Cálculo del equilibrio de mercado mediante optimización

Julián Barquín

6 de mayo de 1999

El objetivo de estas notas es establecer un modelo para el cálculo del equilibrio de un mercado eléctrico oligopolista. Este modelo es una generalización del modelo de Cournot, que se considera más adecuada que el modelo de Cournot puro. El modelo pretende representar el mercado eléctrico español.

1 El modelo del mercado

En esta sección se desarrolla el modelo para el caso monoperíodo. La generalización al caso multiperíodo es inmediata.

En este modelo se consideran que cada una de las n compañías del sistema ofertan de forman lineal:

$$P_i = P_i^0 + \alpha_i \lambda \;\; i = 1, \ldots, n \tag{1}$$

P_i es la potencia ofertada por la compañía i, λ el precio demandado, y P_i^0 y α_i dos constantes que caracterizan la oferta. Nótese que P_i incluye tanto la oferta de generación propiamente dicha como las ofertas de bombeo, que se sumarían con signo negativo.

Existe también una ecuación de demanda:

$$D = D^0 - \alpha_0 \lambda \tag{2}$$

D^0 es la parte inelástica de la demanda, que se supone conocida. α_0 es una constante conocida. El término $\alpha_0 \lambda$ representa una posible parte elástica de la demanda, debida quizá a la existencia de compañías de generación más pequeñas no consideradas.

Se asume también que el beneficio de cada compañía viene dado por la expresión:

$$B_i = \lambda P_i - C_i(P_i) + r_i(\bar{\lambda} - \lambda) D^0 \tag{3}$$

El primer término representa los ingresos por mercado, el segundo los costes de producción y el tercero los ingresos por CTCs. Nótese que los ingresos por CTCs se calculan en función de la parte inelástica de la demanda D^0. $\bar{\lambda}$ es una

constante que depende del nivel global de ingresos por CTCs y r_i un coeficiente de reparto. La cantidad global de CTCs a repartir $(\bar{\lambda}-\lambda)D^0$ se distribuye entre las distintas empresas según unos coeficientes r_i. Se considera que este modelo representa correctamente el mercado eléctrico español.

La casación se realiza resolviendo las ecuaciones:

$$\lambda = \frac{P_i - P_i^0}{\alpha_i} \tag{4}$$

$$\lambda = \frac{D^0 - D}{\alpha_0} \tag{5}$$

$$D = \sum_i P_i \tag{6}$$

Estas ecuaciones determinan unas potencias P_i, una demanda D y un marginal λ.

Consideremos ahora la situación desde el punto de vista de una empresa, digamos la empresa 1. Antes de enviar su oferta (es decir, los coeficientes P_1^0 y α_1 debe tener una idea sobre la oferta de los demás, es decir, los coeficientes P_i^0 y α_i, $i \neq 1$. Para una suposición concreta, ve una curva de demanda residual:

$$P_1 = D - \sum_{i\neq 1, i>1} P_i \tag{7}$$

$$= D^0 - \alpha_0\lambda - \left(\sum_{i\neq 1, i>1} P_i^0 + \alpha_i\lambda\right) \tag{8}$$

$$= \left(D^0 - \sum_{i\neq 1, i>1} P_i^0\right) - \lambda\sum_{i\neq 1}\alpha_i \tag{9}$$

Enfrentado a esta curva, la compañía 1 debe elaborar una oferta que optimice su beneficio, es decir, que lleve a que la casación de una potencia λ y a una potencia P_1 que maximicen el beneficio. Debido a la ecuación anterior, $B_1(\lambda, P_1)$ se puede considerar como una función solamente de P_1. Derivando e igualando a cero, se obtiene:

$$\lambda - \frac{\partial C_1}{\partial P_1} - \frac{1}{\sum_{i\neq 1}\alpha_i}(P_1 - r_1 D^0) = 0 \tag{10}$$

Dado que la compañía está buscando su máximo beneficio, se verifica también (condición de optimalidad de segundo orden):

$$\frac{\partial^2 B_1}{\partial P_1^2} = -\frac{2}{\sum_{i\neq 1}\alpha_i} - \frac{\partial^2 C_1}{\partial P_1^2} \leq 0 \tag{11}$$

Existe, naturalmente, ecuaciones de este tipo por cada compañía. Se pueden consideran dos casos límite:

1. $\alpha_i = 0 \quad i = 1, \ldots, 4$. Este caso corresponde a que cada empresa da una oferta de producción completamente inelástica: se compromete a producir exactamente P_i^0. Esta situación es precisamente el equilibrio de Cournot. (10) se transforma en:

$$\lambda - \frac{\partial C_i}{\partial P_i} - \frac{1}{\alpha_0}(P_i - r_i D^0) = 0 \tag{12}$$

2. $\alpha_i = \infty \quad i = 1, \ldots, 4$. En este caso (10) se transforma en

$$\lambda - \frac{\partial C_i}{\partial P_i} = 0 \tag{13}$$

   Es decir, se recupera el caso de competencia perfecta.

Se ha de cumplir que $0 < \alpha_i < \infty$. Por otra parte, en principio es posible encontrar una solución de (10), más las ecuaciones de demanda (5) y (6), para cualquier conjunto de α_i. Dada esta solución, se puede encontrar una oferta que la genere calculando un P_i^0 tal que la casación pase por la curva de oferta. En otras palabras:

1. Suponer un conjunto α_i.
2. Resolver el sistema formado por las ecuaciones (5,6,10), obteniendo una solución $P_1, \ldots, P_n, \lambda$.
3. Calcular $P_i^0 = P_i - \alpha_i \lambda$.

Las curvas de oferta resultantes constituyen un equilibrio de Nash. En efecto, si una empresa dada cambia unilateralmente su oferta, obtendrá una casación que no verificará (10). Pero esta es la condición de optimalidad cuando las demás empresas no cambian su oferta, luego el cambio unilateral ha perjudicado su situación. Es interesante hacer notar que este equilibrio lo es respecto a cualquier cambio de la oferta, sin necesidad de restringirse a ofertas lineales.

Es así claro que existe un conjunto de equilibrios de Nash, parametrizados por α_i. Como se demuestra en [1], el equilibrio que se realice dependerá, en un contexto teórico, de la incertidumbre en el sistema.

Los coeficientes α_i quedarían, en un contexto teórico, determinados por la incertidumbre existente en el sistema [1]. En la práctica podrían existir además otras consideraciones que determinaran su valor. En cualquier caso, estos coeficientes tienen un claro sentido económico. En particular, su valor disminuye en circunstancias de guerra de precios y aumenta en situaciones de cooperación. Esto abre la posibilidad al acoplamiento de los resultados del modelo propuesto con otras herramientas de análisis económico.

2 Cálculo del equilibrio

Las ecuaciones (4,5,10) se pueden obtener de la solución del problema:

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{P_i,D} & \sum_i \tilde{C}_i(P_i) - U(D) \\ \text{s.a.} & \sum_i P_i = D \end{array} \tag{14}$$

Las funciones de coste $\tilde{C}_i(P_i)$ se definen como

$$\tilde{C}_i(P_i) = C_i(P_i) + \frac{1}{\sum_{j\neq i}\alpha_j}\left(\frac{P_i^2}{2} - r_i P_i D^0\right) \tag{15}$$

La función de utilidad $U(D)$ se define como

$$U(D) = \int_0^D \lambda(D)\, dD = \frac{1}{\alpha_0}\left(DD^0 - \frac{D^2}{2}\right) \tag{16}$$

El marginal λ es el multiplicador de la restricción. La generalización de este modelo al caso multiperiodo es inmediata. La prueba de este aserto se da en el apéndice.

Caso de tener una demanda ineslástica, la forma de obtener el equilibrio es hacer $D = D^0$ (la demanda inelástica) en la restricción, eliminar el término $U(D)$ de la función objetivo, y eliminar α_0 en la definición de $\tilde{C}_i$.

El segundo término de $\tilde{C}_i$ admite una interpretación bastante directa. Es inmediato comprobar que

$$\frac{1}{\sum_{j\neq i}\alpha_j}\left(\frac{P_i^2}{2} - r_i P_i D^0\right) = \frac{1}{2\sum_{j\neq i}\alpha_j}\left(P_i - r_i D^0\right)^2 - \frac{1}{2\sum_{j\neq i}\alpha_j} r_i^2 D^{02} \tag{17}$$

El segundo término es una constante, luego $\tilde{C}_i$ se podría haber definido también como:

$$\tilde{C}_i(P_i) = C_i(P_i) + \frac{1}{2\sum_{j\neq i}\alpha_j}\left(P_i - r_i D^0\right)^2 \tag{18}$$

Es así aparente que el coste efectivo es el coste real más un término de penalización por incumplimiento de cuota. El equilibrio de Cournot se caracteriza por que todos los $\alpha_i = 0$. Si además la demanda es inelástica, el peso de la penalización se hace infinito, y la solución del problema de optimización es claramente $P_i = r_i D^0$. Por tanto, el equilibrio de Cournot, en el caso inelástico, solamente existe si $\sum r_i = 1$, y se calcula como la solución del problema:

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{P_i,D} & \sum_i C_i(P_i) \\ \text{s.a.} & \sum_i P_i = D^0 \\ & P_i = r_i D^0 \end{array} \tag{19}$$

Es decir, es el problema de optimización centralizado sujeto al cumplimiento de cuotas.

Análogamente, se puede comprobar que la utilidad se puede escribir como:

$$U(D) = \frac{-1}{2\alpha_0}\left(D - D^0\right)^2 - \frac{1}{\alpha_0}D^{02} \tag{20}$$

El segundo término es una constante que puede ser omitida.

Apéndice: derivación de la equivalencia entre el equilibrio de mercado y el modelo de optimización.

El lagrangiano del problema de optimización (14) es:

$$\mathcal{L}(P_i, D, \lambda) = \sum_i \tilde{C}_i(P_i) - U(D) + \lambda(D - \sum_i P_i) \tag{21}$$

donde λ es el multiplicador asociado a la restricción. Las condiciones de optimalidad de primer orden son:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &= D - \sum_i P_i = 0 && (22)\\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D} &= -\frac{\partial U(D)}{\partial D} + \lambda \\
&= -\frac{1}{\alpha_0}\left(D^0 - D\right) + \lambda = 0 && (23)\\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P_i} &= \frac{\partial C_i(P_i)}{\partial P_i} + \frac{1}{\sum_{j\neq i}\alpha_j}(P_i - r_i D^0) - \lambda = 0 && (24)
\end{aligned}$$

Estas ecuaciones coinciden con las ecuaciones (5,6,10), que definen el equilibrio de mercado. Además, está claro que λ, aquí introducido como multiplicador de la restricción, es también el marginal del sistema.

Se ha comprobado que las condiciones de primer orden coinciden con las ecuaciones de equilibrio de mercado. En cuanto a las de segundo orden, se puede partir del siguiente teorema [2]:

Teorema: Sea el problema de optimización

$$\begin{aligned}
\min \quad & f(\mathbf{x}) \\
\text{s.a.} \quad & \mathbf{h}(\mathbf{x}) = 0
\end{aligned}$$

Entonces, es condición suficiente para que x^* sea solución que exista un vector λ tal que la matriz L

$$L = \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{x}^2} + \lambda^T \frac{\partial^2 \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}^2}|_{x=x^*}$$

sea positiva definida en el hiperplano M definido por

$$M = \left\{ \mathbf{y} / \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}}|_{x=x^*} \mathbf{y} = 0 \right\}$$

Es decir, $\mathbf{y}^T L \mathbf{y} > 0, \forall \mathbf{y} \in M$. En general esta condición se da en cualquier mínimo no degenerado (es análoga a que la derivada segunda sea positiva en problemas de optimización sin restricciones).

En nuestro caso, se tiene que

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} = [1, 1, \ldots, 1, -1] \tag{25}$$

Luego M es el subespacio generado por la base

$$\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \tag{26}$$

Por otra parte, como las derivadas segundas de la restricción son nulas, la matriz L es la matriz hessiana de la función objetivo:

$$L = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 C_1}{\partial P_1^2} + \frac{1}{\sum_{i \neq 1} \alpha_i} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2 C_2}{\partial P_2^2} + \frac{1}{\sum_{i \neq 2} \alpha_i} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots - \frac{\partial^2 U}{\partial D^2} & \end{bmatrix} \tag{27}$$

De $\mathbf{y}_1^T L \mathbf{y}_1 \geq 0$ se sigue

$$\frac{\partial^2 C_1}{\partial P_1^2} > \frac{-1}{\alpha_0} - \frac{1}{\sum_{i \neq 1} \alpha_i} \tag{28}$$

Por otra parte, la condición (11) de equilibrio de mercado es:

$$\frac{\partial^2 C_1}{\partial P_1^2} \geq -\frac{2}{\sum_{i \neq 1} \alpha_i} > \frac{-1}{\alpha_0} - \frac{1}{\sum_{i \neq 1} \alpha_i} \tag{29}$$

siempre que exista al menos us α_i distinto de cero. Es decir, que todo equilibrio de mercado es también una solución calculada mediante el procedimiento de optimización. Es posible, sin embargo, que existan soluciones del procedimiento de optimización que no sean equilibrios de mercado.

Sin embargo, en el caso de que las funciones de coste C_i sean convexas de clase $\mathcal{C}^1$ con costes marginales no acotados, es posible establecer la equivalencia entre ambas soluciones (de optimización y de equilibrio de mercado). En efecto, en lo que respecta al problema de optimización, la función objetivo es convexa

(puesto que lo es cada C_i, las penalizaciones por incumplimiento de cuota y $-U(D)$) sometida a una restricción convexa (lineal de hecho). Así pues, debe existir un único mínimo local que lo es también global.

Por otra parte, (24) indica que una función creciente de P_i (puesto que al ser C_i convexa su derivada es creciente, y $\alpha_i \geq 0$) y continua (pues al ser C_i de clase $\mathcal{C}^1$, su derivada es continua) es igual a λ.Por tanto existe una función creciente de clase $\mathcal{C}^0$, que se denotará por g_i, tal que

$$P_i = g_i(\lambda) \tag{30}$$

Por otra parte

$$D = D^0 - \alpha_0 \lambda \tag{31}$$

Substituyendo en la restricción $D = \sum_i P_i$, se obtiene

$$D^0 = \sum_i g_i(\lambda) + \alpha_0 \lambda \tag{32}$$

El segundo término es una función continua y creciente en λ, luego esta ecuación tiene a lo más una solución en λ. Como los costes marginales no están acotados, ha de haber al menos una solución. Substituyendo en (30) y en (31) se obtiene una solución del equilibrio de mercado.

En suma, se ha deducido que existe una única solución del problema de optimización, y que existe un equilibrio de mercado, que ha de ser solución del problema de optimización. Por tanto, existe un único equilibrio de mercado calculable medianate optimización.

3 Extensiones al modelo: contratos

El objeto de esta sección es extender el modelo anterior para incorporar la posible existencia de contratos por diferencias y contratos bilaterales. El modelo extendido se caracteriza por:

1. Curvas de oferta de los generadores.

$$\bar{P}_i = P_i^0 + \alpha_i \lambda \tag{33}$$

   $\bar{P}_i$ es la oferta realizada al mercado. Dada la existencia de contratos bilaterales, la potencia casada por esta oferta no tiene porqué coincidir con la potencia generada.

2. La curva de demanda

$$D = D^0 - \alpha_0 \lambda \tag{34}$$

3. Los ingresos por CTCs de cada compañía

$$r_i(\bar{\lambda} - \lambda)D^T \tag{35}$$

Nótese que la demanda a tarifa D^T (dato del problema) no tiene porque ser igual a la constante D^0.

4. La existencia de contratos por diferencias para los generadores. Cada contrato l de la compañía i se caracteriza por dos parámetros: el precio del contrato λ_i^{cl} y la potencia contratada P_i^{cl}. El ingreso debido a este contrato para la compañia i es

$$(\lambda_i^{cl} - \lambda)P_i^{cl} \tag{36}$$

5. La existencia de contratos bilaterales. Dichos contratos se modelan mediante una potencia comprometida P_i^{bk} a un precio acordado λ^{bk}.

Con estos elementos, el beneficio de la compañía i es

$$B_i = \lambda\bar{P}_i - C_i(P_i) + r_i(\bar{\lambda} - \lambda)D^T + \sum_l (\lambda_i^{cl} - \lambda)P_i^{cl} + \sum_k \lambda^{bk}P_i^{bk} \tag{37}$$

Ahora bien, la potencia generada total verifica:

$$P_i = \bar{P}_i + \sum_k P_i^{bk} \tag{38}$$

con lo que el beneficio se puede escribir

$$B_i = \lambda P_i - C_i(P_i) + r_i(\bar{\lambda} - \lambda)D^T + \sum_l (\lambda_i^{cl} - \lambda)P_i^{cl} + \sum_k (\lambda^{bk} - \lambda)P_i^{bk} \tag{39}$$

Las ecuaciones de equilibrio son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_i}{\partial P_i} &= 0 && (40)\\ &= \lambda - \frac{\partial C_i}{\partial P_i} - \frac{1}{\sum_{j\neq i}\alpha_j}(P_i - r_i D^T - \sum_l P_i^{cl} - \sum_k P_i^{bk}) \\ D &= D^0 - \alpha_0\lambda && (41)\\ D &= \sum_i P_i && (42) \end{aligned}$$

Definiendo como antes la utilidad de la demanda $U(D)$

$$U(D) = \frac{-1}{2\alpha_0}\left(D - D^0\right)^2 \tag{43}$$

es inmediato comprobar que las ecuaciones de equilibrio resultan del problema de optimización:

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{P_i,D} & \sum_i \tilde{C}_i(P_i) - U(D) \\ \text{s.a.} & \sum_i P_i = D \end{array} \tag{44}$$

Las funciones de coste $\tilde{C}_i(P_i)$ se definen como

$$\tilde{C}_i(P_i) = C_i(P_i) + \frac{1}{2\sum_{j\neq i}\alpha_j}\left(P_i - r_i D^T - \sum_l P_i^{cl} - \sum_k P_i^{bk}\right)^2 \tag{45}$$

Es así aparente que los CTCs se pueden considerar como un contrato por diferencias con el estado por la parte correspondiente de la demanda sujeta a tarifa.

4 Cálculo de la volatilidad

Los parámetros α_i que definen las ofertas son parámetros de entrada en el modelo. Como se demuestra en [1], su valor viene determinado por la incertidumbre a corto plazo (la existente en el momento de presentar las ofertas). En condiciones ideales solamente se presentarían ofertas de Bertran o de Cournot.

Así pues, para juzgar la consistencia del modelo, puede resultar interesante evalúar la volatilidad en los beneficios. Así pues, se considera que la demanda a tarifa puede estar sometida a variaciones de la forma

$$D^T \to D^T + \epsilon \tag{46}$$

donde ϵ es una variable aleatoria. En particular, esto significa que la curva de demanda se desplaza según

$$D^0 + \alpha_0\lambda \to D^0 + \epsilon + \alpha_0\lambda \tag{47}$$

Por tanto, el precio de mercado sufre una variación

$$\delta\lambda = \frac{\epsilon}{\alpha_0 + \sum_{i\geq 1}\alpha_i} = \frac{\epsilon}{\sum_i \alpha_i} \tag{48}$$

Y las cantidades casadas y producidas la misma variación que es:

$$\delta P_i = \frac{\epsilon\alpha_i}{\sum_j \alpha_j} \tag{49}$$

Calculando con estas variaciones la variación del beneficio B_i se obtiene:

$$\begin{aligned}\delta B_i &= \left[\left(P_i - r_i D^T - \sum_l P_i^{cl} - \sum_k P_i^{bk}\right)\frac{1}{\sum_j \alpha_j} + \left(\lambda - \frac{\partial C_i}{\partial P_i}\right)\frac{\alpha_i}{\sum_j \alpha_j} + r_i\left(\bar{\lambda} - \lambda\right)\right]\varepsilon \\ &= \mathcal{V}_i \epsilon \end{aligned} \tag{50}$$

La cantidad $\mathcal{V}_i$ define la volatilidad a corto plazo del beneficio. Substituyendo la expresión (40) se obtiene:

$$\mathcal{V}_i = \left[\left(P_i - r_i D^T - \sum_l P_i^{cl} - \sum_k P_i^{bk}\right)\frac{1}{\sum_{j\neq i} \alpha_j} + r_i\left(\bar{\lambda} - \lambda\right)\right] \tag{51}$$

En el caso de que ϵ sea una distribución normal $N(0, \sigma_\epsilon)$, la varianza del beneficio sería

$$\sigma_{B_i}^2 = \mathcal{V}_i^2 \sigma_\epsilon^2 \tag{52}$$

Es claro que la $\mathcal{V}_i^2$ es infinito con curvas infinitamente rígidas ($\sum_j \alpha_j = 0$) y disminuye con curvas más elásticas.

Referencias

[1] Julián Barquín, 1998. *Algunos comentarios sobre el comportamiento de un duopolio eléctrico* Informe interno IIT-99-027I, 4 de mayo de 1999.

[2] Luenberger, David G. *Introduction to Linear and Nonlinear Programming.* Addison Wesley Publishing Company Inc .1973.