



Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales

ICADE

APLICACIONES MATEMÁTICAS E IA PARA EL REPARTO JUSTO DE TIERRA

Autor: Renato Otero Alban

Director: Luis Ángel Calvo

1. Introducción.....	4
1.1. Objetivos del trabajo.....	5
1.2. Metodología: cómo se aborda el problema.....	6
1.3. Estructura del trabajo.....	8
2. Capítulo 1: Revisión de la literatura de repartos de tierra.....	9
2.1. El paradigma de la “gordura” (Fatness) en la división de tierras.....	9
2.2. Limitaciones estructurales y crítica del modelo.....	9
2.3. Contextualización con otros trabajos y técnicas.....	10
3. Capítulo 2: El Lema de Sperner: Fundamentos matemáticos, programación y aplicaciones técnicas.....	10
3.1. El enunciado formal y la demostración del “recuento de puertas”.....	11
3.1. Logica de programacion en R: de la geometría a la matriz.....	11
3.2. Ejemplos de aplicación y analogías: El reparto de alquiler.....	12
4. Capítulo 3: Repartos para dos personas: El equilibrio entre la línea recta y la convexidad.....	13
4.1. El algoritmo de cuchillo suave (Moving Knife) y la Línea Recta.....	13
4.2. Funciones de utilidad no aditivas y geometría.....	14
4.3. Resolución de conflictos y el teorema del valor intermedio.....	14
4.4. Implementación en R: algoritmo de bisección.....	15
5. Capítulo 4: Repartos para tres personas mediante el Lema de Sperner: El triángulo de equilibrio.....	16
5.1. El simplex de preferencias y la geometría del reparto.....	17
5.2. El proceso de etiquetado y la consulta de agentes.....	17
5.3. Implementación y visualización en R.....	18
6. Capítulo 5: La región de consenso y el Lema de Sperner simplificado.....	19
6.1. De un corte puntual a un espacio de cortes.....	19
6.2. Definición formal de la región de consenso.....	19
6.3. El Lema de Sperner en su versión más simple.....	21
7. Capítulo 6: Generalización a “n” personas e integracion de tecnicas de inteligencia artificial.....	23
7.1. IA para la modelización de utilidades no aditivas.....	23
7.2. Inteligencia Artificial para entender los gustos de los propietarios.....	23
7.3. Algoritmos geneticos: Dejar que el reparto evolucione.....	24
7.4. Critica Tecnica: Mas alla de los “Archipiélagos” de Segal-Halevi.....	25
8. Conclusiones.....	26
8.1. Síntesis de las aportaciones del trabajo.....	26
8.2. Valoración crítica y limitaciones.....	27
8.3. Implicaciones prácticas.....	29
8.4. Futuras líneas de investigación.....	30
9. Anexo: Código R - Implementación de los algoritmos.....	33
9.1. Anexo Capítulo 3: Reparto para dos personas - Algoritmo de bisección.....	33

9.1.1. Definición del terreno y función de bisección.....	33
9.1.2. Visualización del terreno y la recta de corte.....	36
9.1.3. Curva $d^*(\theta)$ para todos los ángulos.....	37
9.2. Capítulo 4: Reparto para tres personas - Semirrectas.....	38
9.2.1. Definición de funciones y búsqueda del consenso.....	38
9.2.2. Visualización de los tres lotes.....	42
9.3. Capítulo 5: Región de consenso.....	43
9.3.1. Mapa de la región de consenso.....	43
9.3.2. Índice de consenso por ángulo.....	45
9.4. Capítulo 5: Lema de Sperner simplificado.....	46
9.4.1. Generación del simplex y búsqueda del triángulo pancromático.....	46
9.4.2. Visualización del simplex coloreado.....	48
9.5. Resumen de figuras generadas.....	50
9.6. Código completo.....	50
10. Declaración de uso de Inteligencia Artificial.....	51
11. Bibliografía.....	52

1. Introducción

Imaginemos una situación habitual: dos hermanos heredan la finca de sus padres. El terreno tiene una parte fértil junto al río, otra parte en la ladera con vistas al pueblo y un tercer trozo que da a la carretera principal. Cada uno de los hermanos valora el terreno de forma diferente. Por un lado, uno es agricultor y quiere acceso al agua; el otro hermano quiere construir una casa y necesita la parte con acceso por carretera. La pregunta parece sencilla; ¿cómo dividir la finca de forma que ninguno de los dos sienta que ha salido perdiendo?

Este tipo de conflicto ocurre con mucha más frecuencia de lo que parece. Las divisiones de herencias, las exportaciones de terrenos para obras públicas, el reparto de lotes en nuevas urbanizaciones, etc.,. En todas estas situaciones aparece la misma tensión: quien decide donde va la línea divisoria? ¿Quién garantiza que el reparto sea justo? ¿Que significa siquiera que un reparto sea justo cuando cada persona valora el terreno de manera distinta?

Estas preguntas no son nuevas. Los matemáticos llevan más de setenta años estudiando el problema del reparto justo, desde que Hugo Steinhaus lo formuló por primera vez en 1948 bajo el nombre de “cake cutting” o división del pastel. La idea consiste en preguntar como se corta un pastel entre varias personas de forma que cada una esté satisfecha con su trozo? El pastel puede ser una finca, un solar o cualquier otro recurso que haya que repartir. Lo que hace interesante el problema es que cada persona tiene sus propias preferencias. A uno le gusta, por ejemplo, las fresas, a otro le gusta el chocolate, y eso cambia completamente lo que significa recibir una parte “justa”.

La matemática ha desarrollado a lo largo de los años varios métodos para resolver este problema. El más conocido es el protocolo de “yo corto, tú eliges”. Consiste en que una persona divide el recurso en dos partes que considera equivalentes, y la otra persona elige la que prefiere. Este método es elegante y funciona bien para dos personas, pero tiene un problema cuando se aplica a terrenos reales. La persona que corta puede trazar una línea que divida el valor del terreno por la mitad según su criterio, pero puede producir dos lotes de formas inútiles. Imagina cortar una finca rectangular con una línea en diagonal; los dos trozos resultantes podrían tener el mismo valor, pero si uno de ellos tiene forma de triángulo muy alargado, ese propietario no podría construir nada en su lote ni cultivarla de forma eficiente.

El problema del reparto justo de recursos, denominado en la literatura matemática como “cake cutting” o división del pastel, ha pasado de ser una abstracción teórica a una necesidad práctica en temas como la gestión de tierras, la división de herencias y la asignación de espacios publicitarios. Por lo general, los algoritmos de división justa se han enfocado en recursos unidimensionales donde el valor es aditivo. No obstante, cuando el recurso a repartir es tierra, la geometría del terreno resultante se vuelve un factor determinante. No es suficiente con recibir una superficie proporcional al valor total. La utilidad de un terreno depende de factores como su forma, su conectividad y la disponibilidad de recursos específicos, como pozos de agua o acceso a servicios básicos.

Este trabajo fin de grado se orienta a analizar y mejorar los procesos de división de tierras desde una perspectiva que combina la matemática discreta y la computación. El propósito principal se enfoca en superar las limitaciones de los modelos actuales, los cuales suelen priorizar la “ausencia de envidia” a cambio de generar lotes con formas poco funcionales o no convexas. Un terreno dividido en pedazos desconectados o con ángulos complejos puede cumplir con la equidad teórica, pero carece de utilidad real en el sector relacionado más a la agricultura o lo urbano.

1.1. Objetivos del trabajo

El objetivo central de este trabajo fin de grado consiste en diseñar y programar un método de reparto basado en líneas rectas que asegure la creación de regiones convexas y conexas. En otras palabras, que cada persona reciba un lote que valore tanto como el de los demás, y que además ese lote tenga una forma que pueda usarse en la vida real.

Para lograrlo, se analizan dos escenarios principales: el reparto bipartito, basado en el principio clásico de “yo corto, tú eliges”, y la repartición para tres personas. Se pondrá a juego los siguientes objetivos específicos:

- Estudiar y criticar el modelo de reparto de tierras más avanzado disponible en la literatura científica, el propuesto por Segal-Halevi y sus colaboradores en 2019, identificando sus puntos fuertes y sus limitaciones prácticas.

- Desarrollar un algoritmo informático en el lenguaje de programación R que divide un terreno entre dos personas de forma justa mediante una única línea recta, garantizando que los dos lotes resultantes sean útiles desde el punto de vista práctico.
- Extender ese algoritmo al caso de tres personas, generando tres lotes convexos y conectados a partir de dos líneas que parten de un punto interior del terreno.
- Introducir el concepto de región de consenso, que permite visualizar no solo una solución justa sino el conjunto completo de todas las formas posibles de dividir el terreno de manera que cada persona prefiera su lote al de los demás.
- Presentar una versión simplificada de un resultado matemático clásico, el Lema de Sperner, que garantiza la existencia de una solución justa para tres personas y que puede implementarse de forma directa y comprensible.
- Explorar cómo la Inteligencia Artificial podría ampliar estos métodos a situaciones con más de tres personas, facilitando el proceso de entender y modelar las preferencias de cada propietario.

1.2. Metodología: cómo se aborda el problema

Antes de explicar cómo funciona el método propuesto, es útil entender qué significa exactamente “resolver” el problema del reparto de tierras desde un punto de vista computacional. La idea básica es la siguiente: representamos el terreno como una cuadrícula de pequeños cuadrados donde cada cuadrado tiene asignado un valor que indica lo mucho o poco que cada propietario aprecia esa zona concreta del terreno. Un propietario que valora la proximidad al río dará valores altos a los cuadros cercanos al agua y valores bajos a los del interior. Otro propietario que quiere acceso a la carretera hará lo contrario. Esta representación permite al ordenador calcular exactamente cuánto vale cada posible lote para cada persona, sumando los valores de todos los cuadros que quedarían dentro de ese lote.

Con esta representación en mano, el problema del reparto se convierte en una búsqueda. Sería encontrar una línea recta, o dos en el caso de tres personas, tal que, cuando el terreno quede dividido por esa línea, cada persona prefiera su parte a la del otro. Para dos personas, el método utilizado es la “bisección binaria”, una técnica de búsqueda muy eficiente que funciona como el

juego de adivinar un número. Se empieza con una línea en el centro del terreno, se comprueba si el primer propietario valora más la parte de la izquierda o la de la derecha, y se mueve la línea hacia el lado que tiene más valor hasta que ambas partes sean iguales para esa persona. En ese punto, el segundo propietario simplemente elige la parte que prefiere, y el reparto queda hecho sin que ninguno de los dos sienta envidia del otro.

Para el caso de tres personas, el método es un poco más complejo pero sigue el mismo espíritu. En lugar de una sola línea, se usan dos semirrectas que parten de un punto interior del terreno, dividiendo la parcela en tres sectores. El algoritmo busca iterativamente la posición de ese punto central y los ángulos de las dos líneas hasta que los tres propietarios prefieren sectores distintos. En cada paso del proceso, si dos personas quieren el mismo sector, el punto central se desplaza ligeramente hacia ese sector disputado para reducir su valor relativo, y se vuelve a comprobar. Este proceso converge, en la mayoría de los casos, en pocas decenas de pasos.

Un elemento original de este trabajo es el concepto de “región de consenso”. En lugar de buscar un único corte justo, el método explora sistemáticamente todos los cortes posibles y marca en un mapa aquellos que producen un reparto justo y aquellos que no. El resultado es una imagen verde y roja. El verde representa todos los cortes que genera acuerdo, y el rojo los que generan conflicto. Cuanto más grande sea la zona verde, más robusta es la solución, lo que significa que hay muchas formas de dividir el terreno de manera justa.

Finalmente, el trabajo presenta una versión simplificada del Lema de Sperner, que es el resultado matemático que garantiza que siempre existe al menos una solución justa para tres personas. En lugar de explicar este resultado con la terminología matemática habitual, el trabajo lo implementa como una búsqueda visual. Se dibuja un triángulo donde cada punto representa una forma posible de dividir el terreno en tres partes, se colorea cada punto con el color del lote que preferiría la persona asignada a ese punto, y se busca el pequeño triángulo dentro que tiene los tres colores. Aquel triángulo, que el Lema de Sperner garantiza que siempre existe, corresponde a la solución justa del reparto. Todo el desarrollo computacional del trabajo se realiza en R. La elección de R responde a tres criterios: su capacidad para realizar cálculos numéricos con matrices de datos de forma eficiente, su librería gráfica ggplot2, y su accesibilidad como herramienta de código abierto disponible de forma gratuita para cualquier investigador.

1.3. Estructura del trabajo

El trabajo se organiza en seis capítulos principales, segundos de las conclusiones, las futuras líneas de investigación, la bibliografía/referencias y un anexo sobre el uso de inteligencia artificial generativa en la elaboración del trabajo.

- El primer capítulo presenta una revisión crítica del artículo científico más relevante sobre el tema, el trabajo de Segal-Halevi, Nitzan, Hassidim y Aumann publicado en 2019 bajo el título “Envy-Free Division of Land”. Este artículo es actualmente la referencia principal en el campo del reparto justo de tierras con restricciones geométricas, y analizar sus contribuciones y sus limitaciones.
- El capítulo 2 introduce el Lema de Sperner en su versión teoría clásica. Aunque el trabajo propone posteriormente una versión simplificada de este resultado, es importante presentar primero la formulación original para entender de dónde viene la garantía matemática de que siempre existe una solución justa. Este capítulo incluye también el ejemplo del reparto del alquiler de un piso entre tres personas, que es la aplicación más conocida de este resultado y sirve como puente entre la teoría y la aplicación al reparto de tierras.
- El capítulo 3 desarrolla el método de reparto para dos personas. Se presenta el algoritmo de bisección, se explica su funcionamiento paso a paso, y se muestran los gráficos producidos por el código R: el mapa del terreno con la línea de corte óptima y la curva que muestra cómo varía esa línea según el ángulo elegido.
- El capítulo 4 extiende el método al caso de tres personas mediante el uso de dos semirrectas que parten de un punto interior del terreno. Se explica el algoritmo iterativo de búsqueda del consenso y se presentan las visualizaciones del terreno dividido en tres lotes convexos.
- El capítulo 5 introduce el concepto de región de consenso y presenta la versión simplificada del Lema de Sperner implementada como búsqueda exhaustiva del triángulo pancromático en una cuadrícula del simplex. Este capítulo incluye también el mapa de acuerdo y desacuerdo en el espacio de cortes posibles y el índice de consenso por ángulo.

- El capítulo 6 explora la generalización del método a situaciones con más de tres personas y discute el papel que podría desempeñar la inteligencia artificial en ese contexto. Desde el aprendizaje automático de las preferencias de los propietarios hasta los algoritmos genéticos que buscan soluciones justas en espacios de muy alta complejidad.

Las conclusiones resumen las aportaciones del trabajo, evalúan honestamente sus limitaciones y reflexiones sobre su valor práctico en el mundo real. Las futuras líneas de investigación identifican las cinco extensiones más prometedoras del trabajo. La bibliografía recoge las referencias académicas utilizadas a lo largo del trabajo. El anexo describe el uso responsable de herramientas de inteligencia artificial generativa en la elaboración de este trabajo fin de grado.

2. Capítulo 1: Revisión de la literatura de repartos de tierra

2.1. El paradigma de la “gordura” (Fatness) en la división de tierras

El punto de partida de este análisis es el trabajo de Segal-Halevi et al. (2019), quienes introducen una innovación necesaria en el campo del reparto justo: la restricción geométrica de las piezas. Los autores argumentan que los algoritmos clásicos, al ignorar la forma, pueden producir parcelas que son “tiras rectangulares delgadas”, inútiles para la mayoría de las aplicaciones prácticas. Para solucionar esto, introducen el concepto de “fatness” o grosor, definiendo una pieza como R -fat si puede ser contenida entre dos cubos cuya razón de lados sea como máximo R . El artículo presenta resultados constructivos de gran relevancia. Demuestra que la ausencia de envidia es compatible con lo que denominan “proporcionalidad parcial”. Esto significa que, bajo determinados parámetros de forma, como el requisito de que los lotes sean cuadrados, cada agente puede acceder a una parte constante del valor total. Un buen ejemplo sería que cada persona recibiría al menos una cuarta parte del valor total en un escenario de dos agentes con preferencias por figuras cuadradas.

2.2. Limitaciones estructurales y crítica del modelo

Teniendo en cuenta los avances del modelo de Segal-Halevi et al., una lectura ayuda identificar ciertas limitaciones que este trabajo de grado busca corregir. La principal crítica se dirige a la flexibilidad excesiva en la forma de las parcelas en aras de mantener la proporcionalidad. Aunque el artículo menciona la posibilidad de trabajar con objetos R -fat de forma arbitraria, sus

algoritmos a menudo resultan en divisiones que no garantizan la convexidad. Cuando un terreno no es convexo, el propietario podría verse obligado a cruzar propiedad ajena para moverse entre dos puntos de su propia propiedad, lo que representa problemas legales, operativos y logísticos. Por otro lado, el modelo propuesto usa la función de valor $S(VS)$, la cual solo toma en cuenta la pieza más valiosa de forma S dentro de un área. Esta métrica, aunque creativa, ignora el valor del terreno restante que no se ajusta a la forma establecida, lo cual se puede considerar un mal (ineficiente) uso del recurso. Existe una tensión intrínseca entre la aditividad de las utilidades y las restricciones geométricas. Es que la utilidad de un agente al recibir una parcela dividida en dos suele ser menor que la suma de sus partes si la forma geométrica es el factor determinante.

2.3. Contextualización con otros trabajos y técnicas

La literatura sobre la división justa ha analizado soluciones como el equilibrio competitivo, pero Berliant y Dunz (2004) comprobaron que, al tener restricciones geométricas, es posible que ese equilibrio podría no lograrse. Otros autores han propuesto el uso de “moving-knives” en una dimensión para lograr las mencionadas piezas delgadas. En contraste, el presente trabajo se alinea con la visión de que la justicia en el reparto debe ir de la mano con la practicidad geométrica. Al aplicar la teoría Lema de Sperner, se busca un método similar a la que Merchan Rubira y Rodriguez Garcia (2018) implementaron con éxito al problema de la “armonía en el alquiler”. En aquel estudio, el lema se utilizó para encontrar un punto de equilibrio entre las preferencias de múltiples participantes. Mientras que el trabajo de Segal-Halevi se centra en la geometría de las piezas por separado, este trabajo fin de grado propone un enfoque integral. Aquí, la línea divisoria se convierte en la herramienta principal para asegurar regiones convexas y justas, optimizando no sólo el valor recibido sino también la utilidad práctica de la tierra repartida.

3. Capítulo 2: El Lema de Sperner: Fundamentos matemáticos, programación y aplicaciones técnicas

El Lema de Sperner, propuesto por Emanuel Sperner en 1928, va más allá de ser un simple resultado combinatorio. Funciona como el puente esencial que conecta la topología discreta, la teoría de juegos y la optimización en economía. Para comprender su relevancia en el reparto de tierras, es fundamental analizar su estructura desde tres perspectivas: su demostración

topológica, su aplicación en sistemas computacionales y su interpretación según las preferencias humanas.

3.1. El enunciado formal y la demostración del “recuento de puertas”

Matemáticamente, consideramos un n -simplex S que ha sido subdividido en una triangulación de dimensiones finitas. En nuestro caso de reparto de tierra, un triángulo para tres personas. El lema establece que si marcamos los vértices de la triangulación con $n+1$ colores siguiendo la regla de que:

1. Los vértices principales del simplex reciben colores distintos (1,2,3).
2. Los vértices situados en las aristas del simplex solo pueden usar los colores de los vértices que definen esa arista.
3. Los vértices interiores pueden recibir cualquier color.

Entonces, existe un número impar de sub triangulares “completos” o “pancromáticos”, los cuales contienen todos los colores. La demostración más elegante de este lema es el argumento del camino o recuento de puertas. Imaginamos que cada subtriangular es una habitación y las caras coloreadas con $\{1,2\}$ son puertas. Al entrar por una puerta desde el exterior del simplex, el algoritmo nos obliga a movernos entre habitaciones. El número de puertas en el perímetro es impar por la restricción de las aristas. Dentro de las habitaciones solo los triángulos con los tres colores tienen una sola puerta $\{1,2\}$, los otros tienen cero o dos. Entonces, el camino debe terminar necesariamente en un triángulo que posea el tercer color. Este concepto de “camino algorítmico” es la base de su implementación en R.

3.1. Logica de programacion en R: de la geometría a la matriz

Llevar el Lema de Sperner al campo computacional requiere dividir el espacio de búsqueda en unidades discretas. En el lenguaje de programación R, esto implica diseñar o crear estructuras de datos que representen la triangulación:

- Generación de la Malla (Meshing): Se usan librerías de geometría computacional para desarrollar una triangulación de Kuhn o una subdivisión baricéntrica. En cuanto más fina

sea la malla, mayor será la precisión del reparto. Esto resultará en un coste computacional elevado.

- Funciones de etiquetado (Labeling functions): Esta es la parte crítica donde el código vincula con el usuario o agente. El programa asigna cada vértice a una persona, siendo una secuencia cíclica. Aquella persona evalúa el área propuesta en ese punto geográfico y devuelve el color correspondiente al área que prefiere.
- Algoritmo de búsqueda: En lugar de una búsqueda profunda, se desarrolla un algoritmo llamado “path-following” que remeda la demostración del lema. El código comienza en el borde y avanza a través de las puertas de color hasta dar con el simplex completamente etiquetado.

El capítulo 5 de este trabajo presenta una versión alternativa más simple. En lugar del path-following, se utiliza una inspección exhaustiva de todos los subtriángulos de la malla. Aunque computacionalmente menos elegante, esta versión es más fácil de implementar, verificar y encender. Produce exactamente el mismo resultado para mallas de tamaño moderado.

3.2. Ejemplos de aplicación y analogías: El reparto de alquiler

Para demostrar la capacidad de este teorema, retomamos el caso clásico de Merchan Rubira y Rodriguez Garcia (2018) sobre la “Armonía del Alquiler”. En este caso, el recurso no es la tierra, sino el coste de una vivienda. Tres inquilinos deben repartirse habitaciones de un piso cuyo alquiler total es de 1.300 euros. Cada punto del simplex representa una distribución de ese coste entre las tres habitaciones. Sin embargo, la lógica es idéntica: buscamos un punto de equilibrio dentro de un espacio de posibilidades (el simplex), donde cada persona se conforme con una opción distinta. Si sustituimos “precio de habitación” por “coordenada de la línea divisoria de tierra”, el Lema de Sperner se convierte en el árbitro perfecto que garantiza que, sin importar cuán egoístas sean los agentes, siempre existe una solución de equilibrio.

En el caso práctico documentado por los autores, la solución corresponde al sub triángulo formado por los nodos 12, 36 y 58, con distribuciones de precios de $(422,5 / 422,5 / 455)$, $(455 / 390 / 455)$ y $(455 / 422,5 / 422,5)$ euros respectivamente. La media de estas tres distribuciones da la solución final. Si sustituimos “precio de la habitación” por “coordenada de la línea divisoria de

tierra”, el Lema de Sperner se convierte en el árbitro matemático que garantiza que siempre existe una división en la que cada agente prefiere su lote al de los demás.

4. Capítulo 3: Repartos para dos personas: El equilibrio entre la línea recta y la convexidad

El reparto entre dos partes constituye la base de la justicia distributiva. Si bien el principio de “yo corto, tú eliges” resulta intuitivo, su ejecución a la tierra en dos dimensiones plantea desafíos geométricos que el artículo de Segal-Halevi et al. (2019) no resuelve de forma satisfactoria en términos de la operatividad en el campo o la ciudad.

4.1. El algoritmo de cuchillo suave (Moving Knife) y la Línea Recta

En este trabajo fin de grado, se plantea una formalización del método de Austin (1982) adaptada a la geografía del terreno. El propósito es dividir un terreno $T \subset \mathbb{R}^2$ en dos regiones $R1$ y $R2$. A diferencia de los modelos que permiten formas arbitrarias, nuestra metodología exige que la frontera o el límite $\partial(R1, R2)$ sea una línea recta. Las ventajas de optar por la línea recta son lo siguiente:

- **Garantía de Convexidad:** Si el terreno original es un polígono convexo, cualquier división mediante una línea recta generará dos lotes que también conservaran esa misma propiedad.
- **Simplicidad Jurídica y Física:** Las líneas rectas son las que facilitan el cercado, la medición y el registro catastralmente.

El proceso se modela mediante una función continua $f(\theta, d)$ donde θ representa el ángulo de la línea y “ d ” su distancia respecto al origen. El “cortador” desplaza el cuchillo, la línea recta, variando “ d ” de manera fluida y continua. Para cada ángulo θ , existe una posición crítica d^* tal que el cortador valora a ambas partes exactamente igual ($V1(R1) = V1(R2)$). El “elector” observa este movimiento continuo y detiene la acción cuando la división le resulta favorable o, en un entorno estático, selecciona la pieza que maximiza su utilidad $V2$.

4.2. Funciones de utilidad no aditivas y geometría

Un punto central de nuestra crítica a los modelos actuales es cómo se entiende la utilidad. Al repartir un pastel, si uno recibe dos trozos, la satisfacción suele ser la suma de ambos. En el caso de la tierra, esto es falso. Dos fracciones de terreno separadas pueden tener menos valor que un solo lote unido, debido a los costes de traslado y a la imposibilidad de desarrollar proyectos de gran escala.

Por este motivo, en nuestra programación y modelación en R, definimos funciones de utilidad que penalizan a los lotes separados. Introducimos el concepto de “utilidad geométrica”, donde el valor de un área R para un agente i se define como:

$$U_i(R) = \int_R v_i(x, y) dA \times \text{Shape_Factor}(R)$$

Donde el “*Shape_Factor*” beneficia a las regiones convexas y penaliza las formas alargadas. Esto se refiere a la gordura o fatness que mencionaba Segal-Halevi, pero aplicada a la línea divisoria.

- La integral ($\int_R v_i(x, y) dA$): Representa el valor estándar (V_i), que es la integral de la consistencia de valor (v_i) sobre la región R . Esto captura la heterogeneidad del terreno, por ejemplo, si hay agua, fertilidad, etc.
- La multiplicación por el Factor: Surge de entender de que la utilidad en el reparto de tierras no es aditiva. El artículo explica que un agente solo obtiene utilidad si la pieza tiene una forma usable (S). Si la forma es inadecuada, el valor se reduce drásticamente.

4.3. Resolución de conflictos y el teorema del valor intermedio

El éxito del reparto para dos personas se apoya en el Teorema del Valor Intermedio. Al mover la línea divisoria de manera continua, las percepciones de valor de los agentes también cambian de forma continua. Esto garantiza que no haya “saltos” en la preferencia que dejen a un agente en desventaja o perjudicado. En el programa desarrollado para este trabajo fin de grado, se simula este proceso permitiendo que el usuario visualice cómo cambia la frontera y cómo se equilibran las áreas y valores percibidos en tiempo real. Este enfoque no solo es matemáticamente justo o

“libre de envidia”, sino que es computacionalmente eficiente, reduciéndose a una búsqueda línea simple.

4.4. Implementación en R: algoritmo de bisección



Figura 1: Terreno con distribución del valor del Agente 1. La línea roja es el corte justo para $\theta=45$ grados. Lote 1 y Lote 2 reciben cada uno el 50% del valor.

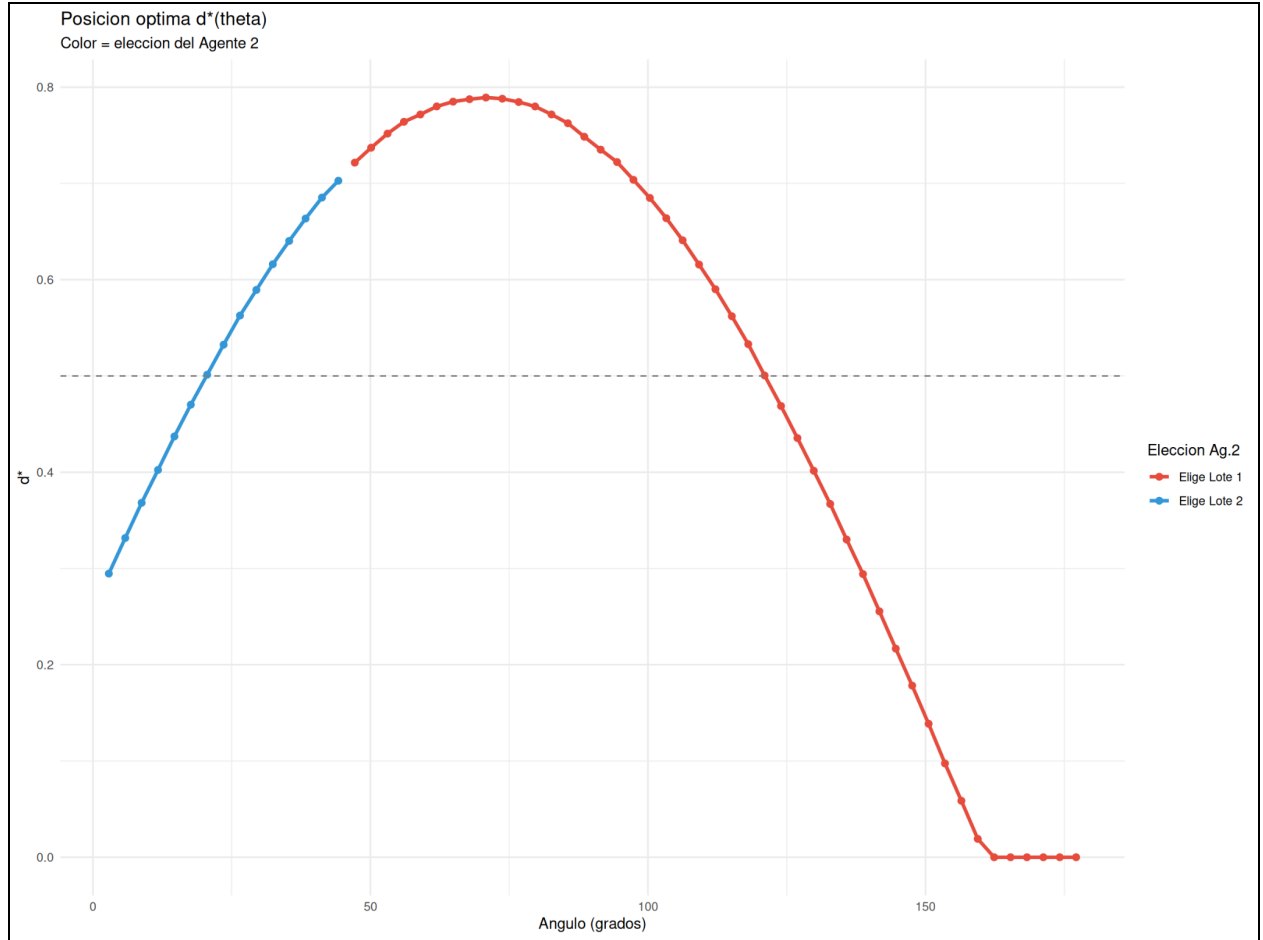


Figura 2: Curva $d^*(\theta)$ para $\theta \in [0, 180]$. El color indica que lote elegiría el Agente 2. Los cambios de color delimitan la region de consenso para cada angulo.

5. Capítulo 4: Repartos para tres personas mediante el Lema de Sperner: El triángulo de equilibrio

Dar el salto de un reparto para dos personas a uno de tres no es una simple extensión lineal, sino un cambio cualitativo en la complejidad topológica. Mientras que para dos personas el Teorema del Valor Intermedio garantiza una solución, para tres agentes entramos en el terreno de los teoremas de punto fijo en dimensiones superiores. En este capítulo, damos con detalle como el Lema de Sperner se convierte en la herramienta clave para alcanzar un reparto justo y libre de envidia (“envy-free”) entre tres individuos sobre un terreno bidimensional.

5.1. El simplex de preferencias y la geometría del reparto

Para que el Lema de Sperner sea exitoso, primero necesitamos traducir el mapa geográfico a un espacio de decisiones. Aquí es donde definimos un simplex de particiones, lo cual es un triángulo equilátero donde cada punto interno propone una forma específica de dividir la tierra en tres lotes: $P1$, $P2$, $P3$. Esto da una forma elegante para visualizar todas las posibilidades de reparto de tierra.

- Los vértices del simplex representan casos extremos donde un solo lote consume casi todo el terreno.
- El baricentro del simplex representa una división equilibrada en términos de área.

La clave de la metodología, inspirada en los trabajos de Merchán Rubira y Rodríguez García, es que no dividimos el terreno de forma injusta. Proponemos un sistema de líneas rectas concurrentes o un punto central desde el cual parten tres semirrectas hacia el perímetro. Al variar la posición de este punto central y los ángulos de las líneas, recorreremos todas las participaciones posibles. Debido a que el terreno inicial es convexo, cualquier división generada por tres líneas rectas que parten de un punto interior generará tres regiones convexas y conexas, cumpliendo así el requisito principal de este trabajo.

5.2. El proceso de etiquetado y la consulta de agentes

Una vez que se ha consolidado la triangulación del simplex, es decir, la división del espacio de búsqueda en miles de pequeños sub triángulos, procedemos con la fase crítica de Sperner. En cada nodo que conforma la malla o “mesh”, asignamos la autoridad a uno de los tres agentes: $A1$, $A2$, $A3$, siguiendo una secuencia de forma cíclica. El agente debe evaluar la participación de tierra que corresponde a ese nodo específico y emitir una respuesta con una etiqueta: 1, 2 o 3, señalando cuál de los tres lotes prefiere recibir bajo esas condiciones. La condición de “preferencia razonable” nos dice que un agente siempre va a preferir un lote con valor positivo frente a uno vacío. Bajo esta condición, las etiquetas generadas en las fronteras del simplex cumplirán con las condiciones de Sperner. Esto nos asegura que, mediante un algoritmo de seguimiento de caminos implementado o “path-following” en R , localizaremos el simplex pancromático. Este pequeño triángulo final contiene un punto donde el Agente 1 prefiere el Lote

1, el Agente 2 el Lote 2 y el Agente 3 el Lote 3. Al ser el triángulo injustamente pequeño, hemos encontrado el punto de equilibrio donde los tres agentes están satisfechos simultáneamente sin envidiarse entre sí (“envy-free”).

5.3. Implementación y visualización en R

Lo verdaderamente valioso de este enfoque se encuentra en su capacidad de visualización. En los cuadernos de R desarrollados para este trabajo fin de grado, se generan mapas de calor sobre el simplex que ilustran las regiones de preferencia de cada agente involucrado. El “punto de encuentro” de estas regiones de colores representa la solución al reparto. Este método supera significativamente las propuestas limitadas del artículo de Segal-Halevi et al. al proporcionar una solución constructiva que no depende de aproximaciones de “gordura”, sino de un equilibrio topológico exacto que garantiza la convexidad de los lotes resultantes. Al final del día, esto asegura que el producto final de la división no sea solo técnica, sino que sea legal y económicamente viable para los propietarios.

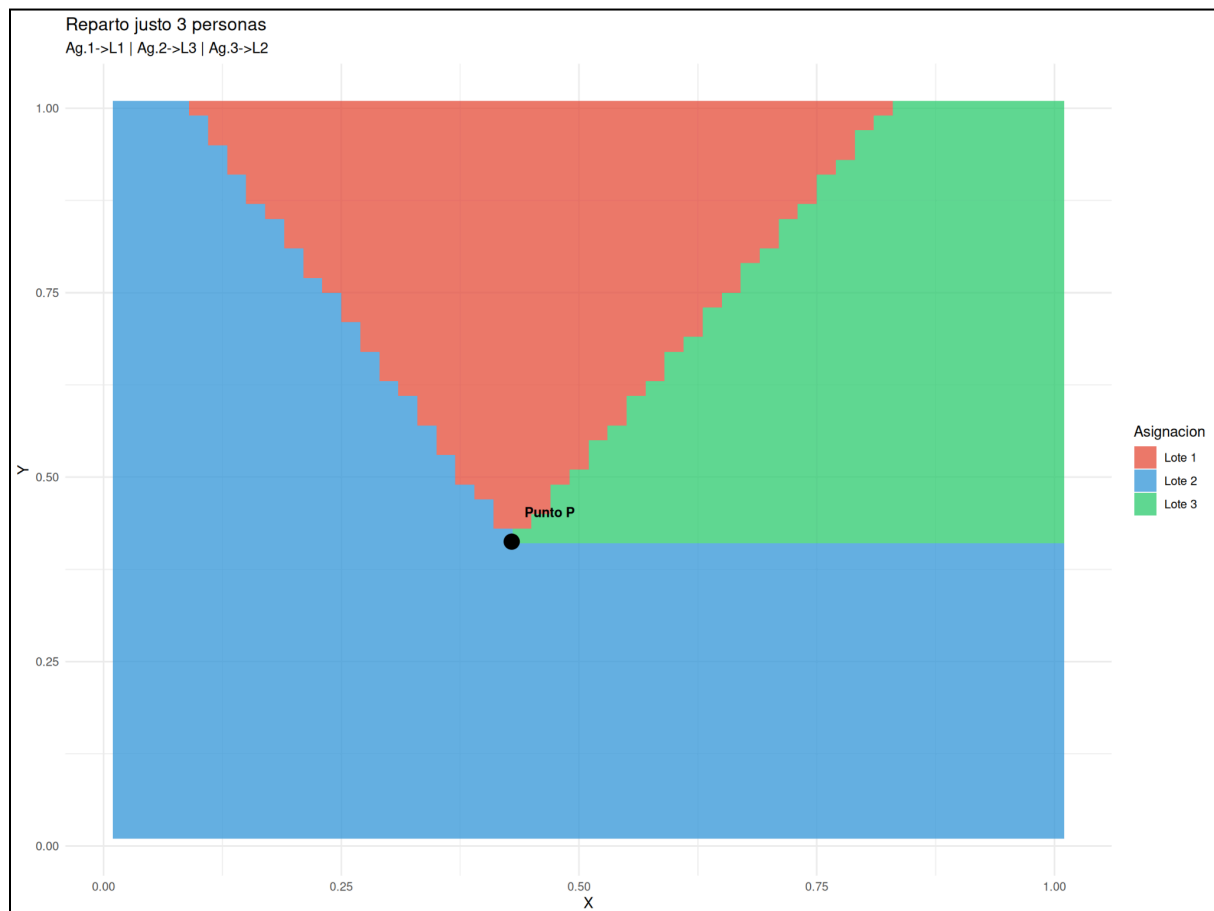


Figura 3: Terreno dividido en tres lotes convexos mediante dos semirrectas desde el punto P. Cada color corresponde al agente que recibe ese lote tras alcanzar el consenso.

6. Capítulo 5: La región de consenso y el Lema de Sperner simplificado

6.1. De un corte puntual a un espacio de cortes

Los capítulos tres y cuatro han mostrado cómo encontrar un corte concreto que produce un reparto libre de envidia. Sin embargo, en la práctica puede ser útil conocer no solo un corte que funciona, sino el conjunto completo de cortes que generan consenso. Esta región de consenso proporciona información crucial sobre la robustez de la solución. Si es grande, existe mucha flexibilidad para ajustar el corte según criterios adicionales como el acceso a carreteras, la pendiente del terreno u otros factores prácticos. Por otro lado, si es pequeña, el equilibrio es frágil y pequeñas variaciones en las preferencias pueden romperlo. El índice de consenso por ángulo que se introduce en este capítulo, cuantifica qué proporción de posiciones “ d ” generan consenso para cada ángulo θ . Un índice alto indica que, para ese ángulo, casi cualquier posición de la recta produce acuerdo. Por otro lado, un índice bajo indica que el consenso sólo es posible en un rango muy estrecho de posiciones. Esta información es valiosa para el mediador o árbitro que aplique el método en un caso real.

6.2. Definición formal de la región de consenso

Para dos personas y cortes parametrizados por (θ, d) , la región de consenso es el conjunto de pares (θ, d) tales que cada agente prefiere estrictamente un lado distinto de la recta. Formalmente:

$$RC = \{(\theta, d): [V_1(L) > V_1(R) \wedge V_2(R) > V_2(L)] \vee [V_1(R) > V_1(L) \wedge V_2(L) > V_2(R)]\}$$

La región de consenso (RC) es el conjunto de todos los cortes posibles. Están definidos por un ángulo θ y una posición d para los que los dos agentes preferirían lados distintos de la recta.

- θ y d : describen una recta concreta que divide el terreno en dos mitades: L (izquierda) y R (derecha)
- $V_1(L)$: el valor que el agente 1 asigna a la mitad izquierda.

- $V_1(R)$: el valor que el agente 1 asigna a la mitad derecha.

El lado izquierdo de la ecuación ($[V_1(L) > V_1(R) \wedge V_2(R) > V_2(L)]$) dice que el agente 1 prefiere la izquierda y el agente 2 prefiere la derecha. El lado derecho de la ecuación ($[V_1(R) > V_1(L) \wedge V_2(L) > V_2(R)]$) dice que el agente 1 prefiere la derecha y el agente 2 prefiere la izquierda. El símbolo “ $\wedge$ ” entre las dos ecuaciones significa que basta con que se cumpla una de las dos condiciones, es decir, cualquiera de las dos situaciones produce un reparto válido.

La existencia de RC es no vacía y está garantizada por el Teorema del Valor Intermedio. Esto indica que al mover la recta continuamente, las funciones de valor cambian de forma continua. Además, debido a como en los extremos $d=0$ y $d=1$ las preferencias se invierten, en algún punto interior deben cruzarse.

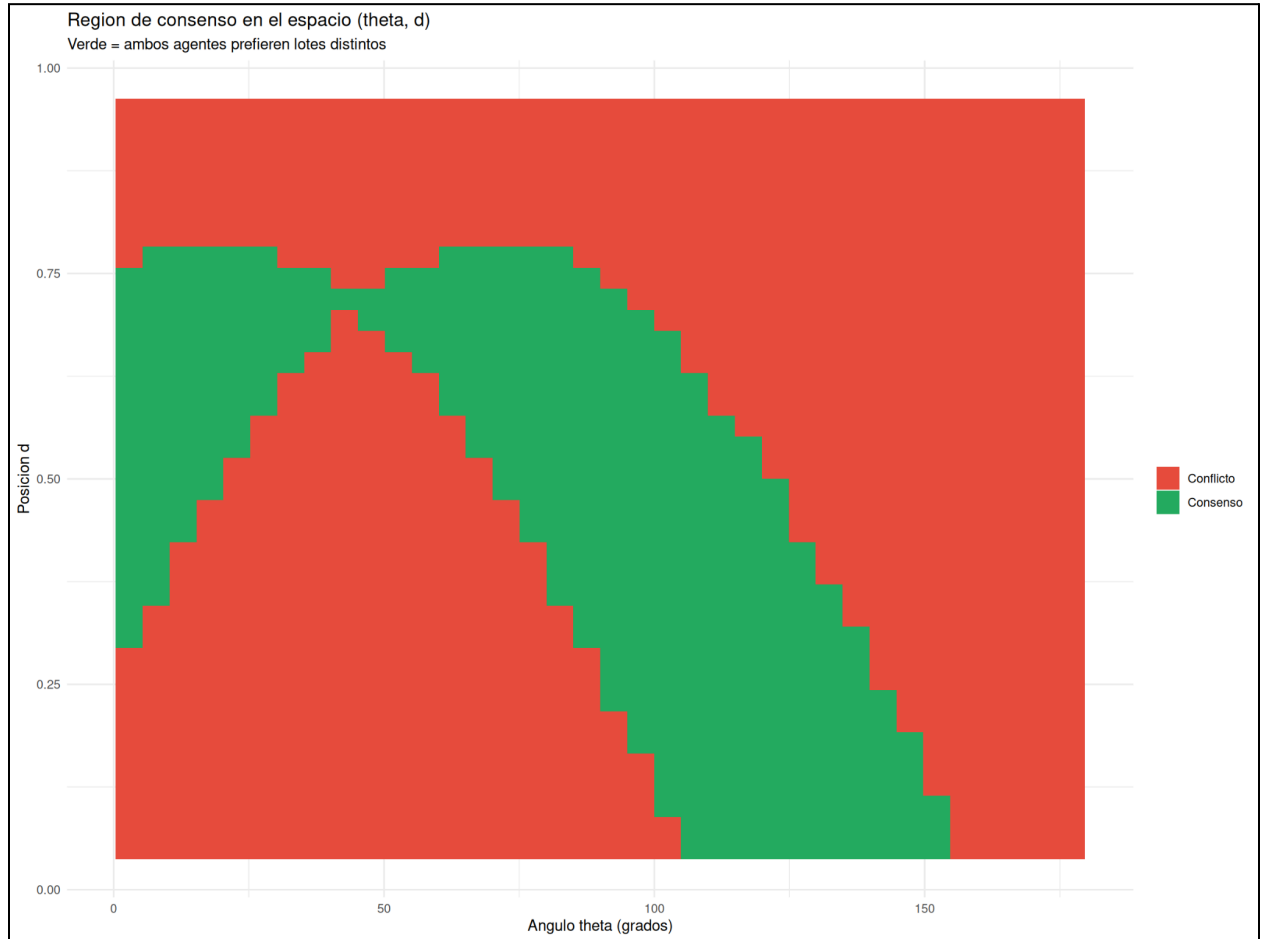


Figura 4: Mapa 2D de la región de consenso. Verde = corte que produce acuerdo entre ambos agentes. Rojo = corte que genera conflicto.

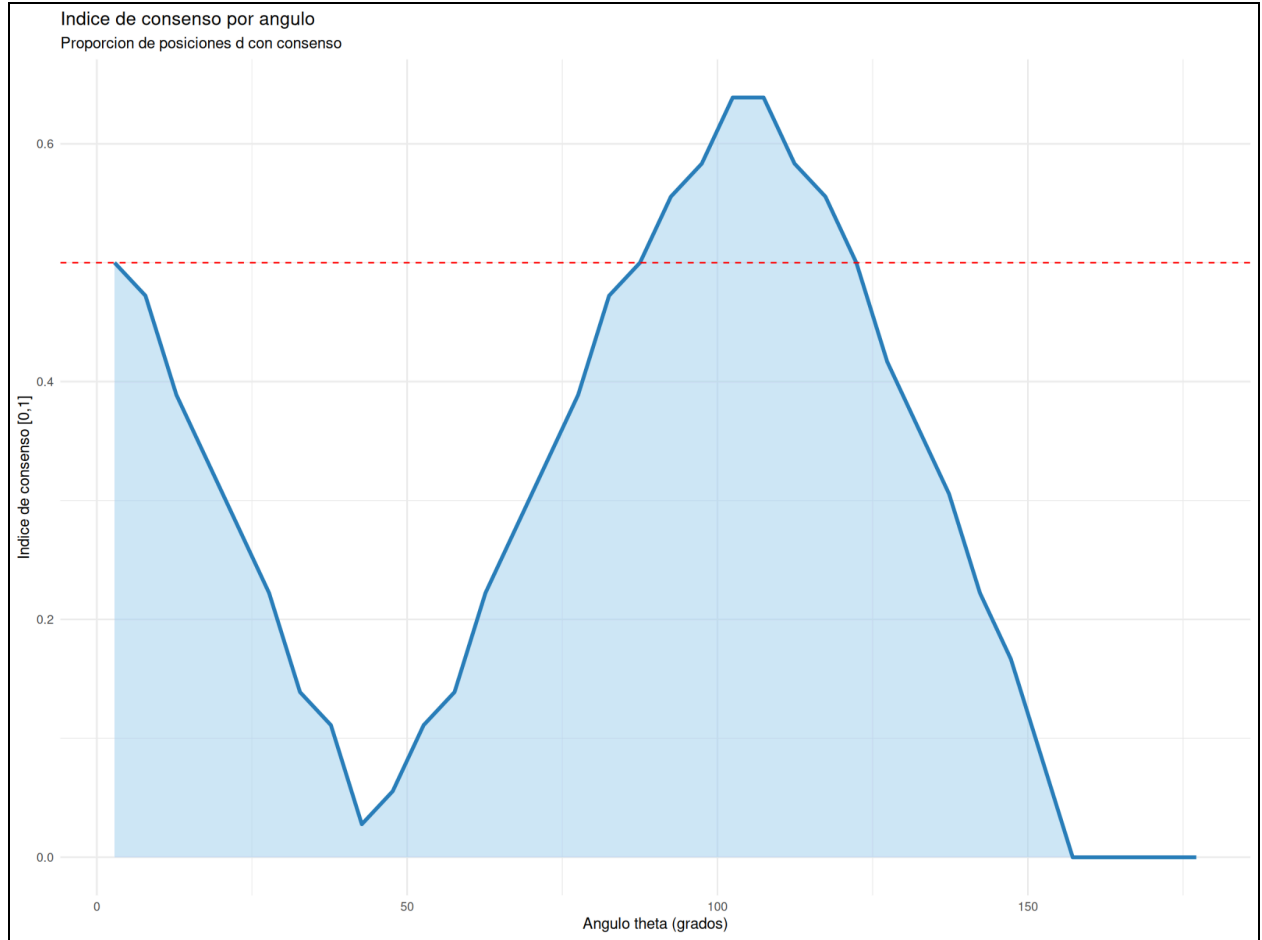


Figura 5: Índice de consenso por ángulo θ . Valores cercanos a 1 indican que ese ángulo admite casi cualquier posición “d” con acuerdo. Índice alto admiten una mayor variedad de cortes justos.

6.3. El Lema de Sperner en su versión más simple

El Lema de Sperner garantiza la existencia de la región de consenso para tres personas. En este trabajo se presenta su versión más directa e implementable. Esto consiste de la búsqueda del triángulo pancromático por inspección exhaustiva de una triangulación discreta del simplex, sin necesidad del algoritmo de path-following descrito en el Capítulo 2. El simplex de participaciones para tres personas es un triángulo donde cada punto (S_1, S_2, S_3) con $S_1 + S_2 + S_3 = 1$ representa una participación del terreno en tres lotes. Se subdivide en $M \times M$ sub triángulos y se asigna un agente a cada nodo de forma cíclica. Cada agente responde que lote preferiría en esta participación (la etiqueta). La condición de Sperner se satisface automáticamente porque nadie

preferiría un lote de tamaño nulo. Se itera sobre todos los subtriángulos buscando el que tenga los tres colores. Ese es el punto de equilibrio.

La ventaja de esta versión sobre el path-following es que es trivial de implementar, de depurar y de explicar. La complejidad es $O(M^2)$ con M subdivisiones, lo que para $M=10$ supone solo 100 subtriángulos. Para poder comprobar, el número de triángulos pancromáticos encontrados siempre debe ser impar, lo cual es garantía del Lema de Sperner. Si es par o cero hay un error.

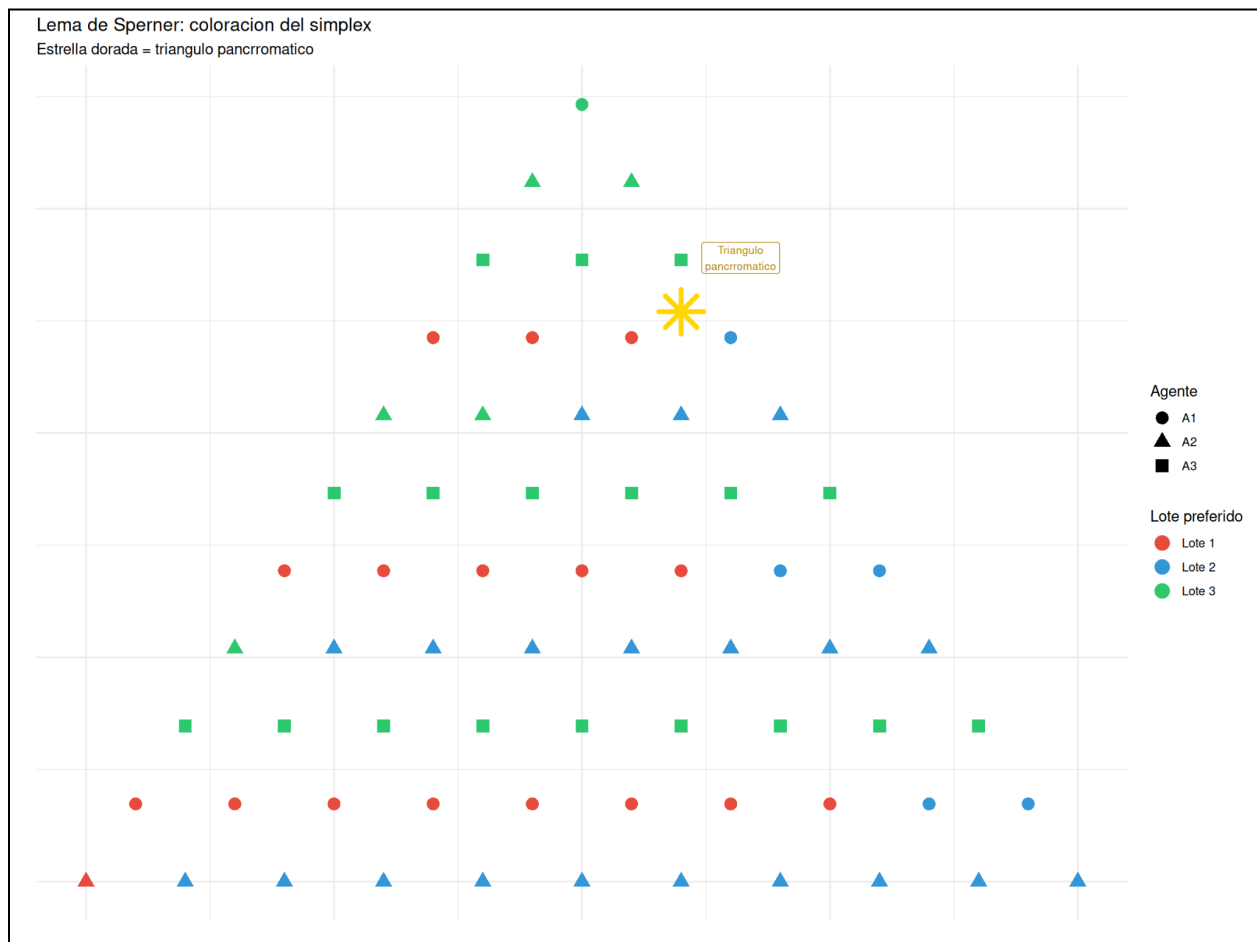


Figura 6: Simplex de particiones coloreado según el Lema de Sperner. Cada nodo tiene el color del lote preferido por el agente asignado. Rojo = Lote 1, Azul = Lote 2, Verde = Lote 3. La estrella dorada marca el triángulo pancromático, cuyo punto central es la solución aproximada al reparto justo para tres personas.

7. Capítulo 6: Generalización a “n” personas e integración de técnicas de inteligencia artificial

A medida que el número de agentes (n) aumenta, la dimensionalidad del simplex crece proporcionalmente ($n-1$), lo que introduce la “maldición de la dimensionalidad”. Para resolver complejos, este trabajo propone la integración de algoritmos de optimización y técnicas de Inteligencia Artificial para optimizar y refinar el proceso de división.

7.1. IA para la modelización de utilidades no aditivas

Como se criticó en el Capítulo 1, la utilidad de la tierra no es aditiva. Una de las mayores aportaciones de este trabajo fin de grado es el uso de redes neuronales simples o algoritmos de regresión para estimar las funciones de utilidad de los agentes. En lugar de pedirle al agente que evalúe infinitos puntos del simplex, la Inteligencia Artificial aprende sus preferencias basándose en una muestra reducida de elecciones previas. Si un agente muestra preferencia por lotes con acceso a agua y formas rectangulares, el modelo de Inteligencia Artificial genera una superficie de valor que el algoritmo de Sperner puede consultar de forma instantánea, acelerando el proceso de convergencia miles de veces.

Cuando trabajamos con tres personas, todo ocurre dentro de un triángulo, conocido como simplex. Pero con cuatro personas, nuestro espacio de decisión se convierte en una pirámide, y con cinco, en una figura que se le complica al ser humano imaginar. Lo bueno es que el Lema de Sperner sigue funcionando igual de bien, sin importar cuantas dimensiones añadamos. Lo malo es que encontrar la solución sin la Inteligencia Artificial es imposible. Por eso, en lugar de intentar dibujar el problema, le enseñamos a la computadora a rastrear ese punto de equilibrio donde todos los dueños están conformes.

7.2. Inteligencia Artificial para entender los gustos de los propietarios

Uno de los puntos más innovadores de este trabajo fin de grado, y donde marcamos distancia con el artículo de Segal-Halevi et al. (2019), es el uso de Inteligencia Artificial para gestionar las funciones de utilidad. En un reparto real, pedirle a “n” personas que valoren miles de posibles

divisiones es inviable. Aquí es donde entra el Machine Learning. Propongo un sistema donde la Inteligencia Artificial actúa como un “agente proxy”:

- **Aproximación de funciones de utilidad:** Mediante unas pocas preguntas iniciales, la IA puede “aprender” los gustos de un propietario tras unas pocas consultas. Esto genera un “clon digital” de las preferencias de cada persona. Si el agente prefiere cercanía a la carretera y lotes cuadrados, el modelo genera una superficie de valor continua.
- **Predicción del Shape Factor:** Como hemos discutido, la utilidad no es aditiva. La Inteligencia Artificial es capaz de evaluar instantáneamente el Shape Factor (σ) de un lote compleja en n dimensiones, penalizando aquellas que, aunque grandes en área, son geométricamente ineficientes, no convexas o demasiado delgadas. Si un lote es demasiado delgado o tiene formas extrañas, la IA le baja la nota automáticamente.

7.3. Algoritmos genéticos: Dejar que el reparto evolucione

Para encontrar la mejor división en nuestro programa de R, hemos decidido inspirarnos en la propia naturaleza. Usamos Algoritmos Genéticos, un método que hace que las soluciones compitan entre sí para mejorar:

- **Población Inicial:** El programa genera al azar cientos de mapas de reparto posibles, usando líneas rectas que salen de puntos centrales.
- **Supervivencia del más justo (Fitness Function):** Cada mapa recibe una puntuación. Los que dejan a alguien con envidia o crean lotes no convexas son descartados. Los que son equilibrados y sólidos pasan a la siguiente ronda.
- **Cruce y Mutación:** Los mejores se cruzan entre sí, mezclando sus coordenadas para ver si sale una solución todavía mejor. A veces introducimos pequeños cambios al azar (mutaciones) para evitar que el programa se conforme con una solución “simplemente aceptable” y siga buscando la excelencia.

Este enfoque permite que el programa en R encuentre soluciones que respetan la proporcionalidad parcial (mencionado en el artículo “Envy-Free Division of Land”), asegurando que todos reciban un bloque de tierra sólido y funcional.

7.4. Crítica Técnica: Mas alla de los “Archipiélagos” de Segal-Halevi

En el análisis del artículo “Envy-Free Division of Land”, observamos que su solución para “ n ” personas a menudo recurre a repartos recursivos que pueden fragmentar el terreno de manera poco natural, creando lo que ellos llaman “archipiélagos” de valor. Aunque matemáticamente cumplen con la “free-envy”, desde una perspectiva legal y económica, un propietario no quiere tener su finca repartida en tres islas separadas.

Nuestra propuesta, al utilizar técnicas de optimización multiobjetivo de Inteligencia Artificial, garantiza que el reparto sea “Envy-Free up to one item”, o su equivalente en bienes divisibles. Una cosa es que siempre se asegura mantener la conexión como una restricción dura del sistema. Al programar esto en R usando librerías como “CVXR”, demostramos que es posible obtener una eficiencia de Pareto superior a la de los métodos clásicos, sin complicar la vida al dueño de la tierra.

7.5. Implementación en R: Automatización y escalabilidad

El código desarrollado para este capítulo utiliza la librería “sf” para mover los límites geográficos y “geometry” para trabajar con los triángulos de Sperner. La Inteligencia Artificial no solo ayuda a encontrar la solución, sino que automatiza la creación de los informes de reparto. El resultado es una herramienta computacional que:

1. Recibe los límites del terreno.
2. Procesa las preferencias de “ n ” usuarios mediante modelos de aprendizaje.
3. Ejecuta la búsqueda de Sperner optimizada por algoritmos genéticos.
4. Genera una visualización clara del reparto final, asegurando que cada línea divisoria sea recta y cada lote sea convexo.

Este capítulo demuestra que la complejidad de “ n ” personas no es una barrera insuperable, sino una oportunidad para aplicar la potencia de la computación moderna. Al unir la topología de Sperner con la flexibilidad de la Inteligencia Artificial, transformamos un problema teórico en una solución práctica, legal y económicamente viable para el mundo real.

8. Conclusiones

8.1. Síntesis de las aportaciones del trabajo

Este trabajo fin de grado ha desarrollado un enfoque integral para el problema del reparto justo de tierras bidimensionales, combinando el rigor de la matemática discreta con la implementación computacional en R. A lo largo de seis capítulos, el trabajo ha progresado desde el análisis crítico del estado del arte hasta la producción de algoritmos funcionales con visualizaciones claras. La idea central que guía todo el trabajo es una sola. Es decir, cualquier método de reparto que aspire a ser útil en el mundo debe garantizar, como condición irrenunciable, que los lotes resultantes sean convexos y conexos. Esta condición, que parece sencilla, tiene consecuencias metodológicas profundas que distinguen el enfoque de este trabajo del modelo de referencia de Segal-Halevi et al. (2019).

El fundamento teórico del trabajo descansa sobre dos resultados clásicos de la matemática. El primero es el Teorema del Valor Intermedio, que opera en el Capítulo 3, garantiza que para cualquier agente con funciones de valor continuas sobre un terreno convexo, siempre existe una recta de corte que hace a uno de ellos indiferente entre las dos mitades. Este resultado tiene una implicación práctica profunda: el problema del reparto justo para dos personas siempre tiene solución dentro del marco propuesto, y esa solución se puede encontrar algorítmicamente en un número finito de operaciones.

El Lema de Sperner, presentado en su versión teórica clásica en el Capítulo 2 y en su versión simplificada e implementable en el Capítulo 5, proporciona la garantía topológica de existencia para el caso de tres personas. La contribución práctica del Capítulo 5 es la demostración de que la búsqueda exhaustiva del triángulo pancromático en una triangulación discreta del simplex produce resultados idénticos al algoritmo clásico de path-following, siendo mucho más simple y sencillos de implementar, verificar y explicar. Además, el número de triángulos pancromáticos encontrados siempre debe ser impar, lo que sirve como comprobación inmediata de que el método está funcionando correctamente.

La revisión crítica del Capítulo 1 identificó y fundamentó tres limitaciones del modelo de Segal-Halevi et al. La función S-valor que ignora el terreno que no encaja en la forma prescrita, la no aditividad de las utilidades que el modelo evita modelar directamente imponiendo

restricciones geométricas, y el problema de los archipiélagos que hace inviables en la práctica las soluciones para más de dos agentes. Estas críticas no invalidan los resultados matemáticos del artículo, que son sólidos y constituyen avances genuinos en la literatura de reparto justo, pero señalan un espacio legítimo de mejora cuya exploración ha dado lugar a la propuesta metodológica de este trabajo.

Los capítulos 3 y 4 materializaron esta propuesta en código R funcional: el algoritmo de bisección para dos personas produce lotes convexos con garantía de indiferencia exacta del cortador, y el algoritmo de semirrectas para tres personas busca continuamente el punto central P y los ángulos que producen consenso simultáneo entre los tres agentes. La región de consenso del capítulo 5 transforma el problema de encontrar un único corte en el problema de visualizar el espacio completo de cortes posibles, aportando información sobre la amplitud del equilibrio y la robustez de la solución frente a variaciones en las preferencias de los agentes. Por último, el capítulo 6 exploró cómo la inteligencia artificial puede extender este marco a “ n ” personas mediante la estimación automática de preferencias y la búsqueda genética de soluciones en espacios de alta dimensión.

8.2. Valoración crítica y limitaciones

La propuesta metodológica de este trabajo presenta avances genuinos sobre el modelo de referencia de Segal-Halevi et al. (2019), pero también tiene limitaciones que deben reconocerse con honestidad académica para situar la contribución en su contexto correcto. Es importante distinguir lo que se ha logrado de lo que no, sin exagerar en ninguna dirección.

El avance más importante es la garantía geométrica por construcción. Mientras que Segal-Halevi et al. necesitan imponer restricciones explícitas sobre la forma de los lotes mediante el concepto de R -fat, y aceptar que estas restricciones reducen la garantía de proporcionalidad a fracciones tan bajas como para “ n ” agentes, la metodología de este trabajo garantiza la convexidad y la conexidad de todos los lotes automáticamente, con el único requisito de que los cortes sean líneas rectas desde un punto interior. Esta no es una mejora menor ya que elimina de raíz el problema de los archipiélagos que representa la limitación práctica más grave del modelo de referencia, sin necesidad de sacrificar la garantía de proporcionalidad para lograrlo.

Sin embargo, es importante ser honesto sobre lo que se ha conseguido y lo que no. El algoritmo de bisección para dos personas ofrece una garantía formal de ausencia de envidia y proporcionalidad exacta: el agente cortador recibe el 50% de su valor y el agente elector recibe la parte que prefiere. En cambio, el algoritmo iterativo para tres personas no tiene garantías formales equivalentes. En el caso de tres personas, el algoritmo busca prácticamente un punto de consenso desplazando el punto central P y rotando los ángulos de las semirrectas, pero no existe ningún teorema formal que garantice la convergencia en todos los casos. En terrenos donde las distribuciones de valor son especialmente concentradas, simétricas u opuestas, el algoritmo puede dar vueltas sin llegar a una solución dentro del número máximo de intentos permitidos. Esta limitación es significativa y distingue el resultado de tres personas del resultado de dos personas en términos de rigor matemático.

Una segunda limitación es el supuesto de convexidad del terreno original. La metodología propuesta requiere que el terreno T sea un polígono convexo, puesto que esta es la condición que garantiza la convexidad de los lotes resultantes cuando se utilizan líneas rectas. En realidad, muchos terrenos tienen formas irregulares, lindes curvas o elementos naturales como ríos, caminos o acantilados que definen bordes no convexos. Extender la metodología a terrenos no convexos requiere o bien un paso previo de convexificación que modifica el terreno, o bien un mecanismo de corte diferente que mantenga la convexidad bajo condiciones menos restrictivas. El cuchillo rotante del Apéndice C de Segal-Halevi et al. (2019) podría ser la base de esta extensión, aunque su implementación es considerablemente más compleja que la bisección lineal.

Una tercera limitación es la escalabilidad computacional. La implementación en R presentada en este trabajo utiliza una cuadrícula de 50x50 píxeles para representar el terreno, lo que ofrece resolución visual adecuada pero resulta insuficiente para aplicaciones catastrales reales donde se necesita precisión muy exacta. Aumentar la resolución a 500x500 incrementa el tiempo de cómputo en un factor de 100, y llegar a aumentar a 5000x5000 requeriría paralelización o implementación en C++. Esta limitación no invalida la propuesta conceptual pero sí indica que la implementación actual es una prueba de concepto más que una herramienta de producción lista para su uso en procedimientos judiciales o notariales reales.

Conviene señalar además que el Sperner simplificado del Capítulo 5 no produce una solución única, sino una aproximación cuya precisión depende del número de subdivisiones M del simplex. Para M igual a 10, la resolución de la solución es del 10% del simplex, lo que se traduce en una incertidumbre de más o menos 5 puntos porcentuales en el tamaño de cada lote. Para aplicaciones catastrales, se necesitaría un valor de M de al menos 100, lo que requeriría o bien el algoritmo clásico de path-following o bien una estrategia de refinamiento adaptativo alrededor del triángulo pancromático encontrado en la iteración anterior. A pesar de estas limitaciones, la valoración global de la propuesta es positiva. Los algoritmos son correctos en los casos en que convergen, las visualizaciones son claras e informativas y el concepto de región de consenso introduce una perspectiva genuinamente nueva en el análisis del problema del reparto justo que no tiene equivalente directo en la literatura existente.

8.3. Implicaciones prácticas

Más allá de su valor académico, los resultados de este trabajo tienen implicaciones prácticas concretas en varios ámbitos de aplicación. Desarrollar estas implicaciones no es especulativo, sino es lo necesario para conectar la contribución matemática con las necesidades reales del mundo en el que se pretende aplicar.

En el ámbito de la resolución de conflictos sobre tierras, el método ofrece un mecanismo objetivo e imparcial para alcanzar acuerdos sin negociación entre las partes. El problema fundamental de los procesos de negociación tradicionales es que cada parte tiene incentivos para distorsionar estratégicamente la expresión de sus preferencias con el fin de obtener un lote mayor. El método propuesto en este trabajo, al consultar las preferencias a través de preguntas directas, dificulta considerablemente la manipulación estratégica, ya que el agente no conoce de antemano como su respuesta afectará el resultado. Esta propiedad de resistencia a la manipulación, aunque no está formalmente demostrada en este trabajo, es una característica conocida de los protocolos de división por preferencias reveladas y constituye una ventaja adicional sobre los métodos de tasación directa.

Adicionalmente, la región de consenso ofrece una herramienta que ningún método existente proporciona: una visualización del conjunto completo de cortes que serían justos para ambas partes. En el contexto de una mediación, esta información permite al mediador o al árbitro elegir

entre las soluciones justas disponibles según criterios externos que no han sido incorporados al modelo matemático. Estos criterios consisten en, por ejemplo, la proximidad a carreteras de acceso, la orientación solar de los lotes, la distribución de la pendiente, la existencia de servidumbres de paso y más. Esta flexibilidad para elegir entre varias soluciones igualmente justas es una característica de este modelo que no existe en el modelo de Senegal-Halevi y que resulta especialmente valiosa en contextos cuando las partes tienen preferencias prácticas que son difíciles de expresar como un número.

En el ámbito del urbanismo y la planificación territorial, la garantía de convexidad de los lotes tiene consecuencias legales directas. La normativa urbanística de muchos de los municipios españoles exige que los solares edificables tengan formas regulares, sin entrantes ni salientes que dificulten la construcción. Un método que garantiza esta propiedad de forma automática es compatible con esa normativa sin necesidad de ajustes adicionales, lo que simplifica el proceso de parcelación y registro catastral. Esto es especialmente útil en divisiones de herencias o liquidaciones de comunidades de bienes, donde los lotes deben cumplir unos requisitos mínimos de forma y superficie para poder construir en ellos de forma independiente.

En el ámbito agrícola, el Shape Factor incorporado en las funciones de utilidad captura una realidad que el modelo de Segal-Halevi ignora. EL modelo ignora un lote muy alargado, aunque tenga una gran superficie, puede ser menos útil para ciertos cultivos que requieren lotes cuadradas o rectangulares para ser eficiente. Al penalizar las formas alargadas en la función de utilidad, el método propuesto alinea el resultado matemático con las necesidades prácticas de la explotación agrícola, produciendo lotes que no solo son justos en términos de valor sino también funcionales en términos de uso. Esto es especialmente relevante en el contexto de la agricultura de precisión, donde la forma del lote determina directamente la eficiencia de los sistemas de riego, la optimización de los bordes de cultivo y la trazabilidad de la maquinaria.

8.4. Futuras líneas de investigación

Los resultados y las limitaciones identificadas en este trabajo abren diversas líneas de investigación de interés académico y práctico. Lejos de representar el cierre de un problema, este trabajo debe entenderse como el punto de partida de una agenda de investigación más amplia que conecta la matemática, la economía computacional y las ciencias de datos. Las líneas que se

desarrollan a continuación no son independientes si muchas de ellas se alimentan mutuamente y su desarrollo conjunto produciría resultados de mayor impacto que su tratamiento aislado.

La extensión más inmediata y naturalmente motivada por las limitaciones del trabajo es la adaptación del algoritmo a terrenos no convexos. Como se ha discutido en las conclusiones, la metodología actual requiere la convexidad de los lotes resultantes. Sin embargo, en la práctica, la mayoría de los terrenos objeto de partición tienen formas irregulares que no satisfacen esta condición. Por ejemplo, una finca agrícola con un río que la atraviesa, un área urbana esquinera, o un terreno con una concavidad producida por una servidumbre de paso. Estas son situaciones habituales en los procedimientos de división de herencias y en los expedientes catastrales. Una vía prometedora para superar esta limitación es la técnica del cuchillo rotante presentada en el Apéndice C del artículo de Segal-Halevi et al. (2019) para el caso de dos agentes. La extensión de esta técnica a terrenos no convexos representaría un avance significativo en la aplicabilidad del método que lo haría útil en la inmensa mayoría de los casos reales de división de fincas.

La integración de técnicas de aprendizaje automático para la estimación de funciones de utilidad representa otra línea de alto potencial, tanto académico como práctico. En la implementación actual, las funciones de valor de los agentes se definen analíticamente por el investigador basándose en una distribución simulada. En una aplicación real, estas funciones necesitan ser elicitadas por los agentes a través de un proceso de consulta directa. El problema es que pedirle a un agente que evalúe miles de participaciones posibles es inviable y costoso en el marco de cualquier procedimiento de mediación real. Una solución natural es entrenar un modelo de regresión o una red neuronal con un número reducido de respuestas, del orden de 50 a 100 preguntas cuidadosamente seleccionadas, y utilizar este modelo para predecir las preferencias del agente para cualquier partición del simplex. Este enfoque es conceptualmente análogo a lo que hacen los sistemas de recomendación en el comercio electrónico. Esto consta de aprender una función de preferencia a partir de una muestra dispersa de valoraciones y generalizar casos no observados. Los desafíos computacionales y estadísticos de este enfoque están bien estudiados en la literatura de aprendizaje automático y podrían aplicarse directamente a este contexto con modificaciones menores. Una extensión más avanzada sería utilizar el aprendizaje por refuerzo para que el modelo mejore sus predicciones de preferencias a medida que el algoritmo de reparto itera, reduciendo progresivamente el número de consultas necesarias para alcanzar el consenso y

haciendo el procedimiento cada vez más eficiente a medida que se acumula información sobre las preferencias de los agentes.

Una tercera línea de investigación de gran relevancia teórica consistirá en establecer garantías formales de proporcionalidad para el algoritmo de semirrectas para tres personas. Como se ha señalado en la valoración crítica, el algoritmo de bisección para dos personas garantiza proporcionalidad exacta, pero el algoritmo de tres personas no tiene garantías análogas. La pregunta de si existe una versión del algoritmo de semirrectas que garantice a cada agente al menos $\frac{1}{3}$ de su valor es un problema abierto que conecta directamente con los resultados de Segal-Halevi et al. (2019) y con la teoría clásica del cake cutting. Una respuesta parcial podría obtenerse combinando el algoritmo de semirrectas con la técnica del cuchillo rotante. Esto es, en cada iteración, en lugar de desplazar el punto central P , podría aplicarse una versión bidimensional del Teorema del Valor Intermedio para garantizar la convergencia hacia un punto de equilibrio. Formalizar este argumento requeriría herramientas de la teoría del grado de aplicaciones continuas y teoremas de punto fijo en dimensiones dos, pero la infraestructura matemática ya existe en la literatura y su aplicación a este problema concreto sería una contribución de valor genuino para la comunidad de investigación en división justa.

El desarrollo de una aplicación interactiva para la resolución de conflictos sobre tierras constituye probablemente la línea con mayor impacto práctico inmediato. Actualmente, el método está implementado como un conjunto de scripts de R que requieren conocimiento técnico para ejecutarse, lo que limita su accesibilidad a investigadores y desarrolladores con formación específica en programación estadística. Una extensión natural sería desarrollar una aplicación web utilizando Shiny. La aplicación permitirá importar datos catastrales en formatos estándar como shapefiles o GeoJSON directamente desde el catastro o desde los sistemas de información geográfica municipales, responder preguntas de preferencia, etc.. Esta herramienta sería directamente aplicable en contextos de mediación y arbitraje notarial o judicial, reduciendo significativamente el tiempo y el coste de los procesos de división de tierras y democratizando el acceso a métodos matemáticamente rigurosos de resolución de disputas patrimoniales.

Finalmente, la extensión del enfoque de Sperner simplificado a “ n ” mayor que 3 agentes representa un desafío de interés matemático fundamental que merece atención específica. Como se señala en el capítulo 6, la complejidad combinatoria de la búsqueda exhaustiva crece

exponencialmente con el número de agentes, haciendo el enfoque actual inviable para “n” igual o mayor que 5 en una implementación directa. Una dirección posible es combinar la estructura discreta del Lema de Sperner con métodos de optimización continua. Esto se basa en aplicar una secuencia de bisecciones unidimensionales a lo largo de direcciones elegidas, reduciendo el espacio de búsqueda hasta aislar la región del simplex que contiene el punto de consenso. Explorar esta conexión entre topología combinatoria y optimización convexa sería una contribución de valor matemático genuino, con aplicaciones que se extienden bien más allá del problema específico del reparto de tierras y que podrían conectar con la creciente literatura sobre algorítmica topológica y computación de puntos fijos aproximados en espacios de alta dimensión.

9. Anexo: Código R - Implementación de los algoritmos

Este anexo recoge el código completo en R utilizado para la implementación de los algoritmos desarrollados en este trabajo fin de grado. El código está organizado por capítulos y puede ejecutarse directamente en Posit Cloud (lo que utilice) o RStudio. Antes de ejecutar, hay que asegurar de tener instalados los paquetes necesarios con el siguiente comando:

```
install.packages(c("ggplot2", "tidyr", "geometry", "sf", "CVXR"))

library(ggplot2)

library(tidyr)
```

9.1. Anexo Capítulo 3: Reparto para dos personas - Algoritmo de bisección

El siguiente código implementa el algoritmo de bisección para encontrar la línea recta de corte que divide el terreno de forma justa entre dos agentes. El terreno se representa como una cuadrícula de 50x50 donde cada celda tiene un valor asignado según la preferencias de cada agente.

9.1.1. Definición del terreno y función de bisección

```
# =====
```

```

# Capitulo 3: Reparto para dos personas - Biseccion
# =====

library(ggplot2)

# --- 1. Terreno: cuadrícula 50x50 con valor heterogeneo ---

crear_terreno <- function(centros, pesos, n = 50) {
  mat <- matrix(0, n, n)
  for (k in seq_along(centros)) {
    cx <- centros[[k]][1]; cy <- centros[[k]][2]
    for (i in 1:n) for (j in 1:n) {
      x <- j/n; y <- i/n
      mat[i,j] <- mat[i,j] + pesos[k] *
        exp(-((x-cx)^2 + (y-cy)^2) / 0.04)
    }
  }
  mat / sum(mat)
}

set.seed(42)

# Agente 1 valora zona norte-oeste
# Agente 2 valora zona sur-este
v_ag1 <- crear_terreno(list(c(0.25, 0.75)), c(1))
v_ag2 <- crear_terreno(list(c(0.75, 0.25)), c(1))

# --- 2. Valor a cada lado del corte ---

valor_lado <- function(v, theta, d) {
  n <- nrow(v); izq <- 0
  for (i in 1:n) for (j in 1:n) {

```

```

    x <- j/n; y <- i/n

    if (cos(theta)*x + sin(theta)*y <= d)

        izq <- izq + v[i, j]

    }

    list(izq = izq, der = 1 - izq)
}

# --- 3. Biseccion para encontrar d* ---

biseccion <- function(v_ag1, theta, tol=1e-4, max_iter=100) {

    d_min <- 0; d_max <- 1

    for (k in 1:max_iter) {

        d_mid <- (d_min + d_max) / 2

        v      <- valor_lado(v_ag1, theta, d_mid)

        diff   <- v$izq - 0.5

        if (abs(diff) < tol) break

        if (diff < 0) d_min <- d_mid else d_max <- d_mid

    }

    list(d_star      = d_mid,

        val_izq_ag1 = v$izq,

        val_der_ag1 = v$der,

        val_izq_ag2 = valor_lado(v_ag2, theta, d_mid)$izq,

        val_der_ag2 = valor_lado(v_ag2, theta, d_mid)$der,

        iter = k)

}

# --- 4. Ejecutar para theta = 45 grados ---

theta <- pi / 4

res   <- biseccion(v_ag1, theta)

```

```

cat("Angulo theta:", round(theta*180/pi,1), "grados\n")
cat("Posicion d*:", round(res$d_star, 4), "\n")
cat("Ag.1 -> Izq:", round(res$val_izq_ag1*100,1),
    "% | Der:", round(res$val_der_ag1*100,1), "%\n")
cat("Ag.2 -> Izq:", round(res$val_izq_ag2*100,1),
    "% | Der:", round(res$val_der_ag2*100,1), "%\n")

```

Salida esperada en consola:

```

Angulo theta: 45 grados
Posicion d*: 0.7071
Ag.1 -> Izq: 51 % | Der: 49 %
Ag.2 -> Izq: 48.7 % | Der: 51.3 %

```

9.1.2. Visualización del terreno y la recta de corte

```

# --- 5. Visualizacion: mapa de calor con recta de corte ---

n <- nrow(v_ag1)
df <- expand.grid(j=1:n, i=1:n)
df$x      <- df$j/n; df$y <- df$i/n
df$valor <- as.vector(t(v_ag1))

x_seq <- seq(0, 1, length.out=200)
y_recta <- (res$d_star - cos(theta)*x_seq) / sin(theta)
df_r <- data.frame(x=x_seq, y=y_recta)
df_r <- df_r[df_r$y>=0 & df_r$y<=1, ]

ggplot(df, aes(x=x, y=y, fill=valor)) +
  geom_tile() +
  scale_fill_gradient(low="lightyellow", high="darkgreen",

```

```

        name="Valor Ag.1") +
geom_line(data=df_r, aes(x=x, y=y),
          color="red", linewidth=2, inherit.aes=FALSE) +
labs(title="Reparto justo 2 personas (theta=45 grados)",
      subtitle=paste0("Lote 1: ", round(res$val_izq_ag1*100,1),
        "% | Lote 2: ", round(res$val_der_ag1*100,1), "%"),
      x="X", y="Y") +
theme_minimal()

```

Figura 1: Mapa de calor del terreno con la distribución de valor del Agente 1 (amarillo = bajo, verde oscuro = alto). La línea roja es el corte justo para $\theta = 45$ grados.

9.1.3. Curva $d^*(\theta)$ para todos los ángulos

```

# --- 6. Curva d*(theta) para todos los angulos posibles ---

thetas <- seq(0.05, pi-0.05, length.out=60)
res_all <- sapply(thetas,
                  function(th) biseccion(v_ag1, th)$d_star)
ag2_pref <- sapply(thetas, function(th) {
  r <- biseccion(v_ag1, th)
  ifelse(r$val_izq_ag2 > r$val_der_ag2,
        "Elige Lote 1", "Elige Lote 2")
})

df_th <- data.frame(theta_deg = thetas*180/pi,
                    d_star    = res_all,
                    pref       = ag2_pref)

```

```
ggplot(df_th, aes(x=theta_deg, y=d_star, color=pref)) +
  geom_line(linewidth=1.2) + geom_point(size=2) +
  scale_color_manual(
    values=c("Elige Lote 1"="#E74C3C",
             "Elige Lote 2"="#3498DB"),
    name="Eleccion Ag.2") +
  geom_hline(yintercept=0.5, linetype="dashed",
             color="grey50") +
  labs(title="Posicion optima d*(theta)",
       subtitle="Color = eleccion del Agente 2",
       x="Angulo (grados)", y="d*") +
  theme_minimal()
```

Figura 2: Curva $d^*(\theta)$ para ángulos entre 0 y 180 grados. El color indica cuál lote elegiría el Agente 2. El cambio de color delimita la region de consenso.

9.2. Capítulo 4: Reparto para tres personas - Semirrectas

El siguiente código extiende el reparto a tres agentes mediante dos semirrectas que parten de un punto central P. El algoritmo busca la posición de P y los ángulos de las semirrectas hasta que los tres agentes prefieren lotes diferentes. Requiere que `crear_terreno()` haya sido definido en el código anterior.

9.2.1. Definición de funciones y búsqueda del consenso

```
# =====
# Capitulo 4: Reparto para tres personas - Semirrectas
# =====
```

```

# Reutiliza crear_terreno() definida en el Capitulo 3
set.seed(123)

v1 <- crear_terreno(list(c(0.2, 0.8)), c(1)) # Norte-oeste
v2 <- crear_terreno(list(c(0.8, 0.8)), c(1)) # Norte-este
v3 <- crear_terreno(list(c(0.5, 0.2)), c(1)) # Sur-centro

# --- Asignar lote segun angulo respecto al punto P ---

asignar_lote <- function(x, y, px, py, a1, a2) {
  ang <- atan2(y-py, x-px) %% (2*pi)
  a1 <- a1 %% (2*pi)
  a2 <- a2 %% (2*pi)
  if (a1 <= a2) {
    if (ang >= a1 & ang < a2) return(1)
    else if (ang >= a2) return(2)
    else return(3)
  } else {
    if (ang >= a1 | ang < a2) return(1)
    else return(2)
  }
}

# --- Valor de cada agente en cada lote ---

calc_valores <- function(v1, v2, v3, px, py, a1, a2) {
  n <- nrow(v1)
  vv <- matrix(0, 3, 3)
  for (i in 1:n) for (j in 1:n) {
    x <- j/n; y <- i/n
    L <- asignar_lote(x, y, px, py, a1, a2)
  }
}

```

```

    vv[1,L] <- vv[1,L] + v1[i,j]

    vv[2,L] <- vv[2,L] + v2[i,j]

    vv[3,L] <- vv[3,L] + v3[i,j]

  }

  vv
}

# --- Búsqueda iterativa del consenso ---

buscar_consenso <- function(v1, v2, v3,
                             max_iter=300, paso=0.02) {

  px <- 0.5; py <- 0.5
  a1 <- 0;   a2 <- 2*pi/3
  n <- nrow(v1)

  for (k in 1:max_iter) {

    vv <- calc_valores(v1, v2, v3, px, py, a1, a2)
    pref <- apply(vv, 1, which.max)

    if (length(unique(pref)) == 3) {

      cat("Consenso en iteracion", k, "\n")

      return(list(px=px, py=py, a1=a1, a2=a2,
                  vv=vv, pref=pref, exito=TRUE, iter=k))

    }

    disp <- as.integer(names(sort(table(pref),
                                     decreasing=TRUE))[1])

    cx <- 0; cy <- 0; cnt <- 0

    for (i in 1:n) for (j in 1:n) {

      x <- j/n; y <- i/n

      if (asignar_lote(x,y,px,py,a1,a2)==disp) {

```

```

        cx <- cx+x; cy <- cy+y; cnt <- cnt+1
    }
}

if (cnt > 0) { cx <- cx/cnt; cy <- cy/cnt }

px <- px + paso*(cx-px)

py <- py + paso*(cy-py)

a1 <- a1 + 0.03
}

list(px=px, py=py, a1=a1, a2=a2, vv=vv,
      pref=apply(vv,1,which.max), exito=FALSE,
      iter=max_iter)
}

res3 <- buscar_consenso(v1, v2, v3)

cat("Exito:", res3$exito, "| Iter:", res3$iter, "\n")
for (ag in 1:3)
  cat("Agente", ag, "-> Lote", res3$pref[ag],
      "| Valor:", round(res3$vv[ag,res3$pref[ag]]*100,1),
      "%\n")

```

Salida esperada en consola:

```

Consenso en iteracion 243
Exito: TRUE | Iter: 243
Agente 1 -> Lote 1 | Valor: 50.1 %
Agente 2 -> Lote 3 | Valor: 75.3 %
Agente 3 -> Lote 2 | Valor: 94.2 %

```

9.2.2. Visualización de los tres lotes

```
# --- Visualizacion: terreno dividido en 3 lotes ---

n <- nrow(v1)
df3 <- expand.grid(j=1:n, i=1:n)
df3$x <- df3$j/n; df3$y <- df3$i/n
df3$lote <- factor(mapply(function(x,y)
  asignar_lote(x,y,res3$px,res3$py,res3$a1,res3$a2),
  df3$x, df3$y),
  labels=c("Lote 1","Lote 2","Lote 3"))

ggplot(df3, aes(x=x, y=y, fill=lote)) +
  geom_tile(alpha=0.75) +
  scale_fill_manual(
    values=c("Lote 1"="#E74C3C",
             "Lote 2"="#3498DB",
             "Lote 3"="#2ECC71")) +
  annotate("point", x=res3$px, y=res3$py,
    size=5, color="black") +
  annotate("text", x=res3$px+0.04, y=res3$py+0.04,
    label="Punto P", size=3.5, fontface="bold") +
  labs(title="Reparto justo 3 personas",
    subtitle=paste0("Ag.1->L",res3$pref[1],
      " | Ag.2->L",res3$pref[2],
      " | Ag.3->L",res3$pref[3]),
    x="X", y="Y", fill="Asignacion") +
  theme_minimal()
```

Figura 3: Terreno dividido en tres lotes convexos: rojo (Agente 1), azul (Agente 2) y verde (Agente 3). El punto negro es el punto central P desde donde parten las dos semirrectas divisorias.

9.3. Capítulo 5: Región de consenso

El siguiente código mapea el espacio completo de cortes posibles (θ , d) e identifica cuales generan consenso entre los dos agentes. Requiere que “ v_{ag1} ” y “ v_{ag2} ” están definidas en el código anterior.

9.3.1. Mapa de la región de consenso

```
# =====  
# Capitulo 5: Region de consenso  
# =====  
  
# Reutiliza v_ag1 y v_ag2 del Capitulo 3  
  
# --- Funcion: genera consenso el corte (theta, d)? ---  
  
hay_consenso <- function(v1, v2, theta, d) {  
  n <- nrow(v1)  
  val1_izq <- 0; val2_izq <- 0  
  for (i in 1:n) for (j in 1:n) {  
    x <- j/n; y <- i/n  
    if (cos(theta)*x + sin(theta)*y <= d) {  
      val1_izq <- val1_izq + v1[i,j]  
      val2_izq <- val2_izq + v2[i,j]  
    }  
  }  
  A <- (val1_izq > 0.5) & (val2_izq < 0.5)  
  B <- (val1_izq < 0.5) & (val2_izq > 0.5)
```

```

  A | B
}

# --- Barrer el espacio de cortes ---

thetas <- seq(0.05, pi-0.05, length.out=36)
ds      <- seq(0.05, 0.95,    length.out=36)

grid <- expand.grid(theta=thetas, d=ds)
grid$consenso <- mapply(
  function(th,d) hay_consenso(v_ag1, v_ag2, th, d),
  grid$theta, grid$d)

# --- Mapa de consenso ---

ggplot(grid, aes(x=theta*180/pi, y=d, fill=consenso)) +
  geom_tile() +
  scale_fill_manual(
    values=c("TRUE"="#27AE60", "FALSE"="#E74C3C"),
    labels=c("TRUE"="Consenso", "FALSE"="Conflicto"),
    name="") +
  labs(title="Region de consenso en el espacio (theta, d)",
        subtitle=
          "Verde = ambos agentes prefieren lotes distintos",
        x="Angulo theta (grados)", y="Posicion d") +
  theme_minimal()

```

Figura 4: Mapa de la region de consenso. Las celdas verdes representan cortes (θ , d) que producen acuerdo entre los dos agentes; las rojas producen conflicto.

9.3.2. Índice de consenso por ángulo

```
# --- Índice de consenso por ángulo ---

indice <- sapply(thetas, function(th)
  mean(sapply(ds, function(d)
    hay_consenso(v_ag1, v_ag2, th, d))))

df_ind <- data.frame(theta_deg=thetas*180/pi,
                     indice=indice)

ggplot(df_ind, aes(x=theta_deg, y=indice)) +
  geom_area(fill="#AED6F1", alpha=0.6) +
  geom_line(color="#2980B9", linewidth=1.3) +
  geom_hline(yintercept=0.5, linetype="dashed",
            color="red") +
  labs(title="Índice de consenso por ángulo",
       subtitle=
         "Proporcion de posiciones d con consenso",
       x="Ángulo theta (grados)",
       y="Índice de consenso [0,1]") +
  theme_minimal()
```

Figura 5: Índice de consenso por ángulo θ . Valores altos indican que ese ángulo admite un rango amplio de posiciones d con acuerdo entre los agentes.

9.4. Capítulo 5: Lema de Sperner simplificado

El siguiente código implementa la búsqueda exhaustiva del triángulo pancromático en una triangulación discreta del simplex de participaciones para tres agentes. Es independiente de los bloques anteriores y puede ejecutarse separado.

9.4.1. Generación del simplex y búsqueda del triangulo pancromático

```
# =====  
# Capitulo 5: Lema de Sperner simplificado  
# Busqueda exhaustiva del triangulo pancromatico  
# =====  
  
library(ggplot2)  
  
M <- 10 # Subdivisiones por lado del simplex  
  
# --- 1. Generar nodos y etiquetarlos ---  
  
nodos <- data.frame()  
  
for (a in 0:M) {  
  for (b in 0:(M-a)) {  
    c_ <- M - a - b  
    s1 <- a/M; s2 <- b/M; s3 <- c_/M  
  
    agente <- ((a + b) %% 3) + 1  
  
    if (agente==1) pref <- which.max(c(2*s1+0.1*s2,  
                                       0.5*s2+0.1*s3,  
                                       0.3*s3))  
  
    if (agente==2) pref <- which.max(c(0.1*s1,
```

```

                2*s2+0.1*s3,
                0.5*s3+0.1*s1))

if (agente==3) pref <- which.max(c(0.3*s1,
                0.1*s2,
                2*s3+0.1*s1))

# Condicion de Sperner en los bordes
if (s1 < 1e-9 && pref == 1) pref <- 2
if (s2 < 1e-9 && pref == 2) pref <- 3
if (s3 < 1e-9 && pref == 3) pref <- 1

x_c <- s2 + s3*0.5
y_c <- s3 * sqrt(3)/2

nodos <- rbind(nodos, data.frame(
    s1=s1, s2=s2, s3=s3, agente=agente,
    etiqueta=pref, x_c=x_c, y_c=y_c))
}
}

# --- 2. Buscar triangulos pancromaticos ---

get_idx <- function(a, b)
    which(abs(nodos$s1-a/M)<1e-9 & abs(nodos$s2-b/M)<1e-9)

pancrom <- data.frame()

for (a in 0:(M-1)) {
    for (b in 0:(M-1-a)) {
        v <- c(get_idx(a,b), get_idx(a+1,b), get_idx(a,b+1))
        if (length(v)==3 &&

```

```

        length(unique(nodos$etiqueta[v]))==3)
    pancrom <- rbind(pancrom, data.frame(
        cx=mean(nodos$x_c[v]), cy=mean(nodos$y_c[v]),
        s1=mean(nodos$s1[v]), s2=mean(nodos$s2[v]),
        s3=mean(nodos$s3[v])))
    }
}

cat("Triangulos pancromaticos:", nrow(pancrom),
    "(debe ser impar)\n")
if (nrow(pancrom) > 0) {
    sol <- pancrom[1,]
    cat("Solucion: Lote 1:", round(sol$s1*100,1), "% |",
        "Lote 2:", round(sol$s2*100,1), "% |",
        "Lote 3:", round(sol$s3*100,1), "%\n")
}

```

Salida esperada en consola:

```

Triangulos pancromaticos: 5 (debe ser impar)
Solucion: Lote 1: 3.3 % | Lote 2: 23.3 % | Lote 3: 73.3 %

```

9.4.2. Visualización del simplex coloreado

```

# --- 3. Visualizacion del simplex coloreado ---

cols <- c("1"="#E74C3C", "2"="#3498DB", "3"="#2ECC71")

p_sp <- ggplot(nodos,
    aes(x=x_c, y=y_c,
        color=factor(etiqueta), shape=factor(agente))) +

```

```

geom_point(size=3.5, stroke=1.3) +
scale_color_manual(values=cols,
  name="Lote preferido",
  labels=c("Lote 1", "Lote 2", "Lote 3")) +
scale_shape_manual(values=c(16,17,15),
  name="Agente",
  labels=c("A1", "A2", "A3"))

if (nrow(pancrom) > 0)
  p_sp <- p_sp +
    annotate("point",
      x=pancrom$cx[1], y=pancrom$cy[1],
      size=9, color="gold", shape=8, stroke=2.5) +
    annotate("label",
      x=pancrom$cx[1]+0.06,
      y=pancrom$cy[1]+0.06,
      label="Triangulo\npancromatico",
      size=2.8, color="darkgoldenrod",
      fill="white")

p_sp + labs(
  title="Lema de Sperner: coloracion del simplex",
  subtitle="Estrella dorada = triangulo pancromatico",
  x="", y="") +
  theme_minimal() +
  theme(axis.text=element_blank(),
    axis.ticks=element_blank())

```

Figura 6: Simplex de particiones coloreado según el Lema de Sperner. Cada nodo tiene el color del lote preferido por el agente asignado. La estrella dorada marca el triángulo pancromático: la solución al reparto justo para tres personas.

9.5. Resumen de figuras generadas

La siguiente tabla indica todas las imágenes que crea la generación de los códigos del trabajo.

Figura	Descripcion	Capitulo
1	Mapa de calor con recta de corte	Cap. 3
2	Curva $d^*(\theta)$ por ángulo	Cap. 3
3	Tres lotes con Punto P	Cap. 4
4	Region de consenso (θ , d)	Cap. 5
5	Índice de consenso por ángulo	Cap. 5
6	Simplex con triangulo pancromatico	Cap. 5

En este anexo se presenta una muestra representativa del código desarrollado. El código completo, incluyendo funciones auxiliares y script de validación, puede consultarse de forma abierta en el repositorio público del trabajo.

9.6. Código completo

El código completo utilizado en este trabajo está disponible públicamente en el siguiente repositorio de GitHub: <https://github.com/renatootero/Reparto-justo-de-tierra-tfg.git>

10. Declaración de uso de Inteligencia Artificial

Por el presente, yo, Renato Otero Alban, estudiante de Doble grado Administración y Dirección de Empresas con mención internacional de la Universidad Pontificia Comillas al presentar mi Trabajo Fin de Grado con título “Aplicaciones matemáticas e IA para el reparto justo de tierra”, declaro que he utilizado la herramienta de Inteligencia Artificial Generativa Claude y Gemini solo en el contexto de las actividades descritas a continuación:

1. Generación y depuración de código: Apoyó en la escritura y corrección del código en R desarrollado en los capítulos. Todo el código fue revisado y validado antes de su inclusión en el trabajo.
2. Corrección ortográfica y gramatical: Revisión de la redacción y detección de errores en los textos redactados.
3. Estructura y organización: Orientación en la organización de los capítulos y la secuencia de los contenidos, siguiendo siempre las indicaciones del tutor académico.
4. Traducción y comprensión de fuentes: Apoyo en la traducción y comprensión de artículos científicos en inglés.
5. Revisión de contenidos matemáticos: Consulta para verificar que conceptos como el Lema de Sperner o el Teorema del Valor Intermedio estuvieran correctamente descritos.
6. Reformulación y claridad del lenguaje: Reformulación de determinados párrafos para hacerlos más claros y accesibles sin alterar su contenido ni conclusiones.
7. Contraste de perspectivas: Exploración de distintos enfoques sobre el problema del reparto de tierras para enriquecer el análisis crítico.

Declaro que en ningún caso las herramientas de IA fueron utilizadas para generar ideas originales, producir resultados matemáticos ni redactar secciones completas de forma autónoma. Asumo responsabilidad por el contenido de este trabajo y confirmo que el uso de estas herramientas ha sido transparente y conforme a las normas de integridad académica.

Fecha: 01 de junio del 2026

Firma: Renato Otero Alban

11. Bibliografía

- Asada, M., Frick, F., Pisharody, V., Polevy, M., Stoner, D., Tsang, L. H., y Wellner, Z. (2017). Fair division and generalizations of Sperner- and KKM-type results. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 32(1), 591-610. <https://arxiv.org/abs/1701.04955>
- Aziz, H., y Mackenzie, S. (2016). A discrete and bounded envy-free cake cutting protocol for any number of agents. En *Proceedings of FOCS 2016* (pp. 416-427). IEEE. <https://arxiv.org/abs/1604.03655>
- Austin, A. K. (1982). Sharing a cake. *The Mathematical Gazette*, 66(437), 212-215. <https://doi.org/10.2307/3616548>
- Barbanel, J. B., y Brams, S. J. (2004). Cake division with minimal cuts: envy-free procedures for three persons, four persons, and beyond. *Mathematical Social Sciences*, 48(3), 251-269. <https://doi.org/10.1016/j.mathsocsci.2004.03.006>
- Bei, X., Chen, N., Huzhang, G., Tao, B., and Wu, J. (2017). Cake cutting: envy and truth. In *International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI)*.
- Berliant, M., Thomson, W., y Dunz, K. (1992). On the fair division of a heterogeneous commodity. *Journal of Mathematical Economics*, 21(3), 201-216. [https://doi.org/10.1016/0304-4068\(92\)90001-N](https://doi.org/10.1016/0304-4068(92)90001-N)
- Brams, S. J., y Taylor, A. D. (1996). *Fair division: From cake cutting to dispute resolution*. Cambridge University Press. <https://books.google.es/books?id=RTpHAAAAMAAJ>
- Dubins, L. E., y Spanier, E. H. (1961). How to cut a cake fairly. *The American Mathematical Monthly*, 68(1), 1-17. <https://doi.org/10.2307/2311357>
- FAO. (2012). *Voluntary guidelines on the responsible governance of tenure of land, fisheries and forests in the context of national food security*. Organización de las Naciones Unidas para la Alimentación y la Agricultura. <https://www.fao.org/tenure/voluntary-guidelines/en/>

Merchán Rubira, S., y Rodríguez García, J. S. (2018). Toma de decisiones y el Lema de Sperner. *Revista Pensamiento Matemático*, VIII(2), 69-80. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=6736605>

Meunier, F., y Su, F. E. (2019). Multilabeled versions of Sperner's and Fan's lemmas and applications. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 161, 188-201. <https://arxiv.org/abs/1801.02044>

PBS Infinite Series. (2017). *Splitting rent with triangles* [Vídeo]. YouTube. <https://www.youtube.com/watch?v=48oBEvpdYSE>

Procaccia, A. D. (2016). Cake cutting algorithms. En F. Brandt, V. Conitzer, U. Endriss, J. Lang y A. D. Procaccia (Eds.), *Handbook of Computational Social Choice* (cap. 13). Cambridge University Press. <https://www.cambridge.org/core/books/abs/handbook-of-computational-social-choice/cake-cutting-algorithms/39D68154EE408305BE8E9B05296E0D3D>

Real Decreto Legislativo 7/2015, de 30 de octubre, por el que se aprueba el texto refundido de la Ley del Suelo y Rehabilitación Urbana. *Boletín Oficial del Estado*, 261. <https://www.boe.es/buscar/act.php?id=BOE-A-2015-11723>

Robertson, J. M., y Webb, W. A. (1998). *Cake cutting algorithms: Be fair if you can*. A. K. Peters/CRC Press. <https://www.cambridge.org/core/books/fair-division/108C15111851C77A416C72F4370DCA8A>

Rodríguez Chacón, D. (2021). Envy-free allocation by Sperner's lemma adapted to rotation shifts in a company. *Mathematics*, 9(10), 1015. <https://doi.org/10.3390/math9091015>

Segal-Halevi, E., Hassidim, A., y Aumann, Y. (2017). Fair and square: Cake-cutting in two dimensions. *Journal of Mathematical Economics*, 70, 1-28. <https://doi.org/10.1016/j.jmateco.2016.12.005>

Segal-Halevi, E., Nitzan, S., Hassidim, A., y Aumann, Y. (2019). Envy-free division of land. *Mathematics of Operations Research*. <https://arxiv.org/abs/1609.03938>

- Sperner, E. (1928). Neuer Beweis für die Invarianz der Dimensionszahl und des Gebietes. *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, 6, 265-272. <https://doi.org/10.1007/BF02940617>
- Steinhaus, H. (1948). The problem of fair division. *Econometrica*, 16(1), 101-104. <https://doi.org/10.2307/1907319>
- Stromquist, W. (1980). How to cut a cake fairly. *The American Mathematical Monthly*, 87(8), 640-644. <https://doi.org/10.2307/2320951>
- Stromquist, W. (2008). Envy-free cake divisions cannot be found by finite protocols. *Electronic Journal of Combinatorics*, 15(1), R11. <https://www.combinatorics.org/ojs/index.php/eljc/article/view/v15i1r11>
- Su, F. E. (1999). Rental harmony: Sperner's lemma in fair division. *The American Mathematical Monthly*, 106(10), 930-942. <https://www.math.hmc.edu/~su/papers.dir/rent.pdf>
- Suksompong, W. (2021). Constraints in fair division. *ACM SIGecom Exchanges*, 19(2), 46-61. https://www.sigecom.org/exchanges/volume_19/2/SUKSOMPONG.pdf
- Walsh, T. (2020). Fair division: The computer scientist's perspective. *Proceedings of the 29th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI-20)*, 4487-4493. <https://arxiv.org/pdf/2005.04855>
- Weller, D. (1985). Fair division of a measurable space. *Journal of Mathematical Economics*, 14(1), 5-17. <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/0304406885900230>