020625 \\ C_{2,2} \rightarrow 0.0571131 \\ C_{2,3} \rightarrow -0.167644 \\ C_{2,4} \rightarrow 0.0409687 \\ C_{2,5} \rightarrow 0.151278 \\ C_{3,1} \rightarrow -0.100995 \\ C_{3,2} \rightarrow -0.0139775 \\ C_{3,3} \rightarrow -0.0158887 \\ C_{3,4} \rightarrow -0.0532586 \\ C_{3,5} \rightarrow 0.220571 \\ C_{4,1} \rightarrow -0.0284306 \\ C_{4,2} \rightarrow -0.082574 \\ C_{4,3} \rightarrow -0.127759 \\ C_{4,4} \rightarrow -0.331815 \\ C_{4,5} \rightarrow -0.233394 \\ C_{5,1} \rightarrow 0.132107 \\ C_{5,2} \rightarrow 0.120875 \\ C_{5,3} \rightarrow 0.173021 \\ C_{5,4} \rightarrow 0.103917 \\ C_{5,5} \rightarrow 0.167296 \end{pmatrix} \quad EC_k(C_{i,j}) = \begin{pmatrix} -9.21572 \times 10^{-19} \\ -2.1684 \times 10^{-18} \\ -1.30104 \times 10^{-18} \\ 0. \\ 6.93889 \times 10^{-18} \\ -1.38778 \times 10^{-17} \\ -2.77556 \times 10^{-17} \\ 5.55112 \times 10^{-17} \\ 5.55112 \times 10^{-17} \\ 1.11022 \times 10^{-16} \\ 1.11022 \times 10^{-16} \\ 1.11022 \times 10^{-16} \\ 0. \\ -5.55112 \times 10^{-17} \\ -8.32667 \times 10^{-17} \\ -1.11022 \times 10^{-16} \\ -1.66533 \times 10^{-16} \\ -2.77556 \times 10^{-16} \\ -3.33067 \times 10^{-16} \\ 0. \\ 0. \\ -2.22045 \times 10^{-16} \\ 0. \\ 0. \\ 0. \end{pmatrix}$$

Minimización de la suma de los cuadrados de EC_k :

$$\text{Mínimo} \left(\sum_k EC_k^2 \right) =$$

$$\{-1.06581 \times 10^{-14}, \{C_{1,1} \rightarrow -0.0276328, C_{1,2} \rightarrow 1.14176, C_{1,3} \rightarrow 1.22079, \\ C_{1,4} \rightarrow -2.21128, C_{1,5} \rightarrow 0.0102536, C_{2,1} \rightarrow -0.939557, C_{2,2} \rightarrow 1.39766, \\ C_{2,3} \rightarrow 3.62797, C_{2,4} \rightarrow -0.691655, C_{2,5} \rightarrow 0.453958, C_{3,1} \rightarrow -5.04769, \\ C_{3,2} \rightarrow -4.13107, C_{3,3} \rightarrow 0.902575, C_{3,4} \rightarrow 1.2652, C_{3,5} \rightarrow 0.32881, C_{4,1} \rightarrow 1.15296, \\ C_{4,2} \rightarrow 1.28531, C_{4,3} \rightarrow 0.71322, C_{4,4} \rightarrow 0.437632, C_{4,5} \rightarrow -1.15266, C_{5,1} \rightarrow 2.98626, \\ C_{5,2} \rightarrow 2.59676, C_{5,3} \rightarrow -0.110678, C_{5,4} \rightarrow -0.290119, C_{5,5} \rightarrow 0.2436\}\}$$

- Método de *Newton* (valores iniciales dados por *NMinimize*) :

$$\text{Suma } (EC_k(C_{i,j})^2) = \{6.42542 \times 10^{-31}\}$$

$$C = (C_{i,j}) = \begin{pmatrix} C_{1,1} \rightarrow 0.00032517 \\ C_{1,2} \rightarrow -0.028876 \\ C_{1,3} \rightarrow -0.224783 \\ C_{1,4} \rightarrow 0.0964823 \\ C_{1,5} \rightarrow 0.000190732 \\ C_{2,1} \rightarrow 0.0219039 \\ C_{2,2} \rightarrow 0.058764 \\ C_{2,3} \rightarrow -0.179096 \\ C_{2,4} \rightarrow 0.0257873 \\ C_{2,5} \rightarrow 0.147638 \\ C_{3,1} \rightarrow -0.101724 \\ C_{3,2} \rightarrow -0.0110843 \\ C_{3,3} \rightarrow -0.0165731 \\ C_{3,4} \rightarrow -0.0653342 \\ C_{3,5} \rightarrow 0.220441 \\ C_{4,1} \rightarrow -0.0226868 \\ C_{4,2} \rightarrow -0.0765002 \\ C_{4,3} \rightarrow -0.12439 \\ C_{4,4} \rightarrow -0.336053 \\ C_{4,5} \rightarrow -0.228713 \\ C_{5,1} \rightarrow 0.122318 \\ C_{5,2} \rightarrow 0.106065 \\ C_{5,3} \rightarrow 0.163189 \\ C_{5,4} \rightarrow 0.102621 \\ C_{5,5} \rightarrow 0.173449 \end{pmatrix} \quad EC_k(C_{i,j}) = \begin{pmatrix} 2.71051 \times 10^{-19} \\ 0. \\ -6.07153 \times 10^{-18} \\ -1.21431 \times 10^{-17} \\ -3.1225 \times 10^{-17} \\ -3.46945 \times 10^{-17} \\ -5.55112 \times 10^{-17} \\ 2.77556 \times 10^{-17} \\ 8.32667 \times 10^{-17} \\ 1.11022 \times 10^{-16} \\ 1.11022 \times 10^{-16} \\ 1.11022 \times 10^{-16} \\ 1.66533 \times 10^{-16} \\ 0. \\ -1.66533 \times 10^{-16} \\ -3.60822 \times 10^{-16} \\ -2.22045 \times 10^{-16} \\ -1.11022 \times 10^{-16} \\ 0. \\ -2.22045 \times 10^{-16} \\ 0. \\ -2.22045 \times 10^{-16} \\ -2.22045 \times 10^{-16} \\ -4.44089 \times 10^{-16} \\ 0. \end{pmatrix}$$

Integral: valor exacto y aproximado.

$$I_1(x, t) = \int_0^1 \rho(\beta) {}^C D_t^\beta u(x, t) d\beta =$$

$$\frac{3.32335 (t - 1.) t^{3/2} (x - 1.)^2 x}{\log(t)} \text{ if } \text{Re}(t) > 0 \wedge \text{Im}(t) = 0$$

- Error L_∞ :

$$\text{error-}L_\infty = \underset{\substack{0 \leq i < N \\ 0 \leq j < N}}{\text{Máx}} (|u(x_i, t_j) - u(x_i, t_j)(\text{FChWCM})|) = 8.20207 \times 10^{-2}$$

- Error- L_2 :

$$\text{error-}L_2 = \left(\sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} |u(x_i, t_j) - u(x_i, t_j)(\text{FChWCM})|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = 2.21134 \times 10^{-1}$$

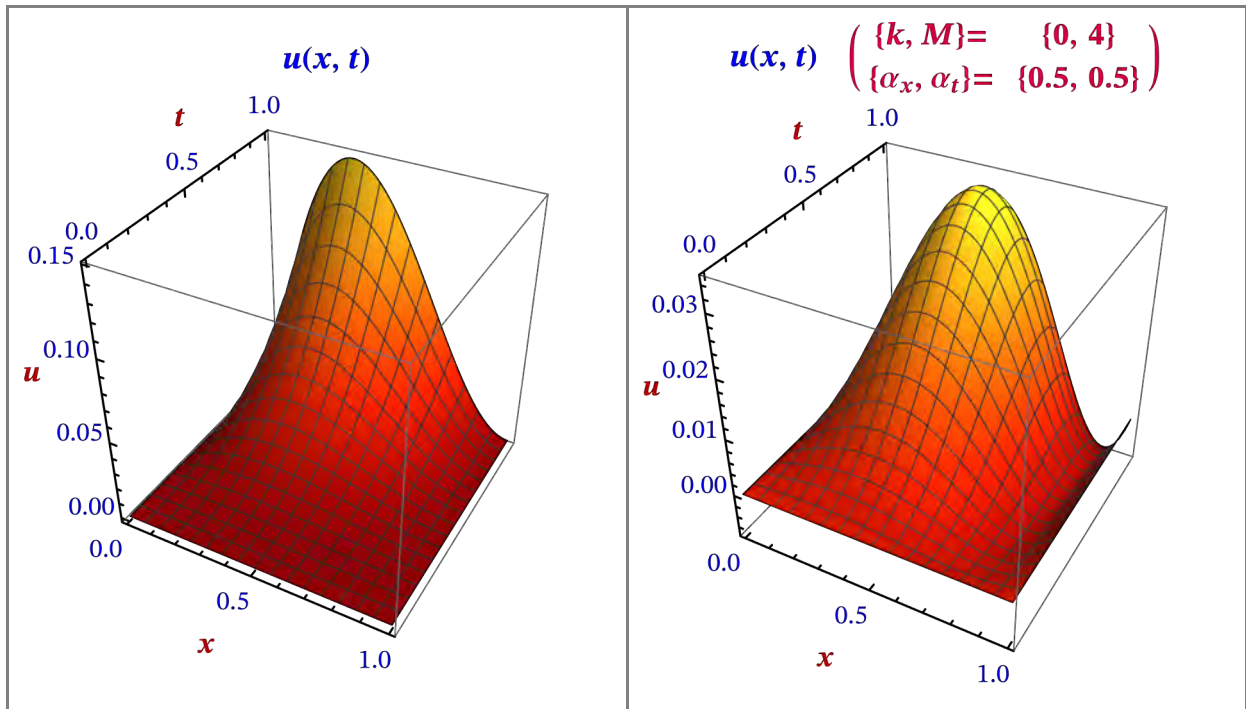
- Error-RMS:

$$\text{error-RMS} = \frac{1}{N \times N} \left(\sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} |u(x_i, t_j) - u(x_i, t_j)(\text{FChWCM})|^2 \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$2.21134 \times 10^{-3}$$

(b)

Out[*]=



■ Problema 3.2.2.

Sea ecuación de Advección–Dispersión Móvil–Inmóvil de orden Distribuido Fraccionario en el tiempo con las condiciones iniciales y de contorno dadas: ([MARA22])

$$(FPDE) \equiv \begin{cases} u_t(x, t) + \int_0^1 \Gamma(3 - \beta) {}^C D_t^\beta u(x, t) d\beta = -u_x(x, t) + u_{xx}(x, t) + h_1(x, t) + h_2(x, t) \\ u(x, 0) = f_1(x) = 0 & x \in [0, 1] \\ u(0, t) = f_2(t) = t^2 \quad u(1, t) = f_3(t) = 0 & t \in [0, 1] \end{cases}$$

$$x \in (0, 1) \quad t \in [0, T]$$

$$h_1(x, t) = -2 t(x - 1) \cos(x) - t^2 \cos(x) + t^2(x - 1) \sin(x)$$

$$h_2(x, t) = -2 t^2 \sin(x) - (x - 1) t^2 \cos(x) - \frac{(x-1) \cos(x) 2 t(t-1)}{\log(t)}.$$

La solución exacta viene dada por la expresión:

$$u(x, t) = -t^2 (x - 1) \cos(x).$$

(a) Represéntese la gráfica de $u(x, t)$ para $x \in [0, 1]$ y $t \in [0, 1]$.

(b) (i) Hállese la derivada fraccionaria de Caputo ${}^C D_t^\beta u(x, t)$ con $0 < \alpha < 1$ y tomando $n = 1$.

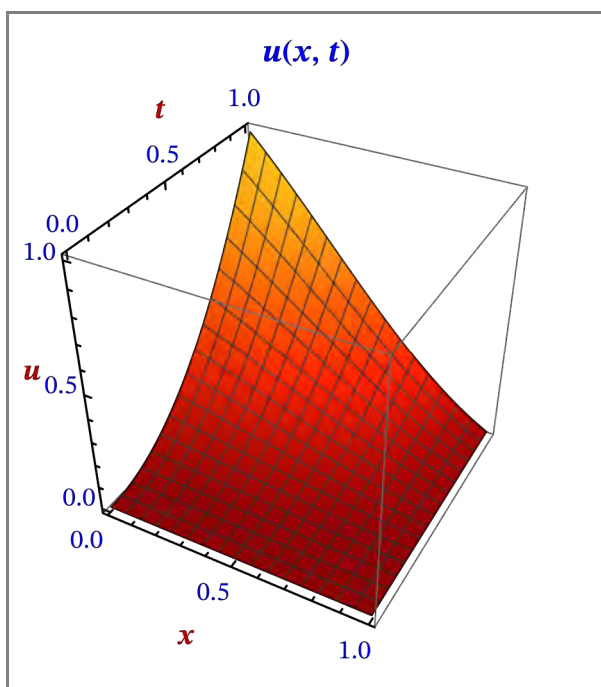
(ii) Hállese el operador fraccionario de orden distribuido $\mathbb{D}_t^\alpha$ en el sentido de Caputo definido por:

$${}^C \mathbb{D}_t^{\rho(\beta)} u(x, t) = \int_0^1 \rho(\beta) {}^C D_t^\beta u(x, t) d\beta$$

$$\int_0^1 \Gamma(3 - \beta) {}^C D_t^\beta u(x, t) d\beta.$$

(c) Compuébese que la solución $u(x, t)$ satisface el problema (FPDE).

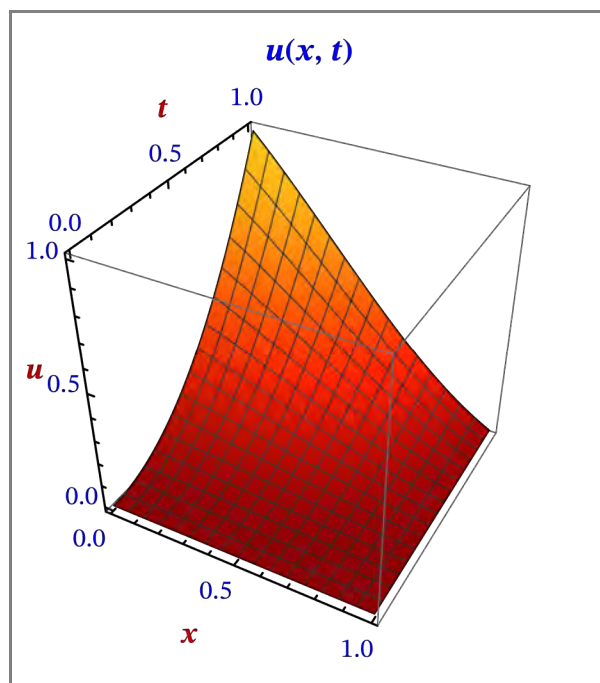
Indicación:



SOLUCIÓN

(a)

Out[•]=



(b)

Out[*]=

$$\{u(x, t) = , -t^2 (x - 1) \cos(x)\}$$

Out[*]=

$$\left\{ {}^C D_t^\beta u(x, t) = , -\frac{2 t^{2-\beta} (x - 1) \cos(x)}{(\beta^2 - 3 \beta + 2) \Gamma(1 - \beta)} \text{ if } \operatorname{Re}(\beta) < 1 \wedge \operatorname{Re}(t) > 0 \wedge \operatorname{Im}(t) = 0 \right\}$$

Out[*]=

$$\left\{ \int_0^1 \Gamma(3 - \beta) {}^C D_t^\beta u(x, t) d\beta = , -\frac{2 (t - 1) t (x - 1) \cos(x)}{\log(t)} \text{ if } \operatorname{Re}(t) > 0 \wedge t = \operatorname{Re}(t) \right\}$$

Out[*]=

$$\left\{ \int_0^1 \Gamma(3 - \beta) {}^C D_t^\beta u(x, t) d\beta = , -\frac{2 (t - 1) t (x - 1) \cos(x)}{\log(t)} \text{ if } \operatorname{Re}(t) > 0 \wedge t = \operatorname{Re}(t) \right\}$$

Out[*]=

$$\left(\begin{array}{l} u(x, t) = -t^2 (x - 1) \cos(x) \\ F11(x, t) = -\frac{2 t (x-1) (t+\log(t)-1) \cos(x)}{\log(t)} \text{ if } \operatorname{Re}(t) > 0 \wedge t = \operatorname{Re}(t) \\ F12(x, t) = -\frac{2 t (x-1) (t+\log(t)-1) \cos(x)}{\log(t)} \end{array} \right)$$

Out[*]=

$$\left(\begin{array}{l} (u(x, 0) = 0) \\ (u(0, t) = t^2) \\ (u(1, t) = 0) \end{array} \right)$$

`Out[•]//TableForm=`

(x, t)	$F11(x, t)$	$F12(x, t)$
(0.1 0.1)	0.249105	0.249105
(0.1 0.3)	0.849694	0.849694
(0.1 0.5)	1.54147	1.54147
(0.1 0.7)	2.3082	2.3082
(0.1 0.9)	3.1418	3.1418
(0.3 0.1)	0.186024	0.186024
(0.3 0.3)	0.634526	0.634526
(0.3 0.5)	1.15113	1.15113
(0.3 0.7)	1.72369	1.72369
(0.3 0.9)	2.34621	2.34621
(0.5 0.1)	0.12206	0.12206
(0.5 0.3)	0.416345	0.416345
(0.5 0.5)	0.755312	0.755312
(0.5 0.7)	1.131	1.131
(0.5 0.9)	1.53946	1.53946
(0.7 0.1)	0.0638275	0.0638275
(0.7 0.3)	0.217715	0.217715
(0.7 0.5)	0.394968	0.394968
(0.7 0.7)	0.591424	0.591424
(0.7 0.9)	0.805016	0.805016
(0.9 0.1)	0.0172915	0.0172915
(0.9 0.3)	0.0589812	0.0589812
(0.9 0.5)	0.107001	0.107001
(0.9 0.7)	0.160223	0.160223
(0.9 0.9)	0.218087	0.218087

■ Problema 3.2.3.

Sea ecuación de Advección–Dispersión Móvil–Inmóvil de orden Distribuido Fraccionario en el tiempo con las condiciones iniciales y de contorno dadas:

$$(FPDE) \equiv \begin{cases} u_t(x, t) + \int_0^1 \Gamma(3 - \beta) {}^C D_t^\beta u(x, t) d\beta = -u_x(x, t) + u_{xx}(x, t) + h_1(x, t) + h_2(x, t) \\ u(x, 0) = f_1(x) = 0 & x \in [0, 1] \\ u(0, t) = f_2(t) = t^2 \quad u(1, t) = f_3(t) = 0 & t \in [0, 1] \end{cases}$$

$$x \in (0, 1) \quad t \in [0, T]$$

$$h_1(x, t) = -2 t(x - 1) \cos(x) - t^2 \cos(x) + t^2(x - 1) \sin(x)$$

$$h_2(x, t) = -2 t^2 \sin(x) - (x - 1) t^2 \cos(x) - \frac{(x-1) \cos(x) 2 t (t-1)}{\log(t)}.$$

La solución exacta viene dada por la expresión:

$$u(x, t) = -t^2 (x - 1) \cos(x).$$

(a) (i) Calcúlese la solución numérica aproximada mediante el Método de Colocación Wavelet de Chelyshkov Fraccionario (*Fractional Order Chelyshkov Wavelets Collocation Method*–FChWCM) que permite dar una solución numérica a la ecuación no lineal (PDE).

(ii) Representétese la solución numérica $u(x, t)$ obtenida con el método FChWCM y la solución exacta.

(iii) Créese una tabla de valores en el intervalo $x \in [0, 1]$, $t \in [0, 1]$ con los datos:

$$k, x_k, t_k, u(x_k, t_k), (\text{exacta}), u(x_k, t_k) (\text{FChWCM}), e = |u(x_l, t_s) (\text{ChWCM}) - u(x_l, t_s)|.$$

(iv) Hállense los errores L_∞ , L_2 y el error RMS.

$$\left(\begin{array}{ll} [A, B] = & \{0, 1\} \\ T = & 1 \\ \{k, M\} = & \{0, 3\} \\ m^* = 2^k (M + 1) = & 4 \\ \{\alpha_x, \alpha_t\} = & \{0.5, 0.5\} \end{array} \right).$$

SOLUCIÓN

(a)

Out[*]=

$$\left(\begin{array}{ll} [A, B] = & \{0, 1\} \\ T = & 1 \\ \{k, M\} = & \{0, 3\} \\ m^* = 2^k (M + 1) = & 4 \\ \{\alpha_x, \alpha_t\} = & \{0.5, 0.5\} \end{array} \right)$$

 Método de Colocación *Wavelet* de Chelyshkov Fraccionario (FChWCM).

Ecuación de Advección–Dispersión Móvil–Inmóvil de orden Distribuido Fraccionario en el tiempo.

$$\text{(FPDE)} \equiv \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\alpha_1 u_t(x, t)}{F_1(x, t)} + \frac{\alpha_2 \int_0^1 \rho(\beta) {}^C D_t^\beta u(x, t) d\beta}{F_2(x, t)} = & x \in (0, 1) \\ \frac{-\alpha_3 u_x(x, t)}{F_3(x, t)} + \frac{\alpha_4 u_{xx}(x, t)}{F_4(x, t)} + \frac{h(x, t)}{F_5(x, t)} & \\ u(x, 0) = f_1(x) & x \in [0, 1] \\ u(0, t) = f_2(t) \quad u(1, t) = f_3(t) & t > 0 \end{array} \right.$$

$$\text{(FPDE)} \equiv \left(\begin{array}{ll} \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\} = & \{1, 1, -1, 1\} \\ \rho(\beta) = & \Gamma(3 - \beta) \\ (u(x, 0) = 0) & x \in [0, 1] \\ (u(0, t) = t^2 \quad u(1, t) = 0) & t \in [0, 1] \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{lll} [A, B] = & [0, 1] & \text{(intervalo de } x \text{ y } t) \\ T = & 1 & \text{(ancho intervalo)} \\ \{k, M\} = & \{0, 3\} & \text{(resolución,} \\ & & \text{máx. grado polinomio)} \\ 2^k = & 1 & \text{(nº subintervalos)} \\ m^* = 2^k (M + 1) = & 4 & \text{nº de Wavelets} \\ \{\alpha_x, \alpha_t\} = & \{0.5, 0.5\} & \text{orden fraccionario} \end{array} \right)$$

(i) Fórmula de la Cuadratura de Gauss–Legendre:

$$\bullet \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{x+1}{2}\right) dx \approx \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n w_k f\left(\frac{1+x_k}{2}\right).$$

Raíces y pesos en el intervalo $[-1, 1]$ para $n = 10$

$x_k (G-L)$	w_k
-0.973907	0.0666713
-0.865063	0.149451
-0.67941	0.219086
-0.433395	0.269267
-0.148874	0.295524
0.148874	0.295524
0.433395	0.269267
0.67941	0.219086
0.865063	0.149451
0.973907	0.0666713

(a.1) Matriz con los polinomios de Chelyshkov $\Phi(x)$.

$$\Phi(x) = C_{M,n}(x) = \begin{pmatrix} C_{3,0}(x) \\ C_{3,1}(x) \\ C_{3,2}(x) \\ C_{3,3}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -35x^3 + 60x^2 - 30x + 4 \\ 21x^3 - 30x^2 + 10x \\ 6x^2 - 7x^3 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

(a.2) Matrices con las *Wavelets* de Chelyshkov fraccionarias $\Psi^{T,\alpha_1}(x)$, $\Psi^{T,\alpha_2}(t)$

$$\Psi^{T,\alpha}(x) = \begin{pmatrix} \psi_{0,0}^{1,0.5}(x) = \begin{cases} -30. (1.16667 x^{1.5} - 2. x^1 + x^{0.5} - 0.133333) & 0. \leq x < 1. \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{0,1}^{1,0.5}(x) = \begin{cases} \sqrt{3} (21 x^{1.5} - 30 x^1 + 10 x^{0.5}) & 0. \leq x < 1. \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{0,2}^{1,0.5}(x) = \begin{cases} \sqrt{5} (6 x^1 - 7 x^{1.5}) & 0. \leq x < 1. \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{0,3}^{1,0.5}(x) = \begin{cases} \sqrt{7} x^{1.5} & 0. \leq x < 1. \\ 0 & \text{True} \end{cases} \end{pmatrix}$$

$$\Psi^{T,\alpha_x}(x) = \begin{pmatrix} \begin{cases} -30. (1.16667 x^{1.5} - 2. x^1 + x^{0.5} - 0.133333) & 0. \leq x < 1. \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{3} (21 x^{1.5} - 30 x^1 + 10 x^{0.5}) & 0. \leq x < 1. \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{5} (6 x^1 - 7 x^{1.5}) & 0. \leq x < 1. \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{7} x^{1.5} & 0. \leq x < 1. \\ 0 & \text{True} \end{cases} \end{pmatrix}$$

$$\Psi^{T,\alpha_t}(t) = \begin{pmatrix} \begin{cases} -30. (1.16667 t^{1.5} - 2. t^1 + t^{0.5} - 0.133333) & 0. \leq t < 1. \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{3} (21 t^{1.5} - 30 t^1 + 10 t^{0.5}) & 0. \leq t < 1. \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{5} (6 t^1 - 7 t^{1.5}) & 0. \leq t < 1. \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{7} t^{1.5} & 0. \leq t < 1. \\ 0 & \text{True} \end{cases} \end{pmatrix}$$

(b.1) Matrices integrales fraccionarias de $\Psi^{T,\alpha}$.

Operador integral fraccionario de Riemann–Liouville.

$$(J^{(1)}[\Psi^{T,\alpha_x}(x)]):$$

$$\left(\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{ll} 0 & x \leq 0 \\ -14. x^{2.5} + 30. x^{2.} - 20. x^{1.5} + 4. x^{1.} & 0. \leq x \leq 1. \\ -14. \left(\frac{1}{x}\right)^{2.5} x^{2.5} + 30. \left(\frac{1}{x}\right)^{2.} x^{2.} - 20. \left(\frac{1}{x}\right)^{1.5} x^{1.5} + 4. & \text{True} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{ll} 0 & x \leq 0 \\ 14.5492 x^{2.5} - 25.9808 x^{2.} + 11.547 x^{1.5} & 0. \leq x \leq 1. \\ 14.5492 \left(\frac{1}{x}\right)^{2.5} x^{2.5} - 25.9808 \left(\frac{1}{x}\right)^{2.} x^{2.} + 11.547 \left(\frac{1}{x}\right)^{1.5} x^{1.5} & \text{True} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{ll} 0 & x \leq 0 \\ 6.7082 x^{2.} - 6.26099 x^{2.5} & 0. \leq x \leq 1. \\ 6.7082 \left(\frac{1}{x}\right)^{2.} x^{2.} - 6.26099 \left(\frac{1}{x}\right)^{2.5} x^{2.5} & \text{True} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{ll} 1.0583 x^{2.5} & 0 < x \leq 1. \\ 1.0583 \left(\frac{1}{x}\right)^{2.5} x^{2.5} & x > 1. \end{array} \right. \end{array} \right)$$

$$J^{(2)}[\Psi^{T,\alpha_x}(x)]:$$

$$\left(\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \\ -4. x^{3.5} + 10. x^{3.} - 8. x^{2.5} + 2. x^{2.} & \\ -4. I_{\frac{1}{x}}(2.5, 2) x^{3.5} + 10. I_{\frac{1}{x}}(2., 2) x^{3.} - 8. I_{\frac{1}{x}}(1.5, 2) x^{2.5} + 2. x^{2.} - 2. (x - 1. & \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \\ 4.15692 x^{3.5} - 8.66025 x^{3.} + 4.6188 x^{2.5} & \\ 4.15692 I_{\frac{1}{x}}(2.5, 2) x^{3.5} - 8.66025 I_{\frac{1}{x}}(2., 2) x^{3.} + 4.6188 I_{\frac{1}{x}}(1.5, 2) x^{2.5} & \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{ll} 0 & x \leq 0 \\ 2.23607 x^{3.} - 1.78885 x^{3.5} & 0. \leq x \leq 1. \\ 2.23607 x^{3.} I_{\frac{1}{x}}(2., 2) - 1.78885 x^{3.5} I_{\frac{1}{x}}(2.5, 2) & \text{True} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{ll} 0.302372 x^{3.5} & 0 < x \leq 1. \\ 0.302372 x^{3.5} I_{\frac{1}{x}}(2.5, 2) & x > 1. \end{array} \right. \end{array} \right)$$

$$J^{(1)}[\Psi^{T,\alpha_t}(t)]:$$

$$\left(\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{ll} 0 & t \leq 0 \\ -14. t^{2.5} + 30. t^2 - 20. t^{1.5} + 4. t^1 & 0. \leq t \leq 1. \\ -14. \left(\frac{1}{t}\right)^{2.5} t^{2.5} + 30. \left(\frac{1}{t}\right)^2 t^2 - 20. \left(\frac{1}{t}\right)^{1.5} t^{1.5} + 4. & \text{True} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{ll} 0 & t \leq 0 \\ 14.5492 t^{2.5} - 25.9808 t^2 + 11.547 t^{1.5} & 0. \leq t \leq 1. \\ 14.5492 \left(\frac{1}{t}\right)^{2.5} t^{2.5} - 25.9808 \left(\frac{1}{t}\right)^2 t^2 + 11.547 \left(\frac{1}{t}\right)^{1.5} t^{1.5} & \text{True} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{ll} 0 & t \leq 0 \\ 6.7082 t^2 - 6.26099 t^{2.5} & 0. \leq t \leq 1. \\ 6.7082 \left(\frac{1}{t}\right)^2 t^2 - 6.26099 \left(\frac{1}{t}\right)^{2.5} t^{2.5} & \text{True} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{ll} 1.0583 t^{2.5} & 0 < t \leq 1. \\ 1.0583 \left(\frac{1}{t}\right)^{2.5} t^{2.5} & t > 1. \end{array} \right. \end{array} \right)$$

$$J^{(1-\beta)} [\Psi^{T, \alpha_t}(t)]: \left(\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \\ t^{-\beta} \left(-\frac{46.5269 t^{2.5}}{\Gamma(3.5-\beta)} + \frac{60. t^2}{\Gamma(3.-\beta)} - \frac{26.5868 t^{1.5}}{\Gamma(2.5-\beta)} + \frac{4. t^1}{\Gamma(2.-\beta)} \right) & \\ t^{-\beta} \left(-\frac{46.5269 I_{1-}(2.5,1-\beta) t^{2.5}}{\Gamma(3.5-\beta)} + \frac{60. I_{1-}(2.,1-\beta) t^2}{\Gamma(3.-\beta)} - \frac{26.5868 I_{1-}(1.5,1-\beta) t^{1.5}}{\Gamma(2.5-\beta)} + \frac{(4.-4. \left(\frac{t-1.}{t}\right))}{\Gamma(2.-\beta)} \right) & \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \\ t^{-\beta} \left(\frac{48.3522 t^{2.5}}{\Gamma(3.5-\beta)} - \frac{51.9615 t^2}{\Gamma(3.-\beta)} + \frac{15.3499 t^{1.5}}{\Gamma(2.5-\beta)} \right) & \\ t^{-\beta} \left(\frac{48.3522 I_{1-}(2.5,1-\beta) t^{2.5}}{\Gamma(3.5-\beta)} - \frac{51.9615 I_{1-}(2.,1-\beta) t^2}{\Gamma(3.-\beta)} + \frac{15.3499 I_{1-}(1.5,1-\beta) t^{1.5}}{\Gamma(2.5-\beta)} \right) & \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{ll} 0 & t \leq 0 \\ t^{-\beta} \left(\frac{13.4164 t^2}{\Gamma(3.-\beta)} - \frac{20.8075 t^{2.5}}{\Gamma(3.5-\beta)} \right) & 0. \leq t \leq 1. \\ t^{-\beta} \left(\frac{13.4164 t^2 I_{1-}(2.,1-\beta)}{\Gamma(3.-\beta)} - \frac{20.8075 t^{2.5} I_{1-}(2.5,1-\beta)}{\Gamma(3.5-\beta)} \right) & \text{True} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{ll} \frac{3.5171 t^{2.5-1.\beta}}{\Gamma(3.5-\beta)} & 0 < t \leq 1. \\ \frac{3.5171 t^{2.5-1.\beta} I_{1-}(2.5,1-\beta)}{\Gamma(3.5-\beta)} & t > 1. \end{array} \right. \end{array} \right)$$

(b.2) Matriz de coeficientes:

$$C = (C_{i,j}) = \begin{pmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} & C_{1,3} & C_{1,4} \\ C_{2,1} & C_{2,2} & C_{2,3} & C_{2,4} \\ C_{3,1} & C_{3,2} & C_{3,3} & C_{3,4} \\ C_{4,1} & C_{4,2} & C_{4,3} & C_{4,4} \end{pmatrix}$$

(c) Método de Colocación.

- Los puntos de colocación compuestos son las raíces del polinomio Legendre desplazado.

- Polinomio de Legendre desplazado en $[0, T]$ de grado $m^* = 16$:

$$L_{m^*}(x) = 601\,080\,390\,t^{16} - 4\,808\,643\,120\,t^{15} + 17\,450\,721\,000\,t^{14} - 38\,003\,792\,400\,t^{13} + 55\,367\,594\,100\,t^{12} - 56\,949\,525\,360\,t^{11} + 42\,536\,373\,880\,t^{10} - 23\,371\,634\,000\,t^9 + 9\,465\,511\,770\,t^8 - 2\,804\,596\,080\,t^7 + 597\,500\,904\,t^6 - 88\,884\,432\,t^5 + 8\,817\,900\,t^4 - 542\,640\,t^3 + 18\,360\,t^2 - 272\,t + 1 \quad x \in [0, T]$$

- Ceros de $L_{m^*}(x)$: $x_k, t_k \in [0, T] \quad (k = 1, 2, \dots, m^*)$

$$x_k = \begin{pmatrix} x_1 & 0.00529953 \\ x_2 & 0.0277125 \\ x_3 & 0.0671844 \\ x_4 & 0.122298 \\ x_5 & 0.191062 \\ x_6 & 0.270992 \\ x_7 & 0.359198 \\ x_8 & 0.452494 \\ x_9 & 0.547506 \\ x_{10} & 0.640802 \\ x_{11} & 0.729008 \\ x_{12} & 0.808938 \\ x_{13} & 0.877702 \\ x_{14} & 0.932816 \\ x_{15} & 0.972288 \\ x_{16} & 0.9947 \end{pmatrix} \quad t_k = \begin{pmatrix} t_1 & 0.00529953 \\ t_2 & 0.0277125 \\ t_3 & 0.0671844 \\ t_4 & 0.122298 \\ t_5 & 0.191062 \\ t_6 & 0.270992 \\ t_7 & 0.359198 \\ t_8 & 0.452494 \\ t_9 & 0.547506 \\ t_{10} & 0.640802 \\ t_{11} & 0.729008 \\ t_{12} & 0.808938 \\ t_{13} & 0.877702 \\ t_{14} & 0.932816 \\ t_{15} & 0.972288 \\ t_{16} & 0.9947 \end{pmatrix}$$

(d) Resolución del sistema de ecuaciones en los coeficientes $C_{i,j}$ ($i, j = 1, \dots, m^*$)

- Método *Affine Covariant Newton* (ACN):
- Método de *Newton*: (NW)

$$C [ACN] = \begin{pmatrix} C_{1,1} \rightarrow -0.838089 \\ C_{1,2} \rightarrow -0.119396 \\ C_{1,3} \rightarrow 0.806643 \\ C_{1,4} \rightarrow -0.131936 \\ C_{2,1} \rightarrow -0.979555 \\ C_{2,2} \rightarrow -0.986268 \\ C_{2,3} \rightarrow -0.561247 \\ C_{2,4} \rightarrow 0.146894 \\ C_{3,1} \rightarrow -0.381283 \\ C_{3,2} \rightarrow -0.990828 \\ C_{3,3} \rightarrow 0.860777 \\ C_{3,4} \rightarrow 0.377945 \\ C_{4,1} \rightarrow 0.604053 \\ C_{4,2} \rightarrow 0.46425 \\ C_{4,3} \rightarrow 0.825737 \\ C_{4,4} \rightarrow -0.716707 \end{pmatrix}$$

$$C [Newton] = \begin{pmatrix} C_{1,1} \rightarrow 0.258929 \\ C_{1,2} \rightarrow 0.66529 \\ C_{1,3} \rightarrow -0.773315 \\ C_{1,4} \rightarrow -0.646598 \\ C_{2,1} \rightarrow -0.296363 \\ C_{2,2} \rightarrow 0.437757 \\ C_{2,3} \rightarrow 0.411662 \\ C_{2,4} \rightarrow 0.482803 \\ C_{3,1} \rightarrow 0.366989 \\ C_{3,2} \rightarrow 0.785055 \\ C_{3,3} \rightarrow -0.881336 \\ C_{3,4} \rightarrow -0.107768 \\ C_{4,1} \rightarrow -0.325584 \\ C_{4,2} \rightarrow 0.989614 \\ C_{4,3} \rightarrow 0.257014 \\ C_{4,4} \rightarrow -0.373496 \end{pmatrix}$$

- Método *NSolve* (NS)

$$C [NSolve] = \begin{pmatrix} C_{1,1} \rightarrow 8.45725 \\ C_{1,2} \rightarrow 3286.23 \\ C_{1,3} \rightarrow 27\,141.6 \\ C_{1,4} \rightarrow 340\,053. \\ C_{2,1} \rightarrow -2089.59 \\ C_{2,2} \rightarrow -5278.2 \\ C_{2,3} \rightarrow -18\,951.3 \\ C_{2,4} \rightarrow 232\,500. \\ C_{3,1} \rightarrow 12\,446.4 \\ C_{3,2} \rightarrow 27\,292.9 \\ C_{3,3} \rightarrow 9330.52 \\ C_{3,4} \rightarrow 8.1511 \\ C_{4,1} \rightarrow -17\,663.9 \\ C_{4,2} \rightarrow -38\,997.9 \\ C_{4,3} \rightarrow -12\,395. \\ C_{4,4} \rightarrow -1332.53 \end{pmatrix}$$

- Método de la *Secante* (SC):

$$C [Secante] = \begin{pmatrix} C_{1,1} \rightarrow 5.17076 \\ C_{1,2} \rightarrow 3278.12 \\ C_{1,3} \rightarrow 26\,693.1 \\ C_{1,4} \rightarrow 268\,478. \\ C_{2,1} \rightarrow -2126.12 \\ C_{2,2} \rightarrow -4827.43 \\ C_{2,3} \rightarrow -8834.17 \\ C_{2,4} \rightarrow 195\,418. \\ C_{3,1} \rightarrow 10\,360.2 \\ C_{3,2} \rightarrow 19\,829.9 \\ C_{3,3} \rightarrow 5674.23 \\ C_{3,4} \rightarrow 12\,777.8 \\ C_{4,1} \rightarrow -14\,543.6 \\ C_{4,2} \rightarrow -27\,861.4 \\ C_{4,3} \rightarrow -8136.27 \\ C_{4,4} \rightarrow 18.3464 \end{pmatrix}$$

- Método de *Newton* (valores iniciales aleatorios en $[-1, 1]$) :

$$C = (C_{i,j}) = \begin{pmatrix} C_{1,1} \rightarrow 0.258929 \\ C_{1,2} \rightarrow 0.66529 \\ C_{1,3} \rightarrow -0.773315 \\ C_{1,4} \rightarrow -0.646598 \\ C_{2,1} \rightarrow -0.296363 \\ C_{2,2} \rightarrow 0.437757 \\ C_{2,3} \rightarrow 0.411662 \\ C_{2,4} \rightarrow 0.482803 \\ C_{3,1} \rightarrow 0.366989 \\ C_{3,2} \rightarrow 0.785055 \\ C_{3,3} \rightarrow -0.881336 \\ C_{3,4} \rightarrow -0.107768 \\ C_{4,1} \rightarrow -0.325584 \\ C_{4,2} \rightarrow 0.989614 \\ C_{4,3} \rightarrow 0.257014 \\ C_{4,4} \rightarrow -0.373496 \end{pmatrix} \quad EC_k(C_{i,j}) = \begin{pmatrix} -0.0185898 \\ -0.0972609 \\ -0.24579 \\ -0.386413 \\ -0.351065 \\ -0.00665315 \\ 0.616188 \\ 1.30517 \\ 1.77513 \\ 1.82265 \\ 1.42235 \\ 0.714813 \\ -0.0855233 \\ -0.791859 \\ -1.29895 \\ -1.5772 \end{pmatrix}$$

Minimización de la suma de los cuadrados de EC_k :

$$\text{Mínimo} \left(\sum_k EC_k^2 \right) = \{-9.76996 \times 10^{-15},$$

$$\{C_{1,1} \rightarrow 0.12614, C_{1,2} \rightarrow -1.54095, C_{1,3} \rightarrow -0.929269, C_{1,4} \rightarrow -3.21427, \\ C_{2,1} \rightarrow 1.81972, C_{2,2} \rightarrow -0.545485, C_{2,3} \rightarrow 0.328264, C_{2,4} \rightarrow -2.41481, \\ C_{3,1} \rightarrow 4.65547, C_{3,2} \rightarrow 2.25923, C_{3,3} \rightarrow 0.641795, C_{3,4} \rightarrow -0.23692, \\ C_{4,1} \rightarrow -8.37315, C_{4,2} \rightarrow -7.459, C_{4,3} \rightarrow -0.57892, C_{4,4} \rightarrow 2.14537\}$$

- Método de *Newton* (valores iniciales dados por *NMinimize*) :

$$\text{Suma } (EC_k(C_{i,j})^2) = \{3.72721 \times 10^{-21}\}$$

$$C = (C_{i,j}) = \begin{pmatrix} C_{1,1} \rightarrow 7.72528 \\ C_{1,2} \rightarrow 3422.28 \\ C_{1,3} \rightarrow 27\,929. \\ C_{1,4} \rightarrow 331\,929. \\ C_{2,1} \rightarrow -2189.63 \\ C_{2,2} \rightarrow -5266.67 \\ C_{2,3} \rightarrow -16\,656.5 \\ C_{2,4} \rightarrow 230\,581. \\ C_{3,1} \rightarrow 12\,076.5 \\ C_{3,2} \rightarrow 25\,942. \\ C_{3,3} \rightarrow 8613.99 \\ C_{3,4} \rightarrow 3985.91 \\ C_{4,1} \rightarrow -17\,074. \\ C_{4,2} \rightarrow -36\,943.9 \\ C_{4,3} \rightarrow -11\,603.9 \\ C_{4,4} \rightarrow -962.552 \end{pmatrix} \quad EC_k(C_{i,j}) = \begin{pmatrix} 6.46594 \times 10^{-13} \\ -2.89901 \times 10^{-12} \\ 4.54747 \times 10^{-13} \\ -5.45697 \times 10^{-12} \\ -9.09495 \times 10^{-13} \\ 0. \\ 6.36646 \times 10^{-12} \\ -5.45697 \times 10^{-12} \\ 9.09495 \times 10^{-13} \\ -1.09139 \times 10^{-11} \\ -1.81899 \times 10^{-12} \\ -7.27596 \times 10^{-12} \\ 0. \\ 0. \\ -5.82077 \times 10^{-11} \\ 7.27596 \times 10^{-12} \end{pmatrix}$$

Integral: valor exacto y aproximado.

$$I_1(x, t) = \int_0^1 \rho(\beta) {}^C D_t^\beta u(x, t) d\beta =$$

$$-\frac{2. (t - 1.) t (x - 1.) \cos(x)}{\log(t)} \quad \text{if } \text{Re}(t) > 0 \wedge t = \text{Re}(t)$$

$I_1(\text{exacta})$	$I_1(\text{Newton})$	$I_1(\text{Newton-corrected})$	$I_1(\text{Secante})$
0.0700042	0.0312816	74.3848	44.8489
0.312392	0.318055	157.382	28.2509
0.645969	0.699559	183.379	-122.899
1.05449	1.12127	148.368	-417.739
1.5299	1.55522	48.2238	-864.034
0.0522771	-0.0363828	326.301	218.907
0.233285	0.274837	589.617	357.644
0.482391	0.662249	1551.96	885.477
0.787465	1.0197	3416.19	1910.28
1.14248	1.29232	6295.95	3491.56
0.0343016	-0.0767785	1071.56	751.602
0.15307	0.209785	717.384	458.135
0.316521	0.561732	1304.92	802.668
0.516695	0.851693	3467.87	2175.99
0.74964	1.01377	7538.28	4780.78
0.017937	-0.086394	2036.78	1471.3
0.0800434	0.104901	1168.47	782.676
0.165515	0.356872	733.849	436.079
0.27019	0.558662	1680.89	1048.3
0.392001	0.653049	4482.54	2923.27
0.00485931	-0.0471977	1611.38	1184.71
0.0216846	0.00973876	1084.29	753.312
0.0448397	0.102038	450.276	278.784
0.0731972	0.180289	324.279	173.461
0.106197	0.219103	1001.87	632.745

• Error L_∞ :

$$\text{error-}L_\infty = \max_{\substack{0 \leq i < N \\ 0 \leq j < N}} (|u(x_i, t_j) - u(x_i, t_j)(\text{FChWCM})|) = 1.78811 \times 10^{-1}$$

• Error- L_2 :

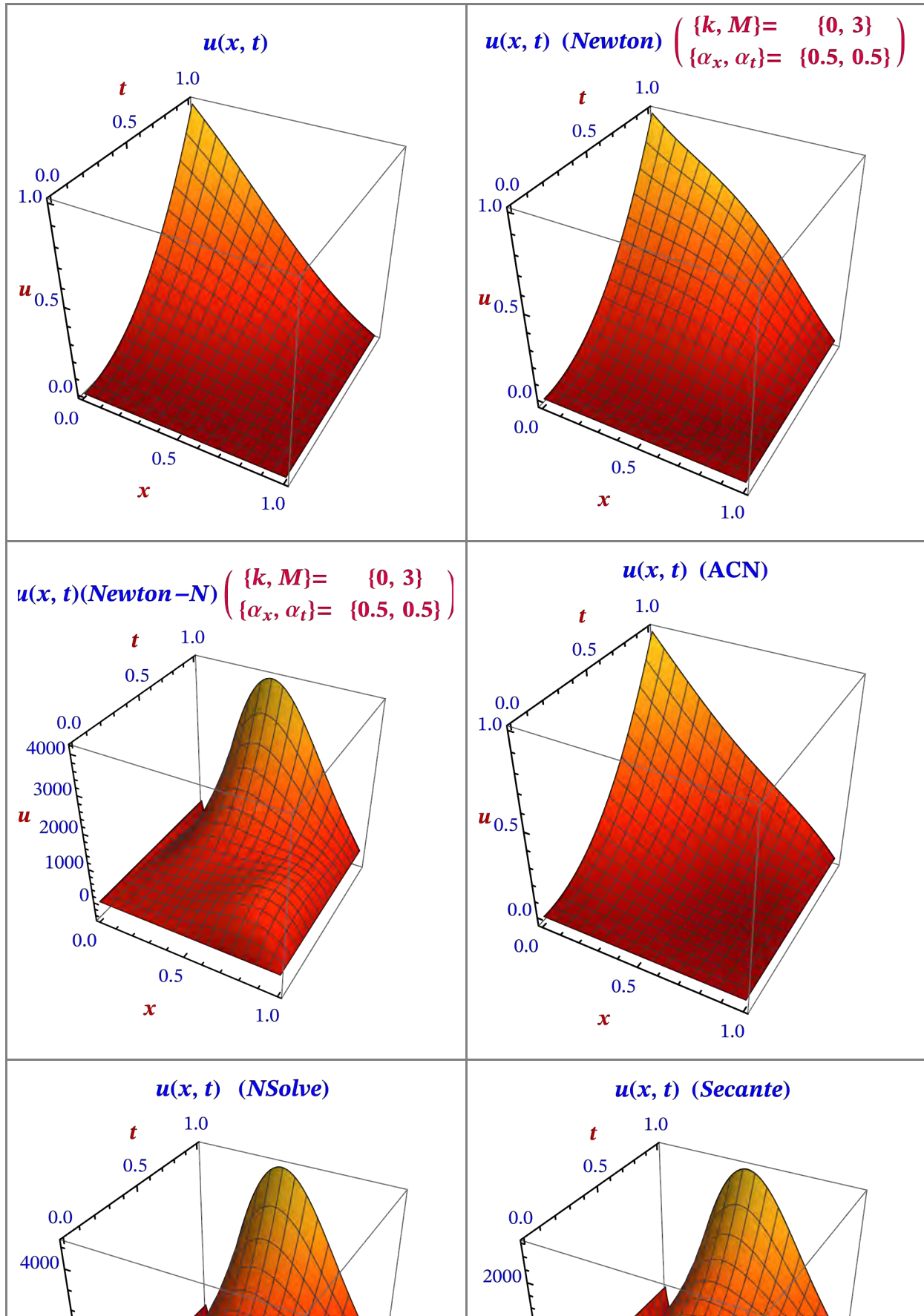
$$\text{error-}L_2 = \left(\sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} |u(x_i, t_j) - u(x_i, t_j)(\text{FChWCM})|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = 6.39162 \times 10^{-1}$$

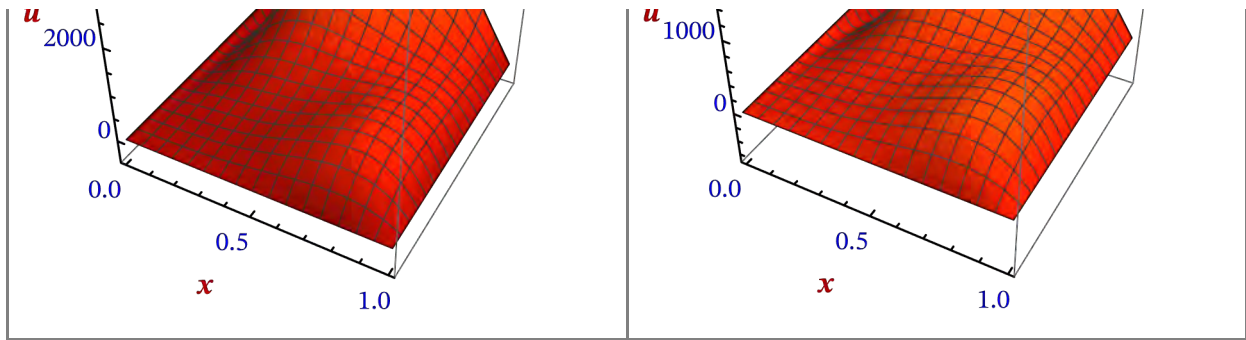
• Error-RMS:

$$\text{error-RMS} = \frac{1}{N \times N} \left(\sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} |u(x_i, t_j) - u(x_i, t_j)(\text{FChWCM})|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = 6.39162 \times 10^{-3}$$

(b)

Out[•]=





3.2.9. Ecuación No Lineal de Benjamina–Bona–Mohany (BBM)

Se pretende diseñar un método numérico eficiente basado en un método de colocación compuesto que utiliza las *Wavelets* de Chelyshkov de orden fraccionario para resolver numéricamente la ecuación de Benjamina–Bona–Mohany (BBM): [SHIR21], [SHIR21b] [KUMB23]:

(FPDE) $\equiv$

$$\left\{ \begin{array}{l} \underbrace{\alpha_1 u_t(x, t)}_{F_1(x,t)} + \underbrace{\alpha_2 u_x(x, t)}_{F_2(x,t)} + \underbrace{\alpha_3 u(x, t) u_x(x, t)}_{F_3(x,t)} - \underbrace{\alpha_4 u_{xx} u_t(x, t)}_{F_4(x,t)} = \underbrace{h(x, t)}_{F_5(x,t)} \\ u(x, 0) = f_1(x) \\ u(0, t) = f_2(t) \quad u(1, t) = f_3(t) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} x \in [0, 1] \\ t \in [0, 1] \end{array} \quad (3.2.46)$$

(FPDE) $\equiv F_1(x, t) + F_2(x, t) + F_3(x, t) - F_4(x, t) = F_5(x, t).$

3.2.10. Ejemplos

■ Ejemplo 3.2.2.

Sea la ecuación de Benjamina–Bona–Mohany (BBM) con las condiciones iniciales y de contorno dadas: ([RAHAN23])

$$(FPDE) \equiv \begin{cases} \underbrace{\alpha_1 u_t(x, t)}_{F_1(x,t)} + \underbrace{\alpha_2 u_x(x, t)}_{F_2(x,t)} + \underbrace{\alpha_3 u(x, t) u_x(x, t)}_{F_3(x,t)} - \underbrace{\alpha_4 u_{xx} t(x, t)}_{F_4(x,t)} = \underbrace{h(x, t)}_{F_5(x,t)} \\ u(x, 0) = f_1(x) = 3c \operatorname{sech}^2 \left[\sqrt{\frac{\varepsilon c}{4\mu(1+\varepsilon c)}} (x - x_0) \right] & x \in [0, 1] \\ u(0, t) = f_2(t) = 3c \operatorname{sech}^2 \left[\sqrt{\frac{\varepsilon c}{4\mu(1+\varepsilon c)}} (-(1 + \varepsilon c)t - x_0) \right] & t \in [0, T] \\ u(1, t) = f_3(t) = 3c \operatorname{sech}^2 \left[\sqrt{\frac{\varepsilon c}{4\mu(1+\varepsilon c)}} (1 - (1 + \varepsilon c)t - x_0) \right] \end{cases}$$

con $x \in (0, 1)$ $t \in [0, T]$

$$\alpha_1 = 1 \quad \alpha_2 = 1 \quad \alpha_3 = \varepsilon = 2 \quad \alpha_4 = \mu = 1 \quad x_0 = 0 \quad h(x, t) = 0$$

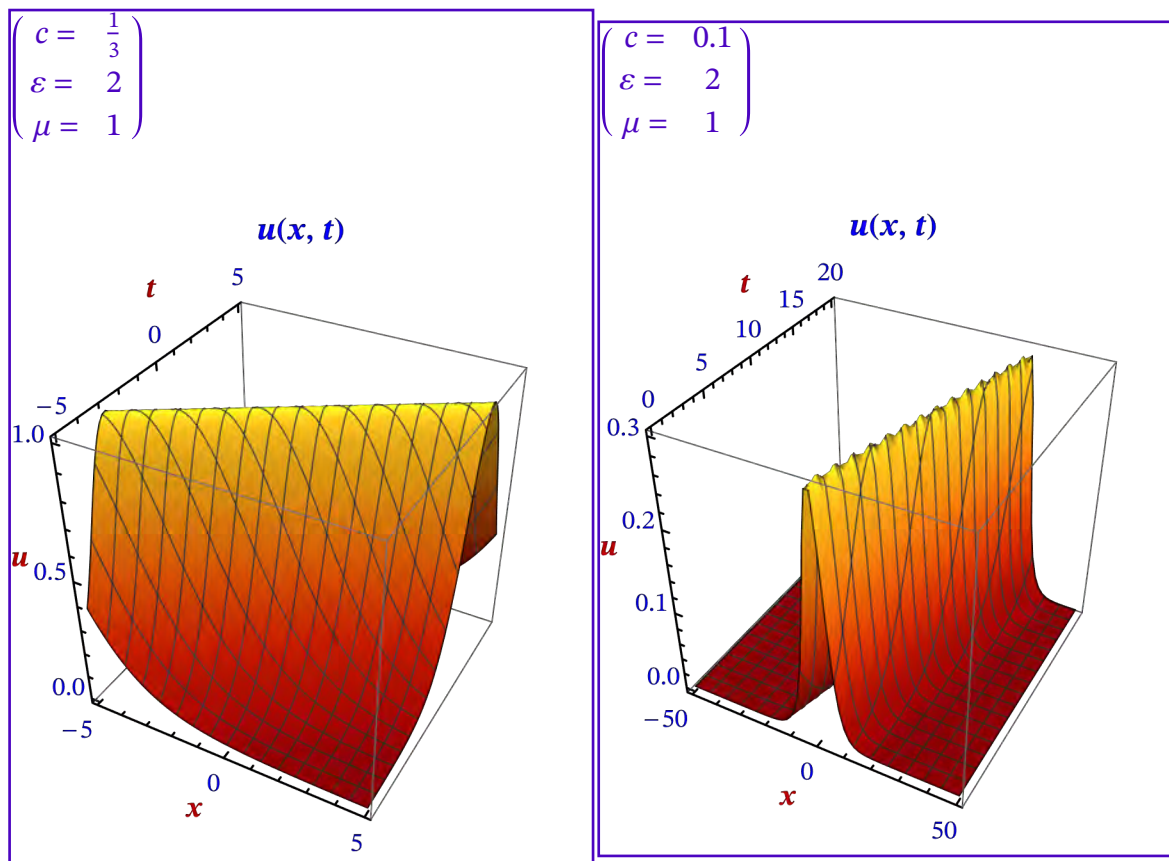
La solución exacta viene dada por la expresión:

$$u(x, t) = 3c \operatorname{sech}^2 \left[\sqrt{\frac{\varepsilon c}{4\mu(1+\varepsilon c)}} (x - (1 + \varepsilon c)t - x_0) \right] \quad [\text{RAHAN23}].$$

(a) Representétese la gráfica de $u(x, t)$ para $x \in [-X, X]$ y $t \in [-T, T]$.

(b) Compuébese que la solución $u(x, t)$ satisface el problema (FPDE).

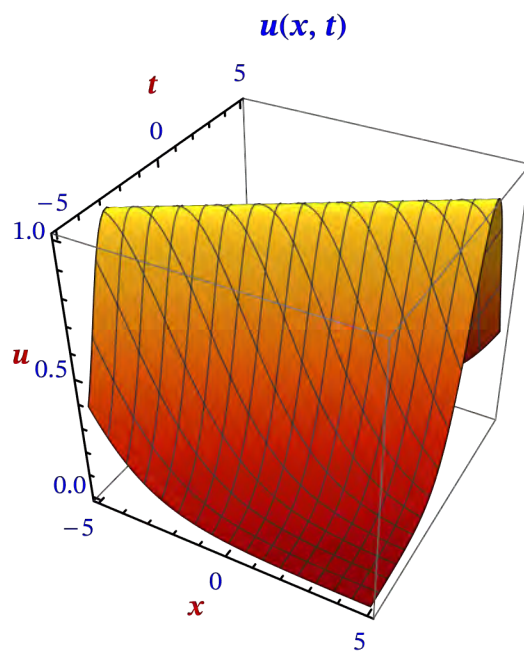
Indicación:

**SOLUCIÓN****(a)**

Out[*]=

$$\begin{pmatrix} c = \frac{1}{3} \\ \varepsilon = 2 \\ \mu = 1 \end{pmatrix}$$

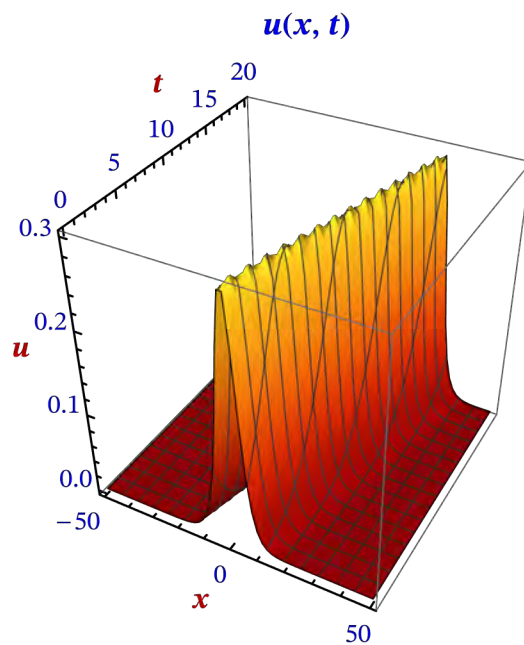
Out[•]=



Out[•]=

$$\begin{pmatrix} c = & 0.1 \\ \varepsilon = & 2 \\ \mu = & 1 \end{pmatrix}$$

Out[•]=



(b)

Out[*]=

$$\operatorname{sech}^2\left(\frac{x - \frac{5t}{3}}{\sqrt{10}}\right)$$

Out[*]=

$$\left(\begin{array}{l} u(x, t) = \operatorname{sech}^2\left(\frac{x - \frac{5t}{3}}{\sqrt{10}}\right) \\ \text{F11}(x, t) = 0 \\ \text{F12}(x, t) = 0 \end{array} \right)$$

Out[*]=

$$\left(\begin{array}{l} \left(u(x, 0) = \operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{\sqrt{10}}\right) \right) \\ \left(u(0, t) = \operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{3} \sqrt{\frac{5}{2}} t\right) \right) \\ \left(u(1, t) = \operatorname{sech}^2\left(\frac{1 - \frac{5t}{3}}{\sqrt{10}}\right) \right) \end{array} \right)$$

Out[*]//TableForm=

(x, t)	F11(x, t)	F12(x, t)
(0.1 0.1)	0	0
(0.1 0.3)	0	0
(0.1 0.5)	0	0
(0.1 0.7)	0	0
(0.1 0.9)	0	0
(0.3 0.1)	0	0
(0.3 0.3)	0	0
(0.3 0.5)	0	0
(0.3 0.7)	0	0
(0.3 0.9)	0	0
(0.5 0.1)	0	0
(0.5 0.3)	0	0
(0.5 0.5)	0	0
(0.5 0.7)	0	0
(0.5 0.9)	0	0
(0.7 0.1)	0	0
(0.7 0.3)	0	0
(0.7 0.5)	0	0
(0.7 0.7)	0	0
(0.7 0.9)	0	0
(0.9 0.1)	0	0
(0.9 0.3)	0	0
(0.9 0.5)	0	0
(0.9 0.7)	0	0
(0.9 0.9)	0	0

■ Ejemplo 3.2.3.

Sea ecuación de Benjamina–Bona–Mohany (BBM).

(i) Calcúlese la solución numérica aproximada mediante el Método de Colocación *Wavelet* de Chelyshkov Fraccionario (*Fractional Order Chelyshkov Wavelets Collocation Method*–FChWCM) que permite dar una solución numérica a la ecuación no lineal (PDE).

(ii) Represéntese la solución numérica $u(x, t)$ obtenida con el método FChWCM y la solución exacta.

(iii) Créese una tabla de valores en el intervalo $x \in [0, 1]$, $t \in [0, 1]$ con los datos:

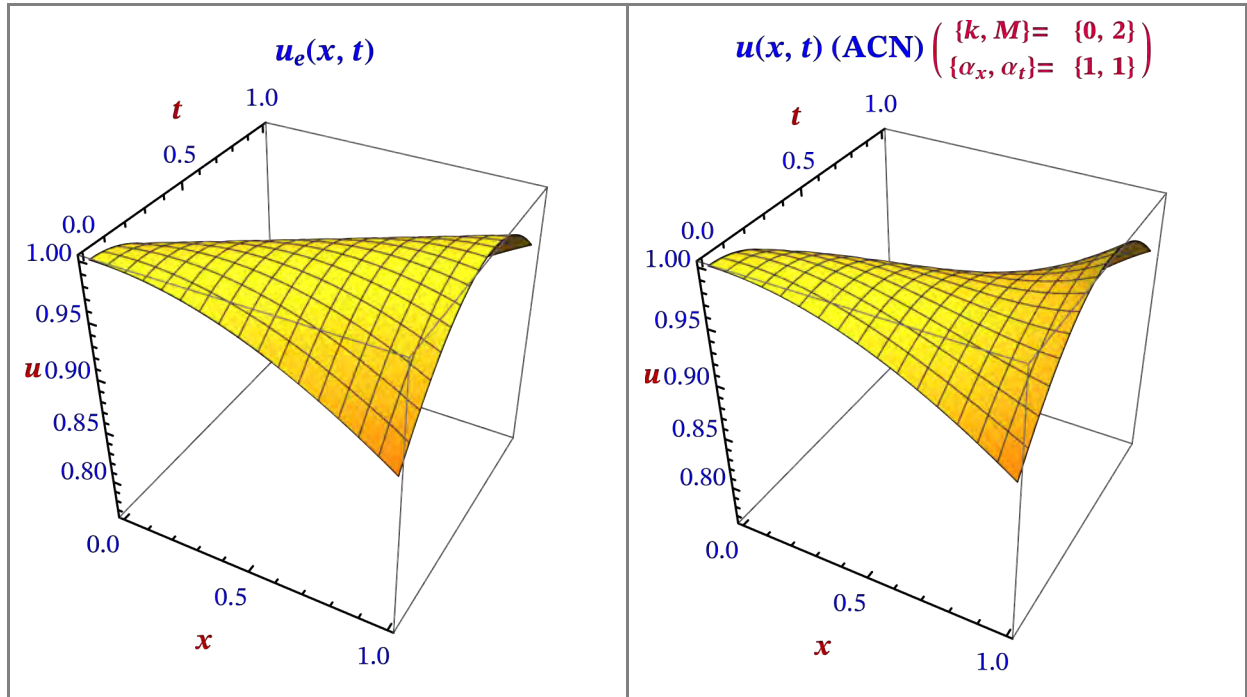
$$k, x_k, t_k, u(x_k, t_k), (\text{exacta}), u(x_k, t_k) (\text{FChWCM}), e = |u(x_l, t_s) (\text{ChWCM}) - u(x_l, t_s)|.$$

(iv) Hállense los errores L_∞ , L_2 y el error RMS.

$$(a) \begin{cases} [A, B] = & \{0, 1\} \\ T = & 1 \\ \{k, M\} = & \{0, 2\} \\ m^* = 2^k (M + 1) = & 3 \\ \{\alpha_x, \alpha_t\} = & \{1, 1\} \end{cases}$$

$$\alpha_1 = 1 \quad \alpha_2 = 1 \quad \alpha_3 = \varepsilon = 2 \quad \alpha_4 = \mu = 1 \quad x_0 = 0 \quad h(x, t) = 0.$$

Indicación:



SOLUCIÓN

(a)

Out[*]=

$$\left(\begin{array}{ll} [A, B] = & \{0, 1\} \\ T = & 1 \\ \{k, M\} = & \{0, 2\} \\ m^* = 2^k (M + 1) = & 3 \\ \{\alpha_x, \alpha_t\} = & \{1, 1\} \end{array} \right)$$

Método de Colocación *Wavelet* de Chelyshkov Fraccionario (FChWCM).

Ecuación de Benjamina–Bona–Mohany (BBM).

$$(FPDE) \equiv \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\alpha_1 u_t(x, t)}{F_1(x, t)} + \frac{\alpha_2 u_x(x, t)}{F_2(x, t)} + \frac{\alpha_3 u(x, t) u_x(x, t)}{F_3(x, t)} - \frac{\alpha_4 u_{xxx}(x, t)}{F_4(x, t)} = \frac{h(x, t)}{F_5(x, t)} & x \in (0, \\ u(x, 0) = f_1(x) & x \in [0, \\ u(0, t) = f_2(t) \quad u(1, t) = f_3(t) & t \in [0, \end{array} \right.$$

$$(FPDE) \equiv \left(\begin{array}{ll} \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\} = & \{1, 1, 2, 1\} \\ \left(u(x, 0) = \operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{\sqrt{10}}\right) \right) & x \in [0, 1] \\ \left(u(0, t) = \operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{3} \sqrt{\frac{5}{2}} t\right) \quad u(1, t) = \operatorname{sech}^2\left(\frac{1-\frac{5t}{3}}{\sqrt{10}}\right) \right) & t \in [0, 1] \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{lll} [A, B] = & [0, 1] & (\text{intervalo de } x \text{ y } t) \\ T = & 1 & (\text{ancho intervalo}) \\ \{k, M\} = & \{0, 2\} & (\text{resolución,} \\ & & \text{máx. grado polinomio}) \\ 2^k = & 1 & (\text{nº subintervalos}) \\ m^* = 2^k (M + 1) = & 3 & (\text{nº de Wavelets}) \\ \{\alpha_x, \alpha_t\} = & \{1, 1\} & (\text{orden fraccionario}) \end{array} \right)$$

(a.1) Matriz con los polinomios de Chelyshkov $\Phi(x)$.

$$\Phi(x) = C_{M,n}(x) = \begin{pmatrix} C_{2,0}(x) \\ C_{2,1}(x) \\ C_{2,2}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10x^2 - 12x + 3 \\ 4x - 5x^2 \\ x^2 \end{pmatrix}$$

(a.2) Matrices con las *Wavelets* de Chelyshkov fraccionarias $\Psi^{T,\alpha_1}(x)$, $\Psi^{T,\alpha_2}(t)$

$$\Psi^{T,\alpha}(x) = \begin{pmatrix} \psi_{0,0}^{1,1}(x) = \begin{cases} 10x^2 - 12x + 3 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{0,1}^{1,1}(x) = \begin{cases} \sqrt{3}(4 - 5x)x & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{0,2}^{1,1}(x) = \begin{cases} \sqrt{5}x^2 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \end{pmatrix}$$

$$\Psi^{T,\alpha_x}(x) = \begin{pmatrix} \begin{cases} 10x^2 - 12x + 3 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{3}(4 - 5x)x & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{5}x^2 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \end{pmatrix}$$

$$\Psi^{T,\alpha_t}(t) = \begin{pmatrix} \begin{cases} 10t^2 - 12t + 3 & 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{3}(4 - 5t)t & 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{5}t^2 & 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \end{pmatrix}$$

(b.1) Matrices integrales fraccionarias de $\Psi^{T,\alpha}$.

Operador integral fraccionario de Riemann–Liouville.

$$(J^{(1)}[\Psi^{T,\alpha_x}(x)]): \left(\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{3} & x > 1 \\ \frac{1}{3} x (10 x^2 - 18 x + 9) & 0 < x \leq 1 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{\sqrt{3}} & x > 1 \\ -\frac{x^2 (5 x - 6)}{\sqrt{3}} & 0 < x \leq 1 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\sqrt{5}}{3} & x > 1 \\ \frac{\sqrt{5} x^3}{3} & 0 < x \leq 1 \end{array} \right. \end{array} \right)$$

$$J^{(2)}[\Psi^{T,\alpha_x}(x)]): \left(\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{ll} \frac{x}{3} & x > 1 \\ \frac{1}{6} x^2 (5 x^2 - 12 x + 9) & 0 < x \leq 1 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{ll} \frac{4 x - 1}{4 \sqrt{3}} & x > 1 \\ -\frac{x^3 (5 x - 8)}{4 \sqrt{3}} & 0 < x \leq 1 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\sqrt{5} x^4}{12} & 0 < x \leq 1 \\ \sqrt{5} x^4 B_{\frac{1}{x}}(3, 2) & x > 1 \end{array} \right. \end{array} \right)$$

$$J^{(1)}[\Psi^{T,\alpha_t}(t)]): \left(\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{3} & t > 1 \\ \frac{1}{3} t (10 t^2 - 18 t + 9) & 0 < t \leq 1 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{\sqrt{3}} & t > 1 \\ -\frac{t^2 (5 t - 6)}{\sqrt{3}} & 0 < t \leq 1 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\sqrt{5}}{3} & t > 1 \\ \frac{\sqrt{5} t^3}{3} & 0 < t \leq 1 \end{array} \right. \end{array} \right)$$

$$J^{(1-\beta)} [\Psi^{T, \alpha_t}(t)]: \left\{ \begin{array}{ll} 0 & t \leq 0 \\ \frac{t^{1-\beta} (20 t^2 + 12 (\beta-3) t + 3 (\beta-3) (\beta-2))}{\Gamma(4-\beta)} & 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{t^{1-\beta} \left(-3 \left(\frac{t-1}{t} \right)^{1-\beta} + 2 t (\beta-1) \left(6 \frac{B_1(2,1-\beta)}{t} - 5 t \frac{B_1(3,1-\beta)}{t} \right) + 3 \right)}{\Gamma(2-\beta)} & \text{True} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\sqrt{3} t^{2-\beta} \left(4 \frac{B_1(2,1-\beta)}{t} - 5 t \frac{B_1(3,1-\beta)}{t} \right)}{\Gamma(1-\beta)} & t > 1 \\ -\frac{2 \sqrt{3} t^{2-\beta} (5 t + 2 \beta - 6)}{\Gamma(4-\beta)} & 0 < t \leq 1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\sqrt{5} t^{3-\beta} \frac{B_1(3,1-\beta)}{t}}{\Gamma(1-\beta)} & t > 1 \\ \frac{2 \sqrt{5} t^{3-\beta}}{\Gamma(4-\beta)} & 0 < t \leq 1 \end{array} \right.$$

(b.2) Matriz de coeficientes:

$$C = (C_{i,j}) = \begin{pmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} & C_{1,3} \\ C_{2,1} & C_{2,2} & C_{2,3} \\ C_{3,1} & C_{3,2} & C_{3,3} \end{pmatrix}$$

(c) Método de Colocación.

- Los puntos de colocación compuestos son las raíces del polinomio Legendre desplazado.
- Polinomio de Legendre desplazado en $[0, T]$ de grado $m^* = 9$:

$$L_{m^*}(x) = 48\,620\,t^9 - 218\,790\,t^8 + 411\,840\,t^7 - 420\,420\,t^6 + 252\,252\,t^5 - 90\,090\,t^4 + 18\,480\,t^3 - 1980\,t^2 + 90\,t - 1 \quad x \in [0, T]$$

- Ceros de $L_{m^*}(x)$: $x_k, t_k \in [0, T] \quad (k = 1, 2, \dots, m^*)$

$$x_k = \begin{pmatrix} x_1 & 0.0159199 \\ x_2 & 0.0819844 \\ x_3 & 0.193314 \\ x_4 & 0.337873 \\ x_5 & 0.5 \\ x_6 & 0.662127 \\ x_7 & 0.806686 \\ x_8 & 0.918016 \\ x_9 & 0.98408 \end{pmatrix} \quad t_k = \begin{pmatrix} t_1 & 0.0159199 \\ t_2 & 0.0819844 \\ t_3 & 0.193314 \\ t_4 & 0.337873 \\ t_5 & 0.5 \\ t_6 & 0.662127 \\ t_7 & 0.806686 \\ t_8 & 0.918016 \\ t_9 & 0.98408 \end{pmatrix}$$

(d) Resolución del sistema de ecuaciones en los coeficientes $C_{i,j}$ ($i, j = 1, \dots, m^*$)

Valores iniciales:

$$\begin{pmatrix} C_{1,1} & -0.0843879 \\ C_{1,2} & 0.0381031 \\ C_{1,3} & -0.233112 \\ C_{2,1} & -0.0333634 \\ C_{2,2} & -0.071061 \\ C_{2,3} & 0.278474 \\ C_{3,1} & 0.247527 \\ C_{3,2} & 0.382023 \\ C_{3,3} & -0.388716 \end{pmatrix}$$

- Método *Affine Covariant Newton* (ACN):

$$C [ACN] = \begin{pmatrix} C_{1,1} \rightarrow -0.0843879 \\ C_{1,2} \rightarrow 0.0381031 \\ C_{1,3} \rightarrow -0.233112 \\ C_{2,1} \rightarrow -0.0333634 \\ C_{2,2} \rightarrow -0.071061 \\ C_{2,3} \rightarrow 0.278474 \\ C_{3,1} \rightarrow 0.247527 \\ C_{3,2} \rightarrow 0.382023 \\ C_{3,3} \rightarrow -0.388716 \end{pmatrix} \quad EC_k(C_{i,j}) = \begin{pmatrix} 0.209867 \\ 0.221196 \\ 0.182106 \\ 0.100573 \\ 0.0184788 \\ 0.0109845 \\ 0.168529 \\ 0.4509 \\ 0.682335 \end{pmatrix}$$

$$C [ACN] (2) = \begin{pmatrix} C_{1,1} \rightarrow -1.17209 \\ C_{1,2} \rightarrow 4.95415 \\ C_{1,3} \rightarrow 19.7981 \\ C_{2,1} \rightarrow -5.73862 \\ C_{2,2} \rightarrow -5.31848 \\ C_{2,3} \rightarrow 17.4363 \\ C_{3,1} \rightarrow 19.9088 \\ C_{3,2} \rightarrow 2.52675 \\ C_{3,3} \rightarrow -11.9077 \end{pmatrix} \quad EC_k(C_{i,j}) = \begin{pmatrix} 0.207992 \\ 0.240532 \\ 0.383566 \\ 0.702439 \\ 0.742528 \\ 0.142599 \\ -0.437581 \\ -0.238033 \\ 0.468238 \end{pmatrix}$$

- Método de *Newton*: (NW):

$$C [NW] = \begin{pmatrix} C_{1,1} \rightarrow -0.183768 \\ C_{1,2} \rightarrow -0.0353727 \\ C_{1,3} \rightarrow 1.46012 \\ C_{2,1} \rightarrow -0.134407 \\ C_{2,2} \rightarrow -0.523749 \\ C_{2,3} \rightarrow 1.37674 \\ C_{3,1} \rightarrow 1.06038 \\ C_{3,2} \rightarrow 0.508751 \\ C_{3,3} \rightarrow -0.981749 \end{pmatrix} \quad EC_k(C_{i,j}) = \begin{pmatrix} 0.209861 \\ 0.221193 \\ 0.18213 \\ 0.100636 \\ 0.0185383 \\ 0.0110077 \\ 0.168525 \\ 0.450883 \\ 0.682313 \end{pmatrix}$$

• Método de la *Secante* (SC):

$$C [SC] = \begin{pmatrix} C_{1,1} \rightarrow -5.59885 \\ C_{1,2} \rightarrow -3.11409 \\ C_{1,3} \rightarrow 129.816 \\ C_{2,1} \rightarrow -7.40646 \\ C_{2,2} \rightarrow -29.5361 \\ C_{2,3} \rightarrow 82.978 \\ C_{3,1} \rightarrow 50.7558 \\ C_{3,2} \rightarrow 12.5257 \\ C_{3,3} \rightarrow -36.6554 \end{pmatrix} \quad EC_k(C_{i,j}) = \begin{pmatrix} 0.175227 \\ 0.31059 \\ 1.22374 \\ 2.3958 \\ 2.1969 \\ 0.557279 \\ -0.903947 \\ -0.982047 \\ -0.153673 \end{pmatrix}$$

• Método de *Newton* (valores iniciales aleatorios en $[-1, 1]$) :

$$C = (C_{i,j}) = \begin{pmatrix} C_{1,1} \rightarrow -0.183768 \\ C_{1,2} \rightarrow -0.0353727 \\ C_{1,3} \rightarrow 1.46012 \\ C_{2,1} \rightarrow -0.134407 \\ C_{2,2} \rightarrow -0.523749 \\ C_{2,3} \rightarrow 1.37674 \\ C_{3,1} \rightarrow 1.06038 \\ C_{3,2} \rightarrow 0.508751 \\ C_{3,3} \rightarrow -0.981749 \end{pmatrix} \quad EC_k(C_{i,j}) = \begin{pmatrix} 0.209861 \\ 0.221193 \\ 0.18213 \\ 0.100636 \\ 0.0185383 \\ 0.0110077 \\ 0.168525 \\ 0.450883 \\ 0.682313 \end{pmatrix}$$

Minimización de la suma de los cuadrados de EC_k :

$$\text{Mínimo} \left(\sum_k EC_k^2 \right) = \{8.14994 \times 10^{-12}, \\ \{C_{1,1} \rightarrow 2.11524, C_{1,2} \rightarrow -119.867, C_{1,3} \rightarrow -93.1091, C_{2,1} \rightarrow 79.9764, C_{2,2} \rightarrow 22.3429, \\ C_{2,3} \rightarrow -140.804, C_{3,1} \rightarrow -190.284, C_{3,2} \rightarrow -21.5874, C_{3,3} \rightarrow 96.4266\}\}$$

- Método de *Newton* (valores iniciales dados por *NMinimize*) :

$$\text{Suma } (EC_k(C_{i,j})^2) = \{1.49458 \times 10^{-26}\}$$

$$C = (C_{i,j}) = \begin{pmatrix} C_{1,1} \rightarrow 2.11523 \\ C_{1,2} \rightarrow -119.869 \\ C_{1,3} \rightarrow -93.1095 \\ C_{2,1} \rightarrow 79.9776 \\ C_{2,2} \rightarrow 22.3431 \\ C_{2,3} \rightarrow -140.805 \\ C_{3,1} \rightarrow -190.286 \\ C_{3,2} \rightarrow -21.5876 \\ C_{3,3} \rightarrow 96.4279 \end{pmatrix} \quad EC_k(C_{i,j}) = \begin{pmatrix} 8.88178 \times 10^{-16} \\ -8.88178 \times 10^{-16} \\ -2.84217 \times 10^{-14} \\ 0. \\ -4.26326 \times 10^{-14} \\ 0. \\ 8.52651 \times 10^{-14} \\ -4.26326 \times 10^{-14} \\ 5.68434 \times 10^{-14} \end{pmatrix}$$

- (e) Solución aproximada del problema (*Affine Covariant Newton*)

$$u(x, t) \simeq Q(x, 2, \alpha)^T . C . Q(t, 1, \alpha_1) - x [[Q(1, 2, \alpha)]^T . C . Q(t, 1, \alpha_1)] \\ + (1 - x) (f_2(t) - f_2(0)) + x (f_3(t) - f_3(0)) + f_1(x)$$

$$u(x, t) \simeq$$

$$\begin{aligned} & \text{sech}^2\left(\frac{x}{\sqrt{10}}\right) - x \left(0.00354781 \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & t > 1 \\ \frac{1}{3} t (10 t^2 - 18 t + 9) & 0 < t \leq 1 \end{pmatrix} + 0.0531166 \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & t > 1 \\ -\frac{t^2 (5t-6)}{\sqrt{3}} & 0 < t \leq 1 \end{pmatrix} - 0.0295541 \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{3} & t > 1 \\ \frac{\sqrt{5} t^3}{3} & 0 < t \leq 1 \end{pmatrix} \right) + \\ & \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & t > 1 \\ -\frac{t^2 (5t-6)}{\sqrt{3}} & 0 < t \leq 1 \end{pmatrix} \right. \\ & \left. \begin{pmatrix} 0.0381031 \begin{pmatrix} \frac{x}{3} & x > 1 \\ \frac{1}{6} x^2 (5x^2 - 12x + 9) & 0 < x \leq 1 \end{pmatrix} + 0.382023 \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5} x^4}{12} & 0 < x \leq 1 \\ \sqrt{5} x^4 B_1(3, 2) \frac{1}{x} & x > 1 \end{pmatrix} - 0.071061 \begin{pmatrix} \frac{4x-1}{4\sqrt{3}} & x > 1 \\ -\frac{x^3 (5x-8)}{4\sqrt{3}} & 0 < x \leq 1 \end{pmatrix} \right) + \\ & \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & t > 1 \\ \frac{1}{3} t (10 t^2 - 18 t + 9) & 0 < t \leq 1 \end{pmatrix} \right) - 0.0843879 \begin{pmatrix} \frac{x}{3} & x > 1 \\ \frac{1}{6} x^2 (5x^2 - 12x + 9) & 0 < x \leq 1 \end{pmatrix} + \\ & 0.247527 \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5} x^4}{12} & 0 < x \leq 1 \\ \sqrt{5} x^4 B_1(3, 2) \frac{1}{x} & x > 1 \end{pmatrix} - 0.0333634 \begin{pmatrix} \frac{4x-1}{4\sqrt{3}} & x > 1 \\ -\frac{x^3 (5x-8)}{4\sqrt{3}} & 0 < x \leq 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{3} & t > 1 \\ \frac{\sqrt{5} t^3}{3} & 0 < t \leq 1 \end{pmatrix} \\ & \left(-0.233112 \begin{pmatrix} \frac{x}{3} & x > 1 \\ \frac{1}{6} x^2 (5x^2 - 12x + 9) & 0 < x \leq 1 \end{pmatrix} - 0.388716 \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5} x^4}{12} & 0 < x \leq 1 \\ \sqrt{5} x^4 B_1(3, 2) \frac{1}{x} & x > 1 \end{pmatrix} + 0.278474 \begin{pmatrix} \frac{4x-1}{4\sqrt{3}} & x > 1 \\ -\frac{x^3 (5x-8)}{4\sqrt{3}} & 0 < x \leq 1 \end{pmatrix} \right) + \\ & x \left(\text{sech}^2\left(\frac{1 - \frac{5t}{3}}{\sqrt{10}}\right) - \text{sech}^2\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right) \right) + (1 - x) \left(\text{sech}^2\left(\frac{1}{3} \sqrt{\frac{5}{2}} t\right) - 1 \right) \end{aligned}$$

- Método *Affine Covariant Newton* (ACN).

- Error L_∞ :

$$\text{error-}L_\infty = \underset{\substack{0 \leq i < N \\ 0 \leq j < N}}{\text{Máx}} (|u(x_i, t_j) - u(x_i, t_j)(\text{FChWCM})|) = 2.34792 \times 10^{-2}$$

- Error- L_2 :

$$\text{error-}L_2 = \left(\sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} |u(x_i, t_j) - u(x_i, t_j)(\text{FChWCM})|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = 1.22431 \times 10^{-1}$$

- Error-RMS:

$$\text{error-RMS} = \frac{1}{N \times N} \left(\sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} |u(x_i, t_j) - u(x_i, t_j)(\text{FChWCM})|^2 \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$1.22431 \times 10^{-3}$$

- Método de Newton: (NW).

- Error L_∞ :

$$\text{error-}L_\infty = \underset{\substack{0 \leq i < N \\ 0 \leq j < N}}{\text{Máx}} (|u(x_i, t_j) - u(x_i, t_j)(\text{FChWCM})|) = 4.43488 \times 10^{-2}$$

- Error- L_2 :

$$\text{error-}L_2 = \left(\sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} |u(x_i, t_j) - u(x_i, t_j)(\text{FChWCM})|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = 2.14504 \times 10^{-1}$$

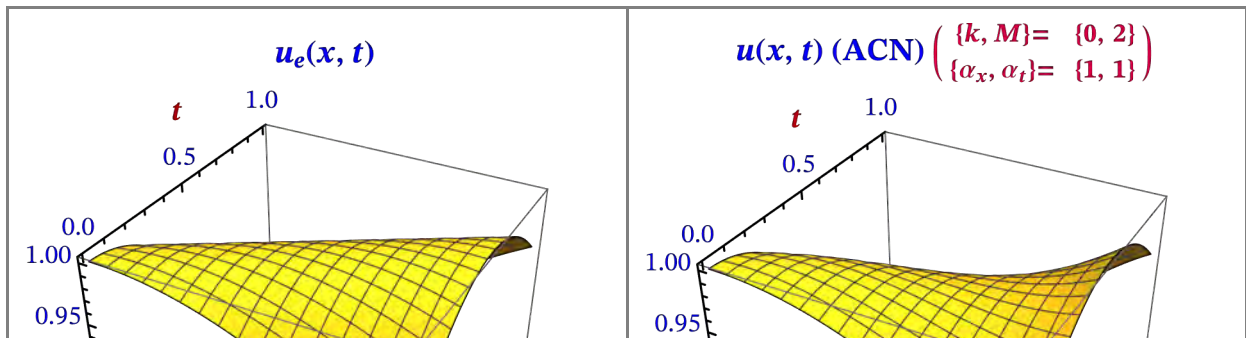
- Error-RMS:

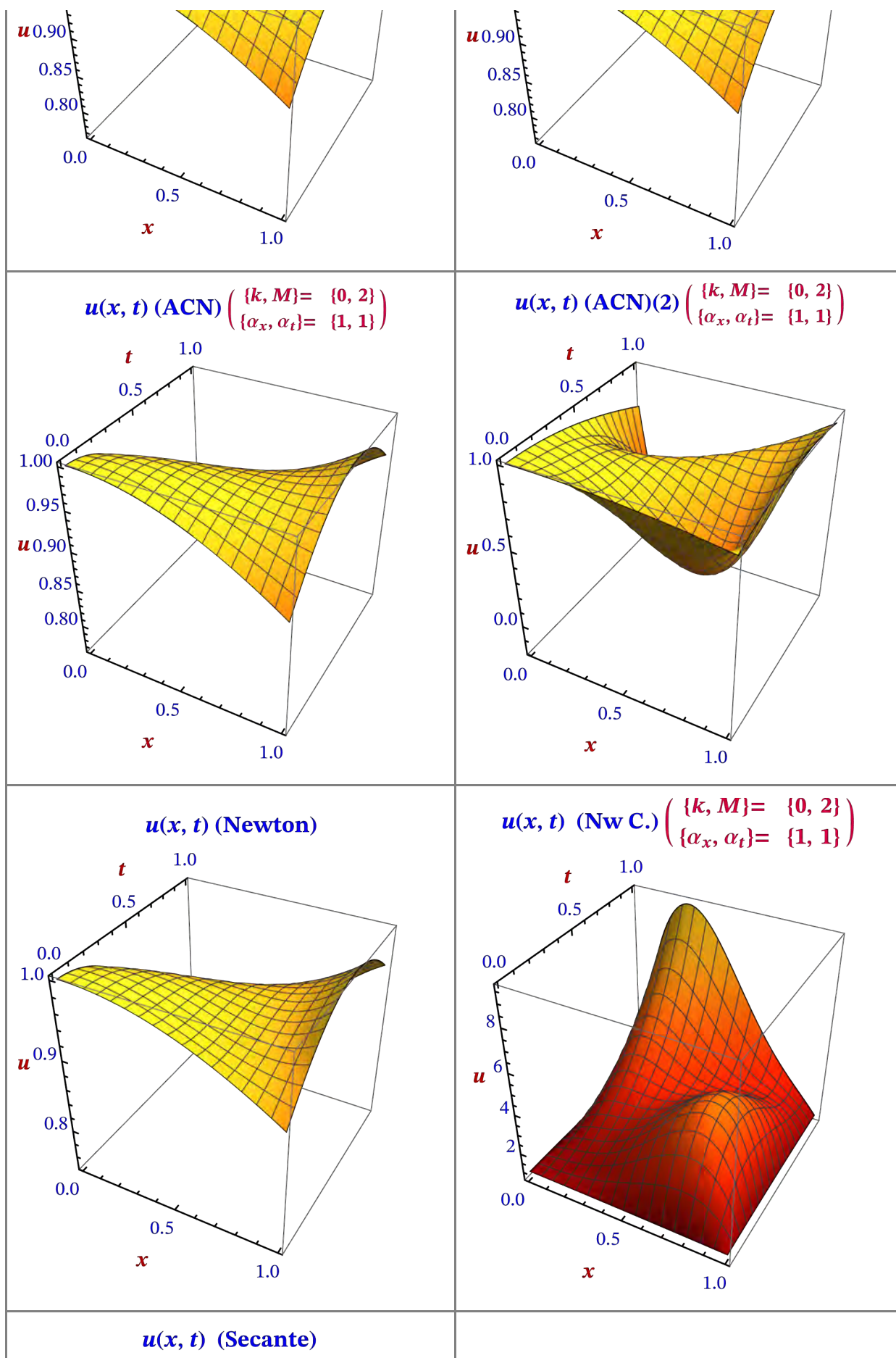
$$\text{error-RMS} = \frac{1}{N \times N} \left(\sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} |u(x_i, t_j) - u(x_i, t_j)(\text{FChWCM})|^2 \right)^{\frac{1}{2}} =$$

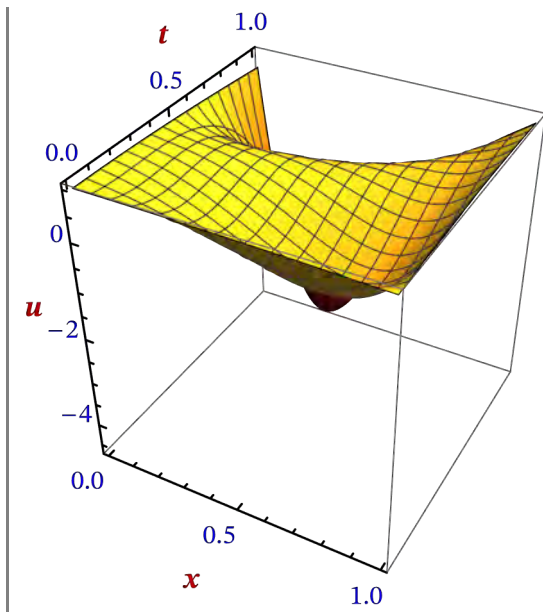
$$2.14504 \times 10^{-3}$$

(b)

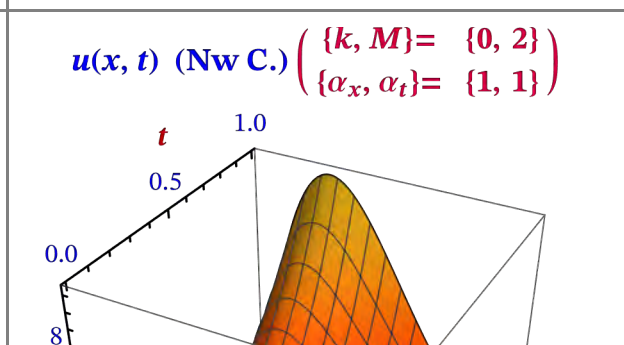
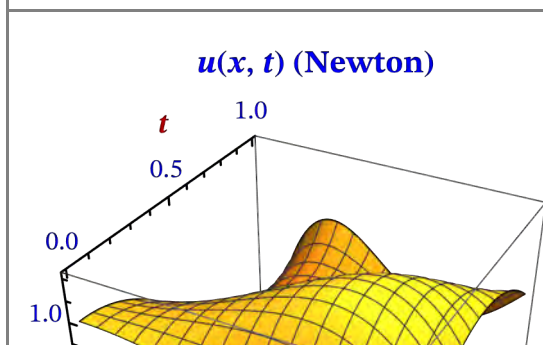
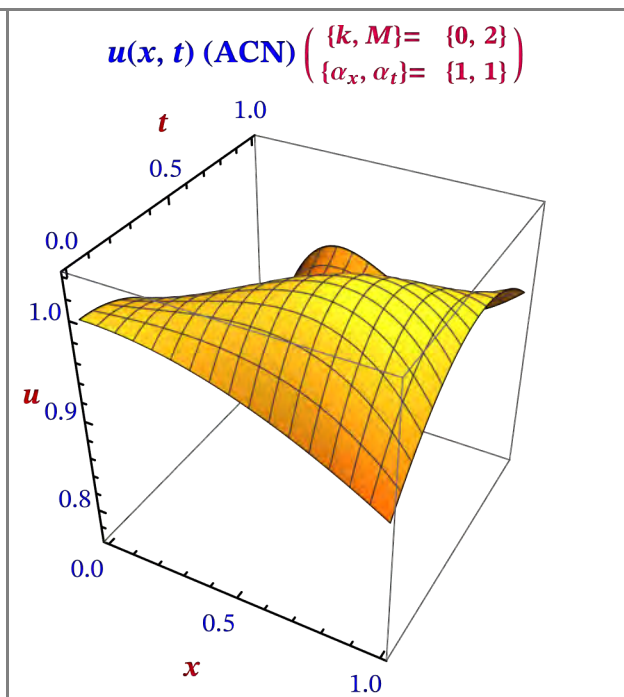
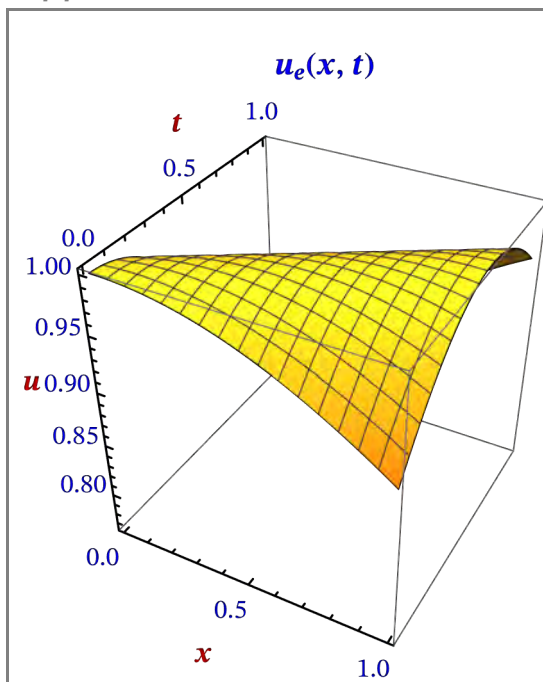
Out[*]=

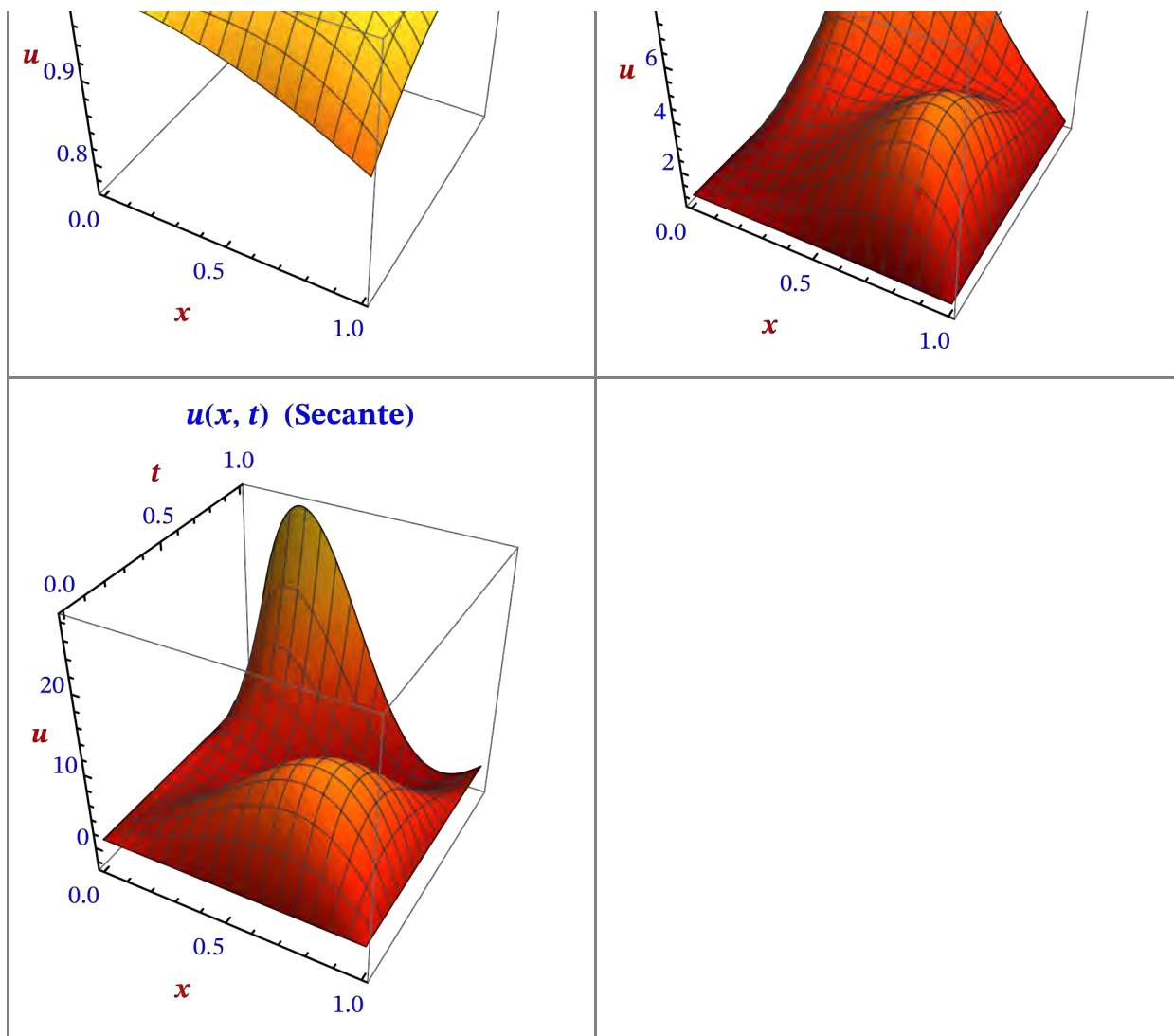




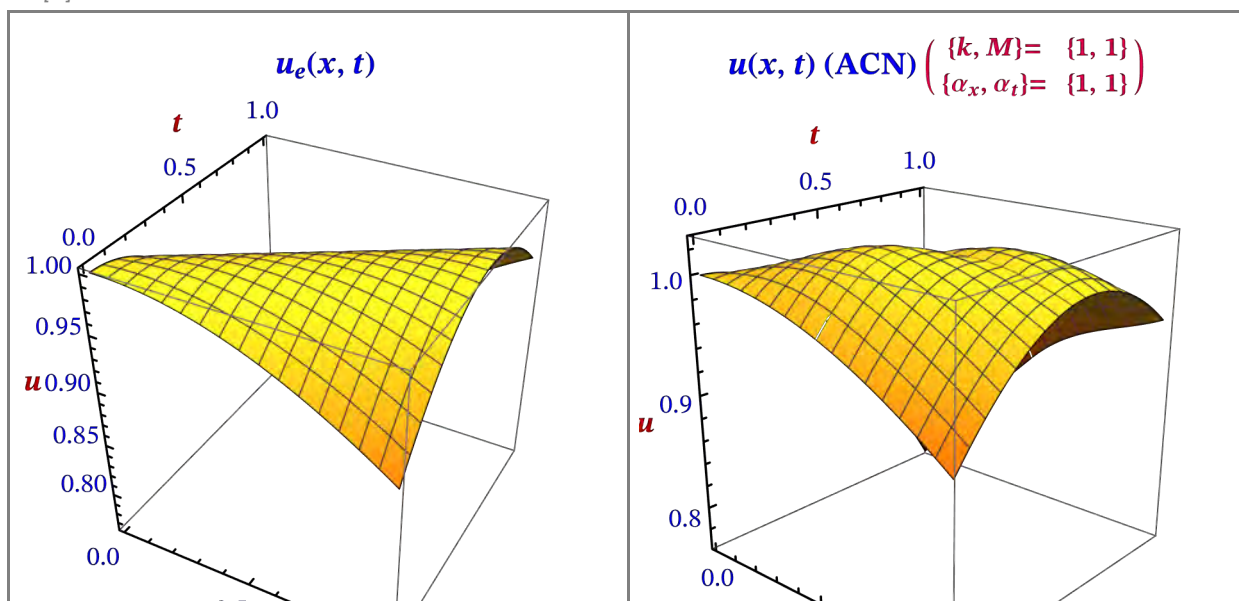


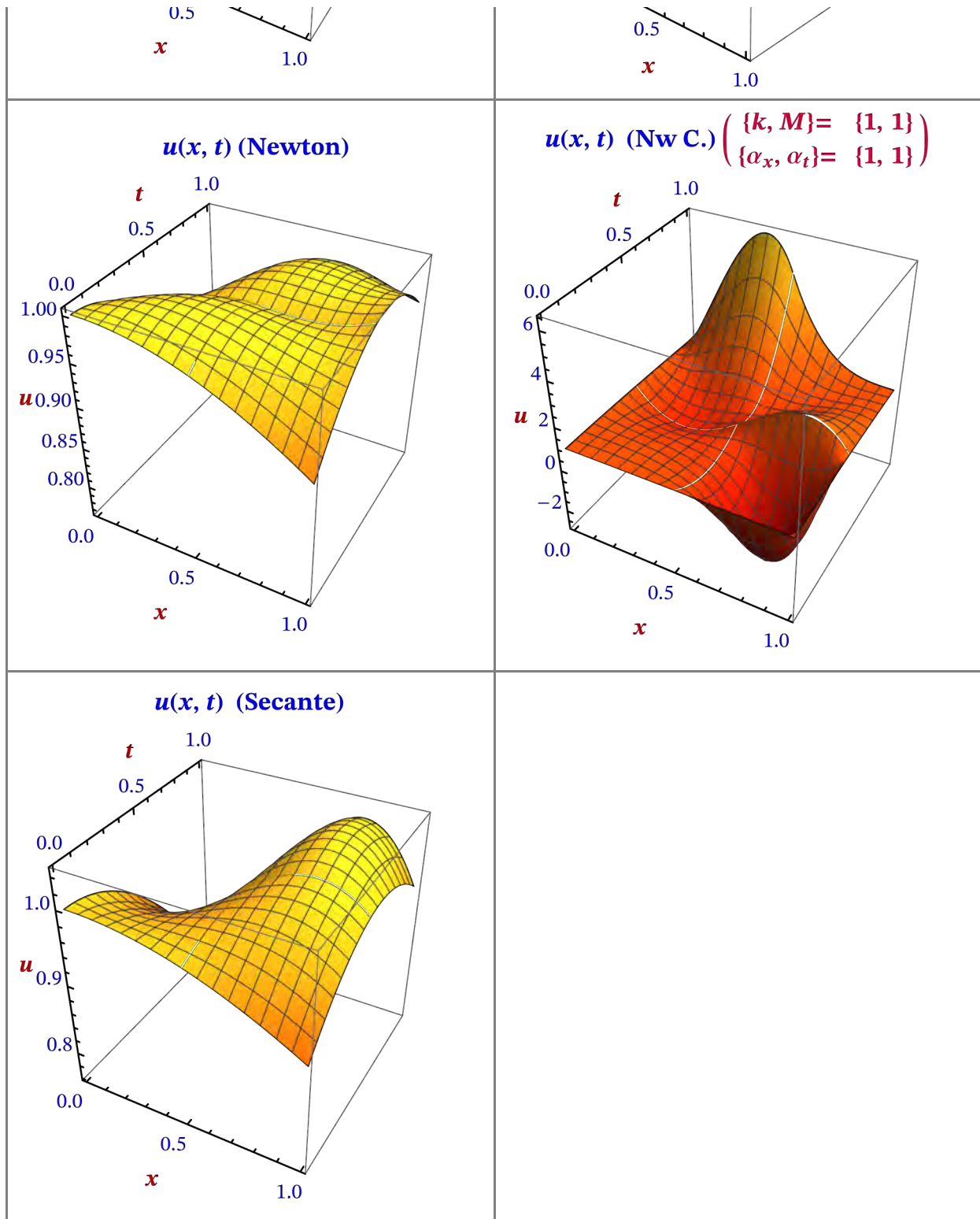
Out[•]=



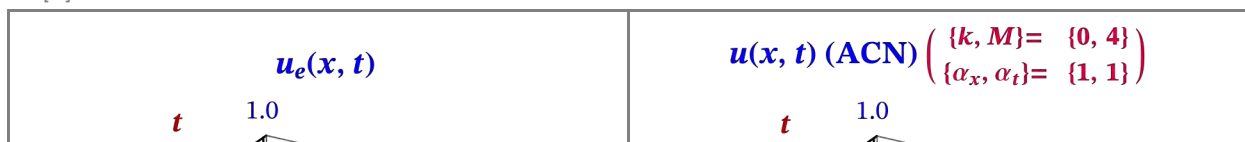


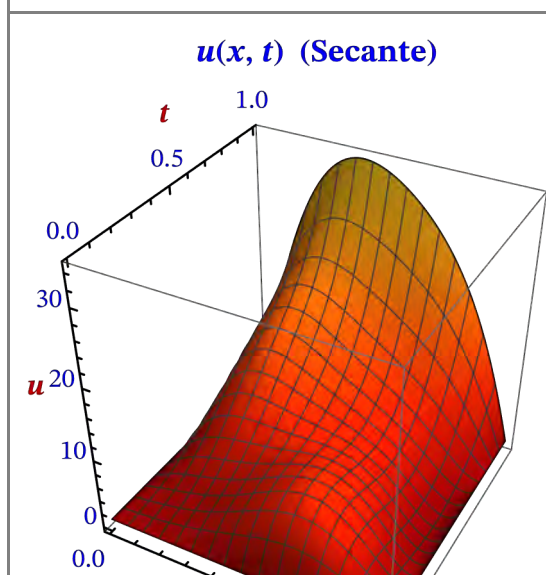
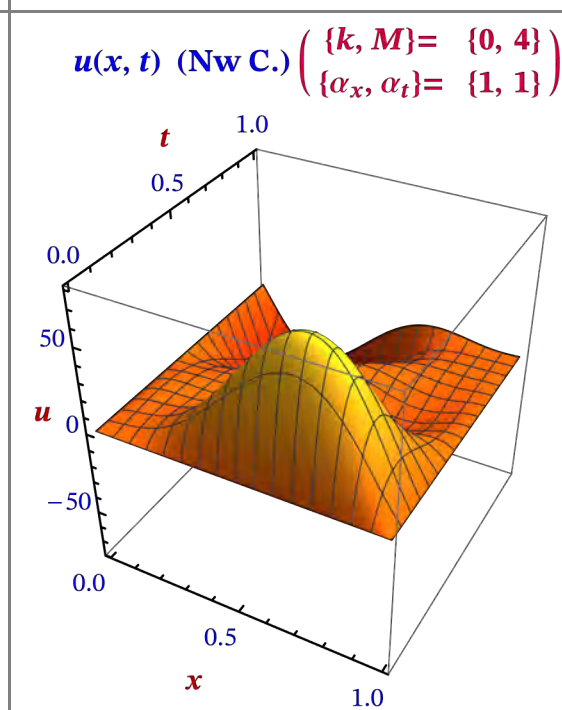
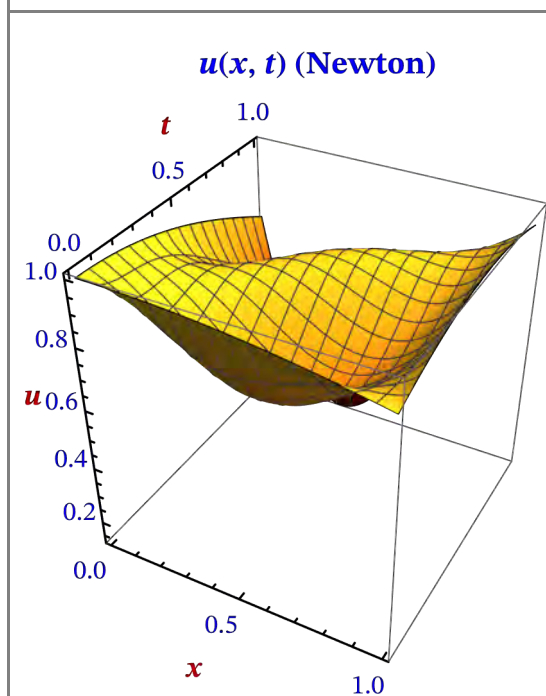
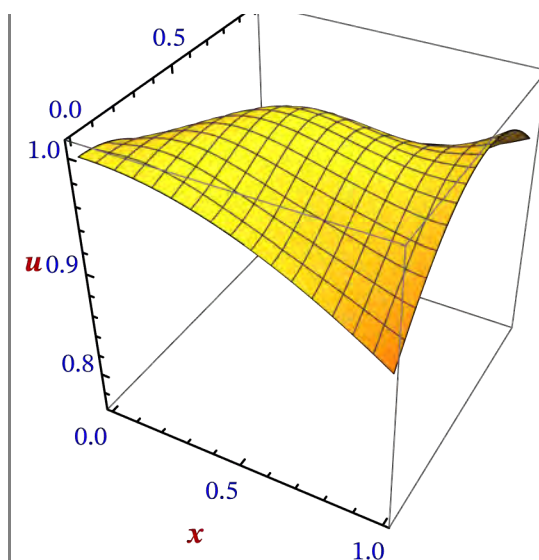
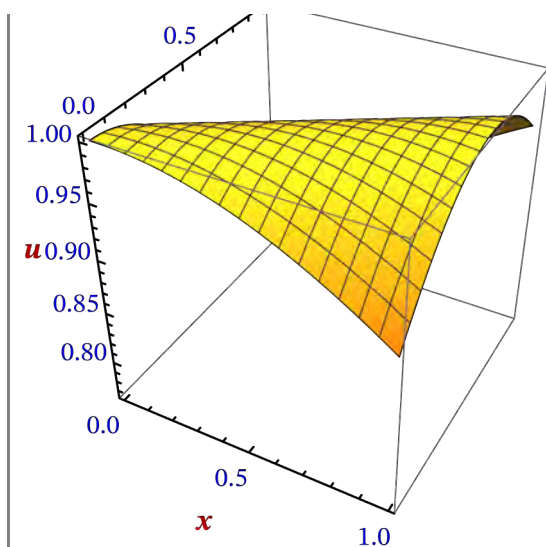
Out[*]=

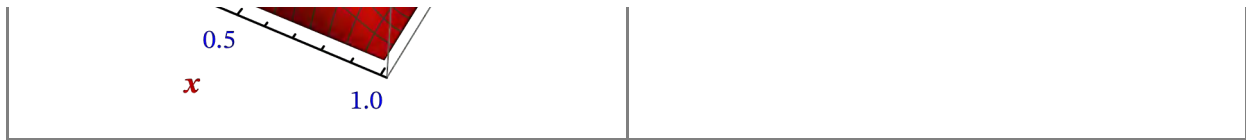




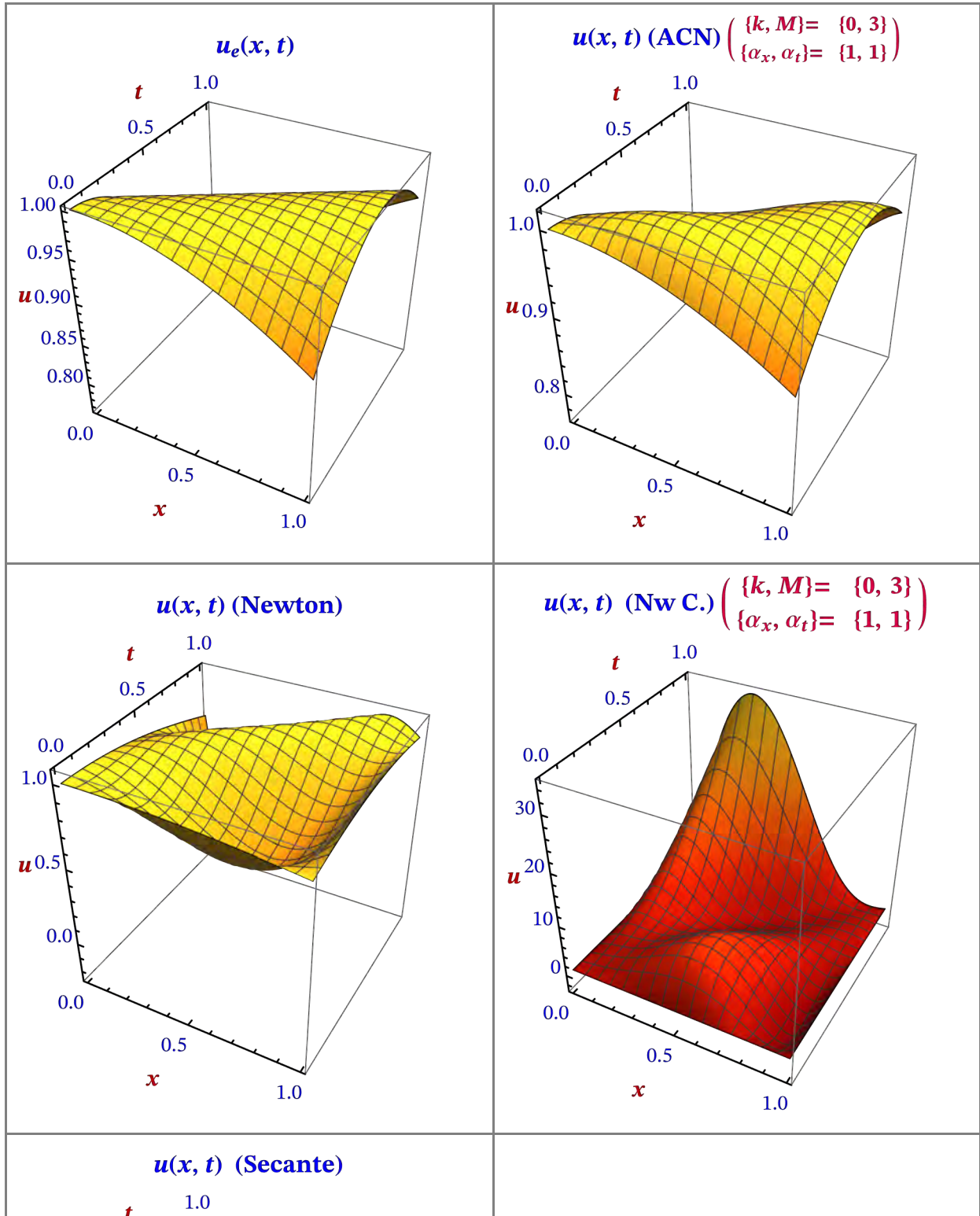
Out[•]=

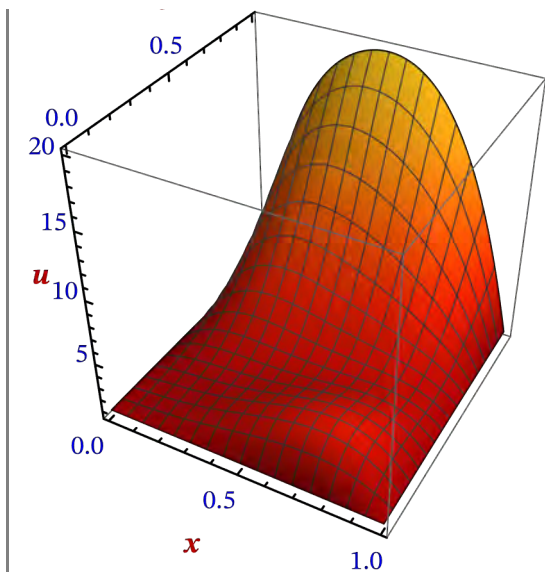




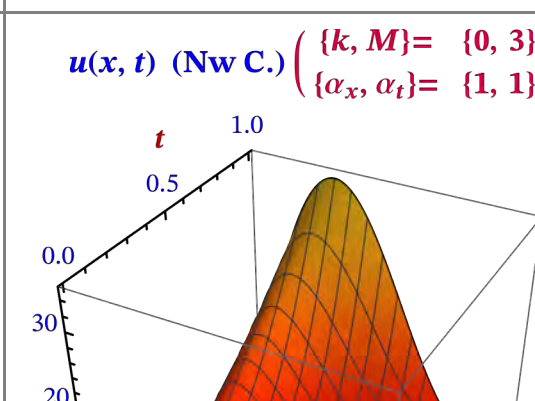
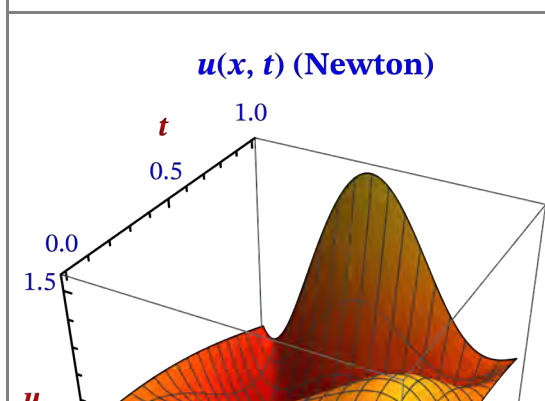
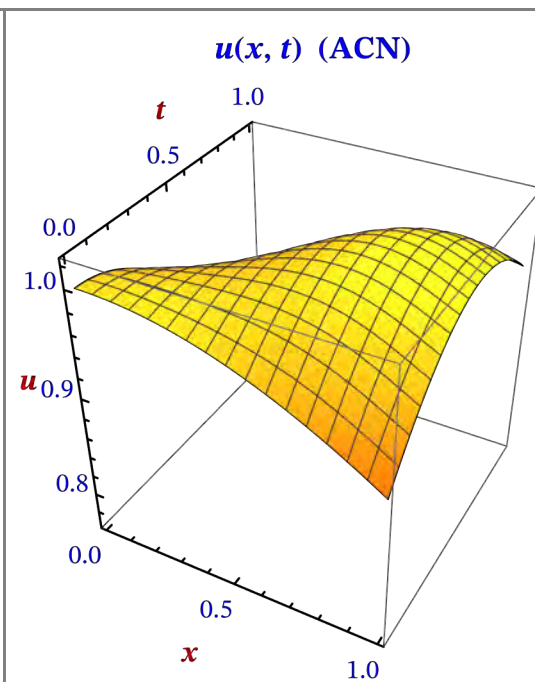
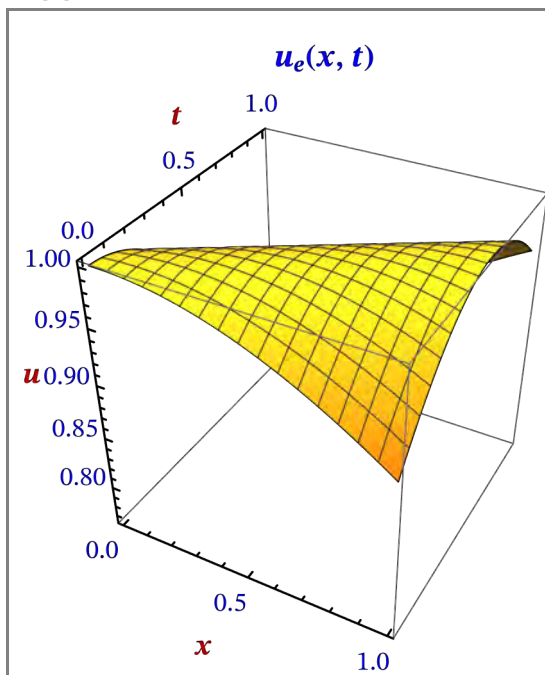


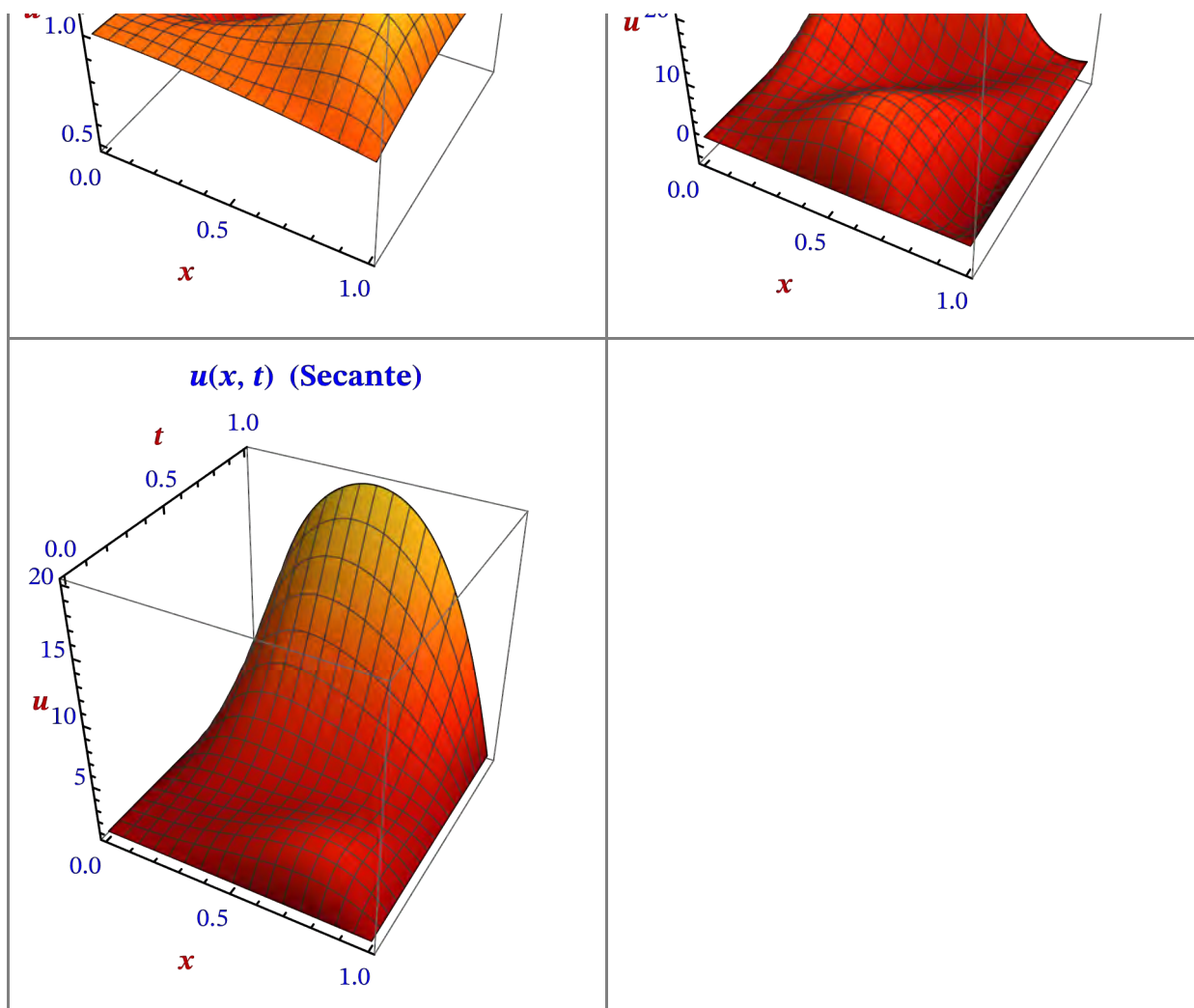
Out[•]=





Out[]=





3.2.11. Problemas (BBM)

■ Problema 3.2.4. ([SHIR19])

Sea ecuación de Benjamina–Bona–Mohany (BBM).

(i) Calcúlese la solución numérica aproximada mediante el Método de Colocación *Wavelet* de Chelyshkov Fraccionario (*Fractional Order Chelyshkov Wavelets Collocation Method*–FChWCM) que permite dar una solución numérica a la ecuación no lineal (PDE).

(ii) Represéntese la solución numérica $u(x, t)$ obtenida con el método FChWCM y la solución exacta.

(iii) Créese una tabla de valores en el intervalo $x \in [0, 1]$, $t \in [0, 1]$ con los datos:

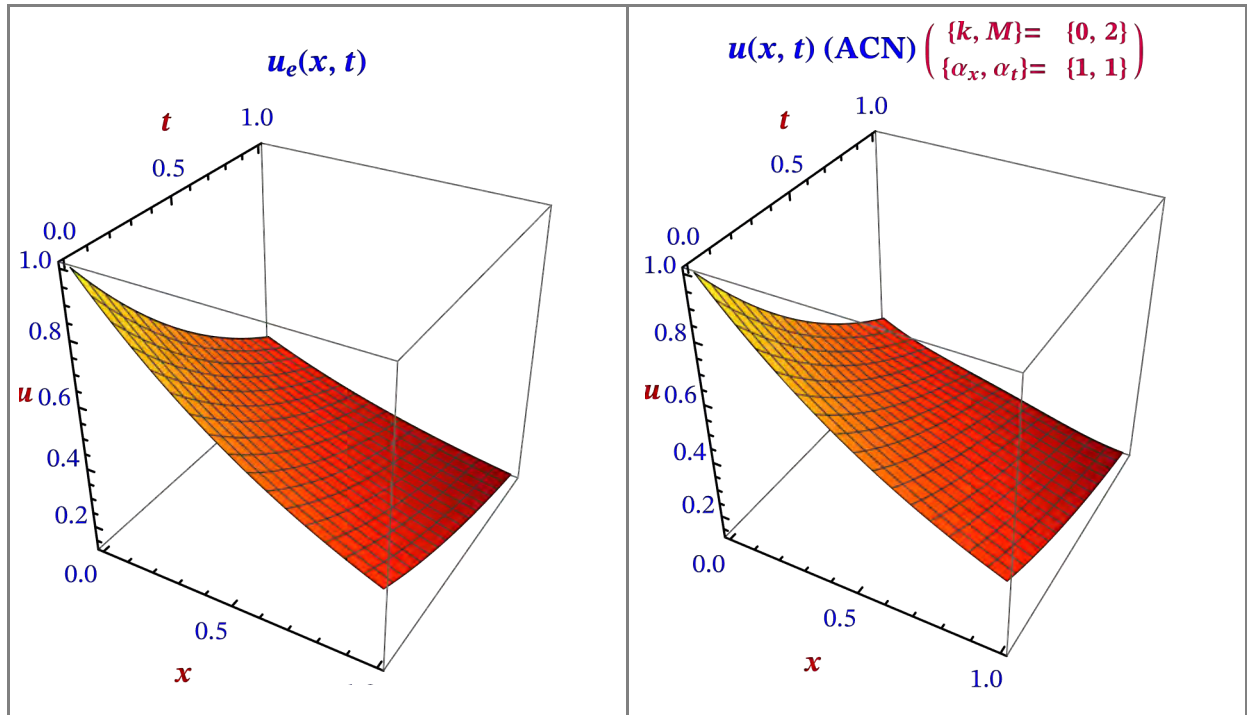
$$k, x_k, t_k, u(x_k, t_k), (\text{exacta}), u(x_k, t_k) (\text{FChWCM}), e = |u(x_l, t_s) (\text{ChWCM}) - u(x_l, t_s)|.$$

(iv) Hállense los errores L_∞ , L_2 y el error RMS.

$$(a) \left(\begin{array}{ll} [A, B] = & \{0, 1\} \\ T = & 1 \\ \{k, M\} = & \{0, 2\} \\ m^* = 2^k (M + 1) = & 3 \\ \{\alpha_x, \alpha_t\} = & \{1, 1\} \end{array} \right)$$

$$\alpha_1 = 1 \quad \alpha_2 = 1 \quad \alpha_3 = \varepsilon = 0 \quad \alpha_4 = \mu = 2 \quad x_0 = 0 \quad h(x, t) = 0.$$

Indicación:



SOLUCIÓN

(a)

Out[*]=

$$\left(\begin{array}{ll} [A, B] = & \{0, 1\} \\ T = & 1 \\ \{k, M\} = & \{0, 2\} \\ m^* = 2^k (M + 1) = & 3 \\ \{\alpha_x, \alpha_t\} = & \{1, 1\} \end{array} \right)$$

Método de Colocación *Wavelet* de Chelyshkov Fraccionario (FChWCM).

Ecuación de Benjamina–Bona–Mohany (BBM).

$$(FPDE) \equiv \begin{cases} \frac{\alpha_1 u_t(x, t)}{F_1(x, t)} + \frac{\alpha_2 u_x(x, t)}{F_2(x, t)} + \frac{\alpha_3 u(x, t) u_x(x, t)}{F_3(x, t)} - \frac{\alpha_4 u_{xxx}(x, t)}{F_4(x, t)} = \frac{h(x, t)}{F_5(x, t)} & x \in (0, 1) \\ u(x, 0) = f_1(x) & x \in [0, 1] \\ u(0, t) = f_2(t) \quad u(1, t) = f_3(t) & t \in [0, 1] \end{cases}$$

$$(FPDE) \equiv \begin{cases} \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\} = \{1, 1, 0, 2\} \\ (u(x, 0) = e^{-x}) & x \in [0, 1] \\ (u(0, t) = e^{-t} \quad u(1, t) = e^{-t-1}) & t \in [0, 1] \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{lll} [A, B] = & [0, 1] & \text{(intervalo de } x \text{ y } t) \\ T = & 1 & \text{(ancho intervalo)} \\ \{k, M\} = & \{0, 2\} & \text{(resolución,} \\ & & \text{máx. grado polinomio)} \\ 2^k = & 1 & \text{(nº subintervalos)} \\ m^* = 2^k (M + 1) = & 3 & \text{nº de Wavelets} \\ \{\alpha_x, \alpha_t\} = & \{1, 1\} & \text{orden fraccionario} \end{array} \right)$$

(a.1) Matriz con los polinomios de Chelyshkov $\Phi(x)$.

$$\Phi(x) = C_{M,n}(x) = \begin{pmatrix} C_{2,0}(x) \\ C_{2,1}(x) \\ C_{2,2}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10x^2 - 12x + 3 \\ 4x - 5x^2 \\ x^2 \end{pmatrix}$$

(a.2) Matrices con las *Wavelets* de Chelyshkov fraccionarias $\Psi^{T,\alpha_1}(x)$, $\Psi^{T,\alpha_2}(t)$

$$\Psi^{T,\alpha}(x) = \begin{pmatrix} \psi_{0,0}^{1,1}(x) = \begin{cases} 10x^2 - 12x + 3 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{0,1}^{1,1}(x) = \begin{cases} \sqrt{3}(4 - 5x)x & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{0,2}^{1,1}(x) = \begin{cases} \sqrt{5}x^2 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \end{pmatrix}$$

$$\Psi^{T,\alpha_x}(x) = \begin{pmatrix} \begin{cases} 10x^2 - 12x + 3 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{3}(4 - 5x)x & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{5}x^2 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \end{pmatrix}$$

$$\Psi^{T,\alpha_t}(t) = \begin{pmatrix} \begin{cases} 10t^2 - 12t + 3 & 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{3}(4 - 5t)t & 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{5}t^2 & 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \end{pmatrix}$$

(b.1) Matrices integrales fraccionarias de $\Psi^{T,\alpha}$.

Operador integral fraccionario de Riemann–Liouville.

$$(J^{(1)}[\Psi^{T,\alpha_x}(x)]): \left(\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{3} & x > 1 \\ \frac{1}{3} x (10 x^2 - 18 x + 9) & 0 < x \leq 1 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{\sqrt{3}} & x > 1 \\ -\frac{x^2 (5 x - 6)}{\sqrt{3}} & 0 < x \leq 1 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\sqrt{5}}{3} & x > 1 \\ \frac{\sqrt{5} x^3}{3} & 0 < x \leq 1 \end{array} \right. \end{array} \right)$$

$$J^{(2)}[\Psi^{T,\alpha_x}(x)]): \left(\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{ll} \frac{x}{3} & x > 1 \\ \frac{1}{6} x^2 (5 x^2 - 12 x + 9) & 0 < x \leq 1 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{ll} \frac{4 x - 1}{4 \sqrt{3}} & x > 1 \\ -\frac{x^3 (5 x - 8)}{4 \sqrt{3}} & 0 < x \leq 1 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\sqrt{5} x^4}{12} & 0 < x \leq 1 \\ \sqrt{5} x^4 B_{\frac{1}{x}}(3, 2) & x > 1 \end{array} \right. \end{array} \right)$$

$$J^{(1)}[\Psi^{T,\alpha_t}(t)]): \left(\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{3} & t > 1 \\ \frac{1}{3} t (10 t^2 - 18 t + 9) & 0 < t \leq 1 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{\sqrt{3}} & t > 1 \\ -\frac{t^2 (5 t - 6)}{\sqrt{3}} & 0 < t \leq 1 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\sqrt{5}}{3} & t > 1 \\ \frac{\sqrt{5} t^3}{3} & 0 < t \leq 1 \end{array} \right. \end{array} \right)$$

$$J^{(1-\beta)} [\Psi^{T, \alpha_t}(t)]: \left\{ \begin{array}{ll} 0 & t \leq 0 \\ \frac{t^{1-\beta} (20 t^2 + 12 (\beta-3) t + 3 (\beta-3) (\beta-2))}{\Gamma(4-\beta)} & 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{t^{1-\beta} \left(-3 \left(\frac{t-1}{t} \right)^{1-\beta} + 2 t (\beta-1) \left(6 \frac{B_1(2,1-\beta)}{t} - 5 t \frac{B_1(3,1-\beta)}{t} \right) + 3 \right)}{\Gamma(2-\beta)} & \text{True} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\sqrt{3} t^{2-\beta} \left(4 \frac{B_1(2,1-\beta)}{t} - 5 t \frac{B_1(3,1-\beta)}{t} \right)}{\Gamma(1-\beta)} & t > 1 \\ -\frac{2 \sqrt{3} t^{2-\beta} (5 t + 2 \beta - 6)}{\Gamma(4-\beta)} & 0 < t \leq 1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\sqrt{5} t^{3-\beta} \frac{B_1(3,1-\beta)}{t}}{\Gamma(1-\beta)} & t > 1 \\ \frac{2 \sqrt{5} t^{3-\beta}}{\Gamma(4-\beta)} & 0 < t \leq 1 \end{array} \right.$$

(b.2) Matriz de coeficientes:

$$C = (C_{i,j}) = \begin{pmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} & C_{1,3} \\ C_{2,1} & C_{2,2} & C_{2,3} \\ C_{3,1} & C_{3,2} & C_{3,3} \end{pmatrix}$$

(c) Método de Colocación.

- Los puntos de colocación compuestos son las raíces del polinomio Legendre desplazado.
- Polinomio de Legendre desplazado en $[0, T]$ de grado $m^* = 9$:

$$L_{m^*}(x) = 48\,620\,t^9 - 218\,790\,t^8 + 411\,840\,t^7 - 420\,420\,t^6 + 252\,252\,t^5 - 90\,090\,t^4 + 18\,480\,t^3 - 1980\,t^2 + 90\,t - 1 \quad x \in [0, T]$$

- Ceros de $L_{m^*}(x)$: $x_k, t_k \in [0, T] \quad (k = 1, 2, \dots, m^*)$

$$x_k = \begin{pmatrix} x_1 & 0.0159199 \\ x_2 & 0.0819844 \\ x_3 & 0.193314 \\ x_4 & 0.337873 \\ x_5 & 0.5 \\ x_6 & 0.662127 \\ x_7 & 0.806686 \\ x_8 & 0.918016 \\ x_9 & 0.98408 \end{pmatrix} \quad t_k = \begin{pmatrix} t_1 & 0.0159199 \\ t_2 & 0.0819844 \\ t_3 & 0.193314 \\ t_4 & 0.337873 \\ t_5 & 0.5 \\ t_6 & 0.662127 \\ t_7 & 0.806686 \\ t_8 & 0.918016 \\ t_9 & 0.98408 \end{pmatrix}$$

(d) Resolución del sistema de ecuaciones en los coeficientes $C_{i,j}$ ($i, j = 1, \dots, m^*$)

Valores iniciales:

$$\begin{pmatrix} C_{1,1} & 0.0498666 \\ C_{1,2} & 0.171402 \\ C_{1,3} & 0.123905 \\ C_{2,1} & -0.0954211 \\ C_{2,2} & -0.305842 \\ C_{2,3} & -0.342345 \\ C_{3,1} & -0.36062 \\ C_{3,2} & -0.284176 \\ C_{3,3} & 0.368303 \end{pmatrix}$$

- Método *Affine Covariant Newton* (ACN):

$$C [ACN] = \begin{pmatrix} C_{1,1} \rightarrow 0.0498666 \\ C_{1,2} \rightarrow 0.171402 \\ C_{1,3} \rightarrow 0.123905 \\ C_{2,1} \rightarrow -0.0954211 \\ C_{2,2} \rightarrow -0.305842 \\ C_{2,3} \rightarrow -0.342345 \\ C_{3,1} \rightarrow -0.36062 \\ C_{3,2} \rightarrow -0.284176 \\ C_{3,3} \rightarrow 0.368303 \end{pmatrix} \quad EC_k(C_{i,j}) = \begin{pmatrix} -3.92085 \\ -3.57013 \\ -2.88689 \\ -1.89176 \\ -0.906476 \\ -0.479592 \\ -0.891368 \\ -1.83427 \\ -2.66145 \end{pmatrix}$$

$$C [ACN] (2) = \begin{pmatrix} C_{1,1} \rightarrow 0.0498666 \\ C_{1,2} \rightarrow 0.171402 \\ C_{1,3} \rightarrow 0.123905 \\ C_{2,1} \rightarrow -0.0954211 \\ C_{2,2} \rightarrow -0.305842 \\ C_{2,3} \rightarrow -0.342345 \\ C_{3,1} \rightarrow -0.36062 \\ C_{3,2} \rightarrow -0.284176 \\ C_{3,3} \rightarrow 0.368303 \end{pmatrix} \quad EC_k(C_{i,j}) = \begin{pmatrix} -3.92085 \\ -3.57013 \\ -2.88689 \\ -1.89176 \\ -0.906476 \\ -0.479592 \\ -0.891368 \\ -1.83427 \\ -2.66145 \end{pmatrix}$$

- Método de *Newton*: (NW):

$$C [NW] = \begin{pmatrix} C_{1,1} \rightarrow 0.0498666 \\ C_{1,2} \rightarrow 0.171402 \\ C_{1,3} \rightarrow 0.123905 \\ C_{2,1} \rightarrow -0.0954211 \\ C_{2,2} \rightarrow -0.305842 \\ C_{2,3} \rightarrow -0.342345 \\ C_{3,1} \rightarrow -0.36062 \\ C_{3,2} \rightarrow -0.284176 \\ C_{3,3} \rightarrow 0.368303 \end{pmatrix} \quad EC_k(C_{i,j}) = \begin{pmatrix} -3.92085 \\ -3.57013 \\ -2.88689 \\ -1.89176 \\ -0.906476 \\ -0.479592 \\ -0.891368 \\ -1.83427 \\ -2.66145 \end{pmatrix}$$

• Método de la *Secante* (SC):

$$C [SC] = \begin{pmatrix} C_{1,1} \rightarrow -1.53906 \times 10^{14} \\ C_{1,2} \rightarrow -1.19605 \times 10^{14} \\ C_{1,3} \rightarrow -5.89384 \times 10^{14} \\ C_{2,1} \rightarrow -1.78631 \times 10^{14} \\ C_{2,2} \rightarrow -7.69973 \times 10^{14} \\ C_{2,3} \rightarrow -2.62661 \times 10^{15} \\ C_{3,1} \rightarrow 3.16825 \times 10^{15} \\ C_{3,2} \rightarrow 1.7568 \times 10^{15} \\ C_{3,3} \rightarrow -5.43968 \times 10^{15} \end{pmatrix} \quad EC_k(C_{i,j}) = \begin{pmatrix} -1.60156 \\ 10.5625 \\ 39. \\ 80.9375 \\ 102.766 \\ 55.8438 \\ -58.625 \\ -176.25 \\ -243.75 \end{pmatrix}$$

• Método de *Newton* (valores iniciales aleatorios en $[-1, 1]$):

$$C = (C_{i,j}) = \begin{pmatrix} C_{1,1} \rightarrow 0.0498666 \\ C_{1,2} \rightarrow 0.171402 \\ C_{1,3} \rightarrow 0.123905 \\ C_{2,1} \rightarrow -0.0954211 \\ C_{2,2} \rightarrow -0.305842 \\ C_{2,3} \rightarrow -0.342345 \\ C_{3,1} \rightarrow -0.36062 \\ C_{3,2} \rightarrow -0.284176 \\ C_{3,3} \rightarrow 0.368303 \end{pmatrix} \quad EC_k(C_{i,j}) = \begin{pmatrix} -3.92085 \\ -3.57013 \\ -2.88689 \\ -1.89176 \\ -0.906476 \\ -0.479592 \\ -0.891368 \\ -1.83427 \\ -2.66145 \end{pmatrix}$$

Minimización de la suma de los cuadrados de EC_k :

$$\begin{aligned} \text{Mínimo } \left(\sum_k EC_k^2 \right) &= \{6.88289, \\ &\{C_{1,1} \rightarrow 84.617, C_{1,2} \rightarrow 596.926, C_{1,3} \rightarrow 184.386, C_{2,1} \rightarrow -277.977, C_{2,2} \rightarrow 529.025, \\ &C_{2,3} \rightarrow -20.9912, C_{3,1} \rightarrow -966.332, C_{3,2} \rightarrow 526.707, C_{3,3} \rightarrow -81.9395\} \end{aligned}$$

- Método de *Newton* (valores iniciales dados por *NMinimize*) :

$$\text{Suma } (EC_k(C_{i,j})^2) = \{6.88289\}$$

$$C = (C_{i,j}) = \begin{pmatrix} C_{1,1} \rightarrow 84.617 \\ C_{1,2} \rightarrow 596.926 \\ C_{1,3} \rightarrow 184.386 \\ C_{2,1} \rightarrow -277.977 \\ C_{2,2} \rightarrow 529.025 \\ C_{2,3} \rightarrow -20.9912 \\ C_{3,1} \rightarrow -966.332 \\ C_{3,2} \rightarrow 526.707 \\ C_{3,3} \rightarrow -81.9395 \end{pmatrix} \quad EC_k(C_{i,j}) = \begin{pmatrix} -2.38679 \\ 0.711823 \\ 0.219271 \\ -0.53442 \\ 0.349607 \\ 0.0423116 \\ -0.320468 \\ 0.321978 \\ -0.124041 \end{pmatrix}$$

- (e) Solución aproximada del problema (*Affine Covariant Newton*)

$$u(x, t) \simeq Q(x, 2, \alpha)^T \cdot C \cdot Q(t, 1, \alpha_1) - x [[Q(1, 2, \alpha)]^T \cdot C \cdot Q(t, 1, \alpha_1)]$$

$$+ (1 - x) (f_2(t) - f_2(0)) + x (f_3(t) - f_3(0)) + f_1(x)$$

$$u(x, t) \simeq (-1 + e^{-t})(1 - x) + e^{-x} + \left(-\frac{1}{e} + e^{-t-1}\right)x -$$

$$\begin{aligned} & x \left(-0.091894 \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & t > 1 \\ \frac{1}{3} t (10t^2 - 18t + 9) & 0 < t \leq 1 \end{pmatrix} - 0.128252 \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & t > 1 \\ -\frac{t^2(5t-6)}{\sqrt{3}} & 0 < t \leq 1 \end{pmatrix} - 0.0383087 \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{3} & t > 1 \\ \frac{\sqrt{5} t^3}{3} & 0 < t \leq 1 \end{pmatrix} \right) + \\ & \left(\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{3} & t > 1 \\ \frac{\sqrt{5} t^3}{3} & 0 < t \leq 1 \end{pmatrix} \right) \\ & \left(0.123905 \begin{pmatrix} \frac{x}{3} & x > 1 \\ \frac{1}{6} x^2 (5x^2 - 12x + 9) & 0 < x \leq 1 \end{pmatrix} + 0.368303 \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5} x^4}{12} & 0 < x \leq 1 \\ \sqrt{5} x^4 B_1(3, 2) & x > 1 \end{pmatrix} - 0.342345 \begin{pmatrix} \frac{4x-1}{4\sqrt{3}} & x > 1 \\ -\frac{x^3(5x-8)}{4\sqrt{3}} & 0 < x \leq 1 \end{pmatrix} \right) + \\ & \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & t > 1 \\ -\frac{t^2(5t-6)}{\sqrt{3}} & 0 < t \leq 1 \end{pmatrix} \right) \left(0.171402 \begin{pmatrix} \frac{x}{3} & x > 1 \\ \frac{1}{6} x^2 (5x^2 - 12x + 9) & 0 < x \leq 1 \end{pmatrix} - 0.284176 \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5} x^4}{12} & 0 < x \leq 1 \\ \sqrt{5} x^4 B_1(3, 2) & x > 1 \end{pmatrix} - \right. \\ & \left. 0.305842 \begin{pmatrix} \frac{4x-1}{4\sqrt{3}} & x > 1 \\ -\frac{x^3(5x-8)}{4\sqrt{3}} & 0 < x \leq 1 \end{pmatrix} \right) + \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & t > 1 \\ \frac{1}{3} t (10t^2 - 18t + 9) & 0 < t \leq 1 \end{pmatrix} \right) \\ & \left(0.0498666 \begin{pmatrix} \frac{x}{3} & x > 1 \\ \frac{1}{6} x^2 (5x^2 - 12x + 9) & 0 < x \leq 1 \end{pmatrix} - 0.36062 \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5} x^4}{12} & 0 < x \leq 1 \\ \sqrt{5} x^4 B_1(3, 2) & x > 1 \end{pmatrix} - 0.0954211 \begin{pmatrix} \frac{4x-1}{4\sqrt{3}} & x > 1 \\ -\frac{x^3(5x-8)}{4\sqrt{3}} & 0 < x \leq 1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

- Método *Affine Covariant Newton* (ACN).

- Error L_∞ :

$$\text{error-}L_\infty = \underset{\substack{0 \leq i < N \\ 0 \leq j < N}}{\text{Máx}} (|u(x_i, t_j) - u(x_i, t_j)(\text{FChWCM})|) = 2.06989 \times 10^{-2}$$

- Error- L_2 :

$$\text{error-}L_2 = \left(\sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} |u(x_i, t_j) - u(x_i, t_j)(\text{FChWCM})|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = 9.70971 \times 10^{-2}$$

- Error-RMS:

$$\text{error-RMS} = \frac{1}{N \times N} \left(\sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} |u(x_i, t_j) - u(x_i, t_j)(\text{FChWCM})|^2 \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$9.70971 \times 10^{-4}$$

- Método de Newton: (NW).

- Error L_∞ :

$$\text{error-}L_\infty = \underset{\substack{0 \leq i < N \\ 0 \leq j < N}}{\text{Máx}} (|u(x_i, t_j) - u(x_i, t_j)(\text{FChWCM})|) = 2.06989 \times 10^{-2}$$

- Error- L_2 :

$$\text{error-}L_2 = \left(\sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} |u(x_i, t_j) - u(x_i, t_j)(\text{FChWCM})|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = 9.70971 \times 10^{-2}$$

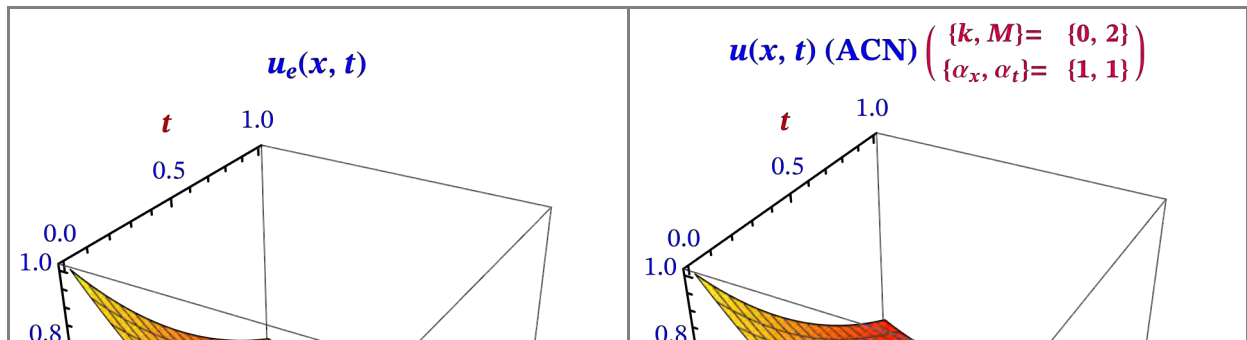
- Error-RMS:

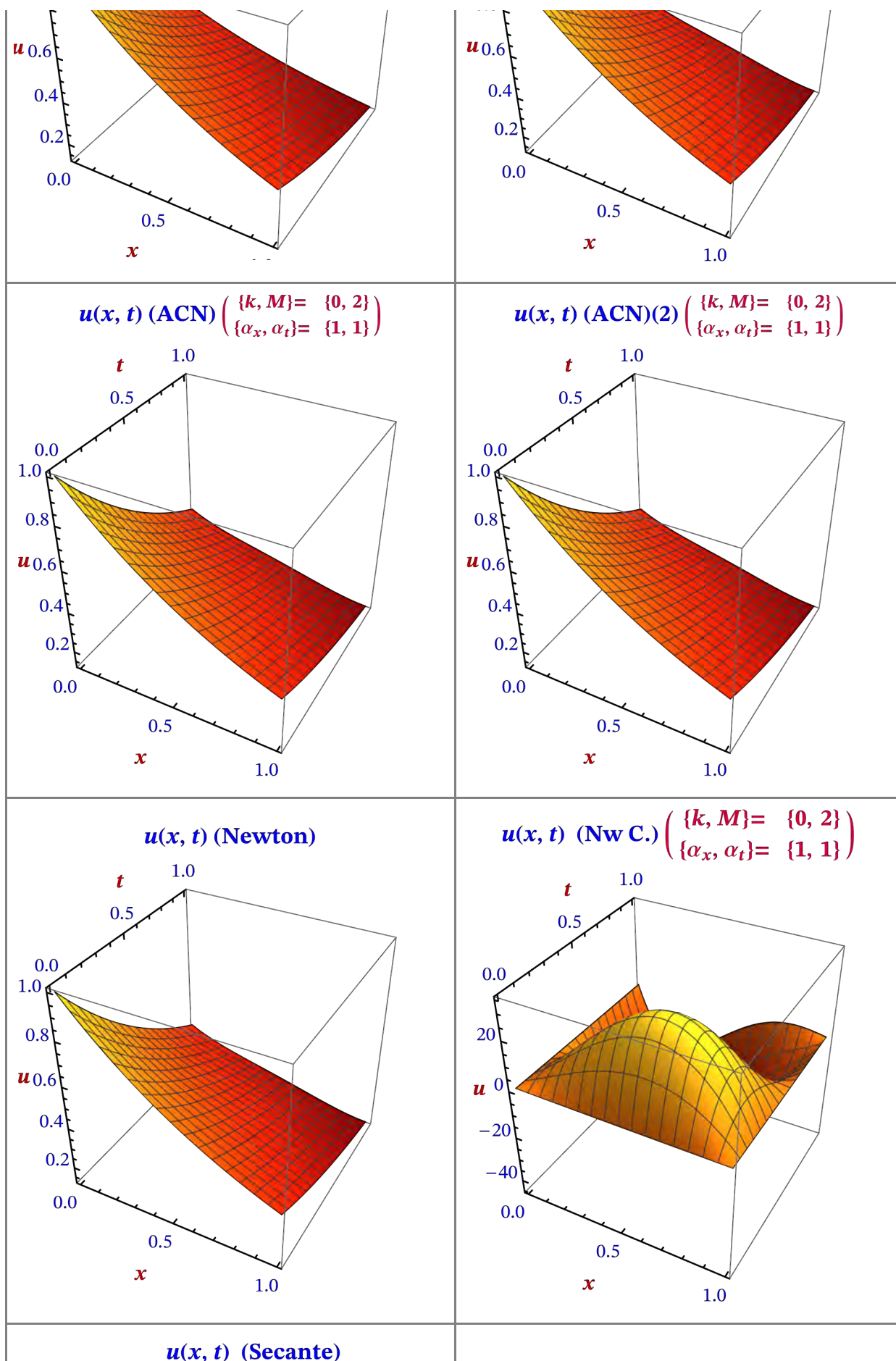
$$\text{error-RMS} = \frac{1}{N \times N} \left(\sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} |u(x_i, t_j) - u(x_i, t_j)(\text{FChWCM})|^2 \right)^{\frac{1}{2}} =$$

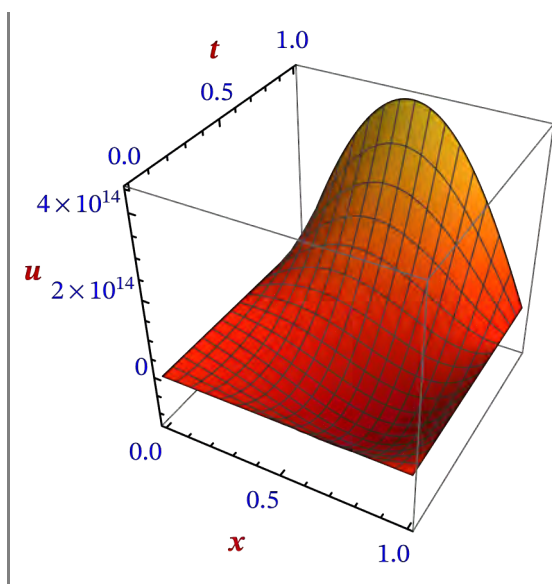
$$9.70971 \times 10^{-4}$$

(b)

Out[*]=







3.2.12. Ecuación No Lineal de Klein–Gordon (KG)

Las PDEs no lineales desempeñan un papel vital en matemáticas, ingeniería y física, como el fenómeno de circulación de ondas, movimiento de calor, electricidad, física de plasmas, mecánica de fluidos, etc. Las PDEs son de incontable atención en óptica no lineal y fundamentos cuánticos, como advección, Burgers, Boussinesq, ecuación de Fisher y muchas más.

En 1972, la ecuación BBM fue percibida por Benjamin, Bona y Mahony como una mejora de la ecuación de Korteweg–de–Vries (KdV) para ondas de agua planas en un canal idéntico. La ecuación BBM es de la forma: [MUL124], [KUMB23]:

(FPDE) $\equiv$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\alpha_1 u_t(x, t)}{F_1(x, t)} + \frac{\alpha_2 u_x(x, t)}{F_2(x, t)} + \frac{\alpha_3 u(x, t)^n u_x(x, t)}{F_3(x, t)} - \frac{\alpha_4 u_{xxt}(x, t)}{F_4(x, t)} = \frac{h(x, t)}{F_5(x, t)} \\ u(x, 0) = f_1(x) \\ u(0, t) = f_2(t) \quad u(1, t) = f_3(t) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} x \in [0, 1] \\ t \in [0, 1] \end{array} \quad (3.2.47)$$

(FPDE) $\equiv F_1(x, t) + F_2(x, t) + F_3(x, t) - F_4(x, t) = F_5(x, t)$.

En cambio, la ecuación de Korteweg–de–Vries (KdV) tiene la forma:

(FPDE) $\equiv$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\alpha_1 u_t(x, t)}{F_1(x, t)} + \frac{\alpha_2 u_x(x, t)}{F_2(x, t)} + \frac{\alpha_3 u(x, t) u_x(x, t)}{F_3(x, t)} - \frac{\alpha_4 u_{xxt}(x, t)}{F_4(x, t)} = \frac{h(x, t)}{F_5(x, t)} \\ u(x, 0) = f_1(x) \\ u(0, t) = f_2(t) \quad u(1, t) = f_3(t) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} x \in [0, 1] \\ t \in [0, 1] \end{array} \quad (3.2.48)$$

(FPDE) $\equiv F_1(x, t) + F_2(x, t) + F_3(x, t) - F_4(x, t) = F_5(x, t)$.

La principal diferencia entre las ecuaciones BBM y KdV radica en que solo son comparables para números de onda pequeños y producen resultados de onda diferentes.

La ecuación de Klein–Gordon (KG) es una ecuación diferencial parcial (PDE) ampliamente estudiada en física de la materia condensada.

Generalmente, las funciones con no linealidad que acompañan a la ecuación KG son polinomios o funciones sinusoidales. La ecuación de Schrödinger para la función de onda cuántica está relacionada con la ecuación KG.

Oscar Klein y Walter Gordon propusieron la ecuación KG en 1927 como una interesante

ecuación diferencial. La ecuación KG general tiene la forma [3];

$$(FPDE) \equiv \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \left[f_1(u(x, t)) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right]_x + f_2(u(x, t)). \quad (3.2.49)$$

En los siguientes problemas se aplica el método de colocación compuesto que utiliza las *Wavelets* de Chelyshkov de orden fraccionario para resolver numéricamente la ecuación de Klein–Gordon (KG): [[KUMB23](#)].

$$(FPDE) \equiv \alpha_1 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \alpha_2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \alpha_3 u(x, t) + \alpha_4 u^2(x, t) = h(x, t). \quad (3.2.50)$$

3.2.13. Ejemplos

■ Ejemplo 3.2.4. ([KUMB23])

Sea la ecuación no lineal de Klein–Gordon (KG) con las condiciones iniciales y de contorno dadas:

$$(\text{FPDE}) \equiv \begin{cases} \frac{\alpha_1 u_{tt}(x, t)}{F_1(x, t)} - \frac{\alpha_2 u_{xx}(x, t)}{F_2(x, t)} + \frac{\alpha_3 u(x, t)}{F_3(x, t)} + \frac{\alpha_4 u^2(x, t)}{F_4(x, t)} = \frac{h(x, t)}{F_5(x, t)} \\ u(x, 0) = f_1(x) = 0 & x \in [0, 1] \\ u(0, t) = f_2(t) = 0 & t \in [0, T] \\ u(1, t) = f_3(t) = \sin\left(\frac{\pi}{2} t\right) \end{cases}$$

con $x \in (0, 1)$ $t \in [0, T]$

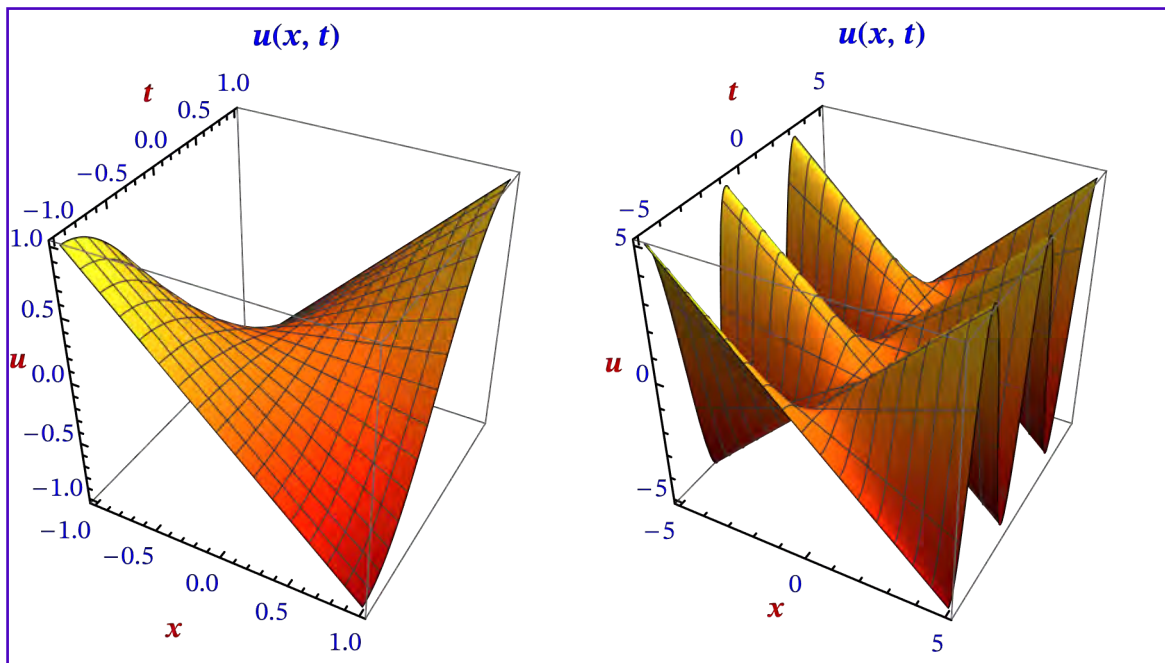
$$\alpha_1 = 1 \quad \alpha_2 = 1 \quad \alpha_3 = \frac{\pi^2}{4} \quad \alpha_4 = 1 \quad h(x, t) = x^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{2} t\right)$$

La solución exacta viene dada por la expresión:

$$u(x, t) = x \sin\left(\frac{\pi}{2} t\right).$$

- Represéntese la gráfica de $u(x, t)$ para $x \in [-X, X]$ y $t \in [-T, T]$.
- Compuébese que la solución $u(x, t)$ satisface el problema (FPDE).

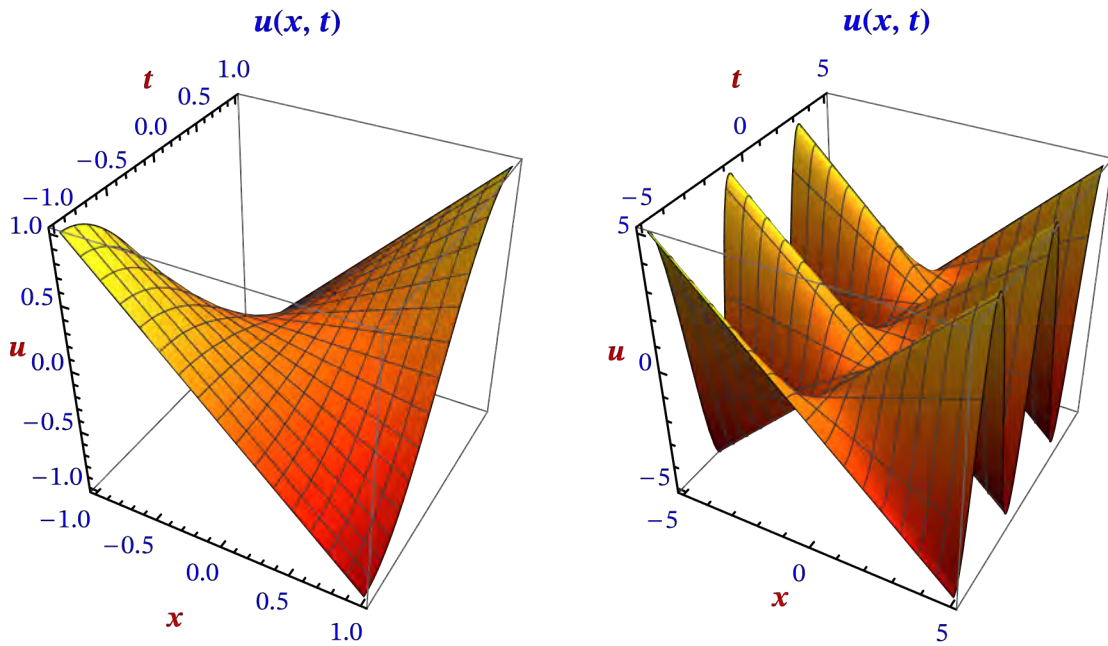
Indicación:



SOLUCIÓN

(a)

Out[*]=



(b)

Out[*]=

$$x \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)$$

Out[*]=

$$\begin{pmatrix} u(x, t) = & x \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) \\ F11(x, t) = & x^2 \sin^2\left(\frac{\pi t}{2}\right) \\ F12(x, t) = & x^2 \sin^2\left(\frac{\pi t}{2}\right) \end{pmatrix}$$

Out[*]=

$$\begin{pmatrix} (u(x, 0) = & 0) \\ u(0, t) = & 0 \\ u(1, t) = & \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) \end{pmatrix}$$

Out[•]//TableForm=

(x, t)	$F11(x, t)$	$F12(x, t)$
(0.1 0.1)	0.000244717	0.000244717
(0.1 0.3)	0.00206107	0.00206107
(0.1 0.5)	0.005	0.005
(0.1 0.7)	0.00793893	0.00793893
(0.1 0.9)	0.00975528	0.00975528
(0.3 0.1)	0.00220246	0.00220246
(0.3 0.3)	0.0185497	0.0185497
(0.3 0.5)	0.045	0.045
(0.3 0.7)	0.0714503	0.0714503
(0.3 0.9)	0.0877975	0.0877975
(0.5 0.1)	0.00611794	0.00611794
(0.5 0.3)	0.0515268	0.0515268
(0.5 0.5)	0.125	0.125
(0.5 0.7)	0.198473	0.198473
(0.5 0.9)	0.243882	0.243882
(0.7 0.1)	0.0119912	0.0119912
(0.7 0.3)	0.100993	0.100993
(0.7 0.5)	0.245	0.245
(0.7 0.7)	0.389007	0.389007
(0.7 0.9)	0.478009	0.478009
(0.9 0.1)	0.0198221	0.0198221
(0.9 0.3)	0.166947	0.166947
(0.9 0.5)	0.405	0.405
(0.9 0.7)	0.643053	0.643053
(0.9 0.9)	0.790178	0.790178

3.2.14. Problemas

■ Problema 3.2.5. ([KUMB23])

Sea la ecuación no lineal de Klein–Gordon (KG) con las condiciones iniciales y de contorno dadas:

$$(FPDE) \equiv \begin{cases} \frac{\alpha_1 u_{tt}(x, t)}{F_1(x, t)} - \frac{\alpha_2 u_{xx}(x, t)}{F_2(x, t)} + \frac{\alpha_3 u(x, t)}{F_3(x, t)} + \frac{\alpha_4 u^2(x, t)}{F_4(x, t)} = \frac{h(x, t)}{F_5(x, t)} \\ u(x, 0) = f_1(x) = 0 & x \in [0, 1] \\ u(0, t) = f_2(t) = 0 & t \in [0, T] \\ u(1, t) = f_3(t) = \sin\left(\frac{\pi}{2} t\right) \end{cases}$$

con $x \in (0, 1)$ $t \in [0, T]$

$$\alpha_1 = 1 \quad \alpha_2 = 1 \quad \alpha_3 = \frac{\pi^2}{4} \quad \alpha_4 = 1 \quad h(x, t) = x^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{2} t\right).$$

La solución exacta viene dada por la expresión:

$$u(x, t) = x \sin\left(\frac{\pi}{2} t\right).$$

(i) Calcúlese la solución numérica aproximada mediante el Método de Colocación Wavelet de Chelyshkov Fraccionario (*Fractional Order Chelyshkov Wavelets Collocation Method*–FChWCM) que permite dar una solución numérica a la ecuación no lineal (PDE).

(ii) Represéntese la solución numérica $u(x, t)$ obtenida con el método FChWCM y la solución exacta.

(iii) Créese una tabla de valores en el intervalo $x \in [0, 1]$, $t \in [0, 1]$ con los datos:

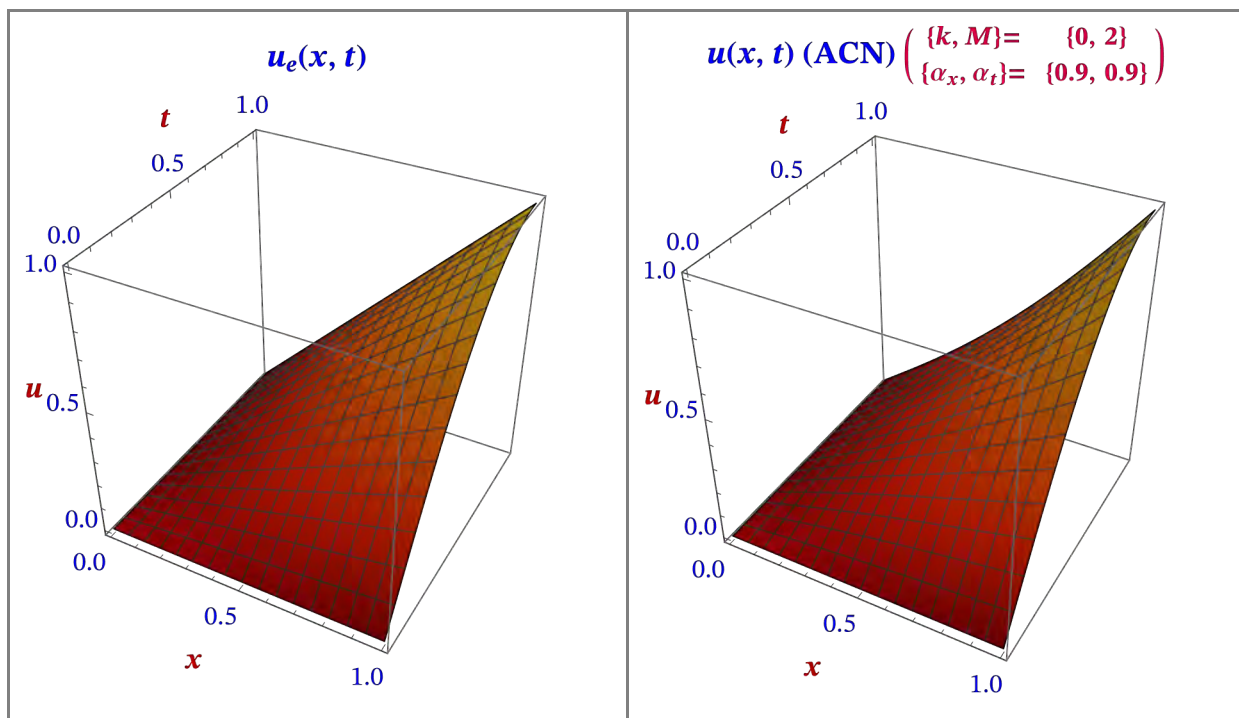
$$k, x_k, t_k, u(x_k, t_k), (\text{exacta}), u(x_k, t_k) (\text{FChWCM}), e = |u(x_l, t_s) (\text{ChWCM}) - u(x_l, t_s)|.$$

(iv) Hállense los errores L_∞ , L_2 y el error RMS.

$$(a) \begin{pmatrix} [A, B] = & \{0, 1\} \\ T = & 1 \\ \{k, M\} = & \{0, 2\} \\ m^* = 2^k (M + 1) = & 3 \\ \{\alpha_x, \alpha_t\} = & \{0.9, 0.9\} \end{pmatrix}.$$

$$\alpha_1 = 1 \quad \alpha_2 = 1 \quad \alpha_3 = \frac{\pi^2}{4} \quad \alpha_4 = 1 \quad h(x, t) = x^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{2} t\right).$$

Indicación:

**SOLUCIÓN**

(a)

Out[•]=

$$\left(\begin{array}{ll} [A, B] = & \{0, 1\} \\ T = & 1 \\ \{k, M\} = & \{0, 2\} \\ m^* = 2^k (M + 1) = & 3 \\ \{\alpha_x, \alpha_t\} = & \{0.9, 0.9\} \end{array} \right)$$

Método de Colocación *Wavelet* de Chelyshkov Fraccionario (FChWCM).

Ecuación de Klein–Gordon (KG).

(FPDE) $\equiv$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\alpha_1 u_{tt}(x, t)}{F_1(x, t)} - \frac{\alpha_2 u_{xx}(x, t)}{F_2(x, t)} + \frac{\alpha_3 u(x, t)}{F_3(x, t)} + \frac{\alpha_4 u^2(x, t)}{F_4(x, t)} = \frac{h(x, t)}{F_5(x, t)} \quad x \in (0, 1) \quad t \in [0, 1] \\ u(x, 0) = f_1(x) \quad x \in [0, 1] \\ u(0, t) = f_2(t) \quad u(1, t) = f_3(t) \quad t \in [0, T] \end{array} \right.$$

$$(FPDE) \equiv \left(\begin{array}{ll} \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\} = & \left\{1, 1, \frac{\pi^2}{4}, 1\right\} \\ (u(x, 0) = 0) & x \in [0, 1] \\ \left(u(0, t) = 0 \quad u(1, t) = \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right) & t \in [0, 1] \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{lll} [A, B] = & [0, 1] & \text{(intervalo de } x \text{ y } t) \\ T = & 1 & \text{(ancho intervalo)} \\ \{k, M\} = & \{0, 2\} & \text{(resolución,} \\ & & \text{máx. grado polinomio)} \\ 2^k = & 1 & \text{(nº subintervalos)} \\ m^* = 2^k (M + 1) = & 3 & \text{nº de Wavelets} \\ \{\alpha_x, \alpha_t\} = & \{0.9, 0.9\} & \text{orden fraccionario} \end{array} \right)$$

(a.1) Matriz con los polinomios de Chelyshkov $\Phi(x)$.

$$\Phi(x) = C_{M,n}(x) = \begin{pmatrix} C_{2,0}(x) \\ C_{2,1}(x) \\ C_{2,2}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10x^2 - 12x + 3 \\ 4x - 5x^2 \\ x^2 \end{pmatrix}$$

(a.2) Matrices con las *Wavelets* de Chelyshkov fraccionarias $\Psi^{T,\alpha_1}(x)$, $\Psi^{T,\alpha_2}(t)$

$$\Psi^{T,\alpha}(x) = \begin{pmatrix} \psi_{0,0}^{1,0.9}(x) = \begin{cases} -12.(-0.833333x^{1.8} + x^{0.9} - 0.25) & 0. \leq x < 1. \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{0,1}^{1,0.9}(x) = \begin{cases} \sqrt{3}(4x^{0.9} - 5x^{1.8}) & 0. \leq x < 1. \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{0,2}^{1,0.9}(x) = \begin{cases} \sqrt{5}x^{1.8} & 0. \leq x < 1. \\ 0 & \text{True} \end{cases} \end{pmatrix}$$

$$\Psi^{T,\alpha_x}(x) = \begin{pmatrix} \begin{cases} -12.(-0.833333x^{1.8} + x^{0.9} - 0.25) & 0. \leq x < 1. \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{3}(4x^{0.9} - 5x^{1.8}) & 0. \leq x < 1. \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{5}x^{1.8} & 0. \leq x < 1. \\ 0 & \text{True} \end{cases} \end{pmatrix}$$

$$\Psi^{T,\alpha_t}(t) = \begin{pmatrix} \begin{cases} -12.(-0.833333t^{1.8} + t^{0.9} - 0.25) & 0. \leq t < 1. \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{3}(4t^{0.9} - 5t^{1.8}) & 0. \leq t < 1. \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{5}t^{1.8} & 0. \leq t < 1. \\ 0 & \text{True} \end{cases} \end{pmatrix}$$

(b.1) Matrices integrales fraccionarias de $\Psi^{T,\alpha}$.

Operador integral fraccionario de Riemann–Liouville.

$$(J^{(1)}[\Psi^{T,\alpha_x}(x)]): \left(\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{ll} 0 & x \leq 0 \\ 3.57143 x^{2.8} - 6.31579 x^{1.9} + 3. x^{1.} & 0. \leq x \leq 1. \\ 3.57143 \left(\frac{1}{x}\right)^{2.8} x^{2.8} - 6.31579 \left(\frac{1}{x}\right)^{1.9} x^{1.9} + 3. & \text{True} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{ll} 0 & x \leq 0 \\ 3.64642 x^{1.9} - 3.09295 x^{2.8} & 0. \leq x \leq 1. \\ 3.64642 \left(\frac{1}{x}\right)^{1.9} x^{1.9} - 3.09295 \left(\frac{1}{x}\right)^{2.8} x^{2.8} & \text{True} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{ll} 0.798596 x^{2.8} & 0 < x \leq 1. \\ 0.798596 \left(\frac{1}{x}\right)^{2.8} x^{2.8} & x > 1. \end{array} \right. \end{array} \right)$$

$$J^{(2)}[\Psi^{T,\alpha_x}(x)]:$$

$$\left(\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{ll} 0 & x \leq 0 \\ 0.93985 x^{3.8} - 2.17786 x^{2.9} + 1.5 x^{2.} & 0. \leq x \leq 1. \\ 0.93985 I_{\frac{1}{x}}(2.8, 2) x^{3.8} - 2.17786 I_{\frac{1}{x}}(1.9, 2) x^{2.9} + 1.5 x^{2.} - 1.5 (x - 1.)^2. & \text{True} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{ll} 0 & x \leq 0 \\ 1.25739 x^{2.9} - 0.813934 x^{3.8} & 0. \leq x \leq 1. \\ 1.25739 x^{2.9} I_{\frac{1}{x}}(1.9, 2) - 0.813934 x^{3.8} I_{\frac{1}{x}}(2.8, 2) & \text{True} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{ll} 0.210157 x^{3.8} & 0 < x \leq 1. \\ 0.210157 x^{3.8} I_{\frac{1}{x}}(2.8, 2) & x > 1. \end{array} \right. \end{array} \right)$$

$$J^{(1)}[\Psi^{T,\alpha_t}(t)]: \left(\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{ll} 0 & t \leq 0 \\ 3.57143 t^{2.8} - 6.31579 t^{1.9} + 3. t^{1.} & 0. \leq t \leq 1. \\ 3.57143 \left(\frac{1}{t}\right)^{2.8} t^{2.8} - 6.31579 \left(\frac{1}{t}\right)^{1.9} t^{1.9} + 3. & \text{True} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{ll} 0 & t \leq 0 \\ 3.64642 t^{1.9} - 3.09295 t^{2.8} & 0. \leq t \leq 1. \\ 3.64642 \left(\frac{1}{t}\right)^{1.9} t^{1.9} - 3.09295 \left(\frac{1}{t}\right)^{2.8} t^{2.8} & \text{True} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{ll} 0.798596 t^{2.8} & 0 < t \leq 1. \\ 0.798596 \left(\frac{1}{t}\right)^{2.8} t^{2.8} & t > 1. \end{array} \right. \end{array} \right)$$

$$J^{(1-\beta)} [\Psi^{T,\alpha_t}(t)]:$$

$$\left(\begin{array}{l} 0 \\ t^{-\beta} \left(\frac{16.7649 t^{2.8}}{\Gamma(3.8-\beta)} - \frac{11.5412 t^{1.9}}{\Gamma(2.9-\beta)} + \frac{3. t^{1.}}{\Gamma(2.-\beta)} \right) \\ t^{-\beta} \left(\frac{16.7649 I_{\frac{1}{t}}(2.8,1-\beta) t^{2.8}}{\Gamma(3.8-\beta)} - \frac{11.5412 I_{\frac{1}{t}}(1.9,1-\beta) t^{1.9}}{\Gamma(2.9-\beta)} + \frac{(3.-3. \left(\frac{t-1}{t} \right)^{1.-1, \beta}) t^{1.}}{\Gamma(2.-\beta)} \right) \end{array} \right) \begin{array}{l} t \leq 0 \\ 0. \leq t \leq 1. \\ \text{True} \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{l} 0 \\ t^{-\beta} \left(\frac{6.66331 t^{1.9}}{\Gamma(2.9-\beta)} - \frac{14.5188 t^{2.8}}{\Gamma(3.8-\beta)} \right) \\ t^{-\beta} \left(\frac{6.66331 t^{1.9} I_{\frac{1}{t}}(1.9,1-\beta)}{\Gamma(2.9-\beta)} - \frac{14.5188 t^{2.8} I_{\frac{1}{t}}(2.8,1-\beta)}{\Gamma(3.8-\beta)} \right) \end{array} \right) \begin{array}{l} t \leq 0 \\ 0. \leq t \leq 1. \\ \text{True} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{l} \frac{3.74875 t^{2.8-1. \beta}}{\Gamma(3.8-\beta)} \\ \frac{3.74875 t^{2.8-1. \beta} I_{\frac{1}{t}}(2.8,1-\beta)}{\Gamma(3.8-\beta)} \end{array} \right) \begin{array}{l} 0 < t \leq 1. \\ t > 1. \end{array}$$

(b.2) Matriz de coeficientes:

$$C = (C_{i,j}) = \begin{pmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} & C_{1,3} \\ C_{2,1} & C_{2,2} & C_{2,3} \\ C_{3,1} & C_{3,2} & C_{3,3} \end{pmatrix}$$

(c) Método de Colocación.

- Los puntos de colocación compuestos son las raíces del polinomio Legendre desplazado.
- Polinomio de Legendre desplazado en $[0, T]$ de grado $m^* = 9$:

$$L_{m^*}(x) = 48\,620\, t^9 - 218\,790\, t^8 + 411\,840\, t^7 - 420\,420\, t^6 + 252\,252\, t^5 - 90\,090\, t^4 + 18\,480\, t^3 - 1980\, t^2 + 90\, t - 1 \quad x \in [0, T]$$

- Ceros de $L_{m^*}(x)$: $x_k, t_k \in [0, T] \quad (k = 1, 2, \dots, m^*)$

$$x_k = \begin{pmatrix} x_1 & 0.0159199 \\ x_2 & 0.0819844 \\ x_3 & 0.193314 \\ x_4 & 0.337873 \\ x_5 & 0.5 \\ x_6 & 0.662127 \\ x_7 & 0.806686 \\ x_8 & 0.918016 \\ x_9 & 0.98408 \end{pmatrix} \quad t_k = \begin{pmatrix} t_1 & 0.0159199 \\ t_2 & 0.0819844 \\ t_3 & 0.193314 \\ t_4 & 0.337873 \\ t_5 & 0.5 \\ t_6 & 0.662127 \\ t_7 & 0.806686 \\ t_8 & 0.918016 \\ t_9 & 0.98408 \end{pmatrix}$$

(d) Resolución del sistema de ecuaciones en los coeficientes $C_{i,j}$ ($i, j = 1, \dots, m^*$)

Valores iniciales:

$$\begin{pmatrix} C_{1,1} & -0.164797 \\ C_{1,2} & 0.202492 \\ C_{1,3} & -0.0746687 \\ C_{2,1} & -0.388127 \\ C_{2,2} & 0.308967 \\ C_{2,3} & 0.327428 \\ C_{3,1} & -0.174753 \\ C_{3,2} & 0.341554 \\ C_{3,3} & 0.392102 \end{pmatrix}$$

• Método *Affine Covariant Newton* (ACN):

$$C [ACN] = \begin{pmatrix} C_{1,1} \rightarrow -0.164702 \\ C_{1,2} \rightarrow 0.202413 \\ C_{1,3} \rightarrow -0.0803266 \\ C_{2,1} \rightarrow -0.38718 \\ C_{2,2} \rightarrow 0.310067 \\ C_{2,3} \rightarrow 0.323384 \\ C_{3,1} \rightarrow -0.175215 \\ C_{3,2} \rightarrow 0.341782 \\ C_{3,3} \rightarrow 0.392337 \end{pmatrix} \quad EC_k(C_{i,j}) = \begin{pmatrix} -0.0759113 \\ -0.241258 \\ -0.323159 \\ -0.289446 \\ -0.191439 \\ -0.0157048 \\ 0.293934 \\ 0.670105 \\ 0.942366 \end{pmatrix}$$

$$C [ACN] (2) = \begin{pmatrix} C_{1,1} \rightarrow -0.164702 \\ C_{1,2} \rightarrow 0.202413 \\ C_{1,3} \rightarrow -0.0803266 \\ C_{2,1} \rightarrow -0.38718 \\ C_{2,2} \rightarrow 0.310067 \\ C_{2,3} \rightarrow 0.323384 \\ C_{3,1} \rightarrow -0.175215 \\ C_{3,2} \rightarrow 0.341782 \\ C_{3,3} \rightarrow 0.392337 \end{pmatrix} \quad EC_k(C_{i,j}) = \begin{pmatrix} -0.0759113 \\ -0.241258 \\ -0.323159 \\ -0.289446 \\ -0.191439 \\ -0.0157048 \\ 0.293934 \\ 0.670105 \\ 0.942366 \end{pmatrix}$$

• Método de *Newton*: (NW):

$$C [NW] = \begin{pmatrix} C_{1,1} \rightarrow -0.0897928 \\ C_{1,2} \rightarrow 0.758919 \\ C_{1,3} \rightarrow 6.37524 \\ C_{2,1} \rightarrow -0.965415 \\ C_{2,2} \rightarrow -1.03101 \\ C_{2,3} \rightarrow 4.21666 \\ C_{3,1} \rightarrow 1.54377 \\ C_{3,2} \rightarrow 0.529324 \\ C_{3,3} \rightarrow -0.639449 \end{pmatrix} \quad EC_k(C_{i,j}) = \begin{pmatrix} -6.93889 \times 10^{-18} \\ 2.22045 \times 10^{-16} \\ -1.38778 \times 10^{-16} \\ -2.77556 \times 10^{-17} \\ 2.77556 \times 10^{-17} \\ -2.77556 \times 10^{-16} \\ -3.88578 \times 10^{-16} \\ -2.22045 \times 10^{-16} \\ 3.33067 \times 10^{-16} \end{pmatrix}$$

• Método de la *Secante* (SC):

$$C [SC] = \begin{pmatrix} C_{1,1} \rightarrow -0.0897928 \\ C_{1,2} \rightarrow 0.758919 \\ C_{1,3} \rightarrow 6.37524 \\ C_{2,1} \rightarrow -0.965415 \\ C_{2,2} \rightarrow -1.03101 \\ C_{2,3} \rightarrow 4.21666 \\ C_{3,1} \rightarrow 1.54377 \\ C_{3,2} \rightarrow 0.529324 \\ C_{3,3} \rightarrow -0.639449 \end{pmatrix} \quad EC_k(C_{i,j}) = \begin{pmatrix} 6.93889 \times 10^{-17} \\ 1.21569 \times 10^{-14} \\ 1.81244 \times 10^{-13} \\ 6.94944 \times 10^{-13} \\ 8.11434 \times 10^{-13} \\ 3.25184 \times 10^{-13} \\ 2.65343 \times 10^{-14} \\ 1.11022 \times 10^{-15} \\ -5.77316 \times 10^{-15} \end{pmatrix}$$

• Método de *Newton* (valores iniciales aleatorios en $[-1, 1]$):

$$C = (C_{i,j}) = \begin{pmatrix} C_{1,1} \rightarrow -0.0897928 \\ C_{1,2} \rightarrow 0.758919 \\ C_{1,3} \rightarrow 6.37524 \\ C_{2,1} \rightarrow -0.965415 \\ C_{2,2} \rightarrow -1.03101 \\ C_{2,3} \rightarrow 4.21666 \\ C_{3,1} \rightarrow 1.54377 \\ C_{3,2} \rightarrow 0.529324 \\ C_{3,3} \rightarrow -0.639449 \end{pmatrix} \quad EC_k(C_{i,j}) = \begin{pmatrix} -6.93889 \times 10^{-18} \\ 2.22045 \times 10^{-16} \\ -1.38778 \times 10^{-16} \\ -2.77556 \times 10^{-17} \\ 2.77556 \times 10^{-17} \\ -2.77556 \times 10^{-16} \\ -3.88578 \times 10^{-16} \\ -2.22045 \times 10^{-16} \\ 3.33067 \times 10^{-16} \end{pmatrix}$$

Minimización de la suma de los cuadrados de EC_k :

$$\text{Mínimo} \left(\sum_k EC_k^2 \right) =$$

$$\{1.15619 \times 10^{-20}, \{C_{1,1} \rightarrow -0.0897928, C_{1,2} \rightarrow 0.758919, C_{1,3} \rightarrow 6.37524, \\ C_{2,1} \rightarrow -0.965415, C_{2,2} \rightarrow -1.03101, C_{2,3} \rightarrow 4.21666, \\ C_{3,1} \rightarrow 1.54377, C_{3,2} \rightarrow 0.529324, C_{3,3} \rightarrow -0.639449\}\}$$

• Método de *Newton* (valores iniciales dados por *NMinimize*) :

$$\text{Suma} (EC_k(C_{i,j})^2) = \{2.1036 \times 10^{-31}\}$$

$$C = (C_{i,j}) = \begin{pmatrix} C_{1,1} \rightarrow -0.0897928 \\ C_{1,2} \rightarrow 0.758919 \\ C_{1,3} \rightarrow 6.37524 \\ C_{2,1} \rightarrow -0.965415 \\ C_{2,2} \rightarrow -1.03101 \\ C_{2,3} \rightarrow 4.21666 \\ C_{3,1} \rightarrow 1.54377 \\ C_{3,2} \rightarrow 0.529324 \\ C_{3,3} \rightarrow -0.639449 \end{pmatrix} \quad EC_k(C_{i,j}) = \begin{pmatrix} 6.93889 \times 10^{-18} \\ 0. \\ 0. \\ -1.94289 \times 10^{-16} \\ 0. \\ 0. \\ -3.33067 \times 10^{-16} \\ 2.22045 \times 10^{-16} \\ -1.11022 \times 10^{-16} \end{pmatrix}$$

• Método *Affine Covariant Newton* (ACN).

• Error L_∞ :

$$\text{error-}L_\infty = \text{Máx}_{\substack{0 \leq i < N \\ 0 \leq j < N}} (|u(x_i, t_j) - u(x_i, t_j)(FChWCM)|) = 7.47539 \times 10^{-2}$$

• Error- L_2 :

$$\text{error-}L_2 = \left(\sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} |u(x_i, t_j) - u(x_i, t_j)(FChWCM)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = 2.81876 \times 10^{-1}$$

• Error-RMS:

$$\text{error-RMS} = \frac{1}{N \times N} \left(\sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} |u(x_i, t_j) - u(x_i, t_j)(FChWCM)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \\ 2.81876 \times 10^{-3}$$

• Método de *Newton*: (NW).

- Error L_∞ :

$$\text{error-}L_\infty = \text{Máx}_{\substack{0 \leq i < N \\ 0 \leq j < N}} (|u(x_i, t_j) - u(x_i, t_j)(\text{FChWCM})|) = 1.85187 \times 10^{-1}$$

- Error- L_2 :

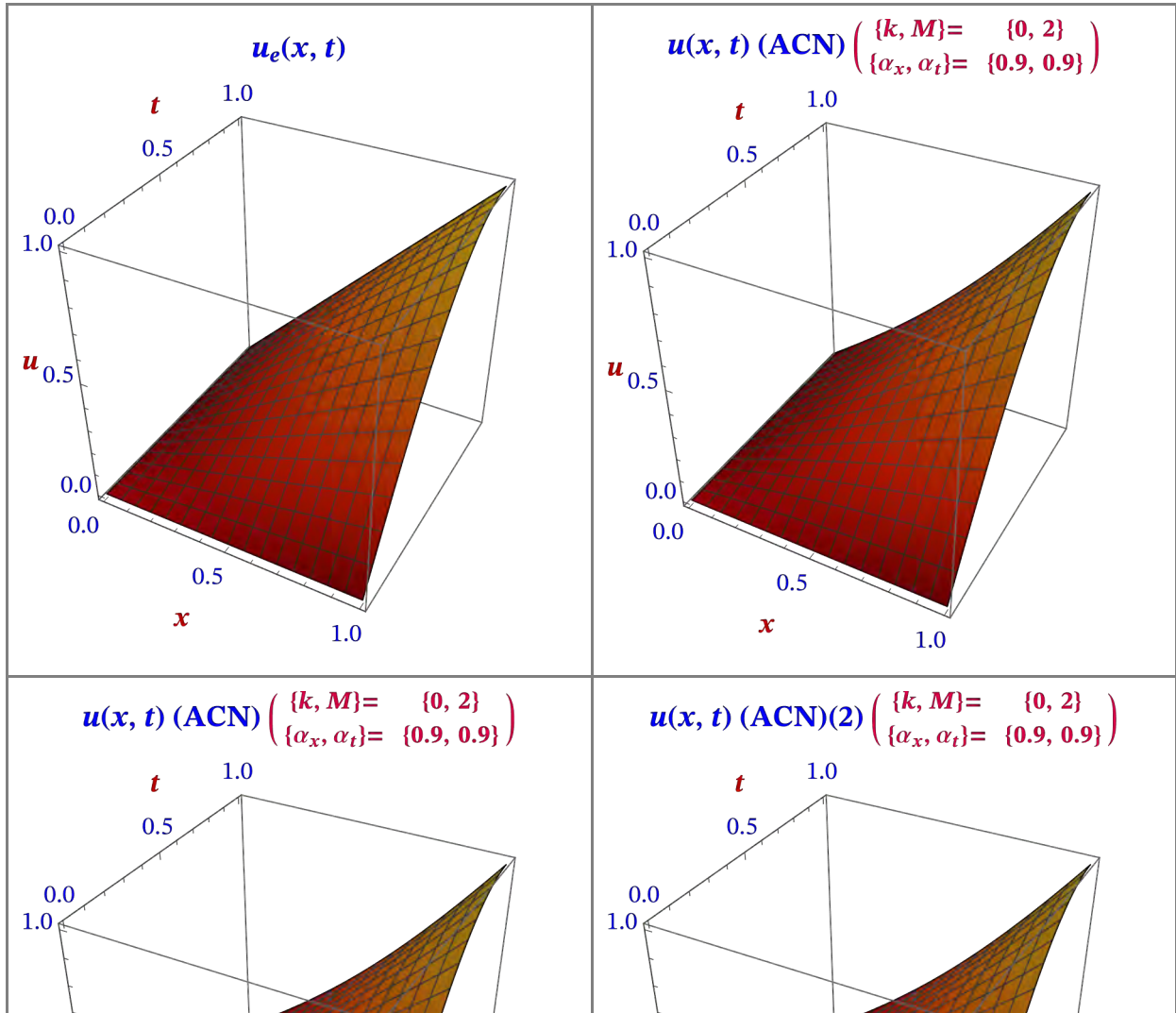
$$\text{error-}L_2 = \left(\sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} |u(x_i, t_j) - u(x_i, t_j)(\text{FChWCM})|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = 4.65453 \times 10^{-1}$$

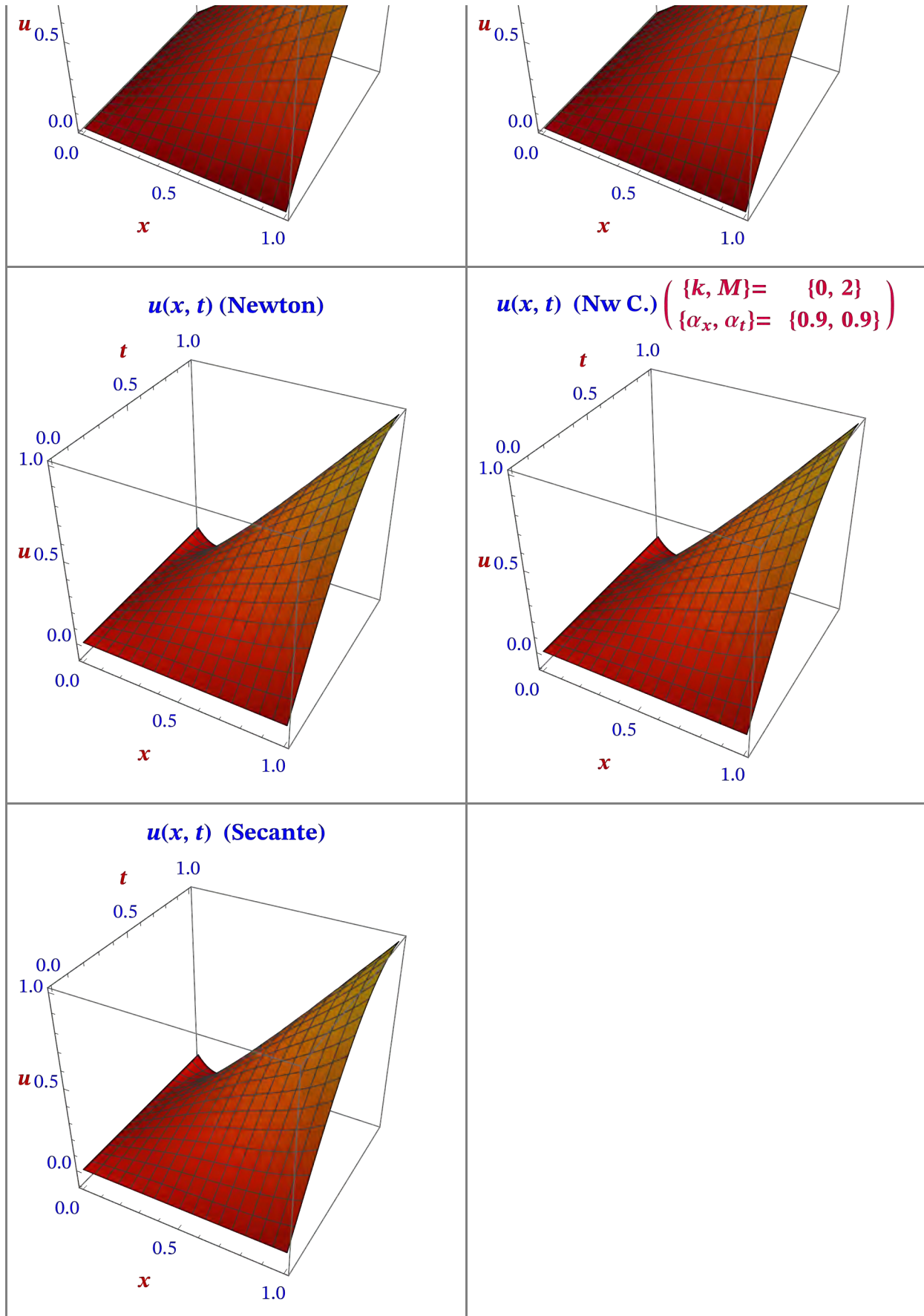
- Error-RMS:

$$\text{error-RMS} = \frac{1}{N \times N} \left(\sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} |u(x_i, t_j) - u(x_i, t_j)(\text{FChWCM})|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = 4.65453 \times 10^{-3}$$

(b)

Out[*]=





■ Problema 3.2.6. ([KUMB23])

Sea la ecuación no lineal de Klein–Gordon (KG) con las condiciones iniciales y de contorno dadas:

$$(\text{FPDE}) \equiv \begin{cases} \underbrace{\alpha_1 u_{tt}(x, t)}_{F_1(x,t)} - \underbrace{\alpha_2 u_{xx}(x, t)}_{F_2(x,t)} + \underbrace{\alpha_3 u(x, t)}_{F_3(x,t)} + \underbrace{\alpha_4 u^2(x, t)}_{F_4(x,t)} = \underbrace{h(x, t)}_{F_5(x,t)} \\ u(x, 0) = f_1(x) = 0 & x \in [0, 1] \\ u(0, t) = f_2(t) = 0 & t \in [0, T] \\ u(1, t) = f_3(t) = \sin\left(\frac{\pi}{2} t\right) \end{cases}$$

con $x \in (0, 1)$ $t \in [0, T]$

$$\alpha_1 = 1 \quad \alpha_2 = 1 \quad \alpha_3 = \frac{\pi^2}{4} \quad \alpha_4 = 1 \quad h(x, t) = x^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{2} t\right)$$

La solución exacta viene dada por la expresión:

$$u(x, t) = x \sin\left(\frac{\pi}{2} t\right).$$

(i) Calcúlese la solución numérica aproximada mediante el Método de Colocación *Wavelet* de Chelyshkov Fraccionario (*Fractional Order Chelyshkov Wavelets Collocation Method*–FChWCM) que permite dar una solución numérica a la ecuación no lineal (PDE).

(ii) Represéntese la solución numérica $u(x, t)$ obtenida con el método FChWCM y la solución exacta.

(iii) Créese una tabla de valores en el intervalo $x \in [0, 1]$, $t \in [0, 1]$ con los datos:

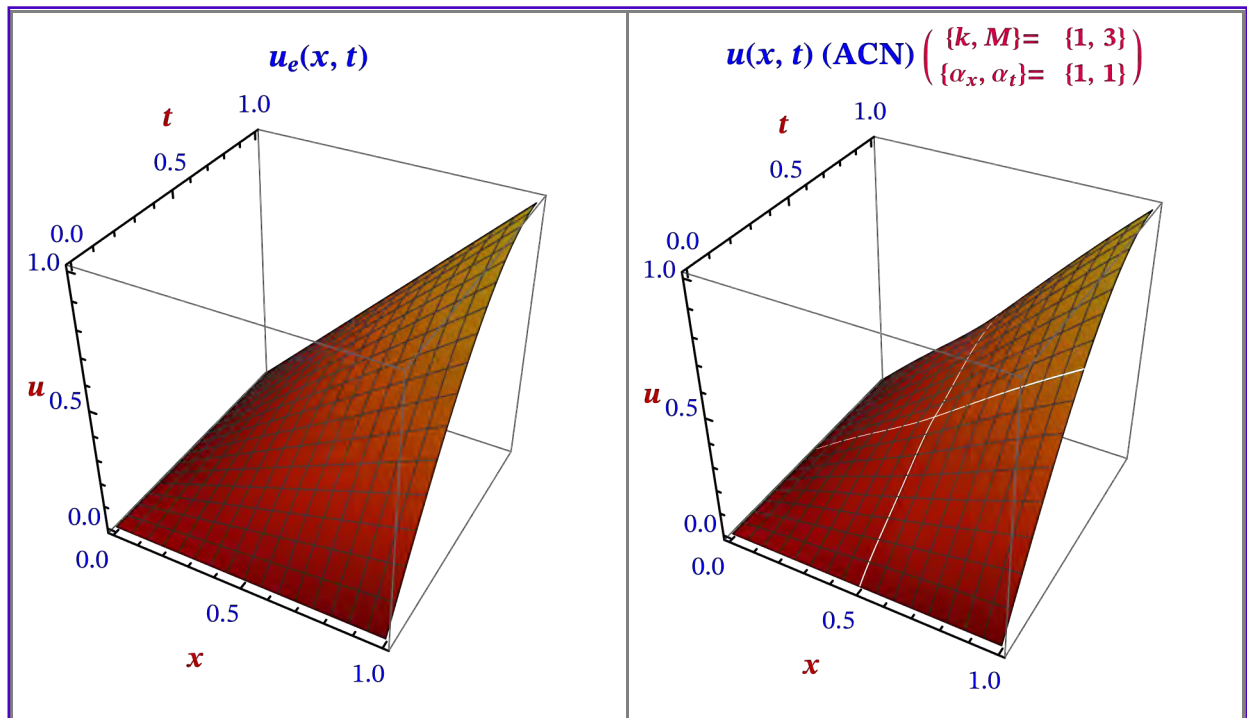
$$k, x_k, t_k, u(x_k, t_k), (\text{exacta}), u(x_k, t_k) (\text{FChWCM}), e = |u(x_l, t_s) (\text{ChWCM}) - u(x_l, t_s)|.$$

(iv) Hállense los errores L_∞ , L_2 y el error RMS.

$$(a) \begin{pmatrix} [A, B] = & \{0, 1\} \\ T = & 1 \\ \{k, M\} = & \{1, 3\} \\ m^* = 2^k (M + 1) = & 8 \\ \{\alpha_x, \alpha_t\} = & \{1, 1\} \end{pmatrix}.$$

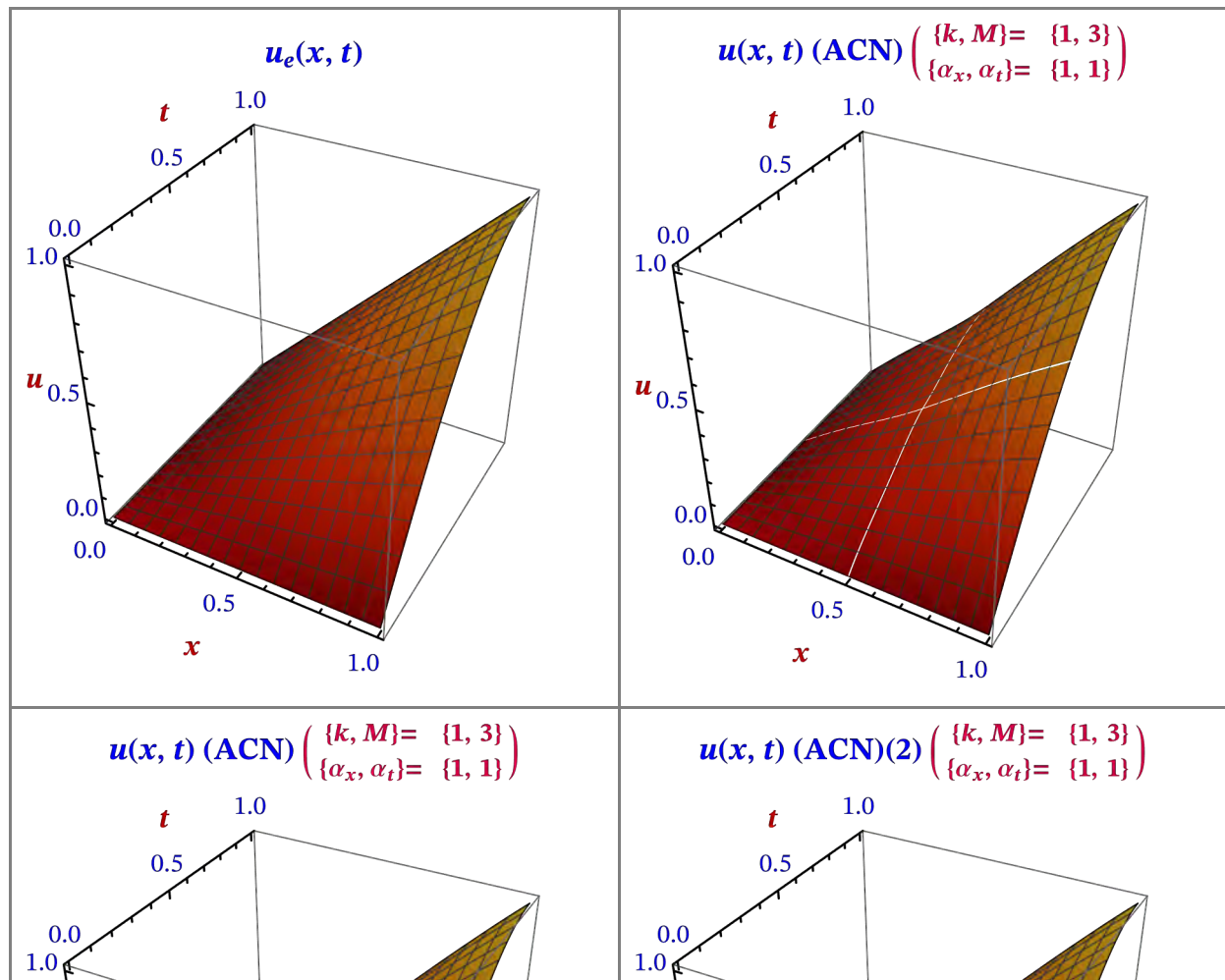
$$\alpha_1 = 1 \quad \alpha_2 = 1 \quad \alpha_3 = \frac{\pi^2}{4} \quad \alpha_4 = 1 \quad h(x, t) = x^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{2} t\right).$$

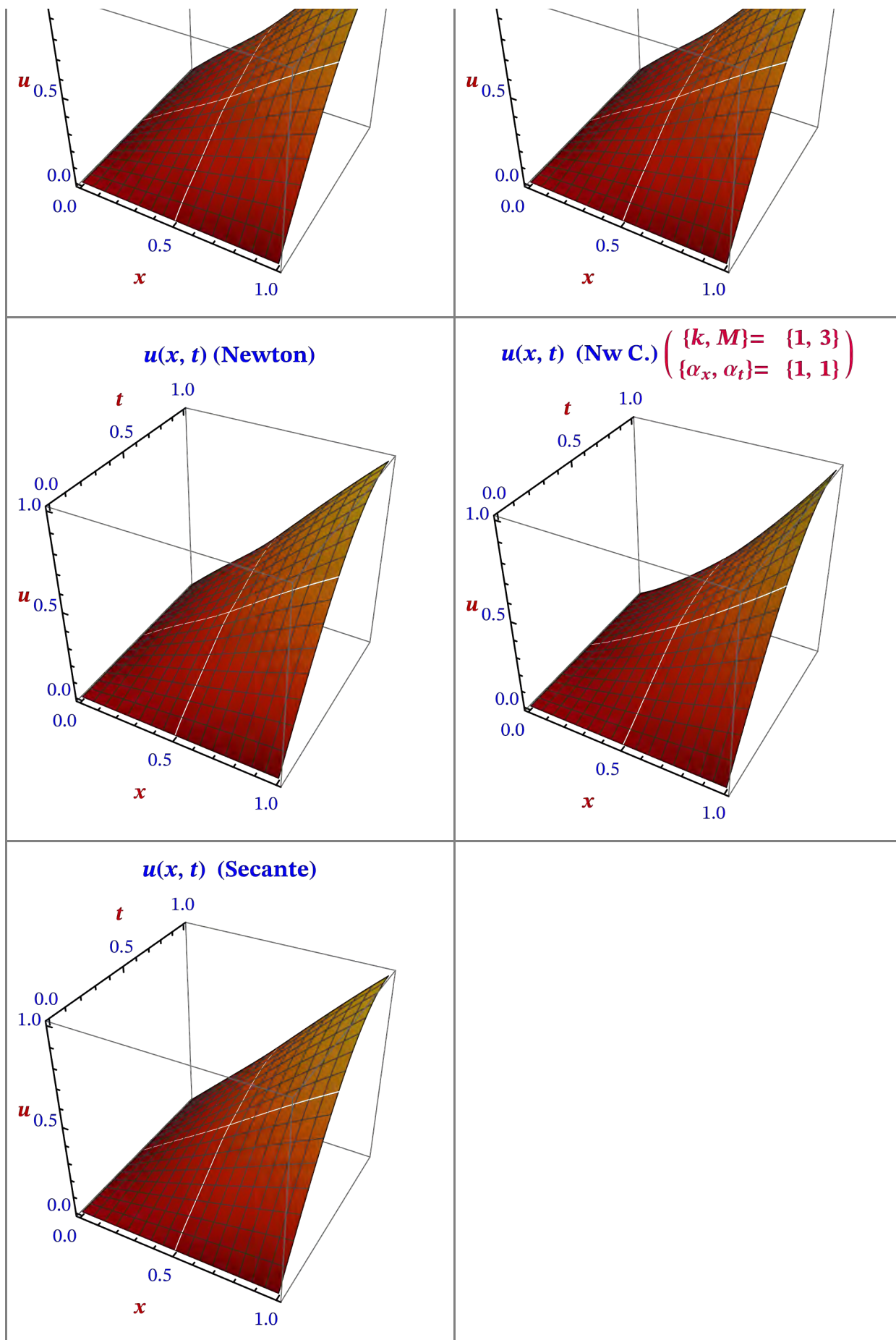
Indicación:



SOLUCIÓN

Out[*]=





Capítulo 4

4. Conclusiones y Líneas Futuras de Investigación

4.1. Conclusiones

En este Trabajo de Fin de Máster se ha desarrollado, implementado y validado un nuevo método numérico basado en las *Wavelets* de Chelyshkov de orden fraccionario (*Fractional-Order Chelyshkov Wavelets Collocation Method*, FChWCM) para la resolución de ecuaciones en derivadas parciales no lineales, con especial atención a la ecuación de Benjamin–Bona–Mahony (BBM) y a la ecuación no lineal de Klein–Gordon (KG). El desarrollo se ha apoyado en la formulación introducida por Rahimkhani, Ordokhani y Lima ([RAHI19]) y en su extensión al caso de orden distribuido de Marasi y Derakhshan ([MARA22]).

A partir de los objetivos planteados al inicio del proyecto, y una vez implementado el método en *Wolfram Mathematica* 14.1 y aplicado a los distintos modelos, se pueden extraer las siguientes conclusiones:

1. La base de *Wavelets* de Chelyshkov fraccionarias reúne, en la práctica, las propiedades que la teoría le atribuye: ortogonalidad, soporte compacto y generación de matrices operacionales dispersas. Esto ha permitido transformar de forma sistemática cada FPDE no lineal en un sistema de ecuaciones algebraicas de tamaño reducido, resoluble mediante el método iterativo de *Newton*.
2. La matriz operacional de integración fraccionaria de Riemann–Liouville de orden α se ha construido de manera explícita y se ha verificado su coherencia con las relaciones entre la integral de Riemann–Liouville y la derivada de Caputo. Este elemento constituye el núcleo del método y su correcta implementación resulta determinante para la precisión global del esquema.
3. El desarrollo teórico previo (Capítulo 2) ha permitido establecer los polinomios de Chelyshkov fraccionarios, las fórmulas de aproximación de funciones de una y dos variables y, en particular, el análisis de convergencia con sus cotas de error, además de la construcción de las matrices operacionales. Este marco proporciona el soporte rig-

uroso sobre el que se apoya el método numérico.

4. El esquema de colocación FChWCM se ha aplicado con éxito a tres modelos: la ecuación de advección–dispersión móvil–inmóvil de orden distribuido, la ecuación no lineal de Benjamin–Bona–Mahony (BBM) y la ecuación no lineal de Klein–Gordon (KG).

En los casos no lineales, el término no lineal se ha tratado sin linealizaciones previas, incorporándolo directamente al residuo evaluado en los puntos de colocación y resolviendo el sistema resultante con el método de *Newton*.

5. La validación se ha realizado sobre problemas de referencia con solución exacta conocida, tomados de la literatura: la ecuación de Klein–Gordon con solución $u(x, t) = x \sin\left(\frac{\pi}{2} t\right)$ ([KUMB23]), la ecuación BBM ([RAHAN23]) y la ecuación de advección–dispersión de orden distribuido ([MARA22]). El error se ha cuantificado con las normas L_∞ (error absoluto máximo), L_2 y el error cuadrático medio (RMS), comparando la solución exacta con la aproximación del método.

Se obtienen errores pequeños con un número moderado de funciones base, lo que confirma la rápida convergencia del método.

6. La *esparsidad* y el buen condicionamiento de las matrices implicadas se traducen en un coste computacional contenido frente a los métodos clásicos de diferencias finitas, que requerirían mallas mucho más finas para alcanzar precisiones comparables.
7. El método presenta un carácter modular: el mismo armazón numérico —construcción de la base, matrices operacionales y proyección sobre los puntos de colocación— sirve para distintas ecuaciones, y basta con modificar el ensamblaje del residuo asociado a cada modelo. Esta característica facilita su reutilización y extensión.
8. Frente a otras aproximaciones basadas en *Wavelets*, como las de Bernoulli empleadas por Kumbinarasaiah y Mulimani ([KUMB23]) o las de Hermite de Shiralashetti y Hanaji ([SHIR21]), las *Wavelets* de Chelyshkov ofrecen resultados competitivos con una formulación más sencilla, lo que las convierte en una alternativa atractiva para esta familia de problemas.

En conjunto, los resultados obtenidos confirman que la metodología *Wavelet* de Chelyshkov constituye una herramienta eficaz, precisa y de bajo coste para la resolución numérica de ecuaciones en derivadas parciales fraccionarias, tanto lineales de orden distribuido como no lineales, según se ha comprobado en la ecuación de advección–dispersión móvil–inmóvil, la ecuación BBM y la de Klein–Gordon.

4.2. Líneas Futuras de Investigación

En las últimas décadas, el cálculo fraccionario ha ganado una notable relevancia gracias a sus numerosas aplicaciones en la modelización de fenómenos físicos: viscoelasticidad, difusión anómala, procesamiento de señales e imágenes, teoría de control o propagación de ondas, entre otros. Estos fenómenos se describen con frecuencia mejor mediante ecuaciones diferenciales de orden fraccionario, cuya resolución analítica suele ser inviable, lo que motiva el interés creciente por métodos numéricos eficientes como el desarrollado en este trabajo.

A partir del método propuesto y de los resultados obtenidos, se identifican las siguientes líneas de investigación futuras:

1. Comparación cuantitativa con otros métodos.

Contrastar las tablas de error (L_∞ , L_2 y RMS) obtenidas con el método FChWCM frente a los resultados publicados para los mismos problemas por otros esquemas —por ejemplo, el método de *Wavelets* de Bernoulli y el de Haar ([KUMB23]) o los resultados de ([RAHI19], [ERMA23], [MOHS20])—, con el fin de situar el método de forma objetiva dentro de la literatura y ampliar el número de casos de prueba.

2. Comparación entre familias de *Wavelets*.

Realizar un estudio sistemático que compare las *Wavelets* de Chelyshkov con otras familias —Haar, Legendre, Hermite, Chebyshev o Bernoulli— sobre un mismo conjunto de problemas, con objeto de determinar cuál resulta más adecuada para cada tipo de ecuación en términos de precisión, coste y estabilidad.

3. Extensión a orden variable y a otros modelos de orden distribuido.

Partiendo del tratamiento ya realizado de la ecuación de advección–dispersión móvil–inmóvil de orden distribuido ([MARA22], [ERMA23]), generalizar el método a ecuaciones fraccionarias de orden variable y a otros modelos de orden distribuido, refinando las cuadraturas del término de densidad y estudiando su efecto sobre la precisión.

4. Dimensiones superiores y sistemas acoplados.

Generalizar el esquema a problemas en dimensiones espaciales superiores y a sistemas de ecuaciones acopladas, evaluando el crecimiento del coste computacional y las estrategias de ensamblaje más eficientes.

5. Otras ecuaciones no lineales.

Aplicar el método a otras ecuaciones no lineales dispersivas y de tipo onda —Korteweg-de Vries, Burgers, sine-Gordon o Rosenau-Hyman ([CET123], [GANI24])— para caracterizar su rango de aplicabilidad.

6. Análisis de convergencia y colocación adaptativa.

Profundizar en el análisis teórico de convergencia, error y estabilidad del esquema, y desarrollar estrategias de colocación adaptativa y multirresolución que refinan la aproximación en las regiones donde la solución presenta frentes, picos o solitones.

7. Optimización e implementación.

Optimizar la implementación aprovechando la esparsidad de las matrices, explorando la paralelización y el cálculo en GPU, así como su portabilidad a otros entornos (MATLAB o Python) para problemas de gran tamaño.

8. Hibridación con aprendizaje automático.

Explorar la combinación del método con técnicas de aprendizaje automático, por ejemplo para la inicialización de los coeficientes o la aceleración de la convergencia del método de *Newton* en problemas fuertemente no lineales.

Estas líneas abren un abanico de posibilidades para consolidar y ampliar el método *Wavelet* de Chelyshkov, tanto en el plano teórico como en el de sus aplicaciones a problemas reales de Ingeniería.

Bibliografía

Referencias Bibliográficas

- [1] [CETI23]
CETINKAYA, Suleyman; DEMIR, Ali. *The analytic solution of the fractional Rosenau-Hyman model in Liouville-Caputo sense*. Authorea Preprints, 2023.
- [2] [CHEN10]
CHEN, Chang-Ming, et al. *Numerical schemes with high spatial accuracy for a variable-order anomalous subdiffusion equation*. SIAM Journal on Scientific Computing, 2010, vol. 32, no 4, p. 1740-1760.
- [3] [DO25]
DO, Quan H.; NGO, Hoa TB. *An Efficient Spectral Method for a Class of Asymmetric Functional-Order Diffusion-Wave Equations Using Generalized Chelyshkov Wavelets*. Symmetry, 2025, vol. 17, no 8, p. 1230.
- [4] [ERMA23]
ERMAN, Sertac; DEMIR, Ali; OZBILGE, Ebru. *Solving inverse non-linear fractional differential equations by generalized Chelyshkov wavelets*. Alexandria Engineering Journal, 2023, vol. 66, p. 947-956.
- [5] [GANI24]
GANIE, Abdul Hamid, et al. *An Efficient Analytical Approaches to Investigate Nonlinear Two-Dimensional Time-Fractional Rosenau-Hyman Equations within the Yang Transform*. 2024.
- [6] [KUMB23]
KUMBINARASIAH, S.; MULIMANI, Mallanagoud. *Bernoulli wavelets numerical approach for the nonlinear Klein-Gordon and Benjamin-Bona-Mahony equation*. International Journal of Applied and Computational Mathematics, 2023, vol. 9, no 5, p. 108.
- [7] [LI07]
LIU, Fawang, et al. *Stability and convergence of the difference methods for the space-time fractional advection-diffusion equation*. Applied Mathematics and Computation, 2007, vol. 191, no 1, p. 12-20.
- [8] [MARA22]
MARASI, Hamidreza; DERAKHSHAN, Mohammadhossein. *A composite collocation method based on the fractional Chelyshkov wavelets for distributed-order fractional mobile-immobile advection-dispersion equation*. Mathematical Modelling and Analysis, 2022, vol. 27, no 4, p. 590-609-590-609.
- [9] [MOHA18]
MOHAMMADI, Fakhroddin. *Numerical Solution of Systems of Fractional Delay Differential Equations Using a New Kind of Wavelet Basis*. Computational and Applied Mathematics, 2018, vol. 37, no 4, p. 4122-4144.
- [10] [MOHS20]
MOHSENI MOGHADAM, Mahmoud; SAEEDI, Habibollah; RAZAGHZADEH, Nargess. *A Spectral Chelyshkov wavelet method to Solve Systems of Nonlinear Weakly Singular Volterra Integral Equations*. Journal of Mahani Mathematical Research Center, 2020, vol. 9, no 1, p. 23-43.
- [11] [NGO22]
NGO, Hoa TB; VO, Thieu N.; RAZZAGHI, Mohsen. *An effective method for solving nonlinear fractional differential equations*. Engineering with Computers, 2022, vol. 38, no Suppl 1, p. 207-218.
- [12] [RAHAN23]
RAHAN, Nur Nadiyah Mohd; ABD HAMID, Nur Nadiyah. *Besse extended cubic B-spline collocation method for solving Benjamin-Bona-Mahony equation*. Matematika, 2023, p. 33-42.
- [13] [RAHI19]
RAHIMKHANI, P.; ORDOKHANI, Y.; LIMA, P. M. *An improved composite collocation method for distributed-order fractional differential equations based on fractional Chelyshkov wavelets*. Applied Numerical Mathematics, 2019, vol. 145, p. 1-27.

[14] [SAMA24]

SAMAREH HASHEMI, Seyyed Amjad; SAEEDI, Habibollah; FOROUSH BASTANI, Ali. *A hybrid Chelyshkov wavelet-finite differences method for time-fractional Black-Scholes equation*. Journal of Mahani Mathematical Research, 2024, vol. 13, no 2, p. 423-452.

[15] [SHIR21]

SHIRALASHETTI, S. C.; HANAJI, S. I. *Hermite wavelet based numerical method for the solution of two parameters singularly perturbed non-linear Benjamina-Bona-Mohany equation*. Scientific African, 2021, vol. 12, p. e00770.