COMILLAS
UNIVERSIDAD PONTIFICIA
ICAI

INGENIERÍA EN TECNOLOGÍAS INDUSTRIALES

TRABAJO FIN DE MÁSTER

MODELIZACIÓN DEL SISTEMA GLUCOSA-INSULINA CON ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN FRACCIONARIO CON RETRASO (SFDDE) Y RESOLUCIÓN CON EL MÉTODO WAVELET DE CHELYSHKOV.

Autor: Álvaro Loureiro Orejas

Director: Dr. Francisco Javier Rodríguez Gómez

Madrid

Agosto de 2024

Declaro, bajo mi responsabilidad, que el Proyecto presentado con el título MODELIZACIÓN DEL SISTEMA GLUCOSA–INSULINA CON SFDDE Y RESOLUCIÓN CON EL MÉTODO WAVELET DE CHELYSHKOV en la ETS de Ingeniería - ICAI de la Universidad Pontificia Comillas en el curso académico 2023-2024 es de mi autoría, original e inédito y no ha sido presentado con anterioridad a otros efectos. El Proyecto no es plagio de otro, ni total ni parcialmente y la información que ha sido tomada de otros documentos está debidamente referenciada.

Álvaro Loureiro

Fdo: Alvaro Loureiro Fecha 24/08/2024

Autorizada la entrega del proyecto

EL DIRECTOR DEL PROYECTO



Fdo.: Fco Javier Rodríguez Gómez Fecha: 24/08/2024

COMILLAS
UNIVERSIDAD PONTIFICIA
ICAI

INGENIERÍA EN TECNOLOGÍAS INDUSTRIALES

TRABAJO FIN DE MÁSTER

MODELIZACIÓN DEL SISTEMA GLUCOSA-INSULINA CON ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN FRACCIONARIO CON RETRASO (SFDDE) Y RESOLUCIÓN CON EL MÉTODO WAVELET DE CHELYSHKOV.

Autor: Álvaro Loureiro Orejas

Director: Dr. Francisco Javier Rodríguez Gómez

Madrid

Agosto de 2024

MODELIZACIÓN DEL SISTEMA GLUCOSA–INSULINA CON SFDDE Y RESOLUCIÓN CON EL MÉTODO WAVELET DE CHELYSHKOV

Autor: **Loureiro Orejas, Álvaro.**

Director: Rodríguez Gómez, Fco. Javier

Entidad Colaboradora: ICAI – Universidad Pontificia Comillas.

RESUMEN DEL PROYECTO

I. Introducción y objetivos

El cuerpo humano necesita mantener unos niveles de concentración de glucosa en sangre determinados para el correcto funcionamiento del organismo. Para que las células utilicen la glucosa en sangre y se regule su concentración, el cuerpo produce insulina. Si no se produce la insulina correcta, el nivel de glucosa no será el adecuado, dando lugar a la enfermedad conocida como *diabetes mellitus*.

Esta enfermedad es una de las principales causas de mortalidad en España y en el mundo, principalmente debido a complicaciones cardiovasculares. El estudio y comprensión de las alteraciones que produce la *diabetes mellitus* en los pacientes y las dinámicas que se producen en el organismo son tareas indispensables para poder desarrollar soluciones a la enfermedad y poder erradicarla por completo.

Durante los últimos años, se han propuesto numerosos modelos que representan con mayor o menor exactitud el sistema Glucosa–Insulina, siendo el modelo basado en Sistemas de Ecuaciones Diferenciales con Retraso de Orden Fraccionario (*SFDDE*) uno de los modelos que alcanza una mayor precisión.

El objetivo del proyecto es mejorar el entendimiento de la comunidad científica con respecto al modelo de interacción de la insulina y la glucosa, a través de un novedoso modelo de interacción que emplea las últimas técnicas de resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales con retraso de orden fraccionario, el Método *Wavelet* de Chelyshkov.

Para ello, el proyecto cubrirá los siguientes contenidos:

1. Derivación de un sistema de ecuaciones diferenciales de orden fraccionario (SFDDE) inconmensurable para la interacción del sistema regulador Glucosa–Insulina. Se estudiará la no negatividad y la delimitación de las soluciones, así como el análisis de estabilidad de un punto de equilibrio positivo del modelo

resultante. Estudio de la existencia de una bifurcación de Hopf para el modelo diseñado.

2. Creación de un novedoso método numérico *Wavelet* de Chelyshkov basado en la base de los polinomios y *Wavelets* de Chelyshkov, con la construcción de la matrices operacionales de integración fraccionaria y de retardo que con el enfoque de Galerkin resuelva el SFDDE, reduciendo dicho sistema de orden fraccionario a un sistema de ecuaciones algebraicas.
3. Se diseñará una aplicación práctica en el lenguaje *Mathematica* que implemente los algoritmos numéricos diseñados con la base *Wavelet* de Chelyshkov.
4. Resolución del modelo regulador Glucosa–Insulina propuesto mediante la presentación de diferentes casos (valores de glucosa e insulina, y retraso en el efecto de las inyecciones de insulina) que permita verificar y confirmar el análisis teórico.
5. Como último paso, se realizará un análisis de las líneas de desarrollo futuras y se estudiarán cuáles son los posibles siguientes avances que se pueden producir en este tipo de proyectos.

Palabras clave: Métodos numéricos, Transformada *Wavelet*, Ecuaciones Diferenciales Fraccionarias con Retraso, Métodos *Wavelet de Chelyshkov,* diabetes mellitus, glucosa, insulina, análisis de estabilidad.

II. METODOLOGÍA

Para llevar a cabo los objetivos del proyecto, se seguirá la siguiente estructura:

- **1**) A modo de introducción se describirán los métodos actuales de resolución de ecuaciones diferenciales de orden fraccionario.
- **2**) Se describirán en primer lugar las ecuaciones diferenciales de orden fraccionario en el Capítulo 2. Se enunciarán los conceptos y definiciones preliminares como las derivadas y las integrales fraccionarias de Riemann–Liouville, Caputo o Grünwald–Letnikov. Se presentarán varios modelos de sistemas fraccionarios, así como algunos métodos de solución numérica.
- **3**) El Capítulo 3 se dedicará exclusivamente al estudio de varios modelos fraccionarios que implementan la dinámica o interacción Glucosa–Insulina.
- **4**) El diseño y desarrollo del método numérico *Wavelet* de Chelyshkov que permita resolver sistemas de ecuaciones diferenciales de orden fraccionario con retraso (SFDDE) se llevará a cabo en el Capítulo 4.

Así mismo, se implementarán los métodos numéricos basados en la base *Wavelet* de Chelyshkov que resuelvan los sistemas SFDDE de la dinámica Glucosa–Insulina en el lenguaje técnico–científico *Mathematica*, programa matemático muy utilizado en sectores científicos con amplias funciones para el desarrollo simbólico, numérico y gráfico.

- 5) En el Capítulo 5 se resolverán diferentes modelos fraccionarios del sistema que regula la dinámica Glucosa–Insulina con diferentes parámetros mediante el método numérico *Wavelet* de Chelyshkov que permita verificar la precisión y la convergencia de las aproximaciones calculadas.
- **6**) Finalmente, se establecerán las conclusiones y las futuras líneas de investigación.

III. RESULTADOS

Los resultados obtenidos en este proyecto son extensos, por lo que en este epígrafe se mostrarán una versión reducida de lo estudiado a lo largo del proyecto.

Se presentan, a continuación, tres de los principales puntos tratados durante el proyecto: en primer lugar, el análisis de estabilidad del punto de equilibrio del modelo de interacción Glucosa–Insulina calculado mediante el método Adams–Bashforth–Moulton; en segundo lugar, se presenta el efecto que tiene sobre el retardo crítico la variación en los órdenes fraccionarios del modelo; y en tercer lugar, se presentan las soluciones numéricas del modelo de interacción Glucosa–Insulina no lineal obtenidas mediante dos métodos distintos: el método Adams–Bashforth–Moulton Fraccionario con Retraso (ABMFR) y el método *Wavelet* de Chelyshkov (ChWM).

1. El primer modelo que se presenta es el modelo de interacción Glucosa–Insulina con un sistema de ecuaciones diferenciales con retraso de órden fraccionario (SFDDE).

Se calcula y representa la solución numérica del modelo mediante el método Adams–Bashforth–Moulton fraccionario con retraso (ABMFR) tomando los valores de los parámetros que se muestran más adelante. El objetivo es estudiar la estabilidad del modelo para retardos superiores e inferiores al punto de bifurcación τ_0 en el punto de equilibrio positivo.

■ Sea el sistema de ecuaciones diferenciales fraccionarias con retraso SFDDE que representa el modelo de interacción de glucosa–insulina con órdenes inconmensurables:

$$(P) \equiv \begin{cases} D^{(\alpha_1)}\, y_1(x) = -b_1\, y_1(x) - \frac{b_3\, y_1(x)\, y_2(x)}{b_4\, y_1(x)+1} + b_6 & x \in (0,\ T),\ 0 < \alpha <= 1 \\ D^{(\alpha_2)}\, y_2\,(x) = -b_2\, y_2(x) + b_5\, y_1(x-\tau) & \tau >= 0 \\ y(x) = \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 87 \\ 60 \end{pmatrix} & x \in [-\tau,\ 0] \\ y(0) = \begin{pmatrix} G_0 \\ I_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 87 \\ 60 \end{pmatrix} \end{cases}$$

- Punto de equilibrio positivo: $(G^*,\ I^*) = (1018.09,\ 334.39)$
- Punto de bifurcación: $\tau_0 = 2089.43$.

■ a) Caso I

α_1	α_2	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	G_0	I_0	τ
0.92	0.72	0.00020893	0.225301	0.0000564	0.01	0.074	1.93	87	60	1400

$[0,\ T] = [0,\ 40\,000]$ min .

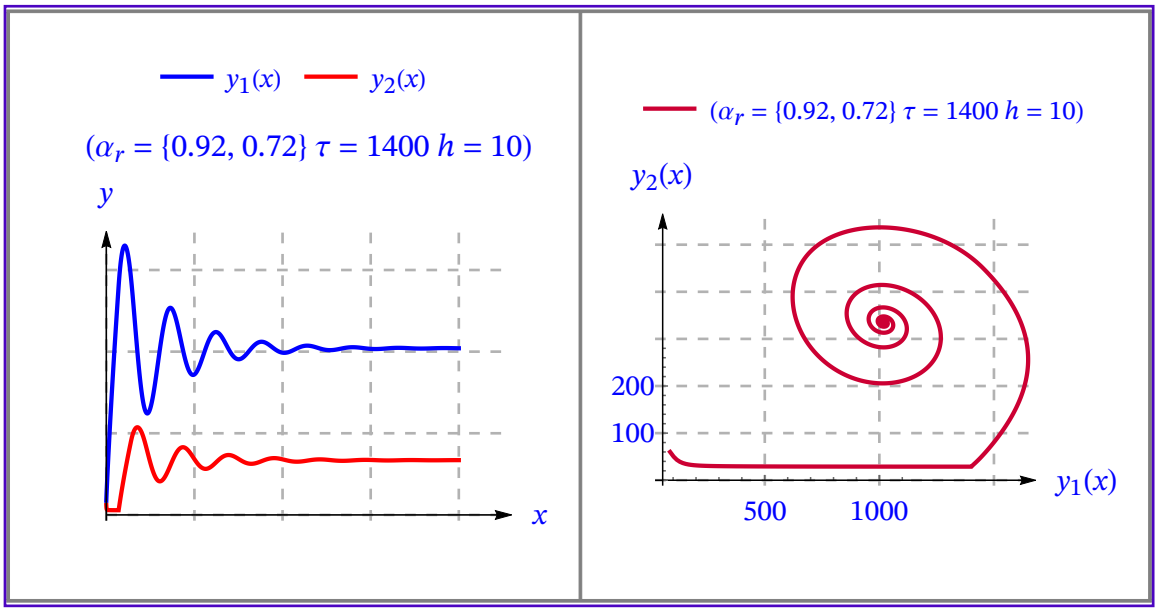


Figura 0.1. Resolución del Modelo e interacción de glucosa e insulina de órdenes inconmensurables con un SFDDE ($\tau = 1400$).

■ a) Caso II

α_1	α_2	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	G_0	I_0	τ
0.92	0.72	0.00020893	0.225301	0.0000564	0.01	0.074	1.93	87	60	2400

$[0,\ T] = [0,\ 40\,000]$ min.

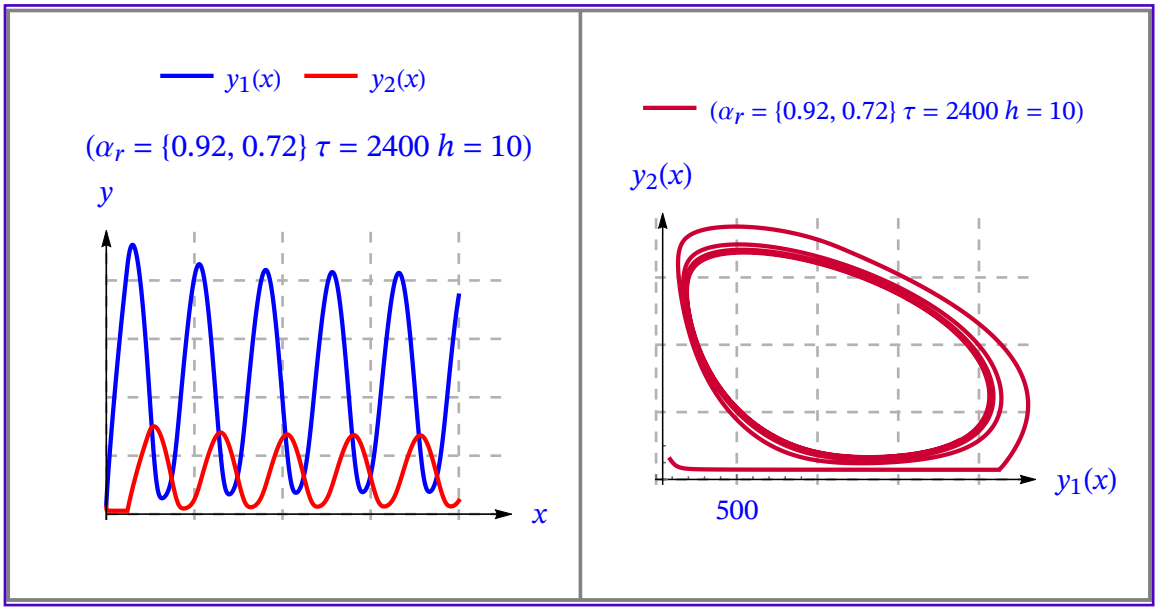


Figura 0.2. Resolución del Modelo e interacción de glucosa e insulina de órdenes inconmensurables con un SFDDE ($\tau = 2400$).

■ *Indicación*:

(Caso I) El punto de equilibrio positivo (G^*, I^*) es *asintóticamente estable* cuando $\tau = 1400 < \tau_0 = 2089$.

(Caso II) El punto de equilibrio positivo (G^*, I^*) es *inestable* para $\tau = 2400 > \tau_0 = 2089$ y ocurre una bifurcación de Hopf en el punto de equilibrio.

---

2. Se ha realizado un análisis del efecto que tiene sobre el punto de bifurcación τ_0 cuando se varían los órdenes fraccionarios en los sistemas de ecuaciones diferenciales fraccionarios con retraso que representan el modelo de Glucosa–Insulina con órdenes inconmensurables. A continuación, se presentan los resultados.

■ Sea el sistema de ecuaciones diferenciales fraccionarias con retraso SFDDE que representa el modelo de glucosa–insulina con órdenes inconmensurables:

$$(P) \equiv \begin{cases} D^{(\alpha_1)}\, y_1(x) = -b_1\, y_1(x) - \frac{b_3\, y_1(x)\, y_2(x)}{b_4\, y_1(x)+1} + b_6 & x \in (0,\ T),\ 0 < \alpha <= 1 \\ D^{(\alpha_2)}\, y_2\,(x) = -b_2\, y_2(x) + b_5\, y_1(x-\tau) & \tau >= 0 \\ y(x) = \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{pmatrix} & x \in [-\tau,\ 0] \\ y(0) = \begin{pmatrix} G_0 \\ I_0 \end{pmatrix} & \end{cases}$$

- Punto de equilibrio positivo: (G^*, I^*)
- Punto de bifurcación: τ_0.

Se quiere estudiar los efectos de las órdenes fraccionarias α_1 y α_2 respecto del punto de bifurcación τ_0 considerando los valores de los parámetros siguientes en el problema (P). Tabla de valores y fórmulas:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
0.0001	0.1262	0.0000564	0.01	0.074	1.93

Constante de tiempo fraccionaria $\beta = 1$.

$$\begin{cases} b_1 = {a_1}^{\alpha 1} & b_2 = {a_2}^{\alpha 2} & b_3 = \beta^{1-\alpha_1}\, a_3 \\ b_4 = a_4 & b_5 = \beta^{1-\alpha_2}\, a_5 & b_6 = \beta^{1-\alpha_1}\, a_6 \end{cases}$$

(a) Se establece el orden $\alpha_1 = 0.95$ y se calcula el punto de bifurcación del sistema τ_0 para cada valor del orden fraccionario de α_2:

$\alpha_2 = \{0.65, 0.7, 0.72, 0.7, 0.79, 0.83, 0.85, 0.88, 0.92, 0.95, 1.\}$

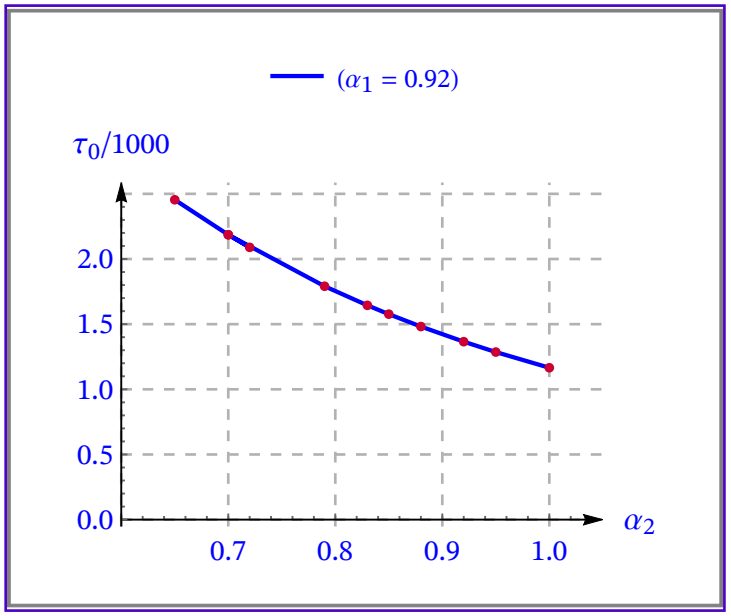


Figura 0.3. Valores de τ_0 para cada valor de α_2, manteniendo $\alpha_1 = 0.95$ constante.

■ *Indicación*:

Se comprueba que el punto de bifurcación τ_0 disminuye a medida que aumenta el orden fraccionario α_2.

(b) Se establece el orden $\alpha_2 = 0.92$ y se calcula el punto de bifurcación del sistema τ_0 para cada valor del orden fraccionario de α_1:

$\alpha_1 = \{0.73, 0.75, 0.76, 0.78, 0.81, 0.85, 0.88, 0.92, 0.95, 0.98, 1.\}$

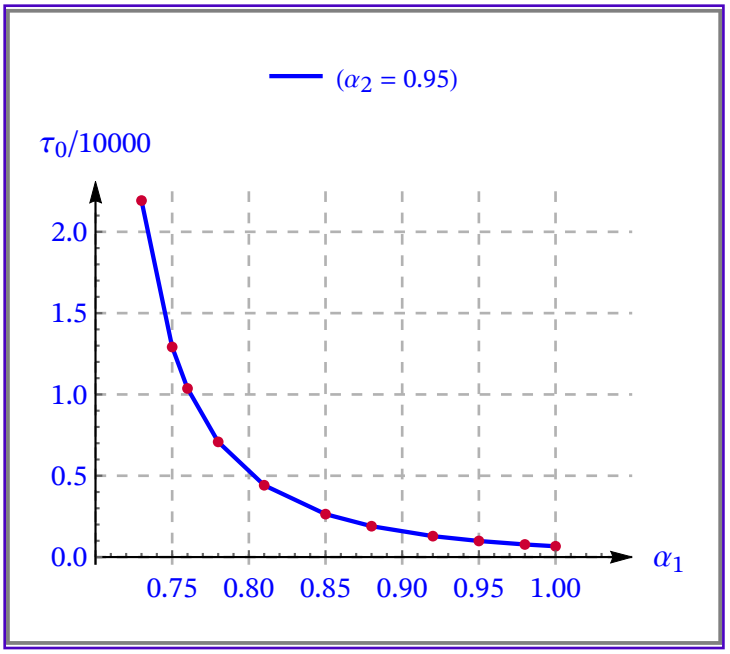


Figura 0.4. Valores de τ_0 para cada valor de α_2, manteniendo $\alpha_1 = 0.92$ constante.

■ *Indicación*:

Se observa fácilmente que el punto de bifurcación τ_0 disminuye a medida que aumenta el orden fraccionario α_1.

3. Se ha obtenido y representado la solución numérica y el diagrama de fases del modelo regulador Glucosa-Insulina no lineal mediante dos métodos distintos: (*i*) Método Adams–Bashforth–Moulton fraccionario con retraso (ABMFR) y (*ii*) Método *Wavelet* de Chelyshkov.

■ Sea el sistema de ecuaciones diferenciales con retraso SFDDE que representa el modelo regulador Glucosa–Insulina Fraccionario no Lineal:

$(P_1) \equiv$

$$\begin{cases} D^{(\alpha_1)}\, y_1(x) = -r_1\, y_1(x) + r_2\, y_1(x)\, y_2(x) + r_3\, y_2\,(x)^2 + r_4\, y_2\,(x)^3 & x \in (0,\ T) \\ \qquad\qquad + r_5\, y_3(x) + r_6\, y_3\,(x)^2 + r_7\, y_3\,(x)^3 + r_{20} & \\ D^{(\alpha_2)}\, y_2(x) = -r_8\, y_1(x)\, y_2(x) - r_9\, y_1\,(x)^2 - r_{10}\, y_1\,(x)^3 & \\ \qquad + r_{11}\, y_2(x)\,(1 - y_2(x)) - r_{12}\, y_3(x) - r_{13}\, y_3\,(x)^2 - r_{14}\, y_3\,(x)^3 + r_{21} & \\ D^{(\alpha_3)}\, y_3(x) = r_{15}\, y_2(x) + r_{16}\, y_2\,(x)^2 + r_{17}\, y_2\,(x)^3 - r_{18}\, y_3(x) & \\ \qquad\qquad - r_{19}\, y_2(x)\, y_3(x) & \\ \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ y_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.53 \\ 1.31 \\ 1.03 \end{pmatrix} & x = 0 \end{cases}$$

Parámetros empleados:

r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6	r_7	r_8	r_9	r_{10}	r_{11}	r_{12}
2.04	0.1	1.09	−1.08	0.03	−0.06	2.01	0.22	−3.84	−1.2	0.3	1.37

r_{13}	r_{14}	r_{15}	r_{16}	r_{17}	r_{18}	r_{19}	r_{20}	r_{21}
−0.3	0.22	0.3	−1.35	0.5	−0.42	−0.15	−0.19	−0.56

$\tau = (\tau_g,\ \tau_i,\ \tau_g) = (0,\ 0,\ 0)$

- Punto de equilibrio: $Y_j^* = (\ 0.624425 \quad 0.935374 \quad 0.876922\ )$
- Raíz compleja pura (solución periódica): $\beta = 0.$

■ Caso I: Método ABMFR

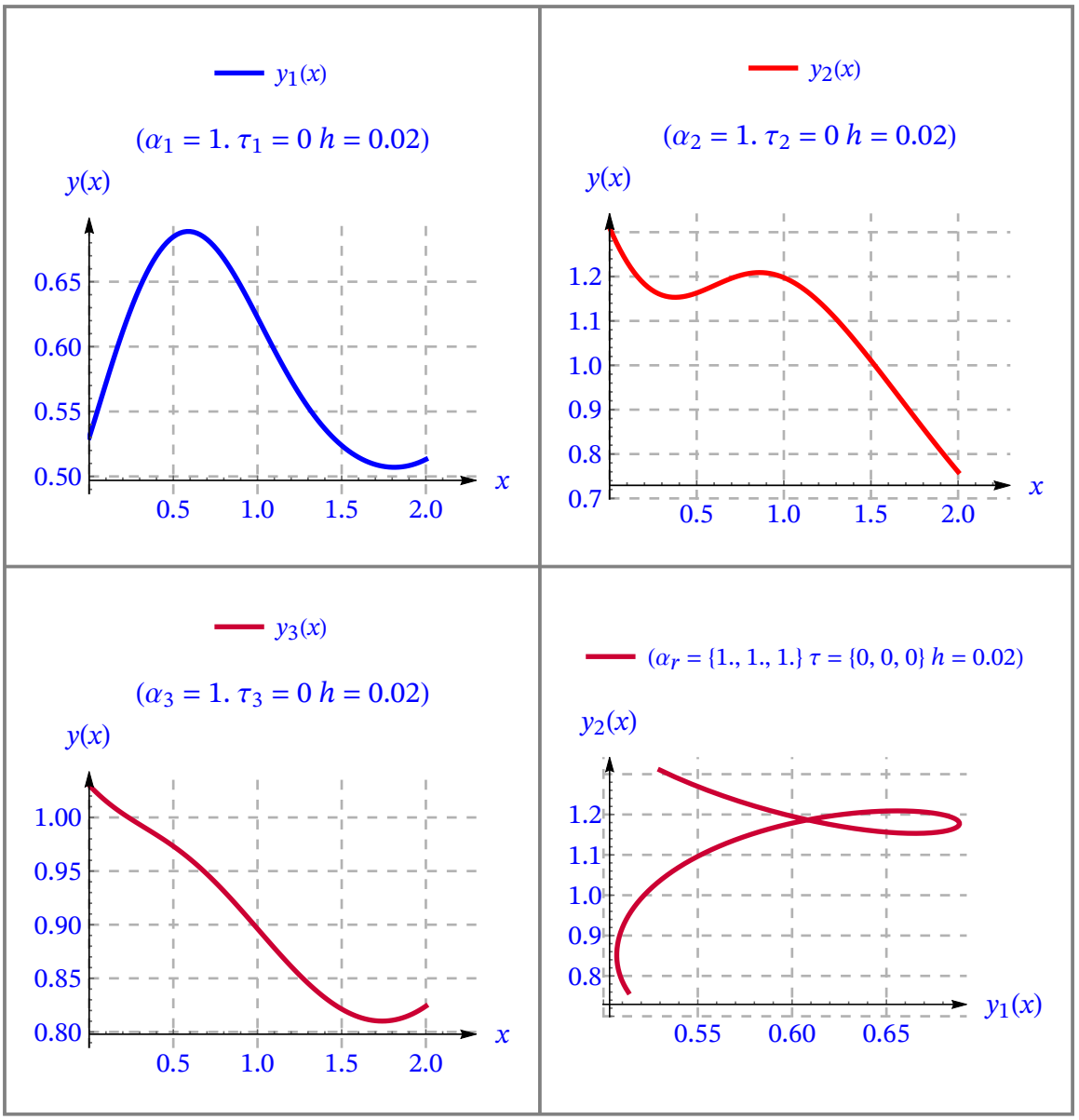


Figura 0.5. Resolución del modelo regulador de Glucosa–Insulina Fraccionario No Lineal mediante el método ABMFR.

- Caso II: Método *Wavelet* de Chelyshkov.

  En el proyecto, para este método se han empleado varios valores de los parámetros k y M, pero en este resumen se ha incluido la solución numérica para los valores $k = 1$ y $M = 4$ debido a que cuanto mayor es el grado del polinomio de Chelyshkov (parámetro M) que se emplea, mayor es la precisión de la solución numérica.

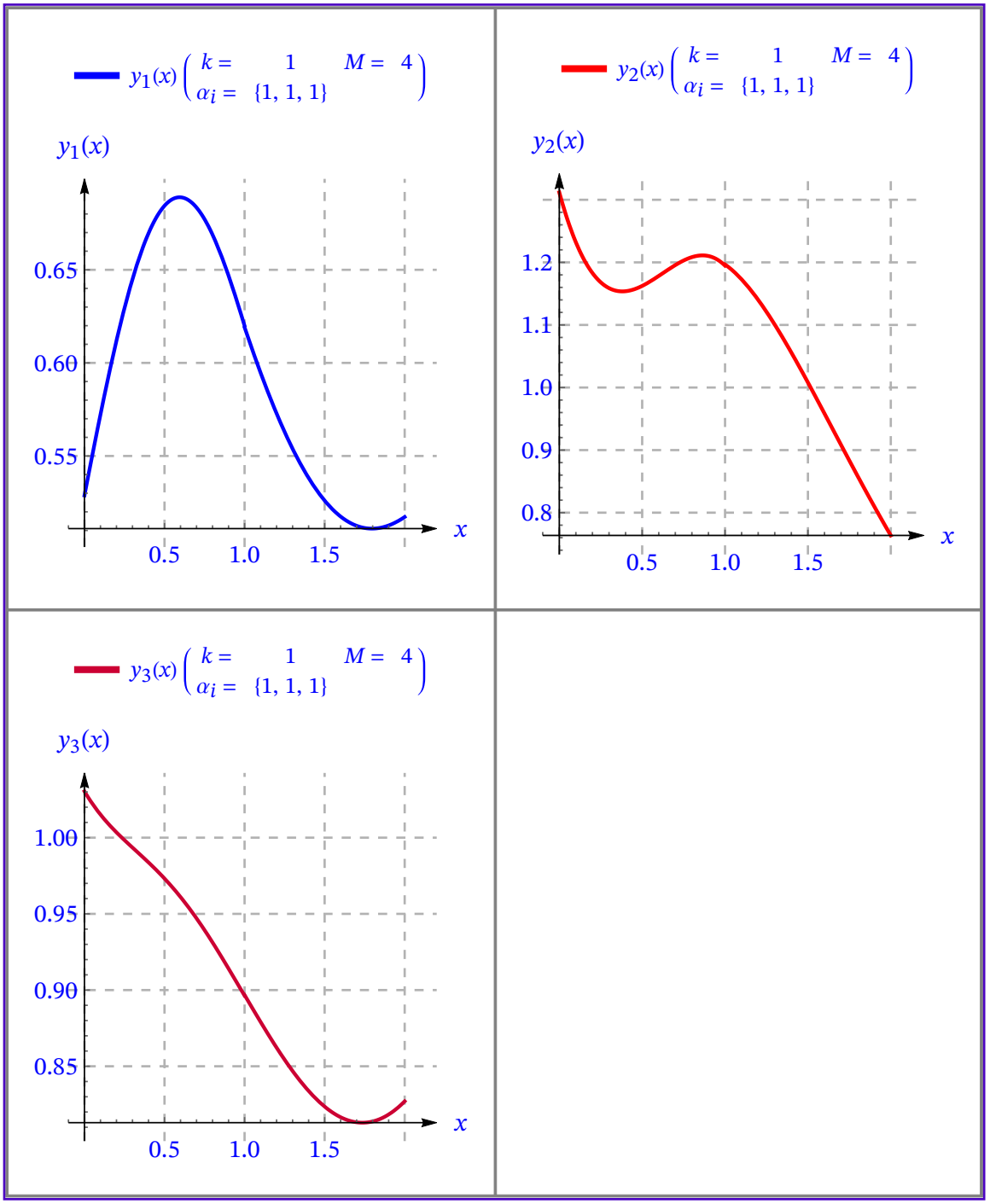


Figura 0.6. Resolución del modelo regulador de Glucosa–Insulina Fraccionario No Lineal mediante *Wavelets* de Chelyshkov con $k = 1$ y $M = 4$.

IV. CONCLUSIONES

- Fruto del análisis de estabilidad del modelo de interacción Glucosa–Insulina con retraso de orden fraccionario, se deduce que **las zonas de estabilidad del modelo dependen del retraso que se emplee**. En el caso de utilizar un retraso

menor al retraso crítico τ_0, el modelo es estable, mientras que cuando se supera el retardo crítico, el modelo se torna caótico.

- Los órdenes fraccionarios α_1 y α_2 elegidos para el modelar el sistema de interacción Glucosa-Insulina con retraso de orden fraccionario tienen un impacto relevante en el valor del retraso crítico τ_0, como se ha demostrado en el proyecto. Cuanto más próximos a 1, menor será el retraso crítico.
- Para concluir, el ***Método Wavelet de Chelyshkov*** **(ChWM)** con los parámetros $k = 1$ y $M = 4$ y aplicado en un intervalo de tiempo $[0, 2]$ al modelo regulador Glucosa–Insulina con sistemas fraccionarios no lineales ofrece resultados numéricos con una alta precisión, lo que indica que el método puede ser empleado para estas casuísticas. Cuanto mayor sea el grado del polinomio empleado (parámetro M) y mayor sea el valor del parámetro k, mayor precisión se alcanza, pero el tiempo de ejecución aumenta sensiblemente.

  En caso de incrementar el intervalo de tiempo, las soluciones numéricas pierden eficacia y el método no resulta tan potente. Permite obtener una solución numéricamente aproximada para sistemas fraccionarios no lineales cuando los intervalos de tiempo no son muy grandes $[0, 1]$, en cambio cuando los intervalos pasan a tener mayor tamaño las gráficas comienzan a tener ciertas imprecisiones lo que hace pensar que necesitaríamos incrementar la k o la M.

V. FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN

Se detallan las futuras líneas de investigación que se pueden llevar a cabo a raíz del proyecto realizado:

1. Estudio de modelos que relacionen la COVID-19 con la diabetes, dado que la epidemia ha determinado que aumenta la probabilidad y la gravedad de los resultados debido a la hiperglucemia, el deterioro del sistema inmunológico, los problemas vasculares y las comorbilidades como la hipertensión, la obesidad y las enfermedades cardiovasculares, que pueden conducir a resultados catastróficos.
2. Se proponen métodos de colocación compuestos, precisos y eficientes basados en las *Wavelets* de Chelyshkov Fraccionarias (*fractional order Chelyshkov wavelets*).

   Estas funciones permiten reducir la solución de problemas como el problema de *advección-dispersión móvil-inmóvil fraccionario de orden distribuido* a un sistema de ecuaciones algebraicas para calcular la función desconocida.

3. Diseño de métodos numéricos mediante las *Wavelets* de Chelyshkov Fraccionarias que resuelvan el *problema Inverso* que determine $\{u(x), f(x)\}$ de ecuaciones diferenciales fraccionarias no lineales.
4. Estudios semianalíticos que desarrollen y analicen un marco regulatorio integral para el manejo de la glucosa y la insulina en sangre en presencia de diabetes *mellitus*, mediante el empleo de operadores fraccionarios con la derivada fraccionaria de Atangana–Baleanu en el sentido de Caputo (derivada fraccionaria ABC) y el método de transformada de Laplace de descomposición de Adomian.

   Así mismo, desarrollo de esquemas basados en la *derivada fraccionaria ABC* que describa la dinámica de la diferentes enfermedades como el cáncer empleando métodos de *Adams–Bashforth–Moulton fraccionarios* para encontrar resultados numéricos y gráficos del modelo con un buen nivel de precisión.
5. Resolución de ecuaciones en *derivadas parciales fraccionarias* (FPDE), donde intervienen la derivada fraccionaria en el sentido de Caputo y también la derivada fraccionaria de Riesz, utilizando el Método *Wavelet* de Chebyshev.

   Este método también permite resolver ecuaciones diferenciales fraccionarias con retraso, (SFFDE), dentro de las cuales se puede citar la ecuación del pantógrafo, como son las *ecuaciones integro–diferenciales fraccionaria de Volterra con retraso.*
6. Estudio del método *Wavelet* de Legendre como solución numérica de ecuaciones en derivadas parciales fraccionarias (*fractional order partial differential equations*–FPDE), para la resolución de ecuaciones como la del pantógrafo.
7. Estudio del Método *Wavelet* basado en la expansión de *Wavelets de Hermite,* que permite estudiar el comportamiento cualitativo de la rotura de olas o sistemas de ecuaciones acopladas fraccionalmente en el tiempo y asociadas al potencial de Schrödinger dependiente de la energía, entre otros.
8. Estudio de otros métodos diferentes de los método *Wavelets*: Existen otras técnicas que permiten resolver las ecuaciones diferenciales de orden fraccionario. Entre ellos, se pueden citar por ejemplo, la transformada de Shehu, el método de Runge (sistema aplicable para sistemas epidémicos), el método de descomposición de Adomian, el método de iteración variacional, el método de perturbación de homotopía o también la aproximación de funciones mediante ***redes neuronales***.

MODELLING OF THE GLUCOSE-INSULIN SYSTEM WITH SFDDE AND RESOLUTION WITH THE CHELYSHKOV WAVELET METHOD

ABSTRACT

I. INTRODUCTION AND OBJECTIVES

The human body needs to maintain certain blood glucose concentration levels for the proper functioning of the organism. In order for the cells to use the glucose in the blood and to regulate its concentration, the body produces insulin. If the correct insulin is not produced, the glucose level will not be adequate, leading to the disease known as *diabetes mellitus*.

This disease is one of the main causes of mortality in Spain and the world, mainly due to cardiovascular complications. The study and understanding of the alterations that diabetes mellitus produces in patients and the dynamics that occur in the organism are essential tasks in order to develop solutions to the disease and to eradicate it completely.

In recent years, numerous models have been proposed that more or less accurately represent the Glucose-Insulin system, with the model based on Systems of Fractional Order Delay Differential Equations (SFDDE) being one of the most accurate.

The aim of the project is to improve the scientific community's understanding of the interaction model of insulin and glucose, through a novel interaction model that employs the latest techniques for solving systems of differential equations with fractional order delay, the Chelyshkov Wavelet Method.

To this end, the project will cover the following contents:

1. Derivation of a system of fractional order differential equations (SFDDE) incommensurable for the interaction of the regulatory system Glucose-Insulin. Non-negativity and boundedness of solutions will be studied, as well as the stability analysis of a positive equilibrium point of the resulting model. Study of the existence of a Hopf bifurcation for the designed model.
2. Creation of a novel numerical Chelyshkov Wavelet method based on the basis of the Chelyshkov polynomials and Wavelets, with the construction of the operational fractional integration and delay matrices which, using the Galerkin approach, solves the SFDDE, reducing this fractional order system to a system of algebraic equations.

3. A practical application will be designed in the Mathematica language that implements the numerical algorithms designed with the Chelyshkov Wavelet basis.
4. Resolution of the proposed Glucose-Insulin regulatory model by presenting different cases (glucose and insulin values, and delay in the effect of insulin injections) to verify and confirm the theoretical analysis.
5. As a last step, an analysis of future lines of development will be carried out and possible next steps in this type of project will be studied.

Keywords: Numerical methods, Wavelet Transform, Delayed Fractional Differential Equations, Chelyshkov Wavelet Methods, diabetes mellitus, glucose, insulin, stability analysis.

II. METHODOLOGY

In order to achieve the objectives of the project, the following structure will be followed:

1. As an introduction, current methods of solving fractional order differential equations will be described.
2. Fractional order differential equations will be described first in Chapter 2. Preliminary concepts and definitions such as Riemannian derivatives and fractional integrals by Riemann-Liouville, Caputo or Grünwald-Letnikov will be stated. Several models of fractional systems will be presented, as well as some numerical solution methods.
3. Chapter 3 will be devoted exclusively to the study of several fractional models that implement the dynamics or interaction Glucose-Insulin.
4. The design and development of the numerical Chelyshkov Wavelet method to solve systems of fractional order differential equations with delay (SFDDE) will be carried out in Chapter 4.

   Likewise, the numerical methods based on the Chelyshkov Wavelet basis will be implemented to solve the SFDDE systems of the Glucose-Insulin dynamics in the technical language Mathematica, a mathematical programme widely used in scientific sectors with extensive functions for symbolic, numerical and graphical development.
5. In Chapter 5, different fractional models of the system that regulates the Glucose-Insulin dynamics with different parameters will be solved using Chelyshkov's Wavelet numerical method to verify the precision and convergence of the calcu-

lated approximations.

6. Finally, conclusions and future lines of research will be drawn.

III. RESULTS

The results obtained in this project are extensive, so this section will show a reduced version of what has been studied throughout the project.

Three of the main points covered during the project are presented below: firstly, the stability analysis of the equilibrium point of the Glucose - Insulin interaction model calculated using the Adams - Bashforth - Moulton method; secondly, the effect that variation in the fractional orders of the model has on the critical delay is presented; and thirdly, the numerical solutions of the non-linear Glucose - Insulin interaction model obtained using two different methods are presented: the Adams-Bashforth-Moulton Fractional with Delay (ABMFR) method and the Chelyshkov Wavelet method (ChWM).

1. The first model presented is the Glucose-Insulin interaction model with a system of fractional delay differential equations (SFDDE).

   The numerical solution of the model is calculated and represented using the Adams - Bashforth - Moulton fractional delay method (ABMFR) taking the values of the parameters shown below. The objective is to study the stability of the model for delays above and below the bifurcation point τ_0 at the positive equilibrium point.

■ Let be the system of fractional differential equations with delay SFDDE representing the glucose-insulin interaction model with incommensurate orders:

$$(P) \equiv \begin{cases} D^{(\alpha_1)}\, y_1(x) = -b_1\, y_1(x) - \frac{b_3\, y_1(x)\, y_2(x)}{b_4\, y_1(x)+1} + b_6 & x \in (0,\ T),\ 0 < \alpha <= 1 \\ D^{(\alpha_2)}\, y_2\,(x) = -b_2\, y_2(x) + b_5\, y_1(x-\tau) & \tau >= 0 \\ y(x) = \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 87 \\ 60 \end{pmatrix} & x \in [-\tau,\ 0] \\ y(0) = \begin{pmatrix} G_0 \\ I_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 87 \\ 60 \end{pmatrix} \end{cases}$$

- Positive equilibrium point: $(G^*,\ I^*) = (1018.09,\ 334.39)$
- Bifurcation point: $\tau_0 = 2089.43$.

■ a) Case I

α_1	α_2	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	G_0	I_0	τ
0.92	0.72	0.00020893	0.225301	0.0000564	0.01	0.074	1.93	87	60	1400

$[0,\ T] = [0,\ 40\,000]$ min .

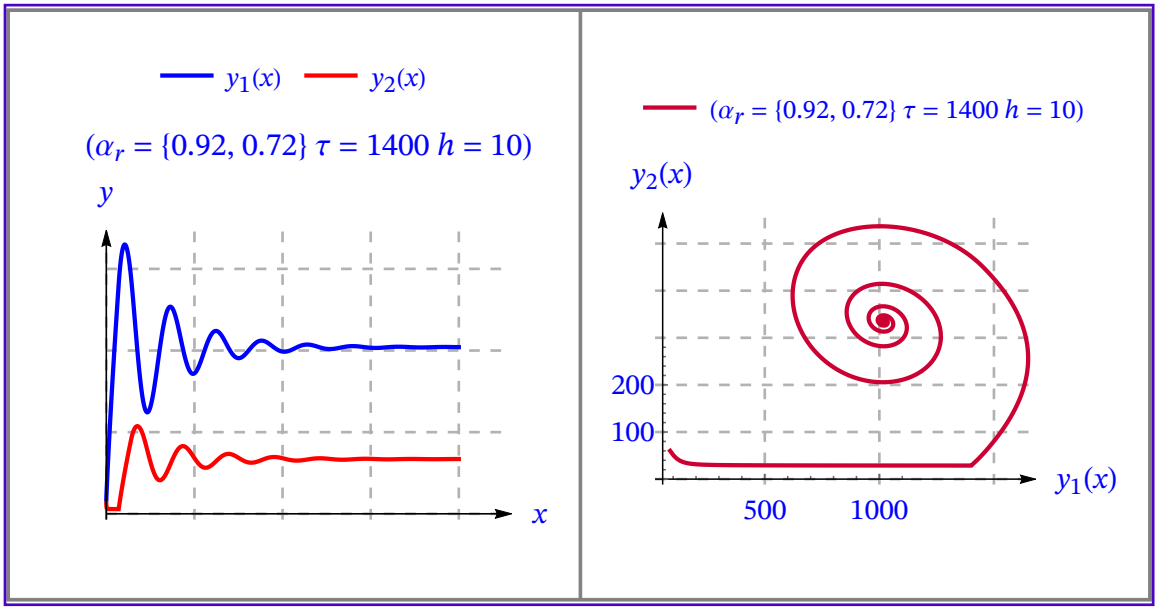


Figure 0.1. Resolution of the Model and interaction of glucose and insulin of incommensurable orders with a SFDDE ($\tau = 1400$).

■ a) Case II

α_1	α_2	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	G_0	I_0	τ
0.92	0.72	0.00020893	0.225301	0.0000564	0.01	0.074	1.93	87	60	2400

$[0,\ T] = [0,\ 40\,000]$ min.

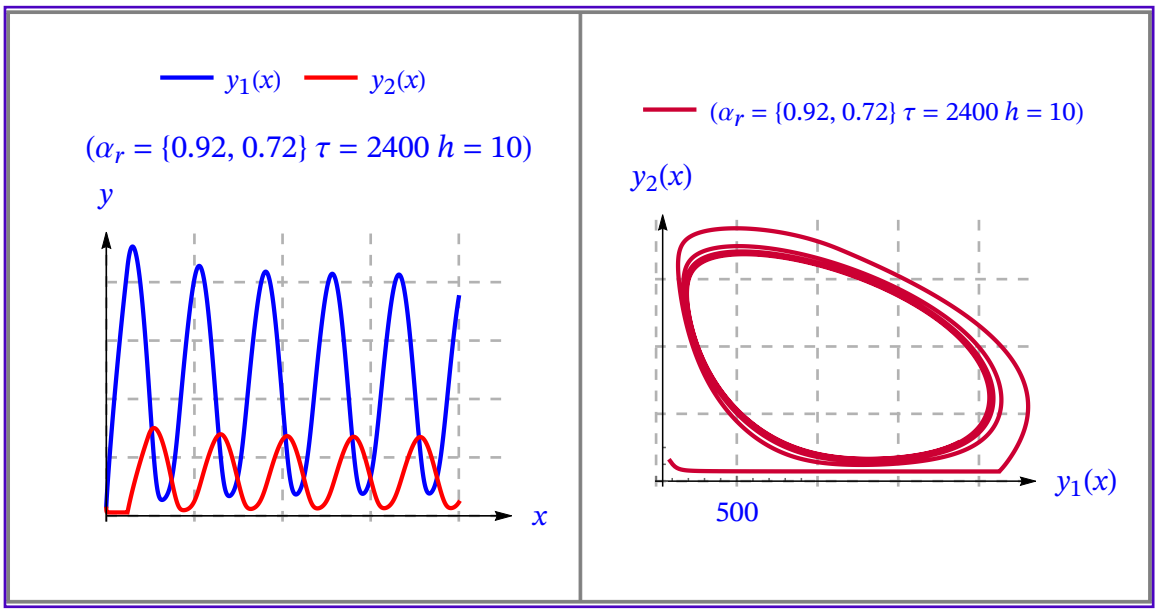


Figure 0.2. Resolution of the Model and interaction of glucose and insulin of incommensurable orders with a SFDDE ($\tau = 2400$).

■ *Indication*:

(Case I) The positive equilibrium point (G^*, I^*) is asymptotically stable when $\tau = 1400 < \tau_0 = 2089$.

(Case II) The positive equilibrium point (G^*, I^*) is unstable when $\tau = 2400 > \tau_0 = 2089$ y ocurre una bifurcación de Hopf en el punto de equilibrio.

---

2. An analysis of the effect on the bifurcation point τ_0 when fractional orders are varied in systems of fractional differential equations with delay representing the Glucose-Insulin model with incommensurable orders has been performed. The results are presented below.

■ Let be the system of fractional differential equations with delay SFDDE representing the glucose-insulin model with incommensurable orders:

$$(P) \equiv \begin{cases} D^{(\alpha_1)}\, y_1(x) = -b_1\, y_1(x) - \frac{b_3\, y_1(x)\, y_2(x)}{b_4\, y_1(x)+1} + b_6 & x \in (0,\ T),\ 0 < \alpha <= 1 \\ D^{(\alpha_2)}\, y_2\,(x) = -b_2\, y_2(x) + b_5\, y_1(x-\tau) & \tau >= 0 \\ y(x) = \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{pmatrix} & x \in [-\tau,\ 0] \\ y(0) = \begin{pmatrix} G_0 \\ I_0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

- Positive equilibrium point: (G^*, I^*)
- Bifurcation point: τ_0.

We want to study the effects of the fractional orders α_1 and α_2 with respect to the bifurcation point τ_0 considering the values of the following parameters in problem (P). Table of values and formulae:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
0.0001	0.1262	0.0000564	0.01	0.074	1.93

Fractional time constant $\beta = 1$.

$$\begin{cases} b_1 = {a_1}^{\alpha_1} & b_2 = {a_2}^{\alpha_2} & b_3 = \beta^{1-\alpha_1}\, a_3 \\ b_4 = a_4 & b_5 = \beta^{1-\alpha_2}\, a_5 & b_6 = \beta^{1-\alpha_1}\, a_6 \end{cases}$$

(a) The order $\alpha_1 = 0.95$ is set and the bifurcation point τ_0 of the system is calculated for each value of the fractional order of α_2.

$\alpha_2 = \{0.65,\ 0.7,\ 0.72,\ 0.7,\ 0.79,\ 0.83,\ 0.85,\ 0.88,\ 0.92,\ 0.95,\ 1.\}$

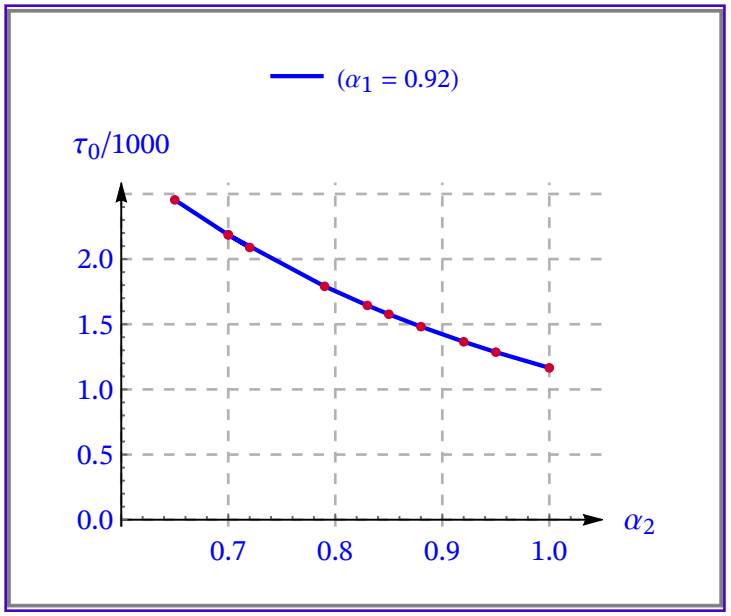


Figure 0.3. Values of τ_0 for every α_2 values, keeping $\alpha_1 = 0.95$ constant.

■ *Indication*:

It is found that the bifurcation point τ_0 decreases as the fractional order α_2.

(b) Set the order $\alpha_2 = 0.92$ and calculate the bifurcation point of the system τ_0 for each value of the fractional order of α_1:

$\alpha_1 = \{0.73, 0.75, 0.76, 0.78, 0.81, 0.85, 0.88, 0.92, 0.95, 0.98, 1.\}$

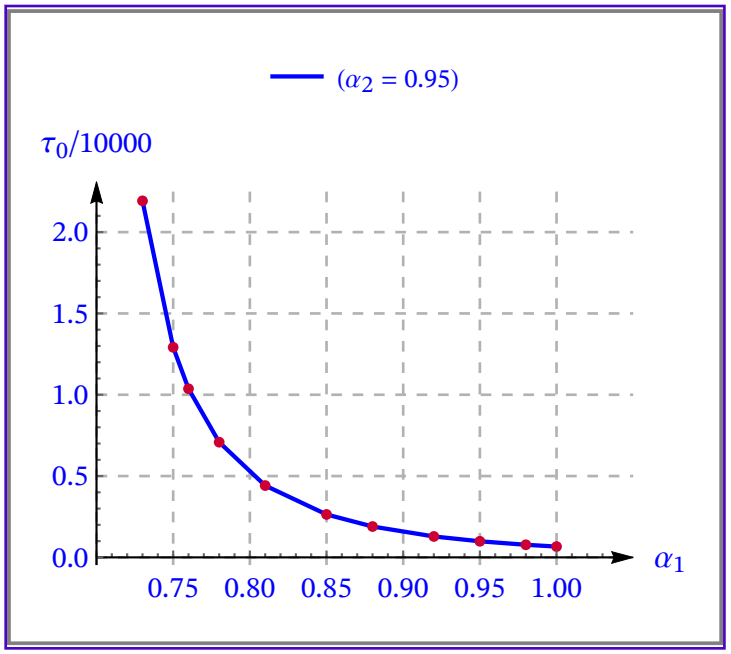


Figure 0.4. Values of τ_0 for every α_2 value, keeping $\alpha_1 = 0.92$ constant.

■ *Indication*:

It is observed that the bifurcation point τ_0 decreases as the fractional order α_1 increases.

---

3. The numerical solution and the phase diagram of the non-linear Glucose-Insulin regulatory model have been obtained and plotted using two different methods: (i) Adams-Bashforth-Moulton fractional method with delay (ABMFR) and (ii) Chelyshkov Wavelet method.

■ Let be the system of differential equations with delay SFDDE representing the nonlinear fractional Glucose-Insulin regulatory model:

$(P_1) \equiv$

$$\begin{cases} D^{(\alpha_1)}\, y_1(x) = -r_1\, y_1(x) + r_2\, y_1(x)\, y_2(x) + r_3\, y_2\,(x)^2 + r_4\, y_2\,(x)^3 & x \in (0,\ T) \\ \qquad\qquad + r_5\, y_3(x) + r_6\, y_3\,(x)^2 + r_7\, y_3\,(x)^3 + r_{20} & \\ D^{(\alpha_2)}\, y_2(x) = -r_8\, y_1(x)\, y_2(x) - r_9\, y_1\,(x)^2 - r_{10}\, y_1\,(x)^3 & \\ \qquad + r_{11}\, y_2(x)\,(1 - y_2(x)) - r_{12}\, y_3(x) - r_{13}\, y_3\,(x)^2 - r_{14}\, y_3\,(x)^3 + r_{21} & \\ D^{(\alpha_3)}\, y_3(x) = r_{15}\, y_2(x) + r_{16}\, y_2\,(x)^2 + r_{17}\, y_2\,(x)^3 - r_{18}\, y_3(x) & \\ \qquad\qquad - r_{19}\, y_2(x)\, y_3(x) & \\ \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ y_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.53 \\ 1.31 \\ 1.03 \end{pmatrix} & x = 0 \end{cases}$$

Parameters used:

r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6	r_7	r_8	r_9	r_{10}	r_{11}	r_{12}
2.04	0.1	1.09	−1.08	0.03	−0.06	2.01	0.22	−3.84	−1.2	0.3	1.37

r_{13}	r_{14}	r_{15}	r_{16}	r_{17}	r_{18}	r_{19}	r_{20}	r_{21}
−0.3	0.22	0.3	−1.35	0.5	−0.42	−0.15	−0.19	−0.56

$\tau = (\tau_g,\ \tau_i,\ \tau_g) = (0,\ 0,\ 0)$

- Equilibrium point: $Y_j^* = (\ 0.624425 \quad 0.935374 \quad 0.876922\ )$
- Pure complex root (periodic solution): $\beta = 0.$

■ Case I: ABMFR Method

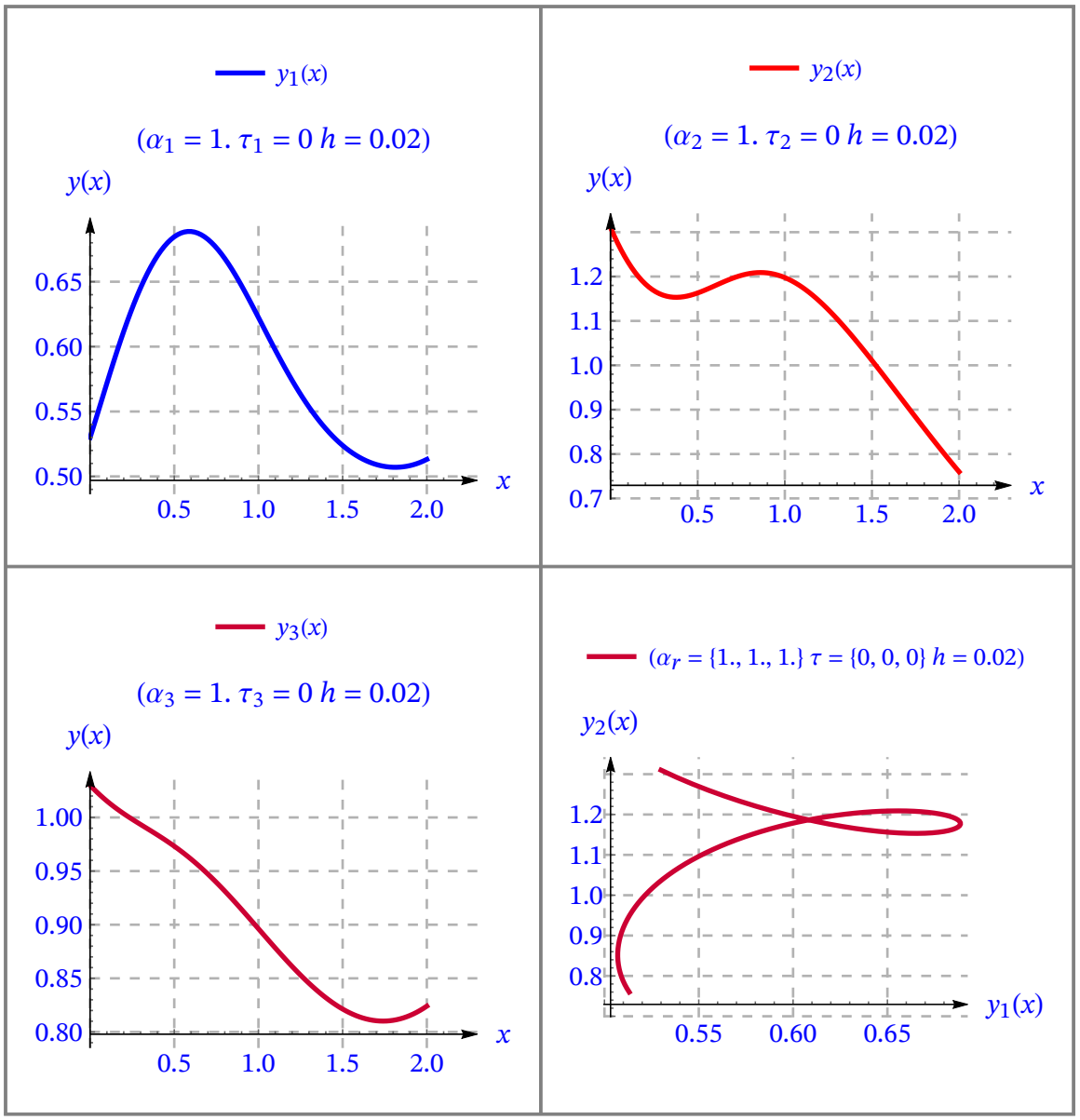


Figure 0.5. Solving the Nonlinear Fractional Glucose-Insulin regulatory model using the ABMFR method.

- Case II: Chelyshkov Wavelet Method.

  In the project, several values of the parameters k and M have been used for this method, but in this summary the numerical solution has been included for the values $k = 1$ and $M = 4$ because the higher the degree of the Chelyshkov polynomial (parameter M) used, the greater the precision of the numerical solution.

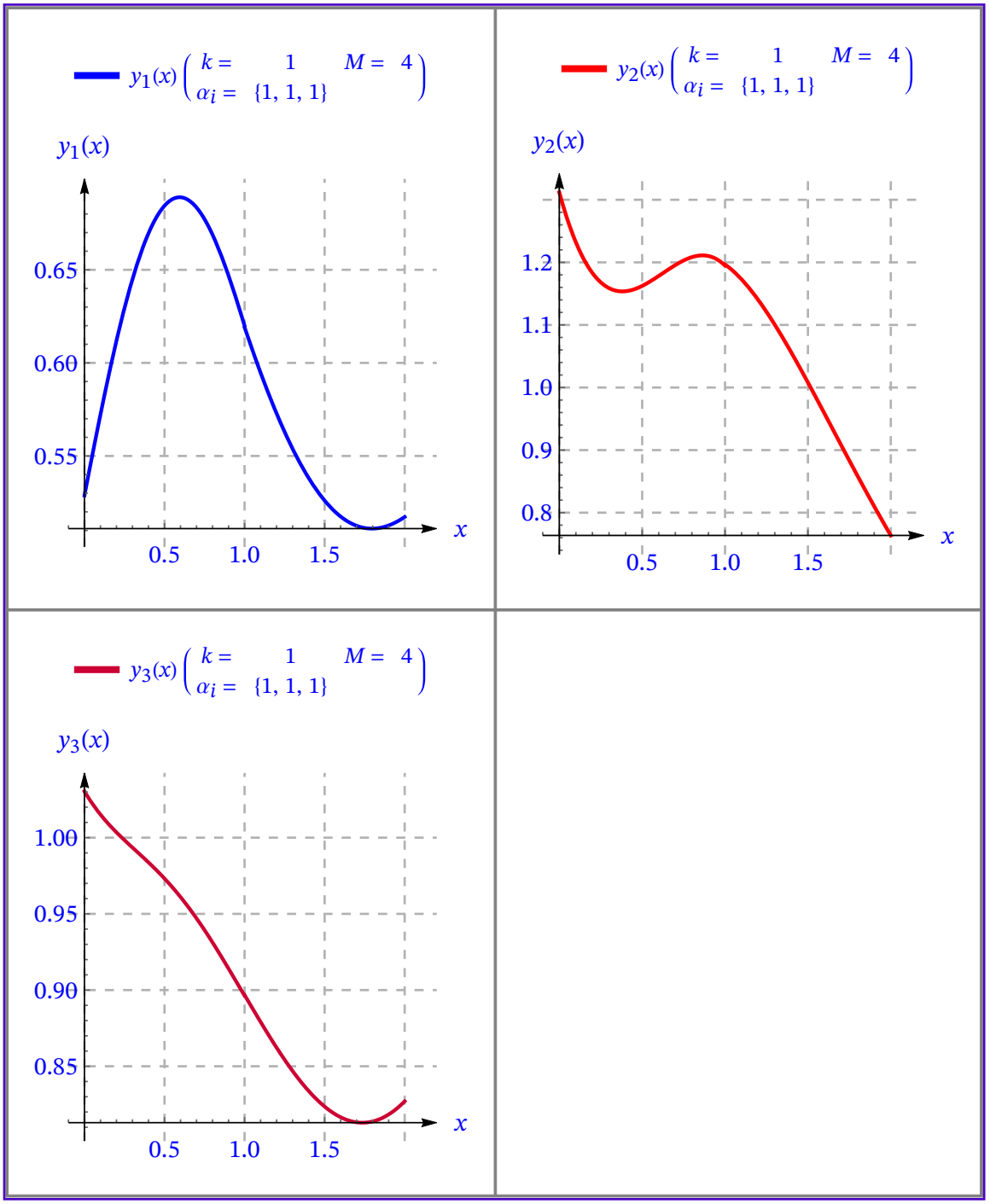


Figure 0.6. Solving the Nonlinear Fractional Glucose-Insulin regulatory model using Chelyshkov Wavelets with k=1 and M=4.

IV. CONCLUSION

- From the stability analysis of the Glucose-Insulin interaction model with fractional order delay, it is deduced that the stability zones of the model depend on the delay used. In the case of using a delay smaller than the critical delay τ_0 the

model is stable, whereas when the critical delay is exceeded, the model becomes chaotic.

- The fractional orders α_1 and α_2 chosen for modelling the Glucose-Insulin interaction system with fractional order delay have a relevant impact on the value of the critical delay τ_0, as demonstrated in the project. The closer to 1, the smaller the critical delay.
- To conclude, the Chelyshkov Wavelet Method (ChWM) with parameters $k = 1$ and $M = 4$ and applied in a time interval $[0,\ 2]$ to the regulatory model Glucose-Insulin with fractional non-linear systems gives numerical results with high accuracy, indicating that the method can be employed for these cases. The higher the degree of the polynomial used (parameter M) and the higher the value of the parameter k, the higher the accuracy, but the running time increases significantly.

  If the time interval is increased, the numerical solutions become less efficient and the method is not as powerful. It allows a numerically approximate solution to be obtained for non-linear fractional systems when the time intervals are not very large [0, 1], but when the intervals become larger, the graphs begin to have certain inaccuracies, which suggests that we would need to increase k or M.

V. FUTURE SCOPE

Future lines of research that can be carried out as a result of the project are detailed:

1. Study of models relating COVID-19 to diabetes, given that the epidemic has determined that it increases the likelihood and severity of outcomes due to hyperglycaemia, immune system impairment, vascular problems and comorbidities such as hypertension, obesity and cardiovascular disease, which can lead to catastrophic outcomes.
2. Composite, accurate and efficient placement methods based on fractional order Chelyshkov wavelets are proposed.

   These functions make it possible to reduce the solution of problems such as the distributed-order fractional mobile-mobile advection-scattering problem to a system of algebraic equations to compute the unknown function.
3. Design of numerical methods using Fractional Chelyshkov Wavelets that solve the Inverse problem determining {u(x),f(x)} of nonlinear fractional differential equations.

Semi-analytical studies that develop and analyse a comprehensive regulatory framework for the management of blood glucose and insulin in the presence of diabetes mellitus, using fractional operators with the fractional derivative of Atangana–Baleanu in the Caputo sense (fractional derivative ABC) and the Laplace transform method of Adomian decomposition.

Also, development of schemes based on the fractional derivative ABC that describe the dynamics of different diseases such as cancer using fractional Adams-Bashforth-Moulton methods to find numerical and graphical results of the model with a good level of accuracy.

5. Solving fractional partial derivative equations (FPDE), where the fractional derivative in the Caputo sense and also the Riesz fractional derivative are involved, using the Chebyshev Wavelet Method.

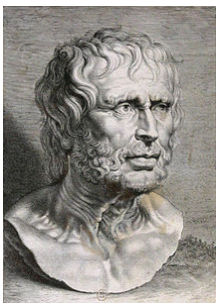
   This method also allows to solve fractional delayed fractional differential equations (SFFDE), among which we can mention the pantograph equation, such as the fractional Volterra integro-differential equations with delay.

6. Study of Legendre's Wavelet method as a numerical solution of fractional order partial differential equations (FPDE), for the resolution of equations such as the pantograph equation.

7. Study of the Wavelet method based on the Hermite Wavelet expansion, which allows the study of the qualitative behaviour of wave breaking or systems of fractionally coupled equations in time and associated with the energy-dependent Schrödinger potential, among others.

8. Study of methods other than the Wavelets method: There are other techniques that allow us to solve fractional order differential equations. These include, for example, the Shehu transform, Runge's method (a system applicable to epidemic systems), the Adomian decomposition method, the variational iteration method, the homotopy perturbation method or the approximation of functions by means of neural networks.

"Jamás se descubriría nada si nos considerásemos satisfechos con las cosas descubiertas."



Lucio Anneo Séneca.

Agradecimientos

En primer lugar, agradecer a mi familia la paciencia y cariño que me han dedicado durante todos estos años de vida académica. En especial, a mi madre, Gloria, por su entrega total; a mi padre, Jaime, por su luz y sacrificio; a mi novia, Patricia, por su cariño y dedicación.

Este proyecto no podría haberse llevado a cabo sin la ayuda de Francisco Javier, para el que no tengo palabras para agradecer el tiempo dedicado a este proyecto, su paciencia y sus enseñanzas acerca del mundo del cálculo diferencial y la investigación sobre la *diabetes mellitus*.

Gracias al ICAI, por haberme dado la oportunidad de desarrollarme tanto académicamente como en valores.

Por último, gracias a todos aquellos que han formado parte de mi vida y me han hecho llegar hasta donde estoy. El camino continúa.

Modelización del Sistema Glucosa–Insulina con Ecuaciones Diferenciales de Orden Fraccionario con Retraso (SFDDE) y Resolución con el Método *Wavelet* de Chelyshkov

Índice

Capítulo 1 1

1. Introducción 1

1.1. Introducción 1
1.2. Motivación 2
1.3. Objetivos 2
1.4. Metodología 3
1.4.1. Plan de Trabajo 4
1.5. Recursos 4
1.6. Estado del Arte 5
1.6.1. Modelo de Diabetes con Ecuaciones Diferenciales con Retraso 5
1.6.2. Modelo DDE de Retardo Único de Drozdov y Khanina 5
1.6.3. Modelo DDE de Dos Retardos de Li, Kuang y Mason 6
1.6.4. Modelo DDE de dos Retardos de Chen y Tsai 7
1.6.5. Modelo DDE para la Retroalimentación Reguladora Sistema Glucosa–Insulina 8
1.6.6. Resolución Numérica de Ecuaciones Diferenciales con Retardo (DDE) 9
1.6.7. Resolución Numérica de EDO y EDP con Métodos Wavelets 9
1.6.8. Métodos Wavelets en la Resolución Numérica de Sistemas SFDDE 11
1.7. Alineación con los Objetivos de Desarrollo Sostenible (ODS) 12

Capítulo 2 15

2. Ecuaciones Diferenciales de Orden Fraccionario 15

2.1. Introducción 15
2.2. Definiciones del Cálculo Fraccionario 15
2.2.1. Definición de Riemann–Liouville 16
2.2.2. Definición de Caputo 16
2.2.3. Definición de Grünwald–Letnikov 17
2.3. Ecuaciones Diferenciales de Orden Fraccionario 18
2.3.1. Definición del Problema de Valor Inicial con Derivadas Fraccionarias 18
2.3.2. Teoremas de Existencia y Unicidad para Problemas de Valor Inicial 19
2.3.3. Transformada de Laplace de la Derivada Fraccionaria 21
2.3.4. FDE Lineales y la Transformada de Laplace 21
2.4. Cálculo Fraccionario Aplicado a Modelos Biológicos 23

2.4.1. Cálculo fraccionario en el Modelo de Latencia Tumoral 23
2.4.2. Cálculo Fraccionario en el Modelo Epidemiológico SIR 24
2.4.3. Cálculo Fraccionario en el Modelo Epidemiológico MSEIR 24

Capítulo 3 27

3. Modelos Fraccionarios de Interacción Glucosa-Insulina 27

3.1. Modelo Fraccionario con Retraso Glucosa–Insulina con Órdenes Incomensurables 27
3.1.5. Descripción del Modelo de Orden Fraccionario 28
3.1.5. Estudio de las Soluciones Positivas del Modelo Fraccionario 29
3.1.5. Puntos de Equilibrio y de Estabilidad de las Soluciones 29
3.1.5. Bifurcación de Hopf 30
3.1.5. Resultados Numéricos. Simulación 32
3.1. Sistema Glucosa–Insulina Fraccionario con Retraso y Células β Sanas ...79
3.1.5. Descripción del Modelo de Orden Fraccionario 79
3.1.5. Análisis de Estabilidad y Análisis de Bifurcación 81
3.2.1. Resultados Numéricos 83
3.2. Modelo con Retardo Glucosa–Insulina con la Función de las Células β ..84
3.2.2. Descripción del Modelo No Lineal 84
3.2.3. Análisis de Estabilidad y Análisis de Bifurcación 86
3.2.3. Resultados Numéricos 86

Capítulo 4 89

4. Método Wavelet de Chelyshkov SEDR Fraccionarias 89

4.1. Introducción 89
4.2. Preliminares sobre el Cálculo Fraccionario 89
4.3. Wavelets de Chelyshkov 90
4.3.1. Polinomios de Chelyshkov 90
4.3.2. Funciones Wavelets de Chelyshkov 92
4.3.3. Análisis de Convergencia 105
4.4. Matrices Operativas y de Transformación 106
4.4.1. Matriz Operacional Integral Fraccionaria $P^{(\alpha)}$ Riemann–Liouville de Orden α ..106
4.4.2. Matriz Operacional $\mathcal{D}(\tau)$ con Retraso Proporcional de $\Psi(x)$ $(k=0)$ 129
4.4.3. Matriz Operacional Producto $\tilde{C}$ de $\Psi(x)$ 130
4.5. Método Wavelet de Chelyshkov para Ecuaciones Diferenciales con Retraso Fraccionarias 132
4.5.1. Ecuaciones Diferenciales con Retraso Fraccionarias (FDDE) 132
4.5.2. Problemas (FDDE) 135
4.5.3. Sistemas de Ecuaciones Diferenciales con Retraso Fraccionarias (SFDDE) 156
4.5.4. Problemas (SFDDE) 183
4.6. Método Numérico Adams–Bashforth–Moulton Predictor-Corrector (FDDE) 198
4.6.1. Método Adams–Bashforth–Moulton para Ecuaciones FDDE 198
4.6.2. Problemas 201
4.6.3. Método Adams–Bashforth–Moulton para Sistemas FDDE (SFDDE) 235
4.6.4. Problemas 236

Capítulo 5 245

5. Resultados en los Modelo Fraccionarios de Interacción Glucosa-Insulina 245

5.1. Introducción 245
5.2. Resultados Numéricos en SFDDE 245
5.2.1. Problemas 245

Capítulo 6 287

6. Conclusión y Líneas Futuras de Investigación 287

6.1. Conclusiones 287
6.2. Líneas Futuras de Investigación 287

Bibliografía 295

Referencias Bibliográficas 295
Referencias Bibliográficas (Conclusiones) 297

Lista de Acrónimos 299

Índice de Figuras

Figura 1.1. Representación de una onda *Wavelet* en Matlab [CORT07]. 2
Figura 1.2. Cronograma orientativo del TFM. 4
Figura 1.3. Concentración de insulina en el plasma en $\mu U/ml$. 6
Figura 1.4. Perfiles del modelo DDE con dos retardos de Li, Kuang y Mason con distintos parámetros. 7
Figura 1.5. Esquema de interacción entre la glucosa, la insulina y las células β. 8
Figura 1.6 Salud y Bienestar. 12
Figura 1.7 Industria, Innovación e Infraestructura. 13
Figura 1.8 Ciudades y Comunidades Sostenibles. 13

Figura 3.1. Evolución temporal de $G(t) \equiv y_1(x)$ y de $I(t) \equiv y_2(x)$, y diagrama de fases $G(t) - I(t)$ empleando los parámetros *Set 1* y $\tau = 400 < \tau_0 = 607.92$. 36
Figura 3.2. Evolución temporal de $G(t) \equiv y_1(x)$ y de $I(t) \equiv y_2(x)$, y diagrama de fases $G(t) - I(t)$ empleando los parámetros *Set 1* y $\tau = 700 > \tau_0$. 40
Figura 3.3. Evolución temporal de $G(t) \equiv y_1(x)$ y de $I(t) \equiv y_2(x)$, y diagrama de fases $G(t) - I(t)$ empleando los parámetros *Set 2* y $\tau = 1000 < \tau_0 = 1365.6$. 55
Figura 3.4. Gráficas de la evolución temporal de $G(t)$ y de $I(t)$, y diagrama de fase $G(t) - I(t)$ con respecto a $G(t)$ empleando los parámetros *Set 2* y

$\tau = 1600 > \tau_0 = 1365.6$.
.....60
Figura 3.5. Evolución temporal de $G(t) \equiv y_1(x)$ y de $I(t) \equiv y_2(x)$, y diagrama de fases $G(t) - I(t)$ empleando los parámetros *Set 3* y $\tau = 900 < \tau_0 = 1285.91$. ….64
Figura 3.6. Evolución temporal de $G(t) \equiv y_1(x)$ y de $I(t) \equiv y_2(x)$, y diagrama de fases $G(t) - I(t)$ empleando los parámetros *Set 3* y $\tau = 1500 > \tau_0 = 1285.91$. . .68
Figura 3.7. Evolución temporal de $G(t) \equiv y_1(x)$ y de $I(t) \equiv y_2(x)$, y diagrama de fases $G(t) - I(t)$ empleando los parámetros *Set 4* y $\tau = 1400 < \tau_0 = 2089$. 73
Figura 3.8. Evolución temporal de $G(t) \equiv y_1(x)$ y de $I(t) \equiv y_2(x)$, y diagrama de fases $G(t) - I(t)$ empleando los parámetros *Set 4* y $\tau = 2400 > \tau_0 = 2089$. 78
Figura 3.9. Valores de retardo crítico τ_0 y q_2 cuando se mantiene $q_1 = 0.92$ constante. 78
.....78
Figura 3.11. Valores de retardo crítico τ_0 y q_1 cuando se mantiene $q_2 = 0.95$ constante. 79
.....79
Figura 3.13. Evolución en el tiempo de las variables $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ con respecto a t. 81
Figura 3.14. Evolución temporal y espacio fásico del sistema con un orden fraccionario de $q = 0.95$. 82
Figura 3.15. Bifurcación para distintos valores de q, manteniendo $\tau_g = 0.56$ y $\tau_i = 2.55$. 83
Figura 3.16. Diagramas de bifurcación para distintos valores de τ_g y τ_i con $q = 0.95$. 84
Figura 3.17. Representación esquemática de la interacción de los parámetros y los eventos que tienen lugar en el sistema regulatorio de la glucosa-insulina. 85
Figura 3.18. Diagramas de bifurcación para distintos valores de τ_g y τ_i. 86
Figura 3.19. Solución oscilatoria estable del sistema planteado en la ecuación (3.3.1) con retardos $\tau_i = 0.05$ y $\tau_g = 0.46$. 87
Figura 3.20. Solución inestable del sistema planteado en la ecuación (3.3.1) con retardos $\tau_i = 3.5$ y $\tau_g = 3.5$. 87
Figura 3.21. Espacio fásico de la solución al sistema planteado en la ecuación (3.3.1) con retardos $\tau_i = 3.5$ y $\tau_g = 3.5$. 88

Índice de Tablas

Tabla 3.1. Valores de distintos parámetros de la simulación numérica. 32
Tabla 3.2. Parámetros del sistema metabólico glucosa – insulina de orden fraccionario. 80
Tabla 3.3. Valores de los parámetros del modelo propuesto. 86

Tabla 4.1. Parámetros físicos del modelo. 236
Tabla 4.2. Valores de b_1, b_2, G^*, I^*, ω_0, τ_0 236

Capítulo 1

1. Introducción

1.1. Introducción

Las ecuaciones diferenciales son ecuaciones matemáticas que permiten vincular una función con sus derivadas. Su aparición supuso un gran avance para numerosas disciplinas, como la Física, la Biología o la Ingeniería, entre otras.

Respecto a esta última, las ecuaciones diferenciales resultan de gran interés, especialmente porque permiten realizar modelos matemáticos de sistemas físicos que varían con el tiempo, con el objetivo de ser capaces de avanzar el comportamiento futuro de los sistemas físicos, en función de unos parámetros y con un grado de exactitud determinado.

El origen de las ecuaciones diferenciales se remonta a 1675, cuando Isaac Newton y Gottfried Wilhelm Leibniz comenzaron el estudio de la ecuaciones que relacionan a las funciones con sus derivadas. Desde los inicios de esta herramienta matemática hasta nuestros días, han tenido lugar avances que han permitido optimizar la manera de obtener las soluciones numéricas en términos de precisión y eficiencia de recursos.

Uno de estos avances fueron los sistemas de ecuaciones diferenciales con retraso de orden fraccionario (*System of Fractional Delay Differential Equations*–SFDDE) introducidas por Oldham y Spanier en la década de 1970, y empleadas para describir el comportamiento de materiales viscoelásticos. Desde entonces, las ecuaciones diferenciales de orden fraccionario se han aplicado a una amplia gama de sistemas y procesos físicos, y se han convertido en un activo campo de investigación en matemáticas y ciencias aplicadas debido a que resultan más adecuadas para modelar sistemas complejos que las ecuaciones diferenciales de orden entero debido a las ventajas que ofrece con respecto a estas últimas.

Durante este proyecto hará uso de las Ecuaciones Diferenciales de Orden Fraccionario para modelizar el sistema físico de la Glucosa–Insulina y se resolverá empleando el Método *Wavelet* de Chelyshkov, originado durante los años 1980 y 1990. Este método permite analizar señales o imágenes descomponiéndolas en una serie de *Wavelets*, que son funciones oscilatorias cortas que pueden desplazarse y escalarse para ajustarse a distintas características de la señal o imagen. Los métodos *Wavelet* presentan ventajas con respecto a la Transformada de Fourier, motivo por el cual se emplean ondas *Wavelet* para la resolución numérica del modelo del proyecto presente.

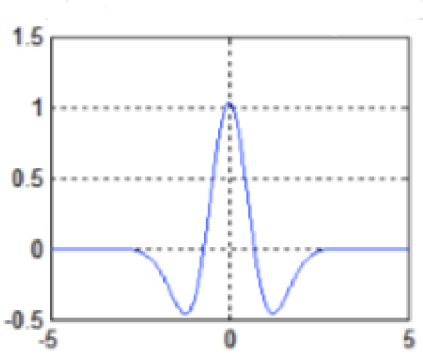


Figura 1.1. Representación de una onda *Wavelet* en Matlab [CORT07].

1.2. Motivación

El cuerpo humano necesita mantener unos niveles de concentración de glucosa en sangre determinados para el correcto funcionamiento del organismo. Para que las células utilicen la glucosa en sangre y se regule su concentración, el cuerpo produce insulina. Si no se produce la insulina correcta, el nivel de glucosa no será el adecuado, dando lugar a la enfermedad conocida como *diabetes mellitus*.

Durante los últimos años, se han propuesto numerosos modelos que representan con mayor o menor exactitud el sistema Glucosa–Insulina, siendo el modelo basado en SFDDE uno de los modelos que alcanza una mayor precisión.

La investigación y desarrollo de métodos efectivos para resolver SFDDE del sistema regulador Glucosa–Insulina ha ganado un interés significativo en los últimos años. A medida que se avanza hacia una comprensión más profunda de los mecanismos subyacentes que gobiernan la diabetes y se busca mejorar los enfoques de tratamiento, surge la necesidad de desarrollar herramientas matemáticas más sofisticadas que permitan modelar, analizar y resolver la dinámica compleja del sistema Glucosa–Insulina de una forma más precisa.

En este contexto, los Métodos *Wavelet* han demostrado ser una herramienta prometedora en la resolución de ecuaciones diferenciales fraccionarias, ya que pueden capturar características esenciales de los sistemas no lineales y no locales, como el sistema regulador Glucosa–Insulina.

Investigar el potencial de las ondas *Wavelet* como método para resolver SFDDE del sistema Glucosa–Insulina podría llevar a un mejor entendimiento y representación de la dinámica del sistema, lo que a su vez podría tener implicaciones significativas en el desarrollo de estrategias de tratamiento más efectivas y personalizadas para la diabetes.

1.3. Objetivos

El objetivo del proyecto presente consiste en la elaboración de un modelo que regule la dinámica del sistema Glucosa–Insulina de pacientes diabéticos. Para ello, se hará uso de un SFDDE en el sentido de la derivada fraccionaria de Caputo con órdenes inconmensurables o la derivada de Grünwald-Letnikov.

Para alcanzar el objetivo marcado, durante el proyecto se realizará:

1. Derivación de un sistema de ecuaciones diferenciales de orden fraccionario (SFDDE) inconmensurable para la interacción del sistema regulador Glucosa–Insulina. Estudio de la no negatividad y delimitación de las soluciones, así como el análisis de estabilidad de un punto de equilibrio positivo del modelo resultante. Estudio de la existencia de una bifurcación de Hopf para el modelo diseñado.
2. Creación de un novedoso método numérico *Wavelet* de Chelyshkov basado en la base de los polinomios y *Wavelets* de Chelyshkov, con la construcción de la matrices operacionales de integración fraccionaria y de retardo que con el enfoque de Galerkin resuelva el SFDDE reduciendo dicho sistema de orden fraccionario a un sistema de ecuaciones algebraicas.
3. Se diseñará una aplicación práctica en el lenguaje Mathematica/MATLAB que implemente los algoritmos numéricos diseñados con la base *Wavelet* de Chelyshkov.
4. Resolución del modelo regulador Glucosa–Insulina propuesto mediante la presentación de diferentes casos (valores de glucosa e insulina, y retraso en el efecto de las inyecciones de insulina) que permita verificar y confirmar el análisis teórico.
5. Como último paso, se realizará un análisis de las líneas de desarrollo futuras y se estudiarán cuáles son los posibles siguientes avances que se pueden producir en este tipo de proyectos.

1.4. Metodología

En el desarrollo del Proyecto se procederá de la siguiente manera:

- **1**) A modo de introducción se describirán los métodos actuales de resolución de ecuaciones diferenciales de orden fraccionario.
- **2**) Se describirán en primer lugar las ecuaciones diferenciales de orden fraccionario en el Capítulo 2. Se enunciarán los conceptos y definiciones preliminares como las derivadas y las integrales fraccionarias de Riemann–Liouville, Caputo o Grünwald–Letnikov. Se presentarán varios modelos de sistemas fraccionarios, así como algunos métodos de solución numérica [MART13].
- **3**) Otro capítulo, Capítulo 3, se dedicará exclusivamente al estudio de varios modelos fraccionarios que implementan la dinámica o interacción Glucosa–Insulina: [LEKD19], [FERN22], [ALHU20].
- **4** ***a***) El diseño y desarrollo del método numérico *Wavelet* de Chelyshkov que permita resolver sistemas de ecuaciones diferenciales de orden fraccionario con retraso (SFDDE) se llevará a cabo en el Capítulo 4. [MOHA18], [MORA19], [RAHI17].
- **4** ***b***) Se implementarán los métodos numéricos basados en la base *Wavelet* de Chelyshkov que resuelvan los sistemas SFDDE de la dinámica Glucosa–Insulina en el lenguaje técnico–científico *Mathematica*, programa matemático muy utilizado en sectores científicos con amplias funciones para el desarrollo simbólico, numérico y gráfico.
- **5**) En el Capítulo 5 se resolverán diferentes modelos fraccionarios del sistema que regula la dinámica Glucosa–Insulina con diferentes parámetros mediante el método numérico *Wavelet* de Chelyshkov que permita verificar la precisión y la convergencia de las aproximaciones calculadas.
- **6**) Finalmente, se establecerán las conclusiones y las futuras líneas de investigación.

1.4.1. Plan de Trabajo

Las tareas del proyecto presente se ajustarán al cronograma que se presenta a continuación, en la Figura 1.2. En él se muestran los tiempos estimados por cada una de las tareas a realizar.

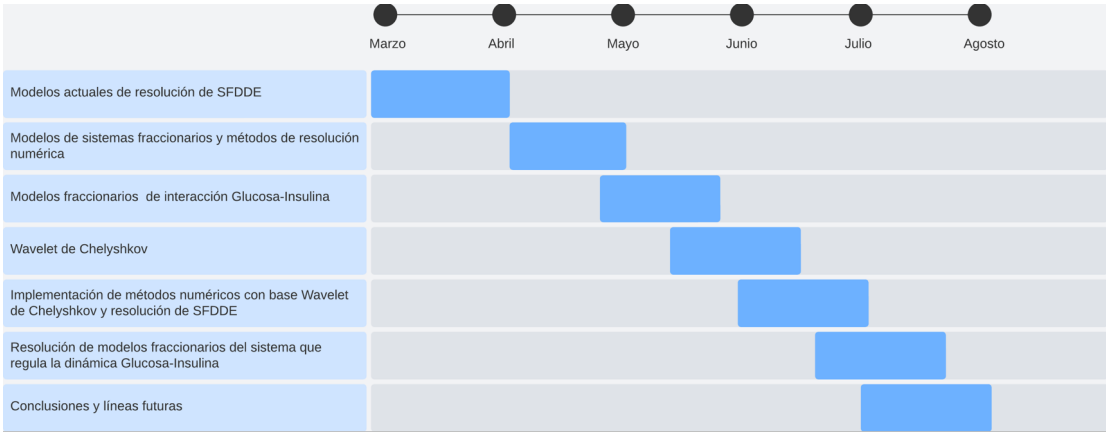


Figura 1.2. Cronograma orientativo del TFM.

1.5. Recursos

Los recursos que se emplearán durante la realización del presente proyecto son los siguientes:

- Procesador de textos Microsoft Office 2023®.
- Procesador científico del software *Mathematica* 13.0®.
- Software simbólico y numérico:
  Mathematica 13.0® y MATLAB 2023®.
- Software para la creación de gráficos, esquemas, organigramas, diseño de circuitos:
  PowerPoint 2023®.

1.6. Estado del Arte

1.6.1. Modelo de Diabetes con Ecuaciones Diferenciales con Retraso

El Sistema Glucosa-Insulina cuenta con distintos mecanismos en los que se debe tener en cuenta el retraso temporal, como por ejemplo, la relación entre la insulina producida por el páncreas y el nivel de concentración de glucosa en sangre, o bien, la producción hepática de glucosa en relación a la insulina en sangre.

Para realizar modelos acerca del Sistema Glucosa-Insulina se emplean comúnmente Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (mediante el uso de variables auxiliares) o Ecuaciones Diferenciales con Retraso (mediante el empleo de retrasos temporales explícitos de forma discreta o distribuida). El empleo de las Ecuaciones Diferenciales con Retraso permite alcanzar una precisión mayor y reducir el número de ecuaciones en los modelos [MAKR09], por lo que son las herramientas más utilizadas en este campo.

En las siguientes secciones de este capítulo se presentará el modelo DDE de Retardo Único de Drozdov y Khanina (1995), el Modelo DDE de Dos Retardos de Li, Kuang y Mason (2006), el Modelo DDE de dos Retardos de Chen y Tsai (2009) y el Modelo DDE para la Retroalimentación Reguladora Sistema Glucosa–Insulina de Al-Hussein et al. (2020) [CHAL16].

1.6.2. Modelo DDE de Retardo Único de Drozdov y Khanina

Drozdov y Khanina [MAKR09] propusieron en 1995 unas DDE de retardo único para su modelo, en el que describen las oscilaciones ultradianas en la secreción de insulina por parte del organismo. Las ecuaciones del modelo son:

$$\begin{aligned}
\frac{dx(t)}{dt} &= f_1\left(\frac{0.1\,z(t)}{V_3}\right) - \left(\frac{E}{V_1} + \frac{1}{T_1}\right)x(t) + \frac{E}{V_2}\,y(t) \\
\frac{dy(t)}{dt} &= \frac{E}{V_1}\,x(t) - \left(\frac{E}{V_2} + \frac{1}{T_2}\right)y(t) \\
\frac{dz(t)}{dt} &= f_3\left(\frac{x(t-T)}{V_1}\right) - \frac{0.1\,z(t)}{V_3}\,f_2\left(\frac{y(t)}{V_2}\right) + (L - p_0)
\end{aligned} \tag{1.6.1}$$

donde $x(t)$ [mU] es la cantidad de insulina en el plasma, $y(t)$ [mU] es la cantidad de insulina en el fluido intersticial y $z(t)$[mg] es la cantidad de glucosa suponiendo que ocupa un compartimento; V_1 [l], V_2 [l], V_3 [l] son los volúmenes del plasma, líquido intersticial y el compartimento de la glucosa respectivamente; $T_1 = 3$ minutos y $T_2 = 100$ minutos son parámetros dados, L [mg / min] $= 100$, se corresponde con la tasa de de glucosa recibida durante el día (150 g / día), $p_0 = 72$ es una constante, $E = 0.2$ / min, mientras que T se corresponde con el retraso en la producción de glucosa.

Se obtuvieron resultados numéricos para distintos valores de L y T y se realizó un análisis de estabilidad para un sistema de DDEs, en el que como conclusión se obtuvo que para valores muy pequeños y muy grandes de L, la solución del estado estacionario es estable y las oscilaciones ultradianas no aparecen, mientras que para valores moderados de L, las soluciones para el estado estacionario son inestables y se producen oscilaciones ultradianas periódicas de insulina y glucosa.

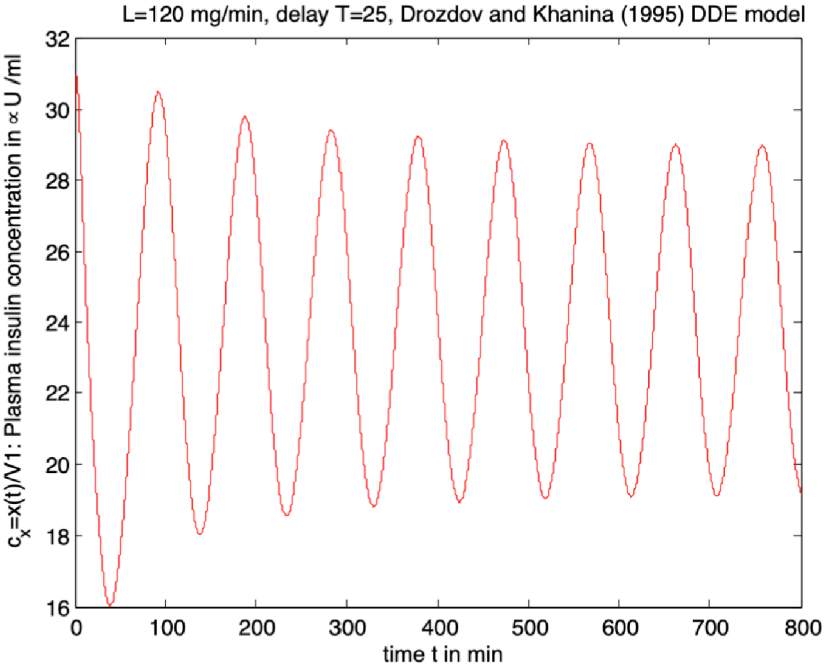


Figura 1.3. Concentración de insulina en el plasma en $\mu U/ml$.

1.6.3. Modelo DDE de Dos Retardos de Li, Kuang y Mason

Publicado en el año 2006, los autores de este modelo [LI06], [MAKR09], aplicaron la ley de conservación de la materia e introdujeron dos retardos de tiempo en su modelo: (τ_1) para indicar el tiempo total de retardo desde que la concentración de glucosa se eleva hasta el momento en el que la insulina ha sido transportada a los espacios que rodean las células (intersticio) y (τ_2) para indicar el retardo del efecto de la producción de la glucosa hepática medida desde el momento en el que la insulina llega a los instersticios celulares hasta que se produce un cambio significante en la producción de glucosa hepática.

De acuerdo a los autores, este modelo es más robusto que otros modelos de la época y ofrece una mejor comprensión del sistema regulador de la Glucosa-Insulina y las oscilaciones ultradianas de la secreción de insulina. Una de las conclusiones de esta investigación fue que las oscilaciones ultradianas de insulina pueden estar causadas por el retardo en el tiempo de la secreción de insulina, provocadas por el incremento de glucosa en sangre.

El modelo DDE de dos retardos está descrito por la siguientes expresiones:

$$
\begin{cases}
\dfrac{dG(t)}{dt} = G_{\text{in}} - f_2(G(t)) - f_3(G(t))\, f_4(I(t)) + f_5(I(t-\tau_2)) \\
\dfrac{dI(t)}{dt} = f_1(G(t-\tau_1)) - d_i\, I(t) \\
\begin{cases} I(0) = I_0 > 0 \\ G(0) = G_0 > 0 \end{cases} \\
\begin{cases} G(t) = G_0 & t \in [-\tau_1,\ 0] \\ I(t) = I_0 & t \in [-\tau_2,\ 0] \end{cases} \qquad \tau_1,\ \tau_2 > 0
\end{cases}
\tag{1.6.2}
$$

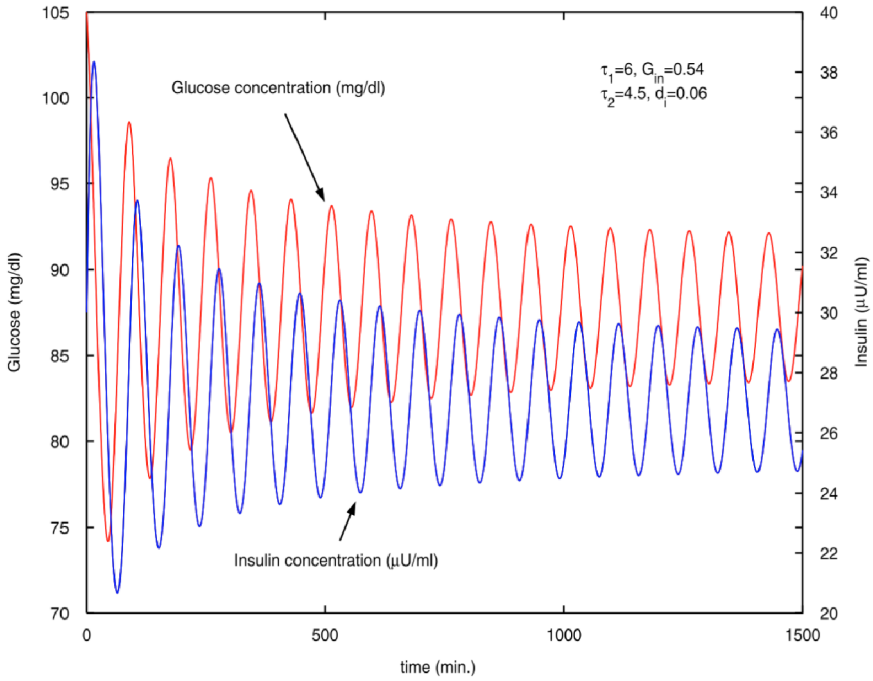


Figura 1.4. Perfiles del modelo DDE con dos retardos de Li, Kuang y Mason con distintos parámetros.

1.6.4. Modelo DDE de dos Retardos de Chen y Tsai

Siguiendo con la corriente de los modelos de dos retardos, Chen y Tsai [MAKR09], [CHEN10] propusieron en 2009 una serie de modificaciones al modelo propuesto por Li, Kuang y Mason:

- Con el objetivo de simular variables de entradas externas, como por ejemplo la ingesta de alimentos, se sustituyó la constante G_{in} empleada en el modelo anterior por la función de infusión de glucosa variable $G_{\text{in}}(t)$.
- Se introdujeron dos funciones adicionales f_6 y f_7 para simular los efectos de la hiperglucemia.
- Se introdujeron dos parámetros adicionales α y β. Mientras que el primero tiene como objetivo simular la secreción de insulina del páncreas, el segundo parámetro tiene como propósito simular la capacidad de utilización de la glucosa dependiente de la insulina. Un valor de β bajo supone una alta resistencia a la insulina.
- Se introduce un término para describir la tasa de excreción de la glucosa por parte del riñón por encima del umbral de la orina.

El modelo que resulta queda descrito por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \frac{dG(t)}{dt} &= [G_{\text{in}}(t) + f_5(I(t-\theta_2))\, f_6(G(t))] \\ &\quad -[f_2(G(t)) + f_7(G(t)-330) + \beta \mathrm{f}_3(G(t))\, f_4(I(t))] \\ \frac{dI(t)}{dt} &= \alpha\, f_1(G(t-\theta_1)) - d_i\, I(t). \end{aligned} \tag{1.6.3}$$

1.6.5. Modelo DDE para la Retroalimentación Reguladora Sistema Glucosa–Insulina

En 2020, Al-Hussein et al. [ALHU20] propusieron un nuevo modelo matemático con retardo temporal para estudiar la interacción entre la glucosa y la insulina en el cuerpo. El modelo se centra en el sistema de retroalimentación reguladora del Sistema Glucosa–Insulina que involucra los aspectos dinámicos y funcionales de las células β, que desempeñan un papel en el mantenimiento de los niveles de insulina en el torrente sanguíneo.

Su propuesta consiste en un modelo matemático no lineal del sistema regulador de la Glucosa–Insulina que introduce como novedad una tasa de degradación de la insulina variable, en lugar de introducir una tasa de degradación constante como se venía empleando en otros modelos matemáticos, como el de Chuedoung et al. en 2009. Esta tasa de degradación variable depende de numerosos factores, como por ejemplo el estado de estrés y excitación de la persona, o la variabilidad genética de la misma.

Los investigadores analizaron el comportamiento dinámico del modelo y generaron diagramas de bifurcación basados en dos parámetros importantes del modelo: el tiempo de respuesta de la glucosa (τ_i) y el tiempo de secreción de la insulina (τ_g). Los resultados demuestran que el retardo en la secreción de insulina en respuesta a los niveles de glucosa en sangre y el retardo en la disminución de la glucosa debido al aumento de la concentración de insulina pueden dar lugar a una dinámica compleja, incluyendo oscilaciones periódicas.

Estos hallazgos concuerdan con las observaciones biológicas y representan estados de cascada de duplicación de periodo y estados caóticos que pueden provocar trastornos metabólicos que podrían conducir a la *diabetes mellitus*.

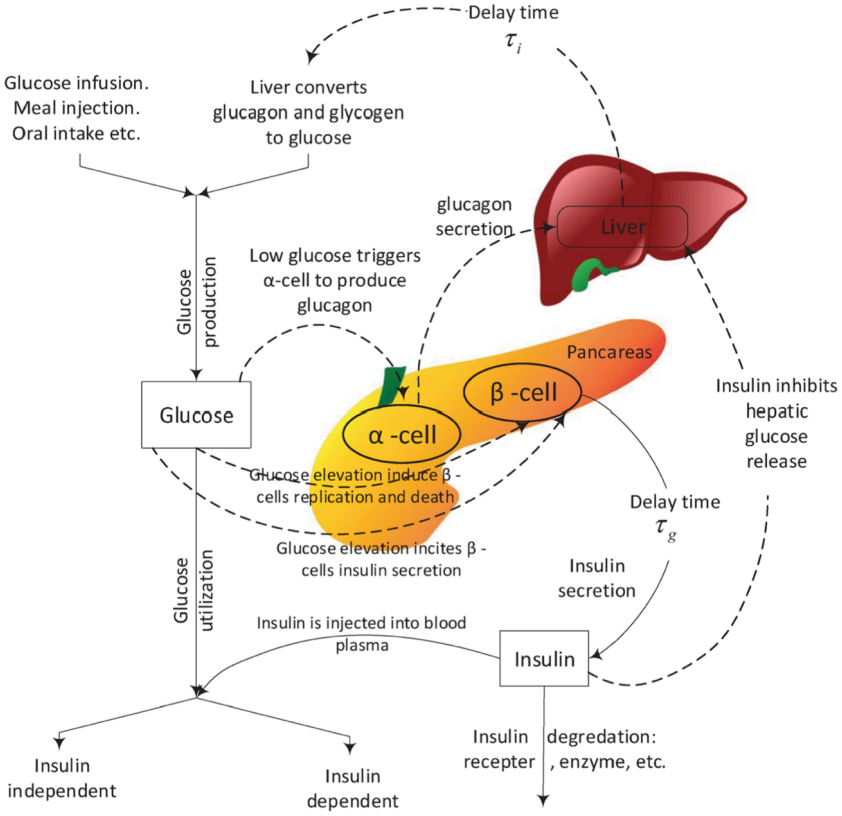


Figura 1.5. Esquema de interacción entre la glucosa, la insulina y las células β.

1.6.6. Resolución Numérica de Ecuaciones Diferenciales con Retardo (DDE)

Las ecuaciones diferenciales con retardo (DDE) se han empleado para elaborar análisis y predicciones en distintas disciplinas de conocimiento, como por ejemplo la medicina, la química, la biología, la ingeniería o la economía, entre otras. Esto se debe a que permiten introducir dentro del modelo matemático el estado del sistema en un tiempo pasado, aspecto que no se puede introducir en las ecuaciones diferenciales ordinarias.

De este modo, los resultados obtenidos con los modelos matemáticos que emplean DDE se ajustan más a la realidad, ofreciendo unas resoluciones más precisas. Debido a ello, numerosos estudios se han centrado en las DDE y sus soluciones numéricas, empleando comúnmente para alcanzar dichas soluciones los siguientes métodos: el Método de Adams-Bashforth-Moulton (Wang 2013), el Método de descomposición de Adomian (Evans y Raslan 2005), el Método de Iteración Variacional (Yu 2008), los Polinomios Espectrales (Hwang and Chen 1986; Ali et al. 2009; Sedaghat et al. 2012; Yang and Huang 2013; Khader and Hendy 2012; Tohidi et al. 2012; Davaeifar and Rashidinia 2017), la Transformada de Laplace (Widatalla et al. 2012), el Método de Perturbación (Bildik and Deniz 2017), o los Métodos *Wavelets* (Ghasemi and Tavassoli 2011; Sedighi Hafshejani et al. 2011; Saeed and Rehman 2014;Rahimkhani et al. 2017) [MOHA18].

1.6.7. Resolución Numérica de EDO y EDP con Métodos Wavelets

Existen distintos Métodos *Wavelets* para la resolución numérica de las ecuaciones diferenciales ordinarias y las ecuaciones en derivadas parciales, cada uno de ellos con sus particularidades. En este proyecto, se va a centrar el foco en tres tipos: *Wavelets* de Haar, de Chebyshev y de Legendre.

1.6.7.1 Wavelets de Haar

Las *Wavelets* de Haar fueron introducidas por el matemático húngaro Alfred Haar en 1910. Consisten en funciones constantes, definidas por intervalos, que sólo pueden tomar tres valores: 0, 1, ó -1, por lo que se tratan de las *Wavelets* ortonormales con soporte compacto más sencillas. Las ventajas que tienen este tipo de *Wavelets* son claras, puesto que requieren de menores tiempos de computación, son flexibles y son relativamente simples, si son comparadas con el resto de *Wavelets*. La familia de *Wavelets* de tipo Haar para $x \in [0, 1)$ quedan definidas por la siguiente expresión:

$$h_i(x) = \begin{cases} 1 & x \in [\xi_1,\ \xi_2) \\ -1 & x \in [\xi_2,\ \xi_3) \\ 0 & \text{resto de casos} \end{cases} \qquad (1.6.4)$$

$$\xi_1 = \frac{k}{m} \quad \xi_2 = \frac{k+0.5}{m} \quad \xi_3 = \frac{k+1}{m}.$$

En las fórmulas descritas, los parámetros *i, m* y *k* quedan definidos por las siguientes expresiones:

$$\begin{cases} m = 2^j & j = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots, \\ & k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ m-1 \\ i = m + k + 1 \end{cases} \qquad (1.6.5)$$

El índice j determina el nivel de la *Wavelet* de Haar y marca el nivel máximo de resolución, mientras que k es el parámetro de traslación. El valor máximo del índice i es $2\,m$, que resulta lo mismo que 2^{j+1}, mientras que el valor mínimo $i = 2$ se alcanza para $m = 1,\ k = 0$.

En [RAY18], Santanu Saha Ray y Arun Kumar Gupta explican como cualquier función $y(t) \in L^2([0, 1))$ se puede expandir en *Wavelets* de Haar del siguiente modo:

$$\begin{aligned} y(t) &= c_o\, h_o(t) + c_1\, h_1(t) + c_2\, h_2(t) + \cdots + c_j\, h_j(t) \\ c_j &= \int_0^1 y(t)\, h_j(t)\, dt \end{aligned} \tag{1.6.6}$$

Si la anterior expresión se aproxima como una constante por partes en cada subintervalo, la suma de la expresión (1.6.6) puede ser calculada después de m términos, posibilitando la definición de la expresión anterior en forma de matriz y de manera discreta:

$$\begin{aligned} Y &\approx \sum_{i=0}^{m-1} c_i\, h_i(t_l) = {C_m}^T H_m \\ H &= \begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \\ \vdots \\ h_{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{0,0} & h_{0,1} & \cdots & h_{0,m-1} \\ h_{1,0} & h_{1,1} & \cdots & h_{1,m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{m-1,0} & h_{m-1,1} & \cdots & h_{m-1,m-1} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{1.6.7}$$

Donde Y y ${C_m}^T$ son vectores fila de m dimensiones, mientras que H es la matriz de *Wavelets* de Haar de orden m, definidas por $H = [h_0, h_1, \ldots, h_{m-1}]^T$, que son las formas discretas de las bases de las *Wavelets* de Haar.

1.6.7.2 Wavelets de Chebyshev

Las *Wavelets* de Chebyshev han incrementado su popularidad como herramienta para evaluar numéricamente algunas ecuaciones fraccionarias e integrales. Algunas de las ventajas que ofrecen este tipo de *Wavelets*: al contrario que sucede con otros métodos numéricos, en la actualidad están caracterizadas por el uso de errores exponencialmente decrecientes. En segundo lugar, es frecuente que los métodos numéricos no funcionen bien cuando se quieren emplear cerca de singularidades; las *Wavelets* de Chebyshev permiten manejar las singularidades de forma efectiva y debido a su convergencia rápida, este tipo de *Wavelets* no sufre los mismos problemas que en efecto sufren otro tipo de métodos numéricos.

De igual forma que sucedía con las *Wavelets* de Haar, los autores Santanu Saha Ray y Arun Kumar Gupta definen en [RAY18] las *Wavelets* de Chebyshev, que constan de cuatro argumentos:

$$\psi_{n,m}(t) = \begin{cases} 2^{k/2}\, \overline{U}_m\left(2^k\, t - 2\, n + 1\right) & \frac{n-1}{2^k - 1} \le t < \frac{n}{2^{k-1}} \\ 0 & \text{resto casos} \end{cases} \tag{1.6.8}$$

donde $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 2^{k-1}$; k es cualquier entero positivo, m es el grado de segundo tipo de polinomios de Chebyshev y t es el tiempo normalizado.

1.6.7.3 Wavelets de Legendre

Tal y como se explica en [RAY18], numerosos investigadores emplean las *Wavelets* de Legendre para resolver ecuaciones diferenciales debido a la posibilidades que ofrece este método para resolver de forma efectiva los problemas de valores iniciales y de valores

límites. Este método permite reducir los problemas de valores iniciales fraccionales o de valores fraccionales límite a un sistema de ecuaciones algebraicas de una complejidas computacional más sencilla.

Las *Wavelets* de Legendre quedan definidas por la siguiente expresión:

$$\psi_{a,\,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}}\,\psi\!\left(\frac{t-b}{a}\right), \qquad a,\, b \in \mathbb{R} \tag{1.6.9}$$

donde a es el parámetro de dilatación y b es el parámetro de traslación de la *Wavelet*.

1.6.8. Métodos Wavelets en la Resolución Numérica de Sistemas SFDDE

Las ecuaciones de Abel son un tipo de ecuaciones integrales singulares que se pueden extraer de forma directa de fenómenos que se dan en los campos de la Física o la Ingeniería. Es por ello que gran cantidad de investigadores tratan de encontrar métodos para la resolución de este tipo de ecuaciones, como por ejemplo Liu et al. en 2007 con el método de cuadratura mecánica o el método de Perturbación Homotópica empleado por Kumar et al. en 2011.

En el estudio realizado por Razaghzadeh et al. [MOHS20], se introduce un método matricial que emplea la *Wavelet* ortogonal de Chelyshkov introducida en 2006 por el matemático Vladimir S. Chelyshkov para la resolución de ecuaciones de Abel integrales lineales y no lineales de las formas:

$$\begin{aligned}
&(1)\quad f(t) = \int_0^t \frac{f^a(x)}{(t-x)^v}\,dx \qquad \begin{cases} 0 < v < 1 \\ s \geq 1 \end{cases} \quad s \in \mathbb{N} \\
&(2)\quad f(t) = g(t) + \int_0^t \frac{f^a(x)}{(t-x)^v}\,dx \qquad \begin{cases} 0 < v < 1 \\ s \geq 1 \end{cases} \quad s \in \mathbb{N} \\
&(3) \\
&\begin{cases} f_1(t) = g_1(t) + \int_0^t \left(\frac{a\,(x)}{(t-x)^{v_1}}\, {f_1}^{s_1}(x) + \frac{b\,(x)}{(t-x)^{v_2}}\, {f_2}^{s_2}(x) \right) dx & \begin{cases} 0 < v_k < 1 \\ s_k \geq 1,\ s_k \in \mathbb{N} \end{cases} \\ f_2\,(t) = g_2\,(t) + \int_0^t \left(\frac{d\,(x)}{(t-x)^{v_3}}\, {f_1}^{s_3}(x) + \frac{e\,(x)}{(t-x)^{v_4}}\, {f_2}^{s_4}(x) \right) dx & \begin{cases} 0 < v_k < 1 \\ s_k \geq 1,\ s_k \in \mathbb{N} \end{cases} \end{cases}
\end{aligned} \tag{1.6.10}$$

La primera expresión se conoce como la ecuación integral de Abel de primer tipo, la segunda expresión es la ecuación integral de Abel de segundo tipo, mientras que la última expresión se conoce como el sistema de ecuaciones integrales de Abel.

El Método *Wavelet* de Chelyshkov empleado en el estudio de Razaghzadeh difiere de los Métodos *Wavelets* mencionados en anteriores secciones del presente capítulo (Haar, Chebyshev, etc.). En la investigación realizada por Moradi et al. en 2019, se define la *Wavelet* de Chelyshkov mediante la siguiente expresión:

$$\psi_{n,\,m}(x) = \begin{cases} \sqrt{2^p\,(2\,m+1)}\; p_m\,(2^p\,x - n) & \frac{n}{2^p} \leq x < \frac{n+1}{2^p} \\ 0 & \text{Resto} \end{cases} \tag{1.6.11}$$

donde $n = 0,\ 1,\ \cdots,\ 2^{p-1} - 1$, y $m = 0,\ 1,\ \cdots,\ N$. Las *Wavelets* de Chelyshkov forman un sistema ortonormal de funciones en el intervalo $[0,\ 1]$ con respecto a la función $w(x) = 1$ como se muestra en la siguiente expresión:

$$\int_0^1 \psi_{n,m_1}(x)\,\psi_{n,m_2}(x)\,dx = \delta_{m_1 m_2}. \tag{1.6.12}$$

El estudio de Razaghzadeh et al. aplica un método numérico basado en las *Wavelets* de Chelyshkov para solucionar de forma satisfactoria un sistema integral generalizado de ecuaciones de Abel lineales y no lineales, sustentado con ejemplos numéricos que muestran la aplicabilidad de este tipo de método y la precisión que se consigue con el mismo.

1.7. Alineación con los Objetivos de Desarrollo Sostenible (ODS)

En este capítulo se presentan los Objetivos de Desarrollo Sostenible que se ven impactados por el proyecto presente.

- ODS 03: Salud y bienestar. Este objetivo persigue que las personas practiquen una vida sana y se promueva el bienestar de las mismas, independientemente de la edad. El proyecto presente impacta de forma clara en este objetivo, puesto que una mejor modelización y resolución del sistema Glucosa-Insulina permitiría potencialmente generar avances en el campo de la Medicina que mejoren el bienestar de las personas afectadas por anomalías en este sistema.



Figura 1.6 Salud y Bienestar.

- ODS 09: Industria, innovación e infraestructuras. Este objetivo persigue fomentar la industrialización inclusiva y sostenible, promover la innovación e impulsar la construcción de infraestructura resiliente. El proyecto presente impacta en este objetivo, puesto se pretende emplear una metodología de resolución de DDE que supone un gran avance con respecto a la Transformada de Fourier, debido a que supera algunas de las limitaciones de esta última. Las *Wavelets* tienen el potencial de aumentar la precisión en la resolución de modelos que emplean DDE, por lo que el desarrollo industrial en aquellas áreas del conocimiento que emplean este tipo de ecuaciones se podría ver potencialmente incrementado.



Figura 1.7 Industria, Innovación e Infraestructura.

- ODS 11: Ciudades y comunidades sostenibles. Este objetivo promueve que los lugares habitados por humanos tengan seguridad, sean sostenibles, resilientes e inclusivos. La investigación sobre las *Wavelets* puede incrementar las capacidades de análisis de señales, imágenes y resolución de modelos basados en DDE que tengan un impacto directo en la seguridad de las personas y la sostenibilidad.



Figura 1.8 Ciudades y Comunidades Sostenibles.

Capítulo 2

2. Ecuaciones Diferenciales de Orden Fraccionario

2.1. Introducción

El cálculo fraccionario es una rama del análisis matemático que generaliza las operaciones de derivación e integración a órdenes no enteros o fraccionarios. Mientras que en el cálculo clásico las derivadas e integrales están definidas únicamente para órdenes enteros, en el cálculo fraccionario se extienden estas operaciones a potencias fraccionarias y negativas.

La base del cálculo fraccionario es tanto la derivada como la integral fraccionaria. La derivada fraccionaria permite calcular la tasa de cambio instantánea de una función en en base a un orden fraccionario, mientras que la integral fraccionaria permite calcular el área bajo la curva de una función, también de orden fraccionario.

Existen diferentes definiciones para el cálculo fraccionario, siendo las dos principales el cálculo fraccionario de Riemann–Liouville y el cálculo fraccionario de Caputo, entre otras. Cada una de estas definiciones tiene sus propias características y propiedades, que se presentarán en las próximas secciones del capítulo.

Del mismo modo, se describirán los problemas de valor inicial (PVI) en el cálculo fraccionario, cuya importancia es notable en la modelización y análisis de sistemas y fenómenos con comportamientos no locales y con memoria. Estos problemas involucran ecuaciones diferenciales fraccionarias junto con condiciones iniciales, y su resolución es fundamental en diversas áreas de la Ciencia y la Ingeniería.

Los PVI pueden ser resueltos empleando la Transformada de Laplace, permitiendo transformar ecuaciones diferenciales fraccionarias en ecuaciones algebraicas, lo que simplifica significativamente el proceso de resolución. La Transformada de Laplace es una herramienta matemática poderosa que se utiliza ampliamente para resolver ecuaciones diferenciales en el cálculo clásico, y también se puede extender al cálculo fraccionario, por lo que es interesante comentar su encaje en el mismo.

2.2. Definiciones del Cálculo Fraccionario

En las siguientes secciones se van a presentar las definiciones y propiedades de las herramientas para el cálculo fraccionario más empleadas en los trabajos de investigación que emplean modelos con ecuaciones diferenciales de orden fraccionario: la integral fraccionaria de Riemann–Liouville, la derivada fraccionaria de Caputo y la derivada fraccionaria de Grünwald–Letnikov.

Estas definiciones servirán de referencia para los próximos capítulos, puesto que los métodos de resolución de las ecuaciones diferenciales de orden fraccionario del modelo

planteado en el proyecto estarán basados en las mismas.

2.2.1. Definición de Riemann–Liouville

La integral fraccionaria de Riemann, también conocida como integral de Riemann–Liouville, es una generalización de la integral de Riemann tradicional que permite extender el concepto de integral a potencias fraccionarias y negativas. A continuación, se muestra la definición de la integral, así como sus propiedades.

- **Definición 2.2.1. Integral Fraccionaria de Riemann–Liouville.**

Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $-\infty < a < b < +\infty$, una función integrable en el sentido de Lebesgue sobre $[a, b]$. La integral fraccionaria por la izquierda de f, de orden α, $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, se define por la expresión:

$$ {}_{\mathrm{RLi}}D_a^{-\alpha} f(x) = {}_{\mathrm{RL}}I_a^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\, dt \tag{2.2.1} $$

y por la derecha de manera análoga:

$$ {}_{\mathrm{RLd}}D_b^{-\alpha} f(x) = {}_{\mathrm{RLd}}I_b^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t)\, dt. \tag{2.2.2} $$

- **Propiedades 2.2.1. Integral Fraccionaria de Riemann–Liouville.**

1. Analiticidad: ${}_{\mathrm{RL}}D_a^{\alpha} f(x)$ es una función analítica de α y x, si $f(x)$ es analítica.
2. Identidad: Operación de orden cero de la función devuelve la función inicial, i.e. ${}_{\mathrm{RL}}D_a^{0} f(x) = f(x)$. (Prolongación en 0 de las definiciones precedentes).
3. Linealidad: El operador es lineal,
   i.e. ${}_{\mathrm{RL}}D_a^{\alpha} (A\, f(x) + B\, g(x)) = A\, {}_{\mathrm{RL}} D_a^{\alpha} f(x) + B\, {}_{\mathrm{RL}}D_a^{\alpha} g(x)$.
4. Compatibilidad retroactiva: Cuando el operador es de orden entero, tiene que devolver el mismo resultado que el operador inicial usado con orden entero.
5. Ley exponencial: Se satisface la condición ${}_{\mathrm{RL}}D_a^{\alpha}\ {}_{\mathrm{RL}}\ D_a^{\beta} f(x) = {}_{\mathrm{RL}}D_a^{\alpha+\beta} f(x)$.

El operador de integración fraccionario es exactamente el operador inverso de la derivación fraccionaria: ${}_{\mathrm{RL}}D_a^{\alpha}\ {}_{\mathrm{RL}}D_a^{-\alpha} f(x) = f(x)$.

2.2.2. Definición de Caputo

La derivada fraccionaria de Caputo, propuesta por el matemático italiano Michele Caputo en 1969, es una generalización de la derivada clásica que permite extender el concepto de derivada a potencias fraccionarias, convirtiéndose en una de las definiciones más utilizadas en el cálculo fraccionario.

La importancia de la derivada fraccionaria de Caputo radica en su capacidad para capturar la noción de memoria o la dependencia de la historia pasada de una función, por lo que esta herramienta considera cómo la función ha evolucionado en el pasado en lugar de depender solo del valor actual de la función. A continuación, se procede a definir la derivada fraccionaria de Caputo para su utilización en este proyecto.

- **Definición 2.2.2. Derivada Fraccionaria de Caputo.**

Sea $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$, $-\infty < a < b < +\infty$, una función integrable en el sentido de Lebesgue sobre $[a,b]$ y derivable n veces, de derivadas continua, $f\in \mathrm{AC}^n([a,b])$. La derivada fraccionaria en el sentido de Caputo por la izquierda de f, de orden α, $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$, se define por la expresión:

$$ {}_{\mathrm{Ci}}D_a^{\alpha} f(x) = \left(f_{[a,x]} * \Upsilon_{n-\alpha}\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t)\, dt \tag{2.2.3} $$

y por la derecha de manera análoga:

$$ {}_{\mathrm{Cd}}D_b^{\alpha} f(x) = \left(f_{[x,b]} * \Upsilon_{n-\alpha}\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^b (t-x)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t)\, dt \tag{2.2.4} $$

donde $n = \lfloor \alpha \rfloor + 1$.

- **Propiedades 2.2.2. Derivada Fraccionaria de Caputo.**

1. Analiticidad: ${}_C D_a^{\alpha} f(x)$ es una función analítica de α y x, si $f(x)$ es analítica.
2. Identidad: Operación de orden cero de la función devuelve la función inicial, i.e. ${}_C D_a^{0} f(x) = f(x)$.
3. Linealidad: El operador es lineal,
   i.e. ${}_C D_a^{\alpha}\left(A f(x) + B g(t)\right) = A\, {}_C D_a^{\alpha} f(x) + B\, {}_C D_a^{\alpha} g(x)$.
4. Compatibilidad retroactiva: Cuando el operador es de orden entero, tiene que devolver el mismo resultado que el operador inicial usado con orden entero.
5. Ley exponencial: Se satisface la condición ${}_C D_a^{\alpha}\ {}_C D_a^{\beta} f(x) = {}_C D_a^{\alpha+\beta} f(x)$.

El operador de integración fraccionario es exactamente el operador inverso de la derivación fraccionaria: ${}_C D_a^{\alpha}\ {}_C D_a^{-\alpha} f(x) = f(x)$.

2.2.3. Definición de Grünwald–Letnikov

Anton Karl Grünwald y Aleksey Letnikov definieron, en 1867 y 1868 respectivamente, una nueva formulación de la derivada fraccionaria, tomando como origen de su demostración la definición de derivada entera, tal y como se expone en [PODL99]. Esta derivada no tiene todas las propiedades matemáticas que sí aplican para la derivada fraccionaria de Caputo, puesto que únicamente cumple con las propiedades de Linealidad e Identidad.

- **Definición 2.2.3. Derivada Fraccionaria de Grünwald-Letnikov.**

Sea f una función acotada en $[a,b]$, la derivada fraccionaria de Grünwald–Letnikov de orden $p\in\mathbb{R}^+$ se define de acuerdo a la siguiente expresión:

$$ {}_{\mathrm{GL}}D_t^{p} f(t) = \lim_{\substack{h\to\infty \\ nh=t-a}} f_h^{(p)}(t) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(a)\,(t-a)^{(-p+k)}}{\Gamma(-p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f^{(m+1)}(\tau)\, d\tau \tag{2.2.5} $$

asumiendo que las derivadas $f^{(k)}(t)$, $(k = 1,\ 2,\ \ldots,\ m+1)$ son continuas en el intervalo cerrado $[a,\ t]$ y que m es un entero que satisface la condición $m > p - 1$. El valor más pequeño del entero m queda determinado por la inecuación $m < p < m + 1$ [PODL99].

▼ **Propiedades 2.2.3. Derivada Fraccionaria de Grünwald-Letnikov.**

1. Identidad: Operación de orden cero de la función devuelve la función inicial, i.e. ${}_{\text{GL}}D_a^0 f(x) = f(x)$.
2. Linealidad: El operador es lineal,
   i.e. ${}_{\text{GL}}D_a^{\alpha}\left(A\, f(x) + B\, g(t)\right) = A\ {}_{\text{GL}}D_a^{\alpha} f(x) + B\ {}_{\text{GL}}D_a^{\alpha} g(x)$.

2.3. Ecuaciones Diferenciales de Orden Fraccionario

2.3.1. Definición del Problema de Valor Inicial con Derivadas Fraccionarias

De acuerdo al trabajo realizado por Milici et al. en 2018 [MILI18] y el proyecto realizado por María Rodríguez en 2019 [RODR20], la definición de ecuación diferencial de acuerdo al cálculo clásico queda determinada por la expresión:

$$y^{(n)}(x) = f\left[x,\ y(x),\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x)\right] \tag{2.3.1}$$

siendo x la variable independiente. Se denomina Problema de Valor Inicial o Problema de Cauchy a un sistema de ecuaciones ordinarias de orden n que van acompañadas de n condiciones iniciales. Las condiciones iniciales son los valores del dominio de la solución en un punto concreto de las funciones que se pretenden hallar.

Se considera una ecuación diferencial como fraccionaria cuando al menos una de las derivadas que contiene es de orden fraccionario. El orden se define como el entero de menor valor que sea mayor o igual a todas las derivadas presentes en la ecuación.

Dependiendo del tipo de derivada fraccionaria que se elija, las condiciones iniciales variarán, por lo que es crucial darles una interpretación adecuada. Si se comienza aplicando la derivada fraccionaria de Riemann–Liouville, se obtiene el siguiente problema de valor inicial:

$${}_{\text{RL}}D_a^{\alpha} y(x) = f[x.,\ (x),\ D_a^{\alpha_1} y(x),\ \ldots,\ D_a^{\alpha_{m-1}} y(x)] \tag{2.3.2}$$

asociado a las n condiciones iniciales siguientes:

$$\left(D_a^{\alpha-k}\, y\right)(a) = b_k; \quad k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n \tag{2.3.3}$$

donde $n = [\alpha] + 1$.

Para asegurar la existencia y unicidad de soluciones en problemas que involucren derivadas fraccionarias de Riemann–Liouville, es necesario imponer condiciones iniciales que involucren valores no enteros.

Si se emplean las derivadas fraccionarias de Caputo, el problema de valor inicial se plantea del siguiente modo:

$$ {}_cD_a^{\alpha}\, y(x) = f[x,\, y(x),\, {}_cD_a^{\alpha_1}\, y(x),\, \ldots,\, {}_cD_a^{\alpha_{m-1}}\, y(x)] \tag{2.3.4} $$

asociado a las n condiciones iniciales siguientes:

$$ \frac{d^k}{dx^k}\, y(a) = b_k; \quad k = 0,\, 1,\, \cdots,\, n-1 \tag{2.3.5} $$

donde $n = [\alpha] + 1$. Las condiciones iniciales, en este caso concreto, son de orden entero, por lo que tienen una interpretación física. En el caso anterior, al tratarse de condiciones iniciales de orden fraccionario, no hay interpretación física posible.

2.3.2. Teoremas de Existencia y Unicidad para Problemas de Valor Inicial

En [MILI18] se demuestra el teorema de existencia y unicidad para los problemas de valor inicial con derivadas fraccionarias de Caputo, mientras que en [RODR20] se presenta el teorema de existencia y unicidad para los problemas de valor inicial con derivadas fraccionarias de Riemann–Liouville.

Además de las definiciones descritas, las demostraciones de los teoremas emplean las definiciones de problema de valor inicial de Riemann–Liouville y Caputo, descritas en el capítulo anterior.

- **Definición 2.3.2.a. Existencia y Unicidad de los PVI con Derivadas Fraccionarias de Caputo**

Sea una FDE de Caputo:

$$ D^{\alpha}\, y(t) = f(t,\, y(t)), \quad 0 < \alpha \le 1, \quad t > 0 \tag{2.3.6} $$

con la condición inicial

$$ y(0) = y_0. \tag{2.3.7} $$

Se considera el dominio

$$ D = [0,\, \eta] \times [y_0 - \eta,\, y_0 + \eta] \tag{2.3.8} $$

en el que:

- $f(t,\, y)$ es continua

- $|f(t,\, y)| < M$, donde $M = \max_{(t,y)\in D} |f(t,\, y)|$

- $f(t,\, y)$: satisface en el dominio D la condición de Lipschitz en y si hay una constante k que cumpla:

$$ |f(t,\, y_2) - f(t,\, y_1)| \le K\, |y_2 - y_1|. \tag{2.3.9} $$

▼ **Teorema 2.3.2.a Existencia y Unicidad de los PVI con Derivadas Fraccionarias de Caputo**

Dado el problema de valor inicial con derivadas fraccionarias de Caputo y las n condiciones iniciales, si se cumplen las condiciones expuestas en la definición, existe $\delta > 0$ y una función $y(t) \in C[0, \eta]$ única para:

$$\delta = \min\left\{\eta, \left(\frac{\eta\Gamma(\alpha+1)}{M}\right)^{1/\alpha}\right\} \tag{2.3.10}$$

donde *min* denota la función mínimo..

• **Definición 2.3.2.b. Existencia y Unicidad de los PVI con Derivadas Fraccionarias de Riemann-Liouville**

Dada una función $f[x, y_0, \ldots, y_{m-1}] \in I \times B \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$, cumple la condición de Lipschitz para las variables $y_0, y_1, \ldots, y_{m-1}$ cuando existe una constante $K > 0$ no dependiente de t tal que para todo $t \in I$ y cualquier par de $m-$uplas $(y_o, y_1, \ldots, y_{m-1})$, $\left(\tilde{y_0}, \tilde{y_1}, \ldots, \tilde{y_{m-1}}\right) \in B$, se cumple lo siguiente:

$$\left| f[x, y_o, y_1, \ldots, y_{m-1}] - f\left[\left(x, \tilde{y_0}, \tilde{y_1}, \ldots, \tilde{y_{m-1}}\right]\right| \leq \sum_{k=0}^{m-1} K \left| y_k - \tilde{y_k} \right| \in B. \tag{2.3.11}$$

▼ **Teorema 2.3.2.b Existencia y Unicidad de los PVI con Derivadas Fraccionarias de Riemann-Liouville**

Dado el problema de valor inicial con derivadas fraccionarias de Riemann–Liouville, sujeto a las n condiciones iniciales, si la función $f[x, y_0, \ldots, y_{m-1}]$ cumple la condición de Lipschitz y $f[x, y_o, \ldots, y_{m-1}] \in L^1(a, b)$ para cualquier $(y_0, \ldots, y_{m-1}) \in \mathbb{R}^m$ se verifica que existe una solución única $y(x)$ al problema en el espacio $L^\alpha(a, b)$.

▼ **Teorema 2.3.2.c Existencia y Unicidad de los PVI con Derivadas Fraccionarias de Riemann-Liouville**

Dada una FDE lineal, que cumple $b(x) \in L_1(a, b)$, si $a_k(x) \in L_\infty(a, b)$ o si $a_k(x)$ están acotadas en $[a, b]$ entonces el siguiente problema de valor inicial con derivadas fraccionarias de Riemann-Liuoville

$$\begin{gathered} {}_{\mathrm{RL}}D_a^\alpha y(x) = a_0(x)\, y(x) + \sum_{k=1}^{m-1} a_k(x)\, D_a^{\alpha_k} y(x) + b(x) \\ {}_{\mathrm{RL}}D_a^{\alpha-k} y(a) = b_k, \quad k = 1, 2, \cdots, n \end{gathered} \tag{2.3.12}$$

tiene solución única $y(x)$ en el espacio $L^\alpha(a, b)$.

2.3.3. Transformada de Laplace de la Derivada Fraccionaria

La transformada de Laplace es una herramienta matemática ampliamente utilizada para resolver ecuaciones diferenciales lineales, incluyendo aquellas con derivadas enteras. Permite transformar una ecuación diferencial en una ecuación algebraica más fácil de resolver, siempre y cuando las condiciones iniciales sean conocidas.

Cuando se combinan las ecuaciones con derivadas fraccionarias y la transformada de Laplace, se obtiene un método para resolver ecuaciones diferenciales fraccionarias con una alta eficacia; es por ello que es ampliamente utilizada para el cálculo fraccionario.

La transformada de Laplace de una derivada fraccionaria se puede expresar en términos de la transformada de Laplace convencional, lo que permite llevar la ecuación diferencial fraccionaria a un dominio en el cual se pueda manejar más fácilmente.

Sin embargo, es importante destacar que el tratamiento de ecuaciones con derivadas fraccionarias y la transformada de Laplace puede ser más complejo que con ecuaciones diferenciales convencionales.

A continuación se, muestra el resultado de aplicar la Transformada de Laplace a la derivada de Riemann–Liouville y la derivada de Caputo, de acuerdo a [MILI18]:

$$L[{}_{\mathrm{RL}}D_t^{\alpha} f(t)] = s^{\alpha} F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-\alpha-1}\left[D^k I^{n-\alpha} f(t)\right]_{t=0}$$

$$L[{}_{C}D^{\alpha} f(t)] = s^{\alpha} F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-\alpha-1} f^{(k)}(0). \tag{2.3.13}$$

2.3.4. FDE Lineales y la Transformada de Laplace

Las FDE lineales son de la forma:

$$(D^{\alpha_n} + a_{n-1} D^{\alpha_{n-1}} + \ldots + a_1 D^{\alpha_1} + a_0)\, y(t) = f(t), \quad \alpha \in \mathbb{R} \tag{2.3.14}$$

con las condiciones:

$$y^{(k)}(0) = b_k, \quad k = 0, 1, 2, \cdots, n-1. \tag{2.3.15}$$

En este capítulo se presentan las soluciones a distintas FDE lineales, empleando la transformada de Laplace. Las demostraciones se pueden encontrar en [MILI18].

▼ **Teorema 2.3.4.a.**

Sean FDE lineales del tipo:

$D^{\alpha} y(t) = f(t)$

donde $n-1 < \alpha < n$, con la condición inicial:

$y^{(k)}(0) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$

Aplicando la Transformada de Laplace, se tiene la solución:

$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-u)^{\alpha-1} f(u)\, du.$

▼ **Teorema 2.3.4.b.**

Sean FDE lineales del tipo:

$D^{\alpha}\, y(t) = y(t),$

donde $n-1 < \alpha < n$, y con la condición inicial:

$y^{(k)}(0) = b_k, \quad b_k \in \mathbb{R}, k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$

Aplicando la Transformada de Laplace, se obtiene la solución:

$y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k\, t^k\, E_{\alpha,k+1}(\lambda\, t^{\alpha}).$

▼ **Teorema 2.3.4.c.**

Las FDE lineales del tipo:

$D^{\alpha}\, y(t) = f(t),$

donde $0 < \alpha < 1,$

y con la condición inicial:

$y(0) = A, \quad b_k \in \mathbb{R}, \ k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$

y donde se cumple:

$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, t^n$

Aplicando la Transformada de Laplace, tienen la solución:

$y(t) = A + t^{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{\Gamma(n+\alpha+1)}\, t^n.$

▼ **Teorema 2.3.4.d**

Las FDE lineales del tipo:

$a\, D^{\alpha}\, y(t) + b\, y(t) = f(t),$

donde $0 < \alpha < 1$,y con la condición inicial:

$y(0) = A,$

y donde se cumple:

$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, t^n$

Aplicando la Transformada de Laplace, se deduce la solución:

$y(t) = AE_{\alpha,1}\left(-\frac{b}{a}\, t^{\alpha}\right) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{a}\, t^n\left[1 - E_{\alpha,n+1}\left(-\frac{b}{a}\, t^{\alpha}\right)\right].$

2.4. Cálculo Fraccionario Aplicado a Modelos Biológicos

Existen numerosos modelos relacionados con los campos de la Biología y la Medicina con los que se puede hacer uso del cálculo fraccionario para su resolución y análisis. En esta sección, se presentan aplicaciones del cálculo fraccionario que se están llevando a cabo en la actualidad en los campos mencionados.

2.4.1. Cálculo fraccionario en el Modelo de Latencia Tumoral

En el estudio [SILV19], los autores realizaron un análisis de estabilidad y simulaciones numéricas empleando el cálculo fraccionario para estudiar la latencia tumoral en las células de los seres humanos, estableciendo un modelo de interacción entre las células sanas y las tumorales.

El modelo se asemeja al modelo depredador–presa propuesto por Alfred J. Lotka, que describe las dinámicas que se producen entre dos especies que interactúan entre sí, siendo una de ellas la presa, y la otra actuando como depredador. En el caso que nos ocupa, las células tumorales actúan como las presas, mientras que a las células inmunes se les asigna el papel de depredadores. El modelo que se propone en el estudio incorpora el operador diferencial de Caputo α, como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} {}_C D^{\alpha} N(t) &= r\, N(t) - N(t)\, I(t) \\ {}_C D^{\alpha} I(t) &= \sigma - \frac{1}{r}\, I(t) - d\, N(t) + N(t)\, I(t) \end{aligned} \tag{2.4.1}$$

donde $0 < \alpha \leq 1$, $t > 0$, N se corresponde con el número de células tumorales, I es el número de células inmunes, σ es el flujo constante de células inmunes, r es la tasa de proliferación de las células tumorales y d es la tasa de mortalidad de las células inmunes frente al crecimiento de las células tumorales.

El empleo del cálculo fraccionario en los modelos biológicos permite introducir el efecto de la memoria, así como la construcción de distintos escenarios que representan las dinámicas entre la población del problema; en el ejemplo de este capítulo la población está formada por células tumorales e inmunes. Con el rango de valores que admite el operador diferencial de Caputo α, se obtienen distintos modelos fraccionarios que resultan en un espectro de soluciones del cual se puede obtener aquel que represente de forma más precisa el comportamiento de la realidad.

En el estudio se analiza el estado de latencia del cáncer, teniendo en cuenta factores como la fuerza predatoria del sistema inmune y la capacidad de mantenimiento de las poblaciones involucradas en el modelo. Para ello, se desarrolla un nuevo modelo que emplea cálculo fraccionario como herramienta; la fuerza predatoria y el potencial de reclutamiento de células tumorales por parte del sistema inmune se consideran funciones que decaen exponencialmente con el tiempo en algunos casos. Se considera que el cáncer escapa del depredador (células inmunes) cuando las células tumorales alcanzan una cifra de 10^9. El modelo que emplea el estudio para describir la latencia tumoral se describe en la ecuación que sigue:

$$
\begin{aligned}
{}_C D^{\alpha} N(t) &= r\, N(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K(t)}\right) - \alpha\, N(t)\, I(t) \\
{}_C D^{\alpha} I(t) &= \gamma\, I(t) \left(1 - \frac{I(t)}{I_e + \mu\, N(t)\, I(t)}\right)
\end{aligned}
\tag{2.4.2}
$$

donde $0 < \alpha \leq 1$, $t > 0$, K es la capacidad de la población de las células tumorales, α es la relación entre las células tumorales y las inmunes, I_e es el estado inmune en estado de equilibrio, μ es el coeficiente que representa el potencial de reclutamiento de las células tumorales por las células inmunes, γ es la tasa de crecimiento de las células inmunes, como se apunta en [SILV19].

2.4.2. Cálculo Fraccionario en el Modelo Epidemiológico SIR

Los modelos compartimentales son técnicas empleadas para simplificar los modelos matemáticos que describen la propagación de las enfermedades infecciosas entre una población o la duración de una epidemia, entre otros usos. El modelo SIR es uno de los modelos compartimentales más utilizados por su capacidad de predicción en enfermedades que se transmiten entre humanos, así como en enfermedades cuya infección genera una resistencia que perdura en el organismo por un tiempo prolongado.

La técnica distingue entre tres grupos dentro de la población: los susceptibles de ser contagiados (grupo S), los infectados (grupo I) y los que ya fueron contagiados y se han recuperado (grupo R). Aún cuando el número de población total se mantenga constante, el número entre grupos fluctúa con el tiempo, por lo que las ecuaciones diferenciales son una herramienta indispensable para la resolución de este tipo de modelos.

El modelo epidemiológico SIR de orden fraccional queda definido de la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
{}_C D^{\alpha} S(t) &= r\, S(t) \left(1 - \frac{S(t)}{K}\right) - \frac{\beta\, S(t)\, I(t-\tau)}{1 + \sigma\, S(t)} \\
{}_C D^{\alpha} I(t) &= \frac{\beta\, S(t)\, I(t-\tau)}{1 + \sigma\, S(t)} - a\, I(t) - \gamma\, I(t)
\end{aligned}
\tag{2.4.3}
$$

donde $0 < \alpha \leq 1$; $t \geq 0$; r es la tasa de crecimiento; K es la población máxima; τ es el tiempo de incubación de la enfermedad; a es el número de Infectados (I) que han fallecido a causa de la enfermedad; σ es la tasa de mortalidad de los Recuperados (R) y los Susceptibles (S); γ es la tasa de recuperación de los infectados y β es la tasa de aumento del número de Infectados (I) y la tasa de disminución del número de Susceptibles (S), de acuerdo con [RODR20].

2.4.3. Cálculo Fraccionario en el Modelo Epidemiológico MSEIR

En el estudio [RODR20] se pone otro ejemplo de modelo epidemiológico en el que se emplea el cálculo fraccionario, el modelo MSEIR. En este caso, el modelo es algo más complejo que en el caso del modelo epidemiológico SIR, en el que únicamente tenemos Susceptibles, Infectados y Recuperados.

En el modelo que nos ocupa en esta sección, se tienen en cuenta los nacidos con inmunidad (denominados con la letra M); los Susceptibles (S), que no han sido expuestos a la enfermedad; los Expuestos (E), que sí han sido expuestos a la enfermedad, pero no la han contraído; los Infectados (I) y, por último, los Recuperados (R). Estos últimos se considera

que, una vez pasada la enfermedad, tienen inmunidad frente a la misma.

El modelo que se describe es el siguiente:

$$
\begin{aligned}
&{}_C D^{\alpha} M(t) = b^{\alpha}(N - S(t)) - (\delta^{\alpha} + b^{\alpha})\, M(t) \\
&{}_C D^{\alpha} S(t) = b^{\alpha}\, S(t) + \delta^{\alpha}\, M(t) - \frac{\beta^{\alpha}}{N}\, S(t)\, I(t) - b^{\alpha}\, S(t) \\
&{}_C D^{\alpha} E(t) = \frac{\beta^{\alpha}}{N}\, S(t)\, I(t) - (\varepsilon^{\alpha} + b^{\alpha})\, E(t) \\
&{}_C D^{\alpha} I(t) = \varepsilon^{\alpha}\, E(t) - (\gamma^{\alpha} + b^{\alpha})\, E(t) \\
&{}_C D^{\alpha} R(t) = \gamma^{\alpha}\, I\,(t) - b^{\alpha}\, R\,(t)
\end{aligned}
\tag{2.4.4}
$$

donde $0 < \alpha \leq 1$; $t > 0$; b es la tasa de nacimiento y muerte; N es la población total; δ es la tasa de crecimiento de los Inmunes (M); β es la tasa de contagio de la enfermedad, γ es la tasa de recuperación de los individuos Infectados (I) y ε es la tasa de contagio de los individuos Expuestos (E) a la enfermedad, como se expone en [RODR20].

Capítulo 3

3. Modelos Fraccionarios de Interacción Glucosa-Insulina

En este capítulo se analizan los modelos propuestos en tres estudios que incorporan modelos del sistema de interacción glucosa-insulina: [LEKD19] y [FERN22] proponen un modelo de orden fraccionario con retardo, mientras que [ALHU20] propone un modelo de ecuaciones diferenciales no lineales con retardo de orden entero.

El propósito del capítulo es conocer los distintos modelos matemáticos empleados para simular el comportamiento metabólico del organismo con respecto a la interacción glucosa-insulina, así como analizar la estabilidad de las soluciones obtenidas y las bifurcaciones de Hopf que se producen al variar distintos parámetros y, por último, comentar los resultados numéricos que resultan de asignar valores a los parámetros de cada modelo.

La estabilidad de las soluciones dependerá principalmente del orden fraccionario del modelo y del retardo del sistema, como se comentará más adelante. Para su análisis, resultan de gran utilidad las bifurcaciones de Hopf, puesto que permiten visualizar los cambios en el comportamiento del sistema cuando se varían ciertos parámetros, pasando de soluciones estables a oscilatorias, y de soluciones oscilatorias a soluciones inestables o caóticas.

3.1. Modelo Fraccionario con Retraso Glucosa–Insulina con Órdenes Incomensurables

El estudio [LEKD19] investiga acerca de la dinámica del modelo matemático que describe la interacción de la glucosa-insulina, empleando ecuaciones diferenciales de orden fraccionario y con retraso. Por órdenes inconmensurables (o fraccionarios) se entienden aquellos órdenes de las ecuaciones fraccionarias que no son racionales, y que por tanto, no pueden expresarse como la razón de dos números enteros.

El modelo de ecuaciones diferenciales fraccionarias con retraso para simular el comportamiento de la interacción glucosa-insulina que se emplea en el estudio es el siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{dG(t)}{dt} &= -a_1\, G(t) - \frac{a_3\, I(t)\, G(t)}{(a_4\, G(t)+1)} + a_6 \\ \frac{dI(t)}{dt} &= -a_2\, I(t) + a_5\, G(t-\tau) \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

donde $\tau > 0$ y las condiciones iniciales son $G(t) = G_0$ para $t \in [-\tau, 0]$ y $I(0) = I_0$. El modelo que proponen en [LEKD19] está basado en el modelo propuesto por Li y Kuang, presentado en el Capítulo 1 de este proyecto. El modelo está compuesto por dos ecuaciones diferenciales con retraso que describen el comportamiento de la variación de la concentración de la glucosa en la sangre y de la concentración de la insulina en el mismo medio, representadas por la variable $G(t)$ y la variable $I(t)$ respectivamente.

Los efectos de la acción de la insulina en los niveles de glucosa y otros procesos fisiológi-

cos pueden no ser inmediatos y pueden tomar cierto tiempo en manifestarse; por ello, cualquier modelo matemático que trate de simular de forma precisa la interacción de la glucosa-insulina en el organismo debe contar con parámetros que computen este retardo.

3.1.1. Descripción del Modelo de Orden Fraccionario

Basado en el modelo matemático presentado en la ecuación (3.1.1), que representa el modelo de la interacción glucosa-insulina generalizado, se desarrolla en esta sección el modelo matemático de interacción glucosa-insulina de orden fraccionario con retraso.

En el modelo expuesto en (3.1.1), la derivada $I(t)$ en el tiempo t está determinada por la concentración de glucosa en un tiempo anterior $(t-\tau)$. La derivada fraccionaria de Caputo contiene la información acumulada de las derivadas ordinarias desde el comienzo hasta el tiempo t, dependiendo del valor de su orden fraccionario.

Si se reemplaza la derivada ordinaria en un sistema de ecuaciones diferenciales clásico por la derivada fraccionaria de Caputo, se puede utilizar la información acumulada sobre la tasa de variación de las funciones desconocidas que aparecen en el sistema, además de los valores de las funciones desconocidas en los tiempos actuales y anteriores, por lo que la introducción de órdenes fraccionarios permiten expresar efectos de memoria, historia o efectos no locales.

En el estudio realizado por Kuang et al. en 2001, se demostró tanto de forma teórica como mediante resultados numéricos que el modelo presentado en (3.1.1) puede alcanzar los siguientes comportamientos: (i) estabilidad asintótica en estado estacionario (ii) soluciones oscilatorias en estado estacionario, y (iii) soluciones oscilatorias sostenidas, cuando se ajustan los valores a_4 y τ.

Cuando $a_4 > 0$ y τ es pequeño, el estado estacionario positivo es estable, mientras que si el parámetro a_4 es relativamente pequeño y τ es un valor grande, tienen lugar soluciones de carácter oscilatorio en estado estacionario.

Debido a que la solución al sistema planteado en (3.1.1) varía según el parámetro de retardo τ, el empleo de una versión del sistema que haga uso de órdenes fraccionarios resulta interesante, ya que puede suponer un nuevo factor que impacte sobre la tipología de la solución al sistema.

Un ejemplo en el que el empleo de órdenes fraccionarios puede tener un impacto en la solución del sistema puede ser el cálculo del retardo de tiempo adecuado τ en función de los órdenes fraccionarios, de tal forma que las concentraciones de glucosa e insulina en pacientes diabéticos tengan comportamientos asintóticamente estables u oscilatorios sostenidas. Fisiológicamente hablando, el modelo de orden fraccionario podría influir en la acción de retardo de la insulina en el plasma y su efecto en la producción de glucosa por parte del hígado, así como en el rango de oscilación del proceso de secreción de insulina humana.

Los efectos mencionados no se pueden obtener mediante el uso del sistema de primer orden (3.1.1), por lo que el desarrollo de un modelo con órdenes fraccionarios se hace necesario.

Para ello, se sustituye las derivadas de primer orden del sistema (3.1.1) por las derivadas de Caputo de orden fraccionario q_1 y $q_2 \in [0, 1]$ y se ajusta en ambos lados de la ecuación para que las unidades concuerden, ya que si no se produce el ajuste, en el lado derecho quedarían unidades de tiempo^{-1} mientras que en el lado izquierdo se tienen unidades de tiempo^{q_1} y tiempo^{q_2}.

Para llevar a cabo el ajuste, se multiplica algunos parámetros por la constante fraccionaria β. A continuación se muestra el modelo de la interacción glucosa-insulina de orden fraccionario con retardo con órdenes inconmensurables:

$$
\begin{aligned}
{}_cD_a^{q_1}\, G(t) &= -a_1^{q_1}\, G(t) - \frac{\beta^{-1-q_1}\, a_3\, I(t)\, G(t)}{a_4\, G(t)+1} + \beta^{1-q_1}\, a_6 \\
{}_cD_a^{q_2}\, I(t) &= -a_2^{q_2}\, I(t) + \beta^{-1-q_2}\, a_5\, G(t-\tau)
\end{aligned}
\tag{3.1.2}
$$

Si se sustituyen los parámetros siguientes:

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 = a_1^{q_1} \quad \alpha_2 = a_2^{q_2} \quad \alpha_3 = \beta^{1-q_1}\, a_3 \\
\alpha_4 = a_4 \quad \alpha_5 = \beta^{1-q_2}\, a_5 \quad \alpha_6 = \beta^{1-q_1}\, a_6
\end{aligned}
\tag{3.1.3}
$$

se obtiene el sistema:

$$
\begin{aligned}
{}_cD_a^{q_1}\, G(t) &= -\alpha_1\, G(t) - \frac{\alpha_3\, I(t)\, G(t)}{\alpha_4\, G(t)+1} + \alpha_6 \\
{}_cD_a^{q_2}\, I(t) &= -\alpha_2\, I(t) + \alpha_5\, G(t-\tau)
\end{aligned}
\tag{3.1.4}
$$

donde $t \in [-\tau,\, T)$, $\tau \geq 0$ y $T > 0$ y las condiciones inciales son las mismas que aquellas del sistema presentado en (3.1.1). El sistema tiene un único punto de equilibrio:

$$
\begin{aligned}
G^* &= \frac{\alpha_4\, \alpha_6 - \alpha_1 + \sqrt{(\alpha_4\, \alpha_6 - \alpha_1)^2 + 4\, \alpha_6 \left(\alpha_4\, \alpha_1 + \frac{\alpha_3\, \alpha_5}{\alpha_2}\right)}}{2\left(\alpha_4\, \alpha_1 + \frac{\alpha_3\, \alpha_5}{\alpha_2}\right)} \\
I^* &= \frac{\alpha_5}{\alpha_2}\, G^*
\end{aligned}
\tag{3.1.5}
$$

Los órdenes q_1 y q_2, así como el parámetro β, influyen de forma significativa en los parámetros α, a excepción del parámetro α_4. Los parámetros α_1 y α_2 pueden denominarse como la tasa fraccionaria de absorción de glucosa de los tejidos, y la constante fraccionaria de eliminación de insulina, respectivamente.

El sistema presentado en (3.1.4) es el que se propone en [LEKD19] para el análisis y simulación de las soluciones no negativas y estudio de la estabilidad de las soluciones. Además, se incluirá el análisis de la bifurcación de Hopf, empleando el retardo τ como parámetro de bifurcación.

3.1.2. Estudio de las Soluciones Positivas del Modelo Fraccionario

En la investigación, se realiza un análisis de las soluciones positivas del modelo propuesto, previa demostración matemática. La demostración matemática llega a la conclusión de que las soluciones al sistema de ecuaciones diferenciales de orden fraccionario con retardo propuestas en (3.1.4) son positivas y están acotadas, es decir, no crecen o disminuyen indefinidamente a medida que se avanza en el tiempo o en el dominio de la variable independiente.

Formulado como teorema, adopta la forma siguiente:

Teorema 3.1.1. Soluciones Positivas y Acotadas.

Todas las soluciones al problema del valor inicial, determinado por el sistema propuesto en (3.1.4) y las condiciones iniciales $G(t) = G_0$ para $t \in [-\tau,\, 0]$ y $I(0) = I_0$, existen para $t > 0$, y son soluciones positivas y acotadas.

La demostración detallada se encuentra en [LEKD19].

3.1.3. Puntos de Equilibrio y de Estabilidad de las Soluciones

Los Puntos de Equilibrio de los sistemas dinámicos son aquellas soluciones en las que las variables permanecen constantes a medida que la variable tiempo incrementa. A su vez, los

puntos de equilibrio pueden ser estables o inestables, dependiendo del comportamiento del sistema cuando se producen variaciones con respecto a los puntos de equilibrio; si el sistema se desvía ligeramente del punto de equilibrio y las variables se alejan del mismo a medida que el tiempo incrementa, el punto de equilibrio es inestable, mientras que si las variables convergen hacia el punto de equilibrio de nuevo, éste será estable.

Empleando la transformación $x(t) = G(t) - G^*$, $y(t) = I(t) - I^*$, el sistema (3.1.4) puede formularse de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} {}_C D_a^{q_1}\, x(t) &= -\alpha_1(x(t) + G^*) - \frac{\alpha_3(y(t)+I^*)\,(x(t)+G^*)}{\alpha_4(x(t)+G^*)+1} + \alpha_6 \\ {}_C D_a^{q_2}\, y(t) &= -\alpha_2(y(t) + I^*) + \alpha_5(x(t-\tau) + G^*) \end{aligned} \tag{3.1.6}$$

La linearización del sistema anterior da lugar a la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} {}_C D_a^{q_1}\, x(t) &= -m_1\, x(t) - m_2\, y(t) \\ {}_C D_a^{q_2}\, y(t) &= -\alpha_2\, y(t) + \alpha_5\, x(t-\tau) \end{aligned} \tag{3.1.7}$$

donde:

$$m_1 = \alpha_1 + \frac{\alpha_3\, I^*}{(\alpha_4\, G^* + 1)^2} \qquad m_2 = \frac{\alpha_3\, G^*}{(\alpha_4\, G^* + 1)} \tag{3.1.8}$$

La ecuación característica del sistema (3.1.7) se obtiene al realizar la operación:

$$\begin{vmatrix} s^{q_1} + m_1 & m_2 \\ -\alpha_5\, e^{-s\tau} & s^{q_2} + \alpha_2 \end{vmatrix} = 0 \tag{3.1.9}$$

dando lugar a la ecuación:

$$s^{q_1+q_2} + \alpha_2\, s^{q_1} + m_1\, s^{q_2} + m_1\, \alpha_2 + m_2\, \alpha_5\, e^{-s\tau} = 0. \tag{3.1.10}$$

Si no hay retardo ($\tau = 0$), la ecuación anterior se puede formular como:

$$\lambda^2 + (\alpha_2 + m_1)\,\lambda + (\alpha_2\, m_1 + \alpha_5\, m_2) = 0 \tag{3.1.11}$$

La expresión anterior tiene las soluciones:

$$\begin{aligned} \lambda_+ &= \frac{-(\alpha_2+m_1) + \sqrt{(\alpha_2+m_1)^2 - 4\,(\alpha_2\, m_1 + \alpha_5\, m_2)}}{2} \\ \lambda_- &= \frac{-(\alpha_2+m_1) - \sqrt{(\alpha_2+m_1)^2 - 4\,(\alpha_2\, m_1 + \alpha_5\, m_2)}}{2} \end{aligned} \tag{3.1.12}$$

Como la parte real de ambas soluciones es negativa, se deduce que el punto de equilibrio (G^*, I^*) del sistema propuesto en (3.1.4) es asintóticamente estable localmente para valores de retardo $\tau = 0$.

3.1.4. Bifurcación de Hopf

El estudio de la existencia de la bifurcación de Hopf permite analizar si la variación de un parámetro, en este caso τ, afecta al comportamiento del sistema planteado en (3.1.4). Si un punto de equilibrio cambia su estabilidad cuando un parámetro varía, el sistema cambia su comportamiento y pasa de ser estacionario a ser oscilatorio estable.

En la ecuación característica planteada en (3.1.10), si se asume que

$s = i\,\omega = \omega\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ es una raíz de la expresión cuando $\omega > 0$ y se sustituye s

en (3.1.10) separando la parte real e imaginaria, se obtiene:

$$\begin{aligned} &m_2\,\alpha_5\cos(\omega\tau)+\omega^{q_1+q_2}\cos\!\left(\tfrac{\pi(q_1+q_2)}{2}\right)+\omega^{q_1}\,\alpha_2\cos\left(\tfrac{q_1\,\pi}{2}\right)+\\ &m_1\,\omega^{q_2}\cos\!\left(\tfrac{q_2\,\pi}{2}\right)+m_1\,\alpha_2=0\\ &-m_2\,\alpha_5\sin(\omega\tau)+\omega^{q_1+q_2}\sin\!\left(\tfrac{\pi(q_1+q_2)}{2}\right)+\omega^{q_1}\,\alpha_2\sin\!\left(\tfrac{q_1\,\pi}{2}\right)+\\ &m_1\,\omega^{q_2}\sin\!\left(\tfrac{q_2\,\pi}{2}\right)=0. \end{aligned} \tag{3.1.13}$$

Reorganizando términos para dejar el $\cos(\omega\,\tau)$ y el $\sin(\omega\,\tau)$ a un lado de la igualdad, y aplicando $\cos^2(\omega\tau)+\sin^2(\omega\tau)=1$, se obtiene:

$$\begin{aligned} \cos(\omega\,\tau)=G_1\,(\omega)&=\frac{\omega^{q_1}\,\alpha_2\cos\!\left(\frac{q_1\,\pi}{2}\right)+m_1\,\omega^{q_2}\cos\!\left(\frac{q_2\,\pi}{2}\right)+\omega^{q_1+q_2}\cos\!\left(\frac{(q_1+q_2)\,\pi}{2}\right)+m_1\,\alpha_2}{m_{2\,\alpha_5}}\\ \sin(\omega\,\tau)=G_2\,(\omega)&=\frac{\omega^{q_1}\,\alpha_2\sin\!\left(\frac{q_1\,\pi}{2}\right)+m_1\,\omega^{q_2}\sin\!\left(\frac{q_2\,\pi}{2}\right)+\omega^{q_1+q_2}\sin\!\left(\frac{(q_1+q_2)\,\pi}{2}\right)}{m_{2\,\alpha_5}}\\ G_1^2(\omega)+G_2^2(\omega)&=1. \end{aligned} \tag{3.1.14}$$

Asumiendo que la expresión anterior admite al menos una raíz positiva, denominada frecuencia crítica ω_0, se define:

$$\tau_j=\frac{1}{\omega_0}\,(\arccos\,(G_1(\omega_0))+2\,j\,\pi),\quad j=0,\,1,\,2,\,\ldots \tag{3.1.15}$$

El punto de bifurcación del sistema asociado a la frecuencia crítica será:

$$\tau_0=\min\,\{\tau_j\},\quad j=0,\,1,\,2,\,\ldots \tag{3.1.16}$$

Se realiza una hipótesis, denominada Hipótesis 1, para establecer la condición para que la bifurcación de Hopf tenga lugar:

$$\frac{R_1\,R_2+I_1\,I_2}{R_2^2+I_2^2}\neq 0. \tag{3.1.17}$$

donde:

$$\begin{aligned} R_1&=m_2\,\alpha_5(\omega_0)^2\cos(\omega_0\,\tau_0)\\ I_1&=-m_2\,\alpha_5(\omega_0)^2\sin(\omega_0\,\tau_0)\\ R_2&=\omega_0\,\tau_0\,m_2\,\alpha_5\sin(\omega_0\,\tau_0)-{\omega_0}^{q_1}\,q_1\,\alpha_2\cos\!\left(\frac{q_1\,\pi}{2}\right)-\omega_0^{q_2}\,q_2\,m_1\cos\!\left(\frac{q_2\,\pi}{2}\right)-\\ &\omega_0^{q_1+q_2}\,q_1\cos\!\left(\frac{\pi(q_1+q_2)}{2}\right)-\omega_0^{q_1+q_2}\,q_2\cos\!\left(\frac{\pi(q_1+q_2)}{2}\right)\\ I_2&=\omega_0\,\tau_0\,m_2\,\alpha_5\cos(\omega_0\,\tau_0)-{\omega_0}^{q_1}\,q_1\,\alpha_2\sin\!\left(\frac{q_1\,\pi}{2}\right)-\omega_0^{q_2}\,q_2\,m_1\sin\!\left(\frac{q_2\,\pi}{2}\right)-\\ &\omega_0^{q_1+q_2}\,q_1\sin\!\left(\frac{\pi(q_1+q_2)}{2}\right)-\omega_0^{q_1+q_2}\,q_2\sin\!\left(\frac{\pi(q_1+q_2)}{2}\right). \end{aligned} \tag{3.1.18}$$

Si la Hipótesis 1 es válida para el sistema (3.1.4), aplica el siguiente teorema:

▼ **Teorema 3.1.2. Equilibrio del Sistema y Bifurcación de Hopf.**

- El sistema (3.1.4) tiene una bifurcación de Hopf en el punto de equilibrio $(G^*,\ I^*)$ cuando

$\tau = \tau_0$, por lo que cerca de τ_0 existen soluciones periódicas que se alejan del punto de equilibrio del sistema.

- El punto de equilibrio del sistema $(G^*,\ I^*)$ es asintóticamente estable localmente para $\tau \in [0,\ \tau_0)$ e inestable para valores de $\tau > \tau_0$.

3.1.5. Resultados Numéricos. Simulación

Los resultados numéricos que se muestran en esta sección tienen como objetivo demostrar numéricamente los hallazgos teóricos que se han descrito en secciones anteriores. Los valores de los parámetros usados en la simulación son:

$$\alpha_3 = 5.64\times 10^{-5};\ \alpha_4 = 0.01;\ \alpha_5 = 0.074;\ \alpha_6 = 1.93;\\ G(0) = 87;\ I(0) = 60;\ \beta = 1 \tag{3.1.19}$$

Los valores de los parámetros α_1 *y* α_2 dependen de los órdenes fraccionarios q_1 y q_2 que se escojan, por lo que se eligen 4 casos distintos de dichos parámetros y se calculan $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \omega_0$ y τ_0. Los resultados se muestran en la Tabla 3.1.

Para la resolución de los SFDDE se emplea un algoritmo desarrollado en Mathematica que utiliza el método Adams-Bashford-Moulton mencionado en el capítulo 1.6.6 del presente proyecto, tomando como referencia [MOHA18].

Tabla 3.1. Valores de distintos parámetros de la simulación numérica.

Casos	q_1	q_2	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	G_0[mg / dl]	I_0[mU / l]
I	1	1	0.0001	0.1262	0.0000564	0.01	0.074	1.93	87	60
II	0.92	0.92	0.00020893	0.148927	0.0000564	0.01	0.074	1.93	87	60
III	0.92	0.95	0.00020893	0.139961	0.0000564	0.01	0.074	1.93	87	60
IV	0.92	0.72	0.00020893	0.225301	0.0000564	0.01	0.074	1.93	87	60

■ **Problema 3.1.1. Modelo de Interacción Glucosa–Insulina con un SFDDE. Caso I.** ([LEKD19])

Con respecto al primer conjunto de valores, el denominado *Caso I*, es el único caso en el que el orden del sistema es entero, puesto que q_1 y q_2 son iguales a 1. El punto de equilibrio del sistema es $(G^*,\ I^*) = (650.592;\ 381.488)$. Si se aplica la Hipótesis 1, descrita en (3.1.17), el resultado es distinto de cero, con lo que se deduce que la Hipótesis 1 es correcta, y por tanto, de acuerdo con el Teorema 3.1.2, el punto de equilibrio es asintóticamente estable para valores de $\tau \in [0,\ 607.919)$, mientras que para valores mayores de τ mayores, el sistema se vuelve inestable.

Ambos resultados se muestran gráficamente en las figuras 3.1 y 3.2 que se exponen a continuación:

Caso I.

α_1	α_2	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	G_0	I_0	τ
1	1	0.0001	0.1262	0.0000564	0.01	0.074	1.93	87	60	400

Método de *Adams–Bashforth–Moulton Fraccionario con Retraso* (ABMFR) para Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Fraccionarias con Retraso (SFDDE).

$$(P) \equiv \begin{cases} D^{(\alpha)}\, y_r(x) = f_r\,(x,\, y_1(x),\, \ldots,\, y_r(x), \\ \qquad y_1(x-\tau),\, \ldots,\, y_r(x-\tau)) & x \in [0,\, T] \quad 0 < \alpha \le 1 \\ y_r(x) = g_r(x) & x \in [-\tau,\, 0] \\ y_r(0) = y_{r\,0} \end{cases}$$

$$r = 1, 2, \cdots, m$$

$$(P) \equiv \left(\begin{pmatrix} D\, y_1(x) = -\frac{0.0000564\, y_2(x)\, y_1(x)}{0.01\, y_1(x)+1} - 0.0001\, y_1(x) + 1.93 \\ D\, y_2(x) = 0.074\, y_1(x-400) - 0.1262\, y_2(x) \end{pmatrix} \quad x \in [0,\, T] \right)$$

$$\begin{pmatrix} f_1(x,\, y_r(x),\, y_r(x-\tau)) = & -\frac{0.0000564\, y_2(x)\, y_1(x)}{0.01\, y_1(x)+1} - 0.0001\, y_1(x) + 1.93 \\ f_2(x,\, y_r(x),\, y_r(x-\tau)) = & 0.074\, y_1(x-400) - 0.1262\, y_2(x) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} [A,\, B] = & [0,\, 12000] & \text{(intervalo } x\text{)} \\ \{\alpha,\, n = \lceil \alpha \rceil\} = & \{1,\, 1\} & \\ \tau = & 400 & \\ h = & 10 & \text{Tamaño del paso} \\ m = & 2 & \text{Número de ecuaciones} \end{pmatrix}$$

Ecuaciones del método de
Adams–Bashforth–Moulton Fraccionario con Retraso (SFDDE)

$$x \in [0,\, T] \quad \{x_k = k\, h\} \quad \begin{cases} k = -i,\, -(i-1),\, \cdots,\, -1,\, 0,\, 1,\, 2,\, \cdots,\, N \\ h := \frac{T}{N} \quad i = \frac{\tau}{h} \end{cases}$$

$$y_{r\,h}(x_{k+1}) = g_r(0) + \frac{h^\alpha}{\Gamma\,(\alpha+2)}\, f_r(x_{k+1},$$

$$y_{1\,h}{}^{P}(x_{k+1}),\, \ldots,\, y_{r\,h}{}^{P}(x_{k+1}),\, y_{1\,h}(x_{k+1-i}),\, \ldots,\, y_{r\,h}(x_{k+1-i}))$$

$$+ \frac{h^\alpha}{\Gamma\,(\alpha+2)} \sum_{j=0}^{k} a_{j,k+1}\, f_r(x_j,\, y_{1\,h}(x_j),\, \ldots,\, y_{r\,h}(x_j),\, y_{1\,h}(x_{j-i}),\, \ldots,\, y_{r\,h}(x_{j-i}))$$

$$y_{r\,h}{}^{P}(x_{k+1}) = g_r(0) + \frac{1}{\Gamma\,(\alpha)} \sum_{j=0}^{k} b_{j,k+1}\, f_r\,(x_j,\, y_{1,h}(x_j),\, \ldots,\, y_{r,h}(x_j),\, y_{1\,h}(x_j-\tau),\, \ldots,\, y_{r\,h}(x_j-\tau))$$

$$r = 1, 2, \cdots, m$$

- $a_{j,k+1} = \begin{cases} k^{\alpha+1} - (k-\alpha)\,(k+1)^\alpha & j = 0 \\ (k-j+2)^{\alpha+1} + (k-j)^{\alpha+1} - 2\,(k-j+1)^{\alpha+1} & 1 \le j \le k \\ 1 & j = k+1 \end{cases}$
- $b_{j,k+1} = \frac{h^\alpha}{\alpha}((k+1-j)^\alpha - (k-j)^\alpha)$

Proceso iterativo.

- $k = 119$

k	x_k	${y_{1\,k}}^P$	$y_{1\,k}$	${y_{2\,k}}^P$	$y_{2\,k}$
119	1190	640.046	653.54	585.56	572.319
120	1200	630.215	643.637	583.615	570.751

- $k = 239$

k	x_k	${y_{1\,k}}^P$	$y_{1\,k}$	${y_{2\,k}}^P$	$y_{2\,k}$
239	2390	766.725	775.054	371.155	351.236
240	2400	766.656	775.07	374.482	354.596

- $k = 359$

k	x_k	${y_{1\,k}}^P$	$y_{1\,k}$	${y_{2\,k}}^P$	$y_{2\,k}$
359	3590	630.339	637.832	343.309	328.365
360	3600	632.3	639.79	343.076	328.053

- $k = 479$

k	x_k	${y_{1\,k}}^P$	$y_{1\,k}$	${y_{2\,k}}^P$	$y_{2\,k}$
479	4790	630.853	639.54	391.661	377.169
480	4800	630.471	639.142	391.007	376.524

- $k = 599$

k	x_k	${y_{1\,k}}^P$	$y_{1\,k}$	${y_{2\,k}}^P$	$y_{2\,k}$
599	5990	658.921	667.541	387.374	371.739
600	6000	658.588	667.213	387.558	371.938

- $k = 719$

k	x_k	${y_{1\,k}}^P$	$y_{1\,k}$	${y_{2\,k}}^P$	$y_{2\,k}$
719	7190	652.992	661.376	378.177	362.686
720	7200	653.14	661.527	378.275	362.778

- $k = 839$

k	x_k	${y_{1\,k}}^P$	$y_{1\,k}$	${y_{2\,k}}^P$	$y_{2\,k}$
839	8390	648.369	656.816	380.945	365.661
840	8400	648.408	656.854	380.887	365.601

- $k = 959$

k	x_k	${y_{1\,k}}^P$	$y_{1\,k}$	${y_{2\,k}}^P$	$y_{2\,k}$
959	9590	650.55	659.033	382.289	366.933
960	9600	650.511	658.994	382.281	366.926

- $k = 1079$

k	x_k	${y_{1\,k}}^P$	$y_{1\,k}$	${y_{2\,k}}^P$	$y_{2\,k}$
1079	10 790	651.063	659.526	381.437	366.052
1080	10 800	651.063	659.526	381.45	366.066

- $k = 1199$

k	x_k	${y_{1\,k}}^P$	$y_{1\,k}$	${y_{2\,k}}^P$	$y_{2\,k}$
1199	11 990	650.504	658.963	381.332	365.968
1200	12 000	650.512	658.971	381.331	365.967

Tabla de puntos $(x_k, {y_{r\,k}}^P)$ y $(x_k, y_{r\,k})$ $(r = 1, 2, \cdots, m)$.

k	x_k	${y_{1\,k}}^P$	${y_{2\,k}}^P$
120	1200	643.6365029240	570.7510734660
240	2400	775.0697635110	354.5963309000
360	3600	639.7902245440	328.0533951720
480	4800	639.1416232840	376.5241062750
600	6000	667.2128898670	371.9375953240
720	7200	661.5268987340	362.7784995170
840	8400	656.8535311170	365.6008154580
960	9600	658.9939873940	366.9259562180
1080	10800	659.5262361390	366.0657683760
1200	12000	658.9713981870	365.9668573210

k	x_k	$y_{1\,k}$	$y_{2\,k}$
0	0	87	60
120	1200	630.2145797070	583.6150714880
240	2400	766.6560214730	374.4815253110
360	3600	632.3004147720	343.0764656150
480	4800	630.4712883040	391.0073153280
600	6000	658.5884398850	387.5579746310
720	7200	653.1398689390	378.2750195430
840	8400	648.4080596460	380.8868704120
960	9600	650.5111586100	382.2810210760
1080	10800	651.0632494390	381.4504375190
1200	12000	650.5121042770	381.3310886060

$y(12\,000) \approx y_{1200} = 650.5121042770$

Solución aproximada del sistema SFDDE
$y_r(x)$ $(h = 10)$
calculada con el método *Adams–Bashforth–Moulton Fraccionario con Retraso.*

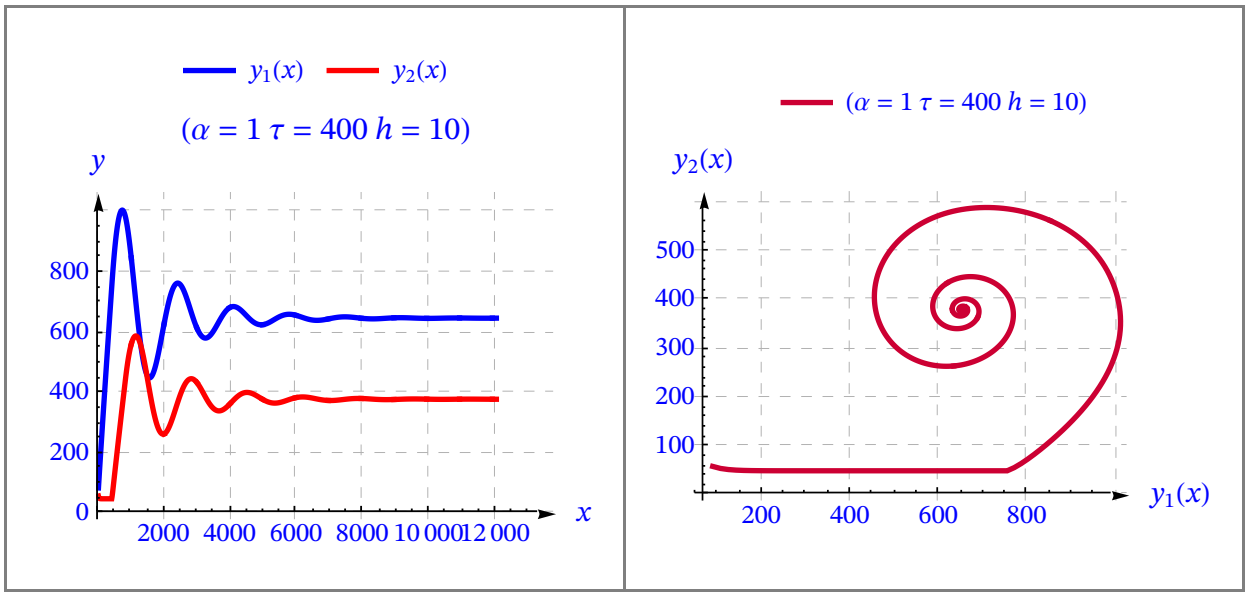


Figura 3.1. Evolución temporal de $G(t) \equiv y_1(x)$ y de $I(t) \equiv y_2(x)$, y diagrama de fases $G(t) - I(t)$ empleando los parámetros *Set 1* y $\tau = 400 < \tau_0 = 607.92$.

Caso I.

α_1	α_2	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	G_0	I_0	τ
1	1	0.0001	0.1262	0.0000564	0.01	0.074	1.93	87	60	700

Método de *Adams–Bashforth–Moulton Fraccionario con Retraso* (ABMFR) para Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Fraccionarias con Retraso (SFDDE).

$$(P) \equiv \begin{cases} D^{(\alpha)}\, y_r(x) = f_r\,(x,\ y_1(x),\ \ldots,\ y_r(x), & x \in [0,\ T] \quad 0 < \alpha \le 1 \\ \qquad y_1(x-\tau),\ \ldots,\ y_r(x-\tau)) & \\ y_r(x) = g_r(x) & x \in [-\tau,\ 0] \\ y_r(0) = y_{r\,0} & \end{cases}$$

$$r = 1,\ 2,\cdots,\ m$$

$$(P) \equiv \left(\begin{pmatrix} D\, y_1(x) = -\frac{0.0000564\, y_2(x)\, y_1(x)}{0.01\, y_1(x)+1} - 0.0001\, y_1(x) + 1.93 \\ D\, y_2(x) = 0.074\, y_1(x-700) - 0.1262\, y_2(x) \\ (\, y_1(0) = 87 \quad y_2(0) = 60\,) \end{pmatrix} \quad x \in [0,\ T] \right)$$

$$\begin{pmatrix} f_1(x,\ y_r(x),\ y_r(x-\tau)) = & -\frac{0.0000564\, y_2(x)\, y_1(x)}{0.01\, y_1(x)+1} - 0.0001\, y_1(x) + 1.93 \\ f_2(x,\ y_r(x),\ y_r(x-\tau)) = & 0.074\, y_1(x-700) - 0.1262\, y_2(x) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} [A,\ B] = & [0,\ 12000] & (\text{intervalo } x) \\ \{\alpha,\ n = \lceil \alpha \rceil\} = & \{1,\ 1\} & \\ \tau = & 700 & \\ h = & 10 & \text{Tamaño del paso} \\ m = & 2 & \text{Número de ecuaciones} \end{pmatrix}$$

Ecuaciones del método de

Adams–Bashforth–Moulton Fraccionario con Retraso (SFDDE)

$$x \in [0, T] \quad \{x_k = k\,h\} \quad \begin{cases} k = -i, -(i-1), \cdots, -1, 0, 1, 2, \cdots, N \\ h := \frac{T}{N} \quad i = \frac{\tau}{h} \end{cases}$$

$$y_{r\,h}(x_{k+1}) = g_r(0) + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} f_r(x_{k+1},$$

$$y_{1\,h}{}^P(x_{k+1}), \ldots, y_{r\,h}{}^P(x_{k+1}), y_{1\,h}(x_{k+1-i}), \ldots, y_{r\,h}(x_{k+1-i}))$$

$$+ \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} \sum_{j=0}^{k} a_{j,k+1}\, f_r(x_j, y_{1\,h}(x_j), \ldots, y_{r\,h}(x_j), y_{1\,h}(x_{j-i}), \ldots, y_{r\,h}(x_{j-i}))$$

$$y_{r\,h}{}^P(x_{k+1}) = g_r(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^{k} b_{j,k+1}\, f_r(x_j, y_{1,h}(x_j), \ldots, y_{r,h}(x_j), y_{1\,h}(x_j - \tau), \ldots, y_{r\,h}(x_j - \tau))$$

$r = 1, 2, \cdots, m$

- $a_{j,k+1} = \begin{cases} k^{\alpha+1} - (k-\alpha)(k+1)^\alpha & j = 0 \\ (k-j+2)^{\alpha+1} + (k-j)^{\alpha+1} - 2(k-j+1)^{\alpha+1} & 1 \le j \le k \\ 1 & j = k+1 \end{cases}$
- $b_{j,k+1} = \frac{h^\alpha}{\alpha}((k+1-j)^\alpha - (k-j)^\alpha)$

Proceso iterativo.

- $k = 119$

k	x_k	$y_{1\,k}{}^P$	$y_{1\,k}$	$y_{2\,k}{}^P$	$y_{2\,k}$
119	1190	1365.99	1378.74	518.001	490.042
120	1200	1356.47	1369.45	527.279	499.336

- $k = 239$

k	x_k	$y_{1\,k}{}^P$	$y_{1\,k}$	$y_{2\,k}{}^P$	$y_{2\,k}$
239	2390	224.956	229.707	276.894	278.266
240	2400	233.403	237.971	264.766	265.914

- $k = 359$

k	x_k	$y_{1\,k}{}^P$	$y_{1\,k}$	$y_{2\,k}{}^P$	$y_{2\,k}$
359	3590	1266.04	1279.09	533.402	506.083
360	3600	1255.97	1269.24	542.149	514.904

- $k = 479$

k	x_k	$y_{1k}{}^P$	y_{1k}	$y_{2k}{}^P$	y_{2k}
479	4790	256.508	261.003	255.703	254.836
480	4800	265.344	269.67	245.231	244.136

- $k = 599$

k	x_k	$y_{1k}{}^P$	y_{1k}	$y_{2k}{}^P$	y_{2k}
599	5990	1224.47	1237.71	542.511	515.714
600	6000	1214.05	1227.5	550.864	524.15

- $k = 719$

k	x_k	$y_{1k}{}^P$	y_{1k}	$y_{2k}{}^P$	y_{2k}
719	7190	274.614	278.917	242.363	240.59
720	7200	283.783	287.922	232.577	230.558

- $k = 839$

k	x_k	$y_{1k}{}^P$	y_{1k}	$y_{2k}{}^P$	y_{2k}
839	8390	1201.37	1214.81	551.096	524.566
840	8400	1190.57	1204.22	559.246	532.805

- $k = 959$

k	x_k	$y_{1k}{}^P$	y_{1k}	$y_{2k}{}^P$	y_{2k}
959	9590	287.922	292.05	231.38	229.091
960	9600	297.41	301.376	221.992	219.44

- $k = 1079$

k	x_k	$y_{1k}{}^P$	y_{1k}	$y_{2k}{}^P$	y_{2k}
1079	10 790	1184.96	1198.61	559.533	533.173
1080	10 800	1173.78	1187.62	567.55	541.286

- $k = 1199$

k	x_k	$y_{1k}{}^P$	y_{1k}	$y_{2k}{}^P$	y_{2k}
1199	11 990	299.475	303.433	221.296	218.624
1200	12 000	309.278	313.077	212.209	209.256

Tabla de puntos $(x_k, y_{rk}{}^P)$ y (x_k, y_{rk}) $(r = 1, 2, \cdots, m)$.

k	x_k	${y_{1\,k}}^P$	${y_{2\,k}}^P$
120	1200	1369.4488044300	499.3359153630
240	2400	237.9713805800	265.9135966880
360	3600	1269.2383481400	514.9044153930
480	4800	269.6703745710	244.1358528290
600	6000	1227.5006761900	524.1502124460
720	7200	287.9216452360	230.5584861410
840	8400	1204.2184730000	532.8051219760
960	9600	301.3761347470	219.4403015440
1080	10800	1187.6203125700	541.2864920800
1200	12000	313.0765482270	209.2560245140

k	x_k	$y_{1\,k}$	$y_{2\,k}$
0	0	87	60
120	1200	1356.4717634100	527.2792828000
240	2400	233.4030755580	264.7658384920
360	3600	1255.9745774300	542.1485453830
480	4800	265.3439657420	245.2312330290
600	6000	1214.0500255000	550.8638870720
720	7200	283.7826693250	232.5766140750
840	8400	1190.5739854100	559.2455421570
960	9600	297.4096673280	221.9922978770
1080	10800	1173.7783747900	567.5502486320
1200	12000	309.2782308250	212.2094093410

$y(12\,000) \approx y_{1200} = 309.2782308250$

Solución aproximada del sistema SFDDE
$y_r(x)$ $(h = 10)$
calculada con el método *Adams–Bashforth–Moulton Fraccionario con Retraso.*

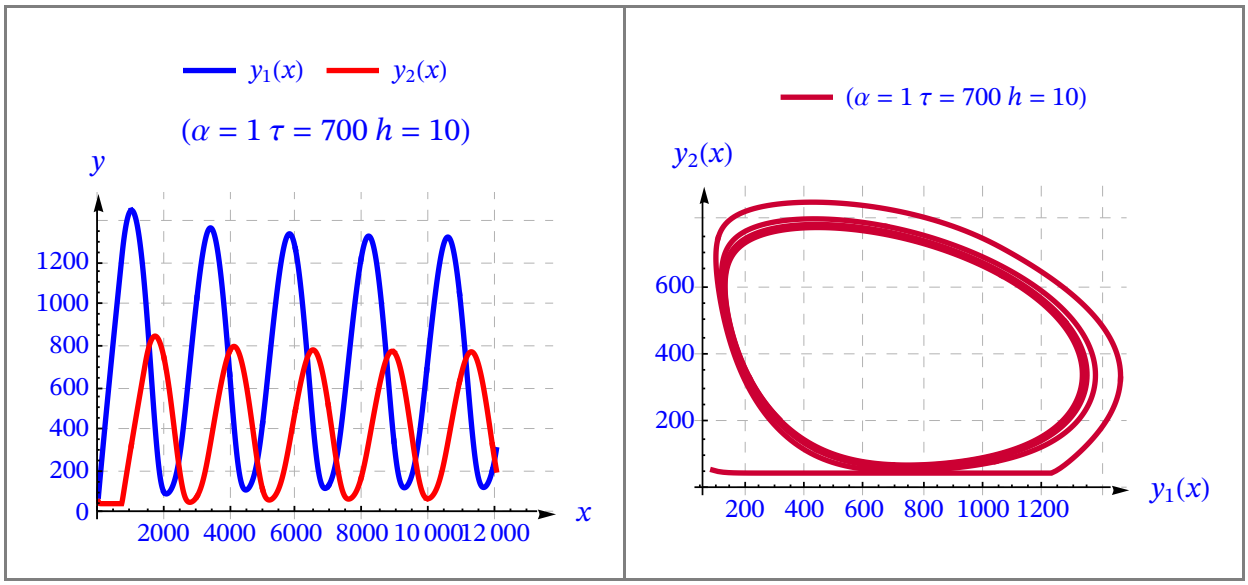


Figura 3.2. Evolución temporal de $G(t) \equiv y_1(x)$ y de $I(t) \equiv y_2(x)$, y diagrama de fases $G(t) - I(t)$ empleando los parámetros *Set 1* y $\tau = 700 > \tau_0$.

■ Problema 3.1.2. Modelo de Interacción Glucosa–Insulina con un SFDDE. Caso II. ([LEKD19])

Sea el sistema de ecuaciones diferenciales fraccionarias con retraso SFDDE que representa el modelo de interacción de glucosa–insulina con órdenes inconmensurables:

$$(P) \equiv \begin{cases} D^{(\alpha_1)}\, y_1(x) = -b_1\, y_1(x) - \frac{b_3\, y_1(x)\, y_2(x)}{b_4\, y_1(x)+1} + b_6 & x \in (0,\ T),\ 0 < \alpha \le 1 \\ D^{(\alpha_2)}\, y_2\,(x) = -b_2\, y_2(x) + b_5\, y_1(x-\tau) & \tau \ge 0 \\ y(x) = \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 87 \\ 60 \end{pmatrix} & x \in [-\tau,\ 0] \\ y(0) = \begin{pmatrix} G_0 \\ I_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 87 \\ 60 \end{pmatrix} & \end{cases}$$

(i) Calcúlese la solución numérica mediante el método de *Adams–Bashforth–Moulton fraccionario con retraso* (ABMFR) tomando los valores de los parámetros dados.

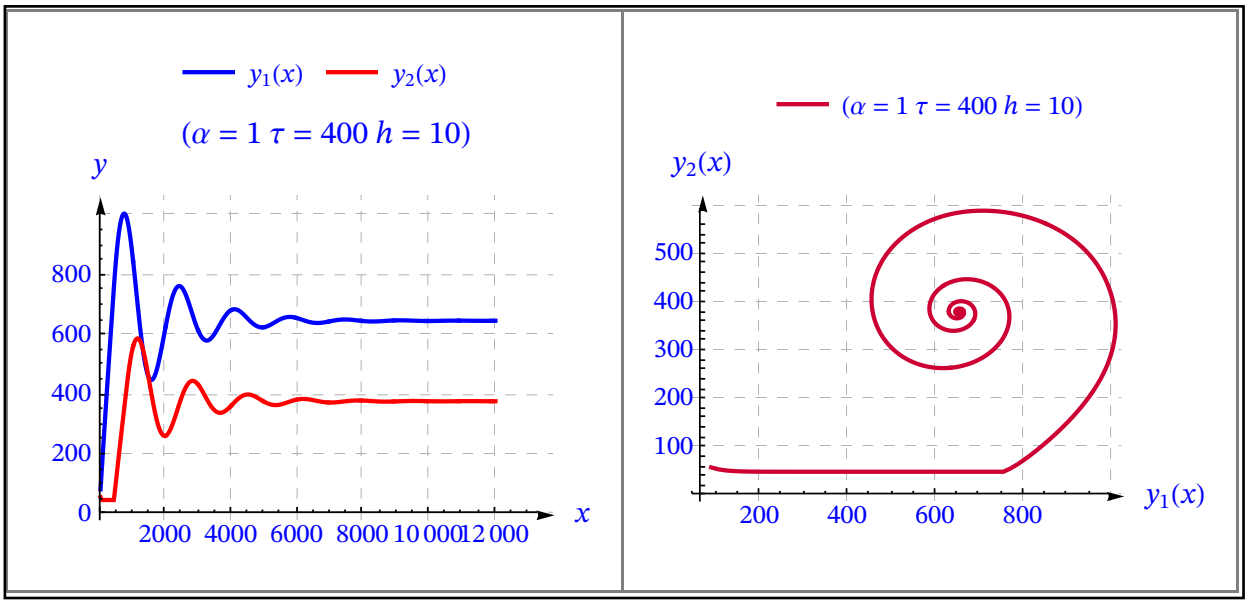
(ii) Represéntese la solución del método ABMFR en el intervalo $[0,\ T]$, y el diagrama de fases en el plano $y(x),\ y(x-\tau)$.

- Punto de equilibrio positivo: $(G^*,\ I^*) = (650.59,\ 381.49)$
- Punto de bifurcación: $\tau_0 = 607.92$.

(a) Caso I:

α_1	α_2	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	G_0	I_0	τ
1	1	0.0001	0.1262	0.0000564	0.01	0.074	1.93	87	60	400

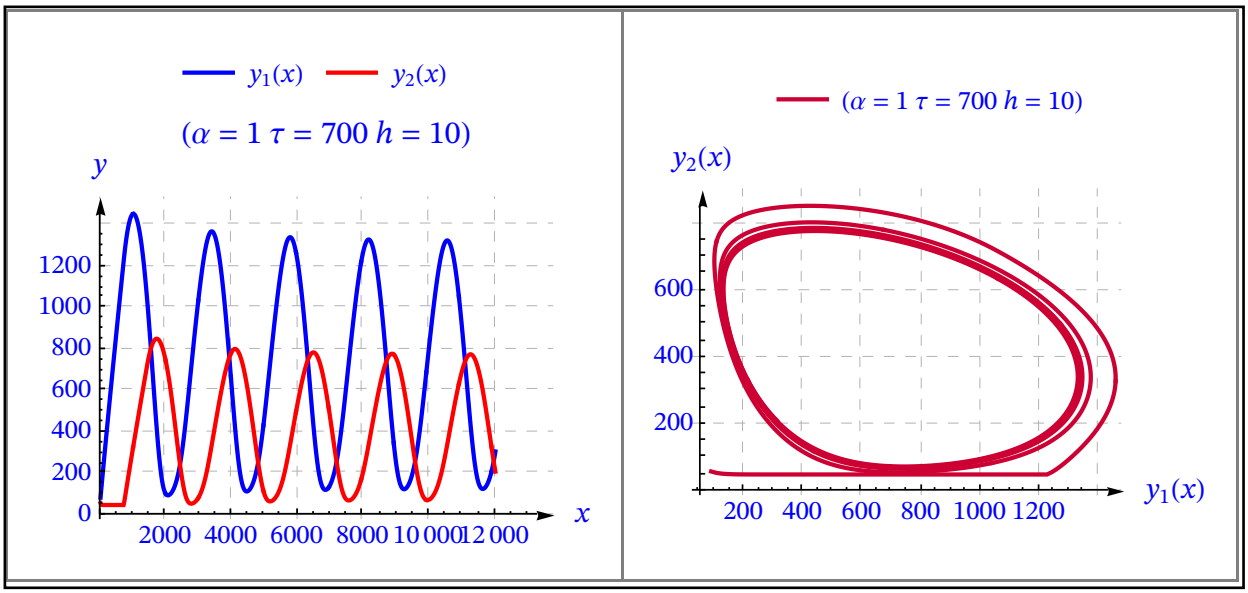
$[0,\ T] = [0,\ 12\,000]$ min.



(b) Caso I:

α_1	α_2	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	G_0	I_0	τ
1	1	0.0001	0.1262	0.0000564	0.01	0.074	1.93	87	60	700

$[0,\ T] = [0,\ 12\,000]$ min.



Indicación:

(i) El punto de equilibrio positivo $(G^*, I^*) = (650.59,\ 381.49)$ es *asintóticamente estable* cuando $\tau = 400 < \tau_0 = 607.92$.

(ii) El punto de equilibrio positivo $(G^*, I^*) = (650.59,\ 381.49)$ es *inestable* para $\tau = 700 > \tau_0 = 607.92$ y ocurre una bifurcación de Hopf en el punto de equilibrio.

SOLUCIÓN

(a)

Caso I.

α_1	α_2	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	G_0	I_0	τ
1	1	0.0001	0.1262	0.0000564	0.01	0.074	1.93	87	60	400

Método de *Adams–Bashforth–Moulton Fraccionario con Retraso* (ABMFR) para Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Fraccionarias con Retraso (SFDDE).

$$(P) \equiv \begin{cases} D^{(\alpha)}\, y_r(x) = f_r\,(x,\, y_1(x),\, \ldots,\, y_r(x), & x \in [0,\, T] \quad 0 < \alpha \le 1 \\ \qquad y_1(x-\tau),\, \ldots,\, y_r(x-\tau)) & \\ y_r(x) = g_r(x) & x \in [-\tau,\, 0] \\ y_r(0) = y_{r\,0} & \end{cases}$$

$r = 1, 2, \cdots, m$

$$(P) \equiv \left(\begin{pmatrix} D\, y_1(x) = -\frac{0.0000564\, y_2(x)\, y_1(x)}{0.01\, y_1(x)+1} - 0.0001\, y_1(x) + 1.93 \\ D\, y_2(x) = 0.074\, y_1(x-400) - 0.1262\, y_2(x) \\ (\, y_1(0) = 87 \quad y_2(0) = 60\,) \end{pmatrix} \quad x \in [0,\, T] \right)$$

$$\begin{pmatrix} f_1(x,\, y_r(x),\, y_r(x-\tau)) = & -\frac{0.0000564\, y_2(x)\, y_1(x)}{0.01\, y_1(x)+1} - 0.0001\, y_1(x) + 1.93 \\ f_2(x,\, y_r(x),\, y_r(x-\tau)) = & 0.074\, y_1(x-400) - 0.1262\, y_2(x) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} [A,\, B] = & [0,\, 12000] & (\text{intervalo } x) \\ \{\alpha,\, n = \lceil \alpha \rceil\} = & \{1,\, 1\} & \\ \tau = & 400 & \\ h = & 10 & \text{Tamaño del paso} \\ m = & 2 & \text{Número de ecuaciones} \end{pmatrix}$$

Ecuaciones del método de

Adams–Bashforth–Moulton Fraccionario con Retraso (SFDDE)

$$x \in [0, T] \quad \{x_k = k\,h\} \quad \begin{cases} k = -i, -(i-1), \cdots, -1, 0, 1, 2, \cdots, N \\ h := \frac{T}{N} \quad i = \frac{\tau}{h} \end{cases}$$

$$y_{r\,h}(x_{k+1}) = g_r(0) + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} f_r(x_{k+1},$$

$$y_{1\,h}{}^P(x_{k+1}), \ldots, y_{r\,h}{}^P(x_{k+1}), y_{1\,h}(x_{k+1-i}), \ldots, y_{r\,h}(x_{k+1-i}))$$

$$+ \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} \sum_{j=0}^{k} a_{j,k+1}\, f_r(x_j, y_{1\,h}(x_j), \ldots, y_{r\,h}(x_j), y_{1\,h}(x_{j-i}), \ldots, y_{r\,h}(x_{j-i}))$$

$$y_{r\,h}{}^P(x_{k+1}) = g_r(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^{k} b_{j,k+1}\, f_r(x_j, y_{1,h}(x_j), \ldots, y_{r,h}(x_j), y_{1\,h}(x_j - \tau), \ldots, y_{r\,h}(x_j - \tau))$$

$$r = 1, 2, \cdots, m$$

- $a_{j,k+1} = \begin{cases} k^{\alpha+1} - (k-\alpha)(k+1)^\alpha & j = 0 \\ (k-j+2)^{\alpha+1} + (k-j)^{\alpha+1} - 2(k-j+1)^{\alpha+1} & 1 \le j \le k \\ 1 & j = k+1 \end{cases}$
- $b_{j,k+1} = \frac{h^\alpha}{\alpha}((k+1-j)^\alpha - (k-j)^\alpha)$

Proceso iterativo.

- $k = 119$

k	x_k	$y_{1\,k}{}^P$	$y_{1\,k}$	$y_{2\,k}{}^P$	$y_{2\,k}$
119	1190	640.046	653.54	585.56	572.319
120	1200	630.215	643.637	583.615	570.751

- $k = 239$

k	x_k	$y_{1\,k}{}^P$	$y_{1\,k}$	$y_{2\,k}{}^P$	$y_{2\,k}$
239	2390	766.725	775.054	371.155	351.236
240	2400	766.656	775.07	374.482	354.596

- $k = 359$

k	x_k	$y_{1\,k}{}^P$	$y_{1\,k}$	$y_{2\,k}{}^P$	$y_{2\,k}$
359	3590	630.339	637.832	343.309	328.365
360	3600	632.3	639.79	343.076	328.053

- $k = 479$

k	x_k	${y_{1\,k}}^P$	$y_{1\,k}$	${y_{2\,k}}^P$	$y_{2\,k}$
479	4790	630.853	639.54	391.661	377.169
480	4800	630.471	639.142	391.007	376.524

- $k = 599$

k	x_k	${y_{1\,k}}^P$	$y_{1\,k}$	${y_{2\,k}}^P$	$y_{2\,k}$
599	5990	658.921	667.541	387.374	371.739
600	6000	658.588	667.213	387.558	371.938

- $k = 719$

k	x_k	${y_{1\,k}}^P$	$y_{1\,k}$	${y_{2\,k}}^P$	$y_{2\,k}$
719	7190	652.992	661.376	378.177	362.686
720	7200	653.14	661.527	378.275	362.778

- $k = 839$

k	x_k	${y_{1\,k}}^P$	$y_{1\,k}$	${y_{2\,k}}^P$	$y_{2\,k}$
839	8390	648.369	656.816	380.945	365.661
840	8400	648.408	656.854	380.887	365.601

- $k = 959$

k	x_k	${y_{1\,k}}^P$	$y_{1\,k}$	${y_{2\,k}}^P$	$y_{2\,k}$
959	9590	650.55	659.033	382.289	366.933
960	9600	650.511	658.994	382.281	366.926

- $k = 1079$

k	x_k	${y_{1\,k}}^P$	$y_{1\,k}$	${y_{2\,k}}^P$	$y_{2\,k}$
1079	10 790	651.063	659.526	381.437	366.052
1080	10 800	651.063	659.526	381.45	366.066

- $k = 1199$

k	x_k	${y_{1\,k}}^P$	$y_{1\,k}$	${y_{2\,k}}^P$	$y_{2\,k}$
1199	11 990	650.504	658.963	381.332	365.968
1200	12 000	650.512	658.971	381.331	365.967

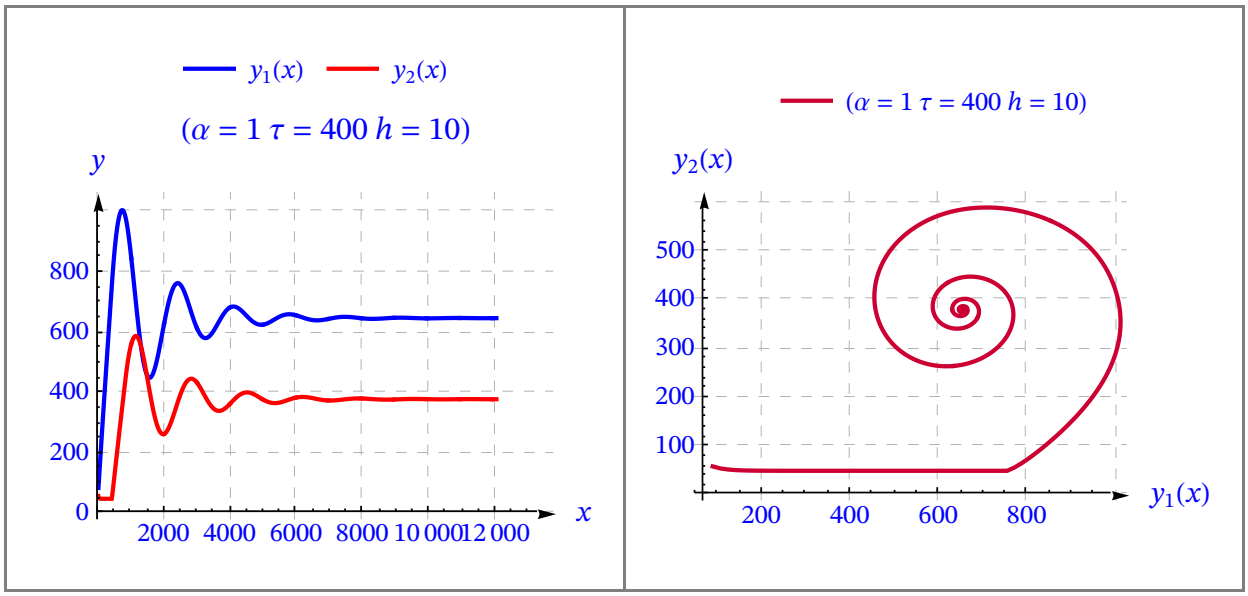
Tabla de puntos $(x_k, {y_{r\,k}}^P)$ y $(x_k, y_{r\,k})$ $(r = 1, 2, \cdots, m)$.

k	x_k	$y_{1\,k}{}^{P}$	$y_{2\,k}{}^{P}$
120	1200	643.6365029240	570.7510734660
240	2400	775.0697635110	354.5963309000
360	3600	639.7902245440	328.0533951720
480	4800	639.1416232840	376.5241062750
600	6000	667.2128898670	371.9375953240
720	7200	661.5268987340	362.7784995170
840	8400	656.8535311170	365.6008154580
960	9600	658.9939873940	366.9259562180
1080	10800	659.5262361390	366.0657683760
1200	12000	658.9713981870	365.9668573210

k	x_k	$y_{1\,k}$	$y_{2\,k}$
0	0	87	60
120	1200	630.2145797070	583.6150714880
240	2400	766.6560214730	374.4815253110
360	3600	632.3004147720	343.0764656150
480	4800	630.4712883040	391.0073153280
600	6000	658.5884398850	387.5579746310
720	7200	653.1398689390	378.2750195430
840	8400	648.4080596460	380.8868704120
960	9600	650.5111586100	382.2810210760
1080	10800	651.0632494390	381.4504375190
1200	12000	650.5121042770	381.3310886060

$y(12\,000) \approx y_{1200} = 650.5121042770$

Solución aproximada del sistema SFDDE
$y_r(x)$ $(h = 10)$
calculada con el método *Adams–Bashforth–Moulton Fraccionario con Retraso.*



(b)

Caso I.\n\t\t

α_1	α_2	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	G_0	I_0	τ
1	1	0.0001	0.1262	0.0000564	0.01	0.074	1.93	87	60	700

Método de *Adams–Bashforth–Moulton Fraccionario con Retraso* (ABMFR) para Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Fraccionarias con Retraso (SFDDE).

$$(P) \equiv \begin{cases} D^{(\alpha)}\, y_r(x) = f_r\,(x,\ y_1(x),\ \ldots,\ y_r(x), & x \in [0,\ T] \quad 0 < \alpha \le 1 \\ \qquad y_1(x-\tau),\ \ldots,\ y_r(x-\tau)) & \\ y_r(x) = g_r(x) & x \in [-\tau,\ 0] \\ y_r(0) = y_{r\,0} & \end{cases}$$

$r = 1, 2, \cdots, m$

$$(P) \equiv \left(\begin{pmatrix} D\, y_1(x) = -\frac{0.0000564\, y_2(x)\, y_1(x)}{0.01\, y_1(x)+1} - 0.0001\, y_1(x) + 1.93 \\ D\, y_2(x) = 0.074\, y_1(x-700) - 0.1262\, y_2(x) \end{pmatrix} \quad x \in [0,\ T] \right)$$

$$(y_1(0) = 87 \quad y_2(0) = 60)$$

$$\begin{pmatrix} f_1(x,\ y_r(x),\ y_r(x-\tau)) = & -\frac{0.0000564\, y_2(x)\, y_1(x)}{0.01\, y_1(x)+1} - 0.0001\, y_1(x) + 1.93 \\ f_2(x,\ y_r(x),\ y_r(x-\tau)) = & 0.074\, y_1(x-700) - 0.1262\, y_2(x) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} [A, B] = & [0, 12000] & \text{(intervalo } x\text{)} \\ \{\alpha, n = \lceil \alpha \rceil\} = & \{1,\ 1\} & \\ \tau = & 700 & \\ h = & 10 & \text{Tamaño del paso} \\ m = & 2 & \text{Número de ecuaciones} \end{pmatrix}$$

Ecuaciones del método de

Adams–Bashforth–Moulton Fraccionario con Retraso (SFDDE)

$$x \in [0, T] \quad \{x_k = k\,h\} \quad \begin{cases} k = -i, -(i-1), \cdots, -1, 0, 1, 2, \cdots, N \\ h := \frac{T}{N} \quad i = \frac{\tau}{h} \end{cases}$$

$$y_{r\,h}(x_{k+1}) = g_r(0) + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} f_r(x_{k+1},$$

$$y_{1\,h}{}^P(x_{k+1}), \ldots, y_{r\,h}{}^P(x_{k+1}), y_{1\,h}(x_{k+1-i}), \ldots, y_{r\,h}(x_{k+1-i}))$$

$$+ \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} \sum_{j=0}^{k} a_{j,k+1}\, f_r(x_j, y_{1\,h}(x_j), \ldots, y_{r\,h}(x_j), y_{1\,h}(x_{j-i}), \ldots, y_{r\,h}(x_{j-i}))$$

$$y_{r\,h}{}^P(x_{k+1}) = g_r(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^{k} b_{j,k+1}\, f_r(x_j, y_{1,h}(x_j), \ldots, y_{r,h}(x_j), y_{1\,h}(x_j - \tau), \ldots, y_{r\,h}(x_j - \tau))$$

$$r = 1, 2, \cdots, m$$

- $a_{j,k+1} = \begin{cases} k^{\alpha+1} - (k-\alpha)(k+1)^\alpha & j = 0 \\ (k-j+2)^{\alpha+1} + (k-j)^{\alpha+1} - 2(k-j+1)^{\alpha+1} & 1 \le j \le k \\ 1 & j = k+1 \end{cases}$
- $b_{j,k+1} = \frac{h^\alpha}{\alpha}((k+1-j)^\alpha - (k-j)^\alpha)$

Proceso iterativo.

- $k = 119$

k	x_k	$y_{1\,k}{}^P$	$y_{1\,k}$	$y_{2\,k}{}^P$	$y_{2\,k}$
119	1190	1365.99	1378.74	518.001	490.042
120	1200	1356.47	1369.45	527.279	499.336

- $k = 239$

k	x_k	$y_{1\,k}{}^P$	$y_{1\,k}$	$y_{2\,k}{}^P$	$y_{2\,k}$
239	2390	224.956	229.707	276.894	278.266
240	2400	233.403	237.971	264.766	265.914

- $k = 359$

k	x_k	$y_{1\,k}{}^P$	$y_{1\,k}$	$y_{2\,k}{}^P$	$y_{2\,k}$
359	3590	1266.04	1279.09	533.402	506.083
360	3600	1255.97	1269.24	542.149	514.904

- $k = 479$

k	x_k	$y_{1k}{}^P$	y_{1k}	$y_{2k}{}^P$	y_{2k}
479	4790	256.508	261.003	255.703	254.836
480	4800	265.344	269.67	245.231	244.136

- $k = 599$

k	x_k	$y_{1k}{}^P$	y_{1k}	$y_{2k}{}^P$	y_{2k}
599	5990	1224.47	1237.71	542.511	515.714
600	6000	1214.05	1227.5	550.864	524.15

- $k = 719$

k	x_k	$y_{1k}{}^P$	y_{1k}	$y_{2k}{}^P$	y_{2k}
719	7190	274.614	278.917	242.363	240.59
720	7200	283.783	287.922	232.577	230.558

- $k = 839$

k	x_k	$y_{1k}{}^P$	y_{1k}	$y_{2k}{}^P$	y_{2k}
839	8390	1201.37	1214.81	551.096	524.566
840	8400	1190.57	1204.22	559.246	532.805

- $k = 959$

k	x_k	$y_{1k}{}^P$	y_{1k}	$y_{2k}{}^P$	y_{2k}
959	9590	287.922	292.05	231.38	229.091
960	9600	297.41	301.376	221.992	219.44

- $k = 1079$

k	x_k	$y_{1k}{}^P$	y_{1k}	$y_{2k}{}^P$	y_{2k}
1079	10 790	1184.96	1198.61	559.533	533.173
1080	10 800	1173.78	1187.62	567.55	541.286

- $k = 1199$

k	x_k	$y_{1k}{}^P$	y_{1k}	$y_{2k}{}^P$	y_{2k}
1199	11 990	299.475	303.433	221.296	218.624
1200	12 000	309.278	313.077	212.209	209.256

Tabla de puntos $(x_k, y_{rk}{}^P)$ y (x_k, y_{rk}) $(r = 1, 2, \cdots, m)$.

k	x_k	$y_{1\,k}{}^{P}$	$y_{2\,k}{}^{P}$
120	1200	1369.4488044300	499.3359153630
240	2400	237.9713805800	265.9135966880
360	3600	1269.2383481400	514.9044153930
480	4800	269.6703745710	244.1358528290
600	6000	1227.5006761900	524.1502124460
720	7200	287.9216452360	230.5584861410
840	8400	1204.2184730000	532.8051219760
960	9600	301.3761347470	219.4403015440
1080	10800	1187.6203125700	541.2864920800
1200	12000	313.0765482270	209.2560245140

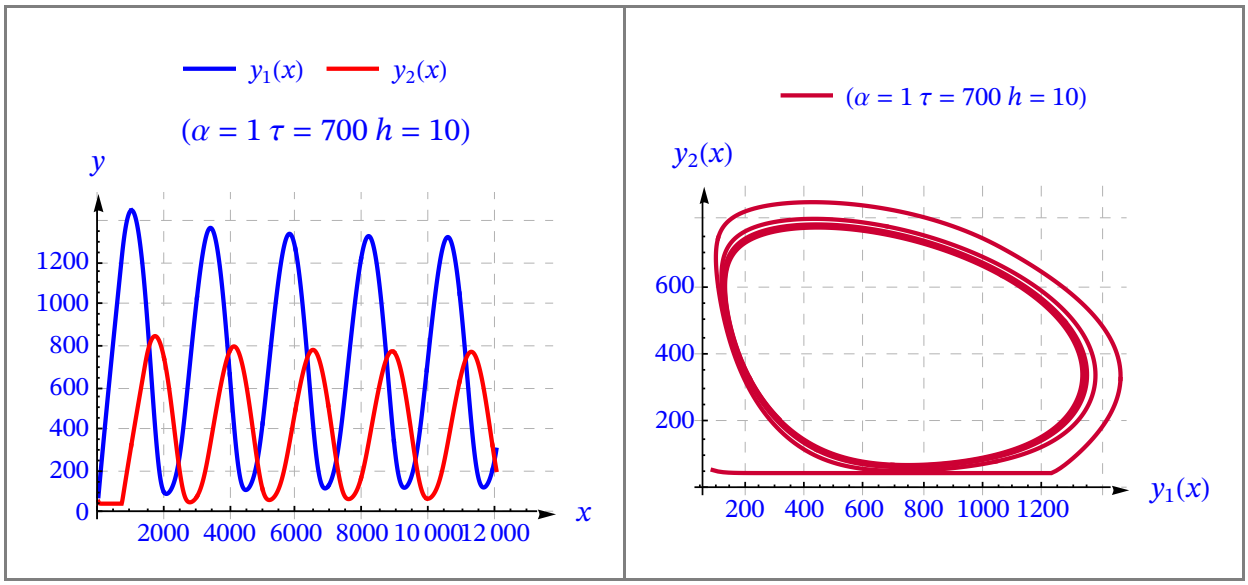
k	x_k	$y_{1\,k}$	$y_{2\,k}$
0	0	87	60
120	1200	1356.4717634100	527.2792828000
240	2400	233.4030755580	264.7658384920
360	3600	1255.9745774300	542.1485453830
480	4800	265.3439657420	245.2312330290
600	6000	1214.0500255000	550.8638870720
720	7200	283.7826693250	232.5766140750
840	8400	1190.5739854100	559.2455421570
960	9600	297.4096673280	221.9922978770
1080	10800	1173.7783747900	567.5502486320
1200	12000	309.2782308250	212.2094093410

$$y(12\,000) \approx y_{1200} = 309.2782308250$$

Solución aproximada del sistema SFDDE

$y_r(x)$ $(h = 10)$

calculada con el método *Adams–Bashforth–Moulton Fraccionario con Retraso.*



Con respecto al *Caso II*, la resolución del sistema numérico ahora sí emplea órdenes fraccionarios, puesto que q_1, $q_2 = 0.92$. Haciendo uso de la ecuación (3.1.5), se obtiene el punto de equilibrio $(G^*, I^*) = (722.65, 359.07)$. La frecuencia crítica del sistema es $\omega_0 = 0.001382$ y el retardo crítico es $\tau_0 = 1365.6$. La Hipótesis 1 es válida, por lo que, aplicando de nuevo el Teorema 3.1.6, la solución es asintóticamente estable localmente para valores por debajo del retardo crítico y se convierte en inestable cuando supera el valor τ_0, dando lugar a una bifurcación de Hopf. Los resultados del análisis se muestran en las figuras 3.3 y 3.4.

Caso II.

α_1	α_2	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	G_0	I_0	τ
0.92	0.92	0.00020893	0.148927	0.0000564	0.01	0.074	1.93	87	60	1000

Método de *Adams–Bashforth–Moulton Fraccionario con Retraso* (ABMFR) para Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Fraccionarias con Retraso (SFDDE).

$$(P) \equiv \begin{cases} D^{(\alpha)}\, y_r(x) = f_r\,(x,\, y_1(x),\, \ldots,\, y_r(x), \\ \qquad\qquad y_1(x-\tau),\, \ldots,\, y_r(x-\tau)) & x \in [0,\, T] \quad 0 < \alpha \le 1 \\ y_r(x) = g_r(x) & x \in [-\tau,\, 0] \\ y_r(0) = y_{r\,0} \end{cases}$$

$$r = 1, 2, \cdots, m$$

$$(P) \equiv$$

$$\left(\begin{array}{c} \left(\begin{array}{c} D^{0.92}\, y_1(x) = -\frac{0.0000564\, y_2(x)\, y_1(x)}{0.01\, y_1(x)+1} - 0.00020893\, y_1(x) + 1.93 \\ D^{0.92}\, y_2(x) = 0.074\, y_1(x-1000) - 0.148927\, y_2(x) \end{array} \right) \quad x \in [0,\, T] \\ (\, y_1(0) = 87 \quad y_2(0) = 60\,) \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ll} f_1(x,\, y_r(x),\, y_r(x-\tau)) = & -\frac{0.0000564\, y_2(x)\, y_1(x)}{0.01\, y_1(x)+1} - 0.00020893\, y_1(x) + 1.93 \\ f_2(x,\, y_r(x),\, y_r(x-\tau)) = & 0.074\, y_1(x-1000) - 0.148927\, y_2(x) \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{lll} [A,\, B] = & [0,\, 30000] & (\text{intervalo } x) \\ \{\alpha,\, n = \lceil \alpha \rceil\} = & \{0.92,\, 1\} & \\ \tau = & 1000 & \\ h = & 10 & \text{Tamaño del paso} \\ m = & 2 & \text{Número de ecuaciones} \end{array} \right)$$

Ecuaciones del método de

Adams–Bashforth–Moulton Fraccionario con Retraso (SFDDE)

$$x \in [0, T] \quad \{x_k = k\,h\} \quad \begin{cases} k = -i, -(i-1), \cdots, -1, 0, 1, 2, \cdots, N \\ h := \frac{T}{N} \quad i = \frac{\tau}{h} \end{cases}$$

$$y_{r\,h}(x_{k+1}) = g_r(0) + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} f_r(x_{k+1},$$

$$y_{1\,h}{}^P(x_{k+1}), \ldots, y_{r\,h}{}^P(x_{k+1}), y_{1\,h}(x_{k+1-i}), \ldots, y_{r\,h}(x_{k+1-i}))$$

$$+ \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} \sum_{j=0}^{k} a_{j,k+1}\, f_r(x_j, y_{1\,h}(x_j), \ldots, y_{r\,h}(x_j), y_{1\,h}(x_{j-i}), \ldots, y_{r\,h}(x_{j-i}))$$

$$y_{r\,h}{}^P(x_{k+1}) = g_r(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^{k} b_{j,k+1}\, f_r(x_j, y_{1,h}(x_j), \ldots, y_{r,h}(x_j), y_{1\,h}(x_j - \tau), \ldots, y_{r\,h}(x_j - \tau))$$

$r = 1, 2, \cdots, m$

- $a_{j,k+1} = \begin{cases} k^{\alpha+1} - (k-\alpha)(k+1)^\alpha & j = 0 \\ (k-j+2)^{\alpha+1} + (k-j)^{\alpha+1} - 2(k-j+1)^{\alpha+1} & 1 \le j \le k \\ 1 & j = k+1 \end{cases}$
- $b_{j,k+1} = \frac{h^\alpha}{\alpha}((k+1-j)^\alpha - (k-j)^\alpha)$

Proceso iterativo.

- $k = 299$

k	x_k	$y_{1\,k}{}^P$	$y_{1\,k}$	$y_{2\,k}{}^P$	$y_{2\,k}$
299	2990	422.489	427.8	511.156	496.957
300	3000	420.172	425.429	508.07	493.948

- $k = 599$

k	x_k	$y_{1\,k}{}^P$	$y_{1\,k}$	$y_{2\,k}{}^P$	$y_{2\,k}$
599	5990	719.324	724.795	470.9	452.819
600	6000	715.925	721.39	471.1	453.076

- $k = 899$

k	x_k	$y_{1\,k}{}^P$	$y_{1\,k}$	$y_{2\,k}{}^P$	$y_{2\,k}$
899	8990	812.01	816.188	378.556	359.881
900	9000	810.867	815.057	379.566	360.908

- $k = 1199$

k	x_k	$y_{1\,k}{}^P$	$y_{1\,k}$	$y_{2\,k}{}^P$	$y_{2\,k}$
1199	11 990	772.512	775.853	334.531	317.002
1200	12 000	772.912	776.262	335.06	317.523

- $k = 1499$

k	x_k	$y_{1\,k}{}^P$	$y_{1\,k}$	$y_{2\,k}{}^P$	$y_{2\,k}$
1499	14 990	721.343	724.553	337.792	321.375
1500	15 000	721.93	725.14	337.777	321.351

- $k = 1799$

k	x_k	$y_{1\,k}{}^P$	$y_{1\,k}$	$y_{2\,k}{}^P$	$y_{2\,k}$
1799	17 990	704.539	707.894	353.868	337.924
1800	18 000	704.751	708.103	353.691	337.744

- $k = 2099$

k	x_k	$y_{1\,k}{}^P$	$y_{1\,k}$	$y_{2\,k}{}^P$	$y_{2\,k}$
2099	20 990	711.307	714.755	362.13	346.257
2100	21 000	711.243	714.688	362.034	346.163

- $k = 2399$

k	x_k	$y_{1\,k}{}^P$	$y_{1\,k}$	$y_{2\,k}{}^P$	$y_{2\,k}$
2399	23 990	720.69	724.116	361.824	345.975
2400	24 000	720.586	724.012	361.826	345.979

- $k = 2699$

k	x_k	$y_{1\,k}{}^P$	$y_{1\,k}$	$y_{2\,k}{}^P$	$y_{2\,k}$
2699	26 990	724.029	727.389	359.101	343.357
2700	27 000	723.99	727.351	359.133	343.39

- $k = 2999$

k	x_k	$y_{1\,k}{}^P$	$y_{1\,k}$	$y_{2\,k}{}^P$	$y_{2\,k}$
2999	29 990	723.061	726.369	357.696	342.106
3000	30 000	723.073	726.381	357.714	342.124

Tabla de puntos $(x_k, y_{r\,k}{}^P)$ y $(x_k, y_{r\,k})$ $(r = 1, 2, \cdots, m)$.

k	x_k	${y_{1\,k}}^P$	${y_{2\,k}}^P$
300	3000	425.4294507560	493.9476210180
600	6000	721.3896290620	453.0755548950
900	9000	815.0567192220	360.9081008590
1200	12000	776.2619549840	317.5231686900
1500	15000	725.1402307410	321.3511431290
1800	18000	708.1028925810	337.7443750770
2100	21000	714.6883377830	346.1628746290
2400	24000	724.0121611940	345.9786029130
2700	27000	727.3507110150	343.3898519510
3000	30000	726.3805794510	342.1236666800

k	x_k	$y_{1\,k}$	$y_{2\,k}$
0	0	87	60
300	3000	420.1722088250	508.0696487350
600	6000	715.9254364500	471.1004629230
900	9000	810.8668316290	379.5663255350
1200	12000	772.9122308020	335.0595085200
1500	15000	721.9299392450	337.7766157580
1800	18000	704.7506486370	353.6907299130
2100	21000	711.2427227270	362.0339272820
2400	24000	720.5862640900	361.8258351810
2700	27000	723.9901470710	359.1327404530
3000	30000	723.0725176700	357.7136810610

$y(30\,000) \approx y_{3000} = 723.0725176700$

Solución aproximada del sistema SFDDE

$y_r(x)$ $(h = 10)$

calculada con el método *Adams–Bashforth–Moulton Fraccionario con Retraso.*

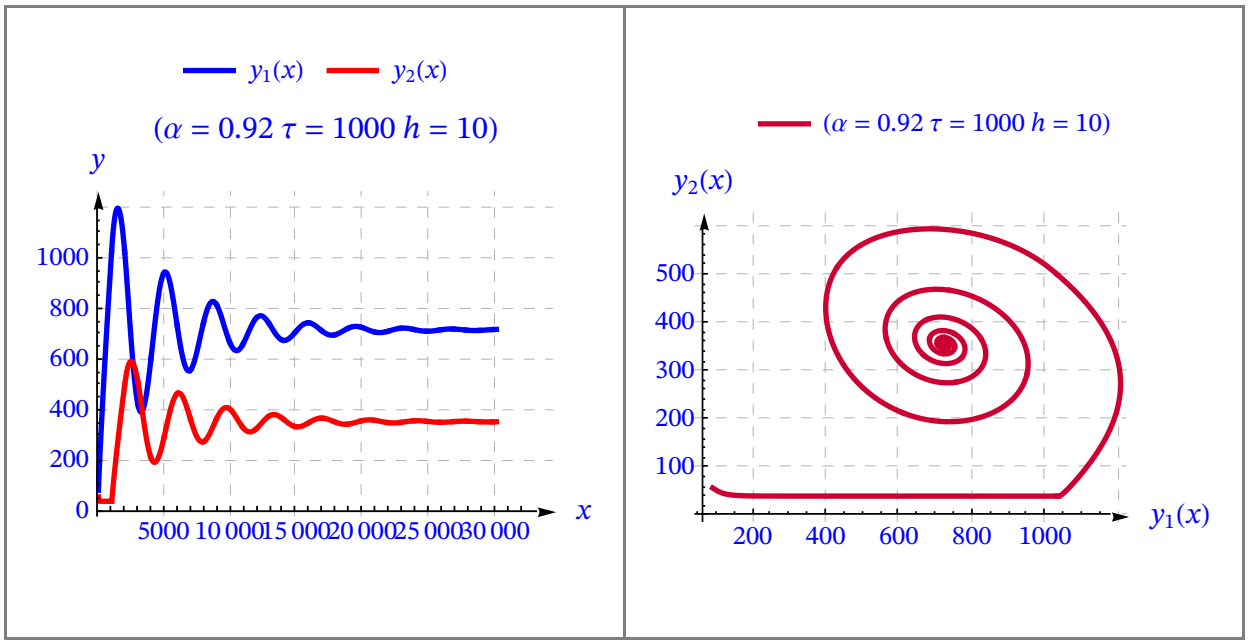


Figura 3.3. Evolución temporal de $G(t) \equiv y_1(x)$ y de $I(t) \equiv y_2(x)$, y diagrama de fases $G(t) - I(t)$ empleando los parámetros *Set 2* y $\tau = 1000 < \tau_0 = 1365.6$.

Caso II.

α_1	α_2	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	G_0	I_0	τ
0.92	0.92	0.00020893	0.148927	0.0000564	0.01	0.074	1.93	87	60	1600

Método de *Adams–Bashforth–Moulton Fraccionario con Retraso* (ABMFR) para Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Fraccionarias con Retraso (SFDDE).

$$(P) \equiv \begin{cases} D^{(\alpha)}\, y_r(x) = f_r\,(x,\, y_1(x),\, \ldots,\, y_r(x), \\ \qquad y_1(x-\tau),\, \ldots,\, y_r(x-\tau)) & x \in [0,\, T] \quad 0 < \alpha \le 1 \\ y_r(x) = g_r(x) & x \in [-\tau,\, 0] \\ y_r(0) = y_{r\,0} \end{cases}$$

$$r = 1, 2, \cdots, m$$

$$(P) \equiv$$

$$\left(\begin{array}{c} \left(\begin{array}{c} D^{0.92}\, y_1(x) = -\frac{0.0000564\, y_2(x)\, y_1(x)}{0.01\, y_1(x)+1} - 0.00020893\, y_1(x) + 1.93 \\ D^{0.92}\, y_2(x) = 0.074\, y_1(x-1600) - 0.148927\, y_2(x) \end{array} \right) \quad x \in [0,\, T] \\ (\, y_1(0) = 87 \quad y_2(0) = 60\,) \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ll} f_1(x,\, y_r(x),\, y_r(x-\tau)) = & -\frac{0.0000564\, y_2(x)\, y_1(x)}{0.01\, y_1(x)+1} - 0.00020893\, y_1(x) + 1.93 \\ f_2(x,\, y_r(x),\, y_r(x-\tau)) = & 0.074\, y_1(x-1600) - 0.148927\, y_2(x) \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{lll} [A,\, B] = & [0,\, 30000] & (\text{intervalo } x) \\ \{\alpha,\, n = \lceil \alpha \rceil\} = & \{0.92,\, 1\} & \\ \tau = & 1600 & \\ h = & 10 & \text{Tamaño del paso} \\ m = & 2 & \text{Número de ecuaciones} \end{array} \right)$$

Ecuaciones del método de

Adams–Bashforth–Moulton Fraccionario con Retraso (SFDDE)

$$x \in [0, T] \quad \{x_k = k\,h\} \quad \begin{cases} k = -i, -(i-1), \cdots, -1, 0, 1, 2, \cdots, N \\ h := \frac{T}{N} \quad i = \frac{\tau}{h} \end{cases}$$

$$y_{r\,h}(x_{k+1}) = g_r(0) + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} f_r(x_{k+1}, y_{1\,h}{}^P(x_{k+1}), \ldots, y_{r\,h}{}^P(x_{k+1}), y_{1\,h}(x_{k+1-i}), \ldots, y_{r\,h}(x_{k+1-i})) + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} \sum_{j=0}^{k} a_{j,k+1}\, f_r(x_j, y_{1\,h}(x_j), \ldots, y_{r\,h}(x_j), y_{1\,h}(x_{j-i}), \ldots, y_{r\,h}(x_{j-i}))$$

$$y_{r\,h}{}^P(x_{k+1}) = g_r(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^{k} b_{j,k+1}\, f_r(x_j, y_{1,h}(x_j), \ldots, y_{r,h}(x_j), y_{1\,h}(x_j - \tau), \ldots, y_{r\,h}(x_j - \tau))$$

$r = 1, 2, \cdots, m$

- $a_{j,k+1} = \begin{cases} k^{\alpha+1} - (k-\alpha)(k+1)^\alpha & j = 0 \\ (k-j+2)^{\alpha+1} + (k-j)^{\alpha+1} - 2(k-j+1)^{\alpha+1} & 1 \le j \le k \\ 1 & j = k+1 \end{cases}$
- $b_{j,k+1} = \frac{h^\alpha}{\alpha}((k+1-j)^\alpha - (k-j)^\alpha)$

Proceso iterativo.

- $k = 299$

k	x_k	$y_{1\,k}{}^P$	$y_{1\,k}$	$y_{2\,k}{}^P$	$y_{2\,k}$
299	2990	1032.2	1041.35	660.492	636.207
300	3000	1021.59	1030.77	664.198	639.929

- $k = 599$

k	x_k	$y_{1\,k}{}^P$	$y_{1\,k}$	$y_{2\,k}{}^P$	$y_{2\,k}$
599	5990	1027.19	1027.05	61.6801	43.4598
600	6000	1034.94	1034.81	62.0499	43.8016

- $k = 899$

k	x_k	$y_{1\,k}{}^P$	$y_{1\,k}$	$y_{2\,k}{}^P$	$y_{2\,k}$
899	8990	165.087	170.19	709.39	695.598
900	9000	162.797	167.838	707.076	693.37

- $k = 1199$

k	x_k	$y_{1\,k}{}^P$	$y_{1\,k}$	$y_{2\,k}{}^P$	$y_{2\,k}$
1199	11 990	1483.23	1486.56	264.58	242.259
1200	12 000	1483.34	1486.73	268.336	245.978

- $k = 1499$

k	x_k	$y_{1\,k}{}^P$	$y_{1\,k}$	$y_{2\,k}{}^P$	$y_{2\,k}$
1499	14 990	298.339	299.774	287.43	278.088
1500	15 000	302.885	304.277	282.711	273.339

- $k = 1799$

k	x_k	$y_{1\,k}{}^P$	$y_{1\,k}$	$y_{2\,k}{}^P$	$y_{2\,k}$
1799	17 990	956.889	964.85	630.841	610.336
1800	18 000	947.663	955.646	633.666	613.206

- $k = 2099$

k	x_k	$y_{1\,k}{}^P$	$y_{1\,k}$	$y_{2\,k}{}^P$	$y_{2\,k}$
2099	20 990	1004.06	1003.73	77.531	61.1105
2100	21 000	1011.47	1011.15	77.8381	61.3779

- $k = 2399$

k	x_k	$y_{1\,k}{}^P$	$y_{1\,k}$	$y_{2\,k}{}^P$	$y_{2\,k}$
2399	23 990	188.871	193.843	689.644	676.843
2400	24 000	186.196	191.108	687.537	674.817

- $k = 2699$

k	x_k	$y_{1\,k}{}^P$	$y_{1\,k}$	$y_{2\,k}{}^P$	$y_{2\,k}$
2699	26 990	1464.01	1467.01	260.502	239.502
2700	27 000	1464.34	1467.4	264.081	243.042

- $k = 2999$

k	x_k	$y_{1\,k}{}^P$	$y_{1\,k}$	$y_{2\,k}{}^P$	$y_{2\,k}$
2999	29 990	292.601	293.955	299.081	290.508
3000	30 000	296.92	298.233	294.437	285.839

Tabla de puntos $(x_k, y_{r\,k}{}^P)$ y $(x_k, y_{r\,k})$ $(r = 1, 2, \cdots, m)$.

k	x_k	${y_{1\,k}}^P$	${y_{2\,k}}^P$
300	3000	1030.7698902700	639.9286090960
600	6000	1034.8112843600	43.8016064101
900	9000	167.8377390740	693.3704962520
1200	12000	1486.7290239500	245.9778074530
1500	15000	304.2766853030	273.3388081610
1800	18000	955.6459587470	613.2058488290
2100	21000	1011.1517092500	61.3779196699
2400	24000	191.1075617160	674.8174751080
2700	27000	1467.3997255700	243.0415179140
3000	30000	298.2327280610	285.8385815830

k	x_k	$y_{1\,k}$	$y_{2\,k}$
0	0	87	60
300	3000	1021.5881401400	664.1981555700
600	6000	1034.9433518800	62.0499290910
900	9000	162.7966472590	707.0764398390
1200	12000	1483.3426455100	268.3361575760
1500	15000	302.8851086670	282.7111643900
1800	18000	947.6625956630	633.6661379340
2100	21000	1011.4688592900	77.8381148748
2400	24000	186.1961538190	687.5369622950
2700	27000	1464.3414438700	264.0809132000
3000	30000	296.9195329350	294.4373097670

$$y(30\,000) \approx y_{3000} = 296.9195329350$$

Solución aproximada del sistema SFDDE

$y_r(x)$ $(h = 10)$

calculada con el método *Adams–Bashforth–Moulton Fraccionario con Retraso.*

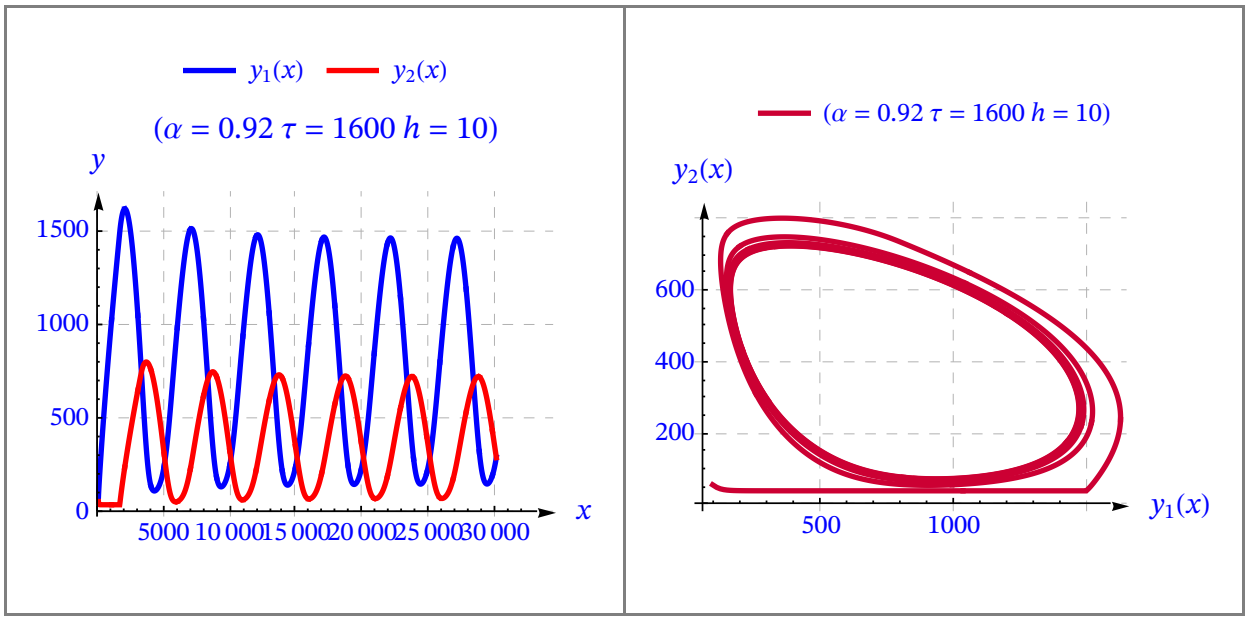


Figura 3.4. Gráficas de la evolución temporal de $G(t)$ y de $I(t)$, y diagrama de fase $G(t) - I(t)$ con respecto a $G(t)$ empleando los parámetros *Set 2* y $\tau = 1600 > \tau_0 = 1365.6$.

■ Problema 3.1.3. Modelo de Interacción Glucosa–Insulina con un SFDDE. Caso III. ([LEKD19])

Con respecto al *Caso III*, la resolución del sistema numérico emplea de nuevo órdenes fraccionarios, pero en este caso específico se emplean por primera vez órdenes fraccionarios distintos entre sí, puesto que $q_1 = 0.92$ y $q_2 = 0.95$. Haciendo uso de la ecuación (3.1.5), se obtiene el punto de equilibrio $(G^*,\ I^*) = (686.41,\ 362.92)$. La frecuencia crítica del sistema es $\omega_0 = 0.001469$ y el retardo crítico es $\tau_0 = 1285.91$. La Hipótesis 1 es válida, por lo que, aplicando de nuevo el Teorema 3.1.6, la solución es asintóticamente estable localmente para valores por debajo del retardo crítico y se convierte en inestable cuando supera el valor τ_0, dando lugar a una bifurcación de Hopf. Los resultados del análisis se muestran en las figuras 3.5 y 3.6.

Caso III.

α_1	α_2	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	G_0	I_0	τ
0.92	0.95	0.00020893	0.139961	0.0000564	0.01	0.074	1.93	87	60	900

Método de *Adams–Bashforth–Moulton Fraccionario con Retraso* (ABMFR) para Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Fraccionarias con Retraso (SFDDE) α_r.

$$(P) \equiv \begin{cases} D^{(\alpha_r)}\, y_r(x) = f_r\,(x,\, y_1(x),\, \ldots,\, y_r(x), \\ \qquad\qquad y_1(x-\tau),\, \ldots,\, y_r(x-\tau)) & x \in [0,\, T] \quad 0 < \alpha \le 1 \\ y_r(x) = g_r(x) & x \in [-\tau,\, 0] \\ y_r(0) = y_{r\,0} \end{cases}$$

$$r = 1,\, 2, \cdots,\, m$$

$$(P) \equiv \left(\begin{pmatrix} D^{\alpha}\, y_1(x) = -\frac{0.0000564\, y_2(x)\, y_1(x)}{0.01\, y_1(x)+1} - 0.00020893\, y_1(x) + 1.93 \\ D^{\alpha}\, y_2(x) = 0.074\, y_1(x-900) - 0.139961\, y_2(x) \end{pmatrix} \quad x \in [0,\, T] \right)$$

$$\left(\begin{pmatrix} y_1(0) = 87 & y_2(0) = 60 \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{pmatrix} f_1(x,\, y_r(x),\, y_r(x-\tau)) = & -\frac{0.0000564\, y_2(x)\, y_1(x)}{0.01\, y_1(x)+1} - 0.00020893\, y_1(x) + 1.93 \\ f_2(x,\, y_r(x),\, y_r(x-\tau)) = & 0.074\, y_1(x-900) - 0.139961\, y_2(x) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} [A,\, B] = & [0,\, 30000] & \text{(intervalo } x\text{)} \\ \{\alpha_r,\, n = \lceil \alpha \rceil\} = & \{\{0.92,\, 0.95\},\, 1\} & \\ \tau = & 900 & \\ h = & 10 & \text{Tamaño del paso} \\ m = & 2 & \text{Número de ecuaciones} \end{pmatrix}$$

Ecuaciones del método de
Adams–Bashforth–Moulton Fraccionario con Retraso (SFDDE)

$$x \in [0,\, T] \quad \{x_k = k\, h\} \quad \begin{cases} k = -i,\, -(i-1),\, \cdots,\, -1,\, 0,\, 1,\, 2,\, \cdots,\, N \\ h := \frac{T}{N} \quad i = \frac{\tau}{h} \end{cases}$$

$$y_{r\,h}(x_{k+1}) = g_r(0) + \frac{h^{\alpha}}{\Gamma\,(\alpha+2)}\, f_r(x_{k+1},$$

$$y_{1\,h}{}^{P}(x_{k+1}),\, \ldots,\, y_{r\,h}{}^{P}(x_{k+1}),\, y_{1\,h}(x_{k+1-i}),\, \ldots,\, y_{r\,h}(x_{k+1-i}))$$

$$+ \frac{h^{\alpha}}{\Gamma\,(\alpha+2)} \sum_{j=0}^{k} a_{j,k+1}\, f_r(x_j,\, y_{1\,h}(x_j),\, \ldots,\, y_{r\,h}(x_j),\, y_{1\,h}(x_{j-i}),\, \ldots,\, y_{r\,h}(x_{j-i}))$$

$$y_{r\,h}{}^{P}(x_{k+1}) = g_r(0) + \frac{1}{\Gamma\,(\alpha)} \sum_{j=0}^{k} b_{j,k+1}\, f_r\,(x_j,\, y_{1,h}(x_j),\, \ldots,\, y_{r,h}(x_j),\, y_{1\,h}(x_j-\tau),\, \ldots,\, y_{r\,h}(x_j-\tau))$$

$$r = 1,\, 2, \cdots,\, m$$

- $$a_{j,k+1} = \begin{cases} k^{\alpha+1} - (k-\alpha)\,(k+1)^{\alpha} & j = 0 \\ (k-j+2)^{\alpha+1} + (k-j)^{\alpha+1} - 2\,(k-j+1)^{\alpha+1} & 1 \le j \le k \\ 1 & j = k+1 \end{cases}$$

- $$b_{j,k+1} = \frac{h^{\alpha}}{\alpha}((k+1-j)^{\alpha} - (k-j)^{\alpha})$$

Proceso iterativo.

- $k = 299$

k	x_k	${y_{1\,k}}^P$	$y_{1\,k}$	${y_{2\,k}}^P$	$y_{2\,k}$
299	2990	409.476	413.358	408.267	395.341
300	3000	410.046	413.878	404.512	391.585

- $k = 599$

k	x_k	${y_{1\,k}}^P$	$y_{1\,k}$	${y_{2\,k}}^P$	$y_{2\,k}$
599	5990	572.101	576.461	420.773	405.021
600	6000	571.061	575.397	419.388	403.661

- $k = 899$

k	x_k	${y_{1\,k}}^P$	$y_{1\,k}$	${y_{2\,k}}^P$	$y_{2\,k}$
899	8990	654.049	658.21	400.806	383.907
900	9000	653.059	657.212	400.469	383.59

- $k = 1199$

k	x_k	${y_{1\,k}}^P$	$y_{1\,k}$	${y_{2\,k}}^P$	$y_{2\,k}$
1199	11 990	684.969	688.822	380.862	363.69
1200	12 000	684.388	688.239	380.895	363.734

- $k = 1499$

k	x_k	${y_{1\,k}}^P$	$y_{1\,k}$	${y_{2\,k}}^P$	$y_{2\,k}$
1499	14 990	691.933	695.552	368.762	351.685
1500	15 000	691.678	695.298	368.868	351.795

- $k = 1799$

k	x_k	${y_{1\,k}}^P$	$y_{1\,k}$	${y_{2\,k}}^P$	$y_{2\,k}$
1799	17 990	690.7	694.179	363.29	346.406
1800	18 000	690.622	694.102	363.37	346.488

- $k = 2099$

k	x_k	${y_{1\,k}}^P$	$y_{1\,k}$	${y_{2\,k}}^P$	$y_{2\,k}$
2099	20 990	688.137	691.538	361.555	344.856
2100	21 000	688.131	691.532	361.598	344.9

- $k = 2399$

k	x_k	${y_{1\,k}}^P$	$y_{1\,k}$	${y_{2\,k}}^P$	$y_{2\,k}$
2399	23 990	686.34	689.694	361.407	344.856
2400	24 000	686.353	689.708	361.424	344.874

• $k = 2699$

k	x_k	${y_{1\,k}}^P$	$y_{1\,k}$	${y_{2\,k}}^P$	$y_{2\,k}$
2699	26 990	685.48	688.802	361.712	345.277
2700	27 000	685.492	688.815	361.717	345.282

• $k = 2999$

k	x_k	${y_{1\,k}}^P$	$y_{1\,k}$	${y_{2\,k}}^P$	$y_{2\,k}$
2999	29 990	685.217	688.513	362.024	345.682
3000	30 000	685.224	688.52	362.024	345.682

Tabla de puntos $(x_k, {y_{r\,k}}^P)$ y $(x_k, y_{r\,k})$ $(r = 1, 2, \cdots, m)$.

k	x_k	${y_{1\,k}}^P$	${y_{2\,k}}^P$
300	3000	413.8777522380	391.5845056720
600	6000	575.3967778900	403.6611681890
900	9000	657.2117168730	383.5901260790
1200	12000	688.2391819300	363.7344731740
1500	15000	695.2979134600	351.7954545710
1800	18000	694.1017847220	346.4884345600
2100	21000	691.5317613710	344.8996228240
2400	24000	689.7076385970	344.8735222980
2700	27000	688.8148004020	345.2815038190
3000	30000	688.5203853710	345.6816752610

k	x_k	$y_{1\,k}$	$y_{2\,k}$
0	0	87	60
300	3000	410.0460391160	404.5124382920
600	6000	571.0612533090	419.3876074870
900	9000	653.0586356880	400.4689584820
1200	12000	684.3881048440	380.8954193320
1500	15000	691.6775698310	368.8680158000
1800	18000	690.6217948250	363.3703383180
2100	21000	688.1306785760	361.5981431420
2400	24000	686.3530743430	361.4241521590
2700	27000	685.4923926080	361.7166422590
3000	30000	685.2244313390	362.0236621260

$y(30\,000) \approx y_{3000} = 685.2244313390$

Solución aproximada del sistema SFDDE
$y_r(x)$ $(h = 10)$
calculada con el método *Adams–Bashforth–Moulton Fraccionario con Retraso.*

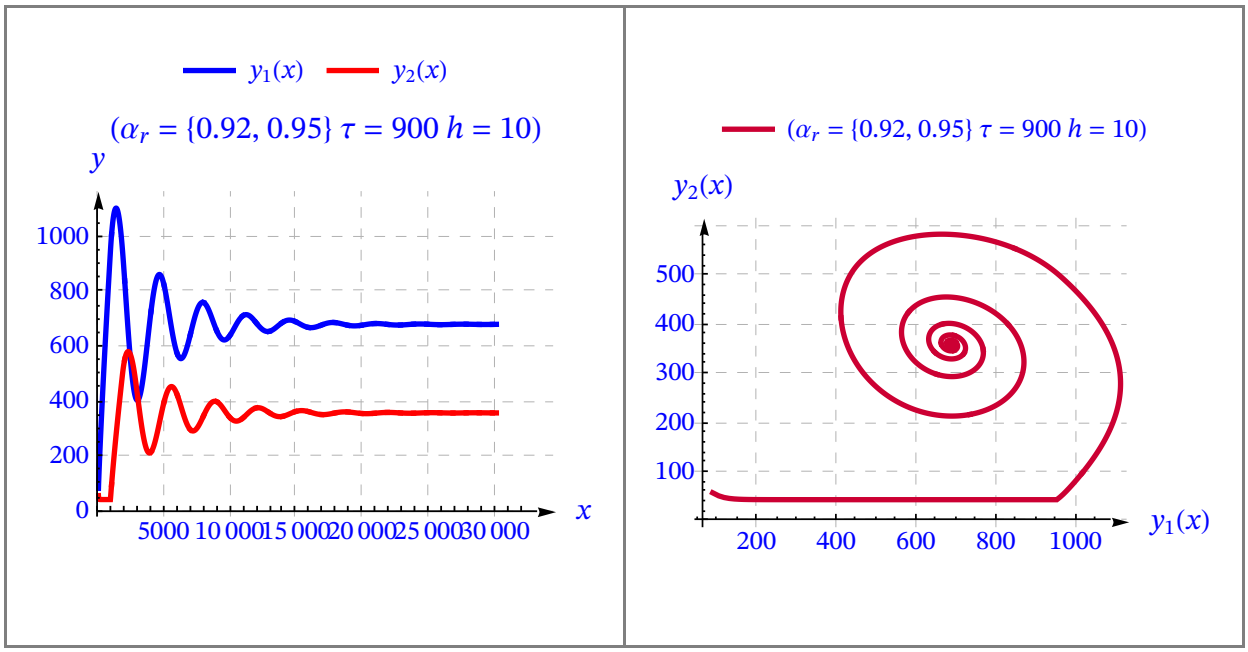


Figura 3.5. Evolución temporal de $G(t) \equiv y_1(x)$ y de $I(t) \equiv y_2(x)$, y diagrama de fases $G(t) - I(t)$ empleando los parámetros *Set 3* y $\tau = 900 < \tau_0 = 1285.91$.

Caso III.

α_1	α_2	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	G_0	I_0	τ
0.92	0.95	0.00020893	0.139961	0.0000564	0.01	0.074	1.93	87	60	1500

Método de *Adams–Bashforth–Moulton Fraccionario con Retraso* (ABMFR) para Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Fraccionarias con Retraso (SFDDE) α_r.

$$(P) \equiv \begin{cases} D^{(\alpha_r)}\, y_r(x) = f_r\,(x,\, y_1(x),\, \ldots,\, y_r(x), \\ \qquad y_1(x-\tau),\, \ldots,\, y_r(x-\tau)) & x \in [0,\, T] \quad 0 < \alpha \le 1 \\ y_r(x) = g_r(x) & x \in [-\tau,\, 0] \\ y_r(0) = y_{r\,0} \end{cases}$$

$$r = 1,\, 2, \cdots,\, m$$

$$(P) \equiv \left(\begin{pmatrix} D^{\alpha}\, y_1(x) = -\frac{0.0000564\, y_2(x)\, y_1(x)}{0.01\, y_1(x)+1} - 0.00020893\, y_1(x) + 1.93 \\ D^{\alpha}\, y_2(x) = 0.074\, y_1(x-1500) - 0.139961\, y_2(x) \\ (\, y_1(0) = 87 \quad y_2(0) = 60\,) \end{pmatrix} \quad x \in [0,\, T] \right)$$

$$\begin{pmatrix} f_1(x,\, y_r(x),\, y_r(x-\tau)) = & -\frac{0.0000564\, y_2(x)\, y_1(x)}{0.01\, y_1(x)+1} - 0.00020893\, y_1(x) + 1.93 \\ f_2(x,\, y_r(x),\, y_r(x-\tau)) = & 0.074\, y_1(x-1500) - 0.139961\, y_2(x) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} [A,\, B] = & [0,\, 30000] & (\text{intervalo } x) \\ \{\alpha_r,\, n = \lceil \alpha \rceil\} = & \{\{0.92,\, 0.95\},\, 1\} & \\ \tau = & 1500 & \\ h = & 10 & \text{Tamaño del paso} \\ m = & 2 & \text{Número de ecuaciones} \end{pmatrix}$$

Ecuaciones del método de
Adams–Bashforth–Moulton Fraccionario con Retraso (SFDDE)

$$x \in [0,\, T] \quad \{x_k = k\, h\} \quad \begin{cases} k = -i,\, -(i-1),\, \cdots,\, -1,\, 0,\, 1,\, 2,\, \cdots,\, N \\ h := \frac{T}{N} \quad i = \frac{\tau}{h} \end{cases}$$

$$y_{r\,h}(x_{k+1}) = g_r(0) + \frac{h^{\alpha}}{\Gamma\,(\alpha+2)}\, f_r(x_{k+1},$$

$$y_{1\,h}{}^{P}(x_{k+1}),\, \ldots,\, y_{r\,h}{}^{P}(x_{k+1}),\, y_{1\,h}(x_{k+1-i}),\, \ldots,\, y_{r\,h}(x_{k+1-i}))$$

$$+ \frac{h^{\alpha}}{\Gamma\,(\alpha+2)} \sum_{j=0}^{k} a_{j,k+1}\, f_r(x_j,\, y_{1\,h}(x_j),\, \ldots,\, y_{r\,h}(x_j),\, y_{1\,h}(x_{j-i}),\, \ldots,\, y_{r\,h}(x_{j-i}))$$

$$y_{r\,h}{}^{P}(x_{k+1}) = g_r(0) + \frac{1}{\Gamma\,(\alpha)} \sum_{j=0}^{k} b_{j,k+1}\, f_r\,(x_j,\, y_{1,h}(x_j),\, \ldots,\, y_{r,h}(x_j),\, y_{1\,h}(x_j-\tau),\, \ldots,\, y_{r\,h}(x_j-\tau))$$

$$r = 1,\, 2, \cdots,\, m$$

- $$a_{j,k+1} = \begin{cases} k^{\alpha+1} - (k-\alpha)\,(k+1)^{\alpha} & j = 0 \\ (k-j+2)^{\alpha+1} + (k-j)^{\alpha+1} - 2\,(k-j+1)^{\alpha+1} & 1 \le j \le k \\ 1 & j = k+1 \end{cases}$$

- $$b_{j,k+1} = \frac{h^{\alpha}}{\alpha}((k+1-j)^{\alpha} - (k-j)^{\alpha})$$

Proceso iterativo.

- $k = 299$

k	x_k	$y_{1k}{}^P$	y_{1k}	$y_{2k}{}^P$	y_{2k}
299	2990	772.221	781.969	737.352	713.466
300	3000	760.49	770.261	741.192	717.319

- $k = 599$

k	x_k	$y_{1k}{}^P$	y_{1k}	$y_{2k}{}^P$	y_{2k}
599	5990	1231.62	1232.28	97.2003	77.3997
600	6000	1237.67	1238.36	98.7049	78.8469

- $k = 899$

k	x_k	$y_{1k}{}^P$	y_{1k}	$y_{2k}{}^P$	y_{2k}
899	8990	165.046	168.092	494.135	484.105
900	9000	166.816	169.83	489.01	479.021

- $k = 1199$

k	x_k	$y_{1k}{}^P$	y_{1k}	$y_{2k}{}^P$	y_{2k}
1199	11 990	1079.64	1087.15	573.831	551.464
1200	12 000	1071.44	1078.99	577.447	555.116

- $k = 1499$

k	x_k	$y_{1k}{}^P$	y_{1k}	$y_{2k}{}^P$	y_{2k}
1499	14 990	947.521	947.244	79.5101	62.1879
1500	15 000	954.989	954.727	79.8318	62.4655

- $k = 1799$

k	x_k	$y_{1k}{}^P$	y_{1k}	$y_{2k}{}^P$	y_{2k}
1799	17 990	154.477	158.571	644.316	632.205
1800	18 000	153.764	157.815	641.013	628.978

- $k = 2099$

k	x_k	$y_{1k}{}^P$	y_{1k}	$y_{2k}{}^P$	y_{2k}
2099	20 990	1312.76	1318.06	415.428	392.77
2100	21 000	1308.57	1313.94	419.599	396.95

- $k = 2399$

k	x_k	$y_{1k}{}^P$	y_{1k}	$y_{2k}{}^P$	y_{2k}
2399	23 990	636.026	635.52	103.775	89.7383
2400	24 000	643.867	643.349	102.148	88.0056

- $k = 2699$

k	x_k	${y_{1\,k}}^P$	$y_{1\,k}$	${y_{2\,k}}^P$	$y_{2\,k}$
2699	26 990	282.287	288.718	724.332	709.019
2700	27 000	276.442	282.806	723.467	708.249

- $k = 2999$

k	x_k	${y_{1\,k}}^P$	$y_{1\,k}$	${y_{2\,k}}^P$	$y_{2\,k}$
2999	29 990	1377.75	1380.52	253.782	232.176
3000	30 000	1378.45	1381.28	257.481	235.828

Tabla de puntos $(x_k, {y_{r\,k}}^P)$ y $(x_k, y_{r\,k})$ $(r = 1, 2, \cdots, m)$.

k	x_k	${y_{1\,k}}^P$	${y_{2\,k}}^P$
300	3000	770.2610993220	717.3186348650
600	6000	1238.3559541300	78.8468807419
900	9000	169.8300305830	479.0205234310
1200	12000	1078.9940030800	555.1156624600
1500	15000	954.7271118650	62.4655196094
1800	18000	157.8150001450	628.9780146560
2100	21000	1313.9351598500	396.9501043850
2400	24000	643.3488015380	88.0056241431
2700	27000	282.8063332000	708.2488868810
3000	30000	1381.2846550300	235.8281791000

k	x_k	$y_{1\,k}$	$y_{2\,k}$
0	0	87	60
300	3000	760.4901496260	741.1915159730
600	6000	1237.6694661800	98.7048684913
900	9000	166.8155874280	489.0095815960
1200	12000	1071.4430125100	577.4470134820
1500	15000	954.9889985460	79.8318095765
1800	18000	153.7636310320	641.0125796540
2100	21000	1308.5736243700	419.5989675680
2400	24000	643.8674862090	102.1475428960
2700	27000	276.4421604630	723.4666405580
3000	30000	1378.4536353600	257.4805292960

$y(30\,000) \approx y_{3000} = 1378.4536353600$

Solución aproximada del sistema SFDDE
$y_r(x)$ $(h = 10)$
calculada con el método *Adams–Bashforth–Moulton Fraccionario con Retraso.*

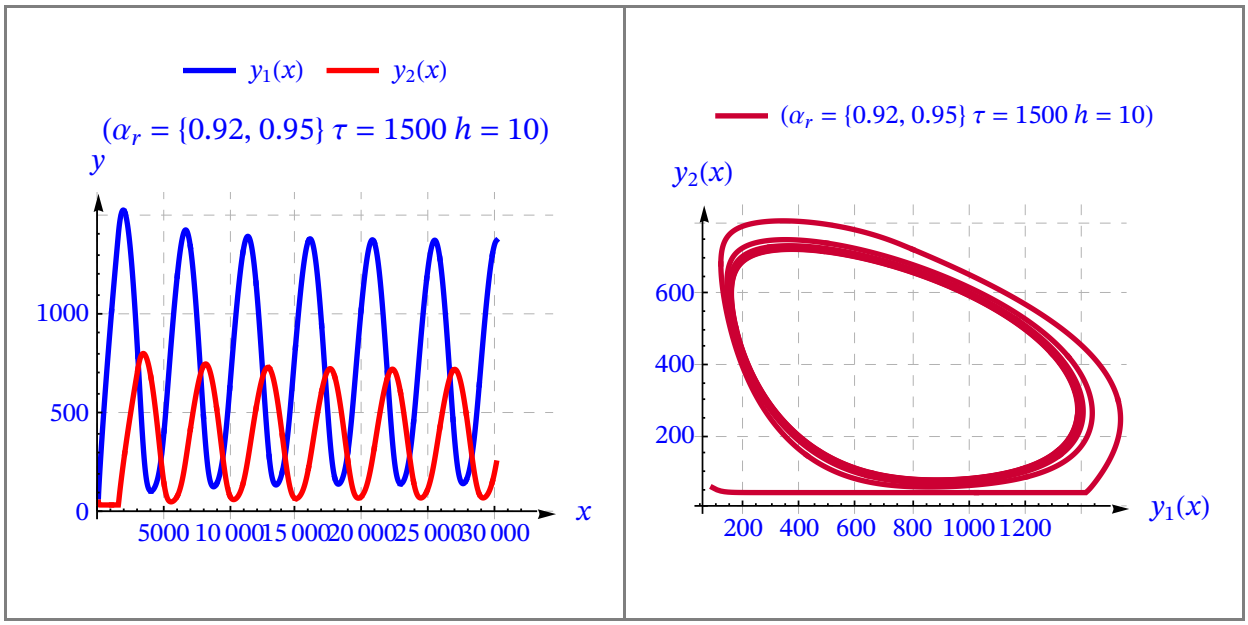


Figura 3.6. Evolución temporal de $G(t) \equiv y_1(x)$ y de $I(t) \equiv y_2(x)$, y diagrama de fases $G(t) - I(t)$ empleando los parámetros *Set 3* y $\tau = 1500 > \tau_0 = 1285.91$.

■ Problema 3.1.4. Modelo de Interacción Glucosa–Insulina con un SFDDE. Caso IV. ([LEKD19])

Con respecto al último conjunto de parámetros, el *Caso IV*, la resolución del sistema numérico emplea unos valores de órdenes fraccionarios distintos nuevamente: $q_1 = 0.92$ y $q_2 = 0.72$. Como en los casos anteriores, si se hace uso de la ecuación (3.1.5), se obtiene el punto de equilibrio $(G^*,\ I^*) = (1018.09,\ 334.39)$. La frecuencia crítica del sistema es $\omega_0 = 0.000903$ y el retardo crítico es $\tau_0 = 2089.425$. La Hipótesis 1 es válida, por lo que, aplicando de nuevo el Teorema 3.1.6, la solución es asintóticamente estable localmente para valores por debajo del retardo crítico y se convierte en inestable cuando supera el valor τ_0, dando lugar a una bifurcación de Hopf. Los resultados del análisis se muestran en las figuras 3.7 y 3.8.

Caso IV.

α_1	α_2	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	G_0	I_0	τ
0.92	0.72	0.00020893	0.225301	0.0000564	0.01	0.074	1.93	87	60	1400

Método de *Adams–Bashforth–Moulton Fraccionario con Retraso* (ABMFR) para Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Fraccionarias con Retraso (SFDDE) α_r.

$$(P) \equiv \begin{cases} D^{(\alpha_r)}\, y_r(x) = f_r\,(x,\, y_1(x),\, \ldots,\, y_r(x), & x \in [0,\, T] \quad 0 < \alpha \le 1 \\ \qquad\qquad y_1(x-\tau),\, \ldots,\, y_r(x-\tau)) & \\ y_r(x) = g_r(x) & x \in [-\tau,\, 0] \\ y_r(0) = y_{r\,0} & \end{cases}$$

$$r = 1, 2, \cdots, m$$

$$(P) \equiv$$

$$\left(\begin{array}{c} \left(\begin{array}{c} D^{0.92}\, y_1(x) = -\frac{0.0000564\, y_2(x)\, y_1(x)}{0.01\, y_1(x)+1} - 0.00020893\, y_1(x) + 1.93 \\ D^{0.72}\, y_2(x) = 0.074\, y_1(x-1400) - 0.225301\, y_2(x) \end{array} \right) \quad x \in [0,\, T] \\ (\, y_1(0) = 87 \quad y_2(0) = 60\,) \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ll} f_1(x,\, y_r(x),\, y_r(x-\tau)) = & -\frac{0.0000564\, y_2(x)\, y_1(x)}{0.01\, y_1(x)+1} - 0.00020893\, y_1(x) + 1.93 \\ f_2(x,\, y_r(x),\, y_r(x-\tau)) = & 0.074\, y_1(x-1400) - 0.225301\, y_2(x) \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{lll} [A,\, B] = & [0,\, 30000] & (\text{intervalo } x) \\ \{\alpha_r,\, n = \lceil \alpha \rceil\} = & \{\{0.92,\, 0.72\},\, 1\} & \\ \tau = & 1400 & \\ h = & 10 & \text{Tamaño del paso} \\ m = & 2 & \text{Número de ecuaciones} \end{array} \right)$$

Ecuaciones del método de

Adams–Bashforth–Moulton Fraccionario con Retraso (SFDDE)

$$x \in [0, T] \quad \{x_k = k\,h\} \quad \begin{cases} k = -i, -(i-1), \cdots, -1, 0, 1, 2, \cdots, N \\ h := \frac{T}{N} \quad i = \frac{\tau}{h} \end{cases}$$

$$y_{r\,h}(x_{k+1}) = g_r(0) + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} f_r(x_{k+1},$$

$$y_{1\,h}{}^P(x_{k+1}), \ldots, y_{r\,h}{}^P(x_{k+1}), y_{1\,h}(x_{k+1-i}), \ldots, y_{r\,h}(x_{k+1-i}))$$

$$+ \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} \sum_{j=0}^{k} a_{j,k+1}\, f_r(x_j, y_{1\,h}(x_j), \ldots, y_{r\,h}(x_j), y_{1\,h}(x_{j-i}), \ldots, y_{r\,h}(x_{j-i}))$$

$$y_{r\,h}{}^P(x_{k+1}) = g_r(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^{k} b_{j,k+1}\, f_r(x_j, y_{1,h}(x_j), \ldots, y_{r,h}(x_j), y_{1\,h}(x_j - \tau), \ldots, y_{r\,h}(x_j - \tau))$$

$r = 1, 2, \cdots, m$

- $a_{j,k+1} = \begin{cases} k^{\alpha+1} - (k-\alpha)(k+1)^\alpha & j = 0 \\ (k-j+2)^{\alpha+1} + (k-j)^{\alpha+1} - 2(k-j+1)^{\alpha+1} & 1 \le j \le k \\ 1 & j = k+1 \end{cases}$
- $b_{j,k+1} = \frac{h^\alpha}{\alpha}((k+1-j)^\alpha - (k-j)^\alpha)$

Proceso iterativo.

- $k = 299$

k	x_k	$y_{1\,k}{}^P$	$y_{1\,k}$	$y_{2\,k}{}^P$	$y_{2\,k}$
299	2990	1332.34	1339.43	489.431	473.709
300	3000	1326.21	1333.32	491.175	475.546

- $k = 599$

k	x_k	$y_{1\,k}{}^P$	$y_{1\,k}$	$y_{2\,k}{}^P$	$y_{2\,k}$
599	5990	979.921	981.963	206.312	196.741
600	6000	983.707	985.752	206.165	196.558

- $k = 899$

k	x_k	$y_{1\,k}{}^P$	$y_{1\,k}$	$y_{2\,k}{}^P$	$y_{2\,k}$
899	8990	939.352	944.16	406.316	398.154
900	9000	937.432	942.231	405.966	397.827

- $k = 1199$

k	x_k	${y_{1\,k}}^P$	$y_{1\,k}$	${y_{2\,k}}^P$	$y_{2\,k}$
1199	11 990	1098.82	1102.21	299.396	290.362
1200	12 000	1099.48	1102.88	299.827	290.787

- $k = 1499$

k	x_k	${y_{1\,k}}^P$	$y_{1\,k}$	${y_{2\,k}}^P$	$y_{2\,k}$
1499	14 990	950.67	954.378	340.853	333.838
1500	15 000	950.671	954.374	340.531	333.518

- $k = 1799$

k	x_k	${y_{1\,k}}^P$	$y_{1\,k}$	${y_{2\,k}}^P$	$y_{2\,k}$
1799	17 990	1050.1	1053.84	335.703	328.041
1800	18 000	1049.88	1053.63	335.885	328.226

- $k = 2099$

k	x_k	${y_{1\,k}}^P$	$y_{1\,k}$	${y_{2\,k}}^P$	$y_{2\,k}$
2099	20 990	1000.31	1003.8	327.063	320.24
2100	21 000	1000.54	1004.03	326.988	320.163

- $k = 2399$

k	x_k	${y_{1\,k}}^P$	$y_{1\,k}$	${y_{2\,k}}^P$	$y_{2\,k}$
2399	23 990	1018.06	1021.71	338.256	331.499
2400	24 000	1017.9	1021.55	338.271	331.517

- $k = 2699$

k	x_k	${y_{1\,k}}^P$	$y_{1\,k}$	${y_{2\,k}}^P$	$y_{2\,k}$
2699	26 990	1017.88	1021.37	330.063	323.536
2700	27 000	1017.97	1021.46	330.074	323.547

- $k = 2999$

k	x_k	${y_{1\,k}}^P$	$y_{1\,k}$	${y_{2\,k}}^P$	$y_{2\,k}$
2999	29 990	1012.51	1016.04	334.922	328.639
3000	30 000	1012.48	1016.	334.905	328.624

Tabla de puntos $(x_k, {y_{r\,k}}^P)$ y $(x_k, y_{r\,k})$ $(r = 1, 2, \cdots, m)$.

k	x_k	${y_{1\,k}}^P$	${y_{2\,k}}^P$
300	3000	1333.3187484800	475.5461218470
600	6000	985.7521020480	196.5579548340
900	9000	942.2311864530	397.8268962300
1200	12000	1102.8776089500	290.7869952710
1500	15000	954.3735620360	333.5182948510
1800	18000	1053.6252015500	328.2262883860
2100	21000	1004.0301822500	320.1631255470
2400	24000	1021.5496019700	331.5172694760
2700	27000	1021.4614770200	323.5472249100
3000	30000	1016.0046193600	328.6237925590

k	x_k	$y_{1\,k}$	$y_{2\,k}$
0	0	87	60
300	3000	1326.2091666800	491.1751428230
600	6000	983.7065327590	206.1645191790
900	9000	937.4324082310	405.9655422850
1200	12000	1099.4757747100	299.8268626940
1500	15000	950.6708428600	340.5309876460
1800	18000	1049.8796971900	335.8848315300
2100	21000	1000.5407178200	326.9877579710
2400	24000	1017.9008672800	338.2712859520
2700	27000	1017.9668060200	330.0742843050
3000	30000	1012.4755100900	334.9053022140

$$y(30\,000) \approx y_{3000} = 1012.4755100900$$

Solución aproximada del sistema SFDDE

$y_r(x)$ $(h = 10)$

calculada con el método *Adams–Bashforth–Moulton Fraccionario con Retraso.*

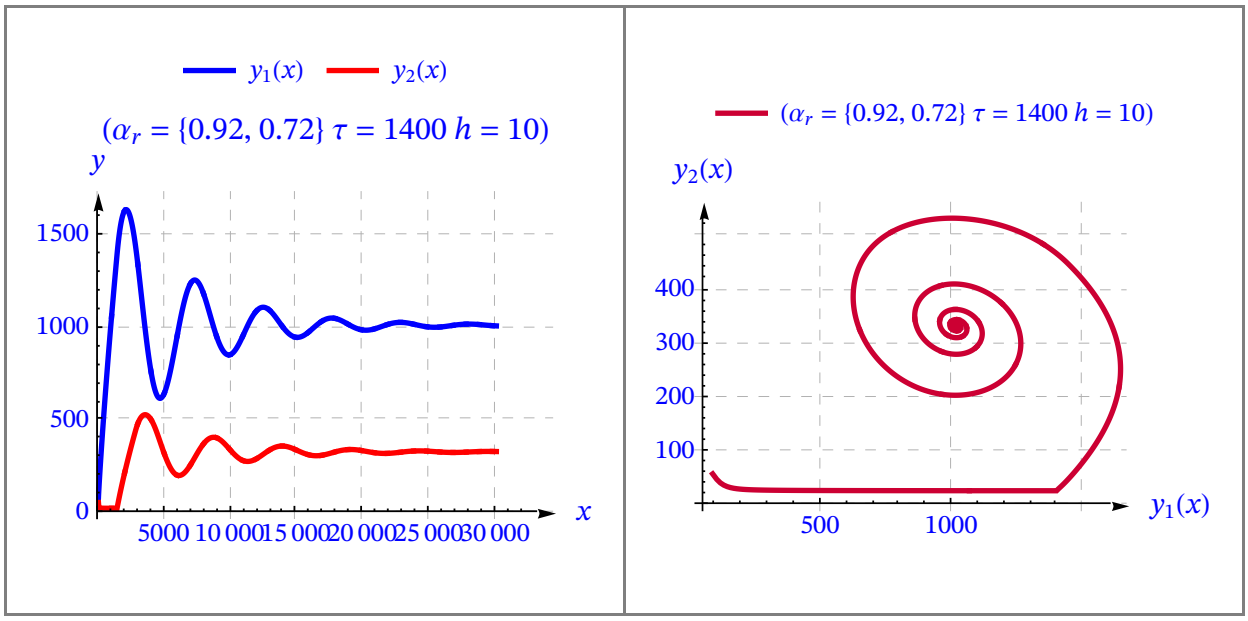


Figura 3.7. Evolución temporal de $G(t) \equiv y_1(x)$ y de $I(t) \equiv y_2(x)$, y diagrama de fases $G(t) - I(t)$ empleando los parámetros *Set 4* y $\tau = 1400 < \tau_0 = 2089$.

Caso IV.

α_1	α_2	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	G_0	I_0	τ
0.92	0.72	0.00020893	0.225301	0.0000564	0.01	0.074	1.93	87	60	2400

Método de *Adams–Bashforth–Moulton Fraccionario con Retraso* (ABMFR) para Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Fraccionarias con Retraso (SFDDE) α_r.

$$(P) \equiv \begin{cases} D^{(\alpha_r)}\, y_r(x) = f_r\,(x,\, y_1(x),\, \ldots,\, y_r(x), & x \in [0,\, T] \quad 0 < \alpha \le 1 \\ \qquad\qquad y_1(x-\tau),\, \ldots,\, y_r(x-\tau)) & \\ y_r(x) = g_r(x) & x \in [-\tau,\, 0] \\ y_r(0) = y_{r\,0} & \end{cases}$$

$$r = 1, 2, \cdots, m$$

$$(P) \equiv$$

$$\left(\begin{array}{c} \left(\begin{array}{c} D^{0.92}\, y_1(x) = -\frac{0.0000564\, y_2(x)\, y_1(x)}{0.01\, y_1(x)+1} - 0.00020893\, y_1(x) + 1.93 \\ D^{0.72}\, y_2(x) = 0.074\, y_1(x-2400) - 0.225301\, y_2(x) \end{array} \right) \quad x \in [0,\, T] \\ (\, y_1(0) = 87 \quad y_2(0) = 60\,) \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ll} f_1(x,\, y_r(x),\, y_r(x-\tau)) = & -\frac{0.0000564\, y_2(x)\, y_1(x)}{0.01\, y_1(x)+1} - 0.00020893\, y_1(x) + 1.93 \\ f_2(x,\, y_r(x),\, y_r(x-\tau)) = & 0.074\, y_1(x-2400) - 0.225301\, y_2(x) \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{lll} [A,\, B] = & [0,\, 30000] & (\text{intervalo } x) \\ \{\alpha_r,\, n = \lceil \alpha \rceil\} = & \{\{0.92,\, 0.72\},\, 1\} & \\ \tau = & 2400 & \\ h = & 10 & \text{Tamaño del paso} \\ m = & 2 & \text{Número de ecuaciones} \end{array} \right)$$

Ecuaciones del método de

Adams–Bashforth–Moulton Fraccionario con Retraso (SFDDE)

$$x \in [0, T] \quad \{x_k = k\,h\} \quad \begin{cases} k = -i, -(i-1), \cdots, -1, 0, 1, 2, \cdots, N \\ h := \frac{T}{N} \quad i = \frac{\tau}{h} \end{cases}$$

$$y_{r\,h}(x_{k+1}) = g_r(0) + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} f_r(x_{k+1},$$

$$y_{1\,h}{}^P(x_{k+1}), \ldots, y_{r\,h}{}^P(x_{k+1}), y_{1\,h}(x_{k+1-i}), \ldots, y_{r\,h}(x_{k+1-i}))$$

$$+ \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} \sum_{j=0}^{k} a_{j,k+1}\, f_r(x_j, y_{1\,h}(x_j), \ldots, y_{r\,h}(x_j), y_{1\,h}(x_{j-i}), \ldots, y_{r\,h}(x_{j-i}))$$

$$y_{r\,h}{}^P(x_{k+1}) = g_r(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^{k} b_{j,k+1}\, f_r(x_j, y_{1,h}(x_j), \ldots, y_{r,h}(x_j), y_{1\,h}(x_j - \tau), \ldots, y_{r\,h}(x_j - \tau))$$

$$r = 1, 2, \cdots, m$$

- $a_{j,k+1} = \begin{cases} k^{\alpha+1} - (k-\alpha)(k+1)^\alpha & j = 0 \\ (k-j+2)^{\alpha+1} + (k-j)^{\alpha+1} - 2(k-j+1)^{\alpha+1} & 1 \le j \le k \\ 1 & j = k+1 \end{cases}$
- $b_{j,k+1} = \frac{h^\alpha}{\alpha}((k+1-j)^\alpha - (k-j)^\alpha)$

Proceso iterativo.

- $k = 299$

k	x_k	$y_{1\,k}{}^P$	$y_{1\,k}$	$y_{2\,k}{}^P$	$y_{2\,k}$
299	2990	2286.53	2290.57	224.529	206.304
300	3000	2286.32	2290.41	227.544	209.346

- $k = 599$

k	x_k	$y_{1\,k}{}^P$	$y_{1\,k}$	$y_{2\,k}{}^P$	$y_{2\,k}$
599	5990	166.462	171.634	698.108	691.272
600	6000	164.502	169.628	696.569	689.782

- $k = 899$

k	x_k	$y_{1\,k}{}^P$	$y_{1\,k}$	$y_{2\,k}{}^P$	$y_{2\,k}$
899	8990	1428.09	1428.24	51.1942	41.9464
900	9000	1435.39	1435.55	51.3919	42.1304

- $k = 1199$

k	x_k	${y_{1\,k}}^P$	$y_{1\,k}$	${y_{2\,k}}^P$	$y_{2\,k}$
1199	11 990	1382.51	1390.57	589.548	577.577
1200	12 000	1373.71	1381.78	591.406	579.461

- $k = 1499$

k	x_k	${y_{1\,k}}^P$	$y_{1\,k}$	${y_{2\,k}}^P$	$y_{2\,k}$
1499	14 990	369.936	371.731	280.994	279.444
1500	15 000	374.039	375.807	277.995	276.435

- $k = 1799$

k	x_k	${y_{1\,k}}^P$	$y_{1\,k}$	${y_{2\,k}}^P$	$y_{2\,k}$
1799	17 990	2063.72	2066.99	227.235	215.393
1800	18 000	2064.22	2067.51	229.487	217.622

- $k = 2099$

k	x_k	${y_{1\,k}}^P$	$y_{1\,k}$	${y_{2\,k}}^P$	$y_{2\,k}$
2099	20 990	263.264	268.672	644.964	640.325
2100	21 000	259.967	265.332	643.788	639.195

- $k = 2399$

k	x_k	${y_{1\,k}}^P$	$y_{1\,k}$	${y_{2\,k}}^P$	$y_{2\,k}$
2399	23 990	1341.64	1341.62	65.5133	58.6794
2400	24 000	1348.77	1348.76	65.5771	58.7189

- $k = 2699$

k	x_k	${y_{1\,k}}^P$	$y_{1\,k}$	${y_{2\,k}}^P$	$y_{2\,k}$
2699	26 990	1430.51	1437.96	559.595	549.329
2700	27 000	1422.5	1429.97	561.431	551.189

- $k = 2999$

k	x_k	${y_{1\,k}}^P$	$y_{1\,k}$	${y_{2\,k}}^P$	$y_{2\,k}$
2999	29 990	349.075	350.965	309.226	308.704
3000	30 000	352.612	354.478	306.383	305.857

Tabla de puntos $(x_k, {y_{r\,k}}^P)$ y $(x_k, y_{r\,k})$ $(r = 1, 2, \cdots, m)$.

k	x_k	${y_{1\,k}}^P$	${y_{2\,k}}^P$
300	3000	2290.4055905600	209.3460834270
600	6000	169.6282791530	689.7823794990
900	9000	1435.5521614600	42.1303760582
1200	12000	1381.7815873100	579.4605636260
1500	15000	375.8070202520	276.4347875720
1800	18000	2067.5133625000	217.6215814350
2100	21000	265.3321020130	639.1952661100
2400	24000	1348.7644744200	58.7189278956
2700	27000	1429.9710893300	551.1887631630
3000	30000	354.4782833560	305.8567856190

k	x_k	$y_{1\,k}$	$y_{2\,k}$
0	0	87	60
300	3000	2286.3155901400	227.5435429380
600	6000	164.5018739050	696.5685468980
900	9000	1435.3946439000	51.3919037501
1200	12000	1373.7106035800	591.4057825420
1500	15000	374.0388431060	277.9947317280
1800	18000	2064.2153245000	229.4874395840
2100	21000	259.9668678950	643.7880731790
2400	24000	1348.7700975600	65.5771277791
2700	27000	1422.5041242200	561.4311296360
3000	30000	352.6119558120	306.3832377740

$$y(30\,000) \approx y_{3000} = 352.6119558120$$

Solución aproximada del sistema SFDDE

$y_r(x)$ $(h = 10)$

calculada con el método *Adams–Bashforth–Moulton Fraccionario con Retraso.*

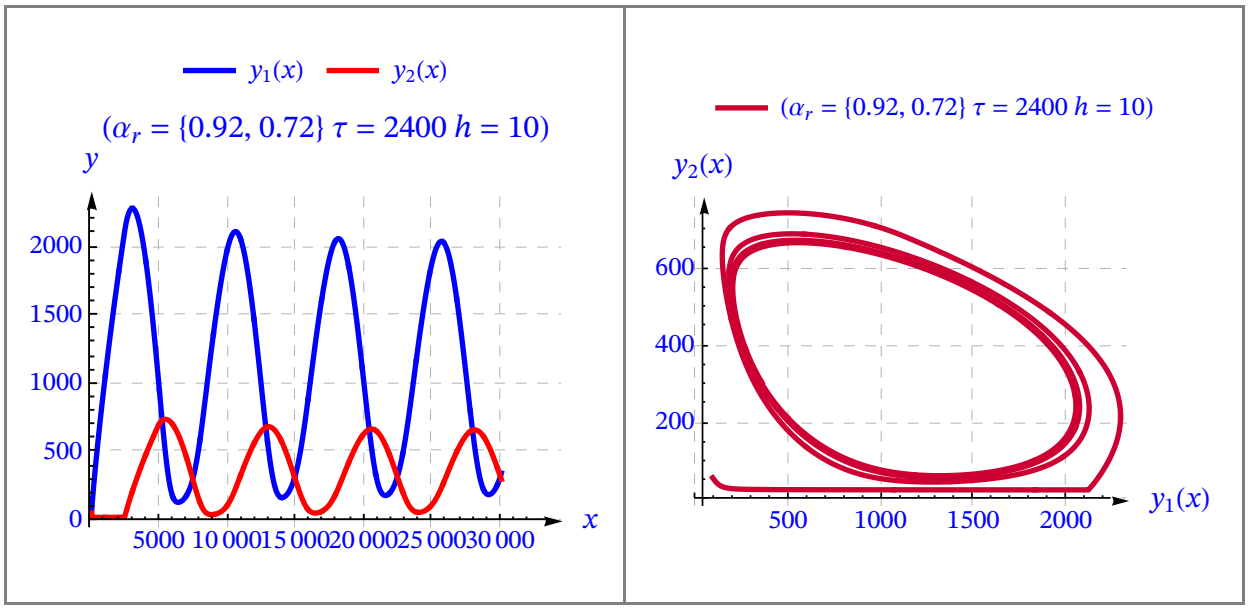


Figura 3.8. Evolución temporal de $G(t) \equiv y_1(x)$ y de $I(t) \equiv y_2(x)$, y diagrama de fases $G(t) - I(t)$ empleando los parámetros *Set 4* y $\tau = 2400 > \tau_0 = 2089$.

Adicionalmente al análisis de la estabilidad de las soluciones al sistema planteado, también se analiza el efecto que tiene incrementar uno de los órdenes fraccionarios (q_1, q_2), mientras se deja el otro constante. Se comprueba numéricamente que, a mayores valores del orden fraccionario, menor es el valor del retardo crítico al que se produce la bifurcación de Hopf, tal y como se muestra en las gráficas siguientes.

Si se mantiene el valor de $q_1 = 0.92$ y se varía el orden fraccionario q_2, se obtienen los siguientes valores de retardo crítico:

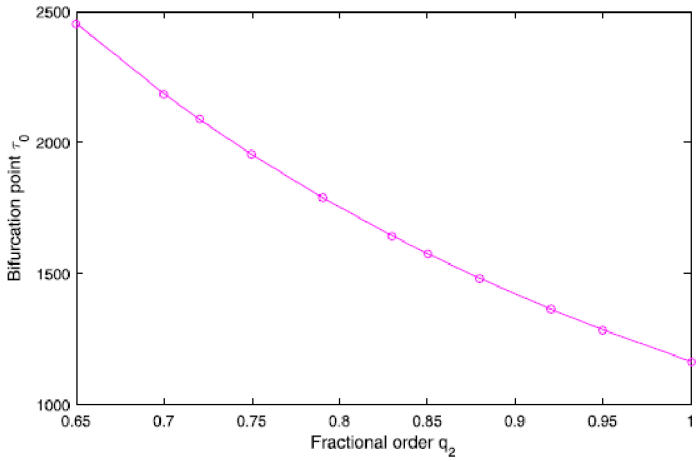


Figura 3.9. Valores de retardo crítico τ_0 y q_2 cuando se mantiene $q_1 = 0.92$ constante.

Si se mantiene el valor de $q_2 = 0.95$ y se varía el orden fraccionario q_1, se obtienen los siguientes valores de retardo crítico:

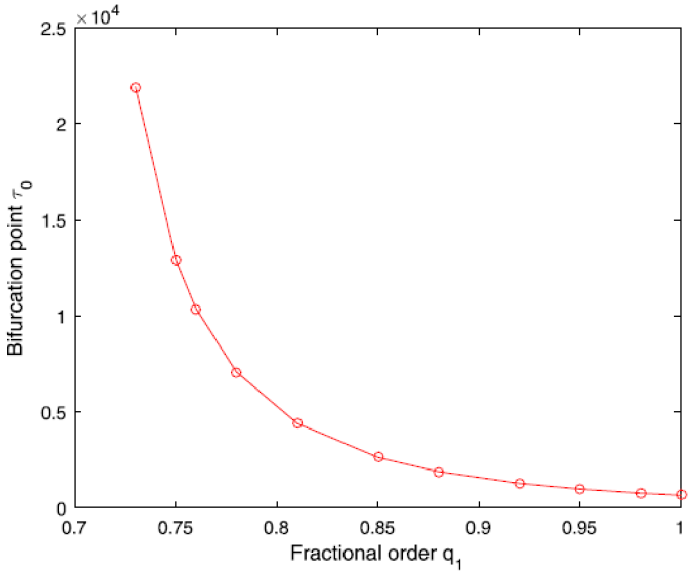


Figura 3.11. Valores de retardo crítico τ_0 y q_1 cuando se mantiene $q_2 = 0.95$ constante.

3.2. Sistema Glucosa–Insulina Fraccionario con Retraso y Células β Sanas

El análisis del estudio [FERN22] resulta interesante para el proyecto presente, debido a sus novedades con respecto a los modelos del sistema de interacción glucosa-insulina. Se propone la implementación y análisis de órdenes fraccionarios en los modelos matemáticos que describen este sistema, con el objetivo de estudiar el impacto de los mismos en la estabilidad de las soluciones obtenidas.

El análisis de esta investigación consistirá en una descripción del modelo propuesto por el estudio, un comentario acerca de la estabilidad de los puntos de equilibrio resultantes, y por último, un análisis de los resultados numéricos y los diagramas de bifurcación obtenidos.

3.2.1. Descripción del Modelo de Orden Fraccionario

El modelo de interacción glucosa-insulina de orden fraccionario con retardo que propone el trabajo de investigación [FERN22] se basa en el modelo de interacción de orden entero propuesto por Shabestari et al. en 2018. El objetivo es simular las distintas fases que se dan en la interacción de las dos sustancias: primero, se ingiere un alimento y los niveles de glucosa se disparan; el organismo detecta el incremento en el nivel de glucosa y procede a ordenar a las células beta del páncreas la secreción de la insulina; una vez que los niveles de glucosa se ven reducidos, la secreción de insulina se disminuye paulatinamente.

El modelo de orden entero en el que está basado el trabajo anteriormente mencionado se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= r_1\, y(t-\tau_g)\, z(t-\tau_g) - r_2\, x + c_1\, z(t-\tau_g) \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{R_3\, N}{z} - R_4\, x(t-\tau_i) + C_2 \\ \frac{dz}{dt} &= R_5(y-\hat{y})\,(T-z) + R_6\, z(T-z) - R_7\, z(t) \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

donde $x(t)$ representa el nivel de insulina en el organismo, $y(t)$ se corresponde con el nivel de glucosa, $z(t)$ representa el número de células beta e $\hat{y}$ representa el metabolismo de glu-

cosa con respecto al nivel basal.

Según el estudio, el parámetro τ_g, que se corresponde con el retardo en la producción de insulina con respecto al incremento del nivel de glucosa en el organismo, se puede estimar como $\tau_g = 0.56$, mientras que el retardo entre el incremento del nivel de insulina y la reducción del nivel de glucosa se puede estimar como $\tau_i = 0.05$. En la tabla que sigue, se muestran los valores de los parámetros escogidos por el estudio para analizar el modelo propuesto.

Tabla 3.2. Parámetros del sistema metabólico glucosa – insulina de orden fraccionario.

Parámetro	Valor	Parámetro	Valor	Parámetro	Valor
r_1	0.472	r_2	0.25	R_3	0.82
R_4	0.6	R_5	0.3	R_6	0.3
R_7	0.2	$\hat{y}$	1.42	N	1.27
T	1.5	c_1	0.1	C_2	0.8

Algunas enfermedades relacionadas con el mal funcionamiento del sistema de interacción glucosa-insulina están provocadas por retardos del sistema que producen desequilibrios, que en el modelo matemático se representan como soluciones inestables. Un buen funcionamiento del sistema metabólico se obtiene cuando los valores de retardo τ_g y τ_i resultan en soluciones de estado estacionario u oscilatorias estables.

En el modelo, $r_1\, y(t-\tau_g)\, z(t-\tau_g)$ representa el incremento de la insulina y la glucosa en función del retardo τ_g, $r_2\, x$ es la velocidad de reducción de la cantidad de insulina no asociada al nivel de glucosa, $c_1\, z(t-\tau_g)$ es la tasa de incremento de la cantidad de insulina en función del número de células beta, $R_4\, x(t-\tau_i)$ se corresponde con la tasa de reducción del nivel de glucosa cuando se secreta la insulina, asociada al retardo τ_i, $R_5(y-\hat{y})\,(T-z)$ representa el incremento del número de células beta que se dividen frente al número de células beta que no lo hacen, como consecuencia de la interacción entre la glucosa y la fase en la que no hay alimento en el organismo, $R_6\, z(T-z)$ se corresponde con el aumento del número de células beta debido a las sinergias que se producen entre las células beta que se dividen y las que no se dividen, mientras que $R_7\, z$ representa la disminución del anterior parámetro.

Si se resuelve el modelo de orden entero mostrado en la ecuación (3.2.1) empleando los parámetros mostrados en la Tabla 3.2., los retardos $\tau_g = 0.56$, $\tau_i = 0.05$, las condiciones iniciales $[x(0) = 6.03,\ y(0) = 1.79,\ z(0) = 0.82]$, se obtienen los resultados mostrados en la siguiente gráfica. Tal y como se puede observar, el comportamiento de las variables es oscilatorio estable, lo que refleja una interacción glucosa-insulina adecuada.

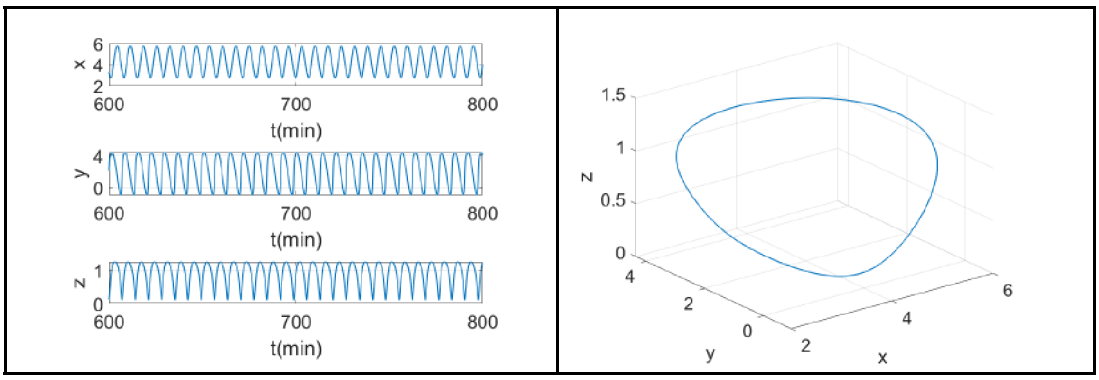


Figura 3.13. Evolución en el tiempo de las variables $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ con respecto a t.

Con el propósito de incluir los efectos de memoria en nuevo modelo, se incorporan órdenes fraccionarios mediante la derivada de Caputo, ya definida en el Capítulo 2 del presente proyecto, obteniendo el siguiente modelo:

$$\begin{aligned} {}_CD_t^q\, x(t) &= r_1\, y\big(t-\tau_g\big)\, z\big(t-\tau_g\big) - r_2\, x(t) + c_1\, z\big(t-\tau_g\big) \\ {}_CD_t^q\, y(t) &= \tfrac{R_3\, N}{z(t)} - R_4\, x(t-\tau_i) + C_2 \\ {}_CD_t^q\, z(t) &= R_5(y-\hat{y})\,(T-z(t)) + R_6\, z(T-z) - R_7\, z(t) \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

donde q representa el orden fraccionario y ${}_CD_t^q$ representa la derivada fraccionaria de Caputo.

3.2.2. Análisis de Estabilidad y Análisis de Bifurcación

Los puntos de equilibrio del sistema (3.2.2) empleando los valores de los parámetros mostrados en la Tabla 3.2 son $E_1 = (-1.97,\ 1.77,\ -0.53)$ y $E_2 = (3.19,\ 1.59,\ 0.94)$. Para analizar la estabilidad de los puntos de equilibrio del sistema, se calcula la matriz jacobiana:

$$\begin{gathered} J_E = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & 0 & J_{23} \\ 0 & J_{32} & J_{33} \end{pmatrix} \\ |\, J_E - \lambda \mathrm{I}\,| = 0;\ J_E = J_0 + e^{-\lambda\tau}\, J_{\tau_g,\tau_i} \end{gathered} \tag{3.2.3}$$

J_0 representa la matriz jacobiana para un retardo $\tau = 0$, mientras que J_{τ_g,τ_i} se corresponde con la matriz jacobiana con retardos τ_g y τ_i respectivamente. La matriz identidad se denota como I y los autovalores como λ. Una vez que se evalúa $E^* = (x^*,\ y^*,\ z^*)$ en la matriz jacobiana, se obtienen las ecuaciones características que permiten evaluar la estabilidad de las soluciones E_1 y E_2:

$$\begin{aligned} \lambda^3 - 0.2096\,\lambda^2 - 0.4099\, e^{-\lambda\tau} + 2.176\,\lambda + 0.1488\,\lambda\, e^{-\lambda\tau} + 0.5728 = 0 \\ \lambda^3 + 0.6131\,\lambda^2 - 0.1826\, e^{-\lambda\tau} + 0.2917\,\lambda - 0.2652\,\lambda\, e^{-\lambda\tau} + 0.05022 = 0 \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

donde $\tau = \tau_g + \tau_i$. El punto de equilibrio E_1 tiene los autovalores $\lambda_1 = -0.044,\ \lambda_{2,3} = 0.23 \pm 1.449\, i$, por lo que se define como un punto de silla de índice 2, por tener un autovalor real negativo y dos autovalores complejos conjugados con parte real positiva, mientras que E_2 tiene los autovalores $\lambda_1 = 1.697,\ \lambda_2 = -0.782,\ \lambda_3 = -1.528$, por lo que se define como un punto de silla de índice 1, por tener un único autovalor positivo, y los otros dos negativos.

Cuando el punto de equilibrio E_2 no se ve afectado por el retardo del sistema $\big(\tau_g,\ \tau_i = 0\big)$, la ecuación característica queda definida como:

$$\lambda^3 + (\eta_{1,1} + \eta_{2,1})\,\lambda^2 + (\eta_{1,2} + \eta_{2,2})\,\lambda + (\eta_{1,3} + \eta_{2,3}) = 0 \tag{3.2.5}$$

Empleando el criterio de Routh-Hurwitz, el punto de equilibrio E^* será asintóticamente estable cuando:

$$\begin{aligned} P_1 = \eta_{1,1} + \eta_{2,1} > 0;\ P_2 = \eta_{1,3} + \eta_{2,3} > 0; \\ P_3 = (\eta_{1,1} + \eta_{2,1})\,(\eta_{1,2} + \eta_{2,2}) - (\eta_{1,3} + \eta_{2,3}) > 0 \end{aligned} \tag{3.2.6}$$

De acuerdo a los valores obtenidos en el caso del punto de equilibrio E_2, el sistema es inestable cuando $\tau = 0$, ya que $P_1 = 0.6131$, $P_2 = -0.132$ y $P_3 = 0.148$.

El estudio basa su análisis de la estabilidad de los sistemas de orden fraccionario en los postulados enunciados por Petrás en 2011 y Muñoz-Pacheco et al. en 2020, que son:

- Un sistema del tipo ${}_{C}D_{t}^{q}\, x = A\, x$ se considera asintóticamente estable cuando todos sus autovalores λ satisfacen la inecuación $|\arg(\lambda)| > \frac{q\pi}{2}$.
- Un sistema de la forma ${}_{C}D_{t}^{q}\, x = A\, x$ se considera estable cuando todos sus autovalores λ satisfacen la inecuación $|\arg(\lambda)| > \frac{q\pi}{2}$, mientras que los autovalores críticos satisfacen $|\arg(\lambda)| = \frac{q\pi}{2}$ teniendo una multiplicidad geométrica de 1.

Para el caso del sistema planteado en la ecuación (3.2.2) y los autovalores del punto de equilibrio E_2, el sistema se vuelve inestable para un orden fraccionario $q \geq 0.9$ de acuerdo con los postulados anteriormente mencionados. Desde el punto de vista biológico, esto significa que en el intervalo $q \in [0.9, 1]$, el sistema de interacción glucosa-insulina de orden fraccionario tiene problemas metabólicos que no permiten funcionar al organismo con normalidad. A continuación se muestra la gráfica de evolución temporal del sistema y el espacio fásico con un orden fraccionario $q = 0.95$.

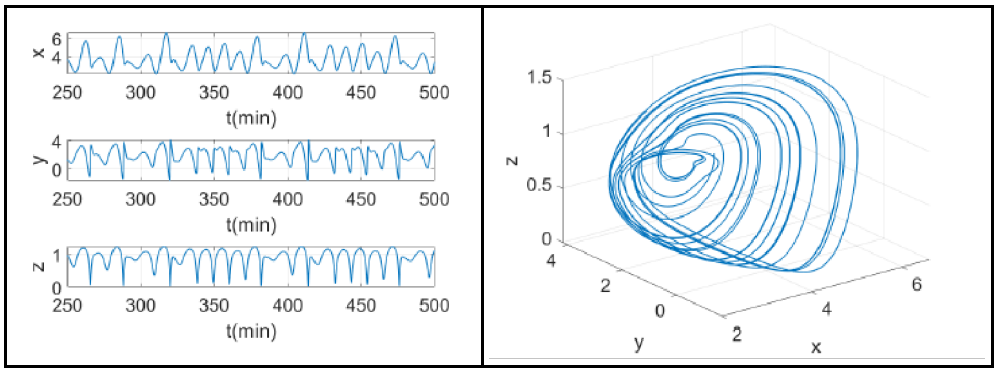


Figura 3.14. Evolución temporal y espacio fásico del sistema con un orden fraccionario de $q = 0.95$.

Con respecto al análisis de bifurcación de Hopf, para lograr la solución numérica del sistema de orden fraccionario presentado en la ecuación (3.2.2), el estudio [FERN22] hace uso del algoritmo propuesto por Petrás en 2011, en el que se presenta la solución numérica general para las ecuaciones diferenciales de orden fraccionario:

$$w(t_k) = f(w(t_{k-1}),\, t_{k-1})\, h^q - \sum_{j=1}^{k} c_j{}^q\, w(t_{k-j}) \tag{3.2.7}$$

donde $k = 0, 1, 2 \ldots, n$; $n = \frac{T_f}{h}$; h es el intervalo de tiempo y $c_j{}^q$ son coeficientes binomiales definidos como $c_0{}^q = 1$ y $c_j{}^q = \left(1 - \frac{1+q}{j}\right) c_{j-1}{}^q$. Las soluciones serán de la forma:

$$\begin{aligned} x_k &= (r_1\, y_{k-1-m_1} - r_2\, x_{k-1} + c_1\, z_{k-1-m_1})\, h^q - \sum_{j=1}^{k} c_j{}^q\, x_{k-j} \\ y_k &= \left(\frac{R_3\, N}{z_{k-1}} - R_4\, x_{k-1-m_2} + C_2\right) h^q - \sum_{j=1}^{k} c_j{}^q\, y_{k-j} \\ z_k &= \left(R_5\left(y_{k-1} - \hat{y}\right)(T - z_{k-1}) + R_6\, z_{k-1}(T - z_{k-1}) - R_7\, z_{k-1}\right) h^q - \sum_{j=1}^{k} c_j{}^q\, z_{k-j} \end{aligned} \tag{3.2.8}$$

donde $m_1 = \frac{\tau_g}{h}$ y $m_2 = \frac{\tau_i}{h} \in \mathbb{Z}^+$.

Con el objetivo de analizar el sistema de interacción glucosa-insulina y su comportamiento cuando se alteran distintos parámetros, el estudio realiza una investigación acerca de la

bifurcación de Hopf que se da en el sistema cuando se varían parámetros como el orden fraccionario o los retardo τ_g y τ_i.

3.2.3. Resultados Numéricos

Si se estudia el impacto del orden fraccionario del sistema y se escogen como retardos del sistema los valores $\tau_i = 2.55$ y $\tau_g = 0.56$, por ser valores razonables y en línea con las investigaciones realizadas en seres humanos con un sistema metabólico que funciona correctamente, se obtiene el siguiente diagrama de bifurcación para distintos valores del orden fraccionario del sistema:

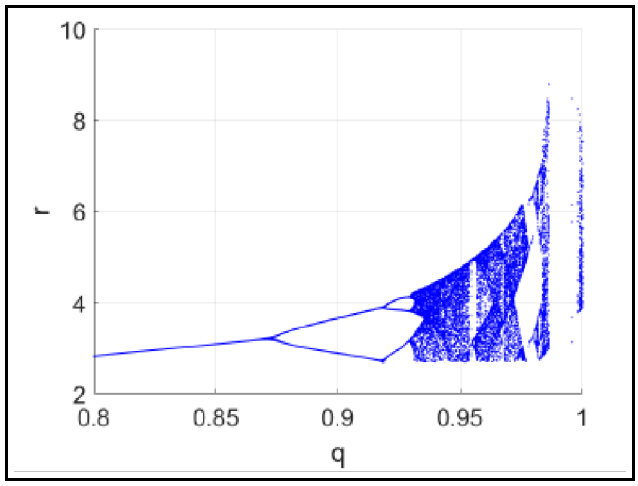


Figura 3.15. Bifurcación para distintos valores de q, manteniendo $\tau_g = 0.56$ y $\tau_i = 2.55$.

La variable r representa el comportamiento de la interacción glucosa-insulina, según la expresión $r = \sqrt{x(t_k)^2 + y(t_k)^2}$ propuesta por Muñoz-Pacheco en 2019. Se puede observar como para valores de q mayores a 0.93, el comportamiento del sistema es caótico, mientras que para valores menores , el sistema actúa de forma estable; bien de forma oscilatoria o estacionaria. Ambos resultados suponen que el organismo está funcionando adecuadamente desde un punto de vista metabólico.

Para analizar el impacto de los retardos τ_g y τ_i en un sistema con memoria, se mantiene un orden fraccionario y uno de los retardos constante y se evalúa el diagrama de bifurcación resultante. En el caso del sistema propuesto en (3.2.2), si se emplea el orden fraccionario $q = 0.95$, y se mantienen $\tau_g = 0.56$ en el caso de analizar el impacto del retardo τ_i, y $\tau_i = 2.55$ caso de analizar el contrario, se obtienen los diagramas siguientes:

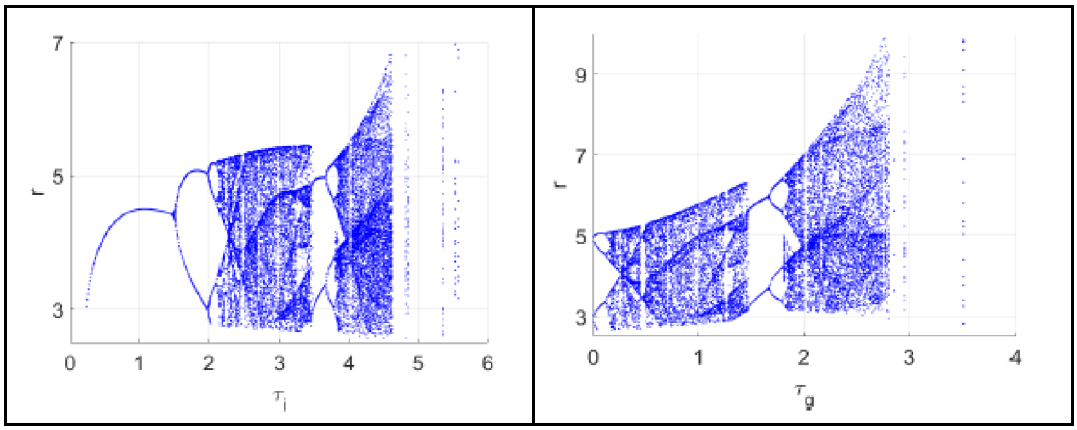


Figura 3.16. Diagramas de bifurcación para distintos valores de τ_g y τ_i con $q = 0.95$.

Como se puede observar en los diagramas, ambos retardos muestran un comportamiento inestable en una gama amplia de valores (primera inestabilidad de τ_i para valores comprendidos entre 2.1 y 3.5 y τ_g para valores entre 0.2 y 1.5; segunda inestabilidad de τ_i para valores mayores a 3.9 y τ_g para valores mayores a 1.8 aproximadamente). Fruto de este análisis, se puede determinar que el retardo en la interacción glucosa-insulina que se produce en el organismo resulta clave para alcanzar la estabilidad del sistema metabólico.

3.3. Modelo con Retardo Glucosa–Insulina con la Función de las Células β

El estudio [ALHU20] analiza el modelo de interacción glucosa-insulina con dos retardos temporales que incluye un término no lineal, con el objetivo de incrementar la precisión del modelo propuesto y simular con mayor realismo el comportamiento del sistema metabólico en los seres humanos.

Además, de forma similar al modelo propuesto en la sección inmediatamente anterior a la presente, incluye como factor determinante la participación de las células beta en el sistema de interacción glucosa-insulina, con términos específicos del modelo que se describirán más adelante a lo largo de esta sección.

Tal y como se ha realizado en las secciones anteriores, se realizará una descripción del modelo matemático planteado en el estudio, se describirá el análisis que se realiza con respecto a la estabilidad de las soluciones del sistema y se comentarán los resultados numéricos obtenidos.

3.3.1. Descripción del Modelo No Lineal

De forma parecida a los dos estudios que se han tratado con anterioridad a lo largo de este capítulo, la investigación [ALHU20] parte de un modelo de orden entero, el propuesto por Chuedoung et al. en 2009, con la salvedad de que se sustituye la constante de la tasa de degradación de la insulina por una tasa variable, debido a que la tasa de degradación es diferente según cada persona y varía según distintos factores, como el estado de estrés o de excitación de cada individuo en un momento concreto. En lugar de introducir órdenes fraccionarios, introduce un modelo no lineal mediante la inclusión de la tasa de variable de degradación de la insulina.

Esta tasa variable, de acuerdo a los autores, incrementa el realismo del modelo y lo convierte en un sistema más preciso, aunque también añade una mayor complejidad. El modelo propuesto se muestra a continuación, así como una representación gráfica de los compo-

nentes del mismo:

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= r_1\, z\left(t-\tau_g\right) y\left(t-\tau_g\right) - r_2\, x(t) - r_3\, x(t)\, y(t) + c_1\, z\left(t-\tau_g\right) \\
\dot{y}(t) &= \frac{R_3\, N}{z(t)} - R_4\, x\left(t-\tau_i\right) + C_2 \\
\dot{z}(t) &= R_5\left(y(t) - \hat{y}\right)\left(T - z(t)\right) + R_6\, z(t)\left(T - z(t)\right) - R_7\, z(t).
\end{aligned} \tag{3.3.1}$$

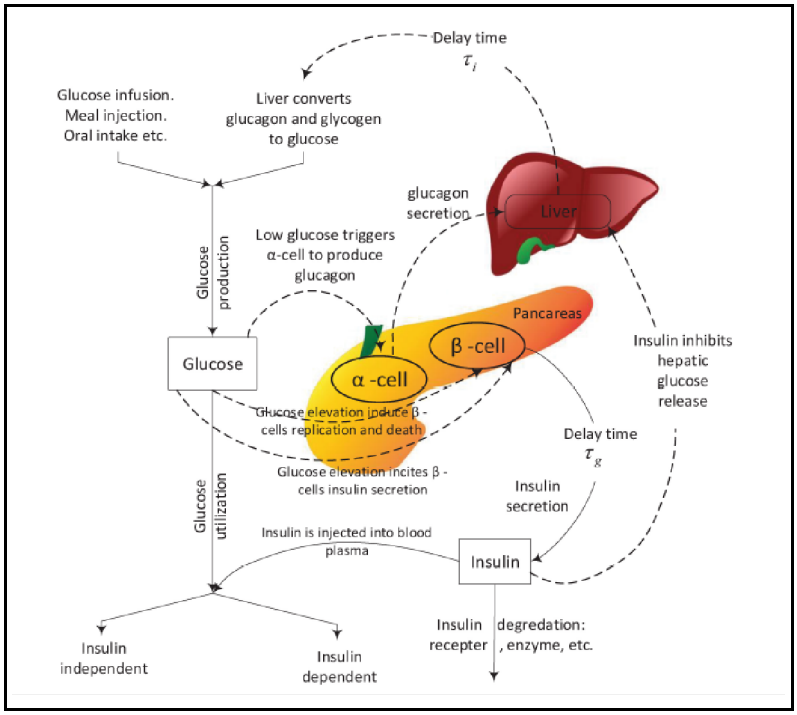


Figura 3.17. Representación esquemática de la interacción de los parámetros y los eventos que tienen lugar en el sistema regulatorio de la glucosa-insulina.

Al igual que en el modelo propuesto en [FERN22], $x(t)$ representa el nivel de insulina en el organismo, $y(t)$ se corresponde con el nivel de glucosa, $z(t)$ representa el número de células beta e $\hat{y}$ representa el metabolismo de glucosa con respecto al nivel basal. El retardo τ_g se corresponde con el retardo en la producción de insulina cuando el nivel de glucosa en sangre aumenta, mientras que τ_i representa el retardo en la reducción del nivel de glucosa una vez que se han incrementado los niveles de insulina en sangre.

Con respecto a los términos de la primera expresión del sistema propuesto en (3.3.1), el término $r_1\, y\left(t-\tau_g\right) z\left(t-\tau_g\right)$ se corresponde con el incremento de la concentración de insulina secretada para reducir el incremento del nivel de glucosa detectado en τ_g. El término $r_2\, x$ es la tasa de de reducción de la insulina independiente de la glucosa, mientras que el término $r_3\, x$ representa la degradación que sí se encuentra vinculada al nivel de glucosa presente.

El término $c_1\, z\left(t-\tau_g\right)$ se corresponde con el incremento de la insulina en el plasma, fruto de la secreción de las células beta e independiente del resto de términos.

En relación a los términos de las expresiones segunda y tercera, $R_4\, x(t-\tau_i)$ representa la tasa de variación de la concentración de glucosa en respuesta a la insulina, con un retardo τ_i; el parámetro T se corresponde con la densidad total de células beta, mientras que el término $R_5\left(y-\hat{y}\right)(T-z)$ se corresponde con el incremento de las células beta que se dividen fruto de la interacción entre el nivel de glucosa por encima del basal y las células beta que

no se dividen, tal y como se describía en el modelo descrito anteriormente, en la sección 3.2.1. El término $R_6\, z(T-z)$ representa la tasa de incremento de z, provocado por la interacción bilateral entre las células beta que se dividen y aquellas que no lo hacen, mientras que el último término, $R_7\, z$ se corresponde con la reducción en z debido a al nivel actual de células beta.

3.3.2. Análisis de Estabilidad y Análisis de Bifurcación

En el estudio, se realiza un análisis del sistema con el objetivo de comprobar el impacto que tienen los distintos parámetros de retardo (τ_i, τ_g) en la estabilidad. Para ello, tal y como se realiza en los estudios anteriormente mencionados a lo largo de este capítulo, se calcula la matriz jacobiana y se extrae la ecuación característica, con el propósito de obtener los autovalores. Los puntos de equilibrio se obtienen resolviendo el sistema con los valores de los parámetros que se muestran en la tabla siguiente:

Tabla 3.3. Valores de los parámetros del modelo propuesto.

r_1	r_2	r_3	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7	c_1	c_2	$\hat{y}$	T	N
0.472	0.2275	0.025	0.82	0.6	0.3	0.3	0.2	0.1	0.8	1.42	1.5	1.27

Este estudio se limita a analizar el impacto de los retardos únicamente, ya que no introduce la derivada fraccionaria de Caputo para la resolución del sistema con órdenes fraccionarios, como sí ocurría en los dos estudios anteriores. El análisis de estabilidad y el diagrama de bifurcación se muestran en la siguiente gráfica, que tiene en cuenta el impacto de los retardos τ_i y τ_g.

Se ha obtenido manteniendo uno de los retardos constante y variando el retardo restante, de forma que el estado final del modelo sirve como valor inicial para la siguiente iteración.

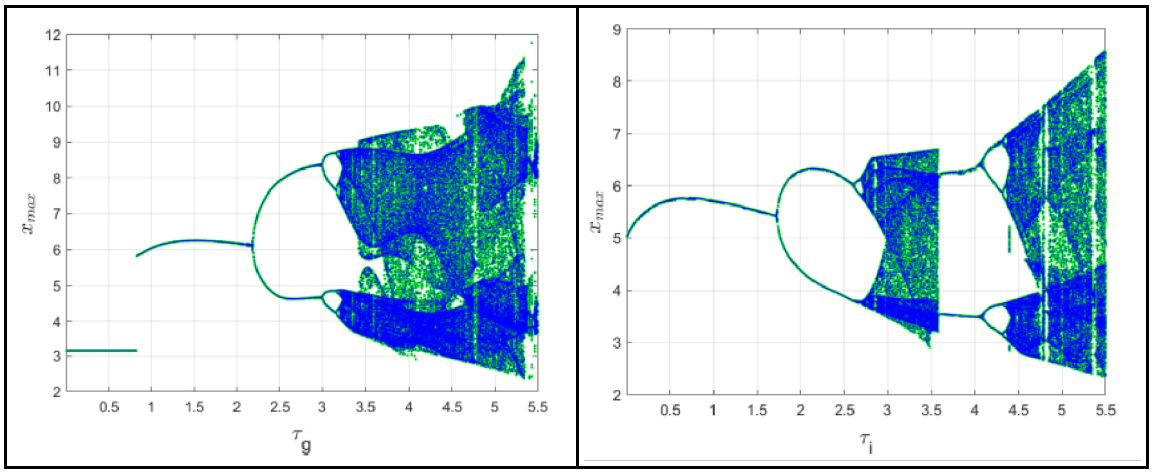


Figura 3.18. Diagramas de bifurcación para distintos valores de τ_g y τ_i.

Como se puede comprobar en los diagramas anteriores, cuando se incrementa el retardo τ_i, el sistema se vuelve inestable en dos períodos distintos, precedidos ambos por soluciones oscilatorias estables. Sucede de forma semejante con el retardo τ_g, cuyo incremento también lleva al sistema a soluciones caóticas.

3.3.3. Resultados Numéricos

Los resultados numéricos del sistema propuesto en la ecuación (3.3.1) obtenidos con los valores de los parámetros mostrados en la Tabla 3.3.2 de la anterior sección y con unos

valores de retardo $\tau_g = 0.46$, $\tau_i = 0.05$ se muestran a continuación:

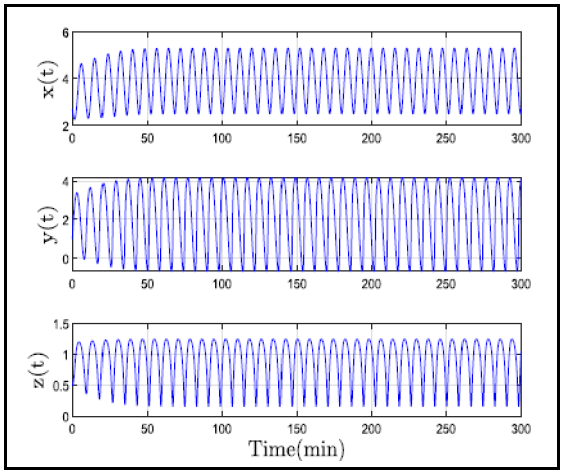


Figura 3.19. Solución oscilatoria estable del sistema planteado en la ecuación (3.3.1) con retardos $\tau_i = 0.05$ y $\tau_g = 0.46$.

Como se puede comprobar en las gráficas expuestas en la Figura 3.19, las tres variables tienen un comportamiento oscilatorio acotado entre dos valores máximo y mínimo, con un comportamiento estable y periódico. El diagrama de espacio fásico, que se muestra a continuación, confirma la estabilidad de la solución obtenida. Los resultados obtenidos, de acuerdo al estudio objeto de análisis en esta sección, confirman las investigaciones y experimentos realizados por Tasaka et al. en 1994, Li et al. en 2006 y Molnar et al. en 1972.

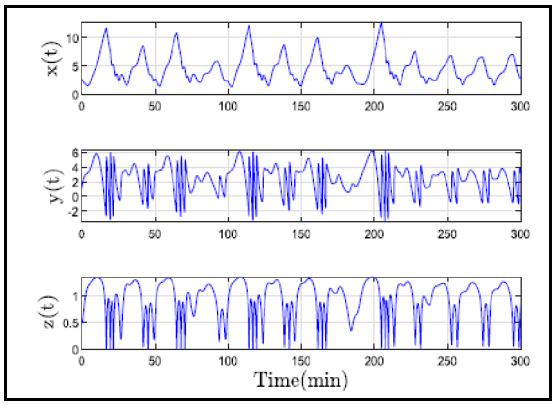


Figura 3.20. Solución inestable del sistema planteado en la ecuación (3.3.1) con retardos $\tau_i = 3.5$ y $\tau_g = 3.5$.

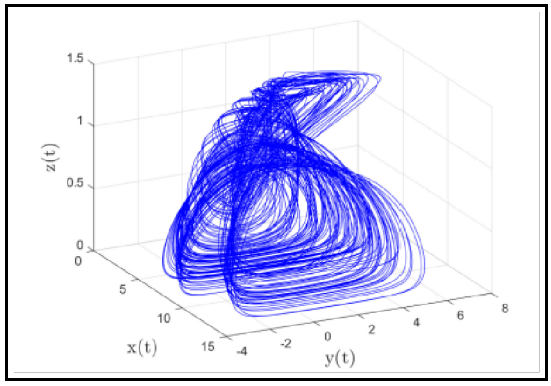


Figura 3.21. Espacio fásico de la solución al sistema planteado en la ecuación (3.3.1) con retardos

$$\tau_i = 3.5 \text{ y } \tau_g = 3.5.$$

Las gráficas anteriores confirman los experimentos realizados por Faure & Korn en 2001 o Baghdadi et al. en 2015. El nivel de la glucosa en pacientes diabéticos puede ser predicho con un margen de confianza razonable si los retardos se encuentran dentro de los rangos de estabilidad del sistema, mientras que si los retardos se encuentran en el rango inestable, la solución se convierte en caótica. Pese a que las soluciones caóticas siguen siendo deterministas, tienen una sensibilidad muy alta a las condiciones iniciales, por lo que un error en la medición de las condiciones iniciales, por insignificante que pueda resultar, produce un cambio notable en el largo plazo, imposibilitando la predicción en estos casos.

Capítulo 4

4. Método Wavelet de Chelyshkov SEDR Fraccionarias

4.1. Introducción

El objeto del presente capítulo es el estudio y diseño de un método *Wavelet* de Chelyshkov basado en los polinomios y *Wavelets* de Chelyshkov que permitan la construcción de la matriz operativa de integración fraccionaria y la matriz operativa de retardo para esta base de *Wavelets*.

Se derivará un algoritmo numérico con el enfoque de Galerkin basado en estas matrices operativas que resuelva un sistema de ecuaciones fraccionarias con retardo (*Systems of Fractional Delay Differential Equations*–SFDDEs) reduciendo dicho sistema de orden fraccionario a un sistema de ecuaciones algebraicas no lineales [MOHA18], [MORA19].

4.2. Preliminares sobre el Cálculo Fraccionario

El cálculo fraccionario emplea derivadas e integrales de órdenes no enteros. No existe una única definición para las derivadas e integrales de órden fraccionario, pese a que estos operadores permiten modelar una amplia gama de problemas. Las definiciones más utilizadas para definir el cálculo de derivadas e integrales de orden fraccionario son, respectivamente, la definición de Caputo y la definición de Riemann-Liouville, que se pueden definir como: [MOHA18]

- **Definición 1**: La integral fraccionaria de Riemann-Liouville de orden $\nu \geqslant 0$ se define como:

$$(I^{\nu} f)(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^t (t-\tau)^{\nu-1} f(t)\, d\tau & \nu > 0, \\ f(t) & \nu = 0. \end{cases} \tag{4.2.1}$$

  Las propiedades del operador de la integral fraccional de Riemann-Liuoville I^{ν} se muestran a continuación, cuyas demostraciones están expuestas en el estudio de Fakhrodin Mohammadi [MOHA18]:

$$\begin{aligned} I^{\nu_1}(I^{\nu_2} f(t)) &= I^{\nu_2}(I^{\nu_1} f(t)), \quad && \nu_1, \nu_2 \geq 0, \\ I^{\nu 1}(I^{\nu 2} f(t)) &= I^{\nu 2+\nu 1} f(t), && \nu_1, \nu_2 \geq 0, \\ I^{\nu} t^{\lambda} &= \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+\nu+1)} t^{\nu+\lambda}, && \nu \geq 0,\ \lambda > -1. \end{aligned} \tag{4.2.2}$$

- **Definición 2:** Para un número real $\nu > 0$, la derivada fraccionaria de Caputo D^{ν} se define como:

$$D^{\nu} f(t) = \begin{cases} \frac{d^n f(t)}{dt^n} & \nu = n \in \mathbb{N} \\ \frac{1}{\Gamma(n-\nu)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\nu-n+1}} d\tau, & t > 0,\ 0 \le n-1 < \nu < n \end{cases} \tag{4.2.3}$$

Donde n es un número entero, para $t > 0$.

Las propiedades más útiles para el cálculo fraccionario del operador D^{ν} de la derivada fraccionaria de Caputo son:

$$\begin{gathered} I^{\nu} D^{\nu} f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0^+) \frac{t^k}{k!} \\ D^{\nu} I^{\nu} f(t) = f(t) \\ D^{\nu} t^{\lambda} = \begin{cases} 0, & \text{para } \lambda \in \mathbb{N}_0 \ y \ \lambda < \nu \\ \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-\nu+1)} t^{\lambda-\nu} & \text{para el resto de casos} \end{cases}. \end{gathered} \tag{4.2.4}$$

4.3. Wavelets de Chelyshkov

A lo largo de esta sección, se definirán los polinomios de Chelyshkov y sus principales propiedades, para más tarde construir las funciones *Wavelet* de Chelyshkov haciendo uso de los polinomios y las propiedades definidas.

4.3.1. Polinomios de Chelyshkov

Los polinomios de Chelyshkov [MOHA18] son polinomios ortogonales que fueron presentados por Chelyshkov en 2006 y Gokmen et al. en 2017. Se definen de forma explícita de la manera que se expone a continuación:

$$C_{M,n}(t) = \sum_{j=0}^{M-n} a_{j,n} t^{n+j}, \qquad n = 0,\ 1,\ ...,\ M. \tag{4.3.1}$$

Donde:

$$a_{j,n} = (-1)^j \binom{M-n}{j} \binom{M+n+j+1}{M-n} \tag{4.3.2}$$

Los polinomios que se muestran en (4.3.1) son ortogonales en el intervalo [0, 1] con respecto a la función peso $\omega(t) = 1$ y con respecto a la expresión:

$$\int_0^1 C_{M,n}(t)\, C_{M,m}(t)\, dt = \frac{\delta_{mn}}{m+n+1} \tag{4.3.3}$$

donde δ_{mn} es la delta de Kronecker. Los polinomios descritos se pueden derivar empleando la formula de Rodrigues como:

$$C_{M,n}(t) = \frac{1}{(M-n)!} \frac{1}{t^{M-n}} \frac{d^{M-n}}{dt^{M-n}} \left(t^{M+n+1} (1-t)^{M-n} \right), \qquad n = 0,\ ...,\ M. \tag{4.3.4}$$

De acuerdo con la definición de polinomio de Chelyshkov expuesta en la ecuación (4.3.1), para un número M entero, los polinomios $C_{M,n}(t),\ n = 0,\ 1,\ ...,\ M$ son polinomios de grado M, ya que el último elemento del sumatorio del lado derecho de la ecuación (4.3.1) es $j = M - n$, por lo tanto, el grado del elemento t^{n+j} quedará definido como t^{n-M-n}.

Esta característica diferencia los polinomios de Chelyshkov de otros polinomios ortogonales típicos en el intervalo [0, 1], como por ejemplo los polinomios de Legendre, de Chebyshev de primer tipo y los polinomios de Chebyshev de segundo tipo.

Los polinomios de Chelyshkov son ortogonales con respecto a la función peso $\omega(t) = 1$, por lo que su empleo para la obtención de soluciones a ecuaciones resulta más eficiente y brinda una mayor fiabilidad que el uso de otros polinomios ortogonales como los de Chebyshev de primer y segundo tipo, de acuerdo con lo expuesto en [MOHA18].

Cualquier función integrable $f(t)$ en el intervalo [0,1) se puede expresar mediante polinomios de Chelyshkov como:

$$f(t) \simeq \sum_{i=0}^{M} c_i \, C_{M,i}(t) = C^T \, \Phi(t) \tag{4.3.5}$$

donde C y $\Phi(x)$ son vectores $(M+1)$ que quedan definidos por las expresiones:

$$C = [c_0, \, c_1, \, \ldots, \, c_M], \quad \Phi(t) = [C_{M,0}(t), \, C_{M,1}(t), \, \ldots, \, C_{M,M}(t)]. \tag{4.3.6}$$

y también:

$$c_i = (2\,i + 1) \int_0^1 C_{M,i}(t) \, f(t) \, dt. \tag{4.3.7}$$

Ejemplo 4.3.1.

(a) Calcúlense los polinomios de *Chelyshkov* $C_{M,n}(x)$, con $M = 4$ y $n = 0, 1, 2, \ldots, M$.

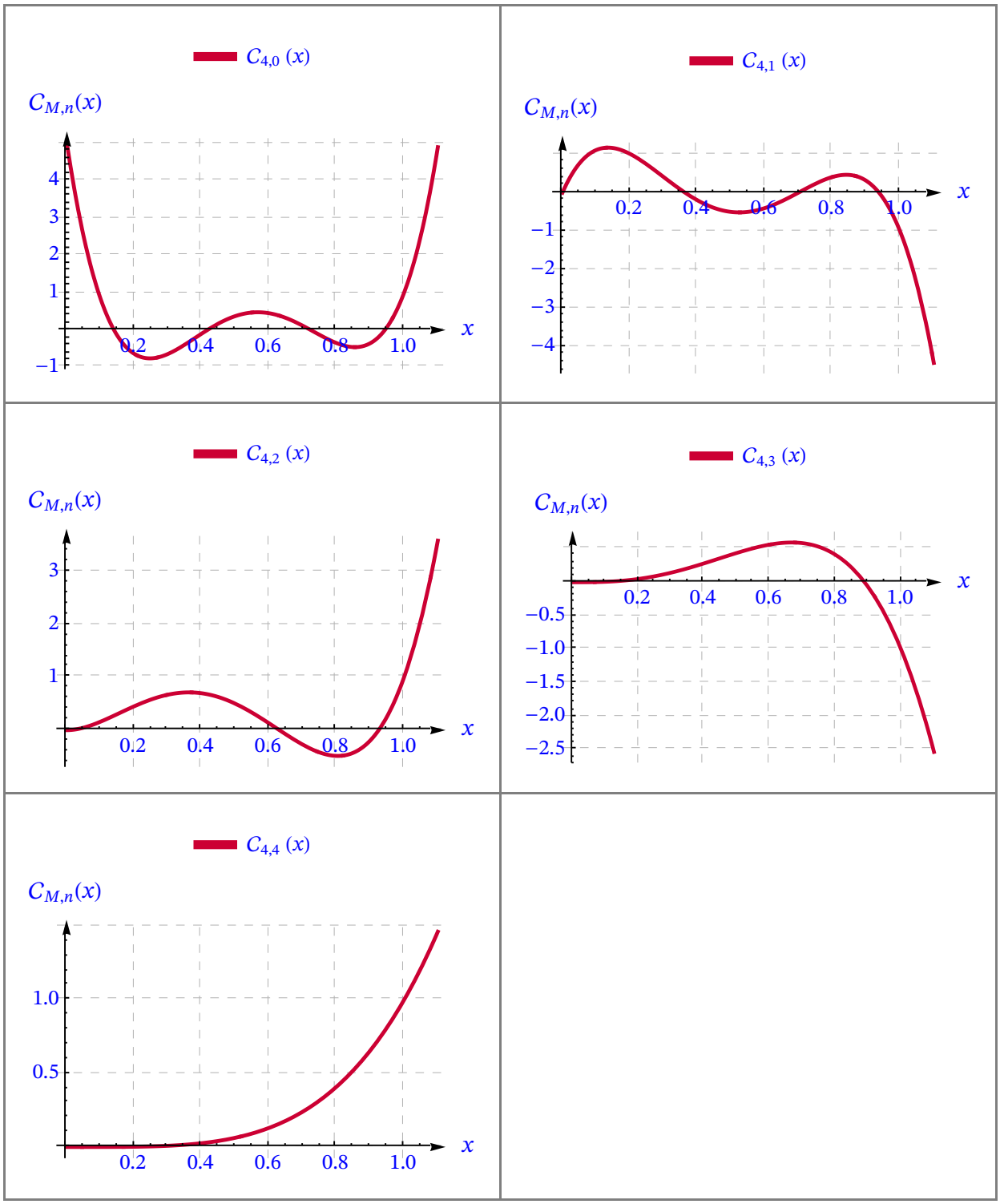
(b) Represéntense los primeros polinomios $C_{M,n}(x)$.

SOLUCIÓN

(a)

$$\begin{aligned} C_{4,0}(x) &= 126\,x^4 - 280\,x^3 + 210\,x^2 - 60\,x + 5 \\ C_{4,1}(x) &= -84\,x^4 + 168\,x^3 - 105\,x^2 + 20\,x \\ C_{4,2}(x) &= 36\,x^4 - 56\,x^3 + 21\,x^2 \\ C_{4,3}(x) &= 8\,x^3 - 9\,x^4 \\ C_{4,4}(x) &= x^4 \end{aligned}$$

(b)



4.3.2. Funciones Wavelets de Chelyshkov

Las funciones *Wavelets* son un conjunto de funciones que se pueden definir a partir de la dilatación y la traslación de una función madre *Wavelet* ψ. Cuando los parámetros de dilatación y traslación varían, se obtienen familias de funciones *Wavelets* continuas [MOHA18]. [MOHS20]. Las funciones *Wavelets* de Chelyshkov $\psi_{n\,m}(x)$ se definen en el intervalo [0, 1) como:

$$\psi_{n\,m}(t) = \begin{cases} \sqrt{2\,m+1}\cdot 2^{k/2}\,\rho_{m,M}\left(2^k\,t-n\right) & \frac{n}{2^k} \le t \le \frac{n+1}{2^k} \\ 0 & \text{resto de casos} \end{cases} \tag{4.3.8}$$

donde $n = 0, 1, \ldots, 2^k - 1$ y $m = 0, 1, \ldots, M$ y $C_{M,n}(t)$ son los polinomios de Chelyshkov de grado m definidos con anterioridad en la ecuación (4.3.1). El conjunto de *Wavelets* de Chelyshkov $\psi_{n\,m}(t)$, $n = 0, 1, \ldots, 2^k - 1$, $m = 0, 1, \ldots, M$ forma un conjunto ortonormal en el intervalo [0, 1].

▼ **Teorema 2.1. Base Ortonormal de Chelyshkov.**

Sea el conjunto de *Wavelets* de *Chelyshkov* $\psi_{n\,m}(x)$, $n = 0, 1, \cdots, 2^k - 1$ y $m = 0, 1, \cdots, M$ de grado M, entonces constituyen un conjunto ortonormal en el intervalo [0, 1] respecto de la del producto interno

$$\langle \psi_{n\,m}(x),\, \psi_{n^*\,m^*}(x)\rangle = \int_0^1 \psi_{n\,m}(x)\,\psi_{n^*\,m^*}(x)\,dx = \begin{cases} 1 & n = m \text{ y } n^* = m^* \\ 0 & n \neq m \text{ o } n^* \neq m^* \end{cases}$$

con la función peso $w(x) = 1$.

■ **Ejemplo 4.3.2. Base Ortonormal de Wavelets de Chelyshkov.**

Sean las*Wavelets* de Chelyshkov $\psi_{n\,m}(x)$ dadas por la definición siguiente:

$$\psi_{n\,m}(x) = \begin{cases} \sqrt{2\,m+1}\;2^{\frac{k}{2}}\,C_{M,m}(x)\left(2^k\,x-n\right) & \frac{n}{2^k} \le x \le \frac{n+1}{2^k} \\ 0 & \text{Resto} \end{cases}$$

Calcúlense las bases ortonormales de *Wavelets* de Chelyshkev $\{\psi_{n\,m}(x)\}$ en el intervalo [0, 1] respecto de la función peso $w(x) = 1$ para los parámetros dados:

(a) $k = 0$ $M = 3$ $\begin{cases} n = 0, 1, \cdots, 2^k - 1 = 0 \\ m = 0, 1, \cdots, M = 0, 1, 2, 3 \end{cases}$

(b) $k = 1$ $M = 3$ $\begin{cases} n = 0, 1, \cdots, 2^k - 1 = 0, 1 \\ m = 0, 1, \cdots, M = 0, 1, 2, 3 \end{cases}$

(c) $k = 2$ $M = 3$ $\begin{cases} n = 0, 1, \cdots, 2^k - 1 = 0, 1, 2, 3 \\ m = 0, 1, \cdots, M = 0, 1, 2, 3 \end{cases}$

SOLUCIÓN

(a)

$$\psi_{0,0}(x) \quad \begin{cases} -35\,x^3 + 60\,x^2 - 30\,x + 4 & 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

$$\psi_{0,1}(x) \quad \begin{cases} \sqrt{3}\,(-35\,x^3 + 60\,x^2 - 30\,x + 4) & 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

$$\psi_{0,2}(x) \quad \begin{cases} \sqrt{5}\,(-35\,x^3 + 60\,x^2 - 30\,x + 4) & 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

$$\psi_{0,3}(x) \quad \begin{cases} \sqrt{7}\,(-35\,x^3 + 60\,x^2 - 30\,x + 4) & 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

(b)

$$\psi_{0,0}(x) \quad \begin{cases} \sqrt{2}\,(-280\,x^3+240\,x^2-60\,x+4) & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

$$\psi_{0,1}(x) \quad \begin{cases} 4\,\sqrt{6}\,x\,(42\,x^2-30\,x+5) & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

$$\psi_{0,2}(x) \quad \begin{cases} -8\,\sqrt{10}\,x^2\,(7\,x-3) & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

$$\psi_{0,3}(x) \quad \begin{cases} 8\,\sqrt{14}\,x^3 & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

$$\psi_{1,0}(x) \quad \begin{cases} \sqrt{2}\,(-280\,x^3+660\,x^2-510\,x+129) & \frac{1}{2} \le x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

$$\psi_{1,1}(x) \quad \begin{cases} \sqrt{6}\,(168\,x^3-372\,x^2+266\,x-61) & \frac{1}{2} \le x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

$$\psi_{1,2}(x) \quad \begin{cases} -\sqrt{10}\,(1-2\,x)^2\,(14\,x-13) & \frac{1}{2} \le x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

$$\psi_{1,3}(x) \quad \begin{cases} \sqrt{14}\,(2\,x-1)^3 & \frac{1}{2} \le x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

(c)

$$\psi_{0,0}(x) \quad \begin{cases} -8\,(560\,x^3 - 240\,x^2 + 30\,x - 1) & 0 \le x < \frac{1}{4} \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

$$\psi_{0,1}(x) \quad \begin{cases} 16\,\sqrt{3}\,x\,(168\,x^2 - 60\,x + 5) & 0 \le x < \frac{1}{4} \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

$$\psi_{0,2}(x) \quad \begin{cases} -64\,\sqrt{5}\,x^2\,(14\,x - 3) & 0 \le x < \frac{1}{4} \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

$$\psi_{0,3}(x) \quad \begin{cases} 128\,\sqrt{7}\,x^3 & 0 \le x < \frac{1}{4} \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

$$\psi_{1,0}(x) \quad \begin{cases} -4480\,x^3 + 5280\,x^2 - 2040\,x + 258 & \frac{1}{4} \le x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

$$\psi_{1,1}(x) \quad \begin{cases} 2\,\sqrt{3}\,(1344\,x^3 - 1488\,x^2 + 532\,x - 61) & \frac{1}{4} \le x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

$$\psi_{1,2}(x) \quad \begin{cases} -2\,\sqrt{5}\,(1 - 4\,x)^2\,(28\,x - 13) & \frac{1}{4} \le x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

$$\psi_{1,3}(x) \quad \begin{cases} 2\,\sqrt{7}\,(4\,x - 1)^3 & \frac{1}{4} \le x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

$$\psi_{2,0}(x) \quad \begin{cases} -16\,(280\,x^3 - 540\,x^2 + 345\,x - 73) & \frac{1}{2} \le x < \frac{3}{4} \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

$$\psi_{2,1}(x) \quad \begin{cases} 8\,\sqrt{3}\,(336\,x^3 - 624\,x^2 + 382\,x - 77) & \frac{1}{2} \le x < \frac{3}{4} \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

$$\psi_{2,2}(x) \quad \begin{cases} -32\,\sqrt{5}\,(1 - 2\,x)^2\,(7\,x - 5) & \frac{1}{2} \le x < \frac{3}{4} \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

$$\psi_{2,3}(x) \quad \begin{cases} 2\,\sqrt{7}\,(4\,x - 2)^3 & \frac{1}{2} \le x < \frac{3}{4} \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

$$\psi_{3,0}(x) \quad \begin{cases} -4480\,x^3 + 12\,000\,x^2 - 10\,680\,x + 3158 & \frac{3}{4} \le x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

$$\psi_{3,1}(x) \quad \begin{cases} 2\,\sqrt{3}\,(1344\,x^3 - 3504\,x^2 + 3028\,x - 867) & \frac{3}{4} \le x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

$$\psi_{3,2}(x) \quad \begin{cases} -2\,\sqrt{5}\,(3 - 4\,x)^2\,(28\,x - 27) & \frac{3}{4} \le x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

$$\psi_{3,3}(x) \quad \begin{cases} 2\,\sqrt{7}\,(4\,x - 3)^3 & \frac{3}{4} \le x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

Si se toma como referencia la definición de la *Wavelet* de Chelyshkov, la *Wavelet* $\psi_{n\,m}(t)$ es un polinomio de grado M en el intervalo $\left[n \,/\, 2^k,\ (n+1) \,/\, 2^k\right]$. Además, cualquier función $f(t)$ de cuadrado integrable (una función que tiene una integral definida que es finita cuando se eleva al cuadrado) en el intervalo $[0, 1)$ se puede escribir en forma de *Wavelet* de

Chelyshkov de la siguiente forma:

$$f(t) \simeq f_{M,k}(t) = \sum_{n=0}^{2^k-1} \sum_{m=0}^{M} c_{n\,m}\, \psi_{n\,m}(x) = C^T \psi(t), \tag{4.3.9}$$

donde C y $\psi(t)$ son vectores $\hat{m} = 2^k (M+1)$ dados por la expresión:

$$\begin{aligned} C &= \left[c_{00},\ c_{0\,(M-1)},\ \ldots,\ c_{(2^k-1)\,0},\ \ldots,\ c_{(2^k-1)\,(M-1)}\right]^T, \\ \psi(x) &= \left[\psi_{00}(x),\ \ldots,\ \psi_{0\,M}(x),\ \ldots,\ \psi_{(2^k-1)\,0}(x),\ \ldots,\ \psi_{(2^k-1)\,M}(x)\right]^T \end{aligned} \tag{4.3.10}$$

y donde:

$$c_{n\,m} = \langle \psi_{n\,m}(t),\ f(t) \rangle = \int_0^1 \psi_{n\,m}(t)\, f(t)\, dt. \tag{4.3.11}$$

La expresión definida en la ecuacion (4.3.10) se puede agrupar de la forma:

$$f_{M,k}(x) = \sum_{i=1}^{\hat{m}} c_i\, \psi_i(x) = C^T \psi(x), \tag{4.3.12}$$

donde:

$$\begin{aligned} C &= [c_1,\ \ldots,\ c_{\hat{m}}],\ \psi(x) = [\psi_1(x),\ \ldots,\ \psi_{\hat{m}}(x)], \\ c_i &= c_{n\,m},\ \psi_i(x) = \psi_{n\,m}(x),\ i = n\,(M+1) + m + 1. \end{aligned} \tag{4.3.13}$$

■ **Ejemplo 4.3.3. Desarrollo en Serie de *Wavelets* de Chelyshkov.**
Sea la función definida en el intervalo $[A,\ B] = [0,\ 1]$.

(a) $f(x) = e^{-x} \operatorname{sen}(2\pi x)$ $\quad k = 1 \quad M = 2.$

(i) Determínense la base ortonormal de *Wavelets* de Chelyshkov

$$\mathcal{B} = \{\psi_{n\,m}(x)\} \begin{cases} n = 0,\ 1,\ \cdots,\ 2^k - 1 \\ m = 0,\ 1\ \cdots,\ M \end{cases} \quad k = 1 \quad M = 2.$$

(ii) Represéntensen las gráficas de las *Wavelets* de Chelyshkov.

(b) (i) Hállese la función $\tilde{f}(x) = f_{M,k}(x)$ que aproxima a $f(x)$ mediante el desarrollo en serie de *Wavelets* de Chelyshkov.

(ii) Represéntense los coeficientes *Wavelets*, la función $f(x)$ y su aproximación $\tilde{f}(x)$.

(iii) Créese una tabla con los valores de x, $f(x)$, $\tilde{f}(x)$ y el error absoluto $\left|f(x) - \tilde{f}(x)\right|$ cometido en cada punto para $x \in [0,\ 1]$.

(iii) Créese una tabla de valores en el intervalo $x \in [0,\ 1]$, con los valores de x, $\tilde{f}(x)$, $f(x)$ y el error absoluto $\left|\tilde{f}(x) - f(x)\right|$ cometido en cada punto:

x_j, $f(x_j)$ (CWM), $f(x_j)$, $\left|f(x_j)\,(\text{CWM}) - f(x_j)\right|$.

(iv) Hállense los errores L_∞, L_2 y el error RMS.

SOLUCIÓN

(a)

Wavelets de Chelyshkov $\psi_{n\,m}$

$$\begin{pmatrix} [A, B] = & [0, 1] \\ k = & 1 \\ M = & 2 \\ n = 0, \cdots, 2^k - 1 = & \{0, 1\} \\ m = 0, \cdots, M = & \{0, 1, 2\} \end{pmatrix}$$

(a) Definición de las *Wavelets* de Chelyshkov

$$\psi_{n\,m}(x) = \begin{cases} \sqrt{2\,m+1}\ 2^{\frac{k}{2}}\, C_{M,m}(x)\left(2^k x - n\right) & \frac{n}{2^k} \le x < \frac{n+1}{2^k} \\ 0 & \text{Resto} \end{cases}$$

$$\begin{cases} n = 0,\ 1,\ \cdots,\ 2^k - 1 & k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \\ m = 0,\ 1,\ \cdots,\ M & \text{grado del polinomio} \end{cases}$$

$C_{M,m}(x) \equiv$ polinomios de Chelyshkov de grado M

$$\begin{pmatrix} \psi_{0\,0}(x) = & \begin{cases} \sqrt{2}\ (40\,x^2 - 24\,x + 3) & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{0\,1}(x) = & \begin{cases} \sqrt{6}\ (8\,x - 20\,x^2) & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{0\,2}(x) = & \begin{cases} 4\ \sqrt{10}\ x^2 & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{1\,0}(x) = & \begin{cases} \sqrt{2}\ (10\,(2\,x-1)^2 - 12\,(2\,x-1) + 3) & \frac{1}{2} \le x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{1\,1}(x) = & \begin{cases} \sqrt{6}\ (4\,(2\,x-1) - 5\,(2\,x-1)^2) & \frac{1}{2} \le x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{1\,2}(x) = & \begin{cases} \sqrt{10}\ (2\,x-1)^2 & \frac{1}{2} \le x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \end{pmatrix}$$

$$\psi_{0\,0}(x) = \begin{cases} \sqrt{2}\ (40\,x^2 - 24\,x + 3) & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

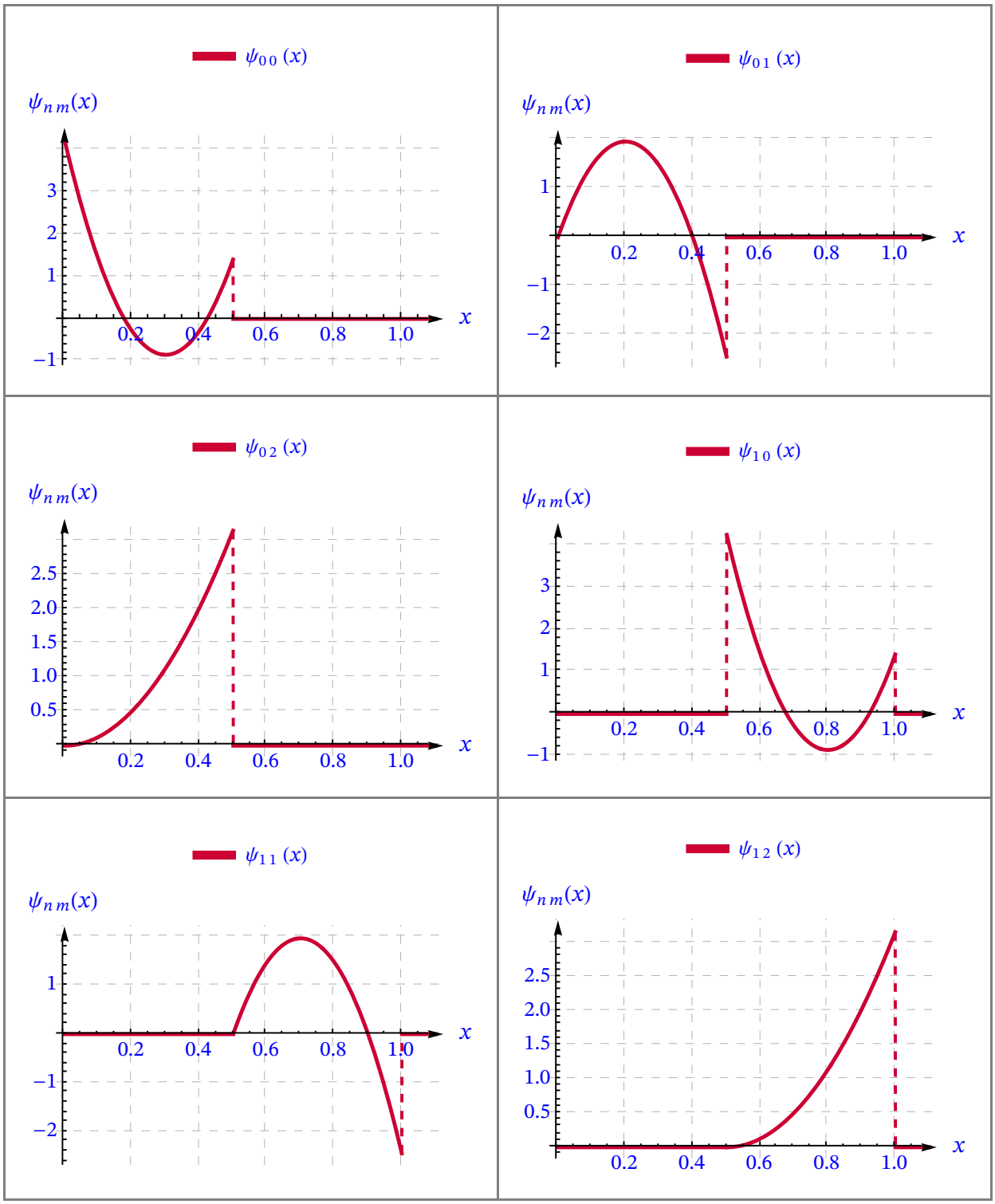
$$\psi_{0\,1}(x) = \begin{cases} \sqrt{6}\ (8\,x - 20\,x^2) & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

$$\psi_{0\,2}(x) = \begin{cases} 4\ \sqrt{10}\ x^2 & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

$$\psi_{1\,0}(x) = \begin{cases} \sqrt{2}\,(10\,(2\,x-1)^2 - 12\,(2\,x-1) + 3) & \frac{1}{2} \le x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

$$\psi_{1\,1}(x) = \begin{cases} \sqrt{6}\,(4\,(2\,x-1) - 5\,(2\,x-1)^2) & \frac{1}{2} \le x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

$$\psi_{1\,2}(x) = \begin{cases} \sqrt{10}\,(2\,x-1)^2 & \frac{1}{2} \le x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$



(b)

Desarrollo en serie de *Wavelet* de Chelyshkov de la función
$f(x) = e^{-x}\sin(2\pi x)$ en $[A, B] = [0, 1]$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{2^k-1} \sum_{m=0}^{M} c_{n\,m}\, \psi_{n\,m}(x) \qquad x \in [0, 1]$$

$$c_{n\,m} = \langle f(x), \psi_{n\,m}(x) \rangle = \int_0^1 f(x)\, \psi_{n\,m}(x)\, w(x)\, dx$$

- $w(x) = 1$

Wavelets de Chelyshkov $\psi_{n\,m}$

$$\begin{pmatrix} [A, B] = & [0, 1] \\ k = & 1 \\ M = & 2 \\ n = 0, \cdots, 2^k - 1 = & \{0,\ 1\} \\ m = 0, \cdots, M = & \{0,\ 1,\ 2\} \end{pmatrix}$$

(a) Definición de las *Wavelets* de Chelyshkov

$$\psi_{n\,m}(x) = \begin{cases} \sqrt{2\,m+1}\ 2^{\frac{k}{2}}\, C_{M,m}\,(x)\left(2^k\, x - n\right) & \frac{n}{2^k} \le x < \frac{n+1}{2^k} \\ 0 & \text{Resto} \end{cases}$$

$$\begin{cases} n = 0,\ 1,\ \cdots,\ 2^k - 1 & k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \\ m = 0,\ 1,\ \cdots,\ M & \text{(grado del polinomio)} \end{cases}$$

$C_{M,m}(x) \equiv$ polinomios de *Chelyshkov* de grado M

$$\psi_{n\,m}(x) = \begin{pmatrix} \psi_{0\,0}(x) & = & \begin{cases} \sqrt{2}\ (40\, x^2 - 24\, x + 3) & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{0\,1}(x) & = & \begin{cases} \sqrt{6}\ (8\, x - 20\, x^2) & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{0\,2}(x) & = & \begin{cases} 4\ \sqrt{10}\ x^2 & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{1\,0}(x) & = & \begin{cases} \sqrt{2}\ (10\,(2\, x - 1)^2 - 12\,(2\, x - 1) + 3) & \frac{1}{2} \le x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{1\,1}(x) & = & \begin{cases} \sqrt{6}\ (4\,(2\, x - 1) - 5\,(2\, x - 1)^2) & \frac{1}{2} \le x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{1\,2}(x) & = & \begin{cases} \sqrt{10}\ (2\, x - 1)^2 & \frac{1}{2} \le x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \end{pmatrix}$$

(b) Cálculo de los coeficientes *Wavelet* de Chelyshkov

$$c_{00} = \int_0^1 f(x)\,\psi_{00}(x)\,w(x)\,dx$$

$$c_{00} = \int_0^1 \left(e^{-x}\sin(2\pi x)\right)\left(\begin{cases} \sqrt{2}\,(40x^2-24x+3) & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases}\right)(1)\,dx$$

$$c_{00} = \frac{2\sqrt{\frac{2}{e}}\,\pi\,(-39+4\pi^2)\left(-7-5\sqrt{e}+4\pi^2+12\sqrt{e}\,\pi^2\right)}{(1+4\pi^2)^3}$$

$$c_{01} = \int_0^1 f(x)\,\psi_{01}(x)\,w(x)\,dx$$

$$c_{01} = \int_0^1 \left(e^{-x}\sin(2\pi x)\right)\left(\begin{cases} \sqrt{6}\,(8x-20x^2) & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases}\right)(1)\,dx$$

$$c_{01} = \frac{2\sqrt{\frac{6}{e}}\,\pi\left(-145-104\sqrt{e}+56\pi^2+224\sqrt{e}\,\pi^2-16\pi^4\right)}{(1+4\pi^2)^3}$$

$$c_{02} = \int_0^1 f(x)\,\psi_{02}(x)\,w(x)\,dx$$

$$c_{02} = \int_0^1 \left(e^{-x}\sin(2\pi x)\right)\left(\begin{cases} 4\sqrt{10}\,x^2 & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases}\right)(1)\,dx$$

$$c_{02} = -\frac{2\sqrt{\frac{10}{e}}\,\pi\left(-33-24\sqrt{e}-8\pi^2+32\sqrt{e}\,\pi^2-16\pi^4\right)}{(1+4\pi^2)^3}$$

$$c_{10} = \int_0^1 f(x)\,\psi_{10}(x)\,w(x)\,dx$$

$$c_{10} = \int_0^1 \left(e^{-x}\sin(2\pi x)\right)$$

$$\left(\begin{cases} \sqrt{2}\,(10(2x-1)^2-12(2x-1)+3) & \frac{1}{2} \le x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases}\right)(1)\,dx$$

$$c_{10} = -\frac{2\sqrt{2}\,\pi\,(-39+4\pi^2)\left(-7-5\sqrt{e}+4\pi^2+12\sqrt{e}\,\pi^2\right)}{e\,(1+4\pi^2)^3}$$

$$c_{1\,1} = \int_0^1 f(x)\,\psi_{1\,1}(x)\,w(x)\,dx$$

$$c_{1\,1} = \int_0^1 \left(e^{-x}\sin(2\pi x)\right)\left(\begin{cases} \sqrt{6}\,(4(2x-1)-5(2x-1)^2) & \frac{1}{2} \le x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases}\right)(1)\,dx$$

$$c_{1\,1} = -\frac{2\sqrt{6}\,\pi\left(-145-104\sqrt{e}+56\pi^2+224\sqrt{e}\,\pi^2-16\pi^4\right)}{e\,(1+4\pi^2)^3}$$

$$c_{1\,2} = \int_0^1 f(x)\,\psi_{1\,2}(x)\,w(x)\,dx$$

$$c_{1\,2} = \int_0^1 \left(e^{-x}\sin(2\pi x)\right)\left(\begin{cases} \sqrt{10}\,(2x-1)^2 & \frac{1}{2} \le x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases}\right)(1)\,dx$$

$$c_{1\,2} = \frac{2\sqrt{10}\,\pi\left(-33-24\sqrt{e}-8\pi^2+32\sqrt{e}\,\pi^2-16\pi^4\right)}{e\,(1+4\pi^2)^3}$$

$$c_{n\,m} = \begin{pmatrix} c_{0\,0} = \frac{2\sqrt{\frac{2}{e}}\,\pi\left(-39+4\pi^2\right)\left(-7-5\sqrt{e}+4\pi^2+12\sqrt{e}\,\pi^2\right)}{\left(1+4\pi^2\right)^3} \\ c_{0\,1} = \frac{2\sqrt{\frac{6}{e}}\,\pi\left(-145-104\sqrt{e}+56\pi^2+224\sqrt{e}\,\pi^2-16\pi^4\right)}{\left(1+4\pi^2\right)^3} \\ c_{0\,2} = -\frac{2\sqrt{\frac{10}{e}}\,\pi\left(-33-24\sqrt{e}-8\pi^2+32\sqrt{e}\,\pi^2-16\pi^4\right)}{\left(1+4\pi^2\right)^3} \\ c_{1\,0} = -\frac{2\sqrt{2}\,\pi\left(-39+4\pi^2\right)\left(-7-5\sqrt{e}+4\pi^2+12\sqrt{e}\,\pi^2\right)}{e\left(1+4\pi^2\right)^3} \\ c_{1\,1} = -\frac{2\sqrt{6}\,\pi\left(-145-104\sqrt{e}+56\pi^2+224\sqrt{e}\,\pi^2-16\pi^4\right)}{e\left(1+4\pi^2\right)^3} \\ c_{1\,2} = \frac{2\sqrt{10}\,\pi\left(-33-24\sqrt{e}-8\pi^2+32\sqrt{e}\,\pi^2-16\pi^4\right)}{e\left(1+4\pi^2\right)^3} \end{pmatrix}$$

$$c_{n\,m} = \begin{pmatrix} 0.00853339 \\ 0.326907 \\ 0.21611 \\ -0.00517576 \\ -0.198279 \\ -0.131078 \end{pmatrix}$$

(c) Aproximación *Wavelet* de Chelyshkov de $f(x)$:

$$\tilde{f}(x) = f_{M,k}(x) = \sum_{n=0}^{2^k-1} \sum_{m=0}^{M} c_{n\,m}\, \psi_{n\,m}(x)$$

$$\tilde{f}(x) = f_{M,k}(x) =$$

$$0.21611 \left(\begin{cases} 4\sqrt{10}\, x^2 & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right) - 0.131078 \left(\begin{cases} \sqrt{10}\, (2x-1)^2 & \frac{1}{2} \le x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right) +$$

$$0.326907 \left(\begin{cases} \sqrt{6}\, (8x - 20x^2) & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right) +$$

$$0.00853339 \left(\begin{cases} \sqrt{2}\, (40x^2 - 24x + 3) & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right) -$$

$$0.198279 \left(\begin{cases} \sqrt{6}\, (4(2x-1) - 5(2x-1)^2) & \frac{1}{2} \le x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right) -$$

$$0.00517576 \left(\begin{cases} \sqrt{2}\, (10(2x-1)^2 - 12(2x-1) + 3) & \frac{1}{2} \le x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right)$$

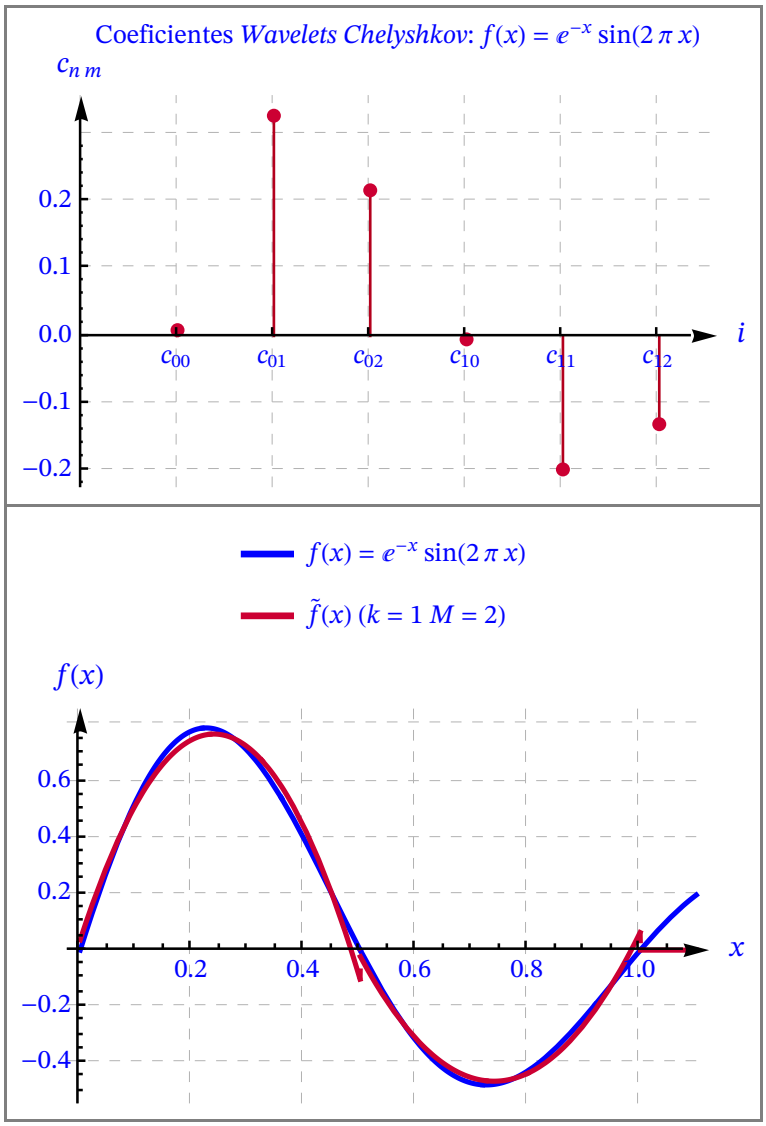


Tabla de valores aproximados y errores.

x_j	$f(x_j)$(CWM)	$f(x_j)$	$\lvert f(x_j)(\text{CWM}) - f(x_j)\rvert$
0.	0.036204120803	0.000000000000	0.0362041208
0.1	0.519857137292	0.531850090044	0.0119929528
0.2	0.747534610026	0.778659217806	0.0311246078
0.3	0.719236539003	0.704559996170	0.0146765428
0.4	0.434962924225	0.394004237376	0.0409586868
0.5	−0.021958909275	$7.427858310018 \times 10^{-17}$	0.0219589093
0.6	−0.315309292438	−0.322583385983	0.0072740935
0.7	−0.453402660177	−0.472280689067	0.0188780289
0.8	−0.436239012491	−0.427337239284	0.0089017732
0.9	−0.263818349381	−0.238975650025	0.0248426994

Error L_∞:

$$\text{error}-L_\infty = \underset{0\le j\le N-1}{\text{Máx}} \left(|f(x_j) - f(x_j)(\text{CWM})|\right) = 4.09587\times 10^{-2}$$

Error$-L_2$:

$$\text{error}-L_2 = \left(\sum_{j=0}^{N-1} |f(x_j) - f(x_j)(\text{CWM}))|^2\right)^{\frac{1}{2}} = 7.68389\times 10^{-2}$$

Error$-$RMS:

$$\text{error}-\text{RMS} = \frac{1}{N}\left(\sum_{j=0}^{N-1} |f(x_j) - f(x_j)(\text{CWM})|^2\right)^{\frac{1}{2}} = 7.68389\times 10^{-3}$$

4.3.3. Análisis de Convergencia

A lo largo de esta sección, se expondrán algunos teoremas acerca de la convergencia y la estimación de error de los polinomios de Chelyshkov y las *Wavelets* definidas durante la sección anterior. Las demostraciones de los teoremas pueden encontrarse en el Capítulo 4 de las referencias [MOHA18], [MORA19], [HAMI19], [HAMIb20]. Con el propósito de agilizar en la escritura, a partir de ahora se representará mediante $\|.\|_2$ la norma $L_2[0,1]$ definida mediante la expresión:

$$\|f\|_2^2 = \int_0^1 \left| f\,(t)\,\right|^2 (t)\, dt\,. \tag{4.3.14}$$

Teorema 4.3.2.

Si se expande la expresión $f(t) \in C^{m+1}[0,\,1]$ mediante polinomios de Chelyshkov de la forma:

$$f(t) \simeq f_M(t) = \sum_{i=0}^{M} c_i\, \rho_i(t), \tag{4.3.15}$$

entonces:

$$\|f(t) - f_M(t)\|_2\, t \le \frac{L}{\sqrt{(2\,M+3)}\;(M+1)!} \tag{4.3.16}$$

donde $L = \max_{t\in[0,1]} \left| f^{(M+1)}(t)\right|$.

Teorema 4.3.3.

Si se asume que $f(t) \in C^{m+1}[0,\,1]$ es una función cualquiera aproximada mediante las *Wavelets* de Chelyshkov como:

$$f(t) \simeq f_{\hat{m}}(t) = \sum_{i=1}^{\hat{m}} c_i\, \psi_i(t) \tag{4.3.17}$$

entonces se tiene:

$$\lim_{\hat{m}\longrightarrow\infty} \| f(t) - f_{\hat{m}}(t) \| = 0. \tag{4.3.18}$$

▼ **Teorema 4.3.4.**

Sea la expansión $\hat{f}(t)$ en *Wavelets* de Chelyshkov de una función continua arbitraria $f(t)$ que converge uniformemente. La expansión $\hat{f}(t)$ converge a $f(t)$, es decir, $\hat{f}(t) = f(t)$ para $t \in [0, 1]$ y tienen, por tanto, las mismas expansiones de *Wavelet* de Chelyshkov.

4.4. Matrices Operativas y de Transformación

Se pretende derivar las *matrices de transformación* para el vector de *Wavelets* de Chelyshkov $\Psi(x)$ [MOHA18], [MORA19]:

(a) $P^{(\alpha)}$: Matriz integral fraccionaria de Riemann-Liouville de orden α de $\Psi(x)$:

$$[J^{\alpha}\,[\Psi(x)] \simeq P^{(\alpha)}.\,\Psi(x)].$$

(b) $\mathcal{D}(\tau)$: Matriz operacional con retraso constante del vector de *Wavelets* de Chelyshkov $\Psi(x)$.

(c) $\tilde{C}$: Matriz operacional Producto de $\Psi(x)$

(c.1) $\left[\Psi(x).\Psi\,(x)^T\,C \simeq \tilde{C}.\,\Psi(x)\right]$ $\left[\tilde{C} = \left\langle \Psi(x).\Psi\,(x)^T\,C,\,\Psi(x)\right\rangle\right]$.

(c.2) $\left[C^T.\Phi(x).\Phi\,(x)^T \simeq \Phi^T(x).\tilde{C}^T\right]$.

(d) $\mathcal{D}^{(\alpha)}$:Matriz operacional de derivación fraccionaria de orden α asociada con la matriz de las *Wavelets* de Chelyshkov $\Psi(x)$:

$$[D^{\alpha}\,[\Psi(x)] \simeq \mathcal{D}^{(\alpha)}.\,\Psi(x)].$$

4.4.1. Matriz Operacional Integral Fraccionaria $P^{(\alpha)}$ Riemann–Liouville de Orden α

En esta sección se obtendrá la matriz operacional integral fraccionaria $P^{(\alpha)}$ en base a la función wavelet de Chelyshkov, empleando para ello el operador integral Riemann-Liouville de orden α que ya se ha descrito en capítulos anteriores del proyecto presente, y que se presenta a continuación: [MOHS20].

4.4.1.1. Cálculo del Operador Integral Fraccionario de Riemann–Liouville

El *operador integral fraccionario* de Riemann–Liouville de una función f viene expresado por la expresión:

$$J^{\alpha}[f(x)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\, dt \quad x > 0.$$

Las *Wavelets* de Chelyshkov definidas en [0, 1) tienen la expresión:

$$\psi_{n,m}(x) = \begin{cases} \sqrt{2\,m+1}\; 2^{\frac{k}{2}}\, C_{M,m}\left(2^k\, x - n\right) & x \in \left[\frac{n}{2^k},\, \frac{n+1}{2^k}\right) \\ 0 & \text{Resto} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \psi_i(x) = \psi_{n\,m}(x) \\ n = 0,\ 1,\ \cdots,\ 2^k - 1 \quad m^* = 2^k (M+1) \\ m = 0,\ 1,\ \cdots,\ M \end{cases}$$

y los polinomios de Chelyshkov ortogonales en el intervalo [0, 1]:

$$C_{M,n}(x) = \sum_{k=0}^{M-n} (-1)^k \binom{M-n}{k} \binom{M+n+k+1}{M-n} x^{n+k} \quad n = 0,\ 1,\ \cdots,\ M \tag{4.4.2}$$

$$a_{k\,n} = (-1)^k \binom{M-n}{k} \binom{M+n+k+1}{M-n}.$$

Se tiene el vector de *Wavelets* de Chelyshkov:

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \vdots \\ \psi_{m^*}(x) \end{pmatrix} \quad \begin{cases} \psi_i(x) = \psi_{n\,m}(x) \\ i = 1,\ \cdots,\ m^* \\ i = n(M+1) + (m+1) \end{cases} \quad m^* = 2^k (M+1). \tag{4.4.3}$$

El operador integral fraccionario de Riemann–Liouville se define por

$$J^\alpha[\Psi(x)] = R(x,\ \alpha)$$

$$R(x,\ \alpha) = \begin{pmatrix} J^\alpha[\psi_1(x)] \\ J^\alpha[\psi_2(x)] \\ \vdots \\ J^\alpha[\psi_{m^*}(x)] \end{pmatrix}.$$

donde $R(x,\ \alpha)$ depende de la variable x y del orden α.

El operador integral fraccionario se puede expresar como convolución de dos funciones:

$$J^\alpha[\psi_{n\,m}(x)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} \psi_{n\,m}(t)\, dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left\{ x^{\alpha-1} * \psi_{n\,m}(x) \right\}.$$

Se aplica la Transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{J^\alpha[\psi_{n\,m}(x)]\} = \mathcal{L}\left\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} \psi_{n\,m}(t)\, dt \right\} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \mathcal{L}\left\{x^{\alpha-1}\right\} * \mathcal{L}\{\psi_{n\,m}(x)\}$$

$$\bullet\ \mathcal{L}\left\{x^{\alpha-1}\right\} = \frac{\Gamma(\alpha)}{s^\alpha}.$$

Se deduce la expresión de la integral $J^\alpha[\psi_{n,m}(x)]$ aplicando la Transformada de Laplace a la función $\psi_{n,m}(x)$:

$$\psi_{n,m}(x) = \begin{cases} \sqrt{2m+1}\ 2^{\frac{k}{2}}\, C_{M,m}\left(2^k x - n\right) & x \in \left[\frac{n}{2^k},\ \frac{n+1}{2^k}\right) \\ 0 & \text{Resto} \end{cases}$$

$$C_{M,m}(x) = \sum_{q=0}^{M-m} (-1)^q \binom{M-m}{q} \binom{M+m+q+1}{M-m} x^{m+k}$$

$$\psi_{n,m}(x) = \mu_{\frac{n}{2^k}}(x)\,\tau_{m,k}\,C_{M,m}\left(2^k x - n\right) - \mu_{\frac{n+1}{2^k}}(x)\,\tau_{m,k}\,C_{M,m}\left(2^k x - n\right)$$

siendo $\mu_\beta(x)$ la función paso unitario

$$\mu_\beta(x) = \begin{cases} 1 & x \geq \beta \\ 0 & x < \beta \end{cases}$$

$$\bullet\, \tau_{m,k} = \sqrt{2\,m+1}\; 2^{\frac{k}{2}}.$$

Se opera en la expresión $\psi_{n,m}(x)$:

$$\psi_{n,m}(x) = \mu_{\left(\frac{n}{2^k}\right)}(x)\;\sqrt{2\,m+1}\;2^{\frac{k}{2}}\sum_{q=0}^{M-m}(-1)^q\binom{M-m}{q}\binom{M+m+q+1}{M-m}\left(2^k x-n\right)^{m+k}$$

$$-\mu_{\left(\frac{n+1}{2^k}\right)}(x)\;\sqrt{2\,m+1}\;2^{\frac{k}{2}}\sum_{q=0}^{M-m}(-1)^q\binom{M-m}{q}\binom{M+m+q+1}{M-m}\left(2^k x-n\right)^{m+k}.$$

Se calcula la Transformada de Laplace de $\psi_{n,m}(x)$:

$$\mathcal{L}[\psi_{n,m}(x)] =$$

$$\sqrt{2\,m+1}\;2^{\frac{k}{2}}\left[\sum_{q=0}^{M-m}(-1)^q\binom{M-m}{q}\binom{M+m+q+1}{M-m}\left(2^k\right)^{m+k}e^{-\frac{n}{2^k}s}\,\frac{\Gamma((m+q)+1)}{s^{(m+q)+1}}\right.$$

$$-\sum_{q=0}^{M-m}(-1)^q\binom{M-m}{q}\binom{M+m+q+1}{M-m}$$

$$\left.\left(2^k\right)^{m+k}\sum_{z=0}^{m+q}\binom{m+q}{z}\left(\frac{1}{2^k}\right)^{(m+q)-z}e^{-\frac{(n+1)}{2^k}s}\,\frac{\Gamma(z+1)}{s^{z+1}}\right]$$

y se sustituye en la transformada:

$$\mathcal{L}\{J^\alpha[\psi_{n\,m}(x)]\} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\,\frac{\Gamma(\alpha)}{s^\alpha} * \mathcal{L}\{\psi_{n\,m}(x)\}$$

$$\mathcal{L}\{J^\alpha[\psi_{n\,m}(x)]\} = \frac{1}{s^\alpha} * \mathcal{L}\{\psi_{n\,m}(x)\}.$$

Operando, resulta:

$$\mathcal{L}\{J^\alpha[f(x)]\} =$$

$$\frac{1}{s^\alpha} * \sqrt{2\,m+1}\;2^{\frac{k}{2}}\left[\sum_{q=0}^{M-m}(-1)^q\binom{M-m}{q}\binom{M+m+q+1}{M-m}\left(2^k\right)^{m+q}e^{-\frac{n}{2^k}s}\,\frac{\Gamma((m+q)+1)}{s^{(m+q)+1}}\right.$$

$$\left.-\sum_{q=0}^{M-m}(-1)^q\binom{M-m}{q}\binom{M+m+q+1}{M-m}\right.$$

$$\left(2^k\right)^{m+q}\sum_{z=0}^{m+q}\binom{m+q}{z}\left(\frac{1}{2^k}\right)^{(m+q)-z}e^{-\frac{(n+1)}{2^k}s}\frac{\Gamma(z+1)}{s^{z+1}}\Big].$$

Se determina la integral fraccionaria de las *Wavelets* de Chelyshkov con la Transformada inversa de Laplace, dando lugar al *operador integral fraccionario de Riemann–Liouville* de $\psi_{n,m}$:

$$J^{\alpha}[\psi_{n,m}(x)] = \sqrt{2\,m+1}\;2^{\frac{k}{2}}\sum_{q=0}^{M-m}(-1)^q\binom{M-m}{q}$$
$$\binom{M+m+q+1}{M-m}\left(2^k\right)^{m+q}\frac{\Gamma((m+q)+1)}{\Gamma((m+q)+\alpha+1)}\left(x-\frac{n}{2^k}\right)^{m+q+\alpha}\mu\left(x-\frac{n}{2^k}\right)$$
$$-\sqrt{2\,m+1}\;2^{\frac{k}{2}}\sum_{q=0}^{M-m}(-1)^q\binom{M-m}{q}\binom{M+m+q+1}{M-m}\left(2^k\right)^{m+q}$$
$$\sum_{z=0}^{m+q}\binom{m+q}{z}\left(\frac{1}{2^k}\right)^{(m+q)-z}\frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(z+\alpha+1)}\left(x-\frac{(n+1)}{2^k}\right)^{z+\alpha}\mu\left(x-\frac{(n+1)}{2^k}\right)$$
$$\bullet\;\mu_{\beta}(x)=\begin{cases}1 & x\geq\beta\\ 0 & x<\beta\end{cases}.$$

***Observaciones* 4.4.1.**

(i) El operador integral fraccionario aplicado a la *Wavelets* de Chelyshkov, $J^{\alpha}[\psi_{n,m}(x)]$, define una función en el intervalo $\left[\frac{n}{2^k},\ \frac{n+1}{2^k}\right)\cup\left[\frac{n+1}{2^k},\ 1\right]$.

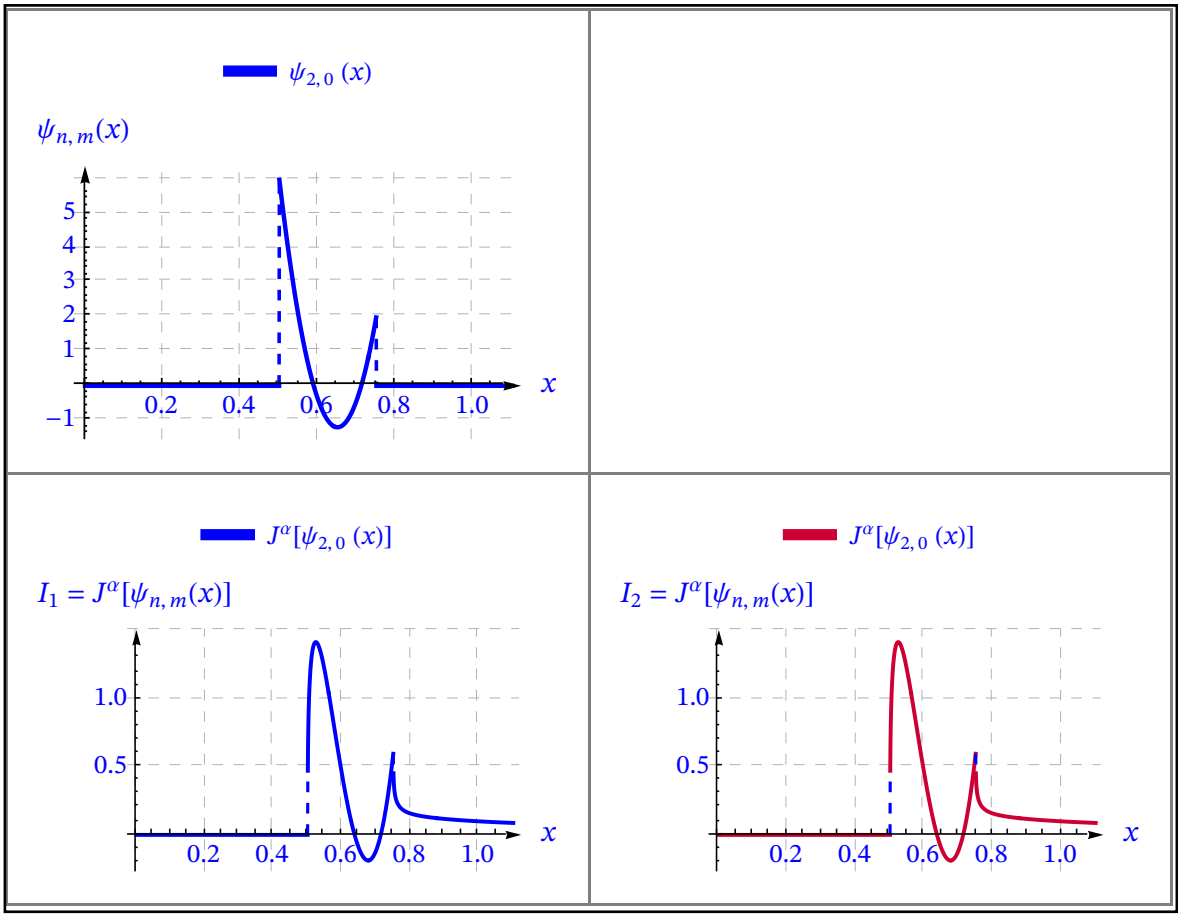
(ii) Por ejemplo, para los valores de

$$k=2\quad M=2\qquad\begin{cases}n=0,\ \cdots,\ 2^k-1 & n=0,\ \cdots,\ 2^2-1\\ m=0,\ \cdots,\ M-1 & m=0,\ 1\end{cases}$$

las funciones $\psi_{n,m}(x)=\psi_{2,0}(x)$ y $J^{\alpha}[\psi_{n,m}(x)]=J^{\alpha}[\psi_{2,0}(x)]$ se definen en los intervalos:

$\psi_{2,0}(x)\in\left[\frac{n}{2^k},\ \frac{n+1}{2^k}\right]=\left[\frac{2}{2^2},\ \frac{3}{2^2}\right]=\left[\frac{1}{2},\ \frac{3}{4}\right]=[0.5,\ 0.75]$

$J^{\alpha}[\psi_{2,0}(x)]\in\left[\frac{1}{2},\ \frac{3}{4}\right]\cup\left[\frac{3}{4},\ 1\right]=[0.5,\ 1].$



■ **Ejemplo 4.4.1. Operador Integral Fraccionario de las *Wavelets* de Chelyshkov.**
Sean las *Wavelets* de Chelyshkov $\psi_{n\,m}(x)$ como funciones definidas por intervalos con los parámetros k, M.

(i) Calcúlense las *Wavelets* de Chelyshkov $\psi_{n,m}(x)$ y la integral fraccionaria de Riemann–Liouville de orden α aplicando las definiciones dadas:

• $\psi_{n,m}(x) = \begin{cases} \sqrt{2\,m+1}\; 2^{\frac{k}{2}}\, C_{M,m}\left(2^k\, x - n\right) & x \in \left[\frac{n}{2^k},\, \frac{n+1}{2^k}\right] \\ 0 & \text{Resto} \end{cases}$ (definición por partes)

▪ Definición de integral fraccionaria de Riemann–Liouville

• $I_1 = J^{\alpha}[\psi_{n,m}(x)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \left[(x-t)^{\alpha-1}\, \psi_{n,m}(x)\right] dt$ (definición)

▪ Operador integral fraccionario de Riemann–Liouville de $\psi_{n,m}$:

• $I_2 = J^{\alpha}[\psi_{n,m}(x)] = \sqrt{2\,m+1}\; 2^{\frac{k}{2}}$

$$\sum_{q=0}^{M-m} (-1)^q \binom{M-m}{q} \binom{M+m+q+1}{M-m} \left(2^k\right)^{m+q} \frac{\Gamma((m+q)+1)}{\Gamma((m+q)+\alpha+1)} \left(x - \frac{n}{2^k}\right)^{m+q+\alpha} \mu\left(x - \frac{n}{2^k}\right)$$

$$- \sqrt{2\,m+1}\; 2^{\frac{k}{2}} \sum_{q=0}^{M-m} (-1)^q \binom{M-m}{q} \binom{M+m+q+1}{M-m}$$

$$\left(2^k\right)^{m+q} \sum_{z=0}^{m+q} \binom{m+q}{z} \left(\frac{1}{2^k}\right)^{(m+q)-z} \frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(z+\alpha+1)} \left(x - \frac{(n+1)}{2^k}\right)^{z+\alpha} \mu\left(x - \frac{(n+1)}{2^k}\right)$$

(ii) Represéntense las gráficas de la función $\psi_{n\,m}(x)$ y las integrales I_1, I_2.

(iii) Créese una tabla con los datos x, $I_1(x)$, $I_2(x)$ para $x \in [0,\ 1]$.

(a) $k = 0,\ M = 2 \quad \alpha = \frac{1}{2}$.

(b) $k = 1,\ M = 2 \quad \alpha = \frac{1}{2}$.

SOLUCIÓN

(a)

Operador Integral Fraccionario de las *Wavelets* de Chelyshkov.

$$\begin{pmatrix} [A, B] = & [0, 1] & \text{(intervalo } x\text{)} \\ \{k, 2^k\} = & \{0,\ 1\} & \text{(máxima resolución)} \\ M = & 2 & \text{(máx. grado polinomio)} \\ m^*=2^k(M+1) = & 3 & \text{Dimensión } \mathcal{B}=\{\psi_k\} \\ \{\alpha\} = & \left\{\frac{1}{2}\right\} & \end{pmatrix}$$

(a) Matriz con las *Wavelets* de Chelyshkov $\Psi(x)$

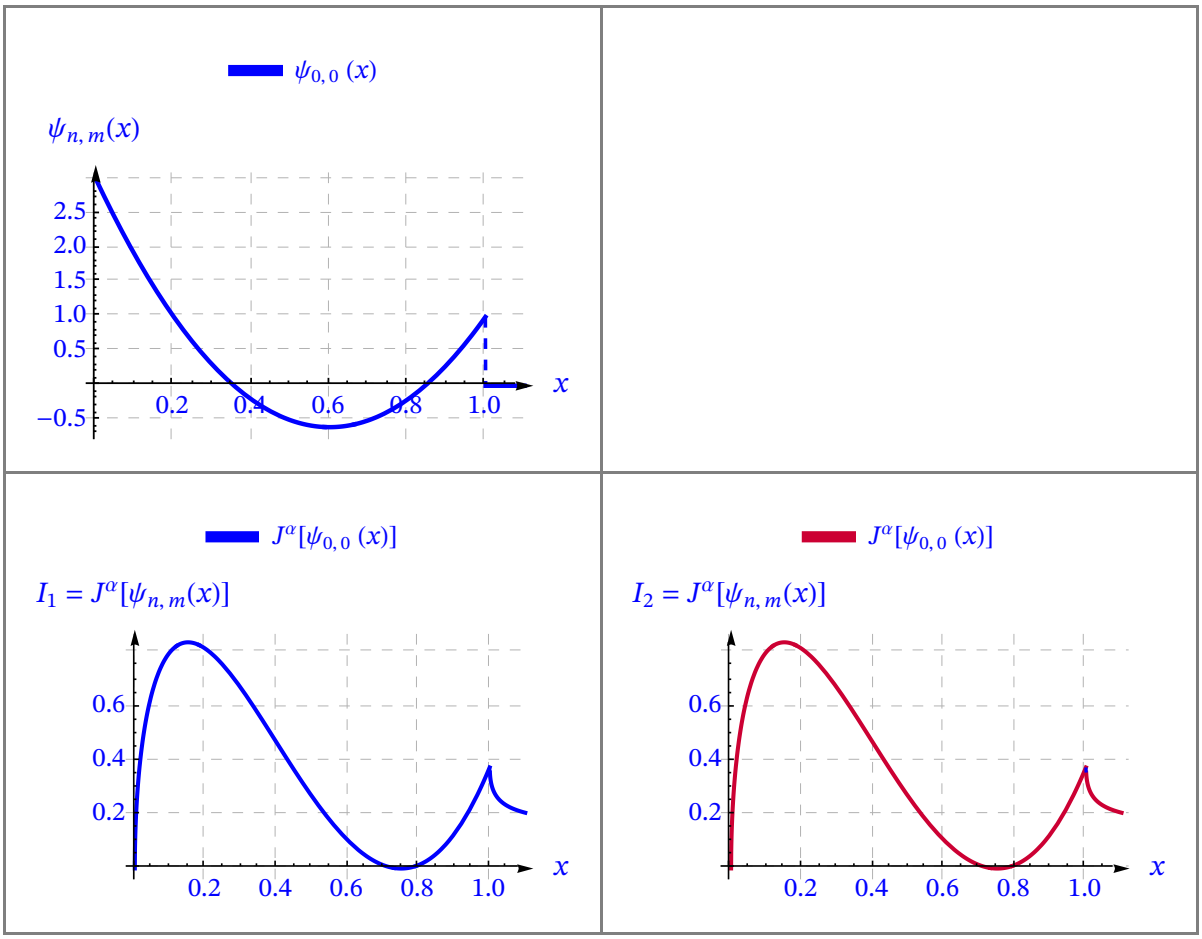
$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \begin{cases} 10\,x^2 - 12\,x + 3 & 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{3}\,(4\,x - 5\,x^2) & 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{5}\,x^2 & 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \end{pmatrix}$$

(b) Matriz con las integrales fraccionarias R–L de orden $\alpha = \frac{1}{2}$ calculadas con la definición de integral de Riemann–Liouville:

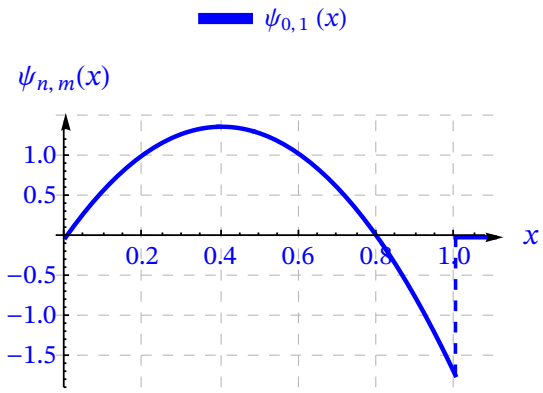
$$I_1 = J^{(\alpha)}[\Psi(x)] = \begin{pmatrix} \begin{cases} \frac{2}{3}(3-4\,x)^2\,\sqrt{x} & 0<x\le 1 \\ \frac{2}{3}(4\,x-3)\left(4\,x^{3/2}-\left(4\,\sqrt{(x-1)\,x}+3\right)\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right) & x>1 \end{cases}}{\sqrt{\pi}} \\ \begin{cases} -\frac{16\,(x-1)\,x^{3/2}}{\sqrt{3\,\pi}} & 0 < x \le 1 \\ -\frac{2\left(8\,x^{5/2}-8\left(\sqrt{(x-1)\,x}+1\right)x^{3/2}+4\,\sqrt{x-1}\,x+\sqrt{x-1}\right)}{\sqrt{3\,\pi}} & x > 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{16\,x^{5/2}}{3\,\sqrt{5\,\pi}} & 0 < x \le 1 \\ -\frac{2\left(-8\,x^{5/2}+8\,\sqrt{x-1}\,x^2+4\,\sqrt{x-1}\,x+3\,\sqrt{x-1}\right)}{3\,\sqrt{5\,\pi}} & x > 1 \end{cases} \end{pmatrix}$$

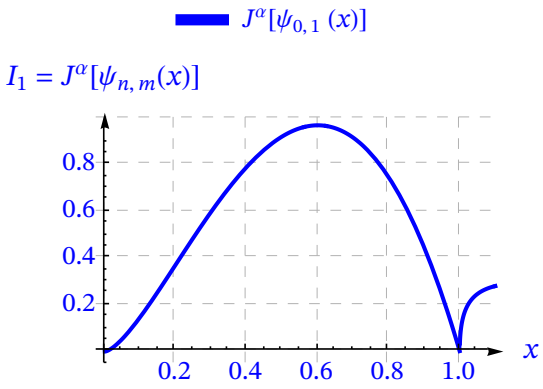
(c) Matriz con las integrales fraccionarias R–L de orden $\alpha = \frac{1}{2}$ calculadas con el operador integral fraccionario de Riemann–Liouville de $\psi_{n,m}$:

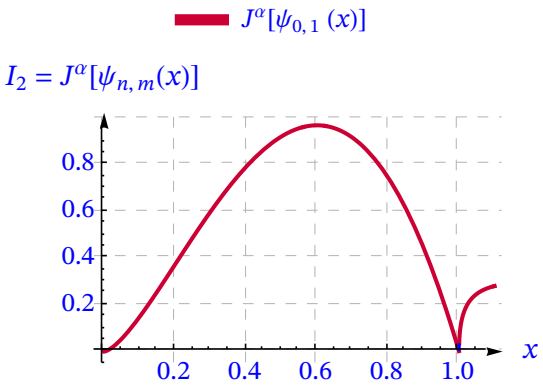
$$I_2 = J^{(\alpha)}[\Psi(x)] = \begin{pmatrix} \frac{2\,(4\,x-3)\left((1-4\,x)\,\sqrt{x-1}\,\theta(x-1)+\sqrt{x}\,(4\,x-3)\,\theta(x)\right)}{3\,\sqrt{\pi}} \\ \frac{2\left(\sqrt{x-1}\,\left(8\,x^2-4\,x-1\right)\theta(x-1)-8\,(x-1)\,x^{3/2}\,\theta(x)\right)}{\sqrt{3\,\pi}} \\ \frac{16\,x^{5/2}\,\theta(x)-2\,\sqrt{x-1}\,\left(8\,x^2+4\,x+3\right)\theta(x-1)}{3\,\sqrt{5\,\pi}} \end{pmatrix}$$



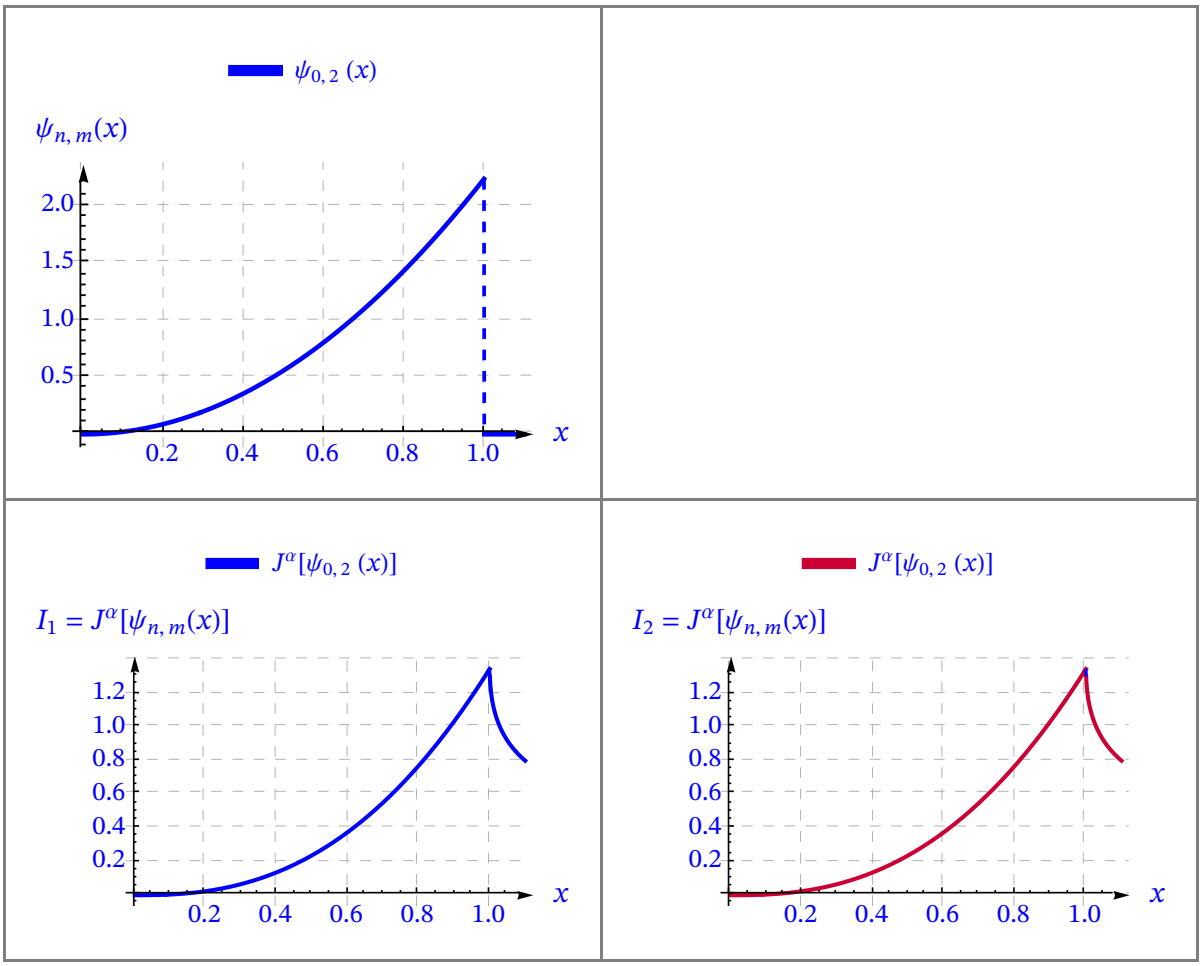
x	$I_1(x)$	$I_2(x)$
0.	0	0
0.1	0.804045	0.804045
0.2	0.814131	0.814131
0.3	0.667482	0.667482
0.4	0.466251	0.466251
0.5	0.265962	0.265962
0.6	0.104885	0.104885
0.7	0.0125876	0.0125876
0.8	0.0134567	0.0134567
0.9	0.128457	0.128457
1.	0.376126	0.376126





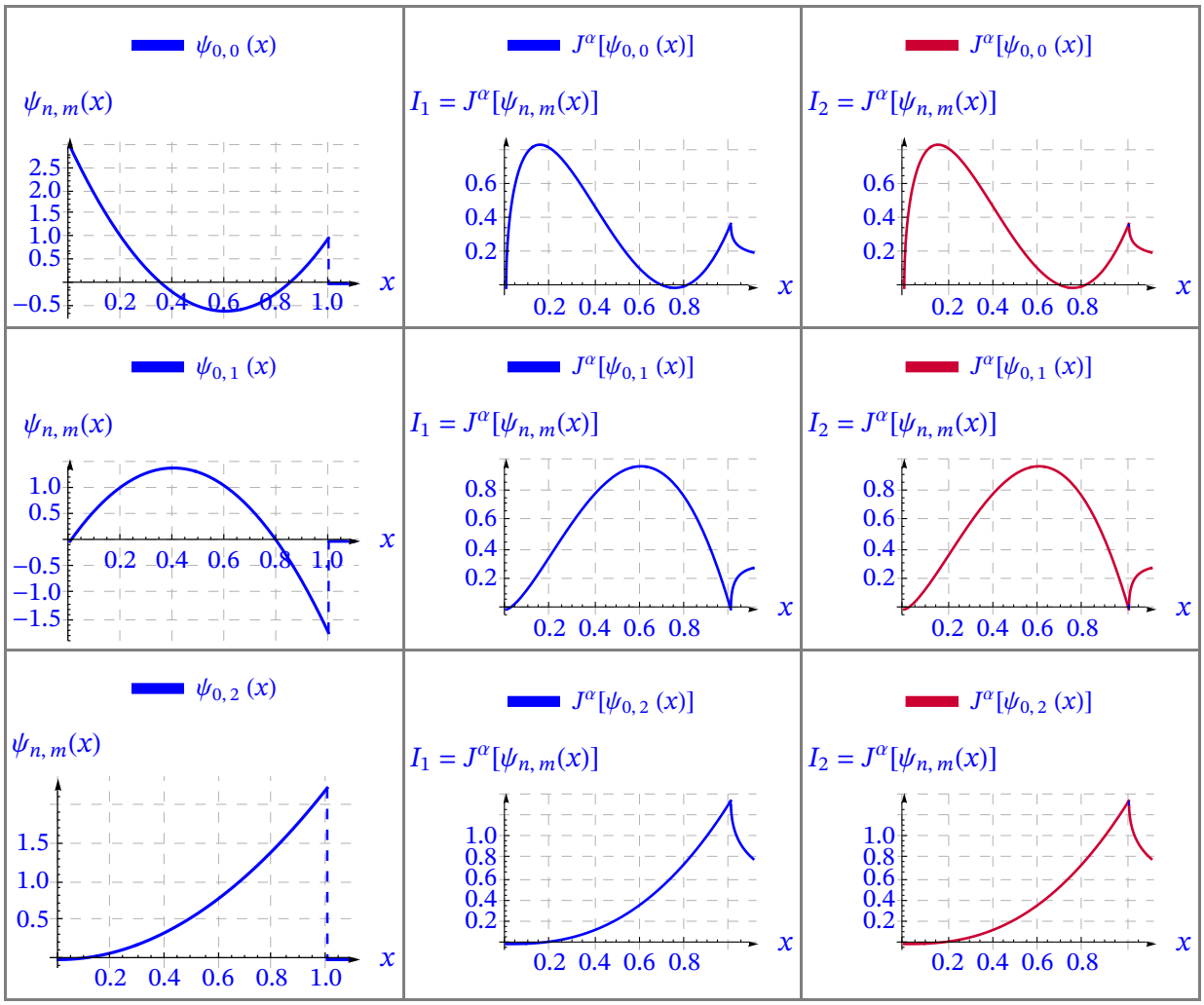


x	$I_1(x)$	$I_2(x)$
0.	0	0
0.1	0.148329	0.148329
0.2	0.372923	0.372923
0.3	0.599466	0.599466
0.4	0.79109	0.79109
0.5	0.921318	0.921318
0.6	0.968883	0.968883
0.7	0.915699	0.915699
0.8	0.745846	0.745846
0.9	0.444988	0.444988
1.	0.	0



x	$I_1(x)$	$I_2(x)$
0.	0	0
0.1	0.00425538	0.00425538
0.2	0.0240721	0.0240721
0.3	0.0663349	0.0663349
0.4	0.136172	0.136172
0.5	0.237883	0.237883
0.6	0.375247	0.375247
0.7	0.551676	0.551676
0.8	0.770307	0.770307
0.9	1.03406	1.03406
1.	1.34567	1.34567

Gráficas de la función $\psi_{n\,m}(x)$ y las integrales I_1 e I_2.



(b)

Operador Integral Fraccionario de las *Wavelets* de Chelyshkov.

$$\begin{pmatrix} [A,B] = & [0,1] & \text{(intervalo } x\text{)} \\ \{k, 2^k\} = & \{1,2\} & \text{(máxima resolución)} \\ M = & 2 & \text{(máx. grado polinomio)} \\ m^*=2^k(M+1) = & 6 & \text{Dimensión } \mathcal{B}=\{\psi_k\} \\ \{\alpha\} = & \left\{\frac{1}{2}\right\} & \end{pmatrix}$$

(a) Matriz con las *Wavelets* de Chelyshkov $\Psi(x)$

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \begin{cases} \sqrt{2}\,(40x^2-24x+3) & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{6}\,(8x-20x^2) & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \begin{cases} 4\sqrt{10}\,x^2 & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{2}\,(10(2x-1)^2-12(2x-1)+3) & \frac{1}{2} \le x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{6}\,(4(2x-1)-5(2x-1)^2) & \frac{1}{2} \le x < 1 \end{cases} \end{pmatrix}$$

(b) Matriz con las integrales fraccionarias R–L de orden $\alpha = \frac{1}{2}$ calculadas con la definición de integral de Riemann–Liouville:

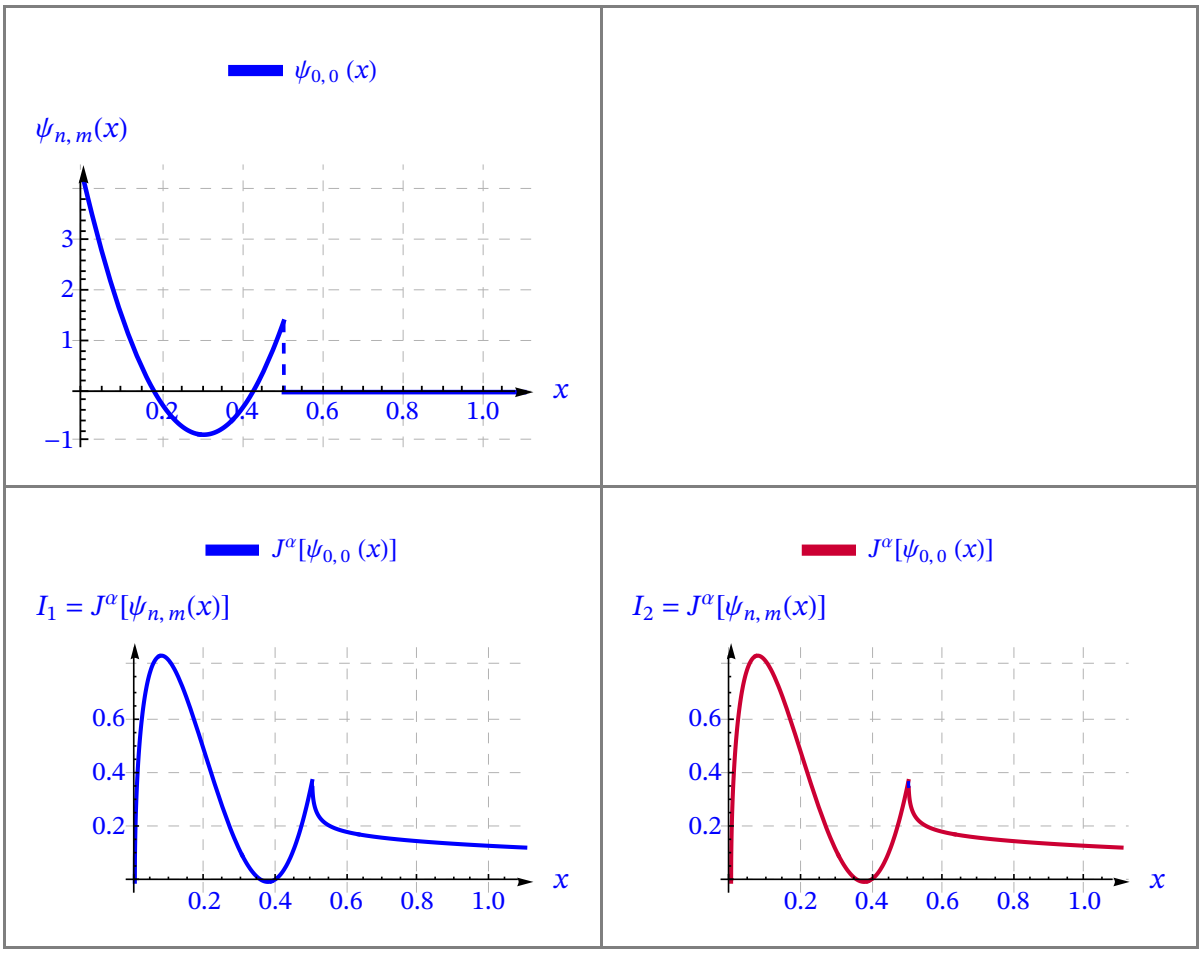
$I_1 = J^{(\alpha)}[\Psi(x)] =$

$$\begin{pmatrix}
\frac{\begin{cases} \frac{2}{3}\sqrt{2}\,(3-8x)^2\sqrt{x} & 0<x\le\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3}\sqrt{2}\,(8x-3)\left(-16x^{3/2}+8\sqrt{4x-2}\,x+6\sqrt{x}-\sqrt{4x-2}\right) & 2x>1 \end{cases}}{\sqrt{\pi}} \\
\frac{\begin{cases} -32\sqrt{\frac{2}{3}}\,x^{3/2}(2x-1) & 0<x\le\frac{1}{2} \\ \frac{2\left(-32\sqrt{2}\,x^{5/2}+32\sqrt{2x-1}\,x^2+16\sqrt{2}\,x^{3/2}-8\sqrt{2x-1}\,x-\sqrt{2x-1}\right)}{\sqrt{3}} & x>\frac{1}{2} \end{cases}}{\sqrt{\pi}} \\
\frac{\begin{cases} \frac{64}{3}\sqrt{\frac{2}{5}}\,x^{5/2} & 0<x\le\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{5}}\left(-64x^{5/2}+32\sqrt{4x-2}\,x^2+8\sqrt{4x-2}\,x+3\sqrt{4x-2}\right) & 2x>1 \end{cases}}{\sqrt{\pi}} \\
\frac{\begin{cases} \frac{2}{3}(7-8x)^2\sqrt{2x-1} & \frac{1}{2}<x\le 1 \\ \frac{1}{3}\sqrt{2}\,(8x-7)\left(-16\sqrt{x-1}\,x+8\sqrt{4x-2}\,x+10\sqrt{x-1}-7\sqrt{4x-2}\right) & x>1 \end{cases}}{\sqrt{\pi}} \\
\frac{\begin{cases} -\frac{32(x-1)(2x-1)^{3/2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{2}<x\le 1 \\ -2\sqrt{\frac{2}{3}}\left(\left(16\sqrt{4x-2}-32\sqrt{x-1}\right)x^2+8\left(5\sqrt{x-1}-3\sqrt{4x-2}\right)x-11\sqrt{x-1}+8\sqrt{4x-2}\right) & x>1 \end{cases}}{\sqrt{\pi}} \\
\frac{\begin{cases} \frac{16(2x-1)^{5/2}}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{2}<x\le 1 \\ \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{5}}\left(\left(16\sqrt{4x-2}-32\sqrt{x-1}\right)x^2+8\left(3\sqrt{x-1}-2\sqrt{4x-2}\right)x-7\sqrt{x-1}+4\sqrt{4x-2}\right) & x>1 \end{cases}}{\sqrt{\pi}}
\end{pmatrix}$$

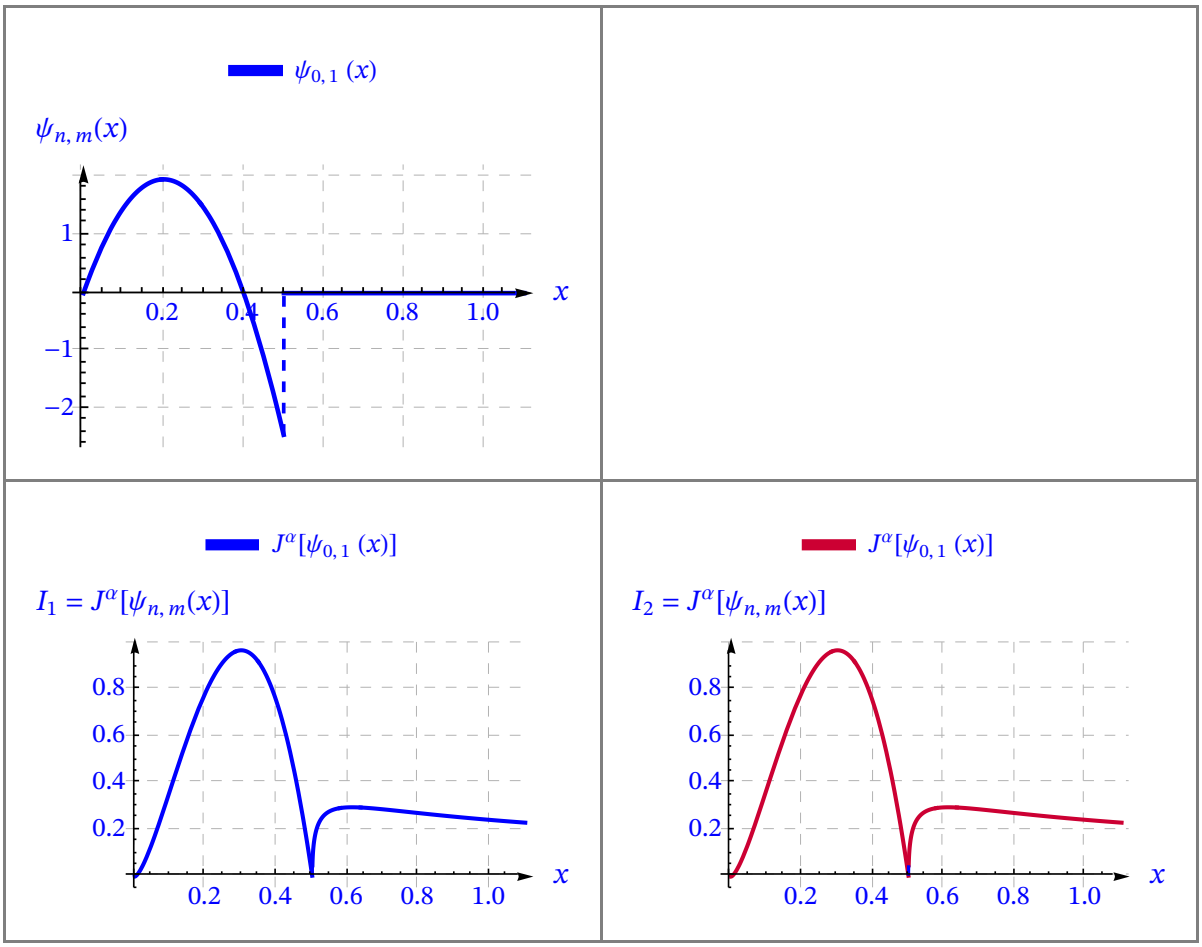
(c) Matriz con las integrales fraccionarias R–L de orden $\alpha = \frac{1}{2}$ calculadas con el operador integral fraccionario de Riemann–Liouville de $\psi_{n,m}$:

$I_2 = J^{(\alpha)}[\Psi(x)] =$

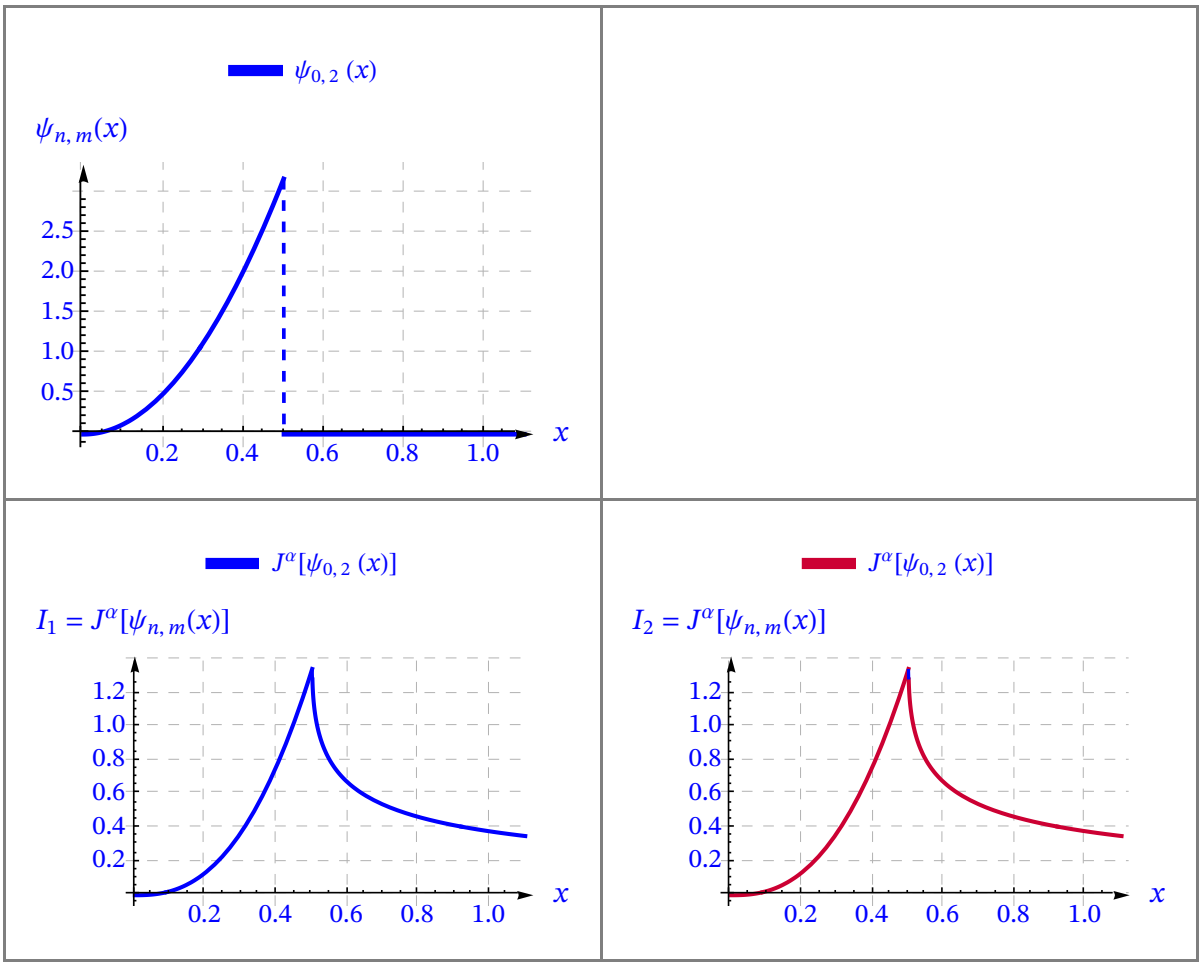
$$\begin{pmatrix}
-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,(8x-3)\left(\sqrt{4x-2}\,(8x-1)\,\theta\left(x-\frac{1}{2}\right)+2(3-8x)\sqrt{x}\,\theta(x)\right) \\
\sqrt{\frac{2}{3\pi}}\left(32(1-2x)\,\theta(x)\,x^{3/2}+\sqrt{4x-2}\,(32x^2-8x-1)\,\theta\left(x-\frac{1}{2}\right)\right) \\
-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{5\pi}}\left(\sqrt{4x-2}\,(32x^2+8x+3)\,\theta\left(x-\frac{1}{2}\right)-64x^{5/2}\,\theta(x)\right) \\
-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,(8x-7)\left(2\sqrt{x-1}\,(8x-5)\,\theta(x-1)+(7-8x)\sqrt{4x-2}\,\theta\left(x-\frac{1}{2}\right)\right) \\
-2\sqrt{\frac{2}{3\pi}}\left(\sqrt{x-1}\,(-32x^2+40x-11)\,\theta(x-1)+8\sqrt{4x-2}\,(2x^2-3x+1)\,\theta\left(x-\frac{1}{2}\right)\right) \\
\frac{16(2x-1)^{5/2}\,\theta\left(x-\frac{1}{2}\right)-2\sqrt{2}\,\sqrt{x-1}\,(32x^2-24x+7)\,\theta(x-1)}{3\sqrt{5\pi}}
\end{pmatrix}$$



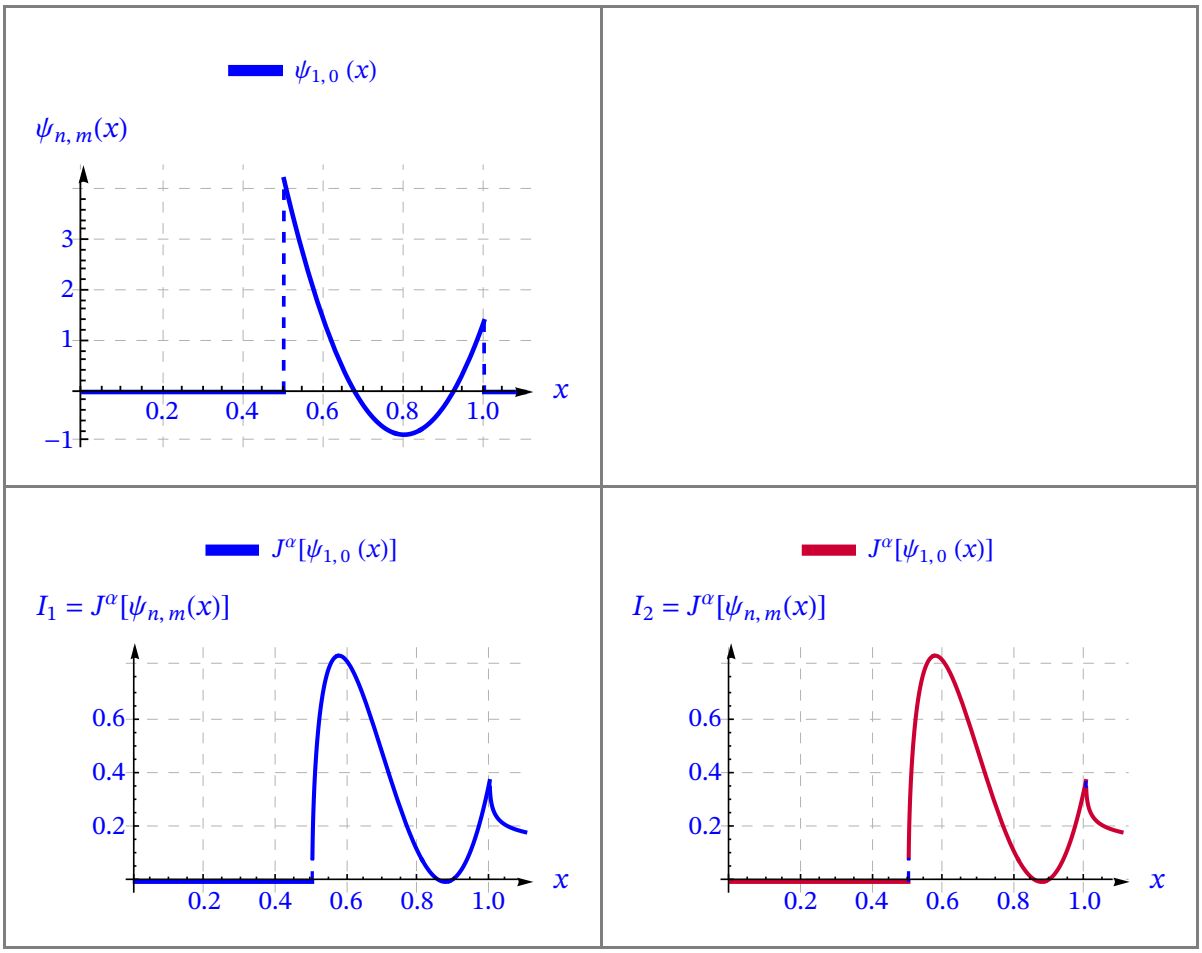
x	$I_1(x)$	$I_2(x)$
0.	0	0
0.1	0.814131	0.814131
0.2	0.466251	0.466251
0.3	0.104885	0.104885
0.4	0.0134567	0.0134567
0.5	0.376126	0.376126
0.6	0.184415	0.184415
0.7	0.163379	0.163379
0.8	0.150743	0.150743
0.9	0.141295	0.141295
1.	0.133652	0.133652



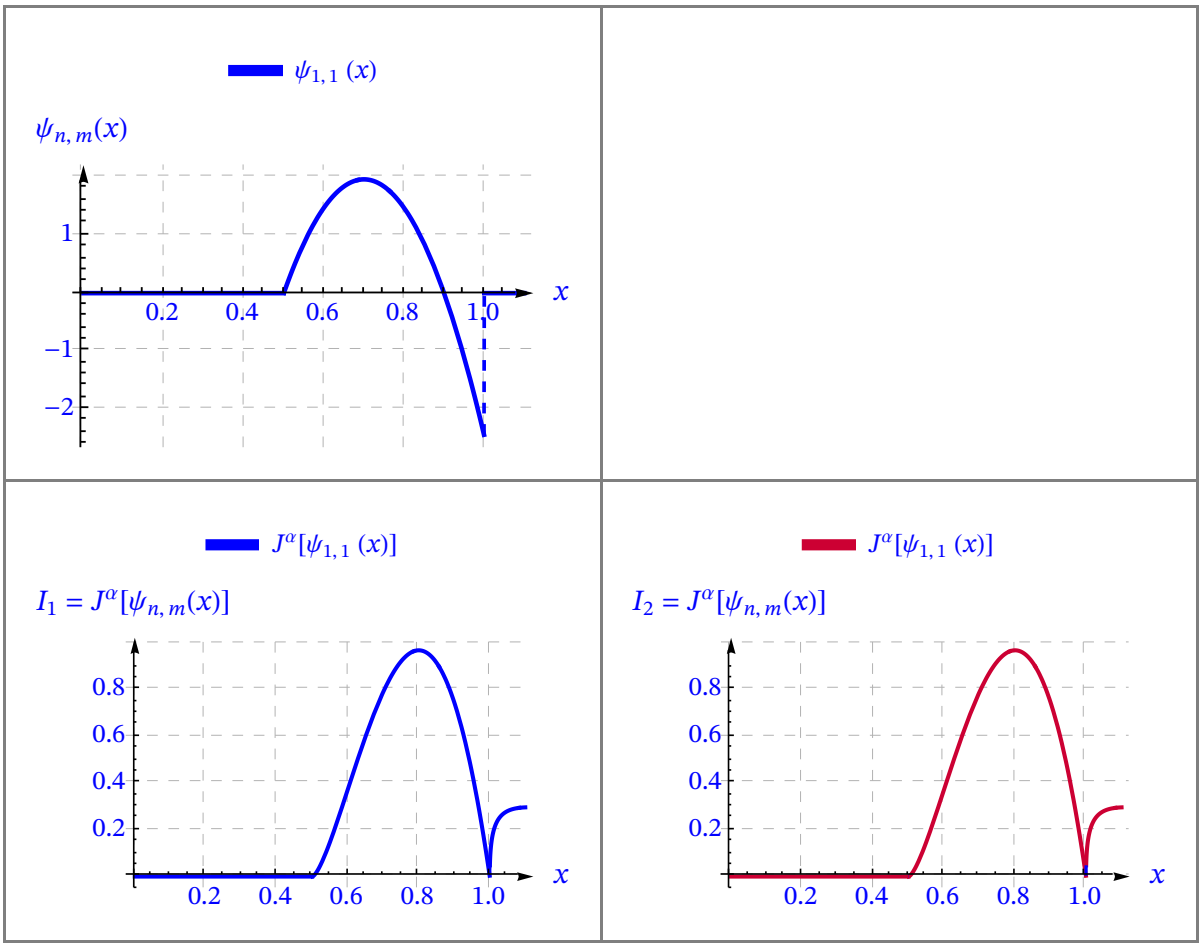
x	$I_1(x)$	$I_2(x)$
0.	0	0
0.1	0.372923	0.372923
0.2	0.79109	0.79109
0.3	0.968883	0.968883
0.4	0.745846	0.745846
0.5	0.	0
0.6	0.296293	0.296293
0.7	0.287877	0.287877
0.8	0.271798	0.271798
0.9	0.256385	0.256385
1.	0.242727	0.242727



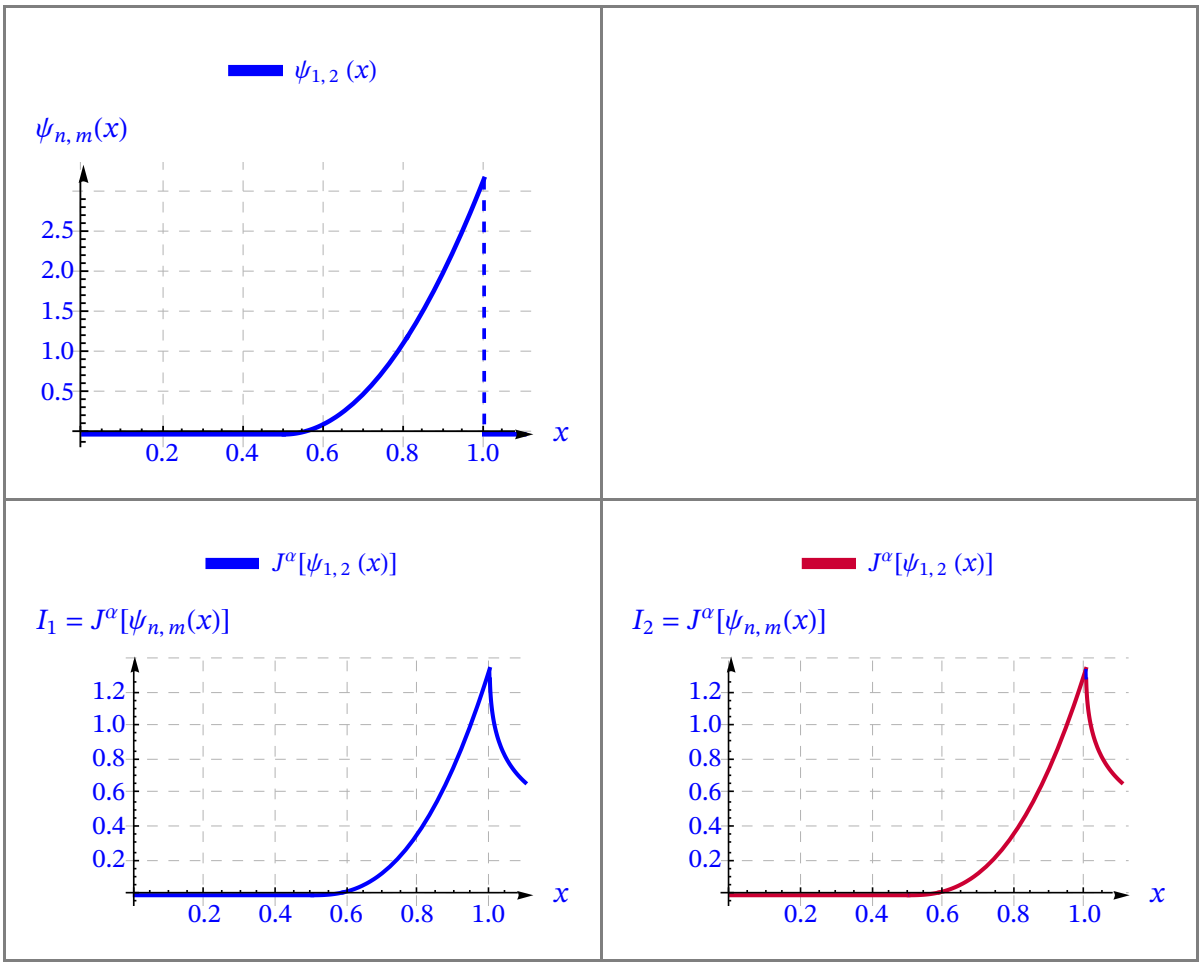
x	$I_1(x)$	$I_2(x)$
0.	0	0
0.1	0.0240721	0.0240721
0.2	0.136172	0.136172
0.3	0.375247	0.375247
0.4	0.770307	0.770307
0.5	1.34567	1.34567
0.6	0.669364	0.669364
0.7	0.537731	0.537731
0.8	0.464329	0.464329
0.9	0.415244	0.415244
1.	0.379283	0.379283



x	$I_1(x)$	$I_2(x)$
0.	0	0
0.1	0	0
0.2	0	0
0.3	0	0
0.4	0	0
0.5	0	0
0.6	0.814131	0.814131
0.7	0.466251	0.466251
0.8	0.104885	0.104885
0.9	0.0134567	0.0134567
1.	0.376126	0.376126

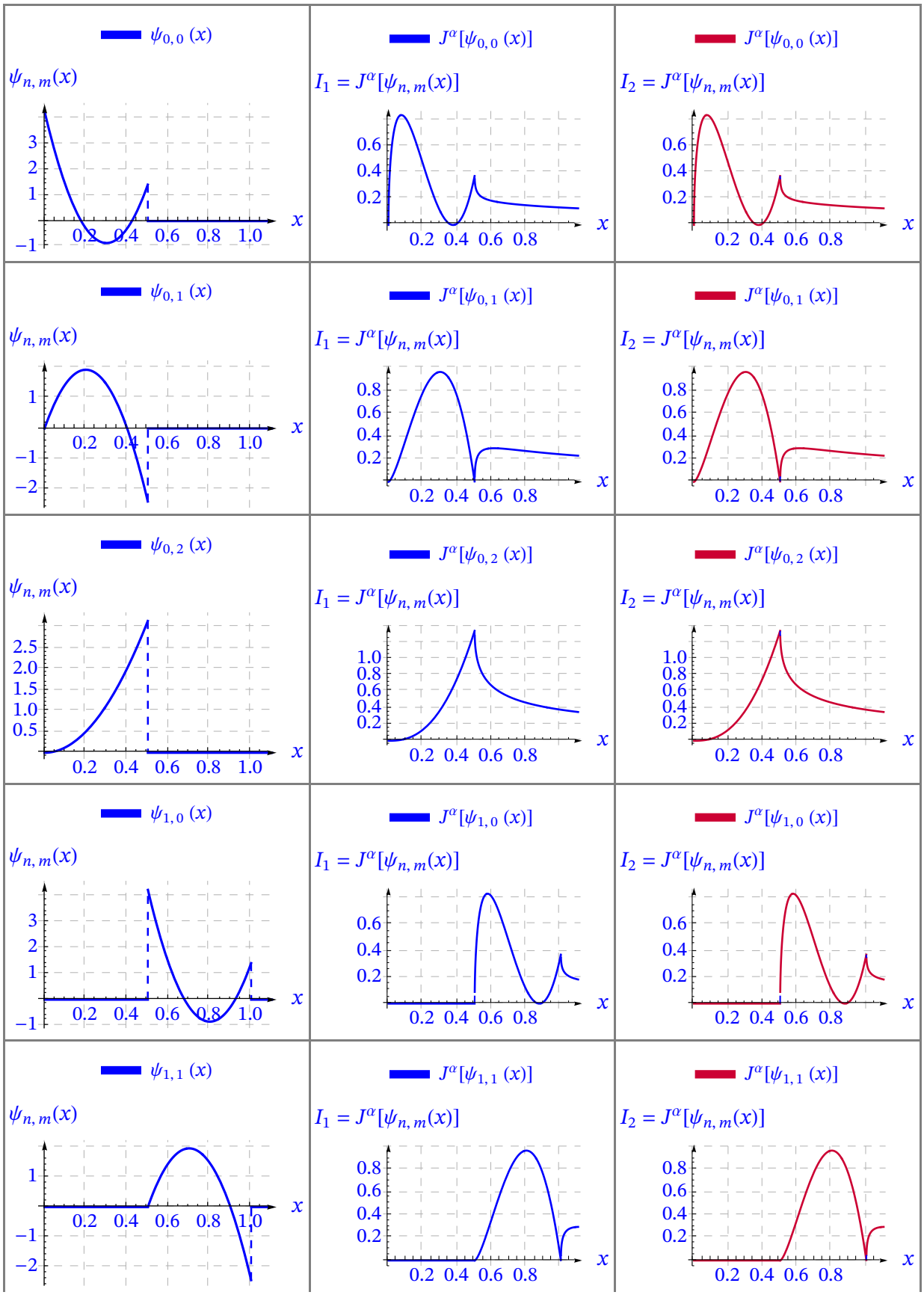


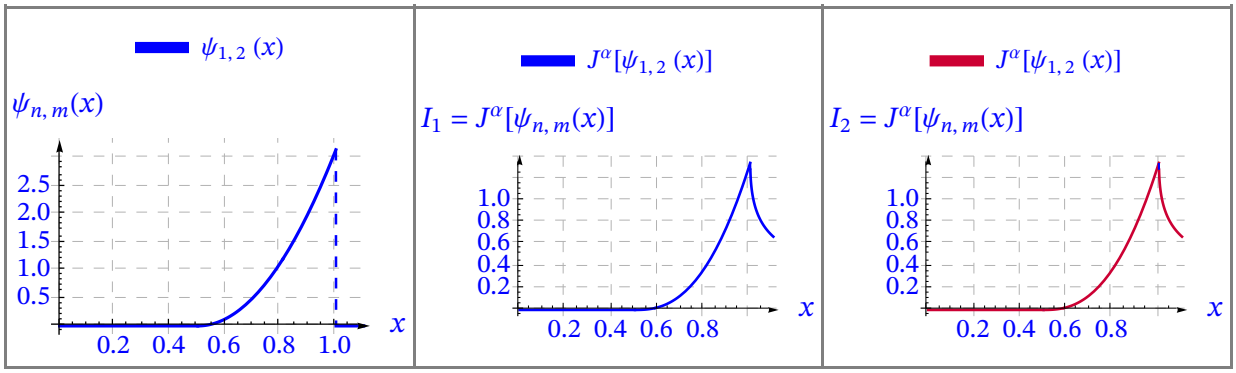
x	$I_1(x)$	$I_2(x)$
0.	0	0
0.1	0	0
0.2	0	0
0.3	0	0
0.4	0	0
0.5	0	0
0.6	0.372923	0.372923
0.7	0.79109	0.79109
0.8	0.968883	0.968883
0.9	0.745846	0.745846
1.	0.	0



x	$I_1(x)$	$I_2(x)$
0.	0	0
0.1	0	0
0.2	0	0
0.3	0	0
0.4	0	0
0.5	0	0
0.6	0.0240721	0.0240721
0.7	0.136172	0.136172
0.8	0.375247	0.375247
0.9	0.770307	0.770307
1.	1.34567	1.34567

Gráficas de la función $\psi_{n\,m}(x)$ y las integrales I_1 e I_2.


$\psi_{0,0}(x)$
$J^{\alpha}[\psi_{0,0}(x)]$
$J^{\alpha}[\psi_{0,0}(x)]$
$\psi_{n,m}(x)$
$I_1 = J^{\alpha}[\psi_{n,m}(x)]$
$I_2 = J^{\alpha}[\psi_{n,m}(x)]$
$\psi_{0,1}(x)$
$J^{\alpha}[\psi_{0,1}(x)]$
$J^{\alpha}[\psi_{0,1}(x)]$
$\psi_{n,m}(x)$
$I_1 = J^{\alpha}[\psi_{n,m}(x)]$
$I_2 = J^{\alpha}[\psi_{n,m}(x)]$
$\psi_{0,2}(x)$
$J^{\alpha}[\psi_{0,2}(x)]$
$J^{\alpha}[\psi_{0,2}(x)]$
$\psi_{n,m}(x)$
$I_1 = J^{\alpha}[\psi_{n,m}(x)]$
$I_2 = J^{\alpha}[\psi_{n,m}(x)]$
$\psi_{1,0}(x)$
$J^{\alpha}[\psi_{1,0}(x)]$
$J^{\alpha}[\psi_{1,0}(x)]$
$\psi_{n,m}(x)$
$I_1 = J^{\alpha}[\psi_{n,m}(x)]$
$I_2 = J^{\alpha}[\psi_{n,m}(x)]$
$\psi_{1,1}(x)$
$J^{\alpha}[\psi_{1,1}(x)]$
$J^{\alpha}[\psi_{1,1}(x)]$
$\psi_{n,m}(x)$
$I_1 = J^{\alpha}[\psi_{n,m}(x)]$
$I_2 = J^{\alpha}[\psi_{n,m}(x)]$
x



4.4.1.2. Cálculo de la Matriz Operacional Fraccionaria de Riemann–Liouville (Operador Integral Fraccionario)

En el siguiente teorema se deduce la expresión de la matriz operacional fraccionaria de Riemann–Liouville aplicando el operador fraccionario integral [MOHS20], [RAHI19].

▼ **Teorema 4.4.1. Matriz Integral Fraccionaria de Riemann-Liouville de Orden α con el Operador Integral Fraccionario.**

Sea $\Psi(x)$ el vector de *Wavelets* de Chelyshkov de grado M de dimensión $m^* = 2^k (M+1)$ definido por:

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \vdots \\ \psi_{m^*}(x) \end{pmatrix} \quad \begin{cases} \psi_i(x) = \psi_{n\,m}(x) & \begin{cases} n = 0,\ 1,\ \cdots,\ 2^k - 1 \\ m = 0,\ 1,\ \cdots,\ M \end{cases} \\ i = 1,\ \cdots,\ m^* & m^* = 2^k (M+1) \\ i = n(M+1) + (m+1) \end{cases} \tag{4.4.4}$$

La matriz integral fraccionaria de Riemann-Liouville de orden α de $\Psi(x)$ definida por la realción

$$J^{\alpha}[\Psi(x)] \simeq P^{(\alpha)}.\Psi(x) \tag{4.4.5}$$

donde

$$J^{\alpha}[\psi_i(x)] = J^{\alpha}[\psi_{n,m}(x)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^x (x-t)^{\alpha-1} \psi_{n,m}(x)\, dt \right)$$

$$J^{\alpha}\left[\begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \vdots \\ \psi_{m^*}(x) \end{pmatrix} \right] \simeq \begin{pmatrix} P^{(\alpha)}_{1,1} & P^{(\alpha)}_{1,2} & \cdots & P^{(\alpha)}_{1,m^*} \\ P^{(\alpha)}_{2,1} & P^{(\alpha)}_{2,2} & \cdots & P^{(\alpha)}_{2,m^*} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P^{(\alpha)}_{m^*,1} & P^{(\alpha)}_{m^*,2} & \cdots & P^{(\alpha)}_{m^*,m^*} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \vdots \\ \psi_{m^*}(x) \end{pmatrix} \tag{4.4.6}$$

se deduce aplicando el operador fraccionario integral, y tiene la expresión:

$$P^{(\alpha)}_{i,j} = c\left(\underbrace{n,\ m}_{i},\ \underbrace{n_2,\ m_2}_{j} \right) = \int_0^1 J^{\alpha}[\psi_{n,m}(x)] \times \psi_{n_2\,m_2}(x)\, dx$$

$$\begin{cases} n = 0,\ 1,\ \cdots,\ 2^k - 1 \\ m = 0,\ 1,\ \cdots,\ M \\ i = n\,(M+1) + (m+1) \end{cases} \qquad \begin{cases} n_2 = 0,\ 1,\ \cdots,\ 2^k - 1 \\ m_2 = 0,\ 1,\ \cdots,\ M \\ j = n_2\,(M+1) + (m_2+1) \end{cases} .$$

Se expande la integral $J^{\alpha}[\psi_{n,m}(x)]$ en la base de *Wavelets* de Chelyshkov:

$$J^{\alpha}[\psi_{n,m}(x)] \simeq \sum_{n_2=0}^{2^k-1} \sum_{m_2=0}^{M} c(n,\ m,\ n_2,\ m_2)\,\psi_{n_2\,n_2}(x) \quad x \in [0,\ 1]$$

$$c(n,\ m,\ n_2,\ m_2) = \frac{\langle J^{\alpha}[\psi_{n,m}(x)],\ \psi_{n_2\,m_2}(x)\rangle}{\underbrace{\langle \psi_{n_2\,m_2},\ \psi_{n_2\,m_2}(x)\rangle}_{=1}} = \langle J^{\alpha}[\psi_{n,m}(x)],\ \psi_{n_2\,m_2}(x)\rangle \tag{4.4.8}$$

$$\begin{cases} n = 0,\ 1,\ \cdots,\ 2^k - 1 \\ m = 0,\ 1,\ \cdots,\ M \end{cases} \qquad \begin{cases} n_2 = 0,\ 1,\ \cdots,\ 2^k - 1 \\ m_2 = 0,\ 1,\ \cdots,\ M \end{cases}$$

siendo $\langle .,\ . \rangle$ el producto interno en $L^2[0,\ 1]$.

Teniendo presentes las propiedades de ortogonalidad de las *Wavelets* de Chelyshkov, la matriz operacional de integración fraccionaria $P^{(\alpha)}$ de orden α de dimensión $\left(2^k\,(M+1)\right)\times\left(2^k\,(M+1)\right)$ se calcula aplicando la definición del producto interno:

$$c(n,\ m,\ n_2,\ m_2) = \int_0^1 J^{\alpha}[\psi_{n,m}(x)]\,\psi_{n_2\,m_2}(x)\,dx$$

$$c\left(\underbrace{n,\ m}_{i},\ \underbrace{n_2,\ m_2}_{j}\right) =$$

$$\int_{\frac{n}{2^k}}^{\frac{n+1}{2^k}} \left[\sqrt{2\,m+1}\ 2^{\frac{k}{2}} \sum_{q=0}^{M-m} (-1)^q \binom{M-m}{q} \binom{M+m+q+1}{M-m} \left(2^k\right)^{m+q} \right.$$

$$\frac{\Gamma((m+q)+1)}{\Gamma((m+q)+\alpha+1)} \left(x - \frac{n}{2^k}\right)^{m+q+\alpha} \mu\left(x - \frac{n}{2^k}\right)$$

$$-$$

$$\sqrt{2\,m+1}\ 2^{\frac{k}{2}} \sum_{q=0}^{M-m} (-1)^q \binom{M-m}{q} \binom{M+m+q+1}{M-m} \left(2^k\right)^{m+q} \sum_{z=0}^{m+q} \binom{m+q}{z}$$

$$\left(\frac{1}{2^k}\right)^{(m+q)-z} \frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(z+\alpha+1)} \left(x - \frac{(n+1)}{2^k}\right)^{z+\alpha} \left. \mu\left(x - \frac{(n+1)}{2^k}\right) \right] *$$

$$\left[\sqrt{2\,m_2+1}\ 2^{\frac{k}{2}} \sum_{q_2=0}^{M-m_2} (-1)^{q_2} \binom{M-m_2}{q_2} \binom{M+m_2+q_2+1}{M-m_2} \left(2^k\,x - n_2\right)^{m_2+q_2} \right] dx$$

$$\begin{cases} n = 0,\ 1,\ \cdots,\ 2^k - 1 \\ m = 0,\ 1,\ \cdots,\ M \\ i = n\,(M+1) + (m+1) \end{cases} \qquad \begin{cases} n_2 = 0,\ 1,\ \cdots,\ 2^k - 1 \\ m_2 = 0,\ 1,\ \cdots,\ M \\ j = n_2\,(M+1) + (m_2+1) \end{cases} .$$

■ **Ejemplo 4.4.2. Matriz Operacional de Integración Fraccionaria (Definición).**

Calcúlese la matriz $P^{(\alpha)}$ operacional de integración fraccionaria de Riemann–Liouville de orden α para la matriz $\Psi(x)$ de las *Wavelets* de Chelyshkov:

$J^{\alpha}\,[\Psi(x)] \simeq P^{(\alpha)}.\,\Psi(x)$

realizando la expansión en la base *Wavelet* de Chelyshkov de las funciones $J^{\alpha}[\Psi(x)]$ de forma directa aplicando las correspondientes definiciones:

$$J^{\alpha}[\psi_{n,m}(x)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}\,\psi_{n,m}(x)\,dt\right)$$

$$P_{i,j}^{(\alpha)} = c\left(\underbrace{n,\ m}_{i},\ \underbrace{n_2,\ m_2}_{j}\right) = \int_0^1 J^{\alpha}[\psi_{n,m}(x)] \times \psi_{n_2\,m_2}(x)\,dx$$

$$\begin{cases} n = 0,\ 1,\ \cdots,\ 2^k - 1 \\ m = 0,\ 1,\ \cdots,\ M \\ i = n\,(M+1) + (m+1) \end{cases} \qquad \begin{cases} n_2 = 0,\ 1,\ \cdots,\ 2^k - 1 \\ m_2 = 0,\ 1,\ \cdots,\ M \\ j = n_2\,(M+1) + (m_2+1) \end{cases} .$$

(a) $k = 1,\ M = 1 \quad \alpha = 1.$

SOLUCIÓN

(a)

$$\begin{pmatrix} [A, B] = & [0,\ 1] & \text{(intervalo } x\text{)} \\ \{k, 2^k\} = & \{1,\ 2\} & \text{(máxima resolución)} \\ M = & 1 & \text{(máx. grado polinomio)} \\ m^* = 2^k(M+1) = & 4 & \text{Dimensión } \mathcal{B} = \{\psi_k\} \\ \{\alpha\} = & \{1\} & \end{pmatrix}$$

$$P^{(\alpha)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{16} & \frac{7}{16\sqrt{3}} & \frac{1}{8} & \frac{\sqrt{3}}{8} \\ -\frac{1}{16\sqrt{3}} & \frac{3}{16} & \frac{\sqrt{3}}{8} & \frac{3}{8} \\ 0 & 0 & \frac{1}{16} & \frac{7}{16\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{16\sqrt{3}} & \frac{3}{16} \end{pmatrix}$$

■ **Ejemplo 4.4.3. Operador Integral Fraccionario y Matriz Operacional Integración Fraccionaria.**

Se quiere calcular la matriz $P^{(\alpha)}$ operacional de integración fraccionaria de Riemann–Liouville de orden α para la matriz $\Psi(x)$ de las *Wavelets* de Chelyshkov:

$J^{\alpha}[\Psi(x)] \simeq P^{(\alpha)}.\Psi(x)$.

(i) Calcúlense las *Wavelets* de Chelyshkov $\psi_{n\,m}(x)$ y la matriz $\Psi(x)$.

(ii) Determínese las integrales fraccionarias de orden α de Riemann-Liouville de $\psi_{n\,m}(x)$.

(iii) Calcúlese la matriz $P^{(\alpha)}$ aplicando el operador integral fraccionario $J^{\alpha}[\Psi(x)]$.

(a) $k=0,\ M=1 \qquad \alpha=1.$

$$P^{(\alpha)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{7}{8\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{8\sqrt{3}} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}.$$

(b) $k=0,\ M=2 \qquad \alpha=1.$

$$P^{(\alpha)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{18} & \frac{5}{12\sqrt{3}} & \frac{19}{36\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{12\sqrt{3}} & \frac{1}{6} & \frac{11}{6\sqrt{15}} \\ \frac{1}{36\sqrt{5}} & -\frac{1}{6\sqrt{15}} & \frac{5}{18} \end{pmatrix}.$$

(c) $k=1,\ M=1 \qquad \alpha=1.$

$$P^{(\alpha)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{16} & \frac{7}{16\sqrt{3}} & \frac{1}{8} & \frac{\sqrt{3}}{8} \\ -\frac{1}{16\sqrt{3}} & \frac{3}{16} & \frac{\sqrt{3}}{8} & \frac{3}{8} \\ 0 & 0 & \frac{1}{16} & \frac{7}{16\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{16\sqrt{3}} & \frac{3}{16} \end{pmatrix}.$$

(d) $k=1,\ M=1 \qquad \alpha=1/2.$

$$P^{(\alpha)} = \begin{pmatrix} \frac{8\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{21} & \frac{8\sqrt{\frac{6}{\pi}}}{35} & \frac{2(152-103\sqrt{2})}{105\sqrt{\pi}} & \frac{2(-88+67\sqrt{2})}{35\sqrt{3\pi}} \\ -\frac{4}{35}\sqrt{\frac{2}{3\pi}} & \frac{4\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{7} & \frac{2(16-9\sqrt{2})}{7\sqrt{3\pi}} & -\frac{6(-16+9\sqrt{2})}{35\sqrt{\pi}} \\ 0 & 0 & \frac{8\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{21} & \frac{8\sqrt{\frac{6}{\pi}}}{35} \\ 0 & 0 & -\frac{4}{35}\sqrt{\frac{2}{3\pi}} & \frac{4\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{7} \end{pmatrix}.$$

(e) $k=2,\ M=1 \qquad \alpha=1.$

$$P^{(\alpha)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{32} & \frac{7}{32\sqrt{3}} & \frac{1}{16} & \frac{\sqrt{3}}{16} & \frac{1}{16} & \frac{\sqrt{3}}{16} & \frac{1}{16} & \frac{\sqrt{3}}{16} \\ -\frac{1}{32\sqrt{3}} & \frac{3}{32} & \frac{\sqrt{3}}{16} & \frac{3}{16} & \frac{\sqrt{3}}{16} & \frac{3}{16} & \frac{\sqrt{3}}{16} & \frac{3}{16} \\ 0 & 0 & \frac{1}{32} & \frac{7}{32\sqrt{3}} & \frac{1}{16} & \frac{\sqrt{3}}{16} & \frac{1}{16} & \frac{\sqrt{3}}{16} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{32\sqrt{3}} & \frac{3}{32} & \frac{\sqrt{3}}{16} & \frac{3}{16} & \frac{\sqrt{3}}{16} & \frac{3}{16} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{32} & \frac{7}{32\sqrt{3}} & \frac{1}{16} & \frac{\sqrt{3}}{16} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{32\sqrt{3}} & \frac{3}{32} & \frac{\sqrt{3}}{16} & \frac{3}{16} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{32} & \frac{7}{32\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{32\sqrt{3}} & \frac{3}{32} \end{pmatrix}.$$

4.4.2. Matriz Operacional $\mathcal{D}(\tau)$ con Retraso Proporcional de $\Psi(x)$ ($k = 0$)

Para definir la matriz operacional $D(\tau)$ con retraso constante del vector *Wavelet* de Chelyshkov $\psi(t)$, primero se deben definir las matrices de transformación Π y Λ, así como la matriz operacional con retraso $\Omega(\tau)$ del vector de polinomios de Chelyshkov $\phi(t)$, para el caso en que ($k = 0$) [MOHA18], [MORA19].

Para obtener este último elemento, hay que definir $\phi(t)$ como el $(M+1)$ vector de polinomios de Chelyshkov de la forma ya expuesta en la ecuación 4.3.6. La matriz operacional con retraso del vector, por tanto, se define como:

$$\Phi(\tau\, t) \simeq \Omega\,(\tau)\,\Phi\,(t), \tag{4.4.9}$$

donde $\Omega(\tau)$ es la matriz de retraso de dimensiones $(M+1)\times(M+1)$, cuyos elementos $(i,\ j)$ se pueden obtener mediante la siguiente expresión:

$$\Omega\,(\tau)_{i,j} = \left(\sum_{r=0}^{M-i+1} \sum_{s=0}^{M-j} \frac{a_{s,j}\, a_{r,i-1} (2\,j+1)\, \tau^{r+i-1}}{(r+i+s+j)} \right), \quad i,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ M+1. \tag{4.4.10}$$

En relación a la matriz Λ, si se expande el $\hat{m}$ vector *Wavelet* de Chelyshkov $\psi(x)$ en el $(M+1)$ vector de polinomios de Chelyshkov $\phi(x)$, se obtiene la expresión:

$$\psi(x) \simeq \Lambda\, \phi(x), \tag{4.4.11}$$

donde Λ es una matriz de dimensiones $\hat{m}\times(M+1)$ y cuyos elementos $(i,\ j)$ se calculan como:

$$\Lambda_{i\,j} = (2\,j+1) \sum_{r=0}^{M-j} \sum_{s=0}^{M-m} \sum_{k=0}^{r+j} \left(\frac{a_{r\,j}\, a_{s\,m}\, 2^{-k\left(r+j+\frac{1}{2}\right)}\, \sqrt{2\,m+1} \binom{r+j}{k} n^{r+j-k}}{s+k+1} \right) \tag{4.4.12}$$

donde $i = 1,\ \ldots,\ \hat{m},\ \ j = 1,\ \ldots,\ M+1$.

Con respecto a la matriz Π, si se expande el vector de polinomios de Chelyshkov de dimensión $(M+1)$, se obtiene la expresión:

$$\phi(t) \simeq \Pi\, \psi(t), \tag{4.4.13}$$

donde Π es la matriz de dimensiones $(M+1)\times\hat{m}$ y sus elementos $(i,\ j)$ se obtienen mediante la siguiente expresión:

$$\Pi_{i\,j} = (2\,j+1) \sum_{r=0}^{M-i+1} \sum_{s=0}^{M-m} \sum_{k=0}^{r+i-1} \left(\frac{a_{r,i-1}\, a_{s,m}\, 2^{-k\left(r+i-\frac{1}{2}\right)}\, \sqrt{2\,m+1} \binom{r+i-1}{k} n^{r+i-k-1}}{r+i+s} \right). \tag{4.4.14}$$

La matriz operacional $D(\tau)$ con retraso constante del $\hat{m}\times 1$ vector *Wavelet* de Chelyshkov $\psi(t)$ se obtiene del producto de las tres matrices definidas durante esta sección, obteniendo las expresión:

$$D(\tau) = \Lambda\, \Omega(\tau)\, \Pi \tag{4.4.15}$$

que permite obtener la expresión:

$$\Psi(\tau\, t) \simeq D(\tau)\, \Psi(t). \tag{4.4.16}$$

Estas expresiones són válidas para $k = 0$.

4.4.3. Matriz Operacional Producto $\tilde{C}$ de $\Psi(x)$

El producto del vector *Wavelet* de Chelyshkov $\Psi(x)$, $\Psi(x)^T$ y el vector C de dimensiones $2^p\,(N+1)$ se puede expandir empleando el método *Wavelet*, obtiendo la expresión: [MOHS20]

$$\Psi(x)\, \Psi^T(x)\, C \approx U(C)\, \Psi(x), \tag{4.4.17}$$

donde:

$$U(C) = \left\langle \Psi(x)\, \Psi^T(x)\, C,\ \Psi(x) \right\rangle. \tag{4.4.18}$$

Los elementos $(2^p\,(N+1)\times 2^p\,(N+1))$ de la matriz $U(C)$ se pueden calcular de la forma:

$$u_{i,j} = \int_0^1 \psi_i(x)\, \psi_r(x)\, c_r\, \psi_j(x),\ i = 1,\ \ldots,\ 2^p\,(N+1),\ j = 1,\ \ldots,\ 2^p\,(N+1) \quad r = 1,\ \ldots,\ 2^p\,(N+1), \tag{4.4.19}$$

donde c_r es la r-ésima entrada del vector C definido en la ecuación 4.3.11.

Ejemplo 4.4.4. Matriz Operacional Producto de *Wavelets* de Chelyshkov.
Calcúlese la matriz operacional producto $\tilde{C}$ del vector de *Wavelets* $\Psi(x)$ con los parámetros dados:

$\Psi(x).\Psi(x)^T\, C = \tilde{C}.\, \Psi(x)$.

(a) $k = 1,\ M = 1$.

SOLUCIÓN

(a)

Matriz operacional producto (*Wavelets* de Chelyshkov)

$$\Psi(x).\Psi^T(x).C \simeq \tilde{C}.\Psi(x)$$

$$\begin{pmatrix} k = & 1 \\ M = & 1 \\ m^* = 2^k(M+1) = & 4 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} C_{0,0} \\ C_{0,1} \\ C_{1,0} \\ C_{1,1} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{C}_{i,j} = \sum_{k=1}^{m^*} C_k \int_0^1 \psi_k(x)\,\psi_i(x)\,\psi_j(x)\,dx \qquad i, j = 1, 2, \cdots, m^*$$

(a) *Wavelets* de Chelyshkov

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) & = & \psi_{0,0}(x) \\ \psi_2(x) & = & \psi_{0,1}(x) \\ \psi_3(x) & = & \psi_{1,0}(x) \\ \psi_4(x) & = & \psi_{1,1}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{cases} \sqrt{2}\,(2-6\,x) & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \begin{cases} 2\,\sqrt{6}\,x & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{2}\,(2-3\,(2\,x-1)) & \frac{1}{2} \le x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{6}\,(2\,x-1) & \frac{1}{2} \le x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \end{pmatrix}$$

(b) Matriz operacional producto (*Wavelet* de Chelyshkov)

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} \frac{5\,C_{0,0}}{2\,\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\,\sqrt{\frac{3}{2}}\,C_{0,1} & \frac{1}{2}\,\sqrt{\frac{3}{2}}\,C_{0,0} - \frac{C_{0,1}}{2\,\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\,\sqrt{\frac{3}{2}}\,C_{0,0} - \frac{C_{0,1}}{2\,\sqrt{2}} & \frac{3}{2}\,\sqrt{\frac{3}{2}}\,C_{0,1} - \frac{C_{0,0}}{2\,\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5\,C_{1,0}}{2\,\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\,\sqrt{\frac{3}{2}}\,C_{1,1} & \frac{1}{2}\,\sqrt{\frac{3}{2}}\,C_{1,0} - \frac{C_{1,1}}{2\,\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\,\sqrt{\frac{3}{2}}\,C_{1,0} - \frac{C_{1,1}}{2\,\sqrt{2}} & \frac{3}{2}\,\sqrt{\frac{3}{2}}\,C_{1,1} - \frac{C_{1,0}}{2\,\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

4.5. Método Wavelet de Chelyshkov para Ecuaciones Diferenciales con Retraso Fraccionarias

4.5.1. Ecuaciones Diferenciales con Retraso Fraccionarias (FDDE)

En esta sección se presenta el método numérico basado en el enfoque de Galerkin para resolución de ecuaciones diferenciales con retraso fraccionarias (FDDE), que reduce la ecuación a un sistema de ecuaciones algebraicas, para ecuaciones lineales y no lineales propuesto en [RAHI17], [MOHA18], [MORA19].

Se consideran los siguientes sistemas de ecuaciones siguientes FDDE:

$$(P_1) \equiv \begin{cases} D^{(\alpha)}\, y(x) = f(x,\, y(x),\, y(x-\tau)) & \begin{cases} x \in [0,\, 1] \quad n-1 < \alpha \le n \\ 0 < \tau < 1 \end{cases} \\ y\,(x) = u\,(x) & \tau \le x \le 0 \\ y^{(i)}(0) = \lambda_i & i = 0,\, 1,\, \cdots,\, n-1,\, n \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{4.5.1}$$

$$(P_2) \equiv \begin{cases} D^{(\alpha)}\, y(x) = f(x,\, y(x),\, y(\tau\, x)) & \begin{cases} x \in [0,\, 1] \quad n-1 < \alpha \le n \\ 0 < \tau < 1 \end{cases} \\ y^{(i)}(0) = \mu_i & i = 0,\, 1,\, \cdots,\, n-1,\, n \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{4.5.2}$$

donde f es una función analítica, $n-1 < \alpha \le n$ y $0 < \tau < 1$ es el parámetro del retraso, λ_k las condiciones iniciales de tipo real y $u(x)$ es una función continua en $[-\tau,\, 0]$.

$D^{(\alpha)}\, y(x)\,(n-1 < \alpha \le n)$ representa la derivada de orden fraccionario en el sentido de Caputo de la función $y(x)$ e $y(x)$ la solución por determinar.

1. Se considera que la derivada $D^{(\alpha)}\, y(x)$ se puede expresar en términos de las *Wavelets* de Chelyshkov $\Psi(x) = \{\psi_{n\,m}(x)\}$ que se toma como aproximación:

$$D^{(\alpha)}\, y(x) \simeq \sum_{n=0}^{2^k-1} \sum_{m=0}^{M} c_{n\,m}\, \psi_{n\,m}(x) = \sum_{i=1}^{m^*} c_i\, \psi_i(x) = C^T.\Psi(x) \quad x \in [0,\, 1] \tag{4.5.3}$$

donde C^T es un vector fila y $\Psi(x)$ un vector columna de dimensión $(M+1)$ dados por

$$C^T = (\, c_0 \;\; c_1 \;\; \cdots \;\; c_M \,)$$

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1\,(x) \\ \psi_2\,(x) \\ \vdots \\ \psi_{m^*}\,(x) \end{pmatrix} \quad \begin{cases} \psi_i\,(x) = \psi_{n\,m}\,(x) \\ i = 1,\, \cdots,\, m^* \\ i = n\,(M+1) + (m+1) \end{cases} \qquad m^* = 2^k\,(M+1)\,. \tag{4.5.4}$$

2. Se aplica el operador J^{α} de integración fraccionaria de Riemann–Liouville a ambos lados de la relación $D^{(\alpha)}\, y(x) \simeq C^T.\Psi(x)$ y aplicando la matriz operacional de la integral fraccionaria de $\Psi(x)$, se tiene:

$$(P_1) \equiv y(x) \simeq J^{\alpha}\left[C^T.\Psi(x)\right] + \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda_i}{i!}\, x^i} = C^T.P^{(\alpha)}.\Psi(x) + {E_1}^T.\Psi(x)$$
$$\bullet\, J^{\alpha}\left[\Psi(x)\right] \simeq P^{(\alpha)}.\,\Psi(x) \quad \bullet\, n = \lceil \alpha \rceil \tag{4.5.5}$$

$$(P_2) \equiv y(x) \simeq J^{\alpha}\left[C^T.\Psi(x)\right] + \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda_i}{i!}\, x^i} = C^T.P^{(\alpha)}.\Psi(x) + {E_2}^T.\Psi(x)$$
$$\bullet\, J^{\alpha}\left[\Psi(x)\right] \simeq P^{(\alpha)}.\,\Psi(x) \quad \bullet\, n = \lceil \alpha \rceil \tag{4.5.6}$$

siendo E_1, E_2 los vectores de coeficientes *Wavelets* de Chelyshkov del polinomio $p(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda_k}{i!}\, x^i$

$$(P_1) \equiv \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda_i}{i!}\, x^i \simeq {E_1}^T.\Psi(x) \qquad (P_2) \equiv \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda_i}{i!}\, x^i \simeq {E_2}^T.\Psi(x)$$

3. Se deduce la aproximación del término de retraso $y(x-\tau)$, e $y(\tau\, x)$ de los problemas P_1 y P_2 y de las expresiones matriciales de las aproximaciones de $y(x)$:

$$(P_1) \equiv y(x-\tau) \simeq \begin{cases} u(x-\tau) & 0 \le x \le \tau \\ C^T.P^{(\alpha)}.\Psi\,(x-\tau) + {E_1}^T.\Psi(x-\tau) & \tau \le x \le 1 \end{cases} = C_*^{(\tau)T}.\Psi(x) \tag{4.5.7}$$

$$(P_2) \equiv y(\tau\, x) \simeq \begin{cases} C^T.P^{(\alpha)}.\Psi\,(\tau\, x) + {E_2}^T.\Psi\,(\tau\, x) & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} C^T.P^{(\alpha)}.\mathcal{D}\,(\tau)\,\Psi\,(x) + {E_2}^T.\mathcal{D}\,(\tau)\,\Psi\,(x) & 0 \le x \le 1 \end{cases} \tag{4.5.8}$$
$$\bullet\, \Psi(\tau\, x) = \mathcal{D}(\tau)\,\Psi(x)$$

donde $C_*^{(\tau)}$ es una función vectorial desconocida dependiente del vector C y el parámetro de retardo τ, y $\mathcal{D}(\tau)$ es la matriz operacional con retraso del vector de *Wavelets* de Chelyshkov $\Psi(x)$.

4. Se sustituyen las expresiones de

$$(P_1) \equiv \begin{cases} y(x) \\ y\,(x-\tau_s) \end{cases} \qquad (P_2) \equiv \begin{cases} y(x) \\ y\,(\tau\, x) \end{cases}$$

en la ecuación FDDE de los problemas (P_1) y (P_2), respectivamente, y resulta un sistema algebraico de ecuaciones :

(P_1)

$$D^{(\alpha)}\, y(x) = f(x,\, y(x),\, y(x-\tau)) \quad x \in [0,\, 1] = \begin{cases} f(x,\, y(x),\, u(x-\tau)) & x \in [0,\, \tau] \\ f(x,\, y(x),\, y(x-\tau)) & x \in (\tau,\, 1] \end{cases}$$

$$\begin{cases} D^{(\alpha)}\, y(x) & = C^T.\Psi(x) \\ y(x) & = C^T.P^{(\alpha)}.\Psi(x) + {E_1}^T.\Psi\,(x) \\ y\,(x-\tau) & = \begin{cases} u(x-\tau) & x \in [0,\, \tau] \\ C^T.P^{(\alpha)}.\Psi\,(x-\tau) + {E_1}^T.\Psi(x-\tau) & x \in (\tau,\, 1] \end{cases} \\ & = C_*^{(\tau)T}.P^{(\alpha)}.\Psi(x) \end{cases}$$

$$
\begin{array}{l}
(P_2) \\
\quad D^{(\alpha)}\, y(x) = f(x,\, y(x),\, y(\tau\, x)) \quad x \in [0,\, 1] \\
\quad \left\{ \begin{array}{ll} D^{(\alpha)}\, y(x) & = C^T.\Psi(x) \\ y(x) & = C^T.P^{(\alpha)}.\Psi(x) + {E_2}^T.\Psi\,(x) \\ y(\tau\, x) & = C^T.P^{(\alpha)}.\Psi(\tau\, x) + {E_2}^T.\Psi(\tau\, x) \end{array} \right.
\end{array}
$$

Se deducen los repectivos sistemas ecuaciones algebraicos:

$$
\begin{array}{l}
(P_1) \\
C^T.\Psi(x) = \\
\quad \left\{ \begin{array}{ll} f\Big(x,\, C^T.P^{(\alpha)}.\Psi(x) + {E_1}^T.\Psi(x),\, u(x-\tau)\Big) & x \in [0,\, \tau] \\ f\Big(x,\, C^T.P^{(\alpha)}.\Psi(x) + {E_1}^T.\Psi(x),\, C^T.P^{(\alpha)}.\Psi(x-\tau) + {E_1}^T.\Psi(x-\tau)\Big) & x \in (\tau,\, 1] \end{array} \right. \qquad (4.5.9) \\
\\
C^T.\Psi(x) = \left\{ \begin{array}{ll} f\Big(x,\, C^T.P^{(\alpha)}.\Psi(x) + {E_1}^T.\Psi(x),\, u(x-\tau)\Big) & x \in [0,\, \tau] \\ f\Big(x,\, C^T.P^{(\alpha)}.\Psi(x) + {E_1}^T.\Psi(x),\, C_*^{(\tau)T}.P^{(\alpha)}.\Psi(x)\Big) & x \in (\tau,\, 1] \end{array} \right.
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
(P_2) \\
C^T.\Psi(x) = \\
\quad \left\{ f\Big(x,\, C^T.P^{(\alpha)}.\Psi(x) + {E_2}^T.\Psi(x),\, C^T.P^{(\alpha)}.\Psi(\tau\, x) + {E_2}^T.\Psi(\tau\, x)\Big) \quad 0 < x \le 1 \right. \qquad (4.5.10) \\
\\
D^{(\alpha)}\, y(x) = \\
\quad \left\{ f\Big(x,\, C^T.P^{(\alpha)}.\Psi(x) + {E_2}^T.\Psi(x),\, C^T.P^{(\alpha)}.\mathcal{D}(\tau)\,\Psi(x) + {E_2}^T.\mathcal{D}(\tau)\,\Psi(x)\Big) \quad 0 < x \le 1 \right.
\end{array}
$$

5. *Método de colocación*. Creación de un sistema algebraico de ecuaciones.

En los problemas (P_1), (P_2) se ha obtenido un sistema (no lineal) de ecuaciones algebraicas con el vector de coeficientes $C^T = (\, C_1 \;\; C_2 \;\; \cdots \;\; C_{m^*=2^k\,(M+1)}\,)$.

Se puede calcular el vector de coeficientes de dos modos:

a. Se crea un sistema algebraico de ecuaciones con el *método de colocación* considerando como puntos de colocación los ceros de los polinomios de *Legendre desplazados* de orden m^* del intervalo [0, 1]:

$$
\begin{array}{c}
P_{m^*}(x) \equiv \text{polinomio de Legendre de orden } m^* = 2^k\,(M+1) \quad x \in [-1,\, 1] \\
L_{m^*}(x) \equiv \text{polinomio de Legendre desplazado de orden } m^* = 2^k\,(M+1) \quad x \in [0,\, 1] \\
x \in [-1,\, 1] \quad \overset{x \to (2\,x-1)}{\Longrightarrow} \quad x \in [0,\, 1] \\
L_{m^*}(x) = P_{m^*}(2\,x-1) \\
\text{ceros de } L_{m^*}(x) = \{x_1,\, x_2,\, \cdots,\, x_{m^*}\} \in [0,\, 1].
\end{array}
$$

Se deduce un sistema de no lineal de ecuaciones algebraicas con m^* ecuaciones con el vector de incógnitas $C^T = (\, C_1 \;\; C_2 \;\; \cdots \;\; C_{m^*}\,)$.

i. Se resuelve el sistema no lineal de ecuaciones en C_k $(k = 1,\, \ldots,\, m^*)$ con el método de *Newton–Raphson* o el método *Affine Covariant Newton*.

ii. La solución aproximada de la ecuación FDDE es

$$\begin{aligned}(P_1) &\equiv y_1(x) = C^T.P^{(\alpha)}.\Psi(x) + {E_1}^T.\Psi(x)\\ (P_2) &\equiv y_1(x) = C^T.P^{(\alpha)}.\Psi(x) + {E_2}^T.\Psi(x).\end{aligned} \tag{4.5.11}$$

b. Se deduce la expresión de la función residuo $R(x)$:

$$\begin{aligned}&(P_1)\\ &R(x) = C^T.\Psi(x) - f\left(x,\ C^T.P^{(\alpha)}.\Psi(x) + {E_1}^T.\Psi(x),\ C^T.P^{(\alpha)}.\Psi(x-\tau) + {E_1}^T.\Psi(x-\tau)\right)\\ &(P_2)\\ &R(x) = C^T.\Psi(x) - f\left(x,\ C^T.P^{(\alpha)}.\Psi(x) + {E_2}^T.\Psi(x),\ C^T.P^{(\alpha)}.\Psi(\tau\, x) + {E_2}^T.\Psi(\tau\, x)\right).\end{aligned}$$

i. Se aplica el método Tau donde la solución $y(x)$ verifique que la función residuo $R(x)$ sea ortogonal a tantas funciones base $\psi_{n\,m}(x)$ como sea posible:

$$\int_0^1 \psi_i(x)\, R(x)\, dx = 0 \qquad \begin{cases}\psi_i(x) = \psi_{n\,m}(x)\\ i = 1,\ \cdots,\ m^*\\ i = n\,(M+1) + (m+1)\end{cases} \qquad m^* = 2^k\,(M+1) \tag{4.5.12}$$

obteniéndose un sistema de m^* ecuaciones para el vector $C^T = (\,C_1\ C_2\ \cdots\ C_{m^*}\,)$ de $m^* = 2^k\,(M+1)$ coeficientes.

ii. Se resuelve el sistema no lineal de ecuaciones en C_k $(k = 1,\ \ldots,\ m^*)$ con el método de *Newton–Raphson* o el método *Affine Covariant Newton*.

iii. La solución aproximada de la ecuación FDDE es

$$\begin{aligned}(P_1) &\equiv y_2(x) = C^T.P^{(\alpha)}.\Psi(x) + {E_1}^T.\Psi(x)\\ (P_2) &\equiv y_2(x) = C^T.P^{(\alpha)}.\Psi(x) + {E_2}^T.\Psi(x).\end{aligned} \tag{4.5.13}$$

4.5.2. Problemas (FDDE)

4.5.2.1. Ecuaciones FDDE con Retraso Constante $y(x-\tau)$

■ **Problema 4.5.1. Ecuación Diferencial Fraccionaria con Retraso (FDDE) $y\,(x-\tau)$** ([RAHI17]) ([SING21])

Sea la ecuación diferencial fraccionaria con retraso y con las condiciones iniciales dadas:

$$(P) \equiv \begin{cases} D^{(\alpha)}\, y(x) = -y(x) - y(x-\tau) + e^{-(x-\tau)} & x \in (0,\ 1),\ 2 < \alpha \le 3\\ y(x) = e^{-x} & x < 0\\ y(0) = 1 \quad y'(0) = -1 \quad y''(x) = 1 & \end{cases}$$

La solución exacta del problema cuando $\alpha = 3$ es

$y(x) = e^{-x}$.

(i) Calcúlese la solución numérica mediante el método *Wavelets* de Chelyshkov (ChWM) con los parámetros k, M, α, τ dados.

(ii) Represéntese en una misma gráfica en el intervalo [0, 1] la solución del método ChWM y la solución exacta.

(iii) Créese una tabla con los valores de x, $f(x)$ (ChWM), $f(x)$ y el error absoluto $|f(x)\ (\text{ChWM})| - f(x)|$ cometido en cada punto para $x \in [0,\ 1]$.

(a) $\begin{cases} k = 0 & M = 2\\ \alpha = 3 & \tau = 0.3 \end{cases}$.

(b) $\begin{cases} k=1 & M=2 \\ \alpha=3 & \tau=0.3 \end{cases}$

SOLUCIÓN

(a)

Problema con una ecuación FDDE (*Fractional Delay Differential Equation*)
Método *Wavelet* de Chelyshkov (ChWM)

$$(P_1) \equiv \begin{cases} D^{(\alpha)}\, y(x) = f(x,\ y(x),\ y(x-\tau)) & x \in [0,\ 1] \\ y(x) = u(x) & x < 0 \\ y^{(k)}(0) = \lambda_k & k = 0,\ 1,\ \cdots,\ n-1,\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\begin{cases} n-1 < \alpha \le n \\ 0 < \tau < 1 \end{cases}$$

$$(P_1) \equiv \begin{pmatrix} D^3\, y(x) = -y(x-0.3) + e^{0.3-x} - y(x) & x \in (0,1) \\ u(x) = & e^{-x} \\ (\ y(0)=1 \quad y'(0)=-1 \quad y''(0)=1\ ) & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u(x) = & e^{-x} \\ f(x,\ y(x),\ y(x-\tau)) = & -y(x-0.3) + e^{0.3-x} - y(x) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} [A,\ B] = & [0,\ 1] & \text{(intervalo } x\text{)} \\ \{k,\ 2^k\} = & \{0,\ 1\} & \text{(máxima resolución)} \\ M = & 2 & \text{(máx. grado polinomio)} \\ m^*=2^k(M+1) = & 3 & \text{Dimensión } \mathcal{B}=\{\psi_k\} \\ \{\alpha,\ \tau\} = & \{3,\ 0.3\} & \\ n=\lceil\alpha\rceil = & 3 & \end{pmatrix}$$

(a) Matriz con los polinomios de Chelyshkov $\Phi(x)$

$$\Phi(x) = C_{M,n}(x) = \begin{pmatrix} C_{2,0}(x) \\ C_{2,1}(x) \\ C_{2,2}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10x^2 - 12x + 3 \\ 4x - 5x^2 \\ x^2 \end{pmatrix}$$

Matriz con las *Wavelets* de Chelyshkov $\Psi(x)$

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_{0\,0}(x) = \psi_1(x) = \begin{cases} 10x^2 - 12x + 3 & 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{0\,1}(x) = \psi_2(x) = \begin{cases} \sqrt{3}\,(4x - 5x^2) & 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{0\,2}(x) = \psi_3(x) = \begin{cases} \sqrt{5}\,x^2 & 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \end{pmatrix}$$

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \begin{cases} 10x^2 - 12x + 3 & 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{3}\,(4x - 5x^2) & 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{5}\,x^2 & 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \end{pmatrix}$$

Matriz operacional integral fraccionaria $P^{(\alpha)}$ de orden $\alpha = 3$

$$P^{(\alpha)} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{3}}{560} & \frac{11\sqrt{5}}{336} \\ \frac{\sqrt{3}}{560} & -\frac{1}{96} & \frac{3\sqrt{15}}{224} \\ \frac{1}{336\sqrt{5}} & -\frac{\sqrt{\frac{3}{5}}}{224} & \frac{1}{96} \end{pmatrix}$$

Matriz con los coeficientes *Wavelets* del polinomio:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda_k}{i!} x^i = \frac{x^2}{2} - x + 1$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda_k}{i!} x^i = \sum_{i=1}^{m^*} E_{1,i}\,\psi_i(x) \qquad E_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{11}{12\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

(1) La derivada $D^{(\alpha)}\,y(x)$ se expresa en términos de las *Wavelets* de Chelyshkov

$$D^{(\alpha)}y(x) \simeq \sum_{n=0}^{2^k-1} \sum_{m=0}^{M} c_{n\,m}\,\psi_{n\,m}(x) = \sum_{i=1}^{m^*} C_i\,\psi_i(x) = C^T.\Psi(x) \qquad x \in [0, 1]$$

$$D^{(\alpha)}y(x) \simeq (\,C_1 \quad C_2 \quad C_3\,).\begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \psi_3(x) \end{pmatrix}$$

(2) Se aplica el operador integral J^α a la relación $D^{(\alpha)}y(x) \simeq C^T.\Psi(x)$

$$y(x) \simeq C^T.P^{(\alpha)}.\Psi(x) + {E_1}^T.\Psi(x)$$

(3) Se deduce el término de retraso $y(x - \tau)$ del problema (P_1)

$$(P_1) \equiv y(x-\tau) \simeq \begin{cases} u(x-\tau) & 0 \le x \le \tau \\ C^T.P^{(\alpha)}.\Psi(x-\tau) + {E_1}^T.\Psi(x-\tau) & \tau < x \le 1 \end{cases}$$

(4) Se sustituyen las expresiones de $y(x)$ e $y(x-\tau)$ en la ecuación FDDE de (P_1)

$(P_1) \equiv D^{(\alpha)}y(x) = f(x, y(x), y(x-\tau)) \quad x \in [0,1]$

$$D^{(\alpha)}y(x) = \begin{cases} f(x,\ y(x),\ u(x-\tau)) & x \in [0,\ \tau] \\ f(x,\ y(x),\ y(x-\tau)) & x \in (\tau,\ 1] \end{cases}$$

$$\bullet \begin{cases} D^{(\alpha)}\ y(x) & = C^T.\Psi(x) \\ y(x) & = C^T.P^{(\alpha)}.\Psi(x) + {E_1}^T.\Psi\ (x) \\ y\ (x-\tau) & = C^T.P^{(\alpha)}.\Psi(x-\tau) + {E_1}^T.\Psi(x-\tau) \end{cases}$$

$$D^{(\alpha)}y(x) = C^T.\Psi(x = \left(\begin{cases} (10\,x^2 - 12\,x + 3)\,C_1 + x\left(\sqrt{3}\ (4 - 5\,x)\,C_2 + \sqrt{5}\ x\,C_3\right) & 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right)$$

$$y(x) = \begin{cases} \frac{840\,((x-2)\,x+2)+4\,x\,(80\,x-9)\,C_1 + \sqrt{3}\ (2\,x\,(115\,x-53)+9)\,C_2 + \sqrt{5}\ (10\,x\,(5\,x-3)+3)\,C_3}{1680} & 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

$$y(x-\tau) = \begin{cases} 1.34986\ e^{-x} \\ 0.0665496\,C_3\,x^2 + 0.5\,x^2 - 0.0798596\,C_3\,x - 1.3\,x + (0.190476\,x^2 - 0.135714\,x + 0.0235714)\,C_1 + \\ \quad (0.237126\,x^2 - 0.25156\,x + 0.0634054)\,C_2 + 0.0219614\,C_3 + 1.345 \end{cases}$$

$$y(x-\tau) = {C_*^{(\tau)}}^T.\Psi(x) = \begin{cases} 0. \\ 0.0192209\,C_3\,x^2 + 0.50731\,x^2 - 0.0158202\,C_3\,x - \\ \quad 1.30921\,x + (0.145238\,x^2 - 0.077105\,x + 0.0066675)\,C_1 + \\ \quad (0.102781\,x^2 - 0.0710343\,x + 0.00808868)\,C_2 + 0.00212426\,C_3 + 1.34753 \end{cases}$$

$$u(x-\tau) = e^{0.3-x}$$

$$f(x, y(x), y(x-\tau)) = -y(x-0.3) + e^{0.3-x} - y(x)$$

Ecuaciones del problema (P_1):

$$\bullet\ C^T.\Psi(x) = \begin{cases} (10\,x^2 - 12\,x + 3)\,C_1 + x\left(\sqrt{3}\ (4 - 5\,x)\,C_2 + \sqrt{5}\ x\,C_3\right) & 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

$$\bullet\ f(x, y(x), y(x-\tau)) =$$

$$\begin{cases} 1.34986\ e^{-x} & x = 1. \\ \frac{1}{1680}\left(-50\ \sqrt{5}\ C_3\,x^2 - 840\,x^2 - 4\,(80\,x-9)\,C_1\,x + 30\ \sqrt{5}\ C_3\,x + 1680\,x + \sqrt{3}\ (-230\,x^2 + 106\,x - 9)\,C_2 - 3\ \sqrt{5}\ C_3 - 1680\right) & 0 \le x \le 0.3 \\ -0.0857705\,C_3\,x^2 - 1.00731\,x^2 + 0.05575\,C_3\,x + 2.30921\,x + 1.34986\,e^{-x} + & 0.3 < x < 1 \\ \quad (-0.335715\,x^2 + 0.0985336\,x - 0.0066675)\,C_1 + (-0.339907\,x^2 + 0.180318\,x - 0.0173675)\,C_2 - 0.00611724\,C_3 - 2.34753 & \end{cases}$$

(5) Creación de un sistema de ecuaciones algebraicas con los puntos de colocación de Legendre desplazados.

Polinomio de Legendre desplazado:

$L_{m^*}(x) = 20\,x^3 - 30\,x^2 + 12\,x - 1 \qquad \in [0, 1]$

$x_k (k = 1, 2, \cdots, m^*) \in [0, 1]$, ceros de $L_{m^*}(x)$

$$x_k = \begin{pmatrix} x_1 & 0.112702 \\ x_2 & 0.5 \\ x_3 & 0.887298 \end{pmatrix}$$

(6) Resolución del sistema de ecuaciones en C_k $(k = 1,\ldots, m^*)$

$$\begin{pmatrix} 1.7746\,C_1 + 0.67082\,C_2 + 0.0284018\,C_3 \\ -0.5\,C_1 + 1.29904\,C_2 + 0.559017\,C_3 \\ 0.225403\,C_1 - 0.67082\,C_2 + 1.76045\,C_3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -4.32915\times10^{-6}\,C_1 + 0.0000257679\,C_2 - 0.000338117\,C_3 - 0.893649 \\ -0.0413293\,C_1 - 0.0121851\,C_2 + 0.000315113\,C_3 - 0.626019 \\ -0.183546\,C_1 - 0.12498\,C_2 - 0.0241774\,C_3 - 0.535797 \end{pmatrix}$$

• Método *Affine Covariant Newton*:

$$C_k = \begin{pmatrix} C_1 \to -0.331309 \\ C_2 \to -0.440359 \\ C_3 \to -0.358995 \end{pmatrix}$$

• Método de *Newton*:

$$C_k = \begin{pmatrix} C_1 \to -0.331309 \\ C_2 \to -0.440359 \\ C_3 \to -0.358995 \end{pmatrix}$$

(7) La solución aproximada del problema es

$$y(x) \simeq C^T.P^{(\alpha)}.\Psi(x) + {E_1}^T.\Psi(x)$$

$$y(x) = \begin{cases} 0.308582\,x^2 - 0.930442\,x + 0.994481 & 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

(8) Se calcula la función residuo $R(x)$

$$R(x) = C^T.\Psi(x) - f(x, C^T.P^{(\alpha)}.\Psi(x) + {E_1}^T.\Psi(x), C_*^{(\tau)T}.P^{(\alpha)}.\Psi(x))$$

$$R(x) = \begin{cases} (10\,x^2 - 12\,x + 3)\,C_1 + x\left(\sqrt{3}\,(4 - 5\,x)\,C_2 + \sqrt{5}\,x\,C_3\right) & 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

–

$$\begin{cases} 1.34986\,e^{-x} & x = 1. \\ \frac{1}{1680}\left(-50\,\sqrt{5}\,C_3\,x^2 - 840\,x^2 - 4\,(80\,x - 9)\,C_1\,x + 30\,\sqrt{5}\,C_3\,x + 1680\,x + \sqrt{3}\,(-230\,x^2 + 106\,x - 9)\,C_2 - 3\,\sqrt{5}\,C_3 - 1680\right) & 0 \le x \le 0.3 \\ -0.0857705\,C_3\,x^2 - 1.00731\,x^2 + 0.05575\,C_3\,x + 2.30921\,x + 1.34986\,e^{-x} + & 0.3 < x < 1 \\ \quad (-0.335715\,x^2 + 0.0985336\,x - 0.0066675)\,C_1 + (-0.339907\,x^2 + 0.180318\,x - 0.0173675)\,C_2 - 0.00611724\,C_3 - 2.34753 & \end{cases}$$

(9) Se aplica el método Tau (Galerkin) para que el residuo $R(x)$ sea ortogonal a $\psi_{n\,m}(x)$

$$\int_0^1 R(x)\,\psi_{n\,m}(x)\,dx = 0 \qquad \begin{cases} n = 0,\,1,\,\cdots,\,2^k - 1 \\ m = 0,\,1,\,\cdots,\,M \end{cases}$$

obteniéndose un sistema algebraico de ecuaciones.

(10) Sistema algebraico de ecuaciones en C_k $(k = 1,\ldots, m^*)$ y resolución

$$\begin{pmatrix} 1.00177\,C_1 + 0.00472861\,C_2 + 0.00168536\,C_3 + 0.335121 \\ -0.0099024\,C_1 + 0.984283\,C_2 - 0.00449149\,C_3 + 0.428176 \\ 0.100081\,C_1 + 0.0642023\,C_2 + 1.01176\,C_3 + 0.424567 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

• Método *Affine Covariant Newton*:

$$C_k = \begin{pmatrix} C_1 \to -0.331849 \\ C_2 \to -0.43999 \\ C_3 \to -0.358886 \end{pmatrix}$$

• Método de *Newton*:

$$C_k = \begin{pmatrix} C_1 \to -0.331849 \\ C_2 \to -0.43999 \\ C_3 \to -0.358886 \end{pmatrix}$$

(11) La solución aproximada del problema es

$$y(x) \simeq C^T.P^{(\alpha)}.\Psi(x) + {E_1}^T.\Psi(x)$$

$$y(x) = \begin{cases} 0.308574\,x^2 - 0.930475\,x + 0.994484 & 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

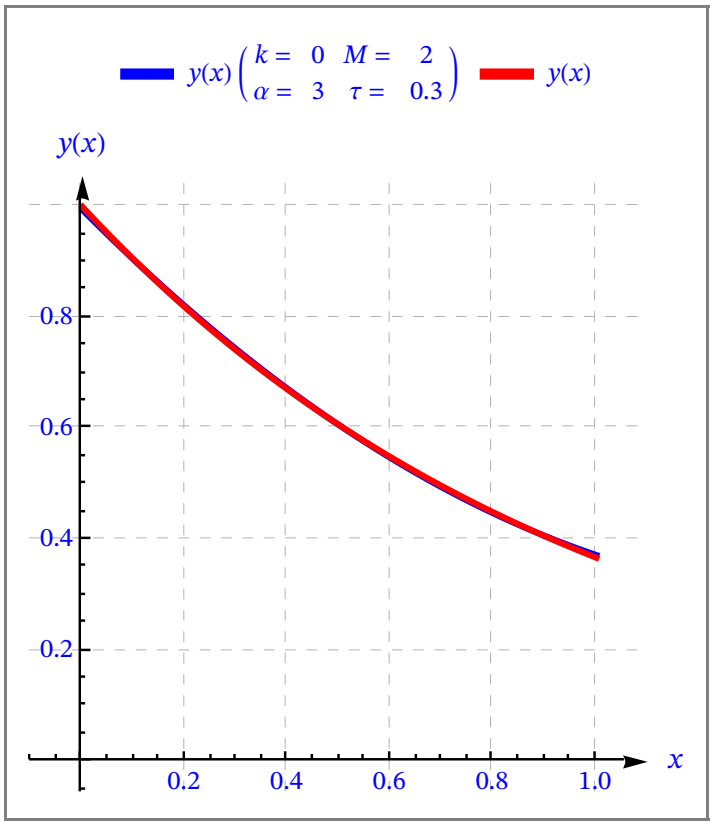


Tabla de valores aproximados y errores.

x_k	$f(x_k)$(ChWM)	$f(x_k)$	$\lvert f(x_k)(\text{ChWM}) - f(x_k)\rvert$
0.	0.994484378089	1.000000000000	5.51562×10^{-3}
0.1	0.904522638696	0.904837418036	3.14779×10^{-4}
0.2	0.820732378317	0.818730753078	2.00163×10^{-3}
0.3	0.743113596953	0.740818220682	2.29538×10^{-3}
0.4	0.671666294603	0.670320046036	1.34625×10^{-3}
0.5	0.606390471268	0.606530659713	1.40188×10^{-4}
0.6	0.547286126947	0.548811636094	1.52551×10^{-3}
0.7	0.494353261641	0.496585303791	2.23204×10^{-3}
0.8	0.447591875349	0.449328964117	1.73709×10^{-3}
0.9	0.407001968071	0.406569659741	4.32308×10^{-4}

Error L_∞:

$$\text{error}-L_\infty = \underset{0\le k\le N}{\text{Máx}}\ (|f(x_k) - f(x_k)(\text{ChWM})|) = 5.51562\times10^{-3}$$

Error$-L_2$:

$$\text{error}-L_2 = \left(\sum_{k=0}^{N} |f(x_k) - f(x_k)(\text{ChWM}))|^2\right)^{\frac{1}{2}} = 7.22094\times10^{-3}$$

Error$-$RMS:

$$\text{error}-\text{RMS} = \frac{1}{N}\left(\sum_{k=0}^{N} |f(x_k) - f(x_k)(\text{ChWM})|^2\right)^{\frac{1}{2}} = 7.22094\times10^{-4}$$

(b)

Problema con una ecuación FDDE (*Fractional Delay Differential Equation*)
Método *Wavelet* de Chelyshkov (ChWM)

$$(P_1) \equiv \begin{cases} D^{(\alpha)}\, y(x) = f(x,\ y(x),\ y(x-\tau)) & x \in [0,\ 1] \\ y(x) = u(x) & x < 0 \\ y^{(k)}(0) = \lambda_k & k = 0,\ 1,\ \cdots,\ n-1,\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\begin{cases} n-1 < \alpha \le n \\ 0 < \tau < 1 \end{cases}$$

$$(P_1) \equiv \begin{pmatrix} D^3\, y(x) = -y(x-0.3) + e^{0.3-x} - y(x) & x \in (0,1) \\ u(x) = & e^{-x} \\ (\ y(0) = 1 \quad y'(0) = -1 \quad y''(0) = 1\ ) & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u(x) = & e^{-x} \\ f(x,\ y(x),\ y(x-\tau)) = & -y(x-0.3) + e^{0.3-x} - y(x) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} [A,\ B] = & [0,\ 1] & (\text{intervalo } x) \\ \{k,\ 2^k\} = & \{1,\ 2\} & (\text{máxima resolución}) \\ M = & 2 & (\text{máx. grado polinomio}) \\ m^* = 2^k(M+1) = & 6 & \text{Dimensión } \mathcal{B} = \{\psi_k\} \\ \{\alpha,\ \tau\} = & \{3,\ 0.3\} & \\ n = \lceil \alpha \rceil = & 3 & \end{pmatrix}$$

(a) Matriz con los polinomios de Chelyshkov $\Phi(x)$

$$\Phi(x) = C_{M,\,n}(x) = \begin{pmatrix} C_{2,0}(x) \\ C_{2,1}(x) \\ C_{2,2}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10\,x^2 - 12\,x + 3 \\ 4\,x - 5\,x^2 \\ x^2 \end{pmatrix}$$

Matriz con las *Wavelets* de Chelyshkov $\Psi(x)$

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_{0\,0}(x) = \psi_1(x) = & \begin{cases} \sqrt{2}\,(40\,x^2 - 24\,x + 3) & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{0\,1}(x) = \psi_2(x) = & \begin{cases} \sqrt{6}\,(8\,x - 20\,x^2) & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{0\,2}(x) = \psi_3(x) = & \begin{cases} 4\,\sqrt{10}\,x^2 & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{1\,0}(x) = \psi_4(x) = & \begin{cases} \sqrt{2}\,(10\,(2\,x-1)^2 - 12\,(2\,x-1) + 3) & \frac{1}{2} \le x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{1\,1}(x) = \psi_5(x) = & \begin{cases} \sqrt{6}\,(4\,(2\,x-1) - 5\,(2\,x-1)^2) & \frac{1}{2} \le x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{1\,2}(x) = \psi_6(x) = & \begin{cases} \sqrt{10}\,(2\,x-1)^2 & \frac{1}{2} \le x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \end{pmatrix}$$

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \begin{cases} \sqrt{2}\,(40x^2 - 24x + 3) & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{6}\,(8x - 20x^2) & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \begin{cases} 4\sqrt{10}\,x^2 & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{2}\,(10(2x-1)^2 - 12(2x-1) + 3) & \frac{1}{2} \le x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{6}\,(4(2x-1) - 5(2x-1)^2) & \frac{1}{2} \le x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{10}\,(2x-1)^2 & \frac{1}{2} \le x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \end{pmatrix}$$

Matriz operacional integral fraccionaria $P^{(\alpha)}$ de orden $\alpha = 3$

$$P^{(\alpha)} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{3}}{4480} & \frac{11\sqrt{5}}{2688} & \frac{1}{144} & \frac{1}{32\sqrt{3}} & \frac{31}{288\sqrt{5}} \\ \frac{\sqrt{3}}{4480} & -\frac{1}{768} & \frac{3\sqrt{15}}{1792} & \frac{1}{96\sqrt{3}} & \frac{7}{384} & \frac{89}{384\sqrt{15}} \\ \frac{1}{2688\sqrt{5}} & -\frac{\sqrt[3]{5}}{1792} & \frac{1}{768} & \frac{1}{288\sqrt{5}} & \frac{\sqrt[3]{5}}{128} & \frac{43}{1152} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{4480} & \frac{11\sqrt{5}}{2688} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{4480} & -\frac{1}{768} & \frac{3\sqrt{15}}{1792} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2688\sqrt{5}} & -\frac{\sqrt[3]{5}}{1792} & \frac{1}{768} \end{pmatrix}$$

Matriz con los coeficientes *Wavelets* del polinomio:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda_k}{i!} x^i = \frac{x^2}{2} - x + 1$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda_k}{i!} x^i = \sum_{i=1}^{m^*} E_{1,i}\,\psi_i(x) \qquad E_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{7}{8\sqrt{6}} \\ \frac{7}{6\sqrt{10}} \\ \frac{5}{24\sqrt{2}} \\ \frac{3\sqrt[3]{\frac{3}{2}}}{16} \\ \frac{41}{48\sqrt{10}} \end{pmatrix}$$

(1) La derivada $D^{(\alpha)}\,y(x)$ se expresa en términos de las *Wavelets* de Chelyshkov

$$D^{(\alpha)}y(x) \simeq \sum_{n=0}^{2^k-1} \sum_{m=0}^{M} c_{n\,m}\,\psi_{n\,m}(x) = \sum_{i=1}^{m^*} C_i\,\psi_i(x) = C^T.\Psi(x) \qquad x \in [0, 1]$$

$$D^{(\alpha)}y(x) \simeq (\,C_1 \quad C_2 \quad C_3 \quad C_4 \quad C_5 \quad C_6\,).\begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \psi_3(x) \\ \psi_4(x) \\ \psi_5(x) \\ \psi_6(x) \end{pmatrix}$$

(2) Se aplica el operador integral J^{α} a la relación $D^{(\alpha)}y(x) \simeq C^T.\Psi(x)$

$$y(x) \simeq C^T.P^{(\alpha)}.\Psi(x) + {E_1}^T.\Psi(x)$$

(3) Se deduce el término de retraso $y(x-\tau)$ del problema (P_1)

$$(P_1) \equiv y(x-\tau) \simeq \begin{cases} u(x-\tau) & 0 \le x \le \tau \\ C^T.P^{(\alpha)}.\Psi(x-\tau) + {E_1}^T.\Psi(x-\tau) & \tau < x \le 1 \end{cases}$$

(4) Se sustituyen las expresiones de $y(x)$ e $y(x-\tau)$ en la ecuación FDDE de (P_1)

$$(P_1) \equiv D^{(\alpha)}y(x) = f(x, y(x), y(x-\tau)) \quad x \in [0,1]$$

$$D^{(\alpha)}y(x) = \begin{cases} f(x, y(x), u(x-\tau)) & x \in [0, \tau] \\ f(x, y(x), y(x-\tau)) & x \in (\tau, 1] \end{cases}$$

$$\bullet \begin{cases} D^{(\alpha)}y(x) & = C^T.\Psi(x) \\ y(x) & = C^T.P^{(\alpha)}.\Psi(x) + {E_1}^T.\Psi(x) \\ y(x-\tau) & = C^T.P^{(\alpha)}.\Psi(x-\tau) + {E_1}^T.\Psi(x-\tau) \end{cases}$$

$$D^{(\alpha)}y(x) = C^T.\Psi(x) = \begin{cases} \sqrt{2}\left((40x^2 - 24x + 3)C_1 + 4x\left(\sqrt{3}(2-5x)C_2 + \sqrt{5}\,x\,C_3\right)\right) & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ \sqrt{2}\left((40x^2 - 64x + 25)C_4 - (2x-1)\left(\sqrt{3}(10x-9)C_5 + \sqrt{5}(1-2x)C_6\right)\right) & \frac{1}{2} \le x < 1 \end{cases}$$

$$y(x) = \begin{cases} \frac{6720((x-2)x+2) + 8\sqrt{2}\,x(160x-9)C_1 + \sqrt{6}(4x(230x-53)+9)C_2 + \sqrt{10}(20x(10x-3)+3)C_3}{13440} \\ \frac{1}{13440}\left(1120\sqrt{2}\,C_1x^2 + 280\sqrt{6}(4x-1)C_2x + \right. \\ \quad 4\sqrt{2}\left((320x-338)C_4 + \sqrt{3}(230x-283)C_5 + 5\sqrt{5}(10x-13)C_6\right)x + \\ \quad \left. 6720((x-2)x+2) + 56\sqrt{10}(5x(4x-3)+3)C_3 + 356\sqrt{2}\,C_4 + 345\sqrt{6}\,C_5 + 83\sqrt{10}\,C_6\right) \end{cases}$$

$$y(x-\tau) = \begin{cases} 1.34986\,e^{-x} \\ 0.0470577C_3x^2 + 0.5x^2 - 0.0423519C_3x - 1.3x + (0.134687x^2 - 0.0883883x + 0.0143947)C_1 + \\ \quad (0.167673x^2 - 0.139242x + 0.0283222)C_2 + 0.00917625C_3 + 1.345 \\ 0.263523C_3x^2 + 0.134687C_4x^2 + 0.167673C_5x^2 + 0.0470577C_6x^2 + \\ \quad 0.5x^2 - 0.355756C_3x - 0.223075C_4x - 0.306915C_5x - 0.0894096C_6x - 1.3x + \\ \quad (0.117851x^2 - 0.0707107x + 0.0106066)C_1 + (0.204124x^2 - 0.173506x + 0.0336805)C_2 + \\ \quad 0.122538C_3 + 0.0922606C_4 + 0.139861C_5 + 0.0421166C_6 + 1.345 \end{cases}$$

$$y(x-\tau) = C_*^{(\tau)T}.\Psi(x) = \begin{cases} 0. \\ -0.00539093C_3x^2 + 0.536931x^2 + 0.00216842C_3x - \\ \quad 1.32503x + (0.0296635x^2 - 0.0106026x + 0.00059397)C_1 + \\ \quad (-0.00409181x^2 + 0.0017543x - 0.0000927307)C_2 - 0.000124232C_3 + 1.3489 \\ 0.17947C_3x^2 + 0.0296635C_4x^2 - 0.00409181C_5x^2 - 0.00539093C_6x^2 + 0.5x^2 - \\ \quad 0.214904C_3x - 0.040266C_4x + 0.00584612C_5x + 0.00755935C_6x - 1.3x + \\ \quad (0.110917x^2 - 0.0580676x + 0.00489116)C_1 + (0.228164x^2 - 0.215969x + 0.0522485)C_2 + \\ \quad 0.0642925C_3 + 0.0133111C_4 - 0.00199283C_5 - 0.00255617C_6 + 1.345 \end{cases}$$

$$u(x-\tau) = e^{0.3-x}$$

$$f(x, y(x), y(x-\tau)) = -y(x-0.3) + e^{0.3-x} - y(x)$$

Ecuaciones del problema (P_1):

- $C^T.\Psi(x) = \begin{cases} \sqrt{2}\left((40x^2 - 24x + 3)C_1 + 4x\left(\sqrt{3}(2 - 5x)C_2 + \sqrt{5}\,x\,C_3\right)\right) & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ \sqrt{2}\left((40x^2 - 64x + 25)C_4 - (2x - 1)\left(\sqrt{3}(10x - 9)C_5 + \sqrt{5}(1 - 2x)C_6\right)\right) & \frac{1}{2} \le x < 1 \end{cases}$
- $f(x, y(x), y(x - \tau)) =$

$$\begin{cases} 1.34986\,e^{-x} & x = 1 \\ \frac{1}{13440}\left(-200\sqrt{10}\,C_3x^2 - 6720x^2 - 8\sqrt{2}(160x - 9)C_1x + \right. & 0 \le x \le 0.3 \\ \quad \left. 60\sqrt{10}\,C_3x + 13440x + \sqrt{6}(-920x^2 + 212x - 9)C_2 - 3\sqrt{10}\,C_3 - 13440\right) & \\ -0.0416668\,C_3x^2 - 1.03693x^2 + 0.0119489\,C_3x + & 0.3 < x < 0. \\ \quad 2.32503x + 1.34986\,e^{-x} + (-0.16435x^2 + 0.0181787x - 0.00059397)C_1 + & \\ \quad (-0.163582x^2 + 0.0368835x - 0.00154755)C_2 - 0.000581633\,C_3 - 2.3489 & \\ -0.442993\,C_3x^2 - 0.16435\,C_4x^2 - 0.163582\,C_5x^2 - 0.0416668\,C_6x^2 - 1.x^2 + & \frac{1}{2} \le x < 1 \\ \quad 0.412546\,C_3x + 0.182529\,C_4x + 0.200465\,C_5x + 0.0536157\,C_6x + 2.3x + 1.34986\,e^{-x} + & \\ \quad (-0.228769x^2 + 0.0580676x - 0.00489116)C_1 + (-0.432288x^2 + 0.267x - 0.0522485)C_2 - & \\ \quad 0.103821\,C_3 - 0.0507709\,C_4 - 0.0608847\,C_5 - 0.0169728\,C_6 - 2.345 & \end{cases}$$

(5) Creación de un sistema de ecuaciones algebraicas con los puntos de colocación de Legendre desplazados.

Polinomio de Legendre desplazado:

$L_{m^*}(x) = 924x^6 - 2772x^5 + 3150x^4 - 1680x^3 + 420x^2 - 42x + 1 \qquad \in [0, 1]$

$x_k (k = 1, 2, \cdots, m^*) \in [0, 1]$, ceros de $L_{m^*}(x)$

$$x_k = \begin{pmatrix} x_1 & 0.0337652 \\ x_2 & 0.169395 \\ x_3 & 0.38069 \\ x_4 & 0.61931 \\ x_5 & 0.830605 \\ x_6 & 0.966235 \end{pmatrix}$$

(6) Resolución del sistema de ecuaciones en C_k ($k = 1,\ldots, m^*$)

$$\begin{pmatrix} 3.1611\,C_1 + 0.605808\,C_2 + 0.0144211\,C_3 \\ 0.116395\,C_1 + 1.91371\,C_2 + 0.362963\,C_3 \\ -0.480214\,C_1 + 0.360123\,C_2 + 1.83317\,C_3 \\ 0.99838\,C_4 + 1.64062\,C_5 + 0.180057\,C_6 \\ -0.795543\,C_4 + 1.12394\,C_5 + 1.38254\,C_6 \\ 0.714687\,C_4 - 1.51285\,C_5 + 2.7496\,C_6 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0.000102255\,C_1 - 0.000526832\,C_2 - 0.000282841\,C_3 - 0.966805 \\ -0.00258145\,C_1 + 0.0000934263\,C_2 + 0.000335231\,C_3 - 0.844952 \\ -0.017492\,C_1 - 0.0112135\,C_2 - 0.00207137\,C_3 - 0.691579 \\ -0.0566722\,C_1 - 0.0526944\,C_2 - 0.0182346\,C_3 - 0.000764568\,C_4 + 0.000524453\,C_5 + 0.000250867\,C_6 - 0.577482 \\ -0.114488\,C_1 - 0.128714\,C_2 - 0.0667808\,C_3 - 0.0125474\,C_4 - 0.00723308\,C_5 - 0.00118543\,C_6 - 0.536264 \\ -0.162365\,C_1 - 0.197852\,C_2 - 0.118787\,C_3 - 0.0278441\,C_4 - 0.0199097\,C_5 - 0.00406795\,C_6 - 0.542631 \end{pmatrix}$$

• Método *Affine Covariant Newton*:

$$C_k = \begin{pmatrix} C_1 \to -0.235497 \\ C_2 \to -0.357971 \\ C_3 \to -0.363777 \\ C_4 \to -0.143147 \\ C_5 \to -0.217006 \\ C_6 \to -0.220812 \end{pmatrix}$$

• Método de *Newton*:

$$C_k = \begin{pmatrix} C_1 \to -0.235497 \\ C_2 \to -0.357971 \\ C_3 \to -0.363777 \\ C_4 \to -0.143147 \\ C_5 \to -0.217006 \\ C_6 \to -0.220812 \end{pmatrix}$$

(7) La solución aproximada del problema es

$y(x) \simeq C^T.P^{(\alpha)}.\Psi(x) + {E_1}^T.\Psi(x)$

$$y(x) = \begin{cases} 0.237255\,x^2 - 0.831191\,x + 0.962301 & \frac{1}{2} \le x < 1 \\ 0.391141\,x^2 - 0.979249\,x + 0.999156 & 0 \le x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

(8) Se calcula la función residuo $R(x)$

$$R(x) = C^T.\Psi(x) - f(x, C^T.P^{(\alpha)}.\Psi(x) + {E_1}^T.\Psi(x), C_*^{(\tau)T}.P^{(\alpha)}.\Psi(x))$$

$$R(x) = \begin{cases} \sqrt{2}\left((40x^2 - 24x + 3)C_1 + 4x\left(\sqrt{3}\,(2 - 5x)C_2 + \sqrt{5}\,x\,C_3\right)\right) & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ \sqrt{2}\left((40x^2 - 64x + 25)C_4 - (2x - 1)\left(\sqrt{3}\,(10x - 9)C_5 + \sqrt{5}\,(1 - 2x)C_6\right)\right) & \frac{1}{2} \le x < 1 \end{cases}$$

$-$

$$\begin{cases} 1.34986\,e^{-x} & x = 1 \\ \frac{1}{13440}\left(-200\sqrt{10}\,C_3x^2 - 6720x^2 - 8\sqrt{2}\,(160x - 9)C_1x + \right. & 0 \le x \le 0.3 \\ \quad \left. 60\sqrt{10}\,C_3x + 13440x + \sqrt{6}\,(-920x^2 + 212x - 9)C_2 - 3\sqrt{10}\,C_3 - 13440\right) & \\ -0.0416668\,C_3x^2 - 1.03693x^2 + 0.0119489\,C_3x + & 0.3 < x < 0. \\ \quad 2.32503x + 1.34986\,e^{-x} + (-0.16435x^2 + 0.0181787x - 0.00059397)C_1 + & \\ \quad (-0.163582x^2 + 0.0368835x - 0.00154755)C_2 - 0.000581633\,C_3 - 2.3489 & \\ -0.442993\,C_3x^2 - 0.16435\,C_4x^2 - 0.163582\,C_5x^2 - 0.0416668\,C_6x^2 - 1.x^2 + & \frac{1}{2} \le x < 1 \\ \quad 0.412546\,C_3x + 0.182529\,C_4x + 0.200465\,C_5x + 0.0536157\,C_6x + 2.3x + 1.34986\,e^{-x} + & \\ \quad (-0.228769x^2 + 0.0580676x - 0.00489116)C_1 + (-0.432288x^2 + 0.267x - 0.0522485)C_2 - & \\ \quad 0.103821\,C_3 - 0.0507709\,C_4 - 0.0608847\,C_5 - 0.0169728\,C_6 - 2.345 & \end{cases}$$

(9) Se aplica el método Tau (Galerkin) para que el residuo $R(x)$ sea ortogonal a $\psi_{n\,m}(x)$

$$\int_0^1 R(x)\,\psi_{n\,m}(x)\,dx = 0 \qquad \begin{cases} n = 0,\,1,\,\cdots,\,2^k - 1 \\ m = 0,\,1,\,\cdots,\,M \end{cases}$$

obteniéndose un sistema algebraico de ecuaciones.

(10) Sistema algebraico de ecuaciones en C_k ($k = 1,\ldots, m^*$) y resolución

$$\begin{pmatrix} 1.00008\,C_1 + 0.000375868\,C_2 + 0.000152249\,C_3 + 0.235784 \\ -0.000599834\,C_1 + 0.99872\,C_2 - 0.000399283\,C_3 + 0.357068 \\ 0.00973482\,C_1 + 0.00644893\,C_2 + 1.00123\,C_3 + 0.369102 \\ 0.00778984\,C_1 + 0.00632164\,C_2 + 0.00195541\,C_3 + 1.00014\,C_4 + 0.000364762\,C_5 + 0.000137092\,C_6 + 0.147776 \\ 0.0222034\,C_1 + 0.0193842\,C_2 + 0.00494059\,C_3 - 0.000685191\,C_4 + 0.99875\,C_5 - 0.000372314\,C_6 + 0.230529 \\ 0.0692421\,C_1 + 0.0809789\,C_2 + 0.0454116\,C_3 + 0.00971321\,C_4 + 0.00645815\,C_5 + 1.00124\,C_6 + 0.2857 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

• Método *Affine Covariant Newton*:

$$C_k = \begin{pmatrix} C_1 \to -0.235575 \\ C_2 \to -0.357813 \\ C_3 \to -0.364053 \\ C_4 \to -0.142838 \\ C_5 \to -0.217015 \\ C_6 \to -0.220818 \end{pmatrix}$$

• Método de *Newton*:

$$C_k = \begin{pmatrix} C_1 \to -0.235575 \\ C_2 \to -0.357813 \\ C_3 \to -0.364053 \\ C_4 \to -0.142838 \\ C_5 \to -0.217015 \\ C_6 \to -0.220818 \end{pmatrix}$$

(11) La solución aproximada del problema es

$$y(x) \simeq C^T.P^{(\alpha)}.\Psi(x) + {E_1}^T.\Psi(x)$$

$$y(x) = \begin{cases} 0.237245\,x^2 - 0.831186\,x + 0.962301 & \frac{1}{2} \le x < 1 \\ 0.391144\,x^2 - 0.979251\,x + 0.999156 & 0 \le x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

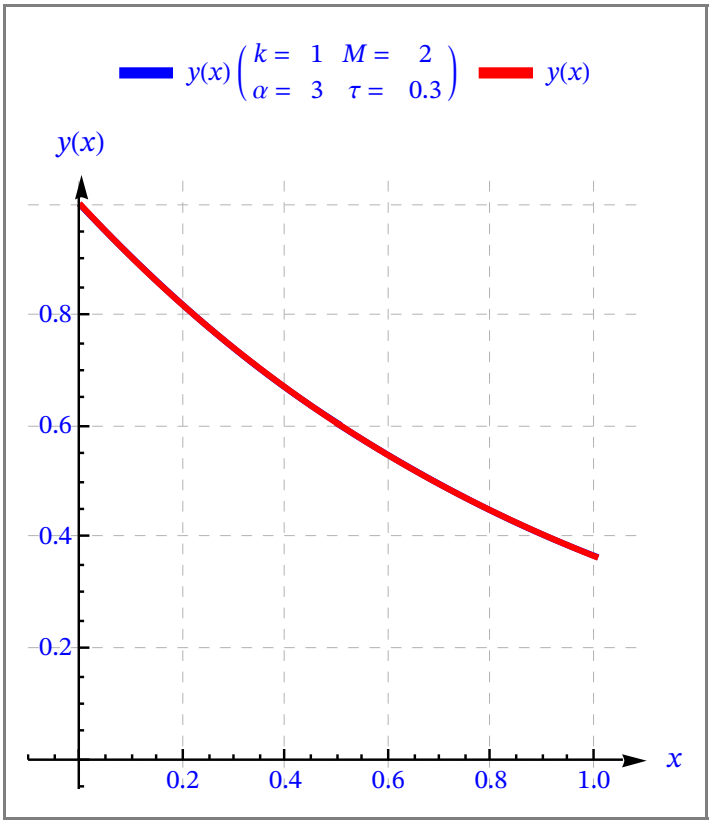


Tabla de valores aproximados y errores.

x_k	$f(x_k)$(ChWM)	$f(x_k)$	$\lvert f(x_k)(\text{ChWM}) - f(x_k)\rvert$
0.	0.999156113206	1.000000000000	8.43887×10^{-4}
0.1	0.905142481713	0.904837418036	3.05064×10^{-4}
0.2	0.818951728726	0.818730753078	2.20976×10^{-4}
0.3	0.740583854245	0.740818220682	2.34366×10^{-4}
0.4	0.670038858268	0.670320046036	2.81188×10^{-4}
0.5	0.606019283016	0.606530659713	5.11377×10^{-4}
0.6	0.548997632608	0.548811636094	1.85997×10^{-4}
0.7	0.496720890089	0.496585303791	1.35586×10^{-4}
0.8	0.449189055457	0.449328964117	1.39909×10^{-4}
0.9	0.406402128712	0.406569659741	1.67531×10^{-4}

Error L_∞:

$$\text{error}-L_\infty = \underset{0\le k\le N}{\text{Máx}}\ (|f(x_k) - f(x_k)(\text{ChWM})|) = 8.43887\times 10^{-4}$$

Error$-L_2$:

$$\text{error}-L_2 = (\sum_{k=0}^{N} |f(x_k) - f(x_k)(\text{ChWM}))|^2)^{\frac{1}{2}} = 1.16196\times 10^{-3}$$

Error$-$RMS:

$$\text{error}-\text{RMS} = \frac{1}{N}(\sum_{k=0}^{N} |f(x_k) - f(x_k)(\text{ChWM})|^2)^{\frac{1}{2}} = 1.16196\times 10^{-4}$$

4.5.2.2. Ecuaciones FDDE con Retraso Proporcional $y(\tau\, x)$

■ **Problema 4.5.2. Ecuación Diferencial Fraccionaria con Retraso Proporcional $y(\tau\, x)$ Ecuación Diferencial Fraccionaria no Lineal del Pantógrafo.**
([RAHI17]) ([RAHI17b])

Sea la ecuación diferencial fraccionaria con retraso y con las condiciones iniciales dadas:

$$(P) \equiv \begin{cases} D^{(\alpha)}\, y(x) = 1 - 2\, y^2\left(\frac{1}{2}\, x\right) & x \in (0,\, 1),\ 1 < \alpha \le 2 \\ y(x) = 1 \quad y'(0) = 0 & x < 0 \qquad \tau = \frac{1}{2} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

La solución exacta cuando $\alpha = 2$ es

$y(x) = \cos(x)$.

(i) Calcúlese la solución numérica mediante el método *Wavelets* de Chelyshkov (ChWM) con los parámetros k, M, α dados.

(ii) Represéntese en una misma gráfica en el intervalo $[0, 1]$ la solución del método ChWM y la solución exacta.

(iii) Créese una tabla con los valores de x, $f(x)$ (ChWM), $f(x)$ y el error absoluto $|f(x)\,(\text{ChWM})| - f(x)|$ cometido en cada punto para $x \in [0, 1]$.

(a) $\begin{cases} k = 1 & M = 2 \\ \alpha = 1 & \tau = \frac{1}{2} \end{cases}$.

SOLUCIÓN

(a)

Problema con una ecuación FDDE (*Fractional Delay Differential Equation*)
Método *Wavelet* de Chelyshkov (ChWM)

$$(P_2) \equiv \begin{cases} D^{(\alpha)}\, y(x) = f(x,\ y(x),\ y(\tau x)) & x \in [0,\ 1] \\ y^{(i)}(0) = \mu_i & i = 0,\ 1,\ \cdots,\ n-1,\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\bullet \begin{cases} n-1 < \alpha \le n \\ 0 < \tau < 1 \end{cases}$$

$$(P_2) \equiv \begin{pmatrix} D^2\, y(x) = 1 - 2\, y\left(\frac{x}{2}\right)^2 & x \in (0,1) \\ (\ y(0) = 1 & y'(0) = 0\ ) \end{pmatrix}$$

$$\left(\ f(x,\ y(x),\ y(\tau x)) = \ \ 1 - 2\, y\left(\frac{x}{2}\right)^2\ \right)$$

$$\begin{pmatrix} [A,\ B] = & [0,\ 1] & (\text{intervalo } x) \\ \{k,\ 2^k\} = & \{1,\ 2\} & (\text{máxima resolución}) \\ M = & 2 & (\text{máx. grado polinomio}) \\ m^* = 2^k(M+1) = & 6 & \text{Dimensión } \mathcal{B} = \{\psi_k\} \\ \{\alpha,\ \tau\} = & \left\{2,\ \frac{1}{2}\right\} & \\ n = \lceil \alpha \rceil = & 2 & \end{pmatrix}$$

(a) Matriz con los polinomios de Chelyshkov $\Phi(x)$

$$\Phi(x) = C_{M,\,n}(x) = \begin{pmatrix} C_{2,0}(x) \\ C_{2,1}(x) \\ C_{2,2}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10\,x^2 - 12\,x + 3 \\ 4\,x - 5\,x^2 \\ x^2 \end{pmatrix}$$

Matriz con las *Wavelets* de Chelyshkov $\Psi(x)$

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_{0\,0}(x) = \psi_1(x) = & \begin{cases} \sqrt{2}\,(40\,x^2 - 24\,x + 3) & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{0\,1}(x) = \psi_2(x) = & \begin{cases} \sqrt{6}\,(8\,x - 20\,x^2) & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{0\,2}(x) = \psi_3(x) = & \begin{cases} 4\,\sqrt{10}\,x^2 & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{1\,0}(x) = \psi_4(x) = & \begin{cases} \sqrt{2}\,(10\,(2\,x-1)^2 - 12\,(2\,x-1) + 3) & \frac{1}{2} \le x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{1\,1}(x) = \psi_5(x) = & \begin{cases} \sqrt{6}\,(4\,(2\,x-1) - 5\,(2\,x-1)^2) & \frac{1}{2} \le x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{1\,2}(x) = \psi_6(x) = & \begin{cases} \sqrt{10}\,(2\,x-1)^2 & \frac{1}{2} \le x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \end{pmatrix}$$

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \begin{cases} \sqrt{2}\,(40\,x^2 - 24\,x + 3) & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{6}\,(8\,x - 20\,x^2) & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \begin{cases} 4\,\sqrt{10}\,x^2 & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{2}\,(10\,(2\,x-1)^2 - 12\,(2\,x-1) + 3) & \frac{1}{2} \le x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{6}\,(4\,(2\,x-1) - 5\,(2\,x-1)^2) & \frac{1}{2} \le x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{10}\,(2\,x-1)^2 & \frac{1}{2} \le x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \end{pmatrix}$$

Matriz con las *Wavelets* de Chelyshkov con retraso $\Psi(\tau\, x)$

$$\Psi(\tau\, x) = \begin{pmatrix} \begin{cases} \sqrt{2}\,(10\,x^2 - 12\,x + 3) & 0 \le \frac{x}{2} < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{6}\,(4\,x - 5\,x^2) & 0 \le \frac{x}{2} < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{10}\,x^2 & 0 \le \frac{x}{2} < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{2}\,(10\,(x-1)^2 - 12\,(x-1) + 3) & \frac{1}{2} \le \frac{x}{2} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{6}\,(4\,(x-1) - 5\,(x-1)^2) & \frac{1}{2} \le \frac{x}{2} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{10}\,(x-1)^2 & \frac{1}{2} \le \frac{x}{2} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \end{pmatrix}$$

Matriz operacional integral fraccionaria $P^{(\alpha)}$ de orden $\alpha = 2$ ($k = 1$, $M = 2$)

$$P^{(\alpha)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{420} & \frac{17}{840\,\sqrt{3}} & \frac{3}{28\,\sqrt{5}} & \frac{1}{36} & \frac{5}{48\,\sqrt{3}} & \frac{7\,\sqrt{5}}{144} \\ -\frac{1}{1680\,\sqrt{3}} & -\frac{1}{560} & \frac{13\,\sqrt{\frac{5}{3}}}{336} & \frac{1}{16\,\sqrt{3}} & \frac{1}{12} & \frac{\sqrt{\frac{5}{3}}}{8} \\ \frac{1}{336\,\sqrt{5}} & -\frac{\sqrt{\frac{5}{3}}}{336} & \frac{5}{336} & \frac{\sqrt{5}}{144} & \frac{\sqrt{\frac{5}{3}}}{24} & \frac{5}{36} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{420} & \frac{17}{840\,\sqrt{3}} & \frac{3}{28\,\sqrt{5}} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{1680\,\sqrt{3}} & -\frac{1}{560} & \frac{13\,\sqrt{\frac{5}{3}}}{336} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{336\,\sqrt{5}} & -\frac{\sqrt{\frac{5}{3}}}{336} & \frac{5}{336} \end{pmatrix}$$

Matriz con los coeficientes *Wavelets* en la base $\Psi(x)$ del polinomio:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\mu_i}{i!}\, x^{\mathrm{i}} = 1$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\mu_i}{i!}\, x^{\mathrm{i}} = \sum_{i=1}^{m^*} E_{2,i}\, \psi_i(x) \qquad E_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3\,\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{\sqrt{\frac{5}{2}}}{3} \\ \frac{1}{3\,\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{\sqrt{\frac{5}{2}}}{3} \end{pmatrix}$$

(1) La derivada $D^{(\alpha)}\,y(x)$ se expresa en términos de las *Wavelets* de Chelyshkov

$$D^{(\alpha)}y(x) \simeq \sum_{n=0}^{2^k-1}\sum_{m=0}^{M} c_{n\,m}\,\psi_{n\,m}(x) = \sum_{i=1}^{m^*} C_i\,\psi_i(x) = C^T.\Psi(x) \qquad x \in [0,\,1]$$

$$D^{(\alpha)}y(x) \simeq (\,C_1 \quad C_2 \quad C_3 \quad C_4 \quad C_5 \quad C_6\,).\begin{pmatrix}\psi_1(x)\\ \psi_2(x)\\ \psi_3(x)\\ \psi_4(x)\\ \psi_5(x)\\ \psi_6(x)\end{pmatrix}$$

(2) Se aplica el operador integral J^{α} a la relación $D^{(\alpha)}y(x) \simeq C^T.\Psi(x)$

$y(x) \simeq C^T.P^{(\alpha)}.\Psi(x) + {E_2}^T.\Psi(x)$

(3) Se deduce el término de retraso proporcional $y(\tau\,x)$ del problema (P_2)

$(P_2) \equiv y(\tau\,x) \simeq \left\{\; C^T.P^{(\alpha)}.\Psi\,(\tau\,x) + {E_2}^T.\Psi\,(x)\right.$

(4) Se sustituyen las expresiones de $y(x)$ e $y(\tau\,x)$ en la ecuación FDDE de (P_2)

$(P_2) \equiv D^{(\alpha)}y(x) = f(x,\,y(x),\,y(\tau\,x)) \quad x \in [0,1]$

$D^{(\alpha)}y(x) = \left\{\; f\,(x,\,y\,(x),\,y\,(\tau\,x)) \quad x \in [0,\,1]\right.$

- $\left\{\begin{array}{ll} D^{(\alpha)}\,y(x) & = C^T.\Psi(x)\\ y(x) & = C^T.P^{(\alpha)}.\Psi(x) + {E_2}^T.\Psi\,(x)\\ y\,(\tau\,x) & = C^T.P^{(\alpha)}.\Psi\,(\tau\,x) + {E_2}^T.\Psi\,(x)\end{array}\right.$

$$D^{(\alpha)}y(x) = C^T.\Psi(x) = \left\{\begin{array}{ll} \sqrt{2}\,\left((40\,x^2 - 24\,x + 3)\,C_1 + 4\,x\left(\sqrt{3}\,(2-5\,x)\,C_2 + \sqrt{5}\,x\,C_3\right)\right) & 0 \le x < \frac{1}{2}\\ \sqrt{2}\,\left((40\,x^2 - 64\,x + 25)\,C_4 - (2\,x-1)\left(\sqrt{3}\,(10\,x-9)\,C_5 + \sqrt{5}\,(1-2\,x)\,C_6\right)\right) & \frac{1}{2} \le x < 1\end{array}\right.$$

$$y(x) = \left\{\begin{array}{l} \frac{-4\,\sqrt{2}\,(30\,x^2-92\,x+3)\,C_1 + \sqrt{6}\,(16\,x\,(30\,x-1)-1)\,C_2 + \sqrt{10}\,(16\,x\,(15\,x-4)+3)\,C_3 + 1680}{1680}\\ \frac{1}{1680}\left(280\,\sqrt{2}\,x\,C_1 + 35\,\sqrt{6}\,(8\,x-1)\,C_2 + 35\,\sqrt{10}\,(8\,x-3)\,C_3 - 226\,\sqrt{2}\,C_4 + 127\,\sqrt{6}\,C_5 + \right.\\ \qquad \left. 95\,\sqrt{10}\,C_6 - 8\,\sqrt{2}\,x\left((15\,x-61)\,C_4 + 2\,\sqrt{3}\,(31-30\,x)\,C_5 + 2\,\sqrt{5}\,(19-15\,x)\,C_6\right) + 1680\right)\end{array}\right.$$

$$y(\tau\,x) = \left\{\begin{array}{l} \frac{-2\,\sqrt{2}\,(x\,(15\,x-92)+6)\,C_1 + \sqrt{6}\,(8\,x\,(15\,x-1)-1)\,C_2 + \sqrt{10}\,(4\,x\,(15\,x-8)+3)\,C_3 + 1680}{1680}\\ \frac{1}{840\,\sqrt{2}}\left(140\,x\,C_1 + 35\,\sqrt{3}\,(4\,x-1)\,C_2 + 35\,\sqrt{5}\,(4\,x-3)\,C_3 - 226\,C_4 + 127\,\sqrt{3}\,C_5 + \right.\\ \qquad \left. 95\,\sqrt{5}\,C_6 + 2\,x\left((122-15\,x)\,C_4 + 4\,\sqrt{3}\,(15\,x-31)\,C_5 + 2\,\sqrt{5}\,(15\,x-38)\,C_6\right)\right)\end{array}\right.$$

$$f(x,\,y(x),\,y(\tau x)) = 1 - 2\,y\left(\frac{x}{2}\right)^2$$

Ecuaciones del problema (P_2):

- $C^T.\Psi(x) = \left\{\begin{array}{ll} \sqrt{2}\,\left((40\,x^2 - 24\,x + 3)\,C_1 + 4\,x\left(\sqrt{3}\,(2-5\,x)\,C_2 + \sqrt{5}\,x\,C_3\right)\right) & 0 \le x < \frac{1}{2}\\ \sqrt{2}\,\left((40\,x^2 - 64\,x + 25)\,C_4 - (2\,x-1)\left(\sqrt{3}\,(10\,x-9)\,C_5 + \sqrt{5}\,(1-2\,x)\,C_6\right)\right) & \frac{1}{2} \le x < 1\end{array}\right.$
- $f(x,\,y(x),\,y(\tau\,x)) =$

$$\left\{\begin{array}{l} 1 - 2\left\{\begin{array}{l} \frac{-2\,\sqrt{2}\,(x\,(15\,x-92)+6)\,C_1 + \sqrt{6}\,(8\,x\,(15\,x-1)-1)\,C_2 + \sqrt{10}\,(4\,x\,(15\,x-8)+3)\,C_3 + 1680}{1680}\\ \frac{1}{840\,\sqrt{2}}\left(140\,x\,C_1 + 35\,\sqrt{3}\,(4\,x-1)\,C_2 + 35\,\sqrt{5}\,(4\,x-3)\,C_3 - 226\,C_4 + \right.\\ \qquad \left. 127\,\sqrt{3}\,C_5 + 95\,\sqrt{5}\,C_6 + 2\,x\left((122-15\,x)\,C_4 + 4\,\sqrt{3}\,(15\,x-31)\,C_5 + 2\,\sqrt{5}\,(15\,x-38)\,C_6\right)\right)\end{array}\right.\\ 0\end{array}\right.$$

(5) Creación de un sistema de ecuaciones algebraicas con los puntos de colocación de Legendre desplazados.
Polinomio de Legendre desplazado:

$$L_{m^*}(x) = 924\,x^6 - 2772\,x^5 + 3150\,x^4 - 1680\,x^3 + 420\,x^2 - 42\,x + 1 \qquad \in [0, 1]$$

$x_k(k = 1, 2, \cdots, m^*) \in [0, 1]$, ceros de $L_{m^*}(x)$

$$x_k = \begin{pmatrix} x_1 & 0.0337652 \\ x_2 & 0.169395 \\ x_3 & 0.38069 \\ x_4 & 0.61931 \\ x_5 & 0.830605 \\ x_6 & 0.966235 \end{pmatrix}$$

(6) Resolución del sistema de ecuaciones en C_k $(k = 1,\ldots, m^*)$

$$\begin{pmatrix} 3.1611\,C_1 + 0.605808\,C_2 + 0.0144211\,C_3 \\ 0.116395\,C_1 + 1.91371\,C_2 + 0.362963\,C_3 \\ -0.480214\,C_1 + 0.360123\,C_2 + 1.83317\,C_3 \\ 0.99838\,C_4 + 1.64062\,C_5 + 0.180057\,C_6 \\ -0.795543\,C_4 + 1.12394\,C_5 + 1.38254\,C_6 \\ 0.714687\,C_4 - 1.51285\,C_5 + 2.7496\,C_6 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -0.0000480282\,C_1^2 - 0.0000323898\,C_2\,C_1 + 0.000073347\,C_3\,C_1 + 0.0196017\,C_1 - 5.46086\times10^{-6}\,C_2^2 - 0.0000280032\,C_3^2 + 0.0066096\,C_2 + 0.0000247323\,C_2\,C_3 - 0.0149675\,C_3 - 1 \\ -0.000475027\,C_1^2 - 0.00009781\,C_2\,C_1 + 0.0000811053\,C_3\,C_1 - 0.0616459\,C_1 - 5.03487\times10^{-6}\,C_2^2 - 3.46195\times10^{-6}\,C_3^2 - 0.00634657\,C_2 + 8.34996\times10^{-6}\,C_2\,C_3 + 0.00526266\,C_3 - 1 \\ -0.00408675\,C_1^2 - 0.00351832\,C_2\,C_1 + 0.000165608\,C_3\,C_1 - 0.180815\,C_1 - 0.000757238\,C_2^2 - 1.67773\times10^{-6}\,C_3^2 - 0.0778325\,C_2 + 0.0000712866\,C_2\,C_3 + 0.00366359\,C_3 - 1 \\ -0.0115938\,C_1^2 - 0.0177932\,C_2\,C_1 - 0.00355118\,C_3\,C_1 - 0.30455\,C_1 - 0.00682684\,C_2^2 - 0.000271932\,C_3^2 - 0.233698\,C_2 - 0.00272502\,C_2\,C_3 - 0.0466418\,C_3 - 1 \\ -0.0204538\,C_1^2 - 0.0443191\,C_2\,C_1 - 0.0135646\,C_3\,C_1 - 0.404513\,C_1 - 0.0240075\,C_2^2 - 0.00224894\,C_3^2 - 0.438247\,C_2 - 0.0146958\,C_2\,C_3 - 0.134133\,C_3 - 1 \\ -0.0269034\,C_1^2 - 0.0698761\,C_2\,C_1 - 0.0245358\,C_3\,C_1 - 0.463926\,C_1 - 0.0453723\,C_2^2 - 0.00559414\,C_3^2 - 0.602477\,C_2 - 0.0318634\,C_2\,C_3 - 0.211549\,C_3 - 1 \end{pmatrix}$$

• Método *Affine Covariant Newton*:

$$C_k = \begin{pmatrix} C_1 \to -0.235922 \\ C_2 \to -0.408066 \\ C_3 \to -0.487879 \\ C_4 \to -0.207201 \\ C_5 \to -0.333504 \\ C_6 \to -0.336131 \end{pmatrix}$$

• Método de *Newton*:

$$C_k = \begin{pmatrix} C_1 \to -0.235922 \\ C_2 \to -0.408066 \\ C_3 \to -0.487879 \\ C_4 \to -0.207201 \\ C_5 \to -0.333504 \\ C_6 \to -0.336131 \end{pmatrix}$$

(7) La solución aproximada del problema es

$$y(x) \simeq C^T.P^{(\alpha)}.\Psi(x) + {E_2}^T.\Psi(x)$$

$$y(x) = \begin{cases} -0.482156\,x^2 - 0.00479074\,x + 1.00022 & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ -0.364322\,x^2 - 0.130926\,x + 1.03481 & \frac{1}{2} \le x < 1 \end{cases}$$

(8) Se calcula la función residuo $R(x)$

$$R(x) = C^T.\Psi(x) - f(x, C^T.P^{(\alpha)}.\Psi(x) + {E_2}^T.\Psi(x), C^T.P^{(\alpha)}.\Psi(\tau\,x) + {E_2}^T.\Psi(x))$$

$$R(x) = \begin{cases} \sqrt{2}\left(\left(40\,x^2 - 24\,x + 3\right)C_1 + 4\,x\left(\sqrt{3}\,(2 - 5\,x)\,C_2 + \sqrt{5}\,x\,C_3\right)\right) & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ \sqrt{2}\left(\left(40\,x^2 - 64\,x + 25\right)C_4 - (2\,x - 1)\left(\sqrt{3}\,(10\,x - 9)\,C_5 + \sqrt{5}\,(1 - 2\,x)\,C_6\right)\right) & \frac{1}{2} \le x < 1 \end{cases}$$

–

$$\begin{cases} 1 - 2\left(\begin{cases} \dfrac{-2\sqrt{2}\,(x\,(15\,x-92)+6)\,C_1 + \sqrt{6}\,(8\,x\,(15\,x-1)-1)\,C_2 + \sqrt{10}\,(4\,x\,(15\,x-8)+3)\,C_3 + 1680}{1680} & 0 \le x < 1 \\ \dfrac{1}{840\sqrt{2}}\left(140\,x\,C_1 + 35\sqrt{3}\,(4\,x-1)\,C_2 + 35\sqrt{5}\,(4\,x-3)\,C_3 - 226\,C_4 + 127\sqrt{3}\,C_5 + 95\sqrt{5}\,C_6 + 2\,x\left((122 - 15\,x)\,C_4 + 4\sqrt{3}\,(15\,x-31)\,C_5 + 2\sqrt{5}\,(15\,x-38)\,C_6\right)\right) & 1 \le x < 2 \end{cases}\right)^2 & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

(9) Se aplica el método Tau (Galerkin) para que el residuo $R(x)$ sea ortogonal a $\psi_{n\,m}(x)$

$$\int_0^1 R(x)\,\psi_{n\,m}(x)\,dx = 0 \qquad \begin{cases} n = 0, 1, \cdots, 2^k - 1 \\ m = 0, 1, \cdots, M \end{cases}$$

obteniéndose un sistema algebraico de ecuaciones.

(10) Sistema algebraico de ecuaciones en C_k $(k = 1,\ldots, m^*)$ y resolución

$$\begin{pmatrix} \frac{745\,C_1^2+4\,(617\,\sqrt{3}\,C_2+137\,\sqrt{5}\,C_3+4\,892\,160\,\sqrt{2})\,C_1+1852\,C_2^2-160\,C_2\,(98\,\sqrt{6}-\sqrt{15}\,C_3)+40\,(5\,C_3^2+1176\,\sqrt{10}\,C_3+164\,640)}{19\,756\,800\,\sqrt{2}} \\ \frac{-7785\,C_1^2+4\,(-3442\,\sqrt{3}\,C_2-741\,\sqrt{5}\,C_3+129\,360\,\sqrt{2})\,C_1-8532\,C_2^2+16\,C_2\,(1\,228\,920\,\sqrt{6}-43\,\sqrt{15}\,C_3)+120\,(C_3^2-392\,\sqrt{10}\,C_3+164\,640)}{19\,756\,800\,\sqrt{6}} \\ \frac{140\,397\,\sqrt{10}\,C_1^2+(78\,892\,\sqrt{30}\,C_2+5640\,\sqrt{2}\,C_3+8\,232\,000\,\sqrt{5})\,C_1+34\,484\,\sqrt{10}\,C_2^2+40\,C_2\,(73\,\sqrt{6}\,C_3+54\,880\,\sqrt{15})+240\,(\sqrt{10}\,C_3^2+823\,200\,C_3+137\,200\,\sqrt{10})}{197\,568\,000} \\ \frac{145\,693\,C_1^2+8\,(13\,214\,\sqrt{3}\,C_2+1315\,\sqrt{5}\,C_3+426\,300\,\sqrt{2})\,C_1+73\,092\,C_2^2+6200\,C_3^2+94\,080\,\sqrt{10}\,C_3+8\,C_2\,(1061\,\sqrt{15}\,C_3+147\,000\,\sqrt{6})+19\,756\,800\,(3\,\sqrt{2}\,C_4+1)}{59\,270\,400\,\sqrt{2}} \\ \frac{228\,339\,C_1^2+2\,(88\,253\,\sqrt{3}\,C_2+9753\,\sqrt{5}\,C_3+2\,157\,960\,\sqrt{2})\,C_1+4\,(18\,069\,C_2^2+(458\,640\,\sqrt{6}-347\,\sqrt{15}\,C_3)\,C_2-1965\,C_3^2+64\,680\,\sqrt{10}\,C_3+4\,939\,200\,(\sqrt{6}\,C_5+1))}{19\,756\,800\,\sqrt{6}} \\ \frac{2\,237\,411\,C_1^2+(3\,060\,266\,\sqrt{3}\,C_2+780\,874\,\sqrt{5}\,C_3+29\,576\,400\,\sqrt{2})\,C_1+4\,(795\,093\,C_2^2+(136\,553\,\sqrt{15}\,C_3+4\,998\,000\,\sqrt{6})\,C_2+88\,555\,C_3^2+1\,264\,200\,\sqrt{10}\,C_3+4\,939\,200\,(3\,\sqrt{10}\,C_6+5))}{59\,270\,400\,\sqrt{10}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

• Método *Affine Covariant Newton*:

$$C_k = \begin{pmatrix} C_1 \to -0.235951 \\ C_2 \to -0.408011 \\ C_3 \to -0.487945 \\ C_4 \to -0.206952 \\ C_5 \to -0.333516 \\ C_6 \to -0.33614 \end{pmatrix}$$

• Método de *Newton*:

$$C_k = \begin{pmatrix} C_1 \to -0.235951 \\ C_2 \to -0.408011 \\ C_3 \to -0.487945 \\ C_4 \to -0.206952 \\ C_5 \to -0.333516 \\ C_6 \to -0.33614 \end{pmatrix}$$

(11) La solución aproximada del problema es

$$y(x) \simeq C^T.P^{(\alpha)}.\Psi(x) + {E_2}^T.\Psi(x)$$

$$y(x) = \begin{cases} -0.482145\,x^2 - 0.00479297\,x + 1.00022 & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ -0.36436\,x^2 - 0.130829\,x + 1.03477 & \frac{1}{2} \le x < 1 \end{cases}$$

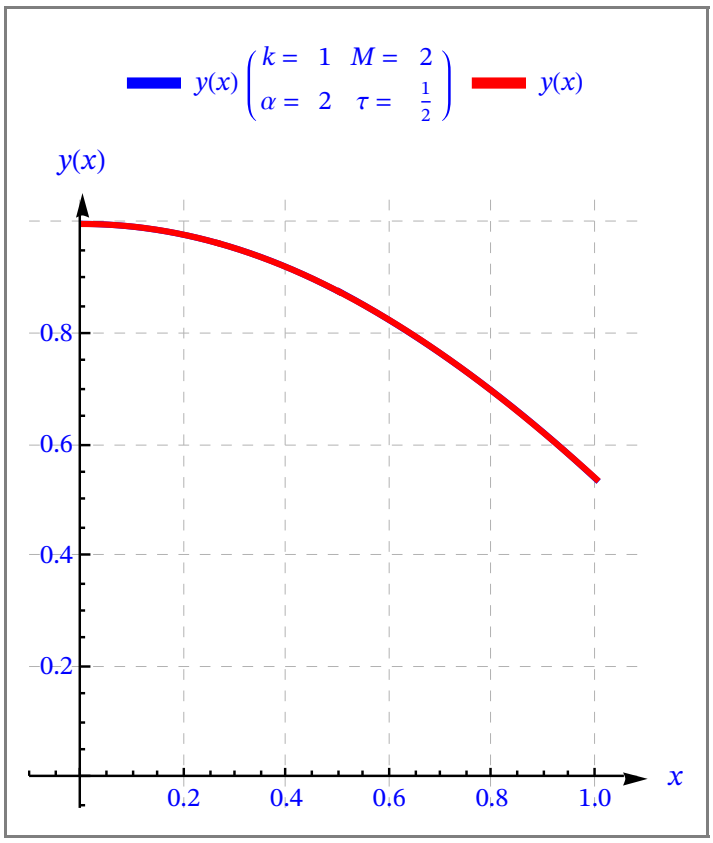


Tabla de valores aproximados y errores.

x_k	$f(x_k)$(ChWM)	$f(x_k)$	$\lvert f(x_k)(\text{ChWM}) - f(x_k)\rvert$
0.	1.000222967126	1.000000000000	2.22967×10^{-4}
0.1	0.994922220326	0.995004165278	8.1945×10^{-5}
0.2	0.979978574280	0.980066577841	8.80036×10^{-5}
0.3	0.955392028989	0.955336489126	5.55399×10^{-5}
0.4	0.921162584451	0.921060994003	1.0159×10^{-4}
0.5	0.878261642071	0.877582561890	6.7908×10^{-4}
0.6	0.825099138591	0.825335614910	2.36476×10^{-4}
0.7	0.764649442841	0.764842187284	1.92744×10^{-4}
0.8	0.696912554821	0.696706709347	2.05845×10^{-4}
0.9	0.621888474529	0.621609968271	2.78506×10^{-4}

Error L_∞:

$$\text{error}-L_\infty = \underset{0\le k\le N}{\text{Máx}}\ (|f(x_k) - f(x_k)(\text{ChWM})|) = 6.7908\times10^{-4}$$

Error$-L_2$:

$$\text{error}-L_2 = \left(\sum_{k=0}^{N} |f(x_k) - f(x_k)(\text{ChWM}))|^2\right)^{\frac{1}{2}} = 8.67029\times10^{-4}$$

Error$-$RMS:

$$\text{error}-\text{RMS} = \frac{1}{N}\left(\sum_{k=0}^{N} |f(x_k) - f(x_k)(\text{ChWM})|^2\right)^{\frac{1}{2}} = 8.67029\times10^{-5}$$

■ **Problema 4.5.3.** ([SING21])

Sea la ecuación diferencial fraccionaria con retraso y con las condiciones iniciales dadas:

$$(P) \equiv \begin{cases} D^{(\alpha)}\, y(x) = \tau\, e^{\tau x}\, y(\tau\, x) + \tau\, y(x) & x \in (0,\, 1),\ 0 < \alpha \le 1 \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad \tau = \frac{1}{2}$$

La solución exacta cuando $\alpha = 1$ es

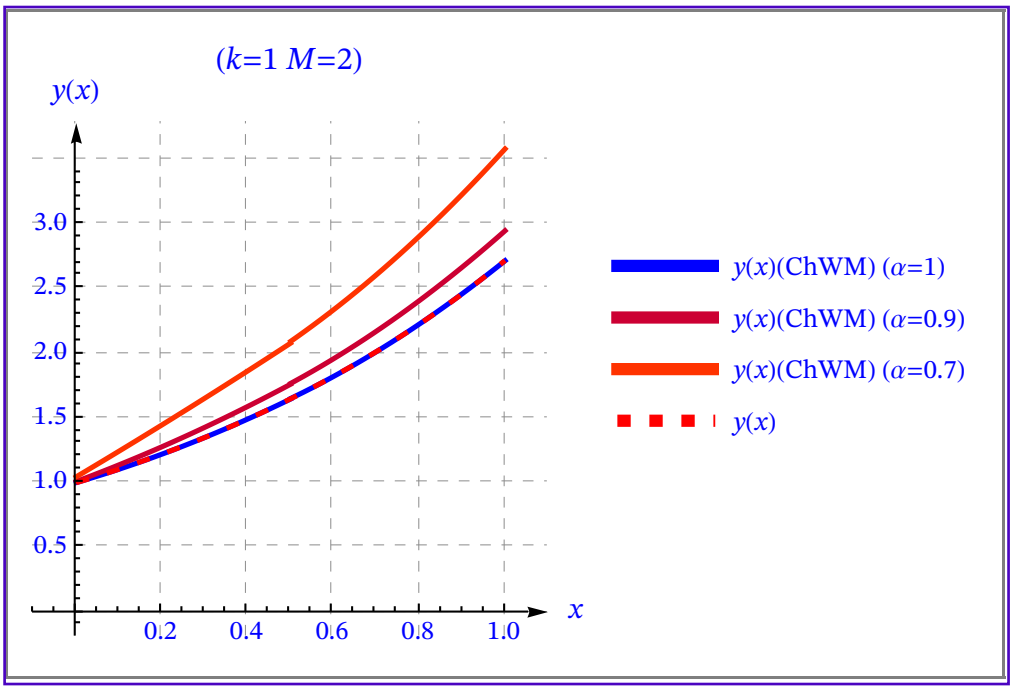
$y(x) = e^x$.

(i) Calcúlese la solución numérica mediante el método *Wavelets* de Chelyshkov (ChWM) con los parámetros k, M, α dados.

(ii) Represéntese en una misma gráfica en el intervalo $[0, 1]$ la solución del método ChWM y la solución exacta.

(iii) Créese una tabla con los valores de x, $f(x)$ (ChWm), $f(x)$ y el error absoluto $|f(x)\,(\text{ChWM})| - f(x)|$ cometido en cada punto para $x \in [0, 1]$.

(a) $\begin{cases} k = 1 & M = 2 \\ \alpha = 1,\ 0.9,\ 0.7 & \tau = \frac{1}{2} \end{cases}$.


(k=1 M=2)
y(x)
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
x
y(x)(ChWM) (α=1)
y(x)(ChWM) (α=0.9)
y(x)(ChWM) (α=0.7)
y(x)

4.5.3. Sistemas de Ecuaciones Diferenciales con Retraso Fraccionarias (SFDDE)

Se estudia el método numérico que aproxima la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales con retraso de orden fraccionario (*Systems of fractional delay differential equations* –SFDDEs), aplicando el método de las funciones *Wavelets* de Chelyshkov.
[MOHA18], [RAHI17], [AVCI21], [RAHI22].

Método ChWM. Sistema de Ecuaciones Diferenciales con Retraso de Orden Fraccionario (SFDDE).

Considérense los problemas siguientes constituidos por un sistema de ecuaciones diferenciales con retraso de orden fraccionario SFDDE:

• Retraso constante
$(P_1) \equiv$

$$\begin{cases} D^{(\alpha_i)}\, y_i(x) = & x \in [0,\, 1] \\ \quad f_i\,(x,\, y_1\,(x),\, y_1\,(x-\tau_{11}),\, \ldots,\, y_1\,(x-\tau_{1\,r_1}), \\ \qquad\qquad y_2\,(x-\tau_{21}),\, \ldots,\, y_2\,(x-\tau_{2\,r_2}),\, \cdots, \\ \qquad\qquad y_n\,(x),\, y_n\,(x-\tau_{n\,1}),\, \ldots,\, y_n\,(x-\tau_{1\,r_n})) \\ y_i(x) = u_i(x) & x \in [-\tau,\, 0) \\ y_i^{(k)}(0) = \lambda_{i\,k} & k = 0,\, 1,\, \cdots,\, n-1 \end{cases} \tag{4.5.14}$$

$i = 1,\, 2,\, \cdots,\, n_e$ (número de ecuaciones)

$$\begin{cases} n-1 < \alpha_i \le n \\ 0 < \tau_{i\,j} < 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} i = 1,\, 2,\, \cdots,\, n_e \\ j = 1,\, 2,\, \cdots,\, r_i \end{cases}$$

• Retraso proporconal
$(P_2) \equiv$

$$\begin{cases} D^{(\alpha_i)}\, y_i(x) = f_i\,(x,\, y_1\,(x),\, y_1(\tau_{i\,1}\,x),\, y_2(x),\, y_2(\tau_{i\,2}\,x), & x \in [0,\, 1] \\ \qquad\qquad \ldots,\, y_{n_e}(x),\, y_{n_e}(\tau_{i\,n_e}\,x)) \\ y_i^{(k)}\,(0) = \lambda_{i\,k} & k = 0,\, 1,\, \cdots,\, n-1 \end{cases} \tag{4.5.15}$$

$i = 1,\, 2,\, \cdots,\, n_e$ (número de ecuaciones)

$$\begin{cases} n-1 < \alpha_i \le n \\ 0 < \tau_{i\,j} < 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} i = 1,\, 2,\, \cdots,\, n_e \\ j = 1,\, 2,\, \cdots,\, r_i \end{cases}$$

donde f_i es una función analítica, $n = \lceil \alpha \rceil$, $n-1 < \alpha_i \le n$ y $0 < \tau_{i\,j} < 1$ es el parámetro del retraso, λ_i son las condiciones iniciales de tipo real y $u_i(x)$ es una función continua en $[-\tau,\, 0]$.

El términos $D^{(\alpha_i)}\, y_i(x)$ $(n = \lceil \alpha \rceil)$, representan la derivada de orden fraccionario en el sentido de Caputo de orden α_i e $y_i(x)$ representa la solución del problema por determinar.

1. Se considera que la derivada $D^{(\alpha)}\, y(x)$ de orden α se puede expresar en términos de las *Wavelets* de Bernoulli $\Psi(x) = \{\psi_{n\,m}(x)\}$ tomando su aproximación:

$$D^{(\alpha_i)}\, y_i(x) \simeq \sum_{n=0}^{2^k-1} \sum_{m=0}^{M} c_{n\,m}\, \psi_{n\,m}(x) = \sum_{i=1}^{m^*} c_i\, \psi_i(x) = C_i{}^T.\Psi(x) \quad x \in [0,\, 1]$$
$$i = 1,\, 2,\, \cdots,\, n_e \quad \text{(número de ecuaciones)} \tag{4.5.16}$$
$$m^* = 2^k\,(M+1)$$

donde $C_i{}^T$ es un vector fila y $\Psi(x)$ un vector columna de dimensión $\left(2^k\,(M-1)\times 1\right)$ dados por las expresiones:

$$C_i{}^T = (\, C_{i,1}\;\; C_{i,2}\;\; \cdots\;\; C_{i,m^*}\,) \quad i = 1,\, 2,\, \cdots,\, n_e$$
$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1\,(x) \\ \psi_2\,(x) \\ \vdots \\ \psi_{m^*}\,(x) \end{pmatrix} \tag{4.5.17}$$
$$\psi_{n,m}(x) \equiv \psi_i(x) \quad \begin{cases} n = 0,\, 1,\, \cdots,\, 2^k - 1 & k = 1,\, 2,\, \cdots \\ m = 0,\, 1,\, \cdots,\, M & m^* = 2^k\,(M+1) \\ i = n\,(M+1) + (m+1) & i = 1,\, 2,\, \cdots,\, m^* \end{cases}$$

1. Se aplica el operador J^{α_i} de integración fraccionaria de Riemann–Liouville a ambos lados de la relación $D^{(\alpha_i)}\, y(x) \simeq C_i{}^T.\Psi(x)$, y aplicando la matriz operacional de la integral fraccionaria de $\Psi(x)$, se tiene:

$$(P_1) \equiv$$
$$y_i(x) \simeq \begin{cases} J^{\alpha_i}\left[C_i{}^T.\Psi(x)\right] + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda_{i\,0}}{i!}\, x^i = C_i{}^T.P^{(\alpha_i)}.\Psi(x) + E_i{}^T.\Psi\,(x) & x \in [0,\, 1] \\ u_i(x) & x \in [\tau,\, 0) \end{cases}$$
$$i = 1,\, 2,\, \cdots,\, n_e \;\; (\text{n}^{\text{o}}\text{ ecuaciones}) \tag{4.5.18}$$
$$\bullet\, J^{\alpha_i}\,[\Psi(x)] \simeq P^{(\alpha_i)}.\,\Psi(x) + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda_{i\,0}}{i!}\, x^i \qquad \bullet\, n = \lceil \alpha \rceil$$

siendo $E_{1\,i}$ el vector de coeficientes *Wavelets* de Chelyshkov del polinomio $p_i(x)$:

$$(P_1) \equiv p_i(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda_{i\,0}}{i!}\, x^i \simeq E_i{}^T.\Psi(x).$$

$$(P_2) \equiv$$
$$y_i(x) \simeq \left\{ J^{\alpha_i}\left[C_i{}^T.\Psi(x)\right] + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda_{i\,0}}{i!}\, x^i = C_i{}^T.P^{(\alpha_i)}.\Psi(x) + E_i{}^T.\Psi\,(x) \quad x \in [0,\, 1] \right.$$
$$i = 1,\, 2,\, \cdots,\, n_e \tag{4.5.19}$$
$$\bullet\, J^{\alpha_i}\,[\Psi(x)] \simeq P^{(\alpha_i)}.\,\Psi(x) + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda_{i\,0}}{i!}\, x^i \qquad \bullet\, n = \lceil \alpha \rceil.$$

2. Se deducen las aproximaciones del término de retraso $y_i\left(x-\tau_{ij}\right)$ del problema (P_1), y del retraso proporcional del problema (P_2) partiendo de la expresión de $y_i(x)$:

$$(P_1)\equiv y_i\left(x-\tau_{ij}\right)\simeq\begin{cases}u_i\left(x-\tau_{ij}\right) & x\in[0,\,\tau_{ij}]\\ C_i{}^T.P^{(\alpha_i)}.\Psi\left(x-\tau_{ij}\right)+E_i{}^T.\Psi\left(x-\tau_{ij}\right) & x\in[\tau_{ij},\,1]\end{cases}. \tag{4.5.20}$$

$$(P_2)\equiv y_i\left(\tau_{ij}\,x\right)\simeq\left\{\ C_i{}^T.P^{(\alpha_i)}.\Psi\left(\tau_{ij}\,x\right)+E_i{}^T.\Psi\left(\tau_{ij}\right)\quad x\in[0,\,1]\,. \tag{4.5.21}$$

3. Se sustituyen las expresiones de

$$(P_1)\equiv\begin{cases}y_i(x) & D^{(\alpha_i)}\,y_i(x)\\ y_i\left(x-\tau_{ij}\right)\end{cases}$$

en la ecuación SFDDE del problema (P_1), de donde se deduce un sistema algebraico de ecuaciones:

$$(P_1)\equiv\begin{cases}D^{(\alpha_i)}\,y_i(x)= & x\in[0,\,1]\\ \quad f_i\,(x,\,y_1\,(x),\,y_1\,(x-\tau_{11}),\,\ldots,\,y_1\,(x-\tau_{1\,r_1}),\\ \qquad\quad y_2\,(x-\tau_{21}),\,\ldots,\,y_2\,(x-\tau_{2\,r_2}),\,\cdots,\\ \qquad\quad y_n\,(x),\,y_n\,(x-\tau_{n\,1}),\,\ldots,\,y_n\,(x-\tau_{n\,r_n}))\end{cases}$$

$$\bullet\begin{cases}D^{(\alpha_i)}\,y_i(x) & \simeq C_i{}^T.\Psi(x)\\ y_i(x) & \simeq\begin{cases}C_i{}^T.P^{(\alpha_i)}.\Psi(x)+E_i{}^T.\Psi\,(x) & x\in[0,\,1]\\ u_i(x) & x\in[\tau,\,0)\end{cases}\\ y_i\left(x-\tau_{ij}\right) & \simeq\begin{cases}u_i\left(x-\tau_{ij}\right) & x\in[0,\,\tau_{ij}]\\ C_i{}^T.P^{(\alpha_i)}.\Psi\left(x-\tau_{ij}\right)+E_i{}^T.\Psi\left(x-\tau_{ij}\right) & x\in[\tau_{ij},\,1]\end{cases}\end{cases}$$

o las expresiones

$$(P_2)\equiv\begin{cases}y_i(x) & D^{(\alpha_i)}\,y_i(x)\\ y_i\left(\tau_{ij}\,x\right)\end{cases}$$

en la ecuación SFDDE del problema (P_2), de donde se deduce un sistema algebraico de ecuaciones:

$$(P_2)\equiv\begin{cases}D^{(\alpha_i)}\,y_i(x)=f_i\,(x,\,y_1(x),\,y_1(\tau_{i\,1}\,x),\,y_2(x),\,y_2(\tau_{i\,2}\,x), & x\in[0,\,1]\\ \qquad\quad\ldots,\,y_{n_e}(x),\,y_{n_e}(\tau_{i\,n_e}\,x))\end{cases}$$

$$\bullet\begin{cases}D^{(\alpha_i)}\,y_i(x) & \simeq C_i{}^T.\Psi(x)\\ y_i(x) & \simeq\begin{cases}C_i{}^T.P^{(\alpha_i)}.\Psi(x)+E_i{}^T.\Psi\,(x) & x\in[0,\,1]\\ u_i(x) & x\in[\tau,\,0)\end{cases}\\ y_i\left(\tau_{ij}\,x\right) & \simeq\left\{\ C_i{}^T.P^{(\alpha_i)}.\Psi\left(\tau_{ij}\,x\right)+E_i{}^T.\Psi\left(\tau_{ij}\,x\right)\quad x\in[0,\,1]\right.\end{cases}$$

4. Se obtiene un sistema formado por $n_e\times\left(2^k\,(M+1)\right.$ ecuaciones algebraicas en la variable x que contiene n_e vectores C_i de coeficientes desconocidos:

$$(P_1)\equiv\underbrace{C_i{}^T.\Psi\,(x)}_{\mathrm{EC}_{i,1}\,(x)}=\underbrace{f_i\left(x,\,y_i(x),\,y_i\left(x-\tau_{ij}\right),\,\cdots\right)}_{\mathrm{EC}_{i,2}\,(x)}$$

$$C_i^T.\Psi(x) = f_i\left(x,\ \begin{cases} C_i^T.P^{(\alpha_i)}.\Psi(x) + E_i^T.\Psi(x) & x \in [0,\ 1] \\ u_i(x) & x \in [\tau,\ 0) \end{cases},\right.$$
$$\left.\begin{cases} u_i\left(x-\tau_{i\,j}\right) & x \in [0,\ \tau_{i\,j}] \\ C_i^T.P^{(\alpha_i)}.\Psi\left(x-\tau_{i\,j}\right) + E_i^T.\Psi\left(x-\tau_{i\,j}\right) & x \in [\tau_{i\,j},\ 1] \end{cases}\right)$$

$$\bullet\ C_i^T = (\ C_{i,1}\ \ C_{i,2}\ \cdots\ C_{i,m^*}\ ) \quad \begin{cases} i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n_e \\ j = 1,\ 2,\ ,\ \cdots,\ m^* \quad m^* = 2^k\,(M+1) \end{cases}$$

$$(P_2) \equiv \underbrace{C_i^T.\Psi(x)}_{\mathrm{EC}_{i,1}(x)} = \underbrace{f_i\left(x,\ y_i(x),\ y_i\left(\tau_{i\,j}\,x\right),\ \cdots\right)}_{\mathrm{EC}_{i,2}(x)}$$

$$C_i^T.\Psi(x) = f_i\left(x,\ \begin{cases} C_i^T.P^{(\alpha_i)}.\Psi(x) + E_i^T.\Psi(x) & x \in [0,\ 1], \\ C_i^T.P^{(\alpha_i)}.\Psi\left(\tau_{i\,j}\,x\right) + E_i^T.\Psi\left(\tau_{i\,j}\,x\right) & x \in [0,\ 1] \end{cases}\right) \tag{4.5.23}$$

$$\bullet\ C_i^T = (\ C_{i,1}\ \ C_{i,2}\ \cdots\ C_{i,m^*}\ ) \quad \begin{cases} i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n_e \\ j = 1,\ 2,\ ,\ \cdots,\ m^* \quad m^* = 2^k\,(M+1). \end{cases}$$

5. *Método de colocación*. Creación de un sistema algebraico de $n_e \times \left(2^{k-1}\,M\right)$ ecuaciones.

En el problema (P_1) se ha obtenido un sistema (no lineal) de ecuaciones algebraicas con el vector de coeficientes $C_i^T = (\ C_{i,1}\ \ C_{i,2}\ \cdots\ C_{i,m^*}\ )$, $m^* = 2^k\,(M+1)$.
En el problema (P_1) se deduce un sistema no lineal de ecuaciones algebraicas con n_e ecuaciones con el vector coeficientes $C_i^T = (\ C_{i,1}\ \ C_{i,2}\ \cdots\ C_{i,m^*}\ )$ para $i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n_e$:

$$i = 1 \quad \underbrace{(C_{1,1}\ C_{1,2}\ \cdots\ C_{1,m^*}.\Psi(x)}_{\mathrm{EC}_{1,1}(x)} = \underbrace{f_1\left(x,\ y_1(x),\ y_1\left(x-\tau_{1\,j}\right),\ y_2(x),\ y_2\left(x-\tau_{1\,j}\right),\ \cdots\right)}_{\mathrm{EC}_{1,2}(x)}$$
$$i = 2 \quad \underbrace{(C_{2,1}\ C_{2,2}\ \cdots\ C_{2,m^*}.\Psi(x)}_{\mathrm{EC}_{2,1}(x)} = \underbrace{f_2\left(x,\ y_1(x),\ y_1\left(x-\tau_{2\,j}\right),\ y_2(x),\ y_2\left(x-\tau_{2\,j}\right),\ \cdots\right)}_{\mathrm{EC}_{2,2}(x)}$$
$$\vdots$$
$$i = n_e \quad \underbrace{(C_{n_e,1}\ C_{n_e,2}\ \cdots\ C_{n_e,m^*}.\Psi(x)}_{\mathrm{EC}_{n_e,1}(x)} = \underbrace{f_{n_e}\left(x,\ y_1(x),\ y_1\left(x-\tau_{n_e\,j}\right),\ y_2(x),\ y_2\left(x-\tau_{n_e\,j}\right),\ \cdots\right)}_{\mathrm{EC}_{n_e,2}(x)}$$

En el problema (P_2) también se deduce un sistema no lineal de ecuaciones algebraicas con n_e ecuaciones con el vector coeficientes $C_i^T = (\ C_{i,1}\ \ C_{i,2}\ \cdots\ C_{i,m^*}\ )$ para $i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n_e$:

$$i = 1 \quad \underbrace{(C_{1,1}\ C_{1,2}\ \cdots\ C_{1,m^*}.\Psi(x)}_{\mathrm{EC}_{1,1}(x)} = \underbrace{f_1(x,\ y_1(x),\ y_1(\tau_{11}\,x),\ y_2(x),\ y_2(\tau_{12}\,x),\ \cdots)}_{\mathrm{EC}_{1,2}(x)}$$
$$i = 2 \quad \underbrace{(C_{2,1}\ C_{2,2}\ \cdots\ C_{2,m^*}.\Psi(x)}_{\mathrm{EC}_{2,1}(x)} = \underbrace{f_2(x,\ y_1(x),\ y_1(\tau_{21}\,x),\ y_2(x),\ y_2(\tau_{22}\,x),\ \cdots)}_{\mathrm{EC}_{2,2}(x)}$$
$$\vdots$$
$$i = n_e \quad \underbrace{(C_{n_e,1}\ C_{n_e,2}\ \cdots\ C_{n_e,m^*}.\Psi(x)}_{\mathrm{EC}_{n_e,1}(x)} = \underbrace{f_{n_e}(x,\ y_1(x),\ y_1(\tau_{n_e\,1}\,x),\ y_2(x),\ y_2(\tau_{n_e\,2}\,x),\ \cdots)}_{\mathrm{EC}_{n_e,2}(x)}$$

Se pueden calcular los n_e vectores de coeficientes C_i^T de dos modos:

a. *Método I.* Se crea un sistema algebraico de ecuaciones con el *método de colocación* considerando como puntos de colocación los ceros de los polinomios de *Legendre desplazados* de orden m^* del intervalo [0, 1]:

$$P_{m^*}(x) \equiv \text{polinomio de Legendre de orden } m^* = 2^k\,(M+1) \qquad x \in [-1,\,1]$$
$$L_{m^*}(x) \equiv \text{polinomio de Legendre desplazado de orden } m^* = 2^k\,(M+1) \qquad x \in [0,\,1]$$
$$x \in [-1,\,1] \quad \xrightarrow{x \to (2\,x-1)} \quad x \in [0,\,1]$$
$$L_{m^*}(x) = P_{m^*}(2\,x-1)$$
$$\text{ceros de } L_{m^*}(x) = \{x_1,\,x_2,\,\cdots,\,x_{m^*}\} \in [0,\,1].$$

Se deduce un sistema no lineal de ecuaciones algebraicas con $n_e \times (\underbrace{2^k\,(M+1)}_{m^*})$ ecuaciones con el vector de incógnitas $C_i{}^T = (\,C_{i,1}\;\;C_{i,2}\;\;\cdots\;\;C_{i,m^*}\,)$ para $i = 1,\,2,\,\cdots,\,n_e$:

$$i = 1 \quad \begin{cases} \mathrm{EC}_{1,1}(x_1) = & \mathrm{EC}_{1,2}(x_1) \\ \mathrm{EC}_{1,1}(x_2) = & \mathrm{EC}_{1,2}(x_2) \\ \cdots & \cdots \\ \mathrm{EC}_{1,1}(x_{m^*}) = & \mathrm{EC}_{1,2}(x_{m^*}) \end{cases}$$

$$i = 2 \quad \begin{cases} \mathrm{EC}_{2,1}(x_1) = & \mathrm{EC}_{2,2}(x_1) \\ \mathrm{EC}_{2,1}(x_2) = & \mathrm{EC}_{2,2}(x_2) \\ \cdots & \cdots \\ \mathrm{EC}_{2,1}(x_{m^*}) = & \mathrm{EC}_{2,2}(x_{m^*}) \end{cases}$$

$$\vdots$$

$$i = n_e \quad \begin{cases} \mathrm{EC}_{2,1}(x_1) = & \mathrm{EC}_{2,2}(x_1) \\ \mathrm{EC}_{2,1}(x_2) = & \mathrm{EC}_{2,2}(x_2) \\ \cdots & \cdots \\ \mathrm{EC}_{2,1}(x_{m^*}) = & \mathrm{EC}_{2,2}(x_{m^*}) \end{cases}$$

i. Se resuelve el sistema no lineal de ecuaciones en $C_i{}^T = (\,C_{i,1}\;\;C_{i,2}\;\;\cdots\;\;C_{i,m^*}\,)$ con el método de *Newton–Raphson* o el método *Affine Covariant Newton*.

ii. La solución aproximada de la ecuación FDDE es

$$\begin{aligned} (P_1) \equiv y_i{}^*(x) &= C_i{}^T.P^{(\alpha_i)}.\Psi(x) + E_i{}^T.\Psi(x) \\ (P_2) \equiv y_i{}^*(x) &= C_i{}^T.P^{(\alpha_i)}.\Psi(x) + E_i{}^T.\Psi(x). \end{aligned} \tag{4.5.24}$$

b. *Método II.*Se deduce la expresión de la función residuo $R_i(x)$:

$$(P_1) \equiv R_i(x) = \underbrace{C_i{}^T.\Psi(x)}_{\mathrm{EC}_{i,1}(x)} - \underbrace{f_i\big(x,\,y_i(x),\,y_i\big(x-\tau_{i\,j}\big),\,\cdots\big)}_{\mathrm{EC}_{i,2}(x)}$$

$$(P_2) \equiv R_i(x) = \underbrace{C_i{}^T.\Psi(x)}_{\mathrm{EC}_{i,1}(x)} - \underbrace{f_i\big(x,\,y_i(x),\,y_i\big(\tau_{i\,j}\,x\big),\,\cdots\big)}_{\mathrm{EC}_{i,2}(x)}$$

i. Se aplica el método Tau donde la solución $y_i(x)$ verifique que la función residuo $R_i(x)$ sea ortogonal a tantas funciones base $\psi_{n\,m}(x)$ como sea posible:

$$\int_0^1 \psi_i(x)\,R_i(x)\,dx = 0$$

$$\begin{cases} i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n_e \\ \psi_j(x) = \psi_{n\,m}(x) \end{cases} \quad \begin{cases} j = 1,\ \cdots,\ m^* \ \left(m^* = 2^k\,(M+1)\right) \\ j = n\,(M+1) + (m+1) \end{cases}$$

obteniéndose un sistema de $n_e \times (\underbrace{2^k\,(M+1)}_{m^*})$ ecuaciones con el vector de incógnitas $C_i{}^T = (\,C_{i,1}\ \ C_{i,2}\ \cdots\ C_{i,m^*}\,)$ para $i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n_e$.

ii. Se resuelve el sistema no lineal de ecuaciones en $C_i{}^T$con el método de *Newton–Raphson* o el método *Affine Covariant Newton*.

iii. La solución aproximada de la ecuación FDDE es

$$\begin{aligned} (P_1) \equiv y_i(x) &= C_i{}^T.P^{(\alpha_i)}.\Psi(x) + E_i{}^T.\Psi(x) \\ (P_2) \equiv y_i(x) &= C_i{}^T.P^{(\alpha_i)}.\Psi(x) + E_i{}^T.\Psi(x). \end{aligned} \tag{4.5.26}$$

4.5.3.1. Sistema de Ecuaciones Diferenciales con Retraso Constante (SFDDE) $y_i(x - \tau_{i\,j})$

■ **Ejemplo 4.5.1.** ([RAHI17]) ([MOHA18])

Considérese el sistema de ecuaciones diferenciales fraccionarias con retraso (SFDDE) con las condiciones iniciales indicadas:

$$(P_1) \equiv \begin{cases} \begin{pmatrix} D^{(\alpha_1)}\,y_1(x) \\ D^{(\alpha_2)}\,y_2(x) \end{pmatrix} = & x \in (0,\ 1),\ 0 < \alpha \le 1 \\ \quad \begin{pmatrix} x & 1 \\ x & 2\,x \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} y_1\left(x - \frac{1}{3}\right) \\ y_2\left(x - \frac{1}{3}\right) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & x \\ x^2 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} y_1\left(x - \frac{2}{3}\right) \\ y_2\left(x - \frac{2}{3}\right) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\phi(x) & \\ \phi(x) = 2\,x + 1 & x \ge 0 \\ \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & -\frac{2}{3} \le x \le 0 \end{cases}$$

La solución exacta del problema cuando $\alpha = 1$ es la siguiente:

$$y_1(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x < \frac{1}{3} \\ \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{6} - \frac{2\,x}{9} + \frac{7}{162} & \frac{1}{3} \le x < \frac{2}{3} \\ \frac{x^5}{6} + \frac{7\,x^4}{72} + \frac{x^3}{9} + \frac{31\,x^2}{162} - \frac{58\,x}{243} + \frac{11}{162} & \frac{2}{3} \le x \le 1 \end{cases}$$

$$y_2(x) = \begin{cases} x^2 + x & 0 \le x < \frac{1}{3} \\ \frac{x^4}{2} + \frac{2\,x^3}{9} + \frac{7\,x^2}{9} + x + \frac{5}{486} & \frac{1}{3} \le x < \frac{2}{3} \\ \frac{x^6}{6} - \frac{x^5}{9} + \frac{29\,x^4}{72} + \frac{20\,x^3}{81} + \frac{200\,x^2}{243} + x + \frac{1}{486} & \frac{2}{3} \le x \le 1 \end{cases}$$

(i) Calcúlese la solución numérica mediante el método *Wavelets* de Chelyshkov (ChWM) con los parámetros k, M, α_i, $\tau_{i\,j}$ dados.

(ii) Represéntese en una misma gráfica en el intervalo [0, 1] la solución del método Wavelet ChWM y la solución exacta.

(iii) Créese una tabla con los valores de las variables y el error absoluto con la forma

$x,\ f(x)\,(\text{ChWM}),\ f(x),\ e = |f(x)\,(\text{ChWM})| - f(x)|$

siendo e el error absoluto cometido en cada punto para $x \in [0,\ 1]$, para cada solución

$y_1(x),\ y_2(x)$ y las aproximaciones obtenidas.

(a) $\begin{cases} k=0 & M=2 \\ \alpha_i=(1\ \ 1) & \tau_{ij}=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \end{cases}$.

(b) $\begin{cases} k=1 & M=2 \\ \alpha_i=(1\ \ 1) & \tau_{ij}=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \end{cases}$

SOLUCIÓN

(a)

Método *Wavelet* de Chelyshkov (ChWM) para SFDDE
(*System Fractional Delay Differential Equation*)

$$(P_1)\equiv\begin{cases} D^{(\alpha_i)}\,y_i(x)= & x\in[0,1] \\ \quad f_i\,(x,\,y_1\,(x),\,y_1\,(x-\tau_{11}),\,\ldots,\,y_1\,(x-\tau_{1r_1}), & \\ \qquad y_2\,(x-\tau_{21}),\,\ldots,\,y_2\,(x-\tau_{2r_2}),\,\cdots, & \\ \qquad y_n\,(x),\,y_n\,(x-\tau_{n1}),\,\ldots,\,y_n\,(x-\tau_{1r_n})) & \\ y_i(x)=u_i(x) & x\in[-\tau,0) \\ y_i^{(k)}\,(0)=\lambda_{ik} & k=0,1,\cdots,n-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} n-1<\alpha_i\le n \\ 0<\tau_{ij}<1 \end{cases} \quad j=1,2,\cdots,r_i \qquad i=1,2,\cdots,n_e \quad (\text{nº de ecuaciones})$$

$$\begin{pmatrix} [A,B]= & [0,1] & (\text{intervalo } x) \\ \{k,2^k-1\}= & \{0,0\} & (\text{máxima resolución}) \\ M= & 2 & (\text{máx. grado polinomio}) \\ m^*=2^k(M+1)= & 3 & \text{Dimensión } \mathcal{B}=\{\psi_k\} \\ \{\alpha_1,\alpha_2,\cdots\}= & \{1,1\} & \\ \{\tau_{11},\tau_{12},\ldots\}= & \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} & \\ n_e= & 2 & \text{nº ecuaciones} \\ n=\lceil\alpha\rceil= & 1 & \end{pmatrix}$$

$$(P_1)\equiv\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} D^{(1)}\,y_1(x)=2\,y_1\left(x-\frac{2}{3}\right)+x\,y_1\left(x-\frac{1}{3}\right)+x\,y_2\left(x-\frac{2}{3}\right)+y_2\left(x-\frac{1}{3}\right) \\ D^{(1)}\,y_2(x)=y_1\left(x-\frac{2}{3}\right)x^2+y_1\left(x-\frac{1}{3}\right)x+2\,y_2\left(x-\frac{1}{3}\right)x+2\,x+1 \end{pmatrix} & x\in(0,1) \\ u(x)= & 0 \\ (\,y_1(0)=0\quad y_2(0)=0\,) & \end{pmatrix}$$

(a) Matriz con los polinomios de Chelyshkov $\Phi(x)$

$$\Phi(x)=\begin{pmatrix}\Phi_0(x)\\ \Phi_1(x)\\ \Phi_2(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\,x^2-12\,x+3\\ 4\,x-5\,x^2\\ x^2\end{pmatrix}$$

(b) Matriz con las *Wavelets* de Chelyshkov $\Psi(x)$

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_{0\,0}(x) = \psi_1(x) = \begin{cases} 10x^2 - 12x + 3 & 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{0\,1}(x) = \psi_2(x) = \begin{cases} \sqrt{3}\,(4x - 5x^2) & 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{0\,2}(x) = \psi_3(x) = \begin{cases} \sqrt{5}\,x^2 & 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \end{pmatrix}$$

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \begin{cases} 10x^2 - 12x + 3 & 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{3}\,(4x - 5x^2) & 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{5}\,x^2 & 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \end{pmatrix}$$

(c) Matrices operacionales integrales fraccionarias $P^{(\alpha_i)}$ de orden $\alpha_i = \{1, 1\}$

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{18} & \frac{5}{12\sqrt{3}} & \frac{19}{36\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{12\sqrt{3}} & \frac{1}{6} & \frac{11}{6\sqrt{15}} \\ \frac{1}{36\sqrt{5}} & -\frac{1}{6\sqrt{15}} & \frac{5}{18} \end{pmatrix}$$

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{18} & \frac{5}{12\sqrt{3}} & \frac{19}{36\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{12\sqrt{3}} & \frac{1}{6} & \frac{11}{6\sqrt{15}} \\ \frac{1}{36\sqrt{5}} & -\frac{1}{6\sqrt{15}} & \frac{5}{18} \end{pmatrix}$$

(d) Matrices con los coeficientes *Wavelets* de los polinomios $p_i(x)$:

• $i = 1$

$$p_i(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda_{i\,0}}{i!} x^i = 0 \qquad p_i(x) \simeq E_i{}^T.\Psi(x) \qquad E_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

• $i = 2$

$$p_i(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda_{i\,0}}{i!} x^i = 0 \qquad p_i(x) \simeq E_i{}^T.\Psi(x) \qquad E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(1) La derivada $D^{(\alpha)}\, y_i(x)$ se expresa en términos de las *Wavelets* de Chelyshkov

$$D^{(\alpha_i)} y(x) \simeq \sum_{n=0}^{2^k-1} \sum_{m=0}^{M} c_{n\,m}\, \psi_{n\,m}(x) = \sum_{i=1}^{m^*} C_i\, \psi_i(x) = C_i{}^T.\Psi(x) \qquad x \in [0, 1]$$

$$D^{(\alpha_i)} y_i(x) \simeq \begin{pmatrix} C_{i,1} & C_{i,2} & C_{i,3} \end{pmatrix}. \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \psi_3(x) \end{pmatrix}$$

(2) Se aplica el operador integral J^{α_i} a la relación $D^{(\alpha_i)} y_i(x) \simeq C_i{}^T.\Psi(x)$

$y_i(x) \simeq C_i{}^T.P^{(\alpha_i)}.\Psi(x) + E_i{}^T.\Psi(x)$

$p_i(x) = \lambda_{i,0} \simeq E_i{}^T.\Psi(x)$

(3) Se deduce el término de retraso $y_i(x-\tau_{ij})$ del problema (P_1)

$$(P_1)\equiv y_i(x-\tau_{ij})\simeq\begin{cases} u_i\left(x-\tau_{ij}\right) & x\in[0,\tau_{ij}] \\ C_i{}^T.P^{(\alpha_i)}.\Psi\left(x-\tau_{ij}\right)+E_i{}^T.\Psi\left(x-\tau_{ij}\right) & x\in[\tau_{ij},1]\end{cases}$$

(4) Se sustituyen las expresiones de $\begin{cases} y_i(x) & D^{(\alpha_i)}\,y_i(x) \\ y_i\left(x-\tau_{ij}\right)\end{cases}$ en el SFDDE de (P_1)

$(P_1)\equiv$

$$\begin{cases} D^{(\alpha_i)}\,y_i(x)= & x\in[0,1] \\ \quad f_i\,(x,\,y_1\,(x),\,y_1\,(x-\tau_{11}),\,\ldots,\,y_1\,(x-\tau_{1\,r_1}), \\ \qquad y_2\,(x-\tau_{21}),\,\ldots,\,y_2\,(x-\tau_{2\,r_2}),\,\cdots, \\ \qquad y_n\,(x),\,y_n\,(x-\tau_{n\,1}),\,\ldots,\,y_n\,(x-\tau_{1\,r_n}))\end{cases}$$

$$\bullet\begin{cases} D^{(\alpha_i)}\,y_i\,(x) & \simeq C_i{}^T.\Psi\,(x) \\ y_i(x) & \simeq \begin{cases} C_i{}^T.P^{(\alpha_i)}.\Psi(x)+E_i{}^T.\Psi\,(x) & x\in[0,1] \\ u_i(x) & x\in[\tau,0)\end{cases} \\ y_i\left(x-\tau_{ij}\right) & \simeq \begin{cases} u_i\left(x-\tau_{ij}\right) & x\in[0,\tau_{ij}] \\ C_i{}^T.P^{(\alpha_i)}.\Psi\left(x-\tau_{ij}\right)+E_i{}^T.\Psi\left(x-\tau_{ij}\right) & x\in[\tau_{ij},1]\end{cases}\end{cases}$$

(4.1) Funciones

$D^{(\alpha_i)}y_i(x)\simeq C_i{}^T.\Psi(x)$

$$D^{(\alpha_1)}y_1(x)\simeq\begin{cases}(10\,x^2-12\,x+3)\,C_{1,1}+x\left(\sqrt{3}\,(4-5\,x)\,C_{1,2}+\sqrt{5}\,x\,C_{1,3}\right) & 0\le x<1\\ 0 & \text{True}\end{cases}$$

$$D^{(\alpha_2)}y_2(x)\simeq 2\left(\begin{cases}\frac{1}{180}\left(-10\,(18\,x^2-42\,x+17)\,C_{1,1}-5\,\sqrt{3}\,(18\,x^2-60\,x+35)\,C_{1,2}+\sqrt{5}\,(90\,x^2-156\,x+67)\,C_{1,3}\right) & \frac{2}{3}<x\le 1\\ 0 & \text{True}\end{cases}\right)+$$
$$x\left(\begin{cases}\frac{1}{180}\left(-10\,(18\,x^2-30\,x+5)\,C_{1,1}-5\,\sqrt{3}\,(18\,x^2-48\,x+17)\,C_{1,2}+\sqrt{5}\,(90\,x^2-96\,x+25)\,C_{1,3}\right) & \frac{1}{3}<x\le 1\\ 0 & \text{True}\end{cases}\right)+$$
$$x\left(\begin{cases}\frac{1}{180}\left(-10\,(18\,x^2-42\,x+17)\,C_{2,1}-5\,\sqrt{3}\,(18\,x^2-60\,x+35)\,C_{2,2}+\sqrt{5}\,(90\,x^2-156\,x+67)\,C_{2,3}\right) & \frac{2}{3}<x\le 1\\ 0 & \text{True}\end{cases}\right)+$$
$$\left(\begin{cases}\frac{1}{180}\left(-10\,(18\,x^2-30\,x+5)\,C_{2,1}-5\,\sqrt{3}\,(18\,x^2-48\,x+17)\,C_{2,2}+\sqrt{5}\,(90\,x^2-96\,x+25)\,C_{2,3}\right) & \frac{1}{3}<x\le 1\\ 0 & \text{True}\end{cases}\right)$$

(4.2) Funciones

$$y_i(x)\simeq\begin{cases} C_i{}^T.P^{(\alpha_i)}.\Psi(x)+E_i{}^T.\Psi\,(x) & x\in[0,1] \\ u_i(x) & x\in[\tau,0)\end{cases}$$

$$y_1(x)\simeq\begin{cases}\frac{1}{60}\left(10\,(1-6\,(x-1)\,x)\,C_{1,1}-5\,\sqrt{3}\,(6\,(x-2)\,x+1)\,C_{1,2}+\sqrt{5}\,(6\,x\,(5\,x-2)+1)\,C_{1,3}\right) & 0\le x<1\\ 0 & \text{True}\end{cases}$$

$$y_2(x)\simeq\begin{cases}\frac{1}{60}\left(10\,(1-6\,(x-1)\,x)\,C_{2,1}-5\,\sqrt{3}\,(6\,(x-2)\,x+1)\,C_{2,2}+\sqrt{5}\,(6\,x\,(5\,x-2)+1)\,C_{2,3}\right) & 0\le x<1\\ 0 & \text{True}\end{cases}$$

(4.3) Función

$$y_i(x)=\begin{cases} u_i\,(x) & x\in[\tau,0)\end{cases}$$
$u_i(x)=0$

(4.4) Funciones

$$y_i(x-\tau_{ij})\simeq\begin{cases} u_i\left(x-\tau_{ij}\right) & x\in[0,\tau_{ij}] \\ C_i{}^T.P^{(\alpha_i)}.\Psi\left(x-\tau_{ij}\right)+E_i{}^T.\Psi\left(x-\tau_{ij}\right) & x\in[\tau_{ij},1]\end{cases}$$

$$y_1\left(x-\frac{1}{3}\right) \simeq \begin{cases} \frac{1}{180}\left(-10\,(18\,x^2-30\,x+5)\,C_{1,1}-5\,\sqrt{3}\,(18\,x^2-48\,x+17)\,C_{1,2}+\sqrt{5}\,(90\,x^2-96\,x+25)\,C_{1,3}\right) & \frac{1}{3}<x\le 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

$$y_1\left(x-\frac{2}{3}\right) \simeq \begin{cases} \frac{1}{180}\left(-10\,(18\,x^2-42\,x+17)\,C_{1,1}-5\,\sqrt{3}\,(18\,x^2-60\,x+35)\,C_{1,2}+\sqrt{5}\,(90\,x^2-156\,x+67)\,C_{1,3}\right) & \frac{2}{3}<x\le 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

$$y_2\left(x-\frac{1}{3}\right) \simeq \begin{cases} \frac{1}{180}\left(-10\,(18\,x^2-30\,x+5)\,C_{2,1}-5\,\sqrt{3}\,(18\,x^2-48\,x+17)\,C_{2,2}+\sqrt{5}\,(90\,x^2-96\,x+25)\,C_{2,3}\right) & \frac{1}{3}<x\le 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

$$y_2\left(x-\frac{2}{3}\right) \simeq \begin{cases} \frac{1}{180}\left(-10\,(18\,x^2-42\,x+17)\,C_{2,1}-5\,\sqrt{3}\,(18\,x^2-60\,x+35)\,C_{2,2}+\sqrt{5}\,(90\,x^2-156\,x+67)\,C_{2,3}\right) & \frac{2}{3}<x\le 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

(4.5) Coeficientes *Wavelets* de Bernoulli de las expresiones $y_i(x-\tau_{i\,j})$

$$W\left[y_1\left(x-\frac{1}{3}\right)\right] = \begin{pmatrix} \frac{-290\,C_{1,1}-25\,\sqrt{3}\,C_{1,2}+37\,\sqrt{5}\,C_{1,3}}{7290} \\ \frac{310\,\sqrt{3}\,C_{1,1}-255\,C_{1,2}-47\,\sqrt{15}\,C_{1,3}}{7290} \\ \frac{898\,\sqrt{5}\,C_{1,1}+569\,\sqrt{15}\,C_{1,2}+455\,C_{1,3}}{7290} \end{pmatrix}$$

$$W\left[y_1\left(x-\frac{2}{3}\right)\right] = \begin{pmatrix} \frac{38\,C_{1,1}+37\,\sqrt{3}\,C_{1,2}-\sqrt{5}\,C_{1,3}}{2916} \\ \frac{-395\,\sqrt{3}\,C_{1,1}-660\,C_{1,2}+4\,\sqrt{15}\,C_{1,3}}{14\,580} \\ \frac{1063\,\sqrt{5}\,C_{1,1}+284\,\sqrt{15}\,C_{1,2}+20\,C_{1,3}}{14\,580} \end{pmatrix}$$

$$W\left[y_2\left(x-\frac{1}{3}\right)\right] = \begin{pmatrix} \frac{-290\,C_{2,1}-25\,\sqrt{3}\,C_{2,2}+37\,\sqrt{5}\,C_{2,3}}{7290} \\ \frac{310\,\sqrt{3}\,C_{2,1}-255\,C_{2,2}-47\,\sqrt{15}\,C_{2,3}}{7290} \\ \frac{898\,\sqrt{5}\,C_{2,1}+569\,\sqrt{15}\,C_{2,2}+455\,C_{2,3}}{7290} \end{pmatrix}$$

$$W\left[y_2\left(x-\frac{2}{3}\right)\right] = \begin{pmatrix} \frac{38\,C_{2,1}+37\,\sqrt{3}\,C_{2,2}-\sqrt{5}\,C_{2,3}}{2916} \\ \frac{-395\,\sqrt{3}\,C_{2,1}-660\,C_{2,2}+4\,\sqrt{15}\,C_{2,3}}{14\,580} \\ \frac{1063\,\sqrt{5}\,C_{2,1}+284\,\sqrt{15}\,C_{2,2}+20\,C_{2,3}}{14\,580} \end{pmatrix}$$

(4.6) Funciones $y_i(x-\tau_{i\,j})$ expandidas

$$y_1\left(x-\frac{1}{3}\right) \simeq \frac{\begin{pmatrix} \sqrt{5}\,x^2 & 0\le x<1 \\ 0 & \text{True} \end{pmatrix}\left(898\,\sqrt{5}\,C_{1,1}+569\,\sqrt{15}\,C_{1,2}+455\,C_{1,3}\right)}{7290} + \frac{\begin{pmatrix} 10\,x^2-12\,x+3 & 0\le x<1 \\ 0 & \text{True} \end{pmatrix}\left(-290\,C_{1,1}-25\,\sqrt{3}\,C_{1,2}+37\,\sqrt{5}\,C_{1,3}\right)}{7290} + \frac{\begin{pmatrix} \sqrt{3}\,(4\,x-5\,x^2) & 0\le x<1 \\ 0 & \text{True} \end{pmatrix}\left(310\,\sqrt{3}\,C_{1,1}-255\,C_{1,2}-47\,\sqrt{15}\,C_{1,3}\right)}{7290}$$

$$y_1\left(x--\frac{2}{3}\right) \simeq \frac{\begin{pmatrix}\sqrt{5}\,x^2 & 0\le x<1\\ 0 & \text{True}\end{pmatrix}\left(1063\sqrt{5}\,C_{1,1}+284\sqrt{15}\,C_{1,2}+20\,C_{1,3}\right)}{14\,580}+$$
$$\frac{\begin{pmatrix}10x^2-12x+3 & 0\le x<1\\ 0 & \text{True}\end{pmatrix}\left(38\,C_{1,1}+37\sqrt{3}\,C_{1,2}-\sqrt{5}\,C_{1,3}\right)}{2916}+$$
$$\frac{\begin{pmatrix}\sqrt{3}\,(4x-5x^2) & 0\le x<1\\ 0 & \text{True}\end{pmatrix}\left(-395\sqrt{3}\,C_{1,1}-660\,C_{1,2}+4\sqrt{15}\,C_{1,3}\right)}{14\,580}$$

$$y_2\left(x--\frac{1}{3}\right) \simeq \frac{\begin{pmatrix}\sqrt{5}\,x^2 & 0\le x<1\\ 0 & \text{True}\end{pmatrix}\left(898\sqrt{5}\,C_{2,1}+569\sqrt{15}\,C_{2,2}+455\,C_{2,3}\right)}{7290}+$$
$$\frac{\begin{pmatrix}10x^2-12x+3 & 0\le x<1\\ 0 & \text{True}\end{pmatrix}\left(-290\,C_{2,1}-25\sqrt{3}\,C_{2,2}+37\sqrt{5}\,C_{2,3}\right)}{7290}+$$
$$\frac{\begin{pmatrix}\sqrt{3}\,(4x-5x^2) & 0\le x<1\\ 0 & \text{True}\end{pmatrix}\left(310\sqrt{3}\,C_{2,1}-255\,C_{2,2}-47\sqrt{15}\,C_{2,3}\right)}{7290}$$

$$y_2\left(x--\frac{2}{3}\right) \simeq \frac{\begin{pmatrix}\sqrt{5}\,x^2 & 0\le x<1\\ 0 & \text{True}\end{pmatrix}\left(1063\sqrt{5}\,C_{2,1}+284\sqrt{15}\,C_{2,2}+20\,C_{2,3}\right)}{14\,580}+$$
$$\frac{\begin{pmatrix}10x^2-12x+3 & 0\le x<1\\ 0 & \text{True}\end{pmatrix}\left(38\,C_{2,1}+37\sqrt{3}\,C_{2,2}-\sqrt{5}\,C_{2,3}\right)}{2916}+$$
$$\frac{\begin{pmatrix}\sqrt{3}\,(4x-5x^2) & 0\le x<1\\ 0 & \text{True}\end{pmatrix}\left(-395\sqrt{3}\,C_{2,1}-660\,C_{2,2}+4\sqrt{15}\,C_{2,3}\right)}{14\,580}$$

Reglas:

$$\begin{pmatrix}
y_1(x) \to \begin{cases}\frac{1}{60}\left(10\,(1-6\,(x-1)\,x)\,C_{1,1}-5\sqrt{3}\,(6\,(x-2)\,x+1)\,C_{1,2}+\sqrt{5}\,(6\,x\,(5\,x-2)+1)\,C_{1,3}\right) & 0\le x<1\\ 0 & \text{True}\end{cases}\\
y_2(x) \to \begin{cases}\frac{1}{60}\left(10\,(1-6\,(x-1)\,x)\,C_{2,1}-5\sqrt{3}\,(6\,(x-2)\,x+1)\,C_{2,2}+\sqrt{5}\,(6\,x\,(5\,x-2)+1)\,C_{2,3}\right) & 0\le x<1\\ 0 & \text{True}\end{cases}\\
y_1\left(x-\frac{1}{3}\right) \to \begin{cases}\frac{1}{180}\left(-10\,(18x^2-30x+5)\,C_{1,1}-5\sqrt{3}\,(18x^2-48x+17)\,C_{1,2}+\sqrt{5}\,(90x^2-96x+25)\,C_{1,3}\right) & \frac{1}{3}<x\le 1\\ 0 & \text{True}\end{cases}\\
y_1\left(x-\frac{2}{3}\right) \to \begin{cases}\frac{1}{180}\left(-10\,(18x^2-42x+17)\,C_{1,1}-5\sqrt{3}\,(18x^2-60x+35)\,C_{1,2}+\sqrt{5}\,(90x^2-156x+67)\,C_{1,3}\right) & \frac{2}{3}<x\le 1\\ 0 & \text{True}\end{cases}\\
y_2\left(x-\frac{1}{3}\right) \to \begin{cases}\frac{1}{180}\left(-10\,(18x^2-30x+5)\,C_{2,1}-5\sqrt{3}\,(18x^2-48x+17)\,C_{2,2}+\sqrt{5}\,(90x^2-96x+25)\,C_{2,3}\right) & \frac{1}{3}<x\le 1\\ 0 & \text{True}\end{cases}\\
y_2\left(x-\frac{2}{3}\right) \to \begin{cases}\frac{1}{180}\left(-10\,(18x^2-42x+17)\,C_{2,1}-5\sqrt{3}\,(18x^2-60x+35)\,C_{2,2}+\sqrt{5}\,(90x^2-156x+67)\,C_{2,3}\right) & \frac{2}{3}<x\le 1\\ 0 & \text{True}\end{cases}
\end{pmatrix}$$

(5) Sistema algebraico no lineal de ecuaciones del problema (P_1):

$$(P_1) \equiv \left\{ \underbrace{D^{(\alpha_i)}\,y_i\,(x)}_{EC1\,i\,(x)} = \underbrace{f_i\left(x,\,y_i\,(x),\,y_i\left(x-\tau_{i\,j}\right)\right)}_{EC2\,i\,(x)} \quad x\in[0,\,1]\right.$$

$EC1_i(x) = EC2_i(x)$

$$\bullet\ EC_{1,1}(x) = \begin{cases} (10x^2 - 12x + 3)C_{1,1} + x\left(\sqrt{3}(4 - 5x)C_{1,2} + \sqrt{5}\,x\,C_{1,3}\right) & 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

$$\blacksquare\ EC_{2,1}(x) = \begin{cases} (10x^2 - 12x + 3)C_{2,1} + x\left(\sqrt{3}(4 - 5x)C_{2,2} + \sqrt{5}\,x\,C_{2,3}\right) & 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

$$\bullet\ EC_{1,2}(x) = 2\left(\begin{cases} \frac{1}{180}\left(-10(18x^2 - 42x + 17)C_{1,1} - 5\sqrt{3}(18x^2 - 60x + 35)C_{1,2} + \sqrt{5}(90x^2 - 156x + 67)C_{1,3}\right) & \frac{2}{3} < x \le 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases}\right) +$$

$$x\left(\begin{cases} \frac{1}{180}\left(-10(18x^2 - 30x + 5)C_{1,1} - 5\sqrt{3}(18x^2 - 48x + 17)C_{1,2} + \sqrt{5}(90x^2 - 96x + 25)C_{1,3}\right) & \frac{1}{3} < x \le 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases}\right) +$$

$$x\left(\begin{cases} \frac{1}{180}\left(-10(18x^2 - 42x + 17)C_{2,1} - 5\sqrt{3}(18x^2 - 60x + 35)C_{2,2} + \sqrt{5}(90x^2 - 156x + 67)C_{2,3}\right) & \frac{2}{3} < x \le 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases}\right) +$$

$$\left(\begin{cases} \frac{1}{180}\left(-10(18x^2 - 30x + 5)C_{2,1} - 5\sqrt{3}(18x^2 - 48x + 17)C_{2,2} + \sqrt{5}(90x^2 - 96x + 25)C_{2,3}\right) & \frac{1}{3} < x \le 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases}\right)$$

$$\blacksquare\ EC_{2,2}(x) = \left(\begin{cases} \frac{1}{180}\left(-10(18x^2 - 42x + 17)C_{1,1} - 5\sqrt{3}(18x^2 - 60x + 35)C_{1,2} + \sqrt{5}(90x^2 - 156x + 67)C_{1,3}\right) & \frac{2}{3} < x \le 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases}\right)x^2 +$$

$$\left(\begin{cases} \frac{1}{180}\left(-10(18x^2 - 30x + 5)C_{1,1} - 5\sqrt{3}(18x^2 - 48x + 17)C_{1,2} + \sqrt{5}(90x^2 - 96x + 25)C_{1,3}\right) & \frac{1}{3} < x \le 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases}\right)x +$$

$$2\left(\begin{cases} \frac{1}{180}\left(-10(18x^2 - 30x + 5)C_{2,1} - 5\sqrt{3}(18x^2 - 48x + 17)C_{2,2} + \sqrt{5}(90x^2 - 96x + 25)C_{2,3}\right) & \frac{1}{3} < x \le 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases}\right)x + 2x + 1$$

(6) Método de Colocación.

(6a) Creación de un sistema algebraico de ecuaciones con los coeficientes:

$C_i{}^T = (C_{i,1}\ C_{i,2}\ \cdots\ C_{i,m^*})$

Los puntos de colocación son los ceros del polinomio de Legendre desplazado.

•Polinomio de *Legendre* en [−1, 1]

$$P_{m^*}(x) = \frac{1}{2}\left(5x^3 - 3x\right)$$

• Polinomio de *Legendre desplazado* en [0, 1] y ceros:

$L_{m^*}(x) = 20x^3 - 30x^2 + 12x - 1 \qquad x \in [0, 1]$

$L_{m^*}(x) = 0 \Rightarrow x_k\ (k = 1, 2, \cdots, m^*) \in [0, 1]$

• Ceros:

$$x_k = \begin{pmatrix} x_1 & 0.112702 \\ x_2 & 0.5 \\ x_3 & 0.887298 \end{pmatrix}$$

(6a.i) Resolución del sistema de ecuaciones en los coeficientes

$$C_i^{\,T}=(C_{i,1}\ C_{i,2}\ \cdots\ C_{i,m^*})\ \begin{cases} i=1,2,\cdots,n_e \\ j=1,2,,\cdots,m^* \quad m^*=2^k\,(M+1)^{\mathrm{ec}_1=\mathrm{ec}_2} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1.7746\,C_{1,1}+0.67082\,C_{1,2}+0.0284018\,C_{1,3} & -0.5\,C_{1,1}+1.29904\,C_{1,2}+0.559017\,C_{1,3} & 0.225403\,C_{1,1}-0.67082\,C_{1,2}+1.76045\,C_{1,3} \\ 1.7746\,C_{2,1}+0.67082\,C_{2,2}+0.0284018\,C_{2,3} & -0.5\,C_{2,1}+1.29904\,C_{2,2}+0.559017\,C_{2,3} & 0.225403\,C_{2,1}-0.67082\,C_{2,2}+1.76045\,C_{2,3} \end{pmatrix}$$

=

$$\begin{pmatrix} 0. & 0.152778\,C_{1,1}+0.0601407\,C_{1,2}-0.00310565\,C_{1,3}+0.305556\,C_{2,1}+0.120281\,C_{2,2}-0.0062113\,C_{2,3}+0. & 1.04436\,C_{1,1}+ \\ 1.2254 & 0.152778\,C_{1,1}+0.0601407\,C_{1,2}-0.00310565\,C_{1,3}+0.305556\,C_{2,1}+0.120281\,C_{2,2}-0.0062113\,C_{2,3}+2. & 0.633719\,C_{1,1}+0.6 \end{pmatrix}$$

• Método *Affine Covariant Newton*:

$$C_{i\,j}=\begin{pmatrix} C_{1,1}\to 0.0292415 \\ C_{1,2}\to -0.102218 \\ C_{1,3}\to 0.587206 \\ C_{2,1}\to 0.393101 \\ C_{2,2}\to 0.67296 \\ C_{2,3}\to 2.68901 \end{pmatrix}$$

• Método de *Newton*:

$$C_{i\,j}=\begin{pmatrix} C_{1,1}\to 0.0292415 \\ C_{1,2}\to -0.102218 \\ C_{1,3}\to 0.587206 \\ C_{2,1}\to 0.393101 \\ C_{2,2}\to 0.67296 \\ C_{2,3}\to 2.68901 \end{pmatrix}$$

(6a.ii) La solución aproximada del problema es

$y_i(x)\simeq C_i^{\,T}.P^{(\alpha_i)}.\Psi(x)+E_i^{\,T}.\Psi(x)$

$$y_1(x)=\begin{cases} 0.715797\,x^2-0.410411\,x+0.0415113 & 0\le x<1 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

$$y_2(x)=\begin{cases} 2.03051\,x^2+0.356139\,x+0.068597 & 0\le x<1 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

(6b) Se calcula la función residuo $R_i(x)$

$R_i(x)=\mathrm{EC}_{1\,i}(x)-\mathrm{EC}_{2\,i}(x)$

$R_1(x)=\mathrm{EC}_{1,1}(x)-\mathrm{EC}_{2,1}(x)=$

$$-2\left(\begin{cases} \frac{1}{180}\left(-10\,(18\,x^2-42\,x+17)\,C_{1,1}-5\,\sqrt{3}\,(18\,x^2-60\,x+35)\,C_{1,2}+\sqrt{5}\,(90\,x^2-156\,x+67)\,C_{1,3}\right) & \frac{2}{3}<x\le 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases}\right)-$$

$$x\left(\begin{cases} \frac{1}{180}\left(-10\,(18\,x^2-30\,x+5)\,C_{1,1}-5\,\sqrt{3}\,(18\,x^2-48\,x+17)\,C_{1,2}+\sqrt{5}\,(90\,x^2-96\,x+25)\,C_{1,3}\right) & \frac{1}{3}<x\le 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases}\right)+$$

$$\left(\begin{cases} (10\,x^2-12\,x+3)\,C_{1,1}+x\left(\sqrt{3}\,(4-5\,x)\,C_{1,2}+\sqrt{5}\,x\,C_{1,3}\right) & 0\le x<1 \\ 0 & \text{True} \end{cases}\right)-$$

$$x\left(\begin{cases} \frac{1}{180}\left(-10\,(18\,x^2-42\,x+17)\,C_{2,1}-5\,\sqrt{3}\,(18\,x^2-60\,x+35)\,C_{2,2}+\sqrt{5}\,(90\,x^2-156\,x+67)\,C_{2,3}\right) & \frac{2}{3}<x\le 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases}\right)-$$

$$\left(\begin{cases} \frac{1}{180}\left(-10\,(18\,x^2-30\,x+5)\,C_{2,1}-5\,\sqrt{3}\,(18\,x^2-48\,x+17)\,C_{2,2}+\sqrt{5}\,(90\,x^2-96\,x+25)\,C_{2,3}\right) & \frac{1}{3}<x\le 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases}\right)$$

$$R_2(x) = \mathrm{EC}_{1,2}(x) - \mathrm{EC}_{2,2}(x) =$$

$$-\left(\begin{cases} \frac{1}{180}\left(-10\,(18x^2-42x+17)\,C_{1,1} - 5\sqrt{3}\,(18x^2-60x+35)\,C_{1,2} + \sqrt{5}\,(90x^2-156x+67)\,C_{1,3}\right) & \frac{2}{3} < x \le 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases}\right)x^2 -$$

$$\left(\begin{cases} \frac{1}{180}\left(-10\,(18x^2-30x+5)\,C_{1,1} - 5\sqrt{3}\,(18x^2-48x+17)\,C_{1,2} + \sqrt{5}\,(90x^2-96x+25)\,C_{1,3}\right) & \frac{1}{3} < x \le 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases}\right)x -$$

$$2\left(\begin{cases} \frac{1}{180}\left(-10\,(18x^2-30x+5)\,C_{2,1} - 5\sqrt{3}\,(18x^2-48x+17)\,C_{2,2} + \sqrt{5}\,(90x^2-96x+25)\,C_{2,3}\right) & \frac{1}{3} < x \le 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases}\right)x -$$

$$2x + \left(\begin{cases} (10x^2-12x+3)\,C_{2,1} + x\left(\sqrt{3}\,(4-5x)\,C_{2,2} + \sqrt{5}\,x\,C_{2,3}\right) & 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases}\right) - 1$$

(6b.i) Se aplica el método Tau (Galerkin) para que el residuo $R_i(x)$ sea ortogonal a $\psi_{n\,m}(x)$

$$\int_0^1 R_i(x)\,\psi_{n\,m}(x)\,dx = 0 \qquad \begin{cases} n = 1, 2, \cdots, 2^{k-1} \\ m = 0, 1, \cdots, M-1 \end{cases}$$

obteniéndose un sistema algebraico de ecuaciones.

Sistema algebraico de ecuaciones en $C_i^{\,T} = (C_{i,1}\ \ C_{i,2}\ \ \cdots\ \ C_{i,m^*})$

$$\begin{pmatrix} \frac{86\,512\,C_{1,1} - 2644\sqrt{3}\,C_{1,2} - 380\sqrt{5}\,C_{1,3} + 2146\,C_{2,1} - 727\sqrt{3}\,C_{2,2} - 425\sqrt{5}\,C_{2,3}}{87\,480} \\ \frac{8072\sqrt{3}\,C_{1,1} + 199\,488\,C_{1,2} + 1040\sqrt{15}\,C_{1,3} - 2734\sqrt{3}\,C_{2,1} + 13\,449\,C_{2,2} + 1097\sqrt{15}\,C_{2,3}}{174\,960} \\ \frac{-42\,472\sqrt{5}\,C_{1,1} - 18\,320\sqrt{15}\,C_{1,2} + 164\,608\,C_{1,3} - 32\,698\sqrt{5}\,C_{2,1} - 16\,871\sqrt{15}\,C_{2,2} - 11\,081\,C_{2,3}}{174\,960} \\ \frac{-7465\,C_{1,1} - 72\,665\sqrt{3}\,C_{1,2} - 22\,507\sqrt{5}\,C_{1,3} + 4\,730\,460\,C_{2,1} - 44\,520\sqrt{3}\,C_{2,2} - 46\,200\sqrt{5}\,C_{2,3} - 1\,530\,900}{4\,592\,700} \\ \frac{42\,055\sqrt{3}\,C_{1,1} + 203\,730\,C_{1,2} + 14\,662\sqrt{15}\,C_{1,3} - 36\,960\sqrt{3}\,C_{2,1} + 2\,524\,410\,C_{2,2} + 29\,820\sqrt{15}\,C_{2,3} - 1\,148\,175\sqrt{3}}{2\,296\,350} \\ \frac{-140\,696\sqrt{5}\,C_{1,1} - 76\,291\sqrt{15}\,C_{1,2} - 52\,405\,C_{1,3} - 178\,080\sqrt{5}\,C_{2,1} - 120\,792\sqrt{15}\,C_{2,2} + 814\,884\,C_{2,3} - 765\,450\sqrt{5}}{918\,540} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(6b.ii) Resolución del sistema de ecuaciones

• Método *Affine Covariant Newton*:

$$C_i = \begin{pmatrix} C_{1,1} \to 0.0296071 \\ C_{1,2} \to -0.107043 \\ C_{1,3} \to 0.593876 \\ C_{2,1} \to 0.396783 \\ C_{2,2} \to 0.669237 \\ C_{2,3} \to 2.68933 \end{pmatrix}$$

• Método de *Newton*:

$$C_i = \begin{pmatrix} C_{1,1} \to 0.0296071 \\ C_{1,2} \to -0.107043 \\ C_{1,3} \to 0.593876 \\ C_{2,1} \to 0.396783 \\ C_{2,2} \to 0.669237 \\ C_{2,3} \to 2.68933 \end{pmatrix}$$

(6b.iii) La solución aproximada del problema es

$$y_i(x) \simeq C_i^{\,T}.P^{(\alpha_i)}.\Psi(x) + E_i^{\,T}.\Psi(x)$$

$$y_1(x) = \begin{cases} 0.727068\,x^2 - 0.421385\,x + 0.0425172 & 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

$$y_2(x) = \begin{cases} 2.0304\,x^2 + 0.353231\,x + 0.0697599 & 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

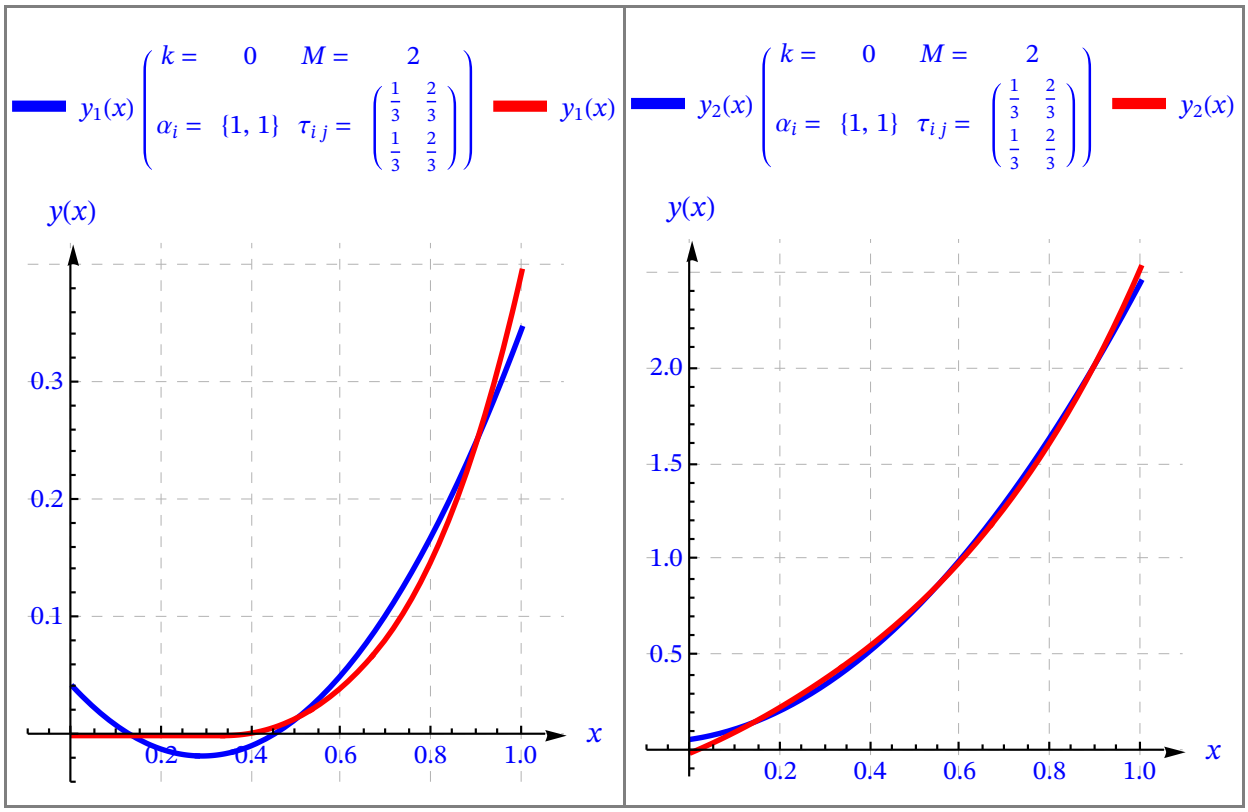
(7) Soluciones aproximadas obtenidas:

$$y_1(x) = \begin{cases} 0.715797\,x^2 - 0.410411\,x + 0.0415113 & 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

$$y_2(x) = \begin{cases} 2.03051\,x^2 + 0.356139\,x + 0.068597 & 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

$$y_1(x) = \begin{cases} 0.727068\,x^2 - 0.421385\,x + 0.0425172 & 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

$$y_2(x) = \begin{cases} 2.0304\,x^2 + 0.353231\,x + 0.0697599 & 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$



Errores de la variable $y_1(x)$:

Tabla de valores aproximados y errores.

x_k	$f(x_k)$(ChWM)	$f(x_k)$	$\lvert f(x_k)$(ChWM)$-f(x_k)\rvert$
0.	0.041511273004	0	4.15113×10^{-2}
0.1	0.007628172695	0	7.62817×10^{-3}
0.2	−0.011938981694	0	1.1939×10^{-2}
0.3	−0.017190190164	0	1.71902×10^{-2}
0.4	−0.008125452714	0.002320987654	1.04464×10^{-2}
0.5	0.015255230654	0.015432098765	1.76868×10^{-4}
0.6	0.052951859942	0.041876543210	1.10753×10^{-2}
0.7	0.104964435149	0.084054310700	2.09101×10^{-2}
0.8	0.171292956276	0.150748312757	2.05446×10^{-2}
0.9	0.251937423321	0.251288919753	6.48504×10^{-4}

Error L_∞:

$$\text{error}-L_\infty = \underset{0\le k\le N}{\text{Máx}}\ (|f(x_k) - f(x_k)(\text{ChWM})|) = 4.15113\times 10^{-2}$$

Error$-L_2$:

$$\text{error}-L_2 = (\sum_{k=0}^{N} |f(x_k) - f(x_k)(\text{ChWM}))|^2)^{\frac{1}{2}} = 5.75411\times 10^{-2}$$

Error−RMS:

$$\text{error}-\text{RMS} = \frac{1}{N}(\sum_{k=0}^{N} |f(x_k) - f(x_k)(\text{ChWM})|^2)^{\frac{1}{2}} = 5.75411\times 10^{-3}$$

Errores de la variable $y_2(x)$:

Tabla de valores aproximados y errores.

x_k	$f(x_k)(\text{ChWM})$	$f(x_k)$	$\lvert f(x_k)(\text{ChWM})-f(x_k)\rvert$
0.	0.068597003034	0.000000000000	6.8597×10^{-2}
0.1	0.124515924776	0.110000000000	1.45159×10^{-2}
0.2	0.221044947318	0.240000000000	1.89551×10^{-2}
0.3	0.358184070658	0.390000000000	3.18159×10^{-2}
0.4	0.535933294797	0.561754732510	2.58214×10^{-2}
0.5	0.754292619735	0.763760288066	9.46767×10^{-3}
0.6	1.013262045471	1.003088065844	1.0174×10^{-2}
0.7	1.312841572007	1.287681818930	2.51598×10^{-2}
0.8	1.653031199341	1.627485893004	2.55453×10^{-2}
0.9	2.033830927474	2.035950279835	2.11935×10^{-3}

Error L_∞:

$$\text{error}-L_\infty = \underset{0\le k\le N}{\text{Máx}}\ (|f(x_k) - f(x_k)(\text{ChWM})|) = 6.8597\times 10^{-2}$$

Error$-L_2$:

$$\text{error}-L_2 = (\sum_{k=0}^{N} |f(x_k) - f(x_k)(\text{ChWM}))|^2)^{\frac{1}{2}} = 9.18573\times 10^{-2}$$

Error−RMS:

$$\text{error}-\text{RMS} = \frac{1}{N}(\sum_{k=0}^{N} |f(x_k) - f(x_k)(\text{ChWM})|^2)^{\frac{1}{2}} = 9.18573\times 10^{-3}$$

(b)

Método *Wavelet* de Chelyshkov (ChWM) para SFDDE
(*System Fractional Delay Differential Equation*)

$$(P_1) \equiv \begin{cases} D^{(\alpha_i)}\, y_i(x) = & x \in [0,1] \\ \quad f_i\left(x, y_1(x), y_1(x-\tau_{11}), \ldots, y_1\left(x-\tau_{1 r_1}\right), \right. & \\ \quad\quad y_2(x-\tau_{21}), \ldots, y_2\left(x-\tau_{2 r_2}\right), \cdots, & \\ \quad\quad \left. y_n(x), y_n(x-\tau_{n1}), \ldots, y_n\left(x-\tau_{1 r_n}\right)\right) & \\ y_i(x) = u_i(x) & x \in [-\tau, 0) \\ y_i^{(k)}(0) = \lambda_{ik} & k = 0, 1, \cdots, n-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} n-1 < \alpha_i \le n \\ 0 < \tau_{ij} < 1 \end{cases} \quad j = 1, 2, \cdots, r_i \qquad i = 1, 2, \cdots, n_e \quad (\text{nº de ecuaciones})$$

$$\begin{pmatrix} [A,B] = & [0,1] & (\text{intervalo } x) \\ \{k, 2^k-1\} = & \{1,1\} & (\text{máxima resolución}) \\ M = & 2 & (\text{máx. grado polinomio}) \\ m^*=2^k(M+1) = & 6 & \text{Dimensión } \mathcal{B}=\{\psi_k\} \\ \{\alpha_1,\alpha_2,\cdots\} = & \{1,1\} & \\ \{\tau_{11},\tau_{12},\ldots\} = & \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} & \\ n_e = & 2 & \text{nº ecuaciones} \\ n = \lceil \alpha \rceil = & 1 & \end{pmatrix}$$

$$(P_1) \equiv \begin{pmatrix} D^{(1)}\, y_1(x) = 2\, y_1\left(x-\frac{2}{3}\right) + x\, y_1\left(x-\frac{1}{3}\right) + x\, y_2\left(x-\frac{2}{3}\right) + y_2\left(x-\frac{1}{3}\right) & x \in (0,1) \\ D^{(1)}\, y_2(x) = y_1\left(x-\frac{2}{3}\right) x^2 + y_1\left(x-\frac{1}{3}\right) x + 2\, y_2\left(x-\frac{1}{3}\right) x + 2x + 1 & \\ u(x) = & 0 \\ (\, y_1(0) = 0 \quad y_2(0) = 0\,) & \end{pmatrix}$$

(a) Matriz con los polinomios de Chelyshkov $\Phi(x)$

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \Phi_0(x) \\ \Phi_1(x) \\ \Phi_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10x^2 - 12x + 3 \\ 4x - 5x^2 \\ x^2 \end{pmatrix}$$

(b) Matriz con las *Wavelets* de Chelyshkov $\Psi(x)$

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_{00}(x) = \psi_1(x) = & \begin{cases} \sqrt{2}\,(40x^2 - 24x + 3) & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{01}(x) = \psi_2(x) = & \begin{cases} \sqrt{6}\,(8x - 20x^2) & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{02}(x) = \psi_3(x) = & \begin{cases} 4\sqrt{10}\,x^2 & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{10}(x) = \psi_4(x) = & \begin{cases} \sqrt{2}\,(10(2x-1)^2 - 12(2x-1) + 3) & \frac{1}{2} \le x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{11}(x) = \psi_5(x) = & \begin{cases} \sqrt{6}\,(4(2x-1) - 5(2x-1)^2) & \frac{1}{2} \le x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{12}(x) = \psi_6(x) = & \begin{cases} \sqrt{10}\,(2x-1)^2 & \frac{1}{2} \le x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \end{pmatrix}$$

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \begin{cases} \sqrt{2}\,(40x^2 - 24x + 3) & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{6}\,(8x - 20x^2) & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \begin{cases} 4\sqrt{10}\,x^2 & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{2}\,(10(2x-1)^2 - 12(2x-1) + 3) & \frac{1}{2} \le x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{6}\,(4(2x-1) - 5(2x-1)^2) & \frac{1}{2} \le x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{10}\,(2x-1)^2 & \frac{1}{2} \le x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \end{pmatrix}$$

(c) Matrices operacionales integrales fraccionarias $P^{(\alpha_i)}$ de orden $\alpha_i = \{1, 1\}$

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{36} & \frac{5}{24\sqrt{3}} & \frac{19}{72\sqrt{5}} & \frac{1}{18} & \frac{1}{6\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{5}}{18} \\ -\frac{1}{24\sqrt{3}} & \frac{1}{12} & \frac{11}{12\sqrt{15}} & \frac{1}{6\sqrt{3}} & \frac{1}{6} & \frac{\sqrt{\frac{5}{3}}}{6} \\ \frac{1}{72\sqrt{5}} & -\frac{1}{12\sqrt{15}} & \frac{5}{36} & \frac{\sqrt{5}}{18} & \frac{\sqrt{\frac{5}{3}}}{6} & \frac{5}{18} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{36} & \frac{5}{24\sqrt{3}} & \frac{19}{72\sqrt{5}} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{24\sqrt{3}} & \frac{1}{12} & \frac{11}{12\sqrt{15}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{72\sqrt{5}} & -\frac{1}{12\sqrt{15}} & \frac{5}{36} \end{pmatrix}$$

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{36} & \frac{5}{24\sqrt{3}} & \frac{19}{72\sqrt{5}} & \frac{1}{18} & \frac{1}{6\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{5}}{18} \\ -\frac{1}{24\sqrt{3}} & \frac{1}{12} & \frac{11}{12\sqrt{15}} & \frac{1}{6\sqrt{3}} & \frac{1}{6} & \frac{\sqrt{\frac{5}{3}}}{6} \\ \frac{1}{72\sqrt{5}} & -\frac{1}{12\sqrt{15}} & \frac{5}{36} & \frac{\sqrt{5}}{18} & \frac{\sqrt{\frac{5}{3}}}{6} & \frac{5}{18} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{36} & \frac{5}{24\sqrt{3}} & \frac{19}{72\sqrt{5}} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{24\sqrt{3}} & \frac{1}{12} & \frac{11}{12\sqrt{15}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{72\sqrt{5}} & -\frac{1}{12\sqrt{15}} & \frac{5}{36} \end{pmatrix}$$

(d) Matrices con los coeficientes *Wavelets* de los polinomios $p_i(x)$:

• $i = 1$

$$p_i(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda_{i\,0}}{i!} x^i = 0 \qquad p_i(x) \simeq {E_i}^T.\Psi(x) \qquad E_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

• $i = 2$

$$p_i(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda_{i\,0}}{i!} x^i = 0 \qquad p_i(x) \simeq {E_i}^T.\Psi(x) \qquad E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(1) La derivada $D^{(\alpha)}\, y_i(x)$ se expresa en términos de las *Wavelets* de Chelyshkov

$$D^{(\alpha_i)} y(x) \simeq \sum_{n=0}^{2^k-1} \sum_{m=0}^{M} c_{n\,m}\, \psi_{n\,m}(x) = \sum_{i=1}^{m^*} C_i\, \psi_i(x) = {C_i}^T.\Psi(x) \qquad x \in [0, 1]$$

$$D^{(\alpha_i)} y_i(x) \simeq \begin{pmatrix} C_{i,1} & C_{i,2} & C_{i,3} & C_{i,4} & C_{i,5} & C_{i,6} \end{pmatrix}. \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \psi_3(x) \\ \psi_4(x) \\ \psi_5(x) \\ \psi_6(x) \end{pmatrix}$$

(2) Se aplica el operador integral J^{α_i} a la relación $D^{(\alpha_i)} y_i(x) \simeq {C_i}^T.\Psi(x)$

$y_i(x) \simeq {C_i}^T.P^{(\alpha_i)}.\Psi(x) + {E_i}^T.\Psi(x)$

$p_i(x) = \lambda_{i,0} \simeq {E_i}^T.\Psi(x)$

(3) Se deduce el término de retraso $y_i(x-\tau_{ij})$ del problema (P_1)

$$(P_1) \equiv y_i(x-\tau_{ij}) \simeq \begin{cases} u_i(x-\tau_{ij}) & x \in [0,\ \tau_{ij}] \\ C_i{}^T.P^{(\alpha_i)}.\Psi(x-\tau_{ij}) + E_i{}^T.\Psi(x-\tau_{ij}) & x \in [\tau_{ij},\ 1] \end{cases}$$

(4) Se sustituyen las expresiones de $\begin{cases} y_i(x) & D^{(\alpha_i)}\ y_i(x) \\ y_i(x-\tau_{ij}) \end{cases}$ en el SFDDE de (P_1)

$(P_1) \equiv$

$$\begin{cases} D^{(\alpha_i)}\ y_i(x) = & x \in [0,\ 1] \\ \quad f_i\left(x,\ y_1(x),\ y_1(x-\tau_{11}),\ \ldots,\ y_1\left(x-\tau_{1\,r_1}\right),\right. & \\ \qquad y_2(x-\tau_{21}),\ \ldots,\ y_2\left(x-\tau_{2\,r_2}\right),\ \cdots, & \\ \qquad \left. y_n(x),\ y_n(x-\tau_{n\,1}),\ \ldots,\ y_n\left(x-\tau_{1\,r_n}\right)\right) & \end{cases}$$

$$\bullet \begin{cases} D^{(\alpha_i)}\ y_i(x) & \simeq C_i{}^T.\Psi(x) \\ y_i(x) & \simeq \begin{cases} C_i{}^T.P^{(\alpha_i)}.\Psi(x) + E_i{}^T.\Psi(x) & x \in [0,\ 1] \\ u_i(x) & x \in [\tau,\ 0) \end{cases} \\ y_i(x-\tau_{ij}) & \simeq \begin{cases} u_i(x-\tau_{ij}) & x \in [0,\ \tau_{ij}] \\ C_i{}^T.P^{(\alpha_i)}.\Psi(x-\tau_{ij}) + E_i{}^T.\Psi(x-\tau_{ij}) & x \in [\tau_{ij},\ 1] \end{cases} \end{cases}$$

(4.1) Funciones

$D^{(\alpha_i)}y_i(x) \simeq C_i{}^T.\Psi(x)$

$$D^{(\alpha_1)}y_1(x) \simeq \begin{cases} \sqrt{2}\left((40x^2-24x+3)\,C_{1,1}+4x\left(\sqrt{3}\,(2-5x)\,C_{1,2}+\sqrt{5}\,x\,C_{1,3}\right)\right) & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ \sqrt{2}\left((40x^2-64x+25)\,C_{1,4}-(2x-1)\left(\sqrt{3}\,(10x-9)\,C_{1,5}+\sqrt{5}\,(1-2x)\,C_{1,6}\right)\right) & \frac{1}{2} \le x < 1 \end{cases}$$

$$D^{(\alpha_2)}y_2(x) \simeq 2\left(\begin{cases} \frac{-10\left(72x^2-132x+53\right)C_{1,1}-5\sqrt{3}\left(72x^2-168x+83\right)C_{1,2}+\sqrt{5}\left(360x^2-552x+211\right)C_{1,3}}{180\sqrt{2}} & \frac{2}{3} < x \le 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases}\right)+$$

$$x\left(\begin{cases} \frac{-10\left(72x^2-132x+53\right)C_{2,1}-5\sqrt{3}\left(72x^2-168x+83\right)C_{2,2}+\sqrt{5}\left(360x^2-552x+211\right)C_{2,3}}{180\sqrt{2}} & \frac{2}{3} < x \le 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases}\right)+x\left(\begin{cases} \frac{-10\left(72x^2-84x+17\right)C_{1,1}-5\sqrt{3}\left(72x^2-120x+35\right)C_{1,2}+\sqrt{5}\left(360x^2-312x+67\right.}{180\sqrt{2}} & \\ \frac{1}{180\sqrt{2}}\left(-720\,C_{1,4}\,x^2-360\sqrt{3}\,C_{1,5}\,x^2+360\sqrt{5}\,C_{1,6}\,x^2+1\right. & \\ \qquad 960\sqrt{3}\,C_{1,5}\,x-672\sqrt{5}\,C_{1,6}\,x+60\,C_{1,1}+60\sqrt{3}\,C_{1,} & \end{cases}$$

(4.2) Funciones

$$y_i(x) \simeq \begin{cases} C_i{}^T.P^{(\alpha_i)}.\Psi(x) + E_i{}^T.\Psi(x) & x \in [0,\ 1] \\ u_i(x) & x \in [\tau,\ 0) \end{cases}$$

$y_1(x) \simeq$

$$\begin{cases} \frac{10\left(12\left(1-2x\right)x+1\right)C_{1,1}-5\sqrt{3}\left(24\left(x-1\right)x+1\right)C_{1,2}+\sqrt{5}\left(24\,x\left(5\,x-1\right)+1\right)C_{1,3}}{60\sqrt{2}} & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{60\sqrt{2}}\left(20\,C_{1,1}+20\sqrt{3}\,C_{1,2}+20\sqrt{5}\,C_{1,3}-10\left(12\,x\left(2\,x-3\right)+11\right)C_{1,4}-5\sqrt{3}\left(24\left(x-2\right)x+19\right)C_{1,5}+\sqrt{5}\left(24\,x\left(5\,x-6\right)+43\right)C_{1,6}\right) & \frac{1}{2} \le x < 1 \end{cases}$$

$y_2(x) \simeq$

$$\begin{cases} \frac{10\left(12\left(1-2x\right)x+1\right)C_{2,1}-5\sqrt{3}\left(24\left(x-1\right)x+1\right)C_{2,2}+\sqrt{5}\left(24\,x\left(5\,x-1\right)+1\right)C_{2,3}}{60\sqrt{2}} & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{60\sqrt{2}}\left(20\,C_{2,1}+20\sqrt{3}\,C_{2,2}+20\sqrt{5}\,C_{2,3}-10\left(12\,x\left(2\,x-3\right)+11\right)C_{2,4}-5\sqrt{3}\left(24\left(x-2\right)x+19\right)C_{2,5}+\sqrt{5}\left(24\,x\left(5\,x-6\right)+43\right)C_{2,6}\right) & \frac{1}{2} \le x < 1 \end{cases}$$

(4.3) Función

$$y_i(x) = \begin{cases} u_i(x) & x \in [\tau,\ 0) \end{cases}$$

$u_i(x) = 0$

(4.4) Funciones

$$y_i(x-\tau_{ij}) \simeq \begin{cases} u_i(x-\tau_{ij}) & x \in [0,\ \tau_{ij}] \\ C_i{}^T.P^{(\alpha_i)}.\Psi(x-\tau_{ij}) + E_i{}^T.\Psi(x-\tau_{ij}) & x \in [\tau_{ij},\ 1] \end{cases}$$

$$y_1\left(x-\frac{1}{3}\right) \simeq \begin{cases} \frac{-10\left(72x^2-84x+17\right)C_{1,1}-5\sqrt{3}\left(72x^2-120x+35\right)C_{1,2}+\sqrt{5}\left(360x^2-312x+67\right)C_{1,3}}{180\sqrt{2}} & \frac{1}{3}<x<\frac{5}{6} \\ \frac{1}{180\sqrt{2}}\left(-720C_{1,4}x^2-360\sqrt{3}C_{1,5}x^2+360\sqrt{5}C_{1,6}x^2+1560C_{1,4}x+960\sqrt{3}C_{1,5}x-672\sqrt{5}C_{1,6}x+60C_{1,1}+60\sqrt{3}C_{1,2}+60\sqrt{5}C_{1,3}-770C_{1,4}-565\sqrt{3}C_{1,5}+313\sqrt{5}C_{1,6}\right) & \frac{5}{6}\le x\le 1 \end{cases}$$

$$y_1\left(x-\frac{2}{3}\right) \simeq \begin{cases} \frac{-10\left(72x^2-132x+53\right)C_{1,1}-5\sqrt{3}\left(72x^2-168x+83\right)C_{1,2}+\sqrt{5}\left(360x^2-552x+211\right)C_{1,3}}{180\sqrt{2}} & \frac{2}{3}<x\le 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

$$y_2\left(x-\frac{1}{3}\right) \simeq \begin{cases} \frac{-10\left(72x^2-84x+17\right)C_{2,1}-5\sqrt{3}\left(72x^2-120x+35\right)C_{2,2}+\sqrt{5}\left(360x^2-312x+67\right)C_{2,3}}{180\sqrt{2}} & \frac{1}{3}<x<\frac{5}{6} \\ \frac{1}{180\sqrt{2}}\left(-720C_{2,4}x^2-360\sqrt{3}C_{2,5}x^2+360\sqrt{5}C_{2,6}x^2+1560C_{2,4}x+960\sqrt{3}C_{2,5}x-672\sqrt{5}C_{2,6}x+60C_{2,1}+60\sqrt{3}C_{2,2}+60\sqrt{5}C_{2,3}-770C_{2,4}-565\sqrt{3}C_{2,5}+313\sqrt{5}C_{2,6}\right) & \frac{5}{6}\le x\le 1 \end{cases}$$

$$y_2\left(x-\frac{2}{3}\right) \simeq \begin{cases} \frac{-10\left(72x^2-132x+53\right)C_{2,1}-5\sqrt{3}\left(72x^2-168x+83\right)C_{2,2}+\sqrt{5}\left(360x^2-552x+211\right)C_{2,3}}{180\sqrt{2}} & \frac{2}{3}<x\le 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

(4.5) Coeficientes *Wavelets* de Bernoulli de las expresiones $y_i(x-\tau_{ij})$

$$W\left[y_1\left(x-\frac{1}{3}\right)\right] = \begin{pmatrix} \frac{38C_{1,1}+37\sqrt{3}C_{1,2}-\sqrt{5}C_{1,3}}{5832} \\ \frac{-395\sqrt{3}C_{1,1}-660C_{1,2}+4\sqrt{15}C_{1,3}}{29\,160} \\ \frac{1063\sqrt{5}C_{1,1}+284\sqrt{15}C_{1,2}+20C_{1,3}}{29\,160} \\ \frac{2240C_{1,1}+970\sqrt{3}C_{1,2}-202\sqrt{5}C_{1,3}+190C_{1,4}+185\sqrt{3}C_{1,5}-5\sqrt{5}C_{1,6}}{29\,160} \\ \frac{1700\sqrt{3}C_{1,1}+5340C_{1,2}+500\sqrt{15}C_{1,3}-395\sqrt{3}C_{1,4}-660C_{1,5}+4\sqrt{15}C_{1,6}}{29\,160} \\ \frac{1556\sqrt{5}C_{1,1}+1708\sqrt{15}C_{1,2}+7180C_{1,3}+1063\sqrt{5}C_{1,4}+284\sqrt{15}C_{1,5}+20C_{1,6}}{29\,160} \end{pmatrix}$$

$$W\left[y_1\left(x-\frac{2}{3}\right)\right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{-290C_{1,1}-25\sqrt{3}C_{1,2}+37\sqrt{5}C_{1,3}}{14\,580} \\ \frac{310\sqrt{3}C_{1,1}-255C_{1,2}-47\sqrt{15}C_{1,3}}{14\,580} \\ \frac{898\sqrt{5}C_{1,1}+569\sqrt{15}C_{1,2}+455C_{1,3}}{14\,580} \end{pmatrix}$$

$$W\left[y_2\left(x-\frac{1}{3}\right)\right] = \begin{pmatrix} \frac{38C_{2,1}+37\sqrt{3}C_{2,2}-\sqrt{5}C_{2,3}}{5832} \\ \frac{-395\sqrt{3}C_{2,1}-660C_{2,2}+4\sqrt{15}C_{2,3}}{29\,160} \\ \frac{1063\sqrt{5}C_{2,1}+284\sqrt{15}C_{2,2}+20C_{2,3}}{29\,160} \\ \frac{2240C_{2,1}+970\sqrt{3}C_{2,2}-202\sqrt{5}C_{2,3}+190C_{2,4}+185\sqrt{3}C_{2,5}-5\sqrt{5}C_{2,6}}{29\,160} \\ \frac{1700\sqrt{3}C_{2,1}+5340C_{2,2}+500\sqrt{15}C_{2,3}-395\sqrt{3}C_{2,4}-660C_{2,5}+4\sqrt{15}C_{2,6}}{29\,160} \\ \frac{1556\sqrt{5}C_{2,1}+1708\sqrt{15}C_{2,2}+7180C_{2,3}+1063\sqrt{5}C_{2,4}+284\sqrt{15}C_{2,5}+20C_{2,6}}{29\,160} \end{pmatrix}$$

$$W[y_2(x--)] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{-290\,C_{2,1} - 25\,\sqrt{3}\,C_{2,2} + 37\,\sqrt{5}\,C_{2,3}}{14\,580} \\ \frac{310\,\sqrt{3}\,C_{2,1} - 255\,C_{2,2} - 47\,\sqrt{15}\,C_{2,3}}{14\,580} \\ \frac{898\,\sqrt{5}\,C_{2,1} + 569\,\sqrt{15}\,C_{2,2} + 455\,C_{2,3}}{14\,580} \end{pmatrix}$$

(4.6) Funciones $y_i(x-\tau_{i\,j})$ expandidas

$$y_1(x--) \simeq$$

$$\frac{\begin{pmatrix} 4\,\sqrt{10}\,x^2 & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{pmatrix}(1063\,\sqrt{5}\,C_{1,1} + 284\,\sqrt{15}\,C_{1,2} + 20\,C_{1,3})}{29\,160} + \frac{\begin{pmatrix} \sqrt{2}\,(40x^2 - 24x + 3) & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{pmatrix}(38\,C_{1,1} + 37\,\sqrt{3}\,C_{1,2} - \sqrt{5}\,C_{1,3})}{5832} +$$

$$\frac{\begin{pmatrix} \sqrt{6}\,(8x - 20x^2) & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{pmatrix}(-395\,\sqrt{3}\,C_{1,1} - 660\,C_{1,2} + 4\,\sqrt{15}\,C_{1,3})}{29\,160} +$$

$$\frac{1}{29\,160}\begin{pmatrix} \sqrt{10}\,(2x-1)^2 & \frac{1}{2} \le x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{pmatrix}(1556\,\sqrt{5}\,C_{1,1} + 1708\,\sqrt{15}\,C_{1,2} + 7180\,C_{1,3} + 1063\,\sqrt{5}\,C_{1,4} + 284\,\sqrt{15}\,C_{1,5} + 20\,C_{1,6}) +$$

$$\frac{1}{29\,160}\begin{pmatrix} \sqrt{2}\,(10(2x-1)^2 - 12(2x-1) + 3) & \frac{1}{2} \le x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{pmatrix}(2240\,C_{1,1} + 970\,\sqrt{3}\,C_{1,2} - 202\,\sqrt{5}\,C_{1,3} + 190\,C_{1,4} + 185\,\sqrt{3}\,C_{1,5} - 5\,\sqrt{5}\,C_{1,6}) +$$

$$\frac{1}{29\,160}\begin{pmatrix} \sqrt{6}\,(4(2x-1) - 5(2x-1)^2) & \frac{1}{2} \le x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{pmatrix}(1700\,\sqrt{3}\,C_{1,1} + 5340\,C_{1,2} + 500\,\sqrt{15}\,C_{1,3} - 395\,\sqrt{3}\,C_{1,4} - 660\,C_{1,5} + 4\,\sqrt{15}\,C_{1,6})$$

$$y_1(x--) \simeq \frac{\begin{pmatrix} \sqrt{10}\,(2x-1)^2 & \frac{1}{2} \le x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{pmatrix}(898\,\sqrt{5}\,C_{1,1} + 569\,\sqrt{15}\,C_{1,2} + 455\,C_{1,3})}{14\,580} +$$

$$\frac{1}{14\,580}\begin{pmatrix} \sqrt{2}\,(10(2x-1)^2 - 12(2x-1) + 3) & \frac{1}{2} \le x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{pmatrix}(-290\,C_{1,1} - 25\,\sqrt{3}\,C_{1,2} + 37\,\sqrt{5}\,C_{1,3}) +$$

$$\frac{1}{14\,580}\begin{pmatrix} \sqrt{6}\,(4(2x-1) - 5(2x-1)^2) & \frac{1}{2} \le x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{pmatrix}(310\,\sqrt{3}\,C_{1,1} - 255\,C_{1,2} - 47\,\sqrt{15}\,C_{1,3})$$

$$y_2(x--) \simeq$$

$$\frac{\begin{pmatrix} 4\,\sqrt{10}\,x^2 & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{pmatrix}(1063\,\sqrt{5}\,C_{2,1} + 284\,\sqrt{15}\,C_{2,2} + 20\,C_{2,3})}{29\,160} + \frac{\begin{pmatrix} \sqrt{2}\,(40x^2 - 24x + 3) & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{pmatrix}(38\,C_{2,1} + 37\,\sqrt{3}\,C_{2,2} - \sqrt{5}\,C_{2,3})}{5832} +$$

$$\frac{\begin{pmatrix} \sqrt{6}\,(8x - 20x^2) & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{pmatrix}(-395\,\sqrt{3}\,C_{2,1} - 660\,C_{2,2} + 4\,\sqrt{15}\,C_{2,3})}{29\,160} +$$

$$\frac{1}{29\,160}\begin{pmatrix} \sqrt{10}\,(2x-1)^2 & \frac{1}{2} \le x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{pmatrix}(1556\,\sqrt{5}\,C_{2,1} + 1708\,\sqrt{15}\,C_{2,2} + 7180\,C_{2,3} + 1063\,\sqrt{5}\,C_{2,4} + 284\,\sqrt{15}\,C_{2,5} + 20\,C_{2,6}) +$$

$$\frac{1}{29\,160}\begin{pmatrix} \sqrt{2}\,(10(2x-1)^2 - 12(2x-1) + 3) & \frac{1}{2} \le x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{pmatrix}(2240\,C_{2,1} + 970\,\sqrt{3}\,C_{2,2} - 202\,\sqrt{5}\,C_{2,3} + 190\,C_{2,4} + 185\,\sqrt{3}\,C_{2,5} - 5\,\sqrt{5}\,C_{2,6}) +$$

$$\frac{1}{29\,160}\begin{pmatrix} \sqrt{6}\,(4(2x-1) - 5(2x-1)^2) & \frac{1}{2} \le x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{pmatrix}(1700\,\sqrt{3}\,C_{2,1} + 5340\,C_{2,2} + 500\,\sqrt{15}\,C_{2,3} - 395\,\sqrt{3}\,C_{2,4} - 660\,C_{2,5} + 4\,\sqrt{15}\,C_{2,6})$$

$$y_2\left(x-\frac{2}{3}\right) \simeq \frac{\begin{cases} \sqrt{10}\,(2x-1)^2 & \frac{1}{2} \le x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases}(898\sqrt{5}\,C_{2,1}+569\sqrt{15}\,C_{2,2}+455\,C_{2,3})}{14\,580}+$$
$$\frac{1}{14\,580}\begin{cases} \sqrt{2}\,(10(2x-1)^2-12(2x-1)+3) & \frac{1}{2} \le x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases}(-290\,C_{2,1}-25\sqrt{3}\,C_{2,2}+37\sqrt{5}\,C_{2,3})+$$
$$\frac{1}{14\,580}\begin{cases} \sqrt{6}\,(4(2x-1)-5(2x-1)^2) & \frac{1}{2} \le x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases}(310\sqrt{3}\,C_{2,1}-255\,C_{2,2}-47\sqrt{15}\,C_{2,3})$$

Reglas:

$$y_1(x) \to \begin{cases} \frac{10(12(1-2x)x+1)C_{1,1}-5\sqrt{3}\,(24(x-1)x+1)C_{1,2}+\sqrt{5}\,(24x(5x-1)+1)C_{1,3}}{60\sqrt{2}} & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{60\sqrt{2}}(20C_{1,1}+20\sqrt{3}\,C_{1,2}+20\sqrt{5}\,C_{1,3}-10(12x(2x-3)+11)C_{1,4}-5\sqrt{3}\,(24(x-2)x+19)C_{1,5}+\sqrt{5}\,(24x(5x-6)+43)C_{1,6}) & \frac{1}{2} \le x < 1 \end{cases}$$
$$y_2(x) \to \begin{cases} \frac{10(12(1-2x)x+1)C_{2,1}-5\sqrt{3}\,(24(x-1)x+1)C_{2,2}+\sqrt{5}\,(24x(5x-1)+1)C_{2,3}}{60\sqrt{2}} & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{60\sqrt{2}}(20C_{2,1}+20\sqrt{3}\,C_{2,2}+20\sqrt{5}\,C_{2,3}-10(12x(2x-3)+11)C_{2,4}-5\sqrt{3}\,(24(x-2)x+19)C_{2,5}+\sqrt{5}\,(24x(5x-6)+43)C_{2,6}) & \frac{1}{2} \le x < 1 \end{cases}$$
$$y_1\left(x-\frac{1}{3}\right) \to \begin{cases} \frac{-10(72x^2-84x+17)C_{1,1}-5\sqrt{3}\,(72x^2-120x+35)C_{1,2}+\sqrt{5}\,(360x^2-312x+67)C_{1,3}}{180\sqrt{2}} & \frac{1}{3} < x < \frac{5}{6} \\ \frac{1}{180\sqrt{2}}(-720C_{1,4}x^2-360\sqrt{3}\,C_{1,5}x^2+360\sqrt{5}\,C_{1,6}x^2+1560C_{1,4}x+960\sqrt{3}\,C_{1,5}x-672\sqrt{5}\,C_{1,6}x+60C_{1,1}+60\sqrt{3}\,C_{1,2}+60\sqrt{5}\,C_{1,3}-770C_{1,4}-565\sqrt{3}\,C_{1,5}+313\sqrt{5}\,C_{1,6}) & \frac{5}{6} \le x \le 1 \end{cases}$$
$$y_1\left(x-\frac{2}{3}\right) \to \begin{cases} \frac{-10(72x^2-132x+53)C_{1,1}-5\sqrt{3}\,(72x^2-168x+83)C_{1,2}+\sqrt{5}\,(360x^2-552x+211)C_{1,3}}{180\sqrt{2}} & \frac{2}{3} < x \le 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$
$$y_2\left(x-\frac{1}{3}\right) \to \begin{cases} \frac{-10(72x^2-84x+17)C_{2,1}-5\sqrt{3}\,(72x^2-120x+35)C_{2,2}+\sqrt{5}\,(360x^2-312x+67)C_{2,3}}{180\sqrt{2}} & \frac{1}{3} < x < \frac{5}{6} \\ \frac{1}{180\sqrt{2}}(-720C_{2,4}x^2-360\sqrt{3}\,C_{2,5}x^2+360\sqrt{5}\,C_{2,6}x^2+1560C_{2,4}x+960\sqrt{3}\,C_{2,5}x-672\sqrt{5}\,C_{2,6}x+60C_{2,1}+60\sqrt{3}\,C_{2,2}+60\sqrt{5}\,C_{2,3}-770C_{2,4}-565\sqrt{3}\,C_{2,5}+313\sqrt{5}\,C_{2,6}) & \frac{5}{6} \le x \le 1 \end{cases}$$
$$y_2\left(x-\frac{2}{3}\right) \to \begin{cases} \frac{-10(72x^2-132x+53)C_{2,1}-5\sqrt{3}\,(72x^2-168x+83)C_{2,2}+\sqrt{5}\,(360x^2-552x+211)C_{2,3}}{180\sqrt{2}} & \frac{2}{3} < x \le 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

(5) Sistema algebraico no lineal de ecuaciones del problema (P_1):

$$(P_1) \equiv \begin{cases} \underbrace{D^{(\alpha_i)}\,y_i(x)}_{\mathrm{EC}_{1\,i}(x)} = \underbrace{f_i\left(x,\, y_i(x),\, y_i\left(x-\tau_{i\,j}\right)\right)}_{\mathrm{EC}_{2\,i}(x)} & x \in [0,1] \end{cases}$$

$$\mathrm{EC}_{1\,i}(x) = \mathrm{EC}_{2\,i}(x)$$

$$\bullet\ \mathrm{EC}_{1,1}(x) = \begin{cases} \sqrt{2}\,\left((40x^2-24x+3)C_{1,1}+4x\left(\sqrt{3}\,(2-5x)C_{1,2}+\sqrt{5}\,xC_{1,3}\right)\right) & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ \sqrt{2}\,\left((40x^2-64x+25)C_{1,4}-(2x-1)\left(\sqrt{3}\,(10x-9)C_{1,5}+\sqrt{5}\,(1-2x)C_{1,6}\right)\right) & \frac{1}{2} \le x < 1 \end{cases}$$

$$\bullet\ \mathrm{EC}_{2,1}(x) = \begin{cases} \sqrt{2}\,\left((40x^2-24x+3)C_{2,1}+4x\left(\sqrt{3}\,(2-5x)C_{2,2}+\sqrt{5}\,xC_{2,3}\right)\right) & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ \sqrt{2}\,\left((40x^2-64x+25)C_{2,4}-(2x-1)\left(\sqrt{3}\,(10x-9)C_{2,5}+\sqrt{5}\,(1-2x)C_{2,6}\right)\right) & \frac{1}{2} \le x < 1 \end{cases}$$

$$\bullet\ \mathrm{EC}_{1,2}(x) = 2\begin{cases} \frac{-10(72x^2-132x+53)C_{1,1}-5\sqrt{3}\,(72x^2-168x+83)C_{1,2}+\sqrt{5}\,(360x^2-552x+211)C_{1,3}}{180\sqrt{2}} & \frac{2}{3} < x \le 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases}+x\begin{cases} \frac{-10(72x^2-132x+53)C_{2,1}-5\sqrt{3}\,(72x^2-168x+83)C_{2,2}+\sqrt{5}\,(360x^2-552x+211)C_{2,3}}{180\sqrt{2}} & \frac{2}{3} < x \le 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases}+$$
$$x\begin{cases} \frac{-10(72x^2-84x+17)C_{1,1}-5\sqrt{3}\,(72x^2-120x+35)C_{1,2}+\sqrt{5}\,(360x^2-312x+67)C_{1,3}}{180\sqrt{2}} & \frac{1}{3} < x < \frac{5}{6} \\ \frac{1}{180\sqrt{2}}(-720C_{1,4}x^2-360\sqrt{3}\,C_{1,5}x^2+360\sqrt{5}\,C_{1,6}x^2+1560C_{1,4}x+960\sqrt{3}\,C_{1,5}x-672\sqrt{5}\,C_{1,6}x+60C_{1,1}+60\sqrt{3}\,C_{1,2}+60\sqrt{5}\,C_{1,3}-770C_{1,4}-565\sqrt{3}\,C_{1,5}+313\sqrt{5}\,C_{1,6}) & \frac{5}{6} \le x \le 1 \end{cases}+$$
$$\begin{cases} \frac{-10(72x^2-84x+17)C_{2,1}-5\sqrt{3}\,(72x^2-120x+35)C_{2,2}+\sqrt{5}\,(360x^2-312x+67)C_{2,3}}{180\sqrt{2}} & \frac{1}{3} < x < \frac{5}{6} \\ \frac{1}{180\sqrt{2}}(-720C_{2,4}x^2-360\sqrt{3}\,C_{2,5}x^2+360\sqrt{5}\,C_{2,6}x^2+1560C_{2,4}x+960\sqrt{3}\,C_{2,5}x-672\sqrt{5}\,C_{2,6}x+60C_{2,1}+60\sqrt{3}\,C_{2,2}+60\sqrt{5}\,C_{2,3}-770C_{2,4}-565\sqrt{3}\,C_{2,5}+313\sqrt{5}\,C_{2,6}) & \frac{5}{6} \le x \le 1 \end{cases}$$
$$\bullet\ \mathrm{EC}_{2,2}(x) = \begin{cases} \frac{-10(72x^2-132x+53)C_{1,1}-5\sqrt{3}\,(72x^2-168x+83)C_{1,2}+\sqrt{5}\,(360x^2-552x+211)C_{1,3}}{180\sqrt{2}} & \frac{2}{3} < x \le 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases}x^2+$$
$$\begin{cases} \frac{-10(72x^2-84x+17)C_{1,1}-5\sqrt{3}\,(72x^2-120x+35)C_{1,2}+\sqrt{5}\,(360x^2-312x+67)C_{1,3}}{180\sqrt{2}} & \frac{1}{3} < x < \frac{5}{6} \\ \frac{1}{180\sqrt{2}}(-720C_{1,4}x^2-360\sqrt{3}\,C_{1,5}x^2+360\sqrt{5}\,C_{1,6}x^2+1560C_{1,4}x+960\sqrt{3}\,C_{1,5}x-672\sqrt{5}\,C_{1,6}x+60C_{1,1}+60\sqrt{3}\,C_{1,2}+60\sqrt{5}\,C_{1,3}-770C_{1,4}-565\sqrt{3}\,C_{1,5}+313\sqrt{5}\,C_{1,6}) & \frac{5}{6} \le x \le 1 \end{cases}x+$$
$$2\begin{cases} \frac{-10(72x^2-84x+17)C_{2,1}-5\sqrt{3}\,(72x^2-120x+35)C_{2,2}+\sqrt{5}\,(360x^2-312x+67)C_{2,3}}{180\sqrt{2}} & \frac{1}{3} < x < \frac{5}{6} \\ \frac{1}{180\sqrt{2}}(-720C_{2,4}x^2-360\sqrt{3}\,C_{2,5}x^2+360\sqrt{5}\,C_{2,6}x^2+1560C_{2,4}x+960\sqrt{3}\,C_{2,5}x-672\sqrt{5}\,C_{2,6}x+60C_{2,1}+60\sqrt{3}\,C_{2,2}+60\sqrt{5}\,C_{2,3}-770C_{2,4}-565\sqrt{3}\,C_{2,5}+313\sqrt{5}\,C_{2,6}) & \frac{5}{6} \le x \le 1 \end{cases}x+2x+1$$

(6) Método de Colocación.
(6a) Creación de un sistema algebraico de ecuaciones con los coeficientes:

$C_i{}^T = (C_{i,1}\ C_{i,2}\ \cdots\ C_{i,m^*})$

Los puntos de colocación son los ceros del polinomio de Legendre desplazado.
•Polinomio de *Legendre* en $[-1, 1]$

$$P_{m^*}(x) = \frac{1}{16}\left(231\,x^6 - 315\,x^4 + 105\,x^2 - 5\right)$$

• Polinomio de *Legendre desplazado* en $[0, 1]$ y ceros:

$$L_{m^*}(x) = 924\,x^6 - 2772\,x^5 + 3150\,x^4 - 1680\,x^3 + 420\,x^2 - 42\,x + 1 \qquad x \in [0, 1]$$

$L_{m^*}(x) = 0 \Rightarrow x_k\ (k = 1, 2, \cdots, m^*) \in [0, 1]$

• Ceros:

$$x_k = \begin{pmatrix} x_1 & 0.0337652 \\ x_2 & 0.169395 \\ x_3 & 0.38069 \\ x_4 & 0.61931 \\ x_5 & 0.830605 \\ x_6 & 0.966235 \end{pmatrix}$$

(6a.i) Resolución del sistema de ecuaciones en los coeficientes

$C_i{}^T=(C_{i,1}\ C_{i,2}\ \cdots\ C_{i,m^*})$ $\begin{cases} i = 1, 2, \cdots, n_e \\ j = 1, 2, , \cdots, m^* \quad m^* = 2^k\,(M+1) \end{cases}$ $\mathrm{ec}_1 = \mathrm{ec}_2$

□ =

□

• Método *Affine Covariant Newton*:

$$C_{i\,j} = \begin{pmatrix} C_{1,1} \to 0.000916759 \\ C_{1,2} \to -0.00546221 \\ C_{1,3} \to 0.0285052 \\ C_{1,4} \to 0.0617351 \\ C_{1,5} \to 0.121462 \\ C_{1,6} \to 0.601549 \\ C_{2,1} \to 0.236401 \\ C_{2,2} \to 0.506149 \\ C_{2,3} \to 0.944046 \\ C_{2,4} \to 0.545969 \\ C_{2,5} \to 1.05968 \\ C_{2,6} \to 2.28906 \end{pmatrix}$$

• Método de *Newton*:

$$C_{i\,j} = \begin{pmatrix} C_{1,1} \to 0.000916759 \\ C_{1,2} \to -0.00546221 \\ C_{1,3} \to 0.0285052 \\ C_{1,4} \to 0.0617351 \\ C_{1,5} \to 0.121462 \\ C_{1,6} \to 0.601549 \\ C_{2,1} \to 0.236401 \\ C_{2,2} \to 0.506149 \\ C_{2,3} \to 0.944046 \\ C_{2,4} \to 0.545969 \\ C_{2,5} \to 1.05968 \\ C_{2,6} \to 2.28906 \end{pmatrix}$$

(6a.ii) La solución aproximada del problema es

$y_i(x) \simeq C_i{}^T.P^{(\alpha_i)}.\Psi(x) + E_i{}^T.\Psi(x)$

$$y_1(x) = \begin{cases} 0.100928\,x^2 - 0.0301114\,x + 0.0014167 & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 1.43013\,x^2 - 1.42576\,x + 0.379086 & \frac{1}{2} \le x < 1 \end{cases}$$

$$y_2(x) = \begin{cases} 1.07688\,x^2 + 0.977062\,x + 0.00107921 & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 3.09872\,x^2 - 1.17864\,x + 0.591064 & \frac{1}{2} \le x < 1 \end{cases}$$

(6b) Se calcula la función residuo $R_i(x)$

$R_i(x) = \mathrm{EC}_{1\,i}(x) - \mathrm{EC}_{2\,i}(x)$

$$R_1(x) = EC_{1,1}(x) - EC_{2,1}(x) = -2\left(\begin{cases} \frac{-10\left(72x^2-132x+53\right)C_{1,1}-5\sqrt{3}\left(72x^2-168x+83\right)C_{1,2}+\sqrt{5}\left(360x^2-552x+211\right)C_{1,3}}{180\sqrt{2}} & \frac{2}{3}<x\le 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases}\right) - x\left(\begin{cases} \frac{-10\left(72x^2-132x+53\right)C_{2,1}-5\sqrt{3}\left(72x^2-168x+83\right)C_{2,2}+\sqrt{5}\left(360x^2-552x+211\right)C_{2,3}}{180\sqrt{2}} & \frac{2}{3}<x\le 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases}\right) -$$

$$x\left(\begin{cases} \frac{-10\left(72x^2-84x+17\right)C_{1,1}-5\sqrt{3}\left(72x^2-120x+35\right)C_{1,2}+\sqrt{5}\left(360x^2-312x+67\right)C_{1,3}}{180\sqrt{2}} & \frac{1}{3}<x<\frac{5}{6} \\ \frac{1}{180\sqrt{2}}\left(-720C_{1,4}x^2-360\sqrt{3}C_{1,5}x^2+360\sqrt{5}C_{1,6}x^2+1560C_{1,4}x+960\sqrt{3}C_{1,5}x-672\sqrt{5}C_{1,6}x+60C_{1,1}+60\sqrt{3}C_{1,2}+60\sqrt{5}C_{1,3}-770C_{1,4}-565\sqrt{3}C_{1,5}+313\sqrt{5}C_{1,6}\right) & \frac{5}{6}\le x\le 1 \end{cases}\right) +$$

$$\left(\begin{cases} \sqrt{2}\left(\left(40x^2-24x+3\right)C_{1,1}+4x\left(\sqrt{3}\left(2-5x\right)C_{1,2}+\sqrt{5}\,x\,C_{1,3}\right)\right) & 0\le x<\frac{1}{2} \\ \sqrt{2}\left(\left(40x^2-64x+25\right)C_{1,4}-(2x-1)\left(\sqrt{3}\left(10x-9\right)C_{1,5}+\sqrt{5}\left(1-2x\right)C_{1,6}\right)\right) & \frac{1}{2}\le x<1 \end{cases}\right) -$$

$$\left(\begin{cases} \frac{-10\left(72x^2-84x+17\right)C_{2,1}-5\sqrt{3}\left(72x^2-120x+35\right)C_{2,2}+\sqrt{5}\left(360x^2-312x+67\right)C_{2,3}}{180\sqrt{2}} & \frac{1}{3}<x<\frac{5}{6} \\ \frac{1}{180\sqrt{2}}\left(-720C_{2,4}x^2-360\sqrt{3}C_{2,5}x^2+360\sqrt{5}C_{2,6}x^2+1560C_{2,4}x+960\sqrt{3}C_{2,5}x-672\sqrt{5}C_{2,6}x+60C_{2,1}+60\sqrt{3}C_{2,2}+60\sqrt{5}C_{2,3}-770C_{2,4}-565\sqrt{3}C_{2,5}+313\sqrt{5}C_{2,6}\right) & \frac{5}{6}\le x\le 1 \end{cases}\right)$$

$$R_2(x) = EC_{1,2}(x) - EC_{2,2}(x) = -\left(\begin{cases} \frac{-10\left(72x^2-132x+53\right)C_{1,1}-5\sqrt{3}\left(72x^2-168x+83\right)C_{1,2}+\sqrt{5}\left(360x^2-552x+211\right)C_{1,3}}{180\sqrt{2}} & \frac{2}{3}<x\le 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases}\right)x^2 -$$

$$\left(\begin{cases} \frac{-10\left(72x^2-84x+17\right)C_{1,1}-5\sqrt{3}\left(72x^2-120x+35\right)C_{1,2}+\sqrt{5}\left(360x^2-312x+67\right)C_{1,3}}{180\sqrt{2}} & \frac{1}{3}<x<\frac{5}{6} \\ \frac{1}{180\sqrt{2}}\left(-720C_{1,4}x^2-360\sqrt{3}C_{1,5}x^2+360\sqrt{5}C_{1,6}x^2+1560C_{1,4}x+960\sqrt{3}C_{1,5}x-672\sqrt{5}C_{1,6}x+60C_{1,1}+60\sqrt{3}C_{1,2}+60\sqrt{5}C_{1,3}-770C_{1,4}-565\sqrt{3}C_{1,5}+313\sqrt{5}C_{1,6}\right) & \frac{5}{6}\le x\le 1 \end{cases}\right)x -$$

$$2\left(\begin{cases} \frac{-10\left(72x^2-84x+17\right)C_{2,1}-5\sqrt{3}\left(72x^2-120x+35\right)C_{2,2}+\sqrt{5}\left(360x^2-312x+67\right)C_{2,3}}{180\sqrt{2}} & \frac{1}{3}<x<\frac{5}{6} \\ \frac{1}{180\sqrt{2}}\left(-720C_{2,4}x^2-360\sqrt{3}C_{2,5}x^2+360\sqrt{5}C_{2,6}x^2+1560C_{2,4}x+960\sqrt{3}C_{2,5}x-672\sqrt{5}C_{2,6}x+60C_{2,1}+60\sqrt{3}C_{2,2}+60\sqrt{5}C_{2,3}-770C_{2,4}-565\sqrt{3}C_{2,5}+313\sqrt{5}C_{2,6}\right) & \frac{5}{6}\le x\le 1 \end{cases}\right)x -$$

$$2x + \left(\begin{cases} \sqrt{2}\left(\left(40x^2-24x+3\right)C_{2,1}+4x\left(\sqrt{3}\left(2-5x\right)C_{2,2}+\sqrt{5}\,x\,C_{2,3}\right)\right) & 0\le x<\frac{1}{2} \\ \sqrt{2}\left(\left(40x^2-64x+25\right)C_{2,4}-(2x-1)\left(\sqrt{3}\left(10x-9\right)C_{2,5}+\sqrt{5}\left(1-2x\right)C_{2,6}\right)\right) & \frac{1}{2}\le x<1 \end{cases}\right) - 1$$

(6b.i) Se aplica el método Tau (Galerkin) para que el residuo $R_i(x)$ sea ortogonal a $\psi_{n\,m}(x)$

$$\int_0^1 R_i(x)\,\psi_{n\,m}(x)\,dx = 0 \quad \begin{cases} n = 1, 2, \cdots, 2^{k-1} \\ m = 0, 1, \cdots, M-1 \end{cases}$$

obteniéndose un sistema algebraico de ecuaciones.

Sistema algebraico de ecuaciones en ${C_i}^T = (C_{i,1}\ C_{i,2}\ \cdots\ C_{i,m^*})$

$$\begin{pmatrix} \frac{348\,586C_{1,1}-1027\sqrt{3}C_{1,2}+19\sqrt{5}C_{1,3}-2280C_{2,1}-2220\sqrt{3}C_{2,2}+60\sqrt{5}C_{2,3}}{349\,920} \\ \frac{4706\sqrt{3}C_{1,1}+707\,169C_{1,2}-31\sqrt{15}C_{1,3}+9480\sqrt{3}C_{2,1}+15\,840C_{2,2}-96\sqrt{15}C_{2,3}}{699\,840} \\ \frac{-11\,146\sqrt{5}C_{1,1}-3215\sqrt{15}C_{1,2}+699\,679C_{1,3}-25\,512\sqrt{5}C_{2,1}-6816\sqrt{15}C_{2,2}-480C_{2,3}}{699\,840} \\ \frac{-328C_{1,1}-3944\sqrt{3}C_{1,2}+56\sqrt{5}C_{1,3}+347\,446C_{1,4}-2137\sqrt{3}C_{1,5}+49\sqrt{5}C_{1,6}-22\,088C_{2,1}-11\,764\sqrt{3}C_{2,2}+1540\sqrt{5}C_{2,3}-2280C_{2,4}-2220\sqrt{3}C_{2,5}+60\sqrt{5}C_{2,6}}{349\,920} \\ -\frac{54\,668C_{1,1}+19\,324\sqrt{3}C_{1,2}+2204\sqrt{5}C_{1,3}-9446C_{1,4}-238\,363\sqrt{3}C_{1,5}+79\sqrt{5}C_{1,6}+49\,648C_{2,1}+37\,784\sqrt{3}C_{2,2}+9736\sqrt{5}C_{2,3}-9480C_{2,4}-5280\sqrt{3}C_{2,5}+96\sqrt{5}C_{2,6}}{233\,280\sqrt{3}} \\ \frac{-118\,916\sqrt{5}C_{1,1}-90\,292\sqrt{15}C_{1,2}-198\,052C_{1,3}-23\,902\sqrt{5}C_{1,4}-6623\sqrt{15}C_{1,5}+699\,439C_{1,6}-75\,856\sqrt{5}C_{2,1}-66\,152\sqrt{15}C_{2,2}-193\,112C_{2,3}-25\,512\sqrt{5}C_{2,4}-6816\sqrt{15}C_{2,5}-480C_{2,6}}{699\,840} \\ \frac{-1334C_{1,1}-1027\sqrt{3}C_{1,2}+19\sqrt{5}C_{1,3}+347\,252C_{2,1}-2054\sqrt{3}C_{2,2}+38\sqrt{5}C_{2,3}-58\,320\sqrt{2}}{349\,920} \\ \frac{4706\sqrt{3}C_{1,1}+7329C_{1,2}-31\sqrt{15}C_{1,3}+9412\sqrt{3}C_{2,1}+714\,498C_{2,2}-62\sqrt{15}C_{2,3}-145\,800\sqrt{6}}{699\,840} \\ \frac{-11\,146\sqrt{5}C_{1,1}-3215\sqrt{15}C_{1,2}-161C_{1,3}-22\,292\sqrt{5}C_{2,1}-6430\sqrt{15}C_{2,2}+699\,518C_{2,3}-204\,120\sqrt{10}}{699\,840} \\ \frac{-1\,171\,400C_{1,1}-613\,840\sqrt{3}C_{1,2}+100\,096\sqrt{5}C_{1,3}-259\,770C_{1,4}-224\,385\sqrt{3}C_{1,5}+5145\sqrt{5}C_{1,6}-2\,992\,080C_{2,1}-1\,080\,240\sqrt{3}C_{2,2}+384\,720\sqrt{5}C_{2,3}+36\,222\,060C_{2,4}-448\,770\sqrt{3}C_{2,5}+10\,290\sqrt{5}C_{2,6}-12\,247\,200\sqrt{2}}{36\,741\,600} \\ \frac{-3\,074\,380\sqrt{3}C_{1,1}-6\,891\,540C_{1,2}-468\,604\sqrt{15}C_{1,3}+991\,830\sqrt{3}C_{1,4}+1\,601\,145C_{1,5}-8295\sqrt{15}C_{1,6}-5\,230\,680\sqrt{3}C_{2,1}-17\,314\,920C_{2,2}-1\,410\,360\sqrt{15}C_{2,3}+1\,983\,660\sqrt{5}C_{2,4}+76\,685\,490C_{2,5}-16\,590\sqrt{15}C_{2,6}-27\,556\,200\sqrt{6}}{73\,483\,200} \\ \frac{-1\,414\,964\sqrt{5}C_{1,1}-1\,237\,732\sqrt{15}C_{1,2}-3\,658\,324C_{1,3}-501\,942\sqrt{5}C_{1,4}-139\,083\sqrt{15}C_{1,5}-8421C_{1,6}-1\,373\,736\sqrt{5}C_{2,1}-1\,498\,056\sqrt{15}C_{2,2}-6\,483\,624C_{2,3}-1\,003\,884\sqrt{5}C_{2,4}-278\,166\sqrt{15}C_{2,5}+14\,679\,798C_{2,6}-6\,735\,960\sqrt{10}}{14\,696\,640} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(6b.ii) Resolución del sistema de ecuaciones
• Método *Affine Covariant Newton*:

$$C_i = \begin{pmatrix} C_{1,1} \to 0.00658562 \\ C_{1,2} \to -0.0162731 \\ C_{1,3} \to 0.0390218 \\ C_{1,4} \to 0.0500366 \\ C_{1,5} \to 0.122798 \\ C_{1,6} \to 0.60251 \\ C_{2,1} \to 0.242285 \\ C_{2,2} \to 0.494733 \\ C_{2,3} \to 0.957587 \\ C_{2,4} \to 0.523341 \\ C_{2,5} \to 1.0637 \\ C_{2,6} \to 2.29281 \end{pmatrix}$$

• Método de *Newton*:

$$C_i = \begin{pmatrix} C_{1,1} \to 0.00658562 \\ C_{1,2} \to -0.0162731 \\ C_{1,3} \to 0.0390218 \\ C_{1,4} \to 0.0500366 \\ C_{1,5} \to 0.122798 \\ C_{1,6} \to 0.60251 \\ C_{2,1} \to 0.242285 \\ C_{2,2} \to 0.494733 \\ C_{2,3} \to 0.957587 \\ C_{2,4} \to 0.523341 \\ C_{2,5} \to 1.0637 \\ C_{2,6} \to 2.29281 \end{pmatrix}$$

(6b.iii) La solución aproximada del problema es
$y_i(x) \simeq C_i^T.P^{(\alpha_i)}.\Psi(x) + E_i^T.\Psi(x)$

$$y_1(x) = \begin{cases} 0.144632\,x^2 - 0.0552268\,x + 0.0034653 & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 1.46299\,x^2 - 1.4725\,x + 0.395218 & \frac{1}{2} \le x < 1 \end{cases}$$

$$y_2(x) = \begin{cases} 1.13103\,x^2 + 0.948856\,x + 0.00329463 & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 3.16474\,x^2 - 1.2692\,x + 0.620724 & \frac{1}{2} \le x < 1 \end{cases}$$

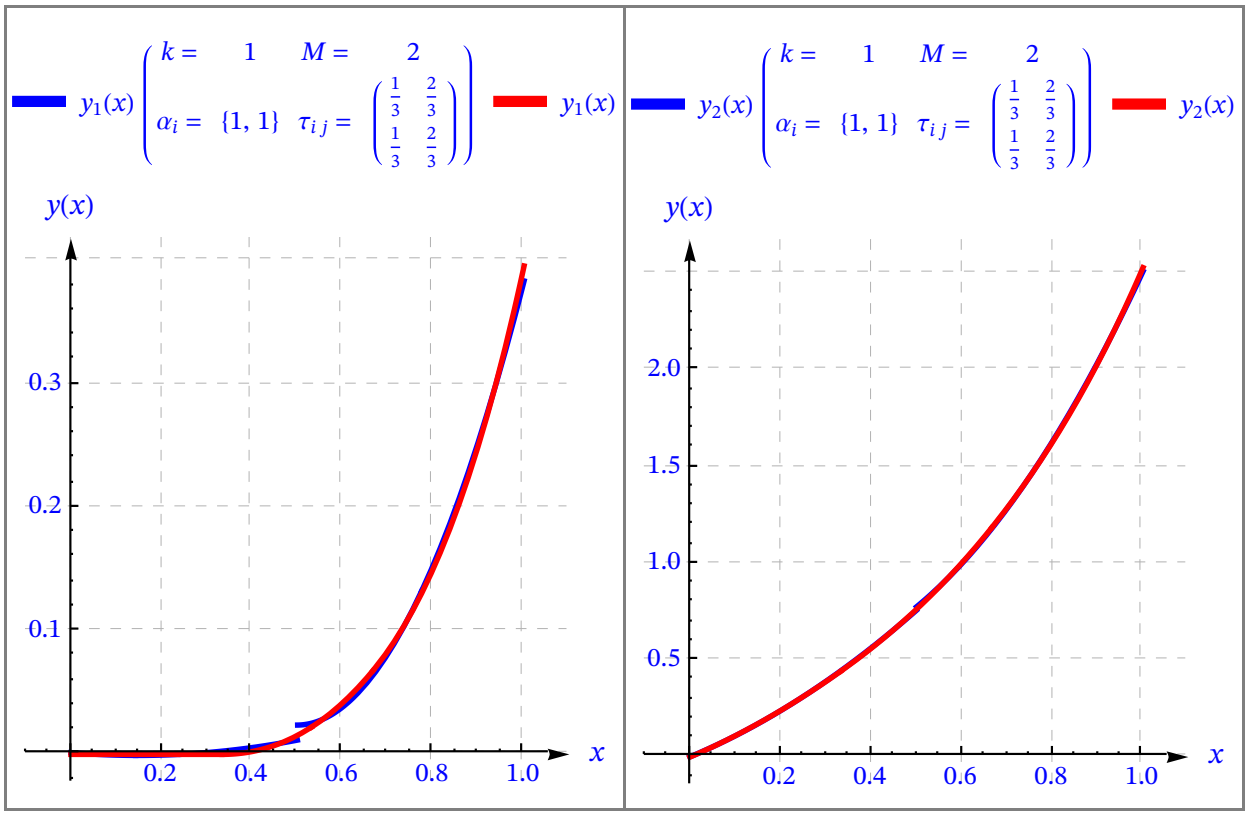
(7) Soluciones aproximadas obtenidas:

$$y_1(x) = \begin{cases} 0.100928\,x^2 - 0.0301114\,x + 0.0014167 & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 1.43013\,x^2 - 1.42576\,x + 0.379086 & \frac{1}{2} \le x < 1 \end{cases}$$

$$y_2(x) = \begin{cases} 1.07688\,x^2 + 0.977062\,x + 0.00107921 & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 3.09872\,x^2 - 1.17864\,x + 0.591064 & \frac{1}{2} \le x < 1 \end{cases}$$

$$y_1(x) = \begin{cases} 0.144632\,x^2 - 0.0552268\,x + 0.0034653 & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 1.46299\,x^2 - 1.4725\,x + 0.395218 & \frac{1}{2} \le x < 1 \end{cases}$$

$$y_2(x) = \begin{cases} 1.13103\,x^2 + 0.948856\,x + 0.00329463 & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 3.16474\,x^2 - 1.2692\,x + 0.620724 & \frac{1}{2} \le x < 1 \end{cases}$$



Errores de la variable $y_1(x)$:

Tabla de valores aproximados y errores.

x_k	$f(x_k)$(ChWM)	$f(x_k)$	$\lvert f(x_k)(\text{ChWM}) - f(x_k)\rvert$
0.	0.001416704111	0	1.4167×10^{-3}
0.1	−0.000585156858	0	5.85157×10^{-4}
0.2	−0.000568456213	0	5.68456×10^{-4}
0.3	0.001466806046	0	1.46681×10^{-3}
0.4	0.005520629921	0.002320987654	3.19964×10^{-3}
0.5	0.023740766380	0.015432098765	8.30867×10^{-3}
0.6	0.038479538674	0.041876543210	3.397×10^{-3}
0.7	0.081820909503	0.084054310700	2.2334×10^{-3}
0.8	0.153764878867	0.150748312757	3.01657×10^{-3}
0.9	0.254311446766	0.251288919753	3.02253×10^{-3}

Error L_∞:

$$\text{error}-L_\infty = \underset{0\le k\le N}{\text{Máx}}\left(\lvert f(x_k) - f(x_k)(\text{ChWM})\rvert\right) = 8.30867\times10^{-3}$$

Error$-L_2$:

$$\text{error}-L_2 = \left(\sum_{k=0}^{N}\lvert f(x_k) - f(x_k)(\text{ChWM})\rvert^2\right)^{\frac{1}{2}} = 1.09022\times10^{-2}$$

Error−RMS:

$$\text{error}-\text{RMS} = \frac{1}{N}\left(\sum_{k=0}^{N}\lvert f(x_k) - f(x_k)(\text{ChWM})\rvert^2\right)^{\frac{1}{2}} = 1.09022\times10^{-3}$$

Errores de la variable $y_2(x)$:

Tabla de valores aproximados y errores.

x_k	$f(x_k)$(ChWM)	$f(x_k)$	$\lvert f(x_k)(\text{ChWM}) - f(x_k)\rvert$
0.	0.001079211736	0.000000000000	1.07921×10^{-3}
0.1	0.109554241324	0.110000000000	4.45759×10^{-4}
0.2	0.239566963481	0.240000000000	4.33037×10^{-4}
0.3	0.391117378206	0.390000000000	1.11738×10^{-3}
0.4	0.564205485500	0.561754732510	2.45075×10^{-3}
0.5	0.776421878081	0.763760288066	1.26616×10^{-2}
0.6	0.999416665549	1.003088065844	3.6714×10^{-3}
0.7	1.284385838790	1.287681818930	3.29598×10^{-3}
0.8	1.631329397804	1.627485893004	3.8435×10^{-3}
0.9	2.040247342592	2.035950279835	4.29706×10^{-3}

Error L_∞:

$$\text{error}-L_\infty = \underset{0 \le k \le N}{\text{Máx}} \left(\lvert f(x_k) - f(x_k)(\text{ChWM})\rvert\right) = 1.26616 \times 10^{-2}$$

Error$-L_2$:

$$\text{error}-L_2 = \left(\sum_{k=0}^{N} \lvert f(x_k) - f(x_k)(\text{ChWM}))\rvert^2\right)^{\frac{1}{2}} = 1.50566 \times 10^{-2}$$

Error−RMS:

$$\text{error}-\text{RMS} = \frac{1}{N}\left(\sum_{k=0}^{N} \lvert f(x_k) - f(x_k)(\text{ChWM})\rvert^2\right)^{\frac{1}{2}} = 1.50566 \times 10^{-3}$$

4.5.4. Problemas (SFDDE)

■ Sistema de Ecuaciones Diferenciales Fraccionarias con Retraso Constante (SFDDE) $y_i(x-\tau_{ij})$

■ **Problema 4.5.4.** ([MOHA18])

Considérese el sistema de ecuaciones diferenciales fraccionarias con retraso (SFDDE) con las condiciones iniciales dadas:

$$(P_1)\equiv\begin{cases}\begin{pmatrix}D^{(\alpha_1)}\,y_1(x)\\ D^{(\alpha_2)}\,y_2(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -25 & -5x\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}y_1\left(x-\frac{1}{4}\right)\\ y_2\left(x-\frac{1}{4}\right)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\phi(x) & x\in(0,\,1),\ 0<\alpha\le 1\\ y(x)=1 & x\ge 0\\ \begin{pmatrix}y_1(x)\\ y_2(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} & -\frac{1}{4}\le x\le 0\end{cases}$$

La solución exacta del problema cuando $\alpha=1$ es

$$y_1(x)=\begin{cases}0 & 0\le x<\frac{1}{4}\\ \frac{x^2}{2}-\frac{x}{4}+\frac{1}{32} & \frac{1}{4}\le x<\frac{1}{2}\\ -\frac{5x^4}{12}+\frac{5x^3}{8}+\frac{3x^2}{16}-\frac{19x}{96}+\frac{1}{32} & \frac{1}{2}\le x<\frac{3}{4}\\ \frac{5x^6}{18}-\frac{85x^5}{96}-\frac{45x^4}{128}+\frac{785x^3}{256}-\frac{3183x^2}{1024}+\frac{37391x}{24576}-\frac{9641}{32768} & \frac{3}{4}\le x\le 1\end{cases}$$

$$y_2(x)=\begin{cases}x & 0\le x<\frac{1}{4}\\ -\frac{5x^3}{3}+\frac{5x^2}{8}+x-\frac{5}{384} & \frac{1}{4}\le x<\frac{1}{2}\\ \frac{5x^5}{3}-\frac{75x^4}{32}-\frac{115x^3}{24}+\frac{1295x^2}{192}-\frac{17x}{8}+\frac{775}{1536} & \frac{1}{2}\le x<\frac{3}{4}\\ -\frac{25x^7}{21}+\frac{2125x^6}{576}+\frac{335x^5}{96}-\frac{55325x^4}{3072}+\frac{21515x^3}{1536}-\frac{95755x^2}{49152}-\frac{1051x}{1024}+\frac{3666575}{5505024} & \frac{3}{4}\le x\le 1\end{cases}$$

(i) Calcúlese la solución numérica mediante el método *Wavelets* de Chelyshkov (ChWM) con los parámetros k, M, α_i, τ_{ij} dados.

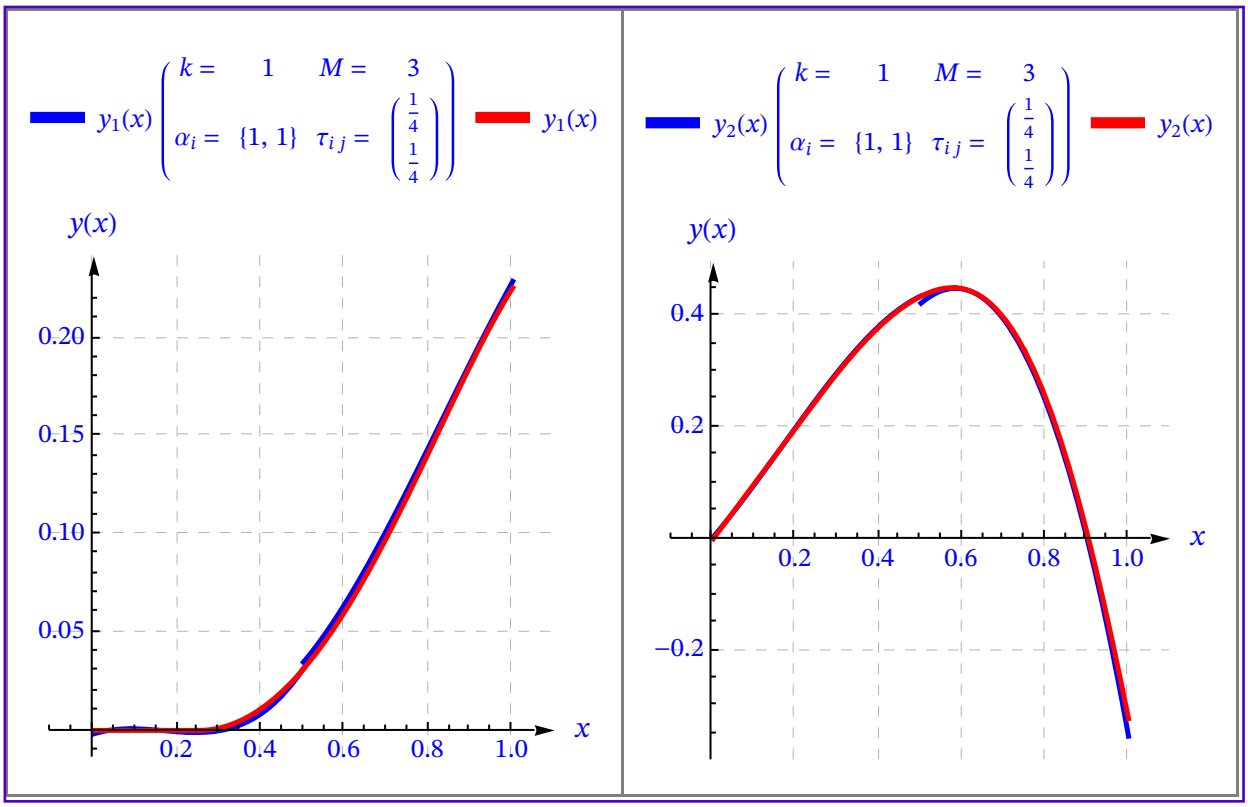
(ii) Represéntese en una misma gráfica en el intervalo [0, 1] la solución del método Wavelet ChWM y la solución exacta.

(iii) Créese una tabla con los valores de las variables y el error absoluto con la forma

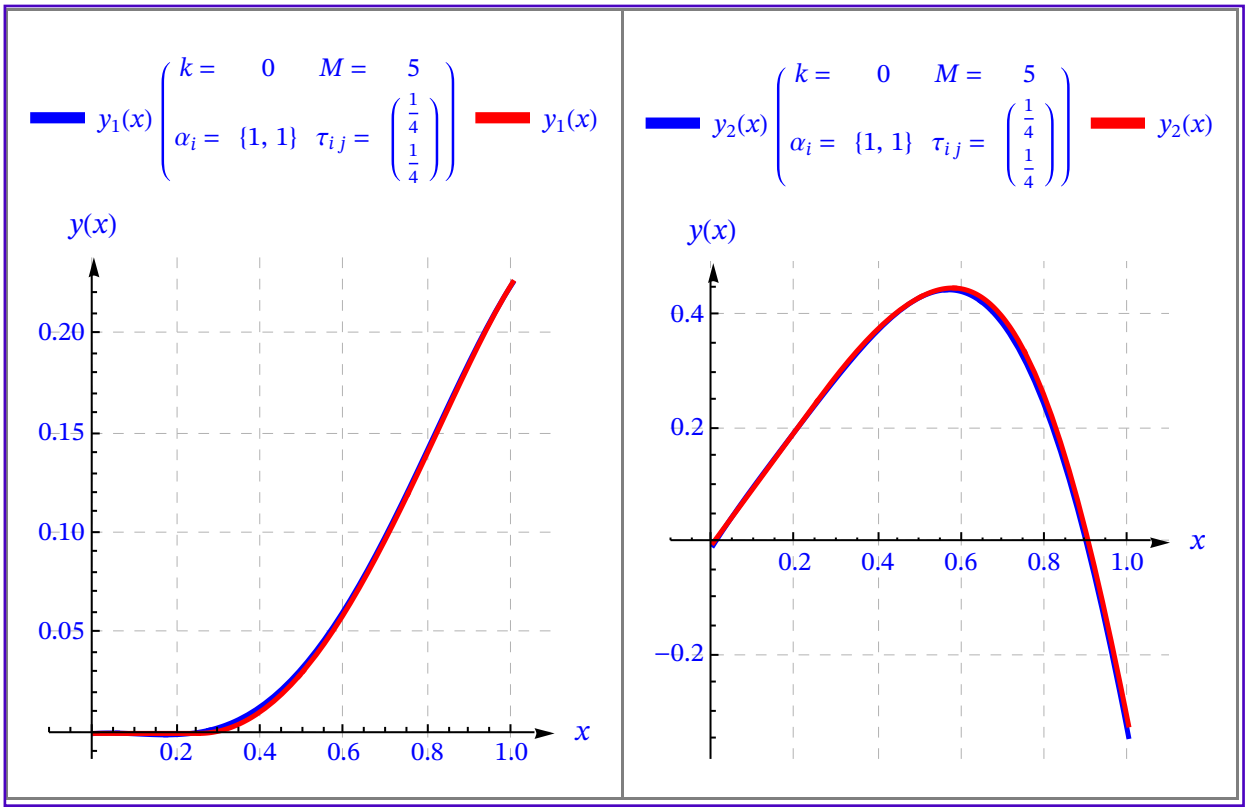
x, $f(x)$ (ChWM), $f(x)$, $e=|f(x)\,(\text{ChWM})-f(x)|$

siendo e el error absoluto cometido en cada punto para $x\in[0,\,1]$, para cada solución $y_1(x)$, $y_2(x)$ y las aproximaciones obtenidas.

(a) $\begin{cases}k=1 & M=3\\ \alpha_i=(1\ \ 1) & \tau_{ij}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\ \frac{1}{4}\end{pmatrix}\end{cases}$.



(b) $\begin{cases} k = 0 & M = 5 \\ \alpha_i = (1\ 1) & \tau_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} \end{cases}$.



■ Sistema de Ecuaciones Diferenciales Fraccionarias con Retraso Proporcional (SFDDE) $y_i\left(\tau_{ij}\, x\right)$

■ **Ejemplo 4.5.2. SFDDE no Lineal del Pantógrafo.** ([MOHA18])

Considérese el sistema de ecuaciones diferenciales fraccionarias con retraso (SFDDE) no lineal del Pantógrafo, con las condiciones iniciales indicadas:

$$(P_2) \equiv \begin{cases} \begin{pmatrix} D^{(\alpha_1)}\, y_1(x) \\ D^{(\alpha_2)}\, y_2(x) \\ D^{(\alpha_3)}\, y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\, y_2\left(\frac{1}{2}\, x\right) + y_3(x) - x\cos\left(\frac{1}{2}\, x\right) \\ -2\, {y_3}^2\left(\frac{1}{2}\, x\right) - x\,\mathrm{sen}(x) + 1 \\ -y_1(x) + y_2(x) - x\cos(x) \end{pmatrix} & x \in [0,\, 1],\ 0 < \alpha \le 1 \\ \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ y_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & x = 0 \end{cases}$$

La solución exacta del problema cuando $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$ es la siguiente:

$$\begin{cases} y_1(x) = -\cos(x) \\ y_2(x) = x\cos(x) \\ y_3(x) = \mathrm{sen}(x) \end{cases}.$$

(i) Calcúlese la solución numérica mediante el método *Wavelets* de Chelyshkov (ChWM) con los parámetros k, M, α_i, τ_{ij} dados.

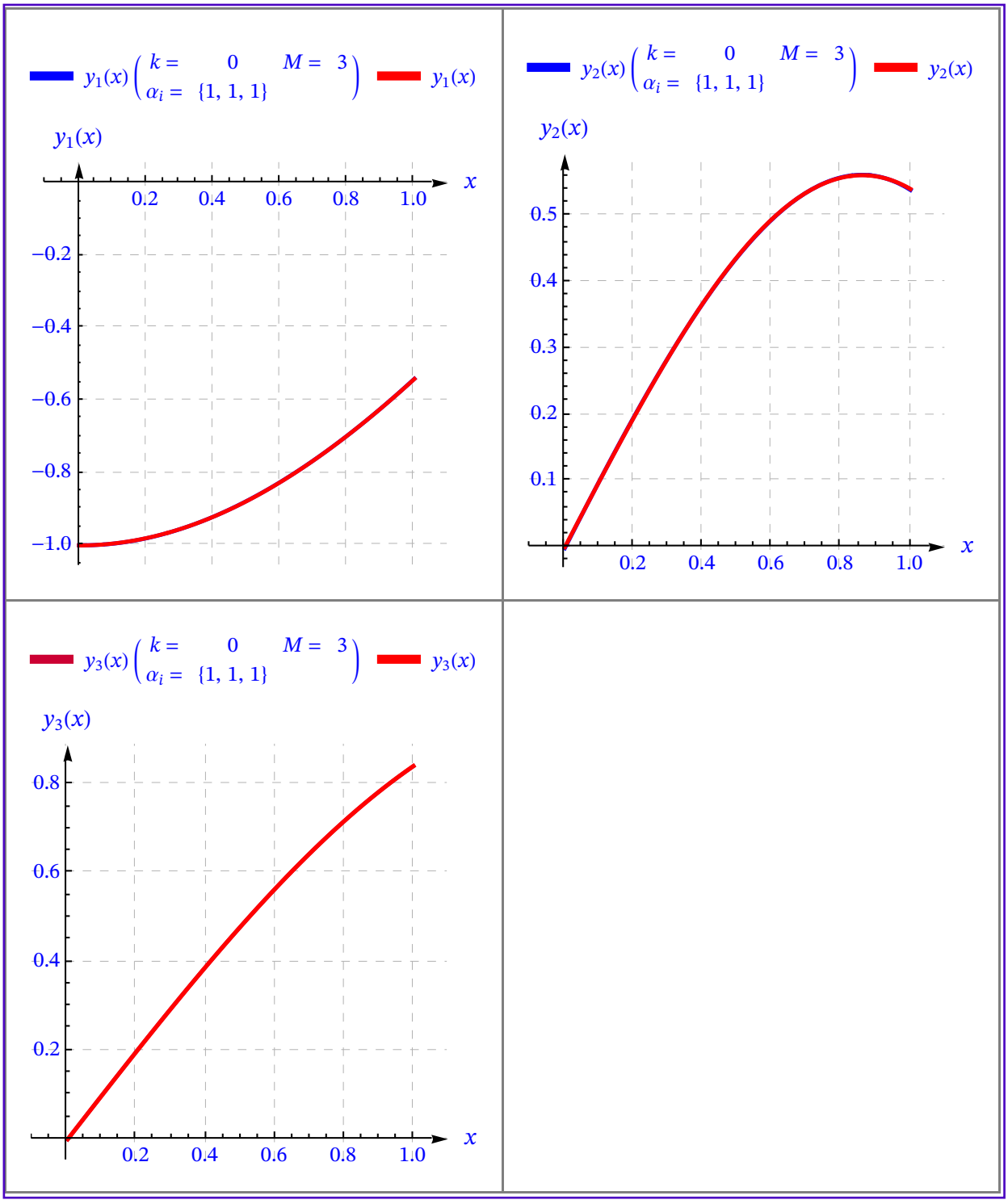
(ii) Represéntese en una misma gráfica en el intervalo $[0, 1]$ la solución del método Wavelet ChWM y la solución exacta.

(iii) Créese una tabla con los valores de las variables y el error absoluto con la forma

x, $f(x)$ (ChWM), $f(x)$, $e = |f(x)\,(\mathrm{ChWM})| - f(x)|$

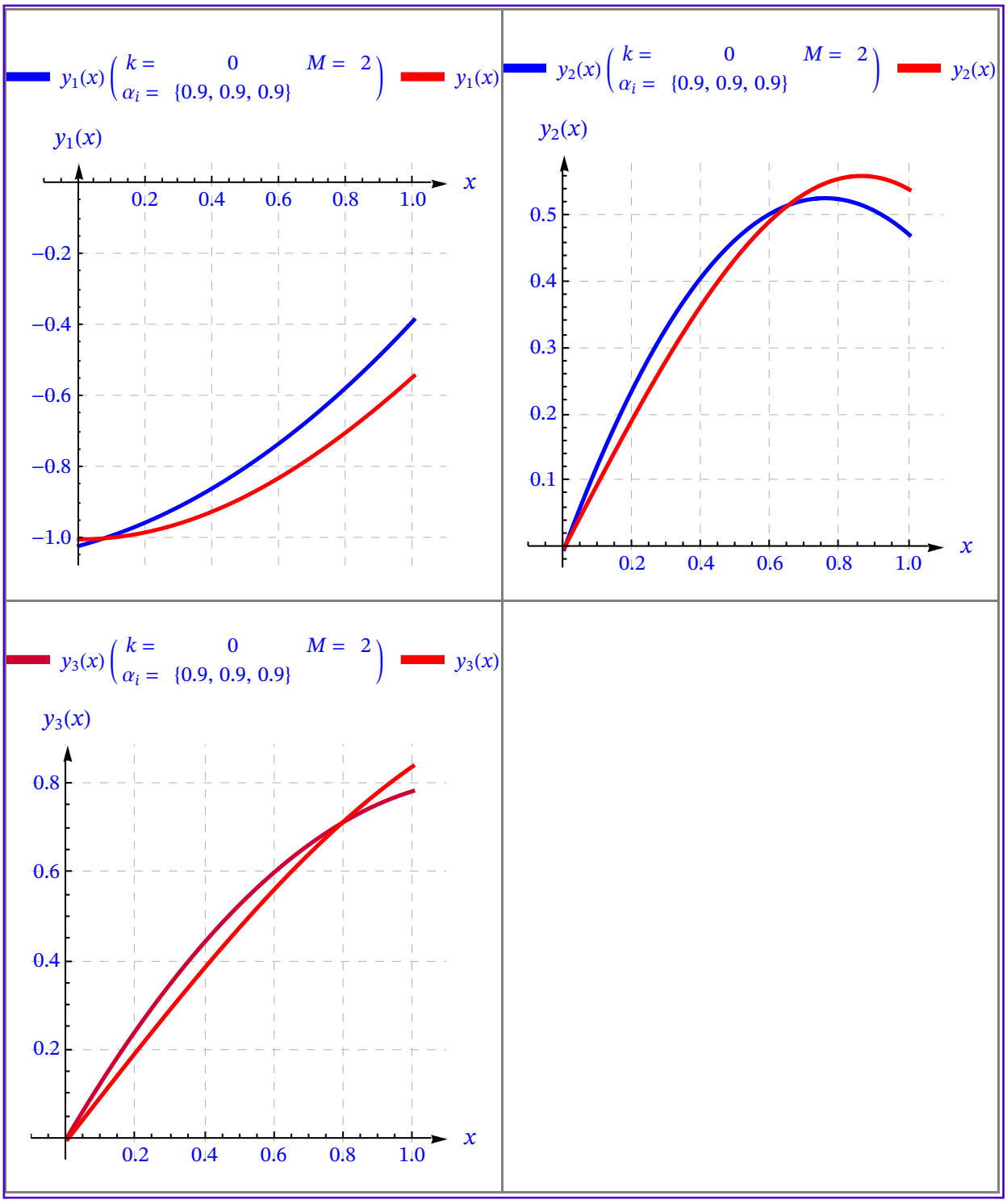
siendo e el error absoluto cometido en cada punto para $x \in [0, 1]$, para cada solución $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$ y las aproximaciones obtenidas.

(a) $$\begin{cases} k = 0 & M = 3 \\ \alpha_i = (1\ 1\ 1) & \tau_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}.$$



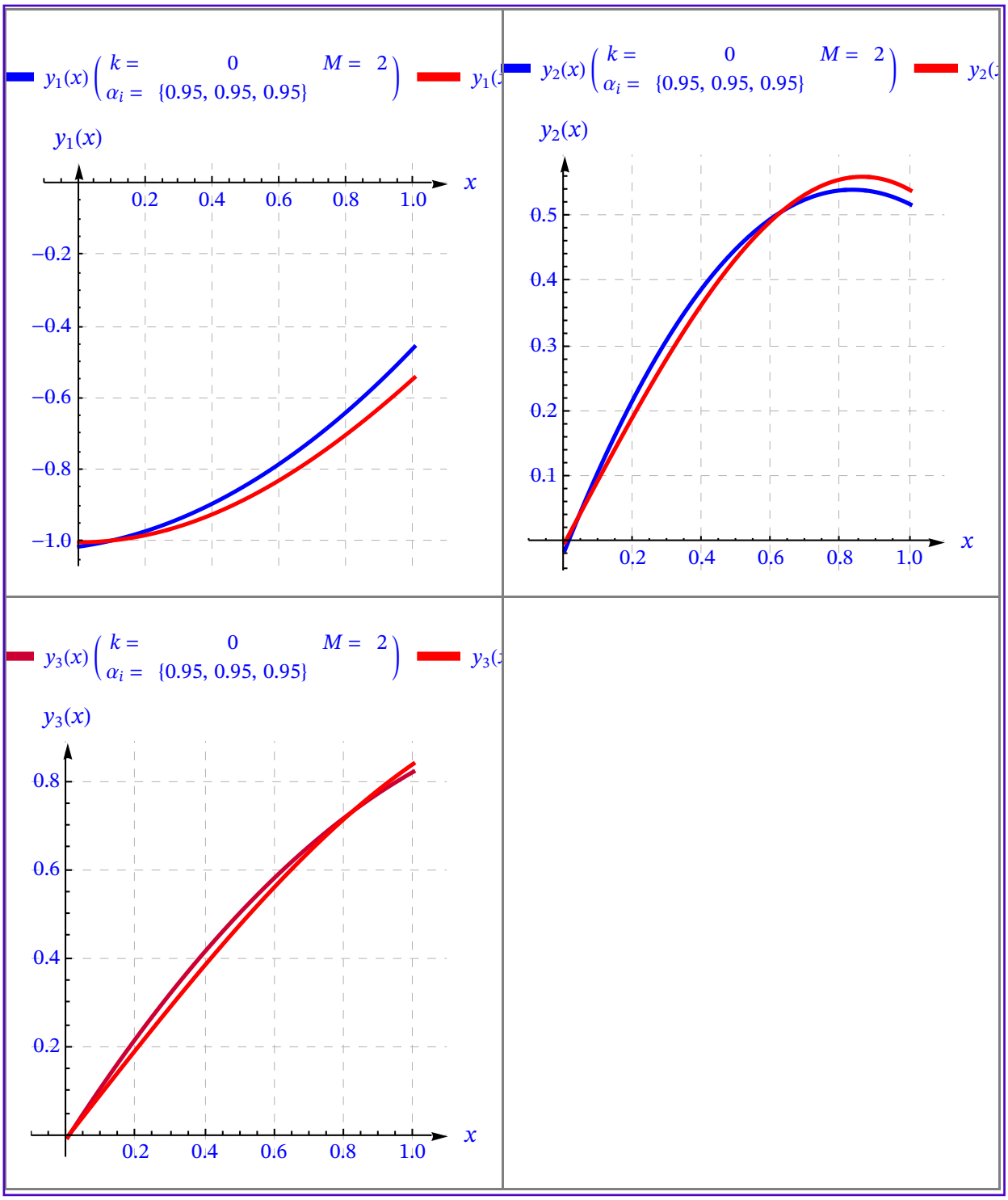
Ejemplo 4.5.3. SFDDE no Lineal del Pantógrafo. ([MOHA18])

(a) $\begin{cases} k=0 & M=2 \\ \alpha_i=(0.9\ \ 0.9\ \ 0.9) & \tau_{ij}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$.



■ **Ejemplo 4.5.4. SFDDE no Lineal del Pantógrafo.** ([MOHA18])

$$\text{(a)} \quad \begin{cases} k = 0 & M = 2 \\ \alpha_i = (0.95\ \ 0.95\ \ 0.95) & \tau_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}.$$



■ **Problema 4.5.5. Multipantógrafo No Lineal.** ([MOHA18])

Considérese el sistema de ecuaciones diferenciales fraccionarias con retraso (SFDDE) con las condiciones iniciales indicadas:

$(P_2) \equiv$

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} D^{(\alpha_1)}\, y_1(x) \\ D^{(\alpha_2)}\, y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_1(x) - 2\, e^{-\frac{3}{4}x} \cos\left(\frac{1}{2}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{1}{4}x\right) y_1\left(\frac{1}{4}x\right) - e^{-x} \cos\left(\frac{1}{2}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x\right) \\ e^{x}\, {y_1}^2\left(\frac{1}{2}x\right) - {y_2}^2\left(\frac{1}{2}x\right) \end{pmatrix} & x \in [0,\, 1],\ 0 < \alpha \le 1 \\ \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} & x = 0 \end{cases}$$

La solución exacta del problema cuando $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ es la siguiente:

$$\begin{cases} y_1(x) = e^{-x} \cos(x) \\ y_2(x) = \operatorname{sen}(x) \end{cases}$$

(i) Calcúlese la solución numérica mediante el método *Wavelets* de Chelyshkov (ChWM) con los parámetros k, M, α_i, $\tau_{i\,j}$ dados.

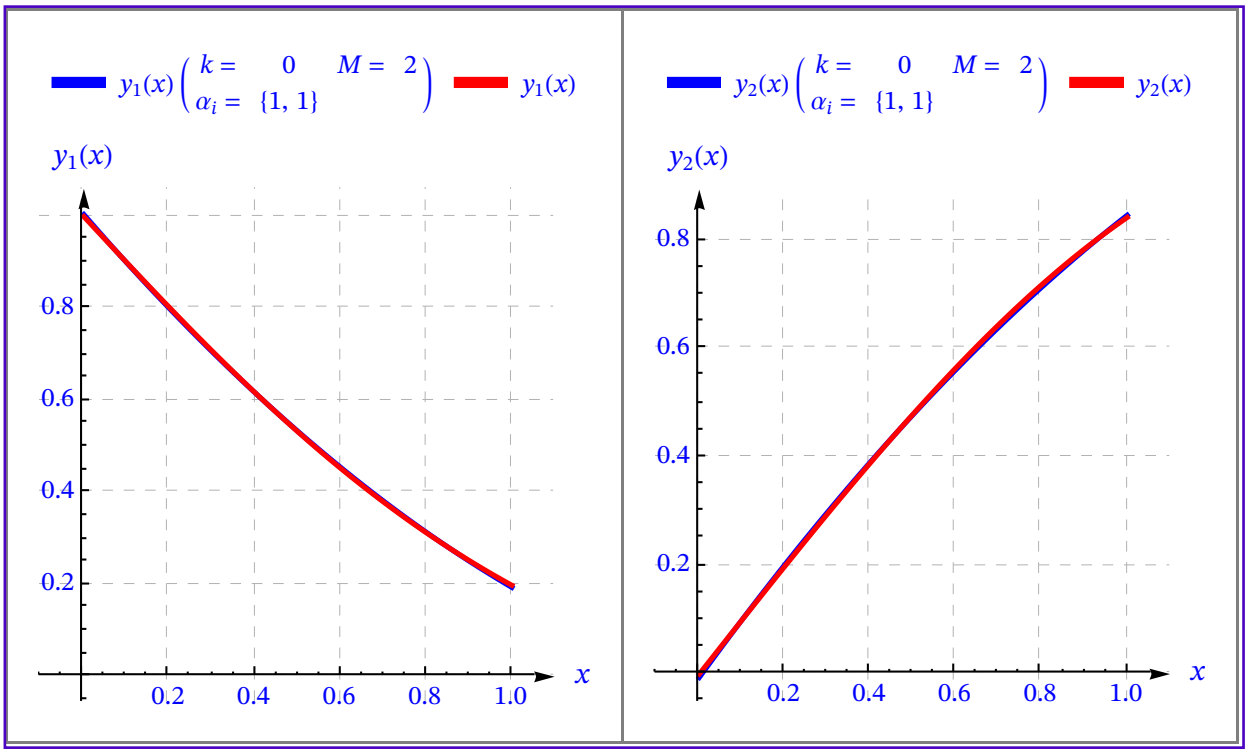
(ii) Represéntese en una misma gráfica en el intervalo $[0, 1]$ la solución del método Wavelet ChWM y la solución exacta.

(iii) Créese una tabla con los valores de las variables y el error absoluto con la forma

x, $f(x)$ (ChWM), $f(x)$, $e = |f(x)\,(\text{ChWM})| - f(x)|$

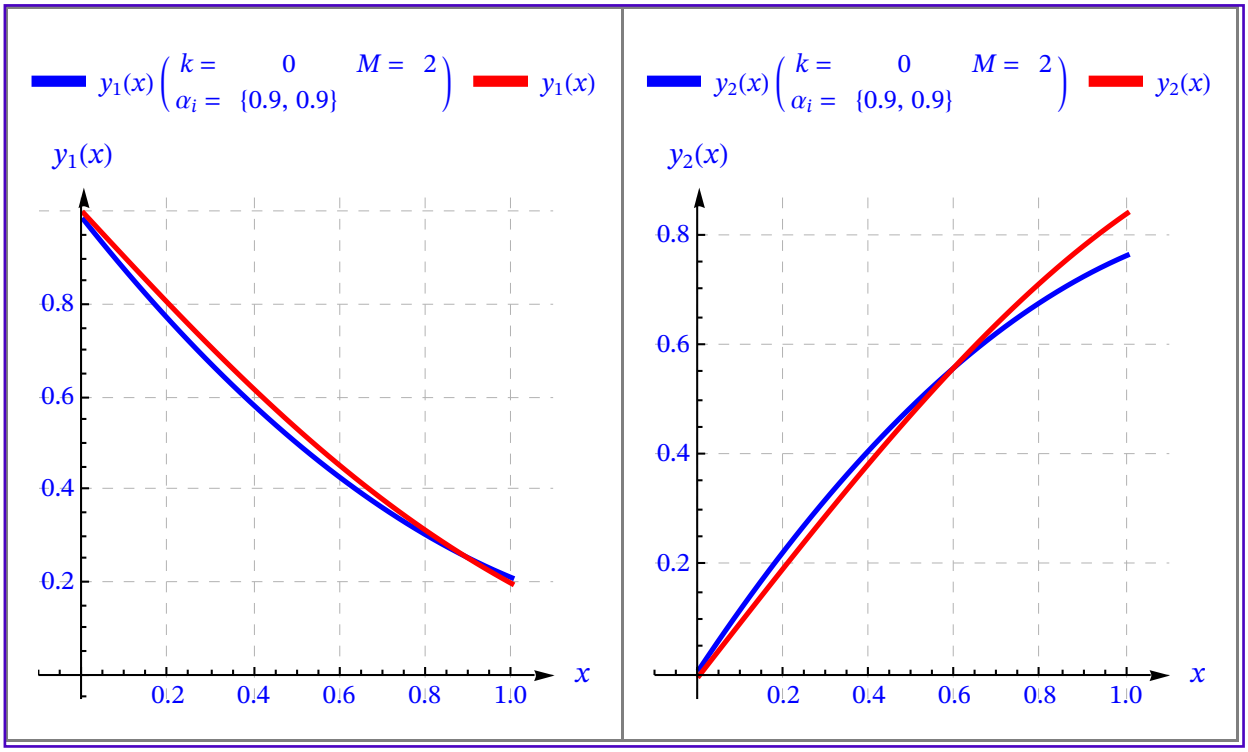
siendo e el error absoluto cometido en cada punto para $x \in [0, 1]$, para cada solución $y_1(x)$, $y_2(x)$ y las aproximaciones obtenidas.

(a) $$\begin{cases} k = 0 & M = 2 \\ \alpha_i = (1\ 1\ 1) & \tau_{i\,j} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}.$$



■ **Problema 4.5.6. Multipantógrafo No Lineal.** ([MOHA18])

(a) $\begin{cases} k = 0 & M = 2 \\ \alpha_i = (0.9\ \ 0.9) & \tau_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}.$



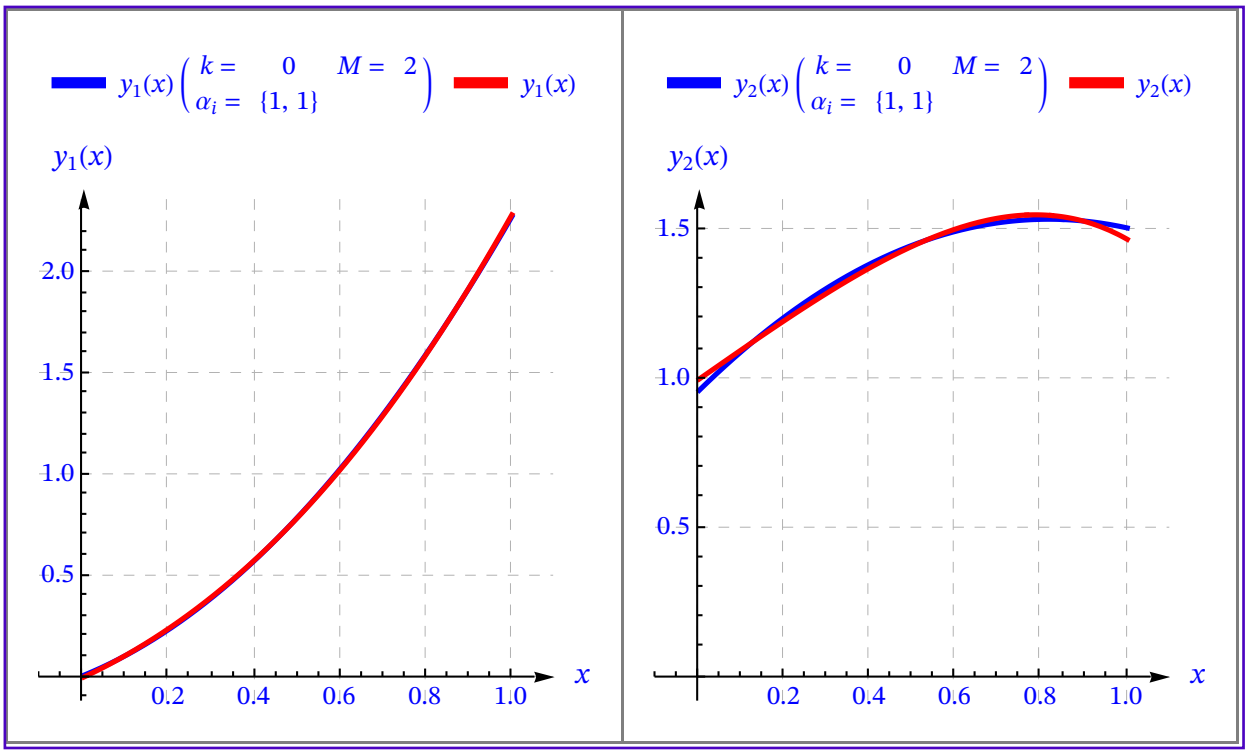
■ **Problema 4.5.7. Sistema de Ecuaciones Diferenciales Fraccionarias Lineales** ([WANG18]) ([RAHI22])

$$(P_2) \equiv \begin{cases} \begin{pmatrix} D^{(\alpha_1)}\, y_1(x) \\ D^{(\alpha_2)}\, y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(x) + y_2(x) \\ -y_1(x) + y_2(x) \end{pmatrix} & x \in [0,\ 1],\ 0 < \alpha_1,\ \alpha_2 \leq 1 \\ \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & x = 0 \end{cases}$$

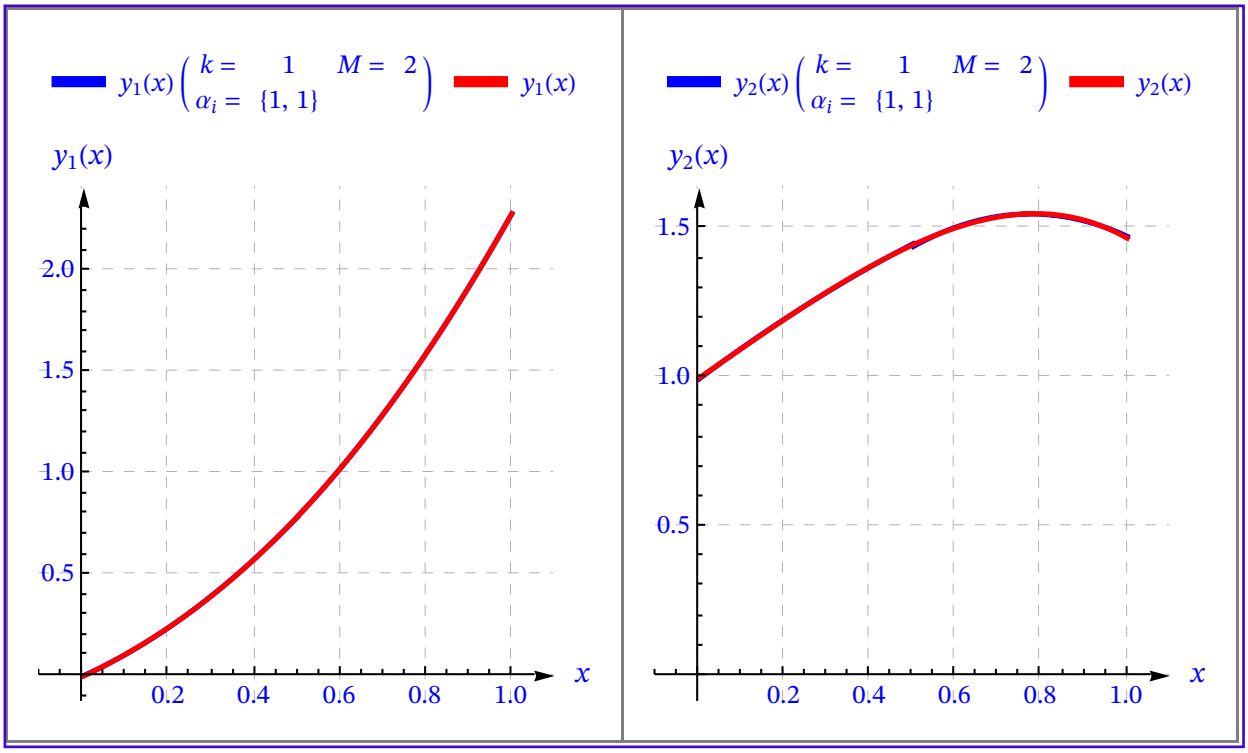
La solución exacta del problema cuando $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ es la siguiente:

$$\begin{cases} y_1(x) = e^x \operatorname{sen}(x) \\ y_2(x) = e^x \cos(x) \end{cases}$$

(a) $\begin{cases} k = 0 & M = 2 \\ \alpha_i = (1\ \ 1) & \tau_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}.$



(b) $\begin{cases} k=1 & M=2 \\ \alpha_i=(1\ \ 1) & \tau_{i\,j}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\end{cases}$.



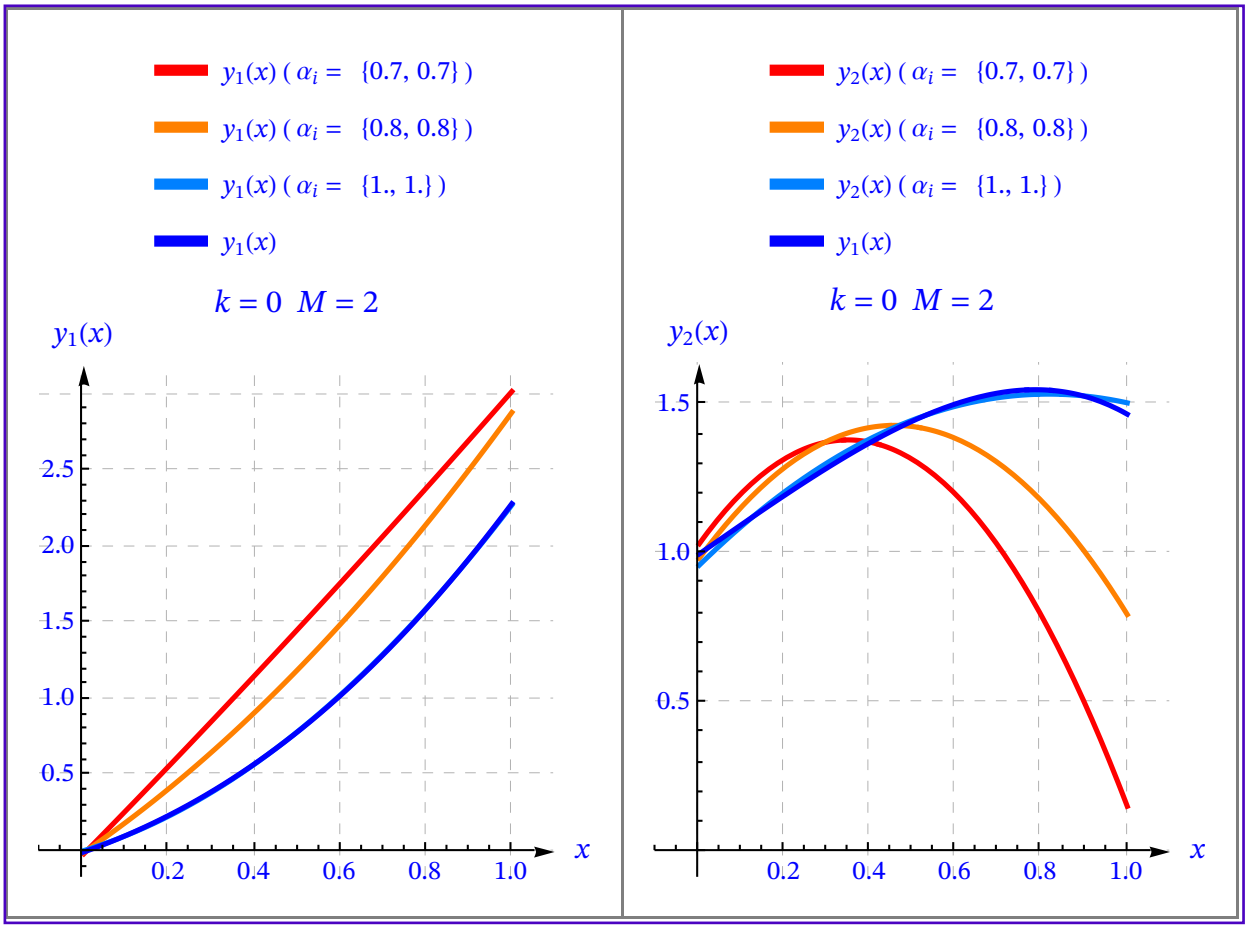
■ **Problema 4.5.8.** ([WANG18]) ([RAHI22])

$$(P_2) \equiv \begin{cases} \begin{pmatrix} D^{(\alpha_1)}\, y_1(x) \\ D^{(\alpha_2)}\, y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(x) + y_2(x) \\ -y_1(x) + y_2(x) \end{pmatrix} & x \in [0,\, 1],\ 0 < \alpha_1,\, \alpha_2 \leq 1 \\ \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & x = 0 \end{cases}$$

La solución exacta del problema cuando $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ es la siguiente:

$$\begin{cases} y_1(x) = e^x \operatorname{sen}(x) \\ y_2(x) = e^x \cos(x) \end{cases}$$

(a) $\begin{cases} k = 0 \quad M = 2 \\ \tau_{i\,j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_i = (0.7\ \ 0.7) \\ \alpha_i = (0.8\ \ 0.8) \\ \alpha_i = (1\ \ 1) \end{cases}$.



■ **Problema 4.5.9.** ([WANG18]) ([RAHI22])

$$(P_2) \equiv \begin{cases} \begin{pmatrix} D^{(\alpha_1)}\, y_1(x) \\ D^{(\alpha_2)}\, y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(x) + y_2(x) \\ -y_1(x) + y_2(x) \end{pmatrix} & x \in [0,\, 1],\ 0 < \alpha_1,\, \alpha_2 \leq 1 \\ \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & x = 0 \end{cases}$$

La solución exacta del problema cuando $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ es la siguiente:

$$\begin{cases} y_1(x) = e^x \operatorname{sen}(x) \\ y_2(x) = e^x \cos(x) \end{cases}$$

(a) $\left\{ \alpha_i = (1\ 1) \quad \tau_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right. \quad \left\{ \begin{matrix} k = 0 & M = 2 \\ k = 1 & M = 2 \end{matrix} \right. .$

y_1:

			$(k=0, M=2)$	$(k=0, M=2)$	$(k=1, M=2)$	$(k=1, M=2)$	$(k=2, M=2)$	$(k=2, M=2)$
k	x_k	y_k	y_k(ChWM)	$e_k=\lvert y_k - y_{k\,(\mathrm{ChWM})}\rvert$	y_k(ChWM)	$e_k=\lvert y_k - y_{k\,(\mathrm{ChWM})}\rvert$	y_k(ChWM)	$e_k=\lvert y_k - y_{k\,(\mathrm{ChWM})}\rvert$
0	0.	0.0000000000	0.0090771558	9.07716×10^{-3}	0.0018893580	1.88936×10^{-3}	0.0002549676	2.54968×10^{-4}
1	0.1	0.1103329887	0.1093797277	9.53261×10^{-4}	0.1096171187	7.1587×10^{-4}	0.1102622213	7.07674×10^{-5}
2	0.2	0.2426552686	0.2378214826	4.83379×10^{-3}	0.2421469978	5.08271×10^{-4}	0.2427467539	9.14853×10^{-5}
3	0.3	0.3989105538	0.3944024206	4.50813×10^{-3}	0.3994789952	5.68441×10^{-4}	0.3988314120	7.91418×10^{-5}
4	0.4	0.5809439008	0.5791225416	1.82136×10^{-3}	0.5816131110	6.6921×10^{-4}	0.5810069865	6.30858×10^{-5}
5	0.5	0.7904390832	0.7919818457	1.54276×10^{-3}	0.7905815369	1.42454×10^{-4}	0.7905468430	1.0776×10^{-4}
6	0.6	1.0288456663	1.0329803328	4.13467×10^{-3}	1.0286714573	1.74209×10^{-4}	1.0288218023	2.3864×10^{-5}
7	0.7	1.2972951119	1.3021180030	4.82289×10^{-3}	1.2973796197	8.45078×10^{-5}	1.2973299657	3.48538×10^{-5}
8	0.8	1.5965053406	1.5993948563	2.88952×10^{-3}	1.5967060241	2.00684×10^{-4}	1.5965262377	2.08971×10^{-5}
9	0.9	1.9266733040	1.9248108926	1.86241×10^{-3}	1.9266506706	2.26333×10^{-5}	1.9266625202	1.07838×10^{-5}

y_2:

			$(k=0, M=2)$	$(k=0, M=2)$	$(k=1, M=2)$	$(k=1, M=2)$	$(k=2, M=2)$	$(k=2, M=2)$
k	x_k	y_k	y_k(ChWM)	$e_k=\lvert y_k - y_{k\,(\mathrm{ChWM})}\rvert$	y_k(ChWM)	$e_k=\lvert y_k - y_{k\,(\mathrm{ChWM})}\rvert$	y_k(ChWM)	$e_k=\lvert y_k - y_{k\,(\mathrm{ChWM})}\rvert$
0	0.	1.0000000000	0.9621785174	3.78215×10^{-2}	0.9967222501	3.27775×10^{-3}	0.9996696218	3.30378×10^{-4}
1	0.1	1.0996496668	1.0942511346	5.39853×10^{-3}	1.1007399986	1.09033×10^{-3}	1.0997490206	9.93537×10^{-5}
2	0.2	1.1970560214	1.2090771558	1.20211×10^{-2}	1.1980934660	1.03744×10^{-3}	1.1969326556	1.23366×10^{-4}
3	0.3	1.2895693740	1.3066565809	1.70872×10^{-2}	1.2887826523	7.86722×10^{-4}	1.2897406786	1.71305×10^{-4}
4	0.4	1.3740615389	1.3869894100	1.29279×10^{-2}	1.3728075574	1.25398×10^{-3}	1.3739324133	1.29126×10^{-4}
5	0.5	1.4468890366	1.4500756430	3.18661×10^{-3}	1.4406544648	6.23457×10^{-3}	1.4462095014	6.79535×10^{-4}
6	0.6	1.5038595406	1.4959152799	7.94426×10^{-3}	1.5060045584	2.14502×10^{-3}	1.5040592563	1.99716×10^{-4}
7	0.7	1.5402030254	1.5245083207	1.56947×10^{-2}	1.5421076131	1.90459×10^{-3}	1.5399522428	2.50783×10^{-4}
8	0.8	1.5505492968	1.5358547655	1.46945×10^{-2}	1.5489636290	1.58567×10^{-3}	1.5508597428	3.10446×10^{-4}
9	0.9	1.5289138119	1.5299546142	1.0408×10^{-3}	1.5265726060	2.34121×10^{-3}	1.5286771495	2.36662×10^{-4}

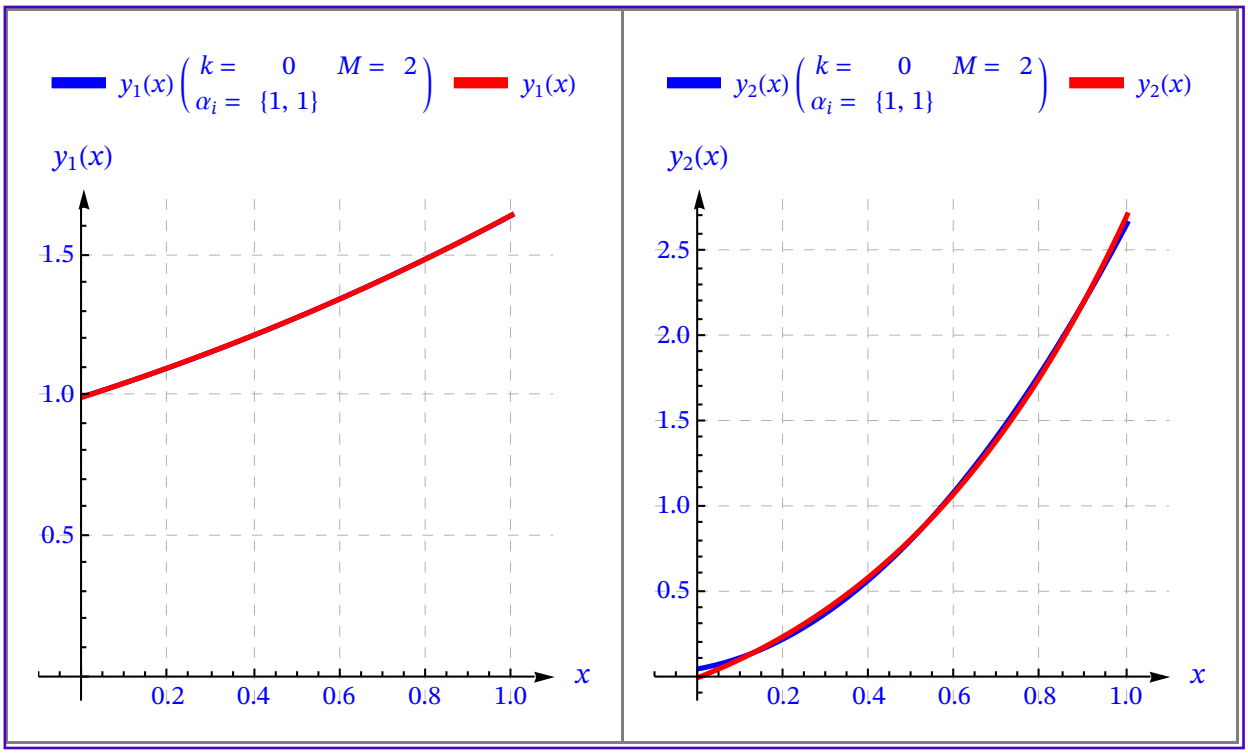
■ **Problema 4.5.10.** ([RAHI22])

$$(P_2) \equiv \begin{cases} \begin{pmatrix} D^{(\alpha_1)}\, y_1(x) \\ D^{(\alpha_2)}\, y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\, y_1(x) \\ {y_1}^2(x) + y_2(x) \end{pmatrix} & x \in [0,\, 1],\ 0 < \alpha_1,\ \alpha_2 \leq 1 \\ \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & x = 0 \end{cases}$$

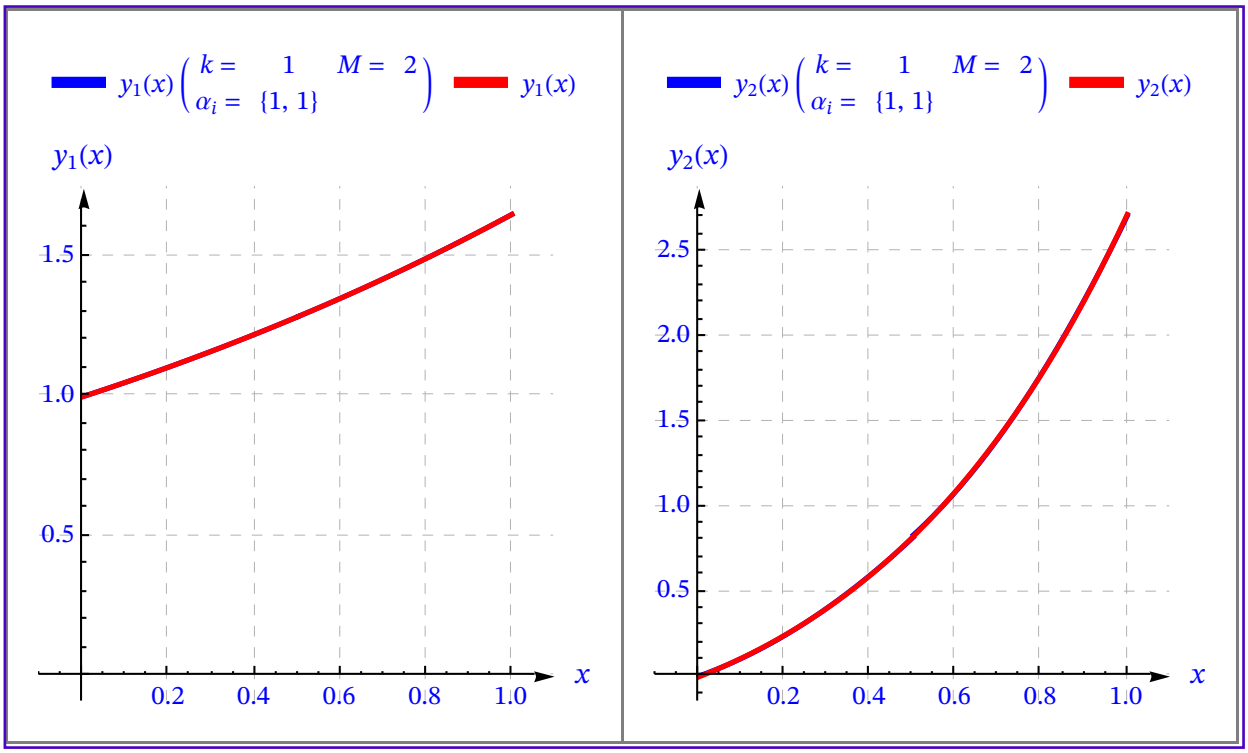
La solución exacta del problema cuando $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ es la siguiente:

$$\begin{cases} y_1(x) = e^{\frac{x}{2}} \\ y_2(x) = x\, e^x \end{cases}$$

(a) $\left\{ \begin{matrix} k = 0 & M = 2 \\ \alpha_i = (1\ 1) & \tau_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \right.$.



(b) $\begin{cases} k = 1 & M = 2 \\ \alpha_i = (1\ 1) & \tau_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{cases}$



■

■ **Problema 4.5.11.** ([RAHI22])

$$(P_2) \equiv \begin{cases} \begin{pmatrix} D^{(\alpha_1)}\, y_1(x) \\ D^{(\alpha_2)}\, y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\, y_1(x) \\ {y_1}^2(x) + y_2(x) \end{pmatrix} & x \in [0, 1],\ 0 < \alpha_1, \alpha_2 \leq 1 \\ \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & x = 0 \end{cases}$$

La solución exacta del problema cuando $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ es la siguiente:

$$\begin{cases} y_1(x) = e^{\frac{x}{2}} \\ y_2(x) = x\, e^{x} \end{cases}.$$

(a) $\left\{ \alpha_i = (1\ 1) \quad \tau_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right. \quad \begin{cases} k = 0 & M = 2 \\ k = 1 & M = 2 \\ k = 2 & M = 2 \end{cases}.$

			$(k=0, M=2)$	$(k=0, M=2)$	$(k=1, M=2)$	$(k=1, M=2)$	$(k=2, M=2)$	$(k=2, M=2)$
k	x_k	y_k	y_k(ChWM)	$e_k=\lvert y_k - y_{k\,(\mathrm{ChWM})}\rvert$	y_k(ChWM)	$e_k=\lvert y_k - y_{k\,(\mathrm{ChWM})}\rvert$	y_k(ChWM)	$e_k=\lvert y_k - y_{k\,(\mathrm{ChWM})}\rvert$
0	0.	1.0000000000	1.0013458950	1.3459×10^{-3}	1.0001477760	1.47776×10^{-4}	1.0000173325	1.73325×10^{-5}
1	0.1	1.0512710964	1.0514131898	1.42093×10^{-4}	1.0512191518	5.19446×10^{-5}	1.0512661409	4.95546×10^{-6}
2	0.2	1.1051709181	1.1047106326	4.60286×10^{-4}	1.1051278262	4.30919×10^{-5}	1.1051772251	6.30699×10^{-6}
3	0.3	1.1618342427	1.1612382234	5.96019×10^{-4}	1.1618737993	3.95566×10^{-5}	1.1618272532	6.98957×10^{-6}
4	0.4	1.2214027582	1.2209959623	4.06796×10^{-4}	1.2214570711	5.43129×10^{-5}	1.2214081379	5.37978×10^{-6}
5	0.5	1.2840254167	1.2839838493	4.15674×10^{-5}	1.2842151656	1.89749×10^{-4}	1.2840476721	2.22554×10^{-5}
6	0.6	1.3498588076	1.3502018843	3.43077×10^{-4}	1.3497921102	6.66974×10^{-5}	1.3498524446	6.36293×10^{-6}
7	0.7	1.4190675486	1.4196500673	5.82519×10^{-4}	1.4190122184	5.53302×10^{-5}	1.4190756469	8.09835×10^{-6}
8	0.8	1.4918246976	1.4923283984	5.03701×10^{-4}	1.4918754902	5.07926×10^{-5}	1.4918157229	8.97477×10^{-6}
9	0.9	1.5683121855	1.5682368775	7.5308×10^{-5}	1.5683819256	6.97401×10^{-5}	1.5683190933	6.90779×10^{-6}

			$(k=0, M=2)$	$(k=0, M=2)$	$(k=1, M=2)$	$(k=1, M=2)$	$(k=2, M=2)$	$(k=2, M=2)$
k	x_k	y_k	y_k(ChWM)	$e_k=\lvert y_k - y_{k\,(\mathrm{ChWM})}\rvert$	y_k(ChWM)	$e_k=\lvert y_k - y_{k\,(\mathrm{ChWM})}\rvert$	y_k(ChWM)	$e_k=\lvert y_k - y_{k\,(\mathrm{ChWM})}\rvert$
0	0.	0.0000000000	0.0498694250	4.98694×10^{-2}	0.0043879480	4.38795×10^{-3}	0.0004621790	4.62179×10^{-4}
1	0.1	0.1105170918	0.1178332984	7.31621×10^{-3}	0.1090402457	1.47685×10^{-3}	0.1103806194	1.36472×10^{-4}
2	0.2	0.2442805516	0.2288866894	1.53939×10^{-2}	0.2429249220	1.35563×10^{-3}	0.2444515388	1.70987×10^{-4}
3	0.3	0.4049576423	0.3830295982	2.1928×10^{-2}	0.4060419770	1.08433×10^{-3}	0.4047339662	2.23676×10^{-4}
4	0.4	0.5967298791	0.5802620246	1.64679×10^{-2}	0.5983914107	1.66153×10^{-3}	0.5968990812	1.69202×10^{-4}
5	0.5	0.8243606354	0.8205839687	3.77667×10^{-3}	0.8327051778	8.34454×10^{-3}	0.8252444688	8.83833×10^{-4}
6	0.6	1.0932712802	1.1039954306	1.07242×10^{-2}	1.0904575233	2.81376×10^{-3}	1.0930107611	2.60519×10^{-4}
7	0.7	1.4096268952	1.4304964101	2.08695×10^{-2}	1.4070571478	2.56975×10^{-3}	1.4099535890	3.26694×10^{-4}
8	0.8	1.7804327428	1.8000869073	1.96542×10^{-2}	1.7825040515	2.07131×10^{-3}	1.7800089918	4.23751×10^{-4}
9	0.9	2.2136428000	2.2127669221	8.75878×10^{-4}	2.2167982342	3.15543×10^{-3}	2.2139636510	3.20851×10^{-4}

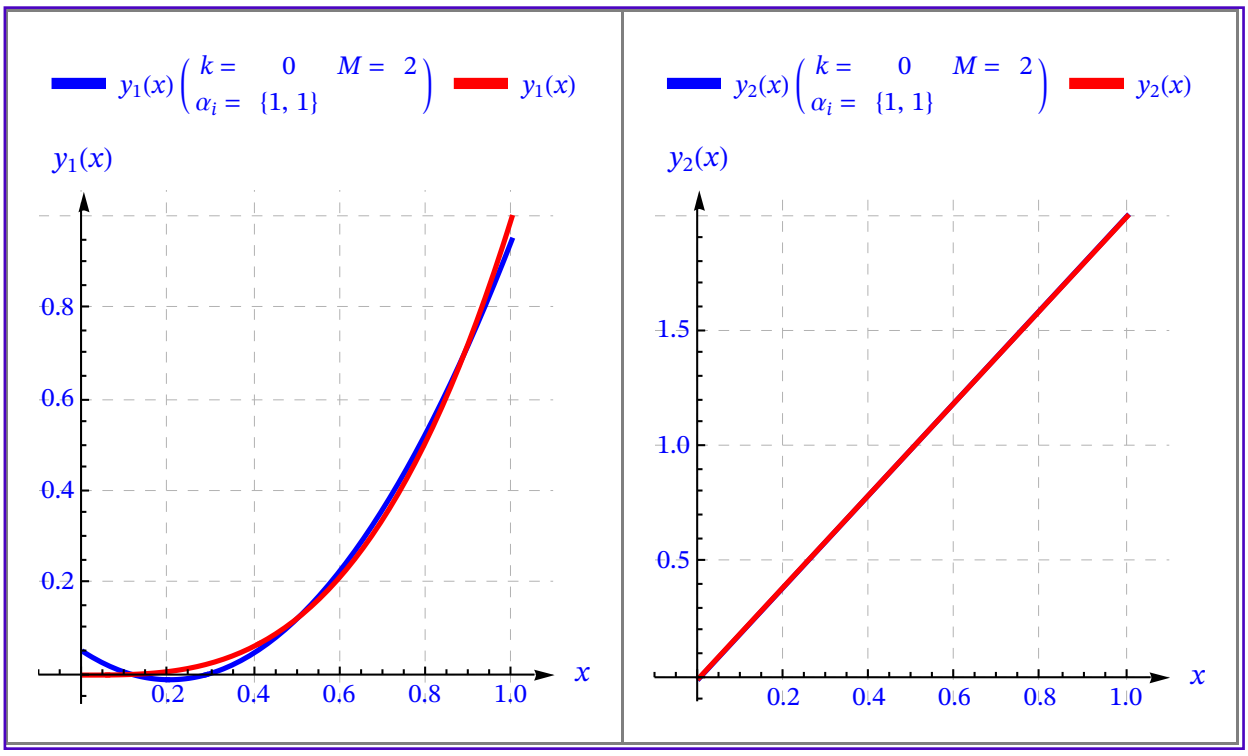
■ **Problema 4.5.12. Sistema de Ecuaciones Diferenciales Fraccionarias No Lineales** ([WANG18]) ([RAHI22])

$$(P_2) \equiv \begin{cases} \begin{pmatrix} D^{(\alpha_1)}\, y_1(x) \\ D^{(\alpha_2)}\, y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}\, y_2(x)^2 \\ y_1(x)\, y_2(x) - \frac{1}{8}\, y_2(x)^4 + 2 \end{pmatrix} & x \in [0,\ 1],\ 0 < \alpha_1,\ \alpha_2 \le 1 \\ \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & x = 0 \end{cases}$$

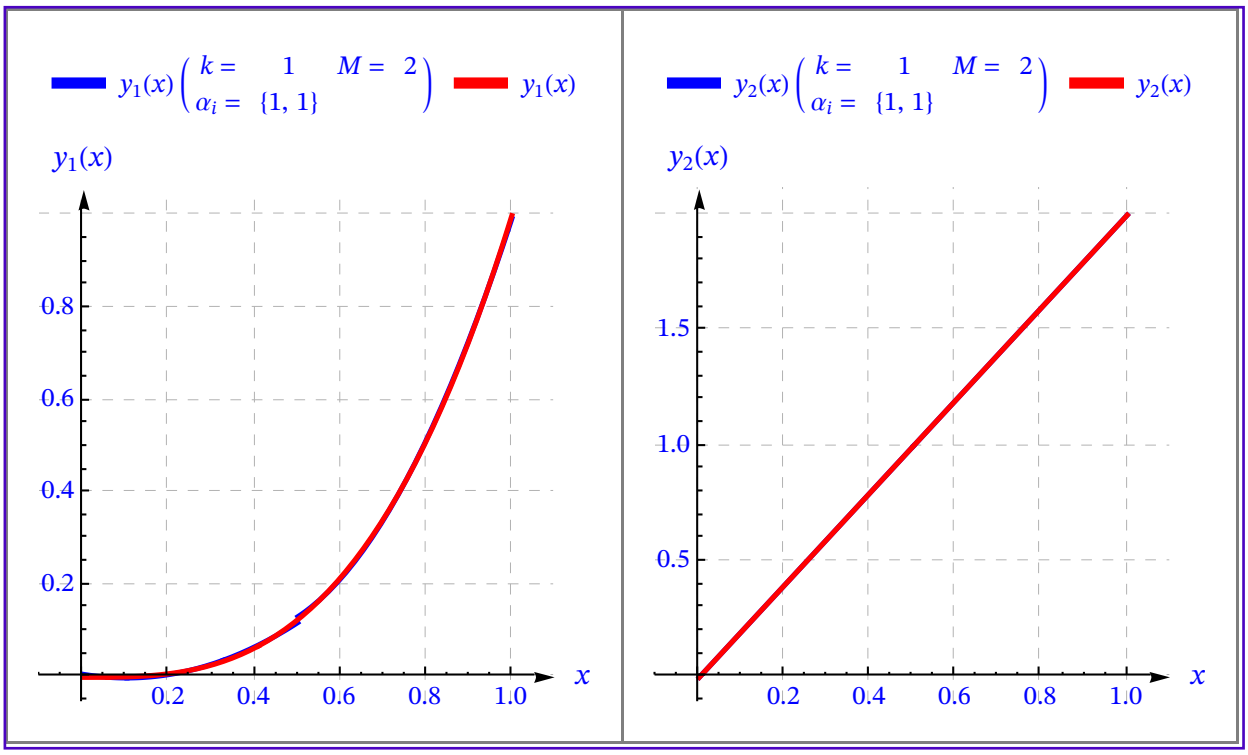
La solución exacta del problema cuando $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ es la siguiente:

$$\begin{cases} y_1(x) = x^3 \\ y_2(x) = 2\,x \end{cases}$$

(a) $\begin{cases} k = 1 & M = 3 \\ \alpha_i = (1\ 1) & \tau_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}.$



(b) $\begin{cases} k=1 & M=2 \\ \alpha_i=(1\ 1) & \tau_{ij}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}. \end{cases}$



■

■ **Problema 4.5.13.** ([RAHI22])

$$(P_2)\equiv\begin{cases}\begin{pmatrix}D^{(\alpha_1)}\,y_1(x)\\ D^{(\alpha_2)}\,y_2(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{4}\,y_2(x)^2\\ y_1(x)\,y_2(x)-\frac{1}{8}\,y_2(x)^4+2\end{pmatrix} & x\in[0,\,1],\ 0<\alpha_1,\,\alpha_2\le 1\\ \begin{pmatrix}y_1(0)\\ y_2(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} & x=0\end{cases}$$

La solución exacta del problema cuando $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ es la siguiente:

$$\begin{cases} y_1(x) = x^3 \\ y_2(x) = 2\,x \end{cases}$$

(a) $\left\{ \alpha_i = (1\ 1) \quad \tau_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right. \quad \begin{cases} k = 0 & M = 2 \\ k = 1 & M = 2 \\ k = 2 & M = 2 \end{cases}$

y_1:

			$(k=0, M=2)$	$(k=0, M=2)$	$(k=1, M=2)$	$(k=1, M=2)$	$(k=2, M=2)$	$(k=2, M=2)$
k	x_k	y_k	y_k(ChWM)	$e_k=\lvert y_k - y_{k\,(\mathrm{ChWM})}\rvert$	y_k(ChWM)	$e_k=\lvert y_k - y_{k\,(\mathrm{ChWM})}\rvert$	y_k(ChWM)	$e_k=\lvert y_k - y_{k\,(\mathrm{ChWM})}\rvert$
0	0.	0.0000000000	0.0501563193	5.01563×10^{-2}	0.0062516395	6.25164×10^{-3}	0.0007812631	7.81263×10^{-4}
1	0.1	0.0010000000	0.0049742402	3.97424×10^{-3}	−0.0012513311	2.25133×10^{-3}	0.0007812317	2.18768×10^{-4}
2	0.2	0.0080000000	−0.0101573244	1.81573×10^{-2}	0.0062476753	1.75232×10^{-3}	0.0082812631	2.81263×10^{-4}
3	0.3	0.0270000000	0.0047616254	2.22384×10^{-2}	0.0287486589	1.74866×10^{-3}	0.0267187422	2.81258×10^{-4}
4	0.4	0.0640000000	0.0497310896	1.42689×10^{-2}	0.0662516196	2.25162×10^{-3}	0.0642187112	2.18711×10^{-4}
5	0.5	0.1250000000	0.1247510682	2.48932×10^{-4}	0.1312589693	6.25897×10^{-3}	0.1257813898	7.8139×10^{-4}
6	0.6	0.2160000000	0.2298215612	1.38216×10^{-2}	0.2137490604	2.25094×10^{-3}	0.2157811756	2.18824×10^{-4}
7	0.7	0.3430000000	0.3649425687	2.19426×10^{-2}	0.3412446341	1.75537×10^{-3}	0.3432812701	2.8127×10^{-4}
8	0.8	0.5120000000	0.5301140906	1.81141×10^{-2}	0.5137456904	1.74569×10^{-3}	0.5117187435	2.81256×10^{-4}
9	0.9	0.7290000000	0.7253361269	3.66387×10^{-3}	0.7312522293	2.25223×10^{-3}	0.7292186601	2.1866×10^{-4}

y_2:

			$(k=0, M=2)$	$(k=0, M=2)$	$(k=1, M=2)$	$(k=1, M=2)$	$(k=2, M=2)$	$(k=2, M=2)$
k	x_k	y_k	y_k(ChWM)	$e_k=\lvert y_k - y_{k\,(\mathrm{ChWM})}\rvert$	y_k(ChWM)	$e_k=\lvert y_k - y_{k\,(\mathrm{ChWM})}\rvert$	y_k(ChWM)	$e_k=\lvert y_k - y_{k\,(\mathrm{ChWM})}\rvert$
0	0.	0.0000000000	−0.0022420754	2.24208×10^{-3}	−0.0000672248	6.72248×10^{-5}	$-2.0931529042\times10^{-6}$	2.09315×10^{-6}
1	0.1	0.2000000000	0.1982577009	1.7423×10^{-3}	0.1999598620	4.0138×10^{-5}	0.1999995816	4.18369×10^{-7}
2	0.2	0.4000000000	0.3987306905	1.26931×10^{-3}	0.3999866854	1.33146×10^{-5}	0.4000012543	1.25432×10^{-6}
3	0.3	0.6000000000	0.5991768932	8.23107×10^{-4}	0.6000132454	1.32454×10^{-5}	0.5999987482	1.25179×10^{-6}
4	0.4	0.8000000000	0.7995963092	4.03691×10^{-4}	0.8000395419	3.95419×10^{-5}	0.8000004217	4.21651×10^{-7}
5	0.5	1.0000000000	0.9999889383	1.10617×10^{-5}	0.9999301017	6.98983×10^{-5}	0.9999978676	2.13235×10^{-6}
6	0.6	1.2000000000	1.2003547806	3.54781×10^{-4}	1.1999616140	3.8386×10^{-5}	1.1999996128	3.87151×10^{-7}
7	0.7	1.4000000000	1.4006938362	6.93836×10^{-4}	1.3999897946	1.02054×10^{-5}	1.4000012329	1.23291×10^{-6}
8	0.8	1.6000000000	1.6010061049	1.0061×10^{-3}	1.6000146434	1.46434×10^{-5}	1.5999987681	1.23189×10^{-6}
9	0.9	1.8000000000	1.8012915868	1.29159×10^{-3}	1.8000361606	3.61606×10^{-5}	1.8000004762	4.76152×10^{-7}

4.6. Método Numérico Adams–Bashforth–Moulton Predictor-Corrector (FDDE)

4.6.1. Método Adams–Bashforth–Moulton para Ecuaciones FDDE

El esquema del método Adams–Bashforth–Moulton Predictor-Corrector que resuelve las ecuaciones diferenciales con retraso de orden fraccionario (FDDE) viene dado en [LEKD19], [CORO20].

Considérese el siguiente problema con una ecuación FDDE:

$$(P) \equiv \begin{cases} D^{(\alpha)}\, y(x) = f(x,\, y(x),\, y(x-\tau)) & x \in [0,\, T] \quad 0 < \alpha \le n \\ y(x) = g(x) & x \in [-\tau,\, 0] \\ y(0) = y_0{}^{(k)} \quad k = 0,\, 1,\, \cdots,\, n-1;\ \alpha \in (n-1,\, n] \end{cases} \tag{4.6.1}$$

El problema es equivalente a la ecuación integral de Volterra, e integrando J^{α} a ambos miembros de la ecuación diferencial se deduce:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n-1} y_0{}^{(k)}\, \frac{x^k}{k!} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1}\, f(t,\, y(t),\, y(t-\tau))\, dt. \tag{4.6.2}$$

Se considera una cuadrícula uniforme de la forma:

$$\{x_k = k\,h\} \qquad \begin{cases} x \in [-\tau,\, T] \\ k = -i,\, -(i-1),\, \cdots,\, -1,\, 0,\, 1,\, 2,\, \cdots,\, N \quad k,\, N \in \mathbb{N} \\ h := \frac{T}{N} \quad i = \frac{\tau}{h} \end{cases}.$$

Se denota la aproximación de $y(x_k)$ como $y_h(x_k)$, esto es que $y(x_k) \simeq y_h(x_k)$. Se deducen las aproximaciones de $y(x_k)$ en el intervalo $x \in [-\tau,\, 0]$ y las del término con retraso $y_h(x_k - \tau)$:

$$\begin{aligned} y(x_k) &\simeq y_h(x_k) = g(x_k) \quad k = -i,\, -(i-1),\, \cdots,\, -1,\, 0 \quad x \in [-\tau,\, 0] \\ y(x_k - \tau) &\simeq y_h(x_k - \tau) = y_h(k\,h - i\,h) = y_h(x_{k-i}) \quad k = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots,\, N. \end{aligned} \tag{4.6.3}$$

Se calculan las aproximaciones hasta el índice k

$$\begin{gathered} y(x_j) \simeq y_h(x_j) \qquad j = -i,\, -(i-1),\, \cdots,\, -1,\, 0,\, 1,\, 2,\, \cdots,\, k \\ i = \tau / h \end{gathered} \tag{4.6.4}$$

para calcular la aproximación $y_h(x_{k+1})$ por medio de la fórmula de Volterra:

$$y(x_{k+1}) = \sum_{k=0}^{n-1} y_0{}^{(k)}\, \frac{x_{k+1}{}^k}{k!} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{x_{k+1}} (x_{k+1} - t)^{\alpha-1}\, f(t,\, y(t),\, y(t-\tau))\, dt. \tag{4.6.5}$$

Se utiliza la aproximación $y(x_k) \simeq y_h(x_k)$ para determinar la aproximación $y_h(x_k + 1)$

$$y_h(x_{k+1}) \simeq \sum_{k=0}^{n-1} y_0{}^{(k)}\, \frac{x_{k+1}{}^k}{k!} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{x_{k+1}} (x_{k+1} - t)^{\alpha-1}\, f(t,\, y(t),\, y(t-\tau))\, dt \tag{4.6.6}$$

y empleando la regla de cuadratura trapezoidal que aproxima la integral y sustituyendo $y(x_j) \simeq y_h(x_j)$, se obtiene la fórmula correctora:

$$\begin{aligned} \bullet\, y_h(x_{k+1}) &= \sum_{k=0}^{n-1} {y_0}^{(k)} \frac{{x_{k+1}}^k}{k!} + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} f(x_{k+1},\, y_h(x_{k+1}),\, y_h(x_{k+1}-\tau)) \\ &\quad + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} \sum_{j=0}^{k} a_{j,k+1}\, f\big(x_j,\, y_h(x_j),\, y_h(x_j-\tau)\big) \\ \bullet\, y_h(x_{k+1}) &= \sum_{k=0}^{n-1} {y_0}^{(k)} \frac{{x_{k+1}}^k}{k!} + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} f(x_{k+1},\, y_h(x_{k+1}),\, y_h(x_{k+1-i})) \\ &\quad + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} \sum_{j=0}^{k} a_{j,k+1}\, f\big(x_j,\, y_h(x_j),\, y_h(x_{j-i})\big) \end{aligned} \tag{4.6.7}$$

donde

$$a_{j,k+1} = \begin{cases} k^{\alpha+1} - (k-\alpha)\,(k+1)^\alpha & j = 0 \\ (k-j+2)^{\alpha+1} + (k-j)^{\alpha+1} - 2\,(k-j+1)^{\alpha+1} & 1 \le j \le k \\ 1 & j = k+1 \end{cases} \tag{4.6.8}$$

Se aplica la regla del rectángulo del producto en $y_h(x_{k+1})$ para evaluar el siguiente término *predictor*:

$$\begin{aligned} {y_h}^P(x_{k+1}) &= g(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^{k} b_{j,k+1}\, f\big(x_j,\, y_h(x_j),\, y_h(x_j-\tau)\big) \\ &= g(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^{k} b_{j,k+1}\, f\big(x_j,\, y_h(x_j),\, y_h(x_{j-i})\big) \end{aligned} \tag{4.6.9}$$

donde

$$b_{j,k+1} = \frac{h^\alpha}{\alpha}\,((k+1-j)^\alpha - (k-j)^\alpha). \tag{4.6.10}$$

El error de este método tiene la expresión:

$$\begin{gathered} \text{máx}_{j=0,1,\cdots,N} |y(x_k) - y_h(x_k)| = O(h^p) \\ p = \text{mín}\,(2,\, 1+\alpha). \end{gathered} \tag{4.6.11}$$

En resumen, el método *Adams–Bashforth–Moulton* (ABM) que resuelve numéricamente la ecuaciones FDDE tiene las siguientes ecuaciones:

$$x \in [0,\, T] \quad \{x_k = k\,h\} \quad \begin{cases} k = -i,\, -(i-1),\, \cdots,\, -1,\, 0,\, 1,\, 2,\, \cdots,\, N \\ h := \frac{T}{N} \quad i = \frac{\tau}{h} \end{cases}$$

$$y_h(x_{k+1}) = \sum_{k=0}^{n-1} {y_0}^{(k)} \frac{{x_{k+1}}^k}{k!} + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} f\left(x_{k+1},\, {y_h}^P(x_{k+1}),\, y_h(x_{k+1-i})\right)$$

$$+ \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} \sum_{j=0}^{k} a_{j,k+1}\, f\left(x_j,\, y_h(x_j),\, y_h(x_{j-i})\right)$$

$${y_h}^P(x_{k+1}) = \sum_{k=0}^{n-1} {y_0}^{(k)} \frac{{x_{k+1}}^k}{k!} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^{k} b_{j,k+1}\, f\left(x_j,\, y_h(x_j),\, y_h(x_j-\tau)\right)$$

$$a_{j,k+1} = \begin{cases} k^{\alpha+1} - (k-\alpha)\,(k+1)^\alpha & j = 0 \\ (k-j+2)^{\alpha+1} + (k-j)^{\alpha+1} - 2\,(k-j+1)^{\alpha+1} & 1 \le j \le k \\ 1 & j = k+1 \end{cases}$$

$$b_{j,k+1} = \frac{h^\alpha}{\alpha}\left((k+1-j)^\alpha - (k-j)^\alpha\right).$$

$k = 0 \quad (x_0,\, y_0)$
$k = 1 \quad (x_1,\, y_1) \quad x_1 = 1 * h$
$k = 2 \quad (x_2,\, y_2) \quad x_2 = 2 * h$
$k = k \quad (x_k,\, y_k) \quad x_k = k * h$
$k = N \quad (x_N,\, y_N) \quad x_N = N * h$

$(x_k,\, y_k) \quad k = 0,\, 1,\, \cdots,\, N$

$(x_k - \tau,\, y_{k^*}) \quad x_k - \tau = k^* * h \quad \Rightarrow \quad k^* = \dfrac{x_k - \tau}{h}$

$(x_{k^*},\, y_{k^*}) \equiv \left(x_{\left(\frac{x_k-\tau}{h}\right)},\, y_{\left(\frac{x_k-\tau}{h}\right)}\right) \quad k = \dfrac{\tau}{h},\, \dfrac{\tau}{h}+1,\, \cdots,\, N$

$i = \dfrac{\tau}{h}$

4.6.2. Problemas

■ Ecuaciones Diferenciales Fraccionarias con Retraso (FDDE)

■ **Problema 4.6.1. Modelo de la Cinética Enzimática Fraccionaria de Cuatro Dimensiones con una Molécula Inhibidora.** ([BHAL11])

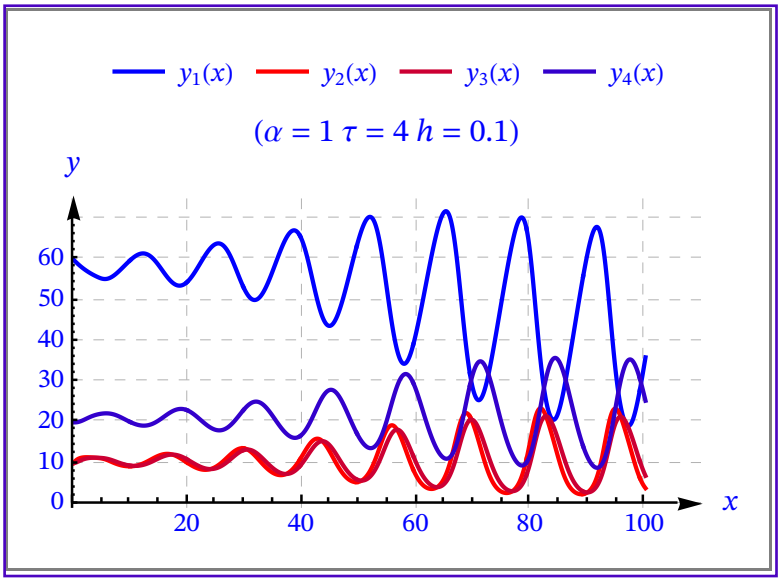
Considérese el sistema de ecuaciones diferenciales fraccionarias con retraso SFDDE

$$(P) \equiv \begin{cases} D^{(\alpha)}\, y_1(x) = 10.5 - \frac{y_1(x)}{1+0.0005\, y_4{}^3(x-4)} & x \in (0,\, T),\ 0 < \alpha \le 1 \\ D^{(\alpha)}\, y_2(x) = \frac{y_1(x)}{1+0.0005\, y_4(x-\tau)^3} - y_2(x) & \\ D^{(\alpha)}\, y_3(x) = y_2(x) - y_3(x) & \\ D^{(\alpha)}\, y_4(x) = y_3(x) - 0.5\, y_4(x) & \\ y(x) = \begin{pmatrix} 60 \\ 10 \\ 10 \\ 20 \end{pmatrix} & x \le 0 \\ y(0) = \begin{pmatrix} 60 \\ 10 \\ 10 \\ 20 \end{pmatrix} & \end{cases}$$

(i) Calcúlese la solución numérica mediante el método de *Adams–Bashforth–Moulton fraccionario con retraso* (ABMFR) tomando un tamaño del paso h dado y el orden α.

(ii) Represéntese la solución del método ABMFR en el intervalo $[0,\, T]$, y el diagrama de fases en el plano $y(x),\ y(x-\tau)$.

(a) $\begin{cases} \alpha = 1 & \tau = 4 \\ h = 0.1 \end{cases}$ $[0,\, T] = [0,\, 40]$.



(b) $\begin{cases} \alpha = 0.95 & \tau = 4 \\ h = 0.1 \end{cases}$ $[0,\, T] = [0,\, 100]$.

(c) $\begin{cases} \alpha = 0.83 & \tau = 4 \\ h = 0.1 \end{cases}$ $[0,\ T] = [0,\ 100].$

SOLUCIÓN

(a)

Método de *Adams–Bashforth–Moulton Fraccionario con Retraso* (ABMFR) para Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Fraccionarias con Retraso (SFDDE).

$$(P) \equiv \begin{cases} D^{(\alpha)}\, y_r(x) = f_r\,(x,\ y_1(x),\ \ldots,\ y_r(x), & x \in [0,\ T] \quad 0 < \alpha \le 1 \\ \qquad y_1(x-\tau),\ \ldots,\ y_r(x-\tau)) & \\ y_r(x) = g_r(x) & x \in [-\tau,\ 0] \\ y_r(0) = y_{r\,0} & \end{cases}$$

$r = 1, 2, \cdots, m$

$$(P) \equiv \left(\begin{array}{c} \left(\begin{array}{c} D\, y_1(x) = 10.5 - \frac{y_1(x)}{0.0005\, y_4(x-4)^3+1} \\ D\, y_2(x) = \frac{y_1(x)}{0.0005\, y_4(x-4)^3+1} - y_2(x) \\ D\, y_3(x) = y_2(x) - y_3(x) \\ D\, y_4(x) = y_3(x) - 0.5\, y_4(x) \end{array} \right) \qquad x \in [0,\ T] \\ (\, y_1(0) = 60 \quad y_2(0) = 10 \quad y_3(0) = 10 \quad y_4(0) = 20\,) \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ll} f_1(x,\ y_r(x),\ y_r(x-\tau)) = & 10.5 - \frac{y_1(x)}{0.0005\, y_4(x-4)^3+1} \\ f_2(x,\ y_r(x),\ y_r(x-\tau)) = & \frac{y_1(x)}{0.0005\, y_4(x-4)^3+1} - y_2(x) \\ f_3(x,\ y_r(x),\ y_r(x-\tau)) = & y_2(x) - y_3(x) \\ f_4(x,\ y_r(x),\ y_r(x-\tau)) = & y_3(x) - 0.5\, y_4(x) \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{lll} [A,\ B] = & [0,\ 100] & (\text{intervalo } x) \\ \{\alpha,\ n = \lceil \alpha \rceil\} = & \{1,\ 1\} & \\ \tau = & 4 & \\ h = & 0.1 & \text{Tamaño del paso} \\ m = & 4 & \text{Número de ecuaciones} \end{array} \right)$$

Ecuaciones del método de

Adams–Bashforth–Moulton Fraccionario con Retraso (SFDDE)

$$x \in [0, T] \quad \{x_k = k\,h\} \quad \begin{cases} k = -i, -(i-1), \cdots, -1, 0, 1, 2, \cdots, N \\ h := \frac{T}{N} \quad i = \frac{\tau}{h} \end{cases}$$

$$y_{r\,h}(x_{k+1}) = g_r(0) + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} f_r(x_{k+1},$$

$$y_{1\,h}{}^P(x_{k+1}), \ldots, y_{r\,h}{}^P(x_{k+1}), y_{1\,h}(x_{k+1-i}), \ldots, y_{r\,h}(x_{k+1-i}))$$

$$+ \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} \sum_{j=0}^{k} a_{j,k+1}\, f_r(x_j, y_{1\,h}(x_j), \ldots, y_{r\,h}(x_j), y_{1\,h}(x_{j-i}), \ldots, y_{r\,h}(x_{j-i}))$$

$$y_{r\,h}{}^P(x_{k+1}) = g_r(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^{k} b_{j,k+1}\, f_r(x_j, y_{1,h}(x_j), \ldots, y_{r,h}(x_j), y_{1\,h}(x_j - \tau), \ldots, y_{r\,h}(x_j - \tau))$$

$$r = 1, 2, \cdots, m$$

- $a_{j,k+1} = \begin{cases} k^{\alpha+1} - (k-\alpha)(k+1)^\alpha & j = 0 \\ (k-j+2)^{\alpha+1} + (k-j)^{\alpha+1} - 2(k-j+1)^{\alpha+1} & 1 \le j \le k \\ 1 & j = k+1 \end{cases}$
- $b_{j,k+1} = \frac{h^\alpha}{\alpha}((k+1-j)^\alpha - (k-j)^\alpha)$

Proceso iterativo.

- $k = 99$

k	x_k	$y_{1\,k}{}^P$	$y_{1\,k}$	$y_{2\,k}{}^P$	$y_{2\,k}$	$y_{3\,k}{}^P$	$y_{3\,k}$	$y_{4\,k}{}^P$	$y_{4\,k}$
99	9.9	59.8412	59.7014	9.20658	9.312	9.39269	9.39693	20.1042	20.1378
100	10.	59.9673	59.8288	9.2097	9.31386	9.3751	9.37832	20.039	20.0718

- $k = 199$

k	x_k	$y_{1\,k}{}^P$	$y_{1\,k}$	$y_{2\,k}{}^P$	$y_{2\,k}$	$y_{3\,k}{}^P$	$y_{3\,k}$	$y_{4\,k}{}^P$	$y_{4\,k}$
199	19.9	54.5611	54.4178	10.0757	10.2305	10.8757	10.9097	22.9675	22.9969
200	20.	54.6994	54.552	9.98441	10.1388	10.7951	10.8297	22.9042	22.9361

- $k = 299$

k	x_k	$y_{1\,k}{}^P$	$y_{1\,k}$	$y_{2\,k}{}^P$	$y_{2\,k}$	$y_{3\,k}{}^P$	$y_{3\,k}$	$y_{4\,k}{}^P$	$y_{4\,k}$
299	29.9	52.6853	52.7504	13.6034	13.7246	13.2437	13.2184	23.3361	23.2566
300	30.	52.413	52.472	13.567	13.6927	13.2763	13.2544	23.4915	23.4141

- $k = 399$

k	x_k	$y_{1\,k}{}^P$	$y_{1\,k}$	$y_{2\,k}{}^P$	$y_{2\,k}$	$y_{3\,k}{}^P$	$y_{3\,k}$	$y_{4\,k}{}^P$	$y_{4\,k}$
399	39.9	64.9268	65.0242	11.6068	11.5888	9.80956	9.71592	16.9772	16.9142
400	40.	64.5713	64.6814	11.84	11.8209	9.9919	9.89564	17.115	17.0463

- $k = 499$

k	x_k	$y_{1\,k}{}^P$	$y_{1\,k}$	$y_{2\,k}{}^P$	$y_{2\,k}$	$y_{3\,k}{}^P$	$y_{3\,k}$	$y_{4\,k}{}^P$	$y_{4\,k}$
499	49.9	65.2176	64.9066	5.41116	5.49706	5.78542	5.8006	16.3803	16.5028
500	50.	65.6804	65.3759	5.45531	5.53662	5.75184	5.76317	16.144	16.2624

- $k = 599$

k	x_k	$y_{1\,k}{}^P$	$y_{1\,k}$	$y_{2\,k}{}^P$	$y_{2\,k}$	$y_{3\,k}{}^P$	$y_{3\,k}$	$y_{4\,k}{}^P$	$y_{4\,k}$
599	59.9	42.016	41.629	6.92651	7.17211	10.0904	10.244	27.9276	28.1184
600	60.	42.6431	42.2491	6.66993	6.90943	9.77674	9.92765	27.5341	27.731

- $k = 699$

k	x_k	$y_{1\,k}{}^P$	$y_{1\,k}$	$y_{2\,k}{}^P$	$y_{2\,k}$	$y_{3\,k}{}^P$	$y_{3\,k}$	$y_{4\,k}{}^P$	$y_{4\,k}$
699	69.9	27.8669	28.0557	19.5168	19.8189	20.516	20.5526	32.2719	32.0454
700	70.	27.3788	27.5387	19.1225	19.4343	20.4018	20.4527	32.6939	32.4834

- $k = 799$

k	x_k	$y_{1\,k}{}^P$	$y_{1\,k}$	$y_{2\,k}{}^P$	$y_{2\,k}$	$y_{3\,k}{}^P$	$y_{3\,k}$	$y_{4\,k}{}^P$	$y_{4\,k}$
799	79.9	60.7867	61.3444	15.8114	15.5302	10.3986	10.1285	12.3471	12.1442
800	80.	59.508	60.1	16.5232	16.2434	10.9485	10.6698	12.7861	12.5667

- $k = 899$

k	x_k	$y_{1\,k}{}^P$	$y_{1\,k}$	$y_{2\,k}{}^P$	$y_{2\,k}$	$y_{3\,k}{}^P$	$y_{3\,k}$	$y_{4\,k}{}^P$	$y_{4\,k}$
899	89.9	61.7707	61.3613	2.85147	2.90618	2.79185	2.78584	11.3568	11.5051
900	90.	62.4259	62.0276	2.95623	3.00478	2.80245	2.7918	11.0756	11.2165

- $k = 999$

k	x_k	$y_{1\,k}{}^P$	$y_{1\,k}$	$y_{2\,k}{}^P$	$y_{2\,k}$	$y_{3\,k}{}^P$	$y_{3\,k}$	$y_{4\,k}{}^P$	$y_{4\,k}$
999	99.9	35.1379	34.6408	4.01646	4.22478	7.18918	7.34521	25.9063	26.1938
1000	100.	35.9815	35.482	3.83091	4.03192	6.87813	7.02793	25.3284	25.6174

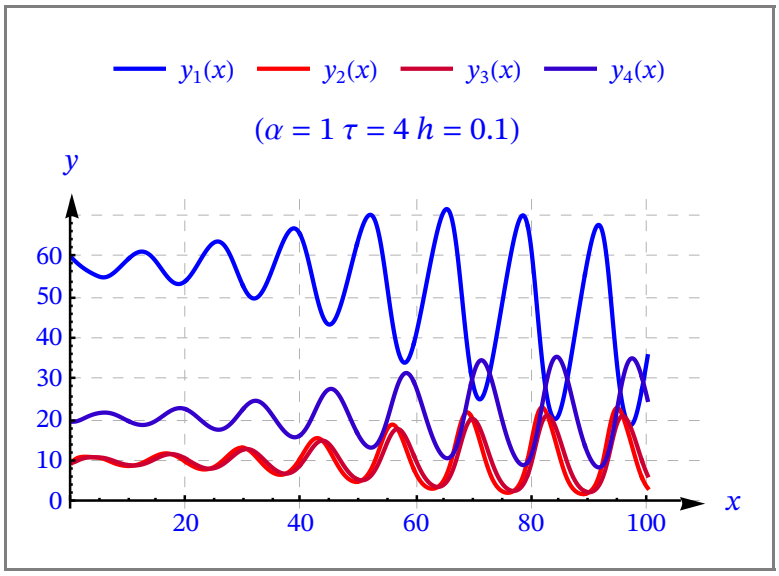
Tabla de puntos $(x_k, y_{r\,k}{}^P)$ y $(x_k, y_{r\,k})$ $(r = 1, 2, \cdots, m)$.

k	x_k	$y_{1\,k}{}^P$	$y_{2\,k}{}^P$	$y_{3\,k}{}^P$	$y_{4\,k}{}^P$
100	10.0000000000	59.8288278142	9.3138635349	9.3783228051	20.071843085
200	20.0000000000	54.5519890934	10.1388145726	10.8296733134	22.936109642
300	30.0000000000	52.4719611346	13.6926914900	13.2543801446	23.414133591
400	40.0000000000	64.6814252904	11.8208973255	9.8956406311	17.046336566
500	50.0000000000	65.3758913369	5.5366179831	5.7631725930	16.262362685
600	60.0000000000	42.2490752205	6.9094252218	9.9276465941	27.731024377
700	70.0000000000	27.5386932789	19.4343029524	20.4527265724	32.483374230
800	80.0000000000	60.1000188409	16.2434116704	10.6697707848	12.566739869
900	90.0000000000	62.0275930863	3.0047779491	2.7917990994	11.216460123
1000	100.0000000000	35.4820405659	4.0319220633	7.0279327717	25.617445171

k	x_k	$y_{1\,k}$	$y_{2\,k}$	$y_{3\,k}$	$y_{4\,k}$
0	0.0000000000	60	10	10	20
100	10.0000000000	59.9672968371	9.2097013353	9.3750998416	20.038963148
200	20.0000000000	54.6994498413	9.9844130961	10.7951303764	22.904190567
300	30.0000000000	52.4129804179	13.5670376322	13.2762957119	23.491499259
400	40.0000000000	64.5712863083	11.8399914413	9.9919034659	17.114960183
500	50.0000000000	65.6803682937	5.4553101271	5.7518448625	16.143962248
600	60.0000000000	42.6430951216	6.6699340596	9.7767355255	27.534131097
700	70.0000000000	27.3787865903	19.1224944934	20.4018053914	32.693926203
800	80.0000000000	59.5080217776	16.5232381502	10.9484528291	12.786059912
900	90.0000000000	62.4259010465	2.9562310915	2.8024480419	11.075638575
1000	100.0000000000	35.9814517391	3.8309147870	6.8781322363	25.328405681

$y(100) \approx y_{1000} = 35.9814517391$

Solución aproximada del sistema SFDDE
$y_h(x)$ $(h = 0.1)$
calculada con el método *Adams–Bashforth–Moulton Fraccionario con Retraso.*



(b)

Método de *Adams–Bashforth–Moulton Fraccionario con Retraso* (ABMFR) para Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Fraccionarias con Retraso (SFDDE).

$$(P) \equiv \begin{cases} D^{(\alpha)}\, y_r(x) = f_r\,(x,\ y_1(x),\ \ldots,\ y_r(x), & x \in [0,\ T] \quad 0 < \alpha \le 1 \\ \qquad y_1(x-\tau),\ \ldots,\ y_r(x-\tau)) & \\ y_r(x) = g_r(x) & x \in [-\tau,\ 0] \\ y_r(0) = y_{r\,0} & \end{cases}$$

$$r = 1,\ 2, \cdots,\ m$$

$$(P) \equiv \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} D^{0.95}\, y_1(x) = 10.5 - \frac{y_1(x)}{0.0005\, y_4(x-4)^3+1} \\ D^{0.95}\, y_2(x) = \frac{y_1(x)}{0.0005\, y_4(x-4)^3+1} - y_2(x) \\ D^{0.95}\, y_3(x) = y_2(x) - y_3(x) \\ D^{0.95}\, y_4(x) = y_3(x) - 0.5\, y_4(x) \end{pmatrix} & x \in [0,\ T] \\ (\, y_1(0) = 60 \quad y_2(0) = 10 \quad y_3(0) = 10 \quad y_4(0) = 20\,) & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f_1(x,\ y_r(x),\ y_r(x-\tau)) = & 10.5 - \frac{y_1(x)}{0.0005\, y_4(x-4)^3+1} \\ f_2(x,\ y_r(x),\ y_r(x-\tau)) = & \frac{y_1(x)}{0.0005\, y_4(x-4)^3+1} - y_2(x) \\ f_3(x,\ y_r(x),\ y_r(x-\tau)) = & y_2(x) - y_3(x) \\ f_4(x,\ y_r(x),\ y_r(x-\tau)) = & y_3(x) - 0.5\, y_4(x) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} [A,\ B] = & [0,\ 100] & (\text{intervalo } x) \\ \{\alpha,\ n = \lceil \alpha \rceil\} = & \{0.95,\ 1\} & \\ \tau = & 4 & \\ h = & 0.1 & \text{Tamaño del paso} \\ m = & 4 & \text{Número de ecuaciones} \end{pmatrix}$$

Ecuaciones del método de

Adams–Bashforth–Moulton Fraccionario con Retraso (SFDDE)

$$x \in [0, T] \quad \{x_k = k\,h\} \quad \begin{cases} k = -i, -(i-1), \cdots, -1, 0, 1, 2, \cdots, N \\ h := \frac{T}{N} \quad i = \frac{\tau}{h} \end{cases}$$

$$y_{r\,h}(x_{k+1}) = g_r(0) + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} f_r(x_{k+1},$$

$$y_{1\,h}{}^P(x_{k+1}), \ldots, y_{r\,h}{}^P(x_{k+1}), y_{1\,h}(x_{k+1-i}), \ldots, y_{r\,h}(x_{k+1-i}))$$

$$+ \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} \sum_{j=0}^{k} a_{j,k+1}\, f_r(x_j, y_{1\,h}(x_j), \ldots, y_{r\,h}(x_j), y_{1\,h}(x_{j-i}), \ldots, y_{r\,h}(x_{j-i}))$$

$$y_{r\,h}{}^P(x_{k+1}) = g_r(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^{k} b_{j,k+1}\, f_r(x_j, y_{1,h}(x_j), \ldots, y_{r,h}(x_j), y_{1\,h}(x_j - \tau), \ldots, y_{r\,h}(x_j - \tau))$$

$$r = 1, 2, \cdots, m$$

- $a_{j,k+1} = \begin{cases} k^{\alpha+1} - (k-\alpha)(k+1)^\alpha & j = 0 \\ (k-j+2)^{\alpha+1} + (k-j)^{\alpha+1} - 2(k-j+1)^{\alpha+1} & 1 \le j \le k \\ 1 & j = k+1 \end{cases}$
- $b_{j,k+1} = \frac{h^\alpha}{\alpha}((k+1-j)^\alpha - (k-j)^\alpha)$

Proceso iterativo.

- $k = 99$

k	x_k	$y_{1\,k}{}^P$	$y_{1\,k}$	$y_{2\,k}{}^P$	$y_{2\,k}$	$y_{3\,k}{}^P$	$y_{3\,k}$	$y_{4\,k}{}^P$	$y_{4\,k}$
99	9.9	59.6092	59.4902	9.39344	9.48635	9.59452	9.59747	20.3169	20.344
100	10.	59.7139	59.5963	9.39464	9.4864	9.5788	9.58093	20.2647	20.2911

- $k = 199$

k	x_k	$y_{1\,k}{}^P$	$y_{1\,k}$	$y_{2\,k}{}^P$	$y_{2\,k}$	$y_{3\,k}{}^P$	$y_{3\,k}$	$y_{4\,k}{}^P$	$y_{4\,k}$
199	19.9	55.6985	55.5881	10.3192	10.4438	10.8579	10.8787	22.3584	22.3761
200	20.	55.7944	55.6811	10.2542	10.3785	10.8037	10.825	22.3201	22.3395

- $k = 299$

k	x_k	$y_{1\,k}{}^P$	$y_{1\,k}$	$y_{2\,k}{}^P$	$y_{2\,k}$	$y_{3\,k}{}^P$	$y_{3\,k}$	$y_{4\,k}{}^P$	$y_{4\,k}$
299	29.9	55.6498	55.6704	12.3044	12.3955	11.974	11.9543	22.0441	21.9998
300	30.	55.4893	55.5068	12.294	12.3874	11.9988	11.9808	22.1314	22.0881

- $k = 399$

k	x_k	$y_{1\,k}{}^P$	$y_{1\,k}$	$y_{2\,k}{}^P$	$y_{2\,k}$	$y_{3\,k}{}^P$	$y_{3\,k}$	$y_{4\,k}{}^P$	$y_{4\,k}$
399	39.9	62.4089	62.4221	10.7422	10.7706	9.91439	9.8687	18.8596	18.8341
400	40.	62.257	62.2757	10.8499	10.878	9.99798	9.95121	18.9167	18.8886

- $k = 499$

k	x_k	$y_{1\,k}{}^P$	$y_{1\,k}$	$y_{2\,k}{}^P$	$y_{2\,k}$	$y_{3\,k}{}^P$	$y_{3\,k}$	$y_{4\,k}{}^P$	$y_{4\,k}$
499	49.9	62.1072	61.9315	7.97565	8.05623	8.37276	8.38409	19.3309	19.3916
500	50.	62.3331	62.1609	7.98845	8.06638	8.3438	8.3531	19.2134	19.2725

- $k = 599$

k	x_k	$y_{1\,k}{}^P$	$y_{1\,k}$	$y_{2\,k}{}^P$	$y_{2\,k}$	$y_{3\,k}{}^P$	$y_{3\,k}$	$y_{4\,k}{}^P$	$y_{4\,k}$
599	59.9	52.1583	51.9747	9.73086	9.8942	11.0828	11.1431	24.1985	24.2519
600	60.	52.4082	52.2192	9.58615	9.74811	10.9497	11.0105	24.0848	24.1417

- $k = 699$

k	x_k	$y_{1\,k}{}^P$	$y_{1\,k}$	$y_{2\,k}{}^P$	$y_{2\,k}$	$y_{3\,k}{}^P$	$y_{3\,k}$	$y_{4\,k}{}^P$	$y_{4\,k}$
699	69.9	49.9081	50.028	14.8151	14.9245	14.2173	14.1875	24.0307	23.928
700	70.	49.5637	49.6741	14.7563	14.8719	14.2564	14.2313	24.2304	24.131

- $k = 799$

k	x_k	$y_{1\,k}{}^P$	$y_{1\,k}$	$y_{2\,k}{}^P$	$y_{2\,k}$	$y_{3\,k}{}^P$	$y_{3\,k}$	$y_{4\,k}{}^P$	$y_{4\,k}$
799	79.9	65.1014	65.2289	11.3499	11.2973	9.46183	9.36502	16.5861	16.5249
800	80.	64.721	64.8619	11.6023	11.5485	9.65264	9.55304	16.7214	16.6544

- $k = 899$

k	x_k	$y_{1\,k}{}^P$	$y_{1\,k}$	$y_{2\,k}{}^P$	$y_{2\,k}$	$y_{3\,k}{}^P$	$y_{3\,k}$	$y_{4\,k}{}^P$	$y_{4\,k}$
899	89.9	63.7129	63.4415	5.7054	5.77381	6.29813	6.31644	17.3712	17.4817
900	90.	64.1309	63.8657	5.73815	5.80235	6.25875	6.2736	17.158	17.2649

- $k = 999$

k	x_k	$y_{1\,k}{}^P$	$y_{1\,k}$	$y_{2\,k}{}^P$	$y_{2\,k}$	$y_{3\,k}{}^P$	$y_{3\,k}$	$y_{4\,k}{}^P$	$y_{4\,k}$
999	99.9	44.8559	44.5505	8.37209	8.58384	10.9685	11.0885	26.7461	26.8696
1000	100.	45.3522	45.0401	8.13623	8.34362	10.7189	10.8379	26.4875	26.6165

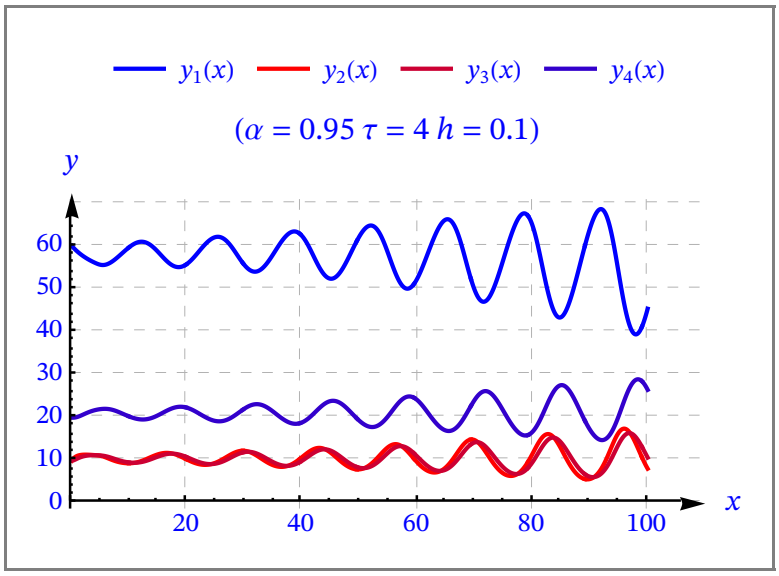
Tabla de puntos $(x_k, y_{r\,k}{}^P)$ y $(x_k, y_{r\,k})$ $(r = 1, 2, \cdots, m)$.

k	x_k	$y_{1\,k}{}^P$	$y_{2\,k}{}^P$	$y_{3\,k}{}^P$	$y_{4\,k}{}^P$
100	10.0000000000	59.5963189549	9.4863971379	9.5809283570	20.291126934(
200	20.0000000000	55.6810985013	10.3785186026	10.8249953243	22.339460683
300	30.0000000000	55.5067910607	12.3874002454	11.9808120740	22.088103875
400	40.0000000000	62.2756814355	10.8780088219	9.9512134395	18.888632097
500	50.0000000000	62.1609208820	8.0663844985	8.3531024921	19.272474645
600	60.0000000000	52.2191540621	9.7481059932	11.0104722428	24.141670480
700	70.0000000000	49.6740600819	14.8719095797	14.2312834095	24.130957530
800	80.0000000000	64.8618691461	11.5484817301	9.5530402212	16.654394163
900	90.0000000000	63.8657172219	5.8023492541	6.2735956786	17.264919606
1000	100.0000000000	45.0400703629	8.3436245025	10.8378563088	26.616503655

k	x_k	$y_{1\,k}$	$y_{2\,k}$	$y_{3\,k}$	$y_{4\,k}$
0	0.0000000000	60	10	10	20
100	10.0000000000	59.7139445248	9.3946388737	9.5787977997	20.264650967
200	20.0000000000	55.7944156742	10.2541759790	10.8037454990	22.320120572
300	30.0000000000	55.4892538649	12.2939685192	11.9987508756	22.131383308
400	40.0000000000	62.2569826074	10.8499472289	9.9979751546	18.916693696
500	50.0000000000	62.3331446301	7.9884454471	8.3437981891	19.213419684
600	60.0000000000	52.4081784597	9.5861457633	10.9497270309	24.084779381
700	70.0000000000	49.5637212080	14.7562931434	14.2563702950	24.230425626
800	80.0000000000	64.7210075724	11.6023271754	9.6526353407	16.721362782
900	90.0000000000	64.1309230597	5.7381519725	6.2587526775	17.157961642
1000	100.0000000000	45.3521542831	8.1362324829	10.7188543671	26.487502017

$y(100) \approx y_{1000} = 45.3521542831$

Solución aproximada del sistema SFDDE
$y_h(x)$ $(h = 0.1)$
calculada con el método *Adams–Bashforth–Moulton Fraccionario con Retraso.*



(c)

Método de *Adams–Bashforth–Moulton Fraccionario con Retraso* (ABMFR) para Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Fraccionarias con Retraso (SFDDE).

$$(P) \equiv \begin{cases} D^{(\alpha)}\, y_r(x) = f_r\,(x,\ y_1(x),\ \ldots,\ y_r(x), & x \in [0,\ T] \quad 0 < \alpha \le 1 \\ \qquad y_1(x-\tau),\ \ldots,\ y_r(x-\tau)) & \\ y_r(x) = g_r(x) & x \in [-\tau,\ 0] \\ y_r(0) = y_{r\,0} & \end{cases}$$

$$r = 1,\ 2, \cdots,\ m$$

$$(P) \equiv \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} D^{0.83}\, y_1(x) = 10.5 - \frac{y_1(x)}{0.0005\, y_4(x-4)^3+1} \\ D^{0.83}\, y_2(x) = \frac{y_1(x)}{0.0005\, y_4(x-4)^3+1} - y_2(x) \\ D^{0.83}\, y_3(x) = y_2(x) - y_3(x) \\ D^{0.83}\, y_4(x) = y_3(x) - 0.5\, y_4(x) \end{pmatrix} & x \in [0,\ T] \\ (\, y_1(0) = 60 \quad y_2(0) = 10 \quad y_3(0) = 10 \quad y_4(0) = 20\,) & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f_1(x,\ y_r(x),\ y_r(x-\tau)) = & 10.5 - \frac{y_1(x)}{0.0005\, y_4(x-4)^3+1} \\ f_2(x,\ y_r(x),\ y_r(x-\tau)) = & \frac{y_1(x)}{0.0005\, y_4(x-4)^3+1} - y_2(x) \\ f_3(x,\ y_r(x),\ y_r(x-\tau)) = & y_2(x) - y_3(x) \\ f_4(x,\ y_r(x),\ y_r(x-\tau)) = & y_3(x) - 0.5\, y_4(x) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} [A,\ B] = & [0,\ 100] & (\text{intervalo } x) \\ \{\alpha,\ n = \lceil \alpha \rceil\} = & \{0.83,\ 1\} & \\ \tau = & 4 & \\ h = & 0.1 & \text{Tamaño del paso} \\ m = & 4 & \text{Número de ecuaciones} \end{pmatrix}$$

Ecuaciones del método de

Adams–Bashforth–Moulton Fraccionario con Retraso (SFDDE)

$$x \in [0, T] \quad \{x_k = k\,h\} \quad \begin{cases} k = -i, -(i-1), \cdots, -1, 0, 1, 2, \cdots, N \\ h := \frac{T}{N} \quad i = \frac{\tau}{h} \end{cases}$$

$$y_{r\,h}(x_{k+1}) = g_r(0) + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} f_r(x_{k+1},$$

$$y_{1\,h}{}^P(x_{k+1}), \ldots, y_{r\,h}{}^P(x_{k+1}), y_{1\,h}(x_{k+1-i}), \ldots, y_{r\,h}(x_{k+1-i}))$$

$$+ \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} \sum_{j=0}^{k} a_{j,k+1}\, f_r(x_j, y_{1\,h}(x_j), \ldots, y_{r\,h}(x_j), y_{1\,h}(x_{j-i}), \ldots, y_{r\,h}(x_{j-i}))$$

$$y_{r\,h}{}^P(x_{k+1}) = g_r(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^{k} b_{j,k+1}\, f_r(x_j, y_{1,h}(x_j), \ldots, y_{r,h}(x_j), y_{1\,h}(x_j - \tau), \ldots, y_{r\,h}(x_j - \tau))$$

$r = 1, 2, \cdots, m$

- $a_{j,k+1} = \begin{cases} k^{\alpha+1} - (k-\alpha)(k+1)^\alpha & j = 0 \\ (k-j+2)^{\alpha+1} + (k-j)^{\alpha+1} - 2(k-j+1)^{\alpha+1} & 1 \le j \le k \\ 1 & j = k+1 \end{cases}$
- $b_{j,k+1} = \frac{h^\alpha}{\alpha}((k+1-j)^\alpha - (k-j)^\alpha)$

Proceso iterativo.

- $k = 99$

k	x_k	$y_{1\,k}{}^P$	$y_{1\,k}$	$y_{2\,k}{}^P$	$y_{2\,k}$	$y_{3\,k}{}^P$	$y_{3\,k}$	$y_{4\,k}{}^P$	$y_{4\,k}$
99	9.9	59.181	59.1026	9.7839	9.85121	9.97611	9.97605	20.6487	20.6643
100	10.	59.245	59.1678	9.78327	9.84961	9.96495	9.96438	20.6191	20.6344

- $k = 199$

k	x_k	$y_{1\,k}{}^P$	$y_{1\,k}$	$y_{2\,k}{}^P$	$y_{2\,k}$	$y_{3\,k}{}^P$	$y_{3\,k}$	$y_{4\,k}{}^P$	$y_{4\,k}$
199	19.9	57.4017	57.3425	10.5416	10.6149	10.7105	10.714	21.4585	21.4636
200	20.	57.4389	57.3787	10.5158	10.5891	10.6916	10.6953	21.448	21.4536

- $k = 299$

k	x_k	$y_{1\,k}{}^P$	$y_{1\,k}$	$y_{2\,k}{}^P$	$y_{2\,k}$	$y_{3\,k}{}^P$	$y_{3\,k}$	$y_{4\,k}{}^P$	$y_{4\,k}$
299	29.9	58.1432	58.1248	10.9125	10.9661	10.7732	10.7636	21.0641	21.055
300	30.	58.1057	58.0866	10.9139	10.968	10.7811	10.772	21.0831	21.0741

- $k = 399$

k	x_k	$y_{1\,k}{}^P$	$y_{1\,k}$	$y_{2\,k}{}^P$	$y_{2\,k}$	$y_{3\,k}{}^P$	$y_{3\,k}$	$y_{4\,k}{}^P$	$y_{4\,k}$
399	39.9	59.3973	59.3699	10.4262	10.47	10.3297	10.3199	20.6342	20.6326
400	40.	59.3801	59.3534	10.4413	10.485	10.3402	10.3302	20.639	20.6371

- $k = 499$

k	x_k	$y_{1\,k}{}^P$	$y_{1\,k}$	$y_{2\,k}{}^P$	$y_{2\,k}$	$y_{3\,k}{}^P$	$y_{3\,k}$	$y_{4\,k}{}^P$	$y_{4\,k}$
499	49.9	59.0268	58.9797	10.2494	10.3009	10.3292	10.3273	20.9103	20.9164
500	50.	59.0511	59.0044	10.2476	10.2988	10.324	10.3219	20.8991	20.9051

- $k = 599$

k	x_k	$y_{1\,k}{}^P$	$y_{1\,k}$	$y_{2\,k}{}^P$	$y_{2\,k}$	$y_{3\,k}{}^P$	$y_{3\,k}$	$y_{4\,k}{}^P$	$y_{4\,k}$
599	59.9	58.4313	58.3929	10.5459	10.5996	10.5927	10.5909	21.1591	21.1603
600	60.	58.4411	58.4022	10.537	10.5908	10.5868	10.585	21.157	21.1584

- $k = 699$

k	x_k	$y_{1\,k}{}^P$	$y_{1\,k}$	$y_{2\,k}{}^P$	$y_{2\,k}$	$y_{3\,k}{}^P$	$y_{3\,k}$	$y_{4\,k}{}^P$	$y_{4\,k}$
699	69.9	58.7765	58.7512	10.6358	10.6821	10.5795	10.5732	20.9882	20.9851
700	70.	58.7621	58.7366	10.6374	10.684	10.5831	10.5768	20.9951	20.9921

- $k = 799$

k	x_k	$y_{1\,k}{}^P$	$y_{1\,k}$	$y_{2\,k}{}^P$	$y_{2\,k}$	$y_{3\,k}{}^P$	$y_{3\,k}$	$y_{4\,k}{}^P$	$y_{4\,k}$
799	79.9	59.1766	59.1467	10.4545	10.4981	10.4263	10.4204	20.8602	20.8604
800	80.	59.1725	59.1429	10.4596	10.5031	10.4296	10.4236	20.8611	20.8611

- $k = 899$

k	x_k	$y_{1\,k}{}^P$	$y_{1\,k}$	$y_{2\,k}{}^P$	$y_{2\,k}$	$y_{3\,k}{}^P$	$y_{3\,k}$	$y_{4\,k}{}^P$	$y_{4\,k}$
899	89.9	58.9999	58.9639	10.4158	10.4621	10.4466	10.4435	20.9757	20.9782
900	90.	59.0091	58.9732	10.4145	10.4607	10.4443	10.4412	20.9717	20.9741

- $k = 999$

k	x_k	$y_{1\,k}{}^P$	$y_{1\,k}$	$y_{2\,k}{}^P$	$y_{2\,k}$	$y_{3\,k}{}^P$	$y_{3\,k}$	$y_{4\,k}{}^P$	$y_{4\,k}$
999	99.9	58.8193	58.7874	10.5265	10.5728	10.5374	10.534	21.0489	21.0493
1000	100.	58.8215	58.7895	10.5235	10.5699	10.5357	10.5323	21.0487	21.0492

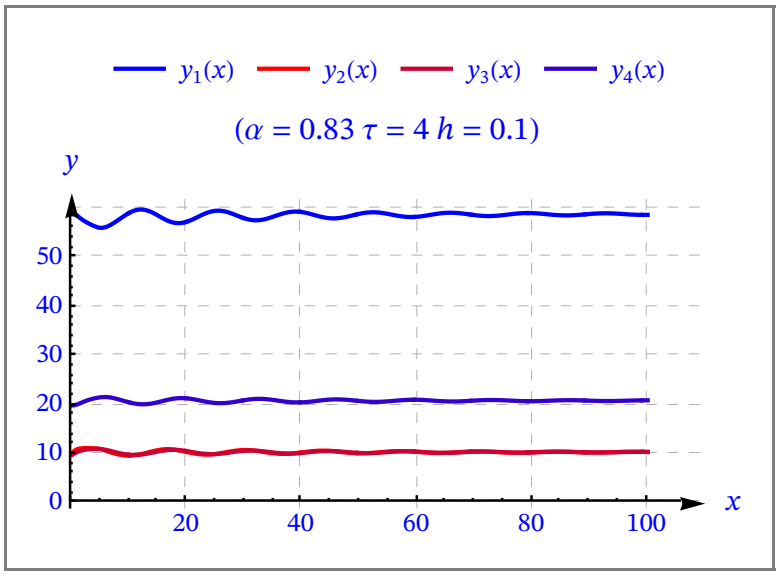
Tabla de puntos $(x_k, y_{r\,k}{}^P)$ y $(x_k, y_{r\,k})$ $(r = 1, 2, \cdots, m)$.

k	x_k	$y_{1\,k}{}^P$	$y_{2\,k}{}^P$	$y_{3\,k}{}^P$	$y_{4\,k}{}^P$
100	10.0000000000	59.1677844978	9.8496144762	9.9643805272	20.634367033
200	20.0000000000	57.3786963162	10.5890542316	10.6952604553	21.453636459
300	30.0000000000	58.0866072793	10.9680210749	10.7719530756	21.074116758
400	40.0000000000	59.3534351390	10.4850436055	10.3302384141	20.637136200
500	50.0000000000	59.0043749192	10.2988141463	10.3219015552	20.905082949
600	60.0000000000	58.4022181842	10.5907558607	10.5850468364	21.158374815
700	70.0000000000	58.7366306401	10.6840041376	10.5768330710	20.992059784
800	80.0000000000	59.1428738421	10.5031314059	10.4236238353	20.861070066
900	90.0000000000	58.9731956711	10.4607177871	10.4411633381	20.974065407
1000	100.0000000000	58.7894855673	10.5698635169	10.5323037098	21.049159256

k	x_k	$y_{1\,k}$	$y_{2\,k}$	$y_{3\,k}$	$y_{4\,k}$
0	0.0000000000	60	10	10	20
100	10.0000000000	59.2450209986	9.7832731213	9.9649478899	20.619065077
200	20.0000000000	57.4389169465	10.5158243076	10.6915960935	21.448045290
300	30.0000000000	58.1057008395	10.9138947748	10.7811413993	21.083105387
400	40.0000000000	59.3800997352	10.4413126609	10.3402396009	20.639039636
500	50.0000000000	59.0511061944	10.2475732189	10.3240069650	20.899070611
600	60.0000000000	58.4410586403	10.5370398031	10.5867764950	21.156951125
700	70.0000000000	58.7620992183	10.6374423652	10.5830871376	20.995099861
800	80.0000000000	59.1725169071	10.4595849565	10.4295589925	20.861063434
900	90.0000000000	59.0091440581	10.4144943467	10.4443033964	20.971653854
1000	100.0000000000	58.8215022148	10.5235196639	10.5356605004	21.048706542

$y(100) \approx y_{1000} = 58.8215022148$

Solución aproximada del sistema SFDDE
$y_h(x)$ $(h = 0.1)$
calculada con el método *Adams–Bashforth–Moulton Fraccionario con Retraso.*



■ **Problema 4.6.2.** ([CORO20])

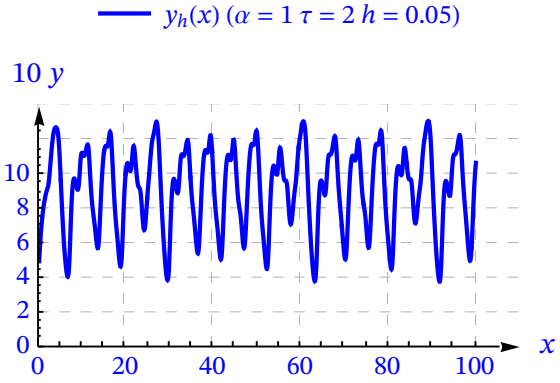
Sea la ecuación diferencial fraccionaria con retraso FDDE y con las condiciones iniciales dadas:

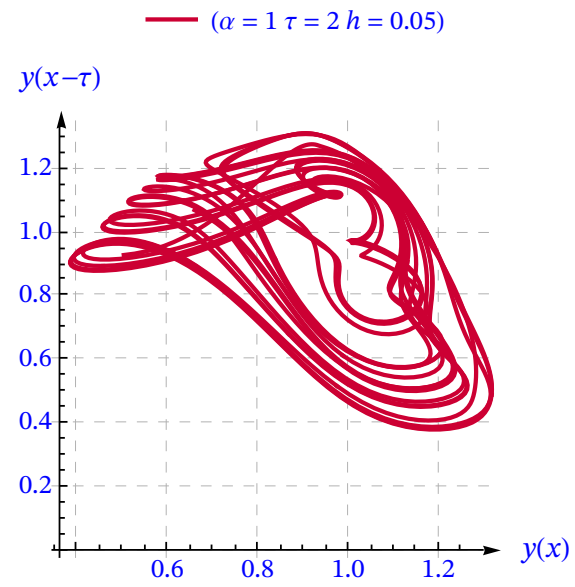
$$(P) \equiv \begin{cases} D^{(\alpha)}\, y(x) = \frac{2\, y(x-2)}{1+y\,(x-2)^{9.65}} - y(x) & x \in (0,\ 1),\ 0 < \alpha \le T \\ y(x) = 0.5 & x \le 0 \\ y(0) = 0.5 \end{cases}.$$

(i) Calcúlese la solución numérica mediante el método de *Adams–Bashforth–Moulton fraccionario con retraso* (ABMFR) tomando un tamaño del paso h dado y el orden α.

(ii) Represéntese la solución del método ABMFR en el intervalo $[0,\ 100]$, y el diagrama de fases en el plano $y(x),\ y(x-\tau)$.

(a) $\begin{cases} \alpha = 1 & \tau = 2 \\ h = 0.05 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} \alpha = 0.97 & \tau = 2 \\ h = 0.05 \end{cases}$. (c) $\begin{cases} \alpha = 0.85 & \tau = 2 \\ h = 0.05 \end{cases}$.





SOLUCIÓN

(a)

Método de *Adams–Bashforth–Moulton Fraccionario con Retraso* (ABMFR) para Ecuaciones Diferenciales Fraccionarias con Retraso (FDDE).

$(P) \equiv$

$$\begin{cases} D^{(\alpha)}\, y(x) = f(x,\, y(x),\, y(x-\tau)) & x \in [0,\, T] \quad 0 < \alpha \le 1 \\ y(x) = g(x) & x \in [-\tau,\, 0] \\ y\,(0) = {y_0}^{(k)} \quad k = 0,\, 1,\, \cdots,\, n-1;\ \alpha \in (n-1,\, n] \end{cases}$$

$$(P) \equiv \begin{pmatrix} D\, y(x) = \frac{2\, y(x-2)}{y(x-2)^{9.65}+1} - y(x) & x \in [0,\, T] \\ (\, y(0) = 0.5\,) \end{pmatrix}$$

$$\left(f(x,\, y(x)) = \frac{2\, y(x-2)}{y(x-2)^{9.65}+1} - y(x) \right)$$

$$\begin{pmatrix} [A,\, B] = & [0,\, 100] & \text{(intervalo } x\text{)} \\ \{\alpha,\, n = \lceil \alpha \rceil\} = & \{1,\, 1\} & \\ \tau = & 2 & \\ h = & 0.05 & \text{Tamaño del paso} \end{pmatrix}$$

Ecuaciones del método de *Adams–Bashforth–Moulton Fraccionario con Retraso*

$$x \in [0, T] \quad \{x_k = k\,h\} \quad \begin{cases} k = -i, -(i-1), \cdots, -1, 0, 1, 2, \cdots, N \\ h := \frac{T}{N} \quad i = \frac{\tau}{h} \end{cases}$$

$$y_h(x_{k+1}) = \sum_{k=0}^{n-1} y_0^{(k)} \frac{x_{k+1}{}^k}{k!} + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} f(x_{k+1}, {y_h}^P(x_{k+1}),$$

$$y_h(x_{k+1-i})) + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} \sum_{j=0}^{k} a_{j,k+1}\, f(x_j, y_h(x_j), y_h(x_{j-i}))$$

$${y_h}^P(x_{k+1}) = \sum_{k=0}^{n-1} y_0^{(k)} \frac{x_{k+1}{}^k}{k!} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^{k} b_{j,k+1}\, f(x_j, y_h(x_j), y_h(x_j - \tau))$$

- $a_{j,k+1} = \begin{cases} k^{\alpha+1} - (k-\alpha)(k+1)^\alpha & j = 0 \\ (k-j+2)^{\alpha+1} + (k-j)^{\alpha+1} - 2(k-j+1)^{\alpha+1} & 1 \le j \le k \\ 1 & j = k+1 \end{cases}$
- $b_{j,k+1} = \frac{h^\alpha}{\alpha}((k+1-j)^\alpha - (k-j)^\alpha)$

Proceso iterativo.

- $k = 199 \quad (x_{199}, y_{199}) = (9.95, 1.12589)$
  ${y_h}^P(x_{k+1}) = 1.13743 \qquad y_h(x_{k+1}) = 1.12324$
  $(x_{200}, y_{200}) = (10., 1.12324)$

- $k = 399 \quad (x_{399}, y_{399}) = (19.95, 1.04541)$
  ${y_h}^P(x_{k+1}) = 1.06278 \qquad y_h(x_{k+1}) = 1.05391$
  $(x_{400}, y_{400}) = (20., 1.05391)$

- $k = 599 \quad (x_{599}, y_{599}) = (29.95, 0.615752)$
  ${y_h}^P(x_{k+1}) = 0.646886 \qquad y_h(x_{k+1}) = 0.65342$
  $(x_{600}, y_{600}) = (30., 0.65342)$

- $k = 799 \quad (x_{799}, y_{799}) = (39.95, 0.969203)$
  ${y_h}^P(x_{k+1}) = 0.970403 \qquad y_h(x_{k+1}) = 0.945816$
  $(x_{800}, y_{800}) = (40., 0.945816)$

- $k = 999 \quad (x_{999}, y_{999}) = (49.95, 1.22919)$
  ${y_h}^P(x_{k+1}) = 1.23475 \qquad y_h(x_{k+1}) = 1.21276$
  $(x_{1000}, y_{1000}) = (50., 1.21276)$

- $k = 1199 \quad (x_{1199}, y_{1199}) = (59.95, 1.25889)$
  $y_h{}^P(x_{k+1}) = 1.27568 \qquad y_h(x_{k+1}) = 1.26706$
  $(x_{1200}, y_{1200}) = (60., 1.26706)$

- $k = 1399 \quad (x_{1399}, y_{1399}) = (69.95, 0.521705)$
  $y_h{}^P(x_{k+1}) = 0.53082 \qquad y_h(x_{k+1}) = 0.515353$
  $(x_{1400}, y_{1400}) = (70., 0.515353)$

- $k = 1599 \quad (x_{1599}, y_{1599}) = (79.95, 0.609244)$
  $y_h{}^P(x_{k+1}) = 0.614924 \qquad y_h(x_{k+1}) = 0.594546$
  $(x_{1600}, y_{1600}) = (80., 0.594546)$

- $k = 1799 \quad (x_{1799}, y_{1799}) = (89.95, 1.03859)$
  $y_h{}^P(x_{k+1}) = 1.0371 \qquad y_h(x_{k+1}) = 1.00926$
  $(x_{1800}, y_{1800}) = (90., 1.00926)$

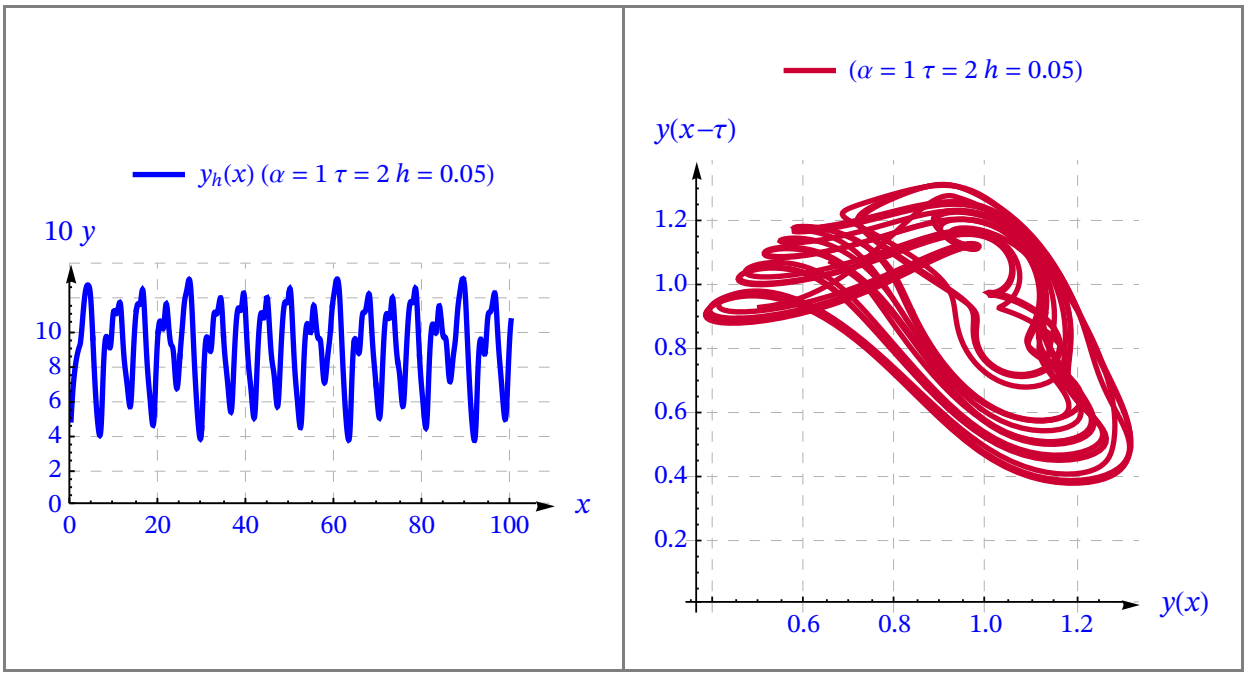
- $k = 1999 \quad (x_{1999}, y_{1999}) = (99.95, 1.06092)$
  $y_h{}^P(x_{k+1}) = 1.07995 \qquad y_h(x_{k+1}) = 1.07276$
  $(x_{2000}, y_{2000}) = (100., 1.07276)$

Tabla de puntos (x_k, y_k).

k	x_k	y_k
0	0.0000000000	0.5000000000
200	10.0000000000	1.1232426307
400	20.0000000000	1.0539090640
600	30.0000000000	0.6534203905
800	40.0000000000	0.9458163731
1000	50.0000000000	1.2127634034
1200	60.0000000000	1.2670564665
1400	70.0000000000	0.5153530454
1600	80.0000000000	0.5945464435
1800	90.0000000000	1.0092624277
2000	100.0000000000	1.0727599309

$y(100) \approx y_{2000} = 1.0727599309$

Solución aproximada de la ecuación FDDE
$y_h(x)$ $(h = 0.05)$
calculada con el método *Adams–Bashforth–Moulton Fraccionario con Retraso.*



(b)

Método de *Adams–Bashforth–Moulton Fraccionario con Retraso* (ABMFR) para Ecuaciones Diferenciales Fraccionarias con Retraso (FDDE).

$$(P) \equiv \begin{cases} D^{(\alpha)}\, y(x) = f(x,\, y(x),\, y(x-\tau)) & x \in [0,\, T] \quad 0 < \alpha \le 1 \\ y(x) = g(x) & x \in [-\tau,\, 0] \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

$$(P) \equiv \begin{pmatrix} D^{0.97}\, y(x) = \frac{2\, y(x-2)}{y(x-2)^{9.65}+1} - y(x) & x \in [0,\, T] \\ (\, y(0) = 0.5\,) \end{pmatrix}$$

$$\left(f(x,\, y(x)) = \frac{2\, y(x-2)}{y(x-2)^{9.65}+1} - y(x) \right)$$

$$\begin{pmatrix} [A,\, B] = & [0,\, 100] & \text{(intervalo } x\text{)} \\ \{\alpha,\, n = \lceil \alpha \rceil\} = & \{0.97,\, 1\} & \\ \tau = & 2 & \\ h = & 0.05 & \text{Tamaño del paso} \end{pmatrix}$$

Ecuaciones del método de *Adams–Bashforth–Moulton Fraccionario con Retraso*

$$x \in [0, T] \quad \{x_k = k\,h\} \quad \begin{cases} k = -i, -(i-1), \cdots, -1, 0, 1, 2, \cdots, N \\ h := \frac{T}{N} \quad i = \frac{\tau}{h} \end{cases}$$

$$y_h(x_{k+1}) = \sum_{k=0}^{n-1} y_0^{(k)} \frac{x_{k+1}{}^k}{k!} + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} f(x_{k+1}, y_h{}^P(x_{k+1}),$$

$$y_h(x_{k+1-i})) + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} \sum_{j=0}^{k} a_{j,k+1}\, f(x_j, y_h(x_j), y_h(x_{j-i}))$$

$$y_h{}^P(x_{k+1}) = \sum_{k=0}^{n-1} y_0^{(k)} \frac{x_{k+1}{}^k}{k!} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^{k} b_{j,k+1}\, f(x_j, y_h(x_j), y_h(x_j - \tau))$$

- $a_{j,k+1} = \begin{cases} k^{\alpha+1} - (k-\alpha)(k+1)^\alpha & j = 0 \\ (k-j+2)^{\alpha+1} + (k-j)^{\alpha+1} - 2(k-j+1)^{\alpha+1} & 1 \le j \le k \\ 1 & j = k+1 \end{cases}$
- $b_{j,k+1} = \frac{h^\alpha}{\alpha}((k+1-j)^\alpha - (k-j)^\alpha)$

Proceso iterativo.

- $k = 199 \quad (x_{199}, y_{199}) = (9.95, 1.11304)$
  $y_h{}^P(x_{k+1}) = 1.12243 \qquad y_h(x_{k+1}) = 1.10823$
  $(x_{200}, y_{200}) = (10., 1.10823)$

- $k = 399 \quad (x_{399}, y_{399}) = (19.95, 1.00212)$
  $y_h{}^P(x_{k+1}) = 1.01241 \qquad y_h(x_{k+1}) = 0.99897$
  $(x_{400}, y_{400}) = (20., 0.99897)$

- $k = 599 \quad (x_{599}, y_{599}) = (29.95, 0.407586)$
  $y_h{}^P(x_{k+1}) = 0.415041 \qquad y_h(x_{k+1}) = 0.400473$
  $(x_{600}, y_{600}) = (30., 0.400473)$

- $k = 799 \quad (x_{799}, y_{799}) = (39.95, 1.23289)$
  $y_h{}^P(x_{k+1}) = 1.24054 \qquad y_h(x_{k+1}) = 1.22338$
  $(x_{800}, y_{800}) = (40., 1.22338)$

- $k = 999 \quad (x_{999}, y_{999}) = (49.95, 1.24244)$
  $y_h{}^P(x_{k+1}) = 1.25769 \qquad y_h(x_{k+1}) = 1.25097$
  $(x_{1000}, y_{1000}) = (50., 1.25097)$

- $k = 1199 \quad (x_{1199}, y_{1199}) = (59.95, 1.00261)$
  $y_h^P(x_{k+1}) = 1.0242 \qquad y_h(x_{k+1}) = 1.0236$
  $(x_{1200}, y_{1200}) = (60., 1.0236)$

- $k = 1399 \quad (x_{1399}, y_{1399}) = (69.95, 0.826753)$
  $y_h^P(x_{k+1}) = 0.83021 \qquad y_h(x_{k+1}) = 0.81098$
  $(x_{1400}, y_{1400}) = (70., 0.81098)$

- $k = 1599 \quad (x_{1599}, y_{1599}) = (79.95, 1.01108)$
  $y_h^P(x_{k+1}) = 1.00798 \qquad y_h(x_{k+1}) = 0.982021$
  $(x_{1600}, y_{1600}) = (80., 0.982021)$

- $k = 1799 \quad (x_{1799}, y_{1799}) = (89.95, 1.25254)$
  $y_h^P(x_{k+1}) = 1.26755 \qquad y_h(x_{k+1}) = 1.26052$
  $(x_{1800}, y_{1800}) = (90., 1.26052)$

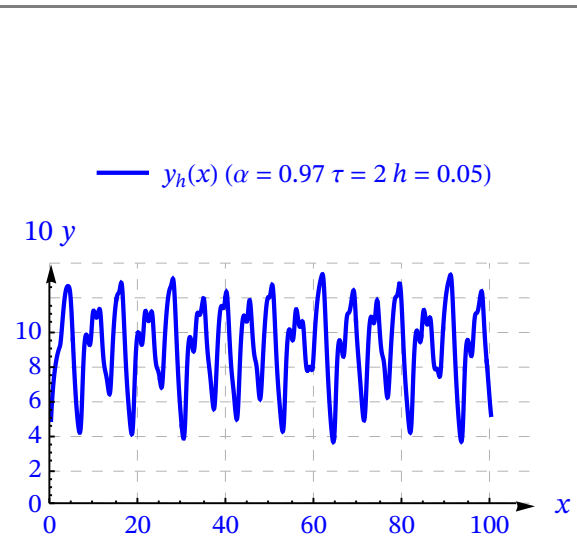
- $k = 1999 \quad (x_{1999}, y_{1999}) = (99.95, 0.540596)$
  $y_h^P(x_{k+1}) = 0.545662 \qquad y_h(x_{k+1}) = 0.529204$
  $(x_{2000}, y_{2000}) = (100., 0.529204)$

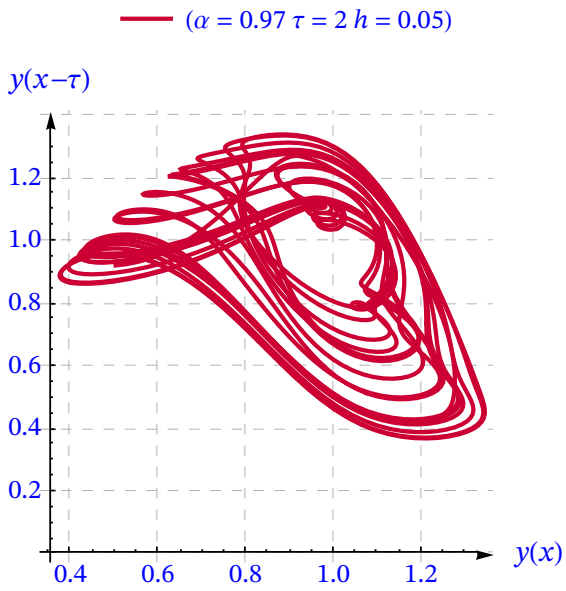
Tabla de puntos (x_k, y_k).

k	x_k	y_k
0	0.0000000000	0.5000000000
200	10.0000000000	1.1082273272
400	20.0000000000	0.9989700389
600	30.0000000000	0.4004730723
800	40.0000000000	1.2233812182
1000	50.0000000000	1.2509690742
1200	60.0000000000	1.0235964200
1400	70.0000000000	0.8109803698
1600	80.0000000000	0.9820209561
1800	90.0000000000	1.2605156533
2000	100.0000000000	0.5292041833

$y(100) \approx y_{2000} = 0.5292041833$

Solución aproximada de la ecuación FDDE
$y_h(x)$ $(h = 0.05)$
calculada con el método *Adams–Bashforth–Moulton Fraccionario con Retraso.*





(c)

Método de *Adams–Bashforth–Moulton Fraccionario con Retraso* (ABMFR) para Ecuaciones Diferenciales Fraccionarias con Retraso (FDDE).

$$(P) \equiv \begin{cases} D^{(\alpha)}\, y(x) = f(x,\, y(x),\, y(x-\tau)) & x \in [0,\, T] \quad 0 < \alpha \leq 1 \\ y(x) = g(x) & x \in [-\tau,\, 0] \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

$$(P) \equiv \begin{pmatrix} D^{0.85}\, y(x) = \frac{2\, y(x-2)}{y(x-2)^{9.65}+1} - y(x) & x \in [0,\, T] \\ (\, y(0) = 0.5\,) \end{pmatrix}$$

$$\left(f(x,\, y(x)) = \frac{2\, y(x-2)}{y(x-2)^{9.65}+1} - y(x) \right)$$

$$\begin{pmatrix} [A,\, B] = & [0,\, 100] & \text{(intervalo } x\text{)} \\ \{\alpha,\, n = \lceil \alpha \rceil\} = & \{0.85,\, 1\} & \\ \tau = & 2 & \\ h = & 0.05 & \text{Tamaño del paso} \end{pmatrix}$$

Ecuaciones del método de *Adams–Bashforth–Moulton Fraccionario con Retraso*

$$x \in [0, T] \quad \{x_k = k\,h\} \quad \begin{cases} k = -i, -(i-1), \cdots, -1, 0, 1, 2, \cdots, N \\ h := \frac{T}{N} \quad i = \frac{\tau}{h} \end{cases}$$

$$y_h(x_{k+1}) = \sum_{k=0}^{n-1} y_0^{(k)} \frac{x_{k+1}{}^k}{k!} + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} f(x_{k+1}, y_h{}^P(x_{k+1}),$$

$$y_h(x_{k+1-i})) + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} \sum_{j=0}^{k} a_{j,k+1}\, f(x_j, y_h(x_j), y_h(x_{j-i}))$$

$$y_h{}^P(x_{k+1}) = \sum_{k=0}^{n-1} y_0^{(k)} \frac{x_{k+1}{}^k}{k!} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^{k} b_{j,k+1}\, f(x_j, y_h(x_j), y_h(x_j - \tau))$$

- $a_{j,k+1} = \begin{cases} k^{\alpha+1} - (k-\alpha)(k+1)^\alpha & j = 0 \\ (k-j+2)^{\alpha+1} + (k-j)^{\alpha+1} - 2(k-j+1)^{\alpha+1} & 1 \le j \le k \\ 1 & j = k+1 \end{cases}$
- $b_{j,k+1} = \frac{h^\alpha}{\alpha}((k+1-j)^\alpha - (k-j)^\alpha)$

Proceso iterativo.

- $k = 199 \quad (x_{199}, y_{199}) = (9.95, 1.02187)$
  $y_h{}^P(x_{k+1}) = 1.02592 \qquad y_h(x_{k+1}) = 1.01364$
  $(x_{200}, y_{200}) = (10., 1.01364)$

- $k = 399 \quad (x_{399}, y_{399}) = (19.95, 1.1282)$
  $y_h{}^P(x_{k+1}) = 1.14154 \qquad y_h(x_{k+1}) = 1.138$
  $(x_{400}, y_{400}) = (20., 1.138)$

- $k = 599 \quad (x_{599}, y_{599}) = (29.95, 0.995095)$
  $y_h{}^P(x_{k+1}) = 1.00026 \qquad y_h(x_{k+1}) = 0.991423$
  $(x_{600}, y_{600}) = (30., 0.991423)$

- $k = 799 \quad (x_{799}, y_{799}) = (39.95, 1.00294)$
  $y_h{}^P(x_{k+1}) = 1.0144 \qquad y_h(x_{k+1}) = 1.01139$
  $(x_{800}, y_{800}) = (40., 1.01139)$

- $k = 999 \quad (x_{999}, y_{999}) = (49.95, 0.534142)$
  $y_h{}^P(x_{k+1}) = 0.551046 \qquad y_h(x_{k+1}) = 0.559232$
  $(x_{1000}, y_{1000}) = (50., 0.559232)$

• $k = 1199 \quad (x_{1199}, y_{1199}) = (59.95, 0.562436)$
$y_h{}^P(x_{k+1}) = 0.563166 \qquad y_h(x_{k+1}) = 0.55108$
$(x_{1200}, y_{1200}) = (60., 0.55108)$

• $k = 1399 \quad (x_{1399}, y_{1399}) = (69.95, 0.866142)$
$y_h{}^P(x_{k+1}) = 0.860154 \qquad y_h(x_{k+1}) = 0.840926$
$(x_{1400}, y_{1400}) = (70., 0.840926)$

• $k = 1599 \quad (x_{1599}, y_{1599}) = (79.95, 1.23995)$
$y_h{}^P(x_{k+1}) = 1.24301 \qquad y_h(x_{k+1}) = 1.23187$
$(x_{1600}, y_{1600}) = (80., 1.23187)$

• $k = 1799 \quad (x_{1799}, y_{1799}) = (89.95, 1.24986)$
$y_h{}^P(x_{k+1}) = 1.25774 \qquad y_h(x_{k+1}) = 1.25321$
$(x_{1800}, y_{1800}) = (90., 1.25321)$

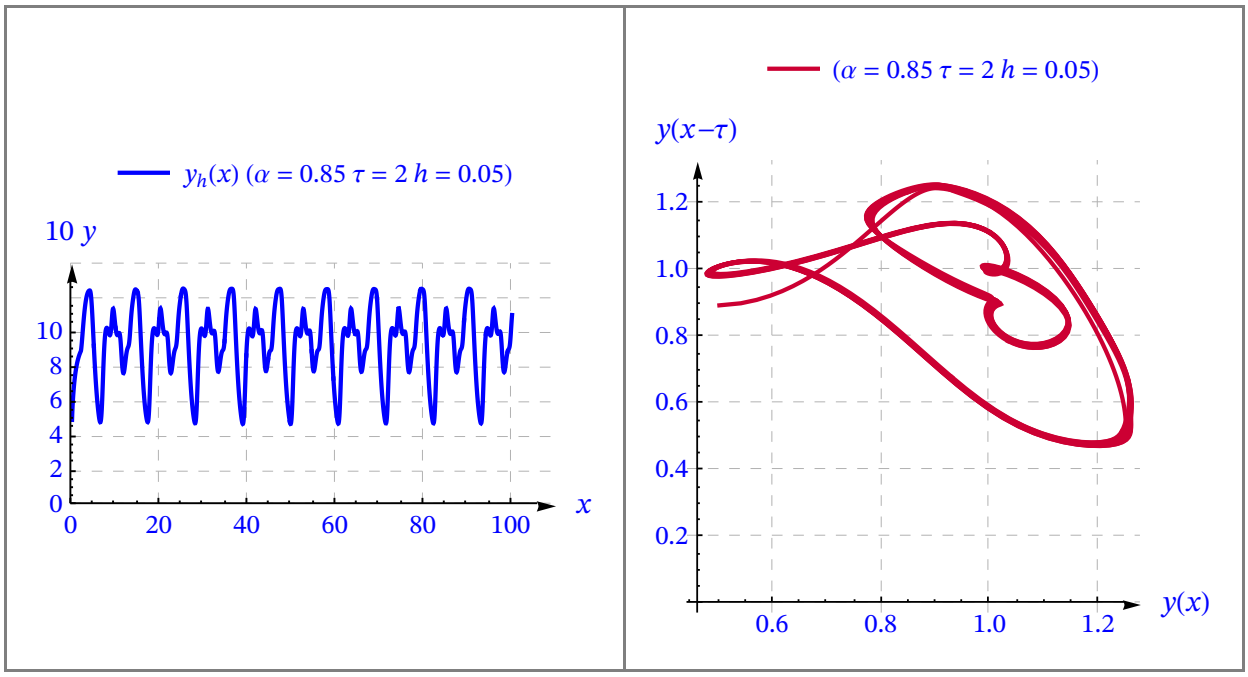
• $k = 1999 \quad (x_{1999}, y_{1999}) = (99.95, 1.08997)$
$y_h{}^P(x_{k+1}) = 1.104 \qquad y_h(x_{k+1}) = 1.1063$
$(x_{2000}, y_{2000}) = (100., 1.1063)$

Tabla de puntos (x_k, y_k).

k	x_k	y_k
0	0.0000000000	0.5000000000
200	10.0000000000	1.0136392102
400	20.0000000000	1.1379953765
600	30.0000000000	0.9914230097
800	40.0000000000	1.0113905930
1000	50.0000000000	0.5592317472
1200	60.0000000000	0.5510798424
1400	70.0000000000	0.8409255372
1600	80.0000000000	1.2318664183
1800	90.0000000000	1.2532132883
2000	100.0000000000	1.1062967384

$y(100) \approx y_{2000} = 1.1062967384$

Solución aproximada de la ecuación FDDE
$y_h(x)$ $(h = 0.05)$
calculada con el método *Adams–Bashforth–Moulton Fraccionario con Retraso.*



■ **Problema 4.6.3.** ([CORO20])

Sea la ecuación diferencial fraccionaria con retraso FDDE y con las condiciones iniciales dadas que representa el ciclo de vida de cuatro años de la población de los léminos (*lemmings*)

$$(P) \equiv \begin{cases} D^{(\alpha)}\, y(x) = 3.5\, y(x)\left(1 - \frac{y(x-0.74)}{19}\right) & x \in (0,\ 1),\ 0 < \alpha \leq T \\ y(x) = 19 & x < 0 \\ y(0) = 19.00001 \end{cases}$$

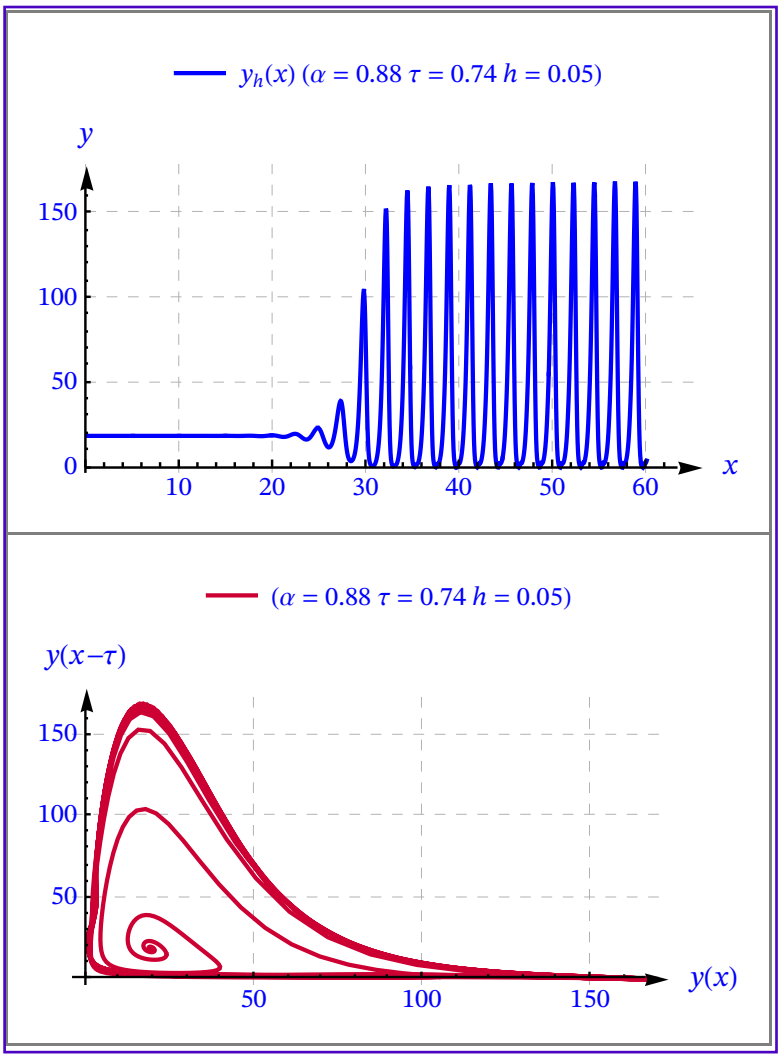
(i) Calcúlese la solución numérica mediante el método de *Adams–Bashforth–Moulton fraccionario con retraso* (ABMFR) tomando un tamaño del paso h dado y el orden α.

(ii) Represéntese la solución del método ABMFR en el intervalo $[0,\ 60]$, y el diagrama de fases en el plano $y(x),\ y(x-\tau)$.

(a) $\begin{cases} \alpha = 0.97 & \tau = 0.74 \\ h = 0.05 \end{cases}$. (b) $\begin{cases} \alpha = 0.90 & \tau = 0.74 \\ h = 0.05 \end{cases}$.

(c) $\begin{cases} \alpha = 0.88 & \tau = 0.74 \\ h = 0.05 \end{cases}$

Indicación: El diagrama de fases se estira hacia el lado positivo del eje $y(x)$ a medida que disminuye el parámetro α.


$y_h(x)$ ($\alpha = 0.88$ $\tau = 0.74$ $h = 0.05$)
y
150
100
50
0
10
20
30
40
50
60
x
($\alpha = 0.88$ $\tau = 0.74$ $h = 0.05$)
$y(x-\tau)$
150
100
50
50
100
150
$y(x)$

SOLUCIÓN

(a)

Método de *Adams–Bashforth–Moulton Fraccionario con Retraso* (ABMFR) para Ecuaciones Diferenciales Fraccionarias con Retraso (FDDE).

$(P) \equiv$

$$\begin{cases} D^{(\alpha)}\, y(x) = f(x,\, y(x),\, y(x-\tau)) & x \in [0,\, T] \quad 0 < \alpha \le 1 \\ y(x) = g(x) & x \in [-\tau,\, 0] \\ y\,(0) = {y_0}^{(k)} \quad k = 0,\, 1,\, \cdots,\, n-1;\ \alpha \in (n-1,\, n] \end{cases}$$

$$(P) \equiv \begin{pmatrix} D^{0.97}\, y(x) = 3.5\left(1 - \frac{1}{19}\, y(x-0.74)\right) y(x) & x \in [0,\, T] \\ (\, y(0) = 19.\,) \end{pmatrix}$$

$$\left(\, f(x,\, y(x)) = \ \ 3.5\left(1 - \frac{1}{19}\, y(x-0.74)\right) y(x)\,\right)$$

$$\begin{pmatrix} [A,\, B] = & [0,\, 60] & (\text{intervalo } x) \\ \{\alpha,\, n = \lceil \alpha \rceil\} = & \{0.97,\, 1\} & \\ \tau = & 0.74 & \\ h = & 0.05 & \text{Tamaño del paso} \end{pmatrix}$$

Ecuaciones del método de *Adams–Bashforth–Moulton Fraccionario con Retraso*

$$x \in [0,\, T] \quad \{x_k = k\, h\} \quad \begin{cases} k = -i,\, -(i-1),\, \cdots,\, -1,\, 0,\, 1,\, 2,\, \cdots,\, N \\ h := \frac{T}{N} \quad i = \frac{\tau}{h} \end{cases}$$

$$y_h(x_{k+1}) = \sum_{k=0}^{n-1} {y_0}^{(k)} \frac{{x_{k+1}}^k}{k!} + \frac{h^\alpha}{\Gamma\,(\alpha+2)}\, f({x_{k+1}},\, {y_h}^P(x_{k+1}),$$

$$y_h(x_{k+1-i})) + \frac{h^\alpha}{\Gamma\,(\alpha+2)} \sum_{j=0}^{k} a_{j,k+1}\, f(x_j,\, y_h(x_j),\, y_h(x_{j-i}))$$

$${y_h}^P(x_{k+1}) = \sum_{k=0}^{n-1} {y_0}^{(k)} \frac{{x_{k+1}}^k}{k!} + \frac{1}{\Gamma\,(\alpha)} \sum_{j=0}^{k} b_{j,k+1}\, f(x_j,\, y_h(x_j),\, y_h(x_j - \tau))$$

$$\bullet\ a_{j,k+1} = \begin{cases} k^{\alpha+1} - (k-\alpha)\,(k+1)^\alpha & j = 0 \\ (k-j+2)^{\alpha+1} + (k-j)^{\alpha+1} - 2\,(k-j+1)^{\alpha+1} & 1 \le j \le k \\ 1 & j = k+1 \end{cases}$$

$$\bullet\ b_{j,k+1} = \frac{h^\alpha}{\alpha}((k+1-j)^\alpha - (k-j)^\alpha)$$

Proceso iterativo.

$\bullet\ k = 119 \quad (x_{119},\, y_{119}) = (5.95,\, 19.0001)$

${y_h}^P(x_{k+1}) = 19.0001 \qquad y_h(x_{k+1}) = 19.0001$

$(x_{120},\, y_{120}) = (6.,\, 19.0001)$

- $k = 239 \quad (x_{239}, y_{239}) = (11.95, 18.9966)$
  $y_h{}^P(x_{k+1}) = 18.9965 \qquad y_h(x_{k+1}) = 18.9965$
  $(x_{240}, y_{240}) = (12., 18.9965)$

- $k = 359 \quad (x_{359}, y_{359}) = (17.95, 19.0114)$
  $y_h{}^P(x_{k+1}) = 19.0157 \qquad y_h(x_{k+1}) = 19.0201$
  $(x_{360}, y_{360}) = (18., 19.0201)$

- $k = 479 \quad (x_{479}, y_{479}) = (23.95, 20.1977)$
  $y_h{}^P(x_{k+1}) = 20.1676 \qquad y_h(x_{k+1}) = 20.1258$
  $(x_{480}, y_{480}) = (24., 20.1258)$

- $k = 599 \quad (x_{599}, y_{599}) = (29.95, 4.44057)$
  $y_h{}^P(x_{k+1}) = 4.1369 \qquad y_h(x_{k+1}) = 3.86368$
  $(x_{600}, y_{600}) = (30., 3.86368)$

- $k = 719 \quad (x_{719}, y_{719}) = (35.95, 0.889337)$
  $y_h{}^P(x_{k+1}) = 0.997912 \qquad y_h(x_{k+1}) = 1.11631$
  $(x_{720}, y_{720}) = (36., 1.11631)$

- $k = 839 \quad (x_{839}, y_{839}) = (41.95, 3.91574)$
  $y_h{}^P(x_{k+1}) = 4.3273 \qquad y_h(x_{k+1}) = 4.74165$
  $(x_{840}, y_{840}) = (42., 4.74165)$

- $k = 959 \quad (x_{959}, y_{959}) = (47.95, 14.6976)$
  $y_h{}^P(x_{k+1}) = 16.1101 \qquad y_h(x_{k+1}) = 17.5167$
  $(x_{960}, y_{960}) = (48., 17.5167)$

- $k = 1079 \quad (x_{1079}, y_{1079}) = (53.95, 48.3262)$
  $y_h{}^P(x_{k+1}) = 52.1542 \qquad y_h(x_{k+1}) = 55.7998$
  $(x_{1080}, y_{1080}) = (54., 55.7998)$

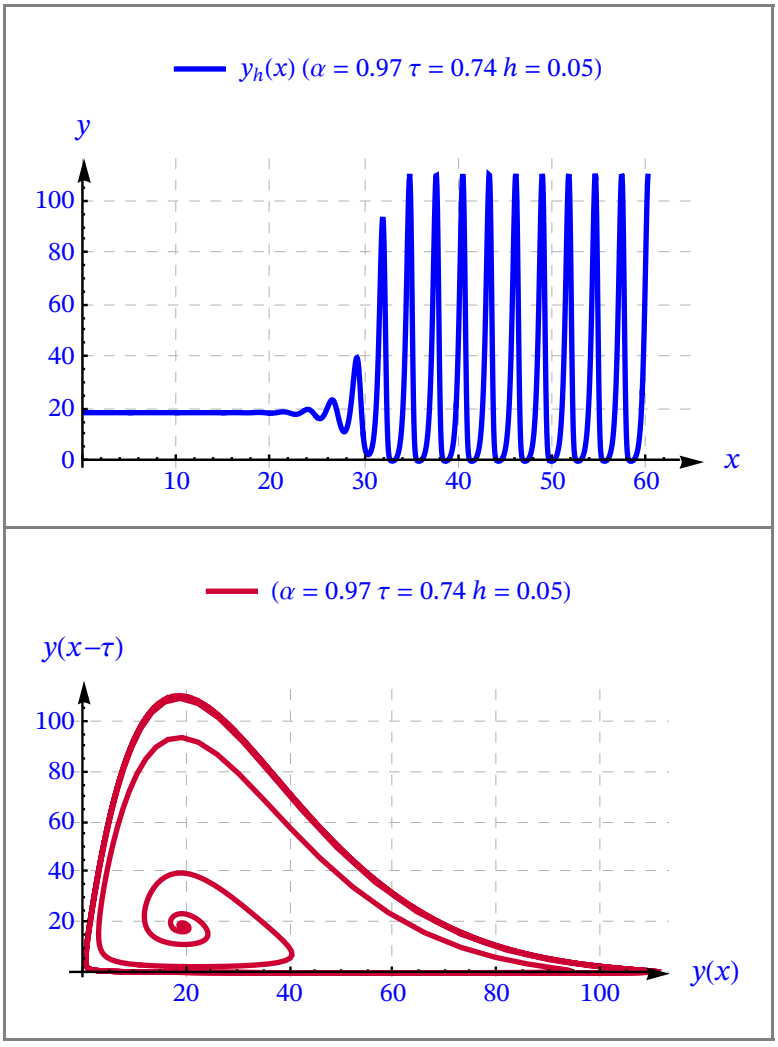
- $k = 1199 \quad (x_{1199}, y_{1199}) = (59.95, 105.966)$
  $y_h{}^P(x_{k+1}) = 108.665 \qquad y_h(x_{k+1}) = 109.931$
  $(x_{1200}, y_{1200}) = (60., 109.931)$

Tabla de puntos (x_k, y_k).

k	x_k	y_k
0	0.0000000000	19.0000100000
120	6.0000000000	19.0000833857
240	12.0000000000	18.9964604616
360	18.0000000000	19.0200568116
480	24.0000000000	20.1257797152
600	30.0000000000	3.8636791252
720	36.0000000000	1.1163113515
840	42.0000000000	4.7416525181
960	48.0000000000	17.5167342698
1080	54.0000000000	55.7997972726
1200	60.0000000000	109.9305292340

$y(60) \approx y_{1200} = 109.9305292340$

Solución aproximada de la ecuación FDDE
$y_h(x)$ $(h = 0.05)$
calculada con el método *Adams–Bashforth–Moulton Fraccionario con Retraso.*



(b)

Método de *Adams–Bashforth–Moulton Fraccionario con Retraso* (ABMFR) para Ecuaciones Diferenciales Fraccionarias con Retraso (FDDE).

$(P) \equiv$

$$\begin{cases} D^{(\alpha)}\, y(x) = f(x,\, y(x),\, y(x-\tau)) & x \in [0,\, T] \quad 0 < \alpha \le 1 \\ y(x) = g(x) & x \in [-\tau,\, 0] \\ y\,(0) = {y_0}^{(k)} \quad k = 0,\, 1,\, \cdots,\, n-1;\ \alpha \in (n-1,\, n] \end{cases}$$

$$(P) \equiv \begin{pmatrix} D^{0.9}\, y(x) = 3.5\left(1 - \frac{1}{19}\, y(x-0.74)\right) y(x) & x \in [0,\, T] \\ (\, y(0) = 19.\,) \end{pmatrix}$$

$$\left(\, f(x,\, y(x)) = \ \ 3.5\left(1 - \frac{1}{19}\, y(x-0.74)\right) y(x)\,\right)$$

$$\begin{pmatrix} [A,\, B] = & [0,\, 60] & \text{(intervalo } x\text{)} \\ \{\alpha,\, n = \lceil \alpha \rceil\} = & \{0.9,\, 1\} & \\ \tau = & 0.74 & \\ h = & 0.05 & \text{Tamaño del paso} \end{pmatrix}$$

Ecuaciones del método de *Adams–Bashforth–Moulton Fraccionario con Retraso*

$$x \in [0,\, T] \quad \{x_k = k\, h\} \quad \begin{cases} k = -i,\, -(i-1),\, \cdots,\, -1,\, 0,\, 1,\, 2,\, \cdots,\, N \\ h := \frac{T}{N} \quad i = \frac{\tau}{h} \end{cases}$$

$$y_h(x_{k+1}) = \sum_{k=0}^{n-1} {y_0}^{(k)} \frac{{x_{k+1}}^k}{k!} + \frac{h^\alpha}{\Gamma\,(\alpha+2)}\, f({x_{k+1}}, {y_h}^P(x_{k+1}),$$

$$y_h(x_{k+1-i})) + \frac{h^\alpha}{\Gamma\,(\alpha+2)} \sum_{j=0}^{k} a_{j,k+1}\, f(x_j, y_h(x_j), y_h(x_{j-i}))$$

$${y_h}^P(x_{k+1}) = \sum_{k=0}^{n-1} {y_0}^{(k)} \frac{{x_{k+1}}^k}{k!} + \frac{1}{\Gamma\,(\alpha)} \sum_{j=0}^{k} b_{j,k+1}\, f(x_j, y_h(x_j), y_h(x_j - \tau))$$

$$\bullet\ a_{j,k+1} = \begin{cases} k^{\alpha+1} - (k-\alpha)\,(k+1)^\alpha & j = 0 \\ (k-j+2)^{\alpha+1} + (k-j)^{\alpha+1} - 2\,(k-j+1)^{\alpha+1} & 1 \le j \le k \\ 1 & j = k+1 \end{cases}$$

$$\bullet\ b_{j,k+1} = \frac{h^\alpha}{\alpha}((k+1-j)^\alpha - (k-j)^\alpha)$$

Proceso iterativo.

$\bullet\ k = 119 \quad (x_{119}, y_{119}) = (5.95, 19.)$

${y_h}^P(x_{k+1}) = 19. \qquad y_h(x_{k+1}) = 19.$

$(x_{120}, y_{120}) = (6., 19.)$

- $k = 239 \quad (x_{239}, y_{239}) = (11.95, 18.9986)$
  $y_h^P(x_{k+1}) = 18.9988 \qquad y_h(x_{k+1}) = 18.9991$
  $(x_{240}, y_{240}) = (12., 18.9991)$

- $k = 359 \quad (x_{359}, y_{359}) = (17.95, 19.0699)$
  $y_h^P(x_{k+1}) = 19.0661 \qquad y_h(x_{k+1}) = 19.0612$
  $(x_{360}, y_{360}) = (18., 19.0612)$

- $k = 479 \quad (x_{479}, y_{479}) = (23.95, 16.928)$
  $y_h^P(x_{k+1}) = 16.9553 \qquad y_h(x_{k+1}) = 17.0039$
  $(x_{480}, y_{480}) = (24., 17.0039)$

- $k = 599 \quad (x_{599}, y_{599}) = (29.95, 84.4782)$
  $y_h^P(x_{k+1}) = 88.32 \qquad y_h(x_{k+1}) = 91.1901$
  $(x_{600}, y_{600}) = (30., 91.1901)$

- $k = 719 \quad (x_{719}, y_{719}) = (35.95, 1.05505)$
  $y_h^P(x_{k+1}) = 1.03168 \qquad y_h(x_{k+1}) = 1.15661$
  $(x_{720}, y_{720}) = (36., 1.15661)$

- $k = 839 \quad (x_{839}, y_{839}) = (41.95, 146.519)$
  $y_h^P(x_{k+1}) = 150.883 \qquad y_h(x_{k+1}) = 152.393$
  $(x_{840}, y_{840}) = (42., 152.393)$

- $k = 959 \quad (x_{959}, y_{959}) = (47.95, 2.97107)$
  $y_h^P(x_{k+1}) = 3.39836 \qquad y_h(x_{k+1}) = 3.8902$
  $(x_{960}, y_{960}) = (48., 3.8902)$

- $k = 1079 \quad (x_{1079}, y_{1079}) = (53.95, 104.26)$
  $y_h^P(x_{k+1}) = 94.7981 \qquad y_h(x_{k+1}) = 80.3552$
  $(x_{1080}, y_{1080}) = (54., 80.3552)$

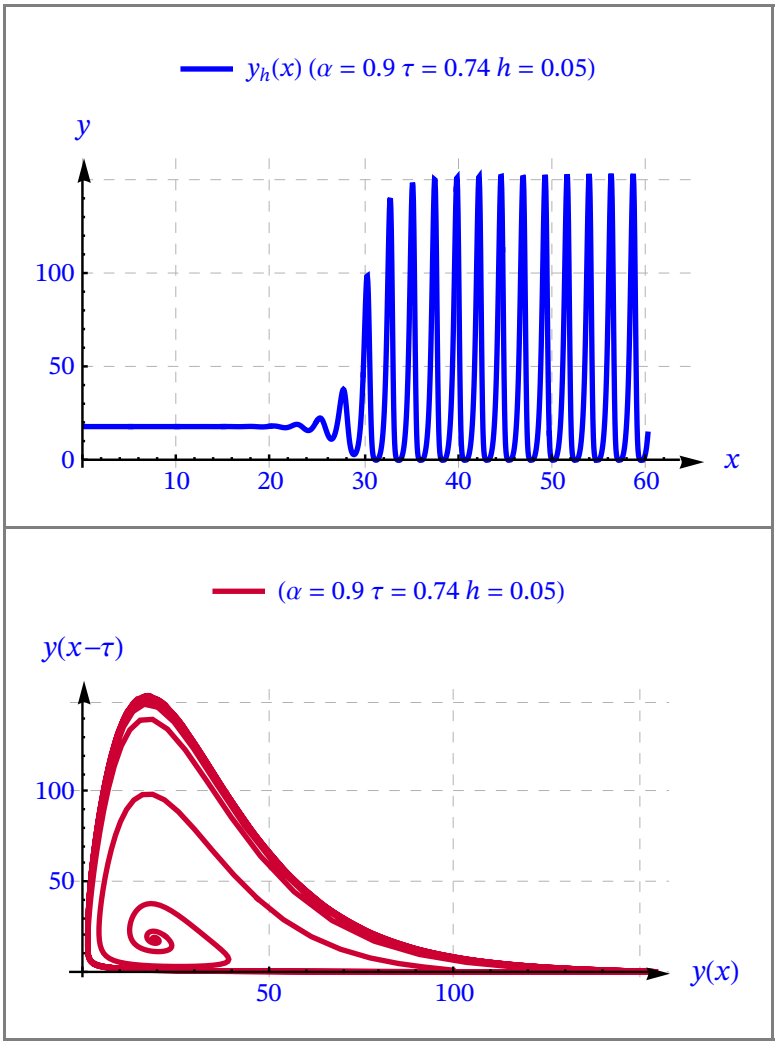
- $k = 1199 \quad (x_{1199}, y_{1199}) = (59.95, 12.0457)$
  $y_h^P(x_{k+1}) = 13.4938 \qquad y_h(x_{k+1}) = 14.9321$
  $(x_{1200}, y_{1200}) = (60., 14.9321)$

Tabla de puntos (x_k, y_k).

k	x_k	y_k
0	0.0000000000	19.0000100000
120	6.0000000000	18.9999533606
240	12.0000000000	18.9991225113
360	18.0000000000	19.0612462852
480	24.0000000000	17.0038614260
600	30.0000000000	91.1900663553
720	36.0000000000	1.1566086917
840	42.0000000000	152.3927678220
960	48.0000000000	3.8902002016
1080	54.0000000000	80.3551729252
1200	60.0000000000	14.9321009557

$y(60) \approx y_{1200} = 14.9321009557$

Solución aproximada de la ecuación FDDE
$y_h(x)$ $(h = 0.05)$
calculada con el método *Adams–Bashforth–Moulton Fraccionario con Retraso.*



(c)

Método de *Adams–Bashforth–Moulton Fraccionario con Retraso* (ABMFR) para Ecuaciones Diferenciales Fraccionarias con Retraso (FDDE).

$(P) \equiv$

$$\begin{cases} D^{(\alpha)}\, y(x) = f(x,\, y(x),\, y(x-\tau)) & x \in [0,\, T] \quad 0 < \alpha \le 1 \\ y(x) = g(x) & x \in [-\tau,\, 0] \\ y\,(0) = {y_0}^{(k)} \quad k = 0,\, 1,\, \cdots,\, n-1;\ \alpha \in (n-1,\, n] \end{cases}$$

$$(P) \equiv \begin{pmatrix} D^{0.88}\, y(x) = 3.5\left(1 - \frac{1}{19}\, y(x-0.74)\right) y(x) & x \in [0,\, T] \\ (\, y(0) = 19.\,) \end{pmatrix}$$

$$\left(\, f(x,\, y(x)) = \ \ 3.5\left(1 - \frac{1}{19}\, y(x-0.74)\right) y(x)\,\right)$$

$$\begin{pmatrix} [A,\, B] = & [0,\, 60] & (\text{intervalo } x) \\ \{\alpha,\, n = \lceil \alpha \rceil\} = & \{0.88,\, 1\} & \\ \tau = & 0.74 & \\ h = & 0.05 & \text{Tamaño del paso} \end{pmatrix}$$

Ecuaciones del método de *Adams–Bashforth–Moulton Fraccionario con Retraso*

$$x \in [0,\, T] \quad \{x_k = k\, h\} \quad \begin{cases} k = -i,\, -(i-1),\, \cdots,\, -1,\, 0,\, 1,\, 2,\, \cdots,\, N \\ h := \frac{T}{N} \quad i = \frac{\tau}{h} \end{cases}$$

$$y_h(x_{k+1}) = \sum_{k=0}^{n-1} {y_0}^{(k)} \frac{{x_{k+1}}^k}{k!} + \frac{h^\alpha}{\Gamma\,(\alpha+2)}\, f({x_{k+1}}, {y_h}^P(x_{k+1}),$$

$$y_h(x_{k+1-i})) + \frac{h^\alpha}{\Gamma\,(\alpha+2)} \sum_{j=0}^{k} a_{j,k+1}\, f(x_j, y_h(x_j), y_h(x_{j-i}))$$

$${y_h}^P(x_{k+1}) = \sum_{k=0}^{n-1} {y_0}^{(k)} \frac{{x_{k+1}}^k}{k!} + \frac{1}{\Gamma\,(\alpha)} \sum_{j=0}^{k} b_{j,k+1}\, f(x_j, y_h(x_j), y_h(x_j - \tau))$$

- $a_{j,k+1} = \begin{cases} k^{\alpha+1} - (k-\alpha)\,(k+1)^\alpha & j = 0 \\ (k-j+2)^{\alpha+1} + (k-j)^{\alpha+1} - 2\,(k-j+1)^{\alpha+1} & 1 \le j \le k \\ 1 & j = k+1 \end{cases}$
- $b_{j,k+1} = \dfrac{h^\alpha}{\alpha}((k+1-j)^\alpha - (k-j)^\alpha)$

Proceso iterativo.

- $k = 119 \quad (x_{119},\, y_{119}) = (5.95,\, 18.9999)$

  ${y_h}^P(x_{k+1}) = 18.9999 \qquad y_h(x_{k+1}) = 18.9999$

  $(x_{120},\, y_{120}) = (6.,\, 18.9999)$

- $k = 239 \quad (x_{239}, y_{239}) = (11.95, 19.0006)$
  $y_h^P(x_{k+1}) = 19.0009 \qquad y_h(x_{k+1}) = 19.0012$
  $(x_{240}, y_{240}) = (12., 19.0012)$

- $k = 359 \quad (x_{359}, y_{359}) = (17.95, 19.0109)$
  $y_h^P(x_{k+1}) = 19.0034 \qquad y_h(x_{k+1}) = 18.9954$
  $(x_{360}, y_{360}) = (18., 18.9954)$

- $k = 479 \quad (x_{479}, y_{479}) = (23.95, 18.1699)$
  $y_h^P(x_{k+1}) = 18.3259 \qquad y_h(x_{k+1}) = 18.4997$
  $(x_{480}, y_{480}) = (24., 18.4997)$

- $k = 599 \quad (x_{599}, y_{599}) = (29.95, 58.3854)$
  $y_h^P(x_{k+1}) = 52.6793 \qquad y_h(x_{k+1}) = 44.3116$
  $(x_{600}, y_{600}) = (30., 44.3116)$

- $k = 719 \quad (x_{719}, y_{719}) = (35.95, 25.0263)$
  $y_h^P(x_{k+1}) = 27.9556 \qquad y_h(x_{k+1}) = 30.7094$
  $(x_{720}, y_{720}) = (36., 30.7094)$

- $k = 839 \quad (x_{839}, y_{839}) = (41.95, 1.45544)$
  $y_h^P(x_{k+1}) = 6.1145 \qquad y_h(x_{k+1}) = 2.47616$
  $(x_{840}, y_{840}) = (42., 2.47616)$

- $k = 959 \quad (x_{959}, y_{959}) = (47.95, 97.1051)$
  $y_h^P(x_{k+1}) = 86.8033 \qquad y_h(x_{k+1}) = 70.9444$
  $(x_{960}, y_{960}) = (48., 70.9444)$

- $k = 1079 \quad (x_{1079}, y_{1079}) = (53.95, 59.4918)$
  $y_h^P(x_{k+1}) = 65.2978 \qquad y_h(x_{k+1}) = 71.0062$
  $(x_{1080}, y_{1080}) = (54., 71.0062)$

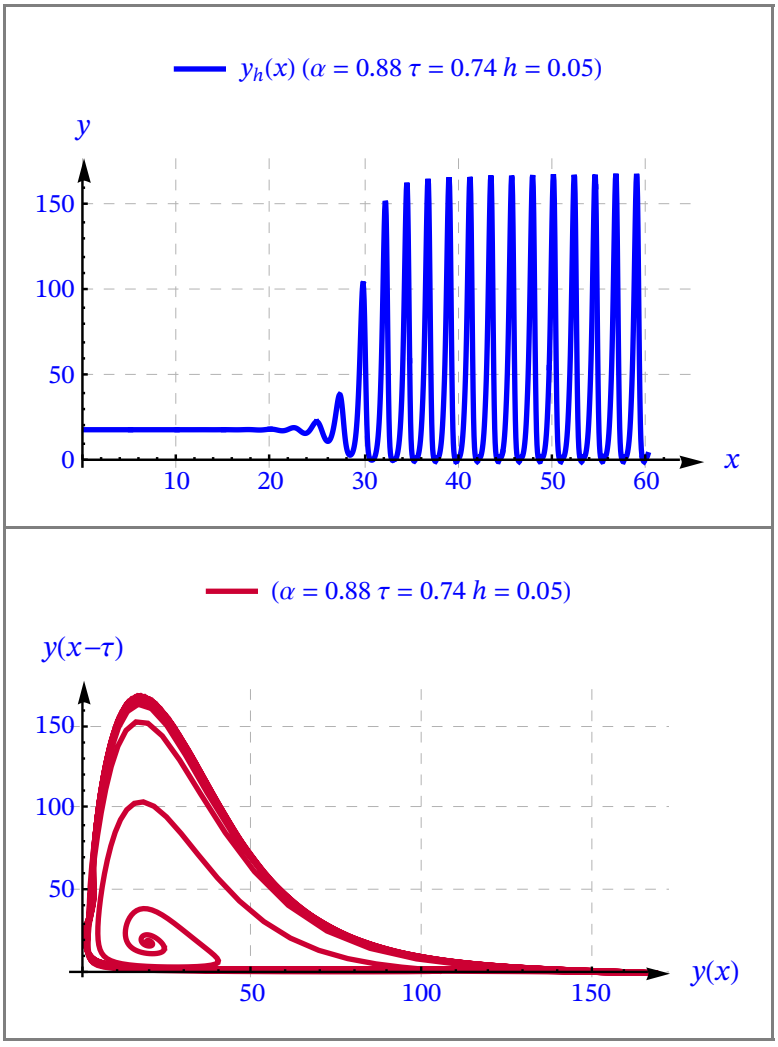
- $k = 1199 \quad (x_{1199}, y_{1199}) = (59.95, 3.46348)$
  $y_h^P(x_{k+1}) = 3.79176 \qquad y_h(x_{k+1}) = 4.33981$
  $(x_{1200}, y_{1200}) = (60., 4.33981)$

Tabla de puntos (x_k, y_k).

k	x_k	y_k
0	0.0000000000	19.0000100000
120	6.0000000000	18.9999094543
240	12.0000000000	19.0012127441
360	18.0000000000	18.9953550845
480	24.0000000000	18.4997176399
600	30.0000000000	44.3115656334
720	36.0000000000	30.7094142165
840	42.0000000000	2.4761600565
960	48.0000000000	70.9444360714
1080	54.0000000000	71.0061991704
1200	60.0000000000	4.3398119230

$y(60) \approx y_{1200} = 4.3398119230$

Solución aproximada de la ecuación FDDE
$y_h(x)$ $(h = 0.05)$
calculada con el método *Adams–Bashforth–Moulton Fraccionario con Retraso.*



4.6.3. Método Adams–Bashforth–Moulton para Sistemas FDDE (SFDDE)

El método *Adams–Bashforth–Moulton* (ABM) que resuelve numéricamente un sistema de ecuaciones diferenciales con retraso de orden fraccionario SFDDE se basa en el método para ecuaciones FDDE.

Sea el problema constituido por un conjunto de ecuaciones FDDE [BHAL11], [LEKD19]:

$$(P) \equiv \begin{cases} D^{(\alpha)}\, y_r(x) = f_r\,(x,\, y_1(x),\, \ldots,\, y_r(x), & x \in [0,\, T] \quad 0 < \alpha \le 1 \\ \qquad y_1(x-\tau),\, \ldots,\, y_r(x-\tau)) & \\ y_r(x) = g_r(x) & x \in [-\tau,\, 0] \\ y_r(0) = y_{r\,0} & \end{cases} \tag{4.6.13}$$

$$r = 1,\, 2,\, \cdots,\, m$$

La solución numérica aportada por el método *Adams–Bashforth–Moulton* (ABM) para un sistema de ecuaciones diferenciales con retraso de orden fraccionario (SFDDE) tiene las ecuaciones siguientes:

$$x \in [0,\, T] \quad \{x_k = k\,h\} \quad \begin{cases} k = -i,\, -(i-1),\, \cdots,\, -1,\, 0,\, 1,\, 2,\, \cdots,\, N \\ h := \frac{T}{N} \quad i = \frac{\tau}{h} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y_{r\,h}(x_{k+1}) &= g_r(0) + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)}\, f_r\left(x_{k+1},\, {y_{1\,h}}^P(x_{k+1}),\, \ldots,\, {y_{r\,h}}^P(x_{k+1}),\right. \\ &\qquad \left. y_{1\,h}(x_{k+1-i}),\, \ldots,\, y_{r\,h}(x_{k+1-i})\right) \\ &\quad + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} \sum_{j=0}^{k} a_{j,k+1}\, f_r\left(x_j,\, y_{1\,h}\left(x_j\right),\, \ldots,\, y_{r\,h}\left(x_j\right),\right. \\ &\qquad \left. y_{1\,h}\left(x_{j-i}\right),\, \ldots,\, y_{r\,h}\left(x_{j-i}\right)\right) \\ {y_{r\,h}}^P(x_{k+1}) &= g_r(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^{k} b_{j,k+1}\, f_r\left(x_j,\, y_{1,h}\left(x_j\right),\, \ldots,\, y_{r,h}\left(x_j\right),\right. \\ &\qquad \left. y_{1\,h}\left(x_j-\tau\right),\, \ldots,\, y_{r\,h}\left(x_j-\tau\right)\right) \end{aligned} \tag{4.6.14}$$

$$r = 1,\, 2,\, \cdots,\, m$$

$$a_{j,k+1} = \begin{cases} k^{\alpha+1} - (k-\alpha)\,(k+1)^\alpha & j = 0 \\ (k-j+2)^{\alpha+1} + (k-j)^{\alpha+1} - 2\,(k-j+1)^{\alpha+1} & 1 \le j \le k \\ 1 & j = k+1 \end{cases}$$

$$b_{j,k+1} = \frac{h^\alpha}{\alpha}\left((k+1-j)^\alpha - (k-j)^\alpha\right).$$

4.6.4. Problemas

En esta sección se proporcionan problemas numéricos para verificar los resultados teóricos propuestos. Las soluciones numéricas para el sistema (P) se simulan utilizando el esquema predictor–corrector de tipo Adams–Bashforth–Moulton con el tamaño de paso h y los parámetros indicados en cada caso.

En la Tabla 4.1 se representan los valores de los parámetros b_k y los órdenes de derivación fraccionarios α_1 y α_2 para cada caso.

Tabla 4.1. Parámetros físicos del modelo.

Casos	α_1	α_2	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	G_0[mg / dl]	I_0[mU / l]
I	1	1	0.0001	0.1262	0.0000564	0.01	0.074	1.93	87	60
II	0.92	0.92	0.00020893	0.148927	0.0000564	0.01	0.074	1.93	87	60
III	0.92	0.95	0.00020893	0.139961	0.0000564	0.01	0.074	1.93	87	60
IV	0.92	0.72	0.00020893	0.225301	0.0000564	0.01	0.074	1.93	87	60

Los valores de los órdenes de derivación fraccionarios α_1 y α_2 y los valores calculados de b_1, b_2, el punto de equilibrio $(G^*, I^*) = (y_1{}^*, y_2{}^*)$, los puntos de bifurcación τ_0 y la velocidad angular ω_0, así como la parte real de la derivada $\frac{ds}{d\tau}$ evaluada en $\tau = \tau_0$ y $\omega = \omega_0$ se indican en la Tabla 4.2.

Tabla 4.2. Valores de $b_1, b_2, G^*, I^*, \omega_0, \tau_0, y\ \mathrm{Re}[\frac{ds}{d\tau}]_{\tau=\tau_0,\omega=\omega_0}$ calculados para cada α_1 y α_2.

Casos	α_1	α_2	b_1	b_2	G^*	I^*	ω_0	τ_0	$\mathrm{Re}[\frac{ds}{d\tau}]_{\tau=\tau_0,\omega=\omega_0}$	τ[min]
I	1	1	0.0001	0.1262	650.59	381.49	0.002825	607.92	1.69551×10^{-6}	400, 700
II	0.92	0.92	0.00020893	0.148927	722.65	359.08	0.001382	1365.60	3.23853×10^{-7}	1000, 1600
III	0.92	0.95	0.00020893	0.139961	686.41	362.92	0.001469	1285.91	3.65018×10^{-7}	900, 1500
IV	0.92	0.72	0.00020893	0.225301	1018.09	334.39	0.000903	2089.43	1.37351×10^{-7}	1400, 2400

■ Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Fraccionarias con Retraso (SFDDE)

■ Problema 4.6.4. Modelo de Interacción Glucosa–Insulina con un SFDDE. Caso I. ([LEKD19])

Sea el sistema de ecuaciones diferenciales fraccionarias con retraso SFDDE que representa el modelo de interacción de glucosa–insulina con órdenes inconmensurables:

$$(P) \equiv \begin{cases} D^{(\alpha_1)}\, y_1(x) = -b_1\, y_1(x) - \frac{b_3\, y_1(x)\, y_2(x)}{b_4\, y_1(x)+1} + b_6 & x \in (0,\, T),\ 0 < \alpha \le 1 \\ D^{(\alpha_2)}\, y_2\,(x) = -b_2\, y_2(x) + b_5\, y_1(x-\tau) & \tau \ge 0 \\ y(x) = \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 87 \\ 60 \end{pmatrix} & x \in [-\tau,\, 0] \\ y(0) = \begin{pmatrix} G_0 \\ I_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 87 \\ 60 \end{pmatrix} \end{cases}$$

(i) Calcúlese la solución numérica mediante el método de *Adams–Bashforth–Moulton fraccionario con retraso* (ABMFR) tomando los valores de los parámetros dados.

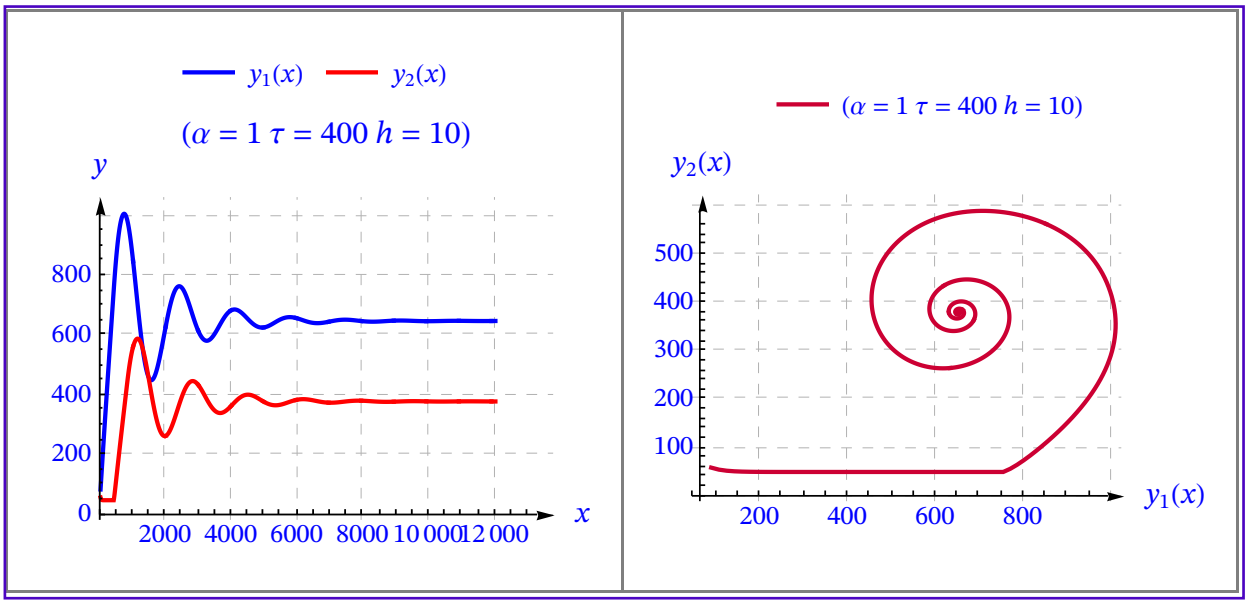
(ii) Represéntese la solución del método ABMFR en el intervalo $[0,\, T]$, y el diagrama de fases en el plano $y(x)$, $y(x-\tau)$.

- Punto de equilibrio positivo: $(G^*,\, I^*) = (650.59,\, 381.49)$
- Punto de bifurcación: $\tau_0 = 607.92$.

(a) Caso I:

α_1	α_2	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	G_0	I_0	τ
1	1	0.0001	0.1262	0.0000564	0.01	0.074	1.93	87	60	400

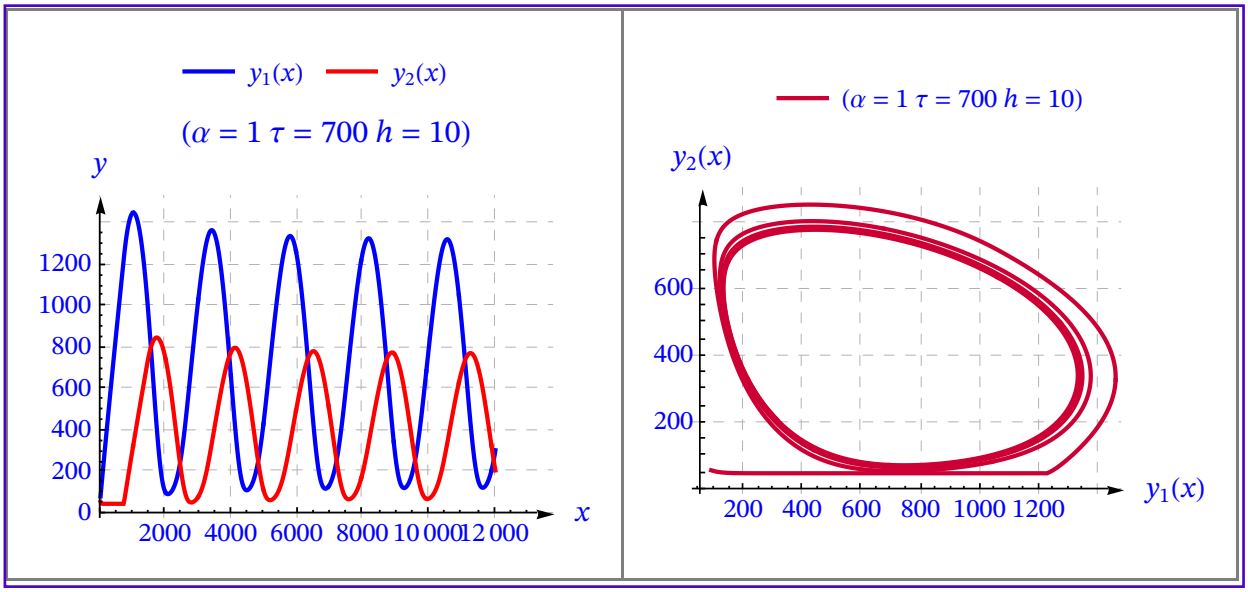
$[0,\, T] = [0,\, 12\,000]$ min.



(b) Caso I:

α_1	α_2	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	G_0	I_0	τ
1	1	0.0001	0.1262	0.0000564	0.01	0.074	1.93	87	60	700

$[0,\, T] = [0,\, 12\,000]$ min.



Indicación:

(i) El punto de equilibrio positivo $(G^*, I^*) = (650.59, 381.49)$ es *asintóticamente estable* cuando $\tau = 400 < \tau_0 = 607.92$.

(ii) El punto de equilibrio positivo $(G^*, I^*) = (650.59, 381.49)$ es *inestable* para $\tau = 700 > \tau_0 = 607.92$ y ocurre una bifurcación de Hopf en el punto de equilibrio.

Problema 4.6.5. Caso II. ([LEKD19])

Sea el sistema de ecuaciones diferenciales fraccionarias con retraso SFDDE que representa el modelo de glucosa–insulina con órdenes inconmensurables:

$$(P) \equiv \begin{cases} D^{(\alpha_1)}\, y_1(x) = -b_1\, y_1(x) - \frac{b_3\, y_1(x)\, y_2(x)}{b_4\, y_1(x)+1} + b_6 & x \in (0,\ T),\ 0 < \alpha \le 1 \\ D^{(\alpha_2)}\, y_2\,(x) = -b_2\, y_2(x) + b_5\, y_1(x-\tau) & \tau \ge 0 \\ y(x) = \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 87 \\ 60 \end{pmatrix} & x \in [-\tau,\ 0] \\ y(0) = \begin{pmatrix} G_0 \\ I_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 87 \\ 60 \end{pmatrix} \end{cases}$$

- Punto de equilibrio positivo: $(G^*, I^*) = (722.65,\ 359.08)$
- Punto de bifurcación: $\tau_0 = 1365.60$.

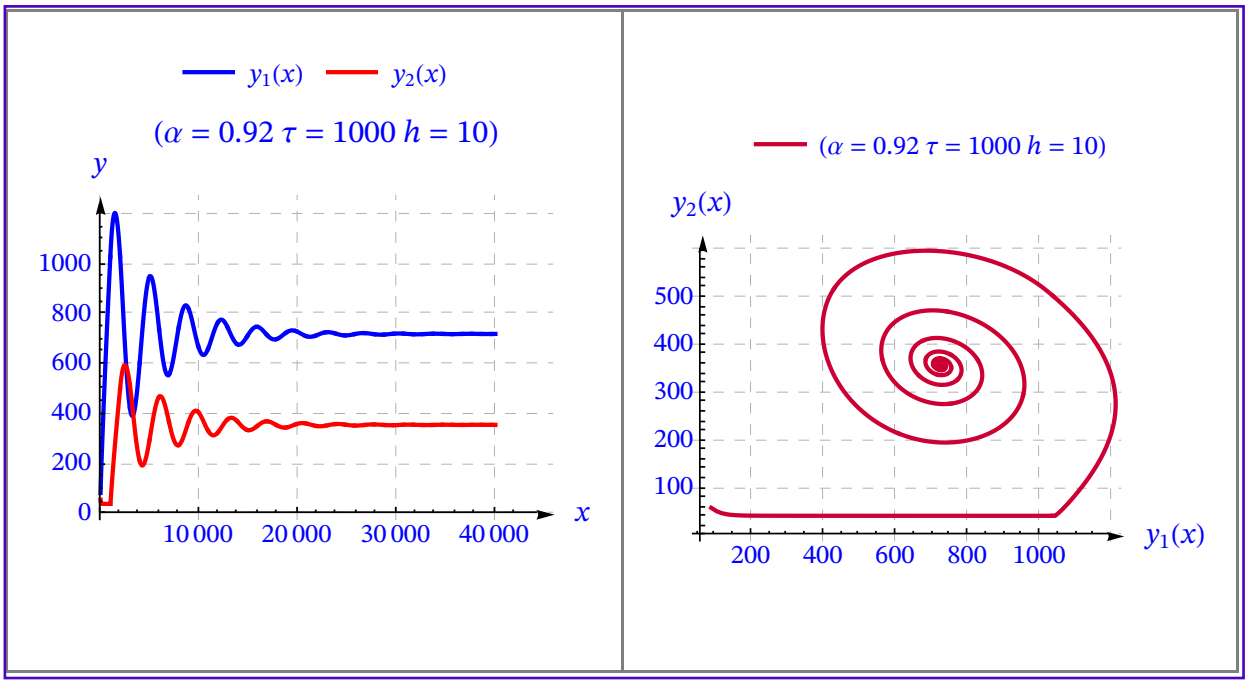
(i) Calcúlese la solución numérica mediante el método de *Adams–Bashforth–Moulton fraccionario con retraso* (ABMFR) tomando un tamaño del paso h dado y el orden α.

(ii) Represéntese la solución del método ABMFR en el intervalo $[0,\ 60]$, y el diagrama de fases en el plano $y(x),\ y(x-\tau)$.

(a) Caso II:

α_1	α_2	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	G_0	I_0	τ
0.92	0.92	0.00020893	0.148927	0.0000564	0.01	0.074	1.93	87	60	1000

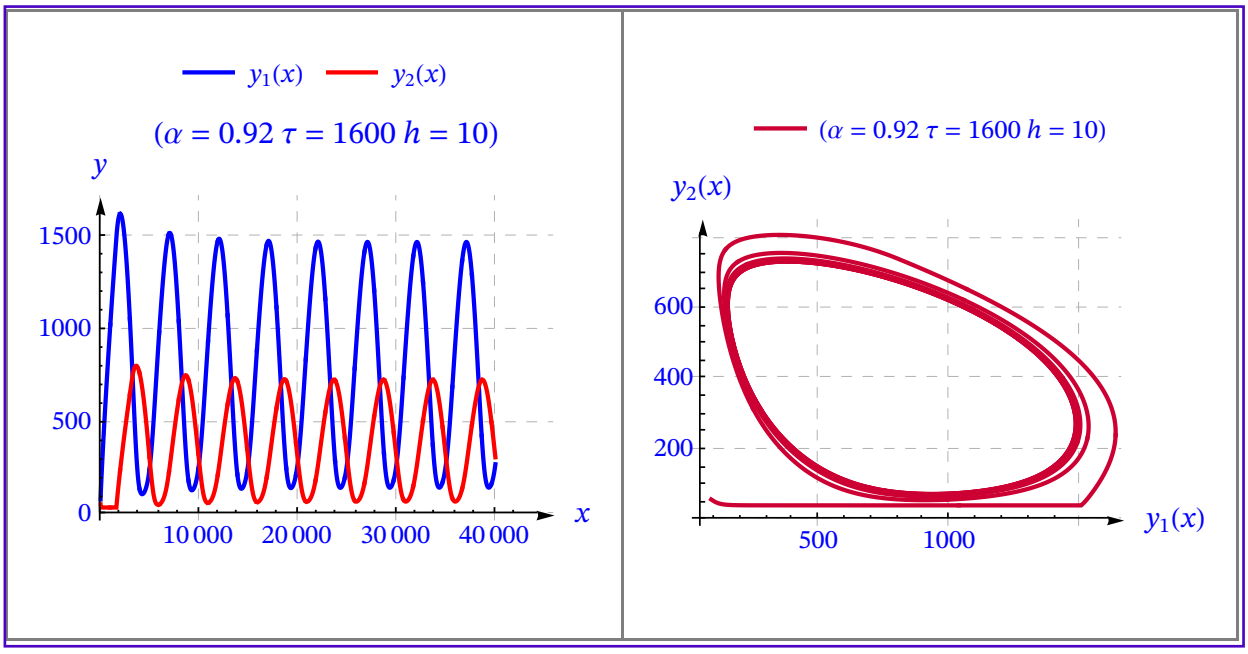
$[0,\ T] = [0,\ 40\,000]$ min



(b) Caso II:

α_1	α_2	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	G_0	I_0	τ
0.92	0.92	0.00020893	0.148927	0.0000564	0.01	0.074	1.93	87	60	1600

$[0,\ T] = [0,\ 40\,000]$ min.



Indicación:

(i) El punto de equilibrio positivo (G^*, I^*) es *asintóticamente estable* cuando $\tau = 1000 < \tau_0 = 1365.60$.

(ii) El punto de equilibrio positivo (G^*, I^*) es *inestable* para $\tau = 1600 > \tau_0 = 1365.60$ y ocurre una bifurcación de Hopf en el punto de equilibrio.

Problema 4.6.6. Caso III. ([LEKD19])

Sea el sistema de ecuaciones diferenciales fraccionarias con retraso SFDDE que representa el modelo de glucosa–insulina con órdenes inconmensurables:

$$(P) \equiv \begin{cases} D^{(\alpha_1)}\, y_1(x) = -b_1\, y_1(x) - \frac{b_3\, y_1(x)\, y_2(x)}{b_4\, y_1(x)+1} + b_6 & x \in (0,\, T),\ 0 < \alpha \le 1 \\ D^{(\alpha_2)}\, y_2(x) = -b_2\, y_2(x) + b_5\, y_1(x-\tau) & \tau \ge 0 \\ y(x) = \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 87 \\ 60 \end{pmatrix} & x \in [-\tau,\, 0] \\ y(0) = \begin{pmatrix} G_0 \\ I_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 87 \\ 60 \end{pmatrix} \end{cases}$$

• Punto de equilibrio positivo: $(G^*,\, I^*) = (686.41,\, 362.92)$

• Punto de bifurcación: $\tau_0 = 1285.91$.

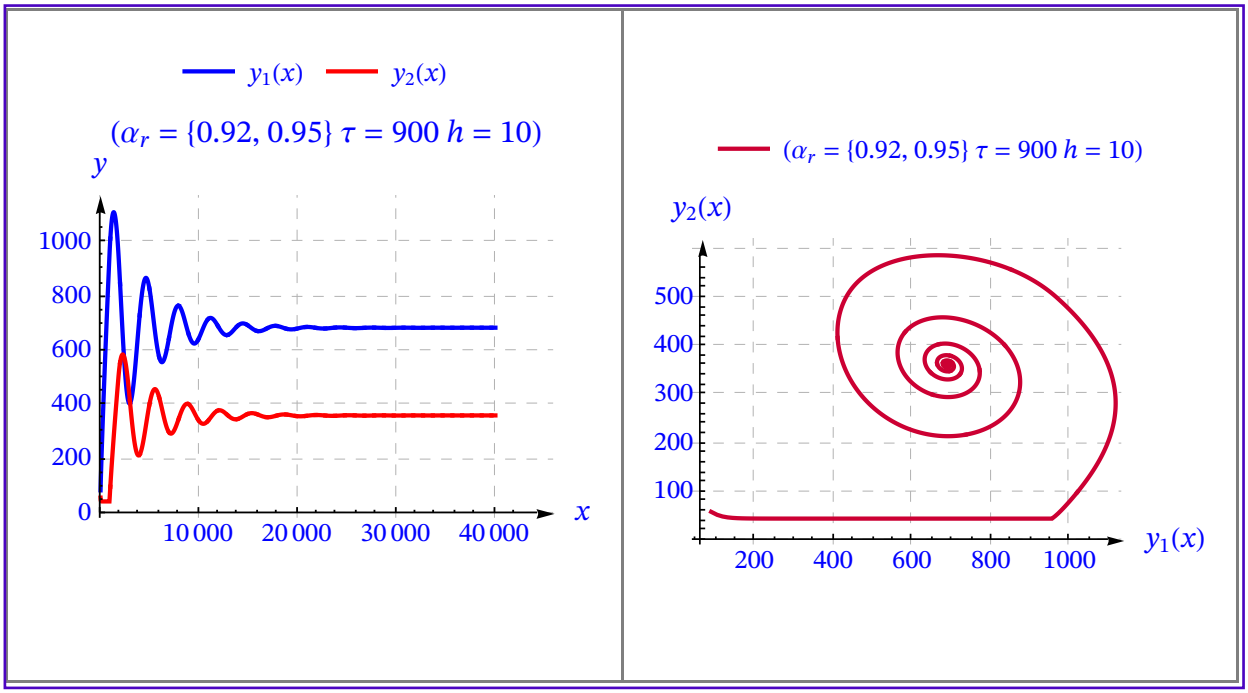
(i) Calcúlese la solución numérica mediante el método de *Adams–Bashforth–Moulton fraccionario con retraso* (ABMFR) tomando un tamaño del paso h dado y el orden α.

(ii) Represéntese la solución del método ABMFR en el intervalo $[0,\, 60]$, y el diagrama de fases en el plano $y(x),\ y(x-\tau)$.

(a) Caso III:

α_1	α_2	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	G_0	I_0	τ
0.92	0.95	0.00020893	0.139961	0.0000564	0.01	0.074	1.93	87	60	900

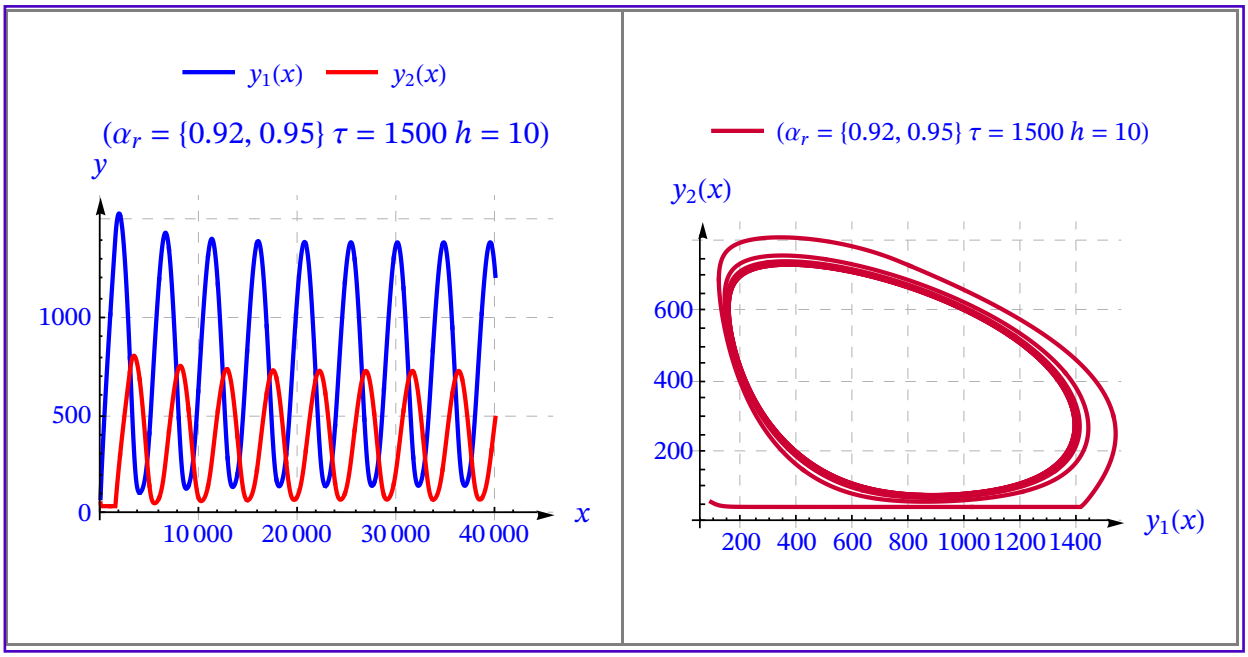
$[0,\, T] = [0,\, 40\,000]$ min.



(b) Caso III:

α_1	α_2	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	G_0	I_0	τ
0.92	0.95	0.00020893	0.139961	0.0000564	0.01	0.074	1.93	87	60	1500

$[0,\, T] = [0,\, 40\,000]$ min.



Indicación:

(i) El punto de equilibrio positivo (G^*, I^*) es *asintóticamente estable* cuando $\tau = 900 < \tau_0 = 1285.91$.

(ii) El punto de equilibrio positivo (G^*, I^*) es *inestable* para $\tau = 1500 > \tau_0 = 1285.91$ y ocurre una bifurcación de Hopf en el punto de equilibrio.

■ **Problema 4.6.7. Caso IV.** ([LEKD19])

Sea el sistema de ecuaciones diferenciales fraccionarias con retraso SFDDE que representa el modelo de glucosa–insulina con órdenes inconmensurables:

$$(P) \equiv \begin{cases} D^{(\alpha_1)}\, y_1(x) = -b_1\, y_1(x) - \frac{b_3\, y_1(x)\, y_2(x)}{b_4\, y_1(x)+1} + b_6 & x \in (0,\ T),\ 0 < \alpha \le 1 \\ D^{(\alpha_2)}\, y_2\,(x) = -b_2\, y_2(x) + b_5\, y_1(x-\tau) & \tau \ge 0 \\ y(x) = \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 87 \\ 60 \end{pmatrix} & x \in [-\tau,\ 0] \\ y(0) = \begin{pmatrix} G_0 \\ I_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 87 \\ 60 \end{pmatrix} & \end{cases}$$

- Punto de equilibrio positivo: $(G^*, I^*) = (1018.09,\ 334.39)$
- Punto de bifurcación: $\tau_0 = 2089.43$.

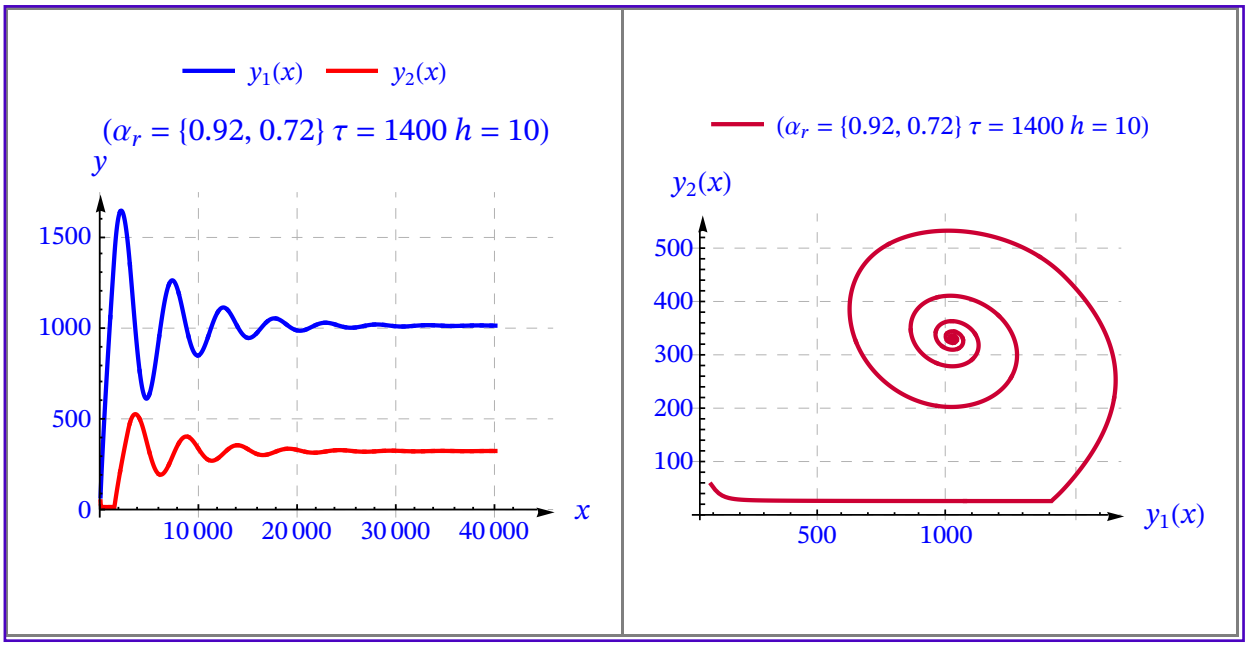
(i) Calcúlese la solución numérica mediante el método de *Adams–Bashforth–Moulton fraccionario con retraso* (ABMFR) tomando un tamaño del paso h dado y el orden α.

(ii) Represéntese la solución del método ABMFR en el intervalo $[0,\ 60]$, y el diagrama de fases en el plano $y(x),\ y(x-\tau)$.

(a) Caso IV:

α_1	α_2	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	G_0	I_0	τ
0.92	0.72	0.00020893	0.225301	0.0000564	0.01	0.074	1.93	87	60	1400

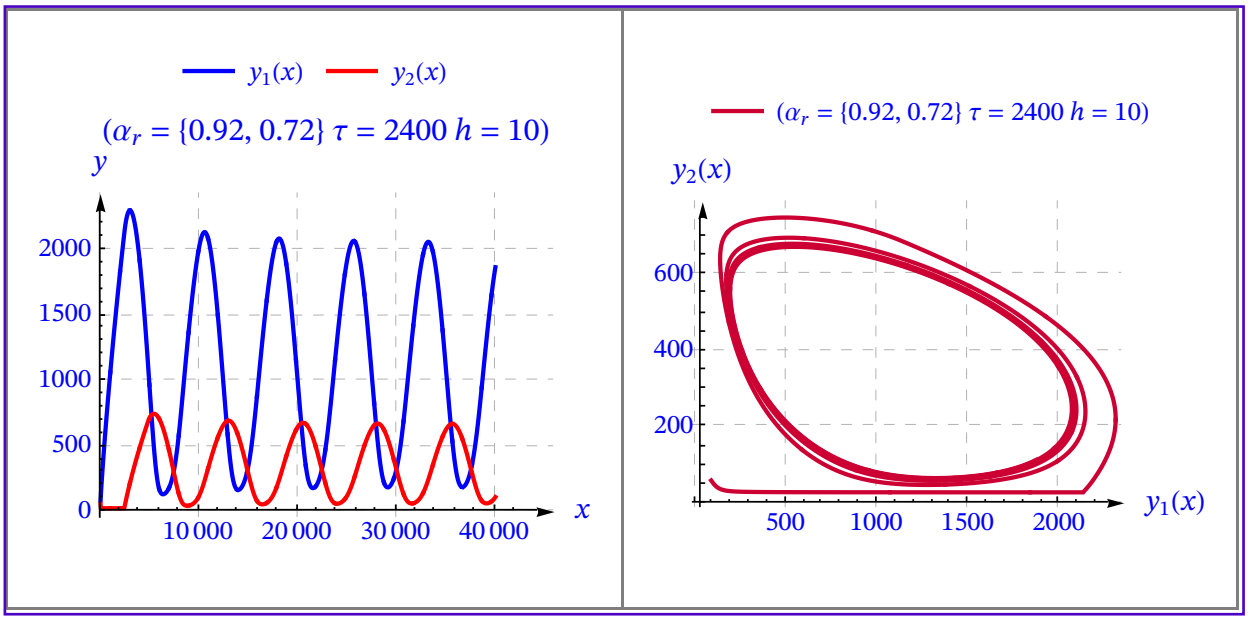
$[0,\ T] = [0,\ 40\,000]$ min.



(b) Caso IV:

α_1	α_2	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	G_0	I_0	τ
0.92	0.72	0.00020893	0.225301	0.0000564	0.01	0.074	1.93	87	60	2400

$[0,\ T] = [0,\ 40\,000]$ min.



Indicación:

(i) El punto de equilibrio positivo (G^*, I^*) es *asintóticamente estable* cuando $\tau = 1400 < \tau_0 = 2089$.

(ii) El punto de equilibrio positivo (G^*, I^*) es *inestable* para $\tau = 2400 > \tau_0 = 2089$ y ocurre una bifurcación de Hopf en el punto de equilibrio.

Problema 4.6.8. ([LEKD19])

Sea el sistema de ecuaciones diferenciales fraccionarias con retraso SFDDE que representa

el modelo de glucosa–insulina con órdenes inconmensurables:

$$(P) \equiv \begin{cases} D^{(\alpha_1)}\, y_1(x) = -b_1\, y_1(x) - \frac{b_3\, y_1(x)\, y_2(x)}{b_4\, y_1(x)+1} + b_6 & x \in (0,\, T),\ 0 < \alpha \le 1 \\ D^{(\alpha_2)}\, y_2\,(x) = -b_2\, y_2(x) + b_5\, y_1(x-\tau) & \tau \ge 0 \\ y(x) = \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{pmatrix} & x \in [-\tau,\, 0] \\ y(0) = \begin{pmatrix} G_0 \\ I_0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

- Punto de equilibrio positivo: $(G^*,\, I^*)$
- Punto de bifurcación: τ_0.

Se quiere estudiar los efectos de las órdenes fraccionarias α_1 y α_2 respecto del punto de bifurcaión τ_0 considerando los valores de los parámetros siguientes en el problema (P):

Tabla de valores y fórmulas:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
0.0001	0.1262	0.0000564	0.01	0.074	1.93

Constante de tiempo fraccionaria $\beta = 1$.

$$\begin{cases} b_1 = {a_1}^{\alpha_1} & b_2 = {a_2}^{\alpha_2} & b_3 = \beta^{1-\alpha_1}\, a_3 \\ b_4 = a_4 & b_5 = \beta^{1-\alpha_2}\, a_5 & b_6 = \beta^{1-\alpha_1}\, a_6 \end{cases}$$

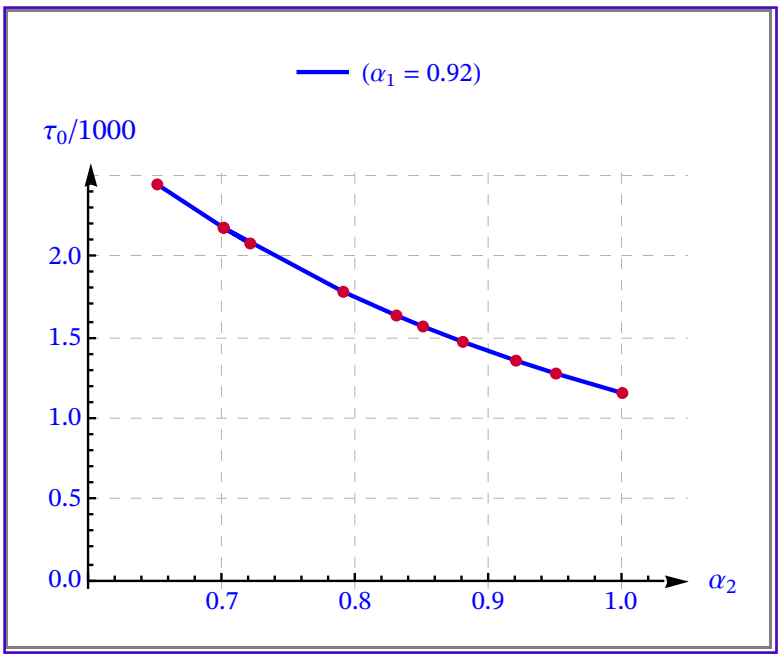
(a) Se establece el orden $\alpha_1 = 0.95$ y se calcula el punto de bifurcación del sistema τ_0 para cada valor del orden fraccionario de α_2:

$\alpha_2 = \{0.65,\ 0.7,\ 0.72,\ 0.7,\ 0.79,\ 0.83,\ 0.85,\ 0.88,\ 0.92,\ 0.95,\ 1.\}$

(i) Créese la tabla de valores siguiente:

α_1	α_2	G^*	I^*	ω_0	τ_0
0.92					

(ii) Represéntese la gráfica de puntos $(\alpha_2,\, \tau_0)$.



■

Indicación:

Se comprueba tanto en los datos de tabla de datos como en la gráfica que el punto de bifurcación τ_0 disminuye a medida que aumenta el orden fraccionario α_2.

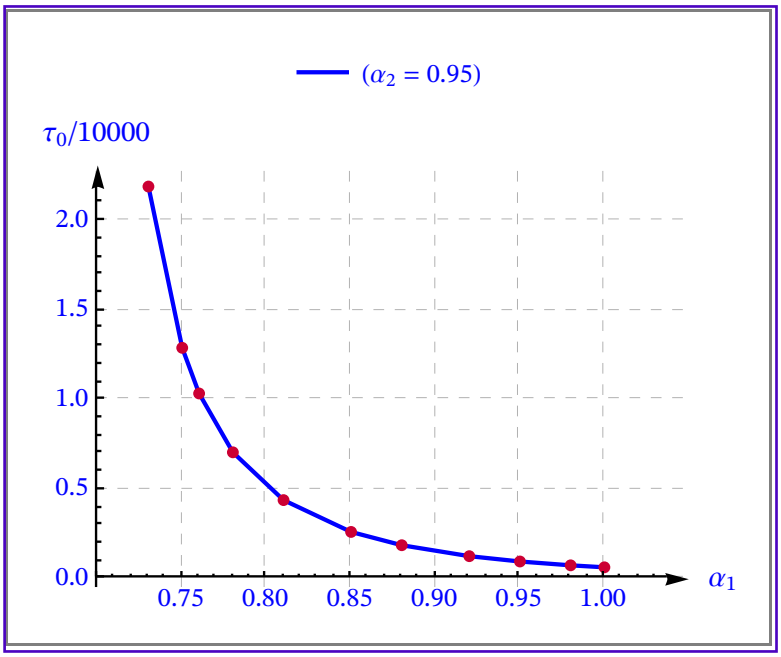
(b) Se establece el orden $\alpha_2 = 0.92$ y se calcula el punto de bifurcación del sistema τ_0 para cada valor del orden fraccionario de α_1:

$\alpha_1 = \{0.73, 0.75, 0.76, 0.78, 0.81, 0.85, 0.88, 0.92, 0.95, 0.98, 1.\}$

(i) Créese la tabla de valores siguiente:

α_1	α_2	G^*	I^*	ω_0	τ_0
	0.95				

(ii) Represéntese la gráfica de puntos (α_1, τ_0).



Indicación:

Se observa fácilmente tanto en la tabla de datos como en la gráfica que el punto de bifurcación τ_0 disminuye a medida que aumenta el orden fraccionario α_1.

***Observaciones* 4.6.1.**

(i) El modelo del sistema de ecuaciones diferenciales fraccionarias con retraso SFDDE que modeliza la dinámica glucosa–insulina con órdenes inconmensurables tiene un único punto de equilibrio positivo $(G^*, I^*) = (y_1{}^*, y_2{}^*)$.

(ii) Se han establecido las condiciones de estabilidad del punto de equilibrio y la bifurcación de Hopf.

(iii) En el análisis de estabilidad se ha determinado que el retraso en el tiempo τ del sistema tiene un efecto significativo en la propia estabilidad: las regiones de estabilidad $\tau \in [0, \tau_0)$, se pueden ajustar variando los órdenes fraccionarios α_1 y α_2.

(iv) El punto de bifurcación τ_0 se produce prematuramente cuando uno de los órdenes fraccionarios aumenta mientras se mantiene fijo el otro.

(v) Los resultados numéricos calculados con el método/esquema predictor–corrector de tipo Adams–Bashforth–Moulton verifican los resultados teóricos propuestos.

Capítulo 5

5. Resultados en los Modelo Fraccionarios de Interacción Glucosa-Insulina

5.1. Introducción

En este capítulo, se resuelven los sistemas de ecuaciones diferenciales con retraso fraccionario que modelizan las dinámicas de interacción en el Sistema Regulador Glucosa-Insulina no Lineal. Para ello, se implementan los métodos de resolución ya descritos en anteriores capítulos: (a) el método Wavelet de Chelyshkov y (b) el método numérico Adams-Bashforth-Moulton Fraccionario.

5.2. Resultados Numéricos en SFDDE

5.2.1. Problemas

La resolución de los problemas consiste en aplicar, o bien el método numérico Adams-Bashforth-Moulton Fraccionario, o bien el método *Wavelet* de Chelyshkov, a un sistema de ecuaciones diferenciales con retraso SFFDE que representan el modelo regulador Glucosa-Insulina no Lineal.

Los objetivos que se persiguen son principalmente la obtención de la solución numérica del modelo y la representación gráfica de la solución aproximada para el intervalo y los parámetros dados.

El primer problema presenta un SFDDE de tercer grado con unas condiciones iniciales $y_1(0)$, $y_2(0)$, $y_3(0)$ y unos parámetros r_x, τ_i, τ_g para los que se obtiene la solución numérica, se representa dicha solución y se obtiene el diagrama de fases para $T = 2$ minutos y $T = 10$ minutos. El ejercicio se basa en el expuesto en [AGRA22].

Se adjuntan los cálculos intermedios que ejecuta el algoritmo ABMFR empleado para la obtención de la solución aproximada para ambos apartado.

■ **Problema 5.2.1. Modelo Regulador Glucosa–Insulina no Lineal.** ([AGRA22])
Método *Adams–Bashforth–Moulton fraccionario con retraso* (ABMFR)

Sea el sistema de ecuaciones diferenciales con retraso SFDDE que representa el modelo regulador Glucosa–Insulina Fraccionario no Lineal:

$$(P_1) \equiv \begin{cases} D^{(\alpha_1)}\, y_1(x) = -r_1\, y_1(x) + r_2\, y_1(x)\, y_2(x) + r_3\, y_2\,(x)^2 + r_4\, y_2\,(x)^3 & x \in (0,\ T) \\ \qquad\qquad + r_5\, y_3(x) + r_6\, y_3\,(x)^2 + r_7\, y_3\,(x)^3 + r_{20} & \\ D^{(\alpha_2)}\, y_2(x) = -r_8\, y_1(x)\, y_2(x) - r_9\, y_1\,(x)^2 - r_{10}\, y_1\,(x)^3 & \\ \qquad + r_{11}\, y_2(x)\,(1 - y_2(x)) - r_{12}\, y_3(x) - r_{13}\, y_3\,(x)^2 - r_{14}\, y_3\,(x)^3 + r_{21} & \\ D^{(\alpha_3)}\, y_3(x) = r_{15}\, y_2(x) + r_{16}\, y_2\,(x)^2 + r_{17}\, y_2\,(x)^3 - r_{18}\, y_3(x) & \\ \qquad\qquad - r_{19}\, y_2(x)\, y_3(x) & \\ \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ y_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.53 \\ 1.31 \\ 1.03 \end{pmatrix} & x = 0 \end{cases}$$

Caso I.

r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6	r_7	r_8	r_9	r_{10}	r_{11}	r_{12}
2.04	0.1	1.09	−1.08	0.03	−0.06	2.01	0.22	−3.84	−1.2	0.3	1.37

r_{13}	r_{14}	r_{15}	r_{16}	r_{17}	r_{18}	r_{19}	r_{20}	r_{21}
−0.3	0.22	0.3	−1.35	0.5	−0.42	−0.15	−0.19	−0.56

$\tau = (\tau_g,\ \tau_i,\ \tau_g) = (0,\ 0,\ 0)$

- Punto de equilibrio: $Y_j^* = (\,0.624425 \quad 0.935374 \quad 0.876922\,)$
- Raíz compleja pura (solución periódica): $\beta = 0.$

(i) Calcúlese la solución numérica mediante el método de *Adams–Bashforth–Moulton fraccionario con retraso* (ABMFR) tomando los valores de los parámetros dados.

(ii) Represéntese las soluciones aproximadas $y_1(x),\ y_2(x),\ y_3(x)$ del método ABMFR en el intervalo $t \in [0,\ T]$, y el diagrama de fases en el plano $y_1(x),\ y_2(x),\ y_3(x)$.

(a) $\alpha = (\,\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3\,) = (\,1\ \ 1\ \ 1\,)$ $\quad \tau = (\tau_i,\ \tau_g,\ \tau_g) = (0,\ 0,\ 0)$

$[0,\ T] = [0,\ 2]$ min $\quad h = 0.02.$

(b) $\alpha = (\,\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3\,) = (\,1\ \ 1\ \ 1\,)$ $\quad \tau = (\tau_i,\ \tau_g,\ \tau_g) = (0,\ 0,\ 0)$

$[0,\ T] = [0,\ 10]$ min $\quad h = 0.02.$

SOLUCIÓN

(a)

Método de *Adams–Bashforth–Moulton Fraccionario con Retraso* (ABMFR) para Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Fraccionarias con Retraso (SFDDE) α_r.

$$(P) \equiv \begin{cases} D^{(\alpha_r)}\, y_r(x) = f_r\,(x,\, y_1(x),\, \ldots,\, y_r(x),\quad x \in [0,\, T] \quad 0 < \alpha \le 1 \\ \qquad y_1(x-\tau),\, \ldots,\, y_r(x-\tau)) \\ y_r(x) = g_r(x) \qquad\qquad\qquad\qquad x \in [-\tau,\, 0] \\ y_r(0) = y_{r\,0} \end{cases}$$

$$r = 1,\, 2, \cdots,\, m$$

$$(P) \equiv \left(\begin{array}{c} D^{1.}\, y_1(x) = -1.08\, y_2(x)^3 + 1.09\, y_2(x)^2 + 0.1\, y_1(x)\, y_2(x) + 2.01\, y_3(x)^3 - 0.06\, y_3(x)^2 - 2.04\, y_1(x) + 0.03\, y_3(x) - 0.19 \\ D^{1.}\, y_2(x) = 1.2\, y_1(x)^3 + 3.84\, y_1(x)^2 - 0.22\, y_2(x)\, y_1(x) - 0.22\, y_3(x)^3 + 0.3\, y_3(x)^2 + 0.3\,(1 - y_2(x))\, y_2(x) - 1.37\, y_3(x) - 0.56 \\ D^{1.}\, y_3(x) = 0.5\, y_2(x)^3 - 1.35\, y_2(x)^2 + 0.15\, y_3(x)\, y_2(x) + 0.3\, y_2(x) + 0.42\, y_3(x) \\ (\, y_1(0) = 0.53 \quad y_2(0) = 1.31 \quad y_3(0) = 1.03\,) \end{array} \right) \quad x \in [0,\, T]$$

$$\begin{pmatrix} f_1(x,\, y_r(x),\, y_r(x-\tau)) = & -1.08\, y_2(x)^3 + 1.09\, y_2(x)^2 + 0.1\, y_1(x)\, y_2(x) + 2.01\, y_3(x)^3 - 0.06\, y_3(x)^2 - 2.04\, y_1(x) + 0.03\, y_3(x) - 0.19 \\ f_2(x,\, y_r(x),\, y_r(x-\tau)) = & 1.2\, y_1(x)^3 + 3.84\, y_1(x)^2 - 0.22\, y_2(x)\, y_1(x) - 0.22\, y_3(x)^3 + 0.3\, y_3(x)^2 + 0.3\,(1 - y_2(x))\, y_2(x) - 1.37\, y_3(x) - 0.56 \\ f_3(x,\, y_r(x),\, y_r(x-\tau)) = & 0.5\, y_2(x)^3 - 1.35\, y_2(x)^2 + 0.15\, y_3(x)\, y_2(x) + 0.3\, y_2(x) + 0.42\, y_3(x) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} [A,\, B] = & [0,\, 2] & \text{(intervalo } x\text{)} \\ \{\alpha_r,\, n = \lceil \alpha \rceil\} = & \{\{1.,\, 1.,\, 1.\},\, 1\} & \\ \tau = & \{0,\, 0,\, 0\} & \\ h = & 0.02 & \text{Tamaño del paso} \\ m = & 3 & \text{Número de ecuaciones} \end{pmatrix}$$

Ecuaciones del método de *Adams–Bashforth–Moulton Fraccionario con Retraso* (SFDDE)

$$x \in [0,\, T] \quad \{x_k = k\, h\} \quad \begin{cases} k = -i,\, -(i-1),\, \cdots,\, -1,\, 0,\, 1,\, 2,\, \cdots,\, N \\ h := \dfrac{T}{N} \quad i = \dfrac{\tau}{h} \end{cases}$$

$$y_{r\,h}(x_{k+1}) = g_r(0) + \frac{h^\alpha}{\Gamma\,(\alpha+2)}\, f_r(x_{k+1},$$

$$y_{1\,h}{}^P(x_{k+1}),\, \ldots,\, y_{r\,h}{}^P(x_{k+1}),\, y_{1\,h}(x_{k+1-i}),\, \ldots,\, y_{r\,h}(x_{k+1-i}))$$

$$+ \frac{h^\alpha}{\Gamma\,(\alpha+2)} \sum_{j=0}^{k} a_{j,k+1}\, f_r(x_j,\, y_{1\,h}(x_j),\, \ldots,\, y_{r\,h}(x_j),\, y_{1\,h}(x_{j-i}),\, \ldots,\, y_{r\,h}(x_{j-i}))$$

$$y_{r\,h}{}^P(x_{k+1}) = g_r(0) + \frac{1}{\Gamma\,(\alpha)} \sum_{j=0}^{k} b_{j,k+1}\, f_r\,(x_j,\, y_{1,h}(x_j),\, \ldots,\, y_{r,h}(x_j),\, y_{1\,h}(x_j - \tau),\, \ldots,\, y_{r\,h}(x_j - \tau))$$

$$r = 1,\, 2, \cdots,\, m$$

- $$a_{j,k+1} = \begin{cases} k^{\alpha+1} - (k-\alpha)\,(k+1)^\alpha & j = 0 \\ (k-j+2)^{\alpha+1} + (k-j)^{\alpha+1} - 2\,(k-j+1)^{\alpha+1} & 1 \le j \le k \\ 1 & j = k+1 \end{cases}$$

- $$b_{j,k+1} = \frac{h^\alpha}{\alpha}((k+1-j)^\alpha - (k-j)^\alpha)$$

Proceso iterativo.

- $k = 9$

k	x_k	$y_{1\,k}{}^P$	$y_{1\,k}$	$y_{2\,k}{}^P$	$y_{2\,k}$	$y_{3\,k}{}^P$	$y_{3\,k}$
9	0.18	0.604246	0.604382	1.19091	1.18594	1.00568	1.00511
10	0.2	0.611822	0.612081	1.18307	1.17758	1.0035	1.00289

- $k = 19$

k	x_k	${y_{1\,k}}^P$	$y_{1\,k}$	${y_{2\,k}}^P$	$y_{2\,k}$	${y_{3\,k}}^P$	$y_{3\,k}$
19	0.38	0.665844	0.667627	1.15322	1.14389	0.985692	0.984968
20	0.4	0.670005	0.671986	1.15363	1.14399	0.983719	0.983006

- $k = 29$

k	x_k	${y_{1\,k}}^P$	$y_{1\,k}$	${y_{2\,k}}^P$	$y_{2\,k}$	${y_{3\,k}}^P$	$y_{3\,k}$
29	0.58	0.688714	0.692564	1.17601	1.16483	0.963693	0.963238
30	0.6	0.68869	0.692745	1.17953	1.16832	0.961129	0.960712

- $k = 39$

k	x_k	${y_{1\,k}}^P$	$y_{1\,k}$	${y_{2\,k}}^P$	$y_{2\,k}$	${y_{3\,k}}^P$	$y_{3\,k}$
39	0.78	0.671431	0.677084	1.20554	1.19517	0.934651	0.934566
40	0.8	0.667894	0.673682	1.20703	1.19685	0.931366	0.931311

- $k = 49$

k	x_k	${y_{1\,k}}^P$	$y_{1\,k}$	${y_{2\,k}}^P$	$y_{2\,k}$	${y_{3\,k}}^P$	$y_{3\,k}$
49	0.98	0.627462	0.633963	1.20071	1.19257	0.899868	0.899973
50	1.	0.622445	0.628969	1.19767	1.18977	0.896254	0.896362

- $k = 59$

k	x_k	${y_{1\,k}}^P$	$y_{1\,k}$	${y_{2\,k}}^P$	$y_{2\,k}$	${y_{3\,k}}^P$	$y_{3\,k}$
59	1.18	0.578436	0.584769	1.15109	1.14505	0.864434	0.864431
60	1.2	0.573951	0.58023	1.14405	1.13817	0.861092	0.86106

- $k = 69$

k	x_k	${y_{1\,k}}^P$	$y_{1\,k}$	${y_{2\,k}}^P$	$y_{2\,k}$	${y_{3\,k}}^P$	$y_{3\,k}$
69	1.38	0.539772	0.54544	1.06886	1.06408	0.834442	0.834031
70	1.4	0.536729	0.542322	1.05951	1.05481	0.831961	0.831494

- $k = 79$

k	x_k	${y_{1\,k}}^P$	$y_{1\,k}$	${y_{2\,k}}^P$	$y_{2\,k}$	${y_{3\,k}}^P$	$y_{3\,k}$
79	1.58	0.516244	0.521189	0.970492	0.96622	0.815221	0.814169
80	1.6	0.514712	0.519588	0.960275	0.956023	0.814049	0.812924

- $k = 89$

k	x_k	${y_{1\,k}}^P$	$y_{1\,k}$	${y_{2\,k}}^P$	$y_{2\,k}$	${y_{3\,k}}^P$	$y_{3\,k}$
89	1.78	0.507204	0.511491	0.868016	0.863758	0.810455	0.808623
90	1.8	0.507052	0.511275	0.857866	0.853589	0.810861	0.808946

• $k = 99$

k	x_k	$y_{1\,k}{}^P$	$y_{1\,k}$	$y_{2\,k}{}^P$	$y_{2\,k}$	$y_{3\,k}{}^P$	$y_{3\,k}$
99	1.98	0.511876	0.515499	0.769377	0.764772	0.82201	0.819346
100	2.	0.513129	0.51668	0.759993	0.755333	0.824082	0.821337

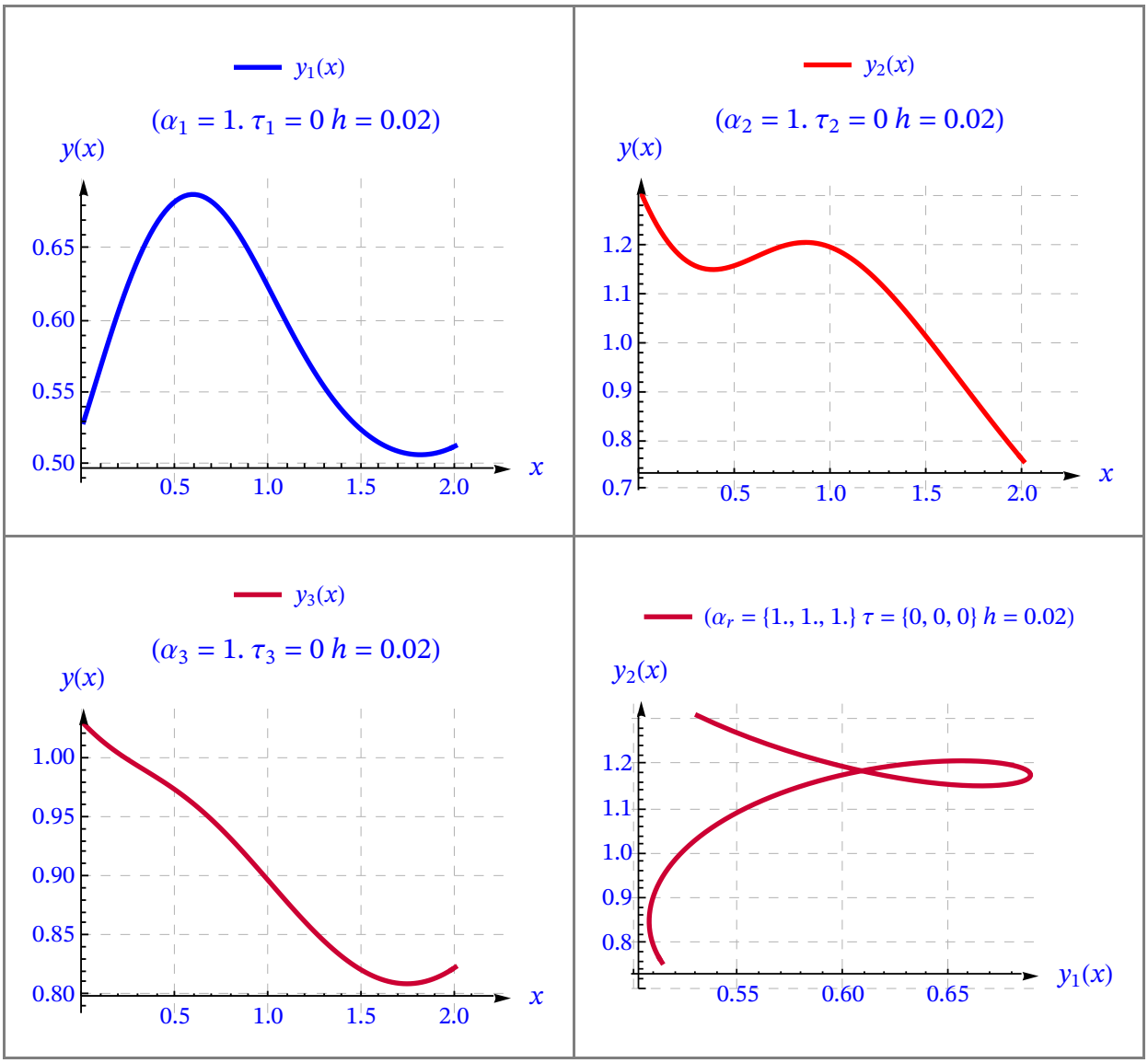
Tabla de puntos $(x_k, y_{r\,k}{}^P)$ y $(x_k, y_{r\,k})$ $(r = 1, 2, \cdots, m)$.

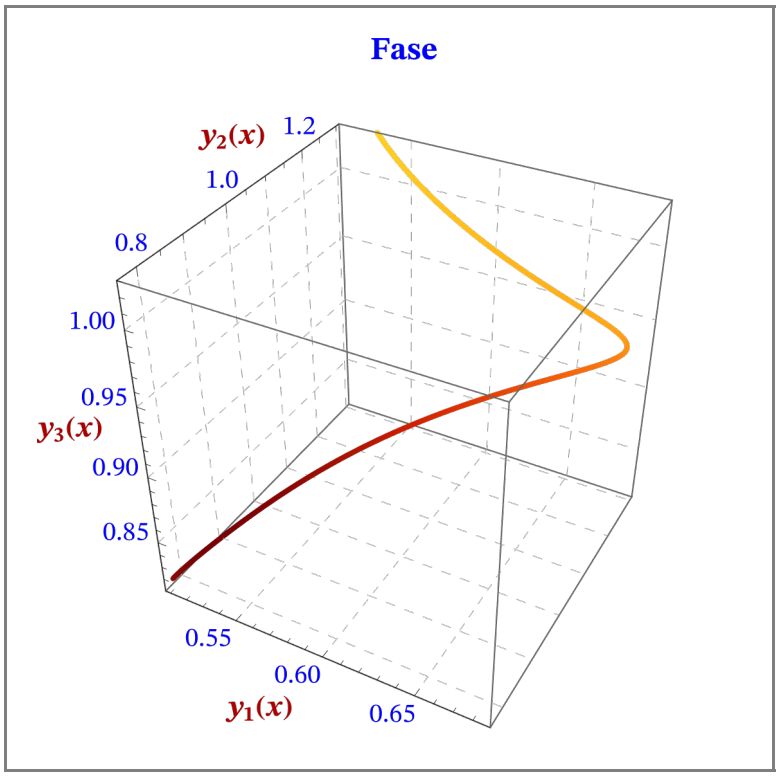
k	x_k	$y_{1\,k}{}^P$	$y_{2\,k}{}^P$	$y_{3\,k}{}^P$
10	0.2000000000	0.6120812339	1.1775846138	1.0028942090
20	0.4000000000	0.6719855403	1.1439882128	0.9830060861
30	0.6000000000	0.6927447153	1.1683249606	0.9607120019
40	0.8000000000	0.6736821186	1.1968454522	0.9313107672
50	1.0000000000	0.6289688290	1.1897673871	0.8963619597
60	1.2000000000	0.5802297414	1.1381737061	0.8610604602
70	1.4000000000	0.5423224814	1.0548094598	0.8314936841
80	1.6000000000	0.5195882136	0.9560233071	0.8129242207
90	1.8000000000	0.5112745634	0.8535890357	0.8089463411
100	2.0000000000	0.5166803485	0.7553331515	0.8213367438

k	x_k	$y_{1\,k}$	$y_{2\,k}$	$y_{3\,k}$
0	0.0000000000	0.5300000000	1.3100000000	1.0300000000
10	0.2000000000	0.6118223797	1.1830731533	1.0035018436
20	0.4000000000	0.6700045360	1.1536311918	0.9837186090
30	0.6000000000	0.6886897002	1.1795331001	0.9611289943
40	0.8000000000	0.6678936169	1.2070325207	0.9313658201
50	1.0000000000	0.6224446754	1.1976714757	0.8962535985
60	1.2000000000	0.5739507091	1.1440493635	0.8610921783
70	1.4000000000	0.5367288217	1.0595084568	0.8319605479
80	1.6000000000	0.5147116066	0.9602753952	0.8140494751
90	1.8000000000	0.5070516549	0.8578664201	0.8108607829
100	2.0000000000	0.5131287019	0.7599928710	0.8240824408

$y(2) \approx y_{100} = 0.5131287019$

Solución aproximada del sistema SFDDE
$y_r(x)$ $(h = 0.02)$
calculada con el método *Adams–Bashforth–Moulton Fraccionario con Retraso.*


$y_1(x)$
$(\alpha_1 = 1.\ \tau_1 = 0\ h = 0.02)$
$y(x)$
0.65
0.60
0.55
0.50
0.5
1.0
1.5
2.0
x
$y_2(x)$
$(\alpha_2 = 1.\ \tau_2 = 0\ h = 0.02)$
$y(x)$
1.2
1.1
1.0
0.9
0.8
0.7
0.5
1.0
1.5
2.0
x
$y_3(x)$
$(\alpha_3 = 1.\ \tau_3 = 0\ h = 0.02)$
$y(x)$
1.00
0.95
0.90
0.85
0.80
0.5
1.0
1.5
2.0
x
$(\alpha_r = \{1., 1., 1.\}\ \tau = \{0, 0, 0\}\ h = 0.02)$
$y_2(x)$
1.2
1.1
1.0
0.9
0.8
0.55
0.60
0.65
$y_1(x)$



(b)

Método de *Adams–Bashforth–Moulton Fraccionario con Retraso* (ABMFR) para
Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Fraccionarias con Retraso (SFDDE) α_r.

$$(P) \equiv \begin{cases} D^{(\alpha_r)}\, y_r(x) = f_r\,(x,\, y_1(x),\, \ldots,\, y_r(x),\\ \qquad y_1(x-\tau),\, \ldots,\, y_r(x-\tau)) & x \in [0,\, T] \quad 0 < \alpha \le 1 \\ y_r(x) = g_r(x) & x \in [-\tau,\, 0] \\ y_r(0) = y_{r\,0} \end{cases}$$

$$r = 1,\, 2, \cdots,\, m$$

$$(P) \equiv \left(\begin{pmatrix} D^{1.}\, y_1(x) = -1.08\, y_2(x)^3 + 1.09\, y_2(x)^2 + 0.1\, y_1(x)\, y_2(x) + 2.01\, y_3(x)^3 - 0.06\, y_3(x)^2 - 2.04\, y_1(x) + 0.03\, y_3(x) - 0.19 \\ D^{1.}\, y_2(x) = 1.2\, y_1(x)^3 + 3.84\, y_1(x)^2 - 0.22\, y_2(x)\, y_1(x) - 0.22\, y_3(x)^3 + 0.3\, y_3(x)^2 + 0.3\,(1 - y_2(x))\, y_2(x) - 1.37\, y_3(x) - 0.56 \\ D^{1.}\, y_3(x) = 0.5\, y_2(x)^3 - 1.35\, y_2(x)^2 + 0.15\, y_3(x)\, y_2(x) + 0.3\, y_2(x) + 0.42\, y_3(x) \\ (\, y_1(0) = 0.53 \quad y_2(0) = 1.31 \quad y_3(0) = 1.03\,) \end{pmatrix} \quad x \in [0,\, T] \right)$$

$$\begin{pmatrix} f_1(x,\, y_r(x),\, y_r(x-\tau)) = & -1.08\, y_2(x)^3 + 1.09\, y_2(x)^2 + 0.1\, y_1(x)\, y_2(x) + 2.01\, y_3(x)^3 - 0.06\, y_3(x)^2 - 2.04\, y_1(x) + 0.03\, y_3(x) - 0.19 \\ f_2(x,\, y_r(x),\, y_r(x-\tau)) = & 1.2\, y_1(x)^3 + 3.84\, y_1(x)^2 - 0.22\, y_2(x)\, y_1(x) - 0.22\, y_3(x)^3 + 0.3\, y_3(x)^2 + 0.3\,(1 - y_2(x))\, y_2(x) - 1.37\, y_3(x) - 0.56 \\ f_3(x,\, y_r(x),\, y_r(x-\tau)) = & 0.5\, y_2(x)^3 - 1.35\, y_2(x)^2 + 0.15\, y_3(x)\, y_2(x) + 0.3\, y_2(x) + 0.42\, y_3(x) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} [A,\, B] = & [0,\, 10] & \text{(intervalo } x\text{)} \\ \{\alpha_r,\, n = \lceil \alpha \rceil\} = & \{\{1.,\, 1.,\, 1.\},\, 1\} & \\ \tau = & \{0,\, 0,\, 0\} & \\ h = & 0.02 & \text{Tamaño del paso} \\ m = & 3 & \text{Número de ecuaciones} \end{pmatrix}$$

Ecuaciones del método de

Adams–Bashforth–Moulton Fraccionario con Retraso (SFDDE)

$$x \in [0, T] \quad \{x_k = k\,h\} \quad \begin{cases} k = -i, -(i-1), \cdots, -1, 0, 1, 2, \cdots, N \\ h := \frac{T}{N} \quad i = \frac{\tau}{h} \end{cases}$$

$$y_{r\,h}(x_{k+1}) = g_r(0) + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} f_r(x_{k+1},$$

$$y_{1\,h}{}^P(x_{k+1}), \ldots, y_{r\,h}{}^P(x_{k+1}), y_{1\,h}(x_{k+1-i}), \ldots, y_{r\,h}(x_{k+1-i}))$$

$$+ \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} \sum_{j=0}^{k} a_{j,k+1}\, f_r(x_j, y_{1\,h}(x_j), \ldots, y_{r\,h}(x_j), y_{1\,h}(x_{j-i}), \ldots, y_{r\,h}(x_{j-i}))$$

$$y_{r\,h}{}^P(x_{k+1}) = g_r(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^{k} b_{j,k+1}\, f_r(x_j, y_{1,h}(x_j), \ldots, y_{r,h}(x_j), y_{1\,h}(x_j - \tau), \ldots, y_{r\,h}(x_j - \tau))$$

$r = 1, 2, \cdots, m$

- $a_{j,k+1} = \begin{cases} k^{\alpha+1} - (k-\alpha)(k+1)^\alpha & j = 0 \\ (k-j+2)^{\alpha+1} + (k-j)^{\alpha+1} - 2(k-j+1)^{\alpha+1} & 1 \le j \le k \\ 1 & j = k+1 \end{cases}$
- $b_{j,k+1} = \frac{h^\alpha}{\alpha}((k+1-j)^\alpha - (k-j)^\alpha)$

Proceso iterativo.

- $k = 49$

k	x_k	$y_{1\,k}{}^P$	$y_{1\,k}$	$y_{2\,k}{}^P$	$y_{2\,k}$	$y_{3\,k}{}^P$	$y_{3\,k}$
49	0.98	0.627462	0.633963	1.20071	1.19257	0.899868	0.899973
50	1.	0.622445	0.628969	1.19767	1.18977	0.896254	0.896362

- $k = 99$

k	x_k	$y_{1\,k}{}^P$	$y_{1\,k}$	$y_{2\,k}{}^P$	$y_{2\,k}$	$y_{3\,k}{}^P$	$y_{3\,k}$
99	1.98	0.511876	0.515499	0.769377	0.764772	0.82201	0.819346
100	2.	0.513129	0.51668	0.759993	0.755333	0.824082	0.821337

- $k = 149$

k	x_k	$y_{1\,k}{}^P$	$y_{1\,k}$	$y_{2\,k}{}^P$	$y_{2\,k}$	$y_{3\,k}{}^P$	$y_{3\,k}$
149	2.98	0.843561	0.84201	0.85849	0.835296	1.04932	1.04597
150	3.	0.854814	0.853396	0.887518	0.863467	1.05222	1.04907

• $k = 199$

k	x_k	$y_{1\,k}{}^P$	$y_{1\,k}$	$y_{2\,k}{}^P$	$y_{2\,k}$	$y_{3\,k}{}^P$	$y_{3\,k}$
199	3.98	0.442926	0.447377	1.17852	1.17902	0.860724	0.860973
200	4.	0.442488	0.446733	1.15909	1.15947	0.857046	0.857185

• $k = 249$

k	x_k	$y_{1\,k}{}^P$	$y_{1\,k}$	$y_{2\,k}{}^P$	$y_{2\,k}$	$y_{3\,k}{}^P$	$y_{3\,k}$
249	4.98	0.618262	0.618725	0.608345	0.599366	0.938608	0.934173
250	5.	0.626075	0.626404	0.608266	0.598899	0.944146	0.939679

• $k = 299$

k	x_k	$y_{1\,k}{}^P$	$y_{1\,k}$	$y_{2\,k}{}^P$	$y_{2\,k}$	$y_{3\,k}{}^P$	$y_{3\,k}$
299	5.98	0.64826	0.662566	1.55994	1.55346	0.973084	0.974249
300	6.	0.627958	0.641883	1.55168	1.54635	0.967402	0.968594

• $k = 349$

k	x_k	$y_{1\,k}{}^P$	$y_{1\,k}$	$y_{2\,k}{}^P$	$y_{2\,k}$	$y_{3\,k}{}^P$	$y_{3\,k}$
349	6.98	0.50108	0.503521	0.74503	0.741221	0.844644	0.841684
350	7.	0.504676	0.507066	0.734273	0.730306	0.847341	0.844285

• $k = 399$

k	x_k	$y_{1\,k}{}^P$	$y_{1\,k}$	$y_{2\,k}{}^P$	$y_{2\,k}$	$y_{3\,k}{}^P$	$y_{3\,k}$
399	7.98	0.90857	0.908976	1.07678	1.04856	1.06201	1.06018
400	8.	0.914787	0.915808	1.11504	1.08636	1.06173	1.06017

• $k = 449$

k	x_k	$y_{1\,k}{}^P$	$y_{1\,k}$	$y_{2\,k}{}^P$	$y_{2\,k}$	$y_{3\,k}{}^P$	$y_{3\,k}$
449	8.98	0.447355	0.450744	1.05808	1.05763	0.843281	0.84277
450	9.	0.448922	0.452218	1.04063	1.04002	0.841128	0.840497

• $k = 499$

k	x_k	$y_{1\,k}{}^P$	$y_{1\,k}$	$y_{2\,k}{}^P$	$y_{2\,k}$	$y_{3\,k}{}^P$	$y_{3\,k}$
499	9.98	0.677406	0.677018	0.636746	0.624625	0.974989	0.970531
500	10.	0.68693	0.686407	0.643193	0.630528	0.980486	0.976039

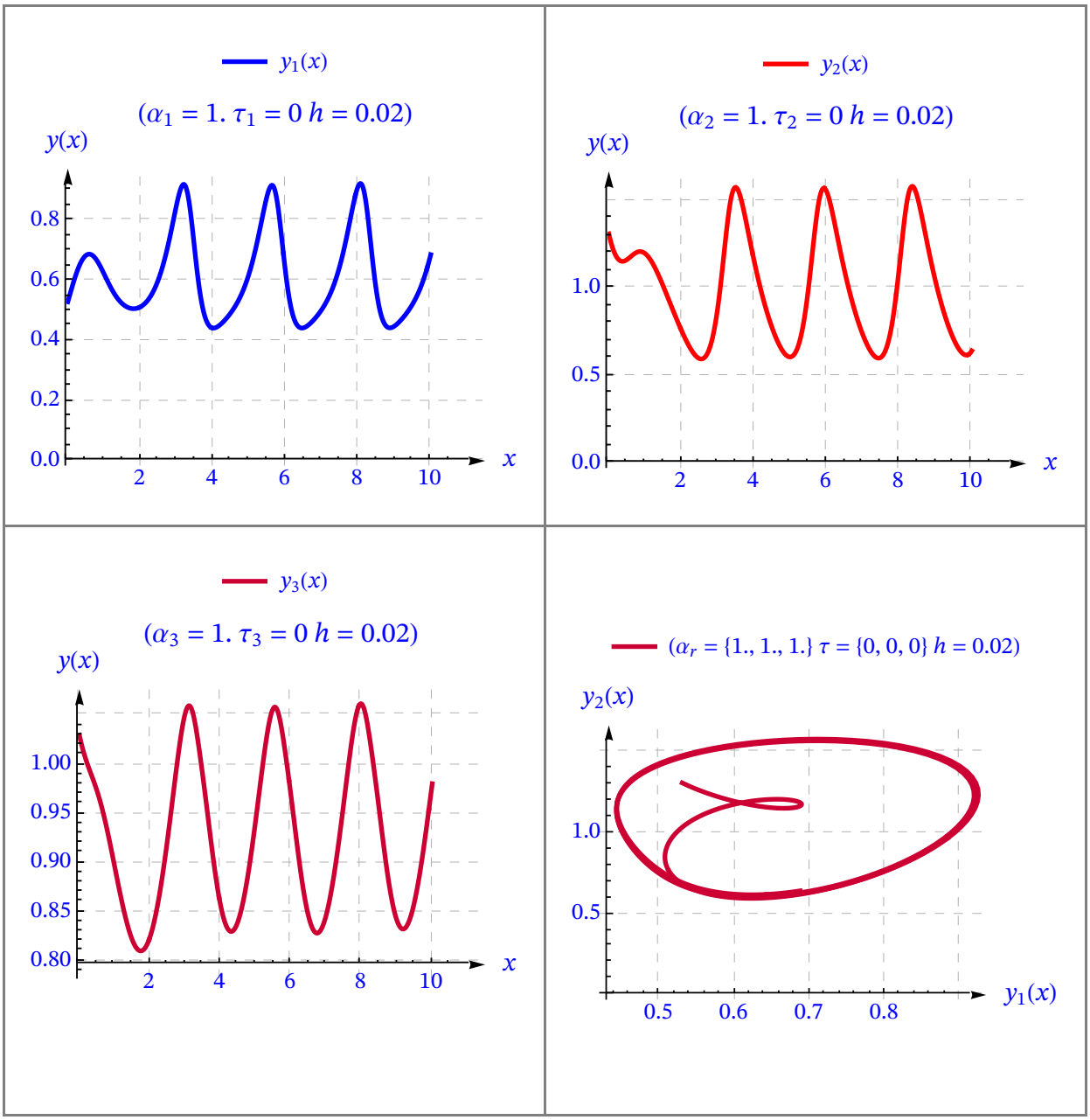
Tabla de puntos $(x_k, y_{r\,k}{}^P)$ y $(x_k, y_{r\,k})$ $(r = 1, 2, \cdots, m)$.

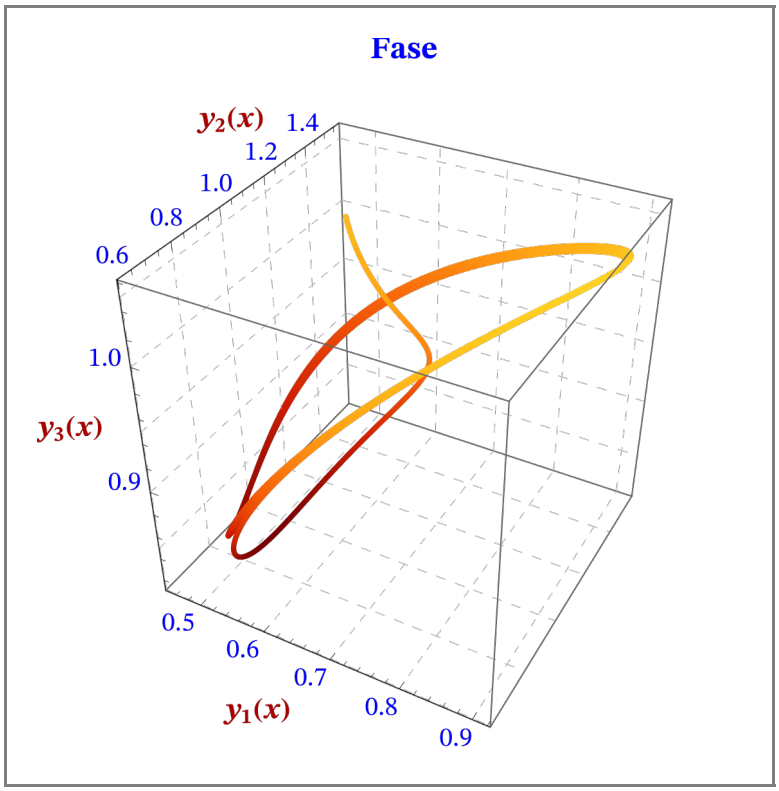
k	x_k	$y_{1\,k}{}^{P}$	$y_{2\,k}{}^{P}$	$y_{3\,k}{}^{P}$
50	1.0000000000	0.6289688290	1.1897673871	0.8963619597
100	2.0000000000	0.5166803485	0.7553331515	0.8213367438
150	3.0000000000	0.8533959771	0.8634671603	1.0490675209
200	4.0000000000	0.4467329576	1.1594737060	0.8571852495
250	5.0000000000	0.6264039343	0.5988992170	0.9396794340
300	6.0000000000	0.6418825919	1.5463505714	0.9685938324
350	7.0000000000	0.5070658884	0.7303061645	0.8442851864
400	8.0000000000	0.9158076484	1.0863578192	1.0601676084
450	9.0000000000	0.4522180979	1.0400230920	0.8404974206
500	10.0000000000	0.6864073974	0.6305278982	0.9760385456

k	x_k	$y_{1\,k}$	$y_{2\,k}$	$y_{3\,k}$
0	0.0000000000	0.5300000000	1.3100000000	1.0300000000
50	1.0000000000	0.6224446754	1.1976714757	0.8962535985
100	2.0000000000	0.5131287019	0.7599928710	0.8240824408
150	3.0000000000	0.8548135684	0.8875183979	1.0522233342
200	4.0000000000	0.4424877922	1.1590930095	0.8570463612
250	5.0000000000	0.6260751674	0.6082664204	0.9441457732
300	6.0000000000	0.6279584564	1.5516778365	0.9674015685
350	7.0000000000	0.5046763909	0.7342728096	0.8473412753
400	8.0000000000	0.9147871553	1.1150419858	1.0617320257
450	9.0000000000	0.4489219238	1.0406293172	0.8411281754
500	10.0000000000	0.6869296568	0.6431934240	0.9804858126

$y(10) \approx y_{500} = 0.6869296568$

Solución aproximada del sistema SFDDE
$y_r(x)$ $(h = 0.02)$
calculada con el método *Adams–Bashforth–Moulton Fraccionario con Retraso.*


$y_1(x)$
$(\alpha_1 = 1.\ \tau_1 = 0\ h = 0.02)$
$y(x)$
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
2
4
6
8
10
x
$y_2(x)$
$(\alpha_2 = 1.\ \tau_2 = 0\ h = 0.02)$
$y(x)$
1.0
0.5
0.0
2
4
6
8
10
x
$y_3(x)$
$(\alpha_3 = 1.\ \tau_3 = 0\ h = 0.02)$
$y(x)$
1.00
0.95
0.90
0.85
0.80
2
4
6
8
10
x
$(\alpha_r = \{1., 1., 1.\}\ \tau = \{0, 0, 0\}\ h = 0.02)$
$y_2(x)$
1.0
0.5
0.5
0.6
0.7
0.8
$y_1(x)$



El segundo problema dentro de esta sección resuelve el modelo planteado en el primer problema, empleando para ello otro método de resolución; en este caso, se resuelve mediante el método *Wavelet* de Chelyshkov en lugar de resolverlo con el método ABMFR, mediante polinomios de orden $M = 2$ en el intervalo $T = 2$ minutos.

Se adjuntan los cálculos intermedios que realiza el algoritmo *Wavelet* de Chelyshkov para resolver los apartados propuestos. Debido a la extensión de los cálculos intermedios, se omitirán para el resto de problemas del capítulo, por lo que únicamente se mostrarán las soluciones obtenidas.

■ **Problema 5.2.2. Modelo Regulador Glucosa–Insulina no Lineal.** ([AGRA22])

***Método Wavelets de Chelyshkov* (ChWM)**

Sea el sistema de ecuaciones diferenciales con retraso SFDDE que representa el modelo regulador Glucosa–Insulina Fraccionario no Lineal:

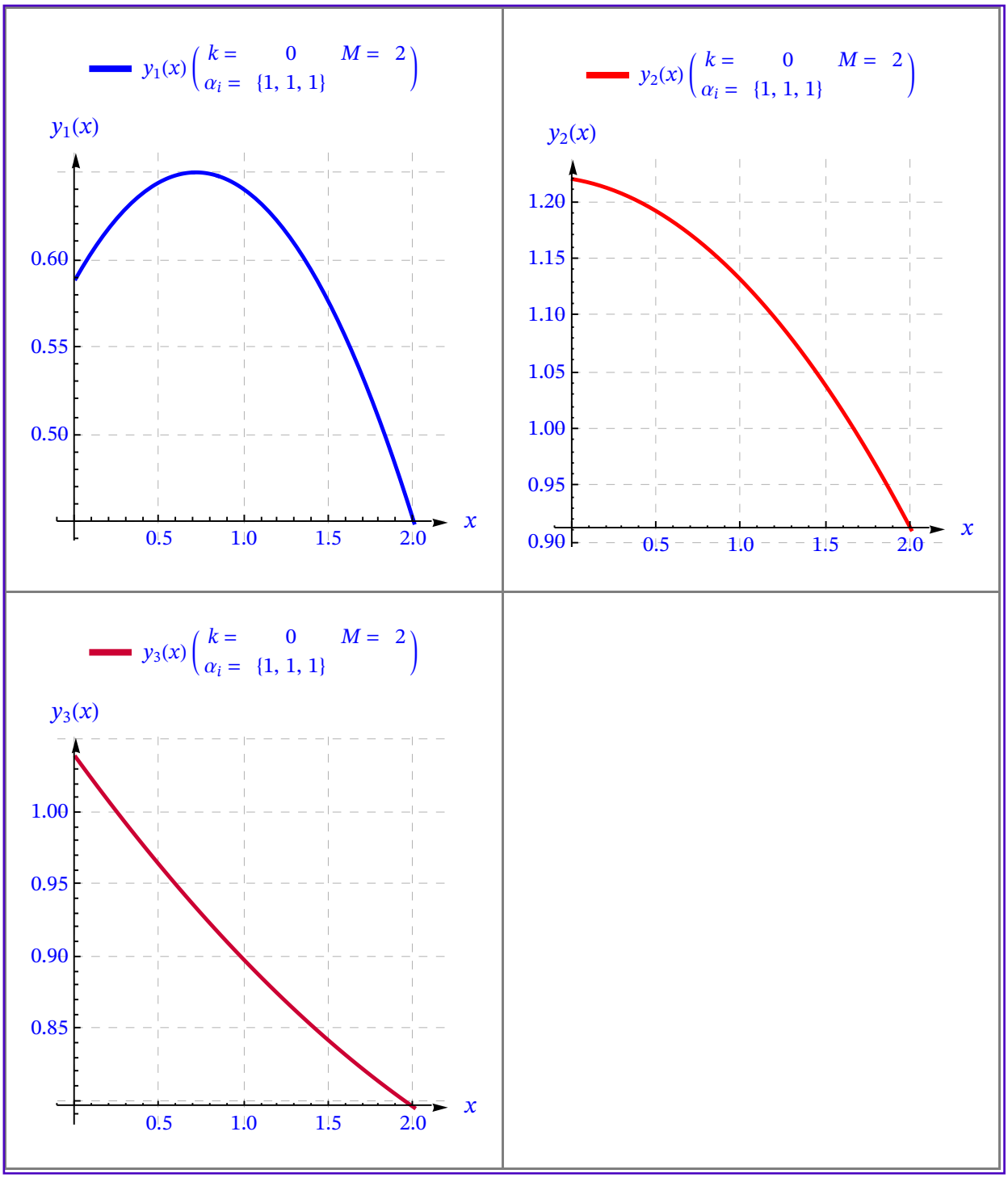
$$(P_1) \equiv \begin{cases} D^{(\alpha_1)}\, y_1(x) = -r_1\, y_1(x) + r_2\, y_1(x)\, y_2(x) + r_3\, y_2\,(x)^2 + r_4\, y_2\,(x)^3 & x \in (0,\ T) \\ \qquad\qquad + r_5\, y_3(x) + r_6\, y_3\,(x)^2 + r_7\, y_3\,(x)^3 + r_{20} & \\ D^{(\alpha_2)}\, y_2(x) = -r_8\, y_1(x)\, y_2(x) - r_9\, y_1\,(x)^2 - r_{10}\, y_1\,(x)^3 & \\ \qquad + r_{11}\, y_2(x)\,(1 - y_2(x)) - r_{12}\, y_3(x) - r_{13}\, y_3\,(x)^2 - r_{14}\, y_3\,(x)^3 + r_{21} & \\ D^{(\alpha_3)}\, y_3(x) = r_{15}\, y_2(x) + r_{16}\, y_2\,(x)^2 + r_{17}\, y_2\,(x)^3 - r_{18}\, y_3(x) & \\ \qquad - r_{19}\, y_2(x)\, y_3(x) & \\ \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ y_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.53 \\ 1.31 \\ 1.03 \end{pmatrix} & x = 0 \end{cases}$$

(i) Calcúlese la solución numérica mediante el método *Wavelets* de Chelyshkov (ChWM) con los parámetros k, M, α_i, $\tau_{i\,j}$ dados y en el intervalo $[0,\ T]$.

(ii) Represéntese en una misma gráfica en el intervalo $[0,\ T]$ la solución del método *Wavelet* BWM.

$$\begin{cases} \alpha_i = (1\ 1\ 1) & \tau_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

(a) $\begin{cases} k = 0 \\ M = 2 \end{cases}$ $[0,\ T] = [0,\ 2]$.



SOLUCIÓN

(a) Wavelet Chelyshkov

Método *Wavelet* de Chelyshkov (ChWM) para SFDDE en $[0, T]$.
(*System Fractional Delay Differential Equation*)

$$(P_1) \equiv \begin{cases} D^{(\alpha_i)}\, y_i(x) = & x \in [0,\ T] \\ \quad f_i\left(x,\ y_1(x),\ y_1(x-\tau_{11}),\ \ldots,\ y_1\left(x-\tau_{1\,r_1}\right),\right. & \\ \quad\quad y_2(x-\tau_{21}),\ \ldots,\ y_2\left(x-\tau_{2\,r_2}\right),\ \cdots, & \\ \quad\quad \left. y_n(x),\ y_n(x-\tau_{n\,1}),\ \ldots,\ y_n\left(x-\tau_{1\,r_n}\right)\right) & \\ y_i(x) = u_i(x) & x \in [-\tau,\ 0) \\ y_i^{(k)}(0) = \lambda_{i\,k} & k = 0,\ 1,\ \cdots,\ n-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} n-1 < \alpha_i \le n \\ 0 < \tau_{i\,j} < 1 \end{cases} \quad j = 1,\ 2,\ \cdots,\ r_i \qquad i = 1,\ 2, \cdots,\ n_e \quad (\text{nº de ecuaciones})$$

$$\begin{pmatrix} [A, B] = [A, T] = & [0, 2] & (\text{intervalo } x) \\ \{k, 2^k - 1\} = & \{0,\ 0\} & (\text{máxima resolución}) \\ M = & 2 & (\text{máx. grado polinomio}) \\ m^* = 2^k(M+1) = & 3 & \text{Dimensión } \mathcal{B} = \{\psi_k\} \\ \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots\} = & \{1,\ 1,\ 1\} & \\ \{\tau_{11}, \tau_{12}, \ldots\} = & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \\ n_e = & 3 & \text{nº ecuaciones} \\ n = \lceil \alpha \rceil = & 1 & \end{pmatrix}$$

$$(P_1) \equiv \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} D^{(1)}\, y_1(x) = -1.08\, y_2(x)^3 + 1.09\, y_2(x)^2 + 0.1\, y_1(x)\, y_2(x) + 2.01\, y_3(x)^3 - 0.06\, y_3(x)^2 - 2.04\, y_1(x) + 0.03\, y_3(x) - 0.19 \\ D^{(1)}\, y_2(x) = 1.2\, y_1(x)^3 + 3.84\, y_1(x)^2 - 0.22\, y_2(x)\, y_1(x) - 0.22\, y_3(x)^3 + 0.3\, y_3(x)^2 + 0.3\,(1 - y_2(x))\, y_2(x) - 1.37\, y_3(x) - 0.56 \\ D^{(1)}\, y_3(x) = 0.5\, y_2(x)^3 - 1.35\, y_2(x)^2 + 0.15\, y_3(x)\, y_2(x) + 0.3\, y_2(x) + 0.42\, y_3(x) \end{pmatrix} & x \in (0,\ \mathrm{T}) \\ u(x) = & 0 \\ (\, y_1(0) = 0.53 \quad y_2(0) = 1.31 \quad y_3(0) = 1.03\,) & \end{pmatrix}$$

(a) Matriz con los polinomios de Chelyshkov $\Phi(x)$

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \Phi_0(x) \\ \Phi_1(x) \\ \Phi_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10\,x^2 - 12\,x + 3 \\ 4\,x - 5\,x^2 \\ x^2 \end{pmatrix}$$

(b) Matriz con las *Wavelets* de Chelyshkov $\Psi(x)$ en $[0, T] = [0, 2]$:

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_{0\,0}^2(x) = \psi_1(x) = \begin{cases} \frac{5\,x^2}{2} - 6\,x + 3 & 0 \le \frac{x}{2} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{0\,1}^2(x) = \psi_2(x) = \begin{cases} \sqrt{3}\left(2\,x - \frac{5\,x^2}{4}\right) & 0 \le \frac{x}{2} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{0\,2}^2(x) = \psi_3(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{5}\,x^2}{4} & 0 \le \frac{x}{2} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \end{pmatrix}$$

(c) Matrices operacionales integrales fraccionarias $P^{(\alpha_i)}$ de orden $\alpha_i = \{1,\ 1,\ 1\}$ en $[0, T]$

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{5}{6\sqrt{3}} & \frac{19}{18\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{6\sqrt{3}} & \frac{1}{3} & \frac{11}{3\sqrt{15}} \\ \frac{1}{18\sqrt{5}} & -\frac{1}{3\sqrt{15}} & \frac{5}{9} \end{pmatrix}$$

(d) Matrices con los coeficientes *Wavelets* de los polinomios $p_i(x)$:

• $i = 1$

$$p_i(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda_{i\,0}}{i!}\, x^i = 0.53 \qquad p_i(x) \approx {E_i}^T.\Psi(x) \qquad E_1 = \begin{pmatrix} 0.176667 \\ 0.305996 \\ 0.395039 \end{pmatrix}$$

• $i = 2$

$$p_i(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda_{i\,0}}{i!}\, x^i = 1.31 \qquad p_i(x) \approx {E_i}^T.\Psi(x) \qquad E_2 = \begin{pmatrix} 0.436667 \\ 0.756329 \\ 0.976416 \end{pmatrix}$$

• $i = 3$

$$p_i(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda_{i\,0}}{i!} x^i = 1.03 \qquad p_i(x) \simeq {E_i}^T.\Psi(x) \qquad E_3 = \begin{pmatrix} 0.343333 \\ 0.594671 \\ 0.767717 \end{pmatrix}$$

(1) La derivada $D^{(\alpha)}\, y_i(x)$ se expresa en términos de las *Wavelets* de Chelyshkov

$$D^{(\alpha_i)}y(x) \simeq \sum_{n=0}^{2^k-1} \sum_{m=0}^{M} c_{n\,m}\, \psi_{n\,m}(x) = \sum_{i=1}^{m^*} C_i\, \psi_i(x) = {C_i}^T.\Psi(x) \qquad x \in [0,\, 1]$$

$$D^{(\alpha_i)}y_i(x) \simeq \begin{pmatrix} C_{i,1} & C_{i,2} & C_{i,3} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \psi_3(x) \end{pmatrix}$$

(2) Se aplica el operador integral J^{α_i} a la relación $D^{(\alpha_i)}y_i(x) \simeq {C_i}^T.\Psi(x)$

$y_i(x) \simeq {C_i}^T.P^{(\alpha_i)}.\Psi(x) + {E_i}^T.\Psi(x)$

$p_i(x) = \lambda_{i,0} \simeq {E_i}^T.\Psi(x)$

(3) Se deduce el término de retraso $y_i(x - \tau_{i\,j})$ del problema (P_1)

$$(P_1) \equiv y_i(x - \tau_{i\,j}) \simeq \begin{cases} u_i(x - \tau_{i\,j}) & x \in [0,\, \tau_{i\,j}] \\ {C_i}^T.P^{(\alpha_i)}.\Psi(x - \tau_{i\,j}) + {E_i}^T.\Psi(x - \tau_{i\,j}) & x \in [\tau_{i\,j},\, T] \end{cases}$$

(4) Se sustituyen las expresiones de $\begin{cases} y_i(x) & D^{(\alpha_i)}\, y_i(x) \\ y_i(x - \tau_{i\,j}) \end{cases}$ en el SFDDE de (P_1)

$(P_1) \equiv$

$$\begin{cases} D^{(\alpha_i)}\, y_i(x) = & x \in [0,\, T] \\ \quad f_i\left(x,\, y_1\,(x),\, y_1\,(x - \tau_{11}),\, \ldots,\, y_1\left(x - \tau_{1\,r_1}\right),\right. & \\ \qquad y_2\,(x - \tau_{21}),\, \ldots,\, y_2\left(x - \tau_{2\,r_2}\right),\, \cdots, & \\ \qquad \left. y_n\,(x),\, y_n\,(x - \tau_{n\,1}),\, \ldots,\, y_n\left(x - \tau_{1\,r_n}\right)\right) & \end{cases}$$

$$\bullet \begin{cases} D^{(\alpha_i)}\, y_i\,(x) & \simeq {C_i}^T.\Psi\,(x) \\ y_i(x) & \simeq \begin{cases} {C_i}^T.P^{(\alpha_i)}.\Psi(x) + {E_i}^T.\Psi\,(x) & x \in [0,\, T] \\ u_i(x) & x \in [\tau,\, 0) \end{cases} \\ y_i\left(x - \tau_{i\,j}\right) & \simeq \begin{cases} u_i\left(x - \tau_{i\,j}\right) & x \in [0,\, \tau_{i\,j}] \\ {C_i}^T.P^{(\alpha_i)}.\Psi\left(x - \tau_{i\,j}\right) + {E_i}^T.\Psi\left(x - \tau_{i\,j}\right) & x \in [\tau_{i\,j},\, T] \end{cases} \end{cases}$$

(4.1) Funciones

$D^{(\alpha_i)}y_i(x) \simeq {C_i}^T.\Psi(x)$

$$D^{(\alpha_1)}y_1(x) \simeq \begin{cases} \frac{1}{4}\left(2\left(5\,x^2 - 12\,x + 6\right)C_{1,1} + x\left(\sqrt{3}\,(8 - 5\,x)\,C_{1,2} + \sqrt{5}\,x\,C_{1,3}\right)\right) & 0 \le x < 2 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

$$D^{(\alpha_2)}y_2(x) \simeq \begin{cases} \frac{1}{4}\left(2\left(5\,x^2 - 12\,x + 6\right)C_{2,1} + x\left(\sqrt{3}\,(8 - 5\,x)\,C_{2,2} + \sqrt{5}\,x\,C_{2,3}\right)\right) & 0 \le x < 2 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

$$D^{(\alpha_3)}y_3(x) \simeq \begin{cases} \frac{1}{4}\left(2\left(5\,x^2 - 12\,x + 6\right)C_{3,1} + x\left(\sqrt{3}\,(8 - 5\,x)\,C_{3,2} + \sqrt{5}\,x\,C_{3,3}\right)\right) & 0 \le x < 2 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

(4.2) Funciones

$$y_i(x) \simeq \begin{cases} {C_i}^T.P^{(\alpha_i)}.\Psi(x) + {E_i}^T.\Psi\,(x) & x \in [0,\, 1] \\ u_i(x) & x \in [\tau,\, 0) \end{cases}$$

$y_1(x) \simeq$

$$\begin{cases} 0. & x \ge 2 \vee x < 0 \\ 0.559017\,C_{1,3}\,x^2 - 0.447214\,C_{1,3}\,x - 1.33539 \times 10^{-16}\,x + \left(-0.5\,x^2 + 1.\,x + 0.333333\right)C_{1,1} + \left(-0.433013\,x^2 + 1.73205\,x - 0.288675\right)C_{1,2} + 0.0745356\,C_{1,3} + 0.53 & \text{True} \end{cases}$$

$y_2(x) \simeq$

$$\begin{cases} 0. & x \ge 2 \vee x < 0 \\ 0.559017\,C_{2,3}\,x^2 + 2.67078 \times 10^{-16}\,x^2 - 0.447214\,C_{2,3}\,x + \left(-0.5\,x^2 + 1.\,x + 0.333333\right)C_{2,1} + \left(-0.433013\,x^2 + 1.73205\,x - 0.288675\right)C_{2,2} + 0.0745356\,C_{2,3} + 1.31 & \text{True} \end{cases}$$

$y_3(x) \simeq$

$$\begin{cases} 0. & x \ge 2 \vee x < 0 \\ 0.559017\,C_{3,3}\,x^2 - 0.447214\,C_{3,3}\,x + 2.67078 \times 10^{-16}\,x + \left(-0.5\,x^2 + 1.\,x + 0.333333\right)C_{3,1} + \left(-0.433013\,x^2 + 1.73205\,x - 0.288675\right)C_{3,2} + 0.0745356\,C_{3,3} + 1.03 & \text{True} \end{cases}$$

(4.3) Función

$$y_i(x) = \begin{cases} u_i(x) & x \in [\tau, 0) \end{cases}$$
$$u_i(x) = 0$$

(4.4) Funciones

$$y_i(x-\tau_{i\,j}) \simeq \begin{cases} u_i\left(x-\tau_{i\,j}\right) & x \in \left[0,\ \tau_{i\,j}\right] \\ C_i{}^T.P^{(\alpha_i)}.\Psi\left(x-\tau_{i\,j}\right) + E_i{}^T.\Psi\left(x-\tau_{i\,j}\right) & x \in \left[\tau_{i\,j},\ T\right] \end{cases}$$

$$y_1(x-0) \simeq \begin{cases} 0.559017\,C_{1,3}\,x^2 - 1.11022\times10^{-16}\,x^2 - 0.447214\,C_{1,3}\,x + \left(-0.5\,x^2 + 1.\,x + 0.333333\right)C_{1,1} + \left(-0.433013\,x^2 + 1.73205\,x - 0.288675\right)C_{1,2} + 0.0745356\,C_{1,3} + 0.53 & 0 < x \le 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

$$y_1(x-0) \simeq \begin{cases} 0.559017\,C_{1,3}\,x^2 - 1.11022\times10^{-16}\,x^2 - 0.447214\,C_{1,3}\,x + \left(-0.5\,x^2 + 1.\,x + 0.333333\right)C_{1,1} + \left(-0.433013\,x^2 + 1.73205\,x - 0.288675\right)C_{1,2} + 0.0745356\,C_{1,3} + 0.53 & 0 < x \le 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

$$y_1(x-0) \simeq \begin{cases} 0.559017\,C_{1,3}\,x^2 - 1.11022\times10^{-16}\,x^2 - 0.447214\,C_{1,3}\,x + \left(-0.5\,x^2 + 1.\,x + 0.333333\right)C_{1,1} + \left(-0.433013\,x^2 + 1.73205\,x - 0.288675\right)C_{1,2} + 0.0745356\,C_{1,3} + 0.53 & 0 < x \le 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

$$y_2(x-0) \simeq \begin{cases} 0.559017\,C_{2,3}\,x^2 - 2.22045\times10^{-16}\,x^2 - 0.447214\,C_{2,3}\,x + \left(-0.5\,x^2 + 1.\,x + 0.333333\right)C_{2,1} + \left(-0.433013\,x^2 + 1.73205\,x - 0.288675\right)C_{2,2} + 0.0745356\,C_{2,3} + 1.31 & 0 < x \le 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

$$y_2(x-0) \simeq \begin{cases} 0.559017\,C_{2,3}\,x^2 - 2.22045\times10^{-16}\,x^2 - 0.447214\,C_{2,3}\,x + \left(-0.5\,x^2 + 1.\,x + 0.333333\right)C_{2,1} + \left(-0.433013\,x^2 + 1.73205\,x - 0.288675\right)C_{2,2} + 0.0745356\,C_{2,3} + 1.31 & 0 < x \le 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

$$y_2(x-0) \simeq \begin{cases} 0.559017\,C_{2,3}\,x^2 - 2.22045\times10^{-16}\,x^2 - 0.447214\,C_{2,3}\,x + \left(-0.5\,x^2 + 1.\,x + 0.333333\right)C_{2,1} + \left(-0.433013\,x^2 + 1.73205\,x - 0.288675\right)C_{2,2} + 0.0745356\,C_{2,3} + 1.31 & 0 < x \le 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

$$y_3(x-0) \simeq \begin{cases} 0.559017\,C_{3,3}\,x^2 - 1.11022\times10^{-16}\,x^2 - 0.447214\,C_{3,3}\,x + \left(-0.5\,x^2 + 1.\,x + 0.333333\right)C_{3,1} + \left(-0.433013\,x^2 + 1.73205\,x - 0.288675\right)C_{3,2} + 0.0745356\,C_{3,3} + 1.03 & 0 < x \le 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

$$y_3(x-0) \simeq \begin{cases} 0.559017\,C_{3,3}\,x^2 - 1.11022\times10^{-16}\,x^2 - 0.447214\,C_{3,3}\,x + \left(-0.5\,x^2 + 1.\,x + 0.333333\right)C_{3,1} + \left(-0.433013\,x^2 + 1.73205\,x - 0.288675\right)C_{3,2} + 0.0745356\,C_{3,3} + 1.03 & 0 < x \le 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

$$y_3(x-0) \simeq \begin{cases} 0.559017\,C_{3,3}\,x^2 - 1.11022\times10^{-16}\,x^2 - 0.447214\,C_{3,3}\,x + \left(-0.5\,x^2 + 1.\,x + 0.333333\right)C_{3,1} + \left(-0.433013\,x^2 + 1.73205\,x - 0.288675\right)C_{3,2} + 0.0745356\,C_{3,3} + 1.03 & 0 < x \le 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

(4.5) Coeficientes *Wavelets* de Chelyshkov de las expresiones $y_i(x-\tau_{i\,j})$

$$W[y_1(x-0)] = \begin{pmatrix} 0.201389\,C_{1,1} - 0.0120281\,C_{1,2} + 0.00310565\,C_{1,3} + 0.220833 \\ 0.366858\,C_{1,1} + 0.291667\,C_{1,2} + 0.0215166\,C_{1,3} + 0.267746 \\ 0.0729828\,C_{1,1} + 0.0699289\,C_{1,2} + 0.00694444\,C_{1,3} + 0.0493798 \end{pmatrix}$$

$$W[y_1(x-0)] = \begin{pmatrix} 0.201389\,C_{1,1} - 0.0120281\,C_{1,2} + 0.00310565\,C_{1,3} + 0.220833 \\ 0.366858\,C_{1,1} + 0.291667\,C_{1,2} + 0.0215166\,C_{1,3} + 0.267746 \\ 0.0729828\,C_{1,1} + 0.0699289\,C_{1,2} + 0.00694444\,C_{1,3} + 0.0493798 \end{pmatrix}$$

$$W[y_1(x-0)] = \begin{pmatrix} 0.201389\,C_{1,1} - 0.0120281\,C_{1,2} + 0.00310565\,C_{1,3} + 0.220833 \\ 0.366858\,C_{1,1} + 0.291667\,C_{1,2} + 0.0215166\,C_{1,3} + 0.267746 \\ 0.0729828\,C_{1,1} + 0.0699289\,C_{1,2} + 0.00694444\,C_{1,3} + 0.0493798 \end{pmatrix}$$

$$W[y_2(x-0)] = \begin{pmatrix} 0.201389\,C_{2,1} - 0.0120281\,C_{2,2} + 0.00310565\,C_{2,3} + 0.545833 \\ 0.366858\,C_{2,1} + 0.291667\,C_{2,2} + 0.0215166\,C_{2,3} + 0.661788 \\ 0.0729828\,C_{2,1} + 0.0699289\,C_{2,2} + 0.00694444\,C_{2,3} + 0.122052 \end{pmatrix}$$

$$W[y_2(x-0)] = \begin{pmatrix} 0.201389\,C_{2,1} - 0.0120281\,C_{2,2} + 0.00310565\,C_{2,3} + 0.545833 \\ 0.366858\,C_{2,1} + 0.291667\,C_{2,2} + 0.0215166\,C_{2,3} + 0.661788 \\ 0.0729828\,C_{2,1} + 0.0699289\,C_{2,2} + 0.00694444\,C_{2,3} + 0.122052 \end{pmatrix}$$

$$W[y_2(x-0)] = \begin{pmatrix} 0.201389\,C_{2,1} - 0.0120281\,C_{2,2} + 0.00310565\,C_{2,3} + 0.545833 \\ 0.366858\,C_{2,1} + 0.291667\,C_{2,2} + 0.0215166\,C_{2,3} + 0.661788 \\ 0.0729828\,C_{2,1} + 0.0699289\,C_{2,2} + 0.00694444\,C_{2,3} + 0.122052 \end{pmatrix}$$

$$W[y_3(x-0)] = \begin{pmatrix} 0.201389\,C_{3,1} - 0.0120281\,C_{3,2} + 0.00310565\,C_{3,3} + 0.429167 \\ 0.366858\,C_{3,1} + 0.291667\,C_{3,2} + 0.0215166\,C_{3,3} + 0.520337 \\ 0.0729828\,C_{3,1} + 0.0699289\,C_{3,2} + 0.00694444\,C_{3,3} + 0.0959646 \end{pmatrix}$$

$$W[y_3(x-0)] = \begin{pmatrix} 0.201389\,C_{3,1} - 0.0120281\,C_{3,2} + 0.00310565\,C_{3,3} + 0.429167 \\ 0.366858\,C_{3,1} + 0.291667\,C_{3,2} + 0.0215166\,C_{3,3} + 0.520337 \\ 0.0729828\,C_{3,1} + 0.0699289\,C_{3,2} + 0.00694444\,C_{3,3} + 0.0959646 \end{pmatrix}$$

$$W[y_3(x-0)] = \begin{pmatrix} 0.201389\,C_{3,1} - 0.0120281\,C_{3,2} + 0.00310565\,C_{3,3} + 0.429167 \\ 0.366858\,C_{3,1} + 0.291667\,C_{3,2} + 0.0215166\,C_{3,3} + 0.520337 \\ 0.0729828\,C_{3,1} + 0.0699289\,C_{3,2} + 0.00694444\,C_{3,3} + 0.0959646 \end{pmatrix}$$

(4.6) Funciones $y_i(x-\tau_{i\,j})$ expandidas

$$y_1(x-0) \simeq \left(\begin{cases} \frac{5x^2}{2} - 6x + 3 & 0 \le \frac{x}{2} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right) (0.201389\,C_{1,1} - 0.0120281\,C_{1,2} + 0.00310565\,C_{1,3} + 0.220833) +$$
$$\left(\begin{cases} \frac{\sqrt{5}\,x^2}{4} & 0 \le \frac{x}{2} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right) (0.0729828\,C_{1,1} + 0.0699289\,C_{1,2} + 0.00694444\,C_{1,3} + 0.0493798) +$$
$$\left(\begin{cases} \sqrt{3}\left(2x - \frac{5x^2}{4}\right) & 0 \le \frac{x}{2} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right) (0.366858\,C_{1,1} + 0.291667\,C_{1,2} + 0.0215166\,C_{1,3} + 0.267746)$$

$$y_1(x-0) \simeq \left(\begin{cases} \frac{5x^2}{2} - 6x + 3 & 0 \le \frac{x}{2} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right) (0.201389\,C_{1,1} - 0.0120281\,C_{1,2} + 0.00310565\,C_{1,3} + 0.220833) +$$
$$\left(\begin{cases} \frac{\sqrt{5}\,x^2}{4} & 0 \le \frac{x}{2} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right) (0.0729828\,C_{1,1} + 0.0699289\,C_{1,2} + 0.00694444\,C_{1,3} + 0.0493798) +$$
$$\left(\begin{cases} \sqrt{3}\left(2x - \frac{5x^2}{4}\right) & 0 \le \frac{x}{2} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right) (0.366858\,C_{1,1} + 0.291667\,C_{1,2} + 0.0215166\,C_{1,3} + 0.267746)$$

$$y_1(x-0) \simeq \left(\begin{cases} \frac{5x^2}{2} - 6x + 3 & 0 \le \frac{x}{2} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right) (0.201389\,C_{1,1} - 0.0120281\,C_{1,2} + 0.00310565\,C_{1,3} + 0.220833) +$$
$$\left(\begin{cases} \frac{\sqrt{5}\,x^2}{4} & 0 \le \frac{x}{2} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right) (0.0729828\,C_{1,1} + 0.0699289\,C_{1,2} + 0.00694444\,C_{1,3} + 0.0493798) +$$
$$\left(\begin{cases} \sqrt{3}\left(2x - \frac{5x^2}{4}\right) & 0 \le \frac{x}{2} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right) (0.366858\,C_{1,1} + 0.291667\,C_{1,2} + 0.0215166\,C_{1,3} + 0.267746)$$

$$y_2(x-0) \simeq \left(\begin{cases} \frac{5x^2}{2} - 6x + 3 & 0 \le \frac{x}{2} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right) (0.201389\,C_{2,1} - 0.0120281\,C_{2,2} + 0.00310565\,C_{2,3} + 0.545833) +$$
$$\left(\begin{cases} \frac{\sqrt{5}\,x^2}{4} & 0 \le \frac{x}{2} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right) (0.0729828\,C_{2,1} + 0.0699289\,C_{2,2} + 0.00694444\,C_{2,3} + 0.122052) +$$
$$\left(\begin{cases} \sqrt{3}\left(2x - \frac{5x^2}{4}\right) & 0 \le \frac{x}{2} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right) (0.366858\,C_{2,1} + 0.291667\,C_{2,2} + 0.0215166\,C_{2,3} + 0.661788)$$

$$y_2(x-0) \simeq \left(\begin{cases} \frac{5x^2}{2} - 6x + 3 & 0 \le \frac{x}{2} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right) (0.201389\, C_{2,1} - 0.0120281\, C_{2,2} + 0.00310565\, C_{2,3} + 0.545833) +$$
$$\left(\begin{cases} \frac{\sqrt{5}\, x^2}{4} & 0 \le \frac{x}{2} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right) (0.0729828\, C_{2,1} + 0.0699289\, C_{2,2} + 0.00694444\, C_{2,3} + 0.122052) +$$
$$\left(\begin{cases} \sqrt{3} \left(2x - \frac{5x^2}{4} \right) & 0 \le \frac{x}{2} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right) (0.366858\, C_{2,1} + 0.291667\, C_{2,2} + 0.0215166\, C_{2,3} + 0.661788)$$

$$y_2(x-0) \simeq \left(\begin{cases} \frac{5x^2}{2} - 6x + 3 & 0 \le \frac{x}{2} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right) (0.201389\, C_{2,1} - 0.0120281\, C_{2,2} + 0.00310565\, C_{2,3} + 0.545833) +$$
$$\left(\begin{cases} \frac{\sqrt{5}\, x^2}{4} & 0 \le \frac{x}{2} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right) (0.0729828\, C_{2,1} + 0.0699289\, C_{2,2} + 0.00694444\, C_{2,3} + 0.122052) +$$
$$\left(\begin{cases} \sqrt{3} \left(2x - \frac{5x^2}{4} \right) & 0 \le \frac{x}{2} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right) (0.366858\, C_{2,1} + 0.291667\, C_{2,2} + 0.0215166\, C_{2,3} + 0.661788)$$

$$y_3(x-0) \simeq \left(\begin{cases} \frac{5x^2}{2} - 6x + 3 & 0 \le \frac{x}{2} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right) (0.201389\, C_{3,1} - 0.0120281\, C_{3,2} + 0.00310565\, C_{3,3} + 0.429167) +$$
$$\left(\begin{cases} \frac{\sqrt{5}\, x^2}{4} & 0 \le \frac{x}{2} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right) (0.0729828\, C_{3,1} + 0.0699289\, C_{3,2} + 0.00694444\, C_{3,3} + 0.0959646) +$$
$$\left(\begin{cases} \sqrt{3} \left(2x - \frac{5x^2}{4} \right) & 0 \le \frac{x}{2} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right) (0.366858\, C_{3,1} + 0.291667\, C_{3,2} + 0.0215166\, C_{3,3} + 0.520337)$$

$$y_3(x-0) \simeq \left(\begin{cases} \frac{5x^2}{2} - 6x + 3 & 0 \le \frac{x}{2} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right) (0.201389\, C_{3,1} - 0.0120281\, C_{3,2} + 0.00310565\, C_{3,3} + 0.429167) +$$
$$\left(\begin{cases} \frac{\sqrt{5}\, x^2}{4} & 0 \le \frac{x}{2} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right) (0.0729828\, C_{3,1} + 0.0699289\, C_{3,2} + 0.00694444\, C_{3,3} + 0.0959646) +$$
$$\left(\begin{cases} \sqrt{3} \left(2x - \frac{5x^2}{4} \right) & 0 \le \frac{x}{2} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right) (0.366858\, C_{3,1} + 0.291667\, C_{3,2} + 0.0215166\, C_{3,3} + 0.520337)$$

(5) Sistema algebraico no lineal de ecuaciones del problema (P_1):

$$(P_1) \equiv \left\{ \underbrace{D^{(\alpha_i)}\, y_i(x)}_{\mathrm{EC}_{1\,i}(x)} = \underbrace{f_i\left(x,\, y_i(x),\, y_i\left(x - \tau_i\, j\right)\right)}_{\mathrm{EC}_{2\,i}(x)} \quad x \in [0,\, T] \right.$$

$$\mathrm{EC}_{1\,i}(x) = \mathrm{EC}_{2\,i}(x)$$

$$\bullet\ EC_{1,1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}\left(2\left(5x^2-12x+6\right)C_{1,1} + x\left(\sqrt{3}\,(8-5x)\,C_{1,2} + \sqrt{5}\,x\,C_{1,3}\right)\right) & 0 \le x < 2 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

$$\bullet\ EC_{2,1}(x) =$$

$$-1.08\left(\begin{cases} 0. \\ 0.559017\,C_{2,3}\,x^2 + 2.67078\times10^{-16}\,x^2 - 0.447214\,C_{2,3}\,x + \left(-0.5\,x^2+1.\,x+0.333333\right)C_{2,1} + \left(-0.433013\,x^2+1.73205\,x-0.288675\right)C_{2,2} + 0.0745356\,C_{2,3} + 1.31 \end{cases}\begin{matrix} x \ge 2 \vee x < 0 \\ \text{True} \end{matrix}\right)^3 +$$

$$1.09\left(\begin{cases} 0. \\ 0.559017\,C_{2,3}\,x^2 + 2.67078\times10^{-16}\,x^2 - 0.447214\,C_{2,3}\,x + \left(-0.5\,x^2+1.\,x+0.333333\right)C_{2,1} + \left(-0.433013\,x^2+1.73205\,x-0.288675\right)C_{2,2} + 0.0745356\,C_{2,3} + 1.31 \end{cases}\begin{matrix} x \ge 2 \vee x < 0 \\ \text{True} \end{matrix}\right)^2 +$$

$$2.01\left(\begin{cases} 0. \\ 0.559017\,C_{3,3}\,x^2 - 0.447214\,C_{3,3}\,x + 2.67078\times10^{-16}\,x + \left(-0.5\,x^2+1.\,x+0.333333\right)C_{3,1} + \left(-0.433013\,x^2+1.73205\,x-0.288675\right)C_{3,2} + 0.0745356\,C_{3,3} + 1.03 \end{cases}\begin{matrix} x \ge 2 \vee x < 0 \\ \text{True} \end{matrix}\right)^3 -$$

$$0.06\left(\begin{cases} 0. \\ 0.559017\,C_{3,3}\,x^2 - 0.447214\,C_{3,3}\,x + 2.67078\times10^{-16}\,x + \left(-0.5\,x^2+1.\,x+0.333333\right)C_{3,1} + \left(-0.433013\,x^2+1.73205\,x-0.288675\right)C_{3,2} + 0.0745356\,C_{3,3} + 1.03 \end{cases}\begin{matrix} x \ge 2 \vee x < 0 \\ \text{True} \end{matrix}\right)^2 +$$

$$\left(\begin{cases} 0. \\ 0.559017\,C_{1,3}\,x^2 - 0.447214\,C_{1,3}\,x - 1.33539\times10^{-16}\,x + \left(-0.5\,x^2+1.\,x+0.333333\right)C_{1,1} + \left(-0.433013\,x^2+1.73205\,x-0.288675\right)C_{1,2} + 0.0745356\,C_{1,3} + 0.53 \end{cases}\begin{matrix} x \ge 2 \vee x < 0 \\ \text{True} \end{matrix}\right)$$

$$\left(0.1\left(\begin{cases} 0. \\ 0.559017\,C_{2,3}\,x^2 + 2.67078\times10^{-16}\,x^2 - 0.447214\,C_{2,3}\,x + \left(-0.5\,x^2+1.\,x+0.333333\right)C_{2,1} + \left(-0.433013\,x^2+1.73205\,x-0.288675\right)C_{2,2} + 0.0745356\,C_{2,3} + 1.31 \end{cases}\begin{matrix} x \ge 2 \vee x < 0 \\ \text{True} \end{matrix}\right) - 2.04\right) +$$

$$0.03\left(\begin{cases} 0. \\ 0.559017\,C_{3,3}\,x^2 - 0.447214\,C_{3,3}\,x + 2.67078\times10^{-16}\,x + \left(-0.5\,x^2+1.\,x+0.333333\right)C_{3,1} + \left(-0.433013\,x^2+1.73205\,x-0.288675\right)C_{3,2} + 0.0745356\,C_{3,3} + 1.03 \end{cases}\begin{matrix} x \ge 2 \vee x < 0 \\ \text{True} \end{matrix}\right) - 0.19$$

$$\bullet\ EC_{1,2}(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}\left(2\left(5x^2-12x+6\right)C_{2,1} + x\left(\sqrt{3}\,(8-5x)\,C_{2,2} + \sqrt{5}\,x\,C_{2,3}\right)\right) & 0 \le x < 2 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

$$\bullet\ EC_{2,2}(x) = 1.2\left(\begin{cases} 0. \\ 0.559017\,C_{1,3}\,x^2 - 0.447214\,C_{1,3}\,x - 1.33539\times10^{-16}\,x + \left(-0.5\,x^2+1.\,x+0.333333\right)C_{1,1} + \left(-0.433013\,x^2+1.73205\,x-0.288675\right)C_{1,2} + 0.0745356\,C_{1,3} + 0.53 \end{cases}\begin{matrix} x \ge 2 \vee x < 0 \\ \text{True} \end{matrix}\right)^3 +$$

$$3.84\left(\begin{cases} 0. \\ 0.559017\,C_{1,3}\,x^2 - 0.447214\,C_{1,3}\,x - 1.33539\times10^{-16}\,x + \left(-0.5\,x^2+1.\,x+0.333333\right)C_{1,1} + \left(-0.433013\,x^2+1.73205\,x-0.288675\right)C_{1,2} + 0.0745356\,C_{1,3} + 0.53 \end{cases}\begin{matrix} x \ge 2 \vee x < 0 \\ \text{True} \end{matrix}\right)^2 -$$

$$0.22\left(\begin{cases} 0. \\ 0.559017\,C_{2,3}\,x^2 + 2.67078\times10^{-16}\,x^2 - 0.447214\,C_{2,3}\,x + \left(-0.5\,x^2+1.\,x+0.333333\right)C_{2,1} + \left(-0.433013\,x^2+1.73205\,x-0.288675\right)C_{2,2} + 0.0745356\,C_{2,3} + 1.31 \end{cases}\begin{matrix} x \ge 2 \vee x < 0 \\ \text{True} \end{matrix}\right)$$

$$\left(\begin{cases} 0. \\ 0.559017\,C_{1,3}\,x^2 - 0.447214\,C_{1,3}\,x - 1.33539\times10^{-16}\,x + \left(-0.5\,x^2+1.\,x+0.333333\right)C_{1,1} + \left(-0.433013\,x^2+1.73205\,x-0.288675\right)C_{1,2} + 0.0745356\,C_{1,3} + 0.53 \end{cases}\begin{matrix} x \ge 2 \vee x < 0 \\ \text{True} \end{matrix}\right) -$$

$$0.22\left(\begin{cases} 0. \\ 0.559017\,C_{3,3}\,x^2 - 0.447214\,C_{3,3}\,x + 2.67078\times10^{-16}\,x + \left(-0.5\,x^2+1.\,x+0.333333\right)C_{3,1} + \left(-0.433013\,x^2+1.73205\,x-0.288675\right)C_{3,2} + 0.0745356\,C_{3,3} + 1.03 \end{cases}\begin{matrix} x \ge 2 \vee x < 0 \\ \text{True} \end{matrix}\right)^3 +$$

$$0.3\left(\begin{cases} 0. \\ 0.559017\,C_{3,3}\,x^2 - 0.447214\,C_{3,3}\,x + 2.67078\times10^{-16}\,x + \left(-0.5\,x^2+1.\,x+0.333333\right)C_{3,1} + \left(-0.433013\,x^2+1.73205\,x-0.288675\right)C_{3,2} + 0.0745356\,C_{3,3} + 1.03 \end{cases}\begin{matrix} x \ge 2 \vee x < 0 \\ \text{True} \end{matrix}\right)^2 -$$

$$0.3\left(\left(\begin{cases} 0. \\ 0.559017\,C_{2,3}\,x^2 + 2.67078\times10^{-16}\,x^2 - 0.447214\,C_{2,3}\,x + \left(-0.5\,x^2+1.\,x+0.333333\right)C_{2,1} + \left(-0.433013\,x^2+1.73205\,x-0.288675\right)C_{2,2} + 0.0745356\,C_{2,3} + 1.31 \end{cases}\begin{matrix} x \ge 2 \vee x < 0 \\ \text{True} \end{matrix}\right) - 1.\right)$$

$$\left(\begin{cases} 0. \\ 0.559017\,C_{2,3}\,x^2 + 2.67078\times10^{-16}\,x^2 - 0.447214\,C_{2,3}\,x + \left(-0.5\,x^2+1.\,x+0.333333\right)C_{2,1} + \left(-0.433013\,x^2+1.73205\,x-0.288675\right)C_{2,2} + 0.0745356\,C_{2,3} + 1.31 \end{cases}\begin{matrix} x \ge 2 \vee x < 0 \\ \text{True} \end{matrix}\right) -$$

$$1.37\left(\begin{cases} 0. \\ 0.559017\,C_{3,3}\,x^2 - 0.447214\,C_{3,3}\,x + 2.67078\times10^{-16}\,x + \left(-0.5\,x^2+1.\,x+0.333333\right)C_{3,1} + \left(-0.433013\,x^2+1.73205\,x-0.288675\right)C_{3,2} + 0.0745356\,C_{3,3} + 1.03 \end{cases}\begin{matrix} x \ge 2 \vee x < 0 \\ \text{True} \end{matrix}\right) - 0.56$$

$$\bullet\ EC_{1,3}(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}\left(2\left(5x^2-12x+6\right)C_{3,1} + x\left(\sqrt{3}\,(8-5x)\,C_{3,2} + \sqrt{5}\,x\,C_{3,3}\right)\right) & 0 \le x < 2 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

$$\bullet\ EC_{2,3}(x) =$$

$$0.5\left(\begin{cases} 0. \\ 0.559017\,C_{2,3}\,x^2 + 2.67078\times10^{-16}\,x^2 - 0.447214\,C_{2,3}\,x + \left(-0.5\,x^2+1.\,x+0.333333\right)C_{2,1} + \left(-0.433013\,x^2+1.73205\,x-0.288675\right)C_{2,2} + 0.0745356\,C_{2,3} + 1.31 \end{cases}\begin{matrix} x \ge 2 \vee x < 0 \\ \text{True} \end{matrix}\right)^3 -$$

$$1.35\left(\begin{cases} 0. \\ 0.559017\,C_{2,3}\,x^2 + 2.67078\times10^{-16}\,x^2 - 0.447214\,C_{2,3}\,x + \left(-0.5\,x^2+1.\,x+0.333333\right)C_{2,1} + \left(-0.433013\,x^2+1.73205\,x-0.288675\right)C_{2,2} + 0.0745356\,C_{2,3} + 1.31 \end{cases}\begin{matrix} x \ge 2 \vee x < 0 \\ \text{True} \end{matrix}\right)^2 +$$

$$\left(0.15\left(\begin{cases} 0. \\ 0.559017\,C_{3,3}\,x^2 - 0.447214\,C_{3,3}\,x + 2.67078\times10^{-16}\,x + \left(-0.5\,x^2+1.\,x+0.333333\right)C_{3,1} + \left(-0.433013\,x^2+1.73205\,x-0.288675\right)C_{3,2} + 0.0745356\,C_{3,3} + 1.03 \end{cases}\begin{matrix} x \ge 2 \vee x < 0 \\ \text{True} \end{matrix}\right) + 0.3\right)$$

$$\left(\begin{cases} 0. \\ 0.559017\,C_{2,3}\,x^2 + 2.67078\times10^{-16}\,x^2 - 0.447214\,C_{2,3}\,x + \left(-0.5\,x^2+1.\,x+0.333333\right)C_{2,1} + \left(-0.433013\,x^2+1.73205\,x-0.288675\right)C_{2,2} + 0.0745356\,C_{2,3} + 1.31 \end{cases}\begin{matrix} x \ge 2 \vee x < 0 \\ \text{True} \end{matrix}\right) +$$

$$0.42\left(\begin{cases} 0. \\ 0.559017\,C_{3,3}\,x^2 - 0.447214\,C_{3,3}\,x + 2.67078\times10^{-16}\,x + \left(-0.5\,x^2+1.\,x+0.333333\right)C_{3,1} + \left(-0.433013\,x^2+1.73205\,x-0.288675\right)C_{3,2} + 0.0745356\,C_{3,3} + 1.03 \end{cases}\begin{matrix} x \ge 2 \vee x < 0 \\ \text{True} \end{matrix}\right)$$

(6) Método de Colocación.

(6a) Creación de un sistema algebraico de ecuaciones con los coeficientes:

$$C_i{}^T = (C_{i,1}\ C_{i,2}\ \cdots\ C_{i,m^*})$$

Los puntos de colocación son los ceros del polinomio de Legendre desplazado.

•Polinomio de *Legendre* en [−1, 1]

$$P_{m^*}(x) = -\frac{1}{2}\left(5x^3 - 3x\right)$$

• Polinomio de *Legendre desplazado* en [0, T] y ceros:

$$L_{m^*}(x) = -\frac{1}{2}\left(5x^3 - 15x^2 + 12x - 2\right) \qquad x \in [0, T]$$

$$L_{m^*}(x) = 0 \Rightarrow x_k\ (k = 1, 2, \cdots, m^*) \in [0, T]$$

• Ceros:

$$x_k = \begin{pmatrix} x_1 & 0.225403 \\ x_2 & 1. \\ x_3 & 1.7746 \end{pmatrix}$$

(6a.i) Resolución del sistema de ecuaciones en los coeficientes

$$C_i{}^T = (C_{i,1}\ C_{i,2}\ \cdots\ C_{i,m^*}) \quad \begin{cases} i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n_e \\ j = 1,\ 2,\ ,\ \cdots,\ m^* \quad m^* = 2^k\,(M+1) \end{cases} \qquad EC_{1,i}(x_1, x_2, \cdots, x_{m^*}) = EC_{2,i}(x_1, x_2, \cdots, x_{m^*})$$

- $i = 1$

$$\begin{pmatrix} 1.7746\,C_{1,1} + 0.67082\,C_{1,2} + 0.0284018\,C_{1,3} \\ -0.5\,C_{1,1} + 1.29904\,C_{1,2} + 0.559017\,C_{1,3} \\ 0.225403\,C_{1,1} - 0.67082\,C_{1,2} + 1.76045\,C_{1,3} \end{pmatrix} =$$

$$\{-0.16384\,C_{2,1}^3 - 0.0734837\,C_{2,2}\,C_{2,1}^2 - 0.00196665\,C_{2,3}\,C_{2,1}^2 - 0.897252\,C_{2,1}^2 - 0.010986\,C_{2,2}^2\,C_{2,1} - 7.86889\times10^{-6}\,C_{2,3}^2\,C_{2,1} + 0.0284444\,C_{1,1}\,C_{2,1} + 0.00425253\,C_{1,2}\,C_{2,1} + 0.000113811\,C_{1,3}\,C_{2,1} - 0.268284\,C_{2,2}\,C_{2,1} - 0.000588041\,C_{2,2}\,C_{2,3}\,C_{2,1} - 0.0071801\,C_{2,3}\,C_{2,1} - 1.41406\,C_{2,1} - 0.000547482\,C_{2,2}^3 - 1.04949\times10^{-8}\,C_{2,3}^3 + 0.304924\,C_{3,1}^3 + 0.00101893\,C_{3,2}^3 + 1.95322\times10^{-8}\,C_{3,3}^3 - 0.0200546\,C_{2,2}^2 - 1.17642\times10^{-6}\,C_{2,2}\,C_{2,3}^2 - 0.0000143644\,C_{2,3}^2 + 1.74959\,C_{3,1}^2 + 0.0204462\,C_{3,1}\,C_{3,2}^2 + 0.0391054\,C_{3,2}^2 + 0.0000146449\,C_{3,1}\,C_{3,3}^2 + 2.18945\times10^{-6}\,C_{3,2}\,C_{3,3}^2 + 0.0000280097\,C_{3,3}^2 - 1.01813\,C_{1,1} - 0.152214\,C_{1,2} - 0.00407372\,C_{1,3} + 0.00425253\,C_{1,1}\,C_{2,2} + 0.000635766\,C_{1,2}\,C_{2,2} + 0.0000170151\,C_{1,3}\,C_{2,2} - 0.211406\,C_{2,2} - 0.0000439569\,C_{2,2}^2\,C_{2,3} + 0.000113811\,C_{1,1}\,C_{2,3} + 0.0000170151\,C_{1,2}\,C_{2,3} + 4.55375\times10^{-7}\,C_{1,3}\,C_{2,3} - 0.00107345\,C_{2,2}\,C_{2,3} - 0.00565788\,C_{2,3} + 3.36193\,C_{3,1} + 0.136761\,C_{3,1}^2\,C_{3,2} + 0.523138\,C_{3,1}\,C_{3,2} + 0.502619\,C_{3,2} + 0.00366016\,C_{3,1}^2\,C_{3,3} + 0.0000818087\,C_{3,2}^2\,C_{3,3} + 0.0140008\,C_{3,1}\,C_{3,3} + 0.00109441\,C_{3,1}\,C_{3,2}\,C_{3,3} + 0.00209316\,C_{3,2}\,C_{3,3} + 0.0134516\,C_{3,3} + 0.404468,$$
$$-0.625\,C_{2,1}^3 - 2.27332\,C_{2,2}\,C_{2,1}^2 - 0.419263\,C_{2,3}\,C_{2,1}^2 - 2.19056\,C_{2,1}^2 - 2.75625\,C_{2,2}^2\,C_{2,1} - 0.09375\,C_{2,3}^2\,C_{2,1} + 0.0694444\,C_{1,1}\,C_{2,1} + 0.0841969\,C_{1,2}\,C_{2,1} + 0.0155282\,C_{1,3}\,C_{2,1} - 5.31181\,C_{2,2}\,C_{2,1} - 1.01666\,C_{2,2}\,C_{2,3}\,C_{2,1} - 0.979646\,C_{2,3}\,C_{2,1} - 2.20947\,C_{2,1} - 1.11393\,C_{2,2}^3 - 0.00698771\,C_{2,3}^3 + 1.16319\,C_{3,1}^3 + 2.07314\,C_{3,2}^3 + 0.0130049\,C_{3,3}^3 - 3.22012\,C_{2,2}^2 - 0.113666\,C_{2,2}\,C_{2,3}^2 - 0.109528\,C_{2,3}^2 + 4.27146\,C_{3,1}^2 + 5.12969\,C_{3,1}\,C_{3,2}^2 + 6.27904\,C_{3,2}^2 + 0.174479\,C_{3,1}\,C_{3,3}^2 + 0.211545\,C_{3,2}\,C_{3,3}^2 + 0.213573\,C_{3,3}^2 - 1.59083\,C_{1,1} - 1.92878\,C_{1,2} - 0.355721\,C_{1,3} + 0.0841969\,C_{1,1}\,C_{2,2} + 0.102083\,C_{1,2}\,C_{2,2} + 0.018827\,C_{1,3}\,C_{2,2} - 2.67884\,C_{2,2} - 0.616316\,C_{2,2}^2\,C_{2,3} + 0.0155282\,C_{1,1}\,C_{2,3} + 0.018827\,C_{1,2}\,C_{2,3} + 0.00347222\,C_{1,3}\,C_{2,3} - 1.18776\,C_{2,2}\,C_{2,3} - 0.494053\,C_{2,3} + 5.25302\,C_{3,1} + 4.23089\,C_{3,1}^2\,C_{3,2} + 10.3577\,C_{3,1}\,C_{3,2} + 6.36895\,C_{3,2} + 0.780295\,C_{3,1}^2\,C_{3,3} + 1.14703\,C_{3,2}^2\,C_{3,3} + 1.91025\,C_{3,1}\,C_{3,3} + 1.89211\,C_{3,1}\,C_{3,2}\,C_{3,3} + 2.31606\,C_{3,2}\,C_{3,3} + 1.17461\,C_{3,3} + 0.404468,$$
$$-0.16384\,C_{2,1}^3 - 1.30994\,C_{2,2}\,C_{2,1}^2 - 0.959721\,C_{2,3}\,C_{2,1}^2 - 0.897252\,C_{2,1}^2 - 3.49109\,C_{2,2}^2\,C_{2,1} - 1.87391\,C_{2,3}^2\,C_{2,1} + 0.0284444\,C_{1,1}\,C_{2,1} + 0.0758067\,C_{1,2}\,C_{2,1} + 0.0555394\,C_{1,3}\,C_{2,1} - 4.78249\,C_{2,2}\,C_{2,1} - 5.11547\,C_{2,2}\,C_{2,3}\,C_{2,1} - 3.50387\,C_{2,3}\,C_{2,1} - 1.41406\,C_{2,1} - 3.10135\,C_{2,2}^3 - 1.21964\,C_{2,3}^3 + 0.304924\,C_{3,1}^3 + 5.77195\,C_{3,2}^3 + 2.26989\,C_{3,3}^3 - 6.37286\,C_{2,2}^2 - 4.99412\,C_{2,2}\,C_{2,3}^2 - 3.42076\,C_{2,3}^2 + 1.74959\,C_{3,1}^2 + 6.49731\,C_{3,1}\,C_{3,2}^2 + 12.4267\,C_{3,2}^2 + 3.48756\,C_{3,1}\,C_{3,3}^2 + 9.29462\,C_{3,2}\,C_{3,3}^2 + 6.67028\,C_{3,3}^2 - 1.01813\,C_{1,1} - 2.71341\,C_{1,2} - 1.98796\,C_{1,3} + 0.0758067\,C_{1,1}\,C_{2,2} + 0.202031\,C_{1,2}\,C_{2,2} + 0.148017\,C_{1,3}\,C_{2,2} - 3.76858\,C_{2,2} - 6.81656\,C_{2,2}^2\,C_{2,3} + 0.0555394\,C_{1,1}\,C_{2,3} + 0.148017\,C_{1,2}\,C_{2,3} + 0.108444\,C_{1,3}\,C_{2,3} - 9.3381\,C_{2,2}\,C_{2,3} - 2.76104\,C_{2,3} + 3.36193\,C_{3,1} + 2.43794\,C_{3,1}^2\,C_{3,2} + 9.32559\,C_{3,1}\,C_{3,2} + 8.95982\,C_{3,2} + 1.78615\,C_{3,1}^2\,C_{3,3} + 12.6864\,C_{3,2}^2\,C_{3,3} + 6.83235\,C_{3,1}\,C_{3,3} + 9.52045\,C_{3,1}\,C_{3,2}\,C_{3,3} + 18.2088\,C_{3,2}\,C_{3,3} + 6.56437\,C_{3,3} + 0.404468\}$$

- $i = 2$

$$\begin{pmatrix} 1.7746\,C_{2,1} + 0.67082\,C_{2,2} + 0.0284018\,C_{2,3} \\ -0.5\,C_{2,1} + 1.29904\,C_{2,2} + 0.559017\,C_{2,3} \\ 0.225403\,C_{2,1} - 0.67082\,C_{2,2} + 1.76045\,C_{2,3} \end{pmatrix} =$$

$$\{0.182044\,C_{1,1}^3 + 0.0816486\,C_{1,2}\,C_{1,1}^2 + 0.00218517\,C_{1,3}\,C_{1,1}^2 + 1.63499\,C_{1,1}^2 + 0.0122067\,C_{1,2}^2\,C_{1,1} + 8.74321\times10^{-6}\,C_{1,3}^2\,C_{1,1} + 0.488871\,C_{1,2}\,C_{1,1} + 0.000653378\,C_{1,2}\,C_{1,3}\,C_{1,1} + 0.0130837\,C_{1,3}\,C_{1,1} - 0.0625778\,C_{2,1}\,C_{1,1} - 0.00935557\,C_{2,2}\,C_{1,1} - 0.000250384\,C_{2,3}\,C_{1,1} + 2.5565\,C_{1,1} + 0.000608314\,C_{1,2}^3 + 1.1661\times10^{-8}\,C_{1,3}^3 - 0.0333748\,C_{3,1}^3 - 0.000111524\,C_{3,2}^3 - 2.13785\times10^{-9}\,C_{3,3}^3 + 0.0365438\,C_{1,2}^2 + 1.30714\times10^{-6}\,C_{1,2}\,C_{1,3}^2 + 0.000026175\,C_{1,3}^2 - 0.0853333\,C_{2,1}^2 - 0.0019073\,C_{2,2}^2 - 1.36613\times10^{-6}\,C_{2,3}^2 - 0.108032\,C_{3,1}^2 - 0.0022379\,C_{3,1}\,C_{3,2}^2 - 0.00241464\,C_{3,2}^2 - 1.60292\times10^{-6}\,C_{3,1}\,C_{3,3}^2 - 2.39642\times10^{-7}\,C_{3,2}\,C_{3,3}^2 - 1.72952\times10^{-6}\,C_{3,3}^2 + 0.382205\,C_{1,2} + 0.000048841\,C_{1,2}^2\,C_{1,3} + 0.00195605\,C_{1,2}\,C_{1,3} + 0.010229\,C_{1,3} - 0.00935557\,C_{1,2}\,C_{2,1} - 0.000250384\,C_{1,3}\,C_{2,1} - 0.321387\,C_{2,1} - 0.00139869\,C_{1,2}\,C_{2,2} - 0.0000374331\,C_{1,3}\,C_{2,2} - 0.0255152\,C_{2,1}\,C_{2,2} - 0.0480483\,C_{2,2} - 0.0000374331\,C_{1,2}\,C_{2,3} - 1.00183\times10^{-6}\,C_{1,3}\,C_{2,3} - 0.000682865\,C_{2,1}\,C_{2,3} - 0.00010209\,C_{2,2}\,C_{2,3} - 0.00128592\,C_{2,3} - 0.774503\,C_{3,1} - 0.0149689\,C_{3,1}^2\,C_{3,2} - 0.0323022\,C_{3,1}\,C_{3,2} - 0.115791\,C_{3,2} - 0.000400614\,C_{3,1}^2\,C_{3,3} - 8.95419\times10^{-6}\,C_{3,2}^2\,C_{3,3} - 0.000864507\,C_{3,1}\,C_{3,3} - 0.000119786\,C_{3,1}\,C_{3,2}\,C_{3,3} - 0.000129246\,C_{3,2}\,C_{3,3} - 0.00309891\,C_{3,3} - 0.910498,$$
$$0.694444\,C_{1,1}^3 + 2.52591\,C_{1,2}\,C_{1,1}^2 + 0.465847\,C_{1,3}\,C_{1,1}^2 + 3.99167\,C_{1,1}^2 + 3.0625\,C_{1,2}^2\,C_{1,1} + 0.104167\,C_{1,3}^2\,C_{1,1} + 9.67928\,C_{1,2}\,C_{1,1} + 1.12962\,C_{1,2}\,C_{1,3}\,C_{1,1} + 1.78513\,C_{1,3}\,C_{1,1} - 0.152778\,C_{2,1}\,C_{1,1} - 0.185233\,C_{2,2}\,C_{1,1} - 0.0341621\,C_{2,3}\,C_{1,1} + 3.99453\,C_{1,1} + 1.23769\,C_{1,2}^3 + 0.00776412\,C_{1,3}^3 - 0.127315\,C_{3,1}^3 - 0.226911\,C_{3,2}^3 - 0.00142342\,C_{3,3}^3 + 5.86775\,C_{1,2}^2 + 0.126295\,C_{1,2}\,C_{1,3}^2 + 0.199583\,C_{1,3}^2 - 0.208333\,C_{2,1}^2 - 0.30625\,C_{2,2}^2 - 0.0104167\,C_{2,3}^2 - 0.26375\,C_{3,1}^2 - 0.561458\,C_{3,1}\,C_{3,2}^2 - 0.387712\,C_{3,2}^2 - 0.0190972\,C_{3,1}\,C_{3,3}^2 - 0.0231542\,C_{3,2}\,C_{3,3}^2 - 0.0131875\,C_{3,3}^2 + 4.84311\,C_{1,2} + 0.684796\,C_{1,2}^2\,C_{1,3} + 2.16435\,C_{1,2}\,C_{1,3} + 0.893205\,C_{1,3} - 0.185233\,C_{1,2}\,C_{2,1} - 0.0341621\,C_{1,3}\,C_{2,1} - 0.502167\,C_{2,1} - 0.224583\,C_{1,2}\,C_{2,2} - 0.0414194\,C_{1,3}\,C_{2,2} - 0.505181\,C_{2,1}\,C_{2,2} - 0.608845\,C_{2,2} - 0.0414194\,C_{1,2}\,C_{2,3} - 0.00763889\,C_{1,3}\,C_{2,3} - 0.0931695\,C_{2,1}\,C_{2,3} - 0.112962\,C_{2,2}\,C_{2,3} - 0.112288\,C_{2,3} - 1.21016\,C_{3,1} - 0.463083\,C_{3,1}^2\,C_{3,2} - 0.63956\,C_{3,1}\,C_{3,2} - 1.46724\,C_{3,2} - 0.0854054\,C_{3,1}^2\,C_{3,3} - 0.125546\,C_{3,2}^2\,C_{3,3} - 0.117953\,C_{3,1}\,C_{3,3} - 0.207097\,C_{3,1}\,C_{3,2}\,C_{3,3} - 0.14301\,C_{3,2}\,C_{3,3} - 0.2706\,C_{3,3} - 0.910498,$$
$$0.182044\,C_{1,1}^3 + 1.45549\,C_{1,2}\,C_{1,1}^2 + 1.06636\,C_{1,3}\,C_{1,1}^2 + 1.63499\,C_{1,1}^2 + 3.87899\,C_{1,2}^2\,C_{1,1} + 2.08212\,C_{1,3}^2\,C_{1,1} + 8.71474\,C_{1,2}\,C_{1,1} + 5.68385\,C_{1,2}\,C_{1,3}\,C_{1,1} + 6.38481\,C_{1,3}\,C_{1,1} - 0.0625778\,C_{2,1}\,C_{1,1} - 0.166775\,C_{2,2}\,C_{1,1} - 0.122187\,C_{2,3}\,C_{1,1} + 2.5565\,C_{1,1} + 3.44594\,C_{1,2}^3 + 1.35516\,C_{1,3}^3 - 0.0333748\,C_{3,1}^3 - 0.631756\,C_{3,2}^3 - 0.248445\,C_{3,3}^3 + 11.6127\,C_{1,2}^2 + 5.54903\,C_{1,2}\,C_{1,3}^2 + 6.23336\,C_{1,3}^2 - 0.0853333\,C_{2,1}^2 - 0.606093\,C_{2,2}^2 - 0.325332\,C_{2,3}^2 - 0.108032\,C_{3,1}^2 - 0.711149\,C_{3,1}\,C_{3,2}^2 - 0.767313\,C_{3,2}^2 - 0.381723\,C_{3,1}\,C_{3,3}^2 - 1.01732\,C_{3,2}\,C_{3,3}^2 - 0.41187\,C_{3,3}^2 + 6.81328\,C_{1,2} + 7.57396\,C_{1,2}^2\,C_{1,3} + 17.016\,C_{1,2}\,C_{1,3} + 4.99172\,C_{1,3} - 0.166775\,C_{1,2}\,C_{2,1} - 0.122187\,C_{1,3}\,C_{2,1} - 0.321387\,C_{2,1} - 0.444468\,C_{1,2}\,C_{2,2} - 0.325637\,C_{1,3}\,C_{2,2} - 0.45484\,C_{2,1}\,C_{2,2} - 0.856521\,C_{2,2} - 0.325637\,C_{1,2}\,C_{2,3} - 0.238577\,C_{1,3}\,C_{2,3} - 0.333237\,C_{2,1}\,C_{2,3} - 0.888102\,C_{2,2}\,C_{2,3} - 0.627526\,C_{2,3} - 0.774503\,C_{3,1} - 0.26684\,C_{3,1}^2\,C_{3,2} - 0.575828\,C_{3,1}\,C_{3,2} - 2.06411\,C_{3,2} - 0.195499\,C_{3,1}^2\,C_{3,3} - 1.38856\,C_{3,2}^2\,C_{3,3} - 0.421878\,C_{3,1}\,C_{3,3} - 1.04204\,C_{3,1}\,C_{3,2}\,C_{3,3} - 1.12434\,C_{3,2}\,C_{3,3} - 1.51226\,C_{3,3} - 0.910498\}$$

• $i = 3$

$$\begin{pmatrix} 1.7746\,C_{3,1} + 0.67082\,C_{3,2} + 0.0284018\,C_{3,3} \\ -0.5\,C_{3,1} + 1.29904\,C_{3,2} + 0.559017\,C_{3,3} \\ 0.225403\,C_{3,1} - 0.67082\,C_{3,2} + 1.76045\,C_{3,3} \end{pmatrix} =$$

$$\{0.0758519\,C_{2,1}^3 + 0.0340202\,C_{2,2}\,C_{2,1}^2 + 0.000910486\,C_{2,3}\,C_{2,1}^2 + 0.174933\,C_{2,1}^2 + 0.00508613\,C_{2,2}^2\,C_{2,1} + 3.643\times10^{-6}\,C_{2,3}^2\,C_{2,1} + 0.0523061\,C_{2,2}\,C_{2,1} + 0.000272241\,C_{2,2}\,C_{2,3}\,C_{2,1} + 0.00139987\,C_{2,3}\,C_{2,1} + 0.0426667\,C_{3,1}\,C_{2,1} + 0.0063788\,C_{3,2}\,C_{2,1} + 0.000170716\,C_{3,3}\,C_{2,1} - 0.27112\,C_{2,1} + 0.000253464\,C_{2,2}^3 + 4.85875\times10^{-9}\,C_{2,3}^3 + 0.00390996\,C_{2,2}^2 + 5.4464\times10^{-7}\,C_{2,2}\,C_{2,3}^2 + 2.80056\times10^{-6}\,C_{2,3}^2 - 0.0405333\,C_{2,2} + 0.0000203504\,C_{2,2}^2\,C_{2,3} + 0.000209285\,C_{2,2}\,C_{2,3} - 0.00108479\,C_{2,3} + 0.0063788\,C_{2,2}\,C_{3,1} + 0.000170716\,C_{2,3}\,C_{3,1} + 0.3288\,C_{3,1} + 0.000953649\,C_{2,2}\,C_{3,2} + 0.0000255226\,C_{2,3}\,C_{3,2} + 0.0491566\,C_{3,2} + 0.0000255226\,C_{2,2}\,C_{3,3} + 6.83063\times10^{-7}\,C_{2,3}\,C_{3,3} + 0.00131558\,C_{3,3} - 0.164695,$$
$$0.289352\,C_{2,1}^3 + 1.05246\,C_{2,2}\,C_{2,1}^2 + 0.194103\,C_{2,3}\,C_{2,1}^2 + 0.427083\,C_{2,1}^2 + 1.27604\,C_{2,2}^2\,C_{2,1} + 0.0434028\,C_{2,3}^2\,C_{2,1} + 1.03562\,C_{2,2}\,C_{2,1} + 0.470675\,C_{2,2}\,C_{2,3}\,C_{2,1} + 0.190997\,C_{2,3}\,C_{2,1} + 0.104167\,C_{3,1}\,C_{2,1} + 0.126295\,C_{3,2}\,C_{2,1} + 0.0232924\,C_{3,3}\,C_{2,1} - 0.423625\,C_{2,1} + 0.515706\,C_{2,2}^3 + 0.00323505\,C_{2,3}^3 + 0.627812\,C_{2,2}^2 + 0.0526231\,C_{2,2}\,C_{2,3}^2 + 0.0213542\,C_{2,3}^2 - 0.513618\,C_{2,2} + 0.285332\,C_{2,2}^2\,C_{2,3} + 0.231572\,C_{2,2}\,C_{2,3} - 0.0947254\,C_{2,3} + 0.126295\,C_{2,2}\,C_{3,1} + 0.0232924\,C_{2,3}\,C_{3,1} + 0.51375\,C_{3,1} + 0.153125\,C_{2,2}\,C_{3,2} + 0.0282405\,C_{2,3}\,C_{3,2} + 0.622889\,C_{3,2} + 0.0282405\,C_{2,2}\,C_{3,3} + 0.00520833\,C_{2,3}\,C_{3,3} + 0.114878\,C_{3,3} - 0.164694,$$
$$0.0758519\,C_{2,1}^3 + 0.606454\,C_{2,2}\,C_{2,1}^2 + 0.444315\,C_{2,3}\,C_{2,1}^2 + 0.174933\,C_{2,1}^2 + 1.61625\,C_{2,2}^2\,C_{2,1} + 0.867552\,C_{2,3}^2\,C_{2,1} + 0.932422\,C_{2,2}\,C_{2,1} + 2.36827\,C_{2,2}\,C_{2,3}\,C_{2,1} + 0.683135\,C_{2,3}\,C_{2,1} + 0.0426667\,C_{3,1}\,C_{2,1} + 0.11371\,C_{3,2}\,C_{2,1} + 0.0833092\,C_{3,3}\,C_{2,1} - 0.27112\,C_{2,1} + 1.43581\,C_{2,2}^3 + 0.564649\,C_{2,3}^3 + 1.24249\,C_{2,2}^2 + 2.31209\,C_{2,2}\,C_{2,3}^2 + 0.666931\,C_{2,3}^2 - 0.722556\,C_{2,2} + 3.15582\,C_{2,2}^2\,C_{2,3} + 1.82061\,C_{2,2}\,C_{2,3} - 0.529378\,C_{2,3} + 0.11371\,C_{2,2}\,C_{3,1} + 0.0833092\,C_{2,3}\,C_{3,1} + 0.3288\,C_{3,1} + 0.303046\,C_{2,2}\,C_{3,2} + 0.222026\,C_{2,3}\,C_{3,2} + 0.876278\,C_{3,2} + 0.222026\,C_{2,2}\,C_{3,3} + 0.162666\,C_{2,3}\,C_{3,3} + 0.642001\,C_{3,3} - 0.164695\}$$

• Método *Affine Covariant Newton*:

$$C_{i\,j} = \begin{pmatrix} C_{1,1} \to 0.17678 \\ C_{1,2} \to -0.0226025 \\ C_{1,3} \to -0.0750011 \\ C_{2,1} \to -0.186734 \\ C_{2,2} \to 0.0253648 \\ C_{2,3} \to -0.262611 \\ C_{3,1} \to -0.0357501 \\ C_{3,2} \to -0.0892805 \\ C_{3,3} \to -0.065841 \end{pmatrix}$$

$$(\mathrm{EC}_1 - \mathrm{EC}_2)/.\{C_{i\,j}\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

• Método de *Newton*:

$$C_{i\,j} = \begin{pmatrix} C_{1,1} \to 0.17678 \\ C_{1,2} \to -0.0226025 \\ C_{1,3} \to -0.0750011 \\ C_{2,1} \to -0.186734 \\ C_{2,2} \to 0.0253648 \\ C_{2,3} \to -0.262611 \\ C_{3,1} \to -0.0357501 \\ C_{3,2} \to -0.0892805 \\ C_{3,3} \to -0.065841 \end{pmatrix}$$

$$(\mathrm{EC}_1 - \mathrm{EC}_2)/.\{C_{i\,j}\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(6a.ii) La solución aproximada del problema es

$y_i(x) \simeq C_i^T.P^{(\alpha_i)}.\Psi(x) + E_i^T.\Psi(x)$

$$y_1(x) = \begin{cases} 0. & x \geq 2 \vee x < 0 \\ -0.12053\,x^2 + 0.171173\,x + 0.589861 & \text{True} \end{cases}$$

$$y_2(x) = \begin{cases} 0. & x \geq 2 \vee x < 0 \\ -0.0644201\,x^2 - 0.0253579\,x + 1.22086 & \text{True} \end{cases}$$

$$y_3(x) = \begin{cases} 0. & x \geq 2 \vee x < 0 \\ 0.0197284\,x^2 - 0.160944\,x + 1.03895 & \text{True} \end{cases}$$

(6b) Se calcula la función residuo $R_i(x)$

$R_i(x) = \mathrm{EC}_{1\,i}(x) - \mathrm{EC}_{2\,i}(x)$

$$
\begin{aligned}
&R_1(x) = \mathrm{EC}_{1,1}(x) - \mathrm{EC}_{2,1}(x) = \\
&1.08\left(\begin{cases} 0. & x \geq 2 \vee x < 0 \\ 0.559017\,C_{2,3}\,x^2 + 2.67078\times 10^{-16}\,x^2 - 0.447214\,C_{2,3}\,x + \left(-0.5\,x^2 + 1.\,x + 0.333333\right)C_{2,1} + \left(-0.433013\,x^2 + 1.73205\,x - 0.288675\right)C_{2,2} + 0.0745356\,C_{2,3} + 1.31 & \text{True} \end{cases}\right)^3 - \\
&1.09\left(\begin{cases} 0. & x \geq 2 \vee x < 0 \\ 0.559017\,C_{2,3}\,x^2 + 2.67078\times 10^{-16}\,x^2 - 0.447214\,C_{2,3}\,x + \left(-0.5\,x^2 + 1.\,x + 0.333333\right)C_{2,1} + \left(-0.433013\,x^2 + 1.73205\,x - 0.288675\right)C_{2,2} + 0.0745356\,C_{2,3} + 1.31 & \text{True} \end{cases}\right)^2 - \\
&2.01\left(\begin{cases} 0. & x \geq 2 \vee x < 0 \\ 0.559017\,C_{3,3}\,x^2 - 0.447214\,C_{3,3}\,x + 2.67078\times 10^{-16}\,x + \left(-0.5\,x^2 + 1.\,x + 0.333333\right)C_{3,1} + \left(-0.433013\,x^2 + 1.73205\,x - 0.288675\right)C_{3,2} + 0.0745356\,C_{3,3} + 1.03 & \text{True} \end{cases}\right)^3 + \\
&0.06\left(\begin{cases} 0. & x \geq 2 \vee x < 0 \\ 0.559017\,C_{3,3}\,x^2 - 0.447214\,C_{3,3}\,x + 2.67078\times 10^{-16}\,x + \left(-0.5\,x^2 + 1.\,x + 0.333333\right)C_{3,1} + \left(-0.433013\,x^2 + 1.73205\,x - 0.288675\right)C_{3,2} + 0.0745356\,C_{3,3} + 1.03 & \text{True} \end{cases}\right)^2 - \\
&\left(\begin{cases} 0. & x \geq 2 \vee x < 0 \\ 0.559017\,C_{1,3}\,x^2 - 0.447214\,C_{1,3}\,x - 1.33539\times 10^{-16}\,x + \left(-0.5\,x^2 + 1.\,x + 0.333333\right)C_{1,1} + \left(-0.433013\,x^2 + 1.73205\,x - 0.288675\right)C_{1,2} + 0.0745356\,C_{1,3} + 0.53 & \text{True} \end{cases}\right) \\
&\left(0.1\left(\begin{cases} 0. & x \geq 2 \vee x < 0 \\ 0.559017\,C_{2,3}\,x^2 + 2.67078\times 10^{-16}\,x^2 - 0.447214\,C_{2,3}\,x + \left(-0.5\,x^2 + 1.\,x + 0.333333\right)C_{2,1} + \left(-0.433013\,x^2 + 1.73205\,x - 0.288675\right)C_{2,2} + 0.0745356\,C_{2,3} + 1.31 & \text{True} \end{cases}\right) - 2.04\right) - \\
&0.03\left(\begin{cases} 0. & x \geq 2 \vee x < 0 \\ 0.559017\,C_{3,3}\,x^2 - 0.447214\,C_{3,3}\,x + 2.67078\times 10^{-16}\,x + \left(-0.5\,x^2 + 1.\,x + 0.333333\right)C_{3,1} + \left(-0.433013\,x^2 + 1.73205\,x - 0.288675\right)C_{3,2} + 0.0745356\,C_{3,3} + 1.03 & \text{True} \end{cases}\right) + \\
&\left(\begin{cases} \frac{1}{4}\left(2\left(5\,x^2 - 12\,x + 6\right)C_{1,1} + x\left(\sqrt{3}\,(8 - 5\,x)\,C_{1,2} + \sqrt{5}\,x\,C_{1,3}\right)\right) & 0 \leq x < 2 \\ 0 & \text{True} \end{cases}\right) + 0.19
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&R_2(x) = \mathrm{EC}_{1,2}(x) - \mathrm{EC}_{2,2}(x) = \\
&-1.2\left(\begin{cases} 0. & x \geq 2 \vee x < 0 \\ 0.559017\,C_{1,3}\,x^2 - 0.447214\,C_{1,3}\,x - 1.33539\times 10^{-16}\,x + \left(-0.5\,x^2 + 1.\,x + 0.333333\right)C_{1,1} + \left(-0.433013\,x^2 + 1.73205\,x - 0.288675\right)C_{1,2} + 0.0745356\,C_{1,3} + 0.53 & \text{True} \end{cases}\right)^3 - \\
&3.84\left(\begin{cases} 0. & x \geq 2 \vee x < 0 \\ 0.559017\,C_{1,3}\,x^2 - 0.447214\,C_{1,3}\,x - 1.33539\times 10^{-16}\,x + \left(-0.5\,x^2 + 1.\,x + 0.333333\right)C_{1,1} + \left(-0.433013\,x^2 + 1.73205\,x - 0.288675\right)C_{1,2} + 0.0745356\,C_{1,3} + 0.53 & \text{True} \end{cases}\right)^2 + \\
&0.22\left(\begin{cases} 0. & x \geq 2 \vee x < 0 \\ 0.559017\,C_{2,3}\,x^2 + 2.67078\times 10^{-16}\,x^2 - 0.447214\,C_{2,3}\,x + \left(-0.5\,x^2 + 1.\,x + 0.333333\right)C_{2,1} + \left(-0.433013\,x^2 + 1.73205\,x - 0.288675\right)C_{2,2} + 0.0745356\,C_{2,3} + 1.31 & \text{True} \end{cases}\right) \\
&\left(\begin{cases} 0. & x \geq 2 \vee x < 0 \\ 0.559017\,C_{1,3}\,x^2 - 0.447214\,C_{1,3}\,x - 1.33539\times 10^{-16}\,x + \left(-0.5\,x^2 + 1.\,x + 0.333333\right)C_{1,1} + \left(-0.433013\,x^2 + 1.73205\,x - 0.288675\right)C_{1,2} + 0.0745356\,C_{1,3} + 0.53 & \text{True} \end{cases}\right) + \\
&0.22\left(\begin{cases} 0. & x \geq 2 \vee x < 0 \\ 0.559017\,C_{3,3}\,x^2 - 0.447214\,C_{3,3}\,x + 2.67078\times 10^{-16}\,x + \left(-0.5\,x^2 + 1.\,x + 0.333333\right)C_{3,1} + \left(-0.433013\,x^2 + 1.73205\,x - 0.288675\right)C_{3,2} + 0.0745356\,C_{3,3} + 1.03 & \text{True} \end{cases}\right)^3 - \\
&0.3\left(\begin{cases} 0. & x \geq 2 \vee x < 0 \\ 0.559017\,C_{3,3}\,x^2 - 0.447214\,C_{3,3}\,x + 2.67078\times 10^{-16}\,x + \left(-0.5\,x^2 + 1.\,x + 0.333333\right)C_{3,1} + \left(-0.433013\,x^2 + 1.73205\,x - 0.288675\right)C_{3,2} + 0.0745356\,C_{3,3} + 1.03 & \text{True} \end{cases}\right)^2 + \\
&0.3\left(\left(\begin{cases} 0. & x \geq 2 \vee x < 0 \\ 0.559017\,C_{2,3}\,x^2 + 2.67078\times 10^{-16}\,x^2 - 0.447214\,C_{2,3}\,x + \left(-0.5\,x^2 + 1.\,x + 0.333333\right)C_{2,1} + \left(-0.433013\,x^2 + 1.73205\,x - 0.288675\right)C_{2,2} + 0.0745356\,C_{2,3} + 1.31 & \text{True} \end{cases}\right) - 1.\right) \\
&\left(\begin{cases} 0. & x \geq 2 \vee x < 0 \\ 0.559017\,C_{2,3}\,x^2 + 2.67078\times 10^{-16}\,x^2 - 0.447214\,C_{2,3}\,x + \left(-0.5\,x^2 + 1.\,x + 0.333333\right)C_{2,1} + \left(-0.433013\,x^2 + 1.73205\,x - 0.288675\right)C_{2,2} + 0.0745356\,C_{2,3} + 1.31 & \text{True} \end{cases}\right) + \\
&1.37\left(\begin{cases} 0. & x \geq 2 \vee x < 0 \\ 0.559017\,C_{3,3}\,x^2 - 0.447214\,C_{3,3}\,x + 2.67078\times 10^{-16}\,x + \left(-0.5\,x^2 + 1.\,x + 0.333333\right)C_{3,1} + \left(-0.433013\,x^2 + 1.73205\,x - 0.288675\right)C_{3,2} + 0.0745356\,C_{3,3} + 1.03 & \text{True} \end{cases}\right) + \\
&\left(\begin{cases} \frac{1}{4}\left(2\left(5\,x^2 - 12\,x + 6\right)C_{2,1} + x\left(\sqrt{3}\,(8 - 5\,x)\,C_{2,2} + \sqrt{5}\,x\,C_{2,3}\right)\right) & 0 \leq x < 2 \\ 0 & \text{True} \end{cases}\right) + 0.56
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&R_3(x) = \mathrm{EC}_{1,3}(x) - \mathrm{EC}_{2,3}(x) = \\
&-0.5\left(\begin{cases} 0. & x \geq 2 \vee x < 0 \\ 0.559017\,C_{2,3}\,x^2 + 2.67078\times 10^{-16}\,x^2 - 0.447214\,C_{2,3}\,x + \left(-0.5\,x^2 + 1.\,x + 0.333333\right)C_{2,1} + \left(-0.433013\,x^2 + 1.73205\,x - 0.288675\right)C_{2,2} + 0.0745356\,C_{2,3} + 1.31 & \text{True} \end{cases}\right)^3 + \\
&1.35\left(\begin{cases} 0. & x \geq 2 \vee x < 0 \\ 0.559017\,C_{2,3}\,x^2 + 2.67078\times 10^{-16}\,x^2 - 0.447214\,C_{2,3}\,x + \left(-0.5\,x^2 + 1.\,x + 0.333333\right)C_{2,1} + \left(-0.433013\,x^2 + 1.73205\,x - 0.288675\right)C_{2,2} + 0.0745356\,C_{2,3} + 1.31 & \text{True} \end{cases}\right)^2 - \\
&\left(0.15\left(\begin{cases} 0. & x \geq 2 \vee x < 0 \\ 0.559017\,C_{3,3}\,x^2 - 0.447214\,C_{3,3}\,x + 2.67078\times 10^{-16}\,x + \left(-0.5\,x^2 + 1.\,x + 0.333333\right)C_{3,1} + \left(-0.433013\,x^2 + 1.73205\,x - 0.288675\right)C_{3,2} + 0.0745356\,C_{3,3} + 1.03 & \text{True} \end{cases}\right) + 0.3\right) \\
&\left(\begin{cases} 0. & x \geq 2 \vee x < 0 \\ 0.559017\,C_{2,3}\,x^2 + 2.67078\times 10^{-16}\,x^2 - 0.447214\,C_{2,3}\,x + \left(-0.5\,x^2 + 1.\,x + 0.333333\right)C_{2,1} + \left(-0.433013\,x^2 + 1.73205\,x - 0.288675\right)C_{2,2} + 0.0745356\,C_{2,3} + 1.31 & \text{True} \end{cases}\right) - \\
&0.42\left(\begin{cases} 0. & x \geq 2 \vee x < 0 \\ 0.559017\,C_{3,3}\,x^2 - 0.447214\,C_{3,3}\,x + 2.67078\times 10^{-16}\,x + \left(-0.5\,x^2 + 1.\,x + 0.333333\right)C_{3,1} + \left(-0.433013\,x^2 + 1.73205\,x - 0.288675\right)C_{3,2} + 0.0745356\,C_{3,3} + 1.03 & \text{True} \end{cases}\right) + \\
&\left(\begin{cases} \frac{1}{4}\left(2\left(5\,x^2 - 12\,x + 6\right)C_{3,1} + x\left(\sqrt{3}\,(8 - 5\,x)\,C_{3,2} + \sqrt{5}\,x\,C_{3,3}\right)\right) & 0 \leq x < 2 \\ 0 & \text{True} \end{cases}\right)
\end{aligned}
$$

(6b.i) Se aplica el método Tau (Galerkin) para que el residuo $R_i(x)$ sea ortogonal a $\psi_{n\,m}(x)$

$$\int_0^T R_i(x)\,\psi_{n\,m}(x)\,dx = 0 \qquad \begin{cases} n = 0,\ 1,\ \cdots,\ 2^k - 1 \\ m = 0,\ 1,\ \cdots,\ M \end{cases}$$

obteniéndose un sistema algebraico de ecuaciones.

Sistema algebraico de ecuaciones en ${C_i}^T = (C_{i,1}\ C_{i,2}\ \cdots\ C_{i,m^*})$

$$\{-0.0209524\,C_{2,1}^3 - 0.319687\,C_{2,2}\,C_{2,1}^2 - 0.083054\,C_{2,3}\,C_{2,1}^2 + 0.0567458\,C_{2,1}^2 - 0.402\,C_{2,2}^2\,C_{2,1} + 0.0678286\,C_{2,3}^2\,C_{2,1} +$$
$$0.00151437\,C_{1,3}\,C_{2,1} - 0.670662\,C_{2,2}\,C_{2,1} - 0.0951647\,C_{2,2}\,C_{2,3}\,C_{2,1} - 0.0955388\,C_{2,3}\,C_{2,1} + 0.294596\,C_{2,1} - 0.0977372\,C_{3,2}^3 + 0.132933\,C_{2,3}^3 +$$
$$0.0389947\,C_{3,1}^3 + 0.1819\,C_{3,2}^3 - 0.247403\,C_{3,3}^3 - 0.272881\,C_{2,2}^2 + 0.379517\,C_{2,2}\,C_{2,3}^2 + 0.246177\,C_{2,3}^2 - 0.110651\,C_{3,1}^2 + 0.748167\,C_{3,1}\,C_{3,2}^2 +$$
$$0.532102\,C_{3,2}^2 - 0.126237\,C_{3,1}\,C_{3,3}^2 - 0.706323\,C_{3,2}\,C_{3,3}^2 - 0.480031\,C_{3,3}^2 + 0.0474295\,C_{1,3} - 0.00370905\,C_{1,3}\,C_{2,2} - 0.255128\,C_{2,2} +$$
$$C_{1,2}\,(0.0106306\,C_{2,1} + 0.00865079\,C_{2,2} - 0.00370905\,C_{2,3} - 0.183694) + C_{1,1}\,(-0.00179894\,C_{2,1} + 0.0106306\,C_{2,2} + 0.00151437\,C_{2,3} + 1.21211) +$$
$$0.241304\,C_{2,2}^2\,C_{2,3} - 0.00780423\,C_{1,3}\,C_{2,3} + 0.233996\,C_{2,2}\,C_{2,3} + 0.0658737\,C_{2,3} - 0.700403\,C_{3,1} + 0.594973\,C_{3,1}^2\,C_{3,2} + 1.30775\,C_{3,1}\,C_{3,2} +$$
$$0.606567\,C_{3,2} + 0.154573\,C_{3,1}^2\,C_{3,3} - 0.449093\,C_{3,2}^2\,C_{3,3} + 0.186295\,C_{3,1}\,C_{3,3} + 0.177112\,C_{3,1}\,C_{3,2}\,C_{3,3} - 0.45628\,C_{3,2}\,C_{3,3} - 0.156615\,C_{3,3} - 0.134823,$$
$$0.334863\,C_{2,1}^3 + 0.989143\,C_{2,2}\,C_{2,1}^2 + 0.0951647\,C_{2,3}\,C_{2,1}^2 + 1.22569\,C_{2,1}^2 + 0.900419\,C_{2,2}^2\,C_{2,1} - 0.232144\,C_{2,3}^2\,C_{2,1} - 0.000020492\,C_{1,3}\,C_{2,1} +$$
$$2.15801\,C_{2,2}\,C_{2,1} - 0.16138\,C_{2,2}\,C_{2,3}\,C_{2,1} + 0.0012928\,C_{2,3}\,C_{2,1} + 1.27564\,C_{2,1} + 0.0814286\,C_{2,2}^3 - 0.296722\,C_{2,3}^3 - 0.623218\,C_{3,1}^3 -$$
$$0.151548\,C_{3,2}^3 + 0.552233\,C_{3,3}^3 + 0.64609\,C_{2,2}^2 - 0.946457\,C_{2,2}\,C_{2,3}^2 - 0.622964\,C_{2,3}^2 - 2.39003\,C_{3,1}^2 - 1.67578\,C_{3,1}\,C_{3,2}^2 -$$
$$1.25984\,C_{3,2}^2 + 0.432046\,C_{3,1}\,C_{3,3}^2 + 1.76146\,C_{3,2}\,C_{3,3}^2 + 1.21474\,C_{3,3}^2 - 0.164301\,C_{1,3} + 0.0155105\,C_{1,3}\,C_{2,2} + 0.883788\,C_{2,2} +$$
$$C_{1,1}\,(-0.0388566\,C_{2,1} - 0.0342063\,C_{2,2} - 0.000020492\,C_{2,3} + 0.918468) + C_{1,2}\,(-0.0342063\,C_{2,1} - 0.0204822\,C_{2,2} + 0.0155105\,C_{2,3} + 1.63633) -$$
$$0.827933\,C_{2,2}^2\,C_{2,3} + 0.019749\,C_{1,3}\,C_{2,3} - 0.978527\,C_{2,2}\,C_{2,3} - 0.228193\,C_{2,3} - 3.03283\,C_{3,1} - 1.8409\,C_{3,1}^2\,C_{3,2} - 4.208\,C_{3,1}\,C_{3,2} - 2.10121\,C_{3,2} -$$
$$0.177112\,C_{3,1}^2\,C_{3,3} + 1.54088\,C_{3,2}^2\,C_{3,3} - 0.00252088\,C_{3,1}\,C_{3,3} + 0.300347\,C_{3,1}\,C_{3,2}\,C_{3,3} + 1.90807\,C_{3,2}\,C_{3,3} + 0.54253\,C_{3,3} - 0.23352,$$
$$0.240644\,C_{2,1}^3 + 1.23714\,C_{2,2}\,C_{2,1}^2 + 0.585714\,C_{2,3}\,C_{2,1}^2 + 1.00017\,C_{2,1}^2 + 2.42166\,C_{2,2}^2\,C_{2,1} + 0.88823\,C_{2,3}^2\,C_{2,1} - 0.0306614\,C_{1,3}\,C_{2,1} + 3.67801\,C_{2,2}\,C_{2,1} +$$
$$2.70447\,C_{2,2}\,C_{2,3}\,C_{2,1} + 1.93436\,C_{2,3}\,C_{2,1} + 1.2516\,C_{2,1} + 1.79817\,C_{3,2}^3 + 0.634876\,C_{2,3}^3 - 0.447864\,C_{3,1}^3 - 3.3466\,C_{3,2}^3 - 1.18158\,C_{3,3}^3 + 3.92418\,C_{2,2}^2 + 2.47893\,C_{2,2}\,C_{2,3}^2 +$$
$$1.71261\,C_{2,3}^2 - 1.95028\,C_{3,1}^2 - 4.50698\,C_{3,1}\,C_{3,2}^2 - 7.65193\,C_{3,2}^2 - 1.65309\,C_{3,1}\,C_{3,3}^2 - 4.61357\,C_{3,2}\,C_{3,3}^2 - 3.33949\,C_{3,3}^2 + 2.06056\,C_{1,3} - 0.0767509\,C_{1,3}\,C_{2,2} + 2.51012\,C_{2,2} +$$
$$C_{1,2}\,(-0.0582997\,C_{2,1} - 0.124403\,C_{2,2} - 0.0767509\,C_{2,3} + 1.80731) + C_{1,1}\,(-0.0317072\,C_{2,1} - 0.0582997\,C_{2,2} - 0.0306614\,C_{2,3} + 0.90116) + 3.45171\,C_{2,2}^2\,C_{2,3} -$$
$$0.0542927\,C_{1,3}\,C_{2,3} + 4.84206\,C_{2,2}\,C_{2,3} + 1.47298\,C_{2,3} - 2.97568\,C_{3,1} - 2.30246\,C_{3,1}^2\,C_{3,2} - 7.17191\,C_{3,1}\,C_{3,2} - 5.96783\,C_{3,2} - 1.09008\,C_{3,1}^2\,C_{3,3} - 6.42402\,C_{3,2}^2\,C_{3,3} -$$
$$3.7719\,C_{3,1}\,C_{3,3} - 5.03333\,C_{3,1}\,C_{3,2}\,C_{3,3} - 9.44175\,C_{3,2}\,C_{3,3} - 3.50202\,C_{3,3} - 0.301473,\ 0.0232804\,C_{1,1}^3 + (0.355208\,C_{1,2} + 0.0922822\,C_{1,3} - 0.103403)\,C_{1,1}^2 +$$
$$\left(0.446667\,C_{1,2}^2 + (0.105739\,C_{1,3} + 1.22209)\,C_{1,2} - 0.0753651\,C_{1,3}^2 + 0.174092\,C_{1,3} + 0.00395767\,C_{2,1} - 0.0233873\,C_{2,2} - 0.00333162\,C_{2,3} - 0.532604\right)C_{1,1} +$$
$$0.108597\,C_{1,2}^3 - 0.147704\,C_{1,3}^3 - 0.00426808\,C_{3,1}^3 - 0.0199094\,C_{3,2}^3 + 0.027079\,C_{3,3}^3 - 0.448587\,C_{1,3}^2 + 0.00539683\,C_{2,1}^2 - 0.0259524\,C_{2,2}^2 +$$
$$0.0234127\,C_{2,3}^2 + 0.00683238\,C_{3,1}^2 - 0.0818889\,C_{3,1}\,C_{3,2}^2 - 0.0328557\,C_{3,2}^2 + 0.0138169\,C_{3,1}\,C_{3,3}^2 + 0.077309\,C_{3,2}\,C_{3,3}^2 + 0.0296405\,C_{3,3}^2 +$$
$$C_{1,2}^2\,(0.497248 - 0.268115\,C_{1,3}) - 0.119094\,C_{1,3} - 0.00333162\,C_{1,3}\,C_{2,1} + 1.06696\,C_{2,1} + 0.0081599\,C_{1,3}\,C_{2,2} - 0.0637835\,C_{2,1}\,C_{2,2} - 0.0579852\,C_{2,2} +$$
$$C_{1,2}\left(-0.421686\,C_{1,3}^2 - 0.426392\,C_{1,3} - 0.0233873\,C_{2,1} - 0.0190317\,C_{2,2} + 0.0081599\,C_{2,3} + 0.461249\right) + 0.0171693\,C_{1,3}\,C_{2,3} - 0.00908624\,C_{2,1}\,C_{2,3} +$$
$$0.0222543\,C_{2,2}\,C_{2,3} + 0.0149717\,C_{2,3} + 0.161355\,C_{3,1} - 0.0651214\,C_{3,1}^2\,C_{3,2} - 0.0807499\,C_{3,1}\,C_{3,2} - 0.139737\,C_{3,2} - 0.0169184\,C_{3,1}^2\,C_{3,3} + 0.0491545\,C_{3,2}^2\,C_{3,3} -$$
$$0.0115032\,C_{3,1}\,C_{3,3} - 0.0193854\,C_{3,1}\,C_{3,2}\,C_{3,3} + 0.0281739\,C_{3,2}\,C_{3,3} + 0.0360801\,C_{3,3} + 0.303499,\ -0.37207\,C_{1,1}^3 + (-1.09905\,C_{1,2} - 0.105739\,C_{1,3} - 2.23348)\,C_{1,1}^2 +$$
$$\left(-1.00047\,C_{1,2}^2 + (0.179311\,C_{1,3} - 3.93236)\,C_{1,2} + 0.257938\,C_{1,3}^2 - 0.00235576\,C_{1,3} + 0.0854845\,C_{2,1} + 0.075254\,C_{2,2} + 0.0000450823\,C_{2,3} - 2.30624\right)C_{1,1} -$$
$$0.0904762\,C_{1,2}^3 + 0.329691\,C_{1,3}^3 + 0.0682129\,C_{3,1}^3 + 0.0165873\,C_{3,2}^3 - 0.0604434\,C_{3,3}^3 + 1.13518\,C_{1,3}^2 + 0.11657\,C_{2,1}^2 + 0.0614466\,C_{2,2}^2 -$$
$$0.0592471\,C_{2,3}^2 + 0.147577\,C_{3,1}^2 + 0.183419\,C_{3,1}\,C_{3,2}^2 + 0.0777914\,C_{3,2}^2 - 0.0472887\,C_{3,1}\,C_{3,3}^2 - 0.192797\,C_{3,2}\,C_{3,3}^2 - 0.0750069\,C_{3,3}^2 +$$
$$C_{1,2}^2\,(0.919926\,C_{1,3} - 1.17732) + 0.412554\,C_{1,3} + 0.0000450823\,C_{1,3}\,C_{2,1} + 0.289926\,C_{2,1} - 0.0341231\,C_{1,3}\,C_{2,2} + 0.205238\,C_{2,1}\,C_{2,2} + 1.20087\,C_{2,2} +$$
$$C_{1,2}\left(1.05162\,C_{1,3}^2 + 1.78309\,C_{1,3} + 0.075254\,C_{2,1} + 0.0450608\,C_{2,2} - 0.0341231\,C_{2,3} - 1.59781\right) - 0.0434479\,C_{1,3}\,C_{2,3} + 0.000122952\,C_{2,1}\,C_{2,3} -$$
$$0.093063\,C_{2,2}\,C_{2,3} - 0.0518636\,C_{2,3} + 0.698687\,C_{3,1} + 0.201492\,C_{3,1}^2\,C_{3,2} + 0.259831\,C_{3,1}\,C_{3,2} + 0.484065\,C_{3,2} + 0.0193854\,C_{3,1}^2\,C_{3,3} - 0.168653\,C_{3,2}^2\,C_{3,3} +$$
$$0.000155657\,C_{3,1}\,C_{3,3} - 0.0328737\,C_{3,1}\,C_{3,2}\,C_{3,3} - 0.117818\,C_{3,2}\,C_{3,3} - 0.124985\,C_{3,3} + 0.525676,\ -0.267382\,C_{1,1}^3 + (-1.3746\,C_{1,2} - 0.650794\,C_{1,3} - 1.82253)\,C_{1,1}^2 +$$
$$\left(-2.69074\,C_{1,2}^2 + (-3.00497\,C_{1,3} - 6.70213)\,C_{1,2} - 0.986922\,C_{1,3}^2 - 3.52483\,C_{1,3} + 0.0697559\,C_{2,1} + 0.128259\,C_{2,2} + 0.067455\,C_{2,3} - 2.26279\right)C_{1,1} -$$
$$1.99797\,C_{1,2}^3 - 0.705418\,C_{1,3}^3 + 0.04902\,C_{3,1}^3 + 0.366294\,C_{3,2}^3 + 0.129327\,C_{3,3}^3 - 3.12074\,C_{1,3}^2 + 0.0951216\,C_{2,1}^2 + 0.37321\,C_{2,2}^2 +$$
$$0.162878\,C_{2,3}^2 + 0.120424\,C_{3,1}^2 + 0.493301\,C_{3,1}\,C_{3,2}^2 + 0.472484\,C_{3,2}^2 + 0.180936\,C_{3,1}\,C_{3,3}^2 + 0.504967\,C_{3,2}\,C_{3,3}^2 + 0.206204\,C_{3,3}^2 +$$
$$C_{1,2}^2\,(-3.83524\,C_{1,3} - 7.15071) - 2.66302\,C_{1,3} + 0.067455\,C_{1,3}\,C_{2,1} + 0.284463\,C_{2,1} + 0.168852\,C_{1,3}\,C_{2,2} + 0.349798\,C_{2,1}\,C_{2,2} + 0.570499\,C_{2,2} +$$
$$C_{1,2}\left(-2.75437\,C_{1,3}^2 - 8.82329\,C_{1,3} + 0.128259\,C_{2,1} + 0.273688\,C_{2,2} + 0.168852\,C_{2,3} - 4.53809\right) + 0.119444\,C_{1,3}\,C_{2,3} + 0.183968\,C_{2,1}\,C_{2,3} + 0.460506\,C_{2,2}\,C_{2,3} +$$
$$1.33478\,C_{2,3} + 0.685521\,C_{3,1} + 0.25201\,C_{3,1}^2\,C_{3,2} + 0.442844\,C_{3,1}\,C_{3,2} + 1.37483\,C_{3,2} + 0.119312\,C_{3,1}^2\,C_{3,3} + 0.703127\,C_{3,2}^2\,C_{3,3} + 0.232904\,C_{3,1}\,C_{3,3} +$$
$$0.550911\,C_{3,1}\,C_{3,2}\,C_{3,3} + 0.583\,C_{3,2}\,C_{3,3} + 0.806774\,C_{3,3} + 0.678645,\ 0.00970018\,C_{2,1}^3 + (0.148003\,C_{2,2} + 0.0384509\,C_{2,3} - 0.0110635)\,C_{2,1}^2 +$$
$$\left(0.186111\,C_{2,2}^2 + (0.0440577\,C_{2,3} + 0.130756)\,C_{2,2} - 0.0314021\,C_{2,3}^2 + 0.0186268\,C_{2,3} - 0.00269841\,C_{3,1} + 0.0159459\,C_{3,2} + 0.00227156\,C_{3,3} + 0.0564833\right)C_{2,1} +$$
$$0.0452487\,C_{2,2}^3 - 0.0615431\,C_{2,3}^3 - 0.047996\,C_{2,3}^2 + C_{2,2}^2\,(0.0532024 - 0.111715\,C_{2,3}) + 0.0126301\,C_{2,3} + 0.00227156\,C_{2,3}\,C_{3,1} + 0.9315\,C_{3,1} -$$
$$0.00556357\,C_{2,3}\,C_{3,2} + 0.0593227\,C_{3,2} + C_{2,2}\left(-0.175702\,C_{2,3}^2 - 0.0456213\,C_{2,3} + 0.0159459\,C_{3,1} + 0.0129762\,C_{3,2} - 0.00556357\,C_{3,3} - 0.048916\right) -$$
$$0.0117063\,C_{2,3}\,C_{3,3} - 0.0153171\,C_{3,3} + 0.0548982,\ -0.155029\,C_{2,1}^3 + (-0.457937\,C_{2,2} - 0.0440577\,C_{2,3} - 0.238968)\,C_{2,1}^2 +$$
$$\left(-0.416861\,C_{2,2}^2 + (0.0747131\,C_{2,3} - 0.420738)\,C_{2,2} + 0.107474\,C_{2,3}^2 - 0.000252051\,C_{2,3} - 0.0582849\,C_{3,1} - 0.0513095\,C_{3,2} - 0.000030738\,C_{3,3} + 0.24458\right)C_{2,1} -$$
$$0.0376984\,C_{2,2}^3 + 0.137371\,C_{2,3}^3 + 0.121457\,C_{2,3}^2 + C_{2,2}^2\,(0.383302\,C_{2,3} - 0.125965) - 0.0437518\,C_{2,3} - 0.000030738\,C_{2,3}\,C_{3,1} - 0.296614\,C_{3,1} +$$
$$0.0232658\,C_{2,3}\,C_{3,2} + 0.7945\,C_{3,2} + C_{2,2}\left(0.438175\,C_{2,3}^2 + 0.190779\,C_{2,3} - 0.0513095\,C_{3,1} - 0.0307233\,C_{3,2} + 0.0232658\,C_{3,3} + 0.16945\right) +$$
$$0.0296236\,C_{2,3}\,C_{3,3} + 0.0530599\,C_{3,3} + 0.0950864,\ -0.111409\,C_{2,1}^3 + (-0.572751\,C_{2,2} - 0.271164\,C_{2,3} - 0.194999)\,C_{2,1}^2 +$$
$$\left(-1.12114\,C_{2,2}^2 + (-1.25207\,C_{2,3} - 0.717086)\,C_{2,2} - 0.411218\,C_{2,3}^2 - 0.377135\,C_{2,3} - 0.0475608\,C_{3,1} - 0.0874495\,C_{3,2} - 0.0459921\,C_{3,3} + 0.239971\right)C_{2,1} -$$
$$0.832486\,C_{2,2}^3 - 0.293924\,C_{2,3}^3 - 0.3339\,C_{2,3}^2 + C_{2,2}^2\,(-1.59802\,C_{2,3} - 0.765081) + 0.282417\,C_{2,3} - 0.0459921\,C_{2,3}\,C_{3,1} - 0.291024\,C_{3,1} - 0.115126\,C_{2,3}\,C_{3,2} -$$
$$0.583659\,C_{3,2} + C_{2,2}\left(-1.14765\,C_{2,3}^2 - 0.944036\,C_{2,3} - 0.0874495\,C_{3,1} - 0.186605\,C_{3,2} - 0.115126\,C_{3,3} + 0.48127\right) - 0.081439\,C_{2,3}\,C_{3,3} + 0.6575\,C_{3,3} + 0.122756\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(6b.ii) Resolución del sistema de ecuaciones
• Método *Affine Covariant Newton*:

$$C_i = \begin{pmatrix} C_{1,1} \to 0.174986 \\ C_{1,2} \to -0.0208745 \\ C_{1,3} \to -0.0742671 \\ C_{2,1} \to -0.18455 \\ C_{2,2} \to 0.0205945 \\ C_{2,3} \to -0.256654 \\ C_{3,1} \to -0.0364559 \\ C_{3,2} \to -0.0885112 \\ C_{3,3} \to -0.0654241 \end{pmatrix}$$

• Método de *Newton*:

$$C_i = \begin{pmatrix} C_{1,1} \to 0.174986 \\ C_{1,2} \to -0.0208745 \\ C_{1,3} \to -0.0742671 \\ C_{2,1} \to -0.18455 \\ C_{2,2} \to 0.0205945 \\ C_{2,3} \to -0.256654 \\ C_{3,1} \to -0.0364559 \\ C_{3,2} \to -0.0885112 \\ C_{3,3} \to -0.0654241 \end{pmatrix}$$

(6b.iii) La solución aproximada del problema es
$y_i(x) \simeq C_i^T . P^{(\alpha_i)} . \Psi(x) + E_i^T . \Psi(x)$

$$y_1(x) = \begin{cases} 0. & x \geq 2 \vee x < 0 \\ -0.119971\, x^2 + 0.172044\, x + 0.588819 & \text{True} \end{cases}$$

$$y_2(x) = \begin{cases} 0. & x \geq 2 \vee x < 0 \\ -0.0601163\, x^2 - 0.0341007\, x + 1.22341 & \text{True} \end{cases}$$

$$y_3(x) = \begin{cases} 0. & x \geq 2 \vee x < 0 \\ 0.0199812\, x^2 - 0.160503\, x + 1.03852 & \text{True} \end{cases}$$

(7) Soluciones aproximadas obtenidas:

Método de Colocación con los ceros de los polinomios desplazados de *Legendre*:

$$y_1(x) = \begin{cases} 0. & x \geq 2 \vee x < 0 \\ -0.12053\, x^2 + 0.171173\, x + 0.589861 & \text{True} \end{cases}$$

$$y_2(x) = \begin{cases} 0. & x \geq 2 \vee x < 0 \\ -0.0644201\, x^2 - 0.0253579\, x + 1.22086 & \text{True} \end{cases}$$

$$y_3(x) = \begin{cases} 0. & x \geq 2 \vee x < 0 \\ 0.0197284\, x^2 - 0.160944\, x + 1.03895 & \text{True} \end{cases}$$

Método de los Residuos:

$$y_1(x) = \begin{cases} 0. & x \geq 2 \vee x < 0 \\ -0.119971\, x^2 + 0.172044\, x + 0.588819 & \text{True} \end{cases}$$

$$y_2(x) = \begin{cases} 0. & x \geq 2 \vee x < 0 \\ -0.0601163\, x^2 - 0.0341007\, x + 1.22341 & \text{True} \end{cases}$$

$$y_3(x) = \begin{cases} 0. & x \geq 2 \vee x < 0 \\ 0.0199812\, x^2 - 0.160503\, x + 1.03852 & \text{True} \end{cases}$$

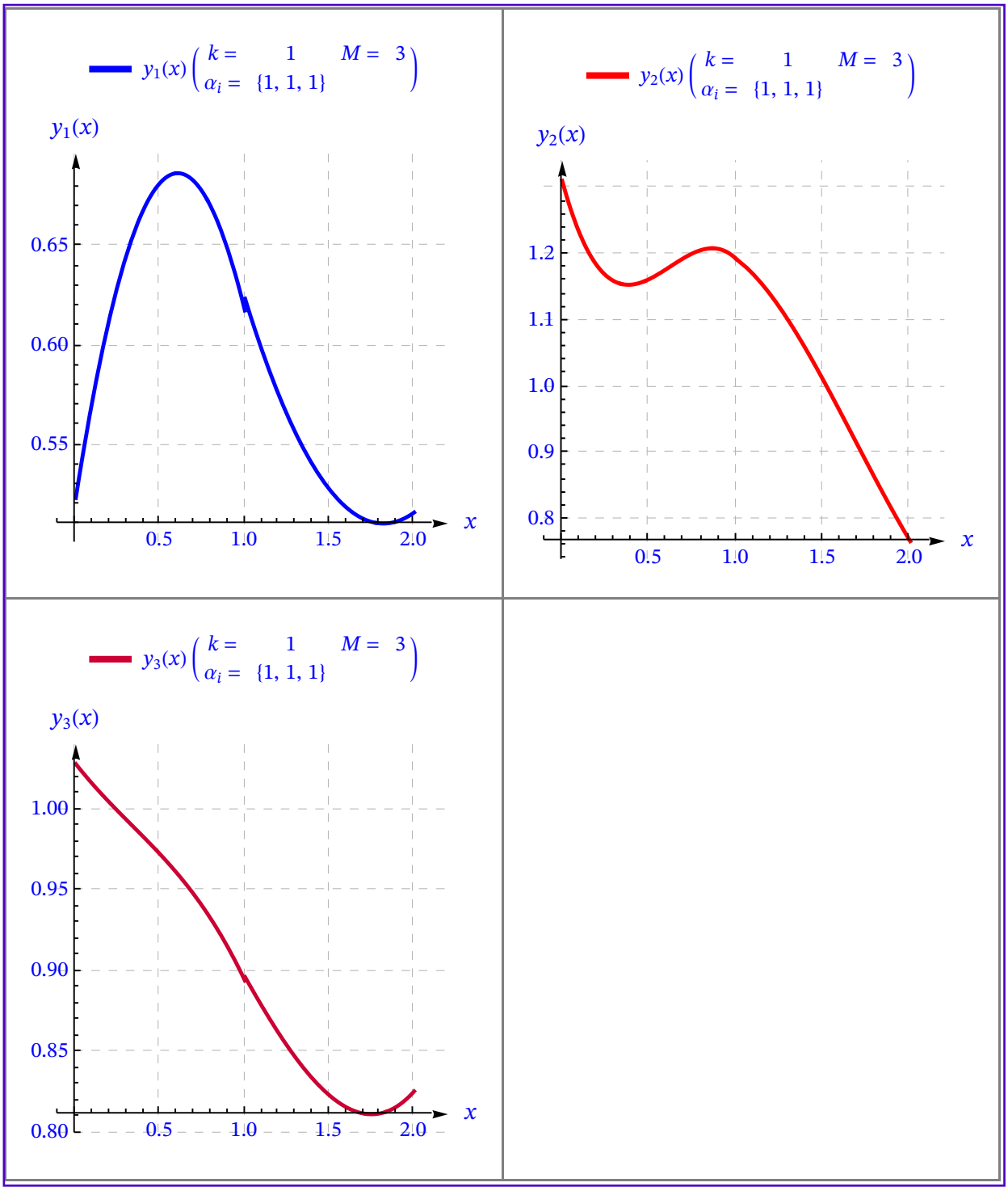
En el tercer problema, se resuelve el problema base mediante el método Wavelet de Chelyshkov de igual forma que en el segundo problema, con la salvedad de que se incrementa el grado del polinomio de Chelyshkov ($M = 3$) y se incrementa k en una unidad.

Las representaciones gráficas de este problema arrojan una mayor precisión en la solución si se comparan con la resolución anterior, por lo que se puede determinar que, a mayor grado del polinomio de Chelyshkov, mayor precisión tiene el algoritmo a la hora de aproximarse a la solución numérica.

■ **Problema 5.2.3. Modelo Regulador Glucosa–Insulina no Lineal.** ([AGRA22])
***Método Wavelets de Chelyshkov* (ChWM)**

$$\begin{cases} \alpha_i = (1\ 1\ 1) & \tau_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

(a) $\begin{cases} k = 1 \\ M = 3 \end{cases}$ $[0,\ T] = [0,\ 2]$.



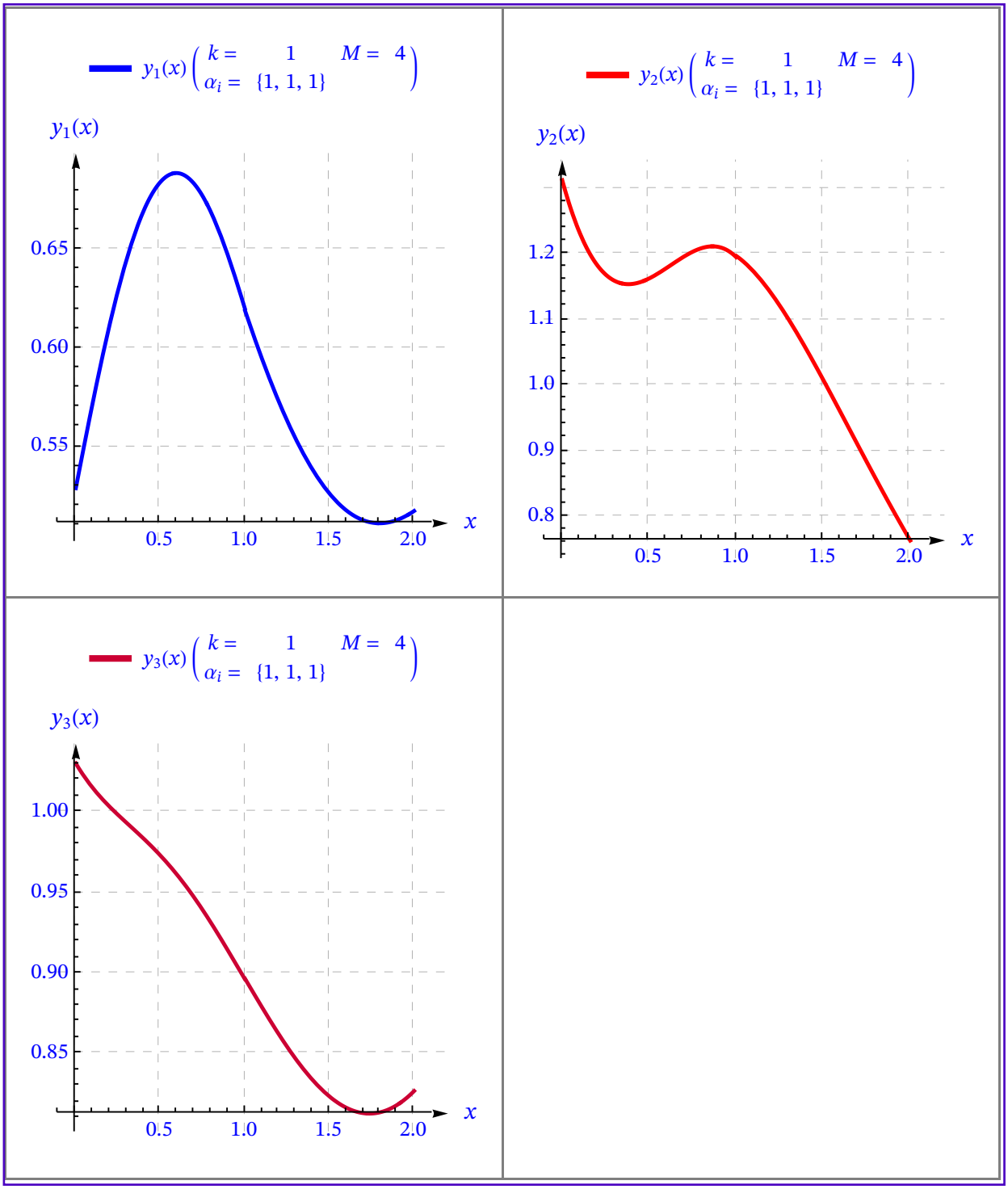
En relación con el cuarto problema, se incrementa el grado del polinomio de Chelyshkov en una unidad con respecto al problema anterior (en este caso, $M = 4$), incrementando, por tanto, la precisión de la solución obtenida.

La mejora de la precisión en la solución obtenida al incrementar el grado del polinomio es cada vez menor.

■ **Problema 5.2.4. Modelo Regulador Glucosa–Insulina no Lineal.** ([AGRA22])
***Método Wavelets de Chelyshkov* (ChWM)**

$$\begin{cases} \alpha_i = (1\ 1\ 1) & \tau_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

(a) $\begin{cases} k = 1 \\ M = 4 \end{cases}$ $[0,\ T] = [0,\ 2]$.



Los dos problemas que siguen toman como referencia el modelo planteado en [YADA23], cuya derivada de Caputo y condiciones iniciales de presentan a continuación. El problema 5.2.5 se resuelve mediante el método ABMFR, mientras que el problema 5.2.6 se resuelve mediante el método *Wavelet* de Chelyshkov, empleando como parámetro $k = 3$ y como grado del polinomio $M = 2$.

■ **Problema 5.2.5. Modelo Regulador Glucosa–Insulina no Lineal.** ([YADA23])

Considérese el sistema de ecuaciones diferenciales SFDDE que representa un modelo regulador Glucosa–Insulina Fraccionario no Lineal:

$$(P_1) \equiv \left(\begin{array}{c} D^{(\alpha_1)}\, y_1(x) = \gamma - \mu\, y_4(x) - \rho\, y_1(x) - \chi\, y_3(x) \\ D^{(\alpha_2)}\, y_2(x) = \eta\, y_2(x)\,(y_1(x) - y_2(x) - y_3(x) - y_4(x)) - (\rho+1)\, y_2(x) \\ D^{(\alpha_3)}\, y_3(x) = \varepsilon\nu\, y_2(x) - (\rho+\chi)\, y_3(x) \\ D^{(\alpha_4)}\, y_4(x) = (1-\varepsilon\nu)\, y_2(x) - (\mu+\rho)\, y_4(x) \end{array} \right) \qquad x \in (0,\ T)$$

$$\left(y_1(0) = 400 \quad y_2(0) = 9 \quad y_3(0) = 5 \quad y_4(0) = 3.5 \right)$$

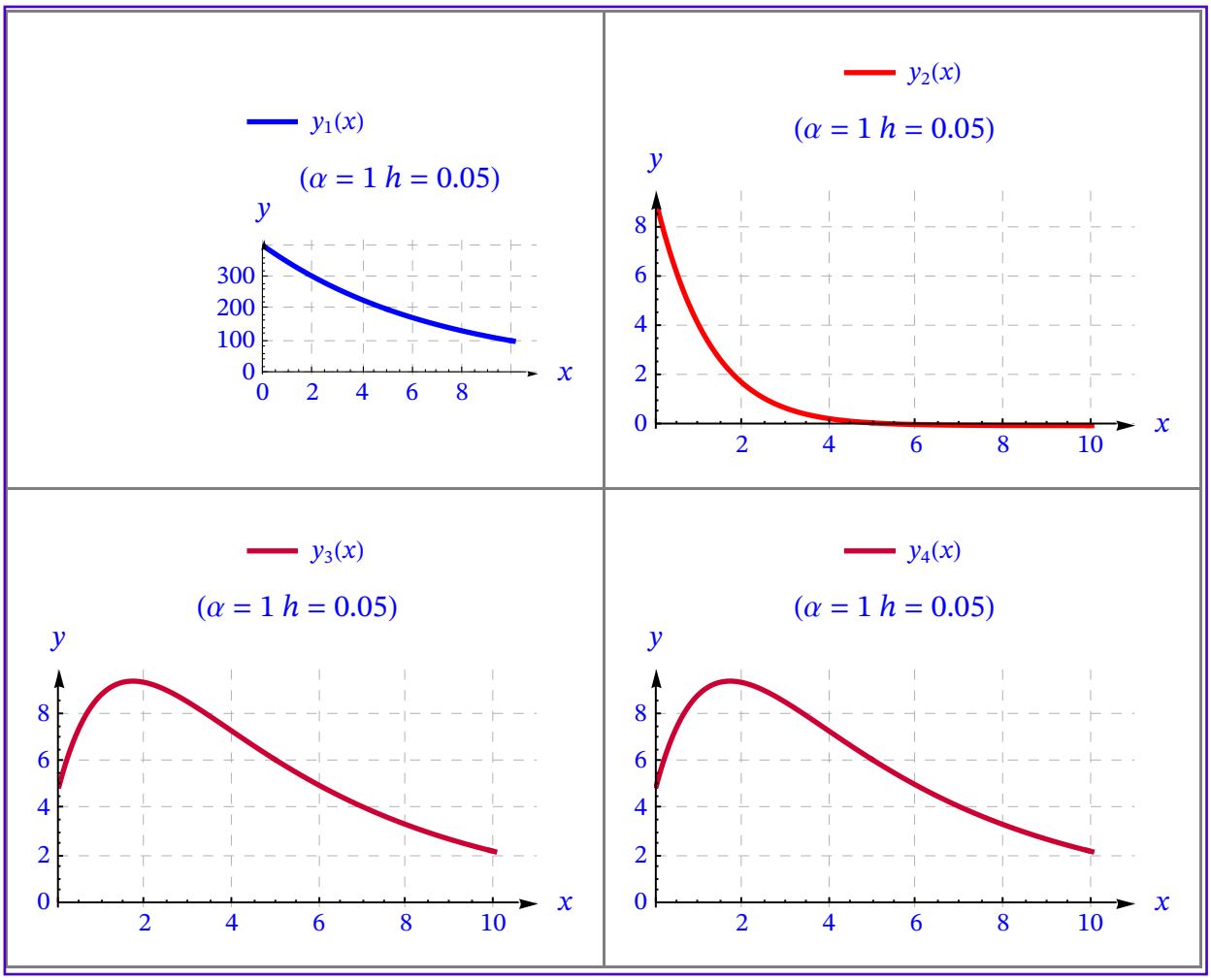
$$\left\{ \alpha_i = (1\ 1\ 1\ 1) \quad \tau_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right.$$

γ	χ	η	μ	$\varepsilon\nu$	ρ
1	0.06654	0.0009	0.09281	0.88187	0.13869

(i) Calcúlese la solución numérica mediante el método de *Adams–Bashforth–Moulton fraccionario con retraso* (ABMFR) tomando los valores de los parámetros dados.

(ii) Represéntense las soluciones aproximadas $y_k(x)$ del método en el intervalo $x \in [0,\ T]$ y los diagramas de fases en el plano $y_1(x),\ y_2(x),\ y_3(x)$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = 1 \\ h = 0.05 \end{array} \right. \qquad [0,\ T] = [0,\ 40].$$



Solución

(a)

Caso I.

γ	χ	η	μ	$\varepsilon\nu$	ρ
1	0.06654	0.0009	0.09281	0.88187	0.13869

Método de *Adams–Bashforth–Moulton Fraccionario con Retraso* (ABMFR) para Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Fraccionarias con Retraso (SFDDE) α_r.

$$(P) \equiv \begin{cases} D^{(\alpha_r)}\, y_r(x) = f_r\,(x,\, y_1(x),\, \ldots,\, y_r(x), \\ \qquad\qquad y_1(x-\tau),\, \ldots,\, y_r(x-\tau)) & x \in [0,\, T] \quad 0 < \alpha \le 1 \\ y_r(x) = g_r(x) & x \in [-\tau,\, 0] \\ y_r(0) = y_{r\,0} \end{cases}$$

$$r = 1, 2, \cdots, m$$

$$(P) \equiv$$

$$\left(\begin{array}{c} \left(\begin{array}{c} D^{(1)}\, y_1(x) = -0.13869\, y_1(x) - 0.06654\, y_3(x) - 0.09281\, y_4(x) + 1 \\ D^{(1)}\, y_2(x) = 0.0009\, y_2(x)\,(y_1(x) - y_2(x) - y_3(x) - y_4(x)) - 1.13869\, y_2(x) \\ D^{(1)}\, y_3(x) = 0.88187\, y_2(x) - 0.20523\, y_3(x) \\ D^{(1)}\, y_4(x) = 0.11813\, y_2(x) - 0.2315\, y_4(x) \end{array} \right) \quad x \in [0,\, T] \\ (\, y_1(0) = 400 \quad y_2(0) = 9 \quad y_3(0) = 5 \quad y_4(0) = 3.5\,) \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ll} f_1(x,\, y_r(x),\, y_r(x-\tau)) = & -0.13869\, y_1(x) - 0.06654\, y_3(x) - 0.09281\, y_4(x) + 1 \\ f_2(x,\, y_r(x),\, y_r(x-\tau)) = & 0.0009\, y_2(x)\,(y_1(x) - y_2(x) - y_3(x) - y_4(x)) - 1.13869\, y_2(x) \\ f_3(x,\, y_r(x),\, y_r(x-\tau)) = & 0.88187\, y_2(x) - 0.20523\, y_3(x) \\ f_4(x,\, y_r(x),\, y_r(x-\tau)) = & 0.11813\, y_2(x) - 0.2315\, y_4(x) \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{lll} [A, B] = & [0, 10] & (\text{intervalo } x) \\ \{\alpha_r, n = \lceil \alpha \rceil\} = & \{\{1, 1, 1, 1\}, 1\} & \\ \tau = & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \\ h = & 0.05 & \text{Tamaño del paso} \\ m = & 4 & \text{Número de ecuaciones} \end{array} \right)$$

Ecuaciones del método de

Adams–Bashforth–Moulton Fraccionario con Retraso (SFDDE)

$$x \in [0, T] \quad \{x_k = k\,h\} \quad \begin{cases} k = -i, -(i-1), \cdots, -1, 0, 1, 2, \cdots, N \\ h := \frac{T}{N} \quad i = \frac{\tau}{h} \end{cases}$$

$$y_{r\,h}(x_{k+1}) = g_r(0) + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} f_r(x_{k+1},$$
$$y_{1\,h}{}^P(x_{k+1}), \ldots, y_{r\,h}{}^P(x_{k+1}), y_{1\,h}(x_{k+1-i}), \ldots, y_{r\,h}(x_{k+1-i}))$$
$$+ \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} \sum_{j=0}^{k} a_{j,k+1}\, f_r(x_j, y_{1\,h}(x_j), \ldots, y_{r\,h}(x_j), y_{1\,h}(x_{j-i}), \ldots, y_{r\,h}(x_{j-i}))$$

$$y_{r\,h}{}^P(x_{k+1}) = g_r(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^{k} b_{j,k+1}\, f_r(x_j, y_{1,h}(x_j), \ldots, y_{r,h}(x_j), y_{1\,h}(x_j - \tau), \ldots, y_{r\,h}(x_j - \tau))$$

$r = 1, 2, \cdots, m$

- $a_{j,k+1} = \begin{cases} k^{\alpha+1} - (k-\alpha)(k+1)^\alpha & j = 0 \\ (k-j+2)^{\alpha+1} + (k-j)^{\alpha+1} - 2(k-j+1)^{\alpha+1} & 1 \le j \le k \\ 1 & j = k+1 \end{cases}$
- $b_{j,k+1} = \frac{h^\alpha}{\alpha}((k+1-j)^\alpha - (k-j)^\alpha)$

Proceso iterativo.

- $k = 19$

k	x_k	$y_{1\,k}{}^P$	$y_{1\,k}$	$y_{2\,k}{}^P$	$y_{2\,k}$	$y_{3\,k}{}^P$	$y_{3\,k}$	$y_{4\,k}{}^P$	$y_{4\,k}$
19	0.95	350.787	350.622	4.1437	4.04979	8.83514	8.96462	3.43283	3.44714
20	1.	348.367	348.194	3.97356	3.87622	8.92289	9.05666	3.41715	3.43188

- $k = 39$

k	x_k	$y_{1\,k}{}^P$	$y_{1\,k}$	$y_{2\,k}{}^P$	$y_{2\,k}$	$y_{3\,k}{}^P$	$y_{3\,k}$	$y_{4\,k}{}^P$	$y_{4\,k}$
39	1.95	305.435	305.113	1.75814	1.61479	9.38845	9.57474	3.01289	3.03199
40	2.	303.329	302.999	1.68271	1.53774	9.36803	9.55593	2.98831	3.0075

- $k = 59$

k	x_k	$y_{1\,k}{}^P$	$y_{1\,k}$	$y_{2\,k}{}^P$	$y_{2\,k}$	$y_{3\,k}{}^P$	$y_{3\,k}$	$y_{4\,k}{}^P$	$y_{4\,k}$
59	2.95	266.015	265.553	0.719694	0.553543	8.56167	8.76722	2.51107	2.5304
60	3.	264.187	263.718	0.687677	0.520801	8.50511	8.71109	2.4863	2.50559

- $k = 79$

k	x_k	$y_{1\,k}{}^P$	$y_{1\,k}$	$y_{2\,k}{}^P$	$y_{2\,k}$	$y_{3\,k}{}^P$	$y_{3\,k}$	$y_{4\,k}{}^P$	$y_{4\,k}$
79	3.95	231.809	231.225	0.285659	0.109481	7.34254	7.55164	2.04091	2.05882
80	4.	230.224	229.634	0.272562	0.0960725	7.27982	7.48889	2.01906	2.03689

- $k = 99$

k	x_k	$y_{1\,k}{}^P$	$y_{1\,k}$	$y_{2\,k}{}^P$	$y_{2\,k}$	$y_{3\,k}{}^P$	$y_{3\,k}$	$y_{4\,k}{}^P$	$y_{4\,k}$
99	4.95	202.148	201.458	0.110416	−0.0700217	6.12509	6.33189	1.63827	1.6543
100	5.	200.773	200.078	0.105225	−0.0753428	6.06729	6.2739	1.62005	1.6360

- $k = 119$

k	x_k	$y_{1\,k}{}^P$	$y_{1\,k}$	$y_{2\,k}{}^P$	$y_{2\,k}$	$y_{3\,k}{}^P$	$y_{3\,k}$	$y_{4\,k}{}^P$	$y_{4\,k}$
119	5.95	176.431	175.649	0.0417294	−0.140484	5.04408	5.24687	1.30703	1.3214
120	6.	175.239	174.452	0.0397272	−0.14254	4.99437	5.19695	1.29223	1.3065

- $k = 139$

k	x_k	$y_{1\,k}{}^P$	$y_{1\,k}$	$y_{2\,k}{}^P$	$y_{2\,k}$	$y_{3\,k}{}^P$	$y_{3\,k}$	$y_{4\,k}{}^P$	$y_{4\,k}$
139	6.95	154.132	153.27	0.0154853	−0.167473	4.12899	4.32765	1.03967	1.0525
140	7.	153.099	152.233	0.0147308	−0.168251	4.0875	4.28597	1.02779	1.0406

- $k = 159$

k	x_k	$y_{1\,k}{}^P$	$y_{1\,k}$	$y_{2\,k}{}^P$	$y_{2\,k}$	$y_{3\,k}{}^P$	$y_{3\,k}$	$y_{4\,k}{}^P$	y
159	7.95	134.794	133.863	0.00567365	−0.177613	3.37057	3.56555	0.82583	0.83
160	8.	133.897	132.963	0.00539479	−0.177903	3.3364	3.53121	0.816359	0.8

- $k = 179$

k	x_k	$y_{1\,k}{}^P$	$y_{1\,k}$	$y_{2\,k}{}^P$	$y_{2\,k}$	$y_{3\,k}{}^P$	$y_{3\,k}$	$y_{4\,k}{}^P$	y
179	8.95	118.019	117.028	0.00207141	−0.181377	2.748	2.93985	0.655539	0.66
180	9.	117.241	116.247	0.00196998	−0.181485	2.72004	2.91174	0.648007	0.65

- $k = 199$

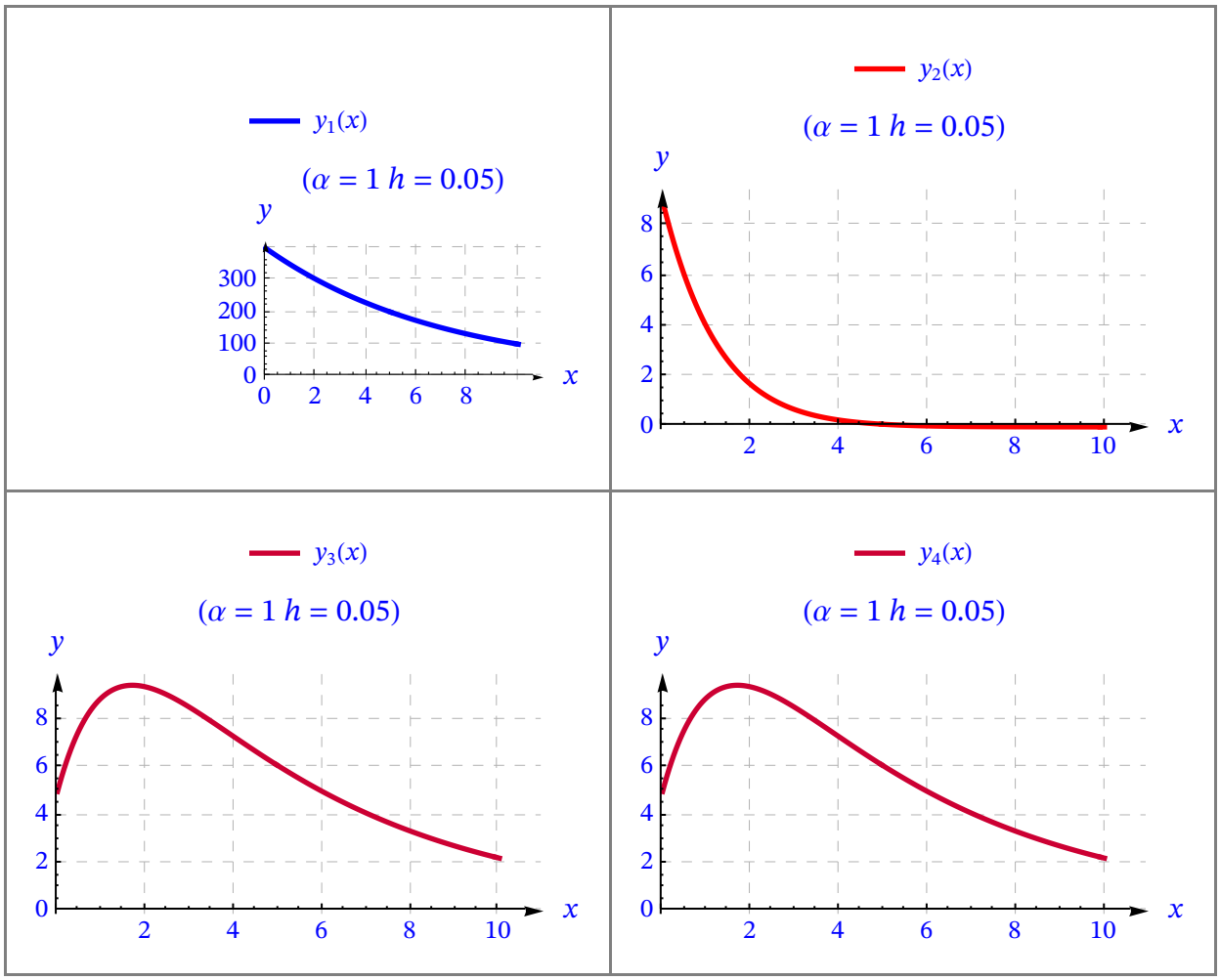
k	x_k	$y_{1\,k}{}^P$	$y_{1\,k}$	$y_{2\,k}{}^P$	$y_{2\,k}$	$y_{3\,k}{}^P$	$y_{3\,k}$	$y_{4\,k}{}^P$	
199	9.95	103.465	102.422	0.000767383	−0.182775	2.23917	2.42843	0.520205	0.5
200	10.	102.79	101.744	0.000730891	−0.182815	2.21634	2.40548	0.514223	0.5

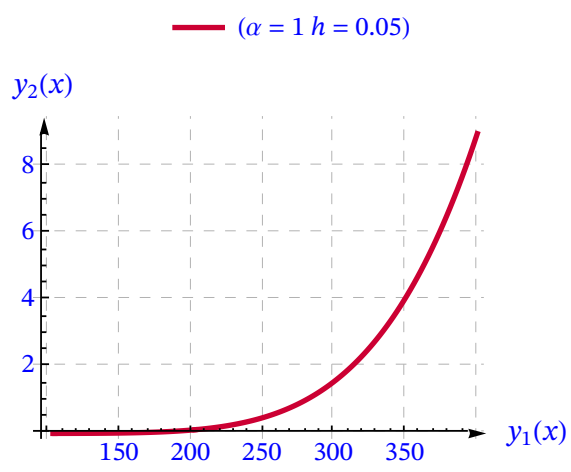
Tabla de puntos $(x_k, y_{r\,k}{}^{P})$ y $(x_k, y_{r\,k})$ $(r = 1, 2, \cdots, m)$.

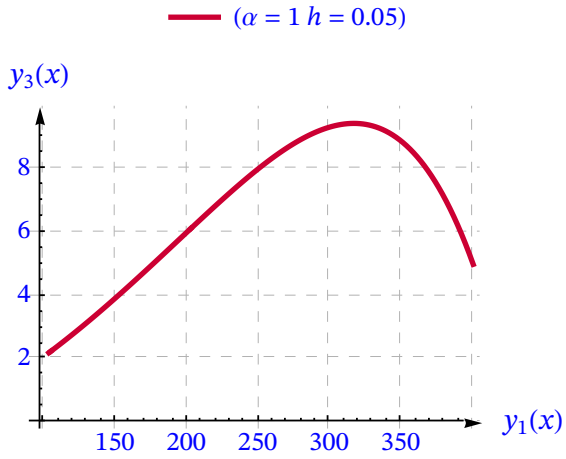
k	x_k	$y_{1\,k}{}^{P}$	$y_{2\,k}{}^{P}$	$y_{3\,k}{}^{P}$	$y_{4\,k}{}^{P}$
20	1.0000000000	348.1942215780	3.8762191800	9.0566649705	3.4318833136
40	2.0000000000	302.9994491910	1.5377379039	9.5559260866	3.0075003850
60	3.0000000000	263.7180252860	0.5208011891	8.7110937415	2.5055897322
80	4.0000000000	229.6336196740	0.0960724707	7.4888931781	2.0368885155
100	5.0000000000	200.0777342370	−0.0753428371	6.2739044365	1.6360636543
120	6.0000000000	174.4523369050	−0.1425403994	5.1969473052	1.3065347087
140	7.0000000000	152.2327695830	−0.1682511093	4.2859656004	1.0406373929
160	8.0000000000	132.9628085030	−0.1779031358	3.5312083013	0.8279996662
180	9.0000000000	116.2472461510	−0.1814845393	2.9117437874	0.6586782679
200	10.0000000000	101.7442240170	−0.1828151432	2.4054837326	0.5241194684

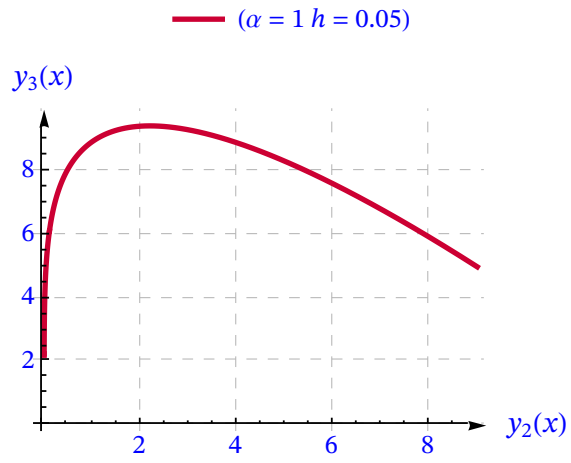
k	x_k	$y_{1\,k}$	$y_{2\,k}$	$y_{3\,k}$	$y_{4\,k}$
0	0.0000000000	400	9	5	3.5000000000
20	1.0000000000	348.3672549490	3.9735633627	8.9228885219	3.4171457332
40	2.0000000000	303.3293382900	1.6827073560	9.3680321420	2.9883128010
60	3.0000000000	264.1866828390	0.6876771261	8.5051142709	2.4863036877
80	4.0000000000	230.2235770170	0.2725621358	7.2798206252	2.0190607493
100	5.0000000000	200.7731203720	0.1052250731	6.0672865366	1.6200494296
120	6.0000000000	175.2391288060	0.0397272379	4.9943735152	1.2922291817
140	7.0000000000	153.0987346450	0.0147307648	4.0874989923	1.0277948164
160	8.0000000000	133.8973362490	0.0053947879	3.3364013683	0.8163592257
180	9.0000000000	117.2411542780	0.0019699806	2.7200362137	0.6480071982
200	10.0000000000	102.7895721210	0.0007308910	2.2163443172	0.5142232282

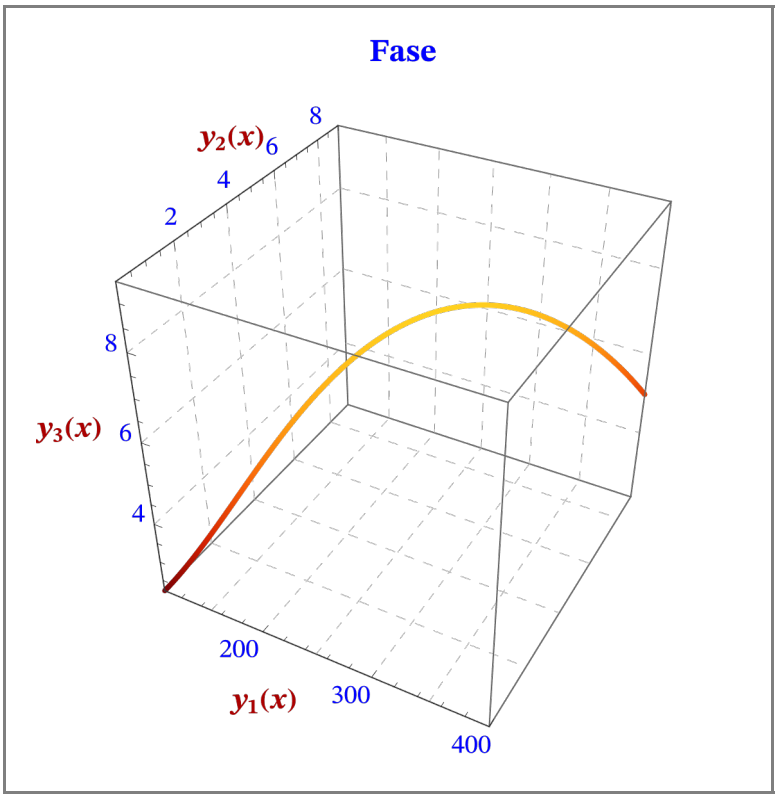
$y(10) \approx y_{200} = 102.7895721210$


$y_1(x)$
$(\alpha = 1\ h = 0.05)$
$y_2(x)$
$(\alpha = 1\ h = 0.05)$
$y_3(x)$
$(\alpha = 1\ h = 0.05)$
$y_4(x)$
$(\alpha = 1\ h = 0.05)$
y
x


(α = 1 h = 0.05)
y2(x)
8
6
4
2
150
200
250
300
350
y1(x)


(α = 1 h = 0.05)
y3(x)
8
6
4
2
150
200
250
300
350
y1(x)


(α = 1 h = 0.05)
y3(x)
8
6
4
2
2
4
6
8
y2(x)

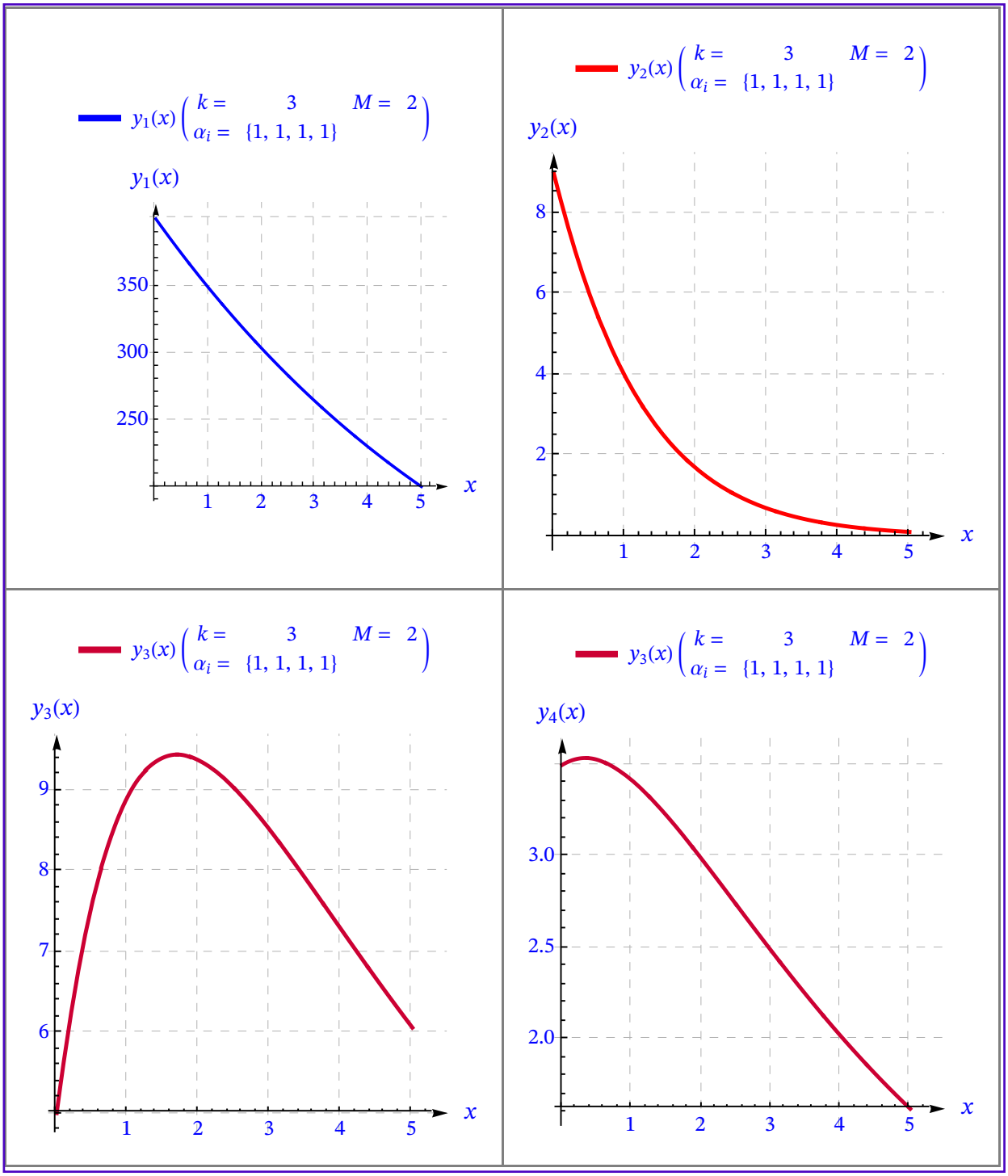


Tal y como se comentaba en el problema anterior, el siguiente problema se ha resuelto mediante el método *Wavelet* de Chelyshkov, obteniendo una representación gráfica de la solución aproximada que ofrece unos resultados muy similares a los obtenidos mediante el método ABMFR, para unos valores de $k = 4$ y $M = 2$.

■ **Problema 5.2.6. Modelo Regulador Glucosa–Insulina no Lineal.** ([YADA23])

(a) Método *Wavelets* de Chelyshkov (ChWM).

$$\begin{cases} k = 3 \\ M = 2 \end{cases} \qquad [0,\ T] = [0,\ 5].$$



Indicación: Las soluciones $y_k(x)$ vienen dadas sólo por el método de la función Residuo.

El séptimo problema presenta un nuevo ejemplo del Modelo Regulado de Glucosa-Insulina resuelto mediante el método ABMFR, extraído de [KIRH23]. Se han obtenido las representaciones gráficas de las soluciones aproximadas, así como el diagrama de fases en el

plano $y_1(x),\ y_2(x),\ y_3(x)$.

A continuación, se presenta el modelo a resolver, los parámetros que se deben tener en cuenta para hallar la solución a los apartados propuestos y la solución a los mismos.

■ **Problema 5.2.7. Modelo Regulador Glucosa–Insulina no Lineal.** ([KIRH23])

Considérese el sistema de ecuaciones diferenciales SFDDE que representa un modelo regulador Glucosa–Insulina Fraccionario no Lineal:

$$(P_1) \equiv \begin{pmatrix} D^{(1)}\, y_1(x) = \gamma\,(1-\rho)\,(y_2(x)+y_3(x)) + \gamma\, y_1(x) - \mu\, y_1(x) + \frac{1}{500}\, y_2(x)\, y_1(x) \\ D^{(1)}\, y_2(x) = \gamma\,\rho\,(y_2(x)+y_3(x)) + \gamma\, y_3(x) - ((\lambda+\mu)\, y_2(x)) \\ D^{(1)}\, y_3(x) = \gamma\, y_3(x) - y_2(x)\,(\delta+\eta+\mu) + \lambda\, y_2(x) \end{pmatrix}$$

$x \in (0,\ T)$

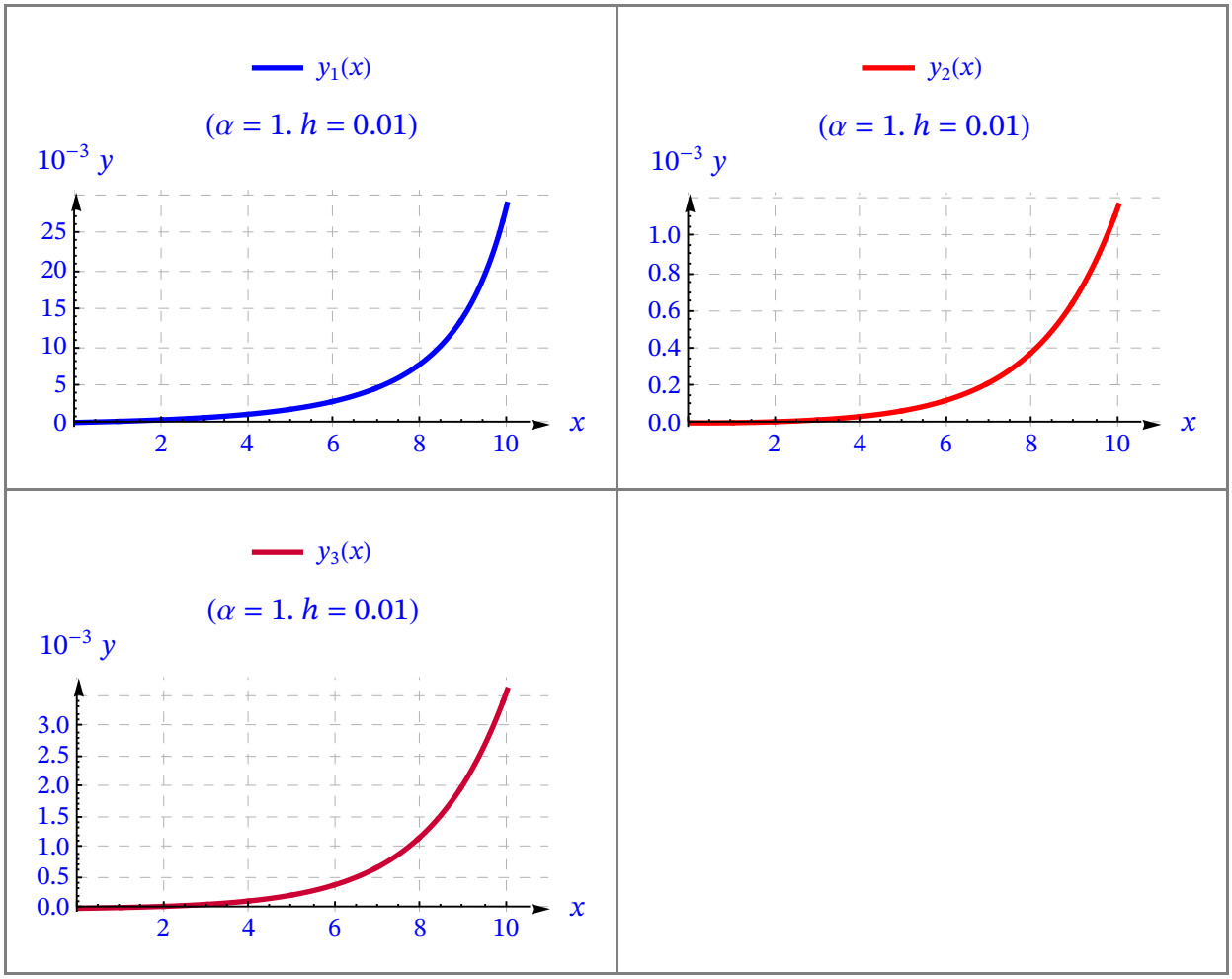
$N = 500$

β	γ	λ	μ	ρ	δ	η
0.16263	0.37141	0.67758	0.00764	0.077	0.0068	0.01623

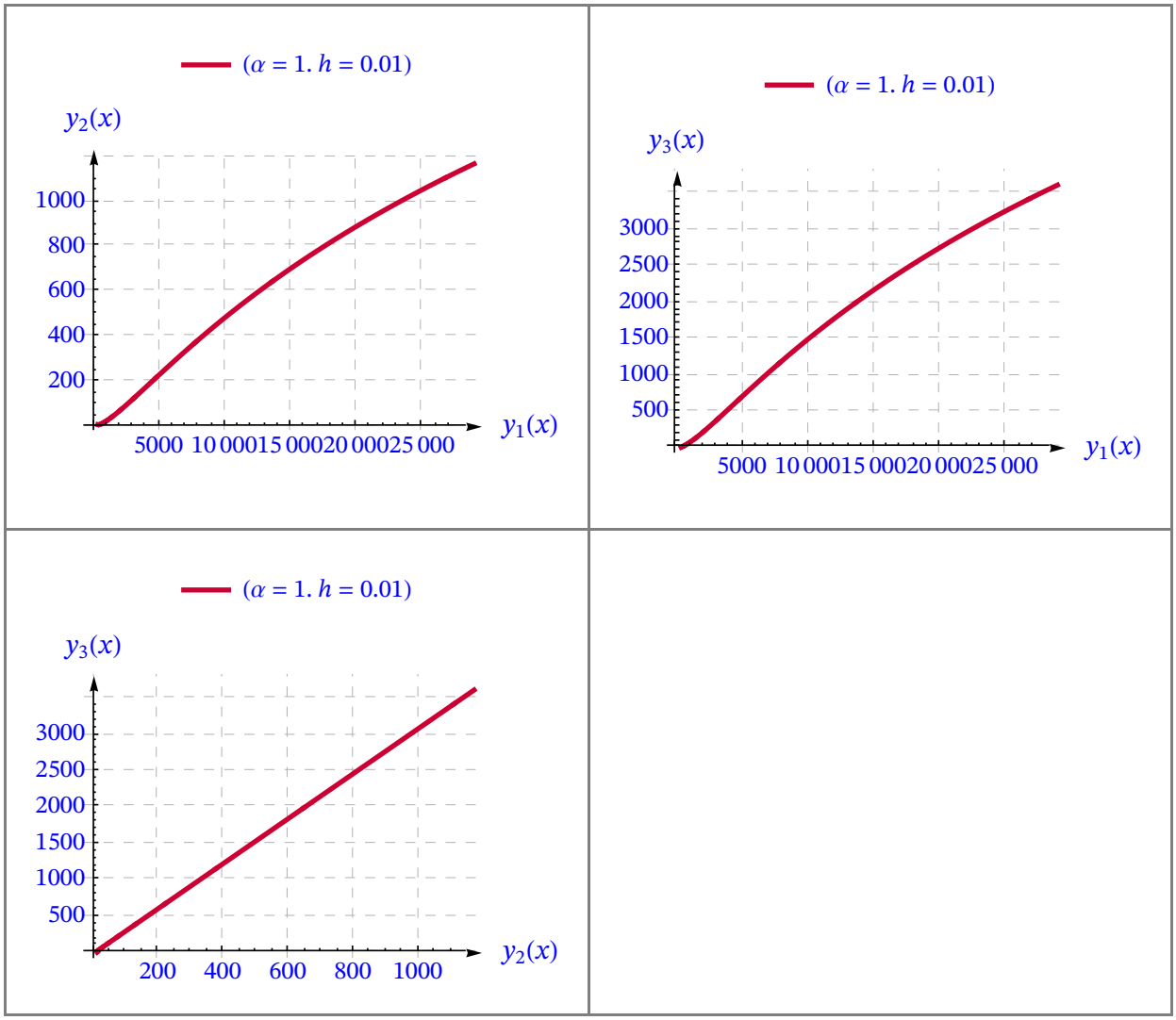
(i) Calcúlese la solución numérica mediante el método *Adams–Bashforth–Moulton fraccionario* (ABC) tomando un tamaño del paso h dado y el orden α.

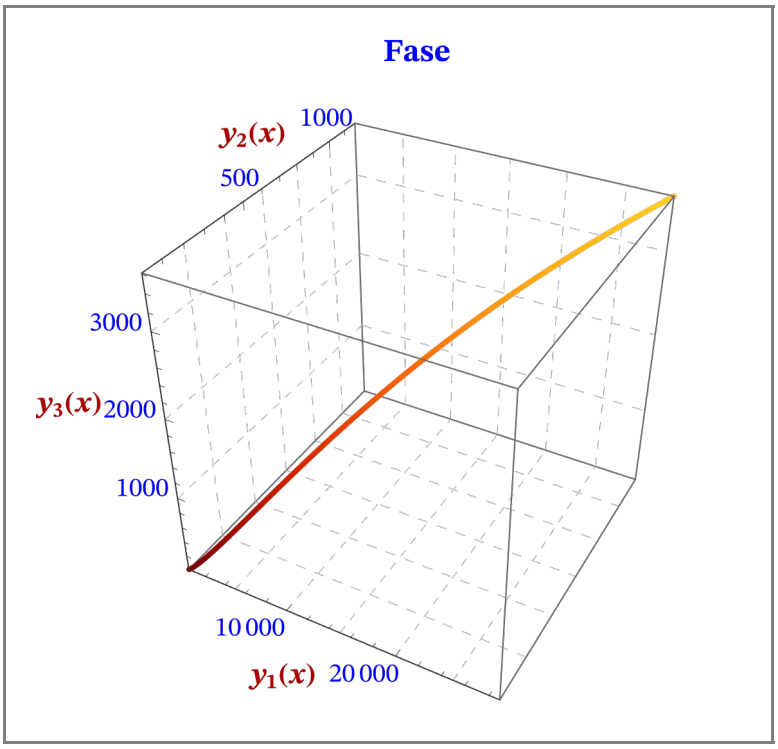
(ii) Represéntense las soluciones aproximadas $y_k(x)$ del método en el intervalo $x \in [0,\ T]$ y los diagramas de fases en el plano $y_1(x),\ y_2(x),\ y_3(x)$.

(a) $\begin{cases} \alpha = 1 \\ h = 0.01 \end{cases}$ $[0,\ T] = [0,\ 10]$.



(b) $\begin{cases} \alpha = 0.90 \\ h = 0.01 \end{cases}$ $[0,\ T] = [0,\ 10].$


(α = 1. h = 0.01)
y2(x)
1000
800
600
400
200
5000 10 00015 00020 00025 000
y1(x)
(α = 1. h = 0.01)
y3(x)
3000
2500
2000
1500
1000
500
5000 10 00015 00020 00025 000
y1(x)
(α = 1. h = 0.01)
y3(x)
3000
2500
2000
1500
1000
500
200 400 600 800 1000
y2(x)


Fase
$y_2(x)$
1000
500
3000
$y_3(x)$
2000
1000
10 000
$y_1(x)$
20 000

Capítulo 6

6. Conclusión y Líneas Futuras de Investigación

6.1. Conclusiones

El presente proyecto presenta una novedosa metodología de resolución del Modelo de Interacción del Sistema Glucosa–Insulina que resulta aplicable a otros sistemas que puedan ser mo-delizados mediante SFDDE (*System of Fractional Delay Differential Equations*): el método *Wavelet* de Chelyshkov.

Este método permite obtener resultados razonablemente similares a los que se obtienen al resolver el Modelo de Interacción del Sistema Glucosa–Insulina mediante el método *Adams–Bashforth–Moulton fraccionario*; cuanto mayor sea el grado M del polinomio de Chelyshkov que se emplee para la resolución de la SFDDE, menor será el error cometido al resolver el sistema.

La principal ventaja del nuevo método, como se ha comprobado a lo largo del proyecto, es que permite reducir los sistemas de ecuaciones diferenciales de orden fraccionario a un sistema de ecuaciones algebraicas cuyas soluciones mantienen una precisión y eficiencia razo-nables. El método es válido tanto para SFDDE lineales como no lineales.

El método *Wavelet* de Chelyshkov que se propone en el presente proyecto se muestra como una alternativa para tener en cuenta en la resolución de modelos de procesos físicos que deban tener en cuenta un retardo temporal y un orden fraccionario.

En futuros trabajos, se propone la investigación del uso de las *Wavelets* de Chelyshkov en otras tipologías de procesos físicos de interés, para así comparar tanto los resultados obtenidos mediante este método como la eficiencia de la resolución en sí misma con los métodos más comunes de resolución. Algunos ejemplos de estos procesos pueden ser el análisis de señales eléctricas o sísmicas, el estudio de la turbulencia en los fluidos o el tratamiento de imágenes y sonido, entre otros.

6.2. Líneas Futuras de Investigación

En los últimos años, las ecuaciones diferenciales parciales fraccionarias (*fractional partial differential equations*-FPDEs) y las ecuaciones diferenciales fraccionarias con operadores fraccionarios espaciales o temporales se han vuelto muy populares y se ha dedicado una amplia consideración a los operadores fraccionarios. Se ha descubierto que estos operadores pueden modelar la dinámica de fluidos, diferentes procesos físicos y problemas matemáticos mejor que los operadores diferenciales de orden no entero correspondientes debido a la naturaleza no local de los operadores fraccionarios.

Además, las ecuaciones diferenciales fraccionarias (*fractional partial equations*–FDEs) se aplican ampliamente en varias áreas y disciplinas como fenómenos de ondas de difusión, sistemas de orden distribuido, materiales dieléctricos y osciladores electrónicos.

Un modelo diferencial de orden distribuido puede observarse como una extensión natural

de la FDE multitérmino. Además, las FDEs de orden distribuido se han aplicado para expandir la relación tensión–deformación en dieléctricos. Se han utilizado FDEs de orden distribuido para modelos de filtros en procesamiento de señales y el orden distribuido óptimo para amortiguamiento en sistemas de control.

Estos operadores fraccionarios tienen aplicaciones importantes en el modelado de difusión superlenta donde una masa de partículas se extiende a velocidades logarítmicas. Especialmente, en la última década las ecuaciones diferenciales de orden distribuido han atraído un interés considerable de muchos investigadores.

Los sistemas de ecuaciones diferenciales fraccionarias son relativamente complejas de resolver, por lo que existe un interés creciente y amplio en resolverlas numéricamente, como es el caso en esta tesis con el método de aproximación de *Wavelets* de Chelyshkov.

En particular, un estudio en profundidad de la precisión y eficacia de los distintos métodos de *Wavelets* sería muy útil para determinar cuáles son los más adecuados para los diferentes problemas de Ingeniería y las Ciencias. Existen varios métodos, como las *Wavelets* de Haar, las *Wavelets* de Chebyshev, las *Wavelets* de Hermite, las *Wavelets* de Legendre, las *Wavelets* de Genochhi y *Wavelets* de Fibonacci, así como las *Wavelets* de Chelyshkov Fraccionarias (*fractional order Chelyshkov wavelets*), y el método de Petrov-Galerkin.

En este contexto, se reseñan determinadas líneas de investigación:

1. Estudio de modelos que relacionen la COVID-19 con la *diabetes*, dado que la epidemia ha determinado que aumenta la probabilidad y la gravedad de los resultados debido a la hiperglucemia, el deterioro del sistema inmunológico, los problemas vasculares y las comorbilidades como la hipertensión, la obesidad y las enfermedades cardiovasculares, que pueden conducir a resultados catastróficos.

Existen estudios que presentan un nuevo enfoque de gestión de la COVID-19 para pacientes diabéticos utilizando el *operador fraccionario fractal* y un núcleo de la función Mittag-Leffler [NAIK24], [FARM24b], [KUBR24].

La *derivada fractal–fraccionaria* es útil en cuestiones prácticas para mejorar el modelado de sistemas de efectos de memoria. Por lo tanto, se presentan nuevos modelos utilizando el núcleo Mittag-Lefer y la función *fractal–fraccionaria* como el el siguiente modelo propuesto en [FARM24].

El modelo tiene como objetivo dilucidar la transmisión de COVID-19 entre una población con diabetes como condición subyacente. La comunidad entera se clasifica en seis categorías distintas: $S(t)$ representa individuos susceptibles, $D(t)$ denota individuos susceptibles con diabetes, $E(t)$ representa individuos que han estado expuestos a COVID-19, $I(t)$ representa individuos que han sido infectados con COVID-19, $C(t)$ denota casos de COVID-19 con diabetes y $R(t)$ representa individuos que se han recuperado de COVID-19 o han sido eliminados de la población susceptible:

$$
\begin{aligned}
&{}_{0}^{\mathrm{FEM}}D_{t}^{\alpha,\beta}\,S(t) = \Omega - \beta\left(\frac{I+C}{N}\right)S(t) - (\nu+\lambda)\,S(t)\\
&{}_{0}^{\mathrm{FEM}}D_{t}^{\alpha,\beta}\,D(t) = \lambda\,S(t)\,\Omega + \gamma_1\,C(t) - \beta\left(\frac{I+C}{N}\right)D(t) - (\delta_2+\upsilon)\,D(t)\\
&{}_{0}^{\mathrm{FEM}}D_{t}^{\alpha,\beta}\,E(t) = \beta\left(\frac{I+C}{N}\right)S(t) + \beta\left(\frac{I+C}{N}\right)D(t) - (\phi+\upsilon)\,E(t)\\
&{}_{0}^{\mathrm{FEM}}D_{t}^{\alpha,\beta}\,I(t) = \alpha\,\phi\,E(t) - (\delta+\upsilon+\gamma)\,I(t)\\
&{}_{0}^{\mathrm{FEM}}D_{t}^{\alpha,\beta}\,C(t) = (1-\alpha)\,\phi\,E(t) - (\delta_1+\upsilon)\,C(t)\\
&{}_{0}^{\mathrm{FEM}}D_{t}^{\alpha,\beta}\,R(t) = \gamma\,I(t) - \upsilon\,R(t)
\end{aligned}
\tag{6.2.1}
$$

$$S(0) \geq 0, \quad D(0) \geq 0, \quad E(0) \geq 0, \quad I(0) \geq 0, \quad C(0) \geq 0, \quad R(0) \geq 0, \quad 0 < \alpha,\ \beta \leq 1 \tag{6.2.2}$$

empleando el *operador fractal fraccionario* de orden $0 < \alpha,\ \beta \leq 1$ en la que α es la función derivada fraccionaria mientras que β representa sus dimensiones:

$$ {}^{\text{FEM}}_{0}D_t^{\alpha,\beta}\, y(t) = \frac{A\,B(\alpha)}{1-\alpha}\,\frac{d}{dt^{\beta}}\left(\int_0^t y(\tau)\,E_{\alpha}\left[-\frac{\alpha}{1-\alpha}\,(t-\tau)^{\alpha}\right]d\tau\right) \tag{6.2.3}$$

donde $0 < \alpha,\ \beta \leq 1$, E_α es la función de Mittag–Leffler y $AB(\alpha) = 1-\alpha+\frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)}$ la función normalizada. Su correspondiente integral tiene la expresión:

$$ {}^{\text{FEM}}_{0}I^{\alpha,\beta}\, y(t) = \frac{1-\alpha}{A\,B(\alpha)}\,t^{1-\beta}\,y(t) + \frac{\alpha}{A\,B(\alpha)\,\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\,\tau^{1-\beta}\,d\tau. \tag{6.2.4}$$

2. Se proponen métodos de colocación compuestos, precisos y eficientes basados en las *Wavelets* de Chelyshkov Fraccionarias (*fractional order Chelyshkov wavelets*).

Estas funciones permiten reducir la solución de problemas como el problema de *advección-dispersión móvil-inmóvil fraccionario de orden distribuido* a un sistema de ecuaciones algebraicas para calcular la función desconocida.

El problema de *advección-dispersión móvil-inmóvil fraccionario de orden distribuido* tiene la siguiente formulación: [MARA22]

$$\begin{cases} \alpha_1\,Z_t(x,\,t) + \alpha_2\,\mathcal{D}_t^{\mu}\,Z(x,\,t) = -\alpha_3\,Z_x(x,\,t) + \alpha_4\,Z_{xx}(x,\,t) + h(x,\,t) & \\ Z(x,\,0) = f_1(x) & x \in [0,\,1]) \\ Z(0,\,t) = f_2(x),\quad Z(1,\,t) = f_3(x) & t \in [0,\,1] \end{cases} \tag{6.2.5}$$

$$\alpha_1 \geq 0, \quad \alpha_2 \geq 0, \quad \alpha_3 \geq 0, \quad \alpha_4 > 0$$

$\mathcal{D}_t^{\mu} \equiv$ Operador fraccionaro de oden distribuido en el sentido de Caputo.

3. Diseño de métodos numéricos mediante las *Wavelets* de Chelyshkov Fraccionarias que resuelvan el *problema Inverso* que determine $\{u(x),\ f(x)\}$ de la siguiente ecuación diferencial fraccionaria de orden fraccionario no lineal: [ERMA]

$$\begin{cases} \mathcal{D}^{\beta_r}\,u(x) + F(u(x),\,\mathcal{D}^{\beta_1}\,u(x),\,\mathcal{D}^{\beta_2}\,u(x),\,\cdots,\,\mathcal{D}^{\beta_{r-1}}\,u(x)) = f(x) & \\ u^{(j)}(0) = u_j & j = 0,\,\cdots,\,\lceil\beta_{r-1}\rceil \end{cases} \tag{6.2.6}$$

y datos sobremedidos

$$u(\tilde{x}_1) = \tilde{u}_1. \quad \tilde{x}_1 \neq 0 \tag{6.2.7}$$

siendo F una función lineal o no lineal; $\mathcal{D}^{\beta_1}\,u(x),\ \mathcal{D}^{\beta_2}\,u(x),\ \cdots,\ \mathcal{D}^{\beta_{r-1}}\,u(x)$ son as derivadas de Caputo de $u(x)$ con $0 < \beta_1 < \beta_2 < \cdots < \beta_r$.

En primer lugar, el problema se reduce a un sistema de ecuaciones algebraicas con un lado derecho desconocido por medio de la base ortonormal de *Wavelets* de Chelyshkov. En segundo lugar, al elegir nodos adecuados, este sistema se transforma en un sistema homogéneo de ecuaciones algebraicas. La solución del sistema homogéneo permite determinar los coeficientes de los vectores de base para la solución de la ecuación

diferencial fraccionaria no lineal. En el paso final, el lado derecho se obtiene sustituyendo la solución construida en una ecuación diferencial fraccionaria no lineal.

4. Esquemas *Adams–Bashforth–Moulton Predictor–Corrector*.

Estudios semianalíticos que desarrollen y analicen un marco regulatorio integral para el manejo de la glucosa y la insulina en sangre en presencia de diabetes mellitus, mediante el empleo de operadores fraccionarios con la *derivada fraccionaria de Atangana Baleanu* en el sentido de Caputo (derivada fraccionaria ABC) y el *método de transformada de Laplace de descomposición de Adomian* [KHIR24].

Así mismo, desarrollo de esquemas basados en la *derivada fraccionaria ABC* que describa la dinámica de la diferentes enfermedades como el cáncer empleando métodos de *Adams-Bashforth-Moulton fraccionarios* para encontrar resultados numéricos y gráficos del modelo con un buen nivel de precisión [CHAV24].

Otra línea de trabajo es el diseño de nuevos métodos *Predictor–Corrector de Adam–Bashforth fraccionarios* para resolver modelos compartimentados de gran uso en varios campos, incluyendo la epidemiología, la farmacocinética y la ecología, para describir la dinámica de un sistema que consiste en compartimentos que interactúan [SALA24].

El método predictor de *Adam–Bashforth fraccionario* es un método numérico ampliamente utilizado para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias y fraccionarias, y en genereral ue aproximadamente 2.5 veces más rápido que el método Runge–Kutta de cuarto orden manteniendo una precisión similar [SALA24].

5. Resolución de ecuaciones en *derivadas parciales fraccionarias* (FPDE), donde intervienen la derivada fraccionaria en el sentido de Caputo y también la derivada fraccionaria de Riesz, utilizando el Método *Wavelet* de Chebyshev. En este caso, la *wavelet* madre se construye a partir de los polinomios del mismo nombre, definidos por:

$$T_m(t) = 2\,t\,T_{m-1}(t) - T_{m-2}(t), \quad \text{con} \quad T_0(t) = 1 \; y \; T_1(t) = t. \tag{6.2.8}$$

Este método también permite resolver ecuaciones diferenciales fraccionarias con retraso, (SFFDE), dentro de las cuales se puede citar la ecuación del pantógrafo, como son las *ecuaciones integro-differenciales fraccionaria de Volterra con retraso:*

a. La *ecuación integro-differencial fraccionaria de Volterra con retraso distribuido continuamente:*

$$\begin{gathered} {}_C D^{\alpha}\, y(x) = e^{-2}\, y(x) + 2 \int_{x-1}^{x} e^{s-x}\, y(s)\, ds, \;\; x \geq 0, \;\; 0 < \alpha \leq 1, \\ y(x) = e^{x}, \quad x \leq 0 \end{gathered} \tag{6.2.9}$$

b. La versión con retraso distribuido continuamente y discretamente:

$$\begin{gathered} {}_C D^{\alpha}\, y(x) = y(x-1) + \int_{x-1}^{x} y(s)\, ds, \;\; x \geq 0, \;\; 0 < \alpha \leq 1, \\ y(x) = e^{x}, \quad x \leq 0 \end{gathered} \tag{6.2.10}$$

La utilidad de tales ecuaciones se refiere en particular a los problemas de herencia y no herencia en mecánica, tal como los presenta Picard en sus trabajos. La mecánica de la herencia corresponde en particular al caso en que cada acción deja una herencia en el sistema, y el estado actual depende de toda la historia anterior. En cambio, en la mecánica de la no herencia, el sistema en un momento dado sólo depende de su estado actual. El problema fundamental de la astronomía, por ejemplo, pertenece a la mecánica de la no herencia, mientras que las cuestiones de histéresis y arrastre entran en la física de la

herencia.

c. Respecto a las ecuaciones usando la derivada de Riesz, se puede mencionar la La ecuación de *Riesz de Camassa–Holm* (CH): [ZHAN23]

$$\begin{gathered} {}_0^R D_t^\alpha\, u(x,\,t) + 2\,k\,u_x(x,\,t) - u_{x\,x\,t}(x,\,t) + \\ 3\,u(x,\,t)\,u_x(x,\,t) - 2\,u_x(x,\,t)\,u_{x\,x}(x,\,t) - u(x,\,t)\,u_{x\,x\,x}(x,\,t) = 0 \end{gathered} \tag{6.2.11}$$

donde

$k \neq 0$ es una constante

$u(x,\,t)$ es una función desconocida que depende de la variable temporal t y la variable espacial x

${}_0^R D_t^\alpha$ es la derivada fraccionaria de Riesz.

La ecuación CH se utiliza para describir el modelo físico de la propagación unidireccional de ondas en aguas poco profundas. Esta ecuación se usa ampliamente en dinámica de fluidos, mecánica continua, aerodinámica y modelos para la formación de ondas de choque, solitones, turbulencia, transporte de masa y la solución que representa la superficie libre del agua sobre un fondo plano.

Fokas y Fuchssteiner y Lenells fueron los primeros a introducir esta ecuación. Camassa y Holm propusieron la derivación de la solución como modelo para ondas dispersivas de aguas poco profundas y revelaron que se trata de un sistema hamiltoniano de dimensión finita integrable formalmente y que sus ondas solitarias son solitones.

6. El método *Wavelet* de Legendre como solución numérica de ecuaciones en derivadas parciales fraccionarias (*fractional order partial differential equations*–FPDE).

[SINH24], [KOUN24], [GOLI24].

Este método *Wavelet*, se basa en la *Wavelet* madre siguiente:

$$\psi_{n,m}(t) = \begin{cases} \sqrt{m+\frac{1}{2}}\; 2^{\frac{k}{2}}\, P_m\!\left(2^k\, t - \hat{n}\right) & \text{para } \frac{\hat{n}-1}{2^k} \le t \le \frac{\hat{n}+1}{2^k} \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \tag{6.2.12}$$

donde $m = 0,\,1,\,2,\,\ldots,\,M-1,\;\; n = 1,\,2,\,3,\,\ldots,\,2^{k-1}$. El coeficiente $\sqrt{m+\frac{1}{2}}$ sirve para la ortonormalidad de esta familia de *Wavelets*, $a = 2^{-k}$ es el coeficiente de dilatación, y $b = 2^{-k}\,\hat{n}$ es el coeficiente de translación. Los $P_m(t)$ corresponden a los polinomios de Legendre de orden m, y definido en el intervalo $[-1,\,1]$, por la relación de recurencia siguiente:

$$\begin{gathered} P_0(t) = 1,\;\; P_1(t) = t \\ P_{m+1}(t) = \left(\frac{2\,m+1}{m+1}\right) t\, P_m(t) - \left(\frac{m}{m+1}\right) P_{m-1}(t), \quad m = 1,\,2,\,3, \end{gathered} \tag{6.2.13}$$

a. Este método ya da sus frutos para la resolución de ecuaciones como la del p*antógrafo*, con retardo proporcional:

$$\begin{gathered} {}_C D^\nu\, y(t) = h(t,\, y(t),\, y(t-\tau)),\;\; t \in [0,\,1] \\ y^{(i)}(0) = \lambda_i, \quad i \in \{0,\,1,\,\ldots,\,n-1\} \end{gathered} \tag{6.2.14}$$

para $\tau \in (0,\,1]$, $\nu \in (n-1,\,n]$, $n \in \mathbb{N}$ y $\lambda_i \in \mathbb{R}$ para $i = 0,\,1,\,2,\,\ldots,\,n-1$.

b. También se puede mencionar la *ecuación diferencial fraccionaria del tiempo KBK* tiene la estructura:

$$\frac{\partial^{\alpha} u}{\partial t^{\alpha}} + u\,\frac{\partial u}{\partial x} - \lambda_1\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda_2\,\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \lambda_3\,\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = f(x,\,t) \quad t > 0 \quad x > 0 \tag{6.2.15}$$

donde:

α es el orden de la derivada del tiempo fracional

$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_2 \geq 0$ son los parámetros que caracterizan la inestabilidad, la dispersión y la disipación, respectivamente.

La ecuación clásica de KdV-Burger-Kuramoto es un modelo matemático importante que aparece en muchos contextos físicos diferentes para describir precisamente los movimientos de turbulencias y otros sistemas de procesos inestables. También se puede utilizar para describir ondas largas en un fluido viscoso que fluye hacia abajo a lo largo de un plano inclinado, ondas de deriva inestables en el plasma y un modelo de cascada turbulenta en una atmósfera barotrópica.

7. Método *Wavelet* basado en la expansión de *Wavelets de Hermite.*

Las *Wavelets* en este caso vienen dado por la expresión: [VIVE24], [ALI24], [VIDY24]

$$\psi_{n,m}(t) = \begin{cases} 2^{\frac{l}{2}}\,\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,H_m\left(2^l\,t - 2\,n + 1\right) & \text{para } \frac{n-1}{2^{l-1}} \leq t \leq \frac{n}{2^{l-1}} \\ 0 & \text{otramente} \end{cases} \tag{6.2.16}$$

donde $m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ N-1,\ n = 1,\ 2,\ \ldots,\ 2^{l-1}$, y H_m corresponde a los polinomios de Hermite de orden m. Dichos polinomios se definen por:

$$\begin{aligned} &H_0(t) = 1,\ \ H_1(t) = 2\,t, \\ &H_{m+2} = 2\,t\,H_{m+1}(t) - 2\,(n+1)\,H_m(t),\ \ m = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots \end{aligned} \tag{6.2.17}$$

De nuevo, a partir de matrices operacionales de integración y derivación fraccionarias, este método permite resolver ecuaciones como las *ecuaciones de Fornberg–Whitham modificada fraccionarias en el tiempo*, y también los *sistemas acoplados de ecuaciones de Jaulent–Miodek fraccionarias en el tiempo no lineales.*

a. La ecuación *Fornberg–Whitham* es la siguiente:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + u\,\frac{\partial u}{\partial x} = 3\,\frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial u^2}{\partial x^2} + u\,\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \tag{6.2.18}$$

introducida por primera vez por Whitham en 1967 para estudiar el comportamiento cualitativo de la rotura de olas.

Modificando el término no lineal $u\,\frac{\partial u}{\partial x}$ en $u^2\,\frac{\partial u}{\partial x}$ He et al. propusieron una versión extendida de la ecuación de Fornberg–Whitham:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + u^2\,\frac{\partial u}{\partial x} = 3\,\frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial u^2}{\partial x^2} + u\,\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \qquad t>0 \quad x>0 \tag{6.2.19}$$

La ecuación de Fornberg–Whitham modificada fraccionaria en el tiempo tiene la estructura:

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + u^2\,\frac{\partial u}{\partial x} = 3\,\frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial u^2}{\partial x^2} + u\,\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \tag{6.2.20}$$

donde $\alpha(0<\alpha\leq 1)$ representa el orden de la derivada fraccionaria del tiempo. La derivada fraccionaria se considera en el sentido de Caputo.

b. El sistema de ecuaciones de *Jaulent–Miodek acopladas fraccionalmente* en el tiempo está asociado con el potencial de Schrödinger dependiente de la energía:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{3}{2}\,v\,\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \frac{9}{2}\,\frac{\partial v}{\partial x}\,\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 6\,u\,\frac{\partial u}{\partial x} - 6\,u\,v\,\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{3}{2}\,\frac{\partial u}{\partial x}\,v^2 = 0\\ \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} - 6\,\frac{\partial u}{\partial x}\,v - 6\,u\,\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{15}{2}\,v^2 = 0.\end{aligned} \tag{6.2.21}$$

El parámetro $0<\alpha\leq 1$ es el parámetro que representa el orden de la derivada fraccionaria, considerada en el sentido de Caputo.

8. Otros métodos diferentes de los método *Wavelets.*

Existen otras técnicas que permiten resolver las ecuaciones diferenciales de orden fraccionario. Entre ellos, se pueden citar por ejemplo, *la transformada de Shehu*, el *método de Runge-Sistema* aplicable para sistemas epidémicos, el *método de descomposición de Adomian*, el *método de iteración variacional*, el *método de perturbación de homotopía* o también la aproximación de funciones mediante *redes neuronales.*

Bibliografía

Referencias Bibliográficas

[1] [ALHU20]
AL-HUSSEIN, Abdul-Basset A., et al. *A New Time-Delay Model for Chaotic Glucose-Insulin Regulatory System*. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2020, vol. 30, no 12, p. 2050178.

[2] [AGRA22]
AGRAWAL, Khushbu, et al. *Bernoulli wavelet method for non-linear fractional Glucose–Insulin regulatory dynamical system*. Chaos, Solitons & Fractals, 2022, vol. 164, p. 112632.

[3] [AVCI21]
AVCI, İbrahim. *Numerical Simulation of Fractional Delay Differential Equations Using the Operational Matrix of Fractional Integration for Fractional-Order Taylor Basis*. Fractal and Fractional, 2021, vol. 6, no 1, p. 10.

[4] [BHAL11]
BHALEKAR, SACHIN; DAFTARDAR-GEJJI, VARSHA. *A Predictor-Corrector Scheme for Solving Nonlinear Delay Differential Equations of Fractional Order.* Journal of Fractional Calculus and Applications, 2011, vol. 1, no 5, p. 1-9.

[5] [CHAL16]
CHALISHAJAR, Dimplekumar; GEARY, David H.; COX, Geoffrey. *Review Study of Detection of Diabetes Models through Delay Differential Equations.* 2016.

[6] [CHEL06]
CHELYSHKOV, Vladimir S. *Alternative Orthogonal Polynomials and Quadrature*s. Electron. Trans. Numer. Anal, 2006, vol. 25, no 7, p. 17-26.

[7] [CHEN10]
CHEN, Cheng-Liang; TSAI, Hong-Wen. *Modeling the Physiological Glucose–Insulin System on Normal and Diabetic Subjects*. Computer methods and programs in biomedicine, 2010, vol. 97, no 2, p. 130-140.

[8] [CORO20]
CORONEL-ESCAMILLA, Antonio GÓMEZ-AGUILAR, José Francisco. *A Novel Predictor-Corrector Scheme for Solving Variable-order Fractional Delay Differential Equations Involving Operators with Mittag-Leffler Kernel.* Discrete & Continuous Dynamical Systems-S, 2020, vol. 13, no 3, p. 561.

[9] [CORT07]
CORTÉS, Alexander; BALDOMIRO, Hugo; CHAVES, José Andrés. *Del Análisis de Fourier a las Wavelets - Transformada Continua Wavelet (CWT)* . 2007. Universidad Tecnológica de Pereira.

[10] [FERN22]
FERNÁNDEZ-CARREÓN, B., et al. *Analysis of a Fractional-order Glucose-Insulin Biological System with Time Delay*. Chaos Theory and Applications, 2022, vol. 4, no 1, p. 10-18.

[11] [HAMI19]
HAMID, M., et al. *Innovative Operational Matrices Based Computational Scheme for Fractional Diffusion Problems with the Riesz Derivative*. The European Physical Journal Plus, 2019, vol. 134, no 10, p. 1-17.

[12] [HAMI20]
HAMID, M., et al. *A Chelyshkov Polynomial Based Algorithm to Analyze the Transport Dynamics and Anomalous Diffusion in Fractional Model*. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 2020, vol. 551, p. 124227.

[13] [HAMIb20]
HAMID, Muhammad, et al. *A New operational Matrices-based Spectral Method for Multi-order Fractional Problems.* Symmetry, 2020, vol. 12, no 9, p. 1471.

[14] [KARA23]
KARAAGAC, Berat; OWOLABI, Kolade M.; PINDZA, Edson. *A computational technique for the Caputo fractal-fractional diabetes mellitus model without genetic factors*. International Journal of Dynamics and Control, 2023, vol. 11, no 5, p. 2161-2178.

[15] [KHIR23]
KHIRSARIYA, Sagar R.; CHAUHAN, Jignesh P.; HATHIWALA, Gautam S. *Study of fractional diabetes model with and without complication class*. Results in Control and Optimization, 2023, vol. 12, p. 100283.

[16] [LEKD19]
LEKDEE, Natchapon; SIRISUBTAWEE, Sekson; KOONPRASERT, Sanoe. *Bifurcations in a Delayed Fractional Model of Glucose–Insulin Interaction with Incommensurate Orders*. Advances in Difference Equations, 2019, vol. 2019, no 1, p. 1-22.
Bifurcaciones en un modelo fraccional retardado de interacción glucosa-insulina con órdenes inconmensurables

[17] [LI06]
LI, Jiaxu; KUANG, Yang; MASON, Clinton C. *Modeling the Glucose–Insulin Regulatory System and Ultradian Insulin Secretory Oscillations With Two Explicit Time Delays*. Journal of theoretical biology, 2006, vol. 242, no 3, p. 722-735.

[18] [MAKR09]
MAKROGLOU, Athena, et al. *Delay Differential Equation Models in Diabetes Modeling. Theoretical Biology and Medical Modelling*, 2009.

[19] [MART13]
MARTÍNEZ GARCÍA, Miguel. *Ecuaciones Diferenciales de orden Fraccional y sus Aplicaciones*. 2013. Tesis de Licenciatura. Universitat Politècnica de Catalunya.

[20] [MOHA18]
MOHAMMADI, Fakhrodin. *Numerical Solution of Systems of Fractional Delay Differential Equations Using a New Kind of Wavelet Basis.* Computational and Applied Mathematics, 2018, vol. 37, no 4, p. 4122-4144.

[21] [MOHS20]
MOHSENI MOGHADAM, Mahmoud; SAEEDI, Habibollah; RAZAGHZADEH, Nargess. A spectral *Chelyshkov Wavelet Method to Solve Systems of Nonlinear Weakly Singular Volterra Integral Equations*. Journal of Mahani Mathematical Research Center, 2020, vol. 9, no 1, p. 23-43.

[22] [MORA19]
MORADI, L.; MOHAMMADI, F.; BALEANU, Dumitru. *A Direct Numerical Solution of Time-delay Fractional Optimal Control Problems by Using Chelyshkov Wavelets*. Journal of Vibration and Control, 2019, vol. 25, no 2, p. 310-324.

[23] [RAJA20]
RAJAGOPAL, Karthikeyan, et al. *Chaotic dynamics of a fractional order glucose-insulin regulatory system*. Frontiers of Information Technology & Electronic Engineering, 2020, vol. 21, p. 1108-1118.

[24] [RAHI17]
RAHIMKHANI, Parisa; ORDOKHANI, Yadollah; BABOLIAN, Esmail. *A New Operational Matrix based on Bernoulli Wavelets for Solving Fractional Delay Differential Equations*. Numerical Algorithms, 2017, vol. 74, no 1, p. 223-245.

[25] [RAHI19]
RAHIMKHANI, P.; ORDOKHANI, Y.; LIMA, P. M. *An improved composite collocation method for distributed-order fractional differential equations based on fractional Chelyshkov wavelets*. Applied Numerical Mathematics, 2019, vol. 145, p. 1-27.

[26] [RAHI22]
RAHIMKHANI, Parisa; ORDOKHANI, Yadollah; SABERMAHANI, Sedigheh. *Bernoulli wavelet least square support vector regression: Robust numerical method for systems of fractional differential equations*. 2022.

[27] [RAY18]
RAY, Santanu Saha; GUPTA, Arun Kumar. *Wavelet Methods for Solving Partial Differential Equations and Fractional Differential Equations*. CRC Press, 2018.

[28] [RODR20]
RODRÍGUEZ MARTÍN, María. *Introducción al Cálculo Fraccionario y a los Modelos de Crecimiento Tumoral Clásicos y Fraccionarios*. 2020.

[29] [WANG18]
WANG, Jiao, et al. *Numerical solutions for systems of fractional order differential equations with Bernoulli wavelets*. International Journal of Computer Mathematics, 2019, vol. 96, no 2, p. 317-336.

[30] [YADA23]
YADAV, Pooja, et al. *Fractional-order modelling and analysis of diabetes mellitus: Utilizing the Atangana-Baleanu Caputo (ABC) operator*. Alexandria Engineering Journal, 2023, vol. 81, p. 200-209.

Referencias Bibliográficas (Conclusiones)

[31] [ALI24]
ALI, Amina, et al. *An adaptive algorithm for numerically solving fractional partial differential equations using Hermite wavelet artificial neural networks*. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2024, p. 108121.

[32] [CHAV24]
CHAVADA, Anil; PATHAK, Nimisha; KHIRSARIYA, Sagar R. *A fractional mathematical model for assessing cancer risk due to smoking habits.* Mathematical Modelling and Control, 2024, vol. 4, no 3, p. 246-259.

[33] [ERMA23]
ERMAN, Sertac; DEMIR, Ali; OZBILGE, Ebru. *Solving inverse non-linear fractional differential equations by generalized Chelyshkov wavelets.* Alexandria Engineering Journal, 2023, vol. 66, p. 947-956.

[34] [FARM24]
FARMAN, Muhammad, et al. *Numerical study and dynamics analysis of diabetes mellitus with co-infection of COVID-19 virus by using fractal fractional operator.* Scientific Reports, 2024, vol. 14, no 1, p. 16489.

[35] [FARM24b]
FARMAN, Muhammad, et al. *Fractal Fractional Order Operators in Computational Techniques for Mathematical Models in Epidemiology*. CMES-Computer Modeling in Engineering & Sciences, 2024, vol. 138, no 2.

[36] [GOLI24]
GOLIGERDIAN, Arash; OSHAGH, Mahmood Khaksar-e. *The numerical solution of a time-delay model of population growth with immigration using Legendre wavelets.* Applied Numerical Mathematics, 2024, vol. 197, p. 243-257.

[37] [KHIR24]
KHIRSARIYA, Sagar R.; RAO, Snehal B.; HATHIWALA, Gautam S. *Investigation of fractional diabetes model involving glucose–insulin alliance scheme*. International Journal of Dynamics and Control, 2024, vol. 12, no 1, p. 1-14.

[38] [KOUN24]
Koundal, Reena. "*Comparative study on Chebyshev, Legendre, and Lucas wavelets: A review*." Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals (2024): 1-18.

[39] [KUBR24]
KUBRA, Khadija Tul, et al. *Analysis and comparative study of a deterministic mathematical model of SARS-COV-2 with fractal-fractional operators: a case study*. Scientific Reports, 2024, vol. 14, no 1, p. 6431.

[40] [MARA22]
MARASI, Hamidreza; DERAKHSHAN, Mohammadhossein. *A composite collocation method based on the fractional Chelyshkov wavelets for distributed-order fractional mobile-immobile advection-dispersion equation*. Mathematical Modelling and Analysis, 2022, vol. 27, no 4, p. 590–609-590–609.

[41] [NAIK24]
NAIK, Parvaiz Ahmad, et al. *Analysis and modeling with fractal-fractional operator for an epidemic model with reference to COVID-19 modeling*. Partial Differential Equations in Applied Mathematics, 2024, vol. 10, p. 100663.

[42] [PUZI24]
PUZI, Sakinah Mohamad; AZIZ, Nurul Huda Abdul. *Sixth order adams Bashforth-Moulton block method for solving constant and time-dependent neutral delay differential equations.* En AIP Conference Proceedings. AIP Publishing, 2024.

[43] [SALA24]
SALAUDEEN, Abdulwaheed, et al. *Modelling the Early Outbreak of Covid-19 Disease in Malaysia Using SIRS Model with 4-Step Adams-Bashforth-Moulton Predictor-Corrector Method*. Applied Mathematics and Computational Intelligence (AMCI), 2024, vol. 13, no 2, p. 121-136.

[44] [SINH24]
SINGH, Akanksha; KANAUJIYA, Ankur; MOHAPATRA, Jugal. *Fractional Legendre wavelet approach resolving multi-scale optimal control problems involving Caputo-Fabrizio derivative*. Numerical Algorithms, 2024, p. 1-32.

[45] [VIDY24]
VIDYA SHREE, R.; PATIL MALLIKARJUN, B.; KUMBINARASAIAH, S. *Time-varying stretching velocity analysis for an unsteady flow of Williamson fluid by Hermite wavelet*. Journal of Umm Al-Qura University for Applied Sciences, 2024, p. 1-14.

[46] [VIVE24]
VIVEK; KUMAR, Manoj; SHAHNI, Julee. *New algorithm based on Hermite wavelets and Green's function to solve Thomas-Fermi type differential equations.* Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals, 2024, p. 1-20.

[47] [ZHAN23]
ZHANG, Kezheng, et al. *Efficient computational approaches for fractional-order Degasperis-Procesi and Camassa–Holm equations.* Results in Physics, 2023, vol. 50, p. 106549.

Lista de Acrónimos

A continuación se muestran las abreviaturas, acrónimos e iniciales utilizadas a lo largo del proyecto.

Acrónimo	Descripción
ABM	Método Adams – Bashforth – Moulton.
ABMFR	Método Adams – Bashforth – Moulton Fraccionario con Retraso.
ChWM	*Chelyshkov Wavelet Method* – Método *Wavelets* de Chelyshkov.
DDE	*Delay Differential Equations* – Ecuaciones Diferenciales con Retardo.
EDO	*Ordinary Differential Equations* – Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.
EDP	*Partial Differential Equations* – Ecuaciones en Derivadas Parciales.
FDDE	*Fractional Delay Differential Equations* – Ecuaciones Diferenciales con Retardo de orden Fraccionario.
FPDE	*Fractional Partial Differential Equations* – Ecuaciones en Derivadas Parciales Fraccionarias.
MSEIR	Inmunidad, Susceptibles, Expuestos, Infectados, Recuperados.
mU	Miliunidades.
ODS	Objetivos de Desarrollo Sostenible.
PVI	Problemas de Valor Inicial.
SFDDE	*System of Fractional Delay Differential Equations* – Sistema de Ecuaciones Diferenciales con Retardo de orden Fraccionario.
SIR	Susceptibles, Infectados, Recuperados.