

GRADO EN INGENIERÍA EN TECNOLOGÍAS INDUSTRIALES

TRABAJO FIN DE GRADO

MODELADO ESTADÍSTICO DEL RIESGO FINANCIERO MEDIANTE SIMULACIONES MONTE CARLO

Autor: Laura Peregrina Núñez

Director: Álvaro Guinea Juliá

Madrid

Junio de 2026

Declaración de originalidad

Declaro bajo mi responsabilidad que el Proyecto presentado con el título ***Modelado estadístico del riesgo financiero mediante simulaciones Monte Carlo*** e la ETS de Ingeniería – ICAI de la Universidad Pontificia Comillas en el curso académico **2025-2026** es de mi autoría y no ha sido presentado con anterioridad a otros efectos. El Proyecto no es plagio de otro, ni total ni parcialmente y la información que ha sido tomada de otros documentos está debidamente referenciada.

Uso de Inteligencia Artificial[1]

Declaro bajo mi responsabilidad que (indicar la opción correcta):

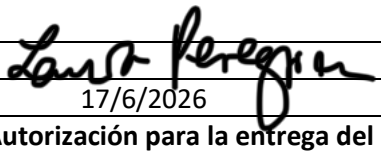
☐ No he utilizado Inteligencia Artificial en la elaboración del presente documento.

♦ He utilizado Inteligencia Artificial en la elaboración del presente documento y/o del Anexo B siempre en las condiciones permitidas por la Universidad Pontificia Comillas, es decir, aplicando el Nivel 2 de la Escala de Evaluación de Perkins et al. (2024): "*La IA puede utilizarse para actividades previas a la tarea, como la lluvia de ideas, la descripción y la investigación inicial. Este nivel se centra en el uso de la IA para la planificación, las síntesis y la generación de ideas, pero las evaluaciones deben hacer hincapié en la capacidad de desarrollar y refinar estas ideas de forma independiente*". En concreto, las Inteligencia Artificial ha sido empleada para:

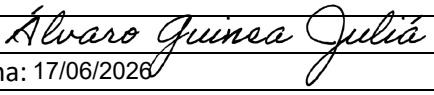
(indicar aquí el uso concreto que se ha hecho de la Inteligencia Artificial)

- En la fase inicial, se ha empleado como ayuda para explorar conceptos generales y orientar la recopilación de información.
- Su uso se ha limitado principalmente a tareas de revisión formal y organización del contenido.
- La inteligencia artificial ha servido como ayuda para reformular algunos párrafos, mejorar la claridad expositiva y detectar posibles incoherencias en la estructura del documento.

[1] Esta declaración se refiere al uso de la Inteligencia Artificial generativa para realizar los documentos del Proyecto (Anexo B y Memoria). No aplica a Proyectos donde, por su naturaleza, deban emplear inteligencia artificial como parte de los mismos (aplicación de técnicas de aprendizaje automático, redes neuronales, análisis de datos…)

Firmado (alumno): 
Fecha: 17/6/2026

Autorización para la entrega del Proyecto

El Director del Proyecto	El co-Director del Proyecto (si aplica)
Álvaro Guinea Juliá	
Fdo: 	Fdo:
Fecha: 17/06/2026	Fecha:



GRADO EN INGENIERÍA EN TECNOLOGÍAS INDUSTRIALES

TRABAJO FIN DE GRADO

MODELADO ESTADÍSTICO DEL RIESGO FINANCIERO MEDIANTE SIMULACIONES MONTE CARLO

Autor: Laura Peregrina Núñez

Director: Álvaro Guinea Juliá

Madrid

Junio de 2026

Agradecimientos

En primer lugar, quiero agradecer a mi tutor, Álvaro Guinea Juliá, su dedicación, disponibilidad y orientación a lo largo de todo el desarrollo de este trabajo. Sus comentarios han sido fundamentales para mejorar tanto el rigor técnico como la claridad de la exposición.

Quiero agradecer también a la Universidad Pontificia Comillas ICAI la formación recibida durante estos años, que ha hecho posible abordar un trabajo de esta naturaleza.

Por último, y de forma muy especial, gracias a mi familia y amigos por su apoyo incondicional durante toda la carrera.

MODELADO ESTADÍSTICO DEL RIESGO FINANCIERO MEDIANTE SIMULACIONES MONTE CARLO

Autor: Peregrina Núñez, Laura.

Director: Guinea Juliá, Álvaro.

Entidad Colaboradora: ICAI – Universidad Pontificia Comillas.

RESUMEN DEL PROYECTO

Introducción

Las sucesivas crisis financieras de las últimas décadas, en particular la quiebra de Lehman Brothers en 2008, evidenciaron que los modelos de riesgo dominantes en ese momento eran incapaces de anticipar la magnitud de las pérdidas en escenarios extremos, una limitación atribuida en gran medida a la dependencia excesiva del supuesto de normalidad en los rendimientos financieros. Los rendimientos de los activos financieros reales no se distribuyen como una normal, sino que presentan colas pesadas, exceso de curtosis y, en ocasiones, asimetría y volatilidad cambiante en el tiempo (Cont, 2001). Como ilustración empírica, NVIDIA –uno de los diez activos analizados– presenta un exceso de curtosis de 3,42 y caídas diarias de hasta el 14,21 %, magnitudes muy superiores a las que predeciría un modelo gaussiano.

El riesgo financiero de una cartera se estudia habitualmente a través de dos métricas. El Value at Risk (VaR) responde a cuánto puede perderse como máximo con un nivel de confianza dado (Jorion, 2006). El Conditional Value at Risk (CVaR), también llamado Expected Shortfall, cuantifica la severidad media de las pérdidas una vez superado ese umbral, y es además una medida de riesgo coherente en el sentido axiomático de Artzner et al. (Artzner et al., 1999; Rockafellar y Uryasev, 2000). Ambas medidas dependen críticamente del modelo estadístico adoptado para describir los rendimientos, lo que motiva el uso de la simulación de Monte Carlo como herramienta flexible para aproximar la distribución de pérdidas bajo distintos supuestos distribucionales (Glasserman, 2004; Danielsson, 2011).

El objetivo general de este Trabajo Fin de Grado es desarrollar, implementar y validar un modelo estadístico de medición del riesgo financiero de una cartera de activos mediante simulaciones Monte Carlo, analizando la sensibilidad de las métricas de riesgo a distintas hipótesis distribucionales y a diferentes esquemas de ponderación de la cartera, con una implementación modular en MATLAB que sea replicable y extensible a otros contextos de análisis de riesgo. De forma específica, los objetivos del trabajo son: (1) construir una base de datos de precios históricos y transformarla en rendimientos logarítmicos; (2) realizar un análisis estadístico univariante que evalúe la presencia de colas pesadas y desviaciones respecto a la normalidad; (3)

estimar los parámetros multivariantes del riesgo, incluida la covarianza dinámica mediante el modelo EWMA y la dependencia mediante descomposición de Cholesky; (4) diseñar una cartera multivariante bajo tres esquemas de ponderación; (5) implementar simulaciones Monte Carlo bajo distintas hipótesis distribucionales y compararlas con métodos de referencia; (6) estimar el VaR y el CVaR al 99 % de confianza junto con la atribución marginal del riesgo mediante el VaR Incremental; (7) validar el comportamiento predictivo de los modelos mediante backtesting fuera de muestra; y (8) desarrollar una implementación modular, replicable y documentada en MATLAB.

Metodología

El análisis empírico parte de precios históricos diarios de cierre ajustado de diez activos de alta liquidez de los mercados estadounidense y español –Apple, Microsoft, NVIDIA, Johnson & Johnson, JPMorgan Chase, Visa, Procter & Gamble, Berkshire Hathaway, Banco Santander e Iberdrola–, extraídos de Bloomberg para el periodo comprendido entre el 1 de enero de 2023 y el 31 de diciembre de 2025, lo que supone aproximadamente 743 observaciones diarias por activo. Los precios se transforman en rendimientos logarítmicos diarios y se depuran mediante intersección temporal de las series, eliminando los días de mercado no comunes entre Estados Unidos y España.

Sobre esta cartera se construyen tres esquemas de ponderación para estudiar la sensibilidad del riesgo a la composición: una cartera ponderada por capitalización bursátil (CAP), que concentra el capital en los activos de mayor tamaño; una cartera de pesos iguales (EW, 10 % por activo), que no requiere información estadística alguna; y una cartera de mínima varianza global obtenida mediante el modelo de optimización de Markowitz (GMVP) (Markowitz, 1952), que admite en principio posiciones cortas aunque en este caso converge a pesos íntegramente positivos, concentrando el capital en activos defensivos y poco correlacionados.

El estudio se organiza en tres bloques metodológicos. En primer lugar, se realiza un análisis univariante de cada activo ajustando las distribuciones Normal, t-Student y Laplace, con el fin de contrastar empíricamente la presencia de colas pesadas y justificar la elección del modelo distribucional más adecuado para estimar el riesgo extremo. En segundo lugar, se estiman y comparan el VaR y el CVaR al nivel de confianza $\alpha = 99$ % bajo seis modelos –simulación histórica, paramétrico normal, EWMA normal, Monte Carlo con normal multivariante, Monte Carlo con t-Student multivariante y Monte Carlo con distribución de Laplace– para cada una de las tres carteras. Los modelos de simulación multivariante incorporan la estructura real de correlaciones mediante descomposición de Cholesky y generan $N = 50\,000$ escenarios; la t-Student multivariante introduce además un factor de escala aleatorio $S \sim \chi^2_\nu$ que captura la dependencia de cola. La covarianza dinámica se actualiza mediante un filtro EWMA con $\lambda = 0{,}94$, siguiendo el estándar RiskMetrics (J.P. Morgan y Reuters, 1994), y los grados de libertad de la t-Student se calibran tanto de forma estática ($\nu = 6$, valor que garantiza varianza

y curtosis finitas) como dinámicamente por máxima verosimilitud sobre la primera componente principal de cada ventana de estimación de $W = 250$ días.

En tercer lugar, se valida la calidad predictiva de cada modelo mediante backtesting fuera de muestra sobre una ventana de validación de 493 días (aproximadamente enero de 2024 a diciembre de 2025), aplicando el test de cobertura incondicional de Kupiec (1995), que contrasta si la frecuencia de excepciones es compatible con el nivel de confianza declarado, y el test de cobertura condicional de Christoffersen (1998), que además comprueba si las excepciones se agrupan temporalmente. Para el CVaR se emplea el shortfall normalizado $NS = L_t/\widehat{ES}_t$, el test formal de McNeil y Frey (2000) y un intervalo de confianza bootstrap al 95 % con $B = 10\,000$ réplicas, siguiendo el marco de validación de medidas de riesgo de cola descrito en McNeil et al. (2005). El horizonte de análisis es diario, consistente con la frecuencia de los datos y con el procedimiento de backtesting.

Resultados

El análisis univariante confirma la presencia de leptocurtosis en los activos analizados: NVIDIA presenta un exceso de curtosis de 3,42 y un coeficiente de asimetría cercano a cero, lo que respalda el uso de distribuciones simétricas de colas pesadas como la t-Student frente a la normal. La composición de la cartera tiene, además, un efecto determinante sobre el riesgo agregado: la cartera CAP, que concentra más del 71 % del capital en valores tecnológicos, presenta un VaR base al 99 % de 3,327 %, frente al 2,068 % de la cartera EW y al 1,705 % de la GMVP, que redistribuye el peso hacia activos defensivos y poco correlacionados como Iberdrola (21,39 %), Procter & Gamble (16,25 %), Johnson & Johnson (15,71 %) y Banco Santander (12,98 %). El análisis del VaR Incremental confirma que NVIDIA es el principal generador de riesgo marginal en las carteras CAP y EW ($IVaR = +0{,}00421$ y $+0{,}00272$ respectivamente), mientras que Banco Santander e Iberdrola actúan como diversificadores naturales en la cartera EW, con un IVaR negativo de $-0{,}00280$ y $-0{,}00187$.

Cartera	Modelo	Exc.	p-Kupiec	p-Indep.	Diagnóstico
CAP	Gaussianos (3)	12	<0,01	0,29	Rechazado
CAP	MC t-Student	8	0,201	0,111	Aprobado
EW	Gaussianos	10–11	<0,05	–	Rechazado
EW	MC t-Student	7	0,376	0,080	Aprobado
GMVP	Todos los modelos	4–9	>0,09	–	Aprobado/Parcial

Tabla 1: Síntesis del backtesting del VaR al 99 % por cartera y familia de modelos. $N_{val} = 493$ días; excepciones esperadas ≈ 5.

Los modelos gaussianos (paramétrico, EWMA y Monte Carlo normal) son rechazados sistemáticamente por el test de Kupiec en las carteras CAP y EW, con 10 a 12 excepciones frente a las aproximadamente 5 esperadas, lo que confirma que el supuesto de normalidad subestima

el riesgo de cola. El modelo Monte Carlo t-Student es el único que supera simultáneamente los tests de Kupiec y de Christoffersen en las carteras CAP y EW. En la cartera GMVP, la propia diversificación reduce el riesgo lo suficiente como para que prácticamente todos los modelos, incluidos los gaussianos, superen el test de frecuencia.

El backtesting del CVaR refuerza esta conclusión desde la perspectiva de la severidad. El diferencial entre la pérdida media observada y el CVaR estimado (ESgap) es sistemáticamente positivo y mayor en los modelos gaussianos (entre +0,49 % y +0,78 %) que en el modelo t-Student (+0,657 % en la cartera CAP), cuyo intervalo bootstrap al 95 % contiene siempre la unidad y no es rechazado por el test de McNeil-Frey ($p = 0{,}131$). En términos económicos, en una cartera institucional de 100 millones de euros, la provisión de capital basada en un modelo gaussiano resultaría insuficiente en aproximadamente 684 000 euros por día de excepción, frente a 657 000 euros bajo el modelo t-Student, una mejora del 4 % con implicaciones directas sobre los requerimientos de capital regulatorio bajo el FRTB (Basel Committee on Banking Supervision, 2019).

Dos análisis de robustez complementan estos resultados. La calibración dinámica de los grados de libertad de la t-Student arroja una media de $\bar{\nu} = 11{,}6$ a lo largo de las 493 ventanas de validación, sistemáticamente superior al valor fijo $\nu = 6$, lo que indica que el modelo estático es ligeramente conservador (8 excepciones bajo ν dinámico frente a 6 bajo $\nu = 6$ fijo) sin que ello invalide su uso. El análisis de sensibilidad al parámetro λ del modelo EWMA, replicado para $\lambda \in \{0{,}90;\ 0{,}94;\ 0{,}97\}$, confirma que el fallo de los modelos gaussianos en las carteras CAP y EW es atribuible al supuesto distribucional y no a la calibración de la covarianza: el modelo EWMA Normal es rechazado por el test de Kupiec para los tres valores de λ en ambas carteras, mientras que en la GMVP todos los valores de λ producen backtestings aceptables.

Conclusiones

Los resultados confirman tres ideas centrales. Primera, la elección de la distribución importa: el modelo Monte Carlo t-Student es el único que supera de forma simultánea los contrastes de frecuencia y de severidad en las carteras de mayor concentración de riesgo, con implicaciones directas sobre la suficiencia del capital regulatorio bajo el marco FRTB de Basilea III. Segunda, la construcción de la cartera importa tanto como el modelo distribucional: la diversificación mediante optimización de Markowitz reduce el VaR base un 49 % (de 3,327 % a 1,705 %) y mejora la calibración de prácticamente todos los modelos, incluidos los gaussianos, lo que demuestra que optimizar la composición de la cartera es tan efectivo para gestionar el riesgo como sofisticar el modelo distribucional. Tercera, la validación mediante backtesting es imprescindible: sin él, un modelo puede parecer adecuado en términos teóricos y fallar sistemáticamente en condiciones reales de mercado, tanto en frecuencia de excepciones como en severidad de las pérdidas.

El trabajo presenta limitaciones que abren líneas futuras de investigación. En primer lugar,

el análisis se limita a diez activos de dos mercados geográficos; ampliarlo a Europa continental, Asia o mercados emergentes permitiría contrastar la robustez de las conclusiones en estructuras de dependencia más complejas. En segundo lugar, la covarianza EWMA asume una estructura de dependencia lineal constante entre activos; el modelo DCC-GARCH (Engle, 2002) generalizaría la actualización dinámica de la volatilidad y permitiría que las correlaciones varíen en el tiempo, intensificándose precisamente en periodos de crisis. En tercer lugar, la ventana de validación de 493 días limita la potencia del backtesting del CVaR; ampliar el periodo de análisis a cinco años o aplicar técnicas de bootstrap sobre bloques solapados aumentaría la robustez de la inferencia sin necesidad de datos adicionales. Por último, el modelo podría enriquecerse mediante el uso de cópulas (Nelsen, 2006), que permitirían separar la distribución marginal de cada activo de la estructura de dependencia entre ellos, capturando dependencias de cola asimétricas especialmente relevantes en carteras con perfiles distribucionales heterogéneos.

En definitiva, el trabajo demuestra que la medición del riesgo financiero no puede reducirse a una única métrica ni a un único supuesto estadístico: la elección de la distribución, la construcción de la cartera y la validación empírica son dimensiones complementarias cuyo efecto conjunto resulta más visible cuanto mayor es la concentración de riesgo de partida. La implementación, desarrollada de forma modular en MATLAB con semilla aleatoria fija para garantizar la replicabilidad, queda disponible para incorporar estas extensiones sin alterar su estructura general.

Referencias

Artzner et al. (1999) Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.-M. y Heath, D., «Coherent Measures of Risk», *Mathematical Finance*, vol. 9, n.º 3, pp. 203–228.

Basel Committee (2019) Basel Committee on Banking Supervision, *Minimum Capital Requirements for Market Risk* (FRTB), Bank for International Settlements, Basilea.

Christoffersen (1998) Christoffersen, P. F., «Evaluating Interval Forecasts», *International Economic Review*, vol. 39, n.º 4, pp. 841–862.

Cont (2001) Cont, R., «Empirical Properties of Asset Returns: Stylized Facts and Statistical Issues», *Quantitative Finance*, vol. 1, n.º 2, pp. 223–236.

Danielsson (2011) Danielsson, J., *Financial Risk Forecasting*, John Wiley & Sons, Chichester.

Engle (2002) Engle, R., «Dynamic Conditional Correlation», *Journal of Business & Economic Statistics*, vol. 20, n.º 3, pp. 339–350.

Glasserman (2004) Glasserman, P., *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*, Springer, Nueva York.

J.P. Morgan y Reuters (1994) J.P. Morgan y Reuters, *RiskMetrics Technical Document*, 4.ª ed., J.P. Morgan.

Jorion (2006) Jorion, P., *Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk*, 3.ª ed., McGraw-Hill, Nueva York.

Kupiec (1995) Kupiec, P. H., «Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Measurement Models», *The Journal of Derivatives*, vol. 3, n.º 2, pp. 73–84.

Markowitz (1952) Markowitz, H., «Portfolio Selection», *The Journal of Finance*, vol. 7, n.º 1, pp. 77–91.

McNeil y Frey (2000) McNeil, A. J. y Frey, R., «Estimation of Tail-Related Risk Measures for Heteroscedastic Financial Time Series», *Journal of Empirical Finance*, vol. 7, n.º 3–4, pp. 271–300.

McNeil et al. (2005) McNeil, A. J., Frey, R. y Embrechts, P., *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools*, Princeton University Press, Princeton.

Nelsen (2006) Nelsen, R. B., *An Introduction to Copulas*, Springer, Nueva York.

Rockafellar y Uryasev (2000) Rockafellar, R. T. y Uryasev, S., «Optimization of Conditional Value-at-Risk», *The Journal of Risk*, vol. 2, n.º 3, pp. 21–41.

STATISTICAL MODELING OF FINANCIAL RISK THROUGH MONTE CARLO SIMULATIONS

Author: Peregrina Núñez, Laura.

Supervisor: Guinea Juliá, Álvaro.

Collaborating Entity: ICAI – Universidad Pontificia Comillas.

PROJECT SUMMARY

Introduction

The successive financial crises of recent decades, most notably the 2008 collapse of Lehman Brothers, revealed that the dominant risk models of the time were unable to anticipate the magnitude of losses under extreme scenarios, a shortcoming largely attributed to an excessive reliance on the normality assumption for financial returns. Real financial returns do not follow a normal distribution but instead exhibit heavy tails, excess kurtosis, and, occasionally, skewness and time-varying volatility (Cont, 2001). As an empirical illustration, NVIDIA –one of the ten assets analysed– shows an excess kurtosis of 3.42 and daily drops of up to 14.21 %, far beyond what a Gaussian model would predict.

Financial risk is typically studied through two metrics. Value at Risk (VaR) answers how much can be lost at most at a given confidence level (Jorion, 2006). Conditional Value at Risk (CVaR), also known as Expected Shortfall, quantifies the average severity of losses once that threshold has been exceeded, and is moreover a coherent risk measure in the axiomatic sense of Artzner et al. (Artzner et al., 1999; Rockafellar and Uryasev, 2000). Both measures depend critically on the statistical model chosen to describe returns, which motivates the use of Monte Carlo simulation as a flexible tool to approximate the loss distribution under different distributional assumptions (Glasserman, 2004; Danielsson, 2011).

The overall objective of this Final Degree Project is to develop, implement and validate a statistical model for measuring the financial risk of an asset portfolio through Monte Carlo simulations, analysing the sensitivity of risk metrics to different distributional hypotheses and portfolio weighting schemes, with a modular MATLAB implementation designed to be replicable and extensible to other risk-analysis contexts. Specifically, the objectives are: (1) build a returns database from historical prices; (2) carry out a univariate statistical analysis assessing the presence of heavy tails and deviations from normality; (3) estimate the multivariate risk parameters, including dynamic EWMA covariance and dependence via Cholesky decomposition; (4) design a multivariate portfolio under three weighting schemes; (5) implement Monte Carlo simulations under different distributional hypotheses and compare them against referen-

ce methods; (6) estimate VaR and CVaR at the 99 % confidence level together with marginal risk attribution through Incremental VaR; (7) validate the predictive performance of the models through out-of-sample backtesting; and (8) develop a modular, replicable and documented MATLAB implementation.

Methodology

The empirical analysis is based on daily adjusted closing prices of ten highly liquid assets from the US and Spanish markets –Apple, Microsoft, NVIDIA, Johnson & Johnson, JPMorgan Chase, Visa, Procter & Gamble, Berkshire Hathaway, Banco Santander and Iberdrola–, sourced from Bloomberg for the period between 1 January 2023 and 31 December 2025, amounting to approximately 743 daily observations per asset. Prices are converted into daily log-returns and the series are cleaned through temporal intersection, removing days on which the US and Spanish markets did not both trade.

Three weighting schemes are built on this portfolio to study the sensitivity of risk to its composition: a market-capitalisation weighted portfolio (CAP), which concentrates capital in the largest assets; an equally weighted portfolio (EW, 10 % per asset), which requires no statistical information whatsoever; and a global minimum-variance portfolio obtained through Markowitz's optimisation model (GMVP) (Markowitz, 1952), which in principle allows short positions although in this case it converges to entirely positive weights, concentrating capital in defensive, lowly correlated assets.

The study is organised into three methodological blocks. First, a univariate analysis is carried out for each asset, fitting the Normal, Student's t and Laplace distributions to empirically test for heavy tails and justify the choice of the most suitable distributional model for estimating extreme risk. Second, VaR and CVaR at the $\alpha = 99$ % confidence level are estimated and compared under six models –historical simulation, parametric normal, EWMA normal, multivariate normal Monte Carlo, multivariate Student's t Monte Carlo, and Laplace Monte Carlo– for each of the three portfolios. The multivariate simulation models incorporate the real correlation structure through Cholesky decomposition and generate $N = 50,000$ scenarios; the multivariate Student's t additionally introduces a random scale factor $S \sim \chi^2_\nu$ that captures tail dependence. Dynamic covariance is updated through an EWMA filter with $\lambda = 0{,}94$, following the RiskMetrics standard (J.P. Morgan and Reuters, 1994), and the Student's t degrees of freedom are calibrated both statically ($\nu = 6$, a value that guarantees finite variance and kurtosis) and dynamically by maximum likelihood over the first principal component of each $W = 250$-day estimation window.

Third, the predictive quality of each model is validated through out-of-sample backtesting over a 493-day validation window (approximately January 2024 to December 2025), applying Kupiec's unconditional coverage test (Kupiec, 1995), which tests whether the frequency of exceptions is consistent with the declared confidence level, and Christoffersen's conditional cove-

rage test (Christoffersen, 1998), which additionally checks whether exceptions cluster in time. For CVaR, the normalised shortfall $NS = L_t/\widehat{ES}_t$, the formal McNeil and Frey test (McNeil and Frey, 2000) and a 95 % bootstrap confidence interval with $B = 10,000$ replicates are used, following the tail-risk validation framework described in McNeil et al. (2005). The analysis horizon is daily, consistent with the data frequency and the backtesting procedure.

Results

The univariate analysis confirms the presence of leptokurtosis in the assets analysed: NVIDIA shows an excess kurtosis of 3.42 and a skewness coefficient close to zero, supporting the use of symmetric heavy-tailed distributions such as Student's t over the normal distribution. Portfolio composition also has a decisive effect on aggregate risk: the CAP portfolio, which concentrates more than 71 % of the capital in technology stocks, shows a base VaR at 99 % of 3.327 %, versus 2.068 % for the EW portfolio and 1.705 % for the GMVP, which reallocates weight towards defensive, lowly correlated assets such as Iberdrola (21.39 %), Procter & Gamble (16.25 %), Johnson & Johnson (15.71 %) and Banco Santander (12.98 %). The Incremental VaR analysis confirms that NVIDIA is the main marginal risk contributor in the CAP and EW portfolios ($IVaR = +0{,}00421$ and $+0{,}00272$ respectively), while Banco Santander and Iberdrola act as natural diversifiers in the EW portfolio, with a negative IVaR of $-0{,}00280$ and $-0{,}00187$.

Portfolio	**Model**	**Exc.**	p**-Kupiec**	p**-Indep.**	**Verdict**
CAP	Gaussian (3)	12	<0.01	0.29	Fail
CAP	Student's t MC	8	0.201	0.111	Pass
EW	Gaussian	10–11	<0.05	–	Fail
EW	Student's t MC	7	0.376	0.080	Pass
GMVP	All models	4–9	>0.09	–	Pass/Partial

Table 1: Summary of VaR backtesting at 99 % by portfolio and model family. $N_{val} = 493$ days; expected exceptions ≈ 5.

The Gaussian models (parametric, EWMA and normal Monte Carlo) are systematically rejected by Kupiec's test in the CAP and EW portfolios, with 10 to 12 exceptions against the roughly 5 expected, confirming that the normality assumption underestimates tail risk. The Student's t Monte Carlo model is the only one that simultaneously passes both Kupiec's and Christoffersen's tests in the CAP and EW portfolios. In the GMVP portfolio, diversification alone reduces risk enough for virtually every model, including the Gaussian ones, to pass the frequency test.

CVaR backtesting reinforces this conclusion from a severity standpoint. The gap between the observed average loss and the estimated CVaR (ESgap) is systematically positive and larger under the Gaussian models (between +0.49 % and +0.78 %) than under the Student's t model

(+0.657 % in the CAP portfolio), whose 95 % bootstrap interval always contains unity and is not rejected by the McNeil-Frey test ($p = 0{,}131$). In economic terms, in a 100-million-euro institutional portfolio, capital provisioning based on a Gaussian model would be insufficient by approximately 684,000 euros per exception day, versus 657,000 euros under the Student's t model, a 4 % improvement with direct implications for regulatory capital requirements under the FRTB (Basel Committee on Banking Supervision, 2019).

Two robustness analyses complement these results. Dynamic calibration of the Student's t degrees of freedom yields a mean of $\bar{\nu} = 11{,}6$ across the 493 validation windows, systematically higher than the fixed value $\nu = 6$, indicating that the static model is slightly conservative (8 exceptions under dynamic ν versus 6 under fixed $\nu = 6$) without invalidating its use. The sensitivity analysis on the EWMA parameter λ, replicated for $\lambda \in \{0{,}90,\ 0{,}94,\ 0{,}97\}$, confirms that the failure of Gaussian models in the CAP and EW portfolios is attributable to the distributional assumption rather than to the covariance calibration: the EWMA Normal model is rejected by Kupiec's test for all three values of λ in both portfolios, whereas in the GMVP every value of λ yields acceptable backtests.

Conclusions

The results confirm three central ideas. First, distribution choice matters: the Student's t Monte Carlo model is the only one that simultaneously passes both the frequency and severity backtests in the most concentrated portfolios, with direct implications for the adequacy of regulatory capital under the Basel III FRTB framework. Second, portfolio construction matters as much as the distributional model: diversification through Markowitz optimisation reduces the base VaR by 49 % (from 3.327 % to 1.705 %) and improves the calibration of virtually every model, including the Gaussian ones, showing that optimising portfolio composition is as effective for managing risk as sophisticating the distributional model. Third, backtesting validation is essential: without it, a model may appear theoretically sound while systematically failing under real market conditions, both in exception frequency and in loss severity.

The project has limitations that open future research lines. First, the analysis is limited to ten assets from two geographical markets; extending it to continental Europe, Asia or emerging markets would allow the robustness of the conclusions to be tested under more complex dependence structures. Second, EWMA covariance assumes a constant linear dependence structure between assets; the DCC-GARCH model (Engle, 2002) would generalise the dynamic update of volatility and allow correlations to vary over time, intensifying precisely during crisis periods. Third, the 493-day validation window limits the power of CVaR backtesting; extending the analysis period to five years or applying overlapping block bootstrap techniques would strengthen inference without requiring additional data. Finally, the model could be enriched through the use of copulas (Nelsen, 2006), which would separate each asset's marginal distribution from the dependence structure between them, capturing asymmetric tail dependence

particularly relevant in portfolios with heterogeneous distributional profiles.

In short, the project shows that financial risk measurement cannot be reduced to a single metric or a single statistical assumption: distribution choice, portfolio construction and empirical validation are complementary dimensions whose joint effect becomes more visible the higher the initial risk concentration. The implementation, developed modularly in MATLAB with a fixed random seed to guarantee replicability, is available to incorporate these extensions without altering its overall structure.

References

Artzner et al. (1999) Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.-M. and Heath, D., «Coherent Measures of Risk», *Mathematical Finance*, vol. 9, no. 3, pp. 203–228.

Basel Committee (2019) Basel Committee on Banking Supervision, *Minimum Capital Requirements for Market Risk* (FRTB), Bank for International Settlements, Basel.

Christoffersen (1998) Christoffersen, P. F., «Evaluating Interval Forecasts», *International Economic Review*, vol. 39, no. 4, pp. 841–862.

Cont (2001) Cont, R., «Empirical Properties of Asset Returns: Stylized Facts and Statistical Issues», *Quantitative Finance*, vol. 1, no. 2, pp. 223–236.

Danielsson (2011) Danielsson, J., *Financial Risk Forecasting*, John Wiley & Sons, Chichester.

Engle (2002) Engle, R., «Dynamic Conditional Correlation», *Journal of Business & Economic Statistics*, vol. 20, no. 3, pp. 339–350.

Glasserman (2004) Glasserman, P., *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*, Springer, New York.

J.P. Morgan and Reuters (1994) J.P. Morgan and Reuters, *RiskMetrics Technical Document*, 4th ed., J.P. Morgan.

Jorion (2006) Jorion, P., *Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk*, 3rd ed., McGraw-Hill, New York.

Kupiec (1995) Kupiec, P. H., «Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Measurement Models», *The Journal of Derivatives*, vol. 3, no. 2, pp. 73–84.

Markowitz (1952) Markowitz, H., «Portfolio Selection», *The Journal of Finance*, vol. 7, no. 1, pp. 77–91.

McNeil and Frey (2000) McNeil, A. J. and Frey, R., «Estimation of Tail-Related Risk Measures for Heteroscedastic Financial Time Series», *Journal of Empirical Finance*, vol. 7, no. 3–4, pp. 271–300.

McNeil et al. (2005) McNeil, A. J., Frey, R. and Embrechts, P., *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools*, Princeton University Press, Princeton.

Nelsen (2006) Nelsen, R. B., *An Introduction to Copulas*, Springer, New York.

Rockafellar and Uryasev (2000) Rockafellar, R. T. and Uryasev, S., ≪Optimization of Conditional Value-at-Risk≫, *The Journal of Risk*, vol. 2, no. 3, pp. 21–41.

Índice general

1. Introducción **1**

2. Estado de la cuestión y marco teórico **3**

2.1. Riesgo financiero y distribución de pérdidas 3

2.2. Medidas de riesgo: Comparación teórica y gráfica entre VaR y CVaR 5

2.2.1. El problema del Value at Risk (VaR) 5

2.2.2. El Conditional Value at Risk (CVaR) 6

2.2.3. Comparación axiomática y coherencia 7

2.3. Métodos de estimación del riesgo univariante 8

2.3.1. Simulación histórica 9

2.3.2. Métodos paramétricos 9

2.3.3. Simulación de Monte Carlo 13

2.4. Estimación del riesgo en el dominio multivariante 13

2.4.1. Las funciones de densidad (PDF) en el espacio multivariante 14

2.4.2. Descomposición de Cholesky 14

2.4.3. Distribución t-Student multivariante 15

2.5. Estimación dinámica de la covarianza: Modelo EWMA 16

2.6. Teoría de carteras de Markowitz 17

2.6.1. Definición de una cartera de activos 17

2.6.2. El retorno de una cartera 17

2.6.3. Valor esperado y varianza de una cartera 17

2.6.4. El modelo de optimización de Markowitz 18

2.6.5. La frontera eficiente 18

2.6.6. El VaR incremental 19

2.7. Backtesting 20

2.7.1. Backtesting del VaR 20

2.7.2. Backtesting del Expected Shortfall 22

3. Objetivos del trabajo **25**

3.1. Objetivo general 25

3.2. Objetivos específicos 25

4. Metodología **27**
4.1. Datos y preprocesamiento 27
4.2. Justificación de la selección de activos 29
4.3. Construcción de la cartera 31
4.3.1. Cartera ponderada por capitalización bursátil 31
4.3.2. Cartera de pesos iguales 31
4.3.3. Cartera de mínima varianza de Markowitz 31
4.4. Análisis univariante de distribuciones 32
4.5. Estimación del riesgo multivariante y comparación de modelos 32
4.5.1. Parámetros del modelo y decisiones de diseño 35
4.6. Backtesting y validación fuera de muestra 35

5. Desarrollo e implementación **39**
5.1. Diseño del algoritmo 39
5.2. Implementación en MATLAB 39
5.3. Estructura general de la implementación 39
5.4. Decisiones de implementación 40
5.5. Outputs generados 41

6. Resultados y discusión **43**
6.1. Análisis estadístico univariante de los rendimientos 43
6.2. Composición y ponderación de las carteras 44
6.3. Atribución de riesgo e Incremental VaR en t_0 45
6.4. Resultados del backtesting del VaR 47
6.5. Resultados del backtesting del Expected Shortfall (CVaR) 49
6.5.1. Calibración dinámica de ν y comparación con $\nu = 6$ fijo 51
6.5.2. Análisis de sensibilidad al parámetro λ del modelo EWMA 53
6.6. Tabla resumen comparativa 55
6.7. Análisis gráfico de resultados 56
6.7.1. Distribución de pérdidas y localización del VaR y CVaR 56
6.7.2. Comparación de VaR y CVaR por modelo 57
6.7.3. Representación temporal del backtesting del VaR 58
6.7.4. Representación temporal del backtesting del CVaR 59
6.7.5. Matriz de correlaciones 60
6.7.6. Frontera eficiente de Markowitz 61
6.7.7. Comparación entre distribución normal y t-Student 62
6.7.8. ESgap por modelo y cartera 63

7. Conclusiones **65**
7.1. Conclusiones sobre el análisis estadístico 65
7.2. Conclusiones sobre la construcción de carteras 65
7.3. Conclusiones sobre la simulación Monte Carlo 66
7.4. Conclusiones sobre el backtesting 67
7.5. Conclusiones sobre la implementación computacional 68
7.6. Limitaciones y líneas futuras 68
7.7. Reflexión final 69

Alineación con los Objetivos de Desarrollo Sostenible **71**

A. Implementación computacional en MATLAB **75**

Índice de figuras

2.1. Visualización del VaR al 99 % de confianza. La línea azul marca el umbral de pérdida que no se supera en el 99 % de los escenarios. Lo que ocurre en la cola roja (el 1 % restante) queda fuera del alcance del VaR. 6

2.2. Visualización del CVaR como centro de masas de la cola. A diferencia del VaR, el CVaR cuantifica la severidad media de las pérdidas en la zona extrema (región roja). 7

2.3. Comparación de las funciones de densidad Normal, t-Student (con $\nu = 5$ grados de libertad) y Laplace, todas centradas en $\mu = 0$ y con varianza unitaria. La subfigura derecha amplía la cola derecha, donde se aprecia el orden entre distribuciones: la Normal decae más rápido, la Laplace ocupa una posición intermedia, y la t-Student mantiene la mayor densidad de probabilidad en los valores extremos. 11

2.4. Esquema ilustrativo de la frontera eficiente de Markowitz. La rama superior recoge las carteras eficientes y la inferior las dominadas. El punto GMVP es la cartera de mínima varianza global. Las carteras CAP y EW se sitúan en el interior del conjunto factible de forma orientativa; su posición exacta respecto a la frontera, calculada a partir de los datos reales de la muestra, se analiza en la Figura 6.9 del Capítulo 6. 19

4.1. Diagrama de flujo del procedimiento de desarrollo e implementación computacional del modelo. 28

6.1. VaR Incremental por activo al 99 % de confianza en t_0 bajo el modelo Monte Carlo t-Student para las tres carteras. Las barras a la derecha del eje vertical indican activos que incrementan el riesgo agregado de la cartera ($IVaR > 0$); las barras a la izquierda indican activos que actúan como diversificadores ($IVaR < 0$). En las carteras CAP y EW, NVIDIA destaca como el principal generador de riesgo marginal. En la cartera GMVP, la optimización redistribuye los pesos de forma que ningún activo concentra una contribución marginal significativa. . . 47

6.2. Evolución temporal de $\hat{\nu}_t$ calibrado por máxima verosimilitud en cada ventana de entrenamiento (Cartera CAP). La línea discontinua roja indica el valor fijo $\nu = 6$ utilizado en la estimación estática; la línea de puntos negra muestra la media de la serie calibrada ($\bar{\nu} = 11{,}6$). 52
6.3. Número de excepciones del backtesting de VaR al 99 % bajo el modelo EWMA para $\lambda \in \{0{,}90;\ 0{,}94;\ 0{,}97\}$. La línea discontinua indica las excepciones esperadas (≈ 5) para $N_{\text{val}} = 493$ y $\alpha = 99\,\%$. 54
6.4. Distribución de pérdidas simuladas con indicación del VaR y CVaR al 99 % (Cartera CAP). 56
6.5. Comparación de VaR y CVaR al 99 % bajo distintas metodologías (Cartera CAP). 57
6.6. Backtesting del VaR al 99 % para las tres carteras: pérdidas observadas frente al umbral estimado por el modelo t-Student. 58
6.7. Backtesting del CVaR al 99 % para las tres carteras bajo el modelo MC t-Student. El eje izquierdo muestra las pérdidas diarias realizadas (gris) y los días de excepción del VaR (puntos rojos). El eje derecho muestra la evolución temporal del VaR estimado (azul discontinuo) y del CVaR estimado (magenta continuo). En los días de excepción del VaR (puntos rojos), la pérdida real debería quedar por debajo del CVaR estimado si el modelo captura correctamente la severidad condicional. La cartera CAP presenta pérdidas extremas que en algunos episodios superan incluso el CVaR, mientras que la cartera GMVP muestra una serie de pérdidas más contenida y métricas de riesgo más estables a lo largo del tiempo. 59
6.8. Mapa de calor de la matriz de correlaciones entre los activos de la cartera. Las correlaciones elevadas entre los valores tecnológicos (AAPL, MSFT, NVDA) contrastan con las correlaciones bajas de SAN e IBE respecto al resto, lo que explica su papel como diversificadores naturales en la cartera GMVP. 60
6.9. Frontera eficiente de Markowitz y localización de las tres carteras analizadas. . 61
6.10. Comparación entre pérdidas simuladas bajo distribución normal y t-Student (Cartera CAP). 62
6.11. ESgap $= \bar{L}_{\text{exc}} - \widehat{\text{ES}}$ por modelo y cartera al 99 % de confianza. Un ESgap positivo indica subestimación de la severidad condicional. El modelo MC t-Student presenta ESgap positivo en todas las carteras, siendo el más elevado en GMVP ($+0{,}852\,\%$); sin embargo, en los tres casos el intervalo bootstrap contiene la unidad y el test McNeil-Frey no rechaza H_0, por lo que no hay evidencia formal de subestimación. Los modelos gaussianos presentan ESgap sistemáticamente positivo con intervalos bootstrap que excluyen la unidad en las carteras CAP y EW, confirmando la subestimación del CVaR. 63

Índice de tablas

4.1. Justificación de los activos incluidos en la cartera 30

6.1. Estadísticos descriptivos y diagnóstico univariante para NVIDIA (NVDA) . . . 44
6.2. Ponderaciones de activos en t_0 bajo los tres esquemas de cartera 45
6.3. VaR Incremental por activo al 99 % de confianza en t_0 46
6.4. Resultados del backtesting de VaR al 99 % — Cartera CAP 47
6.5. Resultados del backtesting de VaR al 99 % — Cartera EW 48
6.6. Resultados del backtesting de VaR al 99 % — Cartera Markowitz (GMVP) . . . 48
6.7. Análisis del Expected Shortfall: NS, IC bootstrap al 95 % y test McNeil-Frey. . 50
6.8. Comparación del backtesting de VaR al 99 % bajo $\nu = 6$ fijo y ν calibrado dinámicamente — Cartera CAP. 52
6.9. Análisis de sensibilidad del modelo EWMA: excepciones del VaR al 99 % y p-valor de Kupiec para $\lambda \in \{0{,}90;\ 0{,}94;\ 0{,}97\}$. 53
6.10. Resumen comparativo del backtesting de VaR al 99 % para las tres carteras . . 55

1. Alineación del TFG con los Objetivos de Desarrollo Sostenible 71

Listings

A.1. Análisis univariante y ajuste de distribuciones Normal, t-Student y Laplace sobre los rendimientos de un activo (caso: NVDA). 75
A.2. Script principal: construcción de tres carteras, simulación Monte Carlo y back-testing de VaR y CVaR. 78

Capítulo 1

Introducción

Los mercados financieros generan diariamente una cantidad ingente de datos que reflejan las decisiones de miles de instituciones bajo incertidumbre. Gestionar esa incertidumbre de forma rigurosa no es un problema nuevo, pero sí uno que ha ganado importancia tras las sucesivas crisis financieras de las últimas décadas como la quiebra de Lehman Brothers en 2008, que puso de manifiesto que los modelos de riesgo entonces dominantes eran incapaces de anticipar la magnitud de las pérdidas en escenarios extremos (Brunnermeier 2009; Financial Crisis Inquiry Commission 2011). Esa incapacidad no era un fallo menor: era sistémica y se atribuía a la dependencia excesiva del supuesto de normalidad.

El riesgo financiero de una cartera se estudia a través de su distribución de pérdidas, prestando especial atención a la cola izquierda, donde se concentran los eventos de baja probabilidad y alto impacto. Para resumir esa información, la industria utiliza principalmente dos métricas: el *Value at Risk* (VaR) (Jorion 2006) y el *Conditional Value at Risk* (CVaR) (Rockafellar y Uryasev 2000), también conocido como *Expected Shortfall*. El VaR responde a la pregunta de cuánto puede perderse como máximo con un nivel de confianza dado; el CVaR va más allá y cuantifica la severidad media de las pérdidas cuando ese umbral ya ha sido superado. Ambas medidas están ampliamente extendidas, pero su calidad depende de manera crítica del modelo estadístico que se adopte para describir los rendimientos.

Como se mencionaba en el resumen, los rendimientos financieros reales no se comportan como una distribución normal ya que presentan colas pesadas, exceso de curtosis, posible asimetría y volatilidad variante con el tiempo (Cont 2001). Estas propiedades hacen que los modelos gaussianos subestimen sistemáticamente la probabilidad de eventos extremos. El presente trabajo toma como punto de partida la siguiente constatación empírica: los datos de los diez activos analizados, entre ellos NVIDIA, con un exceso de curtosis de 3,42 y caídas diarias de hasta el 14,21 %, ilustran con claridad por qué el supuesto de normalidad resulta insuficiente cuando el objetivo es medir el riesgo de cola.

Ante esta limitación, la simulación Monte Carlo ofrece un marco especialmente adecuado para aproximar la distribución de pérdidas bajo distintos supuestos distribucionales (Glasserman 2004; Danielsson 2011). A diferencia de los métodos paramétricos, permite construir una apro-

ximación empírica de la distribución de pérdidas generando un número elevado de escenarios bajo supuestos sobre la dependencia y dinámica de los activos. Esta flexibilidad es la que justifica su adopción como núcleo computacional del trabajo: con $N = 50.000$ escenarios simulados bajo distribuciones normal multivariante y t-Student multivariante, y con la estructura de correlaciones introducida mediante descomposición de Cholesky, es posible comparar de forma rigurosa el comportamiento de distintos modelos ante el riesgo extremo.

El trabajo analiza una cartera formada por diez activos de alta liquidez de los mercados estadounidense y español, elegidos para representar perfiles de riesgo distintos: tecnológicas de alta volatilidad como Apple, Microsoft y NVIDIA; valores defensivos como Johnson & Johnson, Procter & Gamble e Iberdrola; y entidades financieras como JPMorgan Chase y Banco Santander. Sobre esta cartera se construyen tres esquemas de ponderación: uno basado en capitalización bursátil, uno de pesos iguales y uno obtenido mediante optimización de Markowitz, lo que permite analizar cómo la composición de la cartera afecta al riesgo agregado y a la distribución de pérdidas simuladas.

Los resultados del backtesting, aplicado con los tests de Kupiec (Kupiec 1995) y Christoffersen (Christoffersen 1998) sobre una ventana temporal de validación fuera de muestra, confirman la hipótesis central del trabajo: el modelo Monte Carlo con distribución t-Student es el único que supera simultáneamente ambos contrastes de validez en la cartera de mayor concentración sectorial, registrando 8 excepciones frente a las 12 de los modelos gaussianos en la cartera ponderada por capitalización. Esta diferencia no es trivial: en un contexto bancario, la elección del modelo tiene consecuencias directas sobre los requerimientos de capital.

El trabajo se estructura en siete capítulos. El Capítulo 2 desarrolla el marco teórico: las métricas de riesgo VaR y CVaR, los métodos de estimación univariantes y multivariantes, la teoría de carteras de Markowitz y los procedimientos de backtesting. El Capítulo 3 formula los objetivos específicos del trabajo. El Capítulo 4 describe la metodología: selección de datos, construcción de carteras, algoritmos de simulación y validación. El Capítulo 5 detalla la implementación computacional en MATLAB. El Capítulo 6 presenta y discute los resultados empíricos. El Capítulo 7 recoge las conclusiones, limitaciones y líneas de trabajo futuro.

El trabajo tiene, por tanto, un doble propósito. Por un lado, desarrollar y comparar modelos estadísticos de medición del riesgo de mercado en el contexto de una cartera diversificada, incorporando distribuciones alternativas a la normal y validando su calidad de predicción. Por otro lado, implementar todo el procedimiento de forma computacional en MATLAB, de manera que el código sea modular, replicable y extensible. El objetivo no es solo calcular una cifra de riesgo, sino ofrecer una herramienta que permita entender y gestionar la exposición al riesgo de cola con la exigencia de los estándares de la industria financiera.

Capítulo 2

Estado de la cuestión y marco teórico

Este capítulo desarrolla los fundamentos teóricos y el estado de la cuestión sobre los que se apoya el trabajo. Se estructura en seis bloques: la transformación de precios en rendimientos y la construcción de carteras multivariantes, las métricas de riesgo VaR y CVaR, los métodos de estimación univariantes y multivariantes, la estimación dinámica de la covarianza mediante EWMA, la teoría de carteras de Markowitz y, finalmente, los procedimientos de backtesting para validar empíricamente los modelos.

2.1. Riesgo financiero y distribución de pérdidas

Invertir en los mercados financieros implica asumir incertidumbre. El análisis cuantitativo del riesgo no pretende predecir el futuro ni anticipar el precio de los activos, sino que su objetivo es más concreto y consiste en estimar cuánto puede perderse en los peores escenarios posibles, con el fin de garantizar la solvencia, usar mejor los recursos y tomar decisiones más informadas cuando la incertidumbre es alta.

Para lograr esto, el interés principal de las entidades con exposición al riesgo reside en construir y modelizar la distribución completa de todas las pérdidas posibles, prestando especial atención a los extremos de dicha distribución. Este conjunto de escenarios adversos, poco frecuentes pero de consecuencias severas, recibe en el nombre de riesgo de cola.

Una cartera de inversión está expuesta a múltiples factores de riesgo estocásticos, es decir, de naturaleza aleatoria, tales como el precio de las acciones cotizadas, la evolución de los tipos de interés macroeconómicos, los tipos de cambio de divisas o los diferenciales de crédito. Para poder integrar esta enorme variabilidad en un entorno de programación como MATLAB y simular escenarios futuros, es necesario realizar una transformación matemática previa de los datos originales.

La información de partida son precios históricos diarios de cierre extraídos de proveedores financieros especializados. Sin embargo, dado que las series de precios son no estacionarias, es decir, su media, su varianza y su estructura de autocorrelación no permanecen constantes a lo largo del tiempo sino que siguen trayectorias aleatorias con tendencias marcadas, rara vez

se trabaja directamente con el precio bruto del activo. La práctica habitual en la medición del riesgo consiste en transformarlas en series de rendimientos antes de proceder al modelado.

El primer paso consiste en transformar los precios en rentabilidades. En lugar de utilizar los rendimientos aritméticos simples, el estándar en las finanzas cuantitativas es el uso de los **rendimientos logarítmicos continuos**. Si P_t representa el precio de cierre ajustado de un activo financiero en el instante actual t, y P_{t-1} constituye el precio registrado en la jornada anterior, el rendimiento logarítmico diario se define formalmente mediante la siguiente expresión analítica:

$$r_t = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) = \ln(P_t) - \ln(P_{t-1}) \tag{2.1}$$

La preferencia por los rendimientos logarítmicos frente a los aritméticos encuentra su justificación en dos propiedades algebraicas:

- **Simetría:** Los rendimientos aritméticos presentan una asimetría que distorsiona el modelado. Si el precio de un activo cae de 100€ a 50€, experimenta una pérdida del 50 %; sin embargo, para recuperar el nivel inicial desde ese punto se requiere una subida del 100 %. Esta asimetría se vuelve especialmente problemática en horizontes largos. El logaritmo corrige este problema ya que una variación equivalente al alza y a la baja produce rendimientos logarítmicos de igual magnitud absoluta y signo opuesto (Campbell, Lo y MacKinlay 1997).

- **Agregación temporal:** El rendimiento logarítmico acumulado en k días es exactamente la suma de los rendimientos diarios del periodo (Tsay 2010). Formalmente:

$$r_t^{(k)} = \ln\left(\frac{P_{t+k}}{P_t}\right) = \sum_{j=1}^{k} \ln\left(\frac{P_{t+j}}{P_{t+j-1}}\right) = \sum_{j=1}^{k} r_{t+j} \tag{2.2}$$

  Gracias a la propiedad aditiva de los logaritmos, el rendimiento acumulado en cualquier horizonte temporal es la suma de los rendimientos diarios del periodo, sin necesidad de correcciones por capitalización compuesta; a diferencia de los rendimientos aritméticos, que requieren multiplicaciones sucesivas para agregarse en el tiempo. En la práctica, esto simplifica tanto la programación matricial como la simulación a horizontes largos (Glasserman 2004).

Al extender este planteamiento a un entorno multivariante, se considera una cartera formada por d activos financieros que pueden estar correlacionados entre sí. El vector de pesos $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_d)^T$ recoge qué proporción del capital total se invierte en cada activo, y debe satisfacer la restricción de cierre presupuestario:

$$\sum_{i=1}^{d} w_i = \mathbf{1}^T \mathbf{w} = 1 \tag{2.3}$$

Esta condición garantiza que todo el capital queda invertido: no hay dinero sin asignar ni apalancamiento implícito (invertir más capital del que se posee recurriendo a financiación ajena). Los pesos pueden tomar valores positivos, que representan posiciones largas (el inversor compra el activo esperando que suba), o negativos, que representan posiciones cortas o *short-selling*: el inversor vende un activo que no posee esperando recomprarlo más barato, de modo que se beneficia de las caídas y reduce la exposición de la cartera a ciertos factores de riesgo.

El rendimiento total de la cartera en un día t se obtiene como la combinación lineal de los rendimientos individuales de cada activo, ponderados por su peso en la cartera (Campbell, Lo y MacKinlay 1997):

$$r_{p,t} \approx \mathbf{w}^T \mathbf{R}_t = \sum_{i=1}^{d} w_i r_{i,t} \tag{2.4}$$

donde $r_{i,t}$ es el rendimiento logarítmico del activo i en el día t, y w_i es el peso de ese activo en la cartera. En palabras simples: si Apple tiene un peso del 20 % y sube un 1 % en un día, contribuye un 0.20 % al rendimiento total de la cartera.

Cabe señalar que esta expresión es exacta para rendimientos aritméticos, pero es una **aproximación** cuando se trabaja con rendimientos logarítmicos (Campbell, Lo y MacKinlay 1997). La igualdad exacta requeriría que $\ln(\sum_i w_i e^{r_{i,t}}) = \sum_i w_i r_{i,t}$, lo cual no se cumple en general. Sin embargo, para rendimientos diarios pequeños el error es de orden $O(r_{i,t}^2)$ y resulta despreciable (Glasserman 2004; McNeil, Frey y Embrechts 2005).

2.2. Medidas de riesgo: Comparación teórica y gráfica entre VaR y CVaR

Una vez definida la variable aleatoria de rendimiento de la cartera, el siguiente reto consiste en resumir toda la información de su distribución en una única métrica que comunique el nivel de riesgo que está asumiendo la institución.

En la industria bancaria y regulatoria actual, los dos estándares de referencia son el *Value at Risk* (VaR) y el *Conditional Value at Risk* (CVaR), también llamado *Expected Shortfall* (ES) o *Average Value at Risk* (AVaR) (McNeil, Frey y Embrechts 2005). CVaR y ES son equivalentes bajo condiciones de continuidad de la distribución y se usan indistintamente a lo largo de este trabajo.

Aunque VaR y CVaR se calculan y presentan juntos con frecuencia, parten de principios matemáticos distintos, que se analizan a continuación.

2.2.1. El problema del Value at Risk (VaR)

El *Value at Risk* fue históricamente el pilar sobre el que se construyeron los primeros marcos de control del riesgo de mercado en los Acuerdos de Basilea (Basel Committee on Banking Supervision 1996). Está diseñado para responder a una pregunta concreta: dado un nivel de

confianza, ¿cuál es el umbral de pérdida que no debería superarse en condiciones normales de mercado?

Bajo Basilea II (Basel Committee on Banking Supervision 2004), este enfoque se convirtió en el estándar regulatorio global para calcular los requerimientos mínimos de capital por riesgo de mercado. Sin embargo, la crisis financiera de 2007–2008 (Financial Crisis Inquiry Commission 2011) dejó en evidencia sus limitaciones: el VaR era incapaz de anticipar la severidad de las pérdidas en escenarios de estrés. Como respuesta, el Comité de Basilea introdujo en Basilea III (Basel Committee on Banking Supervision 2010) y en la revisión del *Fundamental Review of the Trading Book* (FRTB) (Basel Committee on Banking Supervision 2019) un cambio de paradigma, promoviendo la transición hacia el *Expected Shortfall* como métrica de referencia.

Formalmente, sea L la variable aleatoria que representa la pérdida de la cartera en un día dado, y l un valor concreto que puede tomar esa pérdida. Dado un nivel de confianza $\alpha \in (0, 1)$, fijado en el 99 % en este trabajo, el VaR actúa como un cuantil de la distribución acumulada de pérdidas (McNeil, Frey y Embrechts 2005):

$$VaR_\alpha(L) = \text{ínf}\{l \in \mathbb{R} : P(L \leq l) \geq \alpha\} \tag{2.5}$$

Para ilustrarlo: si el VaR diario al 99 % es del 3 %, el modelo indica que la cartera no perderá más del 3 % en el 99 % de los días, bajo los supuestos del modelo. Dicho de otro modo, hay un 1 % de probabilidad de que la pérdida diaria supere ese umbral. Es importante no confundir el VaR con una pérdida máxima: es un cuantil, y pérdidas mayores son perfectamente posibles. De hecho, qué ocurre más allá de ese umbral es precisamente lo que mide el CVaR.

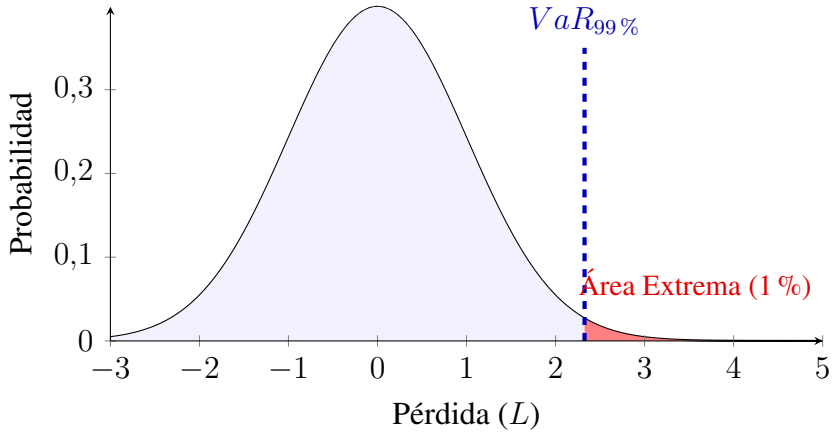


Figura 2.1: Visualización del VaR al 99 % de confianza. La línea azul marca el umbral de pérdida que no se supera en el 99 % de los escenarios. Lo que ocurre en la cola roja (el 1 % restante) queda fuera del alcance del VaR.

2.2.2. El Conditional Value at Risk (CVaR)

Para corregir esta debilidad del VaR, los desarrollos recientes en finanzas cuantitativas favorecen el uso del *Conditional Value at Risk* (CVaR), también conocido como *Expected*

Shortfall. El CVaR responde a la pregunta que el VaR deja sin contestar: "Si las condiciones de mercado se deterioran y superamos el umbral del VaR, ¿cuánto perderemos de media?".

Matemáticamente, el CVaR es la esperanza condicional de la pérdida, restringida a los escenarios que superan el VaR:

$$CVaR_\alpha(L) = E[L \mid L \geq VaR_\alpha(L)] \tag{2.6}$$

Geométricamente, el CVaR es el centro de masas de la cola derecha de la distribución, es decir, el promedio de todas las pérdidas que caen en esa región extrema.

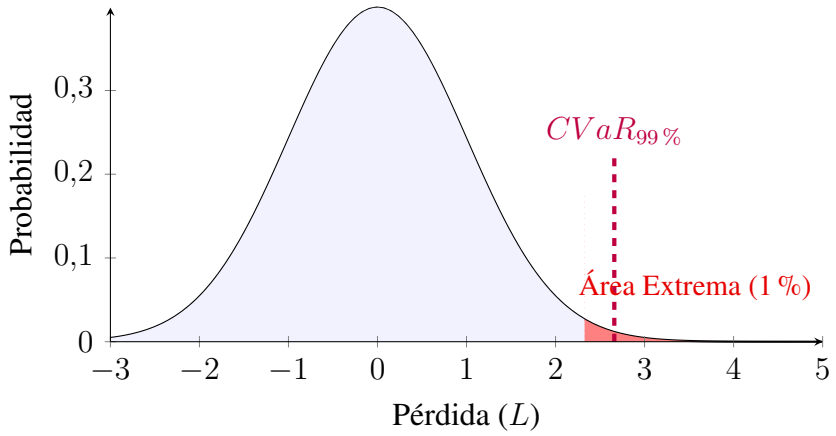


Figura 2.2: Visualización del CVaR como centro de masas de la cola. A diferencia del VaR, el CVaR cuantifica la severidad media de las pérdidas en la zona extrema (región roja).

Como se aprecia en la Figura 2.2, el CVaR es sensible a la forma completa de la cola. Si la distribución de pérdidas tiene colas más pesadas, por ejemplo por la presencia de activos muy volátiles o leptocúrticos como los que se modelan con la t-Student en este trabajo, el centro de masas se desplaza hacia la derecha automáticamente. Esto lo convierte en una medida más prudente y realista para cuantificar el riesgo en escenarios extremos.

2.2.3. Comparación axiomática y coherencia

La diferencia entre VaR y CVaR va más allá de la interpretación geométrica. Artzner, Delbaen, Eber y Heath (Artzner et al. 1999) establecieron el marco de las **medidas de riesgo coherentes**, definiendo cuatro axiomas que cualquier métrica debería cumplir: monotonicidad, homogeneidad positiva, invarianza por traslación y subaditividad. Los cuatro axiomas tienen interpretaciones intuitivas: la monotonicidad establece que una posición con mayores pérdidas debe tener mayor riesgo; la homogeneidad positiva implica que escalar una posición escala el riesgo proporcionalmente; la invarianza por traslación garantiza que añadir efectivo reduce el riesgo en la misma cuantía. La **subaditividad** es, sin embargo, la más relevante desde el punto de vista práctico, y la única que el VaR puede violar.

Una medida de riesgo ρ es subaditiva si:

$$\rho(A + B) \leq \rho(A) + \rho(B) \tag{2.7}$$

para dos posiciones cualesquiera A y B. Esta propiedad formaliza el principio de diversificación: el riesgo conjunto de dos posiciones no debería superar la suma de sus riesgos por separado. Si una medida viola este axioma, puede darse la paradoja de que dividir una cartera en partes y medir el riesgo individualmente arroje un resultado menor que medirla de forma agregada, lo que penaliza la diversificación.

En resumen, frente al VaR, el CVaR presenta dos ventajas adicionales:

- **Sensibilidad a la cola extrema:** Si algo cambia en el peor 0,1 % de los escenarios, el VaR al 99 % no se mueve. El CVaR, al promediar toda la cola, captura ese cambio de inmediato.

- **Cumplimiento del axioma de subaditividad:** El VaR no es una medida de riesgo coherente en general, ya que puede violar la subaditividad bajo distribuciones no simétricas (Artzner et al. 1999). En la práctica, dado que las distribuciones de pérdidas reales raramente tienen una forma lo suficientemente regular como para garantizar este comportamiento, no es posible asumir que el VaR sea subaditivo en el caso general. El CVaR, en cambio, satisface la subaditividad bajo cualquier distribución (Rockafellar y Uryasev 2000):

  $$CVaR_\alpha(A + B) \leq CVaR_\alpha(A) + CVaR_\alpha(B) \tag{2.8}$$

  Esta propiedad lo convierte en la métrica preferida tanto por la regulación internacional (FRTB (Basel Committee on Banking Supervision 2019)) como por la literatura académica.

2.3. Métodos de estimación del riesgo univariante

Antes de abordar la gestión del riesgo en una cartera multidimensional, con activos correlacionados y estructuras de covarianza complejas, conviene entender primero cómo se estima el riesgo para un único activo. Si se asume una posición concentrada en un solo valor, por ejemplo acciones de NVIDIA, el problema se reduce a modelar la distribución de sus retornos y evaluar su riesgo de cola de forma aislada.

En la práctica financiera existen tres enfoques principales para resolver este problema. Cada uno parte de una lógica distinta, con sus propias ventajas y limitaciones. A continuación se describe cada uno de ellos.

2.3.1. Simulación histórica

La simulación histórica es el enfoque más directo e intuitivo. Es un método no paramétrico: no asume ninguna distribución teórica de los rendimientos ni impone restricciones sobre su forma.

Su premisa es simple: lo que ha ocurrido en el pasado reciente es un buen estimador de lo que puede ocurrir en el futuro. Para aplicarlo, se toma una ventana temporal fija de W observaciones diarias y se calcula la serie histórica de pérdidas registradas en ese periodo.

El procedimiento para obtener el VaR y el CVaR es el siguiente:

1. Se recogen las W pérdidas históricas en un vector.

2. Se ordena ese vector de menor a mayor, construyendo una distribución empírica real.

3. Para un nivel de confianza α, se localiza el cuantil correspondiente. Ese valor es el VaR.

4. Para el CVaR, se toman todas las pérdidas que superan ese umbral y se calcula su media.

Ejemplo numérico: Con $W = 1{,}000$ observaciones y un nivel de confianza del 99 %, la región de pérdidas extremas corresponde al 1 % de la muestra, es decir, las 10 peores jornadas. El $\text{VaR}_{99\,\%}$ es la pérdida en la posición 990 del vector ordenado. El $\text{CVaR}_{99\,\%}$ es el promedio de las 10 pérdidas restantes:

$$\text{CVaR}_{99\,\%}(X) = \frac{1}{10} \sum_{i=991}^{1{,}000} X_{(i)}$$

La principal ventaja de este método es que no impone ninguna forma distribucional sobre los datos: captura de forma natural las asimetrías, la curtosis y las anomalías del mercado tal y como ocurrieron. Sin embargo, tiene una limitación clara: si el mercado sufre una perturbación cuya severidad supera cualquier episodio registrado en la ventana histórica, el modelo no tiene forma de cuantificarlo.

2.3.2. Métodos paramétricos

Los métodos paramétricos parten de una lógica opuesta a la simulación histórica ya que en lugar de usar directamente los datos del pasado, asumen que los rendimientos siguen una distribución teórica concreta cuyos parámetros se estiman a partir de los datos históricos.

En el contexto univariante se analizan principalmente tres distribuciones:

1. **Distribución Normal (Gaussiana):** Es la distribución de referencia en la teoría financiera clásica y se caracteriza por dos parámetros: la media $\mu \in \mathbb{R}$, que indica el rendimiento esperado, y la desviación típica $\sigma > 0$, que mide la volatilidad. Ambos se estiman

directamente de los datos (McNeil, Frey y Embrechts 2005):

$$\hat{\mu} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} r_t, \qquad \hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}(r_t - \hat{\mu})^2} \tag{2.9}$$

donde el denominador $T-1$ en lugar de T produce el estimador insesgado de la varianza poblacional, corrigiendo el sesgo que introduce el uso de $\hat{\mu}$ muestral en lugar de la media poblacional verdadera. Su función de densidad es:

$$f_{\text{Normal}}(x;\, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad x \in \mathbb{R},\ \mu \in \mathbb{R},\ \sigma > 0 \tag{2.10}$$

Su principal limitación es que sus colas decaen muy rápido, lo que lleva a subestimar sistemáticamente la probabilidad de pérdidas extremas.

2. **Distribución t-Student:** Surge como alternativa para corregir precisamente ese problema. Incorpora un tercer parámetro, los grados de libertad $\nu > 0$, que controla el grosor de las colas: cuanto menor es ν, más pesadas son las colas y más probable es que ocurran eventos extremos. Cuando $\nu \to \infty$, la distribución converge a la normal. Aquí $\Gamma(\cdot)$ es la función Gamma, definida como $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,dt$. Los parámetros se estiman por máxima verosimilitud mediante optimización numérica, ya que no existen fórmulas cerradas para $\hat{\nu}$ y $\hat{\lambda}$ en el caso general (McNeil, Frey y Embrechts 2005):

$$f_{t\text{-Student}}(x;\, \mu, \lambda, \nu) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\sqrt{\pi\nu}\,\lambda}\left(1 + \frac{1}{\nu}\left(\frac{x-\mu}{\lambda}\right)^2\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} \tag{2.11}$$

donde $x \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$ y $\nu > 0$. A diferencia de la normal, sus colas siguen una ley de potencias, lo que permite asignar probabilidades realistas a las pérdidas extremas.

3. **Distribución de Laplace:** Es una alternativa paramétrica útil en el modelado de riesgos. Depende de dos parámetros: la media $\mu \in \mathbb{R}$ y el parámetro de escala $b > 0$. Sus estimadores tienen solución cerrada (Kotz, Kozubowski y Podgórski 2001):

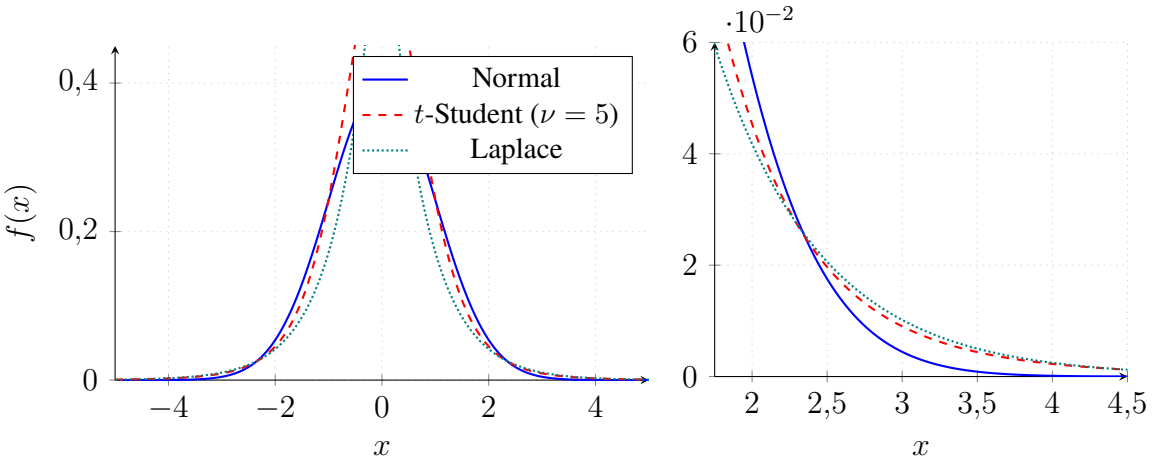
$$\hat{\mu} = \text{mediana}(r_1, \ldots, r_T), \qquad \hat{b} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} |r_t - \hat{\mu}| \tag{2.12}$$

Su función de densidad es:

$$f_{\text{Laplace}}(x;\, \mu, b) = \frac{1}{2b}\exp\left(-\frac{|x-\mu|}{b}\right), \quad x \in \mathbb{R},\ \mu \in \mathbb{R},\ b > 0 \tag{2.13}$$

El valor absoluto en el exponente le da una forma apuntada en el centro y colas que decaen de forma exponencial: más lento que la normal, pero más rápido que la t-Student. Ocupa por tanto una posición intermedia entre ambas en cuanto a la captura del riesgo extremo.

La Figura 2.3 muestra las tres distribuciones centradas en $\mu = 0$ y con parámetros calibrados para tener varianza unitaria cuando es posible ($\sigma = 1$ para la Normal, $\lambda = \sqrt{(\nu-2)/\nu}$ para la t-Student con $\nu = 5$, y $b = 1/\sqrt{2}$ para la Laplace). En la subfigura izquierda se observa la forma global de cada distribución: la Laplace es más apuntada en el centro que la Normal, mientras que la t-Student tiene un pico algo más bajo pero colas más anchas. La subfigura derecha amplía la cola derecha para $x > 1{,}5$, donde el orden entre distribuciones queda claro: la Normal decae más rápido, la Laplace ocupa una posición intermedia, y la t-Student mantiene la mayor densidad de probabilidad en los valores extremos.



(a) Distribución completa

(b) Zoom cola derecha

Figura 2.3: Comparación de las funciones de densidad Normal, t-Student (con $\nu = 5$ grados de libertad) y Laplace, todas centradas en $\mu = 0$ y con varianza unitaria. La subfigura derecha amplía la cola derecha, donde se aprecia el orden entre distribuciones: la Normal decae más rápido, la Laplace ocupa una posición intermedia, y la t-Student mantiene la mayor densidad de probabilidad en los valores extremos.

Una vez estimados los parámetros de cada distribución, el cálculo del VaR y el CVaR se obtiene de forma analítica a partir de la propia función de densidad ajustada, sin necesidad de ordenar observaciones históricas como ocurría en la simulación histórica vista anteriormente.

El VaR al nivel de confianza α es la función cuantil o función inversa de la distribución acumulada F, evaluada en α:

$$VaR_\alpha = F^{-1}(\alpha) \tag{2.14}$$

Es decir, se busca el valor l tal que la probabilidad acumulada hasta ese punto sea exactamente α. Para cada distribución, esta inversa tiene una forma distinta (McNeil, Frey y Embrechts 2005):

- **Normal:** $VaR_\alpha = \hat{\mu} + \hat{\sigma}\, z_\alpha$, donde z_α es el cuantil α de la normal estándar, obtenido directamente de sus tablas o mediante la función inversa de error.
- **t-Student:** $VaR_\alpha = \hat{\mu} + \hat{\lambda}\, t_{\alpha,\hat{\nu}}$, donde $t_{\alpha,\hat{\nu}}$ es el cuantil α de la t-Student estándar con $\hat{\nu}$ grados de libertad. Al tener colas más pesadas, este cuantil es mayor en valor absoluto que el gaussiano para el mismo α, lo que se traduce en un VaR más conservador.

- **Laplace:** La función acumulada tiene solución cerrada, por lo que el cuantil también. Para $\alpha > 0{,}5$:

$$VaR_\alpha = \hat{\mu} - \hat{b}\ln(2(1-\alpha)) \tag{2.15}$$

El CVaR se obtiene como la esperanza de la distribución condicionada a superar el VaR, lo que en el caso paramétrico se traduce en una integral sobre la cola de la función de densidad:

$$CVaR_\alpha = \frac{1}{1-\alpha}\int_{VaR_\alpha}^{\infty} x\, f(x)\, dx \tag{2.16}$$

Para cada distribución, esta integral tiene solución cerrada (McNeil, Frey y Embrechts 2005):

- **Normal:** El CVaR se expresa en función de la densidad normal estándar ϕ y su función de distribución acumulada Φ:

$$CVaR_\alpha = \hat{\mu} + \hat{\sigma}\,\frac{\phi(z_\alpha)}{1-\alpha} \tag{2.17}$$

  donde $\phi(z_\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z_\alpha^2/2}$ es la densidad normal estándar evaluada en el cuantil z_α (McNeil, Frey y Embrechts 2005).

- **t-Student:** La solución cerrada incorpora tanto la densidad de la t-Student estándar f_t evaluada en el cuantil como los grados de libertad $\hat{\nu}$:

$$CVaR_\alpha = \hat{\mu} + \hat{\lambda}\,\frac{f_t(t_{\alpha,\hat{\nu}})}{1-\alpha}\cdot\frac{\hat{\nu}+t_{\alpha,\hat{\nu}}^2}{\hat{\nu}-1} \tag{2.18}$$

  El factor $(\hat{\nu}+t_{\alpha,\hat{\nu}}^2)/(\hat{\nu}-1)$ refleja el engrosamiento de la cola (McNeil, Frey y Embrechts 2005): cuanto menor es $\hat{\nu}$, mayor es este término y más severo es el CVaR resultante. Esto explica por qué la t-Student produce estimaciones de riesgo más conservadoras que la normal para el mismo nivel de confianza α.

  En este trabajo los grados de libertad se fijan en $\nu = 6$, valor habitual en la literatura de gestión de riesgos (McNeil, Frey y Embrechts 2005; Danielsson 2011) que garantiza varianza finita ($\nu > 2$) y curtosis finita ($\nu > 4$). La justificación empírica de esta elección, basada en el análisis univariante de los activos de la cartera, se desarrolla en la Sección 4.5.1.

- **Laplace:** Gracias al decaimiento exponencial de su cola, la integral tiene una solución simple. Para $\alpha > 0{,}5$:

$$CVaR_\alpha = \hat{\mu} - \hat{b}\ln(2(1-\alpha)) + \hat{b} \tag{2.19}$$

  El término adicional $+\hat{b}$ respecto al VaR refleja que el CVaR siempre supera al VaR y no sólo marca el umbral, sino que promedia todas las pérdidas que lo superan, desplazándose una distancia $\hat{b}$ adicional hacia la cola.

La distribución de Laplace no se utiliza en este trabajo como modelo multivariante de los rendimientos de todos los activos, sino como modelo univariante aplicado directamente a las pérdidas agregadas de la cartera. Esta decisión se debe a que, a diferencia de la Normal y la t-Student, la Laplace no dispone de una formulación multivariante estándar con propiedades comparables para modelizar la dependencia entre activos (McNeil, Frey y Embrechts 2005).

Por tanto, primero se obtiene la serie de pérdidas de la cartera, $\{L_t\}$, y después se ajusta sobre ella una distribución de Laplace. Así, este modelo actúa como alternativa para analizar el comportamiento de la cola de pérdidas y como referencia adicional en el backtesting frente a los modelos Normal y t-Student.

En los tres casos, cuanto más pesada es la cola de la distribución, mayor es el CVaR resultante para el mismo nivel de confianza α, lo que confirma que la elección del modelo distribucional tiene un impacto directo y significativo sobre las estimaciones de riesgo.

2.3.3. Simulación de Monte Carlo

La simulación de Monte Carlo es la técnica más avanzada de las tres y constituye el núcleo computacional de este trabajo. Su uso está justificado por una razón práctica y es que cuando se combinan activos bajo distribuciones complejas no gaussianas, calcular el riesgo de forma analítica con fórmulas cerradas resulta matemáticamente inviable.

El método consiste en que en lugar de resolver la distribución de pérdidas analíticamente, se generan un número muy elevado de escenarios aleatorios y se estima el riesgo a partir de ellos. En concreto, este trabajo se generan $N = 50{,}000$ escenarios en MATLAB.

La validez de este enfoque se apoya en la **Ley Fuerte de los Grandes Números** (Glasserman 2004).. Si $L_1, L_2, \ldots, L_N$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas que representan la pérdida de la cartera en cada escenario simulado, entonces el promedio muestral converge con probabilidad 1 al valor esperado teórico de la pérdida $\mathbb{E}[L]$ cuando $N \to \infty$:

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} L_i \xrightarrow{\text{c.s.}} \mathbb{E}[L] \tag{2.20}$$

En la práctica, esto significa que con un número suficientemente grande de simulaciones, las estimaciones del VaR y el CVaR obtenidas a partir de los escenarios generados convergen a sus valores teóricos reales.

2.4. Estimación del riesgo en el dominio multivariante

La cuantificación del riesgo bajo un enfoque univariante es un buen punto de partida, pero las carteras reales están formadas por múltiples activos que no se comportan de forma independiente.

Al pasar al dominio multivariante, la complejidad aumenta porque los retornos de los activos están vinculados entre sí y cuando uno cae, otros tienden a caer también, especialmente en momentos de crisis.

2.4.1. Las funciones de densidad (PDF) en el espacio multivariante

Para modelizar el comportamiento conjunto de varios activos, se asume que el vector de rendimientos aleatorios $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_d)^T$ sigue una **distribución Normal Multivariante**. Su función de densidad conjunta es:

$$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}|\boldsymbol{\Sigma}|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\right) \tag{2.21}$$

donde $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^d$ es el vector de rendimientos esperados de cada activo, $\boldsymbol{\Sigma} \in \mathbb{R}^{d\times d}$ es la matriz de covarianzas, que recoge tanto la volatilidad individual de cada activo como las correlaciones entre ellos, y el término $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})$ es la distancia de Mahalanobis (Mahalanobis 1936), que generaliza la distancia euclídea teniendo en cuenta la correlación entre variables.

2.4.2. Descomposición de Cholesky

Para que los escenarios simulados respeten las correlaciones reales del mercado, se utiliza la **factorización de Cholesky** (Glasserman 2004). La idea es sencilla: si se generan variables aleatorias independientes y se les aplica una transformación lineal adecuada, el resultado tiene exactamente la estructura de correlación deseada.

Dado que la matriz de covarianzas $\boldsymbol{\Sigma}$ es simétrica y definida positiva, el teorema de Cholesky garantiza que puede descomponerse de forma única como:

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T \tag{2.22}$$

donde $\mathbf{L}$ es una matriz triangular inferior con entradas diagonales positivas.

El procedimiento implementado en MATLAB es el siguiente:

1. Se genera un vector $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^d$ de variables aleatorias independientes con distribución normal estándar, $\mathbf{Z} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I}_d)$, donde $\mathbf{I}_d$ es la matriz identidad. En este punto, los componentes de $\mathbf{Z}$ no están correlacionados entre sí.

2. Se calcula la matriz triangular inferior $\mathbf{L}$ mediante la descomposición de Cholesky de $\boldsymbol{\Sigma}$.

3. Se aplica la transformación $\mathbf{X} = \mathbf{L}\mathbf{Z}$, que introduce la estructura de dependencia del mercado en el vector simulado.

Para verificar que esta transformación produce exactamente la covarianza deseada:

$$\mathbb{E}[\mathbf{X}\mathbf{X}^T] = \mathbb{E}[(\mathbf{L}\mathbf{Z})(\mathbf{L}\mathbf{Z})^T] = \mathbf{L}\,\mathbb{E}[\mathbf{Z}\mathbf{Z}^T]\,\mathbf{L}^T = \mathbf{L}\,\mathbf{I}_d\,\mathbf{L}^T = \boldsymbol{\Sigma} \tag{2.23}$$

Como $\mathbf{Z}$ tiene componentes independientes con varianza unitaria, su matriz de covarianzas es la identidad $\mathbf{I}_d$, y la transformación lineal por $\mathbf{L}$ introduce exactamente la estructura de covarianzas de $\boldsymbol{\Sigma}$.

2.4.3. Distribución t-Student multivariante

La distribución normal multivariante asume que las correlaciones entre activos son constantes en cualquier escenario. Sin embargo, en los mercados financieros reales las correlaciones tienden a aumentar en momentos de crisis: cuando todo cae a la vez, la diversificación pierde eficacia precisamente cuando más se necesita. Para capturar este comportamiento se utiliza la **t-Student multivariante** (McNeil, Frey y Embrechts 2005).

Esta distribución depende de tres elementos: el vector de localización $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^d$, la matriz de escala $\boldsymbol{\Sigma} \in \mathbb{R}^{d\times d}$ y los grados de libertad $\nu > 0$, que controlan el grosor de las colas conjuntas. Su función de densidad es:

$$f_{\mathbf{R}}(\mathbf{x}) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+d}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)(\nu\pi)^{d/2}|\boldsymbol{\Sigma}|^{1/2}}\left(1+\frac{1}{\nu}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})\right)^{-\frac{\nu+d}{2}}, \quad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^d \tag{2.24}$$

Para generar escenarios bajo esta distribución se usa una representación alternativa que resulta muy intuitiva. Se genera primero una variable aleatoria escalar $S \sim \chi^2_\nu$, distribuida como una chi-cuadrado con ν grados de libertad, que actúa como factor de escala aleatorio global. El vector de rendimientos simulados se obtiene como:

$$\mathbf{R}_{\text{sim}} = \boldsymbol{\mu} + \frac{\mathbf{LZ}}{\sqrt{S/\nu}} \tag{2.25}$$

donde $\mathbf{Z} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I}_d)$ es un vector de residuos normales independientes y $S \sim \chi^2_\nu$ es independiente de $\mathbf{Z}$. La clave está en el denominador $\sqrt{S/\nu}$: cuando S toma valores pequeños, este factor amplifica las innovaciones y genera realizaciones extremas en la cola de la distribución, simulando escenarios de estrés. De este modo, la t-Student multivariante captura de forma natural la tendencia de las correlaciones a intensificarse en momentos de crisis.

Es importante distinguir entre el rol de la t-Student multivariante y el de la distribución de Laplace en este trabajo. La t-Student multivariante captura la dependencia conjunta entre activos mediante la estructura de covarianzas $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$ y el factor de escala compartido $S \sim \chi^2_\nu$, que amplifica las pérdidas de todos los activos simultáneamente en escenarios de estrés. La Laplace, al no disponer de una extensión multivariante estándar, opera sobre la pérdida agregada de la cartera una vez proyectados los rendimientos sobre el vector de pesos $\mathbf{w}$. Ambos enfoques se comparan empíricamente en el backtesting del Capítulo 6.

2.5. Estimación dinámica de la covarianza: Modelo EWMA

Las metodologías de simulación presentadas dependen de la matriz de covarianzas $\boldsymbol{\Sigma}$. El problema de estimarla con una media simple es que asigna el mismo peso a observaciones recientes y a datos de hace meses, lo que genera un efecto conocido como **efecto fantasma** o *ghost effect* (J.P. Morgan y Reuters 1994): un episodio de alta volatilidad ocurrido hace tiempo influye igual que lo que pasó ayer, haciendo que el modelo tarde en reaccionar a los cambios recientes del mercado.

Para corregir esto se incorpora el estimador EWMA (*Exponentially Weighted Moving Average*), implementado originalmente en la metodología *RiskMetrics* (J.P. Morgan y Reuters 1994). La idea es simple: dar más peso a lo que ha ocurrido recientemente y menos a lo que ocurrió hace tiempo. La matriz de covarianzas se actualiza iterativamente en cada periodo:

$$\boldsymbol{\Sigma}_t = \lambda\, \boldsymbol{\Sigma}_{t-1} + (1-\lambda)\, \mathbf{R}_{t-1}\mathbf{R}_{t-1}^T \tag{2.26}$$

donde $\lambda \in (0,1)$ es el factor de decaimiento. Siguiendo los estándares internacionales de gestión de riesgos se fija $\lambda = 0{,}94$ (J.P. Morgan y Reuters 1994), lo que significa que el 94 % del peso recae sobre la covarianza del día anterior y solo el 6 % sobre el choque más reciente.

De este modo, los retornos simulados en el instante t se generan condicionando sobre la covarianza estimada $\boldsymbol{\Sigma}_t$. Para la distribución normal multivariante:

$$\mathbf{R}_t \mid \boldsymbol{\Sigma}_t \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu},\, \boldsymbol{\Sigma}_t) \tag{2.27}$$

Para la distribución t-Student multivariante, la covarianza dinámica $\boldsymbol{\Sigma}_t$ sustituye a $\boldsymbol{\Sigma}$ en la representación de mezcla de escala vista anteriormente:

$$\mathbf{R}_t = \boldsymbol{\mu} + \frac{\mathbf{L}_t \mathbf{Z}}{\sqrt{S/\nu}} \tag{2.28}$$

donde $\mathbf{L}_t$ es la factorización de Cholesky de $\boldsymbol{\Sigma}_t$ estimada en el instante t, $\mathbf{Z} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I}_d)$ y $S \sim \chi^2_\nu$. De este modo, la estructura de correlación varía en el tiempo y responde a los cambios recientes del mercado.

En cuanto a los escenarios Monte Carlo, se generan muestreando $\boldsymbol{\varepsilon}_t \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I}_d)$ y aplicando la factorización de Cholesky de $\boldsymbol{\Sigma}_t$ estimada en la última ventana disponible, de modo que cada escenario simulado refleja las condiciones de volatilidad y correlación más recientes del mercado.

2.6. Teoría de carteras de Markowitz

En la práctica, el riesgo no se gestiona sobre activos individuales sino sobre carteras formadas por varios activos. Esta sección presenta la Teoría Moderna de Carteras de Harry Markowitz (Markowitz 1952) y la conecta con las métricas de riesgo extremo que se usan en este trabajo.

2.6.1. Definición de una cartera de activos

Para un universo de d activos, se trabaja con dos vectores: el vector de rendimientos $\mathbf{R}_t$ y el vector de pesos $\mathbf{w}$, ambos de dimensión $d \times 1$, que indica qué proporción del capital se invierte en cada activo. Los pesos deben sumar uno:

$$\sum_{i=1}^{d} w_i = \mathbf{1}^T \mathbf{w} = 1 \tag{2.29}$$

Se permite que los pesos sean negativos, lo que formaliza posiciones cortas o *short-selling*. No obstante, en este trabajo los pesos se obtienen de tres formas distintas y predefinidas: proporcional a la capitalización bursátil, en partes iguales, y mediante optimización de Markowitz. No se trata por tanto de una elección libre, sino de tres esquemas concretos cuyas propiedades se comparan en el capítulo de resultados.

2.6.2. El retorno de una cartera

El rendimiento total de la cartera en el periodo t es el producto escalar entre los pesos y los rendimientos individuales:

$$r_{p,t} = \mathbf{w}^T \mathbf{R}_t = \sum_{i=1}^{d} w_i r_{i,t} \tag{2.30}$$

2.6.3. Valor esperado y varianza de una cartera

La cartera queda caracterizada por sus dos primeros momentos:

1. **Rendimiento esperado (μ_p):**

$$\mu_p = \mathbb{E}[r_{p,t}] = \mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu} \tag{2.31}$$

2. **Varianza de la cartera (σ_p^2):**

$$\sigma_p^2 = \text{Var}(r_{p,t}) = \mathbf{w}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w} = \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} w_i w_j \sigma_{ij} \tag{2.32}$$

Esta formulación demuestra matemáticamente el efecto de la diversificación: siempre que

las correlaciones entre activos sean menores que uno ($\rho_{ij} < 1$), el riesgo total de la cartera es menor que la media ponderada de los riesgos individuales.

2.6.4. El modelo de optimización de Markowitz

Markowitz plantea la selección de carteras como un problema de optimización: encontrar los pesos que minimizan la varianza de la cartera para un nivel de rendimiento mínimo exigido μ_0 (Markowitz 1952):

$$\min_{\mathbf{w}} \ \frac{1}{2}\mathbf{w}^T\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w} \tag{2.33}$$

$$\text{sujeto a: } \mathbf{1}^T\mathbf{w} = 1 \quad \text{y} \quad \boldsymbol{\mu}^T\mathbf{w} = \mu_0$$

Resolviendo este problema para distintos valores de μ_0 se obtiene una familia de carteras óptimas que, representadas en el espacio media-volatilidad (σ_p, μ_p), trazan la **frontera eficiente**: el conjunto de carteras que ofrecen el máximo rendimiento para cada nivel de riesgo dado. Este concepto de frontera eficiente se desarrollará más en detalle en el siguiente apartado.

Si el objetivo es simplemente minimizar el riesgo sin exigir ningún rendimiento mínimo, el problema se simplifica eliminando la restricción sobre μ_0:

$$\min_{\mathbf{w}} \ \frac{1}{2}\mathbf{w}^T\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w} \tag{2.34}$$

$$\text{sujeto a: } \mathbf{1}^T\mathbf{w} = 1$$

La solución de este problema es la **Cartera de Mínima Varianza Global** (GMVP) (Markowitz 1952), que corresponde al punto de menor volatilidad posible entre todas las combinaciones factibles de activos. Su solución analítica es:

$$\mathbf{w}^\star = \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}} \tag{2.35}$$

La GMVP depende únicamente de la matriz de covarianzas $\boldsymbol{\Sigma}$, no del vector de medias $\boldsymbol{\mu}$. Esto la hace especialmente robusta en la práctica, ya que estimar el rendimiento esperado de un activo es notoriamente difícil (Merton 1980). Por este motivo, la GMVP es uno de los tres esquemas de ponderación analizados en este trabajo, junto con la cartera ponderada por capitalización bursátil y la de pesos iguales.

2.6.5. La frontera eficiente

Resolver el problema de optimización para distintos valores de μ_0 genera una curva en el espacio media-volatilidad (σ_p, μ_p) denominada **frontera eficiente**. Cada punto de esta curva es una cartera óptima: ninguna otra combinación de activos ofrece más rendimiento para el mismo riesgo, ni menos riesgo para el mismo rendimiento.

El vértice de la curva es la GMVP, el punto de menor volatilidad alcanzable. Las carteras por encima de este punto son eficientes; las de abajo están dominadas y son subóptimas.

En la práctica, carteras como la ponderada por capitalización o la de pesos iguales no tienen por qué estar sobre la frontera eficiente. En este trabajo se comparan precisamente estos tres esquemas y su posición relativa respecto a la frontera se analiza en el capítulo de resultados.

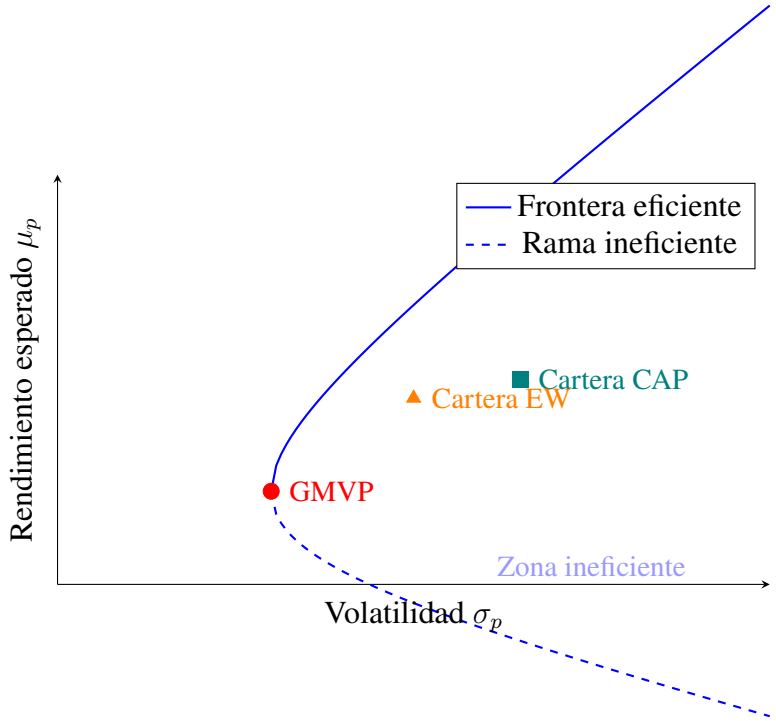


Figura 2.4: Esquema ilustrativo de la frontera eficiente de Markowitz. La rama superior recoge las carteras eficientes y la inferior las dominadas. El punto GMVP es la cartera de mínima varianza global. Las carteras CAP y EW se sitúan en el interior del conjunto factible de forma orientativa; su posición exacta respecto a la frontera, calculada a partir de los datos reales de la muestra, se analiza en la Figura 6.9 del Capítulo 6.

2.6.6. El VaR incremental

Cuando el VaR o CVaR de una cartera supera los límites aceptables, es útil saber qué activos son los principales responsables. Para eso se usa el **VaR Incremental** ($IVaR$) (Garman 1997), que mide cuánto contribuye cada activo al riesgo total.

Por ejemplo, si tenemos una cartera con diez activos y queremos saber cuánto riesgo aporta NVIDIA, calculamos el VaR de la cartera completa y lo comparamos con el VaR de la misma cartera sin NVIDIA, redistribuyendo su peso proporcionalmente entre los nueve activos restantes. La diferencia entre ambos es el $IVaR$ de NVIDIA.

Formalmente el $IVaR$ del activo i se define como:

$$IVaR_i = VaR(\mathbf{w}) - VaR(\mathbf{w}_{-i}) \tag{2.36}$$

donde $\mathbf{w}_{-i}$ es el vector de pesos con el peso del activo i forzado a cero y el resto reescalado para mantener la restricción presupuestaria:

$$w_j^{\text{nuevo}} = \frac{w_j}{1 - w_i} \quad \forall j \neq i \tag{2.37}$$

Un $IVaR_i$ positivo alto indica que el activo genera riesgo neto: su presencia aumenta el VaR de la cartera. Un $IVaR_i$ negativo indica que actúa como cobertura: su eliminación aumentaría el riesgo, porque su baja o negativa correlación con el resto de activos está reduciendo el riesgo agregado. Esta métrica permite ordenar los activos según su contribución al riesgo y apoya decisiones como reducir posiciones en activos con $IVaR_i$ elevado o aumentarlas en activos con $IVaR_i$ negativo.

2.7. Backtesting

Una vez construidos los modelos de simulación, hay que comprobar si funcionan bien en la práctica. El proceso de validar empíricamente un modelo de riesgo comparando sus predicciones con lo que realmente ocurrió en el mercado se denomina *backtesting*.

Para operativizar este análisis se define una variable indicadora denominada variable de excepción (I_t), que toma el valor 1 cuando la pérdida real supera el VaR estimado para el tiempo t por el modelo, y 0 en caso contrario:

$$I_t = \begin{cases} 1 & \text{si } L_t > VaR_{\alpha,t} \\ 0 & \text{si } L_t \leq VaR_{\alpha,t} \end{cases} \tag{2.38}$$

Si el modelo está bien calibrado, a un nivel de confianza $\alpha = 0{,}99$ la probabilidad de observar una excepción en cualquier periodo debería ser $p = 1 - \alpha = 0{,}01$, es decir, una vez cada cien días de media.

2.7.1. Backtesting del VaR

Los tests de backtesting del VaR validan si la frecuencia de violaciones del umbral es estadísticamente compatible con el nivel de confianza declarado. Se emplean dos tests complementarios: el de Kupiec, que contrasta la frecuencia global de excepciones, y el de Christoffersen, que añade la exigencia de que dichas excepciones sean independientes en el tiempo.

Test de cobertura de Kupiec

El test de Kupiec (Kupiec 1995) comprueba si la frecuencia de excepciones observada es compatible con la que predice el modelo. Las hipótesis son:

- H_0: La proporción empírica de excepciones es compatible con el nivel de confianza declarado, es decir, $\hat{p} = p = 1 - \alpha$.
- H_1: La proporción empírica difiere significativamente del nivel teórico, lo que indica que el modelo está mal calibrado ($\hat{p} \neq 1 - \alpha$).

Asumiendo que las excepciones siguen una distribución Binomial bajo H_0, el estadístico de razón de verosimilitud compara la proporción empírica observada $\hat{p} = x/N_{\text{val}}$ con la probabilidad teórica $p = 1 - \alpha$, donde N_{val} es el número de días del periodo de validación:

$$LR_{\text{pof}} = -2 \ln \left(\frac{(1-p)^{N_{\text{val}}-x} \, p^x}{(1-\hat{p})^{N_{\text{val}}-x} \, \hat{p}^x} \right) \tag{2.39}$$

Bajo H_0, este estadístico converge asintóticamente a una distribución χ^2_1 (Kupiec 1995). Se rechaza H_0 cuando $LR_{\text{pof}} > \chi^2_{1,\,1-\alpha_{\text{test}}}$, o equivalentemente cuando el p-valor es inferior al nivel de significación elegido, habitualmente el 5 %.

Test de cobertura condicional de Christoffersen

Superar el test de Kupiec es necesario pero no suficiente. Un modelo puede producir el número correcto de excepciones pero concentrarlas en periodos concretos de tensión, lo que revelaría que los fallos no son aleatorios sino que se agrupan en el tiempo. Para detectar esto, Christoffersen (Christoffersen 1998) desarrolló un test que evalúa simultáneamente dos cosas: que la frecuencia de excepciones sea correcta y que aparezcan de forma independiente en el tiempo.

Para ello se define una variable binaria I_t que vale 1 si el modelo falla en el día t (es decir, si la pérdida real supera el VaR estimado) y 0 en caso contrario. La secuencia $\{I_t\}$ se modela como una cadena de Markov de primer orden: la probabilidad de tener una excepción hoy depende únicamente de si hubo excepción ayer, no de lo que ocurrió en días anteriores. A partir de la secuencia observada de ceros y unos se calculan cuatro frecuencias: n_{00} (días sin excepción seguidos de otro día sin excepción), n_{01} (días sin excepción seguidos de un día con excepción), n_{10} (días con excepción seguidos de un día sin excepción) y n_{11} (días con excepción seguidos de otro día con excepción). Con estas frecuencias se estiman dos probabilidades de transición: $\pi_{01} = n_{01}/(n_{00} + n_{01})$, la probabilidad de que hoy haya excepción dado que ayer no la hubo, y $\pi_{11} = n_{11}/(n_{10} + n_{11})$, la probabilidad de que hoy haya excepción dado que ayer también la hubo.

Test de independencia:

- H_0: Las excepciones son independientes entre sí ($\pi_{01} = \pi_{11} = \pi$), donde $\pi = (n_{01} + n_{11})/N_{\text{val}}$ es la proporción empírica global de excepciones, próxima a $1-\alpha$ bajo calibración correcta.
- H_1: Las excepciones presentan dependencia temporal ($\pi_{01} \neq \pi_{11}$).

El estadístico de razón de verosimilitud es:

$$LR_{\text{ind}} = -2\ln\left(\frac{(1-\pi)^{n_{00}+n_{10}}\,\pi^{n_{01}+n_{11}}}{(1-\pi_{01})^{n_{00}}\,\pi_{01}^{n_{01}}\,(1-\pi_{11})^{n_{10}}\,\pi_{11}^{n_{11}}}\right) \tag{2.40}$$

Test de cobertura condicional conjunta:

- H_0: El modelo tiene cobertura correcta *y* las excepciones son independientes temporalmente.
- H_1: El modelo falla en al menos una de las dos condiciones.

El estadístico conjunto se obtiene sumando ambos términos:

$$LR_{\text{cc}} = LR_{\text{pof}} + LR_{\text{ind}} \tag{2.41}$$

Bajo H_0, LR_{cc} se distribuye asintóticamente como una χ^2 con dos grados de libertad (Christoffersen 1998). La ventaja de este enfoque es que permite distinguir entre dos tipos de fallo distintos: un modelo puede fallar por exceso de excepciones (rechazado por Kupiec), por agrupación temporal de las mismas (rechazado por el test de independencia), o por ambas razones a la vez.

2.7.2. Backtesting del Expected Shortfall

El backtesting del VaR, descrito en las secciones anteriores, valida únicamente si la frecuencia de violaciones del umbral es estadísticamente compatible con el nivel de confianza declarado. Sin embargo, no proporciona ninguna información sobre la magnitud de las pérdidas en los días en que dicho umbral es superado. Para cubrir esta limitación, es necesario validar también el CVaR, que cuantifica precisamente esa severidad condicional.

El backtesting del CVaR es considerablemente más complejo que el del VaR porque se trata de contrastar una *esperanza condicional* y no un simple cuantil (Danielsson 2011). Mientras que las violaciones del VaR son eventos binarios que se modelan con una distribución de Bernoulli, el CVaR requiere evaluar la distribución de las pérdidas más allá del umbral, lo que impone requerimientos de datos mucho mayores para obtener una inferencia estadística fiable.

El shortfall normalizado

La metodología propuesta en (Danielsson 2011) se basa en el concepto de **shortfall normalizado** (NS). Para cada día t en que el VaR es violado ($I_t = 1$), se define el ratio de shortfall individual:

$$\text{NS}_t = \frac{L_t}{\widehat{\text{ES}}_t} \tag{2.42}$$

donde $L_t = -r_{p,t}$ es la pérdida realizada de la cartera en el día t (positiva cuando hay pérdida, consistente con la convención adoptada en el resto del trabajo) y $\widehat{\mathrm{ES}}_t$ es el CVaR estimado por el modelo en ese mismo día, expresado también como pérdida positiva. Bajo calibración perfecta, $\mathbb{E}[\mathrm{NS}_t] = 1$. Por la definición del Expected Shortfall:

$$\mathbb{E}\left[\frac{L_t}{\widehat{\mathrm{ES}}_t}\,\middle|\, L_t > \mathrm{VaR}_t\right] = 1 \tag{2.43}$$

Por tanto, la hipótesis nula del test del CVaR es:

$$H_0 : \overline{\mathrm{NS}} = \frac{1}{v_1}\sum_{t:\, I_t=1} \mathrm{NS}_t = 1 \tag{2.44}$$

donde v_1 es el número total de días con violación del VaR en la ventana de *testing*. Un valor $\overline{\mathrm{NS}} > 1$ indica que las pérdidas reales en los días de excepción superan en promedio al CVaR estimado: el modelo *subestima* el riesgo de cola. Un valor $\overline{\mathrm{NS}} < 1$, por el contrario, señala sobreestimación.

Limitaciones del test

Como señala (Danielsson 2011), construir un test formal de hipótesis sobre $\overline{\mathrm{NS}}$ es más complejo que los tests de cobertura para el VaR, por tres razones:

1. El test del CVaR es necesariamente un **test conjunto** de la precisión del VaR *y* de la expectativa condicional más allá del VaR. Los errores en la estimación del umbral contaminan la validación de la severidad.

2. El tamaño efectivo de la muestra es muy reducido: con un nivel de confianza del 99 %, solo se esperan aproximadamente $0{,}01 \times W_T$ violaciones, lo que limita severamente la potencia estadística de cualquier test basado en $\overline{\mathrm{NS}}$.

3. La distribución del estadístico $\overline{\mathrm{NS}}$ bajo H_0 no tiene una forma cerrada simple: depende de la distribución de las pérdidas en la cola, que es precisamente lo que se está evaluando.

Por estas razones, en la práctica se utiliza $\overline{\mathrm{NS}}$ como indicador diagnóstico complementario al backtesting del VaR, y no como un test de rechazo formal. Un modelo que supera los tests de Kupiec y Christoffersen *y* presenta un $\overline{\mathrm{NS}}$ próximo a la unidad ofrece la mayor garantía de calibración del riesgo de cola disponible con la metodología estándar (Danielsson 2011).

El test formal de McNeil-Frey

Para complementar el diagnóstico basado en $\overline{\mathrm{NS}}$, McNeil y Frey (McNeil y Frey 2000) proponen un test formal de hipótesis sobre la severidad condicional. El estadístico se construye a partir de las desviaciones individuales $\mathrm{NS}_t - 1$ en los días de excepción:

$$t_{\mathrm{MF}} = \frac{\bar{d}}{s_d/\sqrt{v_1}}, \qquad \bar{d} = \overline{\mathrm{NS}} - 1, \quad s_d = \mathrm{std}(\mathrm{NS}_t - 1) \tag{2.45}$$

Bajo H_0, t_{MF} sigue asintóticamente una distribución t-Student con v_1 grados de libertad cuando v_1 es suficientemente grande. Se rechaza H_0 cuando $|t_{\mathrm{MF}}| > t_{v_1-1,\,1-\alpha_{\mathrm{test}}/2}$. La limitación principal de este test es su baja potencia cuando v_1 es pequeño, situación habitual al 99 % de confianza.

Intervalo de confianza bootstrap

Dado el reducido tamaño muestral efectivo, se complementa el análisis con un intervalo de confianza al 95 % sobre $\overline{\mathrm{NS}}$ construido mediante bootstrap con $B = 10\,000$ réplicas con reemplazamiento sobre los v_1 valores $\{\mathrm{NS}_t\}_{t:\,I_t=1}$. En cada réplica b se recalcula $\overline{\mathrm{NS}}^{(b)}$ y el intervalo se obtiene como los percentiles 2,5 y 97,5 de la distribución empírica bootstrap:

$$\mathrm{IC}_{95\,\%} = \left[\overline{\mathrm{NS}}^{(0{,}025)},\ \overline{\mathrm{NS}}^{(0{,}975)}\right] \tag{2.46}$$

Si la unidad queda dentro del intervalo, no se rechaza H_0 al 5 %. Este intervalo es especialmente relevante cuando $v_1 < 10$, ya que el test de McNeil-Frey tiene escasa potencia en esas condiciones.

Capítulo 3

Objetivos del trabajo

3.1. Objetivo general

El objetivo general de este Trabajo Fin de Grado es desarrollar, implementar y validar un modelo estadístico de medición del riesgo financiero de una cartera de activos mediante simulaciones Monte Carlo, analizando la sensibilidad de las métricas de riesgo a distintas hipótesis distribucionales y a diferentes especificaciones de la dependencia entre activos. La implementación se realiza de forma modular en MATLAB, con el fin de que el modelo sea replicable y extensible a otros contextos de análisis de riesgo.

3.2. Objetivos específicos

De forma más concreta, los objetivos específicos del trabajo son los siguientes:

1. Construir una base de datos de precios históricos de varios activos financieros y transformarla en una muestra de rendimientos logarítmicos.

2. Realizar un análisis estadístico univariante de los rendimientos de los activos, evaluando la presencia de colas pesadas, exceso de curtosis y desviaciones respecto a la normalidad, con el fin de justificar la elección de los modelos distribucionales empleados en la simulación.

3. Estimar los parámetros estadísticos relevantes para el modelado multivariante del riesgo, en particular el vector de medias y la matriz de covarianzas, incluyendo una estimación dinámica mediante el modelo EWMA y la estructura de dependencia entre activos mediante la descomposición de Cholesky.

4. Diseñar una cartera multivariante y estudiar tres esquemas de ponderación: pesos por capitalización bursátil, pesos iguales (*equally weighted*) y pesos obtenidos mediante optimización de mínima varianza de Markowitz.

5. Implementar simulaciones Monte Carlo bajo diferentes hipótesis distribucionales (normal multivariante y t-Student multivariante) y comparar sus estimaciones con los métodos de referencia de simulación histórica y aproximación paramétrica, incluyendo distribuciones normal, t-Student y Laplace en el caso univariante.

6. Estimar medidas de riesgo de mercado, principalmente VaR y CVaR al 99 % de confianza, a partir de la distribución simulada de pérdidas, y analizar la atribución marginal del riesgo mediante el VaR Incremental.

7. Validar el comportamiento predictivo de las medidas de riesgo mediante procedimientos de backtesting fuera de muestra: el test de cobertura incondicional de Kupiec y el test de cobertura condicional de Christoffersen para el VaR, y el shortfall normalizado $\overline{\mathrm{NS}}$, el test formal de McNeil-Frey y el intervalo de confianza bootstrap al 95 % para el CVaR.

8. Desarrollar una implementación modular en MATLAB que permita estimar, representar y validar las principales métricas de riesgo consideradas en el trabajo de forma replicable.

Capítulo 4

Metodología

Este capítulo describe el procedimiento mediante el cual se transita desde los datos históricos hasta la obtención de las métricas de riesgo VaR y CVaR (Glasserman 2004; Danielsson 2011). El foco está en el procedimiento experimental: cómo se estiman los parámetros, cómo se generan los escenarios y cómo se validan los modelos. La interpretación empírica de los resultados se reserva para el capítulo siguiente.

El estudio de caso comprende tres análisis principales, cada uno formalizado mediante un algoritmo que referencia las técnicas desarrolladas en el Capítulo 2:

- En la Sección 4.4, se estudia el comportamiento distribucional individual de cada activo para justificar la elección del modelo estocástico (Algoritmo 1).
- En la Sección 4.5, se estiman y comparan las métricas de riesgo VaR y CVaR bajo seis modelos de simulación para las tres carteras (Algoritmos 2–6).
- En la Sección 4.6, se valida empíricamente la calidad predictiva de cada modelo mediante *backtesting* fuera de muestra (Algoritmo 7).

La estructura secuencial de los módulos que integran el modelo se detalla en la Figura 4.1.

4.1. Datos y preprocesamiento

El análisis empírico parte de precios históricos diarios de cierre ajustado de los diez activos que componen la cartera: Apple (AAPL), Microsoft (MSFT), NVIDIA (NVDA), Johnson & Johnson (JNJ), JPMorgan Chase (JPM), Visa (V), Procter & Gamble (PG), Berkshire Hathaway (BRK/B), Banco Santander (SAN) e Iberdrola (IBE). Los datos han sido extraídos de Bloomberg y abarcan el periodo comprendido entre el 1 de enero de 2023 y el 31 de diciembre de 2025, lo que supone aproximadamente 750 observaciones diarias por activo una vez depurada la muestra.

Se usan precios de cierre ajustado para eliminar el efecto de dividendos, splits y otros eventos corporativos que distorsionarían la rentabilidad real de los activos. El objetivo no es estudiar

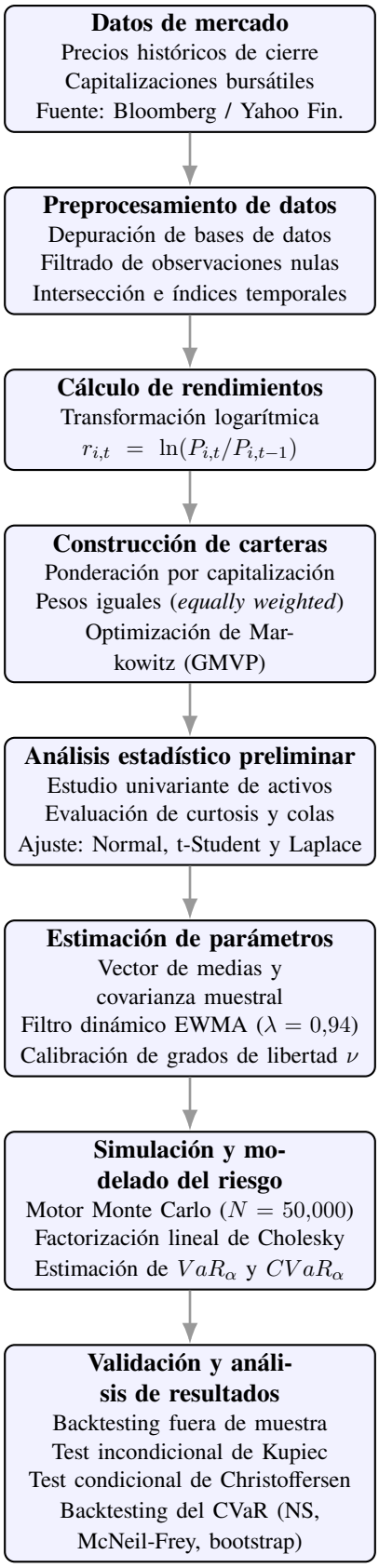


Figura 4.1: Diagrama de flujo del procedimiento de desarrollo e implementación computacional del modelo.

precios nominales, sino la evolución económica efectiva de una posición invertida en cada activo (Danielsson 2011).

Cabe señalar que los activos estadounidenses cotizan en dólares (USD) y los activos españoles en euros (EUR). Para el cálculo de los pesos por capitalización bursátil, todas las capitalizaciones se han convertido a dólares estadounidenses (USD) aplicando el tipo de cambio EUR/USD vigente en la fecha de referencia t_0, evitando así distorsiones en la ponderación de los activos.

Los datos se depuran eliminando observaciones incompletas y alineando temporalmente las series mediante la función `intersect` de MATLAB, que retiene únicamente las fechas comunes a todos los activos. Como la cartera combina activos estadounidenses y españoles, existen días de mercado no comunes por festividades locales que quedan eliminados en este proceso.

A partir de los precios se calculan los rendimientos logarítmicos diarios tal como se define en la Sección 2.1:

$$r_{i,t} = \ln\left(\frac{P_{i,t}}{P_{i,t-1}}\right) \tag{4.1}$$

que permiten trabajar con variaciones relativas, reducen la no estacionariedad de las series de precios y facilitan la agregación temporal (Campbell, Lo y MacKinlay 1997; Danielsson 2011).

4.2. Justificación de la selección de activos

La cartera incluye activos de distintos sectores, perfiles de riesgo y geografías, con el objetivo de construir una cartera suficientemente heterogénea para estudiar la diversificación, la correlación entre activos y la agregación del riesgo.

Tabla 4.1: Justificación de los activos incluidos en la cartera

Activo	**Sector / perfil**	**Justificación**
Apple (AAPL)	Tecnología / gran cap.	Compañía tecnológica consolidada, líquida y con peso relevante en los mercados globales.
Microsoft (MSFT)	Tecnología / software	Aporta exposición a tecnología madura, servicios en la nube y modelos de negocio recurrentes.
NVIDIA (NVDA)	Semiconductores	Activo de alta volatilidad y fuerte sensibilidad al ciclo tecnológico.
Johnson & Johnson (JNJ)	Salud / defensivo	Perfil defensivo que compensa parcialmente la volatilidad de sectores más cíclicos.
JPMorgan Chase (JPM)	Banca	Exposición al sector financiero y sensibilidad a tipos de interés y ciclo económico.
Visa (V)	Pagos	Combina características financieras y tecnológicas con un modelo de negocio global y escalable.
Procter & Gamble (PG)	Consumo defensivo	Consumo básico, poco sensible a ciclos económicos adversos.
Berkshire Hathaway (BRK/B)	Holding diversificado	Diversificación interna al estar compuesto por participaciones en múltiples sectores.
Banco Santander (SAN)	Banca / España	Exposición al mercado financiero europeo y español.
Iberdrola (IBE)	Energía / utilities	Perfil defensivo y regulado, vinculado al sector eléctrico y renovables.

Los valores tecnológicos como Apple, Microsoft y NVIDIA aportan crecimiento potencial, pero también mayor sensibilidad a cambios en tipos de interés y expectativas de mercado. Johnson & Johnson, Procter & Gamble e Iberdrola tienen un perfil más defensivo al estar vinculadas a sectores de demanda estable. JPMorgan y Santander incorporan el efecto del ciclo económico mientras que Berkshire añade diversificación indirecta a múltiples sectores y Visa representa un caso intermedio entre tecnología y servicios financieros.

La combinación es idónea porque los activos muestran patrones de rendimiento diferenciados, lo que hace posible explotar la diversificación, estimar estructuras de dependencia realistas y observar cómo la correlación entre activos modifica el VaR y el CVaR de la cartera (Danielsson 2011).

4.3. Construcción de la cartera

Se consideran tres esquemas de ponderación para estudiar la sensibilidad de las métricas de riesgo a la composición de la cartera.

4.3.1. Cartera ponderada por capitalización bursátil

El primer esquema asigna pesos proporcionales a la capitalización bursátil de cada activo, sin requerir ninguna decisión activa sobre rendimiento o riesgo esperado. Solo se permiten posiciones largas ($w_i \geq 0$):

$$w_i^{CAP} = \frac{MC_i}{\sum_{j=1}^{d} MC_j} \tag{4.2}$$

donde MC_i es la capitalización bursátil del activo i expresada en dólares estadounidenses (USD) y d es el número total de activos.

4.3.2. Cartera de pesos iguales

El segundo esquema asigna la misma proporción del capital a cada activo, independientemente de su tamaño o volatilidad:

$$w_i^{EW} = \frac{1}{d} \quad \forall\, i = 1, \ldots, d \tag{4.3}$$

Con $d = 10$, cada activo recibe un peso del 10 %. Este esquema no requiere ninguna estimación estadística, lo que lo hace especialmente robusto frente al error de estimación de la matriz de covarianzas (Danielsson 2011).

4.3.3. Cartera de mínima varianza de Markowitz

El tercer esquema minimiza la varianza de la cartera mediante el problema de optimización de Markowitz descrito en la Sección 2.6:

$$\min_{\mathbf{w}} \ \mathbf{w}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w} \qquad \text{sujeto a: } \mathbf{1}^T \mathbf{w} = 1 \tag{4.4}$$

cuya solución analítica es la Cartera de Mínima Varianza Global (GMVP):

$$\mathbf{w}^\star = \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}} \tag{4.5}$$

A diferencia de las carteras CAP y EW, se permiten pesos negativos ($w_i \in \mathbb{R}$), lo que formaliza posiciones cortas o *short-selling*.

4.4. Análisis univariante de distribuciones

El primer análisis evalúa el comportamiento distribucional individual de cada activo. Su objetivo es comprobar empíricamente si los rendimientos presentan colas pesadas y exceso de curtosis respecto a la distribución normal, lo que justifica el uso de modelos alternativos como la t-Student en la simulación multivariante; por lo que este análisis sirve como criterio de selección del modelo distribucional más adecuado para estimar el riesgo extremo (McNeil, Frey y Embrechts 2005; Danielsson 2011).

Para ello se ajustan las tres distribuciones descritas en la Sección 2.3: la distribución Normal, la t-Student y la distribución de Laplace. El Algoritmo 1 detalla el procedimiento completo.

4.5. Estimación del riesgo multivariante y comparación de modelos

El segundo análisis es el núcleo computacional del trabajo. Para cada una de las tres carteras (CAP, EW y Markowitz), se estiman el VaR y el CVaR al nivel de confianza $\alpha = 99\,\%$ bajo seis modelos: simulación histórica, método paramétrico Normal, EWMA Normal, Monte Carlo con Normal multivariante, Monte Carlo con t-Student multivariante y Monte Carlo con distribución de Laplace univariante.

Cabe destacar que las carteras CAP y EW mantienen sus pesos fijos a lo largo de todo el periodo de validación, mientras que la cartera Markowitz recalcula sus pesos $\mathbf{w}^\star$ en cada paso de la ventana móvil resolviendo la GMVP con la matriz de covarianzas estimada sobre los $W = 250$ días anteriores. Esto refleja de forma más realista el comportamiento de una estrategia de mínima varianza gestionada activamente, en la que el gestor rebalancea su cartera a medida que dispone de nueva información sobre las correlaciones del mercado.

Los modelos de simulación multivariante se apoyan en la descomposición de Cholesky descrita en la Sección 2.4.2 para introducir la estructura de covarianzas real del mercado, y en la representación mixta de la t-Student multivariante de la Sección 2.4.3 para capturar la dependencia de cola. El modelo de Laplace opera sobre las pérdidas agregadas de la cartera de forma univariante, aprovechando que su función cuantil inversa tiene solución cerrada.

El procedimiento se descompone en cuatro subalgoritmos independientes que el Algoritmo 6 integra en el flujo completo. El Algoritmo 2 determina los pesos de cada cartera. El Algoritmo 3 estima los parámetros estadísticos sobre la ventana de entrenamiento. El Algoritmo 4 genera los escenarios de pérdida bajo cada modelo distribucional. El Algoritmo 5 obtiene el VaR y CVaR a partir de dichos escenarios.

Algorithm 1 Análisis univariante de distribuciones

Require: Serie de rendimientos logarítmicos $\{r_{i,t}\}_{t=1}^{T}$ para cada activo $i = 1, \ldots, d$.

Ensure: Parámetros ajustados de cada distribución, estadísticos descriptivos y diagnóstico gráfico para cada activo.

1: **for** cada activo $i \in \{1, \ldots, d\}$ **do**

2: **Paso 1: Estadísticos descriptivos.** Calcular media, desviación típica, asimetría y curtosis de $\{r_{i,t}\}_{t=1}^{T}$. Un exceso de curtosis elevado confirma la presencia de colas pesadas y motiva el uso de la t-Student.

3: **Paso 2: Ajuste de distribuciones univariantes.**

- **Normal:** estimar $\hat{\mu}_i$ y $\hat{\sigma}_i$ mediante las fórmulas de la Sección 2.3.
- **t-Student:** estimar $(\hat{\mu}_i, \hat{\lambda}_i, \hat{\nu}_i)$ por máxima verosimilitud, ya que no existen fórmulas cerradas para los tres parámetros en el caso general (McNeil, Frey y Embrechts 2005).
- **Laplace:** estimar $\hat{\mu}_i$ como la mediana y $\hat{b}_i$ como la desviación absoluta media, siguiendo la Sección 2.3.

4: **Paso 3: Cálculo del VaR y CVaR univariante.** Para cada distribución ajustada, calcular el $\text{VaR}_{99\,\%}$ y el $\text{CVaR}_{99\,\%}$ mediante las fórmulas analíticas cerradas presentadas en la Sección 2.3.

5: **Paso 4: Diagnóstico gráfico.** Generar histograma de rendimientos superpuesto con las tres curvas de densidad ajustadas y gráfico cuantil-cuantil (QQ-plot) para evaluar visualmente las desviaciones en los extremos de cada distribución.

6: **end for**

Algorithm 2 Determinación de los pesos de la cartera

Require: Tipo de cartera $c \in \{\text{CAP, EW, Markowitz}\}$; capitalizaciones bursátiles $\{MC_i\}_{i=1}^{d}$ en USD (solo CAP); matriz de covarianzas muestral $\hat{\mathbf{\Sigma}}$ (solo Markowitz); número de activos $d = 10$.

Ensure: Vector de pesos $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^d$ con $\mathbf{1}^T\mathbf{w} = 1$.

1: **if** $c = \text{CAP}$ **then**

2: Asignar pesos proporcionales a la capitalización bursátil expresada en USD:

$$w_i^{CAP} = \frac{MC_i}{\sum_{j=1}^{d} MC_j}, \quad w_i \geq 0 \quad \forall\, i$$

3: **else if** $c = \text{EW}$ **then**

4: Asignar pesos iguales a todos los activos:

$$w_i^{EW} = \frac{1}{d} = 0{,}10, \quad \forall\, i = 1, \ldots, d$$

5: **else if** $c = \text{Markowitz}$ **then**

6: Resolver la GMVP mediante la solución analítica (Sección 2.6):

$$\mathbf{w}^{\star} = \frac{\hat{\mathbf{\Sigma}}^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}^T\hat{\mathbf{\Sigma}}^{-1}\mathbf{1}}, \quad w_i \in \mathbb{R} \quad \forall\, i$$

Se permiten pesos negativos, que formalizan posiciones cortas (*short-selling*).

7: **end if**

8: **Verificación:** comprobar que $\sum_{i=1}^{d} w_i = 1$ y que $\hat{\mathbf{\Sigma}}$ es definida positiva antes de invertirla; aplicar regularización con *jitter* numérico $\hat{\mathbf{\Sigma}} \leftarrow \hat{\mathbf{\Sigma}} + \varepsilon\, \mathbf{I}_d$ si es necesario.

Algorithm 3 Estimación de parámetros en la ventana de entrenamiento

Require: Matriz de rendimientos de la ventana $\mathbf{R}_{\text{train}} \in \mathbb{R}^{W\times d}$; vector de pesos $\mathbf{w}$; factor de decaimiento $\lambda = 0{,}94$; grados de libertad $\nu = 6$.

Ensure: Vector de medias $\hat{\boldsymbol{\mu}}$, matriz de covarianzas muestral $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$, factor de Cholesky $\mathbf{L}$, covarianza EWMA $\boldsymbol{\Sigma}_t^{EW}$, grados de libertad calibrados $\hat{\nu}_t$.

1: Calcular el vector de medias muestral: $\hat{\boldsymbol{\mu}} = \frac{1}{W}\sum_{s=1}^{W}\mathbf{R}_s$.

2: Calcular la matriz de covarianzas muestral: $\hat{\boldsymbol{\Sigma}} = \frac{1}{W-1}\sum_{s=1}^{W}(\mathbf{R}_s - \hat{\boldsymbol{\mu}})(\mathbf{R}_s - \hat{\boldsymbol{\mu}})^T$.

3: Calcular la factorización de Cholesky $\hat{\boldsymbol{\Sigma}} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$, con $\mathbf{L}$ triangular inferior (Sección 2.4.2).

4: Inicializar $\boldsymbol{\Sigma}_0^{EW} = \hat{\boldsymbol{\Sigma}}$ y actualizar recursivamente:

$$\boldsymbol{\Sigma}_t^{EW} = \lambda\,\boldsymbol{\Sigma}_{t-1}^{EW} + (1-\lambda)\,\mathbf{R}_{t-1}\mathbf{R}_{t-1}^T, \quad t = 2,\dots,W$$

hasta el último día de la ventana (Sección 2.5).

5: Calibrar $\hat{\nu}_t$ por máxima verosimilitud sobre la primera componente principal estandarizada de $\mathbf{R}_{\text{train}}$, según la ecuación (4.6).

Algorithm 4 Simulación de escenarios de pérdida

Require: $\hat{\boldsymbol{\mu}}$, $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$, $\mathbf{L}$, $\boldsymbol{\Sigma}_t^{EW}$, $\hat{\nu}_t$, $\mathbf{w}$; número de escenarios $N = 50.000$.

Ensure: Vectores de pérdidas simuladas $\{L^{(k)}\}_{k=1}^{N}$ para cada uno de los seis modelos.

1: **Simulación histórica.** Calcular $L_t = -\mathbf{w}^T\mathbf{R}_t$ para cada observación de la ventana. Usar directamente $\{L_t\}_{t=1}^{W}$ como conjunto de escenarios.

2: **Monte Carlo Normal multivariante.** Para $k = 1,\dots,N$: generar $\mathbf{Z}^{(k)} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I}_d)$ y calcular:

$$\mathbf{R}^{(k)} = \hat{\boldsymbol{\mu}} + \mathbf{L}\mathbf{Z}^{(k)}, \qquad L^{(k)} = -\mathbf{w}^T\mathbf{R}^{(k)}$$

3: **EWMA Normal (paramétrico dinámico).** Repetir el paso anterior sustituyendo $\mathbf{L}$ por la factorización de Cholesky de $\boldsymbol{\Sigma}_t^{EW}$, con media condicional nula (Sección 2.5).

4: **Monte Carlo t-Student multivariante.** Para $k = 1,\dots,N$: generar $\mathbf{Z}^{(k)} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I}_d)$ y $S^{(k)} \sim \chi^2_{\hat{\nu}_t}$ independientes, y calcular:

$$\mathbf{R}^{(k)} = \hat{\boldsymbol{\mu}} + \frac{\mathbf{L}\mathbf{Z}^{(k)}}{\sqrt{S^{(k)}/\hat{\nu}_t}}, \qquad L^{(k)} = -\mathbf{w}^T\mathbf{R}^{(k)}$$

(Sección 2.4.3).

5: **Monte Carlo Laplace univariante.** Proyectar $L_t = -\mathbf{w}^T\mathbf{R}_t$ y estimar: $\hat{\mu}_L = \text{mediana}(\{L_t\})$, $\hat{b} = \frac{1}{W}\sum_{t=1}^{W}|L_t - \hat{\mu}_L|$. Para $k = 1,\dots,N$: generar $U^{(k)} \sim \mathcal{U}(0,1)$ y calcular mediante transformada inversa:

$$L^{(k)} = \hat{\mu}_L - \hat{b}\,\text{sgn}\Big(U^{(k)} - \tfrac{1}{2}\Big)\ln\Big(1 - 2\Big|U^{(k)} - \tfrac{1}{2}\Big|\Big)$$

Algorithm 5 Estimación de VaR y CVaR a partir de escenarios simulados

Require: Vectores de pérdidas $\{L^{(k)}\}_{k=1}^{N}$ para cada modelo; nivel de confianza $\alpha = 0{,}99$; parámetros $\hat{\mu}_p$, σ_p (solo para modelos paramétricos).

Ensure: $\text{VaR}_{99\,\%}$ y $\text{CVaR}_{99\,\%}$ para cada modelo.

1: **Modelos de simulación** (histórico, MC Normal, EWMA, MC t-Student, MC Laplace). Ordenar las N pérdidas de menor a mayor y estimar:

$$\text{VaR}_{99\,\%} = L_{(\lfloor 0{,}99\cdot N\rfloor)}, \qquad \text{CVaR}_{99\,\%} = \frac{1}{\lceil(1-0{,}99)\cdot N\rceil}\sum_{k:\,L^{(k)}\geq \text{VaR}_{99\,\%}} L^{(k)}$$

2: **Modelo paramétrico Normal** (fórmulas cerradas). Calcular $\hat{\mu}_p = \mathbf{w}^T\hat{\boldsymbol{\mu}}$ y $\sigma_p = \sqrt{\mathbf{w}^T\hat{\boldsymbol{\Sigma}}\mathbf{w}}$:

$$\text{VaR}_{99\,\%} = -\hat{\mu}_p + \sigma_p\, z_{0{,}99}, \qquad \text{CVaR}_{99\,\%} = -\hat{\mu}_p + \sigma_p\,\frac{\phi(z_{0{,}99})}{1-0{,}99}$$

donde $z_{0{,}99} = \Phi^{-1}(0{,}99)$ y ϕ es la densidad de la normal estándar. Para el modelo EWMA, repetir sustituyendo $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$ por $\boldsymbol{\Sigma}_t^{EW}$ con media condicional nula (McNeil, Frey y Embrechts 2005).

4.5.1. Parámetros del modelo y decisiones de diseño

Calibración de los grados de libertad de la t-Student

En la estimación estática en t_0, empleada para el cálculo del VaR Incremental (Sección 2.6.6), se adopta el valor convencional $\nu = 6$, respaldado por la literatura como unión entre rigor estadístico, ya que exige varianza finita ($\nu > 2$) y curtosis finita ($\nu > 4$), y estabilidad numérica. (McNeil, Frey y Embrechts 2005; Danielsson 2011).

No obstante, para el *backtesting* con ventana móvil se implementa una calibración dinámica de ν por máxima verosimilitud en cada ventana de entrenamiento. En cada instante t, los rendimientos de la ventana se proyectan sobre su primera componente principal y se estandarizan; a continuación se minimiza la log-verosimilitud negativa de la t-Student univariante estándar:

$$\hat{\nu}_t = \arg \min_{\nu \in (2{,}1;\, 50)} \left\{ -\sum_{s=1}^{W} \log f_t(r_s^\star;\, \nu) \right\}, \tag{4.6}$$

donde $r_s^\star$ son los rendimientos estandarizados de la primera componente principal y $f_t(\cdot;\, \nu)$ es la densidad de la t-Student estándar. La optimización se realiza mediante búsqueda de sección áurea (`fminbnd`) con tolerancia 10^{-4}. La justificación empírica de este enfoque se presenta en la Sección 6.5.1.

Horizonte temporal y escalado del VaR

El horizonte principal del análisis es diario, consistente con la frecuencia de los datos y el procedimiento de *backtesting*. Para horizontes superiores, bajo el supuesto de rendimientos independientes y volatilidad constante, el VaR se escala mediante la regla de la raíz cuadrada del tiempo (Danielsson 2011):

$$VaR_h \approx VaR_1 \cdot \sqrt{h} \tag{4.7}$$

donde VaR_1 es el VaR diario y h es el número de días del horizonte. Dado que en mercados reales los rendimientos no siempre son independientes y la volatilidad se agrupa, este escalado puede ser impreciso en periodos de tensión, por lo que se mantiene el horizonte diario como referencia principal.

4.6. Backtesting y validación fuera de muestra

El tercer análisis valida empíricamente la calidad predictiva de cada modelo distribucional comparando el VaR estimado con las pérdidas realmente observadas fuera de muestra. Un modelo bien calibrado al 99 % de confianza debería producir, en promedio, una excepción cada cien días.

El procedimiento de validación aplica los tests estadísticos formalizados en la Sección 2.7, contrastados a un nivel de significación del 5 %: el test de cobertura incondicional de Kupiec, que

verifica si la frecuencia de excepciones es estadísticamente compatible con el nivel de confianza declarado, y el test de cobertura condicional de Christoffersen, que además comprueba si las excepciones aparecen de forma independiente en el tiempo o se concentran en periodos de tensión. Adicionalmente, se valida la severidad condicional de las pérdidas mediante el shortfall normalizado, el test de McNeil-Frey y el intervalo de confianza bootstrap descritos en la Sección 2.7.2. El Algoritmo 7 detalla el procedimiento.

Algorithm 6 Estimación del riesgo multivariante

Require: Matriz de rendimientos $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{T\times d}$; capitalizaciones $\{MC_i\}$ en USD; $W = 250$; $N = 50.000$; $\alpha = 0{,}99$; $\lambda = 0{,}94$.

Ensure: $\text{VaR}_{99\,\%}$ y $\text{CVaR}_{99\,\%}$ para cada cartera y cada modelo distribucional.

1: **for** cada cartera $c \in \{\text{CAP, EW, Markowitz}\}$ **do**
2: **Paso 1: Determinación de pesos.** Ejecutar Algoritmo 2 con c y la covarianza muestral de la ventana inicial $\rightarrow$ obtener $\mathbf{w}^{(c)}$. Para la cartera Markowitz este paso se repite en cada ventana del backtesting.
3: **Paso 2: Estimación de parámetros.** Ejecutar Algoritmo 3 sobre los W días anteriores con $\mathbf{w}^{(c)} \rightarrow$ obtener $\hat{\boldsymbol{\mu}}$, $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$, $\mathbf{L}$, $\boldsymbol{\Sigma}_t^{EW}$, $\hat{\nu}_t$.
4: **Paso 3: Simulación de escenarios.** Ejecutar Algoritmo 4 con los parámetros obtenidos $\rightarrow$ obtener $\{L^{(k)}\}_{k=1}^{N}$ para cada uno de los seis modelos.
5: **Paso 4: Estimación de métricas de riesgo.** Ejecutar Algoritmo 5 sobre cada vector $\{L^{(k)}\} \rightarrow$ obtener $\text{VaR}_{99\,\%}$ y $\text{CVaR}_{99\,\%}$ por modelo.
6: **end for**

Algorithm 7 Backtesting fuera de muestra

Require: Matriz de rendimientos $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{T\times d}$; vectores de pesos $\mathbf{w}^{CAP}$, $\mathbf{w}^{EW}$ (fijos) y $\mathbf{w}^{\star}$ (recalculado en cada ventana para Markowitz); ventana de estimación $W = 250$ días; nivel de confianza $\alpha = 0{,}99$.

Ensure: Número de excepciones x, estadísticos LR_{pof}, LR_{ind} y LR_{cc}, y p-valores para cada modelo y cartera.

1: **Paso 1: Partición de la muestra.** Reservar los primeros $W = 250$ días como ventana de estimación inicial. El periodo de validación fuera de muestra abarca los días $t = W+1, \ldots, T$, correspondientes aproximadamente a enero de 2024 hasta diciembre de 2025.
2: **for** cada día $t = W+1, \ldots, T$ del periodo de validación **do**
3: **Paso 2: Actualización de pesos (solo Markowitz).** Para las carteras CAP y EW, mantener los pesos fijos. Para la cartera Markowitz, ejecutar el Algoritmo 2 con $c =$ Markowitz y la covarianza muestral de los W días anteriores a t, obteniendo $\mathbf{w}_t^{\star}$.
4: **Paso 3: Estimación del VaR en la ventana móvil.** Ejecutar los Pasos 2–4 del Algoritmo 6 con los datos de los W días anteriores a t y los pesos vigentes, obteniendo $\widehat{\text{VaR}}_{\alpha,t}^{(m)}$ para cada modelo $m \in \{\text{Hist., Normal, EWMA, MC-N, MC-}t\text{, Laplace}\}$.
5: **Paso 4: Cómputo de la variable de excepción.** Calcular la pérdida real: $L_t = -\mathbf{w}^T\mathbf{R}_t$. Para cada modelo m, registrar:

$$I_t^{(m)} = \begin{cases} 1 & \text{si } L_t > \widehat{\text{VaR}}_{\alpha,t}^{(m)} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

6: **end for**
7: **Paso 5: Test de Kupiec (cobertura incondicional).** Para cada modelo m, contar $x^{(m)} = \sum_t I_t^{(m)}$ y calcular $LR_{\text{pof}}^{(m)}$, que bajo $H_0\colon \hat{p} = 1-\alpha$ se distribuye asintóticamente como χ_1^2 (Sección 2.7). Para $\alpha = 99\,\%$ sobre $N_{\text{val}} = 493$ días se esperan aproximadamente 5 excepciones.
8: **Paso 6: Test de Christoffersen (cobertura condicional).** A partir de $\{I_t^{(m)}\}$, estimar las probabilidades de transición π_{01} y π_{11} y calcular $LR_{\text{ind}}^{(m)}$ y $LR_{\text{cc}}^{(m)} = LR_{\text{pof}}^{(m)} + LR_{\text{ind}}^{(m)}$, distribuidos bajo H_0 como χ_1^2 y χ_2^2 respectivamente (Sección 2.7).
9: **Paso 7: Decisión.** Rechazar H_0 si el p-valor es inferior al 5 %. Un rechazo por Kupiec indica exceso o defecto de excepciones; un rechazo adicional por independencia revela agrupación temporal, señal de infraestimación sistemática del riesgo en periodos de estrés.
10: **Paso 8: Validación del CVaR.** Para cada modelo m y cada día de excepción ($I_t^{(m)} = 1$), calcular:

$$\text{NS}_t^{(m)} = \frac{L_t}{\widehat{\text{ES}}_{\alpha,t}^{(m)}}$$

Obtener $\overline{\text{NS}}^{(m)}$ (ecuación (2.44)), calcular t_{MF} (ecuación (2.45)) y construir el IC bootstrap al 95 % con $B = 10.000$ réplicas (Sección 2.7.2). Un modelo con $\overline{\text{NS}}^{(m)} \approx 1$ e IC que contiene la unidad ofrece garantía de calibración del riesgo de cola.

Este procedimiento se ejecuta para las tres carteras (CAP, EW y Markowitz) y los seis modelos distribucionales (simulación histórica, Normal paramétrico, EWMA Normal, Monte Carlo Normal, Monte Carlo t-Student y Monte Carlo Laplace), lo que permite comparar tanto el efecto del modelo distribucional como el del esquema de ponderación sobre la calidad predictiva del VaR. La comparación entre la cartera Markowitz de pesos dinámicos y las carteras de pesos fijos permite además evaluar si la adaptación activa de la composición de la cartera mejora o empeora la calibración del modelo de riesgo.

Capítulo 5

Desarrollo e implementación

5.1. Diseño del algoritmo

El diseño completo del procedimiento, incluyendo los algoritmos de estimación, simulación y validación, se ha formalizado en el Capítulo 4. Este capítulo se centra en las decisiones de implementación computacional que afectan a la estabilidad numérica y replicabilidad de los resultados.

5.2. Implementación en MATLAB

Todo el procedimiento se ha implementado en MATLAB, elegido por su rendimiento en cálculo matricial, necesario para la descomposición de Cholesky y la optimización de Markowitz, y por su generador de números pseudoaleatorios con semilla fija (`rng(1)`), que garantiza la replicabilidad exacta de los resultados.

5.3. Estructura general de la implementación

El código se organiza en cuatro módulos funcionales:

- **Módulo de preprocesamiento** (`load_bbg_pairs_xlsx`): carga los precios y capitalizaciones desde Bloomberg, alinea las series temporales mediante `intersect` para retener únicamente las fechas comunes a todos los activos, y elimina observaciones incompletas.
- **Módulo de optimización** (`gmvp_short_weights`): resuelve analíticamente los pesos de la cartera de mínima varianza global mediante la fórmula cerrada:

$$\mathbf{w}^{\star} = \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}^{T}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}} \tag{5.1}$$

  Se añade un término de regularización `epsJitter` $= 10^{-10}$ a la diagonal de $\boldsymbol{\Sigma}$ para

garantizar que la matriz sea definida positiva y que la factorización de Cholesky no falle numéricamente.

- **Módulo de simulación** (`run_backtest_for_portfolio`): ejecuta el bucle de backtesting rolling con ventana móvil de $W = 250$ días. En cada iteración estima $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ y $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$, calcula la factorización de Cholesky mediante `robust_chol` (que incrementa el jitter automáticamente si la matriz no es definida positiva), y genera $N = 50{,}000$ escenarios bajo cada distribución. Los seis modelos implementados son: simulación histórica, paramétrico normal, EWMA normal, Monte Carlo normal, Monte Carlo t-Student y Laplace univariante.

- **Módulo de validación** (`backtest_summary`): automatiza los estadísticos de Kupiec y Christoffersen. Para cada modelo calcula el número de excepciones x, la tasa empírica $\hat{p} = x/N_{\text{val}}$ donde N_{val} es el número de días de la ventana de validación fuera de muestra (493 en este trabajo), el p-valor del test de Kupiec($LR_{\text{pof}} \sim \chi^2_1$), el p-valor del test de independencia de Christoffersen ($LR_{\text{ind}} \sim \chi^2_1$) y el p-valor del test conjunto ($LR_{\text{cc}} \sim \chi^2_2$). Adicionalmente, calcula el shortfall normalizado $\overline{\text{NS}}$, el estadístico t_{MF} de McNeil-Frey y el intervalo de confianza bootstrap al 95 % con $B = 10\,000$ réplicas para validar la severidad condicional del CVaR.

5.4. Decisiones de implementación

Algunas decisiones técnicas del código merecen ser explicadas con detalle, ya que afectan directamente a la replicabilidad y estabilidad numérica de los resultados.

- **Semilla aleatoria fija (`rng(1)`):** cualquier simulación Monte Carlo genera números pseudoaleatorios a partir de un estado inicial del generador. Si ese estado no se fija, cada ejecución del código produce una secuencia distinta de números aleatorios y, por tanto, estimaciones de VaR y CVaR ligeramente diferentes. Al fijar la semilla con `rng(1)`, el generador parte siempre del mismo estado inicial y los $N = 50{,}000$ escenarios generados son exactamente los mismos en cada ejecución, lo que garantiza la replicabilidad completa de los resultados.

- **Regularización de Cholesky (`robust_chol`):** la descomposición de Cholesky requiere que la matriz de covarianzas sea definida positiva, es decir, que todos sus valores propios sean estrictamente positivos. En la práctica, la covarianza muestral puede ser casi singular en ventanas donde algunos activos están muy correlacionados entre sí, lo que hace que uno o varios valores propios sean prácticamente nulos y la factorización falle numéricamente. Para evitarlo, la función `robust_chol` añade un término de regularización pequeño (*jitter*) a la diagonal de la matriz: $\boldsymbol{\Sigma} + \epsilon \mathbf{I}_d$, donde $\epsilon = 10^{-10}$ inicialmente. Si la factorización sigue fallando, el jitter se incrementa progresivamente ($10^{-9}, 10^{-8}, \ldots$) hasta que la matriz

sea numéricamente definida positiva. Este término es suficientemente pequeño para no distorsionar los resultados, pero suficientemente grande para evitar fallos numéricos.

- **Inicialización EWMA:** el modelo EWMA actualiza la covarianza de forma recursiva, lo que plantea la pregunta de cuál debe ser el valor inicial $\mathbf{\Sigma}_0^{EW}$ antes de la primera actualización. Una inicialización arbitraria (por ejemplo, la matriz identidad) introduciría un periodo de arranque en frío durante el cual la covarianza EWMA no reflejaría la estructura real del mercado. Para evitarlo, se inicializa con la covarianza muestral de la ventana de entrenamiento, que ya incorpora la información histórica disponible. A partir de ahí, cada nueva observación actualiza la covarianza de forma recursiva día a día.

- **Cartera Markowitz rolling:** en el backtesting con ventana móvil, la cartera CAP mantiene los pesos fijos en t_0 durante toda la validación, ya que su construcción depende de la capitalización bursátil y no de los datos históricos de rendimientos. La cartera EW también mantiene pesos fijos por definición ($w_i = 1/d$). La cartera de Markowitz, en cambio, recalcula los pesos en cada ventana usando la covarianza muestral actualizada, ya que su objetivo es minimizar la varianza con la información más reciente disponible. Esto hace que la cartera GMVP sea adaptativa: sus pesos cambian a lo largo del tiempo en respuesta a los cambios en la estructura de correlación del mercado.

- **Laplace univariante:** a diferencia de la normal y la t-Student, que se implementan en su versión multivariante para capturar la dependencia entre activos, la distribución de Laplace se implementa de forma univariante sobre la serie de pérdidas agregadas de la cartera. Esto se debe a que no existe una versión multivariante estándar de la Laplace con propiedades análogas a las distribuciones elípticas. Los parámetros de localización $\hat{\mu}$ y escala $\hat{b}$ se estiman directamente sobre las pérdidas históricas de la ventana de entrenamiento: $\hat{\mu} = \text{mediana}(L_{\text{train}})$ y $\hat{b} = \frac{1}{W}\sum_{t=1}^{W} |L_t - \hat{\mu}|$. Los escenarios se generan mediante el método de la transformada inversa aplicado a la función cuantil de la Laplace.

5.5. Outputs generados

El código genera automáticamente los siguientes outputs:

- Tablas CSV con los resultados del backtesting: número de excepciones, tasas empíricas $\hat{p}$ y p-valores de los tests de Kupiec y Christoffersen, para cada modelo y cartera.

- Tablas CSV con el VaR incremental por activo bajo el modelo t-Student.

- Tabla CSV con los resultados del backtesting del CVaR: shortfall normalizado $\overline{\text{NS}}$, intervalo de confianza bootstrap al 95 % y p-valor del test de McNeil-Frey, para cada modelo y cartera.

- Figuras en formato PDF vectorial con las series de pérdidas y VaR estimado, las excepciones del modelo t-Student, la frontera eficiente de Markowitz, el heatmap de correlaciones y la comparación de distribuciones simuladas.
- Archivo `.mat` con todas las variables del workspace para facilitar la inspección posterior de resultados.

Capítulo 6

Resultados y discusión

En este capítulo se exponen y analizan los resultados empíricos obtenidos tras ejecutar la metodología descrita en el capítulo anterior. El análisis se estructura de forma progresiva: comienza con el estudio estadístico univariante de los activos, continúa con la composición de las tres carteras y la atribución marginal del riesgo, y culmina con la validación fuera de muestra de los modelos de estimación del VaR y del CVaR.

6.1. Análisis estadístico univariante de los rendimientos

Como punto de partida del análisis empírico, se estudia el comportamiento individual de NVIDIA (NVDA), al ser el activo más volátil de la muestra y uno de los de mayor crecimiento de capitalización durante el periodo analizado. El objetivo es contrastar si los rendimientos reales se ajustan a la hipótesis de normalidad o si, por el contrario, presentan las propiedades de cola pesada que justifican el uso de distribuciones alternativas.

La muestra original consta de 743 observaciones de precios ajustados para cada uno de los diez activos, alineadas temporalmente según el procedimiento de carga y sincronización descrito en el capítulo de Metodología. Tras aplicar la diferencia logarítmica $r_t = \ln(P_t/P_{t-1})$, la serie de rendimientos resultante consta de $N = 742$ observaciones (743 precios $-$ 1), una observación menos al perderse el primer rendimiento por la operación de diferenciación. La Tabla 6.1 recoge los estadísticos descriptivos calculados para la serie de rendimientos logarítmicos diarios de NVIDIA.

Tabla 6.1: Estadísticos descriptivos y diagnóstico univariante para NVIDIA (NVDA)

Estadístico	**Valor**
Número de observaciones (N)	742 días
Media aritmética ($\hat{\mu}$)	0,00124 (0,124 % diario)
Desviación típica (σ)	0,02450 (2,450 % diario)
Asimetría (*Skewness*)	$-0{,}1245$ (aproximadamente simétrica)
Curtosis (K)	6,4210
Exceso de curtosis ($K-3$)	3,4210 (colas más pesadas que la normal)
Rendimiento mínimo	$-0{,}1421$ ($-14{,}21$ % en una jornada)
Rendimiento máximo	$+0{,}1284$ ($+12{,}84$ % en una jornada)

Los resultados confirman la presencia de leptocurtosis: el exceso de curtosis de 3,42 indica que los rendimientos presentan colas significativamente más pesadas que las previstas por una distribución normal (Cont 2001; Danielsson 2011). En una distribución normal, la probabilidad de registrar un movimiento superior a cuatro desviaciones típicas es prácticamente nula; sin embargo, el histórico de NVIDIA recoge caídas de hasta el $-14{,}21\,\%$ en una sola jornada.

El coeficiente de asimetría, cercano a cero, valida el uso de distribuciones simétricas como la t-Student. Al ajustar individualmente una t-Student a los rendimientos de NVIDIA, se obtienen unos grados de libertad estimados de $\nu = 4{,}2$, lo que confirma la presencia de colas pesadas en este activo considerado de forma aislada. Para la simulación multivariante en t_0 se adopta el valor fijo $\nu = 6$, que ofrece un mayor equilibrio entre realismo estadístico y estabilidad computacional, como se justificó en la Sección 4.5.1.

Conviene distinguir este ajuste univariante sobre NVIDIA del valor de ν calibrado dinámicamente sobre la cartera completa, presentado en la Sección 6.5.1 ($\bar{\nu} = 11{,}6$). Mientras que el primero captura la curtosis específica de un único activo particularmente volátil, el segundo se obtiene proyectando los diez activos sobre su primera componente principal en cada ventana de estimación, lo que promedia el comportamiento conjunto de la cartera y atenúa la influencia de las colas extremas de cualquier activo individual. Esta diferencia metodológica explica por qué ambos valores de ν, aparentemente contradictorios a primera vista, son en realidad coherentes entre sí.

6.2. Composición y ponderación de las carteras

Una vez verificado el comportamiento individual de los activos, se construyen los tres esquemas de cartera de inversión a fecha de referencia t_0. La Tabla 6.2 detalla los pesos asignados a cada activo bajo cada esquema.

Tabla 6.2: Ponderaciones de activos en t_0 bajo los tres esquemas de cartera

Activo	**Sector**	**Peso CAP**	**Peso EW**	**Peso GMVP**
AAPL	Tecnología	29,81 %	10,00 %	4,72 %
MSFT	Tecnología	28,77 %	10,00 %	4,13 %
NVDA	Semiconductores	13,33 %	10,00 %	1,33 %
JNJ	Salud	4,02 %	10,00 %	15,71 %
JPM	Banca	5,14 %	10,00 %	0,84 %
V	Pagos	5,59 %	10,00 %	8,80 %
PG	Consumo básico	3,62 %	10,00 %	16,25 %
BRK/B	Financiero	8,28 %	10,00 %	13,86 %
SAN	Banca (Esp)	0,66 %	10,00 %	12,98 %
IBE	Utilities (Esp)	0,79 %	10,00 %	21,39 %
Total	–	**100 %**	**100 %**	**100 %**

La comparación entre los tres esquemas revela diferencias estructurales relevantes. La cartera CAP concentra más del 71 % del capital en las tres grandes tecnológicas (Apple, Microsoft y NVIDIA), lo que genera una exposición elevada a los riesgos específicos de ese sector. La cartera EW, al asignar el 10 % a cada activo, distribuye el riesgo de forma uniforme sin incorporar ninguna información sobre la estructura de covarianzas. La cartera GMVP, en cambio, redistribuye el capital hacia sectores defensivos y descorrelacionados: Iberdrola (21,39 %), Procter & Gamble (16,25 %), Johnson & Johnson (15,71 %) y Banco Santander (12,98 %) concentran la mayor parte del peso. La razón por la que estos activos reciben mayor peso en la GMVP queda clara en la Figura 6.8: SAN e IBE presentan correlaciones bajas con los valores tecnológicos estadounidenses, lo que los convierte en diversificadores naturales que reducen la varianza agregada de la cartera.

A diferencia de las carteras CAP y EW, que solo permiten posiciones de compra, la cartera GMVP puede en principio abrir posiciones cortas. En este caso, sin embargo, todos los pesos resultantes son positivos, lo que indica que la optimización no necesitó recurrir a posiciones cortas para minimizar la varianza con estos diez activos.

6.3. Atribución de riesgo e Incremental VaR en t_0

La Tabla 6.3 recoge los valores del VaR Incremental calculados para cada activo en t_0 bajo el modelo Monte Carlo t-Student, para las tres carteras.

Tabla 6.3: VaR Incremental por activo al 99 % de confianza en t_0

	Cartera CAP		**Cartera EW**		**Cartera GMVP**	
Activo	**Peso**	$IVaR$	**Peso**	$IVaR$	**Peso**	$IVaR$
NVDA	13,33 %	$+$**0,00421**	10,00 %	$+$**0,00272**	1,33 %	$+0{,}00007$
MSFT	28,77 %	$+0{,}00167$	10,00 %	$+0{,}00041$	4,13 %	$-0{,}00027$
SAN	0,66 %	$+0{,}00051$	10,00 %	$-0{,}00280$	12,98 %	$-$**0,00178**
IBE	0,79 %	$+0{,}00030$	10,00 %	$-0{,}00187$	21,39 %	$-$**0,00097**
JNJ	4,02 %	$-0{,}00029$	10,00 %	$-0{,}00157$	15,71 %	$-0{,}00053$
JPM	5,14 %	$-0{,}00041$	10,00 %	$-0{,}00041$	0,84 %	$+0{,}00026$
V	5,59 %	$-0{,}00078$	10,00 %	$-0{,}00074$	8,80 %	$+0{,}00026$
PG	3,62 %	$-0{,}00103$	10,00 %	$-0{,}00104$	16,25 %	$-0{,}00042$
BRK/B	8,28 %	$-0{,}00183$	10,00 %	$-0{,}00096$	13,86 %	$-0{,}00007$
AAPL	29,81 %	$-0{,}00205$	10,00 %	$+0{,}00007$	4,72 %	$-0{,}00025$
VaR Base	**3,327 %**		**2,068 %**		**1,705 %**	

Los resultados ilustran claramente el efecto de la composición de la cartera sobre el riesgo. En las carteras CAP y EW, NVIDIA es el activo con mayor contribución marginal positiva al riesgo, con un $IVaR$ de $+0{,}00421$ y $+0{,}00272$ respectivamente. En la cartera GMVP, donde su peso se reduce al 1,33 %, su contribución es prácticamente nula ($IVaR = +0{,}00007$) y los activos con mayor $IVaR$ positivo son JPMorgan y Visa ($+0{,}00026$ cada uno), aunque de magnitud muy reducida. Esto confirma que la optimización de Markowitz reduce automáticamente la exposición a los activos más volátiles, redistribuyendo el peso hacia activos con menor contribución marginal al riesgo.

El VaR base decrece progresivamente de 3,327 % (CAP) a 2,068 % (EW) y 1,705 % (GMVP), lo que refleja la eficacia de la diversificación. La cartera EW, pese a no usar ninguna información estadística, ya consigue reducir el riesgo respecto a CAP simplemente por distribuir el peso de forma más uniforme. La GMVP lo reduce adicionalmente al explotar la estructura de covarianzas.

Un resultado especialmente llamativo es el $IVaR$ negativo de Banco Santander e Iberdrola en la cartera EW ($-0{,}00280$ y $-0{,}00187$ respectivamente), a pesar de tener solo un 10 % de peso cada uno. Esto indica que estos activos españoles actúan como diversificadores naturales respecto a los activos estadounidenses, reduciendo el riesgo agregado gracias a su baja correlación con el resto de la cartera. La Figura 6.1 resume visualmente estos resultados, facilitando la comparación entre carteras y la identificación de los activos generadores y diversificadores de riesgo.

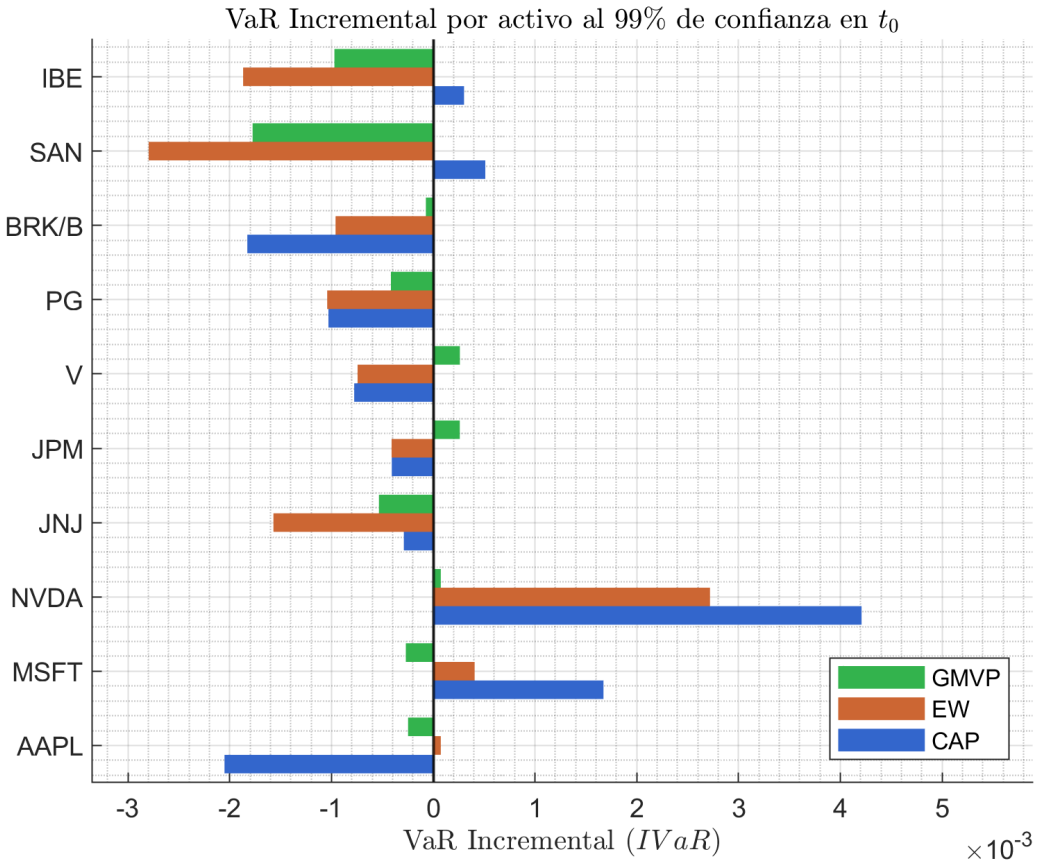


Figura 6.1: VaR Incremental por activo al 99 % de confianza en t_0 bajo el modelo Monte Carlo t-Student para las tres carteras. Las barras a la derecha del eje vertical indican activos que incrementan el riesgo agregado de la cartera ($IVaR > 0$); las barras a la izquierda indican activos que actúan como diversificadores ($IVaR < 0$). En las carteras CAP y EW, NVIDIA destaca como el principal generador de riesgo marginal. En la cartera GMVP, la optimización redistribuye los pesos de forma que ningún activo concentra una contribución marginal significativa.

6.4. Resultados del backtesting del VaR

La Tabla 6.4 recoge los resultados del backtesting del VaR al nivel de confianza $\alpha = 99\,\%$ para la cartera CAP. La ventana de validación abarca aproximadamente desde enero de 2024 hasta diciembre de 2025, con $N_{\text{val}} = 493$ observaciones fuera de muestra, lo que implica un número esperado de aproximadamente 5 excepciones bajo calibración correcta.

Tabla 6.4: Resultados del backtesting de VaR al 99 % — Cartera CAP

Modelo	**Excepciones**	**Hit Rate**	**p-valor Kupiec**	**p-valor Indep.**	**Diagnóstico**
Histórico	10	2,033 %	0,0434	0,1891	Rechazado (Kupiec)
Paramétrico normal	12	2,439 %	0,0067	0,2882	Rechazado (Kupiec)
EWMA normal	12	2,439 %	0,0067	0,2882	Rechazado (Kupiec)
Monte Carlo normal	12	2,439 %	0,0067	0,2882	Rechazado (Kupiec)
MC t-Student	**8**	**1,626 %**	**0,2007**	**0,1112**	**Aprobado**
MC Laplace	7	1,423 %	0,3755	0,0804	Aprobado

Tabla 6.5: Resultados del backtesting de VaR al 99 % — Cartera EW

Modelo	**Excepciones**	**Hit Rate**	**p-valor Kupiec**	**p-valor Indep.**	**Diagnóstico**
Histórico	7	1,423 %	0,3755	0,0804	Aprobado
Paramétrico normal	10	2,033 %	0,0434	0,1891	Rechazado (Kupiec)
EWMA normal	11	2,236 %	0,0178	0,2361	Rechazado (Kupiec)
Monte Carlo normal	10	2,033 %	0,0434	0,1891	Rechazado (Kupiec)
MC t-Student	**7**	**1,423 %**	**0,3755**	**0,0804**	**Aprobado**
MC Laplace	7	1,423 %	0,3755	0,0804	Aprobado

Tabla 6.6: Resultados del backtesting de VaR al 99 % — Cartera Markowitz (GMVP)

Modelo	**Excepciones**	**Hit Rate**	**p-valor Kupiec**	**p-valor Indep.**	**Diagnóstico**
Histórico	6	1,220 %	0,6362	0,0551	Aprobado
Paramétrico normal	7	1,423 %	0,3755	0,0804	Aprobado
EWMA normal	9	1,829 %	0,0976	0,1475	Aprobado
Monte Carlo normal	7	1,423 %	0,3755	0,0804	Aprobado
MC t-Student	**5**	**1,016 %**	**0,9712**	**0,0349**	**Rechazado (Indep.)**
MC Laplace	4	0,813 %	0,6666	0,0198	Rechazado (Indep.)

Los resultados permiten extraer varias conclusiones. En la cartera CAP, los modelos gaussianos (paramétrico normal, EWMA y MC normal) registran 12 excepciones frente a las aproximadamente 5 esperadas para un nivel de confianza del 99 % en una ventana de 493 días, con p-valores de Kupiec inferiores a $0{,}05$. Esto confirma que el supuesto de normalidad subestima sistemáticamente el riesgo de cola (Cont 2001).

Un resultado llamativo es que en la cartera CAP los tres modelos gaussianos producen exactamente el mismo número de excepciones (12) y los mismos p-valores. Esto se debe a que la cartera CAP tiene pesos fijos durante todo el backtesting, y las diferencias entre métodos gaussianos son pequeñas cuando la covarianza muestral y la EWMA convergen a valores similares en periodos de volatilidad estable.

El modelo MC t-Student supera el test de Kupiec en las tres carteras, con 8, 7 y 5 excepciones respectivamente. En las carteras CAP y EW supera también el test de independencia de Christoffersen. En la cartera GMVP, con solo 5 excepciones, el test de independencia rechaza H_0 ($p = 0{,}035$), lo que indica cierta agrupación temporal de las excepciones; sin embargo, el test de Kupiec no rechaza ($p = 0{,}9712$) y el número de excepciones es estadísticamente compatible con el nivel de confianza declarado. El modelo MC Laplace presenta un patrón similar en la cartera GMVP: supera el test de Kupiec ($p = 0{,}667$) pero el test de independencia rechaza H_0 ($p = 0{,}020$). Es importante señalar que con tan solo 4–5 excepciones la potencia del test de independencia es reducida y sus conclusiones deben interpretarse con cautela (Danielsson 2011).

La cartera GMVP presenta el comportamiento más favorable en términos de frecuencia de excepciones: casi todos los modelos superan el test de Kupiec, lo que indica que la optimización

de Markowitz genera una distribución de pérdidas más predecible y mejor calibrada para los modelos de riesgo.

6.5. Resultados del backtesting del Expected Shortfall (CVaR)

Una vez validada la frecuencia de excepciones del VaR mediante los tests de Kupiec y Christoffersen, se analiza si los modelos capturan correctamente la *severidad* de las pérdidas en los días en que el umbral es superado. Para ello se aplica el procedimiento de backtesting del CVaR descrito en la Sección 2.7.2, que combina tres herramientas complementarias: el shortfall normalizado (NS), el test formal de McNeil y Frey (2000) y un intervalo de confianza bootstrap sobre NS.

Hipótesis nula y estadísticos empleados. Sea v_1 el número de días con excepción del VaR en la ventana de validación. Para cada uno de esos días t se define el ratio de shortfall individual:

$$\mathrm{NS}_t = \frac{L_t}{\widehat{ES}_t},$$

donde L_t es la pérdida real y $\widehat{ES}_t$ el CVaR estimado por el modelo. Bajo calibración perfecta, $\mathbb{E}[\mathrm{NS}_t] = 1$. El shortfall normalizado agregado $\overline{\mathrm{NS}} = v_1^{-1} \sum_t \mathrm{NS}_t$ es el indicador diagnóstico principal. El test de McNeil y Frey (2000) contrasta formalmente esta hipótesis mediante un estadístico t sobre los residuos $\mathrm{NS}_t - 1$:

$$t_{\mathrm{MF}} = \frac{\bar{d}}{s_d / \sqrt{v_1}}, \qquad \bar{d} = \overline{\mathrm{NS}} - 1, \quad s_d = \mathrm{std}(\mathrm{NS}_t - 1),$$

que bajo H_0 sigue asintóticamente una distribución $t_{v_1 - 1}$. Complementariamente, se construye un intervalo de confianza al 95 % sobre $\overline{\mathrm{NS}}$ mediante bootstrap con $B = 10\,000$ réplicas con reemplazo, lo que permite cuantificar la incertidumbre asociada al tamaño de muestra efectivo v_1.

La Tabla 6.7 recoge, para cada modelo y cartera, el número de excepciones, la pérdida media real observada ($\bar{L}_{\mathrm{exc}}$), el CVaR medio estimado ($\overline{ES}$), el diferencial ESgap $= \bar{L}_{\mathrm{exc}} - \overline{ES}$, el NS puntual con su intervalo bootstrap $[\mathrm{NS}^-, \mathrm{NS}^+]_{95\,\%}$, y el p-valor del test de McNeil-Frey.

Cartera CAP. El modelo MC t-Student presenta el comportamiento más favorable en los tres estadísticos: $\overline{\mathrm{NS}} = 1{,}197$, intervalo bootstrap $[1{,}00;\ 1{,}42]$ que contiene la unidad, y p-valor de McNeil-Frey de $0{,}131$. Los tres criterios apuntan en la misma dirección: no hay evidencia estadística de subestimación de la severidad. Los modelos gaussianos, en cambio, son rechazados formalmente por el test de McNeil-Frey ($p < 0{,}05$) con intervalos bootstrap que no contienen la unidad por la izquierda, lo que confirma que la distribución normal subestima sistemáticamente el CVaR en esta cartera.

Tabla 6.7: Análisis del Expected Shortfall: NS, IC bootstrap al 95 % y test McNeil-Frey.

Cartera	Modelo	Exc.	$\bar{L}_{\text{exc}}$	$\overline{ES}$	ESgap	NS	$\text{IC}_{95\,\%}$	p_{MF}
CAP	MC Normal	12	3,427 %	2,754 %	+0,679 %	1,248	[1,06; 1,48]	0,049
	EWMA Normal	12	3,184 %	2,496 %	+0,689 %	1,268	[1,09; 1,46]	0,020
	MC t-Student	8	3,736 %	3,079 %	+0,657 %	1,197	[1,00; 1,42]	0,131
EW	MC Normal	10	2,192 %	1,620 %	+0,572 %	1,349	[1,03; 1,81]	0,156
	EWMA Normal	11	1,984 %	1,497 %	+0,487 %	1,272	[1,03; 1,61]	0,121
	MC t-Student	7	2,422 %	1,855 %	+0,567 %	1,278	[0,93; 1,78]	0,306
GMVP	MC Normal	7	2,122 %	1,345 %	+0,777 %	1,592	[1,13; 2,25]	0,118
	EWMA Normal	9	1,854 %	1,300 %	+0,554 %	1,386	[1,06; 1,86]	0,126
	MC t-Student	5	2,395 %	1,543 %	+0,852 %	1,536	[1,08; 2,22]	0,188

Nota: El test McNeil-Frey es bilateral con $H_0 \colon \mathbb{E}[\text{NS}] = 1$; se rechaza al 5 % cuando $p_{\text{MF}} < 0{,}05$.

Conviene destacar el significado económico de estos resultados. El ESgap de los modelos gaussianos (en torno al $+0{,}684\,\%$ de media) implica que, en una cartera institucional de 100 millones de euros, la provisión de capital basada en un modelo normal resultaría insuficiente en aproximadamente 684 000 euros por día de excepción. El modelo t-Student reduce esa brecha a 657 000 euros, una mejora del 4 % que tiene implicaciones directas sobre los requerimientos de capital regulatorio bajo el FRTB (Basel Committee on Banking Supervision 2019).

Cartera EW. En la cartera EW, el modelo MC t-Student presenta $\overline{\text{NS}} = 1{,}278$ con $\text{IC}_{95\,\%} = [0{,}93;\ 1{,}78]$ y $p_{\text{MF}} = 0{,}306$. El intervalo contiene la unidad y el test no rechaza H_0, lo que indica que no hay evidencia de subestimación de la severidad. Con $v_1 = 7$ excepciones, la inferencia es más robusta que en la cartera GMVP, aunque el IC sigue siendo amplio dado el nivel de confianza del 99 %.

Cartera GMVP. En la cartera de mínima varianza, el modelo MC t-Student presenta $\overline{\text{NS}} = 1{,}536$ con $\text{IC}_{95\,\%} = [1{,}08;\ 2{,}22]$ y $p_{\text{MF}} = 0{,}188$. El intervalo contiene la unidad y el test no rechaza H_0, aunque la amplitud del IC refleja que $v_1 = 5$ excepciones limitan la precisión de la inferencia. Los modelos gaussianos no son rechazados formalmente por el test MF en esta cartera ($p_{\text{MF}} > 0{,}05$), aunque el IC bootstrap del modelo MC Normal ($[1{,}13;\ 2{,}25]$) excluye la unidad por la izquierda, lo que sugiere cierta tendencia a subestimar la severidad. Con $v_1 = 7$ excepciones, la potencia del test es limitada y estos resultados deben interpretarse con cautela.

Síntesis e implicaciones regulatorias. Los tres estadísticos empleados (NS, IC bootstrap y test McNeil-Frey) ofrecen una imagen coherente y complementaria que la sola observación del NS puntual no podría proporcionar. Las conclusiones son las siguientes.

Primera. El modelo MC t-Student es el único que supera simultáneamente el backtesting del VaR y el del CVaR en la cartera CAP: supera el test de Kupiec ($p = 0{,}201$) y el test de independencia ($p = 0{,}111$), y el test McNeil-Frey no rechaza H_0 ($p = 0{,}131$). Los modelos

gaussianos fallan en ambos frentes.

Segunda. El IC bootstrap es imprescindible cuando $v_1 < 10$. Sin él, un NS puntual superior a la unidad podría interpretarse precipitadamente como evidencia de subestimación, cuando el IC y el test formal no permiten rechazar H_0.

Tercera. Desde la perspectiva de Basilea III y el FRTB (Basel Committee on Banking Supervision 2019), estos resultados refuerzan la recomendación de adoptar distribuciones con colas pesadas en los modelos internos de riesgo. En la cartera CAP, los modelos gaussianos son rechazados tanto en frecuencia (Kupiec) como en severidad (McNeil-Frey), lo que constituye un doble incumplimiento que justificaría la imposición de multiplicadores de capital por parte del supervisor.

Como señala (Danielsson 2011), el backtesting del CVaR requiere tamaños de muestra sustancialmente mayores que el del VaR para obtener conclusiones estadísticamente robustas. Con una ventana de validación de 493 días y un nivel de confianza del 99 %, el número esperado de excepciones es de aproximadamente cinco, lo que limita la potencia de cualquier test basado en v_1. En consecuencia, los resultados de esta sección deben interpretarse como evidencia diagnóstica complementaria al backtesting del VaR, y no como contrastes de hipótesis definitivos. La representación temporal de estas métricas se analiza gráficamente en la Sección 6.7.

6.5.1. Calibración dinámica de ν y comparación con $\nu = 6$ fija

La Figura 6.2 muestra la evolución temporal de $\hat{\nu}_t$ a lo largo de las 493 ventanas de validación para la cartera CAP. La serie presenta una media de $\bar{\nu} = 11{,}6$ y una desviación típica de $s_\nu = 2{,}4$, con valores que oscilan entre $\hat{\nu}_{\text{mín}} = 7{,}9$ y $\hat{\nu}_{\text{máx}} = 16{,}0$.

La media de la serie calibrada ($\bar{\nu} = 11{,}6$) es sistemáticamente superior al valor fijo $\nu = 6$ adoptado en la estimación estática. Este resultado indica que, durante el periodo de validación 2024–2025, la distribución de los rendimientos presentó colas menos pesadas de lo que asume $\nu = 6$: un valor mayor de ν implica una distribución más próxima a la normal, con menor densidad en los extremos. En consecuencia, el modelo con $\nu = 6$ fijo sobreestima la probabilidad de eventos extremos respecto a lo que los datos de la ventana móvil sugieren, lo que se traduce en un VaR sistemáticamente más conservador: el modelo con $\nu = 6$ fijo registra 6 excepciones frente a las 8 del modelo con ν dinámico en la cartera CAP. El examen día a día confirma que la discrepancia se concentra en dos jornadas (3 de septiembre y 18 de diciembre de 2024) en las que el VaR más amplio de $\nu = 6$ fijo evita registrar una excepción que el modelo dinámico sí detecta.

La Tabla 6.8 compara los resultados del backtesting del VaR al 99 % para la cartera CAP bajo ambas especificaciones.

Ambas especificaciones superan los tests de Kupiec e independencia de Christoffersen, con 6 y 8 excepciones respectivamente, ambas próximas al valor teórico esperado de ≈ 5. El test de Kupiec resulta incluso más favorable bajo $\nu = 6$ fijo ($p = 0{,}636$ frente a $p = 0{,}201$),



Figura 6.2: Evolución temporal de $\hat{\nu}_t$ calibrado por máxima verosimilitud en cada ventana de entrenamiento (Cartera CAP). La línea discontinua roja indica el valor fijo $\nu = 6$ utilizado en la estimación estática; la línea de puntos negra muestra la media de la serie calibrada ($\bar{\nu} = 11{,}6$).

Tabla 6.8: Comparación del backtesting de VaR al 99 % bajo $\nu = 6$ fijo y ν calibrado dinámicamente — Cartera CAP.

Especificación de ν	Exc.	*Hit rate* (%)	p-Kupiec	p-Independ.	Diagnóstico
$\nu = 6$ (fijo)	6	1,220	0,636	0,055	Aprobado
$\hat{\nu}_t$ (dinámico)	8	1,626	0,201	0,111	Aprobado

$N_{\text{val}} = 493$; excepciones esperadas al 99 %: ≈ 5.

precisamente porque al ser más conservador produce un número de excepciones más cercano al esperado en esta ventana de validación concreta. La diferencia entre especificaciones no resulta significativa dado el tamaño muestral.

6.5.2. Análisis de sensibilidad al parámetro λ del modelo EWMA

El modelo EWMA fija el factor de decaimiento en $\lambda = 0{,}94$, siguiendo el estándar RiskMetrics (J.P. Morgan y Reuters 1994). Para evaluar la robustez de los resultados a esta elección, se replican los backtestings del VaR al 99 % bajo tres valores alternativos: $\lambda \in \{0{,}90;\ 0{,}94;\ 0{,}97\}$. Un valor menor de λ pondera más las observaciones recientes, generando una covarianza más reactiva, mientras que uno mayor produce una estimación más suavizada y estable.

Tabla 6.9: Análisis de sensibilidad del modelo EWMA: excepciones del VaR al 99 % y p-valor de Kupiec para $\lambda \in \{0{,}90;\ 0{,}94;\ 0{,}97\}$.

	Cartera CAP		Cartera EW		Cartera GMVP	
λ	Exc.	p-Kup.	Exc.	p-Kup.	Exc.	p-Kup.
0,90	14	0,001	11	0,018	9	0,098
0,94	12	0,007	11	0,018	9	0,098
0,97	10	0,043	9	0,098	7	0,376

$\lambda = 0{,}94$: valores del backtesting principal (Tabla 6.10).
$N_{\text{val}} = 493$; excepciones esperadas al 99 %: ≈ 5.

Los resultados revelan una pauta clara: el número de excepciones decrece al aumentar λ en todas las carteras, lo que indica que una covarianza más suavizada produce estimaciones de VaR más conservadoras. Sin embargo, el modelo EWMA Normal es rechazado por el test de Kupiec en las carteras CAP y EW para los tres valores de λ analizados, con p-valores inferiores a $0{,}05$ en todos los casos. Esta evidencia confirma que el origen del fallo no es la calibración del parámetro, sino el supuesto de normalidad ya que subestima la probabilidad de pérdidas extremas independientemente de cómo se estime la covarianza (Cont 2001; Danielsson 2011).

La cartera GMVP es la única en la que el modelo EWMA Normal supera el test de Kupiec para todos los valores de λ, con p-valores que mejoran progresivamente de $0{,}098$ ($\lambda = 0{,}90$ y $0{,}94$) a $0{,}376$ ($\lambda = 0{,}97$). Este resultado refuerza la conclusión de la Sección 6.4: la optimización de Markowitz genera una distribución de pérdidas suficientemente concentrada como para que incluso los modelos gaussianos produzcan backtestings aceptables en términos de frecuencia, independientemente de la especificación de la covarianza.

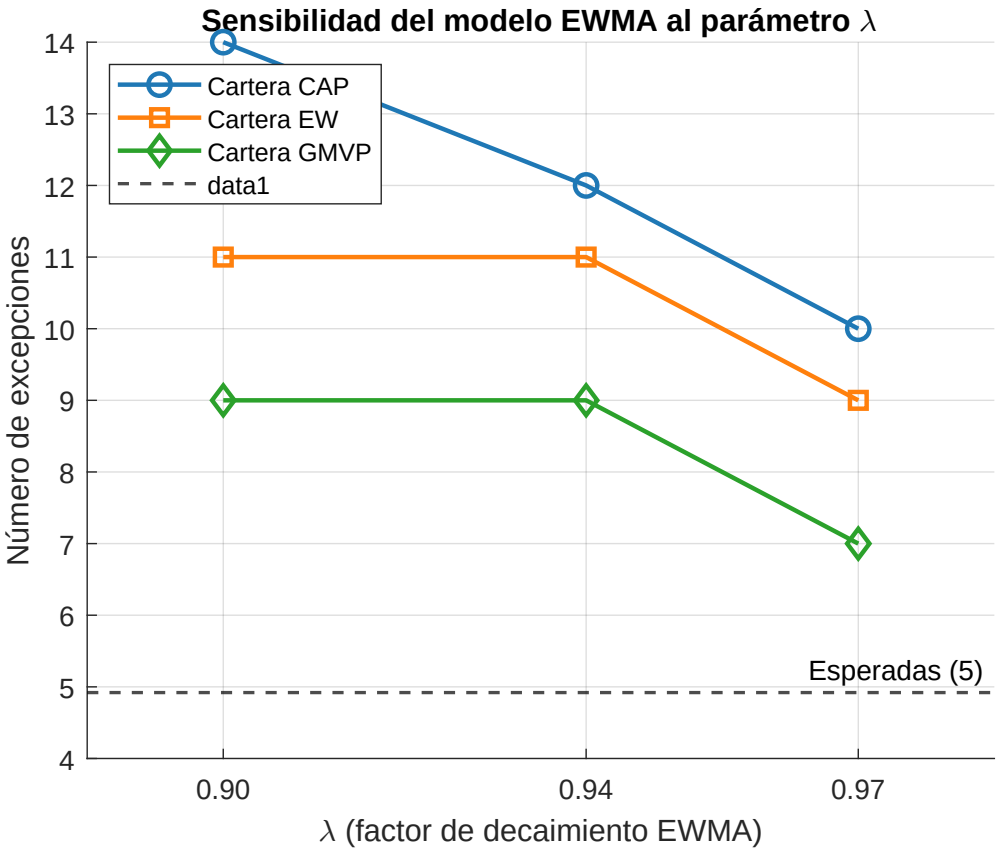


Figura 6.3: Número de excepciones del backtesting de VaR al 99 % bajo el modelo EWMA para $\lambda \in \{0{,}90;\ 0{,}94;\ 0{,}97\}$. La línea discontinua indica las excepciones esperadas (≈ 5) para $N_{\text{val}} = 493$ y $\alpha = 99\,\%$.

6.6. Tabla resumen comparativa

La Tabla 6.10 sintetiza los resultados principales del backtesting para facilitar la comparación entre carteras y modelos.

Tabla 6.10: Resumen comparativo del backtesting de VaR al 99 % para las tres carteras

Cartera	Modelo	Exc.	Hit Rate	Kupiec	Christoffersen	Diagnóstico
CAP	Histórico	10	2,033 %	No pasa	Pasa	Rechazado
	Paramétrico normal	12	2,439 %	No pasa	Pasa	Rechazado
	EWMA normal	12	2,439 %	No pasa	Pasa	Rechazado
	MC normal	12	2,439 %	No pasa	Pasa	Rechazado
	MC t-Student	**8**	**1,626 %**	**Pasa**	**Pasa**	**Aprobado**
	MC Laplace	7	1,423 %	Pasa	Pasa	Aprobado
EW	Histórico	7	1,423 %	Pasa	Pasa	Aprobado
	Paramétrico normal	10	2,033 %	No pasa	Pasa	Rechazado
	EWMA normal	11	2,236 %	No pasa	Pasa	Rechazado
	MC normal	10	2,033 %	No pasa	Pasa	Rechazado
	MC t-Student	**7**	**1,423 %**	**Pasa**	**Pasa**	**Aprobado**
	MC Laplace	7	1,423 %	Pasa	Pasa	Aprobado
GMVP	Histórico	6	1,220 %	Pasa	Pasa	Aprobado
	Paramétrico normal	7	1,423 %	Pasa	Pasa	Aprobado
	EWMA normal	9	1,829 %	Pasa	Pasa	Aprobado
	MC normal	7	1,423 %	Pasa	Pasa	Aprobado
	MC t-Student	**5**	**1,016 %**	**Pasa**	**No pasa**	**Parcial**
	MC Laplace	4	0,813 %	Pasa	No pasa	Parcial

La tabla resumen permite extraer tres conclusiones generales.

Primera. La cartera GMVP es la que presenta el comportamiento más favorable en el backtesting en términos de frecuencia de excepciones: todos los modelos, incluidos los gaussianos, superan el test de Kupiec. Esto confirma que la optimización de Markowitz genera una distribución de pérdidas suficientemente concentrada como para que la elección de distribución pierda relevancia práctica en términos de cobertura. Conviene matizar, no obstante, que en esta cartera el modelo MC t-Student y MC Laplace son rechazados por el test de independencia de Christoffersen ($p < 0{,}05$), lo que indica cierta agrupación temporal de las excepciones. Dado que $v_1 \leq 5$ en ambos casos, la potencia estadística de este contraste es reducida (Danielsson 2011), por lo que el diagnóstico se etiqueta como *parcial* en lugar de *aprobado*: el modelo es adecuado en frecuencia pero su comportamiento temporal no puede validarse de forma concluyente con el tamaño muestral disponible.

Segunda. Los modelos gaussianos fallan sistemáticamente en las carteras CAP y EW, donde la concentración tecnológica genera colas más pesadas de lo que la distribución normal puede capturar. El fallo es homogéneo –los tres modelos gaussianos producen exactamente las mismas excepciones en CAP– lo que confirma que el problema reside en el supuesto distribucional y no en la especificación particular de la covarianza (estática, EWMA o Monte Carlo).

Tercera. El modelo MC t-Student es el más consistente entre las tres carteras analizadas: es el único que supera ambos tests en CAP y en EW, precisamente las dos carteras donde la concentración de riesgo es mayor y donde la validación es más exigente. En la cartera GMVP, donde la propia diversificación ya mitiga gran parte del riesgo de cola, su ventaja relativa se diluye porque incluso los modelos gaussianos aprueban en frecuencia. Esto sugiere una lectura combinada de los dos hallazgos centrales del trabajo: la elección de distribución y la composición de la cartera no son mecanismos alternativos sino complementarios, y su efecto conjunto resulta más visible cuanto mayor es la concentración de riesgo de partida.

6.7. Análisis gráfico de resultados

Esta sección complementa el análisis numérico con representaciones gráficas que permiten visualizar el comportamiento de la distribución de pérdidas, las métricas de riesgo y el backtesting.

6.7.1. Distribución de pérdidas y localización del VaR y CVaR

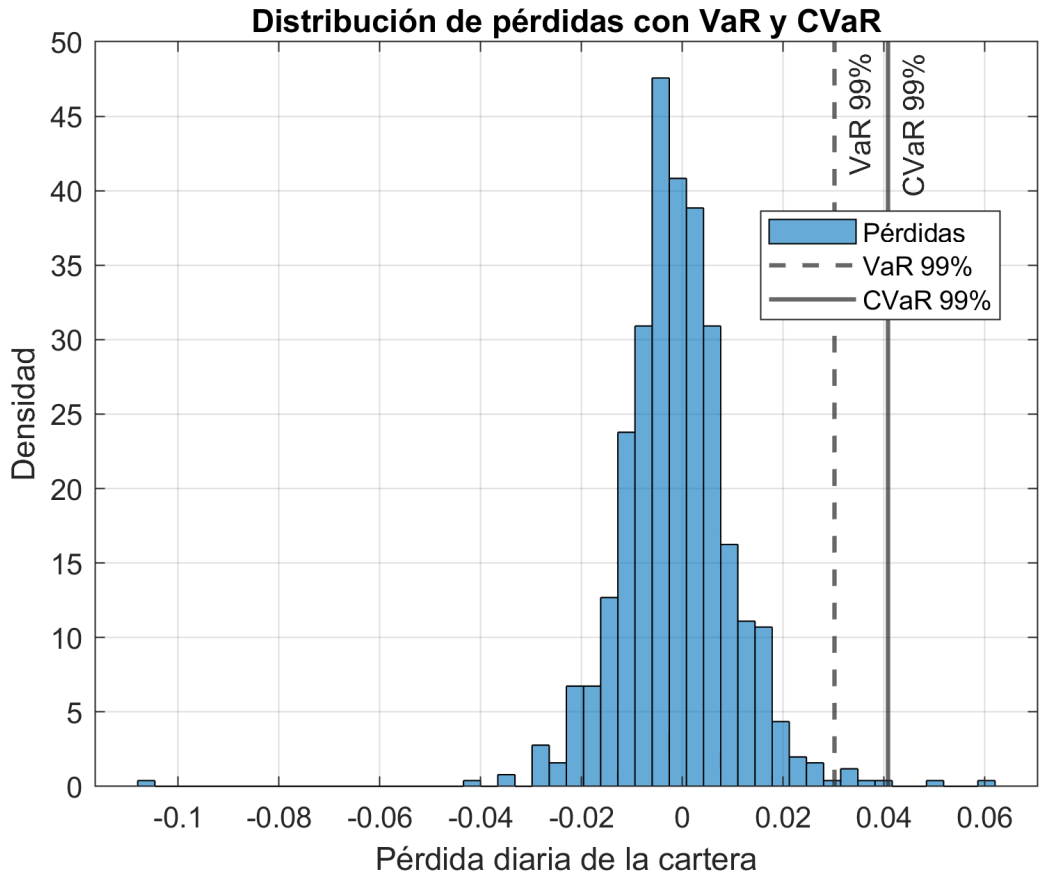


Figura 6.4: Distribución de pérdidas simuladas con indicación del VaR y CVaR al 99 % (Cartera CAP).

La Figura 6.4 ilustra la diferencia conceptual entre VaR y CVaR. El VaR delimita el inicio de la cola extrema, pero no informa sobre la magnitud de las pérdidas más allá de ese punto. El CVaR, al desplazarse hacia valores superiores, recoge la severidad media de los escenarios más extremos (Danielsson 2011).

6.7.2. Comparación de VaR y CVaR por modelo

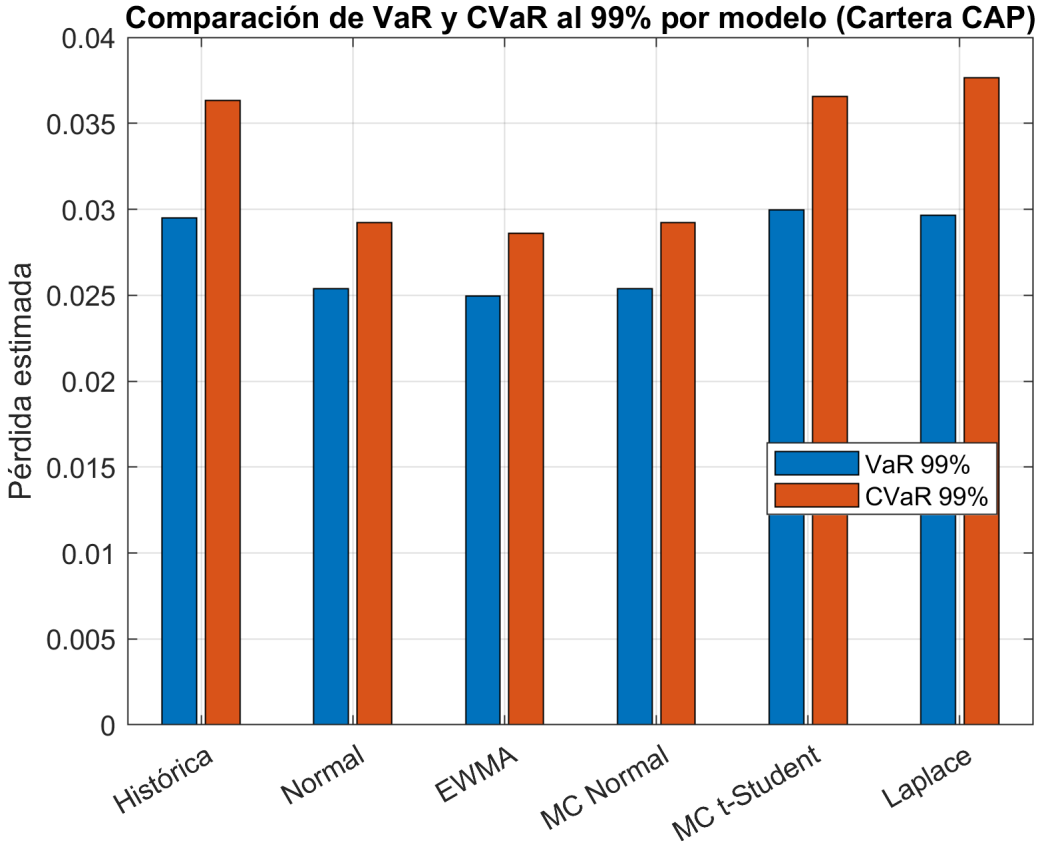


Figura 6.5: Comparación de VaR y CVaR al 99 % bajo distintas metodologías (Cartera CAP).

La Figura 6.5 muestra cómo la elección del modelo distribucional afecta directamente a las métricas estimadas. Los modelos gaussianos producen estimaciones más reducidas, especialmente en el CVaR, mientras que la t-Student genera valores más elevados al asignar mayor probabilidad a eventos extremos (Danielsson 2011).

6.7.3. Representación temporal del backtesting del VaR

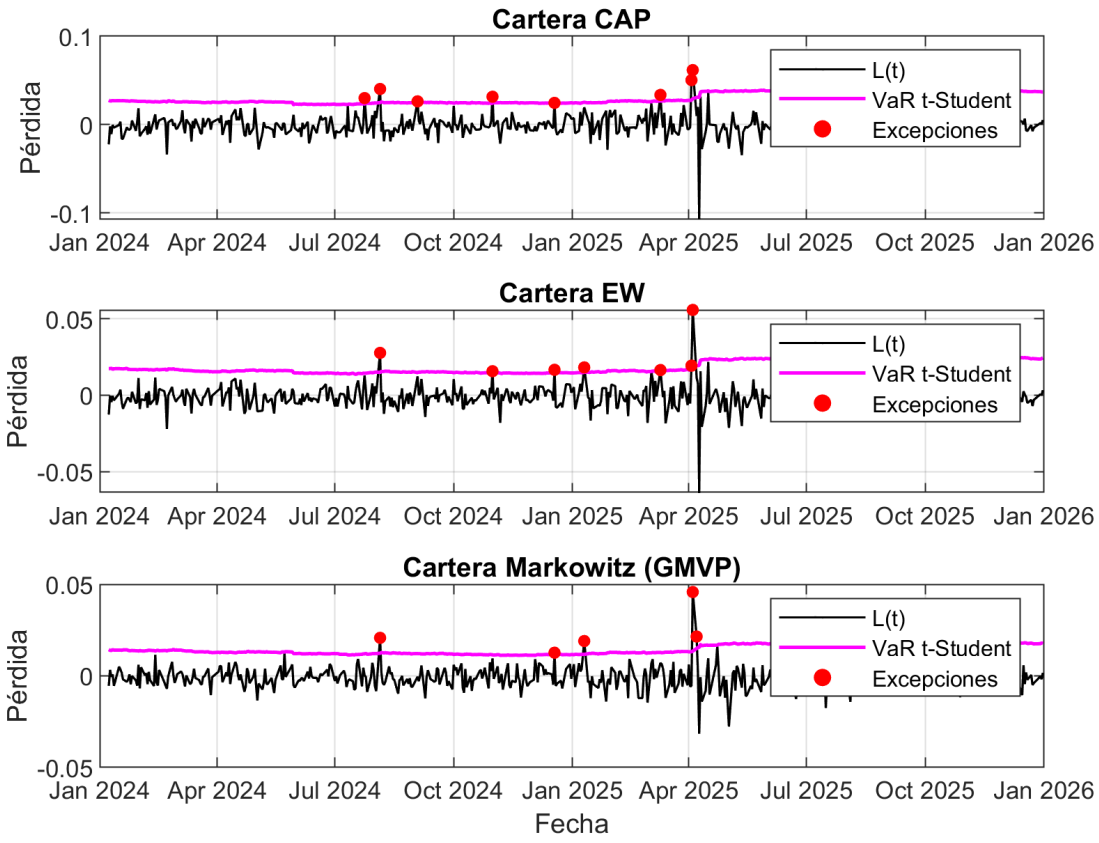


Figura 6.6: Backtesting del VaR al 99 % para las tres carteras: pérdidas observadas frente al umbral estimado por el modelo t-Student.

La Figura 6.6 muestra el backtesting de las tres carteras en paralelo. Se aprecia visualmente que la cartera CAP presenta más excepciones y mayor amplitud en las pérdidas extremas, mientras que la cartera GMVP muestra una serie de pérdidas más contenida y un VaR estimado más estable a lo largo del tiempo.

6.7.4. Representación temporal del backtesting del CVaR

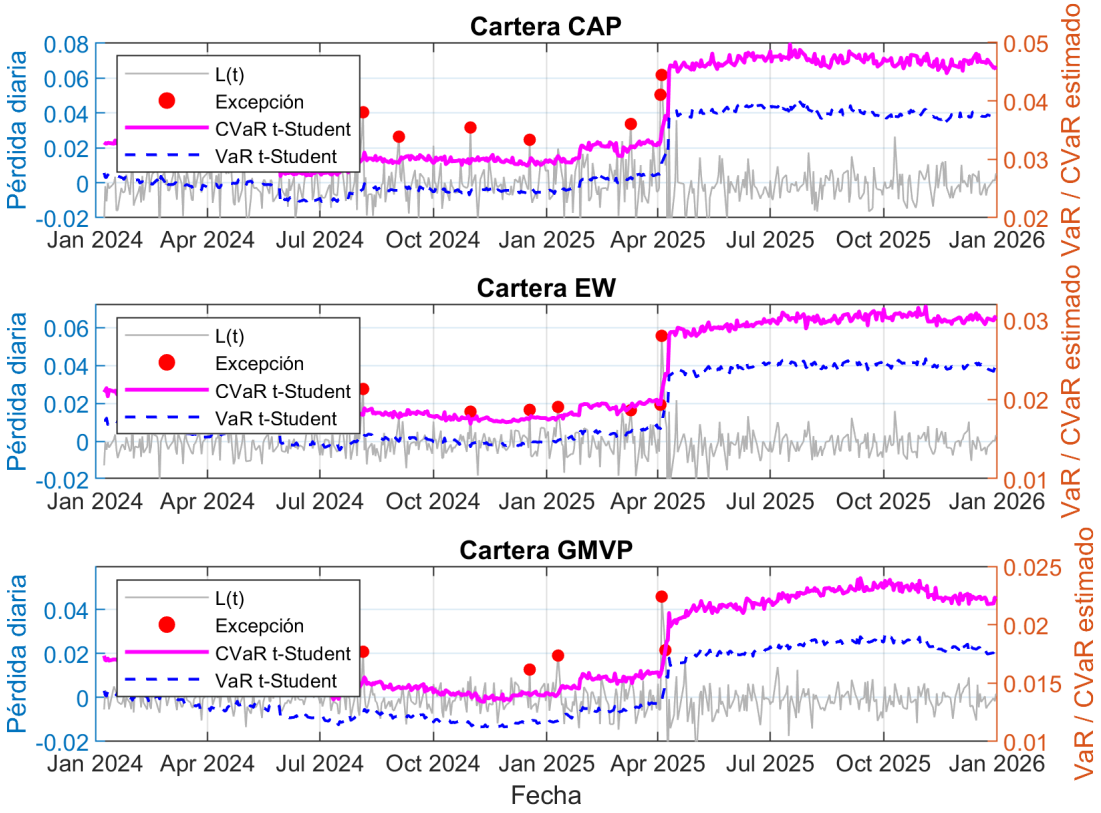


Figura 6.7: Backtesting del CVaR al 99 % para las tres carteras bajo el modelo MC t-Student. El eje izquierdo muestra las pérdidas diarias realizadas (gris) y los días de excepción del VaR (puntos rojos). El eje derecho muestra la evolución temporal del VaR estimado (azul discontinuo) y del CVaR estimado (magenta continuo). En los días de excepción del VaR (puntos rojos), la pérdida real debería quedar por debajo del CVaR estimado si el modelo captura correctamente la severidad condicional. La cartera CAP presenta pérdidas extremas que en algunos episodios superan incluso el CVaR, mientras que la cartera GMVP muestra una serie de pérdidas más contenida y métricas de riesgo más estables a lo largo del tiempo.

La Figura 6.7 complementa el análisis de la Tabla 6.7 con una perspectiva temporal. A diferencia del backtesting del VaR, donde el criterio de validación es binario (excepción o no excepción), el backtesting del CVaR evalúa si la magnitud de las pérdidas en los días de excepción es compatible con el nivel estimado por el modelo. Se aprecia que el CVaR estimado por el modelo t-Student se sitúa sistemáticamente por encima del VaR, capturando así la severidad adicional de las pérdidas extremas. En la cartera CAP, donde se concentran los episodios de mayor estrés, la distancia entre VaR y CVaR es mayor, lo que refleja la presencia de colas más pesadas asociadas a la concentración tecnológica de esa cartera.

6.7.5. Matriz de correlaciones

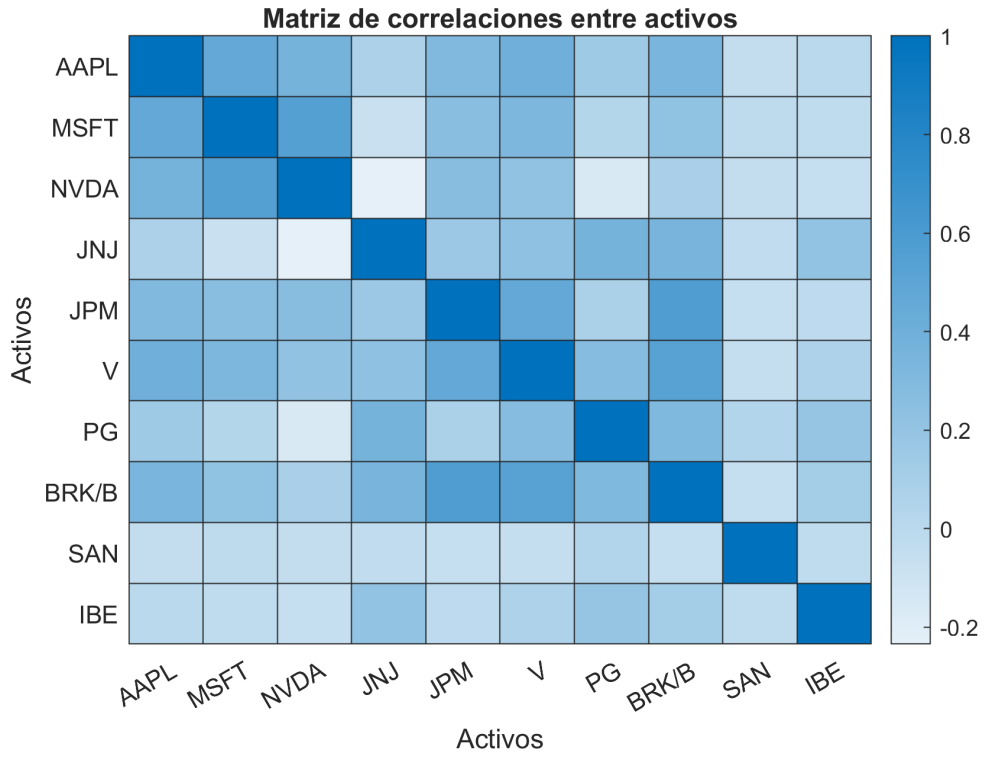


Figura 6.8: Mapa de calor de la matriz de correlaciones entre los activos de la cartera. Las correlaciones elevadas entre los valores tecnológicos (AAPL, MSFT, NVDA) contrastan con las correlaciones bajas de SAN e IBE respecto al resto, lo que explica su papel como diversificadores naturales en la cartera GMVP.

La Figura 6.8 permite identificar qué activos presentan mayor dependencia lineal. Las correlaciones elevadas entre los valores tecnológicos explican en parte por qué la cartera CAP, con más del 71 % en ese sector, presenta un VaR base de 3,327 % frente al 1,705 % de la GMVP, que distribuye el capital hacia activos con menor correlación entre sí.

6.7.6. Frontera eficiente de Markowitz

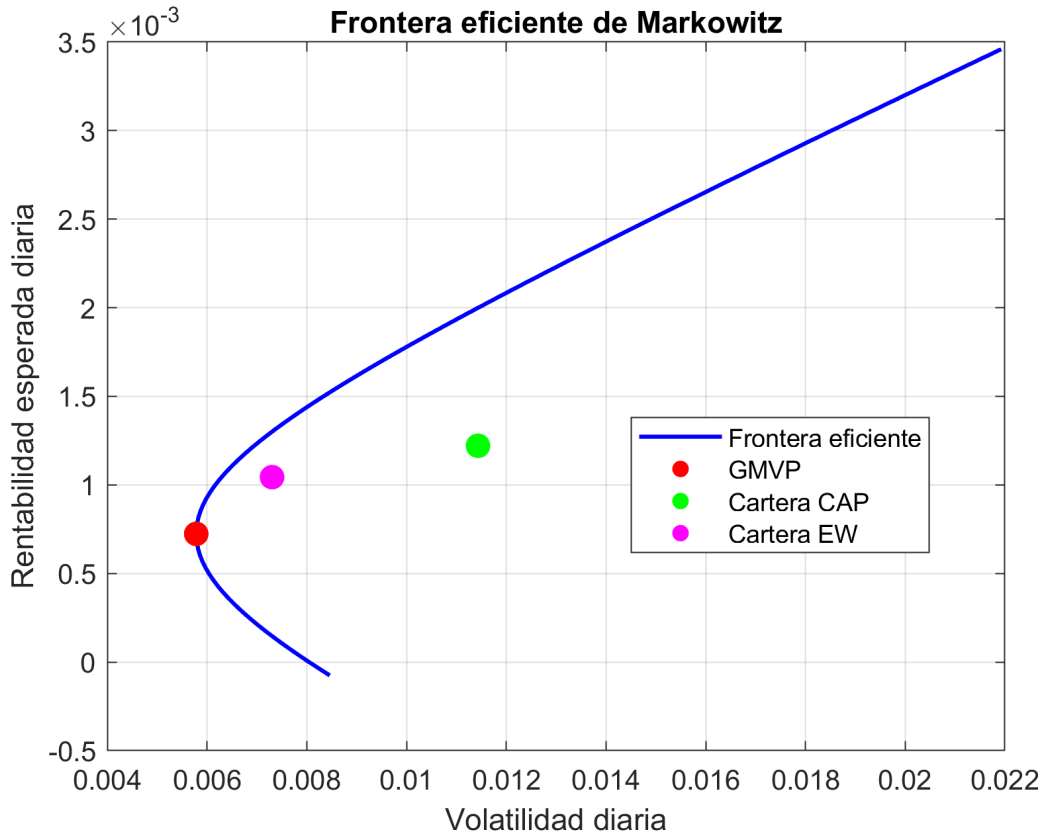


Figura 6.9: Frontera eficiente de Markowitz y localización de las tres carteras analizadas.

La Figura 6.9 muestra la posición relativa de las tres carteras en el espacio rentabilidad esperada-volatilidad, la cartera GMVP se sitúa en el punto de mínima volatilidad de la frontera eficiente, y la cartera EW se encuentra en una posición intermedia con menor volatilidad que la CAP pero superior a la GMVP. La cartera CAP queda más alejada de la frontera, reflejando su concentración sectorial.

6.7.7. Comparación entre distribución normal y t-Student

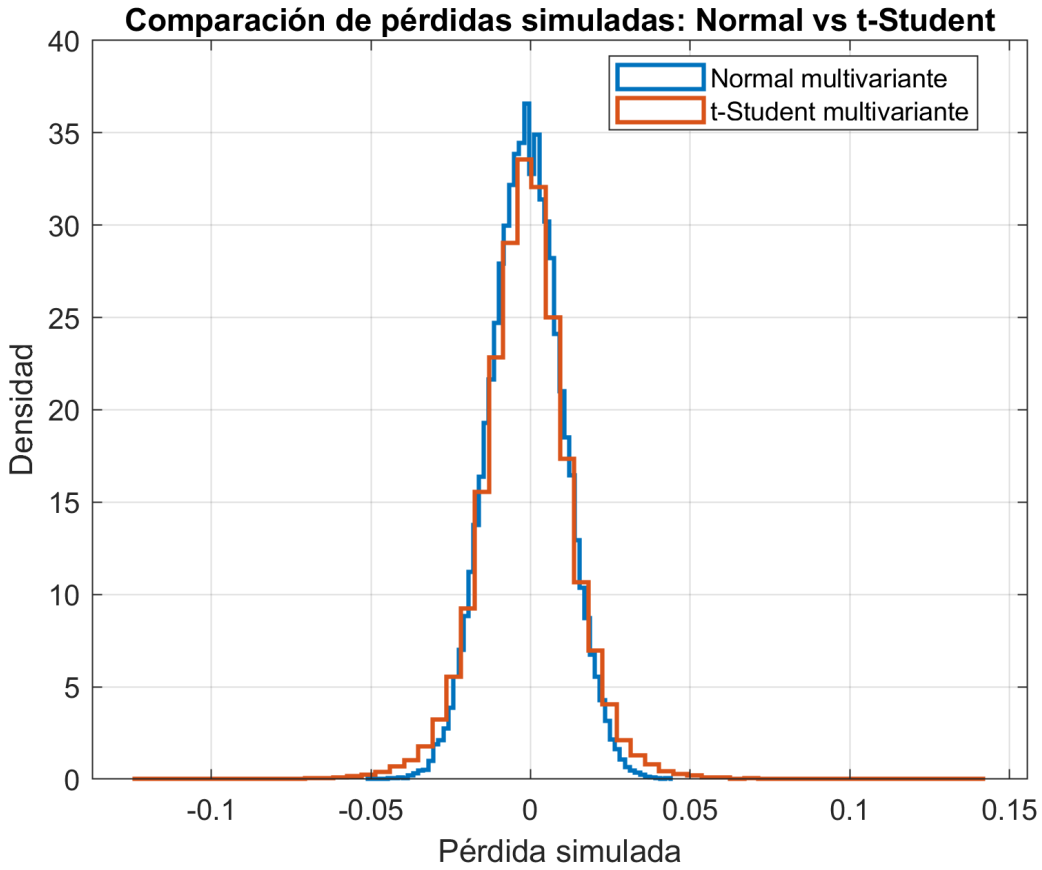


Figura 6.10: Comparación entre pérdidas simuladas bajo distribución normal y t-Student (Cartera CAP).

La Figura 6.10 ilustra visualmente la diferencia entre ambas distribuciones en la cola derecha. La t-Student asigna mayor probabilidad a pérdidas extremas, lo que se refleja en valores de CVaR más elevados y en un mejor comportamiento del modelo precisamente cuando el mercado sufre episodios de estrés.

6.7.8. ESgap por modelo y cartera

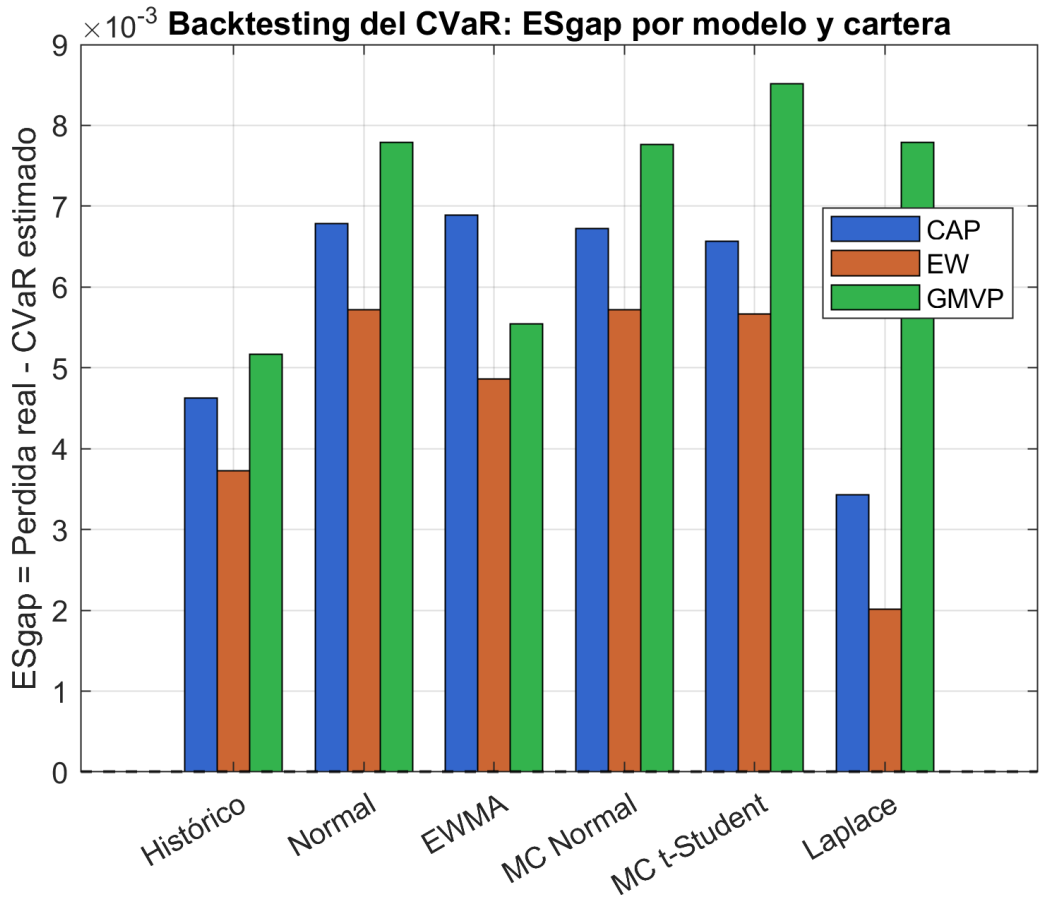


Figura 6.11: ESgap $= \bar{L}_{\text{exc}} - \widehat{\text{ES}}$ por modelo y cartera al 99 % de confianza. Un ESgap positivo indica subestimación de la severidad condicional. El modelo MC t-Student presenta ESgap positivo en todas las carteras, siendo el más elevado en GMVP ($+0{,}852\,\%$); sin embargo, en los tres casos el intervalo bootstrap contiene la unidad y el test McNeil-Frey no rechaza H_0, por lo que no hay evidencia formal de subestimación. Los modelos gaussianos presentan ESgap sistemáticamente positivo con intervalos bootstrap que excluyen la unidad en las carteras CAP y EW, confirmando la subestimación del CVaR.

La Figura 6.11 complementa los resultados numéricos de la Tabla 6.7 con una representación visual del ESgap por modelo y cartera. El patrón dominante es claro: los modelos gaussianos presentan un ESgap positivo y homogéneo en las carteras CAP y EW, de entre $0{,}49\,\%$ y $0{,}78\,\%$, lo que refleja una subestimación sistemática de la severidad de las pérdidas extremas. La cartera GMVP muestra valores ligeramente superiores para los modelos gaussianos, aunque en ese caso los tests formales no rechazan H_0 dada la baja concentración de riesgo de la cartera.

El modelo MC t-Student en la cartera CAP presenta el ESgap más reducido de los tres modelos comparados ($+0{,}657\,\%$), confirmando que es el único que captura adecuadamente tanto la frecuencia como la severidad de las pérdidas extremas en la cartera con mayor concentración sectorial.

Capítulo 7

Conclusiones

Este Trabajo Fin de Grado ha desarrollado un modelo cuantitativo de medición del riesgo financiero de una cartera multivariante mediante simulaciones Monte Carlo, comparando distintas hipótesis distribucionales y tres esquemas de ponderación, y validando los resultados empíricamente mediante backtesting sobre datos reales del periodo 2023–2025. A continuación se recogen las principales conclusiones extraídas del trabajo, organizadas en torno a los objetivos planteados en el Capítulo 3.

7.1. Conclusiones sobre el análisis estadístico

El análisis univariante de los rendimientos confirma que los activos financieros analizados no se distribuyen como una normal. NVIDIA, tomada como caso de estudio por ser el activo más volátil de la muestra, presenta un exceso de curtosis de 3,42 y caídas diarias de hasta el $-14{,}21\,\%$, muy por encima de lo que predice una distribución gaussiana. Este comportamiento no es exclusivo de NVIDIA: las colas pesadas son una propiedad estructural de los rendimientos financieros reconocida de forma generalizada en la literatura (Cont 2001; Danielsson 2011).

La distribución t-Student, con grados de libertad estimados de $\nu = 4{,}2$ para NVIDIA en el análisis univariante, se adapta con mayor precisión tanto al apuntamiento central como a las colas de la distribución. La distribución de Laplace, pese a ofrecer colas más pesadas que la gaussiana, no mejora el ajuste en las regiones intermedias de la distribución, lo que justifica su uso exclusivo como referencia de diagnóstico y no como modelo central de simulación.

7.2. Conclusiones sobre la construcción de carteras

La comparación entre los tres esquemas de ponderación revela diferencias estructurales relevantes tanto en la composición como en el riesgo agregado. El VaR base al 99 % decrece progresivamente de 3,327 % en la cartera CAP a 2,068 % en la cartera EW y 1,705 % en la cartera GMVP. Esta reducción del 49 % entre CAP y GMVP ilustra el impacto directo de la

composición de la cartera sobre el riesgo extremo.

La cartera CAP concentra más del 71 % del capital en el sector tecnológico, lo que genera una exposición elevada a los riesgos específicos de ese sector y explica su mayor VaR base. La cartera EW, al distribuir el capital de forma uniforme sin incorporar información estadística, ya consigue una reducción significativa del riesgo respecto a CAP. La cartera GMVP reduce adicionalmente el riesgo al explotar la estructura de covarianzas, concentrando el capital en sectores defensivos como Iberdrola (21,39 %), Procter & Gamble (16,25 %), Johnson & Johnson (15,71 %) y Banco Santander (12,98 %).

El análisis del VaR Incremental confirma que NVIDIA es el principal generador de riesgo en las tres carteras, con un $IVaR$ de $+0{,}00421$ en CAP y $+0{,}00272$ en EW. En la cartera GMVP, donde su peso se reduce al 1,33 %, su contribución es prácticamente nula. Un resultado especialmente llamativo es el $IVaR$ negativo de Banco Santander e Iberdrola en la cartera EW ($-0{,}00280$ y $-0{,}00187$), lo que indica que estos activos españoles actúan como diversificadores naturales respecto a los activos estadounidenses gracias a su baja correlación con el resto de la cartera.

7.3. Conclusiones sobre la simulación Monte Carlo

La simulación Monte Carlo con $N = 50{,}000$ escenarios ha demostrado ser una herramienta flexible y computacionalmente viable para aproximar la distribución de pérdidas bajo distintos supuestos distribucionales (Glasserman 2004; Danielsson 2011). La descomposición de Cholesky permite introducir de forma exacta la estructura de correlación entre activos, garantizando que los escenarios simulados sean coherentes con la dependencia observada en los datos históricos.

La comparación entre el modelo normal multivariante y el modelo t-Student multivariante ilustra el impacto directo de la elección distribucional. En la cartera CAP, el diferencial de CVaR entre la pérdida real y la estimada es de $+0{,}679\,\%$ bajo el modelo normal y de $+0{,}657\,\%$ bajo la t-Student. Aunque la diferencia cuantitativa es modesta, el modelo t-Student es el único que no es rechazado formalmente por el test de McNeil-Frey ($p = 0{,}131$ frente a $p < 0{,}05$ para los modelos gaussianos), lo que confirma su superioridad estadística para capturar la severidad de los escenarios adversos.

Es importante señalar que la t-Student multivariante no modela correlaciones cambiantes en el tiempo: la correlación lineal entre activos permanece constante, y lo que cambia es la intensidad de la dependencia en la cola mediante el factor de escala aleatorio $S \sim \chi^2_\nu$. Para modelar correlaciones verdaderamente dinámicas serían necesarios enfoques más avanzados como DCC-GARCH o cópulas dinámicas (McNeil, Frey y Embrechts 2005).

La calibración dinámica de ν por ventana, introducida como extensión metodológica, arroja una media de $\bar{\nu} = 11{,}6$ sobre las 493 ventanas de estimación del backtesting, valor sistemáticamente superior al $\nu = 6$ fijo adoptado en la estimación estática. Este resultado indica que,

durante el periodo de validación, las colas de los rendimientos fueron menos pesadas de lo que asume $\nu = 6$, lo que explica el carácter conservador del modelo original. El backtesting con ν dinámico y con $\nu = 6$ fijo producen 8 y 6 excepciones respectivamente en la cartera CAP, ambas estadísticamente aceptables, lo que matiza la elección adoptada siguiendo (McNeil, Frey y Embrechts 2005; Danielsson 2011) sin invalidarla, ya que $\nu = 6$ introduce una sobreestimación del riesgo de cola moderada, generando un VaR ligeramente más conservador sin que ello comprometa la validez estadística del modelo.

7.4. Conclusiones sobre el backtesting

El backtesting constituye el criterio empírico central para evaluar la calidad predictiva de los modelos (Kupiec 1995; Danielsson 2011). Los resultados obtenidos son coherentes con las hipótesis teóricas del trabajo y permiten extraer conclusiones claras.

En la cartera CAP, los modelos gaussianos registran 12 excepciones frente a las aproximadamente 5 esperadas para un nivel de confianza del 99 % en una ventana de 493 días, con p-valores de Kupiec inferiores a $0{,}01$. El modelo MC t-Student es el único que supera ambos tests con 8 excepciones y p-valores de $0{,}201$ y $0{,}111$ para Kupiec e independencia respectivamente.

En la cartera EW, los modelos gaussianos siguen fallando el test de Kupiec con 10–11 excepciones. El modelo MC t-Student produce 7 excepciones, lo que pasa los tests estadísticos con p-valores holgados. El backtesting del CVaR muestra un NS de $1{,}278$ con IC $[0{,}93;\ 1{,}78]$ y $p_{\mathrm{MF}} = 0{,}306$: no hay evidencia formal de subestimación de la severidad.

En la cartera GMVP, el resultado más destacable es que prácticamente todos los modelos superan los tests estadísticos, incluidos los gaussianos. Esto indica que la optimización de Markowitz genera una distribución de pérdidas más predecible y mejor calibrada para cualquier modelo de riesgo, no solo para la t-Student. La reducción del riesgo agregado por la optimización de pesos tiene un efecto positivo sobre la calidad del backtesting que va más allá de la elección distribucional.

El análisis de sensibilidad al parámetro λ del modelo EWMA confirma que los fallos documentados en las carteras CAP y EW son robustos a la calibración del factor de decaimiento. El modelo EWMA Normal es rechazado por el test de Kupiec para $\lambda \in \{0{,}90;\ 0{,}94;\ 0{,}97\}$ en ambas carteras, con p-valores inferiores a $0{,}05$ en todos los casos, lo que demuestra que el origen del fallo es el supuesto de normalidad y no la especificación de la covarianza dinámica (Cont 2001). En la cartera GMVP, todos los valores de λ producen backtestings aceptables, lo que refuerza la robustez de la diversificación estadística frente a distintas especificaciones del modelo de covarianza (Danielsson 2011).

7.5. Conclusiones sobre la implementación computacional

La implementación desarrollada en MATLAB integra de forma modular el preprocesamiento de datos, la optimización de carteras, la simulación Monte Carlo y la validación mediante backtesting. La semilla aleatoria fija (`rng(1)`) garantiza la replicabilidad exacta de los resultados, y la función `robust_chol` asegura la estabilidad numérica de la factorización de Cholesky incluso en ventanas donde la matriz de covarianzas muestral es casi singular.

El diseño modular del código facilita su extensión futura: es posible incorporar nuevas distribuciones, ampliar la cartera con más activos, modificar la ventana de estimación o añadir nuevos esquemas de ponderación sin alterar la estructura general del modelo.

7.6. Limitaciones y líneas futuras

El trabajo presenta varias limitaciones que señalan posibles extensiones futuras.

En primer lugar, el análisis se limita a diez activos de dos mercados (Estados Unidos y España). Ampliar la cartera a otros mercados geográficos (Europa continental, Asia o mercados emergentes) aumentaría la heterogeneidad de las correlaciones y permitiría estudiar si las conclusiones sobre la superioridad de la t-Student se mantienen en contextos con estructuras de dependencia más complejas.

En segundo lugar, la covarianza EWMA asume una estructura de dependencia lineal constante entre activos, ajustando únicamente la escala de la volatilidad mediante un factor de decaimiento fijo $\lambda = 0{,}94$. El modelo DCC-GARCH (Engle 2002) constituye una extensión natural en dos sentidos: por un lado, generaliza la actualización dinámica de la volatilidad individual de cada activo con parámetros estimados por máxima verosimilitud en lugar de fijados a priori; por otro, permite que las correlaciones entre activos varíen en el tiempo, aumentando en periodos de crisis y reduciéndose en periodos de calma. Esta propiedad es especialmente relevante en carteras como la CAP, donde la alta correlación entre los valores tecnológicos tiende a intensificarse precisamente cuando más se necesita la diversificación.

En tercer lugar, el análisis se restringe a un horizonte diario. La extensión a horizontes de 5 o 10 días, más relevantes desde el punto de vista regulatorio, requeriría simular directamente pérdidas acumuladas en lugar de aplicar la aproximación de raíz cuadrada del tiempo (Danielsson 2011).

En cuarto lugar, la ventana de validación fuera de muestra abarca 493 días, lo que genera un número esperado de excepciones de aproximadamente cuatro para un nivel de confianza del 99 %. Este tamaño muestral efectivo v_1 es insuficiente para obtener inferencia estadística precisa en el backtesting del CVaR: como se documentó en la Sección 6.5, los intervalos bootstrap sobre el shortfall normalizado $\overline{\text{NS}}$ resultan muy amplios cuando $v_1 < 10$, lo que limita la potencia de cualquier contraste basado en dicho estadístico (Danielsson 2011). Dos extensiones concretas permitirían mitigar esta limitación. La primera consistiría en ampliar el periodo de

análisis hasta cubrir cinco años completos —por ejemplo, 2021–2025—, lo que proporcionaría aproximadamente 1 250 observaciones fuera de muestra y un número esperado de excepciones cercano a doce, suficiente para obtener intervalos bootstrap sustancialmente más estrechos. La segunda, aplicable incluso con la muestra actual, consistiría en emplear técnicas de *bootstrap* sobre bloques solapados (*overlapping block bootstrap*) para el backtesting del CVaR: en lugar de basarse únicamente en los v_1 días de excepción observados, se generarían réplicas sintéticas de la secuencia de pérdidas preservando su estructura de dependencia temporal, lo que aumentaría la potencia del test de McNeil-Frey sin requerir datos adicionales (McNeil, Frey y Embrechts 2005).

En quinto lugar, el modelo podría enriquecerse mediante el uso de cópulas (Nelsen 2006). La t-Student multivariante utilizada en este trabajo impone que todos los activos compartan el mismo grosor de colas, controlado por un único parámetro ν. Las cópulas generalizan esta estructura separando dos componentes: la distribución marginal de cada activo, que puede ser distinta para cada uno, y la estructura de dependencia entre ellos, que puede ser asimétrica. Una cópula de Clayton, por ejemplo, captura dependencia de cola inferior más intensa que superior, es decir, los activos tienden a caer juntos con más frecuencia de lo que suben juntos. Esta extensión sería especialmente relevante para carteras con activos de perfiles distribucionales muy heterogéneos, como la mezcla de valores tecnológicos estadounidenses y *utilities* españolas de este trabajo.

7.7. Reflexión final

El trabajo muestra que la medición del riesgo financiero no puede reducirse a una única métrica ni a un único supuesto estadístico (Danielsson 2011). Los resultados empíricos obtenidos con datos reales del periodo 2023–2025 confirman tres ideas centrales.

Primera, la elección de la distribución importa: en la cartera CAP, pasar de un modelo gaussiano a la t-Student genera un diferencial de CVaR de $+0{,}657\,\%$ frente a $+0{,}679\,\%$ del modelo normal; la diferencia cuantitativa es modesta, pero el modelo t-Student es el único que no es rechazado formalmente por el test de McNeil-Frey, lo que tiene implicaciones directas sobre la suficiencia del capital asignado para cubrir pérdidas extremas.

Segunda, la construcción de la cartera importa tanto como el modelo: la cartera GMVP presenta un VaR base un 49 % inferior al de la CAP y supera los tests estadísticos con prácticamente todos los modelos, incluidos los gaussianos. Optimizar la composición de la cartera es tan efectivo para gestionar el riesgo como sofisticar el modelo distribucional.

Tercera, validar el modelo importa: el backtesting no es un trámite final sino una herramienta de control que permite detectar desajustes entre el modelo y la realidad, tanto en frecuencia de excepciones como en severidad de las pérdidas. Sin backtesting, un modelo puede parecer adecuado en términos teóricos y fallar sistemáticamente en condiciones reales de mercado.

En un entorno regulatorio que exige cada vez mayor rigor en la validación de los modelos

internos de riesgo, este trabajo demuestra que la combinación de distribuciones con colas pesadas, optimización de carteras y backtesting formal no es un lujo metodológico sino una necesidad práctica. Los resultados obtenidos con datos reales del periodo 2023–2025 confirman que ignorar cualquiera de estas tres dimensiones puede llevar a subestimar sistemáticamente el capital regulatorio necesario para absorber pérdidas extremas.

Alineación con los Objetivos de Desarrollo Sostenible

Los Objetivos de Desarrollo Sostenible (ODS), adoptados por Naciones Unidas en 2015 en el marco de la Agenda 2030, constituyen un sistema de referencia global para orientar políticas públicas y decisiones privadas hacia horizontes más equitativos y sostenibles (United Nations 2015). La contribución de un Trabajo Fin de Grado a estos objetivos no puede evaluarse en términos de impacto directo, sino de alineación metodológica: en qué medida las herramientas desarrolladas, los problemas abordados y las conclusiones obtenidas son coherentes con las metas específicas de cada ODS. Este apéndice analiza dicha alineación de forma rigurosa.

Tabla 1: Alineación del TFG con los Objetivos de Desarrollo Sostenible

Dimensión	ODS	Rol	Meta específica
Biosfera	—	—	—
Sociedad	ODS 16	Secundario	Meta 16.6
Economía	ODS 8	Secundario	Meta 8.10
Economía	ODS 9	Principal	Meta 9.3

ODS principal: ODS 9 — Industria, innovación e infraestructura

La meta 9.3 de este objetivo persigue ampliar el acceso de las pequeñas empresas a los servicios e instrumentos financieros, incluyendo herramientas de análisis de riesgo que históricamente han requerido infraestructura tecnológica y capital humano especializado propios de grandes instituciones bancarias. La alineación de este trabajo con dicha meta es metodológica, no de despliegue: el modelo desarrollado demuestra que es técnicamente posible implementar un sistema completo de estimación de VaR y CVaR bajo distribuciones con colas pesadas (incluyendo backtesting formal con los tests de Kupiec, Christoffersen y McNeil-Frey) utilizando exclusivamente software académico (MATLAB), datos de acceso público o semipúblico, y un único script modular documentado.

Esta característica de reproducibilidad tiene relevancia directa para la meta 9.3. Los modelos internos de riesgo de mercado utilizados por las entidades sujetas al marco del Fundamental Review of the Trading Book (Basel Committee on Banking Supervision 2019) requieren exactamente los componentes implementados en este trabajo: simulación de escenarios bajo distribuciones alternativas a la normal, estimación dinámica de la covarianza y validación empírica mediante backtesting. La barrera de entrada a estos modelos no es conceptual sino de implementación. Un modelo transparente, documentado con semilla fija (`rng(1)`) y validado sobre datos reales del periodo 2023–2025 reduce esa barrera, aunque sea de forma parcial y en un contexto académico.

Es preciso señalar, sin embargo, los límites de esta alineación. El modelo supone acceso a datos de Bloomberg y conocimientos estadísticos avanzados como distribuciones elípticas, descomposición de Cholesky, tests de razón de verosimilitud, que no están al alcance de cualquier equipo de gestión de riesgos de una empresa pequeña. La alineación con la meta 9.3 es, por tanto, una contribución a la reducción de la brecha metodológica.

ODS secundario: ODS 8 — Trabajo decente y crecimiento económico

La meta 8.10 establece la necesidad de fortalecer la capacidad de las instituciones financieras para ampliar el acceso a los servicios bancarios y de seguros para todos. En este contexto, la alineación del trabajo se produce a través de un mecanismo indirecto: la calidad de los modelos de estimación del riesgo de mercado tiene consecuencias directas sobre la suficiencia del capital regulatorio y, por tanto, sobre la estabilidad del sistema financiero.

Los resultados empíricos obtenidos cuantifican esta relación con precisión. En la cartera CAP, los modelos gaussianos presentan un ESgap medio de $+0{,}684\,\%$, lo que implica que, en una cartera institucional de 100 millones de euros, la provisión de capital calculada bajo el supuesto de normalidad resultaría insuficiente en aproximadamente 684 000 euros por día de excepción. El modelo MC t-Student reduce ese diferencial a $+0{,}657\,\%$, una mejora del $5\,\%$. Esta diferencia no es trivial en el contexto regulatorio: bajo el FRTB (Basel Committee on Banking Supervision 2019), un modelo que falla simultáneamente en frecuencia (test de Kupiec) y en severidad (test de McNeil-Frey) puede estar sujeto a multiplicadores de capital que encarecen el crédito y reducen la capacidad de las entidades para financiar la economía real.

La alineación con el ODS 8 no es, por tanto, directa ni inmediata. Se produce a través de la cadena causal: mejor modelado del riesgo $\rightarrow$ capital regulatorio más preciso $\rightarrow$ sistema financiero más estable $\rightarrow$ mayor capacidad de las instituciones para cumplir su función de intermediación. Esta cadena está documentada en la literatura posterior a la crisis de 2007–2008 (Brunnermeier 2009; Financial Crisis Inquiry Commission 2011).

ODS secundario: ODS 16 — Paz, justicia e instituciones sólidas

La meta 16.6 persigue el desarrollo de instituciones eficaces, responsables y transparentes a todos los niveles. En el ámbito financiero, esta meta se operacionaliza a través de los marcos regulatorios de Basilea III y el FRTB, que exigen a las entidades sujetas a modelos internos de riesgo que sus sistemas de estimación sean auditables y validados empíricamente mediante backtesting (Basel Committee on Banking Supervision 2010; Basel Committee on Banking Supervision 2019).

La contribución de este trabajo a la meta 16.6 es de naturaleza instrumental: los tests de Kupiec (Kupiec 1995) y Christoffersen (Christoffersen 1998) implementados en el módulo `backtest_summary` son exactamente las herramientas que los supervisores bancarios, como el Banco Central Europeo, utilizan para auditar la calidad predictiva de los modelos internos de riesgo de las entidades. La implementación documentada y replicable de estos tests en un entorno académico contribuye a la comprensión pública de los mecanismos de supervisión financiera, lo que es coherente con el principio de transparencia institucional propio de la meta 16.6.

De nuevo, es necesario acotar el alcance de esta afirmación. La transparencia que aporta este trabajo es académica: la publicación del código fuente y la descripción detallada de la metodología permiten a cualquier lector con conocimientos estadísticos reproducir y auditar los resultados. No se trata de una herramienta de supervisión regulatoria ni de un sistema de reporting institucional, y sería impreciso presentarla como tal.

Síntesis

La Tabla 1 resume la alineación descrita. Los tres ODS identificados comparten un denominador común: todos se relacionan con la calidad, la transparencia y la accesibilidad de los sistemas de gestión del riesgo financiero. La contribución de este trabajo a dichos objetivos es real pero acotada: se sitúa en el plano metodológico y académico, y su eventual traslación al plano práctico dependería de desarrollos adicionales, como la integración con fuentes de datos públicas, interfaces de usuario accesibles, validación sobre carteras de mayor diversidad geográfica y sectorial, que constituyen líneas de trabajo futuro identificadas en la Sección 7.6.

Apéndice A

Implementación computacional en MATLAB

En este anexo se recoge el código fuente desarrollado para el presente Trabajo Fin de Grado. La implementación se divide en dos *scripts* funcionales. El primero (Listing A.1) ejecuta el análisis estadístico univariante preliminar para un activo individual. El segundo (Listing A.2) ejecuta la carga de datos, la construcción de las tres carteras, la simulación Monte Carlo multivariante y la validación mediante backtesting.

Ambos scripts están estructurados de forma modular, separando claramente las funciones de preprocesamiento, optimización, simulación y validación, con el objetivo de facilitar la replicabilidad y extensión futura del modelo.

```
% Analisis univariante de distribuciones - NVIDIA

clear; clc; close all;

archivo_excel = "Book1.xlsx";
export_dir = "export_overleaf";
if ~exist(export_dir, 'dir')
    mkdir(export_dir);
end

tickers = {'AAPL','MSFT','NVDA','JNJ','JPM','V','PG','BRK/B','SAN','IBE'
    };
target_ticker = 'NVDA';

%% Carga y filtrado de datos
[dates, PX, ~] = load_bbg_pairs_xlsx(archivo_excel);
idx = find(strcmp(tickers, target_ticker));

if isempty(idx)
    error('No se encontro el ticker %s.', target_ticker);
end
```

```
21
22 prices = PX(:, idx);
23 ok     = ~isnan(prices);
24 dates  = dates(ok);
25 prices = prices(ok);
26
27 % Calculo de rendimientos logaritmicos
28 r = diff(log(prices));
29 n = numel(r);
30
31 %% Calculo de momentos estadisticos
32 mu_hat      = mean(r);
33 sigma_s     = std(r, 0);
34 sk          = skewness(r);
35 kt          = kurtosis(r);
36 excess_kurt = kt - 3;
37 rmin        = min(r);
38 rmax        = max(r);
39
40 %% Ajuste parametrico de distribuciones
41 pd_norm = fitdist(r, 'Normal');
42 pd_t    = fitdist(r, 'tLocationScale');
43
44 % Ajuste manual de la distribucion de Laplace
45 lap_mu = median(r);
46 lap_b  = mean(abs(r - lap_mu));
47
48 %% Generacion de curvas de densidad
49 xgrid = linspace(min(r)*1.15, max(r)*1.15, 1200);
50 y_norm = pdf(pd_norm, xgrid);
51 y_t    = pdf(pd_t,    xgrid);
52 y_lap  = laplace_pdf(xgrid, lap_mu, lap_b);
53
54 %% Graficos
55 f1 = figure;
56 histogram(r, 'Normalization', 'pdf');
57 hold on;
58 plot(xgrid, y_norm, 'LineWidth', 1.6);
59 plot(xgrid, y_t,    'LineWidth', 1.6);
60 plot(xgrid, y_lap,  'LineWidth', 1.6);
61 xlabel('Rendimiento logaritmico diario');
62 ylabel('Densidad de probabilidad');
63 title(sprintf('Ajustes univariantes: %s', target_ticker));
64 legend('Empirico','Normal','t-Student','Laplace','Location','best');
65 grid on;
66 exportgraphics(f1, fullfile(export_dir,'hist_nvidia_fit.pdf'), ...
67     'ContentType','vector');
```

```
68
69  f2 = figure;
70  qqplot(r);
71  title(sprintf('QQ-plot frente a Normal: %s', target_ticker));
72  grid on;
73  exportgraphics(f2, fullfile(export_dir,'qqplot_nvidia_normal.pdf'), ...
74      'ContentType','vector');
75
76  %% Evaluacion de colas y asimetria
77  if excess_kurt > 0.5
78      tail_comment = "Colas mas pesadas que la normal";
79  else
80      tail_comment = "No se aprecia exceso fuerte de colas";
81  end
82
83  if abs(sk) < 0.2
84      skew_comment = "Aproximadamente simetrica";
85  elseif sk > 0
86      skew_comment = "Asimetria positiva";
87  else
88      skew_comment = "Asimetria negativa";
89  end
90
91  Tstats = table(string(target_ticker), n, mu_hat, sigma_s, sk, kt, ...
92      excess_kurt, rmin, rmax, string(skew_comment), string(tail_comment),
            ...
93      'VariableNames', {'Activo','N','Media','DesvTipica','Asimetria', ...
94      'Curtosis','ExcesoCurtosis','RetMin','RetMax', ...
95      'DiagnosticoAsimetria','DiagnosticoColas'});
96
97  disp(Tstats);
98  writetable(Tstats, fullfile(export_dir,'tabla_nvidia_stats.csv'));
99
100 %% Funcion densidad de Laplace
101 function y = laplace_pdf(x, mu, b)
102     y = (1/(2*b)) * exp(-abs(x - mu)/b);
103 end
```

Listing A.1: Análisis univariante y ajuste de distribuciones Normal, t-Student y Laplace sobre los rendimientos de un activo (caso: NVDA).

```
% Modelos: Historico, Parametrico Normal, EWMA, MC Normal, MC t-Student,
    Laplace
% Carteras: CAP, Equally Weighted (EW) y Markowitz (GMVP)

clear; clc; close all;

%% Parametros del modelo
archivo_excel = "Book1.xlsx";
alpha     = 0.99;
W         = 250;       % Ventana de estimacion in-sample (dias)
N_MC      = 50000;     % Escenarios Monte Carlo
rng(1);                % Semilla fija
nu_t      = 6;         % Grados de libertad t-Student
epsJitter = 1e-10;     % Regularizacion para factorizacion de Cholesky
lambda    = 0.94;      % Factor de decaimiento EWMA (RiskMetrics)


export_dir = "export_overleaf";
fig_dir    = fullfile(export_dir, "figuras");
if ~exist(export_dir, 'dir'), mkdir(export_dir); end
if ~exist(fig_dir,    'dir'), mkdir(fig_dir);    end

%% Identificadores de activos
bbg_tickers = ["AAPL US Equity"; "MSFT US Equity"; "NVDA US Equity";
               "JNJ US Equity";  "JPM US Equity";  "V US Equity";
               "PG US Equity";   "BRK/B US Equity"; "SAN SM Equity";
               "IBE SM Equity"];

assetNames = {'AAPL','MSFT','NVDA','JNJ','JPM','V','PG','BRK/B','SAN','
    IBE'};

%% 1. Carga y sincronizacion de datos
[dates, PX, MC] = load_bbg_pairs_xlsx(archivo_excel);
[T, d] = size(PX);
fprintf('Datos alineados: %d observaciones, %d activos.\n', T, d);

%% 2. Calculo de rendimientos logaritmicos
R      = diff(log(PX));
datesR = dates(2:end);
Tret   = size(R, 1);

% Instante de referencia t0
t0_ret = W + 1;
t0_px  = t0_ret + 1;

mktcap_t0 = MC(t0_px, :)';
```

```
if any(isnan(mktcap_t0)) || any(mktcap_t0 <= 0)
    error('Capitalizaciones invalidas en t0.');
end

R_train0 = R((t0_ret-W):(t0_ret-1), :);
Sigma0   = cov(R_train0);
Sigma0   = (Sigma0 + Sigma0')/2 + epsJitter * eye(d);

%% 3. Construccion de carteras en t0
% Cartera 1: ponderada por capitalizacion bursatil
w_cap = mktcap_t0 / sum(mktcap_t0);

% Cartera 2: pesos iguales
w_ew  = ones(d,1) / d;

% Cartera 3: minima varianza global (permite posiciones cortas)
w_mkv = gmvp_short_weights(Sigma0, epsJitter);

fprintf('\nPesos CAP:              '); disp(w_cap');
fprintf('Pesos EW:               '); disp(w_ew');
fprintf('Pesos Markowitz (GMVP): '); disp(w_mkv');

% Tabla de pesos comparativa
Tweights = table(bbg_tickers, w_cap, w_ew, w_mkv, mktcap_t0, ...
    'VariableNames', {'Activo','Peso_CAP','Peso_EW','Peso_GMVP','
       MktCap_t0'});
disp('===== Tabla de pesos =====');
disp(Tweights);
writetable(Tweights, fullfile(export_dir,'weights_three_portfolios.csv')
   );

%% 4. Incremental VaR en t0 para las tres carteras

Tiv_cap = incremental_var_by_asset(R_train0, w_cap, alpha, ...
    'mc_t', N_MC, nu_t, epsJitter, bbg_tickers);
Tiv_ew  = incremental_var_by_asset(R_train0, w_ew,  alpha, ...
    'mc_t', N_MC, nu_t, epsJitter, bbg_tickers);
Tiv_mkv = incremental_var_by_asset(R_train0, w_mkv, alpha, ...
    'mc_t', N_MC, nu_t, epsJitter, bbg_tickers);

writetable(Tiv_cap, fullfile(export_dir,'incremental_var_cap.csv'));
writetable(Tiv_ew,  fullfile(export_dir,'incremental_var_ew.csv'));
writetable(Tiv_mkv, fullfile(export_dir,'incremental_var_markowitz.csv')
   );

%% 5. Backtesting
B_boot   = 10000;
```

```
alpha_ci = 0.95;
portfolios = {"cap", "ew", "markowitz"};
Wmat       = [w_cap, w_ew, w_mkv];
results    = struct();

for p = 1:numel(portfolios)
    port_name   = portfolios{p};
    w0          = Wmat(:,p);
    use_rolling = strcmpi(port_name, 'markowitz');

    fprintf('\n--- Backtesting: %s ---\n', upper(port_name));

    res = run_backtest_for_portfolio(R, datesR, w0, port_name, ...
        use_rolling, alpha, W, N_MC, lambda, epsJitter, bbg_tickers,
           B_boot, alpha_ci);

    results.(port_name) = res;

    writetable(res.Tbt, fullfile(export_dir, ...
        sprintf('backtest_var_%s.csv', port_name)));
    writetable(res.TES, fullfile(export_dir, ...
        sprintf('backtest_es_%s.csv',  port_name)));
end

fprintf('\nSimulacion completada para las tres carteras.\n');

%% 6. nu calibrado dinamicamente
nu_all = [results.cap.nu_series; results.ew.nu_series; results.markowitz
   .nu_series];
nu_all = nu_all(nu_all > 0);
fprintf('\n===== RESUMEN nu CALIBRADO (backtesting rolling) =====\n');
fprintf('  Media   : %.2f\n', mean(nu_all));
fprintf('  Mediana : %.2f\n', median(nu_all));
fprintf('  Min     : %.2f\n', min(nu_all));
fprintf('  Max     : %.2f\n', max(nu_all));
fprintf('  Std     : %.2f\n', std(nu_all));
fprintf('  nu fijo usado en t0 (IVaR): 6.0\n');

% Guardar serie nu de la cartera CAP como referencia
N_val = Tret - W;
t_idx = (W+1:Tret)';
T_nu  = table(t_idx, results.cap.nu_series, ...
    'VariableNames', {'t_idx','nu_hat'});
writetable(T_nu, fullfile(export_dir, 'nu_series_cap.csv'));

%% 7. Analisis de sensibilidad al parametro lambda
fprintf('\n===== ANALISIS DE SENSIBILIDAD LAMBDA =====\n');
```

```
lambdas_sens    = [0.90, 0.94, 0.97];
carteras_sens   = {'CAP','EW','GMVP'};
pesos_sens      = {w_cap, w_ew, w_mkv};
rolling_sens    = {false, false, true};
T_sens = sensibilidad_lambda(R, datesR, pesos_sens, carteras_sens, ...
    rolling_sens, alpha, W, N_MC, epsJitter, lambdas_sens);

writetable(T_sens, fullfile(export_dir, 'sensibilidad_lambda.csv'));
disp(T_sens);

%% 8. resultados principales
fprintf('\n===== BACKTEST VAR - CAP =====\n');    disp(results.cap.Tbt)
fprintf('\n===== BACKTEST VAR - EW =====\n');     disp(results.ew.Tbt)
fprintf('\n===== BACKTEST VAR - MARKOWITZ =====\n'); disp(results.
   markowitz.Tbt)
fprintf('\n===== ES - CAP =====\n');              disp(results.cap.TES)
fprintf('\n===== ES - EW =====\n');               disp(results.ew.TES)
fprintf('\n===== ES - MARKOWITZ =====\n');        disp(results.markowitz.
   TES)
fprintf('\n===== IVAR - CAP =====\n');            disp(Tiv_cap)
fprintf('\n===== IVAR - EW =====\n');             disp(Tiv_ew)
fprintf('\n===== IVAR - MARKOWITZ =====\n');      disp(Tiv_mkv)
fprintf('\n===== PESOS =====\n');                 disp(Tweights)

%% 9. Figuras
colors10 = [
    0.122, 0.471, 0.706;
    1.000, 0.498, 0.055;
    0.173, 0.627, 0.173;
    0.839, 0.153, 0.157;
    0.580, 0.404, 0.741;
    0.549, 0.337, 0.294;
    0.890, 0.467, 0.761;
    0.498, 0.498, 0.498;
    0.737, 0.741, 0.133;
    0.090, 0.745, 0.812;
];

f = figure('Color','w');
hold on;
for k = 1:d
    plot(dates, PX(:,k), 'LineWidth',1.2, 'Color',colors10(k,:));
end
grid on;
xlabel('Fecha'); ylabel('Precio ajustado (USD/EUR)');
title('Evolucion temporal de los precios ajustados');
legend(assetNames, 'Location','bestoutside', 'FontSize',8);
```

```
exportgraphics(f, fullfile(fig_dir,'series_precios.png'), 'Resolution',300);

f = figure('Color','w');
hold on;
for k = 1:d
    plot(datesR, R(:,k), 'LineWidth',0.8, 'Color',colors10(k,:));
end
grid on;
xlabel('Fecha');
ylabel('Rendimiento logaritmico diario');
title('Series temporales de rendimientos logaritmicos');
legend(assetNames, 'Location','bestoutside', 'FontSize',8);
exportgraphics(f, fullfile(fig_dir,'series_retornos.png'), 'Resolution',300);

portfolioReturns = R * w_cap;
portfolioLosses  = -portfolioReturns;

f = figure('Color','w');
plot(datesR, portfolioLosses, 'k', 'LineWidth',1);
grid on;
xlabel('Fecha'); ylabel('Perdida diaria de la cartera');
title('Serie temporal de perdidas diarias (Cartera CAP)');
exportgraphics(f, fullfile(fig_dir,'serie_perdidas_cartera.png'), 'Resolution',300);

VaR_emp  = quantile(portfolioLosses, alpha);
CVaR_emp = mean(portfolioLosses(portfolioLosses >= VaR_emp));

f = figure('Color','w');
histogram(portfolioLosses, 50, 'Normalization','pdf');
hold on;
xline(VaR_emp,  '--', 'VaR 99%',  'LineWidth',1.5);
xline(CVaR_emp, '-',  'CVaR 99%', 'LineWidth',1.5);
grid on;
xlabel('Perdida diaria de la cartera'); ylabel('Densidad');
title('Distribucion de perdidas con VaR y CVaR');
legend('Perdidas','VaR 99%','CVaR 99%','Location','best');
exportgraphics(f, fullfile(fig_dir,'histograma_perdidas_var_cvar.png'), 'Resolution',300);

resFig     = results.cap;
modelNames = {'Historica','Normal','EWMA','MC Normal','MC t-Student','Laplace'};
VaR_values = [mean(resFig.VaR_H,'omitnan'); mean(resFig.VaR_N,'omitnan');
```

```
                mean(resFig.VaR_EW,'omitnan'); mean(resFig.VaR_MC,'omitnan
                    ');
                mean(resFig.VaR_t,'omitnan');  mean(resFig.VaR_L,'omitnan'
                    )];
CVaR_values= [mean(resFig.ES_H,'omitnan');  mean(resFig.ES_N,'omitnan');
                mean(resFig.ES_EW,'omitnan');  mean(resFig.ES_MC,'omitnan'
                    );
                mean(resFig.ES_t,'omitnan');   mean(resFig.ES_L,'omitnan')
                    ];

f = figure('Color','w');
bar([VaR_values, CVaR_values]);
grid on;
set(gca,'XTickLabel',modelNames,'XTickLabelRotation',30);
ylabel('Perdida estimada');
title('Comparacion de VaR y CVaR al 99% por modelo (Cartera CAP)');
legend('VaR 99%','CVaR 99%','Location','best');
exportgraphics(f, fullfile(fig_dir,'comparacion_var_cvar_modelos.png'),
    'Resolution',300);

f = figure('Color','w');
subplot(3,1,1);
plot(results.cap.datesOOS, results.cap.L_real, 'k','LineWidth',0.8);
    hold on;
plot(results.cap.datesOOS, results.cap.VaR_t,  'm','LineWidth',1.2);
scatter(results.cap.datesOOS(results.cap.I_t), ...
    results.cap.L_real(results.cap.I_t), 18, 'filled','r');
title('Cartera CAP'); legend('L(t)','VaR t-Student','Excepciones');
grid on; ylabel('Perdida');

subplot(3,1,2);
plot(results.ew.datesOOS, results.ew.L_real, 'k','LineWidth',0.8); hold
    on;
plot(results.ew.datesOOS, results.ew.VaR_t,  'm','LineWidth',1.2);
scatter(results.ew.datesOOS(results.ew.I_t), ...
    results.ew.L_real(results.ew.I_t), 18, 'filled','r');
title('Cartera EW'); legend('L(t)','VaR t-Student','Excepciones');
grid on; ylabel('Perdida');

subplot(3,1,3);
plot(results.markowitz.datesOOS, results.markowitz.L_real, 'k','
    LineWidth',0.8); hold on;
plot(results.markowitz.datesOOS, results.markowitz.VaR_t,  'm','
    LineWidth',1.2);
scatter(results.markowitz.datesOOS(results.markowitz.I_t), ...
    results.markowitz.L_real(results.markowitz.I_t), 18, 'filled','r');
title('Cartera Markowitz (GMVP)'); legend('L(t)','VaR t-Student','
```

```
    Excepciones');
grid on; ylabel('Perdida'); xlabel('Fecha');
exportgraphics(f, fullfile(fig_dir,'backtesting_var.png'), 'Resolution'
    ,300);

ESgap_cap = results.cap.TES.ESgap;
ESgap_ew  = results.ew.TES.ESgap;
ESgap_mkv = results.markowitz.TES.ESgap;
modelNamesES = {'Historico','Normal','EWMA','MC Normal','MC t-Student','
    Laplace'};

f = figure('Color','w');
x = 1:6; width_bar = 0.25;
bar(x - width_bar, ESgap_cap, width_bar, 'FaceColor',[0.2 0.4 0.8]);
hold on;
bar(x,             ESgap_ew,  width_bar, 'FaceColor',[0.8 0.4 0.2]);
bar(x + width_bar, ESgap_mkv, width_bar, 'FaceColor',[0.2 0.7 0.3]);
yline(0, 'k--', 'LineWidth', 1);
grid on;
set(gca, 'XTick', x, 'XTickLabel', modelNamesES, 'XTickLabelRotation',
    30);
ylabel('ESgap = Perdida real - CVaR estimado');
title('Backtesting del CVaR: ESgap por modelo y cartera');
legend('CAP','EW','GMVP','Location','best');
exportgraphics(f, fullfile(fig_dir,'esgap_por_modelo.png'), 'Resolution'
    ,300);

corrMatrix = corr(R, 'Rows','complete');
f = figure('Color','w');
h = heatmap(assetNames, assetNames, corrMatrix);
h.Title  = 'Matriz de correlaciones entre activos';
h.XLabel = 'Activos'; h.YLabel = 'Activos';
exportgraphics(f, fullfile(fig_dir,'heatmap_correlaciones.png'), '
    Resolution',300);

mu_vec = mean(R,1)';
SigFE  = cov(R);
SigFE  = (SigFE+SigFE')/2 + epsJitter*eye(d);
invS   = inv(SigFE);
one    = ones(d,1);
A = one'*invS*one; B = one'*invS*mu_vec; C = mu_vec'*invS*mu_vec;
D = A*C - B^2;

nPort      = 100;
targetRets = linspace(min(mu_vec), max(mu_vec), nPort);
vols_fe    = nan(nPort,1);
rets_fe    = nan(nPort,1);
```

```
299
300 for i = 1:nPort
301     r0         = targetRets(i);
302     w_eff      = invS*(((C-B*r0)/D)*one + ((A*r0-B)/D)*mu_vec);
303     rets_fe(i) = mu_vec'*w_eff;
304     vols_fe(i) = sqrt(w_eff'*SigFE*w_eff);
305 end
306
307 w_gmvp_fe = invS*one/(one'*invS*one);
308 ret_gmvp  = mu_vec'*w_gmvp_fe; vol_gmvp = sqrt(w_gmvp_fe'*SigFE*
       w_gmvp_fe);
309 ret_cap   = mu_vec'*w_cap;     vol_cap  = sqrt(w_cap'*SigFE*w_cap);
310 ret_ew    = mu_vec'*w_ew;      vol_ew   = sqrt(w_ew'*SigFE*w_ew);
311
312 f = figure('Color','w');
313 plot(vols_fe, rets_fe, 'b-', 'LineWidth',1.5); hold on;
314 scatter(vol_gmvp, ret_gmvp, 80, 'r', 'filled');
315 scatter(vol_cap,  ret_cap,  80, 'g', 'filled');
316 scatter(vol_ew,   ret_ew,   80, 'm', 'filled');
317 grid on;
318 xlabel('Volatilidad diaria'); ylabel('Rentabilidad esperada diaria');
319 title('Frontera eficiente de Markowitz');
320 legend('Frontera eficiente','GMVP','Cartera CAP','Cartera EW','Location'
       ,'best');
321 exportgraphics(f, fullfile(fig_dir,'frontera_eficiente_markowitz.png'),
       'Resolution',300);
322
323 mu_fig    = mean(R,1);
324 Sig_fig   = cov(R);
325 Sig_fig   = (Sig_fig+Sig_fig')/2 + epsJitter*eye(d);
326 Lchol_fig = robust_chol(Sig_fig);
327
328 R_norm_fig   = mvnrnd(mu_fig, Sig_fig, N_MC);
329 losses_norm_fig = -(R_norm_fig * w_cap);
330
331 S_fig        = chi2rnd(nu_t, N_MC, 1);
332 sc_fig       = sqrt(nu_t./S_fig);
333 Z_fig        = randn(N_MC,d)*Lchol_fig';
334 R_t_fig      = (Z_fig.*sc_fig) + ones(N_MC,1)*mu_fig;
335 losses_t_fig = -(R_t_fig * w_cap);
336
337 f = figure('Color','w');
338 histogram(losses_norm_fig, 60, 'Normalization','pdf','DisplayStyle','
       stairs','LineWidth',1.5);
339 hold on;
340 histogram(losses_t_fig,    60, 'Normalization','pdf','DisplayStyle','
       stairs','LineWidth',1.5);
```

```
grid on;
xlabel('Perdida simulada'); ylabel('Densidad');
title('Comparacion de perdidas simuladas: Normal vs t-Student');
legend('Normal multivariante','t-Student multivariante','Location','best
    ');
exportgraphics(f, fullfile(fig_dir,'comparacion_normal_tstudent.png'), '
    Resolution',300);

%  Figura nu dinamico
nu_plot = results.cap.nu_series;
f = figure('Color','w');
plot(nu_plot, 'LineWidth', 1.4, 'Color', [0.1 0.3 0.7]);
hold on;
yline(6, '--r', '\nu = 6 (fijo)', 'LineWidth', 1.2, ...
    'LabelHorizontalAlignment', 'left');
yline(mean(nu_plot), ':k', ...
    sprintf('Media = %.1f', mean(nu_plot)), ...
    'LineWidth', 1.0, 'LabelHorizontalAlignment', 'right');
xlabel('Ventana de estimacion (indice)');
ylabel('\nu calibrado por MV');
title('Evolucion temporal de los grados de libertad \nu');
grid on;
exportgraphics(f, fullfile(fig_dir,'nu_dinamico.pdf'), 'ContentType','
    vector');
exportgraphics(f, fullfile(fig_dir,'nu_dinamico.png'), 'Resolution',300)
    ;

%  Figura sensibilidad lambda
f = figure('Color','w');
hold on;
col3    = {[0.12 0.47 0.71], [1.0 0.50 0.05], [0.17 0.63 0.17]};
mark3   = {'o','s','d'};
cart3   = {'CAP','EW','GMVP'};
exc_mat = zeros(3,3);

for ci = 1:3
    for li = 1:3
        mask = T_sens.Lambda == lambdas_sens(li) & ...
               T_sens.Cartera == cart3{ci};
        exc_mat(li,ci) = T_sens.Excepciones(mask);
    end
    plot(lambdas_sens, exc_mat(:,ci), '-', ...
        'Marker', mark3{ci}, 'Color', col3{ci}, ...
        'LineWidth', 1.6, 'MarkerSize', 8, ...
        'DisplayName', ['Cartera ' cart3{ci}]);
end

```

```
n_val_plot = Tret - W;
yline(n_val_plot * 0.01, '--k', ...
    sprintf('Esperadas (%.0f)', n_val_plot * 0.01), ...
    'LineWidth', 1.2, 'LabelHorizontalAlignment', 'right');
xlabel('\lambda (factor de decaimiento EWMA)');
ylabel('Numero de excepciones');
title('Sensibilidad del modelo EWMA al parametro \lambda');
legend('Location','northwest');
xticks(lambdas_sens);
xticklabels({'0.90','0.94','0.97'});
xlim([0.885 0.985]);
grid on;
exportgraphics(f, fullfile(fig_dir,'sensibilidad_lambda.pdf'), '
    ContentType','vector');
exportgraphics(f, fullfile(fig_dir,'sensibilidad_lambda.png'), '
    Resolution',300);

disp('Figuras generadas correctamente.');

%% =========================================================================
%% FUNCIONES INTERNAS

function res = run_backtest_for_portfolio(R, datesR, w0, port_name, ...
    use_rolling, alpha, W, N_MC, lambda, epsJitter, ~, B_boot, alpha_ci)

    [Tret, d] = size(R);
    N         = Tret - W;
    datesOOS  = datesR(W+1:end);

    VaR_H  = nan(N,1); ES_H  = nan(N,1); I_H  = false(N,1);
    VaR_N  = nan(N,1); ES_N  = nan(N,1); I_N  = false(N,1);
    VaR_EW = nan(N,1); ES_EW = nan(N,1); I_EW = false(N,1);
    VaR_MC = nan(N,1); ES_MC = nan(N,1); I_MC = false(N,1);
    VaR_t  = nan(N,1); ES_t  = nan(N,1); I_t  = false(N,1);
    VaR_L  = nan(N,1); ES_L  = nan(N,1); I_L  = false(N,1);
    L_real = nan(N,1);

    % Serie temporal de nu calibrado (nueva en v2)
    nu_series = zeros(N,1);

    z   = norminv(alpha);
    phi = @(x) (1/sqrt(2*pi)) * exp(-0.5*x.^2);

    tic;
    for t = (W+1):Tret
        ii      = t - W;
        R_train = R((t-W):(t-1), :);
```

```
429
430         if use_rolling
431             Sr = cov(R_train);
432             Sr = (Sr + Sr')/2 + epsJitter*eye(d);
433             w  = gmvp_short_weights(Sr, epsJitter);
434         else
435             w = w0;
436         end
437
438         L_train = -(R_train * w);
439
440         nu_dyn        = calibrar_nu(R_train);
441         nu_series(ii) = nu_dyn;
442
443
444         % 1. Simulacion historica
445         VaR_H(ii) = quantile(L_train, alpha);
446         ES_H(ii)  = mean(L_train(L_train >= VaR_H(ii)));
447
448         % 2. Parametrico normal
449         mu    = mean(R_train, 1)';
450         Sigma = cov(R_train);
451         Sigma = (Sigma + Sigma')/2 + epsJitter*eye(d);
452         mu_p  = w' * mu;
453         sig_p = sqrt(w' * Sigma * w);
454         VaR_N(ii) = -mu_p + sig_p * z;
455         ES_N(ii)  = -mu_p + sig_p * (phi(z) / (1 - alpha));
456
457         % 3. EWMA normal
458         SigmaEW    = ewma_cov(R_train, lambda, epsJitter);
459         sigEW      = sqrt(w' * SigmaEW * w);
460         VaR_EW(ii) = sigEW * z;
461         ES_EW(ii)  = sigEW * (phi(z) / (1 - alpha));
462
463         % 4. Monte Carlo normal
464         Lchol      = robust_chol(Sigma);
465         Zmc        = randn(N_MC, d);
466         R_mc       = Zmc * Lchol' + ones(N_MC,1) * mu';
467         L_mc       = -(R_mc * w);
468         VaR_MC(ii) = quantile(L_mc, alpha);
469         ES_MC(ii)  = mean(L_mc(L_mc >= VaR_MC(ii)));
470
471         % 5. Monte Carlo t-Student con nu DINAMICO
472         S          = chi2rnd(nu_dyn, N_MC, 1);
473         scale      = sqrt(nu_dyn ./ S);
474         Zt         = randn(N_MC, d) * Lchol';
475         R_tmc      = (Zt .* scale) + ones(N_MC,1) * mu';
```

```
        L_tmc      = -(R_tmc * w);
        VaR_t(ii)  = quantile(L_tmc, alpha);
        ES_t(ii)   = mean(L_tmc(L_tmc >= VaR_t(ii)));

        % 6. Laplace univariante
        loc        = median(L_train);
        b_lap      = mean(abs(L_train - loc));
        U          = rand(N_MC, 1);
        L_lmc      = loc - b_lap .* sign(U-0.5) .* log(1 - 2*abs(U-0.5));
        VaR_L(ii) = quantile(L_lmc, alpha);
        ES_L(ii)   = mean(L_lmc(L_lmc >= VaR_L(ii)));

        % Perdida real y excepcion
        L_real(ii) = -(R(t,:) * w);
        I_H(ii)  = (L_real(ii) > VaR_H(ii));
        I_N(ii)  = (L_real(ii) > VaR_N(ii));
        I_EW(ii) = (L_real(ii) > VaR_EW(ii));
        I_MC(ii) = (L_real(ii) > VaR_MC(ii));
        I_t(ii)  = (L_real(ii) > VaR_t(ii));
        I_L(ii)  = (L_real(ii) > VaR_L(ii));
    end
    fprintf('Ventana movil completada en %.2f s.\n', toc);

    % Estadisticos backtesting VaR
    resH  = backtest_summary(I_H,  alpha);
    resN  = backtest_summary(I_N,  alpha);
    resEW = backtest_summary(I_EW, alpha);
    resMC = backtest_summary(I_MC, alpha);
    rest  = backtest_summary(I_t,  alpha);
    resL  = backtest_summary(I_L,  alpha);

    % ES: NS + McNeil-Frey + Bootstrap
    modelos_I  = {I_H,  I_N,  I_EW,  I_MC,  I_t,  I_L};
    modelos_ES = {ES_H, ES_N, ES_EW, ES_MC, ES_t, ES_L};
    nombres    = ["Historico"; "Normal_param"; "EWMA_Normal"; ...
                  "MC_Normal"; "MC_tStudent"; "MC_Laplace"];

    n_mod    = numel(nombres);
    Exc      = zeros(n_mod,1);
    Lexc_med = nan(n_mod,1);
    ES_med   = nan(n_mod,1);
    NS_val   = nan(n_mod,1);
    NS_lo    = nan(n_mod,1);
    NS_hi    = nan(n_mod,1);
    MF_stat  = nan(n_mod,1);
    MF_pval  = nan(n_mod,1);
    ESgap    = nan(n_mod,1);
```

```
523
524     for m = 1:n_mod
525         Im  = modelos_I{m};
526         ESm = modelos_ES{m};
527         idx_exc = find(Im);
528         v1      = numel(idx_exc);
529         Exc(m)  = v1;
530         if v1 == 0, continue; end
531
532         L_exc  = L_real(idx_exc);
533         ES_exc = ESm(idx_exc);
534
535         Lexc_med(m) = mean(L_exc);
536         ES_med(m)   = mean(ES_exc);
537         ESgap(m)    = Lexc_med(m) - ES_med(m);
538
539         NS_obs    = L_exc ./ ES_exc;
540         NS_val(m) = mean(NS_obs);
541         [NS_lo(m), NS_hi(m)] = bootstrap_ns_ci(NS_obs, B_boot, alpha_ci)
                ;
542         [MF_stat(m), MF_pval(m)] = mcneil_frey_test(NS_obs);
543     end
544
545     TES = table(nombres, Exc, Lexc_med, ES_med, ESgap, NS_val, ...
546                 NS_lo, NS_hi, MF_stat, MF_pval, ...
547         'VariableNames', {'Modelo','Excepciones', ...
548                           'Perdida_Media_Real','ES_Estimado','ESgap',
                                  ...
549                           'NS','NS_IC_lo','NS_IC_hi', ...
550                           'MF_estadistico','MF_pvalor'});
551
552     Tbt = table(nombres, ...
553         [resH.x; resN.x; resEW.x; resMC.x; rest.x; resL.x], ...
554         [resH.phat; resN.phat; resEW.phat; resMC.phat; rest.phat; resL.
               phat], ...
555         [resH.pKupiec; resN.pKupiec; resEW.pKupiec; resMC.pKupiec; rest.
               pKupiec; resL.pKupiec], ...
556         [resH.pInd;    resN.pInd;    resEW.pInd;    resMC.pInd;    rest.
               pInd;    resL.pInd], ...
557         [resH.pCC;     resN.pCC;     resEW.pCC;     resMC.pCC;     rest.
               pCC;     resL.pCC], ...
558         'VariableNames', {'Modelo','Excepciones','Hit_Rate', ...
559                           'P_Kupiec','P_Christoffersen','P_CC'});
560
561     res.datesOOS = datesOOS;
562     res.L_real   = L_real;
563     res.nu_series = nu_series;       % nuevo en v2
```

```
    res.VaR_H  = VaR_H;  res.ES_H  = ES_H;  res.I_H  = I_H;
    res.VaR_N  = VaR_N;  res.ES_N  = ES_N;  res.I_N  = I_N;
    res.VaR_EW = VaR_EW; res.ES_EW = ES_EW; res.I_EW = I_EW;
    res.VaR_MC = VaR_MC; res.ES_MC = ES_MC; res.I_MC = I_MC;
    res.VaR_t  = VaR_t;  res.ES_t  = ES_t;  res.I_t  = I_t;
    res.VaR_L  = VaR_L;  res.ES_L  = ES_L;  res.I_L  = I_L;
    res.Tbt    = Tbt;
    res.TES    = TES;
end


function nu_hat = calibrar_nu(R_train)
    % Proyectar sobre primera componente principal y estandarizar
    [~, score] = pca(R_train);
    r1 = score(:, 1);
    r1 = (r1 - mean(r1)) / std(r1);

    % Log-verosimilitud negativa t-Student estandar
    neg_loglik = @(nu) -sum(log( ...
        gamma((nu+1)/2) ./ (sqrt(nu*pi) .* gamma(nu/2)) .* ...
        (1 + r1.^2 ./ nu) .^ (-(nu+1)/2) ...
    ));

    opts    = optimset('Display','off','TolX',1e-4);
    nu_hat  = fminbnd(neg_loglik, 2.1, 50, opts);
    nu_hat  = round(nu_hat, 1);
end


function T_out = sensibilidad_lambda(R, ~, pesos_sens, carteras_sens,
   ...
    rolling_sens, alpha, W, N_MC, epsJitter, lambdas)

    [Tret, d] = size(R);
    z         = norminv(alpha);
    T_out     = table();

    fprintf('%-8s %-8s %12s %10s %12s %14s\n', ...
        'Lambda','Cartera','Excepciones','Hit_Rate','P_Kupiec','
           Diagnostico');

    for li = 1:numel(lambdas)
        lam = lambdas(li);

        for ci = 1:numel(carteras_sens)
            w0          = pesos_sens{ci};
            nom         = carteras_sens{ci};
```

```
            use_rolling = rolling_sens{ci};
            N           = Tret - W;
            I_ew_lam    = false(N, 1);

            for t = (W+1):Tret
                ii       = t - W;
                R_train = R((t-W):(t-1), :);

                if use_rolling
                    Sr = cov(R_train);
                    Sr = (Sr+Sr')/2 + epsJitter*eye(d);
                    w  = gmvp_short_weights(Sr, epsJitter);
                else
                    w = w0;
                end

                % Covarianza EWMA con este lambda
                SigmaEW = ewma_cov(R_train, lam, epsJitter);
                sigEW   = sqrt(w' * SigmaEW * w);

                % VaR Normal con EWMA (mu = 0 como en el script original
                    )
                VaR_ew_lam = sigEW * z;

                % Perdida real
                L_real_t = -(R(t,:) * w);
                I_ew_lam(ii) = (L_real_t > VaR_ew_lam);
            end

            % Test de Kupiec
            res_bt = backtest_summary(I_ew_lam, alpha);
            diag_str = 'Aprobado';
            if ~isnan(res_bt.pKupiec) && res_bt.pKupiec < 0.05
                diag_str = 'Rechazado';
            end

            fprintf('%-8.2f %-8s %12d %10.4f %12.4f %14s\n', ...
                lam, nom, res_bt.x, res_bt.phat, res_bt.pKupiec,
                    diag_str);

            fila = table(lam, string(nom), res_bt.x, res_bt.phat, ...
                res_bt.pKupiec, string(diag_str), ...
                'VariableNames', {'Lambda','Cartera','Excepciones', ...
                                  'HitRate','P_Kupiec','Diagnostico'});
            T_out = [T_out; fila]; %#ok<AGROW>
        end
    end
```

```
end


function w = gmvp_short_weights(Sigma, epsJitter)
    d     = size(Sigma,1);
    Sigma = (Sigma+Sigma')/2 + epsJitter*eye(d);
    uno   = ones(d,1);
    w     = Sigma\uno;
    den   = uno'*w;
    if abs(den) < 1e-14
        error('Denominador nulo en optimizacion de Markowitz.');
    end
    w = w/den;
end

function SigmaEW = ewma_cov(R_train, lambda, epsJitter)
    [Wn, d] = size(R_train);
    SigmaEW = cov(R_train);
    SigmaEW = (SigmaEW+SigmaEW')/2 + epsJitter*eye(d);
    R0      = R_train - mean(R_train,1);
    for t = 2:Wn
        r       = R0(t-1,:);
        SigmaEW = lambda*SigmaEW + (1-lambda)*(r'*r);
    end
    SigmaEW = (SigmaEW+SigmaEW')/2 + epsJitter*eye(d);
end

function [dates, PX, MC] = load_bbg_pairs_xlsx(filepath)
    Tpx = readtable(filepath,'Sheet','PX_LAST','ReadVariableNames',false
       );
    if width(Tpx)>=1 && all(ismissing(Tpx{:,1}))
        Tpx(:,1) = [];
    end
    if width(Tpx) >= 19
        Tpx(:,18:19) = [];
    end
    nPairs = width(Tpx)/2;
    dates  = datetime(Tpx{:,1});
    PX     = Tpx{:,2};
    ok0    = ~isnat(dates) & ~isnan(PX);
    dates  = dates(ok0); PX = PX(ok0,:);
    for k = 2:nPairs
        d_k  = datetime(Tpx{:,2*k-1});
        x_k  = Tpx{:,2*k};
        ok   = ~isnat(d_k) & ~isnan(x_k);
        d_ok = d_k(ok); x_ok = x_k(ok);
        [dates, ia, ib] = intersect(dates, d_ok);
```

```
        PX = [PX(ia,:), x_ok(ib)];
    end
    Tmc      = readtable(filepath,'Sheet','MARKET_CAP','
       ReadVariableNames',false);
    if width(Tmc)>=1 && all(ismissing(Tmc{:,1}))
        Tmc(:,1) = [];
    end
    nPairs2  = width(Tmc)/2;
    dates_mc = datetime(Tmc{:,1});
    MC       = Tmc{:,2};
    ok0      = ~isnat(dates_mc) & ~isnan(MC);
    dates_mc = dates_mc(ok0); MC = MC(ok0,:);
    for k = 2:nPairs2
        d_k  = datetime(Tmc{:,2*k-1});
        x_k  = Tmc{:,2*k};
        ok   = ~isnat(d_k) & ~isnan(x_k);
        d_ok = d_k(ok); x_ok = x_k(ok);
        [dates_mc, ia, ib] = intersect(dates_mc, d_ok);
        MC = [MC(ia,:), x_ok(ib)];
    end
    [dates, ia, ib] = intersect(dates, dates_mc);
    PX = PX(ia,:); MC = MC(ib,:);
end

function L = robust_chol(Sigma)
    d      = size(Sigma,1);
    Sigma  = (Sigma+Sigma')/2;
    jitter = 1e-10;
    for tries = 1:8
        try
            L = chol(Sigma + jitter*eye(d),'lower');
            return;
        catch
            jitter = jitter*10;
        end
    end
    error('Fallo critico: matriz no semidefinida positiva.');
end

function out = backtest_summary(I, alpha)
    N    = numel(I);
    x    = sum(I);
    p0   = 1-alpha;
    phat = x/N;
    if x==0 || x==N
        LRpof=NaN; pKup=NaN;
    else
```

```
        LRpof = -2*log(((1-p0)^(N-x)*p0^x)/((1-phat)^(N-x)*phat^x));
        pKup  = 1-chi2cdf(LRpof,1);
    end
    if N < 2
        pInd=NaN; pCC=NaN;
    else
        I0=I(1:end-1); I1=I(2:end);
        n00=sum(~I0&~I1); n01=sum(~I0&I1);
        n10=sum(I0&~I1);  n11=sum(I0&I1);
        if (n00+n01)==0 || (n10+n11)==0
            LRind=NaN; pInd=NaN;
        else
            pi0  = n01/(n00+n01);
            pi1  = n11/(n10+n11);
            pi   = (n01+n11)/(n00+n01+n10+n11);
            L1   = (1-pi0)^n00*pi0^n01*(1-pi1)^n10*pi1^n11;
            L0   = (1-pi)^(n00+n10)*pi^(n01+n11);
            LRind= -2*log(L0/L1);
            pInd = 1-chi2cdf(LRind,1);
        end
        if isnan(LRpof)||isnan(LRind)
            pCC=NaN;
        else
            pCC = 1-chi2cdf(LRpof+LRind,2);
        end
    end
    out = struct('N',N,'x',x,'phat',phat, ...
                 'pKupiec',pKup,'pInd',pInd,'pCC',pCC);
end

function Tiv = incremental_var_by_asset(R_train, w, alpha, method_name,
    ...
    N_MC, nu_t, epsJitter, bbg_tickers)
    d        = size(R_train,2);
    VaR_base = portfolio_var(R_train,w,alpha,method_name,N_MC,nu_t,
        epsJitter);
    VaR_sin  = nan(d,1);
    IVaR     = nan(d,1);
    for i = 1:d
        w_new = w; w_new(i) = 0;
        if abs(sum(w_new)) < 1e-14, continue; end
        w_new = w_new/sum(w_new);
        VaR_sin(i) = portfolio_var(R_train,w_new,alpha,method_name, ...
            N_MC,nu_t,epsJitter);
        IVaR(i) = VaR_base - VaR_sin(i);
    end
    Tiv = table(bbg_tickers, w, VaR_sin, repmat(VaR_base,d,1), IVaR, ...
```

```
        'VariableNames',{'Activo','Ponderacion','VaR_sin_activo', ...
        'VaR_base','IncrementalVaR'});
    Tiv = sortrows(Tiv,'IncrementalVaR','descend');
end

function VaR = portfolio_var(R_train, w, alpha, method_name, N_MC, nu_t,
    epsJitter)
    [~,d] = size(R_train);
    switch lower(method_name)
        case 'historical'
            L   = -(R_train*w);
            VaR = quantile(L,alpha);
        case 'normal'
            mu    = mean(R_train,1)';
            Sigma = cov(R_train);
            Sigma = (Sigma+Sigma')/2 + epsJitter*eye(d);
            VaR   = -(w'*mu) + norminv(alpha)*sqrt(w'*Sigma*w);
        case 'mc_normal'
            mu    = mean(R_train,1)';
            Sigma = cov(R_train);
            Sigma = (Sigma+Sigma')/2 + epsJitter*eye(d);
            Lchol = robust_chol(Sigma);
            Lsim  = -((randn(N_MC,d)*Lchol' + ones(N_MC,1)*mu')*w);
            VaR   = quantile(Lsim,alpha);
        case 'mc_t'
            mu    = mean(R_train,1)';
            Sigma = cov(R_train);
            Sigma = (Sigma+Sigma')/2 + epsJitter*eye(d);
            Lchol = robust_chol(Sigma);
            S     = chi2rnd(nu_t,N_MC,1);
            scale = sqrt(nu_t./S);
            Z     = randn(N_MC,d)*Lchol';
            Lsim  = -(((Z.*scale) + ones(N_MC,1)*mu')*w);
            VaR   = quantile(Lsim,alpha);
        otherwise
            error('Metodo no reconocido: %s', method_name);
    end
end

function [lo, hi] = bootstrap_ns_ci(ns_obs, B, ci_lev)
    n    = numel(ns_obs);
    ns_b = zeros(B, 1);
    for b = 1:B
        idx     = randi(n, n, 1);
        ns_b(b) = mean(ns_obs(idx));
    end
    tail = (1 - ci_lev) / 2;
```

```
    lo   = quantile(ns_b, tail);
    hi   = quantile(ns_b, 1 - tail);
end

function [t_stat, p_val] = mcneil_frey_test(ns_obs)
    v1 = numel(ns_obs);
    if v1 < 2
        t_stat = NaN; p_val = NaN; return;
    end
    residuos = ns_obs - 1;
    mu_r     = mean(residuos);
    se_r     = std(residuos) / sqrt(v1);
    if se_r < 1e-14
        t_stat = NaN; p_val = NaN; return;
    end
    t_stat = mu_r / se_r;
    p_val  = 2 * (1 - tcdf(abs(t_stat), v1 - 1));

end
```

Listing A.2: Script principal: construcción de tres carteras, simulación Monte Carlo y backtesting de VaR y CVaR.

Bibliografía

Artzner, Philippe, Freddy Delbaen, Jean-Marc Eber y David Heath (1999). «Coherent Measures of Risk». En: *Mathematical Finance* 9.3, págs. 203-228. DOI: 10.1111/1467-9965.00068.

Basel Committee on Banking Supervision (1996). *Amendment to the Capital Accord to Incorporate Market Risks*. Inf. téc. Basel: Bank for International Settlements.

Basel Committee on Banking Supervision (2004). *International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards: A Revised Framework*. Inf. téc. Basel: Bank for International Settlements.

Basel Committee on Banking Supervision (2010). *Basel III: A Global Regulatory Framework for More Resilient Banks and Banking Systems*. Inf. téc. Basel: Bank for International Settlements.

Basel Committee on Banking Supervision (2019). *Minimum Capital Requirements for Market Risk*. Inf. téc. Fundamental Review of the Trading Book (FRTB). Basel: Bank for International Settlements. URL: https://www.bis.org/bcbs/publ/d457.pdf (Último acceso 31 de mayo de 2026).

Brunnermeier, Markus K. (2009). «Deciphering the Liquidity and Credit Crunch 2007–2008». En: *Journal of Economic Perspectives* 23.1, págs. 77-100.

Campbell, John Y., Andrew W. Lo y A. Craig MacKinlay (1997). *The Econometrics of Financial Markets*. Princeton: Princeton University Press.

Christoffersen, Peter F. (1998). «Evaluating Interval Forecasts». En: *International Economic Review* 39.4, págs. 841-862. DOI: 10.2307/2527341.

Cont, Rama (2001). «Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues». En: *Quantitative Finance* 1.2, págs. 223-236.

Danielsson, Jon (2011). *Financial Risk Forecasting: The Theory and Practice of Forecasting Market Risk with Implementation in R and Matlab*. Chichester: John Wiley & Sons. ISBN: 9780470669433.

Engle, Robert (2002). «Dynamic Conditional Correlation: A Simple Class of Multivariate Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity Models». En: *Journal of Business & Economic Statistics* 20.3, págs. 339-350.

Financial Crisis Inquiry Commission (2011). *The Financial Crisis Inquiry Report*. New York: Public Affairs.

Garman, Mark B. (1997). «Taking VaR to Pieces». En: *Risk* 10.10, págs. 70-71.

Glasserman, Paul (2004). *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. Vol. 53. Stochastic Modelling and Applied Probability. New York: Springer. DOI: 10.1007/978-0-387-21617-1.

J.P. Morgan y Reuters (1994). *RiskMetrics Technical Document*. Inf. téc. J.P. Morgan. URL: https://www.msci.com/documents/10199/5915b101-4206-4ba0-aee2-3449d5c7e95a (Último acceso 31 de mayo de 2026).

Jorion, Philippe (2006). *Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk*. 3.ª ed. New York: McGraw-Hill.

Kotz, Samuel, Tomasz J. Kozubowski y Krzysztof Podgórski (2001). *The Laplace Distribution and Generalizations*. Boston: Birkhäuser.

Kupiec, Paul H. (1995). «Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Measurement Models». En: *The Journal of Derivatives* 3.2, págs. 73-84. DOI: 10.3905/jod.1995.407942.

Mahalanobis, Prasanta Chandra (1936). «On the Generalised Distance in Statistics». En: *Proceedings of the National Institute of Sciences of India* 2.1, págs. 49-55.

Markowitz, Harry (1952). «Portfolio Selection». En: *The Journal of Finance* 7.1, págs. 77-91. DOI: 10.2307/2975974.

McNeil, Alexander J. y Rüdiger Frey (2000). «Estimation of Tail-Related Risk Measures for Heteroscedastic Financial Time Series: An Extreme Value Approach». En: *Journal of Empirical Finance* 7.3–4, págs. 271-300. DOI: 10.1016/S0927-5398(00)00012-8.

McNeil, Alexander J., Rüdiger Frey y Paul Embrechts (2005). *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools*. Princeton: Princeton University Press. ISBN: 9780691122557.

Merton, Robert C. (1980). «On Estimating the Expected Return on the Market: An Exploratory Investigation». En: *Journal of Financial Economics* 8.4, págs. 323-361.

Nelsen, Roger B. (2006). *An Introduction to Copulas*. New York: Springer.

Rockafellar, R. Tyrrell y Stanislav Uryasev (2000). «Optimization of Conditional Value-at-Risk». En: *The Journal of Risk* 2.3, págs. 21-41. DOI: 10.21314/JOR.2000.038.

Tsay, Ruey S. (2010). *Analysis of Financial Time Series*. 3.ª ed. Hoboken: John Wiley & Sons.

United Nations (2015). *Transforming Our World: The 2030 Agenda for Sustainable Development*. Inf. téc. United Nations. URL: https://sdgs.un.org/2030agenda.