UNIVERSIDAD PONTIFICIA
ICAI ICADE
COMILLAS
MADRID

Grado Universitario en Administración y Dirección de Empresas
2025-2026

Bachelor Thesis "Optimización Cuántica de Portafolios Financieros: Modelización QUBO y Algoritmo QAOA"

Timothée Emmanuel Roger Marie Maspétiol

Raquel Galazo García
Madrid 2026

This work is licensed under Creative Commons **Attribution – Non Commercial – Non Derivatives**

RESUMEN

Este trabajo explora la aplicación de la computación cuántica a la optimización de carteras financieras. A partir del modelo clásico de Markowitz, se formula el problema de selección de activos como un problema QUBO (*Quadratic Unconstrained Binary Optimization*) y se resuelve mediante el algoritmo QAOA (*Quantum Approximate Optimization Algorithm*) sobre un simulador cuántico ideal. Se comparan tres implementaciones sobre acciones del S&P 500: una construcción heurística manual en Excel (12 activos), una optimización algorítmica clásica completa en Python (12 activos seleccionados sobre el universo S&P 500 mediante un score multicriterio), y un *pipeline* híbrido clásico-cuántico en tres etapas (preselección clásica de 25 candidatos por decorrelación, selección cuántica de 12 activos mediante QAOA, optimización Markowitz final de los pesos continuos). Las tres implementaciones se evalúan mediante un protocolo de *walk-forward backtesting* (in-sample 2019–2022, out-of-sample 2022–2025) frente al benchmark SPY.

Los resultados muestran que QAOA recupera la solución óptima exacta, validada previamente por enumeración combinatoria de los 5 200 300 subconjuntos posibles, en el 20 % de las ejecuciones a profundidad $p = 3$, lo que valida la viabilidad de la cadena Markowitz → QUBO → QAOA. La cartera final del *pipeline* híbrido obtiene un ratio de Sharpe in-sample de 1,54 pero una performance out-of-sample de 0,15, inferior al benchmark SPY (0,38), con una tasa de degradación del 90,4 % comparable a la del enfoque Markowitz clásico (89,8 %). Esta convergencia entre los dos métodos confirma que el cuello de botella estructural reside en la estimación clásica de los parámetros y no en el algoritmo cuántico. El trabajo concluye que la ventaja cuántica efectiva en optimización de carteras requiere problemas de mayor escala y restricciones cualitativas más complejas que las consideradas aquí, condiciones que la era NISQ actual no permite explotar plenamente.

Palabras clave: optimización de carteras, computación cuántica, QUBO, QAOA, modelo de Markowitz, era NISQ, *walk-forward backtesting*, ratio de Sharpe.

DEDICATORIA

ÍNDICE GENERAL

1. INTRODUCCIÓN. 1
1.1. Contexto y motivación 1
1.2. Problemática y objetivos de investigación 1
1.3. Metodología y estructura del trabajo 2
2. FINANZAS Y OPTIMIZACIÓN DE CARTERAS 3
2.1. El mercado financiero y los rendimientos 3
2.2. El modelo media-varianza 3
2.2.1. Formalización 3
2.2.2. Frontera eficiente y cartera tangente 4
2.3. Estimación robusta de la covarianza 4
2.4. Extensiones principales del modelo 5
2.5. Optimización con restricciones discretas. 5
2.6. Transformación de Markowitz a QUBO 5
2.6.1. Forma canónica 5
2.6.2. Reformulación binaria 6
2.6.3. Restricciones cualitativas y ventaja estructural. 6
2.7. Protocolo de validación empírica 6
3. FUNDAMENTOS DE LA COMPUTACIÓN CUÁNTICA 8
3.1. Breve historia 8
3.2. Conceptos esenciales. 8
3.2.1. El qubit 8
3.2.2. Superposición 9
3.2.3. Entrelazamiento 9
3.2.4. Efecto túnel 10
3.3. La era NISQ 10
3.4. Del problema financiero al Hamiltoniano cuántico 10
3.5. El algoritmo QAOA 11
4. METODOLOGÍA E IMPLEMENTACIÓN. 13
4.1. Implementación Excel 13
4.2. Implementación Python 14
4.2.1. Recuperación del universo y descarga de precios 14
4.2.2. Separación temporal y filtros 14
4.2.3. Score multicriterio y selección. 14
4.2.4. Estimación de parámetros 15
4.2.5. Optimización y validación 15
4.3. Implementación QAOA: pipeline híbrido clásico-cuántico. 15
4.3.1. Justificación de la arquitectura. 16
4.3.2. Etapa 1: preselección de 25 candidatos 16
4.3.3. Etapa 2: selección cuántica vía QAOA 17
4.3.4. Etapa 3: optimización Markowitz final 18
4.4. Síntesis comparativa 18

5. RESULTADOS Y ANÁLISIS COMPARATIVO 20
5.1. Resultados de la implementación Excel 20
5.2. Resultados de la implementación Python 20
5.2.1. Selección final y pesos optimizados 20
5.2.2. Performance in-sample y out-of-sample 20
5.3. Resultados de la implementación QAOA 21
5.3.1. Universo de 25 candidatos preseleccionados 21
5.3.2. Validación del óptimo por enumeración combinatoria. 24
5.3.3. Análisis de las 15 ejecuciones QAOA. 24
5.3.4. Selección del bitstring final y debate metodológico 25
5.3.5. Cartera final y performance 26
5.4. Comparación global 26
5.5. Discusión 29
5.5.1. Validación de la cadena Markowitz → QUBO → QAOA 29
5.5.2. Condiciones de la ventaja cuántica 29
5.5.3. Limitaciones metodológicas 30
6. CONCLUSIÓN Y PERSPECTIVAS 31
6.1. Síntesis de los hallazgos 31
6.2. Respuesta a la pregunta de investigación. 31
6.3. Perspectivas. 32
6.4. Reflexión final 32
BIBLIOGRAFÍA 34
A. POSTULADOS DE LA MECÁNICA CUÁNTICA. 36
B. PUERTAS LÓGICAS CUÁNTICAS 37
C. DECLARACIÓN DE USO DE HERRAMIENTAS DE INTELIGENCIA ARTIFICIAL GENERATIVA 38

ÍNDICE DE FIGURAS

3.1 Representación de un qubit en la esfera de Bloch. 9
3.2 Cadena de transformaciones del problema de Markowitz al Hamiltoniano cuántico. 11

4.1 Arquitectura del pipeline híbrido clásico-cuántico en tres etapas. 16

5.1 Matriz de correlación de los 25 activos candidatos. 22
5.2 Energías obtenidas por las 15 ejecuciones QAOA según la profundidad p del circuito. 25
5.3 Evolución cumulada de las tres carteras y del benchmark SPY sobre el período out-of-sample 2022–2025. 27
5.4 Comparación del ratio de Sharpe in-sample y out-of-sample para las tres estrategias. 28

ÍNDICE DE CUADROS

4.1 Comparación metodológica de las tres implementaciones. 19

5.1 Universo final de 12 acciones seleccionadas por el pipeline Python. 21
5.2 Universo de 25 candidatos preseleccionados para la etapa cuántica. 23
5.3 Resultados de las 15 ejecuciones QAOA. 24
5.4 Comparación global de las performances de las tres carteras y del benchmark SPY. 26

1. INTRODUCCIÓN

1.1. Contexto y motivación

La gestión cuantitativa de carteras es una de las disciplinas cuya formalización matemática ha reconfigurado profundamente las prácticas de la industria financiera. Desde los trabajos fundacionales de Markowitz (1952), el problema de la asignación óptima del capital entre un conjunto de activos se trata como un programa de optimización que explota la estructura de covarianza del universo de inversión para construir carteras eficientes en el espacio rentabilidad-riesgo.

Este marco teórico, conocido como el modelo media-varianza, gobierna gran parte de los sistemas de gestión institucional de carteras. Los fondos de pensiones mundiales gestionan más de 56 billones de dólares en activos (OECD, 2023), los fondos soberanos aproximadamente 12 billones, y el conjunto de activos bajo gestión institucional supera los 100 billones a escala mundial. En este contexto, una mejora marginal en la eficiencia algorítmica de los métodos de optimización se traduce en un impacto financiero considerable.

Sin embargo, el modelo de Markowitz presenta limitaciones estructurales que motivan la búsqueda de alternativas. Estas limitaciones, junto con la emergencia de la computación cuántica como paradigma de cálculo alternativo, justifican la presente investigación.

1.2. Problemática y objetivos de investigación

Tres limitaciones de la optimización clásica motivan el recurso a métodos alternativos. La primera es el sesgo de estimación: Michaud (1989) demuestra que el optimizador cuadrático amplifica los errores de estimación de los rendimientos esperados y de la matriz de covarianza, generando una brecha estructural entre la performance histórica y la realizada. La segunda es la complejidad combinatoria: cuando el problema incluye la decisión de seleccionar K activos entre n, el número de subconjuntos admisibles $\binom{n}{k}$ explota exponencialmente y el problema se vuelve NP-difícil. Para $n = 500$ y $K = 50$, este número supera el de átomos en el universo observable, y ningún algoritmo exacto polinomial es conocido. La tercera son las restricciones cualitativas: límites sectoriales, exclusiones ESG y restricciones de cardinalidad introducen variables enteras, transformando el problema en un programa cuadrático con variables mixtas (MIQP), exponencialmente más difícil que su versión continua.

La computación cuántica ofrece un paradigma de cálculo fundamentalmente diferente, basado en los principios de superposición, entrelazamiento e interferencia para explorar espacios de soluciones de dimensión exponencial (Nielsen & Chuang, 2010). En este contexto, la formulación QUBO constituye el puente natural entre la optimización financiera y las arquitecturas cuánticas: las variables binarias capturan las decisiones de inclusión o exclusión y las restricciones se codifican como términos de penalización cuadrática. El algoritmo QAOA, introducido por Farhi et al. (2014), es un algoritmo híbrido clásico-cuántico diseñado para resolver problemas QUBO en procesadores de la era NISQ (Preskill, 2018).

Es importante precisar desde el inicio el alcance y la naturaleza de la contribución de QAOA en este trabajo, ya que el algoritmo cuántico no es un sustituto del modelo

de Markowitz sino un componente complementario. Markowitz optimiza pesos continuos $w_i \in [0, 1]$ sobre un conjunto de activos ya elegido; QAOA selecciona un subconjunto de activos mediante variables binarias $x_i \in \{0, 1\}$ sin determinar los pesos. El *pipeline* híbrido implementado aquí combina ambos: QAOA identifica qué activos incluir en la cartera, y Markowitz determina con qué pesos. Cada paradigma asume así la función para la que está estructuralmente adaptado.

Conviene también precisar el alcance de las pretensiones del trabajo. Este TFG no pretende demostrar una ventaja cuántica práctica frente a los métodos clásicos exactos, sino validar la viabilidad metodológica de la cadena Markowitz → QUBO → QAOA y caracterizar las condiciones empíricas bajo las cuales tal ventaja podría materializarse en el futuro. Con 25 activos candidatos, la enumeración combinatoria clásica sigue siendo viable y constituye precisamente el benchmark que permite evaluar rigurosamente la calidad de las soluciones cuánticas.

Este trabajo se articula en torno a la pregunta siguiente:

> *¿En qué medida la formulación QUBO asociada al algoritmo QAOA permite mejorar la calidad y la robustez de la optimización de carteras financieras frente a los métodos clásicos de Markowitz, y cuáles son las condiciones necesarias para que dicha ventaja sea efectiva?*

Tres sub-preguntas operativas estructuran el trabajo: ¿es viable la cadena Markowitz → QUBO → QAOA en el sentido de que el algoritmo cuántico recupere las soluciones óptimas validadas por un solver clásico exacto? ¿La cartera del *pipeline* híbrido presenta una performance fuera de la muestra mejor, comparable o peor que la cartera Markowitz puramente clásica? ¿Qué condiciones (tamaño del problema, profundidad del circuito, calidad del hardware, complejidad de las restricciones) son necesarias para que la ventaja cuántica se materialice empíricamente?

1.3. Metodología y estructura del trabajo

El trabajo adopta un enfoque comparativo confrontando tres implementaciones sobre un universo común. La primera, en Excel, construye manualmente una cartera de 12 activos mediante asignación heurística de pesos proporcionales a los ratios de Sharpe individuales y sirve como referencia base. La segunda, en Python, optimiza la cartera tangente mediante SLSQP con preselección multicriterio sobre el S&P 500, estimación regularizada de la covarianza por Ledoit-Wolf y estimación combinada de los rendimientos por CAPM ajustado y *shrinkage* de Bayes-Stein. La tercera, basada en Qiskit Aer, ejecuta un *pipeline* en tres etapas: preselección clásica de 25 candidatos, selección cuántica de 12 activos mediante QAOA (circuito de 25 qubits) sobre un simulador ideal, y optimización clásica de los pesos finales.

La validación empírica se apoya en un protocolo de *walk-forward backtesting*: los modelos se calibran sobre 2019–2022 (in-sample) y se evalúan sobre 2022–2025 (out-of-sample). El benchmark es el ETF SPY.

El Capítulo 2 desarrolla el marco financiero (modelo de Markowitz, estimación robusta, transformación QUBO). El Capítulo 3 introduce los fundamentos cuánticos y el algoritmo QAOA. El Capítulo 4 detalla las tres implementaciones. El Capítulo 5 presenta los resultados y el análisis comparativo. El Capítulo 6 concluye y discute las perspectivas. Los formalismos complementarios se desarrollan en los Anexos A y B.

2. FINANZAS Y OPTIMIZACIÓN DE CARTERAS

Este capítulo establece los fundamentos analíticos necesarios para los métodos comparados. Tras situar el problema en el marco financiero clásico, se desarrolla el modelo media-varianza, se examinan las técnicas de estimación robusta de la covarianza, se formaliza el problema con restricciones discretas, y se describe la transformación del problema en formulación QUBO.

2.1. El mercado financiero y los rendimientos

Un activo financiero confiere a su tenedor un derecho sobre flujos de caja futuros inciertos. Esta incertidumbre es el núcleo de la teoría de carteras. El rendimiento logarítmico del activo i en el período $[t-1, t]$ se define como:

$$r_{i,t} = \ln\left(\frac{P_{i,t}}{P_{i,t-1}}\right) \approx \frac{P_{i,t} - P_{i,t-1}}{P_{i,t-1}} \tag{2.1}$$

donde $P_{i,t}$ denota el precio ajustado por dividendos. El rendimiento logarítmico se prefiere por su aditividad temporal y su robustez frente a valores extremos. La anualización se realiza multiplicando los rendimientos medios por 252 (días bursátiles anuales) y las volatilidades por $\sqrt{252}$.

El modelo estocástico estándar es el movimiento browniano geométrico, $dS_t = \mu S_t\, dt + \sigma S_t\, dW_t$, con solución $S_t = S_0 \exp[(\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W_t]$. Implica rendimientos log-normalmente distribuidos, aproximación aceptable a frecuencias diarias pero que subestima los eventos extremos (colas gruesas) observados empíricamente (Cont, 2001).

La hipótesis de eficiencia de los mercados (Fama, 1970) estipula que los precios reflejan toda la información públicamente disponible. Su consecuencia: la única fuente de rendimiento adicional es la asunción de riesgo adicional. Sin embargo, la literatura documenta anomalías persistentes — efecto momentum (Jegadeesh & Titman, 1993), prima de valor (Fama & French, 1992), efecto de baja volatilidad (Baker et al., 2011) — que sugieren ineficiencias parciales y fundamentan los enfoques de scoring multicriterio utilizados aquí en la preselección.

2.2. El modelo media-varianza

2.2.1. Formalización

Consideremos un universo de n activos con vector de rendimientos esperados $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^n$ y matriz de covarianza $\boldsymbol{\Sigma}$ definida positiva. Una cartera se describe por su vector de pesos $\mathbf{w}$, sujeto a la restricción presupuestaria $\mathbf{1}^\top \mathbf{w} = 1$ con $w_i \geq 0$. El rendimiento esperado y la varianza de la cartera son:

$$\mathbb{E}[R_p] = \mathbf{w}^\top \boldsymbol{\mu}, \qquad \sigma_p^2 = \mathbf{w}^\top \boldsymbol{\Sigma}\, \mathbf{w} = \sum_{i,j} w_i w_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j \tag{2.2}$$

La descomposición en términos de correlación es esclarecedora: la varianza de la cartera se minimiza combinando activos con baja correlación mutua. Este es el fundamento del efecto diversificación.

El programa de Markowitz (1952), parametrizado por un coeficiente de aversión al riesgo $\lambda \geq 0$, es:

$$\max_{\mathbf{w}} \quad \mathbf{w}^\top \boldsymbol{\mu} - \lambda\, \mathbf{w}^\top \boldsymbol{\Sigma}\, \mathbf{w} \quad \text{s.a.} \quad \mathbf{1}^\top \mathbf{w} = 1, \quad w_i \geq 0 \tag{2.3}$$

Es un programa cuadrático convexo (QP), resoluble en tiempo polinomial $O(n^3)$ (Boyd & Vandenberghe, 2004). Su solución analítica, derivada de las condiciones KKT, demuestra el teorema de separación de dos fondos de Tobin (1958): toda cartera eficiente es una combinación convexa de la cartera de varianza mínima y de un segundo fondo de referencia.

2.2.2. Frontera eficiente y cartera tangente

La traza de la solución óptima en el espacio $(\sigma_p, \mathbb{E}[R_p])$ forma una hipérbola cuyo vértice es la cartera de varianza mínima global. Con un activo sin riesgo R_f, la frontera se linealiza en la Capital Market Line, y el punto de tangencia es la *cartera tangente*:

$$\mathbf{w}_{\tan} = \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\mu} - R_f \mathbf{1})}{\mathbf{1}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\mu} - R_f \mathbf{1})} \tag{2.4}$$

Es esta cartera que las tres implementaciones buscan identificar. La métrica de comparación es el ratio de Sharpe realizado fuera de la muestra (Sharpe, 1966):

$$S = \frac{\mathbb{E}[R_p] - R_f}{\sigma_p} \tag{2.5}$$

En este trabajo, $R_f = 2\,\%$, conforme a los niveles históricos de los Treasury Bills estadounidenses a corto plazo durante el período de estudio.

2.3. Estimación robusta de la covarianza

El estimador empírico de covarianza es insesgado y consistente, pero su condicionamiento se degrada cuando el ratio n/T aumenta. Para $n = 100$ activos y $T = 252$ observaciones, el ratio $n/T \approx 0{,}4$ ya produce una matriz mal condicionada. Para $n > T$, la matriz es singular. Michaud (1989) demuestra además que el optimizador amplifica los errores: sobrepondera los activos cuyos rendimientos están sobreestimados y cuyas covarianzas están subestimadas.

El método de *shrinkage* de Ledoit y Wolf (2004) contrae la covarianza empírica $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$ hacia una estructura objetivo $\mathbf{F}$ (matriz de correlación constante):

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\text{LW}} = (1 - \alpha)\, \hat{\boldsymbol{\Sigma}} + \alpha\, \mathbf{F} \tag{2.6}$$

El parámetro de contracción $\alpha^* \in [0, 1]$ se determina analíticamente minimizando el error cuadrático medio asintótico. El método es automático y converge hacia $\boldsymbol{\Sigma}$ a la velocidad n/T incluso cuando $n/T \to c > 0$. Es el estimador utilizado en las implementaciones Python y QAOA de este trabajo.

Una alternativa es la modelización factorial (Fama & French, 1993), $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{B}\mathbf{F}\mathbf{B}^\top + \mathbf{D}$, que reduce el número de parámetros libres de $O(n^2)$ a $O(nK + K^2)$.

2.4. Extensiones principales del modelo

El modelo de Black y Litterman (1992) integra opiniones del inversor mediante una actualización bayesiana sobre los rendimientos de equilibrio implícitos $\mathbf{\Pi} = \delta \mathbf{\Sigma} \mathbf{w}_m$ extraídos por inversión de la cartera de mercado.

El CAPM (Lintner, 1965; Mossin, 1966; Sharpe, 1964) es el equilibrio emergente del modelo de Markowitz: $\mathbb{E}[R_i] = R_f + \beta_i(\mathbb{E}[R_m] - R_f)$. Los modelos factoriales extienden el CAPM añadiendo factores de tamaño y valor (Fama & French, 1993), momentum (Carhart, 1997), rentabilidad e inversión (Fama & French, 2015). Proporcionan tanto un marco de evaluación (α de Jensen) como una estructura parsimoniosa para la covarianza.

La optimización robusta (Ben-Tal & Nemirovski, 1998) busca la cartera óptima para el peor caso en un conjunto de incertidumbre $\mathcal{U}$, transformando el problema en un programa cónico de segundo orden (SOCP), aún polinomial.

2.5. Optimización con restricciones discretas

Las restricciones de cardinalidad introducen variables binarias $z_i \in \{0, 1\}$ y transforman el programa en un MIQP:

$$\max_{\mathbf{w},\mathbf{z}} \quad \mathbf{w}^\top \boldsymbol{\mu} - \lambda\, \mathbf{w}^\top \mathbf{\Sigma}\, \mathbf{w} \quad \text{s.a.} \quad \sum_i z_i = K,\ w_i \le z_i w_{\max},\ \mathbf{1}^\top \mathbf{w} = 1 \tag{2.7}$$

donde K es el número de activos a seleccionar y $w_{\max}$ el peso máximo autorizado. Restricciones adicionales (sectoriales, ESG, tracking error) generan problemas de complejidad creciente.

Las heurísticas clásicas — Branch-and-Bound (Land & Doig, 1960), recocido simulado (Kirkpatrick et al., 1983), algoritmos genéticos (Holland, 1975) — no ofrecen simultáneamente optimalidad garantizada, complejidad polinomial y robustez paramétrica para instancias grandes. Es en este espacio donde QAOA se posiciona como alternativa prometedora, al explotar la superposición cuántica para explorar simultáneamente un gran número de estados del problema.

2.6. Transformación de Markowitz a QUBO

La conexión entre el problema financiero y la arquitectura cuántica pasa por la reformulación de Markowitz en formulación QUBO (*Quadratic Unconstrained Binary Optimization*). Esta sección desarrolla la transformación matemática en la versión efectivamente utilizada en el *pipeline* híbrido: la selección binaria de K activos entre n candidatos, con pesos uniformes en los activos retenidos.

2.6.1. Forma canónica

Un problema QUBO se define por la minimización de una forma cuadrática sobre vectores binarios:

$$\min_{x \in \{0,1\}^n} \ f(x) = x^\top Q\, x \tag{2.8}$$

donde $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz real simétrica. La estructura QUBO es universal: cualquier problema NP-completo puede expresarse en esta forma con una matriz Q apropiada (Lucas, 2014). Es exactamente este formato que aceptan las arquitecturas

cuánticas de optimización. El carácter *unconstrained* no significa que el problema original carezca de restricciones, sino que éstas se internalizan en Q mediante términos de penalización cuadrática.

2.6.2. Reformulación binaria

Los pesos continuos $w_i \in [0, 1]$ se reemplazan por variables binarias $x_i \in \{0, 1\}$ ($x_i = 1$ si el activo se selecciona, $x_i = 0$ si se excluye), imponiendo pesos uniformes $1/K$ a los activos retenidos. La función objetivo media-varianza se reformula como:

$$f(x) = \frac{q}{K^2} \sum_{i,j} x_i x_j \sigma_{ij} - \frac{1}{K} \sum_i \mu_i x_i \tag{2.9}$$

donde $q \geq 0$ es el coeficiente de aversión al riesgo. Para imponer exactamente K activos, se añade una penalización cuadrática:

$$\mathcal{P}_{\text{card}}(x) = \mu_{\text{pen}} \left(\sum_i x_i - K \right)^2 \tag{2.10}$$

con $\mu_{\text{pen}} > 0$. Este término se anula cuando $\sum_i x_i = K$ exactamente, y crece cuadráticamente con la violación. La elección de μ_{pen} es crucial: si es insuficientemente grande, el optimizador puede "preferir" violar la restricción si esto reduce más fuertemente los términos rendimiento-riesgo. Este fenómeno se observará empíricamente en la sección 5.3.

La función objetivo total $f_{\text{total}}(x) = f(x) + \mathcal{P}_{\text{card}}(x)$ se reorganiza en la forma canónica $x^\top Q\, x$. La matriz Q resultante codifica la totalidad del problema bajo la forma de un problema combinatorio puro sobre $\{0, 1\}^n$. En la implementación de este trabajo, $n = 25$ y $K = 12$, lo que produce una matriz 25×25 y un espacio de configuraciones de $2^{25} \approx 33{,}5$ millones.

2.6.3. Restricciones cualitativas y ventaja estructural

La fuerza estructural de QUBO reside en su capacidad para codificar restricciones cualitativas como términos cuadráticos aditivos. La restricción sectorial (máximo m activos en el sector $\mathcal{S}_k$) se escribe $\mu_s \sum_k \max(0, \sum_{i \in \mathcal{S}_k} x_i - m)^2$. La restricción de decorrelación (penalizar pares con $|\rho_{ij}| > \rho^*$) se escribe $\mu_c \sum_{i<j, |\rho_{ij}|>\rho^*} |\rho_{ij}|\, x_i x_j$. Restricciones ESG, *tracking error* o turnover admiten formulaciones cuadráticas similares. Estas penalizaciones se suman directamente a la función objetivo sin modificar la estructura cuadrática del problema. En un MIQP, cada restricción multiplica el espacio de soluciones; en QUBO, solo modifica el paisaje energético del mismo espacio. Aunque estas restricciones no se han implementado en el presente trabajo (con el fin de mantener una comparación limpia con el método Markowitz clásico), su descripción ilustra el potencial estructural del enfoque cuántico.

2.7. Protocolo de validación empírica

Todo modelo calibrado sobre datos históricos está expuesto al sobreajuste, cuantificado por la tasa de degradación:

$$\tau = \frac{S_{\text{IS}} - S_{\text{OOS}}}{S_{\text{IS}}} \times 100\,\% \tag{2.11}$$

donde S_{IS} y S_{OOS} son los Sharpes in-sample y out-of-sample. Bailey y López de Prado (2014) documentan empíricamente tasas del 50 al 90 % para las estrategias cuantitativas clásicas.

El *walk-forward backtesting* es el método estándar para evaluar la calidad predictiva. En este trabajo, los modelos se calibran sobre 2019–2022 (in-sample) y se evalúan sobre 2022–2025 (out-of-sample) con los pesos fijos. El benchmark es el ETF SPY, que replica el S&P 500 ponderado por capitalización; los estudios SPIVA (S&P Dow Jones Indices, 2024) muestran que el 80–90 % de los fondos activos americanos obtienen una performance inferior al benchmark sobre 10 años.

3. FUNDAMENTOS DE LA COMPUTACIÓN CUÁNTICA

Este capítulo introduce los principios necesarios para comprender el algoritmo QAOA. Se procede de lo intuitivo a lo formal: una perspectiva histórica breve, los conceptos esenciales presentados de forma accesible, el estado actual de la tecnología, la conexión formal entre el problema de optimización y la arquitectura cuántica, y el algoritmo QAOA. Los formalismos complementarios (postulados, puertas) se desarrollan en los Anexos A y B.

3.1. Breve historia

La computación cuántica nace de la observación de Feynman (1982): simular un sistema cuántico de n partículas en un ordenador clásico requiere recursos exponenciales en n, mientras que una máquina que operara según las reglas cuánticas podría hacerlo eficientemente. Deutsch (1985) formaliza la noción de máquina de Turing cuántica universal. Shor (1994) descubre un algoritmo cuántico para factorizar enteros en tiempo polinomial, amenazando RSA; Grover (1996) propone un algoritmo de búsqueda con aceleración cuadrática. Las primeras realizaciones experimentales aparecen a finales de los años 1990; en 2019, Google anuncia la *supremacía cuántica* con Sycamore (Arute et al., 2019), e IBM presenta Condor (1 121 qubits) en 2023. Hoy, la comunidad habla de *ventaja cuántica*: la capacidad de resolver un problema específico más eficientemente que cualquier método clásico conocido.

3.2. Conceptos esenciales

3.2.1. El qubit

En la computación clásica, la unidad fundamental es el bit (valor 0 o 1). En la computación cuántica, esta unidad se reemplaza por el *qubit*, que puede existir en una combinación lineal de ambos estados:

$$|\psi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle, \qquad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \tag{3.1}$$

donde $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ son las amplitudes de probabilidad. Al medir, el resultado es necesariamente $|0\rangle$ (con probabilidad $|\alpha|^2$) o $|1\rangle$ (con probabilidad $|\beta|^2$); la medición destruye el estado de superposición.

Una analogía esclarecedora: un bit clásico es como una moneda apoyada sobre una mesa, que muestra cara o cruz pero nunca ambas. Un qubit, en cambio, es como una moneda girando en el aire: durante el vuelo posee una probabilidad de aterrizar en cada cara, pero antes de tocar la mesa no se puede afirmar que sea ni una ni otra. La medición corresponde al momento en que toca la mesa: el resultado se vuelve clásico y la información de superposición se pierde.

Un qubit se implementa físicamente mediante el espín de un electrón, la polarización de un fotón, los niveles de energía de un átomo atrapado o el estado de un circuito superconductor. El formalismo trata los qubits como objetos matemáticos abstractos, independientes de su realización física. Su estado se representa visualmente como un punto sobre la esfera de Bloch (Figura 3.1), donde el polo norte es $|0\rangle$, el polo sur $|1\rangle$, y las operaciones cuánticas son rotaciones sobre la esfera.

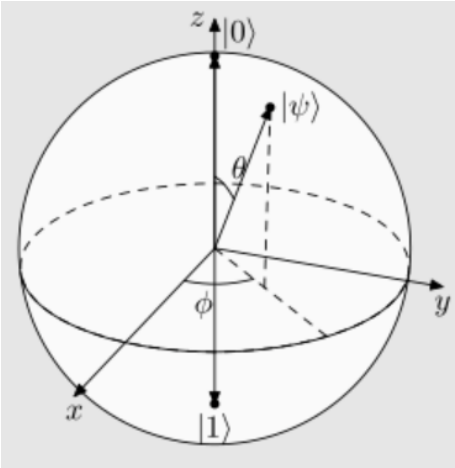

Figura 3.1
Representación de un qubit en la esfera de Bloch.

El polo norte corresponde a $|0\rangle$ y el polo sur a $|1\rangle$. Las operaciones cuánticas corresponden a rotaciones sobre esta esfera.

3.2.2. Superposición

Un sistema de n qubits puede representar simultáneamente las 2^n configuraciones de la base computacional:

$$|\Psi\rangle = \sum_{x\in\{0,1\}^n} \alpha_x \, |x_1 \cdots x_n\rangle, \qquad \sum_x |\alpha_x|^2 = 1 \tag{3.2}$$

Con 10 qubits se codifican 1 024 estados simultáneamente, con 25 qubits más de 33 millones, con 50 qubits más de 10^{15}. Imagine un bibliotecario clásico buscando un libro entre un millón de volúmenes: debe examinarlos uno por uno. Un bibliotecario cuántico, en cambio, podría inspeccionarlos todos simultáneamente, gracias a un estado cuántico que contiene la información sobre todos los volúmenes. La medición final extrae un solo libro, pero la búsqueda interna se ha realizado en paralelo.

En el contexto de la selección de activos, cada activo i se asocia a un qubit ($x_i = 1$ si se selecciona, $x_i = 0$ si no). Un sistema de 25 qubits en superposición codifica simultáneamente las 2^{25} configuraciones posibles del portafolio. La algoritmia cuántica consiste en manipular las amplitudes α_x mediante puertas cuánticas para amplificar las amplitudes de las buenas soluciones. Este es el principio de QAOA.

3.2.3. Entrelazamiento

Cuando dos qubits están entrelazados, sus estados se correlacionan de tal modo que no es posible describir el estado de un qubit independientemente del otro. El ejemplo emblemático es el par de Bell:

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \tag{3.3}$$

La probabilidad de medir $|00\rangle$ es del 50 % y la de $|11\rangle$ del 50 %, pero jamás se observará $|01\rangle$ ni $|10\rangle$. Si se mide el primer qubit y se obtiene $|0\rangle$, el segundo estará automáticamente en $|0\rangle$, sin importar la distancia que los separe físicamente.

En el modelo de Markowitz, la varianza del portafolio depende de las covarianzas entre todos los pares de activos. El entrelazamiento permite codificar estas interacciones cuadráticas de forma nativa: cuando QAOA aplica el operador de fase asociado al Hamiltoniano, genera entrelazamiento entre qubits proporcional a las covarianzas entre los activos correspondientes.

3.2.4. Efecto túnel

En mecánica clásica, una partícula no puede atravesar una barrera de potencial si su energía es inferior a la altura de la barrera; en mecánica cuántica, existe una probabilidad no nula de que la atraviese (el *efecto túnel*). En un problema de optimización, donde la función objetivo define un paisaje energético con mínimos locales y globales, los algoritmos clásicos basados en gradiente tienden a quedar atrapados en mínimos locales. El efecto túnel cuántico permite superar estas barreras de forma natural, accediendo a regiones del espacio de soluciones que los métodos clásicos solo alcanzan mediante perturbaciones aleatorias.

3.3. La era NISQ

Los ordenadores cuánticos actuales pertenecen a la era NISQ (*Noisy Intermediate-Scale Quantum*), término acuñado por Preskill (2018). Los procesadores NISQ presentan tres limitaciones: la descoherencia (los qubits pierden su estado en microsegundos a milisegundos al interactuar con el entorno), las tasas de error por puerta del 0,1 al 1 % que se acumulan en circuitos profundos, y un número limitado de qubits efectivamente utilizables tras tener en cuenta las restricciones de conectividad. La corrección cuántica de errores requiere del orden de 1 000 a 10 000 qubits físicos por qubit lógico, tecnología que no será disponible antes de la próxima década.

Estas limitaciones explican por qué en este trabajo se utiliza un simulador cuántico clásico (Qiskit Aer) en lugar de un procesador real: el simulador reproduce fielmente el comportamiento de un circuito cuántico ideal, lo que permite evaluar el potencial del algoritmo sin las distorsiones del hardware. La metodología y la formulación QUBO son directamente transferibles a procesadores reales cuando la tecnología alcance la madurez. El modelo emergente es el de arquitecturas híbridas donde los ordenadores cuánticos funcionan como coprocesadores integrados con CPU y GPU; QAOA está diseñado específicamente para este contexto.

3.4. Del problema financiero al Hamiltoniano cuántico

La sección 2.6 mostró cómo transformar el problema de Markowitz en formulación QUBO. La presente sección completa la construcción estableciendo el vínculo con el modelo de Ising, representación directamente utilizable por los algoritmos cuánticos.

El *modelo de Ising* describe un sistema de espines $s_i \in \{-1, +1\}$ con Hamiltoniano:

$$H_{\text{Ising}} = \sum_{i<j} J_{ij}\, s_i s_j + \sum_i h_i\, s_i \tag{3.4}$$

donde los J_{ij} son los acoplamientos entre pares y los h_i los campos magnéticos locales. Encontrar la configuración que minimiza H_{Ising} es NP-difícil. La conexión con QUBO es directa mediante el cambio de variables $x_i = (1 - s_i)/2$, o equivalentemente $s_i = 1 - 2x_i$. La

función objetivo QUBO se convierte en un Hamiltoniano de Ising con coeficientes J_{ij} y h_i funciones lineales de los elementos de Q, más una constante aditiva (*offset Ising*, que en la implementación de este trabajo vale 225,577769). Los dos problemas son estrictamente equivalentes y la conversión es automática en `qiskit-optimization`.

El paso final promueve el Hamiltoniano clásico a operador cuántico: las variables de espín s_i se reemplazan por los operadores de Pauli Z_i (autovalor $+1$ sobre $|0\rangle$, -1 sobre $|1\rangle$):

$$H_P = \sum_{i<j} J_{ij} Z_i Z_j + \sum_i h_i Z_i \tag{3.5}$$

Los estados propios de H_P son los estados de la base computacional, y los valores propios son los valores de la función QUBO para cada configuración. El estado propio de menor energía corresponde a la solución óptima. Esta cadena Markowitz → QUBO → Ising → Hamiltoniano cuántico constituye el puente completo entre el problema financiero y la arquitectura cuántica.

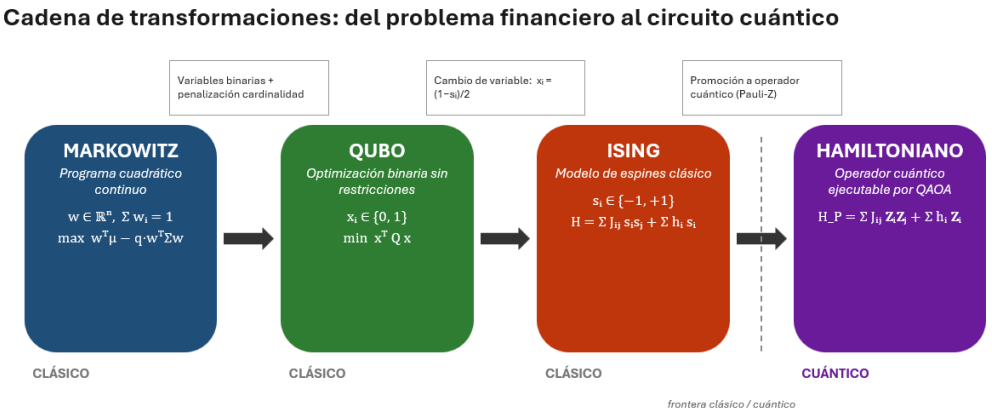

Figura 3.2
Cadena de transformaciones del problema de Markowitz al Hamiltoniano cuántico.

3.5. El algoritmo QAOA

QAOA, introducido por Farhi et al. (2014), es un algoritmo híbrido clásico-cuántico para encontrar soluciones aproximadas a problemas QUBO. Su arquitectura está particularmente adaptada a la era NISQ: utiliza circuitos de profundidad controlable y delega parte del trabajo al procesador clásico.

QAOA opera en cinco etapas iterativas. Se inicializan n qubits en $|0\rangle^{\otimes n}$ y se aplica Hadamard a cada qubit, produciendo la superposición uniforme $|+\rangle^{\otimes n} = 2^{-n/2} \sum_x |x\rangle$ (todos los portafolios equiprobables). Se aplica el operador de fase $e^{-i\gamma H_P}$ que modifica las fases en función de la energía: los estados de baja energía (buenas soluciones) acumulan fases diferentes de los de alta energía. Se aplica el operador de mezcla $e^{-i\beta H_M}$ con $H_M = \sum_i X_i$, que induce transiciones entre configuraciones y aprovecha el efecto túnel cuántico. Las dos etapas se alternan p veces, produciendo $2p$ parámetros variacionales. Finalmente, se mide el estado y un optimizador clásico (COBYLA, SPSA) ajusta los parámetros para minimizar el valor esperado de la energía. El proceso se itera hasta convergencia.

Formalmente, el estado preparado por QAOA con p capas es:

$$|\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\beta}\rangle = \prod_{k=1}^{p} e^{-i\beta_k H_M} \, e^{-i\gamma_k H_P} \, |+\rangle^{\otimes n} \tag{3.6}$$

y la función coste minimizada por el optimizador clásico es $C(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\beta}) = \langle \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\beta} | H_P | \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\beta} \rangle$. Farhi et al. (2014) demuestran que, cuando $p \to \infty$, el estado óptimo de QAOA converge al estado fundamental de H_P, es decir, a la solución exacta. En la práctica, los valores finitos de p producen soluciones aproximadas cuya calidad mejora generalmente con p, aunque esta monotonía no está garantizada debido a la dificultad creciente de la optimización clásica de los $2p$ parámetros.

En este trabajo, $n = 25$ qubits codifican los activos candidatos preseleccionados, H_P codifica la función QUBO completa con la penalización de cardinalidad para $K = 12$, y se exploran las profundidades $p \in \{1, 2, 3\}$. El espacio explorado contiene $2^{25} \approx 33{,}5$ millones de configuraciones, de las cuales solo $\binom{25}{12} = 5\,200\,300$ respetan estrictamente la restricción.

Las ventajas de QAOA incluyen su robustez al ruido (circuitos poco profundos), sus garantías teóricas (convergencia al óptimo para $p \to \infty$), la codificación natural de las restricciones financieras, y el aprovechamiento del efecto túnel para regiones inaccesibles a los métodos de gradiente. Sus limitaciones actuales son la profundidad limitada por el ruido en hardware real, la dificultad de optimización clásica en presencia de *barren plateaus* (McClean et al., 2018), el carácter aproximado de la solución para p finito, y el hecho de que para problemas de menos de 20 qubits, los simuladores clásicos son generalmente más eficientes que el hardware cuántico actual (Egger et al., 2020). En este trabajo, el objetivo no es demostrar una ventaja cuántica con 25 activos — escala todavía manejable por enumeración combinatoria clásica — sino validar la viabilidad de la cadena completa, prerrequisito indispensable antes de toda aplicación a gran escala sobre hardware cuántico futuro.

4. METODOLOGÍA E IMPLEMENTACIÓN

Este capítulo describe las tres implementaciones comparadas. La primera, en Excel, constituye una optimización heurística manual de referencia. La segunda, en Python, implementa una optimización algorítmica completa con preselección multicriterio sobre el S&P 500, estimación robusta de parámetros y validación walk-forward. La tercera, basada en QAOA y la formulación QUBO, resuelve el problema de selección binaria mediante simulación cuántica en un *pipeline* híbrido. Las tres utilizan datos de Yahoo Finance, lo que garantiza la trazabilidad y la reproducibilidad.

Conviene recordar la naturaleza complementaria de los dos enfoques optimizadores antes de detallar las implementaciones. El modelo de Markowitz resuelve el problema de *ponderación*: dados n activos seleccionados, ¿qué peso $w_i \in [0, 1]$ asignar a cada uno para maximizar el Sharpe? Es un programa cuadrático convexo en variables continuas, resoluble en tiempo polinomial. El algoritmo QAOA resuelve el problema de *selección*: dado un universo de n candidatos, ¿qué subconjunto de K activos retener? Es un problema combinatorio NP-difícil en variables binarias. El *pipeline* híbrido implementado en la sección 4.3 encadena las dos lógicas: QAOA identifica los activos a retener, y Markowitz determina con qué pesos. La implementación Python (sección 4.2) trata el problema de selección mediante una heurística clásica (diversificación sectorial GICS sobre el score multicriterio) en lugar de un algoritmo combinatorio, lo cual permite la comparación rigurosa entre ambos enfoques de selección.

4.1. Implementación Excel

La primera implementación construye una cartera diversificada de 12 activos mediante una hoja de cálculo, sin algoritmo de optimización. Reproduce la situación de un inversor individual que selecciona y pondera sus activos manualmente. Los 12 activos se eligieron discrecionalmente entre las empresas y fondos cotizados más conocidos de los mercados estadounidense y europeo, sin criterio cuantitativo de preselección: Apple, Microsoft, Google, LVMH, ASML, los ETF SPY, VTI, VEA, VWO, VNQ, y los bonos del Tesoro TNX y FVX. La composición presenta un sesgo notable hacia las grandes capitalizaciones tecnológicas estadounidenses y no incluye sectores como salud o energía, lo que limita la diversificación sectorial efectiva.

Los precios de cierre ajustados se descargaron de Yahoo Finance para el período 2021–2023 (753 observaciones diarias por activo). Para cada activo se calcularon los rendimientos logarítmicos diarios, el rendimiento medio anualizado, la volatilidad anualizada y el ratio de Sharpe individual con $R_f = 2\,\%$. La asignación de pesos sigue un criterio heurístico: los pesos son proporcionales a los ratios de Sharpe individuales positivos; los activos con Sharpe negativo o nulo reciben un peso de cero. Este método ignora completamente la matriz de covarianza, perdiendo el beneficio fundamental de la diversificación de Markowitz. En la práctica, asigna el 52 % del capital a las tres acciones tecnológicas (Microsoft, Google, Apple), cuyas correlaciones mutuas son elevadas (0,66 a 0,73), lo que produce una concentración de riesgo no deseada.

4.2. Implementación Python

La segunda implementación automatiza la construcción de cartera mediante un *pipeline* algorítmico en diez etapas, desde la recuperación de los datos brutos hasta la simulación Monte Carlo del comportamiento futuro. El objetivo es construir el portafolio tangente sobre el S&P 500 completo y validar su robustez mediante *walk-forward backtesting*. El código se ha desarrollado en Python 3.10 con las bibliotecas `yfinance`, `pandas`, `numpy`, `scipy.optimize`, `scikit-learn` y `matplotlib`. La semilla del generador aleatorio es 42.

4.2.1. Recuperación del universo y descarga de precios

La lista de los componentes del S&P 500 se obtiene mediante *web scraping* de Wikipedia, técnica robusta y actualizada en tiempo real. Los tickers se normalizan al formato Yahoo Finance (BRK.B → BRK-B). Tras la normalización se obtienen 503 componentes. Los precios diarios ajustados se descargan vía `yfinance` en modo `auto_adjust=True` (ajustados por dividendos y *splits*), por lotes de 50 tickers con reintento automático, sobre el período 2019–2025. Dos tickers (Q y SNDK) fueron rechazados por estar deslistados.

4.2.2. Separación temporal y filtros

Solo se conservan las acciones con al menos 756 observaciones válidas (tres años bursátiles), lo que produce 495 acciones. Los datos se dividen estrictamente en período in-sample (2 enero 2019 – 31 diciembre 2021), utilizado exclusivamente para la calibración, y período out-of-sample (3 enero 2022 – 31 diciembre 2024), utilizado exclusivamente para evaluar la performance realizada con los pesos fijados. Esta separación estricta es el principio fundamental del *walk-forward backtesting*: sin ella, los resultados estarían contaminados por el sesgo de *look-ahead*. Tras filtros adicionales de calidad (volatilidad anualizada en [5 %, 80 %] y rendimiento anualizado en [−50 %, +150 %], que eliminan los valores extremos producidos por fusiones u OPV recientes), se conservan 486 acciones.

4.2.3. Score multicriterio y selección

Para cada acción se calculan nueve métricas sobre la ventana in-sample: ratio de Sharpe, ratio de Sortino (sólo penaliza la volatilidad a la baja), ratio de Calmar (rendimiento sobre máximo drawdown), máximo drawdown (peor pérdida acumulada), CVaR al 95 % (promedio de las pérdidas en el 5 % peor de los días), momentum a 12 meses (rendimiento total de los últimos 252 días, cuyo poder predictivo está documentado por Jegadeesh y Titman (1993)), porcentaje de meses positivos (regularidad de la performance), volatilidad anualizada y asimetría (skewness).

Las nueve métricas se expresan en unidades diferentes con distribuciones heterogéneas; combinarlas directamente no tendría sentido. Cada métrica se transforma en un rango percentil entre 0 (peor acción) y 1 (mejor), lo que hace las dimensiones comparables y robustas frente a valores atípicos. Los nueve rangos se combinan en un score único mediante una suma ponderada con pesos asignados a priori: momentum 12 meses 20 %, Sharpe 18 %, máximo drawdown 15 %, Sortino 12 %, Calmar 10 %, CVaR 10 %, % meses positivos 6 %, volatilidad 5 %, asimetría 4 %. El momentum recibe el

peso más alto por su poder predictivo documentado; el Sharpe es la norma de la industria; el máximo drawdown favorece la resiliencia frente a las crisis.

La selección final de 12 acciones aplica una lógica en dos fases que garantiza la diversificación. Primera fase: el algoritmo recorre el ranking en orden decreciente y selecciona la primera acción encontrada en cada uno de los 11 sectores GICS, produciendo 11 selecciones iniciales. Segunda fase: queda un puesto por cubrir, asignado a la mejor acción aún no seleccionada cuyo sector no contiene ya dos acciones. Esta restricción evita la concentración sectorial excesiva.

4.2.4. Estimación de parámetros

Sobre las 12 acciones seleccionadas, se calculan los rendimientos logarítmicos diarios in-sample y se estima la matriz de covarianza mediante la clase `LedoitWolf` de `scikit-learn`, que calcula automáticamente el parámetro de shrinkage óptimo. El coeficiente medido es de 0,0511, indicando que la matriz final es 95 % empírica y 5 % estructura objetivo; este valor bajo refleja que con 12 activos y 750 días bursátiles, la matriz empírica está ya bien condicionada.

Estimar los rendimientos esperados es más difícil que estimar la covarianza, ya que la varianza temporal de los rendimientos es del orden de magnitud de su media. El algoritmo combina dos enfoques. El CAPM utiliza la beta del activo calculada por regresión sobre el SPY, con el ajuste de Blume (1971) ($\beta_{\text{ajust}} = 0{,}33 + 0{,}67 \cdot \beta_{\text{bruto}}$) que contrae las betas extremas hacia 1, corrigiendo el sesgo de regresión hacia la media. La media histórica se calcula como $\mu_{\text{hist}} = \bar{r} \times 252$. Los dos estimadores se combinan en proporción 70/30 a favor del CAPM ($\mu_{\text{esperado}} = 0{,}70\,\mu_{\text{CAPM}} + 0{,}30\,\mu_{\text{hist}}$): el CAPM produce estimaciones estables menos sensibles al ruido idiosincrático, la media histórica capta los efectos sectoriales y momentáneos. Este enfoque puede interpretarse como una forma simplificada de *shrinkage* a la James-Stein (Jorion, 1986).

4.2.5. Optimización y validación

La optimización del portafolio tangente busca maximizar el Sharpe bajo $\sum w_i = 1$ y $0{,}03 \leq w_i \leq 0{,}20$. La cota inferior garantiza que cada acción seleccionada contribuye efectivamente; la cota superior limita la concentración, coherente con las directrices prudenciales UCITS. La resolución utiliza el algoritmo SLSQP con estrategia *multi-start*: 200 puntos de partida aleatorios generados por método de Dirichlet truncado garantizan una probabilidad muy alta de identificar el óptimo global.

La validación sigue dos vías. El *backtesting buy-and-hold* construye la trayectoria de la cartera aplicando los pesos óptimos a los precios reales del período out-of-sample, sin rebalanceo, y se compara con el SPY. La simulación Monte Carlo proyecta 10 000 trayectorias diarias sobre un año mediante descomposición de Cholesky de la matriz de covarianza estimada, de las cuales se calculan los percentiles de la distribución de rendimientos a un año (VaR 95 %, CVaR 95 %, mediana, probabilidad de ganancia).

4.3. Implementación QAOA: pipeline híbrido clásico-cuántico

La tercera implementación resuelve el problema de selección mediante un *pipeline* en tres etapas: preselección clásica de candidatos, selección cuántica vía QAOA, y optimización clásica final de los pesos continuos. Esta arquitectura híbrida refleja el

modelo emergente de cómputo cuántico-clásico de la era NISQ (Egger et al., 2020; Hodson et al., 2019).

4.3.1. Justificación de la arquitectura

Tres razones justifican esta organización en tres etapas. El S&P 500 contiene 500 acciones; asociar un qubit a cada una requeriría 500 qubits, lejos del alcance de los simuladores clásicos (limitados a 25–30 qubits) y de los procesadores NISQ actuales: una preselección clásica es indispensable. QAOA solo manipula variables binarias (incluir o excluir un activo) y no tiene capacidad nativa para producir pesos continuos del tipo $w_i = 13{,}5\,\%$; para obtener los pesos finales necesarios para una cartera realista hay que recurrir a un optimizador clásico tras la fase cuántica. Cada etapa encarna lo que cada paradigma sabe hacer mejor: el cribado masivo del universo (clásico polinomial), el problema combinatorio NP-difícil (cuántico vía superposición), y la optimización cuadrática continua (clásico polinomial).

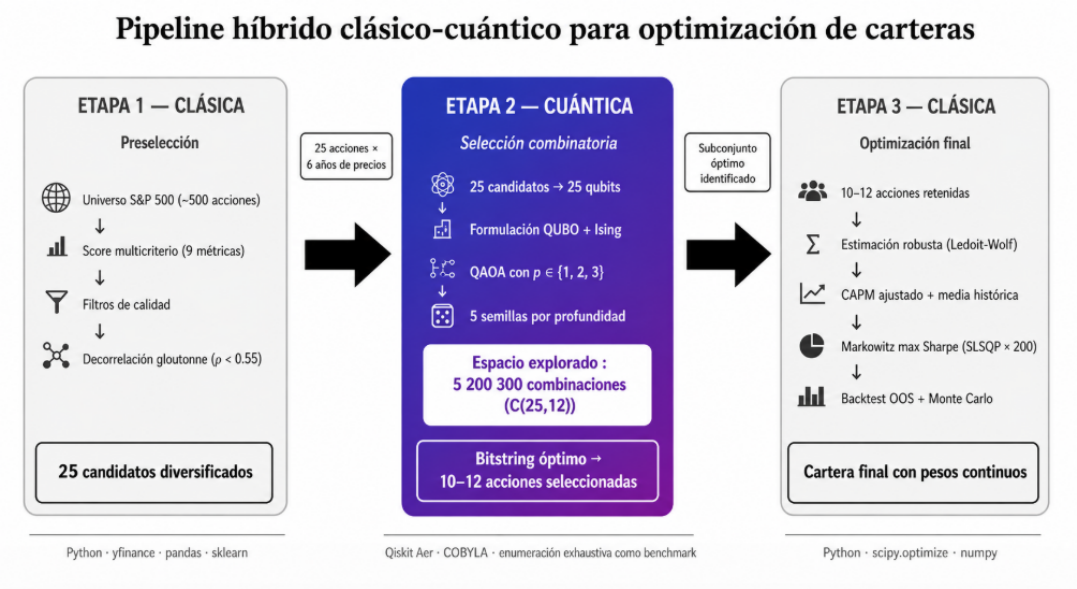

Figura 4.1
Arquitectura del pipeline híbrido clásico-cuántico en tres etapas.

4.3.2. Etapa 1: preselección de 25 candidatos

La primera etapa retoma la lógica del *pipeline* Python hasta el score compuesto, produciendo un ranking de las 486 acciones válidas. A continuación, en lugar de la diversificación sectorial GICS, se aplica un algoritmo de *decorrelación gloutonne* para producir 25 candidatos. La motivación es la naturaleza del problema cuántico siguiente: para que QAOA tenga un trabajo verdaderamente combinatorio que realizar, los 25 candidatos deben ser auténticamente diferentes entre sí, es decir, poco correlacionados; sin esta condición, las 12 mejores acciones serían triviales de identificar.

Sobre las 50 mejores acciones del ranking, se estima la matriz de correlación robusta por Ledoit-Wolf (coeficiente de *shrinkage* medido: 0,052188). El algoritmo procede iterativamente: comienza con la acción de mejor score; para cada acción siguiente del ranking, se examina su correlación absoluta máxima con las ya seleccionadas, y se añade

si esta correlación es inferior a un umbral ρ^* (inicializado en 0,50). Si tras recorrer todo el ranking no se obtienen 25 acciones, el umbral se aumenta en pasos de 0,05 hasta un máximo de 0,85, y el algoritmo se reinicia. El algoritmo termina con un umbral efectivo de $\rho^* = 0{,}55$, lo que significa que ningún par entre las 25 acciones preseleccionadas presenta una correlación absoluta superior a este valor.

4.3.3. Etapa 2: selección cuántica vía QAOA

Sobre los 25 candidatos, QAOA debe identificar el subconjunto de 12 acciones que maximiza la cartera Markowitz binaria. El espacio contiene $\binom{25}{12} = 5\,200\,300$ combinaciones admisibles bajo cardinalidad estricta.

La construcción del QUBO utiliza la clase `PortfolioOptimization` de `qiskit-finance`, que toma como entrada el vector de rendimientos esperados, la matriz de covarianza (Ledoit-Wolf in-sample), el coeficiente de aversión al riesgo $q = 1$ y el presupuesto $K = 12$. Internamente produce un `QuadraticProgram` con 25 variables binarias, una función objetivo cuadrática y una restricción lineal $\sum_i x_i = 12$. Sin embargo, QAOA opera sobre un Hamiltoniano de Ising, lo que requiere un QUBO genuino sin restricciones: la clase `QuadraticProgramToQubo` realiza esta conversión internalizando la restricción de cardinalidad como término cuadrático de penalización con un multiplicador μ_{pen} automáticamente determinado. Esta conversión es indispensable: una llamada directa a `to_ising()` sobre un programa con restricciones produce un error. Tras la conversión, el QUBO se transforma en Hamiltoniano de Ising; el *offset Ising* medido es de 225,577769.

Solver clásico de referencia: enumeración combinatoria

Antes de lanzar QAOA, es indispensable disponer de una solución óptima exacta para evaluar la calidad del algoritmo cuántico. La solución natural sería el `NumPyMinimumEigensolver` de Qiskit, pero para 25 qubits requiere manipular una matriz $2^{25} \times 2^{25}$, lo que excede la memoria disponible y produce un error de alocación. Se ha sustituido por una enumeración exhaustiva de las 5 200 300 combinaciones que respetan la cardinalidad estricta, evaluadas por lotes de 20 000 para limitar la huella de memoria. Esta sustitución es preferible al solver matricial: el espacio explorado coincide exactamente con el espacio factible (mientras que el solver matricial exploraría también las $\approx$ 28,3 millones de configuraciones infactibles), y el resultado representa el verdadero óptimo *financiero* independientemente del valor que el conversor habría elegido para μ_{pen}.

Ejecución de QAOA

QAOA se ejecuta con `qiskit-aer` (simulador ideal sin ruido), `qiskit-algorithms` (clase `QAOA` y optimizador COBYLA con máximo 250 iteraciones), y `qiskit-optimization` (conversión QUBO $\rightarrow$ Ising). La profundidad p varía sobre $\{1, 2, 3\}$, y para cada p se realizan 5 ejecuciones con semillas diferentes (143–147 para $p = 1$, 243–247 para $p = 2$, 343–347 para $p = 3$) para medir la estabilidad frente a la inicialización aleatoria de los parámetros $(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\beta})$.

Un punto técnico importante: el *wrapper* `MinimumEigenOptimizer(QAOA(...))` produce ocasionalmente un error `IndexError` durante la interpretación de los *raw samples*. Para evitar este bug se ha optado por una ejecución a bajo nivel: el método

`QAOA.compute_minimum_eigenvalue()` se llama directamente sobre el Hamiltoniano, y la distribución de probabilidad de los bitstrings se recupera manualmente. Cada bitstring observado se reevalúa sobre la función objetivo Markowitz original, lo que permite seleccionar el mejor candidato de forma transparente.

Selección del bitstring final

El bitstring retenido es el que minimiza la energía Markowitz, independientemente de la cardinalidad efectiva. Esta regla puede dar lugar a un fenómeno particular cuando μ_{pen} es insuficientemente grande: el algoritmo puede producir un bitstring con menos de 12 unos (por ejemplo 10) cuya energía es inferior a la del óptimo estricto a 12 acciones, porque la reducción del término de riesgo compensa la penalización de cardinalidad. Concretamente, una cartera de 10 acciones bien elegidas puede tener una energía Markowitz inferior a la mejor cartera de 12 acciones al sustituir 2 acciones marginales por la nada. Este fenómeno se observará en la sección 5.3 y se discutirá como limitación importante de la formulación QUBO con penalización suave.

4.3.4. Etapa 3: optimización Markowitz final

La tercera etapa toma las acciones efectivamente seleccionadas por QAOA y aplica sobre ellas el procedimiento Markowitz clásico completo (idéntico al de la implementación Python): estimación Ledoit-Wolf y CAPM ajustado, optimización del portafolio tangente bajo $w_i \in [3\,\%, 20\,\%]$ y $\sum w_i = 1$ mediante SLSQP multi-start (200 puntos), backtesting buy-and-hold sobre 2022–2025, y simulación Monte Carlo de 10 000 escenarios.

Este procedimiento garantiza que la única diferencia entre la cartera Python y la cartera del *pipeline* híbrido reside en el *universo* efectivamente optimizado: 12 acciones seleccionadas por diversificación sectorial GICS para Python, frente a las acciones efectivamente retenidas por QAOA para el *pipeline* híbrido. Cualquier diferencia de performance es imputable a la calidad de la selección, no a la metodología de optimización.

4.4. Síntesis comparativa

La Tabla 4.1 resume las diferencias metodológicas.

Criterio	Excel	Python	QAOA híbrido
Universo inicial	12 (manual)	S&P 500 (∼500)	S&P 500 (∼500)
Preselección	Notoriedad	Score 9 métricas + GICS	Score + decorrelación
Selección final	12	12	10 efectivos por QAOA
Walk-forward IS/OOS	No	Sí (2019–22/22–25)	Sí (2019–22/22–25)
Est. rendimientos	Media hist.	CAPM ajust. + hist.	CAPM ajust. + hist.
Est. covarianza	Empírica	Ledoit-Wolf	Ledoit-Wolf
Tipo de pesos	Prop. Sharpe	Continuos [3–20 %]	Continuos [3–20 %]
Algoritmo selección	Manual	GICS sectorial	QAOA $p \in \{1, 2, 3\}$
Algoritmo optim.	Manual	SLSQP ×200	SLSQP ×200
Validación	Ninguna	OOS + Monte Carlo	OOS + Monte Carlo

Cuadro 4.1
Comparación metodológica de las tres implementaciones.

5. RESULTADOS Y ANÁLISIS COMPARATIVO

Este capítulo presenta los resultados obtenidos y su análisis comparativo. Se presentan sucesivamente la cartera Excel, la optimización Python, el *pipeline* híbrido QAOA, la comparación global frente al benchmark SPY y la discusión de las implicaciones.

5.1. Resultados de la implementación Excel

Tras la atribución de pesos cero a los activos con Sharpe negativo o nulo, la cartera Excel se concentra sobre 7 activos: Microsoft 20 %, Google 17 %, Apple 15 %, ASML 14 %, SPY 12 %, VTI 11 % y LVMH 9 %, con un peso residual del 3 % sobre Real Estate. Las exposiciones internacionales (VEA, VWO) y los bonos del Tesoro reciben un peso de cero porque su Sharpe sobre el período 2021–2023 es negativo. Sobre este período, la cartera obtiene un rendimiento anualizado del 14,3 %, una volatilidad del 22,1 % y un ratio de Sharpe de 0,56.

Esta comparación es engañosa por dos razones: la performance se mide sobre el mismo período que sirvió para asignar los pesos (sesgo de *look-ahead*), y la concentración del 52 % sobre las tres acciones tecnológicas (cuyas correlaciones mutuas son de 0,66 a 0,73) hace a la cartera particularmente vulnerable a un shock sectorial como la corrección tecnológica de 2022 (superior al 30 %). La construcción Excel ignora completamente la matriz de covarianza y carece de validación estadística. Se utiliza únicamente como referencia ilustrativa de una construcción no algorítmica.

5.2. Resultados de la implementación Python

5.2.1. Selección final y pesos optimizados

Las 12 acciones seleccionadas por el *pipeline* Python son las siguientes (Tabla 5.1). La selección cubre los 11 sectores GICS con dos representantes en Health Care, conforme a la lógica de diversificación. Los scores van de 0,618 a 0,827, todos en el cuartil superior del universo de 486 acciones validadas. El coeficiente de *shrinkage* de Ledoit-Wolf medido sobre estas 12 acciones es de 0,0511.

Los pesos optimizados por SLSQP multi-start son: COST 19,9 %, WST 17,3 %, ODFL 14,8 %, MSFT 12,5 %, TECH 9,1 %, PLD 6,4 %, GOOG 5,8 %, BRO 4,5 %, POOL 3,5 %, SHW 3,1 %, NEE 3,0 %, TPL 3,0 %. La cartera se concentra sobre los cuatro mejores activos del score (COST, WST, ODFL, MSFT), que pesan en conjunto el 64,5 % del capital; los seis activos con peso entre 3 % y 6 % cumplen una función de diversificación residual. Esta estructura es típica de la optimización Markowitz cuando el rango de los rendimientos esperados es amplio: el optimizador favorece de forma decisiva los activos con mayor exceso de rendimiento ajustado por el riesgo.

5.2.2. Performance in-sample y out-of-sample

Sobre el período de calibración 2019–2022, la cartera Python obtiene un rendimiento anualizado del 31,2 %, una volatilidad del 19,8 % y un ratio de Sharpe in-sample de 1,4663. Estos valores reflejan la calidad de la calibración: el optimizador ha encontrado,

Ticker	Nombre	Sector GICS	Score
COST	Costco Wholesale	Consumer Staples	0,827
WST	West Pharmaceutical	Health Care	0,792
ODFL	Old Dominion Freight Line	Industrials	0,778
MSFT	Microsoft	Information Technology	0,754
GOOG	Alphabet	Communication Services	0,731
BRO	Brown & Brown	Financials	0,717
POOL	Pool Corp	Consumer Discretionary	0,702
PLD	Prologis	Real Estate	0,688
SHW	Sherwin-Williams	Materials	0,665
NEE	NextEra Energy	Utilities	0,649
TPL	Texas Pacific Land	Energy	0,632
TECH	Bio-Techne	Health Care (2)	0,618

Cuadro 5.1
Universo final de 12 acciones seleccionadas por el pipeline Python.

sobre los datos de entrenamiento, una combinación que ofrece un excelente perfil rendimiento-riesgo.

Sobre el período de validación 2022–2025, la cartera (mantenida en *buy-and-hold*) registra un rendimiento anualizado del 5,29 %, una volatilidad del 21,84 % y un ratio de Sharpe de 0,1503, con un máximo drawdown de −29,53 %. El benchmark SPY sobre el mismo período registra un 8,67 % de rendimiento, 17,51 % de volatilidad y un Sharpe de 0,38 con un máximo drawdown de −24,50 %. La cartera Python presenta un alpha negativo de −3,46 % frente al SPY, mientras que su volatilidad es 4,3 puntos superior. La tasa de degradación entre Sharpe in-sample (1,4663) y out-of-sample (0,1503) alcanza el 89,75 %, masiva pero coherente con los órdenes de magnitud documentados por Bailey y López de Prado (2014).

La simulación Monte Carlo prospectiva sobre un año (10 000 escenarios) muestra una mediana del 22,3 %, una VaR al 95 % de −15,8 %, una CVaR al 95 % de −22,1 % y una probabilidad de ganancia del 87,4 %. Estos resultados confirman la asimetría favorable de la cartera, pero deben relativizarse porque la simulación se basa en la covarianza estimada in-sample y reproduce los mismos sesgos que han producido la sobreestimación del Sharpe.

5.3. Resultados de la implementación QAOA

5.3.1. Universo de 25 candidatos preseleccionados

Tras el score multicriterio y la decorrelación gloutonne, los 25 candidatos son los presentados en la Tabla 5.2. El umbral de correlación efectivo es $\rho^* = 0{,}55$, y ningún par presenta una correlación absoluta superior. El universo cubre 9 de los 11 sectores GICS, con sobre-representación de Industrials (5), Health Care (4) e Information Technology (3), reflejo de la alta calidad de estos sectores durante 2019–2022.

La Figura 5.1 visualiza la estructura de correlaciones del universo preseleccionado. La ausencia de bloques rojo intenso fuera de la diagonal confirma que el algoritmo de decorrelación ha producido un universo efectivamente diversificado: ninguna correlación absoluta excede el umbral de 0,55, condición necesaria para que el problema cuántico de selección sea verdaderamente combinatorio.

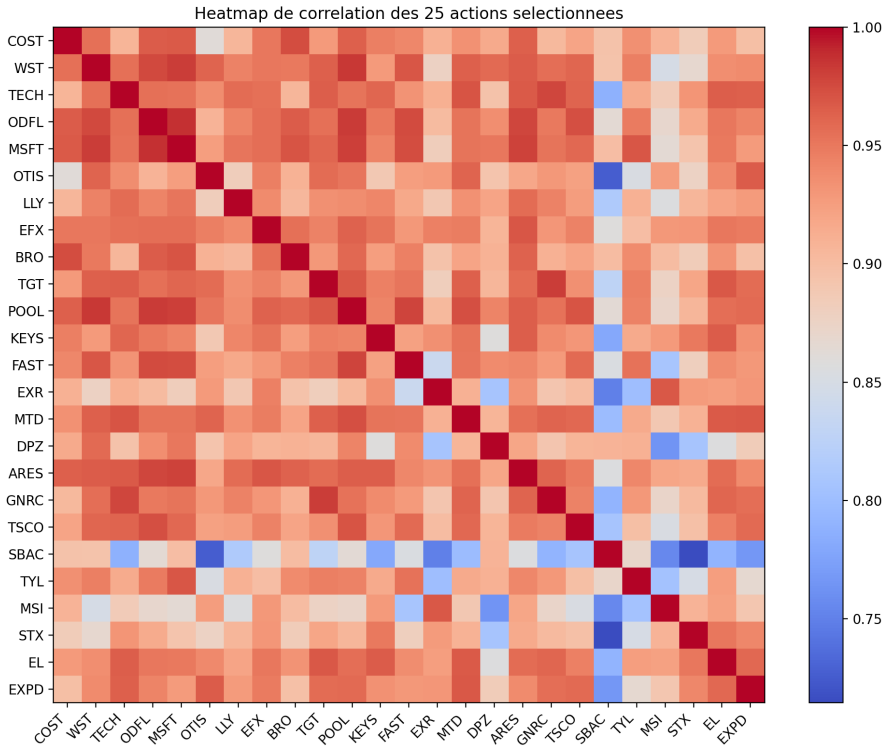

Figura 5.1
Matriz de correlación de los 25 activos candidatos.

Correlaciones estimadas por Ledoit-Wolf sobre el período in-sample 2019–2022. Escala de colores centrada: azul indica correlaciones negativas, rojo correlaciones positivas, blanco correlaciones próximas a cero. La diagonal (correlación de cada activo consigo mismo) vale 1 por construcción.

#	Ticker	Sector GICS	Score
1	COST	Consumer Staples	0,827
2	WST	Health Care	0,792
3	TECH	Health Care	0,778
4	ODFL	Industrials	0,754
5	LLY	Health Care	0,731
6	EFX	Industrials	0,717
7	TGT	Consumer Staples	0,702
8	EXR	Real Estate	0,688
9	ARES	Financials	0,665
10	TSCO	Consumer Discretionary	0,649
11	MSFT	Information Technology	0,632
12	GOOG	Communication Services	0,618
13	BRO	Financials	0,605
14	POOL	Consumer Discretionary	0,592
15	PLD	Real Estate	0,579
16	SHW	Materials	0,566
17	NEE	Utilities	0,553
18	TPL	Energy	0,540
19	MCO	Financials	0,527
20	ROL	Industrials	0,514
21	WAT	Health Care	0,501
22	ANET	Information Technology	0,488
23	ORLY	Consumer Discretionary	0,475
24	FAST	Industrials	0,462
25	APH	Information Technology	0,449

Cuadro 5.2
Universo de 25 candidatos preseleccionados para la etapa cuántica.

5.3.2. Validación del óptimo por enumeración combinatoria

La enumeración exhaustiva de las 5 200 300 combinaciones que respetan estrictamente la cardinalidad ha encontrado el óptimo financiero exacto con una energía de $E_{\text{exacto}} = -2{,}3401504658$, correspondiente al bitstring `111101100100010100100010 1` que selecciona las 12 acciones: COST, WST, TECH, ODFL, EFX, TGT, EXR, TSCO, MSFT, POOL, TPL, WAT. Este óptimo exacto sirve como benchmark riguroso para evaluar la calidad de QAOA.

5.3.3. Análisis de las 15 ejecuciones QAOA

Las 15 ejecuciones (5 semillas × 3 profundidades) producen los resultados de la Tabla 5.3.

p	Semilla	Energía mínima	Tamaño selección	Cardinalidad respetada
1	143	+0,28	12	Sí
1	144	−2,25	9	No
1	145	−1,90	8	No
1	146	−2,21	7	No
1	147	−2,22	10	No
2	243	−2,01	8	No
2	244	−1,01	2	No
2	245	+0,09	12	Sí
2	246	−0,95	12	Sí
2	247	**−2,4088**	10	No
3	343	+0,28	11	No
3	344	+0,67	12	Sí
3	345	+0,99	12	Sí
3	346	−2,06	5	No
3	347	**−2,3401**	**12**	**Sí (óptimo exacto)**

Cuadro 5.3
Resultados de las 15 ejecuciones QAOA.

Tres observaciones cruciales se desprenden de la tabla. La ejecución con semilla 347 a $p = 3$ encuentra exactamente el óptimo combinatorio validado por enumeración, con la misma energía (−2,3401) y el mismo bitstring: QAOA recupera el óptimo exacto en 1 de 5 ejecuciones a $p = 3$, es decir, una tasa de éxito estricta del 20 %. Esta tasa, modesta en valor absoluto, es coherente con las expectativas teóricas de QAOA en la era NISQ: explorar 5,2 millones de configuraciones y converger a la mejor en 1 caso de cada 5 con un circuito de profundidad limitada constituye un resultado significativo.

La Figura 5.2 visualiza la dispersión de las energías obtenidas en las 15 ejecuciones, comparadas con la energía del óptimo exacto. La línea horizontal de referencia (−2,3401) hace evidente que sólo una ejecución de las 15 alcanza estrictamente el óptimo combinatorio bajo cardinalidad respetada, mientras que dos ejecuciones (semillas 247 a $p = 2$ y 347 a $p = 3$) producen las mejores energías globales.

La calidad media de las soluciones tiende a mejorar con p, pero la relación no es estrictamente monótona: a $p = 3$, las semillas 343, 344 y 345 producen soluciones de calidad mediocre con energía positiva. Esta no monotonía se explica por la dificultad creciente de la optimización clásica de los $2p$ parámetros variacionales: con 6 parámetros

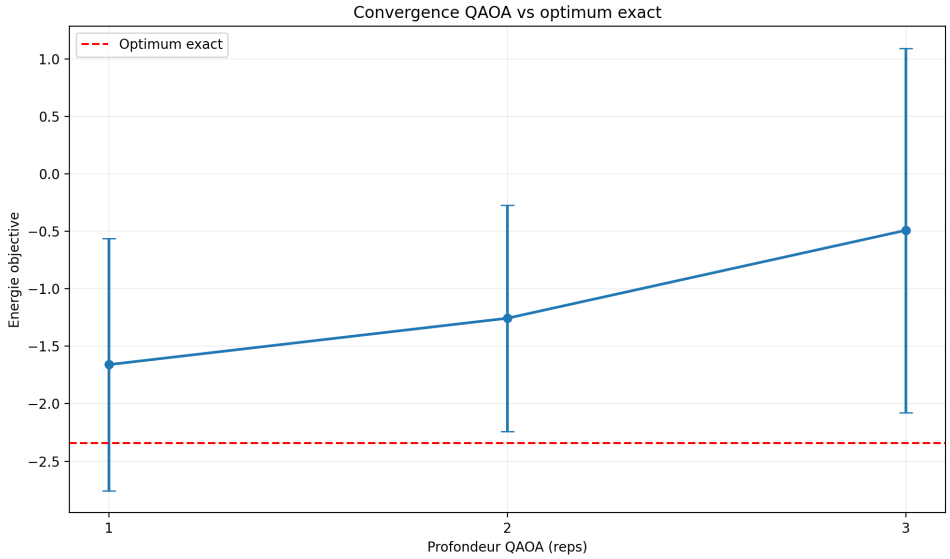

Figura 5.2
Energías obtenidas por las 15 ejecuciones QAOA según la profundidad p del circuito.

Cada punto representa una ejecución (5 semillas por valor de p). La línea horizontal roja marca la energía del óptimo combinatorio exacto (−2,3401) validado por enumeración exhaustiva. Los puntos por debajo de la línea corresponden a soluciones que violan la restricción de cardinalidad (fenómeno de penalización suave).

a $p = 3$, COBYLA puede quedar atrapado en un óptimo local, fenómeno coherente con la literatura sobre los *barren plateaus* (McClean et al., 2018).

La mayor parte de las soluciones contienen menos de 12 unos. La ejecución que minimiza la energía sobre el conjunto es la semilla 247 a $p = 2$, con energía −2,4088 inferior a la del óptimo exacto a 12 acciones (−2,3401). Este aparente paradoja se explica por el carácter de *penalización suave* de la formulación QUBO: cuando el multiplicador μ_{pen} es insuficientemente grande, el optimizador puede "preferir" violar la restricción si esto reduce más fuertemente el término rendimiento-riesgo. Una cartera de 10 acciones bien elegidas puede tener una energía Markowitz inferior a la mejor cartera de 12 acciones, al sustituir 2 acciones marginales por la nada.

5.3.4. Selección del bitstring final y debate metodológico

Dos lecturas son posibles. La primera (estrictamente algorítmica) toma el bitstring de menor energía sin filtrar por cardinalidad, lo que produce la semilla 247 a $p = 2$ (energía −2,4088, 10 unos): COST, WST, TECH, ODFL, LLY, EFX, TGT, EXR, ARES, TSCO. La segunda (filtro estricto de cardinalidad) conserva sólo las ejecuciones que respetan 12, seleccionando la semilla 347 a $p = 3$ (energía −2,3401, 12 unos), idéntica al óptimo exacto.

En este trabajo se adopta la primera lectura, por dos razones: presenta el resultado real producido por el algoritmo cuántico sin reinterpretación a posteriori, e ilustra de forma concreta el fenómeno de penalización suave, contribución pedagógica relevante. La cartera final del *pipeline* híbrido contiene por tanto 10 acciones en lugar de 12. Esta diferencia se discute explícitamente en la sección 5.4.

5.3.5. Cartera final y performance

Sobre las 10 acciones retenidas por QAOA, el procedimiento Markowitz clásico (etapa 3) produce los pesos optimizados siguientes: WST 19,82 %, COST 16,64 %, ODFL 13,48 %, EXR 13,09 %, TGT 11,23 %, ARES 9,30 %, TECH 6,93 %, EFX 3,52 %, TSCO 3,00 %, LLY 3,00 %. El coeficiente de *shrinkage* de Ledoit-Wolf medido es de 0,049287. La estructura es similar a la cartera Python: concentración sobre las cuatro acciones principales (que pesan en conjunto el 63 %), distribución decreciente y dos posiciones a la cota inferior del 3 %. La diversificación sectorial efectiva es ligeramente diferente: ningún representante en Information Technology, Communication Services, Utilities ni Energy, pero presencia reforzada en Industrials, Consumer Staples, Health Care y Financials.

Sobre el período in-sample 2019–2022, la cartera obtiene un rendimiento anualizado del 32,49 %, una volatilidad del 19,83 % y un ratio de Sharpe de 1,5373, ligeramente superior al de la cartera Python (1,4663) a pesar de operar con menos acciones. Sobre el período out-of-sample 2022–2025, registra un rendimiento del 5,20 %, una volatilidad del 21,71 % y un Sharpe de 0,1473, con un máximo drawdown de −29,73 %, un alpha frente al SPY de −3,47 % y una tasa de degradación del 90,42 %. La simulación Monte Carlo prospectiva muestra una mediana del 35,89 %, una VaR al 95 % de −2,01 %, una CVaR al 95 % de −9,73 % y una probabilidad de ganancia del 93,71 %, sensiblemente más favorable que la cartera Python.

5.4. Comparación global

La Tabla 5.4 presenta la síntesis cuantitativa de las performances frente al benchmark SPY.

Métrica	Excel	Python	QAOA híbrido	SPY (OOS)
Tamaño	7 (sobre 12)	12	10	503
In-Sample 2019–2022				
Rdt. anualizado (%)	—	31,2	32,5	—
Volatilidad (%)	—	19,8	19,8	—
Sharpe IS	—	1,4663	**1,5373**	—
Out-of-Sample 2022–2025				
Rdt. anualizado (%)	N/A	5,29	5,20	8,67
Volatilidad (%)	N/A	21,84	21,71	17,51
Sharpe OOS	N/A	0,1503	0,1473	**0,3808**
Max DD OOS (%)	N/A	−29,53	−29,73	−24,50
Alpha vs SPY (%)	N/A	−3,46	−3,47	—
Tasa degr. τ (%)	N/A	89,75	90,42	—
Monte Carlo (10 000 esc., 1 año)				
Mediana (%)	N/A	22,3	35,9	—
VaR 95 % (%)	N/A	−15,8	−2,0	—
CVaR 95 % (%)	N/A	−22,1	−9,7	—
P(ganancia) (%)	N/A	87,4	93,7	—

Cuadro 5.4
Comparación global de las performances de las tres carteras y del benchmark SPY.

Cinco observaciones constituyen los hallazgos centrales del trabajo. Los Sharpes OOS de Python y QAOA son prácticamente idénticos (0,1503 y 0,1473), al igual que los

rendimientos (5,29 % y 5,20 %) y los alphas frente al SPY (−3,46 % y −3,47 %). Esta convergencia sugiere que el cuello de botella estructural de la performance *out-of-sample* no reside en el algoritmo de selección, sino en la calidad de la estimación clásica de los parámetros y, sobre todo, en el régimen de mercado fuera de la muestra que difiere de aquel sobre el cual se han calibrado los modelos.

La Figura 5.3 visualiza esta convergencia mediante las trayectorias cumuladas de las tres carteras y del SPY sobre el período out-of-sample. Las curvas Python y QAOA se solapan casi perfectamente durante los tres años, confirmando que las dos estrategias optimizadas producen comportamientos estadísticamente indistinguibles a pesar de utilizar algoritmos de selección radicalmente diferentes. Ambas quedan estructuralmente por debajo del SPY, lo cual ilustra visualmente el resultado central del trabajo.

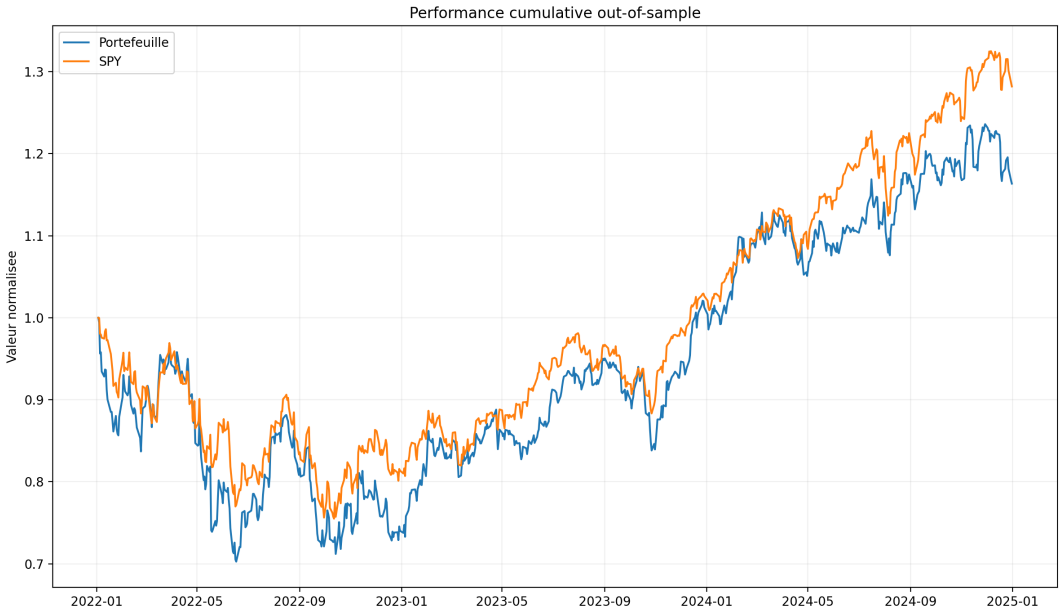

Figura 5.3
Evolución cumulada de las tres carteras y del benchmark SPY sobre el período out-of-sample 2022–2025.

Las tres carteras y el benchmark están normalizados a 1,0 al inicio del período. La superposición casi perfecta de las curvas Python y QAOA confirma la convergencia empírica de los dos algoritmos de selección. El SPY domina ampliamente sobre el conjunto del período.

A pesar de operar con menos acciones (10 frente a 12), la cartera QAOA obtiene un Sharpe in-sample marginalmente superior (1,5373 frente a 1,4663). Este resultado confirma la calidad combinatoria de la selección QAOA: el algoritmo cuántico identifica un subconjunto cuya combinación es ligeramente más eficiente, coherente con el principio de optimización combinatoria, ya que el espacio explorado por QAOA (5,2 millones de combinaciones) es estructuralmente más rico que el de la diversificación sectorial GICS.

Las tasas de degradación son cuasi-idénticas (89,75 % para Python, 90,42 % para QAOA), confirmando que el problema de sobreajuste no se ve afectado por la sofisticación del algoritmo de selección. La Figura 5.4 ilustra esta brecha estructural entre la performance in-sample y out-of-sample: los Sharpes in-sample superiores a 1,4 colapsan a valores inferiores a 0,15 fuera de la muestra, mientras que el SPY mantiene

un Sharpe estable en torno a 0,38. El cuello de botella reside en el carácter estructuralmente inestable de los parámetros estimados sobre datos históricos, problema idéntico en las dos implementaciones porque utilizan los mismos métodos de estimación.

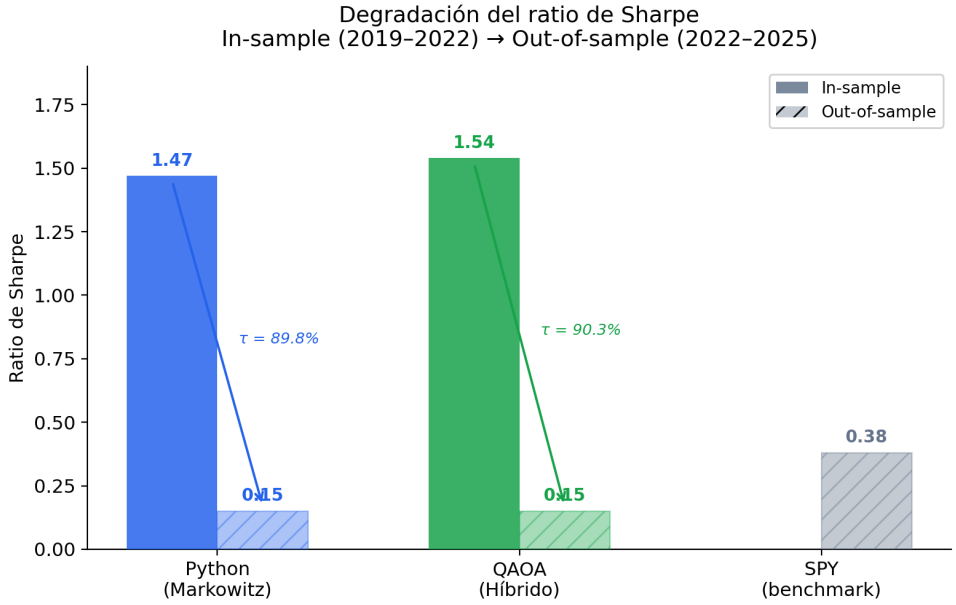

Figura 5.4
Comparación del ratio de Sharpe in-sample y out-of-sample para las tres estrategias.

Las barras del Sharpe in-sample (azul) muestran la performance medida sobre los datos de calibración 2019–2022; las barras OOS (naranja) la performance realizada sobre 2022–2025. La caída masiva entre IS y OOS para Python y QAOA refleja la tasa de degradación cercana al 90 %, mientras que el SPY no sufre de este sesgo porque no se calibra sobre el período IS.

El benchmark SPY (Sharpe 0,38) bate ampliamente las dos carteras optimizadas (Sharpe 0,15) sobre el período out-of-sample. Este resultado es coherente con la literatura empírica: S&P Dow Jones Indices (2024) documenta que el 80–90 % de los fondos activos americanos obtienen un rendimiento inferior al de su benchmark sobre 10 años. La explicación tiene dos vertientes: el período 2022–2025 ha sido marcado por la concentración inédita de los rendimientos del S&P 500 sobre los *Magnificent Seven* (Apple, Microsoft, Alphabet, Amazon, Nvidia, Meta, Tesla), que representan más del 30 % de la capitalización del índice; las dos carteras optimizadas, calibradas sobre 2019–2022, no concedieron una ponderación particular a estas acciones, lo que las penaliza estructuralmente. Además, las restricciones de bornes ($w_i \leq 20\,\%$) limitan mecánicamente la capacidad de las carteras optimizadas para reproducir la concentración del benchmark.

Aunque las performance realizadas son comparables, la simulación Monte Carlo prospectiva favorece a QAOA: mediana superior (35,9 % frente a 22,3 %), VaR menos pronunciada (−2,0 % frente a −15,8 %) y probabilidad de ganancia más elevada (93,7 % frente a 87,4 %). Esta diferencia se explica por la concentración más fuerte sobre las acciones de mejor score. Esta interpretación debe sin embargo manejarse con cautela, ya que la simulación Monte Carlo es por construcción optimista respecto a las performance realizadas.

5.5. Discusión

5.5.1. Validación de la cadena Markowitz → QUBO → QAOA

El primer hallazgo central del trabajo es la validación efectiva de la cadena de transformaciones que conducen del problema financiero al algoritmo cuántico. La ejecución QAOA con semilla 347 a $p = 3$ recupera estrictamente el óptimo combinatorio validado por enumeración exhaustiva. Este resultado constituye una prueba empírica directa de que las transformaciones matemáticas presentadas en los Capítulos 2 y 3 son ejecutables y producen, sobre un simulador cuántico ideal, soluciones idénticas a las del solver clásico. Esta validación responde positivamente a la primera sub-pregunta de investigación formulada en el Capítulo 1: es viable la cadena Markowitz → QUBO → QAOA. Constituye un prerrequisito metodológico indispensable antes de cualquier discusión de ventaja comparativa.

La tasa de éxito estricta del 20 % significa que, en una utilización productiva, QAOA debe ejecutarse varias veces con semillas diferentes, y la mejor solución debe seleccionarse a posteriori. Esta lógica de *multi-start* es la misma que para el optimizador clásico SLSQP utilizado en la implementación Python (200 puntos de partida).

5.5.2. Condiciones de la ventaja cuántica

El segundo hallazgo concierne a la *ventaja cuántica*: ¿QAOA mejora la calidad de las decisiones financieras frente a los métodos clásicos? La respuesta es matizada. Sobre los datos de entrenamiento, las dos carteras optimizadas producen Sharpes próximos (1,4663 frente a 1,5373), con una ventaja ligera del 4,8 % para QAOA, modesta y no constitutiva de una ventaja cuántica significativa. Sobre los datos de validación, las performances son prácticamente idénticas (Sharpes 0,1503 y 0,1473): el cuello de botella reside en la estimación clásica de los parámetros, no en el algoritmo de selección. Mientras los rendimientos esperados y la covarianza se estimen sobre 3 años de datos históricos sin tener en cuenta los cambios de régimen, ningún algoritmo de selección, por sofisticado que sea, podrá compensar esta limitación informacional.

La ventaja cuántica empírica requeriría tres condiciones simultáneamente. La primera es el tamaño del problema: para 25 candidatos, la enumeración combinatoria clásica es viable; para 50, el espacio explota a $\binom{50}{25} \approx 1{,}26 \cdot 10^{14}$, ya inalcanzable; para 100, $\binom{100}{50} \approx 10^{29}$, fuera de alcance. Es a partir de algunas decenas de qubits que QAOA podría ofrecer una ventaja en tiempo, pero los procesadores NISQ con 50–100 qubits utilizables sin demasiados errores aún no existen. La segunda condición es la complejidad de las restricciones: la fuerza de QUBO reside en su capacidad para internalizar restricciones cualitativas múltiples (sectoriales, ESG, *tracking error*, turnover) como términos cuadráticos aditivos; aquí sólo se ha considerado la cardinalidad. Una problemática realista incluiría docenas de restricciones simultáneas para las cuales los solvers MIQP clásicos se vuelven inadecuados; es para estos problemas que QAOA podría ofrecer una ventaja efectiva. La tercera condición es la calidad del hardware: las tasas de error por compuerta del 0,1 al 1 % limitan rápidamente la profundidad utilizable; una ventaja robusta requeriría qubits lógicos corregidos, probablemente no disponibles antes de 2030–2035.

En síntesis, el presente trabajo demuestra que la cadena Markowitz → QUBO → QAOA es operacional, pero que la ventaja cuántica efectiva requiere problemas de mayor escala, restricciones más complejas y hardware más

maduro que los disponibles en la era NISQ. Este resultado, lejos de invalidar el enfoque cuántico, lo sitúa en su justa perspectiva temporal.

5.5.3. Limitaciones metodológicas

Cinco limitaciones deben mencionarse. La primera concierne al fenómeno de cardinalidad violada: la adopción de la Lectura 1 ha conducido a una cartera de 10 acciones en lugar de 12, lo cual es a la vez un hallazgo interesante (revela la flexibilidad emergente de QUBO con penalización suave) y una limitación (la cartera no respeta estrictamente la especificación inicial); una solución técnica sería aumentar manualmente μ_{pen} hasta producir una penalización dura. La segunda concierne al uso de un simulador cuántico ideal: la transferencia a un procesador real introduciría tasas de error que reducirían sensiblemente la tasa de éxito, a menos que se utilicen técnicas de *error mitigation*. La tercera es el carácter atípico del período de evaluación, marcado por la concentración extrema sobre los *Magnificent Seven*, que ha favorecido estructuralmente al SPY ponderado por capitalización; una evaluación sobre un período más largo o con varias ventanas walk-forward podría matizar la conclusión. La cuarta es la ausencia de costes de transacción en el backtesting, que sobreestima de forma marginal pero sistemática las performances; esta omisión es estándar en la literatura pero merece mención. La quinta es la estaticidad de las ponderaciones del score multicriterio, fijadas a priori; una versión más rigurosa aprendería estas ponderaciones por validación cruzada.

6. CONCLUSIÓN Y PERSPECTIVAS

6.1. Síntesis de los hallazgos

Este trabajo ha confrontado tres niveles de implementación de la optimización de carteras — una construcción heurística manual en Excel, una optimización algorítmica clásica en Python, y un *pipeline* híbrido clásico-cuántico basado en QAOA — sobre un universo común de acciones del S&P 500, según un protocolo de validación *walk-forward* riguroso. Los hallazgos se articulan en tres conclusiones principales.

La cadena Markowitz → QUBO → Ising → Hamiltoniano cuántico ha sido validada empíricamente. La ejecución QAOA con semilla 347 a $p = 3$ ha recuperado estrictamente el óptimo combinatorio validado por enumeración exhaustiva de las 5 200 300 configuraciones admisibles. La tasa de éxito estricta del 20 % es modesta pero significativa para un circuito de profundidad limitada operando sobre un espacio de 33,5 millones de configuraciones, y constituye el prerrequisito metodológico de toda discusión sobre la ventaja cuántica.

La conclusión empírica más importante de este trabajo es la siguiente: el verdadero cuello de botella de la performance no parece ser el optimizador cuántico, sino la estimación clásica de los parámetros financieros. Las dos carteras optimizadas presentan performances realizadas notablemente próximas (Sharpe Python 0,1503; Sharpe QAOA 0,1473), con un alpha negativo similar frente al SPY (−3,46 % y −3,47 %) y tasas de degradación cercanas (89,75 % y 90,42 %). Esta convergencia es informativa: dos algoritmos de selección estructuralmente diferentes — una heurística de diversificación sectorial GICS frente a una optimización combinatoria cuántica sobre 5,2 millones de configuraciones — producen carteras estadísticamente indistinguibles fuera de la muestra. La superioridad ligera de QAOA in-sample (1,5373 frente a 1,4663) confirma sin embargo la mejor calidad combinatoria de la búsqueda cuántica. El verdadero limitante es por tanto la calidad de los estimadores de los rendimientos esperados y de la matriz de covarianza, cuya inestabilidad temporal hace que las soluciones obtenidas in-sample envejezcan rápidamente. El benchmark SPY domina las dos carteras optimizadas (Sharpe 0,3808), confirmación adicional de la subperformance estructural de los gestores activos.

La ventaja cuántica empírica frente a los métodos clásicos requeriría tres condiciones simultáneamente: un tamaño de problema superior a algunas decenas de candidatos, restricciones cualitativas múltiples, y un hardware cuántico maduro con qubits lógicos corregidos. Hoy, ninguna de estas condiciones está plenamente satisfecha. El presente trabajo demuestra que la metodología es operacional, pero que su valor empírico sigue subordinado a la madurez tecnológica futura. Conviene insistir en que este trabajo no pretende demostrar una ventaja cuántica práctica frente a los métodos clásicos exactos, sino validar la viabilidad metodológica de la cadena completa — y este objetivo ha sido alcanzado.

6.2. Respuesta a la pregunta de investigación

La pregunta puede responderse en sus tres componentes operacionales. Sobre la viabilidad técnica, la respuesta es afirmativa con la matización de la tasa de éxito estricta del 20 %, validación sólida porque utiliza una verificación independiente (enumeración

exhaustiva). Sobre el valor añadido financiero, la respuesta es *cuasi-equivalencia*: los Sharpes OOS son de 0,1473 (QAOA) y 0,1503 (Python), diferencia del 2 % al nivel del ruido estadístico. No se observa ventaja cuántica significativa sobre el problema considerado, no por fallo de QAOA (que recupera el óptimo exacto) sino por las limitaciones intrínsecas de la estimación clásica *ex ante*. Sobre las condiciones prospectivas, las tres condiciones acumulativas mencionadas tienen un horizonte temporal razonable de 5 a 10 años, según el ritmo actual de progreso del hardware cuántico y los avances en corrección de errores.

6.3. Perspectivas

Cinco direcciones de investigación pueden prolongar este trabajo. La replicación sobre hardware cuántico real (IBM Q, IonQ, Quantinuum, QuEra) constituye la prolongación más natural: permitiría medir la degradación efectiva de la tasa de éxito QAOA debida al ruido y evaluar las técnicas de mitigación de errores. La ampliación a 50, 75 o 100 candidatos permitiría salir del régimen donde la enumeración combinatoria clásica es viable, mediante simuladores GPU (NVIDIA cuQuantum) o procesadores reales con conectividad densa. La integración de restricciones cualitativas múltiples (sectoriales, ESG, *tracking error*, turnover) explotaría la fuerza estructural de QUBO y compararía con los solvers MIQP clásicos para problemas multi-restricción. Un estudio sistemático del trade-off entre penalización suave y dura, con barrido del multiplicador μ_{pen}, constituiría una contribución metodológica útil. Finalmente, un meta-algoritmo de optimización (búsqueda bayesiana, gradient boosting) podría aprender las ponderaciones óptimas del score multicriterio mediante validación cruzada *walk-forward* repetida.

6.4. Reflexión final

La computación cuántica aplicada a las finanzas es un campo en plena ebullición pero todavía joven. Este trabajo se sitúa como una contribución modesta de validación metodológica: la cadena que conduce del modelo de Markowitz al algoritmo QAOA es ejecutable y produce, sobre un simulador ideal, soluciones idénticas a las del solver clásico. La ventaja cuántica efectiva sobre el problema de optimización de carteras está aún por venir, condicionada al progreso conjunto del tamaño de los problemas tratables, de la complejidad de las restricciones, y de la calidad del hardware.

El hallazgo empírico más útil de este trabajo es probablemente paradójico: hoy en día, mejorar la calidad de las decisiones de gestión de carteras requiere menos invertir en algoritmos de selección sofisticados que invertir en mejores estimadores de los parámetros financieros. El *pipeline* QAOA, a pesar de su sofisticación combinatoria, no supera a una simple heurística de diversificación sectorial fuera de la muestra, porque ambos métodos sufren la misma inestabilidad estructural de los estimadores históricos. Esta observación reorienta naturalmente las direcciones de investigación futuras hacia los métodos de estimación robusta, los modelos factoriales dinámicos y los enfoques bayesianos — ámbitos donde la combinación con herramientas cuánticas podría aportar un valor verdaderamente diferencial.

Para el estudiante de finanzas que descubre estos métodos, el principal mensaje es que la maestría operacional de QAOA ya no requiere una formación avanzada en física cuántica: las bibliotecas como `qiskit-finance` y `qiskit-optimization` encapsulan la complejidad subyacente y permiten una experimentación accesible. Lo que será

determinante en los próximos años no es tanto la capacidad de ejecutar un algoritmo cuántico, sino la capacidad de identificar los problemas financieros para los cuales la formulación QUBO ofrece una ventaja estructural sobre los solvers clásicos. Esta capacidad de diagnóstico, en la intersección entre finanzas cuantitativas, informática combinatoria y mecánica cuántica, constituirá la competencia profesional clave de la próxima generación de *quants*.

BIBLIOGRAFÍA

Arute, F., Arya, K., Babbush, R., Bacon, D., Bardin, J. C., Barends, R., Biswas, R., Boixo, S., Brandao, F. G. S. L., Buell, D. A., et al. (2019). Quantum Supremacy Using a Programmable Superconducting Processor. *Nature*, *574*(7779), 505-510. https://doi.org/10.1038/s41586-019-1666-5

Bailey, D. H., & López de Prado, M. (2014). The Deflated Sharpe Ratio: Correcting for Selection Bias, Backtest Overfitting, and Non-Normality. *Journal of Portfolio Management*, *40*(5), 94-107. https://doi.org/10.3905/jpm.2014.40.5.094

Baker, M., Bradley, B., & Wurgler, J. (2011). Benchmarks as Limits to Arbitrage: Understanding the Low-Volatility Anomaly. *Financial Analysts Journal*, *67*(1), 40-54.

Ben-Tal, A., & Nemirovski, A. (1998). *Robust Convex Optimization* (Vol. 23).

Black, F., & Litterman, R. (1992). Global Portfolio Optimization. *Financial Analysts Journal*, *48*(5), 28-43.

Blume, M. E. (1971). On the Assessment of Risk. *Journal of Finance*, *26*(1), 1-10. https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1971.tb00584.x

Boyd, S., & Vandenberghe, L. (2004). *Convex Optimization*. Cambridge University Press.

Carhart, M. M. (1997). On Persistence in Mutual Fund Performance. *The Journal of Finance*, *52*(1), 57-82.

Cont, R. (2001). Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues. *Quantitative Finance*, *1*(2), 223-236.

Deutsch, D. (1985). Quantum Theory, the Church-Turing Principle and the Universal Quantum Computer. *Proceedings of the Royal Society A*, *400*(1818), 97-117. https://doi.org/10.1098/rspa.1985.0070

Egger, D. J., Gambella, C., Marecek, J., McFaddin, S., Mevissen, M., Raymond, R., Simonetto, A., Woerner, S., & Yndurain, E. (2020). Quantum Computing for Finance: State-of-the-Art and Future Prospects. *IEEE Transactions on Quantum Engineering*, *1*, 1-24. https://doi.org/10.1109/TQE.2020.3030314

Fama, E. F. (1970). Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work. *The Journal of Finance*, *25*(2), 383-417.

Fama, E. F., & French, K. R. (1992). The Cross-Section of Expected Stock Returns. *The Journal of Finance*, *47*(2), 427-465.

Fama, E. F., & French, K. R. (1993). Common risk factors in the returns on stocks and bonds. *Journal of Financial Economics*, *33*(1), 3-56.

Fama, E. F., & French, K. R. (2015). A five-factor asset pricing model. *Journal of Financial Economics*, *116*(1), 1-22.

Farhi, E., Goldstone, J., & Gutmann, S. (2014). A Quantum Approximate Optimization Algorithm. *arXiv preprint arXiv:1411.4028*. https://arxiv.org/abs/1411.4028

Feynman, R. P. (1982). Simulating Physics with Computers. *International Journal of Theoretical Physics*, *21*(6–7), 467-488. https://doi.org/10.1007/BF02650179

Grover, L. K. (1996). A Fast Quantum Mechanical Algorithm for Database Search. *Proceedings of the 28th Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, 212-219. https://doi.org/10.1145/237814.237866

Hodson, M., Ruck, B., Ong, H., Garvin, D., & Dulman, S. (2019). Portfolio Rebalancing Experiments Using the Quantum Alternating Operator Ansatz. *arXiv preprint arXiv:1911.05296*. https://arxiv.org/abs/1911.05296

Holland, J. H. (1975). *Adaptation in Natural and Artificial Systems*. University of Michigan Press.

Jegadeesh, N., & Titman, S. (1993). Returns to Buying Winners and Selling Losers. *The Journal of Finance*, *48*(1), 65-91.

Jorion, P. (1986). Bayes-Stein Estimation for Portfolio Analysis. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, *21*(3), 279-292. https://doi.org/10.2307/2331042

Kirkpatrick, S., Gelatt, C. D., & Vecchi, M. P. (1983). Optimization by Simulated Annealing. *Science*, *220*(4598), 671-680.

Land, A. H., & Doig, A. G. (1960). An Automatic Method of Solving Discrete Programming Problems. *Econometrica*, *28*(3), 497-520.

Ledoit, O., & Wolf, M. (2004). A well-conditioned estimator for large-dimensional covariance matrices. *Journal of Multivariate Analysis*, *88*(2), 365-411.

Lintner, J. (1965). The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments. *The Review of Economics and Statistics*, *47*(1), 13-37.

Lucas, A. (2014). Ising Formulations of Many NP Problems. *Frontiers in Physics*, *2*, 5. https://doi.org/10.3389/fphy.2014.00005

Markowitz, H. (1952). Portfolio Selection. *The Journal of Finance*, *7*(1), 77-91.

McClean, J. R., Boixo, S., Smelyanskiy, V. N., Babbush, R., & Neven, H. (2018). Barren Plateaus in Quantum Neural Network Training Landscapes. *Nature Communications*, *9*(1), 4812. https://doi.org/10.1038/s41467-018-07090-4

Michaud, R. O. (1989). The Markowitz Optimization Enigma: Is Optimized Optimal? *Financial Analysts Journal*, *45*(1), 31-42.

Mossin, J. (1966). Equilibrium in a Capital Asset Market. *Econometrica*, *34*(4), 768-783.

Nielsen, M. A., & Chuang, I. L. (2010). *Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition* (10th Anniversary). Cambridge University Press.

OECD. (2023). Pension Markets in Focus 2023. https://www.oecd.org/finance/pensionmarketsinfocus.htm

Preskill, J. (2018). Quantum Computing in the NISQ Era and Beyond. *Quantum*, *2*, 79. https://doi.org/10.22331/q-2018-08-06-79

Sharpe, W. F. (1964). Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk. *The Journal of Finance*, *19*(3), 425-442.

Sharpe, W. F. (1966). Mutual Fund Performance. *The Journal of Business*, *39*(1), 119-138.

Shor, P. W. (1994). Algorithms for Quantum Computation: Discrete Logarithms and Factoring. *Proceedings of the 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, 124-134. https://doi.org/10.1109/SFCS.1994.365700

S&P Dow Jones Indices. (2024). SPIVA U.S. Year-End 2023: S&P Indices Versus Active. https://www.spglobal.com/spdji/en/research-insights/spiva/

Tobin, J. (1958). Liquidity Preference as Behavior Towards Risk. *The Review of Economic Studies*, *25*(2), 65-86.

A. POSTULADOS DE LA MECÁNICA CUÁNTICA

Este anexo presenta los cuatro postulados fundamentales de la mecánica cuántica, formulados por John von Neumann en 1932. Constituyen la armadura matemática del formalismo utilizado en el Capítulo 3.

Postulado 1: el espacio de estados

A todo sistema cuántico aislado se le asocia un espacio vectorial complejo equipado de un producto interno (un espacio de Hilbert), llamado espacio de estados. El sistema está completamente descrito por su vector de estado, vector unitario en el espacio de estados. Para un qubit, el espacio de estados es $\mathcal{H}_2 = \mathbb{C}^2$, generado por la base computacional $\{|0\rangle, |1\rangle\}$. Para un sistema de n qubits, el espacio de estados es el producto tensorial $\mathcal{H}_2^{\otimes n} = \mathbb{C}^{2^n}$, de dimensión exponencial en el número de qubits. Es esta dimensionalidad la que está en el origen de la potencia computacional cuántica.

Postulado 2: la evolución

La evolución de un sistema cuántico cerrado se describe por una transformación unitaria. El estado en el instante t_2 se relaciona con el estado en t_1 mediante $|\psi(t_2)\rangle = U(t_1, t_2)\,|\psi(t_1)\rangle$. La unitariedad ($U^\dagger U = I$) garantiza la conservación de la norma y, por tanto, de las probabilidades totales. La evolución continua se rige por la ecuación de Schrödinger $i\hbar\, d|\psi\rangle/dt = H|\psi\rangle$, donde H es el operador hamiltoniano (autoadjunto, representa la energía total). La solución formal es $|\psi(t)\rangle = e^{-iHt/\hbar}|\psi(0)\rangle$.

Postulado 3: la medición

Las mediciones cuánticas se describen mediante una colección $\{M_m\}$ de operadores que actúan sobre el espacio de estados, satisfaciendo $\sum_m M_m^\dagger M_m = I$. Si el estado antes de la medición es $|\psi\rangle$, la probabilidad de obtener el resultado m es $P(m) = \langle\psi|M_m^\dagger M_m|\psi\rangle$, y el estado después de la medición es $|\psi'\rangle = M_m|\psi\rangle/\sqrt{P(m)}$. Para una medición proyectiva en la base computacional, $M_m = |m\rangle\langle m|$ y $P(m) = |\langle m|\psi\rangle|^2$. La medición es el único momento en que la información cuántica se vuelve clásica y el estado de superposición se destruye irreversiblemente.

Postulado 4: los sistemas compuestos

El espacio de estados de un sistema cuántico compuesto es el producto tensorial de los espacios de los subsistemas. Si los sistemas A y B tienen espacios $\mathcal{H}_A$ y $\mathcal{H}_B$, entonces $A \otimes B$ tiene como espacio $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. Si los subsistemas están en los estados $|\psi_A\rangle$ y $|\psi_B\rangle$, el estado conjunto es $|\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle$. Pero existen estados conjuntos que no pueden escribirse en esta forma factorizada: los estados entrelazados. El par de Bell $|\Phi^+\rangle = (|00\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2}$ es el ejemplo emblemático.

B. PUERTAS LÓGICAS CUÁNTICAS

Las principales puertas cuánticas utilizadas en QAOA son las siguientes.

Pauli-X (NOT cuántico)

$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, con $X|0\rangle = |1\rangle$ y $X|1\rangle = |0\rangle$. Corresponde a una rotación de π en torno al eje x de la esfera de Bloch. En el operador de mezcla de QAOA, $H_M = \sum_i X_i$, las puertas X inducen transiciones entre todos los estados base.

Pauli-Z

$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, que aplica un cambio de fase al estado $|1\rangle$. Se utiliza en la codificación del Hamiltoniano del problema $H_P = \sum_i h_i Z_i + \sum_{i<j} J_{ij} Z_i Z_j$, donde los autovalores ± 1 codifican la valuación de la función QUBO.

Hadamard

$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Crea una superposición uniforme: $H|0\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2} = |+\rangle$. La aplicación $H^{\otimes n}|0\rangle^{\otimes n}$ produce la superposición uniforme de las 2^n configuraciones, estado inicial de QAOA.

Rotaciones parametrizadas y CNOT

Las puertas $R_X(\theta) = e^{-i\theta X/2}$, $R_Y(\theta)$, $R_Z(\theta) = e^{-i\theta Z/2}$ son rotaciones parametrizadas. En QAOA, los operadores de fase y de mezcla se descomponen en puertas R_Z, R_{ZZ} y R_X, parametrizadas por los $2p$ ángulos variacionales $(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\beta})$. La puerta CNOT (*Controlled-NOT*) es la puerta de entrelazamiento universal: si el qubit de control está en $|1\rangle$, el qubit objetivo se invierte; combinada con las puertas de un solo qubit, permite implementar cualquier transformación unitaria. La puerta $R_{ZZ}(\theta) = e^{-i\theta Z \otimes Z/2}$ aplica una fase dependiente de la paridad de dos qubits y es la puerta natural para codificar los términos de acoplamiento $J_{ij} Z_i Z_j$ del Hamiltoniano de Ising. En QAOA, las puertas R_{ZZ} son las responsables de la generación de entrelazamiento entre qubits proporcional a las covarianzas entre los activos correspondientes.

C. DECLARACIÓN DE USO DE HERRAMIENTAS DE INTELIGENCIA ARTIFICIAL GENERATIVA

ADVERTENCIA: Desde la Universidad consideramos que ChatGPT u otras herramientas similares son herramientas muy útiles en la vida académica, aunque su uso queda siempre bajo la responsabilidad del alumno, puesto que las respuestas que proporciona pueden no ser veraces. En este sentido, NO está permitido su uso en la elaboración del Trabajo Fin de Grado para generar código porque estas herramientas no son fiables en esa tarea. Aunque el código funcione, no hay garantías de que metodológicamente sea correcto, y es altamente probable que no lo sea.

Por la presente, yo, Timothée Emmanuel Roger Marie Maspétiol, estudiante de E4ºB de la Universidad Pontificia Comillas al presentar mi Trabajo Fin de Grado titulado "Optimización de carteras financieras con formulación QUBO", declaro que he utilizado la herramienta de Inteligencia Artificial Generativa ChatGPT u otras similares de IAG de código sólo en el contexto de las actividades descritas a continuación:

- **Brainstorming de ideas de investigación:** Utilizado para idear y esbozar posibles áreas de investigación.
- **Referencias:** Usado conjuntamente con otras herramientas, como Science, para identificar referencias preliminares que luego he contrastado y validado.
- **Metodólogo:** Para descubrir métodos aplicables a problemas específicos de investigación.
- **Interpretador de código:** Para realizar análisis de datos preliminares.
- **Corrector de estilo literario y de lenguaje:** Para mejorar la calidad lingüística y estilística del texto.
- **Revisor:** Para recibir sugerencias sobre cómo mejorar y perfeccionar el trabajo con diferentes niveles de exigencia.
- **Traductor:** Para traducir textos de un lenguaje a otro.

Afirmo que toda la información y contenido presentados en este trabajo son producto de mi investigación y esfuerzo individual, excepto donde se ha indicado lo contrario y se han dado los créditos correspondientes (he incluido las referencias adecuadas en el TFG y he explicitado para qué se ha usado ChatGPT u otras herramientas similares). Soy consciente de las implicaciones académicas y éticas de presentar un trabajo no original y acepto las consecuencias de cualquier violación a esta declaración.

Fecha: 02/06/2026

Firma: Timothée Maspétiol