

Transmisión de Calor

José Rubén Pérez Domínguez y Luis Mochón Castro

Escuela Técnica Superior de Ingeniería (ICAI)
Universidad Pontificia Comillas

Versión 1.0

Junio 2026

Resumen del libro

Este libro recoge los apuntes de *Transmisión de Calor* que se han venido utilizando durante los últimos años en las clases de ICAI, Universidad Pontificia Comillas, y que ahora se presentan ordenados y ampliados en formato de texto de consulta. El objetivo ha sido proporcionar una base clara y progresiva para plantear, resolver y verificar problemas térmicos de ingeniería.

Estructura del libro El contenido se organiza en cinco capítulos que avanzan de forma progresiva:

- El **Capítulo 1** introduce los tres mecanismos fundamentales —conducción, convección y radiación— y establece el lenguaje y las convenciones de notación que se emplean en el resto del libro.
- El **Capítulo 2** desarrolla la conducción en paredes, cilindros, esferas y aletas, así como el régimen transitorio, los casos con generación interna de calor y la resistencia de contacto.
- El **Capítulo 3** estudia la radiación térmica, con especial atención a los factores de forma, las redes radiantes entre superficies grises y las pantallas de radiación.
- El **Capítulo 4** desarrolla la convección forzada, natural y mixta, tanto en flujo externo como interno, e incluye las correlaciones principales necesarias para el cálculo.
- El **Capítulo 5** cierra los contenidos con los métodos de cálculo de intercambiadores de calor mediante la diferencia de temperatura logarítmica media y el método de efectividad–NUT, incluyendo los tipos constructivos más habituales.

Material de apoyo Cada capítulo combina explicación física, formulación, figuras, ejercicios resueltos, problemas propuestos y actividades de autoevaluación. El Anexo A reúne el formulario de uso frecuente y el Anexo B proporciona las propiedades termofísicas necesarias para los cálculos.

Transmisión de Calor © 2026 by José Rubén Pérez Domínguez and Luis Mochón Castro is licensed under Creative Commons Attribution-NonCommercial-NoDerivatives 4.0 International. To view a copy of this license, visit https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/.

Cómo utilizar este libro

Procedimiento universal de resolución

1. Dibujar el sistema y marcar fronteras, temperaturas y sentidos de flujo.
2. Declarar las hipótesis: régimen, dimensionalidad, propiedades y mecanismos incluidos.
3. Predecir el sentido del calor y el orden de magnitud esperado.
4. Elegir el modelo: balance global, red de resistencias, solución diferencial o correlación.
5. Evaluar las propiedades a la temperatura indicada por el modelo.
6. Resolver manteniendo áreas, signos y unidades coherentes.
7. Comprobar conservación de energía, límites físicos y rangos de validez.
8. Interpretar qué resistencia, mecanismo o parámetro controla el resultado.

Mapa de aprendizaje: de la teoría a la práctica Cada tema se estudia en cuatro pasos: comprender el fenómeno, seleccionar el modelo, practicar y comprobar el aprendizaje.

Tema	Decisión esencial	Práctica guiada	Consolidación
Cap. 1	Mecanismo; serie o paralelo; potencia o flujo.	Ejercicios de la Sec. 1.6.	Resumen de la Sec. 1.4 y autoevaluación de la Sec. 1.5.
Cap. 2	Geometría; estacionario o transitorio; generación y fronteras.	Ejercicios de la Sec. 2.14.	Resumen de la Sec. 2.12 y autoevaluación de la Sec. 2.13.
Cap. 3	Qué llega, qué emite y qué superficies se ven.	Ejercicios de la Sec. 3.14.	Resumen de la Sec. 3.12 y autoevaluación de la Sec. 3.13.
Cap. 4	Flujo externo, interno, natural o mixto; propiedades y rango.	Ejercicios de la Sec. 4.9.	Resumen de la Sec. 4.7 y autoevaluación de la Sec. 4.8.
Cap. 5	Balance; construcción de UA; DTLM o ϵ–NUT.	Ejercicios de la Sec. 5.14.	Resumen de la Sec. 5.12 y autoevaluación de la Sec. 5.13.

El Anexo A contiene las fórmulas y los casos ampliados; el Anexo B reúne las propiedades. El formulario se consulta después de elegir el modelo, nunca antes.

Índice general

1. Introducción **1**

1.1. Conducción. Ley de Fourier . . . 3
1.1.1. Modelo de resistencia térmica equivalente . . . 6
1.2. Convección. Ley de enfriamiento de Newton . . . 6
1.2.1. Modelo de resistencia térmica equivalente . . . 9
1.3. Radiación térmica. Ley de Stefan–Boltzmann . . . 10
1.3.1. Comportamiento radiante de una superficie real . . . 12
1.3.2. Pequeña superficie envuelta por otra mucho mayor . . . 13
1.3.3. Modelo de resistencia térmica equivalente . . . 15
1.4. Resumen operativo . . . 16
1.5. Autoevaluación y asimilación . . . 16
1.6. Ejercicios . . . 17
1.7. Ejercicios resueltos . . . 21
1.7.1. Ejercicio resuelto 1. Una sola resistencia térmica: conducción en pared plana . . . 22
1.7.2. Ejercicio resuelto 2. Pared simple con convección a ambos lados . . . 24
1.7.3. Ejercicio resuelto 3. Pared compuesta de varias capas en serie . . . 26
1.7.4. Ejercicio resuelto 4. Dos caminos en paralelo: muro con aislamiento y montantes . 28
1.7.5. Ejercicio resuelto 5. Convección y radiación en paralelo desde una superficie . . . 30
1.7.6. Ejercicio resuelto 6. Potencia térmica inyectada en un nodo con salida por una pared 32
1.7.7. Ejercicio resuelto 7. Nodo central con potencia inyectada y salida hacia dos lados con convección y radiación . . . 34
1.7.8. Cierre metodológico . . . 36

2. Conducción **38**

2.1. Ecuación diferencial de conducción del calor . . . 40
2.1.1. Modelo mínimo: balance unidimensional . . . 41
2.1.2. Dirección del flujo, dimensionalidad y sistema de coordenadas . . . 41
2.1.3. Propiedades termo-físicas y alcance del modelo de Fourier . . . 42
2.1.4. Profundización: derivación tridimensional . . . 43
2.1.5. Condiciones de contorno y condiciones iniciales . . . 46
2.1.5.1. En temperatura . . . 47

2.1.5.2. En flujo de calor . . . 47
2.2. Conducción estacionaria unidimensional . . . 49
2.2.1. Pared plana . . . 49
2.2.1.1. Simple . . . 49
2.2.1.2. Compuesta o múltiple . . . 51
2.2.2. Pared cilíndrica . . . 52
2.2.2.1. Simple . . . 52
2.2.2.2. Compuesta o múltiple . . . 53
2.2.3. Pared esférica . . . 53
2.2.3.1. Simple . . . 53
2.2.3.2. Compuesta o múltiple . . . 54
2.2.4. Resistencias térmicas equivalentes en geometrías complejas . . . 54
2.2.4.1. Paredes compuestas heterogéneas . . . 57
2.3. Conducción con conductividad dependiente de la temperatura . . . 59
2.4. Conducción estacionaria con generación interna de calor uniformemente distribuida . 60
2.4.1. Barra cilíndrica maciza . . . 63
2.4.2. Barra cilíndrica hueca . . . 63
2.5. Resistencia de contacto . . . 64
2.6. Espesor crítico de aislamiento . . . 66
2.6.1. Función de aislamiento . . . 68
2.6.2. Función de disipación . . . 68
2.7. Aletas . . . 69
2.7.1. Ecuación diferencial general de aletas rectas . . . 70
2.7.2. Caracterización de una aleta . . . 72
2.7.3. Caracterización de una superficie aleteada . . . 73
2.8. Conducción transitoria con resistencia interna despreciable . . . 79
2.8.1. Validez del MRID . . . 83
2.8.2. Otros casos . . . 83
2.9. Conducción transitoria en un sólido semi-infinito . . . 85
2.9.1. Ecuación diferencial y casos de interés . . . 85
2.9.2. Contacto entre sólidos semi-infinitos . . . 88
2.10. Métodos numéricos de conducción . . . 90
2.11. Criterios de revisión rápida . . . 92
2.12. Resumen operativo . . . 94
2.13. Autoevaluación y asimilación . . . 94
2.14. Ejercicios . . . 96

2.15. Ejercicios resueltos . . . 106
2.15.1. Ejercicio resuelto 1. Pared compuesta con aislamiento . . . 107
2.15.2. Ejercicio resuelto 2. Conducción con conductividad variable . . . 109
2.15.3. Ejercicio resuelto 3. Flujo de Couette entre placas . . . 111
2.15.4. Ejercicio resuelto 4. Cable enterrado con aislamiento . . . 113
2.15.5. Ejercicio resuelto 5. Carga térmica de un congelador . . . 116
2.15.6. Ejercicio resuelto 6. Encapsulado esférico en cámara criogénica . . . 119
2.15.7. Ejercicio resuelto 7. Desempañado de luna trasera . . . 122
2.15.8. Ejercicio resuelto 8. Curado radiante de un film sobre sustrato . . . 125
2.15.9. Ejercicio resuelto 9. Pared compuesta con generación y contacto . . . 128
2.15.10.Ejercicio resuelto 10. Cable eléctrico con aislamiento y contacto . . . 131
2.15.11.Ejercicio resuelto 11. Pared con calefacción para evitar condensación . . . 134
2.15.12.Ejercicio resuelto 12. Transistor con cápsula aleteada . . . 137
2.15.13.Ejercicio resuelto 13. Cilindro de motor con aletas . . . 141
2.15.14.Ejercicio resuelto 14. Barra de cobre entre paredes . . . 144
2.15.15.Ejercicio resuelto 15. Congelación de agua mediante una barra aleteada . . . 146
2.15.16.Ejercicio resuelto 16. Pared cilíndrica con generación y aletas . . . 148
2.15.17.Ejercicio resuelto 17. Enfriamiento transitorio de un cubo de aluminio . . . 152
2.15.18.Ejercicio resuelto 18. Radiador de una estación espacial . . . 156
2.15.19.Ejercicio resuelto 19. Congelación de una tubería enterrada . . . 159
2.15.20.Ejercicio resuelto 20. Muro rociado con agua fría . . . 161
2.15.21.Ejercicio resuelto 21. Sólido semiinfinito con radiación solar . . . 164
2.15.22.Ejercicio resuelto 22. Pared contra incendios con cubierta de acero . . . 166
2.15.23.Ejercicio resuelto 23. Onda térmica en una chapa de aluminio . . . 169
2.15.24.Ejercicio resuelto 24. Contacto térmico ideal con distintos materiales . . . 171

3. Radiación térmica **174**

3.1. Radiación térmica y dos bandas espectrales . . . 176
3.2. Radiación del cuerpo negro . . . 178
3.3. Propiedades de radiación . . . 181
3.3.1. Emisividad . . . 181
3.3.2. Absortancia, reflectancia y transmitancia . . . 182
3.4. Ley de Kirchhoff . . . 183
3.5. Intercambio de radiación entre superficies negras y factores de forma . . . 184
3.6. Intercambio de radiación entre superficies grises difusas opacas . . . 189
3.6.1. Etapa 2. Recinto de dos superficies grises difusas . . . 191
3.6.2. Aplicación a recintos de tres superficies grises difusas . . . 194

3.7. Escudos o pantallas de radiación . . . 196
3.8. Radiaciones solar y atmosférica . . . 197
3.9. Propiedades radiantes de una superficie . . . 199
3.10. Efecto invernadero . . . 200
Referencia de notación ampliada . . . 201
3.11. Criterios de revisión rápida y errores típicos . . . 202
3.12. Resumen operativo . . . 203
3.13. Autoevaluación y asimilación . . . 203
3.14. Ejercicios . . . 205
3.15. Ejercicios resueltos . . . 213
3.15.1. Ejercicio resuelto 1. Factores de forma en configuraciones elementales . . . 213
3.15.2. Ejercicio resuelto 2. Álgebra de factores de forma con superficies compuestas . . . 216
3.15.3. Ejercicio resuelto 3. Comprobación de factores de forma compuestos . . . 217
3.15.4. Ejercicio resuelto 4. Disco frente a la superficie interior de un tubo . . . 218
3.15.5. Ejercicio resuelto 5. Horno largo rectangular con superficies grises difusas . . . 220
3.15.6. Ejercicio resuelto 6. Horno cilíndrico de tres superficies . . . 225
3.15.7. Ejercicio resuelto 7. Pantalla radiante entre dos placas paralelas . . . 228
3.15.8. Ejercicio resuelto 8. Intercambio radiante entre esferas concéntricas . . . 231
3.15.9. Ejercicio resuelto 9. Tubo intermedio como pantalla radiante . . . 233
3.15.10.Ejercicio resuelto 10. Temperatura efectiva y potencia radiante del Sol . . . 235
3.15.11.Ejercicio resuelto 11. Bombilla con convección y radiación . . . 238
3.15.12.Ejercicio resuelto 12. Cúpula hemisférica sobre una pista de hielo . . . 240
3.15.13.Ejercicio resuelto 13. Placa horizontal a la intemperie con radiación solar . . . 242
3.15.14.Ejercicio resuelto 14. Placa horizontal junto a una plancha vertical . . . 244
3.15.15.Ejercicio resuelto 15. Equilibrio térmico de un vehículo espacial . . . 246
3.15.16.Ejercicio resuelto 16. Disco aislado sometido a radiación solar . . . 249
3.15.17.Ejercicio resuelto 17. Funcionamiento térmico de un termo . . . 251
3.15.18.Ejercicio resuelto 18. Ropa clara u oscura al Sol y a la sombra . . . 253
3.15.19.Ejercicio resuelto 19. Cubiertas negras en dispositivos electrónicos . . . 255

4. Convección **256**

4.1. Magnitudes mínimas y dependencias funcionales . . . 258
4.1.1. Ley de Newton, resistencia convectiva y Nusselt . . . 259
4.2. Convección forzada: flujo externo . . . 260
4.2.1. Proceso de cálculo de la potencia térmica . . . 260
4.2.2. Placa plana . . . 261
4.2.2.1. Capa límite hidrodinámica o de velocidad . . . 261

4.2.2.2. Capa límite térmica . . . 262
4.2.2.3. Variación cualitativa de $h(x)$ . . . 262
4.2.2.4. Definición del valor medio de h . . . 263
4.2.2.5. Potencia térmica total intercambiada . . . 263
4.2.2.6. Definición del número de Nusselt . . . 263
4.2.2.7. Correlaciones sobre placa plana en convección forzada . . . 264
4.2.3. Cilindros . . . 266
4.2.4. Esferas . . . 268
4.2.5. Bancos de tubos en flujo cruzado . . . 268
4.3. Convección forzada: flujo interno . . . 270
4.3.1. Consideraciones hidrodinámicas . . . 270
4.3.2. Consideraciones térmicas . . . 271
4.3.3. Temperatura media de masa o temperatura media de mezcla adiabática . . . 271
4.3.4. Distribución longitudinal de la temperatura de masa $T_b(x)$ y de la superficial $T_s(x)$ del conducto . . . 272
4.3.4.1. Flujo de calor uniforme $q''_s = \text{cte}$ . . . 272
4.3.4.2. Temperatura superficial uniforme $T_s = \text{cte}$ . . . 272
4.3.5. Potencia térmica intercambiada entre el conducto y el fluido . . . 273
4.3.5.1. Flujo de calor uniforme . . . 273
4.3.5.2. Temperatura superficial uniforme . . . 273
4.3.6. Implementación de flujos con temperatura superficial uniforme y con flujo de calor uniforme . . . 273
4.3.6.1. Flujo de calor uniforme $q''_s = \text{cte}$ . . . 274
4.3.6.2. Temperatura superficial uniforme $T_s = \text{cte}$ . . . 274
4.3.6.3. Variación cualitativa de los perfiles de temperatura del fluido . . . 274
4.3.6.4. Resumen de cálculo para flujo interno . . . 275
4.3.6.5. Flujo laminar desarrollado $\text{Re}_D < 2300$ . . . 275
4.3.6.6. Región de entrada laminar en tubos . . . 276
4.3.6.7. Flujo turbulento desarrollado . . . 276
4.3.6.8. Corrección por variación radial de propiedades . . . 277
4.3.7. Consideraciones finales del flujo interno . . . 277
4.4. Convección natural o libre . . . 278
4.4.1. Flujo natural externo . . . 279
4.4.1.1. Pared vertical . . . 279
4.4.1.2. Pared inclinada . . . 279
4.4.1.3. Cilindro horizontal de gran longitud . . . 280
4.4.1.4. Esfera . . . 280

4.4.1.5. Superficies horizontales . . . 280
4.4.2. Flujo natural confinado . . . 281
4.4.2.1. Recintos rectangulares horizontales . . . 281
4.4.2.2. Recinto hueco rectangular inclinado largo ($H/L > 10$) . . . 281
4.4.2.3. Recinto hueco vertical corto con superficies horizontales aisladas ($H/L < 10$) 282
4.4.2.4. Cilindros largos concéntricos . . . 282
4.4.2.5. Esferas concéntricas . . . 283
4.5. Convección mixta . . . 283
4.5.1. Número de Richardson . . . 284
4.5.2. Orientación de los movimientos . . . 284
4.5.3. Cálculo previo de las contribuciones puras . . . 285
4.5.4. Reglas operativas de convección mixta externa . . . 285
4.5.5. Aplicación por geometrías . . . 287
4.5.5.1. Placa vertical . . . 287
4.5.5.2. Placas horizontales . . . 287
4.5.5.3. Cilindros y esferas . . . 287
4.5.6. Propiedades en las correlaciones mixtas . . . 287
4.5.7. Procedimiento recomendado de cálculo . . . 288
4.5.8. Advertencias de coherencia física . . . 288
4.6. Criterios de revisión rápida y errores típicos . . . 289
4.7. Resumen operativo . . . 290
4.8. Autoevaluación y asimilación . . . 290
4.9. Ejercicios . . . 292
4.10. Ejercicios resueltos . . . 301
4.10.1. Ejercicio resuelto 1. Techo plano de una cabaña en flujo externo . . . 302
4.10.2. Ejercicio resuelto 2. Calentadores discretos sobre una placa plana isoterma . . . 305
4.10.3. Ejercicio resuelto 3. Obtención de Nusselt medio a partir de correlaciones locales . 308
4.10.4. Ejercicio resuelto 4. Lámina deslizante con rozamiento, convección forzada y radiación 310
4.10.5. Ejercicio resuelto 5. Cilindro calentado internamente en flujo cruzado . . . 313
4.10.6. Ejercicio resuelto 6. Enfriamiento de aceite en tubo con pared isoterma . . . 316
4.10.7. Ejercicio resuelto 7. Calentamiento de aire en conducto rectangular . . . 318
4.10.8. Ejercicio resuelto 8. Conducto cuadrado con convección interna y externa . . . 322
4.10.9. Ejercicio resuelto 9. Pérdida térmica a través de la cámara de aire de un colector inclinado . . . 326
4.10.10. Ejercicio resuelto 10. Cámara de aire entre paredes con convección y radiación . . 328
4.10.11. Ejercicio resuelto 11. Disipación de una tarjeta vertical con convección natural y mixta . . . 331

4.10.12.Ejercicio resuelto 12. Calentamiento transitorio de una esfera de acero 335
4.10.13.Ejercicio resuelto 13. Colector solar plano con cubierta de vidrio 340
4.10.14.Ejercicio resuelto 14. Agua en anillo entre tubos concéntricos 344
4.10.15.Ejercicio resuelto 15. Chimenea con calor de humos, radiación solar, convección natural y radiación 348
4.10.16.Ejercicio resuelto 16. Pared compuesta con cámara de aire y radiación entre superficies 353
4.10.17.Ejercicio resuelto 17. Encapsulado esférico en cámara criogénica 358

5. Intercambiadores de calor 360

5.1. Las tres preguntas que gobiernan el cálculo 362
5.2. Balance de energía global 362
5.2.1. Potencia máxima y límites de temperatura 363
5.3. Coeficiente global de transmisión de calor 364
5.3.1. Primer nivel: pared limpia y una sola área 364
5.3.2. Segundo nivel: ensuciamiento, aletas y áreas distintas 364
5.3.3. Valores orientativos de U y control de orden de magnitud 365
5.4. Métodos de cálculo de intercambiadores 366
5.4.1. Tipos de problemas 367
5.4.1.1. Problemas de actuaciones 367
5.4.1.2. Problemas de dimensionado 367
5.4.2. Método de la diferencia de temperatura logarítmica media 367
5.4.2.1. Cálculo explícito de F para un paso por carcasa 368
5.4.2.2. Relación entre cartas $F(P,R_F)$ y método ϵ–NUT 369
5.4.2.3. Gráficas del factor de corrección F 370
5.4.3. Método efectividad–NUT 371
5.4.3.1. Definiciones básicas 371
5.4.3.2. Relaciones de efectividad 371
5.4.3.3. Relaciones inversas de NUT: consulta 374
5.4.3.4. Comportamiento cualitativo de la efectividad 376
5.4.3.5. Gráficas ϵ–NUT 376
5.5. Comparación y recetas de resolución 378
5.6. Configuraciones de flujo: interpretación y consulta 379
5.6.1. Según la variación de temperatura de los fluidos 379
5.6.1.1. Intercambiadores de una corriente 379
5.6.1.2. Intercambiadores de dos corrientes 380
5.6.2. Según la configuración del flujo 380
5.6.2.1. Flujos paralelos en equicorriente 380

5.6.2.2. Flujos paralelos en contracorriente . . . 381
5.6.2.3. Flujo cruzado . . . 381
5.6.2.4. Regeneradores y recuperadores: distinción física . . . 381
5.6.2.5. Número de pasos . . . 382
5.7. Tipos constructivos más habituales: consulta aplicada . . . 382
5.7.1. Intercambiador de carcasa y tubos . . . 382
5.7.1.1. Intercambiador de tubos concéntricos . . . 383
5.7.1.2. Configuraciones multipaso y deflectores . . . 383
5.7.2. Intercambiador de placas . . . 384
5.7.3. Intercambiador de flujos cruzados aleteados . . . 384
5.8. Aspectos constructivos e hidráulicos: alcance del curso . . . 385
5.8.1. Pérdida de carga: bloque mínimo de comprobación . . . 386
5.9. Errores típicos al resolver problemas de intercambiadores . . . 386
5.10. Criterios prácticos de aplicación y verificación . . . 386
5.11. Cierre del capítulo . . . 386
5.12. Resumen operativo . . . 387
5.13. Autoevaluación y asimilación . . . 387
5.14. Ejercicios . . . 389
5.15. Ejercicios resueltos . . . 392
Práctica guiada esencial . . . 393
5.15.1. Ejercicio resuelto 1. Intercambiador de tubos en flujo cruzado aire–agua . . . 395
5.15.2. Ejercicio resuelto 2. Dimensionado comparado de varias configuraciones . . . 397
5.15.3. Ejercicio resuelto 3. Refrigeración de aceite en tubos concéntricos . . . 400
5.15.4. Ejercicio resuelto 4. Determinación de U en un intercambiador 1–2 . . . 402
5.15.5. Ejercicio resuelto 5. Enfriamiento de aire con un baño agua–hielo . . . 405

Bibliografía **408**

Anexo A. Formulario **409**

1. Tema 2. Conducción . . . 409
2. Tema 3. Radiación térmica . . . 413
3. Tema 4. Convección . . . 415
4. Tema 5. Intercambiadores de calor . . . 424

Anexo B. Propiedades termo-físicas **431**

B.1. Sólidos, aislantes y superficies . . . 431
B.2. Agua saturada . . . 434
B.3. Líquidos monofásicos no acuosos y metales líquidos . . . 436

B.4. Aire seco y gases diluidos no reactivos a presión atmosférica 440

CAPÍTULO 1

Introducción

La Termodinámica permite evaluar, entre otras cosas, la cantidad de calor que atraviesa un sistema cuando evoluciona entre dos estados de equilibrio térmico. Sin embargo, las ecuaciones termodinámicas habituales, fundamentalmente el Primer y el Segundo Principios, no aportan directamente tres datos esenciales en muchos problemas de ingeniería: el tiempo que dura el proceso, la potencia térmica puesta en juego y la distribución de temperatura dentro de un cuerpo cuando no existe equilibrio térmico.

Esos aspectos son precisamente los que estudia la transmisión de calor. En este libro se empleará *transmisión de calor* como término rector; otras expresiones tradicionales sólo se mantendrán cuando formen parte de una denominación consolidada.

En un proceso térmico real no basta con saber el estado inicial y el estado final. Normalmente interesa conocer a qué ritmo se intercambia la energía, qué zonas alcanzan las temperaturas más elevadas, cuánto tarda un componente en calentarse o enfriarse, o cómo cambia el proceso al modificar materiales, espesores, áreas de intercambio o condiciones del entorno. La transmisión de calor proporciona las herramientas para responder a esas preguntas y, por ello, es una disciplina complementaria a la Termodinámica.

Tres son los mecanismos fundamentales de transmisión de calor: **conducción**, **convección** y **radiación**.

De forma simplificada, la conducción transmite calor dentro de un sólido o entre sólidos en contacto que están a distinta temperatura. La convección intercambia calor entre una superficie y un fluido. La radiación térmica intercambia energía mediante ondas electromagnéticas y puede propagarse sin contacto material, incluso en el vacío.

Tanto la conducción como la convección requieren un medio material para transportar la energía térmica. La radiación, en cambio, no lo requiere; de hecho, se propaga de forma especialmente eficaz en el vacío cuando no hay absorción intermedia. La radiación procedente del Sol que llega a la Tierra es un ejemplo claro: recorre la mayor parte del trayecto en el vacío y atraviesa la atmósfera en su tramo final.

En este capítulo se emplea q para la potencia térmica total, con unidades de vatio [W], y q'' para el flujo de calor por unidad de área, con unidades [$\mathrm{W/m^2}$]. Cuando se escriba una ley en forma escalar, el signo de q dependerá del sentido positivo elegido; cuando sólo interese la intensidad del intercambio, se usará el valor absoluto de la diferencia de temperaturas.

Notación de ε y ϵ En este libro se usa ε para la emisividad radiativa. Las magnitudes de rendimiento se escriben con ϵ: ϵ_f para la eficacia de aleta y ϵ para la efectividad de un intercambiador de calor. Esta convención evita confundir emisividad, eficacia de aleta y efectividad cuando varios mecanismos aparecen en un mismo problema.

Convenciones globales de lectura y notación

- **Energía y potencia.** Q: energía térmica [J]; q: potencia térmica [W]; q'': flujo de calor superficial [W/m^2]; q''': generación volumétrica [W/m^3].
- **Áreas.** A: genérica; A_c: sección normal; A_s: superficie de intercambio; A_i,A_o: interior y exterior; A_f: aleta; A_b: base no aleteada; A_T: total.
- **Local y medio.** Un subíndice espacial identifica un valor local; una barra superior, un valor medio. Por ejemplo, Nu_x es local y $\overline{Nu}_L$ es medio en L.
- **Temperaturas.** Las diferencias tienen el mismo valor numérico en K y en °C. Use kelvin en radiación, gases ideales y expresiones con temperatura absoluta.
- **Tipo de expresión.** Una *ley* describe un principio; un *modelo* introduce hipótesis; una *correlación* ajusta datos dentro de un rango; una *aproximación* simplifica el cálculo.
- **Redondeo.** Conserve cifras de guarda y presente normalmente el resultado final con dos o tres cifras significativas, salvo que los datos justifiquen más precisión.

Resultados de aprendizaje Al terminar este capítulo, el alumno será capaz de:

- distinguir conducción, convección y radiación a partir del sistema físico;
- diferenciar potencia térmica q y flujo superficial q'';
- aplicar las leyes elementales y reconocer sus hipótesis;
- construir redes térmicas sencillas en serie y en paralelo;
- predecir cómo cambian q y las temperaturas al modificar área, espesor o coeficientes;
- comprobar signos, unidades y orden de magnitud de una solución.

Antes de empezar Balance de energía elemental, álgebra, diferencias de temperatura y derivada de una función de una variable. No se presupone experiencia previa con redes térmicas.

Mapa rápido: ¿qué mecanismo y qué red usar?

1. Gradiente dentro de un sólido o fluido inmóvil: **conducción**.
2. Superficie en contacto con un fluido en movimiento: **convección**.
3. Intercambio entre superficies que se ven, incluso en vacío: **radiación**.
4. Si varios mecanismos actúan entre los mismos nodos de temperatura, sus caminos están **en paralelo**.
5. Si la misma potencia atraviesa elementos sucesivos, las resistencias están **en serie**.

Núcleo. Todo el capítulo constituye la base operativa del libro. Las formulaciones más detalladas de cada mecanismo se desarrollan en los capítulos posteriores.

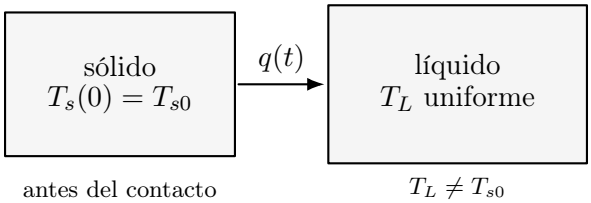


Figura 1.1: Sistema sólido–líquido: el sólido parte de una temperatura inicial uniforme T_{s0} y, al entrar en contacto con un líquido a temperatura T_L, aparece una potencia térmica $q(t)$ que evoluciona con el tiempo hasta el equilibrio.

En la Figura 1.1 se supone un sólido a temperatura inicial uniforme T_{s0} en contacto con un líquido a temperatura $T_L \neq T_{s0}$. La etiqueta del bloque sólido representa el estado inicial; después del contacto, la temperatura en el sólido pasa a ser $T_s(\vec{r},t)$, en general no uniforme. La Termodinámica permite calcular el calor total intercambiado y la temperatura final de equilibrio. La Transmisión de Calor, en cambio, permite estimar el tiempo hasta alcanzar dicho equilibrio, la potencia térmica $q(t)$, variable en general con el tiempo, y la ley de variación de la temperatura del sólido.

La transmisión de calor aparece de forma continua en sistemas de ingeniería y de la vida cotidiana. El cuerpo humano pierde calor de forma permanente y el arropamiento modifica esas pérdidas para alcanzar cierto confort térmico. Muchos equipos domésticos y electrónicos se diseñan total o parcialmente con criterios térmicos: calefacción, aire acondicionado, frigoríficos, calentadores de agua, planchas, ordenadores y televisores.

Las viviendas eficientes se proyectan para minimizar pérdidas de calor en invierno y ganancias en verano. La transmisión de calor también es esencial en radiadores de automóviles, colectores solares, condensadores, evaporadores y componentes de centrales de producción de energía eléctrica. El espesor de aislamiento de paredes, techos y tuberías se determina mediante este tipo de análisis.

Las mismas herramientas permiten estudiar balances térmicos ambientales, incluido el efecto de la concentración de gases de efecto invernadero como el dióxido de carbono, CO_2.

Idea central La Termodinámica compara estados de equilibrio. La Transmisión de Calor estudia el proceso entre ellos: velocidad de intercambio, distribución de temperaturas y evolución temporal.

1.1 Conducción. Ley de Fourier

Considérese una pared plana, como la que separa el interior y el exterior de un edificio, cuyas superficies extremas se encuentran a temperaturas T_1 y T_2. Entre ambas superficies se establece un flujo de calor en el sentido de las temperaturas decrecientes. Si $T_1 > T_2$, el calor se transmite hacia la derecha en el esquema de la Figura 1.2. Este modo de transmisión se denomina **conducción**.

La conducción rige en sistemas donde existe un gradiente térmico sin movimiento macroscópico entre sus partículas. En sólidos, la transmisión de calor se debe al intercambio de energía de vibración de la red cristalina y, en metales, también al flujo de electrones libres. En fluidos en reposo, la conducción se debe a la interacción molecular y al intercambio microscópico de energía entre moléculas vecinas.

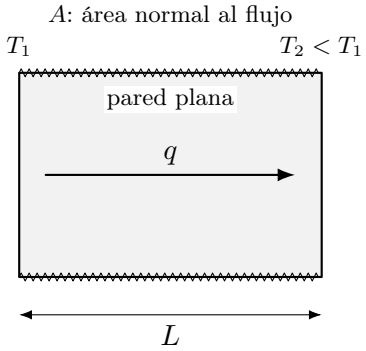


Figura 1.2: Transmisión de calor por conducción a través de una pared plana.

La ley experimental que rige la conducción es la **ley de Fourier**, formulada en 1822. Su forma local rigurosa para un medio isótropo es

$$\boxed{\vec{q}'' = -k\nabla T}, \tag{1.1}$$

donde $\vec{q}''$ es el vector flujo de calor por unidad de área. Para conducción unidimensional en la dirección x, la misma ley se reduce a

$$\boxed{q_x = -kA\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}}. \tag{1.2}$$

En esta segunda expresión q_x es una potencia escalar y A es el área normal a la dirección de transmisión. No debe escribirse una forma intermedia del tipo potencia escalar igual a un vector: la descripción rigurosa es, o bien local y vectorial mediante $\vec{q}''$, o bien unidimensional y escalar mediante q_x. El signo negativo indica que el calor fluye en el sentido de las temperaturas decrecientes, de acuerdo con el Segundo Principio de la Termodinámica.

Aplicabilidad de la ley de Fourier En la forma anterior se supone un medio continuo, con equilibrio termodinámico local, conducción dominante y conductividad escalar k. Esta última hipótesis es adecuada para materiales isótropos; si el material es anisótropo, la conductividad debe tratarse como una magnitud direccional o tensorial. En problemas introductorios se considera además que k es aproximadamente constante en el intervalo de temperaturas estudiado.

La conductividad térmica k es una propiedad característica de cada sustancia, aunque puede variar con la temperatura. La Tabla 1.1 reúne valores orientativos. Sus unidades son

$$[k] = \mathrm{W/(m\,K)} = \mathrm{W/(m\,^\circ C)}. \tag{1.3}$$

La igualdad entre kelvin y grados Celsius en el denominador se debe a que la conductividad relaciona flujos de calor con diferencias de temperatura.

Tabla 1.1: Valores orientativos de conductividad térmica cerca de la temperatura ambiente para materiales habituales.

Material o sustancia	k [W/(m K)]	Condición y comentario
Diamante	1000–2300	Intervalo orientativo cerca de 300 K; depende de pureza, composición isotópica, defectos y calidad cristalina
Plata	429	Metal puro, valor típico a ~ 300 K
Cobre	401	Metal puro, valor típico a ~ 300 K
Oro	317	Metal puro, valor típico a ~ 300 K
Aluminio	237	Metal puro, valor típico a ~ 300 K
Grafito	80–240	Material anisótropo; depende de la dirección cristalográfica
Estaño	67	Metal puro, valor típico
Acero al carbono	~ 60	Acero bajo en carbono; el valor mostrado es alto para esta familia
Cuarzo cristalino (α-cuarzo)	6–14	Intervalo orientativo a 300 K a 323 K; deben distinguirse las direcciones basal y del eje hexagonal
Vidrio Pyrex	1,09	Vidrio borosilicato; valor orientativo
Agua líquida	0,611	Líquido a temperatura ambiente
Alcohol etílico	$\sim 0{,}17$	Líquido a temperatura ambiente; valor típico próximo a 293 K
Polímeros	$\sim 0{,}2$	Rango bajo; depende del polímero y de su estructura
Aceite para motores	$\sim 0{,}145$	Líquido; depende de formulación y temperatura
Corcho	$\sim 0{,}043$	Aislante natural
Helio	0,152	Gas a presión atmosférica y temperatura ambiente
Neón	0,0493	Gas a presión atmosférica y temperatura ambiente
Aire	0,026	Gas a presión atmosférica y temperatura ambiente
Argón	0,018	Gas a presión atmosférica y temperatura ambiente
Aerogel de sílice	$\sim 0{,}017$	Muy aislante; depende de densidad y porosidad
Xenón	0,0057	Gas pesado; muy baja conductividad

Nota: la tabla recoge materiales y valores de referencia para cálculo docente. Son valores orientativos para cálculo docente y diseño preliminar. No deben interpretarse como constantes universales: k depende de temperatura, pureza, humedad, porosidad, tratamiento superficial, dirección cristalográfica y estado del material. En problemas de diseño deben usarse datos del fabricante o tablas de propiedades bajo condiciones definidas.

Los metales presentan elevada conductividad térmica por la contribución de los electrones libres, razón por la que también suelen ser buenos conductores eléctricos. Algunos diamantes monocristalinos alcanzan conductividades aún mayores mediante transporte por vibraciones de red. La diferencia entre diamante y cuarzo no puede atribuirse de forma general a que uno tenga "más imperfecciones": intervienen la estructura y dinámica de la red, las velocidades y vidas medias de los fonones, los procesos anharmónicos y otros mecanismos intrínsecos de dispersión. Impurezas, defectos, tamaño de grano y orientación pueden reducir adicionalmente la conductividad efectiva de ambos materiales.

En líquidos y gases la energía térmica se transmite por intercambio microscópico de energía y cantidad de movimiento entre moléculas. Este mecanismo suele ser menos eficaz que los mecanismos presentes en sólidos. Por esta razón, los fluidos tienen en general menor conductividad térmica que los sólidos y, dentro de los fluidos, los gases suelen presentar valores menores que los líquidos.

1.1.1 Modelo de resistencia térmica equivalente

Para resolver problemas de ingeniería resulta útil expresar la ley de Fourier en términos de una **resistencia térmica**. En una pared plana simple de espesor L, área A, conductividad k y temperaturas extremas T_1 y T_2, la ley de Fourier unidimensional da

$$\boxed{q = -kA\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = \frac{kA}{L}(T_1 - T_2) = \frac{T_1 - T_2}{L/(kA)}}. \tag{1.4}$$

La resistencia térmica conductiva de la pared es

$$\boxed{R = \frac{L}{kA}}. \tag{1.5}$$

Así, la potencia se puede escribir como

$$\boxed{q = \frac{\Delta T}{R}}. \tag{1.6}$$

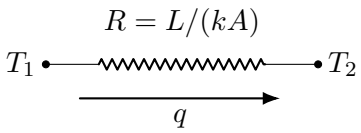


Figura 1.3: Circuito térmico equivalente de una pared plana simple.

La Figura 1.3 representa esta analogía mediante un circuito térmico equivalente. Esta expresión es formalmente análoga a la ley de Ohm. La diferencia de temperatura actúa como potencial térmico, la potencia térmica como corriente térmica y la resistencia como oposición al paso del calor. Esta analogía permite resolver de forma sencilla sistemas formados por varias capas o por distintos mecanismos de transmisión conectados en serie o en paralelo.

Idea central de conducción La conducción aparece cuando existe un gradiente de temperatura en un medio material sin movimiento macroscópico dominante. En una pared plana estacionaria, unidimensional y sin generación interna, todo el fenómeno queda resumido por una resistencia: cuanto mayor sea L y menor sea kA, menor será la potencia transmitida para una misma diferencia de temperatura.

1.2 Convección. Ley de enfriamiento de Newton

La convección es el intercambio de calor entre una superficie, o un cuerpo, y un fluido cuando ambos se encuentran a temperaturas diferentes. Aunque se habla de intercambio convectivo, el

intercambio microscópico de energía entre las moléculas próximas a la pared se produce por conducción. Lo característico de la convección es que dicho intercambio se ve favorecido por el movimiento macroscópico del fluido, denominado **advección**.

El movimiento del fluido puede tener origen natural o inducido; la Figura 1.5 muestra configuraciones típicas y la Figura 1.6 detalla dos casos de convección natural. Existe movimiento natural cuando aparecen fuerzas de flotación debidas a cambios de densidad causados por gradientes de temperatura en presencia de gravedad. El movimiento inducido aparece por una acción externa, como una bomba, un ventilador, un compresor, el viento o un chorro. En general, la advección aumenta la potencia térmica transmitida respecto al caso hipotético de un fluido totalmente en reposo, donde la energía sólo podría transmitirse por conducción a través del fluido.

Aunque no exista diferencia de temperatura entre el fluido y la superficie, si una corriente fluye paralela a una placa con velocidad incidente u_∞, se forma una zona próxima a la pared donde la velocidad aumenta desde cero, por adherencia del fluido a la pared, hasta u_∞ lejos de ella. Esta zona se denomina **capa límite hidrodinámica**. Si además la temperatura de la corriente libre T_∞ difiere de la temperatura superficial T_s, aparece una **capa límite térmica**, dentro de la cual la temperatura evoluciona desde T_s hasta T_∞. En general, ambas capas límite no tienen el mismo espesor, como se esquematiza en la Figura 1.4.

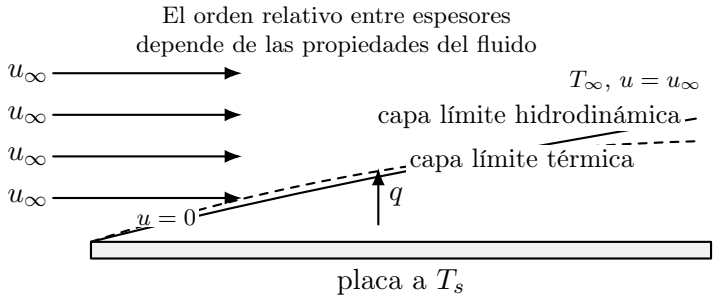


Figura 1.4: Capas límite hidrodinámica y térmica sobre una placa plana.

La convección se rige por la denominada **ley de enfriamiento de Newton**, una relación experimental escrita, para el calor positivo desde la superficie hacia el fluido, como

$$\boxed{q = hA(T_s - T_\infty)}. \tag{1.7}$$

Cuando sólo se desea la magnitud de la potencia, se escribe de forma equivalente $q = hA\Delta T$, con $\Delta T = |T_s - T_\infty|$. En esta expresión, A es el área de intercambio y T_∞ es la temperatura de la corriente libre del fluido, es decir, la temperatura que posee fuera de la capa límite térmica. Si $T_s > T_\infty$, el calor pasa del cuerpo al fluido; si $T_\infty > T_s$, pasa del fluido al cuerpo.

El coeficiente h no es una propiedad del fluido en sentido estricto. Es un parámetro experimental que expresa la potencia térmica transmitida por unidad de área cuando la diferencia entre la superficie y la corriente libre es de un kelvin. Depende de las propiedades del fluido, de la geometría del cuerpo y de la configuración hidrodinámica del flujo alrededor de la superficie. Sus unidades son

$$[h] = \mathrm{W/(m^2\,K)} = \mathrm{W/(m^2\,{}^\circ C)}. \tag{1.8}$$

En general, cuanto mayor es la velocidad del fluido en torno al cuerpo, mayor suele ser h y mayor es la potencia térmica intercambiada para una misma diferencia de temperatura.

Alcance del coeficiente de convección El coeficiente h no es una propiedad tabulada del fluido. Es un parámetro de intercambio que depende de la geometría, del régimen de flujo, de las propiedades del fluido y, en general, de la posición sobre la superficie. Cuando se usa un único valor de h en un problema de ingeniería, se está empleando normalmente un valor medio adecuado para el área considerada. La ley de Newton puede entenderse también como una definición operativa de ese coeficiente.

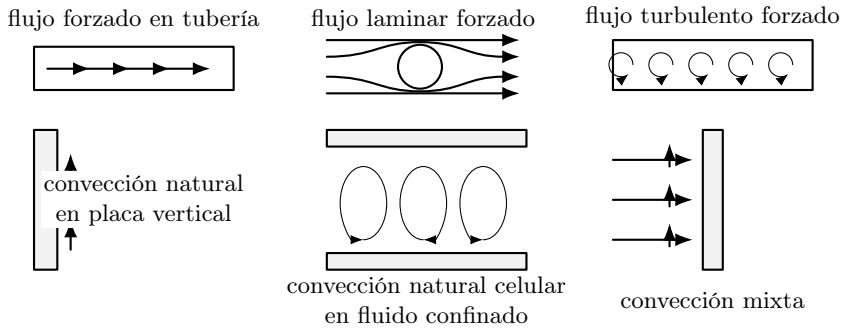


Figura 1.5: Configuraciones típicas del flujo en problemas de convección.

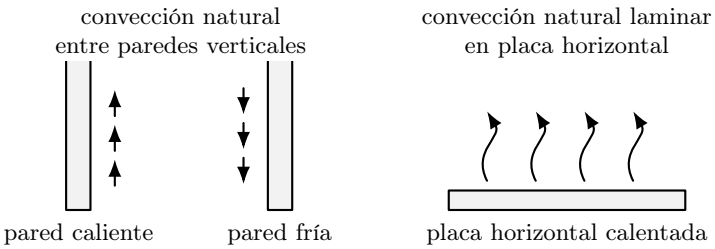


Figura 1.6: Detalles de convección natural presentes en los esquemas introductorios: paredes verticales caliente/fría y placa horizontal calentada.

Justo en las proximidades de la pared, donde la velocidad relativa entre la superficie y las partículas de fluido adheridas es prácticamente nula, el calor se transmite exclusivamente por conducción. Por tanto, la potencia convectiva también puede interpretarse como la conducción a través de la fina capa de fluido próxima a la pared. Si n se mide desde la pared hacia el fluido y $T_s > T_\infty$,

$$\boxed{q = hA(T_s - T_\infty) = -k_{\text{fluido}} A \left.\frac{\partial T}{\partial n}\right|_{\text{pared}}}. \tag{1.9}$$

Esta relación pone de manifiesto el papel de la conductividad del fluido: a mayor k_{fluido}, mayor capacidad de transportar energía desde la pared hacia la corriente y, en general, mayor coeficiente de convección.

Tipos de convección atendiendo a la naturaleza del flujo. La Figura 1.7 compara visualmente la convección natural y la mixta junto a una superficie caliente. Se distinguen tres situaciones principales:

- **Convección natural o libre**. El movimiento del fluido está inducido exclusivamente por fuerzas de flotación que aparecen como consecuencia de diferencias de densidad causadas por gradientes de temperatura en presencia de un campo gravitatorio.
- **Convección forzada**. El movimiento del fluido tiene lugar fundamentalmente por causas externas ajenas al propio fenómeno térmico, como una bomba, un ventilador, un compresor, el viento o un soplado impuesto.
- **Convección mixta**. La flotación puede existir siempre que haya diferencias de densidad y gravedad, pero puede ser despreciable frente al movimiento impuesto. Su importancia relativa se evalúa con $Ri = Gr/Re^2$, usando la misma longitud característica: $Ri \ll 0{,}1$ suele justificar un modelo puramente forzado, mientras que valores mayores requieren estudiar la interacción. Ambos efectos pueden sumarse, oponerse o actuar en direcciones cruzadas, favoreciendo o dificultando la transmisión de calor.

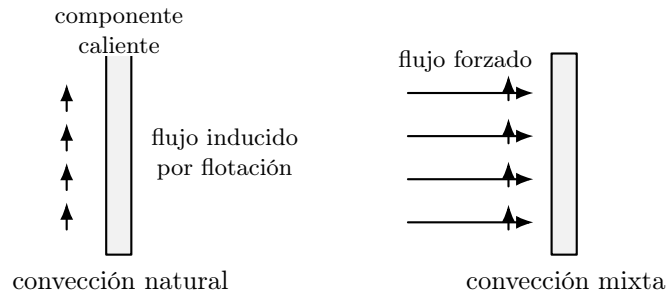


Figura 1.7: Convección natural y convección mixta junto a una superficie vertical caliente.

Tabla 1.2: Rangos orientativos del coeficiente de convección.

Situación	h [W/(m^2 K)]
Convección natural en gases	2–25
Convección natural en líquidos	50–1000
Convección forzada en gases	25–250
Convección forzada en líquidos	50–20000
Convección con cambio de fase: ebullición y condensación	2500–100000

Nota: estos rangos son sólo orientativos. El coeficiente h depende de geometría, régimen de flujo, propiedades, diferencia de temperatura, orientación y condiciones de contorno; no es una propiedad tabulada del fluido.

La Tabla 1.2 resume rangos orientativos de h. Los coeficientes de convección suelen ser mayores en líquidos que en gases porque los líquidos poseen mayor densidad y, especialmente, mayor conductividad térmica. También son mayores en convección forzada que en convección natural porque la velocidad característica del fluido suele ser más elevada. La ebullición y la condensación alcanzan valores extraordinariamente altos de h porque la transmisión de calor se produce de forma latente durante el cambio de fase.

1.2.1 Modelo de resistencia térmica equivalente

La Figura 1.8 muestra la resistencia térmica equivalente asociada a una superficie convectiva. La ley de enfriamiento de Newton puede escribirse en forma de resistencia térmica convectiva. Si ΔT es la diferencia entre la superficie y la corriente libre, entonces

$$\boxed{q = \frac{\Delta T}{1/(hA)} = \frac{\Delta T}{R}} \tag{1.10}$$

con

$$\boxed{R = \frac{1}{hA}}. \tag{1.11}$$

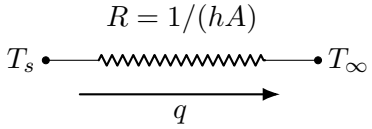


Figura 1.8: Resistencia térmica equivalente de una superficie que intercambia calor por convección.

Idea central de convección La convección combina difusión térmica junto a la pared y movimiento macroscópico del fluido. La ley de Newton no predice por sí sola el coeficiente h; lo organiza como

parámetro de intercambio. Por eso, antes de usar una correlación o un valor tabulado, debe identificarse la geometría, el fluido, el régimen de movimiento y la zona de intercambio.

1.3 Radiación térmica. Ley de Stefan–Boltzmann

La radiación térmica es el intercambio de energía entre cuerpos mediante ondas electromagnéticas, o fotones. A diferencia de la conducción y de la convección, no necesita un medio material para propagarse. Toda materia cuya temperatura sea superior al cero absoluto emite radiación térmica.

La Figura 1.9 ilustra de forma cualitativa cómo cambia el espectro emitido con la temperatura. Sus características principales son las siguientes:

- Es emitida por toda materia a temperatura superior a 0 K.
- Abarca aproximadamente longitudes de onda entre 0,1 µm y 100 µm.
- A baja temperatura, como la temperatura ambiente, domina la radiación de onda larga; a alta temperatura, como en la superficie solar, de unos 5800 K, domina una contribución de onda más corta.
- Se atribuye a cambios en las configuraciones electrónicas de los átomos y moléculas.
- Tiene lugar desde cualquier porción de materia, ya sea sólida o fluida. En la mayoría de líquidos y sólidos es un fenómeno superficial asociado a una capa muy próxima a la superficie, de orden 1 µm.
- No requiere un medio físico material. En ausencia de absorción, la propagación en el vacío es especialmente eficaz.

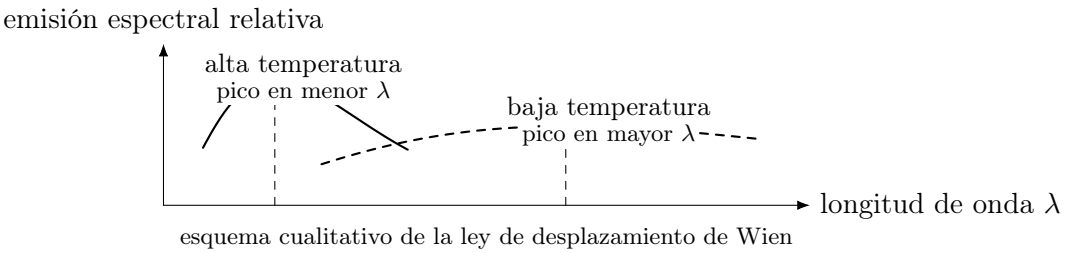


Figura 1.9: Desplazamiento cualitativo del máximo de emisión espectral: al aumentar la temperatura, el pico se desplaza hacia longitudes de onda más cortas y la emisión crece.

Ley de desplazamiento de Wien Para un cuerpo negro, y para la distribución espectral expresada por unidad de longitud de onda, el máximo cumple $\lambda_{\text{máx}} T \simeq 2897{,}8\,\mu\text{m}\,\text{K}$. El mismo máximo se conserva en el modelo gris porque ε_λ es constante; en una superficie real no gris, la variación espectral de ε_λ puede desplazar el máximo emitido. Las dos curvas son sólo esquemáticas, pero ambas deben interpretarse con la misma ordenada física: al aumentar la temperatura, el máximo aparece a menor longitud de onda y la emisión total aumenta. Así, una superficie a temperatura ambiente emite principalmente en el infrarrojo, mientras que una superficie a temperatura solar emite una fracción importante en el visible y en longitudes de onda más cortas.

La ley fundamental de emisión térmica es la **ley de Stefan–Boltzmann**. Stefan la obtuvo experimentalmente en 1879 y Boltzmann la justificó posteriormente a partir de argumentos termodinámicos. Para un cuerpo de área A, temperatura superficial absoluta T_s y emisividad ε, la potencia térmica emitida es

$$\boxed{q = \varepsilon \sigma A T_s^4}. \tag{1.12}$$

En esta ecuación, $0 \leq \varepsilon \leq 1$ es la **emisividad** de la superficie, una magnitud adimensional. No debe confundirse con la **emitancia** o potencia emisiva hemisférica, que se definirá a continuación y tiene

unidades de potencia por unidad de área. La constante de Stefan–Boltzmann se tomará como $\sigma = 5{,}670\,374\,419 \times 10^{-8}\,\mathrm{W/(m^2\,K^4)}$, que en cálculo docente suele redondearse a $5{,}67 \times 10^{-8}\,\mathrm{W/(m^2\,K^4)}$. La temperatura T_s debe expresarse siempre en kelvin cuando aparece elevada a la cuarta potencia.

Para una temperatura superficial dada, la máxima emisión corresponde a $\varepsilon = 1$. El cuerpo ideal con esa propiedad se denomina **cuerpo negro**; a temperatura ambiente se ve de color negro porque absorbe prácticamente toda la radiación visible incidente. Su potencia emitida es

$$\boxed{q_b = \sigma A T_s^4}. \tag{1.13}$$

En radiación es habitual trabajar con potencias por unidad de área. Se define la **emitancia** o potencia radiante emitida por unidad de área como

$$\boxed{E = \frac{q}{A} = \varepsilon \sigma T_s^4} \tag{1.14}$$

y, para el cuerpo negro,

$$\boxed{E_b = \frac{q_b}{A} = \sigma T_s^4}. \tag{1.15}$$

La Figura 1.10 compara el caso difuso ideal con una emisión direccional real. Otra característica del cuerpo negro es que emite con igual intensidad en todas las direcciones desde cualquier punto de la superficie. Se dice por ello que es un **emisor difuso**. La mayoría de superficies reales no emiten de forma perfectamente difusa: presentan direcciones preferentes de emisión, a menudo próximas a la normal de la superficie. Además, la emisividad real puede depender de la longitud de onda. En ingeniería es frecuente simplificar el problema adoptando la hipótesis de **cuerpo gris-difuso**: emisividad independiente de la longitud de onda y de la dirección. La emisividad empleada se interpreta entonces como una emisividad hemisférica media espacial y espectral. En lo sucesivo, dentro de este capítulo introductorio, las superficies reales se tratarán bajo esta aproximación gris-difusa salvo que se indique lo contrario.

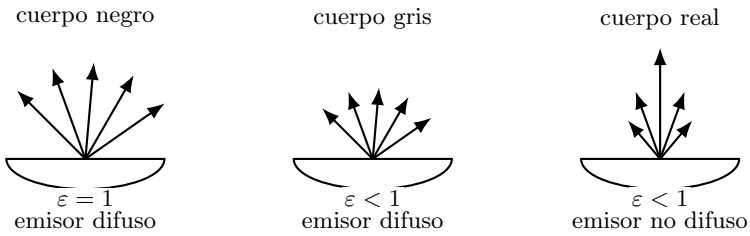


Figura 1.10: Emisión difusa ideal y emisión direccional de una superficie real.

Tabla 1.3: Valores típicos de emisividad total hemisférica en torno a 300 K.

Material	Emisividad
Hoja de aluminio	0,07
Aluminio anodizado*	0,82
Cobre pulido	0,04–0,05
Oro pulido	0,03
Plata pulida	0,02
Acero inoxidable pulido	0,17
Pintura negra mate	0,98
Pintura negra brillante	0,88
Pintura blanca	0,90
Papel blanco	0,92–0,97
Pavimento asfalto	0,85–0,93
Ladrillo rojo	0,93–0,96
Piel humana	0,95
Madera	0,90–0,94
Suelo	0,93–0,96
Agua	0,96
Vegetación	0,92–0,96

* Anodizado: tratamiento electroquímico que genera una capa protectora de óxido sobre el aluminio. Los valores son orientativos y dependen de acabado superficial, oxidación, rugosidad, temperatura, longitud de onda y ángulo de observación.

La Tabla 1.3 recoge valores típicos de emisividad a temperatura ambiente. Los metales pulidos presentan emisividades bajas, mientras que superficies rugosas o pintadas suelen presentar emisividades elevadas. Por eso una superficie metálica brillante puede emitir y absorber poco en comparación con una superficie negra mate, aun estando a la misma temperatura.

1.3.1 Comportamiento radiante de una superficie real

La Figura 1.11 resume las fracciones reflejada, absorbida y transmitida por una superficie real. Considérese una lámina de material sobre la que incide una radiación térmica por unidad de área G, denominada irradiancia o radiación incidente. Parte de esa radiación se refleja, parte se absorbe y parte puede transmitirse a través del material si este no es completamente opaco. Además, la propia lámina emite energía radiante por estar a una determinada temperatura.

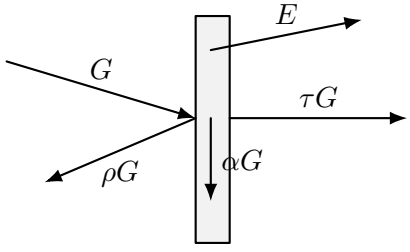


Figura 1.11: Interacción de una superficie real con una irradiancia incidente: reflexión, absorción, transmisión y emisión propia.

Si ρ es la reflectancia, α la absortancia y τ la transmitancia, el balance de la radiación incidente es

$$\boxed{G = \rho G + \alpha G + \tau G} \tag{1.16}$$

y, dividiendo por G,

$$\boxed{1 = \rho + \alpha + \tau}. \tag{1.17}$$

Estas propiedades representan las fracciones de radiación incidente que son reflejadas, absorbidas y transmitidas, respectivamente. Dependen del material, de la rugosidad superficial, de la longitud de onda, de la inclinación de la radiación incidente y, en materiales semitransparentes, del espesor.

Notación de propiedades radiantes En esta sección α representa la absortancia y ρ la reflectancia. En capítulos posteriores los mismos símbolos pueden aparecer con otros significados habituales en transmisión de calor, como la difusividad térmica α o la densidad ρ. El significado correcto debe leerse siempre por el contexto físico y las unidades.

Algunos casos de interés son:

- **Cuerpo opaco**: $\tau = 0$, por lo que $\rho + \alpha = 1$.
- **Cuerpo transparente perfecto**: $\tau = 1$ y, por tanto, $\alpha = \rho = 0$.
- **Cuerpo negro**: $\varepsilon = \alpha = 1$ y, en consecuencia, $\tau = \rho = 0$.

La ley de Kirchhoff se distingue en tres niveles. En equilibrio térmico, la igualdad fundamental es espectral y direccional, $\varepsilon_{\lambda,\Omega} = \alpha_{\lambda,\Omega}$. Las propiedades totales sólo coinciden cuando emisión y absorción se promedian con la misma ponderación espectral y angular. Para una superficie verdaderamente gris, la independencia respecto de λ permite escribir $\varepsilon = \alpha$ para los valores integrados; esto no autoriza a identificar automáticamente la absortancia solar α_s con la emisividad infrarroja $\varepsilon_{\mathrm{IR}}$.

Si además la superficie es opaca, $\rho + \alpha = 1$ y entonces

$$\varepsilon = \alpha = 1 - \rho. \tag{1.18}$$

Esta precisión es importante: la absortancia frente a la radiación solar, dominada por longitudes de onda cortas, no tiene por qué coincidir con la emisividad infrarroja de una superficie a temperatura ambiente. Bajo la hipótesis gris-difusa del presente capítulo, sin embargo, la relación anterior es la aproximación de trabajo. Así se entiende que los metales pulidos, con reflectancia alta, tengan emisividad y absortancia bajas. Por el contrario, las superficies rugosas o negras, con baja reflectancia, presentan emisividad y absortancia altas.

La misma distinción entre onda corta y onda larga permite interpretar de forma cualitativa el efecto invernadero. La radiación solar llega mayoritariamente como radiación de onda corta; la superficie terrestre, mucho más fría que el Sol, reemite energía en forma de infrarrojo de onda larga. Los gases de efecto invernadero modifican el equilibrio al absorber y reemitir parte de esa radiación infrarroja, cambiando el balance radiativo global.

1.3.2 Pequeña superficie envuelta por otra mucho mayor

La Figura 1.12 muestra un caso sencillo y frecuente en intercambio radiante: una superficie pequeña 1, opaca e isoterma a temperatura T_1, completamente envuelta por otra superficie 2 mucho mayor, hueca e isoterma a temperatura T_2.

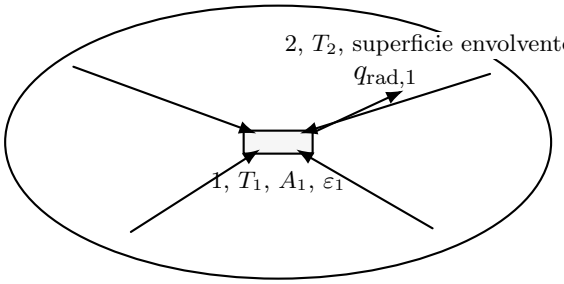


Figura 1.12: Pequeña superficie completamente envuelta por una superficie mucho mayor.

Para un objeto pequeño y convexo, de área A_1, dentro de un recinto mucho mayor, de área A_2, se cumple $A_1/A_2 \to 0$ y $F_{12} = 1$. En esas condiciones, la radiación incidente sobre la superficie pequeña coincide con la emisión de cuerpo negro del entorno:

$$\boxed{G_1 = E_{b2} = \sigma T_2^4}. \tag{1.19}$$

La aproximación no exige que la envolvente sea negra: las reflexiones múltiples de la envolvente termalizan el campo radiante y hacen que el objeto pequeño reciba una irradiación equivalente a la de un cuerpo negro a T_2. Lo despreciable es el retorno de lo que emite o refleja el propio objeto, porque $F_{21} \simeq A_1/A_2 \to 0$ cuando $A_2 \gg A_1$; por ello $G_1 \simeq E_{b2}$ resulta independiente de la emisividad propia de la envolvente. El balance de la Figura 1.13 permite escribir el flujo neto de energía radiante que abandona la superficie 1 como

$$\boxed{q''_{\text{rad},1} = \frac{q_{\text{rad},1}}{A_1} = E_1 + \rho_1 G_1 - G_1 = E_1 - (1-\rho_1)G_1}. \tag{1.20}$$

Como

$$E_1 = \varepsilon_1 E_{b1}, \qquad \alpha_1 + \rho_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad 1 - \rho_1 = \alpha_1, \tag{1.21}$$

resulta

$$\boxed{q''_{\text{rad},1} = \varepsilon_1 E_{b1} - \alpha_1 G_1 = \varepsilon_1 \sigma T_1^4 - \alpha_1 \sigma T_2^4 = \sigma(\varepsilon_1 T_1^4 - \alpha_1 T_2^4)}. \tag{1.22}$$

Si la superficie 1 se comporta como gris difusa, $\alpha_1 = \varepsilon_1$, y entonces

$$\boxed{q''_{\text{rad},1} = \sigma \varepsilon_1 (T_1^4 - T_2^4)}. \tag{1.23}$$

La potencia térmica total es

$$\boxed{q_{\text{rad},1} = \sigma \varepsilon_1 A_1 (T_1^4 - T_2^4)}. \tag{1.24}$$

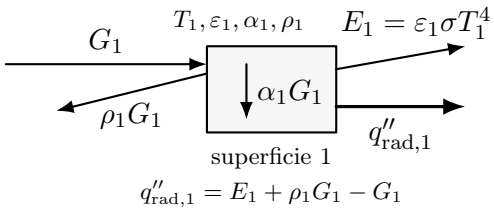


Figura 1.13: Balance visual del flujo radiante neto que abandona la superficie pequeña.

Convenio de signo en radiación En esta subsección $q_{\text{rad},1} > 0$ significa que la superficie 1 pierde energía neta por radiación. Si el resultado es negativo, la superficie 1 gana energía neta por radiación desde la envolvente.

Si $T_1 > T_2$, el flujo neto abandona la superficie 1. Si $T_1 < T_2$, el resultado es negativo con el convenio anterior y la superficie pequeña recibe calor neto por radiación. En todas estas expresiones, T_1 y T_2 deben expresarse en kelvin.

1.3.3 Modelo de resistencia térmica equivalente

La Figura 1.14 muestra la resistencia térmica asociada a la forma linealizada. La ecuación anterior contiene una diferencia de cuartas potencias. Para la geometría concreta de una pequeña superficie gris-difusa completamente rodeada por una superficie mucho mayor, puede reescribirse como una forma lineal equivalente:

$$\boxed{q_{\mathrm{rad},1} = h_r A_1 (T_1 - T_2)}. \tag{1.25}$$

En este caso,

$$\boxed{h_r = \varepsilon_1 \sigma (T_1^2 + T_2^2)(T_1 + T_2)}, \qquad T_1, T_2 \text{ en kelvin.} \tag{1.26}$$

Esta expresión procede de la factorización exacta $T_1^4 - T_2^4 = (T_1 - T_2)(T_1 + T_2)(T_1^2 + T_2^2)$ si h_r se evalúa con las temperaturas reales. En la práctica se habla de **radiación linealizada** cuando h_r se calcula con temperaturas estimadas o medias y se mantiene constante durante la resolución. Conviene subrayar que h_r no posee el mismo significado físico directo que el coeficiente convectivo h y depende fuertemente del nivel de temperatura. La resistencia térmica radiante se define como

$$\boxed{R = \frac{1}{h_r A}}. \tag{1.27}$$

Así,

$$\boxed{q = \frac{\Delta T}{R}}. \tag{1.28}$$

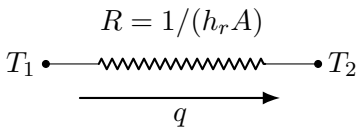


Figura 1.14: Resistencia térmica equivalente asociada a la forma linealizada del intercambio radiante.

Idea central de radiación La radiación térmica no necesita medio material y depende de temperaturas absolutas. La ley exacta es no lineal en T^4; la resistencia radiante $1/(h_r A)$ es una herramienta de cálculo linealizado, útil sólo cuando h_r se ha definido de forma coherente con el intervalo de temperaturas del problema.

1.4 Resumen operativo

Cinco decisiones que deben quedar claras

Situación	Modelo mínimo	Comprobación rápida
Conducción plana	$q = kA(T_1 - T_2)/L$ y $R = L/(kA)$.	Más espesor reduce q; más área o k lo aumentan.
Convección	$q = hA(T_s - T_\infty)$.	Hace falta un salto entre superficie y fluido; h no es una propiedad del material.
Radiación hacia una envolvente grande	$q = \varepsilon\sigma A(T_s^4 - T_{\text{sur}}^4)$.	Usar temperaturas absolutas; válido para una superficie gris-difusa pequeña dentro de una envolvente isoterma mucho mayor, o frente a alrededores efectivamente negros. Entre superficies grises finitas deben incluirse áreas, factores de forma y radiosidades.
Serie	La misma potencia atraviesa todos los elementos: $R_{\text{tot}} = \sum R_i$.	La mayor caída de temperatura aparece en la mayor resistencia.
Paralelo	Las ramas comparten ΔT: $q = \sum q_i$ y $1/R_{\text{eq}} = \sum 1/R_i$.	R_{eq} es menor que cualquiera de las resistencias de rama.

Antes de avanzar Debe poder dibujar el sistema, distinguir Q, q y q'', decidir serie o paralelo y explicar qué parámetro domina sin comenzar por una fórmula.

1.5 Autoevaluación y asimilación

Responda primero sin consultar el capítulo. No se busca reproducir una fórmula de memoria, sino justificar el modelo, anticipar una tendencia y detectar resultados físicamente imposibles. Después compare con las respuestas orientativas.

Comprensión conceptual

C1. Explique la diferencia entre energía térmica Q, potencia térmica q y flujo de calor superficial q''. Indique una unidad de cada magnitud.

C2. ¿Qué condición permite afirmar que dos resistencias térmicas están en serie? ¿Y en paralelo?

C3. Una pared separa un aire interior caliente de un aire exterior frío. ¿Por qué la temperatura de la superficie interior no tiene por qué coincidir con la del aire interior?

C4. En una superficie que pierde calor por convección y radiación, ¿por qué ambos mecanismos se representan como ramas paralelas y no como resistencias en serie?

Microejercicios sin calculadora

M1. Una red equivalente tiene $R_{\text{tot}} = 0{,}20$ K/W y una diferencia de temperatura de 20 K. Calcule la potencia térmica.

M2. Dos ramas en paralelo, de resistencias 0,50 y 1,0 K/W, conectan los mismos nodos separados 10 K. Calcule la potencia de cada rama y la total.

Detecta y corrige el error Corrija las afirmaciones siguientes y explique el motivo.

E1. En una pared multicapa en serie, todas las capas experimentan el mismo salto de temperatura.

E2. El calor debe atravesar primero la resistencia de convección y después la de radiación de una misma superficie.

Análisis de sensibilidad

S1. Si una capa domina la resistencia total de una pared y se duplica su espesor, ¿cómo cambia aproximadamente la potencia térmica para las mismas temperaturas de contorno?

S2. Si se añade un segundo camino conductor en paralelo entre los mismos ambientes, ¿cómo cambian la resistencia equivalente y la potencia térmica total?

Respuestas orientativas **C1.** Q es energía [J], q es energía por unidad de tiempo [W] y q'' es potencia por unidad de área [W/m^2]. **C2.** En serie circula la misma potencia por elementos consecutivos; en paralelo las ramas comparten los dos nodos y sus potencias se suman. **C3.** Entre el aire y la superficie existe una resistencia convectiva, por lo que hace falta un salto de temperatura para transportar calor. **C4.** Ambos mecanismos parten de la misma superficie y actúan simultáneamente hacia sus respectivos entornos. **M1.** $q = 20/0{,}20 = 100$ W. **M2.** $q_1 = 20$ W, $q_2 = 10$ W y $q = 30$ W. **E1.** La potencia es común, pero el salto de cada capa es qR_i y depende de su resistencia. **E2.** Convección y radiación son salidas paralelas; sólo sus potencias se suman. **S1.** Si esa capa domina, duplicar su espesor casi duplica R_{tot} y reduce q aproximadamente a la mitad. **S2.** La resistencia equivalente disminuye y la potencia total aumenta.

Criterio de dominio Si puede justificar al menos ocho respuestas sin recurrir al formulario, está preparado para abordar las redes térmicas básicas. Si falla en serie frente a paralelo o en la diferencia entre q y q'', conviene revisar esos conceptos antes de continuar.

1.6 Ejercicios

Los enunciados siguientes recogen, sin resolución, los ejercicios básicos de redes de resistencias térmicas del capítulo. Su finalidad es que el lector pueda intentar primero el planteamiento físico y matemático antes de consultar la solución desarrollada en la sección siguiente.

Cómo usar las fichas de los problemas La etiqueta de **nivel** indica la carga de modelado, no la longitud del cálculo. Las **competencias** señalan qué se practica y el campo **propiedades** aclara si los valores están dados o deben buscarse e interpolarse. En los problemas avanzados se ofrecen tres pistas graduadas: consulte primero sólo la pista 1; abra las siguientes únicamente si sigue bloqueado. Las respuestas breves deben usarse para comprobar el resultado después de resolver, no como sustituto del planteamiento.

Ejercicio 1. Una sola resistencia térmica: conducción en pared plana.

Nivel: Básico | **Competencias:** resistencia, unidades e interpretación | **Propiedades:** dadas

Una placa plana homogénea de espesor L, área A y conductividad térmica k tiene sus dos superficies mantenidas a temperaturas conocidas T_1 y T_2. Se pide calcular la potencia que atraviesa la placa, el flujo de calor por unidad de área y representar el sistema como una única resistencia térmica.

Datos: $L = 0{,}10$ m, $A = 2{,}0$ m^2, $k = 0{,}80$ W/(m K), $T_1 = 50$ °C, $T_2 = 20$ °C.

Ejercicio 2. Pared simple con convección a ambos lados.

Nivel: Básico | **Competencias:** serie, temperaturas de interfaz y balance | **Propiedades:** dadas

Una pared plana separa un ambiente interior caliente de un ambiente exterior más frío. El calor pasa desde el aire interior hasta la superficie interior por convección, atraviesa la pared por conducción y se evacua al aire exterior por convección. Se pide calcular la potencia térmica perdida y las temperaturas de las dos superficies de la pared.

Datos: $A = 10\ \mathrm{m}^2$, $L = 0{,}20\ \mathrm{m}$, $k = 1{,}2\ \mathrm{W/(m\,K)}$, $h_i = 8\ \mathrm{W/(m^2\,K)}$, $h_o = 25\ \mathrm{W/(m^2\,K)}$, $T_{\infty,i} = 20\ ^\circ\mathrm{C}$, $T_{\infty,o} = -5\ ^\circ\mathrm{C}$.

Ejercicio 3. Pared compuesta de varias capas en serie.

Nivel: Básico | **Competencias:** serie, resistencia dominante y diseño | **Propiedades:** dadas

Un cerramiento está formado por yeso, ladrillo y aislamiento. El calor debe atravesar todas las capas una tras otra desde el ambiente interior hasta el exterior. Se pide calcular la resistencia total, la potencia perdida y determinar qué capa controla principalmente la pérdida de calor.

Datos: $A = 10\ \mathrm{m}^2$, $T_{\infty,i} = 20\ ^\circ\mathrm{C}$, $T_{\infty,o} = 0\ ^\circ\mathrm{C}$, $h_i = 8\ \mathrm{W/(m^2\,K)}$, $h_o = 25\ \mathrm{W/(m^2\,K)}$. Capas: yeso, $L = 0{,}015\ \mathrm{m}$ y $k = 0{,}35\ \mathrm{W/(m\,K)}$; ladrillo, $L = 0{,}120\ \mathrm{m}$ y $k = 0{,}72\ \mathrm{W/(m\,K)}$; aislamiento, $L = 0{,}060\ \mathrm{m}$ y $k = 0{,}040\ \mathrm{W/(m\,K)}$.

Ejercicio 4. Dos caminos en paralelo: muro con aislamiento y montantes.

Nivel: Intermedio | **Competencias:** paralelo, puente térmico y balance | **Propiedades:** dadas

Un muro ligero está formado por una zona mayoritaria de aislamiento y una zona menor ocupada por montantes estructurales más conductores. Una parte del calor atraviesa el aislamiento y otra parte atraviesa los montantes. Se pide calcular la pérdida total de calor y valorar el efecto del puente térmico introducido por los montantes.

Datos: $A_{\mathrm{tot}} = 12\ \mathrm{m}^2$, $A_{\mathrm{ais}} = 10{,}2\ \mathrm{m}^2$, $A_{\mathrm{m}} = 1{,}8\ \mathrm{m}^2$, $L = 0{,}12\ \mathrm{m}$, $k_{\mathrm{ais}} = 0{,}040\ \mathrm{W/(m\,K)}$, $k_{\mathrm{m}} = 0{,}50\ \mathrm{W/(m\,K)}$, $h_i = 8\ \mathrm{W/(m^2\,K)}$, $h_o = 25\ \mathrm{W/(m^2\,K)}$, $T_{\infty,i} = 20\ ^\circ\mathrm{C}$, $T_{\infty,o} = 0\ ^\circ\mathrm{C}$.

Ejercicio 5. Convección y radiación en paralelo desde una superficie.

Nivel: Intermedio | **Competencias:** mecanismos en paralelo e interpretación | **Propiedades:** dadas

Una placa caliente está expuesta simultáneamente al aire y a un entorno radiante. La superficie pierde calor por convección hacia el aire y por radiación hacia las paredes del entorno. Se pide calcular la potencia total perdida y comparar la contribución de cada mecanismo.

Datos: $A = 1{,}5\ \mathrm{m}^2$, $T_s = 80\ ^\circ\mathrm{C}$, $T_\infty = 25\ ^\circ\mathrm{C}$, $T_{\mathrm{sur}} = 20\ ^\circ\mathrm{C}$, $h = 10\ \mathrm{W/(m^2\,K)}$, $h_r = 6\ \mathrm{W/(m^2\,K)}$.

Ejercicio 6. Potencia térmica inyectada en un nodo con salida por una pared.

Nivel: Intermedio | **Competencias:** balance nodal, fuente y resistencia | **Propiedades:** dadas

Un pequeño elemento resistivo introduce una potencia térmica conocida en una placa. Toda esa potencia debe evacuarse atravesando una pared plana y saliendo después por convección hacia el ambiente. Se pide calcular la temperatura del nodo donde se inyecta calor y la temperatura de la superficie exterior.

Datos: $q_{\mathrm{iny}} = 150\ \mathrm{W}$, $L = 0{,}040\ \mathrm{m}$, $k = 1{,}5\ \mathrm{W/(m\,K)}$, $A = 0{,}50\ \mathrm{m}^2$, $h = 12\ \mathrm{W/(m^2\,K)}$, $T_\infty = 25\ ^\circ\mathrm{C}$.

Ejercicio 7. Nodo central con potencia inyectada y salida hacia dos lados con convección y radiación.

Nivel: Avanzado | **Competencias:** red mixta, sistema nodal e interpretación | **Propiedades:** dadas

Un elemento plano activo genera una potencia térmica q_{iny} en un nodo central. Desde ese nodo el calor puede salir hacia la izquierda y hacia la derecha atravesando dos paredes planas distintas. En cada lado, la superficie exterior pierde calor por convección hacia un fluido y por radiación linealizada hacia un entorno radiante. Se pide determinar la temperatura del nodo central y el reparto de potencia hacia cada lado.

Datos: $q_{\text{iny}} = 120$ W. Lado izquierdo: $L = 0{,}030$ m, $k = 1{,}20$ W/(m K), $A = 0{,}60$ m^2, $h = 8$ W/(m^2 K), $h_r = 5$ W/(m^2 K), $T_\infty = 20$ °C, $T_{\text{sur}} = 18$ °C. Lado derecho: $L = 0{,}050$ m, $k = 0{,}50$ W/(m K), $A = 0{,}40$ m^2, $h = 25$ W/(m^2 K), $h_r = 4$ W/(m^2 K), $T_\infty = 10$ °C, $T_{\text{sur}} = 8$ °C.

Pistas graduadas para los problemas avanzados

Use una pista cada vez

Ej. 7

Pista 1 – modelo. Balance de nodo con varias ramas en paralelo; en cada lado pueden coexistir convección y radiación.

Pista 2 – ecuación. Escriba un balance en el nodo central y exprese cada potencia de rama como $(T_N - T_{\text{eq}})/R_{\text{rama}}$.

Pista 3 – control. La suma de todas las potencias salientes debe igualar la fuente. Si una potencia calculada resulta negativa respecto a la flecha supuesta, el flujo real circula en el sentido contrario; en una rama térmica pasiva el calor sigue yendo del nodo de mayor temperatura al de menor.

Respuestas breves de comprobación

Respuestas orientativas Consulte este bloque sólo después de completar el planteamiento. Se da el resultado final y un control físico; la solución desarrollada permanece en la sección siguiente.

Ej. 1

Resultado. $R = 0{,}0625$ K/W, $q = 480$ W y $q'' = 240$ W/m^2.

Control. Compruebe que $q > 0$ con el sentido elegido, que q/A tiene unidades de flujo y que duplicar L reduciría la potencia a la mitad.

Ej. 2

Resultado. $q = 754$ W, $T_{s,i} = 10{,}6$ °C y $T_{s,o} = -2{,}0$ °C.

Control. El mismo q debe atravesar las tres resistencias y la suma de las caídas qR debe reproducir la diferencia total de temperaturas.

Ej. 3

Resultado. $R_{\text{tot}} = 0{,}187$ K/W y $q = 107$ W; el aislamiento aporta aproximadamente el 80 % de la resistencia.

Control. Las temperaturas de interfaz deben ser monótonas entre los ambientes y la mayor caída debe coincidir con la mayor resistencia.

Ej. 4

Resultado. $q_{\text{ais}} = 64{,}5$ W, $q_{\text{m}} = 88{,}9$ W y $q = 153$ W.

Control. Verifique $q = q_{\text{ais}} + q_{\text{m}}$ y que ambas ramas experimentan la misma diferencia de temperaturas entre ambientes.

Ej. 5

Resultado. $q_{\text{conv}} = 825$ W, $q_{\text{rad}} = 540$ W y $q = 1365$ W.

Control. La potencia total debe ser la suma de ambas contribuciones; cada una debe cambiar de signo si se invierte su diferencia de temperatura motriz.

Ej. 6

Resultado. $T_N = 58{,}0$ °C y $T_s = 50{,}0$ °C.

Control. La potencia que abandona el nodo debe ser exactamente igual a la potencia inyectada y la temperatura calculada debe ser compatible con el sentido del flujo.

Ej. 7

Resultado. $T_N = 29{,}58$ °C, $T_{s,L} = 27{,}04$ °C, $T_{s,R} = 14{,}82$ °C; $q_L \simeq 60{,}9$ W y $q_R \simeq 59{,}1$ W.

Control. La suma de todas las potencias salientes debe igualar la fuente. Si una potencia calculada resulta negativa respecto a la flecha supuesta, el flujo real circula en el sentido contrario; en una rama térmica pasiva el calor sigue yendo del nodo de mayor temperatura al de menor.

1.7 Ejercicios resueltos

Cómo trabajar los ejercicios resueltos Antes de leer las operaciones, deténgase en el recuadro **Antes de calcular**: anticipe el sentido del calor, la resistencia o capacidad dominante y el modelo que espera utilizar. Al terminar, use la **Comprobación final** para verificar balance, límites físicos, unidades y rango de validez. El objetivo no es adivinar el número, sino saber qué resultado sería razonable antes de obtenerlo.

La tabla resumen del apartado anterior reúne las piezas elementales del capítulo: una resistencia conductiva, una resistencia convectiva y una resistencia radiante linealizada. En esta sección esas piezas se combinan por primera vez en redes muy sencillas, con un objetivo eminentemente metodológico: aprender a mirar el sistema físico, identificar los nodos de temperatura, decidir por dónde puede circular el calor y escribir un balance de energía claro antes de empezar a calcular.

El bloque se ha ordenado de forma progresiva. Los ejercicios resueltos 1 a 3 tratan redes en serie; el ejercicio resuelto 4 introduce caminos en paralelo a través de materiales distintos; el ejercicio resuelto 5 muestra dos mecanismos que actúan simultáneamente desde una misma superficie; y los ejercicios resueltos 6 y 7 incorporan una fuente térmica en un nodo. De ese modo, cada ejercicio resuelto reutiliza las ideas del anterior y añade una sola dificultad nueva.

En todos los ejercicios resueltos se sigue la misma secuencia: (i) simplificaciones físicas, (ii) modelo de resistencias, (iii) ecuaciones generales, (iv) resolución numérica y (v) interpretación de ingeniería. La intención no es memorizar fórmulas aisladas, sino consolidar una forma ordenada de plantear problemas de transmisión de calor.

Todos los ejercicios resueltos de esta sección son planos. Las geometrías cilíndricas y esféricas modifican la expresión de la resistencia conductiva porque el área normal al flujo cambia con la posición; por eso se dejan para el capítulo específico de conducción.

Regla práctica Una resistencia térmica une dos nodos de temperatura. Si el calor está obligado a atravesar varios elementos uno detrás de otro, las resistencias están en serie. Si puede repartirse entre varios caminos que unen los mismos nodos extremos, las ramas están en paralelo y las potencias se suman.

Uso de temperaturas En estos ejemplos se usan grados Celsius porque las redes se formulan con diferencias de temperatura lineales. Si se utilizase la ley exacta de Stefan–Boltzmann, las temperaturas deberían expresarse en kelvin. Aquí la radiación aparece sólo en forma linealizada mediante h_r; ese coeficiente debe haberse obtenido previamente con temperaturas absolutas, aunque después la red lineal pueda resolverse con diferencias en grados Celsius o kelvin.

Errores comunes a evitar No todas las resistencias pueden escribirse como $R = L/(kA)$: esa expresión sólo representa una pared plana con conducción estacionaria, unidimensional, sin generación interna, con área normal al flujo constante y conductividad k aproximadamente constante. Si el área cambia, la geometría no es plana, hay contacto imperfecto, generación interna o grandes variaciones de temperatura, el modelo debe revisarse. En interfaces reales entre dos sólidos puede aparecer una resistencia adicional de contacto, normalmente expresada por unidad de área como R''_c; se estudiará con detalle en el capítulo de conducción. Tampoco debe sumarse automáticamente $h + h_r$: desde una misma superficie, convección y radiación son salidas en paralelo. Sólo si $T_\infty = T_{\text{sur}}$ puede escribirse $q = A(h + h_r)(T_s - T_\infty)$. Si $T_\infty \neq T_{\text{sur}}$, hay que escribir por separado $hA(T_s - T_\infty)$ y $h_r A(T_s - T_{\text{sur}})$, o calcular una temperatura equivalente ponderada.

1.7.1 Ejercicio resuelto 1. Una sola resistencia térmica: conducción en pared plana

Descripción del problema

Una placa plana homogénea de espesor L, área A y conductividad térmica k tiene sus dos superficies mantenidas a temperaturas conocidas T_1 y T_2. Esta situación representa el caso más elemental de conducción estacionaria: una diferencia de temperatura aplicada a un sólido plano produce una potencia térmica. Se pide calcular la potencia que atraviesa la placa, el flujo de calor por unidad de área y representar el sistema como una única resistencia térmica.

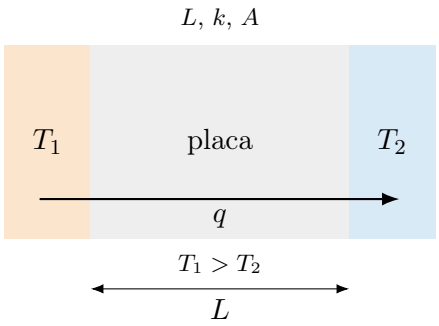


Figura 1.15: Placa plana con dos superficies mantenidas a temperaturas conocidas.

Datos.

$$L = 0{,}10\ \text{m}, \quad A = 2{,}0\ \text{m}^2, \quad k = 0{,}80\ \text{W/(m K)}, \quad T_1 = 50\ ^\circ\text{C}, \quad T_2 = 20\ ^\circ\text{C}.$$

Resolución del problema

Antes de calcular

Predicción física. El calor debe ir de T_1 a T_2. La potencia aumentará con el área y la conductividad, y disminuirá al aumentar el espesor.

Modelo esperado. Una única resistencia de conducción plana, $R = L/(kA)$, entre dos temperaturas superficiales conocidas.

1. Simplificaciones. Se considera régimen estacionario, conductividad constante y conducción unidimensional perpendicular a la placa. No hay generación interna de calor y se desprecia cualquier pérdida por los bordes.

2. Modelo adoptado de resistencias. La Figura 1.15 muestra la placa considerada. Los nodos de temperatura son las dos superficies, T_1 y T_2. Entre ellos sólo hay una resistencia conductiva, representada en la Figura 1.16:

$$R_{\text{cond}} = \frac{L}{kA}.$$

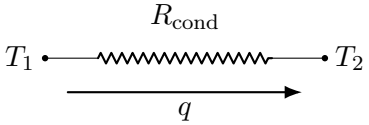


Figura 1.16: Red térmica equivalente del ejercicio resuelto 1.

3. Ecuaciones.

$$R_{\text{cond}} = \frac{L}{kA}, \qquad q = \frac{T_1 - T_2}{R_{\text{cond}}}, \qquad q'' = \frac{q}{A}. \tag{1.29}$$

4. Resolución de ecuaciones.

$$R_{\text{cond}} = \frac{0{,}10}{0{,}80 \cdot 2{,}0} = 0{,}0625 \text{ K/W},$$
$$q = \frac{50 - 20}{0{,}0625} = 480 \text{ W},$$
$$q'' = \frac{480}{2{,}0} = 240 \text{ W/m}^2.$$

5. Conclusiones o interpretación. Este es el caso base de todos los modelos de resistencia: una diferencia de temperatura aplicada a una resistencia térmica produce una potencia térmica. Si se duplicase el espesor, la resistencia se duplicaría y la potencia se reduciría a la mitad. Si se duplicase el área, la resistencia se reduciría a la mitad y la potencia se duplicaría.

Comprobación final

Compruebe que $q > 0$ con el sentido elegido, que q/A tiene unidades de flujo y que duplicar L reduciría la potencia a la mitad.

1.7.2 Ejercicio resuelto 2. Pared simple con convección a ambos lados

Descripción del problema

Una pared plana separa un ambiente interior caliente de un ambiente exterior más frío. El calor pasa primero desde el aire interior hasta la superficie interior por convección, después atraviesa la pared por conducción y finalmente se evacua al aire exterior por convección. Se pide calcular la potencia térmica perdida y las temperaturas de las dos superficies de la pared. La lectura de ingeniería consiste en identificar qué resistencia provoca la mayor caída de temperatura.

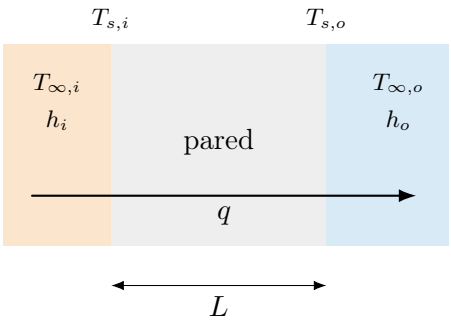


Figura 1.17: Pared plana con convección interior y exterior.

Datos.

$$A = 10\ \text{m}^2, \quad L = 0{,}20\ \text{m}, \quad k = 1{,}2\ \text{W/(m K)}, \quad h_i = 8\ \text{W/(m}^2\,\text{K)}, \quad h_o = 25\ \text{W/(m}^2\,\text{K)},$$

$$T_{\infty,i} = 20\ ^\circ\text{C}, \qquad T_{\infty,o} = -5\ ^\circ\text{C}.$$

Resolución del problema

Antes de calcular

Predicción física. Las dos temperaturas superficiales deben quedar entre las temperaturas de los fluidos. La mayor caída aparecerá en la resistencia de mayor valor.

Modelo esperado. Tres resistencias en serie: convección interior, conducción en la pared y convección exterior.

1. Simplificaciones. El régimen es estacionario, la pared es homogénea, k es constante y el flujo se considera unidimensional. La radiación no se incluye para aislar el concepto de resistencias en serie.

2. Modelo adoptado de resistencias. La Figura 1.17 muestra la pared con convección a ambos lados. Los nodos son $T_{\infty,i}$, $T_{s,i}$, $T_{s,o}$ y $T_{\infty,o}$. El calor debe atravesar tres resistencias una detrás de otra, por lo que están en serie, como indica la Figura 1.18. La misma potencia q atraviesa las tres.

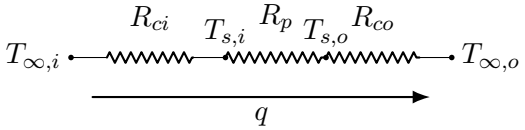


Figura 1.18: Red en serie: convección interior, conducción en pared y convección exterior.

3. Ecuaciones.

$$R_{ci} = \frac{1}{h_i A}, \qquad R_p = \frac{L}{kA}, \qquad R_{co} = \frac{1}{h_o A}, \tag{1.30}$$

$$R_{\text{tot}} = R_{ci} + R_p + R_{co}, \qquad q = \frac{T_{\infty,i} - T_{\infty,o}}{R_{\text{tot}}}. \tag{1.31}$$

Las temperaturas superficiales se obtienen restando caídas de temperatura:

$$T_{s,i} = T_{\infty,i} - qR_{ci}, \qquad T_{s,o} = T_{s,i} - qR_p. \tag{1.32}$$

4. Resolución de ecuaciones.

$$\begin{aligned} R_{ci} &= \frac{1}{8 \cdot 10} = 0{,}0125 \text{ K/W}, \\ R_p &= \frac{0{,}20}{1{,}2 \cdot 10} = 0{,}0167 \text{ K/W}, \\ R_{co} &= \frac{1}{25 \cdot 10} = 0{,}0040 \text{ K/W}, \\ R_{\text{tot}} &= 0{,}0332 \text{ K/W}, \\ q &= \frac{20 - (-5)}{0{,}0332} = 754 \text{ W}. \end{aligned}$$

Las caídas de temperatura son

$$\begin{aligned} \Delta T_{ci} &= qR_{ci} = 754 \cdot 0{,}0125 = 9{,}43 \text{ K}, \\ \Delta T_p &= qR_p = 754 \cdot 0{,}0167 = 12{,}6 \text{ K}, \\ \Delta T_{co} &= qR_{co} = 754 \cdot 0{,}0040 = 3{,}02 \text{ K}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$T_{s,i} = 20 - 9{,}43 = 10{,}6 \text{ °C}, \qquad T_{s,o} = 10{,}6 - 12{,}6 = -2{,}0 \text{ °C}.$$

5. Conclusiones o interpretación. La potencia es la misma en las tres resistencias porque están en serie. La mayor caída aparece en la pared, seguida de la película convectiva interior. La convección exterior tiene una resistencia menor porque h_o es mayor. En una decisión de diseño, convendría actuar sobre la resistencia dominante: aumentar L, reducir k o añadir una capa aislante.

Comprobación final

El mismo q debe atravesar las tres resistencias y la suma de las caídas qR debe reproducir la diferencia total de temperaturas.

1.7.3 Ejercicio resuelto 3. Pared compuesta de varias capas en serie

Descripción del problema

Un cerramiento está formado por yeso, ladrillo y aislamiento. El calor debe atravesar todas las capas una tras otra desde el ambiente interior hasta el exterior. Se pide calcular la resistencia total, la potencia perdida y determinar qué capa controla principalmente la pérdida de calor. Este problema representa una pared de edificio idealizada como un sistema plano en serie.

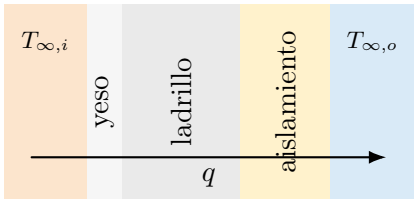


Figura 1.19: Cerramiento compuesto por varias capas planas.

Datos.

$$A = 10\ \text{m}^2, \quad T_{\infty,i} = 20\ ^\circ\text{C}, \quad T_{\infty,o} = 0\ ^\circ\text{C}, \quad h_i = 8, \quad h_o = 25\ \text{W/(m}^2\,\text{K)}.$$

Capa	L [m]	k [W/(m K)]
Yeso	0,015	0,35
Ladrillo	0,120	0,72
Aislamiento	0,060	0,040

En las ecuaciones se empleará la notación k_{yeso}, k_{ladrillo} y k_{ais} para evitar confundir los índices con capas no definidas.

Resolución del problema

Antes de calcular

Predicción física. La capa con menor k/L no tiene por qué dominar; lo hace la que tenga mayor $L/(kA)$. El perfil tendrá cambios de pendiente entre materiales.

Modelo esperado. Cadena de resistencias conductivas y superficiales en serie.

1. Simplificaciones. El cerramiento se considera plano, con flujo unidimensional y régimen estacionario. Cada capa es homogénea y sus propiedades son constantes. No se consideran puentes térmicos ni radiación.

2. Modelo adoptado de resistencias. La Figura 1.19 esquematiza el cerramiento compuesto. Todas las capas están en el mismo camino del calor. Por tanto, las resistencias se suman en serie, como se muestra en la Figura 1.20: convección interior, tres conducciones y convección exterior.

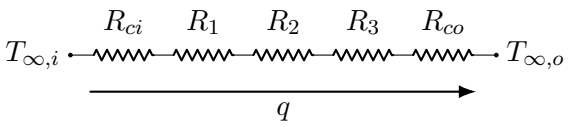


Figura 1.20: Red equivalente de una pared compuesta en serie.

3. Ecuaciones.

$$R_{\text{tot}} = \frac{1}{h_i A} + \frac{L_{\text{yeso}}}{k_{\text{yeso}} A} + \frac{L_{\text{ladrillo}}}{k_{\text{ladrillo}} A} + \frac{L_{\text{ais}}}{k_{\text{ais}} A} + \frac{1}{h_o A}, \qquad q = \frac{T_{\infty,i} - T_{\infty,o}}{R_{\text{tot}}}. \tag{1.33}$$

4. Resolución de ecuaciones.

$$
\begin{aligned}
R_{ci} &= 0{,}0125\ \mathrm{K/W},\\
R_1 &= \frac{0{,}015}{0{,}35 \cdot 10} = 0{,}004\,29\ \mathrm{K/W},\\
R_2 &= \frac{0{,}120}{0{,}72 \cdot 10} = 0{,}0167\ \mathrm{K/W},\\
R_3 &= \frac{0{,}060}{0{,}040 \cdot 10} = 0{,}150\ \mathrm{K/W},\\
R_{co} &= 0{,}0040\ \mathrm{K/W},\\
R_{\mathrm{tot}} &= 0{,}187\ \mathrm{K/W},\\
q &= \frac{20 - 0}{0{,}187} = 107\ \mathrm{W}.
\end{aligned}
$$

5. Conclusiones o interpretación. La capa aislante domina claramente la resistencia total: $R_3 = 0{,}150$ K/W, alrededor del 80 por ciento del total. La potencia perdida es baja porque la capa de baja conductividad controla el paso del calor. Este resultado justifica por qué, en cerramientos, pequeñas capas de aislamiento pueden reducir mucho más la pérdida térmica que capas gruesas de materiales más conductores.

Comprobación final

Las temperaturas de interfaz deben ser monótonas entre los ambientes y la mayor caída debe coincidir con la mayor resistencia.

1.7.4 Ejercicio resuelto 4. Dos caminos en paralelo: muro con aislamiento y montantes

Descripción del problema

Un muro ligero está formado por una zona mayoritaria de aislamiento y una zona menor ocupada por montantes estructurales más conductores. El calor no está obligado a pasar por un único camino: una parte atraviesa el aislamiento y otra parte atraviesa los montantes. Se pide calcular la pérdida total de calor y valorar el efecto del puente térmico introducido por los montantes.

Las dos zonas laterales de aislamiento se agrupan mediante su área total A_{ais}. El modelo tiene, por tanto, dos caminos entre los mismos ambientes: una rama aislante y una rama de montante. La potencia total se reparte como $q = q_{\text{ais}} + q_{\text{m}}$.

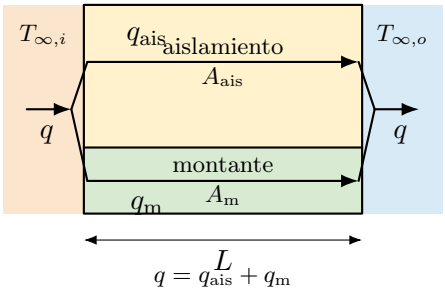


Figura 1.21: Muro con dos caminos de transmisión en paralelo: aislamiento y montante.

Datos.

$$A_{\text{tot}} = 12\ \text{m}^2, \quad A_{\text{ais}} = 10{,}2\ \text{m}^2, \quad A_{\text{m}} = 1{,}8\ \text{m}^2, \quad L = 0{,}12\ \text{m},$$
$$k_{\text{ais}} = 0{,}040\ \text{W/(m K)}, \quad k_{\text{m}} = 0{,}50\ \text{W/(m K)}, \quad h_i = 8, \quad h_o = 25\ \text{W/(m}^2\,\text{K)},$$
$$T_{\infty,i} = 20\ ^\circ\text{C}, \qquad T_{\infty,o} = 0\ ^\circ\text{C}.$$

Resolución del problema

Antes de calcular

Predicción física. El montante conducirá mucho más calor por unidad de área que el aislamiento. El flujo total será la suma de ambos caminos.

Modelo esperado. Dos ramas en paralelo entre los mismos ambientes: una rama aislante y otra de montante, cada una con sus resistencias en serie.

1. Simplificaciones. Se consideran dos caminos planos independientes entre los mismos ambientes. Dentro de cada camino el flujo es unidimensional y las propiedades son constantes. Se desprecia la redistribución lateral de calor entre aislamiento y montante.

2. Modelo adoptado de resistencias. La Figura 1.21 representa la geometría del puente térmico, y la Figura 1.22 muestra sus dos ramas equivalentes. Hay dos ramas entre los mismos nodos $T_{\infty,i}$ y $T_{\infty,o}$. En cada rama hay tres resistencias en serie: convección interior, conducción y convección exterior. Las ramas están en paralelo porque ambas conectan los mismos ambientes.

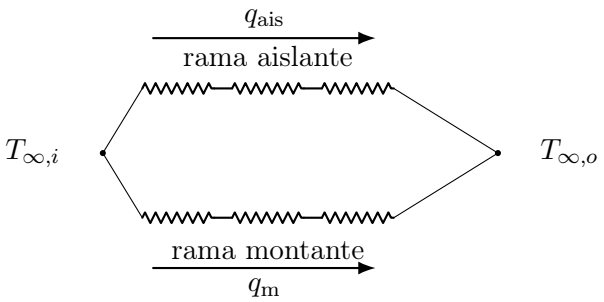


Figura 1.22: Dos ramas térmicas en paralelo.

3. Ecuaciones.

$$R_{\text{ais}} = \frac{1}{h_i A_{\text{ais}}} + \frac{L}{k_{\text{ais}} A_{\text{ais}}} + \frac{1}{h_o A_{\text{ais}}}, \tag{1.34}$$

$$R_{\text{m}} = \frac{1}{h_i A_{\text{m}}} + \frac{L}{k_{\text{m}} A_{\text{m}}} + \frac{1}{h_o A_{\text{m}}}, \tag{1.35}$$

$$q_{\text{ais}} = \frac{T_{\infty,i} - T_{\infty,o}}{R_{\text{ais}}}, \qquad q_{\text{m}} = \frac{T_{\infty,i} - T_{\infty,o}}{R_{\text{m}}}, \tag{1.36}$$

$$q = q_{\text{ais}} + q_{\text{m}}. \tag{1.37}$$

4. Resolución de ecuaciones.

$$R_{\text{ais}} = \frac{1}{8 \cdot 10{,}2} + \frac{0{,}12}{0{,}040 \cdot 10{,}2} + \frac{1}{25 \cdot 10{,}2} = 0{,}310 \text{ K/W},$$

$$R_{\text{m}} = \frac{1}{8 \cdot 1{,}8} + \frac{0{,}12}{0{,}50 \cdot 1{,}8} + \frac{1}{25 \cdot 1{,}8} = 0{,}225 \text{ K/W},$$

$$q_{\text{ais}} = \frac{20}{0{,}310} = 64{,}5 \text{ W},$$

$$q_{\text{m}} = \frac{20}{0{,}225} = 88{,}9 \text{ W},$$

$$q = 64{,}5 + 88{,}9 = 153 \text{ W}.$$

5. Conclusiones o interpretación. Aunque el montante sólo ocupa el 15 por ciento del área, evacúa aproximadamente el 58 por ciento de la potencia total. El motivo es que su conductividad es mucho mayor que la del aislamiento y, por tanto, su resistencia de rama es menor. Este es el significado de un puente térmico: una zona pequeña puede controlar una fracción grande de la pérdida de calor.

Comprobación final

Verifique $q = q_{\text{ais}} + q_{\text{m}}$ y que ambas ramas experimentan la misma diferencia de temperaturas entre ambientes.

1.7.5 Ejercicio resuelto 5. Convección y radiación en paralelo desde una superficie

Descripción del problema

Una placa caliente está expuesta simultáneamente al aire y a un entorno radiante. La superficie pierde calor por convección hacia el aire y por radiación hacia las paredes del entorno. Se pide calcular la potencia total perdida y comparar la contribución de cada mecanismo. El objetivo es ver que convección y radiación no están en serie, sino que son dos salidas simultáneas desde la misma superficie.

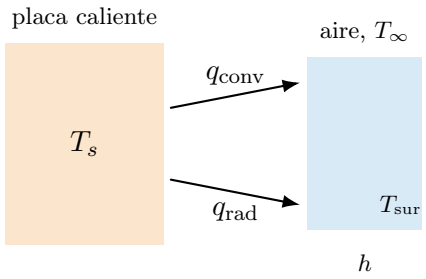


Figura 1.23: Pérdidas simultáneas por convección y radiación linealizada.

Datos.

$$A = 1{,}5\ \text{m}^2, \quad T_s = 80\ ^\circ\text{C}, \quad T_\infty = 25\ ^\circ\text{C}, \quad T_{\text{sur}} = 20\ ^\circ\text{C},$$
$$h = 10\ \text{W/(m}^2\,\text{K)}, \qquad h_r = 6\ \text{W/(m}^2\,\text{K)}.$$

Resolución del problema

Antes de calcular

Predicción física. Si la superficie está más caliente que el aire y que el entorno radiativo, convección y radiación extraerán calor simultáneamente.

Modelo esperado. Dos resistencias o contribuciones en paralelo desde el mismo nodo superficial: convección y radiación linealizada.

1. Simplificaciones. La placa se considera isoterma, con temperatura superficial conocida. La radiación se trata de forma linealizada mediante h_r. No hay conducción interna que calcular porque el nodo superficial T_s ya está impuesto.

2. Modelo adoptado de resistencias. La Figura 1.23 muestra las pérdidas simultáneas por convección y radiación. Hay un único nodo caliente T_s y dos salidas, representadas como ramas en la Figura 1.24: una hacia T_∞ por convección y otra hacia T_{sur} por radiación. Son ramas en paralelo porque ambas parten de la misma superficie.

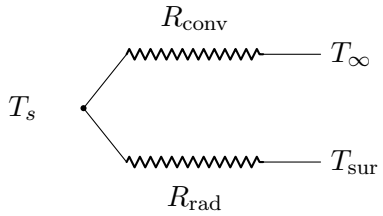


Figura 1.24: Convección y radiación como salidas en paralelo desde una misma superficie.

3. Ecuaciones.

$$q_{\text{conv}} = hA(T_s - T_\infty), \tag{1.38}$$
$$q_{\text{rad}} = h_r A(T_s - T_{\text{sur}}), \tag{1.39}$$

$$q = q_{\text{conv}} + q_{\text{rad}}. \tag{1.40}$$

También pueden definirse

$$R_{\text{conv}} = \frac{1}{hA}, \qquad R_{\text{rad}} = \frac{1}{h_r A}. \tag{1.41}$$

4. Resolución de ecuaciones.

$$\begin{aligned} q_{\text{conv}} &= 10 \cdot 1{,}5 \cdot (80 - 25) = 825 \text{ W}, \\ q_{\text{rad}} &= 6 \cdot 1{,}5 \cdot (80 - 20) = 540 \text{ W}, \\ q &= 825 + 540 = 1365 \text{ W}. \end{aligned}$$

Las resistencias serían

$$R_{\text{conv}} = \frac{1}{10 \cdot 1{,}5} = 0{,}0667 \text{ K/W}, \qquad R_{\text{rad}} = \frac{1}{6 \cdot 1{,}5} = 0{,}111 \text{ K/W}.$$

5. Conclusiones o interpretación. La convección aporta más potencia que la radiación en este caso, pero la radiación representa una fracción importante: aproximadamente un 40 por ciento. No se deben sumar resistencias en serie, porque el calor no pasa primero por convección y luego por radiación: ambos mecanismos actúan simultáneamente desde la misma superficie. Si T_∞ y T_{sur} fuesen iguales, podría agruparse como $h_{\text{eq}} = h + h_r$.

Comparación	Lectura de ingeniería
$h \gg h_r$	domina la convección; mejorar el movimiento del fluido suele ser eficaz.
$h_r \sim h$	ambos mecanismos deben conservarse en el modelo.
$h_r \gg h$	la radiación puede dominar, especialmente a temperaturas absolutas elevadas.

Comprobación final

La potencia total debe ser la suma de ambas contribuciones; cada una debe cambiar de signo si se invierte su diferencia de temperatura motriz.

1.7.6 Ejercicio resuelto 6. Potencia térmica inyectada en un nodo con salida por una pared

Descripción del problema

Un pequeño elemento resistivo introduce una potencia térmica conocida en una placa. Toda esa potencia debe evacuarse atravesando una pared plana y saliendo después por convección hacia el ambiente. Se pide calcular la temperatura del nodo donde se inyecta calor y la temperatura de la superficie exterior. Este problema introduce la fuente térmica dentro de una red de resistencias.

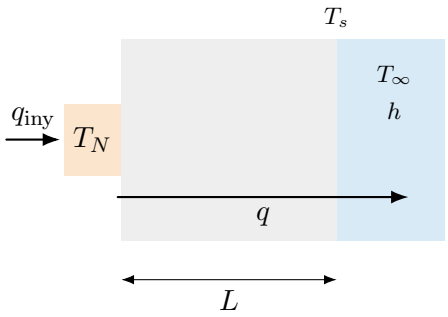


Figura 1.25: Potencia inyectada en un nodo con evacuación hacia un ambiente.

Datos.

$$q_{\text{iny}} = 150\ \text{W}, \quad L = 0{,}040\ \text{m}, \quad k = 1{,}5\ \text{W/(m K)}, \quad A = 0{,}50\ \text{m}^2,$$
$$h = 12\ \text{W/(m}^2\,\text{K)}, \qquad T_\infty = 25\ ^\circ\text{C}.$$

Resolución del problema

Antes de calcular

Predicción física. La temperatura del nodo aumentará hasta que la potencia inyectada pueda evacuarse por la pared. Una resistencia mayor exige una temperatura nodal más alta.

Modelo esperado. Balance estacionario en un nodo con una fuente y una única rama de salida.

1. Simplificaciones. La potencia inyectada es constante y el régimen es estacionario. Toda la potencia sale por el único camino disponible. La pared es plana, homogénea y con flujo unidimensional. La radiación se desprecia.

2. Modelo adoptado de resistencias. La Figura 1.25 muestra el nodo donde se inyecta potencia. El nodo T_N recibe una potencia q_{iny}. Hacia el ambiente hay dos resistencias en serie, representadas en la Figura 1.26: conducción en la pared y convección exterior.

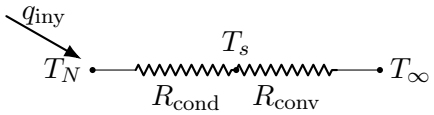


Figura 1.26: Fuente de calor y camino único de evacuación.

3. Ecuaciones.

$$R_{\text{tot}} = R_{\text{cond}} + R_{\text{conv}} = \frac{L}{kA} + \frac{1}{hA}. \tag{1.42}$$

Como toda la potencia inyectada debe salir,

$$q_{\text{iny}} = \frac{T_N - T_\infty}{R_{\text{tot}}}, \qquad T_N = T_\infty + q_{\text{iny}} R_{\text{tot}}. \tag{1.43}$$

La superficie exterior cumple

$$q_{\text{iny}} = hA(T_s - T_\infty). \tag{1.44}$$

4. Resolución de ecuaciones.

$$\begin{aligned} R_{\text{cond}} &= \frac{0{,}040}{1{,}5 \cdot 0{,}50} = 0{,}0533 \text{ K/W}, \\ R_{\text{conv}} &= \frac{1}{12 \cdot 0{,}50} = 0{,}1667 \text{ K/W}, \\ R_{\text{tot}} &= 0{,}220 \text{ K/W}, \\ T_N &= 25 + 150 \cdot 0{,}220 = 58{,}0 \text{ °C}. \end{aligned}$$

Además,

$$T_s = T_\infty + \frac{q_{\text{iny}}}{hA} = 25 + \frac{150}{12 \cdot 0{,}50} = 50{,}0 \text{ °C}.$$

5. Conclusiones o interpretación. La fuente eleva la temperatura del nodo hasta que la potencia evacuada iguala la potencia generada. La convección domina la resistencia total, ya que R_{conv} es mayor que R_{cond}. Mejorar la convección, por ejemplo aumentando h o el área, reduciría más la temperatura del nodo que cambiar ligeramente el espesor de la pared.

Comprobación final

La potencia que abandona el nodo debe ser exactamente igual a la potencia inyectada y la temperatura calculada debe ser compatible con el sentido del flujo.

1.7.7 Ejercicio resuelto 7. Nodo central con potencia inyectada y salida hacia dos lados con convección y radiación

Descripción del problema

Un elemento plano activo genera una potencia térmica q_{iny} en un nodo central. Desde ese nodo el calor puede salir hacia la izquierda y hacia la derecha atravesando dos paredes planas distintas. En cada lado, la superficie exterior pierde calor por convección hacia un fluido y por radiación linealizada hacia un entorno radiante. Se pide determinar la temperatura del nodo central y el reparto de potencia hacia cada lado. Este problema reúne fuente de calor, dos caminos en paralelo, conducción, convección y radiación.

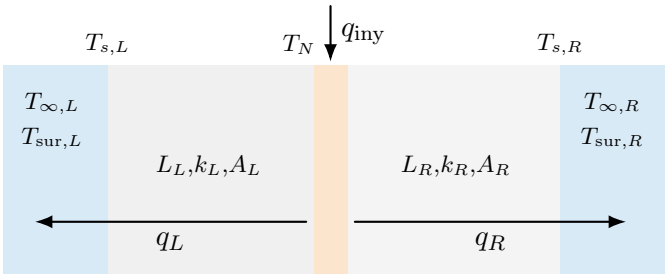


Figura 1.27: Elemento activo con disipación hacia dos lados.

Datos.

$$q_{\text{iny}} = 120 \text{ W}.$$

Magnitud	Lado izquierdo	Lado derecho
L [m]	0,030	0,050
k [W/(m K)]	1,20	0,50
A [m^2]	0,60	0,40
h [W/(m^2 K)]	8	25
h_r [W/(m^2 K)]	5	4
T_∞ [°C]	20	10
T_{sur} [°C]	18	8

Resolución del problema

Antes de calcular

Predicción física. La potencia inyectada se repartirá entre las salidas. La rama de menor resistencia recibirá la mayor fracción.

Modelo esperado. Balance de nodo con varias ramas en paralelo; en cada lado pueden coexistir convección y radiación.

1. Simplificaciones. El sistema está en régimen estacionario. La potencia se inyecta en un nodo central isotermo T_N. Cada pared se modela como conducción plana unidimensional. Las superficies exteriores pierden calor por convección y radiación linealizada. Se desprecia cualquier pérdida por bordes.

2. Modelo adoptado de resistencias. La Figura 1.27 muestra el elemento activo con disipación hacia ambos lados. Desde el nodo T_N hay dos caminos en paralelo, uno hacia la izquierda y otro hacia la derecha, como se sintetiza en la Figura 1.28. En cada camino aparece primero una resistencia conductiva y después dos salidas simultáneas desde la superficie exterior: convección y radiación.

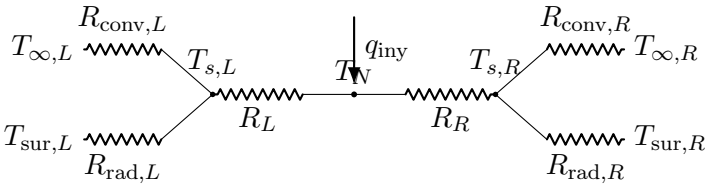


Figura 1.28: Red térmica del nodo central con dos caminos y pérdidas exteriores en paralelo.

3. Ecuaciones. Las incógnitas naturales son

$$T_N, \qquad T_{s,L}, \qquad T_{s,R}.$$

Las resistencias conductivas son

$$R_L = \frac{L_L}{k_L A_L}, \qquad R_R = \frac{L_R}{k_R A_R}. \tag{1.45}$$

En cada superficie se iguala la potencia que llega por conducción a la suma de convección y radiación:

$$\frac{T_N - T_{s,L}}{R_L} = h_L A_L (T_{s,L} - T_{\infty,L}) + h_{r,L} A_L (T_{s,L} - T_{\text{sur},L}), \tag{1.46}$$

$$\frac{T_N - T_{s,R}}{R_R} = h_R A_R (T_{s,R} - T_{\infty,R}) + h_{r,R} A_R (T_{s,R} - T_{\text{sur},R}). \tag{1.47}$$

El balance global en el nodo central es

$$q_{\text{iny}} = q_L + q_R = \frac{T_N - T_{s,L}}{R_L} + \frac{T_N - T_{s,R}}{R_R}. \tag{1.48}$$

4. Resolución de ecuaciones. Primero se calculan las resistencias conductivas:

$$R_L = \frac{0{,}030}{1{,}20 \cdot 0{,}60} = 0{,}0417 \text{ K/W}, \qquad R_R = \frac{0{,}050}{0{,}50 \cdot 0{,}40} = 0{,}250 \text{ K/W}.$$

Para el lado izquierdo:

$$\begin{aligned} \frac{T_N - T_{s,L}}{0{,}0417} &= 8 \cdot 0{,}60 (T_{s,L} - 20) + 5 \cdot 0{,}60 (T_{s,L} - 18) \\ &= 7{,}8 T_{s,L} - 150. \end{aligned}$$

Al ordenar,

$$24{,}0 T_N - 31{,}8 T_{s,L} = -150.$$

Para el lado derecho:

$$\begin{aligned} \frac{T_N - T_{s,R}}{0{,}250} &= 25 \cdot 0{,}40 (T_{s,R} - 10) + 4 \cdot 0{,}40 (T_{s,R} - 8) \\ &= 11{,}6 T_{s,R} - 112{,}8, \end{aligned}$$

y, por tanto,

$$4{,}0 T_N - 15{,}6 T_{s,R} = -112{,}8.$$

Con el balance del nodo,

$$120 = \frac{T_N - T_{s,L}}{0{,}0417} + \frac{T_N - T_{s,R}}{0{,}250},$$

que se ordena como

$$28{,}0 T_N - 24{,}0 T_{s,L} - 4{,}0 T_{s,R} = 120.$$

El sistema lineal queda, por tanto,

$$\begin{bmatrix} 24{,}0 & -31{,}8 & 0 \\ 4{,}0 & 0 & -15{,}6 \\ 28{,}0 & -24{,}0 & -4{,}0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_N \\ T_{s,L} \\ T_{s,R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -150 \\ -112{,}8 \\ 120 \end{bmatrix}.$$

La resolución del sistema lineal da

$$\boxed{T_N = 29{,}58\ ^\circ\mathrm{C}}, \qquad \boxed{T_{s,L} = 27{,}04\ ^\circ\mathrm{C}}, \qquad \boxed{T_{s,R} = 14{,}82\ ^\circ\mathrm{C}}.$$

El reparto de potencia, calculado con los valores no redondeados, es

$$q_L = \frac{29{,}582 - 27{,}043}{0{,}04167} = 60{,}9\ \mathrm{W},$$
$$q_R = \frac{29{,}582 - 14{,}816}{0{,}250} = 59{,}1\ \mathrm{W}.$$

Además, en el lado izquierdo,

$$q_{\mathrm{conv},L} = 33{,}8\ \mathrm{W}, \qquad q_{\mathrm{rad},L} = 27{,}1\ \mathrm{W},$$

y en el lado derecho,

$$q_{\mathrm{conv},R} = 48{,}2\ \mathrm{W}, \qquad q_{\mathrm{rad},R} = 10{,}9\ \mathrm{W}.$$

5. Conclusiones o interpretación. Aunque las dos paredes y los dos ambientes son distintos, el reparto final es casi equilibrado: aproximadamente 61 W salen por la izquierda y 59 W por la derecha. El lado derecho tiene una pared más resistente, pero también una convección exterior más intensa y un ambiente más frío. El lado izquierdo tiene menor resistencia conductiva, pero condiciones exteriores menos favorables. Este tipo de problema muestra que no basta con mirar una sola propiedad: el reparto de calor depende de la resistencia de la pared, del área, de h, de h_r y de las temperaturas exteriores. Para reducir T_N, habría que disminuir alguna resistencia de salida o aumentar el área de intercambio; para dirigir más calor hacia un lado, habría que reducir la resistencia total de ese camino.

También se observa por qué hay que tener cuidado al agrupar convección y radiación. Se puede sumar la conductancia superficial como $A(h + h_r)$, pero si T_∞ y T_{sur} son diferentes no existe una única temperatura exterior evidente sin calcular antes una temperatura equivalente ponderada.

1.7.8 Cierre metodológico

Estos siete ejercicios resueltos resumen las operaciones básicas que se usarán continuamente en los capítulos siguientes:

- una resistencia une dos temperaturas y transporta una potencia proporcional a la diferencia entre ellas;
- en serie, las resistencias se suman y la potencia es la misma en todas;
- en paralelo, las ramas comparten nodos y se suman las potencias;
- una fuente de calor fija la potencia que debe salir y, por tanto, eleva la temperatura del nodo;
- convección y radiación desde una misma superficie son salidas simultáneas, no mecanismos en serie;
- la resistencia dominante suele señalar la mejora de diseño más eficaz.

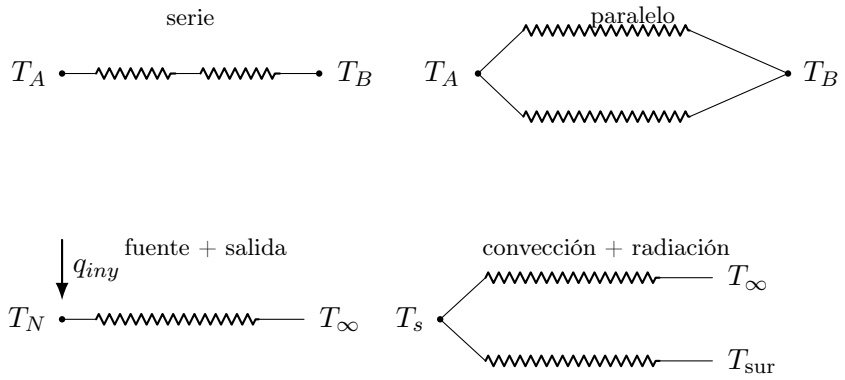


Figura 1.29: Patrones básicos de modelado con resistencias térmicas usados en los ejemplos.

La Figura 1.29 recoge los patrones básicos de red utilizados en los ejemplos. La utilidad principal de las redes térmicas no está en sustituir la física por circuitos, sino en obligar a pensar con claridad: cuáles son los nodos, qué mecanismos conectan cada nodo, qué caminos tiene el calor y dónde debe cumplirse el balance de energía.

Comprobación final

La suma de todas las potencias salientes debe igualar la fuente. Si una potencia calculada resulta negativa respecto a la flecha supuesta, el flujo real circula en el sentido contrario; en una rama térmica pasiva el calor sigue yendo del nodo de mayor temperatura al de menor.

CAPÍTULO 2

Conducción

Introducción

Este capítulo constituye un texto de estudio autocontenido sobre conducción de calor. Cuando existe una diferencia de temperatura dentro de un sólido, de un líquido en reposo o de un gas sin movimiento macroscópico apreciable, la energía térmica se transmite desde las zonas más calientes hacia las más frías. En ingeniería no basta con saber que el calor fluye en esa dirección: normalmente interesa calcular la potencia transmitida, las temperaturas máximas y mínimas, las pérdidas energéticas, el tiempo de calentamiento o enfriamiento y el efecto de modificar materiales, espesores o superficies de intercambio.

La conducción se apoya en dos ideas sencillas. La primera es la conservación de la energía: la energía que entra en un volumen de control, más la que se genera en su interior, debe salir o quedar almacenada. La segunda es la ley de Fourier: el flujo de calor es proporcional al gradiente de temperatura y a la conductividad térmica del material. A partir de estas dos ideas se obtiene la ecuación general de conducción y, como casos particulares, las expresiones de uso habitual para paredes planas, cilindros, esferas, aletas y problemas transitorios.

Conviene distinguir desde el principio entre cantidad de calor y tasa de transmisión. La termodinámica permite relacionar estados de equilibrio y saber cuánta energía se intercambia en un proceso global; la transmisión de calor, en cambio, permite estimar a qué velocidad ocurre ese intercambio y cómo se distribuye la temperatura dentro del cuerpo. Esta diferencia es esencial en problemas reales: no es lo mismo saber cuánta energía debe perder una pieza para enfriarse que saber si tardará segundos, minutos u horas.

La tabla 2.1 contiene sólo la notación necesaria para comenzar. El capítulo presenta primero un balance unidimensional que permite interpretar la ecuación de difusión sin una derivación larga. Después se estudian paredes, cilindros, esferas, generación interna, contacto, aislamiento, aletas y transitorios. La derivación tridimensional, la anisotropía, las variantes avanzadas del sólido semi-infinito y los métodos numéricos se conservan como profundización o ampliación. Las expresiones de consulta se reúnen en el Anexo A.

El criterio práctico que se seguirá es el habitual en ingeniería térmica: primero se dibuja el sistema, después se identifica la trayectoria dominante del calor, se sustituyen las partes del sistema por resistencias o balances diferenciales y, por último, se revisa si el resultado tiene sentido físico. Una solución numérica no debe aceptarse sólo porque las unidades salgan bien; también debe respetar la dirección natural del flujo, la posición esperada de máximos y mínimos de temperatura y el orden de magnitud de las resistencias.

En el texto se emplea q para la potencia térmica total, q'' para el flujo de calor por unidad de área y q''' para la generación volumétrica. El signo de q depende de la dirección positiva elegida; por ello, en cada desarrollo se indica con claridad el convenio adoptado. Salvo cuando se trabaja con radiación, las diferencias de temperatura pueden expresarse indistintamente en K o en °C. En cambio, cuando una expresión contiene temperaturas absolutas, como ocurre en radiación o en algunas propiedades termodinámicas, debe usarse la escala absoluta.

Resultados de aprendizaje Al terminar este capítulo, el alumno será capaz de:

- distinguir conducción estacionaria y transitoria y elegir la geometría adecuada;
- construir resistencias planas, cilíndricas y esféricas, y seleccionar resistencias térmicas equivalentes para geometrías complejas;
- tratar generación interna, contacto térmico, aislamiento y aletas;
- decidir entre capacidad concentrada, sólido semi-infinito y solución numérica;
- utilizar Bi y Fo como criterios físicos, no sólo algebraicos;
- comprobar perfiles, máximos de temperatura, signos y conservación de energía.

Antes de empezar Ley de Fourier y redes térmicas del capítulo 1; balance de energía; derivadas e integrales elementales. Para el núcleo del capítulo basta con cálculo de una variable.

Árbol de decisión para conducción

1. ¿El problema cambia con el tiempo? Si no, use el bloque estacionario. Si cambia, elija primero el tipo de modelo transitorio; use Bi y Fo cuando sean los parámetros del modelo clásico seleccionado, no como paso universal de cualquier problema transitorio.
2. En estacionario, identifique geometría plana, cilíndrica o esférica y compruebe si hay generación interna.
3. Si el campo es esencialmente 1D, use resistencias o la solución analítica correspondiente. Si el campo es multidimensional pero existen dos superficies isotermas bien definidas, valore una resistencia térmica equivalente y compruebe su rango de validez.
4. Si hay una aleta, compruebe primero Bi_{cs} y después el tipo de punta.
5. En transitorio: $Bi \lesssim 0{,}1$ sugiere capacidad concentrada; penetración pequeña sugiere sólido semi-infinito; geometría irregular o contornos complejos sugieren método numérico.
6. Antes de aceptar el resultado, localice máximos y mínimos y compruebe el balance global.

Núcleo. Paredes, cilindros, esferas, resistencias térmicas equivalentes entre nodos isotermos, generación uniforme, contacto, radio crítico, aletas rectas y capacidad concentrada forman el contenido esencial.

Ampliación. Anisotropía, aletas anulares con Bessel, variantes avanzadas de sólido semi-infinito y métodos numéricos se conservan como consulta.

Tabla 2.1: Notación mínima para comenzar el capítulo. La notación completa se define localmente y se recopila en el Anexo A.

Símbolo	Significado operativo
T, T_s, T_∞	Temperatura en el sólido, temperatura superficial y temperatura del fluido alejado de la superficie.
q, q'', q'''	Potencia térmica, flujo por unidad de área y generación por unidad de volumen.
k	Conductividad térmica: facilidad con la que el material transporta calor.
ρc	Capacidad calorífica por unidad de volumen: energía necesaria para cambiar la temperatura del material.
$\alpha = k/(\rho c)$	Difusividad térmica: rapidez con la que se propaga una perturbación de temperatura.
R, h, A, L	Resistencia térmica, coeficiente de convección, área de paso y longitud característica.

Cómo plantear un problema de conducción

Antes de aplicar fórmulas conviene reducir el problema físico a un modelo térmico claro. En la práctica de ingeniería suele funcionar el siguiente orden: identificar si el régimen es estacionario o transitorio, decidir si la conducción puede considerarse unidimensional, comprobar si existe generación interna, escribir las condiciones de contorno y elegir la geometría equivalente. Sólo después tiene sentido seleccionar una expresión de resistencia, una solución diferencial o un modelo transitorio.

La mayor parte de los errores aparecen por mezclar modelos incompatibles. Por ejemplo, usar una resistencia plana en una tubería gruesa ignora que el área radial cambia con el radio; usar el modelo de capacidad concentrada con un número de Biot grande oculta gradientes internos importantes; aplicar una condición de temperatura superficial prescrita cuando realmente hay convección cambia por completo el balance en la frontera. Por eso, cada apartado indica no sólo la ecuación final, sino también las hipótesis que permiten usarla.

Secuencia recomendada Formular el problema con un dibujo, marcar las temperaturas conocidas, elegir el sentido positivo de q, escribir las resistencias o la ecuación diferencial correspondiente, resolver y revisar el resultado físicamente. Una temperatura máxima menor que ambas temperaturas de contorno, una resistencia negativa o una potencia que aumenta al añadir una capa muy conductora sin motivo físico son señales de que hay que revisar signos, áreas o hipótesis.

2.1 Ecuación diferencial de conducción del calor

Desde el punto de vista de ingeniería, esta ecuación no debe verse como una fórmula aislada, sino como una herramienta para organizar el balance de energía en un punto del material. La pregunta que responde es: si alrededor de un pequeño volumen entra y sale calor por conducción, y además puede generarse energía en su interior, ¿cómo cambia su temperatura? La misma ecuación permite estudiar una placa, una pared de horno, una barra, una carcasa cilíndrica o una pieza de máquina, siempre que se escriban correctamente las condiciones de contorno.

Un buen modo de leerla es separar tres efectos. El término de conducción redistribuye temperatura dentro del sólido; el término de generación añade energía localmente, como ocurre en una resistencia eléctrica o en un combustible nuclear; el término transitorio representa el almacenamiento térmico. Si este último desaparece, el problema es estacionario. Si además no hay generación, el campo de temperatura se ajusta únicamente para transportar la potencia impuesta por las fronteras.

La ecuación diferencial es la forma local del balance de energía. En vez de analizar un cuerpo completo, se toma un volumen diferencial y se pregunta qué ocurre en una porción muy pequeña del material. Este enfoque permite describir campos de temperatura no uniformes y sirve tanto para una pared sencilla como para piezas con geometría compleja. El precio que se paga es que la ecuación necesita condiciones de contorno e iniciales adecuadas: sin ellas, la ecuación indica la física general, pero no determina una solución única.

2.1.1 Modelo mínimo: balance unidimensional

Antes de trabajar con la formulación tridimensional conviene dominar el caso que aparece en la mayoría de los problemas básicos: una pared o una barra en la que la temperatura cambia principalmente en una dirección. El balance local se resume como

$$\boxed{\text{conducción neta hacia el volumen} + \text{generación} = \text{almacenamiento.}} \tag{2.1}$$

Para una coordenada x,

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + q''' = \rho c\frac{\partial T}{\partial t}.} \tag{2.2}$$

Esta ecuación se puede leer sin resolverla todavía:

- el primer término mide si entra más calor por conducción del que sale;
- q''' añade energía dentro del material;
- $\rho c\,\partial T/\partial t$ mide la energía que queda almacenada y cambia la temperatura.

Tabla 2.2: Selección inicial de la ecuación de conducción.

Situación	$\partial T/\partial t$	q'''	Nombre habitual	Ejemplo
Estacionario sin generación	0	0	Laplace	Pared aislante sin calentamiento interno.
Estacionario con generación	0	$\neq 0$	Poisson	Resistencia eléctrica o combustible nuclear.
Transitorio sin generación	$\neq 0$	0	Difusión transitoria	Pieza que se enfría en un fluido.
Transitorio con generación	$\neq 0$	$\neq 0$	Difusión completa	Batería que genera calor durante su calentamiento.

Lectura antes del cálculo Primero decida si hay almacenamiento y generación. Después elija la geometría y las condiciones de contorno. La ecuación general no sustituye estas decisiones: sólo organiza el balance.

2.1.2 Dirección del flujo, dimensionalidad y sistema de coordenadas

La temperatura es una magnitud escalar, pero la transmisión de calor por conducción tiene dirección y magnitud. Por eso el flujo de calor debe tratarse como un vector. La convención más limpia es elegir un sistema de coordenadas y considerar positivo el flujo que va en el sentido positivo de la coordenada correspondiente. En un medio isótropo,

$$\vec{q}'' = -k\nabla T, \tag{2.3}$$

lo que significa que el flujo apunta hacia temperaturas decrecientes. Si en una dirección el gradiente de temperatura es positivo, el flujo en esa dirección es negativo; si el gradiente es negativo, el flujo es positivo. Esta regla evita interpretar q'' como una cantidad siempre positiva.

La clasificación en problemas unidimensionales, bidimensionales o tridimensionales no depende sólo de la forma geométrica, sino de la variación real de T y de la precisión buscada. Una pared amplia puede modelarse como 1D si los efectos de borde son despreciables; una tubería larga puede modelarse como radial si los extremos no alteran el campo térmico; una pieza corta, con zonas localizadas de calentamiento, suele requerir dos o tres coordenadas. La notación resume la hipótesis: $T = T(x,t)$ indica variación en una sola coordenada y tiempo, mientras que $T = T(x,y,z,t)$ conserva el problema completo.

El sistema de coordenadas debe elegirse para que las fronteras sean lo más simples posible. Paredes y placas se describen naturalmente en coordenadas cartesianas; cilindros, tubos y cables en coordenadas cilíndricas; esferas, partículas y depósitos esféricos en coordenadas esféricas. Una mala elección de coordenadas no cambia la física, pero puede convertir una condición de contorno sencilla en una expresión innecesariamente compleja.

También conviene distinguir régimen estacionario y transitorio. En régimen estacionario, $\partial T/\partial t = 0$ en todos los puntos, aunque la temperatura pueda variar con la posición y exista una potencia térmica permanente. En régimen transitorio, la temperatura cambia con el tiempo en al menos una parte del cuerpo. Un caso especial es el transitorio de capacidad concentrada, donde $T = T(t)$ cambia con el tiempo pero se considera prácticamente uniforme en el espacio.

2.1.3 Propiedades termo-físicas y alcance del modelo de Fourier

En conducción, la propiedad central es la conductividad térmica k. Un material con k grande, como un metal, necesita un gradiente pequeño para transportar una potencia dada; un material aislante, con k pequeña, necesita un gradiente mayor. En sólidos dieléctricos la energía se transporta principalmente mediante vibraciones de red; en metales también contribuyen de forma importante los electrones libres. En líquidos y gases en reposo, la conducción se asocia al intercambio microscópico de energía entre moléculas vecinas.

La capacidad calorífica volumétrica ρc mide la energía necesaria para aumentar la temperatura de una unidad de volumen. La difusividad térmica

$$\boxed{\alpha = \frac{k}{\rho c}} \tag{2.4}$$

compara la capacidad del material para conducir energía con su capacidad para almacenarla. Por eso k controla de forma directa la potencia conducida en régimen estacionario, mientras que α controla la rapidez de la respuesta transitoria. Dos materiales pueden tener conductividades parecidas y, sin embargo, tiempos de calentamiento muy distintos si sus valores de ρc son diferentes.

En este capítulo se reserva el símbolo α para la difusividad térmica. Cuando aparezca absorción de irradiación se usará α_s, la absortividad superficial. Esta distinción evita confundir una propiedad de transporte volumétrico con una propiedad radiativa de superficie.

La ley de Fourier es un modelo difusivo local. Supone medio continuo, equilibrio térmico local, propiedades representativas del volumen diferencial y escalas espaciales mucho mayores que las escalas microscópicas de los portadores de energía. En películas muy delgadas, gases muy rarificados, tiempos ultracortos o sistemas micro/nano, la conducción puede apartarse del modelo clásico y requerir descripciones no difusivas o correcciones de tamaño.

Ampliación. La conductividad tensorial se incluye para reconocer materiales anisótropos. En una primera lectura puede saltarse este bloque y continuar con la derivación isótropa.

En materiales reales también debe decidirse si la conductividad puede tratarse como escalar. En un sólido isótropo se usa $\vec{q}'' = -k\nabla T$. En un sólido anisótropo, como un laminado, una madera, un compuesto de fibras o ciertos cristales, la ley constitutiva más general es

$$\vec{q}'' = -\mathbf{k}\,\nabla T, \tag{2.5}$$

donde $\mathbf{k}$ es un tensor. En ese caso el flujo de calor no tiene por qué ser paralelo al gradiente de temperatura. La forma diagonal escrita a menudo como k_x, k_y, k_z sólo es completa cuando los ejes coordenados coinciden con las direcciones principales del material; en una orientación arbitraria pueden aparecer términos cruzados, por ejemplo $k_{xy}\partial T/\partial y$ en la componente q''_x. Si el material es heterogéneo pero se desea un modelo macroscópico, se emplea una conductividad efectiva k_{ef}, que sólo es válida para la escala, dirección y microestructura con las que fue definida.

2.1.4 Profundización: derivación tridimensional

Profundización. Esta deducción justifica la ecuación general. Para resolver los problemas básicos basta con comprender el balance unidimensional de la ecuación (2.2).

Sea un paralelepípedo diferencial, representado en la figura 2.1, que forma parte de un medio con diferencias de temperatura entre puntos y sin cambio de fase ni movimientos macroscópicos entre sus partículas. En estas condiciones, la transmisión de calor en el interior del elemento y a través de sus límites sólo puede tener lugar por conducción.

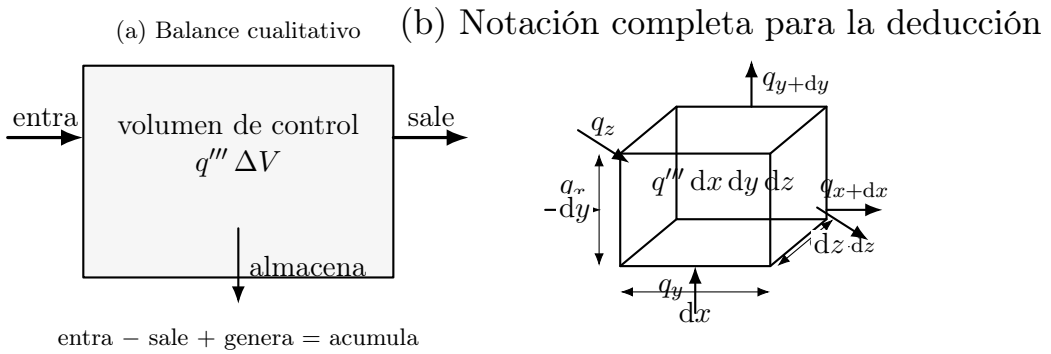


Figura 2.1: Dos niveles de lectura del volumen diferencial: balance cualitativo y notación tridimensional completa.

La ecuación de conservación de la energía aplicada al elemento diferencial es

$$q_{\text{entra}} + q_g = q_{\text{sale}} + \dot{U} + \dot{W}_{\text{expansión}}, \tag{2.6}$$

o, equivalentemente,

$$q_{\text{entra}} - q_{\text{sale}} + q_g = \dot{U} + \dot{W}_{\text{expansión}}. \tag{2.7}$$

Nota de unidades En este balance los símbolos q_{entra}, q_{sale} y q_g representan potencias instantáneas, en vatios, no cantidades de calor acumuladas. El término $\dot{U}$ es la derivada temporal de la energía interna almacenada. Esta convención evita confundir el q de transmisión de calor con la Q termodinámica expresada en julios.

El balance se escribe mejor si se separan sus tres mecanismos energéticos: la energía que entra y sale por conducción, la energía generada dentro del volumen y la energía que queda almacenada como aumento de energía interna. La potencia que entra por las tres caras de entrada es

$$q_{\text{entra}} = q_x + q_y + q_z, \tag{2.8}$$

mientras que la potencia que abandona el volumen por las caras opuestas es

$$q_{\text{sale}} = q_{x+\mathrm{d}x} + q_{y+\mathrm{d}y} + q_{z+\mathrm{d}z}. \tag{2.9}$$

La generación interna se representa mediante la generación volumétrica q''', de modo que

$$q_g = q''' \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z, \qquad [q'''] = \mathrm{W/m^3}. \tag{2.10}$$

El almacenamiento térmico aparece como variación de energía interna,

$$\dot{U} = \mathrm{d}m\, c\, \frac{\partial T}{\partial t} = \rho\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z\, c\, \frac{\partial T}{\partial t}, \tag{2.11}$$

y el trabajo de expansión se desprecia en sólidos y líquidos, $\dot{W}_{\text{expansión}} \simeq 0$.

Sustituyendo en la ecuación de conservación de la energía,

$$(q_x + q_y + q_z) - (q_{x+\mathrm{d}x} + q_{y+\mathrm{d}y} + q_{z+\mathrm{d}z}) + q'''\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z = \rho c\, \frac{\partial T}{\partial t}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z. \tag{2.12}$$

Desarrollando en serie de Taylor y despreciando términos de orden superior,

$$q_{x+\mathrm{d}x} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x}\, \mathrm{d}x + \ldots, \tag{2.13}$$

$$q_{y+\mathrm{d}y} = q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y}\, \mathrm{d}y + \ldots, \tag{2.14}$$

$$q_{z+\mathrm{d}z} = q_z + \frac{\partial q_z}{\partial z}\, \mathrm{d}z + \ldots. \tag{2.15}$$

Por tanto,

$$-\frac{\partial q_x}{\partial x}\mathrm{d}x - \frac{\partial q_y}{\partial y}\mathrm{d}y - \frac{\partial q_z}{\partial z}\mathrm{d}z + q'''\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}\mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z. \tag{2.16}$$

Por ley de Fourier,

$$q_x = -k_x A_x \frac{\partial T}{\partial x} = -k_x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z\, \frac{\partial T}{\partial x}, \tag{2.17}$$

$$q_y = -k_y A_y \frac{\partial T}{\partial y} = -k_y\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}z\, \frac{\partial T}{\partial y}, \tag{2.18}$$

$$q_z = -k_z A_z \frac{\partial T}{\partial z} = -k_z\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \frac{\partial T}{\partial z}. \tag{2.19}$$

Sustituyendo,

$$-\frac{\partial q_x}{\partial x}\mathrm{d}x = \frac{\partial}{\partial x}\left(k_x \frac{\partial T}{\partial x}\right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z, \tag{2.20}$$

$$-\frac{\partial q_y}{\partial y}\mathrm{d}y = \frac{\partial}{\partial y}\left(k_y \frac{\partial T}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z, \tag{2.21}$$

$$-\frac{\partial q_z}{\partial z}\mathrm{d}z = \frac{\partial}{\partial z}\left(k_z \frac{\partial T}{\partial z}\right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z. \tag{2.22}$$

Al dividir por el volumen diferencial se obtiene la ecuación diferencial general de conducción del calor en coordenadas cartesianas:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k_y \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k_z \frac{\partial T}{\partial z}\right) + q''' = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}} \tag{2.23}$$

El significado de los términos es:

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(k_\xi \frac{\partial T}{\partial \xi}\right) = \frac{q_\xi - q_{\xi+\mathrm{d}\xi}}{\mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z}, \qquad \xi = x,y,z, \tag{2.24}$$

que representa la potencia térmica neta por unidad de volumen hacia el interior del elemento en la dirección considerada. El término q''' es la generación volumétrica y $\rho c \partial T/\partial t$ es la potencia térmica almacenada por unidad de volumen.

Cada término de conducción representa flujo neto hacia el volumen de control. Si entra más energía de la que sale, o si existe generación interna, la energía almacenada aumenta y la temperatura local sube.

Formas generales y cambio de coordenadas

Ampliación. Las formas tridimensionales siguientes son útiles como referencia. Para una primera lectura, use la tabla 2.2 y las formas unidimensionales que aparecen al final del bloque.

Las ecuaciones siguientes son formas simplificadas de la ecuación general. No son ecuaciones distintas desde el punto de vista físico, sino la misma conservación de energía escrita bajo hipótesis más restrictivas. Esta forma de organizar los casos es útil porque permite elegir rápidamente el nivel de modelo necesario: Laplace cuando no hay generación ni almacenamiento, Poisson cuando hay generación estacionaria y difusión transitoria cuando la temperatura cambia con el tiempo.

Para régimen transitorio, con generación, material isótropo ($k_x = k_y = k_z = k$) y conductividad constante:

$$\boxed{\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{q'''}{k} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}} \qquad \alpha = \frac{k}{\rho c}. \tag{2.25}$$

Para régimen estacionario con generación y material isótropo, ecuación de Poisson:

$$\boxed{\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{q'''}{k} = 0} \tag{2.26}$$

Para régimen estacionario sin generación y material isótropo, ecuación de Laplace:

$$\boxed{\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0} \tag{2.27}$$

En coordenadas cilíndricas (r,φ,z):

$$\boxed{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(k_r r \frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(k_\varphi \frac{\partial T}{\partial \varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k_z \frac{\partial T}{\partial z}\right) + q''' = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}} \tag{2.28}$$

En coordenadas esféricas (r,θ,φ), tomando θ como ángulo polar y φ como ángulo azimutal:

$$\boxed{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(k_r r^2 \frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(k_\theta \sin\theta \frac{\partial T}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(k_\varphi \frac{\partial T}{\partial \varphi}\right) + q''' = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}} \tag{2.29}$$

Para muchos problemas prácticos se usan directamente las formas unidimensionales. Si el medio es isótropo y k puede considerarse constante, se obtienen:

$$\text{Pared plana:} \qquad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{q'''}{k} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}, \tag{2.30}$$

$$\text{Cilindro radial:} \qquad \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{q'''}{k} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}, \tag{2.31}$$

$$\text{Esfera radial:} \qquad \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{q'''}{k} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}. \tag{2.32}$$

Estas formas son las que se emplean al analizar paredes extensas, tubos largos y cuerpos esféricos con simetría radial. Si k depende de la temperatura, no se debe sacar k fuera de la derivada: debe conservarse la forma $\partial(k\,\partial T/\partial x)/\partial x$ o su equivalente radial.

2.1.5 Condiciones de contorno y condiciones iniciales

Una solución de conducción no queda definida sólo por la ecuación diferencial. También hay que especificar qué ocurre en las superficies y, si el proceso es transitorio, cuál es la distribución inicial de temperatura. Las condiciones de contorno representan la comunicación térmica entre la pieza y su entorno: una superficie puede estar a temperatura conocida, recibir un flujo impuesto, estar aislada o intercambiar calor por convección y radiación.

Las condiciones iniciales sólo aparecen en problemas transitorios. Indican la "fotografía térmica" del cuerpo en $t = 0$. En muchos ejercicios se toma una temperatura inicial uniforme, $T(\vec{r},0) = T_0$, pero en piezas que ya han sufrido calentamiento o enfriamiento previo puede existir una distribución inicial no uniforme.

La ecuación de conducción es de primer orden en la variable temporal, por lo que exige un campo inicial:

$$t = 0, \qquad T(\vec{r},0) = T_i(\vec{r}). \tag{2.33}$$

El caso uniforme habitual es el particular $T_i(\vec{r}) = T_0$.

En una EDO unidimensional de segundo orden se requieren dos condiciones espaciales independientes. En problemas multidimensionales, las condiciones deben especificarse sobre la frontera completa del dominio; no se cuentan simplemente como "dos por coordenada". Es habitual clasificarlas como condiciones de primera clase cuando se prescribe la temperatura, de segunda clase cuando se prescribe el flujo y de tercera clase cuando el flujo conductivo en la superficie se iguala al intercambio convectivo con un fluido. Esta clasificación es útil porque obliga a comprobar qué magnitud física se conoce realmente en la frontera.

La figura 2.2 resume las condiciones de contorno más habituales y declara el convenio de signo local.

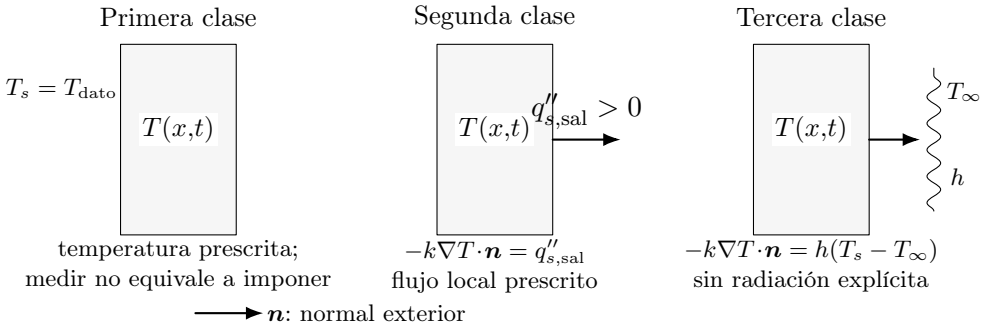


Figura 2.2: Condiciones de contorno habituales. Las flechas definen un convenio positivo de flujo saliente; el sentido físico se invierte si el resultado es negativo.

Tabla 2.3: Cómo reconocer una condición de contorno antes de escribir ecuaciones.

Dato físico conocido	Ecuación tipo	Pregunta que responde	Ejemplo
Temperatura superficial	$T_s = T_{\text{dato}}$	¿A qué temperatura se mantiene la cara?	Baño termostático.
Flujo impuesto	$-k\nabla T\cdot\boldsymbol{n} = q''_s$	¿Cuánta potencia entra o sale por área?	Calentador eléctrico.
Adiabática o simetría	$\nabla T\cdot\boldsymbol{n} = 0$	¿Puede cruzar calor por esta cara?	Plano medio simétrico.
Convección	$-k\nabla T\cdot\boldsymbol{n} = h(T_s - T_\infty)$	¿Cómo comunica la superficie con el fluido?	Pieza enfriada por aire.
Contacto	$q'' = (T_{A,s} - T_{B,s})/R''_c$	¿Existe salto de temperatura en la interfaz?	Dos sólidos rugosos apretados.

2.1.5.1 En temperatura

Prescribir la temperatura en una frontera es matemáticamente sencillo, pero físicamente exige que la superficie esté fuertemente controlada por el exterior. Puede aproximar una placa en contacto con un baño térmico, una superficie pegada a un bloque muy masivo o una pared cuyo termostato mantiene prácticamente constante la temperatura.

Una temperatura medida sólo aporta un dato experimental; no constituye por sí misma una condición de primera clase. La temperatura se prescribe cuando un agente externo la controla suficientemente bien, por ejemplo un baño termostático o un bloque de gran inercia:

$$T(0,t) = T_s. \tag{2.34}$$

2.1.5.2 En flujo de calor

Prescribir el flujo resulta natural cuando se conoce la potencia suministrada. Es el caso de calentadores eléctricos, irradiación aproximadamente uniforme o superficies aisladas, donde el flujo impuesto vale cero. Una frontera adiabática no significa que el material no pueda calentarse; significa que por esa cara no cruza calor. Si el dato disponible es una potencia total q, sólo puede convertirse en un flujo local mediante $q''_s = q/A$ cuando el área y la distribución espacial son conocidas y el flujo puede considerarse uniforme.

Antes de escribir casos particulares conviene fijar una convención general. Sea $\boldsymbol{n}$ la normal exterior al sólido y sea T_s la temperatura de la superficie. El flujo conductivo que sale del sólido por unidad de área es

$$q''_{s,\text{sal}} = -k\nabla T\cdot\boldsymbol{n}. \tag{2.35}$$

El balance superficial, sin almacenamiento en la frontera, puede escribirse como

$$\boxed{-k\nabla T\cdot\boldsymbol{n} = h(T_s - T_\infty) + \varepsilon\sigma(T_s^4 - T_{\text{sur}}^4) - \alpha_s G_s + q''_{\text{ext,sal}}} \tag{2.36}$$

donde G_s es la irradiancia incidente, $\alpha_s G_s$ es la parte absorbida por la superficie y $q''_{\text{ext,sal}}$ representa otros flujos impuestos positivos hacia fuera del sólido. Si un calentador o una irradiancia neta aportan energía hacia el sólido, el término correspondiente entra con signo negativo en esta convención. Esta forma evita cambiar signos de memoria: primero se elige la normal exterior y después se proyecta ∇T sobre esa normal.

Para una superficie adiabática, sin intercambio externo,

$$-k\nabla T \cdot \boldsymbol{n} = 0. \tag{2.37}$$

La misma condición matemática aparece en un plano o eje de simetría térmica. Si el problema es simétrico, no hay razón física para que el calor cruce la superficie de simetría; por tanto,

$$\nabla T \cdot \boldsymbol{n} = 0. \tag{2.38}$$

Ejemplos típicos son el plano medio de una pared con calentamiento simétrico, donde $\mathrm{d}T/\mathrm{d}x = 0$, y el centro de un cilindro o esfera macizos con generación uniforme, donde $\mathrm{d}T/\mathrm{d}r = 0$ en $r = 0$. Si se impone un flujo saliente q''_s,

$$-k\nabla T \cdot \boldsymbol{n} = q''_s. \tag{2.39}$$

Si se impone un flujo entrante hacia el sólido, la misma ecuación se escribe con $q''_s < 0$.

Para una superficie convectiva,

$$\boxed{-k\nabla T \cdot \boldsymbol{n} = h[T_s - T_\infty].} \tag{2.40}$$

En una pared plana $0 \le x \le L$, esto produce dos formas particulares distintas sólo por la orientación de la normal:

$$x = 0, \quad \boldsymbol{n} = -\boldsymbol{i}: \qquad k\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} = h[T(0,t) - T_\infty], \tag{2.41}$$

$$x = L, \quad \boldsymbol{n} = +\boldsymbol{i}: \qquad -k\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=L} = h[T(L,t) - T_\infty]. \tag{2.42}$$

Ambas expresiones representan el mismo balance: conducción saliendo del sólido igual a convección saliendo de la superficie.

Para una superficie que intercambia radiación con una envolvente grande a temperatura T_{sur},

$$\boxed{-k\nabla T \cdot \boldsymbol{n} = \varepsilon\sigma(T_s^4 - T_{\mathrm{sur}}^4).} \tag{2.43}$$

Si la diferencia de temperaturas no es muy grande o se desea una red de resistencias, puede linealizarse como

$$-k\nabla T \cdot \boldsymbol{n} = h_r(T_s - T_{\mathrm{sur}}), \qquad h_r \simeq \varepsilon\sigma(T_s + T_{\mathrm{sur}})(T_s^2 + T_{\mathrm{sur}}^2). \tag{2.44}$$

Cuando hay convección, radiación e irradiación absorbida de forma simultánea,

$$\boxed{-k\nabla T \cdot \boldsymbol{n} = h(T_s - T_\infty) + \varepsilon\sigma(T_s^4 - T_{\mathrm{sur}}^4) - \alpha_s G_s.} \tag{2.45}$$

Las temperaturas que aparecen elevadas a la cuarta potencia deben estar en escala absoluta.

Las condiciones lineales permiten superposición y suelen conducir a soluciones cerradas o series clásicas. Las condiciones no lineales, como la radiación exacta $T_s^4 - T_{\mathrm{sur}}^4$ o un coeficiente $h(T)$ dependiente de la temperatura, no impiden necesariamente toda solución analítica, pero sí eliminan en general la superposición y suelen requerir linealización, iteración o métodos numéricos.

Interfaz entre dos sólidos. Cuando dos materiales están en contacto, la frontera interna también necesita condiciones. Si el contacto es perfecto, no hay salto de temperatura y el flujo normal es continuo:

$$T_A\big|_s = T_B\big|_s, \tag{2.46}$$

$$-k_A\nabla T_A \cdot \boldsymbol{n}_A = -k_B\nabla T_B \cdot \boldsymbol{n}_A. \tag{2.47}$$

La segunda ecuación usa la misma normal geométrica para ambos lados y expresa conservación de energía en la interfaz.

Si existe resistencia térmica de contacto, la temperatura puede ser discontinua aunque el flujo siga siendo el mismo:

$$\boxed{q'' = \frac{T_{A,s} - T_{B,s}}{R''_c}} \tag{2.48}$$

donde R''_c tiene unidades $\mathrm{m^2\,K/W}$ y q'' se toma positivo desde A hacia B cuando $T_{A,s} > T_{B,s}$. Esta condición no sustituye a la continuidad de flujo: la complementa con una caída térmica concentrada en la rugosidad, huecos, presión de apriete o material intersticial.

Elección de geometría 1D **Pared plana.** El calor cruza un espesor casi constante y los bordes quedan lejos. Ejemplos: muros, placas y capas extensas.

Cilindro radial. El calor cruza superficies cilíndricas concéntricas y los efectos de los extremos son pequeños. Ejemplos: tuberías, cables y depósitos largos.

Esfera radial. El calor cruza superficies esféricas concéntricas. Ejemplos: partículas, cápsulas y depósitos esféricos.

La forma exterior del objeto no basta: la elección depende de la dirección dominante del gradiente y de la simetría térmica.

2.2 Conducción estacionaria unidimensional

En régimen estacionario la temperatura en cada punto ya no cambia con el tiempo, aunque puede existir una transmisión de calor continua. La potencia que entra en un volumen de control coincide con la que sale, salvo que haya generación interna; en esta sección se considera el caso sin generación. La simplificación principal consiste en aceptar que la temperatura varía de forma apreciable sólo en una dirección.

La hipótesis unidimensional es una aproximación de ingeniería. No exige que el cuerpo sea infinito, sino que una dirección concentre la mayor parte del gradiente térmico. En una pared amplia y delgada, la coordenada natural es el espesor; en una tubería, el radio; en una esfera hueca, también el radio. Si las pérdidas laterales, los bordes o los detalles geométricos son importantes, el modelo unidimensional deja de ser una buena descripción y conviene usar un modelo bidimensional o tridimensional.

Una ventaja de estos problemas es que pueden expresarse mediante resistencias térmicas. La analogía eléctrica es directa: la diferencia de temperatura actúa como una diferencia de potencial, la potencia térmica como una corriente y la resistencia térmica como la oposición al paso del calor. Esta forma de trabajo permite localizar rápidamente qué parte del sistema domina la pérdida de calor y dónde conviene actuar para mejorar el aislamiento o la disipación.

En lo que sigue se supondrá, salvo indicación expresa, material isótropo y conductividad térmica constante. Si el intervalo de temperaturas es amplio, la conductividad puede cambiar de forma apreciable y deberá usarse una conductividad media o integrar la ley de Fourier con $k(T)$.

2.2.1 Pared plana

La pared plana representa capas de espesor pequeño frente a sus dimensiones laterales: muros, ventanas, placas de aislamiento, tapas, carcasas o separadores. Su ventaja es que el área normal al flujo se mantiene constante, de modo que la resistencia es directamente proporcional al espesor e inversamente proporcional a kA.

2.2.1.1 Simple

El caso simple permite ver la estructura del resultado sin que intervengan capas adicionales. En una pared plana de área constante, sin generación interna y con conductividad constante, la potencia

que entra por una cara es la misma que sale por la otra. La temperatura debe acomodarse de forma lineal porque no hay ningún término que curve el perfil.

Sea una pared plana de espesor L, altura H, ancho b y temperaturas superficiales T_1 y T_2. Para que la conducción sea estrictamente unidimensional, los cantos superior e inferior deben estar aislados térmicamente.

La ecuación de difusión se reduce a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(k\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right)=0. \tag{2.49}$$

Si k es constante,

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}=C_1, \qquad T(x)=C_1x+C_2. \tag{2.50}$$

Con las condiciones $T(0)=T_1$, $T(L)=T_2$,

$$C_1=-\frac{T_1-T_2}{L}, \qquad C_2=T_1, \tag{2.51}$$

y la ley de temperatura es

$$\boxed{T(x)=T_1-(T_1-T_2)\frac{x}{L}} \tag{2.52}$$

La potencia térmica por Fourier es

$$\boxed{q=-kA\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}=\frac{kA}{L}(T_1-T_2)=\frac{T_1-T_2}{L/(kA)}} \tag{2.53}$$

con $A=Hb$. La resistencia térmica de la pared plana es

$$\boxed{R=\frac{L}{kA}}. \tag{2.54}$$

La solución muestra por qué la pared plana es el caso de referencia. La temperatura varía linealmente porque el área de paso no cambia con x y no existe generación interna. En otras palabras, cada metro cuadrado de pared transporta el mismo flujo en cualquier posición del espesor. Por la misma razón, la potencia q y el flujo $q''=q/A$ son constantes en cualquier sección de la pared. Para una potencia y un área dados, el gradiente necesario aumenta al disminuir la conductividad:

$$\left|\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right|=\frac{T_1-T_2}{L}=\frac{q}{kA}. \tag{2.55}$$

La misma expresión se obtiene integrando directamente la ley de Fourier. Este procedimiento es especialmente útil cuando la conductividad depende de la temperatura. En régimen estacionario, unidimensional y sin generación,

$$q''=-k(T)\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}=\text{cte}, \tag{2.56}$$

por lo que

$$q''=\frac{1}{L}\int_{T_2}^{T_1}k(T)\,\mathrm{d}T. \tag{2.57}$$

Si $k(T)$ se aproxima por una ley lineal, puede sustituirse por una conductividad media en el intervalo térmico. Esta aclaración evita aplicar de forma automática $k=\text{cte}$ cuando el salto de temperatura es amplio.

En materiales de aislamiento se emplea con frecuencia una resistencia por unidad de área, útil cuando no se desea fijar todavía el tamaño de la superficie. Para una capa plana,

$$R''=\frac{\Delta T}{q''}=\frac{L}{k}, \qquad [R'']=\mathrm{m^2K/W}. \tag{2.58}$$

La resistencia térmica total se obtiene después dividiendo por el área real: $R = R''/A$. Esta distinción evita confundir la resistencia de una pieza concreta, en K/W, con la resistencia areolar de un material o sistema constructivo.

La figura 2.3 muestra la pared plana simple y su circuito térmico equivalente.

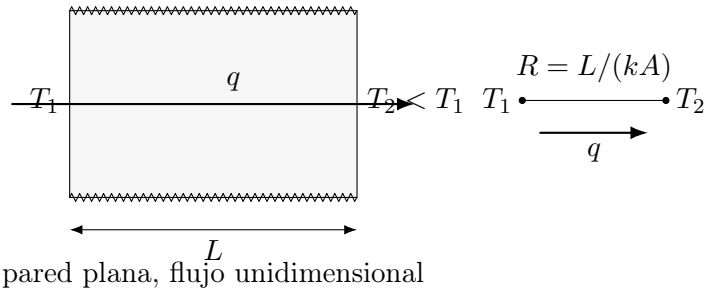


Figura 2.3: Pared plana simple y circuito térmico equivalente.

2.2.1.2 Compuesta o múltiple

Cuando varias capas están colocadas una detrás de otra respecto al flujo, todas transportan la misma potencia en régimen estacionario. Cada capa produce una caída de temperatura proporcional a su resistencia. Esta idea es muy útil porque permite separar el cálculo en piezas físicas: ladrillo, aislamiento, chapa metálica, película convectiva exterior, etc.

Una pared plana compuesta está formada por varias capas colocadas en serie respecto al flujo de calor. La imagen física es la de una misma potencia atravesando sucesivamente materiales distintos: cada capa consume una parte del salto total de temperatura, proporcional a su resistencia térmica. Por tanto,

$$q = \frac{T_i - T_{i+1}}{L_i/(k_i A)}. \tag{2.59}$$

Despejando las diferencias de temperatura y sumando,

$$T_1 - T_{n+1} = q \sum_{i=1}^{n} \frac{L_i}{k_i A}. \tag{2.60}$$

Así,

$$\boxed{q = \frac{T_1 - T_{n+1}}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{L_i}{k_i A}}} \tag{2.61}$$

y

$$\boxed{R_T = \sum_{i=1}^{n} R_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{L_i}{k_i A}}. \tag{2.62}$$

Cuando además hay convección a ambos lados, la misma red de resistencias se amplía con $1/(h_i A)$ y $1/(h_e A)$. En ese caso suele escribirse

$$q = UA\,(T_{\infty,i} - T_{\infty,e}), \qquad \frac{1}{U} = \frac{1}{h_i} + \sum_i \frac{L_i}{k_i} + \frac{1}{h_e}, \tag{2.63}$$

si todas las capas tienen la misma área. Esta forma de U es, por tanto, la forma propia de pared plana o de redes con área constante. En cilindros y esferas el área cambia con el radio y debe definirse un área de referencia:

$$\boxed{UA_{\text{ref}} = \frac{1}{R_{\text{tot}}}, \qquad q = UA_{\text{ref}}\Delta T.} \tag{2.64}$$

Según se elija el área interior o exterior se obtienen valores distintos de U, aunque el producto UA_{ref} y la potencia q son únicos. El coeficiente global U no introduce física nueva; sólo agrupa en una única magnitud el conjunto de resistencias entre los dos fluidos.

2.2.2 Pared cilíndrica

La conducción radial aparece en tuberías, cables, depósitos cilíndricos y recubrimientos. La diferencia clave respecto a la pared plana es que el área de paso no es constante: aumenta con el radio. Por eso la temperatura no varía linealmente, sino de forma logarítmica, y el flujo local por unidad de área disminuye hacia el exterior aunque la potencia total sea la misma.

2.2.2.1 Simple

En una pared cilíndrica en régimen estacionario y sin generación interna el calor radial atraviesa superficies de área $A = 2\pi rL$. Al aumentar el radio, la misma potencia se reparte sobre un área mayor y el flujo local disminuye. Esta regla no es general: con generación uniforme, dentro de un cilindro macizo $q'' = q'''r/2$ y dentro de una esfera $q'' = q'''r/3$, por lo que el flujo superficial aumenta con el radio. Por eso el perfil de temperatura no es lineal, sino logarítmico. Esta diferencia es importante en tuberías, depósitos cilíndricos y recubrimientos aislantes, sobre todo cuando el espesor no es pequeño frente al radio.

Sea un tubo de longitud L, radio interior r_1, radio exterior r_2, y temperaturas T_1 y T_2 en sus caras interior y exterior. Para que la conducción sea unidimensional en dirección radial, los extremos deben estar aislados.

La ecuación de conducción se reduce a

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(kr\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\right) = 0. \tag{2.65}$$

Con k constante,

$$r\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = C_1, \qquad T(r) = C_1 \ln r + C_2. \tag{2.66}$$

Aplicando $T(r_1) = T_1$, $T(r_2) = T_2$,

$$\boxed{T(r) = T_1 - (T_1 - T_2)\frac{\ln(r/r_1)}{\ln(r_2/r_1)}} \tag{2.67}$$

La potencia térmica es

$$\boxed{q = -kA\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = \frac{2\pi kL}{\ln(r_2/r_1)}(T_1 - T_2) = \frac{T_1 - T_2}{\ln(r_2/r_1)/(2\pi kL)}} \tag{2.68}$$

con $A = 2\pi rL$. Por tanto,

$$\boxed{R = \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi kL}}. \tag{2.69}$$

Aquí aparece una diferencia importante respecto a la pared plana. La potencia total q sigue siendo constante porque no hay generación interna, pero el área de paso aumenta con el radio. Por tanto, no debe esperarse una caída de temperatura lineal en el espesor de una tubería salvo que la pared sea muy delgada comparada con el radio. Por eso el flujo local disminuye al aumentar r:

$$q'' = \frac{q}{A} = \frac{T_1 - T_2}{\ln(r_2/r_1)}\frac{k}{r}. \tag{2.70}$$

La temperatura varía logarítmicamente con el radio.

La figura 2.4 ilustra el carácter radial de la conducción cilíndrica.

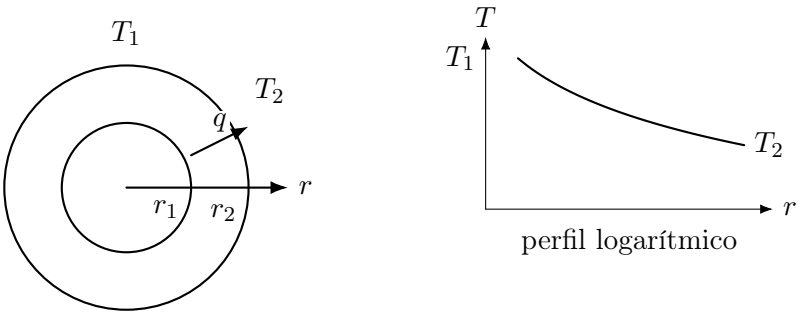


Figura 2.4: Pared cilíndrica: el área crece con el radio y el flujo local disminuye hacia el exterior.

2.2.2.2 Compuesta o múltiple

En tuberías aisladas, cada capa cilíndrica tiene una resistencia logarítmica. No basta con sumar $L/(kA)$ usando un área cualquiera, porque el área de paso cambia de una capa a otra. La forma correcta consiste en sumar resistencias calculadas con los radios reales de cada material.

Para un tubo formado por varias capas, cada una con conductividad k_i, radio interior r_i y radio exterior r_{i+1},

$$\boxed{q = \frac{T_1 - T_{n+1}}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} R_i} = \frac{T_1 - T_{n+1}}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\ln(r_{i+1}/r_i)}{2\pi k_i L}}} \tag{2.71}$$

con

$$\boxed{R_i = \frac{\ln(r_{i+1}/r_i)}{2\pi k_i L}}. \tag{2.72}$$

2.2.3 Pared esférica

La pared esférica se usa en depósitos, gotas, burbujas, partículas y recipientes aproximadamente esféricos. Al igual que en el cilindro, el área de paso crece con el radio, pero ahora lo hace como $4\pi r^2$. Esta variación más intensa modifica la forma de la resistencia y del perfil de temperatura.

2.2.3.1 Simple

La conducción radial en una esfera es todavía más sensible al cambio de área, porque $A = 4\pi r^2$. La potencia total se conserva en régimen estacionario sin generación, pero el flujo por unidad de área cae con $1/r^2$. Este modelo aparece en depósitos esféricos, partículas, cápsulas y elementos con simetría radial aproximada.

Sea una esfera hueca con radio interior r_1, radio exterior r_2, y temperaturas T_1 y T_2. La ecuación de difusión se reduce a

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(kr^2\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\right) = 0. \tag{2.73}$$

Con k constante,

$$r^2\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = C_1, \qquad T(r) = -\frac{C_1}{r} + C_2. \tag{2.74}$$

Aplicando las condiciones de contorno,

$$\boxed{T(r) = T_1 - (T_1 - T_2)\frac{1/r_1 - 1/r}{1/r_1 - 1/r_2}} \tag{2.75}$$

La potencia térmica es

$$\boxed{q = -kA\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = \frac{4\pi k}{1/r_1 - 1/r_2}(T_1 - T_2) = \frac{T_1 - T_2}{(1/r_1 - 1/r_2)/(4\pi k)}} \tag{2.76}$$

con $A = 4\pi r^2$. La resistencia térmica es

$$\boxed{R = \frac{1/r_1 - 1/r_2}{4\pi k}}. \tag{2.77}$$

El flujo disminuye al aumentar r:

$$q'' = \frac{q}{A} = \frac{T_1 - T_2}{1/r_1 - 1/r_2}\frac{k}{r^2}. \tag{2.78}$$

La figura 2.5 ilustra el carácter radial de la conducción esférica.

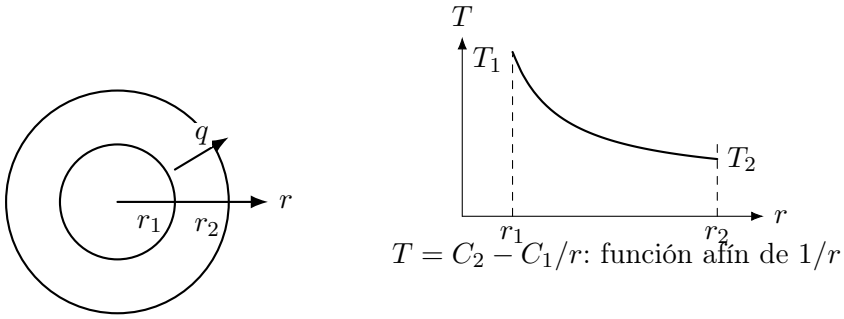


Figura 2.5: Pared esférica: el perfil físico sólo ocupa $r \in [r_1,r_2]$ y es afín en $1/r$; el flujo local disminuye como $1/r^2$.

2.2.3.2 Compuesta o múltiple

En una esfera multicapa se procede igual que en una pared plana compuesta, pero usando la resistencia esférica de cada capa. La potencia total es la misma en todas las capas si no existe generación entre ellas, mientras que el flujo local cambia con el área radial.

Para una esfera formada por varias capas,

$$\boxed{q = \frac{T_1 - T_{n+1}}{\sum_{i=1}^{n} R_i} = \frac{T_1 - T_{n+1}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1/r_i - 1/r_{i+1}}{4\pi k_i}}} \tag{2.79}$$

con

$$\boxed{R_i = \frac{1/r_i - 1/r_{i+1}}{4\pi k_i}}. \tag{2.80}$$

2.2.4 Resistencias térmicas equivalentes en geometrías complejas

Muchos sistemas reales de conducción no presentan un campo de temperaturas estrictamente unidimensional. El campo puede ser bidimensional o tridimensional y contener líneas de flujo curvas. Sin embargo, cuando sólo interesa determinar la potencia térmica total transmitida entre dos superficies isotermas completas, el sistema puede representarse mediante una resistencia térmica equivalente entre dos nodos:

$$\boxed{q_{1\to 2} = \frac{T_1 - T_2}{R_{\mathrm{cond},12}}}. \tag{2.81}$$

En esta expresión, T_1 y T_2 no son temperaturas puntuales arbitrarias: identifican los dos nodos térmicos de la red y representan las superficies isotermas entre las que se calcula la potencia. La resistencia $R_{\text{cond},12}$, expresada en K/W, depende de la geometría, las dimensiones, la conductividad térmica y las condiciones de aplicación. Con la convención anterior, $q_{1\to2} > 0$ si $T_1 > T_2$.

Estas resistencias resultan útiles para puentes térmicos, cuerpos enterrados, tuberías próximas entre sí o contactos localizados, donde una pared plana equivalente sería engañosa. Su empleo exige respetar las hipótesis indicadas en cada caso, como la homogeneidad e isotropía del medio, la ausencia de generación interna, la longitud considerada y los límites geométricos.

Nota terminológica. En parte de la bibliografía, estas soluciones se expresan mediante un parámetro geométrico denominado *factor de forma de conducción*. En este libro se trabajará directamente con la resistencia térmica equivalente, por coherencia con el método general de redes térmicas.

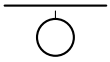
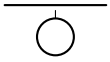
Alcance del modelo equivalente La resistencia reproduce la potencia térmica total entre dos superficies isotermas. Esto no implica que el campo real sea unidimensional ni permite obtener, en general, la distribución local de temperaturas o del flujo de calor.

Conducción y convección son resistencias distintas Si uno de los contornos es un fluido a temperatura T_∞, la resistencia equivalente representa únicamente la conducción en el sólido hasta la superficie correspondiente. La convección exterior debe añadirse por separado:

$$\boxed{R_{\text{total}} = R_{\text{cond}} + R_{\text{conv}}.}$$

La tabla 2.4 reúne soluciones para geometrías complejas. Todas son resistencias conductivas en K/W y en ella $R_{\text{cond},12}$ se abrevia como R_{12}. Cada fila identifica los dos nodos y el rango de validez. Las expresiones reproducen la potencia total, no el campo local; algunas son soluciones analíticas y otras, aproximaciones o correlaciones.

Tabla 2.4: Resistencias térmicas equivalentes de conducción para geometrías complejas.

Configuración	Esquema	Nodos y condiciones de aplicación	Resistencia térmica equivalente
Cilindros excéntricos		**Nodo 1:** superficie del cilindro interior, T_1. **Nodo 2:** superficie del cilindro exterior, T_2. Conducción bidimensional entre dos tubos paralelos cuyos ejes no coinciden; debe cumplirse $0 \leq e < r_2 - r_1$.	$R_{12} = \dfrac{\cosh^{-1}\left(\dfrac{r_2^2 + r_1^2 - e^2}{2r_1 r_2}\right)}{2\pi k L}, \quad L \gg r_2.$
Prismas cuadrados concéntricos		**Nodo 1:** contorno cuadrado interior, T_1. **Nodo 2:** contorno cuadrado exterior, T_2. Contornos similares y centrados; flujo entre una pared interior y otra exterior.	$R_{12} = \dfrac{0{,}93\ln(a/b) - 0{,}0502}{2\pi k L}$, $a/b \geq 1{,}4$. $R_{12} = \dfrac{0{,}785\ln(a/b)}{2\pi k L}$, $1 < a/b < 1{,}4, \quad L \gg a$.
Cilindro circular y prisma cuadrado concéntricos		**Nodo 1:** superficie del cilindro circular, T_1. **Nodo 2:** contorno cuadrado exterior, T_2. Conjunto largo con conducción entre ambas fronteras.	$R_{12} = \dfrac{\ln(0{,}54a/r)}{2\pi k L}, \quad a > 2r.$
Esfera enterrada		**Nodo 1:** superficie de la esfera, T_1. **Nodo 2:** plano isotermo del medio semi-infinito, T_2. Aquí z es la distancia desde el centro hasta el plano.	$R_{12} = \dfrac{1 - r_1/(2z)}{4\pi k r_1}, \quad z > r_1.$
Cilindro enterrado		**Nodo 1:** superficie del cilindro enterrado, T_1. **Nodo 2:** plano isotermo del medio semi-infinito, T_2. Aquí z es la distancia desde el eje hasta el plano.	$R_{12} = \dfrac{\cosh^{-1}(z/r_1)}{2\pi k L}$, $r_1 < z \leq 3r_1, \quad L \gg r_1$. $R_{12} \simeq \dfrac{\ln(2z/r_1)}{2\pi k L}$, $z > 3r_1, \quad L \gg r_1$.
Viga rectangular enterrada		**Nodo 1:** superficie de la viga rectangular, T_1. **Nodo 2:** plano isotermo del medio, T_2. Correlación para potencia total; L es la longitud, a la anchura, b la altura y z la distancia desde la cara más próxima hasta el plano isotermo.	$R_{12} \simeq \dfrac{[\ln(1 + z/a)]^{0,59}\,(z/b)^{0,078}}{2{,}756\,kL}, \quad L \gg z,a,b.$
Arista con dos paredes adyacentes		**Nodo 1:** superficies interiores del rincón, T_1. **Nodo 2:** superficies exteriores asociadas, T_2. Puente térmico lineal en dos paredes perpendiculares.	$R_{12} \simeq \dfrac{1}{0{,}54\,kW}$. Válido cuando las dimensiones de las paredes adyacentes son grandes frente a la longitud característica del elemento conductor.
Esquina de tres paredes adyacentes		**Nodo 1:** superficies interiores de la esquina, T_1. **Nodo 2:** superficies exteriores asociadas, T_2. Puente térmico tridimensional con convergencia desde tres direcciones.	$R_{12} \simeq \dfrac{1}{0{,}15\,kL}$. Válido cuando las dimensiones de las paredes adyacentes son grandes frente a la longitud característica del elemento conductor.
Esfera en medio infinito	esfera	**Nodo 1:** superficie esférica de diámetro D, T_1. **Nodo 2:** medio infinito lejos de la esfera, T_2. Caso límite de una esfera muy alejada de otras fronteras.	$R_{12} = \dfrac{1}{2\pi k D} = \dfrac{1}{4\pi k r}$.

Configuración	Esquema	Nodos y condiciones de aplicación	Resistencia térmica equivalente
Dos cilindros paralelos en medio infinito	2 cilindros	**Nodo 1:** superficie del cilindro 1, T_1. **Nodo 2:** superficie del cilindro 2, T_2. Centros separados una distancia $s > (D_1 + D_2)/2$; longitud grande frente a diámetros y separación.	$R_{12} = \dfrac{\cosh^{-1}\left(\frac{4s^2 - D_1^2 - D_2^2}{2D_1 D_2}\right)}{2\pi k L}$, $L \gg D_1, D_2, s$.
Fila periódica de cilindros enterrados	fila	**Nodo 1:** superficie de cada cilindro de diámetro D, T_1. **Nodo 2:** plano isotermo del medio semi-infinito, T_2. Separación entre ejes w, profundidad z y cilindros largos; como guía de uso, $w \gtrsim 1{,}5D$ y $L \gg D, z$.	$R_{12}^{(\text{por cilindro})} = \dfrac{\ln\left[\frac{2w}{\pi D}\sinh\left(\frac{2\pi z}{w}\right)\right]}{2\pi k L}$.
Cilindro en plano medio de pared infinita	cilindro–pared	**Nodo 1:** superficie del cilindro de diámetro D, T_1. **Nodo 2:** dos caras externas isotermas de la pared, T_2. El cilindro está en el plano medio y z es la semidistancia a cada cara.	$R_{12} \simeq \dfrac{\ln(8z/\pi D)}{2\pi k L}$, $z > 0{,}5D$.
Cilindro vertical largo enterrado	cilindro vertical	**Nodo 1:** superficie lateral del cilindro, T_1. **Nodo 2:** plano superficial isotermo del medio semi-infinito, T_2. El cilindro vertical está enterrado bajo ese plano; aproximación para $L \gg D$.	$R_{12} \simeq \dfrac{\ln(4L/D)}{2\pi k L}$.
Disco enterrado paralelo a la superficie	disco enterrado	**Nodo 1:** disco circular isotermo de diámetro D, T_1. **Nodo 2:** plano isotermo o medio lejano, T_2. Válido para $z \gg D$; si $z = 0$ se recupera el disco superficial.	$R_{12} \simeq \dfrac{1}{4kD}$, $z \gg D$; $R_{12} = \dfrac{1}{2kD}$, $z = 0$.
Disco sobre un sólido semi-infinito		**Nodo 1:** disco circular isotermo de radio r, T_1. **Nodo 2:** sólido semi-infinito lejos del disco, T_2. Resistencia de constricción de un disco isotermo en la superficie de un sólido semi-infinito; el resto del plano superficial se considera adiabático.	$R_{12} = \dfrac{1}{4kr}$.

2.2.4.1 Paredes compuestas heterogéneas

Una pared heterogénea combina zonas con materiales distintos en la misma sección transversal. En ese caso, parte del calor puede circular por caminos paralelos y parte por capas en serie. Las aproximaciones por rebanadas verticales y horizontales no pretenden dar una solución exacta, sino acotar el comportamiento y mostrar qué caminos térmicos son más favorables.

En paredes con zonas en paralelo, como huecos, nervios, puentes térmicos o materiales repartidos en franjas, no existe una única trayectoria de calor. Parte de la potencia puede atravesar un camino de baja resistencia y otra parte un camino más aislante. Si se quiere mantener un cálculo sencillo, se usan modelos límite: uno que favorece la redistribución lateral y otro que la impide. El resultado real suele quedar entre ambos si las hipótesis están bien planteadas.

Sea una pared plana compuesta heterogénea donde alguna capa está formada por varios materiales. Aunque el flujo local pueda ser bidimensional, $q'' = f(x,y)$, la potencia térmica total puede aproximarse sustituyendo el campo real por dos modelos límite. En el primero, llamado de rebanadas verticales, las superficies perpendiculares a la dirección principal del flujo se consideran isotermas; esto equivale a agrupar parte de la pared como resistencias en paralelo entre dos nodos de temperatura.

En el segundo, llamado de rebanadas horizontales, las superficies paralelas al flujo se consideran adiabáticas; así se separan caminos térmicos casi independientes.

Ambas aproximaciones conservan la idea de red de resistencias, pero no dan el mismo resultado porque imponen restricciones distintas al campo de temperatura. La discrepancia crece cuando las conductividades de los materiales en paralelo son muy diferentes. En la práctica, los dos cálculos ofrecen una estimación superior e inferior razonable de la potencia térmica cuando no se resuelve el campo bidimensional completo.

Para una configuración representativa, con una capa izquierda de material A, una zona intermedia de espesor común L_m formada por B y C en paralelo ($L_B = L_C = L_m$) y una capa derecha de material D, se pueden escribir resistencias explícitas. Si el área total es $A = A_B + A_C$, el modelo de rebanadas verticales toma las superficies perpendiculares al flujo como isotermas y conduce a

$$R_v = \frac{L_A}{k_A A} + \left[\frac{k_B A_B}{L_m} + \frac{k_C A_C}{L_m}\right]^{-1} + \frac{L_D}{k_D A}. \tag{2.82}$$

En cambio, el modelo de rebanadas horizontales toma como adiabáticas las superficies paralelas al flujo. Entonces aparecen dos caminos en paralelo:

$$R_B = \frac{L_A}{k_A A_B} + \frac{L_m}{k_B A_B} + \frac{L_D}{k_D A_B}, \tag{2.83}$$

$$R_C = \frac{L_A}{k_A A_C} + \frac{L_m}{k_C A_C} + \frac{L_D}{k_D A_C}, \tag{2.84}$$

$$R_h = \left(\frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_C}\right)^{-1}. \tag{2.85}$$

Así, para un salto térmico impuesto ΔT, las potencias aproximadas son $q_v = \Delta T/R_v$ y $q_h = \Delta T/R_h$. Bajo fronteras isotermas, contactos perfectos y la geometría representada, las aproximaciones clásicas acotan la solución como

$$q_h \le q_{\text{real}} \le q_v, \qquad R_v \le R_{\text{real}} \le R_h.$$

Estas desigualdades deben entenderse como cotas del modelo indicado, no como una propiedad universal de cualquier pared heterogénea.

La figura 2.6 compara dos aproximaciones mediante rebanadas para una pared compuesta heterogénea.

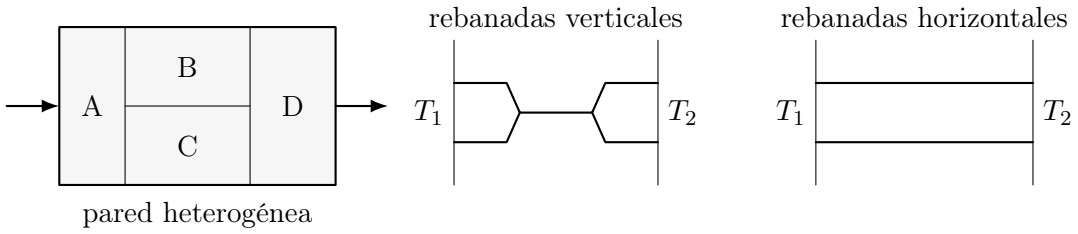


Figura 2.6: Aproximaciones mediante rebanadas para una pared compuesta heterogénea.

El método vertical favorece el intercambio lateral dentro de cada sección, porque fuerza temperaturas iguales en planos transversales al flujo. El método horizontal, por el contrario, elimina ese intercambio lateral al imponer superficies adiabáticas entre caminos. Ninguno reproduce exactamente el campo bidimensional, pero juntos permiten estimar la incertidumbre que introduce tratar la pared como una red térmica unidimensional.

Ejemplo mínimo de aplicación Considérese una pared con una capa central formada por dos franjas iguales en paralelo, de igual espesor L_m, una con $k_B = 10k_C$, y capas exteriores A y D uniformes. El modelo de rebanadas verticales fuerza una temperatura intermedia común en la entrada y salida de la capa central; por ello calcula la capa central como conductancias en paralelo, $G_m = k_B A_B/L_m + k_C A_C/L_m$.

El modelo de rebanadas horizontales separa dos caminos completos A–B–D y A–C–D en paralelo. Si k_B y k_C son muy distintos, los dos valores de q pueden diferir de forma apreciable; esa diferencia mide la importancia de la conducción lateral que el modelo 1D está ignorando.

2.3 Conducción con conductividad dependiente de la temperatura

En muchos cálculos preliminares se toma k constante evaluada a una temperatura media. Esta aproximación es aceptable si $k(T)$ cambia poco en el intervalo de temperaturas del problema. Cuando el salto térmico es grande, o cuando el material presenta una dependencia marcada con la temperatura, la hipótesis $k = \text{cte}$ puede introducir errores apreciables en la potencia transmitida y en el perfil de temperatura.

En conducción estacionaria unidimensional, sin generación, la ley de Fourier permite conservar la estructura de las fórmulas clásicas sustituyendo k por una conductividad media definida energéticamente en el intervalo térmico:

$$\boxed{k_{\text{med}} = \frac{1}{|T_1 - T_2|} \int_{T_{\text{mín}}}^{T_{\text{máx}}} k(T)\,\mathrm{d}T} \tag{2.86}$$

donde $T_{\text{máx}} = \text{máx}(T_1,T_2)$ y $T_{\text{mín}} = \text{mín}(T_1,T_2)$. Si el calor va de T_1 a T_2 con $T_1 > T_2$,

$$q'' = \frac{1}{L} \int_{T_2}^{T_1} k(T)\,\mathrm{d}T = \frac{k_{\text{med}}(T_1 - T_2)}{L}. \tag{2.87}$$

Por tanto, para pared plana, cilindro y esfera sin generación pueden usarse las resistencias anteriores reemplazando k por k_{med}:

$$q_{\text{plana}} = \frac{k_{\text{med}} A (T_1 - T_2)}{L}, \tag{2.88}$$

$$q_{\text{cil}} = \frac{2\pi k_{\text{med}} L_z (T_1 - T_2)}{\ln(r_2/r_1)}, \tag{2.89}$$

$$q_{\text{esf}} = \frac{4\pi k_{\text{med}} r_1 r_2 (T_1 - T_2)}{r_2 - r_1}. \tag{2.90}$$

Aquí L_z es la longitud axial del cilindro, escrita así para no confundirla con el espesor de una pared plana. En el resto del capítulo, cuando no haya riesgo de ambigüedad, la misma longitud axial de cilindros y tubos se denota simplemente por L; en expresiones donde aparezcan simultáneamente espesores y longitudes axiales se mantiene L_z.

Un caso frecuente es la aproximación lineal

$$k(T) = k_0(1 + \beta T), \tag{2.91}$$

donde k_0 corresponde al datum de temperatura usado para ajustar la correlación y β tiene unidades de 1/K. El valor numérico de T debe expresarse respecto de ese mismo origen; cambiar entre Celsius y kelvin sin transformar k_0 modifica el intercepto. La correlación sólo es admisible en intervalos donde $1 + \beta T > 0$. Si $T_1 = T_2$, no hay flujo y k_{med} se interpreta por continuidad como $k(T_1)$. Entonces

$$\boxed{k_{\text{med}} = k_0 \left[1 + \beta \frac{T_1 + T_2}{2}\right] = k(T_{\text{med}}), \qquad T_{\text{med}} = \frac{T_1 + T_2}{2}.} \tag{2.92}$$

Esta igualdad entre k_{med} y k evaluada a la temperatura media sólo vale para una ley lineal. Para dependencias no lineales debe evaluarse la integral.

El perfil de temperatura de una pared plana deja de ser lineal cuando k varía con T. Para $k(T) = k_0(1+\beta T)$, con $T(0) = T_1$ y $T(L) = T_2$, se obtiene la relación implícita

$$\boxed{T + \frac{\beta}{2}T^2 = T_1 + \frac{\beta}{2}T_1^2 - \frac{x}{L}\left[(T_1 - T_2) + \frac{\beta}{2}(T_1^2 - T_2^2)\right].} \tag{2.93}$$

La curvatura del perfil no implica generación interna: puede deberse únicamente a que la conductividad cambia con la temperatura. Esta observación es importante al interpretar perfiles experimentales.

En problemas con generación interna y $k(T)$, la sustitución por k_{med} ya no reproduce en general el perfil ni la temperatura máxima. En esos casos se conserva la forma diferencial

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[k(T)\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right] + q''' = 0 \tag{2.94}$$

y normalmente se resuelve de forma iterativa o numérica.

2.4 Conducción estacionaria con generación interna de calor uniformemente distribuida

La generación interna modifica de forma esencial el problema de conducción: la potencia ya no es la misma en todas las secciones, porque parte de la energía nace dentro del propio sólido. Aparece en resistencias eléctricas, bobinados, combustibles nucleares, procesos químicos exotérmicos, componentes electrónicos y metabolismo. Si el proceso absorbe calor, como en una reacción endotérmica, q''' se toma negativa. En estos casos, el parámetro crítico suele ser la temperatura máxima o mínima alcanzada dentro del material, no sólo la potencia evacuada.

La generación uniforme curva los perfiles de temperatura. La pendiente del perfil se relaciona con el flujo local, y ese flujo cambia con la posición porque hacia la superficie se acumula la energía generada en el volumen interior. Por eso, en una pared simétrica con las dos caras a la misma temperatura, el extremo térmico aparece en el centro y el flujo allí es nulo. En lo que sigue se considera generación uniforme y conductividad constante.

Pared plana

En la pared plana con generación uniforme se combina un término parabólico, debido a la generación, con un término lineal, debido a la diferencia de temperaturas impuesta en las caras. Si ambas caras están a la misma temperatura, desaparece el término lineal y el problema queda simétrico. Si una cara está más caliente que la otra, el máximo se desplaza y puede incluso quedar fuera del dominio, lo que indica que el perfil dentro de la pared es monótono.

Para una pared de espesor L, con coordenada $x \in [-L/2, L/2]$, temperaturas extremas T_1 y T_2, y generación uniforme, la ecuación queda

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(k\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right) + q''' = 0, \qquad \text{o} \qquad k\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2} + q''' = 0. \tag{2.95}$$

Integrando dos veces,

$$T(x) = -\frac{q'''}{2k}x^2 + C_1 x + C_2. \tag{2.96}$$

Con

$$T(-L/2) = T_1, \qquad T(L/2) = T_2, \tag{2.97}$$

se obtiene

$$C_1 = -\frac{T_1 - T_2}{L}, \qquad C_2 = \frac{q'''L^2}{8k} + \frac{T_1 + T_2}{2}. \tag{2.98}$$

Por tanto,

$$\boxed{T(x) = \frac{q'''L^2}{8k}\left(1 - \frac{4x^2}{L^2}\right) - (T_1 - T_2)\frac{x}{L} + \frac{T_1 + T_2}{2}} \tag{2.99}$$

La ley es parabólica. La potencia térmica en un plano genérico x es

$$\boxed{q(x) = -kA\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = q'''Ax + (T_1 - T_2)\frac{kA}{L}} \tag{2.100}$$

En las caras izquierda y derecha:

$$q_{-L/2} = -\frac{q'''L}{2}A + (T_1 - T_2)\frac{kA}{L}, \tag{2.101}$$

$$q_{+L/2} = +\frac{q'''L}{2}A + (T_1 - T_2)\frac{kA}{L}. \tag{2.102}$$

Estas magnitudes son *potencias* [W], no flujos por unidad de área. El convenio usado en estas expresiones es el de potencia positiva en el sentido $+x$. Por tanto, si $q_{-L/2} < 0$, el calor cruza la cara izquierda hacia el exterior del sólido; si $q_{+L/2} > 0$, cruza la cara derecha hacia el exterior en el sentido $+x$.

La posición del máximo o mínimo se obtiene de $\mathrm{d}T/\mathrm{d}x = 0$:

$$\boxed{x^* = \frac{(T_2 - T_1)k}{Lq'''}} \tag{2.103}$$

El valor correspondiente es

$$\boxed{T^* = \frac{q'''L^2}{8k} + \frac{(T_1 - T_2)^2 k}{2L^2 q'''} + \frac{T_1 + T_2}{2}} \tag{2.104}$$

Si $q''' > 0$, la segunda derivada es negativa y T^* es un máximo. Si $q''' < 0$, la segunda derivada es positiva y T^* es un mínimo, siempre que la posición calculada caiga dentro de la pared. Si x^* queda fuera del intervalo, el extremo térmico real está en una de las superficies. La localización de T^* determina el sentido del flujo de calor en la cara caliente para $q''' > 0$, o en la cara fría para $q''' < 0$.

La figura 2.7 muestra el perfil de temperatura y los flujos superficiales en una pared plana con generación uniforme.

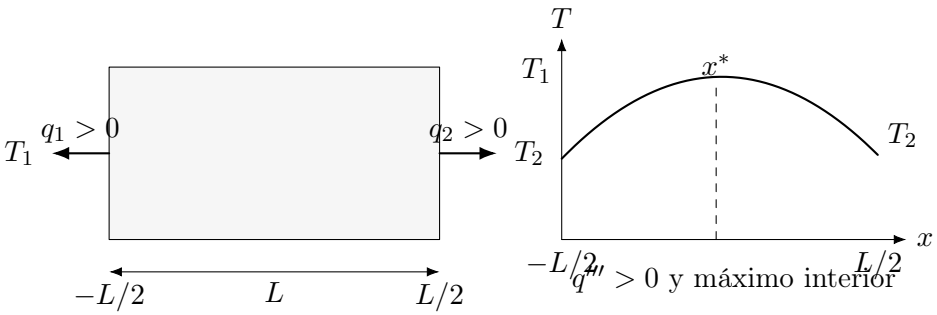


Figura 2.7: Pared plana con generación positiva en el caso representado: el máximo x^* está dentro de $[-L/2, L/2]$ y el calor sale por ambas caras con el convenio indicado.

Con generación positiva, la parábola abre hacia abajo y aparece un máximo si x^* cae dentro de la pared. En el croquis, q_1 y q_2 se han dibujado con el convenio positivo saliendo de cada cara; por eso, cuando existe un máximo interno y $q''' > 0$, ambas contribuciones salen hacia el exterior. Con

generación negativa, la parábola abre hacia arriba y aparece un mínimo y el sentido físico de los flujos se invierte. Si x^* queda fuera, la temperatura es monótona en el espesor y el extremo térmico está en una superficie.

La tabla 2.5 resume el signo de los flujos superficiales para una pared plana con generación.

Tabla 2.5: Dirección del flujo superficial en la pared plana con generación, para $T_1 > T_2$.

Caso	Criterio	Consecuencia térmica
$q''' > 0$	$\dfrac{(T_1 - T_2)k}{Lq'''} > \dfrac{L}{2}$	El máximo queda fuera de la pared, hacia la cara caliente. La generación no basta para invertir el flujo en esa cara: entra calor por la cara caliente y sale por la fría.
$q''' > 0$	$\dfrac{(T_1 - T_2)k}{Lq'''} = \dfrac{L}{2}$	El máximo coincide con la cara caliente. El flujo en esa cara es nulo y toda la generación sale por la cara fría.
$q''' > 0$	$\dfrac{(T_1 - T_2)k}{Lq'''} < \dfrac{L}{2}$	El máximo queda dentro de la pared. La generación domina localmente y el calor sale por ambas caras.
$q''' < 0$	$\dfrac{(T_1 - T_2)k}{L\lvert q'''\rvert} > \dfrac{L}{2}$	El mínimo queda fuera de la pared, hacia la cara fría. La absorción interna es débil: entra calor por la cara caliente y todavía sale por la fría.
$q''' < 0$	$\dfrac{(T_1 - T_2)k}{L\lvert q'''\rvert} = \dfrac{L}{2}$	El mínimo coincide con la cara fría. El flujo en la cara fría es nulo.
$q''' < 0$	$\dfrac{(T_1 - T_2)k}{L\lvert q'''\rvert} < \dfrac{L}{2}$	El mínimo queda dentro de la pared. La absorción domina y entra calor por ambas caras hacia el interior.

Cuando $T_1 = T_2 = T_s$, las ecuaciones se simplifican a

$$T(x) = \frac{q'''L^2}{8k}\left(1 - \frac{4x^2}{L^2}\right) + T_s, \qquad q(x) = q'''Ax. \tag{2.105}$$

La distribución es simétrica respecto de $x = 0$ y el máximo o mínimo está en el centro:

$$T_{\text{máx}} = T_s + \frac{q'''L^2}{8k}, \qquad q''' > 0, \tag{2.106}$$

$$T_{\text{mín}} = T_s + \frac{q'''L^2}{8k}, \qquad q''' < 0. \tag{2.107}$$

Para $q''' > 0$, ambas caras evacuan calor hacia el exterior; para $q''' < 0$, el flujo es hacia el interior. Particularizando en $x = L/2$,

$$q_{L/2} = \frac{q'''L}{2}A. \tag{2.108}$$

Bajo estas condiciones puede representarse media pared con generación como una pared equivalente sin generación cuya resistencia térmica es

$$\boxed{R = \frac{L}{4kA}}, \tag{2.109}$$

donde L es el espesor total de la pared, no el de la mitad. Esta resistencia equivalente es una herramienta *ficticia* y sólo es válida para el caso simétrico $T_1 = T_2 = T_s$. Si las caras están a temperaturas distintas, la generación y la conducción impuesta se superponen y no existe una única resistencia equivalente que sustituya a toda la pared con generación.

2.4.1 Barra cilíndrica maciza

En un cilindro macizo con generación uniforme y simetría radial, el centro no puede tener flujo radial neto porque no hay una dirección preferente hacia la que conducir en $r = 0$. Matemáticamente esto se expresa como $\mathrm{d}T/\mathrm{d}r = 0$ en el eje. Si la generación es positiva y la superficie exterior se mantiene más fría, la temperatura máxima aparece en el centro; si el término volumétrico representa absorción de calor, el extremo térmico se invierte.

Las soluciones radiales siguientes presuponen ausencia de gradiente axial: cilindro suficientemente largo o extremos adiabáticos, con propiedades, generación y condiciones de contorno uniformes en z. Para una barra cilíndrica maciza de radio R, longitud L, temperatura superficial T_s, conductividad constante y generación uniforme:

$$\boxed{T(r) = T_s + \frac{q'''}{4k}\left(R^2 - r^2\right)} \tag{2.110}$$

La potencia que atraviesa una superficie cilíndrica de radio r es

$$\boxed{q(r) = \pi r^2 L q'''.} \tag{2.111}$$

Para $q''' > 0$:

$$q(R) = \frac{T_{\text{máx}} - T_s}{1/(4\pi k L)}. \tag{2.112}$$

Para $q''' < 0$:

$$q(R) = \frac{T_{\text{mín}} - T_s}{1/(4\pi k L)}. \tag{2.113}$$

En esta expresión $q(R)$ es una potencia firmada: si $T_{\text{mín}} < T_s$, el resultado es negativo con la convención radial saliente, lo que indica flujo neto hacia el interior del cilindro.

Un caso práctico frecuente no prescribe directamente T_s, sino una convección exterior con h y T_∞. Si $q''' > 0$, el balance global por unidad de área exterior da

$$q''_s = \frac{q'''R}{2} = h(T_s - T_\infty), \tag{2.114}$$

y por tanto

$$T_s = T_\infty + \frac{q'''R}{2h}, \qquad T_{\text{máx}} = T_\infty + \frac{q'''R}{2h} + \frac{q'''R^2}{4k}. \tag{2.115}$$

Este resultado separa la caída externa por convección y la elevación interna por generación.

2.4.2 Barra cilíndrica hueca

El cilindro hueco añade una segunda superficie de intercambio. Según las temperaturas o condiciones de los radios interior y exterior, el calor generado puede salir por ambos lados o principalmente por uno de ellos. Por eso no debe suponerse automáticamente que el máximo está en una superficie ni en el punto medio geométrico del espesor: la comprobación segura consiste en derivar el perfil y localizar el radio donde se anula $\mathrm{d}T/\mathrm{d}r$.

Para una barra cilíndrica hueca de radio interior r_1, radio exterior r_2, longitud L, temperaturas T_1 y T_2, y generación uniforme:

$$\boxed{T(r) = T_1 - (T_1 - T_2)\frac{\ln(r/r_1)}{\ln(r_2/r_1)} + \frac{q'''}{4k}\left[(r_2^2 - r_1^2)\frac{\ln(r/r_1)}{\ln(r_2/r_1)} - (r^2 - r_1^2)\right]} \tag{2.116}$$

La potencia que atraviesa una superficie de radio r es

$$\boxed{q(r) = \frac{2\pi k L(T_1 - T_2)}{\ln(r_2/r_1)} - \pi L q''' \left[\frac{r_2^2 - r_1^2}{2\ln(r_2/r_1)} - r^2\right]} \tag{2.117}$$

La diferencia de potencias entre las caras es

$$\boxed{q(r_2) - q(r_1) = \pi L q''' \left(r_2^2 - r_1^2\right)} \tag{2.118}$$

La ubicación del máximo o mínimo se determina por

$$\boxed{r^* = \left[\frac{r_2^2 - r_1^2}{2\ln(r_2/r_1)} - \frac{2k(T_1 - T_2)}{q'''\ln(r_2/r_1)}\right]^{1/2}}. \tag{2.119}$$

La raíz sólo representa un extremo interno si el término entre corchetes es positivo y si el radio obtenido queda dentro del intervalo físico, $r_1 < r^* < r_2$. Si no se cumple esta condición, el máximo o mínimo se encuentra en una de las superficies.

En una geometría cilíndrica hueca no existe, en general, un plano de simetría equivalente al de la pared plana. Si las dos superficies se mantienen a la misma temperatura, el extremo térmico se sitúa en el radio que anula $\mathrm{d}T/\mathrm{d}r$, no necesariamente en el radio medio. Por eso conviene emplear directamente la expresión de r^* y no trasladar sin más la resistencia equivalente de la pared plana.

La figura 2.8 resume los perfiles cualitativos de temperatura en conducción radial con generación uniforme. En el cilindro macizo el dominio empieza en $r = 0$ y la pendiente debe anularse en el eje; en el cilindro hueco el extremo interno, si existe, aparece en un radio r^* comprendido entre r_1 y r_2, no necesariamente en el radio medio.

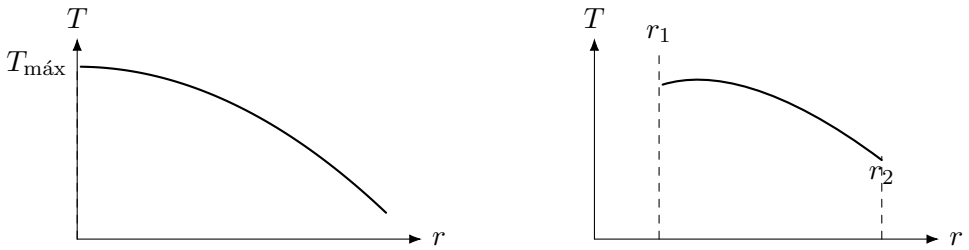


Figura 2.8: Perfiles cualitativos para $q''' > 0$ y condiciones de contorno que producen un máximo interior. No representan todos los casos posibles de cilindro macizo o hueco.

2.5 Resistencia de contacto

La resistencia de contacto aparece porque dos superficies sólidas nunca apoyan de forma perfecta a escala microscópica. Aunque parezcan pulidas, el contacto real se produce sólo en las cimas de algunas asperezas; entre ellas quedan huecos ocupados por aire, otro gas, vacío, óxidos, grasa o pasta térmica. Como el calor se contrae para atravesar zonas de contacto reducidas y luego se expande de nuevo, aparece una caída localizada de temperatura ΔT_c asociada a la interfaz.

La figura 2.9 representa el salto térmico localizado asociado al contacto. En diseño térmico esta resistencia puede ser despreciable o dominante. Es pequeña si las superficies están bien mecanizadas, fuertemente presionadas y con material intermedio conductor. Puede ser grande en uniones flojas, superficies rugosas, contactos secos o interfaces sometidas a ciclos térmicos. Por eso en electrónica de potencia, intercambiadores desmontables y uniones mecánicas no basta con calcular la conducción en las piezas: también hay que revisar las interfaces.

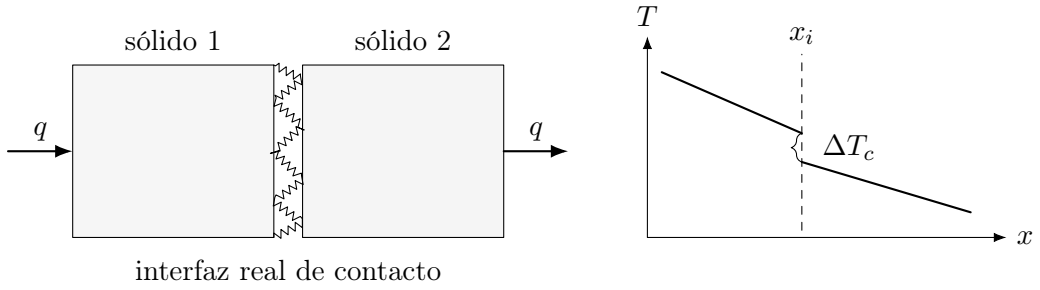


Figura 2.9: Resistencia térmica de contacto: salto de temperatura localizado en la interfaz.

La resistencia térmica de contacto por unidad de área, R''_c, se define mediante

$$\boxed{q'' = \frac{\Delta T_c}{R''_c}} \tag{2.120}$$

o bien

$$\boxed{q = q''A = \frac{\Delta T_c}{R''_c/A}}, \qquad h_c = \frac{1}{R''_c}. \tag{2.121}$$

Sus unidades son

$$[R''_c] = \frac{\mathrm{m^2K}}{\mathrm{W}} = \frac{\mathrm{m^2\,^\circ C}}{\mathrm{W}}. \tag{2.122}$$

El calor cruza la unión por dos vías simultáneas. En los puntos donde las asperezas se tocan hay conducción directa entre sólidos, aunque el flujo local no tiene por qué ser unidimensional. En los huecos, en cambio, el calor se transmite a través del gas atrapado; si la diferencia de temperatura es suficientemente grande pueden aparecer también convección interna y radiación. Los huecos pueden aportar una fracción dominante cuando el área real de microcontacto es pequeña y el fluido intersticial conduce poco, pero no existe una regla universal: la contribución relativa depende de presión de apriete, rugosidad, deformación, gas o vacío, temperatura y material intersticial. El salto ΔT_c de la figura se interpreta como un salto localizado en la misma coordenada de interfaz: no representa un espesor macroscópico adicional, sino la caída térmica efectiva asociada al contacto imperfecto.

La forma de reducir esta resistencia se deduce de esa imagen física. Superficies menos rugosas y mayores presiones de apriete aumentan el área real de contacto. Cuando se alcanza deformación plástica local, muchos huecos se cierran y la resistencia baja de forma apreciable. Otra estrategia es rellenar los huecos con un material de mayor conductividad, como una grasa o silicona conductiva. En uniones permanentes se recurre al pegado o a la soldadura, que sustituyen parte de la interfaz imperfecta por una unión material continua.

Este efecto puede dominar en uniones de materiales de alta conductividad, como plata, cobre, oro o aluminio, precisamente porque la resistencia del propio sólido es pequeña y la caída de temperatura se concentra en la interfaz.

Sus consecuencias dependen de la función térmica del sistema. En aplicaciones de aislamiento puede reducir pérdidas o ganancias de calor, aunque no se diseña un aislamiento basándose sólo en resistencia de contacto. En sistemas de intercambio energético resulta perjudicial: si la potencia térmica transmitida está fijada, aumenta la temperatura máxima de la zona caliente; si el salto térmico entre focos está fijado, reduce la potencia transmitida.

La tabla 2.6 recoge valores orientativos de conductancia térmica de contacto.

Los valores de la tabla siguiente representan conductancia, no resistencia. Dependen de la presión de apriete, la rugosidad, la temperatura, el material intersticial y la atmósfera de ensayo.

Tabla 2.6: Valores orientativos de conductancia térmica de contacto, $h_c = 1/R_c''$.

Materiales	$h_c = 1/R_c''$ [W/(m^{2}K)]
Cerámica–cerámica	500–3000
Cerámica–metal	1500–8500
Grafito–metal	3000–6000
Acero inoxidable–acero inoxidable	1700–3700
Aluminio–aluminio	2200–12000
Acero inoxidable–aluminio	3000–4500
Cobre–cobre	10000–25000
Aluminio rugoso–aluminio, vacío	~ 150
Hierro–aluminio	4000–40000

Estos rangos no deben usarse como datos de diseño sin especificar presión de contacto, acabado superficial, limpieza, gas o vacío en la interfaz y temperatura de operación. En un cálculo definitivo conviene tomar R_c'' de ensayos propios, especificaciones del material intersticial o bibliografía experimental con condiciones comparables.

El intervalo hierro–aluminio es especialmente amplio porque la conductancia de contacto puede aumentar mucho con presión de apriete elevada, superficies pulidas o materiales intersticiales conductores. Por tanto, el límite superior no debe usarse sin comprobar condiciones de montaje.

La caída ΔT_c no ocurre en un espesor material bien definido, sino en la microgeometría de la unión. Desde el punto de vista del circuito térmico, se modela como una resistencia concentrada situada entre los dos sólidos. Por ello se usa una resistencia por unidad de área, equivalente a concentrar en la interfaz el efecto conjunto de la constricción del flujo y de los huecos.

2.6 Espesor crítico de aislamiento

En una pared plana, añadir aislamiento siempre aumenta la resistencia total porque el área exterior no cambia. El desarrollo cilíndrico que sigue supone conducción radial estacionaria, k_a y h_e constantes, radiación despreciable y temperaturas de los focos independientes del radio exterior. En cilindros y esferas pequeñas puede ocurrir algo menos intuitivo: al añadir una capa, aumenta la resistencia conductiva del recubrimiento, pero también aumenta el área exterior disponible para convección. Al principio, si el radio es muy pequeño, el aumento de área puede dominar y la potencia transmitida puede crecer antes de disminuir.

Este efecto no contradice la función del aislamiento. Simplemente indica que, en geometrías curvas de pequeño radio y con coeficientes de convección bajos, existe un radio crítico. En ese radio la resistencia térmica exterior es mínima y la potencia transmitida es máxima. Por encima de él, añadir más recubrimiento aumenta la resistencia total y reduce el calor transmitido, que es el comportamiento buscado en aislamiento.

El radio crítico suele ser importante en alambres, sensores, cables finos o recubrimientos de radio reducido. En tuberías industriales de tamaño habitual, el radio exterior suele estar muy por encima del radio crítico y el aislamiento reduce la pérdida de calor desde el primer momento.

Considérese una tubería de radios r_1 y r_2, conductividad k, con un fluido interior a temperatura T_i y coeficiente h_i. Se recubre hasta r_3 con un material de conductividad k_a, y externamente hay un fluido a T_e con coeficiente h_e. La potencia transmitida es

$$\boxed{q = \frac{T_i - T_e}{R_{ie}} = \frac{T_i - T_e}{\dfrac{1}{h_i 2\pi r_1 L} + \dfrac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi k L} + \dfrac{\ln(r_3/r_2)}{2\pi k_a L} + \dfrac{1}{h_e 2\pi r_3 L}}} \tag{2.123}$$

Al aumentar r_3, aumenta la resistencia conductiva del aislante y disminuye la resistencia convectiva exterior. Derivando R_{ie} respecto a r_3:

$$\frac{\mathrm{d}R_{ie}}{\mathrm{d}r_3} = \frac{1}{2\pi L}\left(\frac{1}{k_a r_3} - \frac{1}{h_e r_3^2}\right) = 0. \tag{2.124}$$

De la primera derivada se obtiene

$$\frac{1}{k_a r_c} = \frac{1}{h_e r_c^2} \quad \Rightarrow \quad r_c = \frac{k_a}{h_e}. \tag{2.125}$$

La segunda derivada general es

$$\frac{\mathrm{d}^2 R_{ie}}{\mathrm{d}r_3^2} = \frac{1}{2\pi L}\left(-\frac{1}{k_a r_3^2} + \frac{2}{h_e r_3^3}\right). \tag{2.126}$$

Evaluada en el radio crítico, resulta positiva,

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2 R_{ie}}{\mathrm{d}r_3^2}\right|_{r_c} = \frac{1}{2\pi L}\frac{h_e^2}{k_a^3} > 0, \tag{2.127}$$

por lo que R_{ie} es mínima y la potencia transmitida es máxima. Así,

$$\boxed{r_c = \frac{k_a}{h_e}} \tag{2.128}$$

El espesor crítico es

$$\boxed{e_c = r_c - r_2.} \tag{2.129}$$

Si $r_c \le r_2$, no existe espesor crítico positivo para el recubrimiento: la superficie desnuda ya está por encima del radio crítico y cualquier capa adicional aumenta la resistencia total. Por tanto, no debe escribirse un "espesor crítico igual a cero". El resultado correcto es condicional:

$$e_c = r_c - r_2 > 0 \quad \text{si } r_c > r_2; \qquad \text{si } r_c \le r_2, \text{ no existe un punto crítico interior en } r_3 \ge r_2. \tag{2.130}$$

Para una pared esférica, el radio crítico es

$$\boxed{r_c = \frac{2k_a}{h_e}.} \tag{2.131}$$

Para otras configuraciones, resolver $\mathrm{d}R/\mathrm{d}r_3 = 0$ sólo proporciona candidatos. El óptimo físico debe buscarse dentro del dominio permitido y confirmarse con la segunda derivada y con la comparación de las fronteras del dominio.

2.6.1 Función de aislamiento

Cuando el objetivo es conservar energía o proteger el entorno de una superficie caliente, interesa que la resistencia total aumente al añadir material. Si el radio exterior ya supera el radio crítico, cualquier incremento de espesor reduce la potencia transmitida. Si $r_c > r_2$, una capa muy delgada puede ser contraproducente porque acerca la superficie exterior al punto de máxima pérdida; sólo a partir de un cierto radio r^* la potencia vuelve a ser menor que en la tubería desnuda. En la gráfica de aislamiento, r_c identifica el máximo de pérdida y r^* el punto donde $q(r^*) = q_0$, siendo q_0 la potencia sin recubrimiento. La zona $r_2 < r_3 < r^*$ es peligrosa para aislar porque $q > q_0$; la zona útil de aislamiento empieza en $r_3 > r^*$.

Los aislantes habituales tienen $k_a \approx 0{,}03\,\mathrm{W/(mK)}$. Para tuberías al aire, con h_e entre 10 y $250\,\mathrm{W/(m^2K)}$, los radios críticos están entre 0,12 y 3 mm. Como las tuberías suelen superar los 10 mm de radio, el aislamiento cumple normalmente su función sin problemas, salvo en elementos muy pequeños.

2.6.2 Función de disipación

La figura 2.10 muestra cómo varían la potencia y la resistencia exterior con el radio del recubrimiento. Cuando el objetivo es disipar calor, como en conductores eléctricos, carcasas pequeñas o recubrimientos protectores, puede ser aceptable aumentar el área exterior aunque se añada una resistencia conductiva. En este caso no se busca aislar, sino reducir la temperatura máxima del componente. El radio crítico marca el punto de máxima disipación para unas propiedades y un ambiente dados, siempre que el recubrimiento no introduzca una penalización conductiva excesiva.

La función disipación busca reducir la temperatura de un cuerpo que disipa una potencia dada, como en refrigeración pasiva de componentes eléctricos. Para un conductor cilíndrico de radio exterior r_2 que disipa por efecto Joule,

$$q = I^2 R_{\mathrm{el}}, \tag{2.132}$$

donde R_{el} es la resistencia eléctrica, distinta de cualquier resistencia térmica. Denotando por T_c la temperatura máxima o de eje y por $R_{\mathrm{th,cable}}$ la resistencia térmica interna entre el eje y la superficie r_2, se escribe

$$\boxed{T_c = T_e + q\left(R_{\mathrm{th,cable}} + \frac{\ln(r_3/r_2)}{2\pi k_a L} + \frac{1}{h_e 2\pi r_3 L}\right).} \tag{2.133}$$

Si R_{el} depende de la temperatura, $q = I^2 R_{\mathrm{el}}(T_c)$ acopla los problemas eléctrico y térmico y debe resolverse de forma iterativa. La resistencia exterior presenta un mínimo en $r_3 = r_c = k_a/h_e$. Para reducir la temperatura máxima del componente, el recubrimiento debe hacer que la resistencia total sea menor que sin recubrimiento. Si $r_c > r_2$, debe cumplirse $r_2 < r_3 < r^*$, y el óptimo es $r_3 = r_c$. Si $r_c < r_2$, no hay solución posible: cualquier recubrimiento aumenta la temperatura.

Para que un recubrimiento pueda aumentar la disipación inicial de un cilindro de radio exterior desnudo r_2, debe cumplirse exactamente, dentro de este modelo cilíndrico con k_a y h_e constantes y radiación despreciable, $r_c > r_2$, es decir,

$$k_a > h_e r_2. \tag{2.134}$$

Por ejemplo, para un componente cilíndrico de $r_2 = 10\,\mathrm{mm}$ refrigerado por aire con $h_e = 250\,\mathrm{W/(m^2K)}$, se requeriría $k_a > 2{,}5\,\mathrm{W/(mK)}$. Por tanto, dentro de este modelo pasivo concreto, los recubrimientos de baja conductividad no aumentan la disipación inicial; esta conclusión no debe extrapolarse a geometrías, mecanismos o condiciones diferentes.

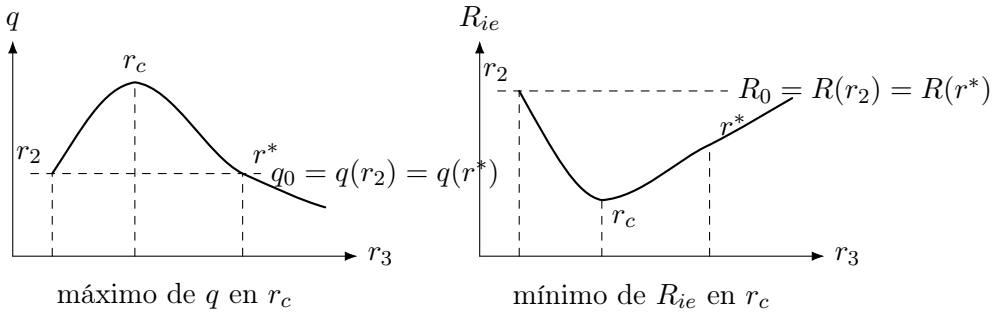


Figura 2.10: Correspondencia entre potencia y resistencia al variar r_3 para un radio base fijo r_2. El máximo de q coincide con el mínimo de R_{ie} en r_c; r^* satisface $q(r^*) = q_0$.

En la figura, la variable del eje horizontal es siempre el radio exterior recubierto r_3 para un radio base fijo r_2. En el gráfico izquierdo, la potencia transmitida aumenta con el espesor sólo mientras $r_3 < r_c$ y alcanza un máximo en $r_3 = r_c$; a partir de ahí el recubrimiento vuelve a actuar como aislamiento. En el gráfico derecho se representa la resistencia exterior total, cuyo mínimo también aparece en $r_3 = r_c$. El aumento del área convectiva es necesario, pero no suficiente, para que aparezca un radio crítico: debe analizarse la resistencia total de la geometría y comprobar que existe un mínimo interior en el dominio físico.

2.7 Aletas

Una aleta es una extensión sólida que aumenta el área de intercambio entre una superficie y el fluido que la rodea. Se utiliza cuando la resistencia dominante está en la convección exterior y no en la conducción dentro de la base. La idea es sencilla: si cuesta mucho transmitir calor al fluido por unidad de área, se aumenta el área disponible.

Sin embargo, más área no siempre significa más disipación útil. Si las aletas están demasiado juntas pueden bloquear el movimiento del fluido, reducir el coeficiente de convección efectivo y aumentar la caída de presión. En diseño real se eligen altura, espesor y separación de aletas conjuntamente; el modelo unidimensional de una aleta aislada sólo es el punto de partida.

La aleta, sin embargo, no está toda a la temperatura de la base. A medida que el calor avanza por ella, una parte se pierde por convección y la temperatura se aproxima a T_∞. Por eso añadir longitud indefinidamente no es eficiente: las zonas alejadas pueden aportar poco calor adicional y sólo incrementar peso, coste y volumen.

La utilidad de una aleta depende de tres aspectos: una conductividad alta en el material, un coeficiente de convección suficientemente bajo como para que el aumento de área merezca la pena, y una geometría con mucho perímetro mojado sin una sección conductora excesivamente pequeña. De ahí que muchas aletas sean delgadas, numerosas y fabricadas en materiales de buena conductividad térmica.

Las aletas son más efectivas cuando se colocan en el lado que controla la resistencia térmica total. En intercambiadores gas–líquido, ese lado suele ser el gas, porque su coeficiente de convección es menor y su resistencia convectiva mayor. La siguiente comparación de orden de magnitud muestra por qué no basta con añadir área en cualquier lado del equipo:

La tabla 2.7 ilustra el efecto de colocar aletas en el lado del líquido o del gas.

Los valores de la tabla son índices normalizados respecto de una resistencia de referencia R_0. La reducción por un factor diez idealiza un aumento de diez veces del área efectiva, manteniendo h constante, contacto perfecto y rendimiento de aleta unidad; no es una predicción universal de cualquier aleteado.

Tabla 2.7: Efecto de colocar aletas en el lado del líquido o del gas.

	Sin aletas	Aletas lado líquido	Aletas lado gas
R_{gas}	100	100	100/10
R_{pared}	1	1	1
$R_{\text{líquido}}$	10	10/10	10
R_{total}	111	102	21
Reducción de resistencia	–	8 %	81 %

2.7.1 Ecuación diferencial general de aletas rectas

La ecuación de la aleta combina conducción axial y convección lateral. El parámetro $m = \sqrt{hP/(kA_c)}$ resume la competencia entre ambos efectos. Un valor grande de m indica que la convección lateral enfría rápidamente la aleta o que la conducción axial es débil; en ese caso la temperatura cae deprisa con la distancia. Un valor pequeño indica una aleta más uniforme y mejor aprovechada.

La ecuación de la aleta se obtiene aplicando conservación de energía a una rebanada diferencial. El calor entra por conducción axial, una parte sale por conducción hacia la siguiente rebanada y otra parte se pierde o gana por convección a través de la superficie lateral. Si la sección, el perímetro, k y h son constantes, el resultado es una ecuación lineal para el exceso de temperatura $\theta = T - T_\infty$.

Para construir la ecuación de una aleta recta se toma una rebanada diferencial. La temperatura se supone función sólo de la coordenada longitudinal x; esta hipótesis es razonable si la aleta es delgada y la conducción transversal es mucho más rápida que la variación axial. La aleta tiene longitud L, conductividad k, área transversal $A_c(x)$, perímetro mojado $P(x)$ y área mojada A_f. Intercambia con un fluido a T_∞ mediante h_c y, si procede, con un entorno radiante a T_r mediante h_r.

La figura 2.11 muestra la aleta recta de sección constante usada para la deducción.

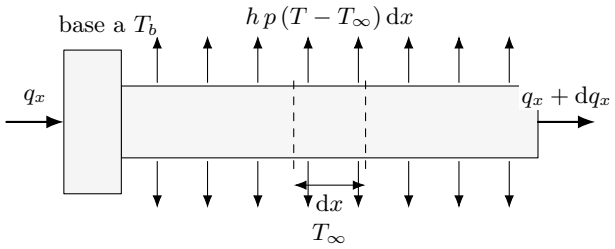


Figura 2.11: Aleta recta de sección constante y rebanada diferencial utilizada para deducir su ecuación.

El equilibrio de una rebanada $\mathrm{d}x$ es

$$q_x = (q_x + \mathrm{d}q_x) + h_c\,\mathrm{d}A_f\,(T - T_\infty) + h_r\,\mathrm{d}A_f\,(T - T_r). \tag{2.135}$$

Si $T_r \simeq T_\infty$, se usa un único coeficiente

$$h = h_c + h_r. \tag{2.136}$$

Esta suma sólo es aceptable si ambos mecanismos tienen el mismo salto térmico de referencia. Por ejemplo, una aleta que convecta hacia aire ambiente a T_∞ pero radia hacia un cielo frío o una pared lejana a $T_r \neq T_\infty$ no debe tratarse directamente con $h = h_c + h_r$ y un único T_∞; en ese caso conviene conservar los dos términos o linealizar alrededor de temperaturas de referencia distintas. Por Fourier,

$$\mathrm{d}q_x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-kA_c\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x. \tag{2.137}$$

Como $\mathrm{d}A_f = P\,\mathrm{d}x$, resulta

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(kA_c\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right) - hP(T-T_\infty) = 0} \tag{2.138}$$

Si k puede considerarse constante,

$$\boxed{k\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(A_c\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right) - hP(T-T_\infty) = 0} \tag{2.139}$$

La base se considera a temperatura conocida porque está unida al sólido primario. En el extremo, en cambio, el modelo depende de cómo se quiera representar la disipación final:

$$x = 0: \quad T = T_b, \tag{2.140}$$

$$x = L: \quad -kA_c(L)\left.\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right|_L = hA_p\left[T(L) - T_\infty\right] \quad \text{convectiva,} \tag{2.141}$$

$$x = L: \quad \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = 0 \quad \text{adiabática,} \tag{2.142}$$

$$x = L: \quad T = T_L \quad \text{en temperatura,} \tag{2.143}$$

$$x = L: \quad T = T_\infty \quad \text{infinitamente larga.} \tag{2.144}$$

La potencia evacuada por la aleta puede obtenerse como

$$q_f = \int_0^L h(T-T_\infty)\,\mathrm{d}A_f, \tag{2.145}$$

o por la base:

$$\boxed{q_f = -kA_{c,b}\left.\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}} \tag{2.146}$$

Para aletas de base recta y sección constante,

$$m = \sqrt{\frac{hP}{kA_c}}, \qquad M = (T_b - T_\infty)\sqrt{hPkA_c}. \tag{2.147}$$

La tabla 2.8 reúne las soluciones de aletas de base recta y sección constante.

Tabla 2.8: Aletas de base recta y sección constante.

Condición en $x = L$	$\dfrac{T(x)-T_\infty}{T_b-T_\infty}$	Potencia evacuada q_f
Convectiva, con $A_p = A_c$, $-kA_c\mathrm{d}T/\mathrm{d}x = hA_p(T_L - T_\infty)$	$\dfrac{\cosh[m(L-x)] + \frac{h}{mk}\sinh[m(L-x)]}{\cosh(mL) + \frac{h}{mk}\sinh(mL)}$	$M\dfrac{\sinh(mL) + \frac{h}{mk}\cosh(mL)}{\cosh(mL) + \frac{h}{mk}\sinh(mL)}$
Adiabática, $\mathrm{d}T/\mathrm{d}x = 0$	$\dfrac{\cosh[m(L-x)]}{\cosh(mL)}$	$M\tanh(mL)$
En temperatura, $T = T_L$	$\dfrac{\frac{T_L-T_\infty}{T_b-T_\infty}\sinh(mx) + \sinh[m(L-x)]}{\sinh(mL)}$	$M\dfrac{\cosh(mL) - \frac{T_L-T_\infty}{T_b-T_\infty}}{\sinh(mL)}$
Infinita, $T = T_\infty$	e^{-mx}	M

Dentro del modelo unidimensional de una aleta pasiva que intercambia con el mismo ambiente, $M = \sqrt{hPkA_c}\,\theta_b$ es el límite asintótico de la potencia cuando la aleta se hace muy larga. No es un límite universal para una punta mantenida a otra temperatura por una fuente externa ni para geometrías fuera del modelo 1D. Aunque es impracticable, no hacen falta aletas excesivamente largas para acercarse a su potencia. Para una aleta cilíndrica de diámetro $D = 3\,\mathrm{mm}$, con $h = 10\,\mathrm{W/(m^2K)}$ y $k = 150\,\mathrm{W/(mK)}$, se tiene

$$m = \sqrt{\frac{4h}{kD}} = 9{,}43\,\mathrm{m^{-1}}. \tag{2.148}$$

Si el extremo se considera adiabático, $q_f/q_\infty = \tanh(mL)$. Alcanzar el 98 % de la potencia de una aleta infinita exige

$$\tanh(mL) = 0{,}98, \qquad mL = 2{,}30, \qquad L = 0{,}244\,\mathrm{m}. \tag{2.149}$$

Con punta convectiva y los mismos datos, el valor resulta prácticamente igual porque $h/(mk) \ll 1$. Este ejemplo muestra que alargar indefinidamente una aleta produce rendimientos marginales decrecientes: más allá de cierto mL, la zona cercana a la punta está demasiado próxima a T_∞ para aportar mucho calor adicional.

La potencia q_f es proporcional a

$$M = (T_b - T_\infty)\sqrt{hPkA_c}, \tag{2.150}$$

por lo que mejora si el producto PA_c es alto, si se emplean materiales de gran conductividad y si aumenta el coeficiente de convección y radiación h. Por este motivo, suele ser preferible repartir el material en varias aletas esbeltas antes que concentrarlo en una sola aleta muy ancha o excesivamente gruesa.

A igualdad de material y ambiente, dividir una aleta en varias piezas suele aumentar el perímetro mojado disponible sin penalizar tanto la conducción axial. Una aleta simplemente alargada aumenta área, pero puede desaprovechar material si sus zonas lejanas se aproximan a T_∞. Una aleta gruesa reduce la resistencia de conducción, pero no siempre compensa el aumento de masa y volumen.

2.7.2 Caracterización de una aleta

Una vez resuelta la distribución de temperatura, interesa resumir el comportamiento de la aleta con magnitudes de diseño. La potencia indica cuánto calor transmite; la eficacia compara la mejora frente a no poner aleta; y el rendimiento compara la aleta real con una aleta ideal que estuviera completa a la temperatura de la base. Estas magnitudes responden a preguntas distintas y no deben confundirse: una aleta puede tener rendimiento moderado y ser útil si añade mucha área, o tener alto rendimiento y poca utilidad si su área añadida es pequeña.

Eficacia de la aleta. La eficacia compara la potencia real de la aleta con la que se habría evacuado si sólo existiera el área de base que ocupa. Por tanto, responde a la pregunta de diseño: ¿poner esta aleta aumenta realmente el calor transmitido?

$$\boxed{\epsilon_f = \frac{q_f}{q_{\text{sin aleta}}} = \frac{q_f}{hA_{c,b}(T_b - T_\infty)}} \qquad 0 \le \epsilon_f < \infty. \tag{2.151}$$

En este capítulo se escribe ϵ_f, con subíndice f, para la eficacia de aleta. La emisividad radiativa se reserva a ε, mientras que la efectividad de intercambiadores se escribirá como ϵ en el capítulo correspondiente. Esta convención visual refuerza la desambiguación por contexto y subíndice. La condición $\epsilon_f > 1$ indica únicamente que, bajo el mismo h y salto térmico, la aleta transmite más calor que el área de base que ocupa. Es una regla práctica de interés térmico, no una condición universal de validez ni una decisión automática de diseño. La selección final debe considerar además η_f, el área neta añadida, la pérdida de carga, la masa, el coste, la fabricación, la limpieza, las restricciones geométricas y el objetivo térmico del equipo.

Rendimiento de la aleta. El rendimiento compara la potencia real con la de una aleta ideal que estuviera por completo a la temperatura de la base. Por tanto, mide la penalización debida a la resistencia de conducción interna de la aleta.

$$\boxed{\eta_f = \frac{q_f}{q_{\text{aleta ideal}}} = \frac{q_f}{hA_f(T_b - T_\infty)}} \qquad 0 \le \eta_f \le 1. \tag{2.152}$$

Sólo se alcanza $\eta_f = 1$ para $L = 0$ o conductividad infinita.

En todo el capítulo, A_f designa el área total de la aleta representada por q_f: área lateral más punta cuando la punta intercambia calor. Se reservan $A_{f,l}$ para el área lateral y A_p para la punta, de modo que $A_f = A_{f,l} + A_p$. Si se usa la longitud corregida $L_c = L + A_p/P$, la aproximación sustituye esa área real por $A_f^* = PL_c$ y la punta no debe añadirse de nuevo. Así, $\eta_f = q_f/(hA_f\theta_b)$ en la solución exacta y $\eta_f \simeq q_f/(hA_f^*\theta_b)$ con longitud corregida.

Resistencia térmica de la aleta.

$$\boxed{R_f = \frac{T_b - T_\infty}{q_f} = \frac{1}{hA_f\eta_f}} \tag{2.153}$$

2.7.3 Caracterización de una superficie aleteada

En una superficie con muchas aletas interesa el comportamiento del conjunto. La base expuesta también intercambia calor, y no todas las aletas tienen por qué trabajar con la misma eficacia si el flujo de aire no es uniforme. En diseño se busca un compromiso entre transmisión térmica, pérdida de carga, masa, coste, facilidad de fabricación y limpieza.

En una superficie aleteada puede quedar una parte de área primaria expuesta. En el caso idealizado de cobertura completa se tiene $A_b = 0$; cuando $A_b > 0$, la base descubierta también intercambia calor. Por eso se define un rendimiento global de superficie, que combina aletas y área primaria y permite usar una expresión compacta de la forma $q = hA_T\eta_T(T_b - T_\infty)$.

Una superficie aleteada combina la convección desde la base libre y la convección desde las aletas. Si hay N aletas, el área libre de base se designa por A_b, descontando la zona ocupada por las bases $NA_{c,b}$. El área total disponible para transmitir calor es

$$A_T = A_b + NA_f. \tag{2.154}$$

Si h es el mismo sobre las aletas y la base libre,

$$R_{Nf} = \frac{1}{NhA_f\eta_f}, \qquad R_b = \frac{1}{hA_b}. \tag{2.155}$$

La potencia total es

$$q_T = \frac{T_b - T_\infty}{R_{Nf}} + \frac{T_b - T_\infty}{R_b} = \frac{T_b - T_\infty}{R_T}. \tag{2.156}$$

El rendimiento total de la superficie aleteada es

$$\boxed{\eta_T = 1 - \frac{NA_f}{A_T}(1 - \eta_f)} \tag{2.157}$$

y, por tanto,

$$\boxed{R_T = \frac{1}{hA_T\eta_T}}. \tag{2.158}$$

Si existe resistencia de contacto en la base de las aletas, la rama de las aletas no arranca exactamente a la temperatura de la base T_b, sino a una temperatura efectiva T_b' después de la caída de contacto. Una representación útil es

$$R_{\text{rama aletas}} = \frac{R_c''}{NA_{c,b}} + \frac{1}{NhA_f\eta_f}, \qquad R_b = \frac{1}{hA_b}, \tag{2.159}$$

con ambas ramas en paralelo entre T_b y T_∞. Esta corrección sólo importa si la unión aleta-base tiene una resistencia comparable con la resistencia convectiva de las aletas.

En el uso de estas ecuaciones debe distinguirse siempre entre el área transversal que conduce, A_c, y el área mojada que intercambia calor con el fluido, A_f. Además, el coeficiente h rara vez es estrictamente uniforme sobre una superficie aleteada real; en diseños críticos, las expresiones anteriores sirven como modelo de partida y deben completarse con correlaciones de convección, simulación o ensayo.

Para aletas prismáticas con extremo convectivo puede usarse la aproximación de extremo adiabático con longitud corregida, $L_c \simeq L + A_p/P$:

$$\text{aleta recta rectangular:} \qquad L_c = L + \frac{t}{2}, \tag{2.160}$$

$$\text{aleta de aguja:} \qquad L_c = L + \frac{D}{4}, \tag{2.161}$$

$$\text{aleta anular:} \qquad r_{2c} = r_2 + \frac{t}{2}. \tag{2.162}$$

Para una aleta prismática de sección constante, la longitud que reproduce exactamente la potencia del extremo convectivo en la solución de punta adiabática es $L_{\text{ef}} = L + \operatorname{atanh}(\beta_p)/m$, donde $\beta_p = hA_p/(mkA_c)$. La regla $L + A_p/P$ es una aproximación de primer orden.

Geometría y área de las fórmulas de rendimiento En las aletas rectas afinadas, L es la longitud axial, t el espesor completo en la base y se supone una aleta delgada de anchura grande o unitaria, con convección por las dos caras principales; el espesor decrece linealmente en la triangular y según el perfil indicado en la parabólica. En la aleta anular rectangular, r_1 es el radio de la base, r_2 el radio exterior, t el espesor uniforme y $r_{2c} = r_2 + t/2$ incorpora aproximadamente la convección del canto exterior; las dos caras planas intercambian calor. En las agujas, D es el diámetro en la base y el perfil se afina hasta la punta según la geometría indicada. En todos los casos, el rendimiento debe calcularse con el área real mojada de esa misma geometría, o con el área efectiva coherente con la longitud corregida, nunca con el área de otra fila.

La tabla 2.9 recoge rendimientos de aletas con extremo adiabático o longitud corregida.

Tabla 2.9: Rendimiento de aletas con extremo adiabático o longitud corregida, con esquema e interpretación física de cada geometría.

Geometría	Esquema	Cuándo representa bien la aleta	Parámetro y rendimiento
Recta rectangular		Aleta prismática de espesor constante. Es la geometría más común en disipadores mecanizados o placas aleteadas.	$m = \sqrt{\frac{hP}{kA_c}}$ $\eta_f = \frac{\tanh(mL_c)}{mL_c}$
Recta triangular		Aleta con espesor que decrece linealmente. Reduce masa donde el flujo ya es menor, manteniendo material cerca de la base.	$m = \sqrt{\frac{2h}{kt}}$ $\eta_f = \frac{1}{mL}\frac{I_1(2mL)}{I_0(2mL)}$
Recta parabólica cóncava		Aleta afinada de forma suave. Reparte mejor el material que la triangular cuando se busca una buena relación entre masa y capacidad de disipación.	$m = \sqrt{\frac{2h}{kt}}$ $\eta_f = \frac{2}{\sqrt{4(mL)^2+1}+1}$
Anular rectangular		Aleta radial unida a un cilindro o tubo. Es habitual en superficies exteriores de tuberías, camisas y disipadores anulares.	$m = \sqrt{\frac{2h}{kt}}$ $\eta_f = C_2\frac{\Phi_1}{\Phi_0}$
Aguja cilíndrica		Aleta de tipo perno o pasador, de diámetro constante. Se emplea cuando conviene aumentar área sin crear canales planos estrechos.	$m = \sqrt{\frac{4h}{kD}}$ $\eta_f = \frac{\tanh(mL_c)}{mL_c}$
Aguja cónica		Perno cuyo diámetro disminuye linealmente. Conserva material cerca de la base y aligera la punta, donde la temperatura ya se aproxima a T_∞.	$m = \sqrt{\frac{4h}{kD}}$ $\eta_f = \frac{2}{mL}\left[\frac{I_0(2mL)}{I_1(2mL)} - \frac{1}{mL}\right]$
Aguja cónica alternativa		Misma geometría que la fila anterior. Esta expresión alternativa puede resultar más cómoda según las funciones especiales disponibles en el software de cálculo.	$m = \sqrt{\frac{4h}{kD}}$ $\eta_f = \frac{2}{mL}\frac{I_2(2mL)}{I_1(2mL)}$
Aguja parabólica		Perno con afinamiento parabólico. Suele dar una distribución de material más próxima a la necesidad real de conducción a lo largo de la aleta.	$m = \sqrt{\frac{4h}{kD}}$ $\eta_f = \frac{2}{\sqrt{\frac{4}{9}(mL)^2+1}+1}$

En la fila de aleta anular rectangular se han usado las abreviaturas

$$\Phi_1 = K_1(mr_1)I_1(mr_{2c}) - I_1(mr_1)K_1(mr_{2c}),$$
$$\Phi_0 = I_0(mr_1)K_1(mr_{2c}) + K_0(mr_1)I_1(mr_{2c}),$$
$$C_2 = \frac{2r_1/m}{r_{2c}^2 - r_1^2}.$$

Aquí, I_n y K_n son funciones de Bessel modificadas de primera y segunda especie. Para cálculo numérico pueden evaluarse directamente con software científico; en hojas de cálculo suelen aparecer como BesselI y BesselK. Las dos filas de aguja cónica son la misma solución escrita de dos formas equivalentes, porque la recurrencia

$$I_2(x) = I_0(x) - \frac{2}{x} I_1(x)$$

con $x = 2mL$ transforma una expresión en la otra.

Ampliación. Las aletas anulares requieren funciones de Bessel. Para la primera ruta de aprendizaje basta dominar la aleta recta de sección constante.

La tabla 2.10 proporciona funciones de Bessel para el cálculo de aletas anulares.

Tabla 2.10: Funciones de Bessel para el cálculo de aletas anulares.

x	$e^{-x}I_0(x)$	$e^{-x}I_1(x)$	$e^{x}K_0(x)$	$e^{x}K_1(x)$	x	$e^{-x}I_0(x)$	$e^{-x}I_1(x)$	$e^{x}K_0(x)$	$e^{x}K_1(x)$
0,0	1,0000	0,0000	∞	∞	6,2	0,1638	0,1499	0,4940	0,5324
0,05	0,9518	0,0238	3,2739	20,9305	6,4	0,1611	0,1479	0,4865	0,5232
0,10	0,9071	0,0453	2,6823	10,8902	6,6	0,1585	0,1460	0,4793	0,5144
0,15	0,8656	0,0647	2,3586	7,5258	6,8	0,1561	0,1441	0,4724	0,5060
0,20	0,8269	0,0823	2,1408	5,8334	7,0	0,1537	0,1423	0,4658	0,4981
0,25	0,7910	0,0981	1,9793	4,8113	7,2	0,1515	0,1405	0,4595	0,4905
0,30	0,7576	0,1124	1,8526	4,1252	7,4	0,1494	0,1389	0,4535	0,4832
0,35	0,7264	0,1252	1,7493	3,6316	7,6	0,1473	0,1372	0,4476	0,4762
0,40	0,6974	0,1368	1,6627	3,2587	7,8	0,1453	0,1357	0,4420	0,4696
0,45	0,6703	0,1471	1,5886	2,9665	8,0	0,1434	0,1341	0,4366	0,4631
0,50	0,6450	0,1564	1,5241	2,7310	8,2	0,1416	0,1327	0,4314	0,4570
0,60	0,5993	0,1722	1,4167	2,3739	8,4	0,1399	0,1312	0,4264	0,4511
0,70	0,5593	0,1847	1,3301	2,1150	8,6	0,1382	0,1299	0,4215	0,4454
0,80	0,5241	0,1945	1,2582	1,9179	8,8	0,1365	0,1285	0,4168	0,4399
0,90	0,4932	0,2021	1,1972	1,7624	9,0	0,1350	0,1272	0,4123	0,4346
1,00	0,4658	0,2079	1,1445	1,6362	9,2	0,1334	0,1260	0,4079	0,4295
1,2	0,4198	0,2153	1,0575	1,4429	9,4	0,1320	0,1247	0,4036	0,4246
1,4	0,3831	0,2185	0,9881	1,3011	9,6	0,1305	0,1235	0,3995	0,4198
1,6	0,3533	0,2190	0,9309	1,1919	9,8	0,1292	0,1224	0,3955	0,4152
1,8	0,3289	0,2177	0,8828	1,1048	10,0	0,1278	0,1213	0,3916	0,4108
2,0	0,3085	0,2153	0,8416	1,0335	10,2	0,1265	0,1202	0,3879	0,4064
2,2	0,2913	0,2121	0,8057	0,9738	10,4	0,1253	0,1191	0,3842	0,4023
2,4	0,2766	0,2085	0,7740	0,9229	10,6	0,1241	0,1181	0,3806	0,3982
2,6	0,2639	0,2047	0,7459	0,8790	10,8	0,1229	0,1170	0,3772	0,3943
2,8	0,2528	0,2007	0,7206	0,8405	11,0	0,1217	0,1161	0,3738	0,3904
3,0	0,2430	0,1968	0,6978	0,8066	11,2	0,1206	0,1151	0,3705	0,3867
3,2	0,2343	0,1930	0,6770	0,7763	11,4	0,1195	0,1142	0,3673	0,3831
3,4	0,2264	0,1892	0,6580	0,7491	11,6	0,1185	0,1132	0,3642	0,3796
3,6	0,2193	0,1856	0,6405	0,7245	11,8	0,1174	0,1123	0,3612	0,3762
3,8	0,2129	0,1821	0,6243	0,7021	12,0	0,1164	0,1115	0,3582	0,3728
4,0	0,2070	0,1788	0,6093	0,6816	12,2	0,1154	0,1106	0,3553	0,3696
4,2	0,2016	0,1755	0,5953	0,6627	12,4	0,1145	0,1098	0,3525	0,3664
4,4	0,1966	0,1725	0,5823	0,6454	12,6	0,1136	0,1090	0,3497	0,3633
4,6	0,1919	0,1695	0,5701	0,6292	12,8	0,1126	0,1082	0,3470	0,3603
4,8	0,1876	0,1667	0,5586	0,6143	13,0	0,1118	0,1074	0,3444	0,3574
5,0	0,1835	0,1640	0,5478	0,6003	13,2	0,1109	0,1066	0,3418	0,3545
5,2	0,1797	0,1614	0,5376	0,5872	13,4	0,1100	0,1059	0,3393	0,3518
5,4	0,1762	0,1589	0,5280	0,5749	13,6	0,1092	0,1051	0,3368	0,3490
5,6	0,1728	0,1565	0,5188	0,5634	13,8	0,1084	0,1044	0,3344	0,3464
5,8	0,1697	0,1542	0,5101	0,5525	14,0	0,1076	0,1037	0,3321	0,3437
6,0	0,1667	0,1521	0,5019	0,5422	14,2	0,1068	0,1030	0,3298	0,3412

La condición adiabática es la apropiada en aletas terminadas en punta o filo, porque el área de intercambio del extremo es nula. No existe una regla universal del tipo $mL \leq 1$: valores grandes de mL reducen la eficiencia de la aleta, pero también pueden aumentar la potencia total si el área añadida compensa la caída de temperatura. El diseño real se elige por compromiso entre calor disipado, masa, volumen, coste, facilidad de fabricación y pérdida de carga del flujo.

La modelización unidimensional de aletas no se controla por una única longitud geométrica universal, sino por el Biot transversal de la sección. Un criterio práctico más general es

$$\boxed{Bi_{cs} = \frac{h(A_c/P)}{k} \lesssim 0{,}1,} \tag{2.163}$$

donde A_c/P es una longitud característica de la sección transversal. Para una aleta rectangular delgada, con dos caras principales expuestas y $t \ll w$, puede tomarse $P \simeq 2w$ y $A_c/P \simeq t/2$; en ese límite el criterio equivale aproximadamente a $ht/k \lesssim 0{,}2$. Si los cantos cortos no son despreciables, debe usarse el perímetro completo $P = 2(w+t)$. Para una aleta cilíndrica de diámetro D, $A_c/P = D/4$, y el criterio equivalente es $hD/(4k) \lesssim 0{,}1$. La forma $h\delta/k < 0{,}2$ debe verse, por tanto, como una regla particular para geometrías delgadas, no como criterio general.

La longitud corregida convierte aproximadamente la convección por el extremo en un incremento de longitud con extremo adiabático. Es una simplificación útil porque evita resolver explícitamente la condición convectiva del extremo. El principio común es

$$L_c = L + \frac{A_p}{P}, \tag{2.164}$$

donde A_p es el área de la punta y P el perímetro mojado de la sección. Así, para una aleta rectangular delgada, $A_p = wt$ y $P \simeq 2w$, luego $L_c \simeq L + t/2$; para una aleta cilíndrica tipo aguja, $A_p = \pi D^2/4$ y $P = \pi D$, luego $L_c \simeq L + D/4$. Esta corrección es razonable cuando la punta es pequeña frente al área lateral y cuando $h/(mk)$ no hace dominante la disipación del extremo; se vuelve menos fiable si la punta tiene geometría compleja, si A_p no es comparable con A_c o si el coeficiente de convección no es uniforme.

Significado de Biot y Fourier **Biot, $Bi = hL_c/k$.** Compara la dificultad de conducir dentro del sólido con la dificultad de intercambiar calor en la superficie. Si $Bi \to 0$, el interior se iguala rápidamente; si Bi es grande, aparecen gradientes internos.

En el método de resistencia interna despreciable se adopta $L_c = V/A_s$. En otros modelos de este capítulo, L_c puede representar el semiespesor, el radio característico o la distancia hasta la frontera opuesta, según la geometría y la definición indicada en cada caso.

Fourier, $Fo = \alpha t/L_c^2$. Compara el tiempo transcurrido con el tiempo necesario para difundir calor a través del cuerpo. Si $Fo \to 0$, sólo cambia la zona superficial; si Fo es grande, la perturbación ha alcanzado gran parte del cuerpo.

Use primero Bi para elegir el tipo de modelo y después Fo para saber cuánto ha avanzado el transitorio.

2.8 Conducción transitoria con resistencia interna despreciable

Hasta aquí se han tratado principalmente problemas estacionarios, en los que el campo de temperaturas no cambia con el tiempo. A partir de esta sección se introduce la dependencia temporal, comenzando por el caso más sencillo: cuerpos cuya conducción interna es tan rápida que pueden tratarse como isotermos en el espacio.

El modelo de resistencia interna despreciable, también llamado de capacidad concentrada, simplifica el sólido como si toda su masa estuviera a una única temperatura $T(t)$. No significa que no exista

conducción dentro del cuerpo ni que la temperatura sea constante en el tiempo; significa que, en cada instante, todos los puntos del sólido se aproximan por la misma temperatura espacialmente uniforme. La conducción interna es suficientemente rápida frente a la convección exterior como para eliminar casi instantáneamente los gradientes internos.

Este modelo es muy útil para estimar tiempos de calentamiento y enfriamiento de piezas pequeñas o muy conductoras: sensores, bolas metálicas, pequeños componentes, herramientas o probetas. Su resultado típico es una evolución exponencial hacia la temperatura del fluido. La constante de tiempo indica si el cuerpo responde rápido o lento ante un cambio de ambiente.

En un transitorio térmico general, la temperatura depende del tiempo y de la posición. Sin embargo, si la conducción interna es muy eficaz frente al intercambio con el exterior, el sólido se calienta o enfría casi como un bloque isotermo. En ese límite se usa el modelo de resistencia interna despreciable, MRID. Su ventaja es que sustituye una ecuación en derivadas parciales por una ecuación diferencial ordinaria de primer orden. Hipótesis del modelo: temperatura espacial casi uniforme en el sólido; ausencia de cambio de fase y de fuentes internas no modeladas; propiedades, masa y capacidad térmica representativas del intervalo; condiciones superficiales suficientemente uniformes o correctamente promediadas; y uso coherente de todas las áreas activas. El criterio de Biot evalúa la importancia del gradiente interno, pero el umbral numérico debe relacionarse con la precisión exigida y no sustituye estas hipótesis físicas.

Antes de resolver un transitorio conviene escoger el modelo con una secuencia de decisión. Primero se calcula el número de Biot con la longitud característica adecuada. Si el gradiente interno es despreciable, se usa MRID. Si no lo es, el siguiente criterio es cuánto ha penetrado la perturbación térmica respecto al tamaño finito del cuerpo.

La tabla 2.11 guía la selección del modelo transitorio adecuado.

Tabla 2.11: Guía de selección del modelo transitorio. Los límites son criterios prácticos, no fronteras matemáticas exactas.

Situación	Criterio práctico	Modelo recomendado
Gradiente interno despreciable	$Bi = hL_c/k \lesssim 0{,}1$	MRID o capacidad concentrada.
Penetración térmica pequeña	$Bi \gtrsim 0{,}1$ y $Fo_L = \alpha t/L^2 \lesssim 0{,}05$–$0{,}10$	Sólido semi-infinito.
Cuerpo finito con gradientes	$Bi \gtrsim 0{,}1$ y $Fo \gtrsim 0{,}2$	Solución de un término para pared, cilindro largo o esfera.
Zona intermedia o geometría compleja	Sin criterio simple dominante	Series completas, gráficos de Heisler o método numérico.

La figura 2.12 esquematiza el modelo de resistencia interna despreciable.

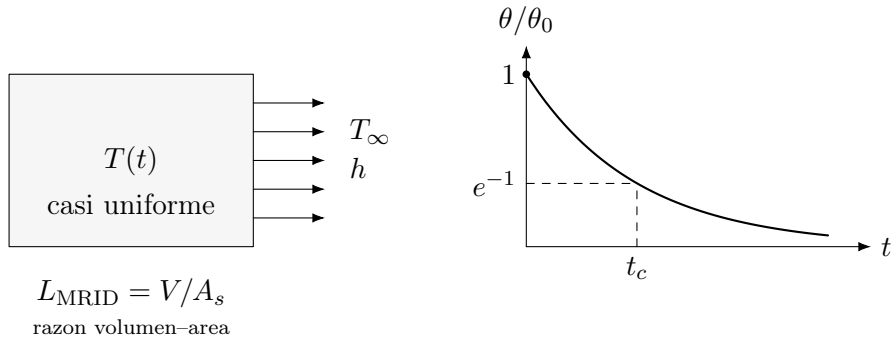


Figura 2.12: Modelo de resistencia interna despreciable: el sólido se considera casi isotermo y su temperatura evoluciona exponencialmente.

Las flechas del esquema representan el sentido del calor durante un enfriamiento, $T(t) > T_\infty$; en un calentamiento se invierten. La curva exponencial corresponde al MRID con propiedades y coeficiente global de intercambio constantes.

Para una pared plana en contacto con un fluido a $T_\infty < T_2$,

$$q = \frac{T_1 - T_2}{L/(kA)} = \frac{T_2 - T_\infty}{1/(hA)}. \tag{2.165}$$

El cociente entre la caída de temperatura en el sólido y en el fluido es

$$\boxed{\frac{\Delta T_{\text{sólido}}}{\Delta T_{\text{fluido}}} = \frac{T_1 - T_2}{T_2 - T_\infty} = \frac{L/(kA)}{1/(hA)} = \frac{hL}{k_{\text{sólido}}} = Bi_{\text{pared}}} \tag{2.166}$$

El número de Biot mide la importancia de la resistencia conductiva interna respecto a la resistencia de intercambio externo. En esta comparación de pared plana se ha usado el espesor conductor L porque el flujo atraviesa la pared de una cara a la otra; por eso se ha escrito Bi_{pared}. En las soluciones de pared simétrica y cartas de Heisler, la longitud geométrica se define en cada caso como el semiespesor desde el plano de simetría hasta la superficie. En el modelo formal de capacidad concentrada para cuerpos generales se emplea

$$\boxed{Bi = \frac{hL_c}{k}, \qquad L_c = \frac{V}{A_s},} \tag{2.167}$$

En este criterio de capacidad concentrada, L_c significa exclusivamente el cociente volumen/área de intercambio, V/A_s. donde A_s es el área de intercambio con el entorno. Si $Bi \ll 1$, casi toda la caída de temperatura está fuera del sólido y el modelo isotermo es razonable. Si $Bi \gg 1$, la caída interna domina y ya no puede ignorarse la distribución espacial de temperatura. Para $Bi \approx 1$, ninguna de las dos resistencias es despreciable.

La figura 2.13 compara la caída de temperatura interna y externa para distintos valores de Biot.

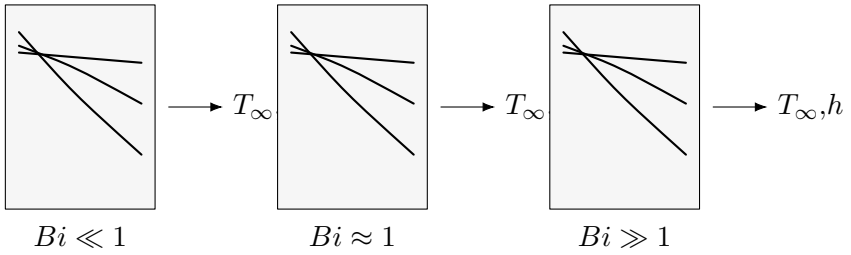


Figura 2.13: Comparación de la caída de temperatura interna y externa para distintos valores de Bi.

Modelo MRID

El balance energético se realiza sobre todo el sólido. La energía almacenada en la masa ρV cambia al ritmo $\rho V c\,\mathrm{d}T/\mathrm{d}t$, mientras que la energía que cruza la superficie se calcula con la ley de enfriamiento de Newton. La solución exponencial muestra que la diferencia $T - T_\infty$ no desaparece de golpe, sino que se reduce en una fracción constante por cada intervalo de tiempo característico.

Para un sólido que puede considerarse isotermo internamente,

$$q_{\text{entra}} + q_{\text{genera}} = q_{\text{sale}} + \dot{W} + \dot{U}. \tag{2.168}$$

El trabajo de expansión se desprecia y

$$\dot{U} = mc\frac{\partial T}{\partial t} = \rho V c\frac{\partial T}{\partial t}. \tag{2.169}$$

El caso básico es el enfriamiento de un cuerpo inicialmente a T_0 en un medio más frío. Como la temperatura interna se considera uniforme, toda la dinámica queda descrita por el balance entre la pérdida convectiva superficial y la energía interna almacenada en el sólido:

$$0 = hA(T - T_\infty) + \rho V c\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}, \qquad T(0) = T_0. \tag{2.170}$$

Aquí A es el área efectiva de intercambio con el fluido: si todo el contorno exterior intercambia calor se usa el área exterior completa; si alguna zona está aislada, esa zona no forma parte de A. Esta elección también afecta a la longitud característica $L_c = V/A$. No debe confundirse esta longitud característica del modelo transitorio con la longitud corregida L_c usada en aletas; el significado lo fija siempre el contexto y la expresión que la define. Con $\theta = T - T_\infty$,

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = -\frac{hA}{\rho V c}\theta. \tag{2.171}$$

Integrando,

$$\boxed{\frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \frac{\theta}{\theta_0} = \exp\left(-\frac{\bar{h}A}{\rho V c}t\right)} \tag{2.172}$$

La solución exponencial es exacta sólo con h, propiedades y temperatura del foco constantes. Si $h = h(T)$,

$$t = \frac{\rho V c}{A}\int_T^{T_0} \frac{\mathrm{d}\vartheta}{h(\vartheta)(\vartheta - T_\infty)}.$$

Usar una exponencial con $\bar{h}$ es una aproximación iterativa que debe contrastarse con esta integral o con una integración numérica cuando la variación sea apreciable.

Definiendo la constante de tiempo,

$$\boxed{t_c = \frac{\rho V c}{\bar{h}A} = \frac{\rho c L_c}{\bar{h}}}, \qquad L_c = \frac{V}{A}, \tag{2.173}$$

se obtiene

$$\boxed{\frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = e^{-t/t_c}} \tag{2.174}$$

El significado de t_c es el tiempo necesario para que $T - T_\infty$ caiga hasta el 37 % de su valor inicial.

La misma expresión es válida si además de convección hay radiación con un entorno a la misma temperatura que el fluido, usando

$$\bar{h} = \bar{h}_c + \bar{h}_r. \tag{2.175}$$

2.8.1 Validez del MRID

El número de Biot es el criterio clave. Compara la resistencia interna por conducción con la resistencia externa de intercambio. Si Bi es pequeño, el sólido redistribuye internamente el calor con rapidez y la temperatura puede considerarse casi uniforme. Si Bi no es pequeño, la superficie y el interior evolucionan a ritmos distintos y hay que resolver un problema transitorio con gradientes espaciales. Un Bi pequeño justifica gradientes internos reducidos, pero no garantiza una respuesta rápida. La rapidez absoluta depende de la constante de tiempo $\tau = \rho c V/(hA_s)$; un cuerpo con gran inercia térmica puede tener $Bi \ll 1$ y evolucionar lentamente.

El modelo es aplicable cuando

$$\boxed{Bi = \frac{\bar{h} L_c}{k} < 0{,}1,} \tag{2.176}$$

con

$$L_c = \frac{V}{A}. \tag{2.177}$$

Esta definición permite aplicar el modelo a cuerpos de forma regular o irregular.

Si Bi no es pequeño, la temperatura interna deja de ser prácticamente uniforme y el MRID ya no describe bien el transitorio. En ese caso se debe resolver la conducción transitoria con dependencia espacial. Para paredes planas, cilindros largos y esferas se emplean soluciones de cuerpo finito, frecuentemente expresadas mediante series o gráficos en función de Bi y Fo. Para tiempos muy cortos, antes de que la perturbación térmica alcance la cara opuesta, el mismo cuerpo puede aproximarse como semi-infinito; para tiempos mayores, debe recuperarse la geometría finita.

2.8.2 Otros casos

El mismo balance de capacidad concentrada puede adaptarse a otras formas de intercambio, como radiación linealizada o combinación de convección y radiación. La estructura sigue siendo la misma: capacidad térmica multiplicada por la velocidad de cambio de temperatura igual a la potencia neta intercambiada con el entorno.

El modelo MRID también se puede adaptar cuando existen generación interna, radiación linealizada o varios mecanismos superficiales. La estructura del balance no cambia: acumulación igual a entradas menos salidas más generación. Lo que cambia es la expresión de la potencia intercambiada. En ingeniería se suele linealizar la radiación alrededor de una temperatura representativa para combinarla con la convección mediante un coeficiente equivalente.

Caso 2: sólo radiación en vacío. No hay convección ($h_c = 0$). Existe intercambio radiante con una superficie envolvente a T_{sur}, mucho mayor que el cuerpo. Para cuerpos grises difusos,

$$\varepsilon \sigma A_r (T^4 - T_{\text{sur}}^4) + \rho V c \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = 0, \qquad T(0) = T_0. \tag{2.178}$$

Separando variables,

$$\frac{\varepsilon \sigma A_r}{\rho V c} \int_0^t \mathrm{d}t = -\int_{T_0}^{T} \frac{\mathrm{d}T}{T^4 - T_{\text{sur}}^4}. \tag{2.179}$$

Usando

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4 - a^4} = \frac{1}{4a^3} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| - \frac{1}{2a^3} \arctan\left(\frac{x}{a}\right), \tag{2.180}$$

se obtiene

$$\boxed{t = -\frac{\rho V c}{4\varepsilon A_r \sigma T_{\text{sur}}^3}\left\{\ln\left|\frac{T-T_{\text{sur}}}{T+T_{\text{sur}}}\right| - \ln\left|\frac{T_0-T_{\text{sur}}}{T_0+T_{\text{sur}}}\right| - 2\left[\arctan\left(\frac{T}{T_{\text{sur}}}\right) - \arctan\left(\frac{T_0}{T_{\text{sur}}}\right)\right]\right\}} \tag{2.181}$$

Esta ecuación no permite despejar T explícitamente y no es aplicable cuando $T_{\text{sur}} = 0$. Para radiación al espacio profundo, $T_{\text{sur}} = 0$:

$$\boxed{T = \left(\frac{1}{T_0^3} + \frac{3\varepsilon\sigma A_r}{\rho V c}t\right)^{-1/3}} \tag{2.182}$$

El numero de Biot asociado es

$$Bi_r = \frac{\bar{h}_r L_{\text{car},r}}{k}, \qquad L_{\text{car},r} = \frac{V}{A_r}, \qquad \bar{h}_r = \varepsilon\sigma(\bar{T}^2 + T_{\text{sur}}^2)(\bar{T} + T_{\text{sur}}). \tag{2.183}$$

El area A_r debe ser exclusivamente la superficie que intercambia radiacion. Si solo una parte del cuerpo radia, $L_{\text{car},r} = V/A_r$ no coincide con V/A_s calculado con toda la superficie. Como $\bar{h}_r$ se evalua a una temperatura representativa, este Biot y la constante de tiempo asociada constituyen una aproximacion linealizada. La constante de tiempo radiativa, si se linealiza con un coeficiente medio $\bar{h}_r$, es

$$t_c = \frac{\rho V c}{\bar{h}_r A_r}. \tag{2.184}$$

Caso 3: convección, radiación, irradiancia y generación interna. En este apartado A_G representa el área efectiva que intercepta la irradiancia G, y α_s es la absortividad superficial. No debe confundirse α_s con la difusividad térmica $\alpha = k/(\rho c)$.

Si $T_{\text{sur}} = T_\infty$ y $A_c = A_r = A$:

$$\alpha_s G A_G + q''' V = (\bar{h}_c + \bar{h}_r)A(T - T_\infty) + \rho V c\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}, \qquad T(0) = T_0. \tag{2.185}$$

Con $\theta = T - T_\infty$,

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + a\theta - b = 0, \quad a = \frac{\bar{h}A}{\rho V c}, \quad b = \frac{\alpha_s G A_G + q''' V}{\rho V c}, \quad \bar{h} = \bar{h}_c + \bar{h}_r. \tag{2.186}$$

La solución es

$$\boxed{\frac{(T-T_\infty) - \dfrac{\alpha_s G A_G + q''' V}{\bar{h}A}}{(T_0-T_\infty) - \dfrac{\alpha_s G A_G + q''' V}{\bar{h}A}} = \exp\left(-\frac{\bar{h}A}{\rho V c}t\right)} \tag{2.187}$$

Se reduce al caso básico cuando $G = 0$ y $q''' = 0$. Además,

$$Bi = \frac{(\bar{h}_c + \bar{h}_r)L_c}{k}, \qquad t_c = \frac{\rho V c}{(\bar{h}_c + \bar{h}_r)A}. \tag{2.188}$$

Caso 4: convección y radiación con temperaturas externas distintas. Si hay convección con T_∞, radiación con una envolvente a T_{sur}, sin irradiancia puntual ni generación, y $A_c = A_r = A$:

$$\bar{h}_c A(T - T_\infty) + \bar{h}_r A(T - T_{\text{sur}}) + \rho V c\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = 0. \tag{2.189}$$

La solución aproximada con coeficientes medios es

$$\boxed{\frac{(T-T_\infty)+\dfrac{\bar{h}_r}{\bar{h}_c+\bar{h}_r}(T_\infty-T_{\text{sur}})}{(T_0-T_\infty)+\dfrac{\bar{h}_r}{\bar{h}_c+\bar{h}_r}(T_\infty-T_{\text{sur}})}=\exp\left[-\frac{(\bar{h}_c+\bar{h}_r)A}{\rho V c}t\right]} \tag{2.190}$$

También aquí

$$Bi=\frac{(\bar{h}_c+\bar{h}_r)L_c}{k},\qquad t_c=\frac{\rho V c}{(\bar{h}_c+\bar{h}_r)A}. \tag{2.191}$$

En el caso general con irradiancia, convección, radiación y generación interna,

$$\boxed{\alpha_s G A_G+q'''V=h_c A_c(T-T_\infty)+\varepsilon\sigma A_r(T^4-T_{\text{sur}}^4)+\rho V c\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}} \tag{2.192}$$

con $T(0)=T_0$. Es una ecuación diferencial ordinaria no homogénea, de primer orden y no lineal, que en general sólo puede resolverse numéricamente.

Núcleo. En una primera lectura estudie sólo el cambio brusco de temperatura superficial y el criterio de penetración térmica. Las demás condiciones se presentan como consulta.

2.9 Conducción transitoria en un sólido semi-infinito

El modelo semi-infinito se aplica cuando el calentamiento o enfriamiento afecta sólo a una zona próxima a la superficie y la frontera opuesta todavía no influye en el campo de temperaturas. El cuerpo real puede tener espesor finito, pero durante el intervalo analizado se comporta como si se extendiera indefinidamente hacia el interior.

La escala natural de penetración térmica es $\sqrt{\alpha t}$. En esta sección, L es la distancia desde la superficie perturbada hasta la frontera opuesta; no es el $L_c=V/A_s$ del modelo concentrado ni la longitud corregida de una aleta. Como regla de ingeniería, la zona afectada de forma apreciable suele estimarse con

$$\delta_T\sim 2\sqrt{\alpha t}\quad\text{a}\quad 4\sqrt{\alpha t}, \tag{2.193}$$

según el nivel de tolerancia adoptado. Si δ_T es mucho menor que la distancia L hasta la frontera opuesta, el modelo semi-infinito es razonable. Por el contrario, cuando la perturbación alcanza la cara opuesta, debe usarse una solución de cuerpo finito o un método numérico.

Comprobación gráfica de validez Dibuje mentalmente una capa afectada de espesor aproximado $4\sqrt{\alpha t}$. Si esa capa cabe con holgura antes de la cara opuesta, el cuerpo puede tratarse como semi-infinito. La igualdad $4\sqrt{\alpha t}=L$ equivale exactamente a $Fo_L=\alpha t/L^2=1/16=0{,}0625$. En forma adimensional, use como guía $Fo_L\lesssim 0{,}05$; hasta 0,10 puede ser aceptable en una estimación preliminar.

Este modelo es típico en temple, calentamiento superficial, contacto breve entre piezas, ensayos térmicos, suelos, paredes gruesas y procesos donde interesa sólo la región próxima a la superficie. No debe confundirse con el modelo de resistencia interna despreciable: el sólido semi-infinito posee gradientes internos intensos, mientras que el MRID supone temperatura prácticamente uniforme.

2.9.1 Ecuación diferencial y casos de interés

Las soluciones con función error aparecen porque el problema no tiene una longitud geométrica fija en la dirección profunda; la longitud efectiva la crea la propia difusión térmica con el tiempo. La variable adimensional $\eta=x/(2\sqrt{\alpha t})$ compara la profundidad considerada con la profundidad de

penetración térmica. Valores pequeños de η corresponden a puntos cercanos a la superficie; valores grandes corresponden a zonas que apenas han notado el cambio.

Todos los casos de esta sección comparten la misma ecuación diferencial en x y t. La diferencia entre ellos está en la condición de contorno de la superficie: temperatura impuesta, flujo impuesto, convección, pulso energético o variación periódica. Cada condición representa una forma distinta de excitar térmicamente el sólido, y por eso aparecen soluciones con funciones error o con amortiguación exponencial.

La figura 2.14 resume los casos clásicos de contorno en un sólido semi-infinito.

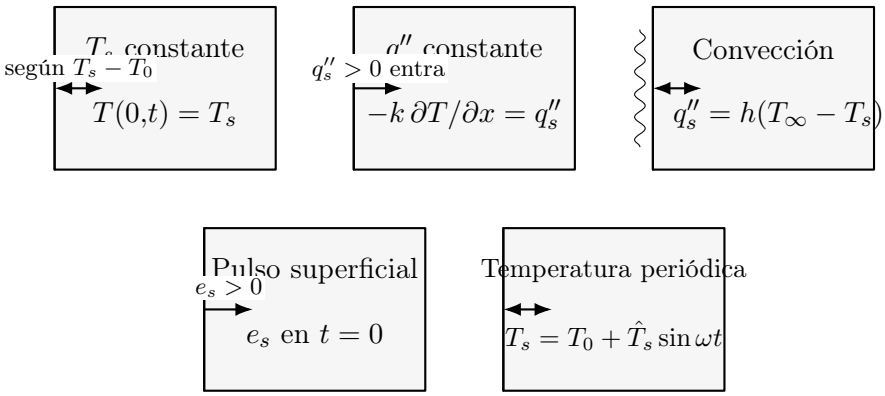


Figura 2.14: Casos clásicos de contorno en un sólido semi-infinito. Las flechas dobles indican que una temperatura prescrita, una convección o una excitación periódica pueden producir flujo entrante o saliente; las flechas simples muestran el signo positivo adoptado para q''_s o e_s.

Caso 1: temperatura superficial constante. Si el cuerpo está inicialmente a temperatura uniforme T_0, y la superficie cambia y se mantiene en T_s:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}, \tag{2.194}$$

$$T(0,t) = T_s, \tag{2.195}$$

$$T(x \to \infty,t) = T_0, \tag{2.196}$$

$$T(x,0) = T_0. \tag{2.197}$$

La solución es

$$\boxed{\frac{T(x,t) - T_0}{T_s - T_0} = 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right) = \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right)} \tag{2.198}$$

La función error se define como

$$\operatorname{erf}(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-u^2}\,\mathrm{d}u, \qquad \eta = \frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}. \tag{2.199}$$

La tabla 2.12 proporciona valores de la función error complementaria.

Tabla 2.12: Valores de la función error complementaria erfc(η).

η	erfc	η	erfc	η	erfc	η	erfc	η	erfc	η	erfc
0	1	0,38	0,591	0,76	0,2825	1,14	0,10690	1,52	0,03159	1,90	0,00721
0,02	0,9774	0,4	0,5716	0,78	0,2700	1,16	0,10090	1,54	0,02941	1,92	0,00662
0,04	0,9549	0,42	0,5525	0,80	0,2579	1,18	0,09516	1,56	0,02737	1,94	0,00608
0,06	0,9324	0,44	0,5338	0,82	0,2462	1,20	0,08969	1,58	0,02545	1,96	0,00557
0,08	0,9099	0,46	0,5153	0,84	0,2349	1,22	0,08447	1,60	0,02365	1,98	0,00511
0,10	0,8875	0,48	0,4973	0,86	0,2239	1,24	0,07950	1,62	0,02196	2,0	0,00468
0,12	0,8652	0,50	0,4795	0,88	0,2133	1,26	0,07476	1,64	0,02038	2,1	0,00298
0,14	0,8431	0,52	0,4621	0,90	0,2031	1,28	0,07027	1,66	0,01890	2,2	0,00186
0,16	0,8210	0,54	0,4451	0,92	0,1932	1,3	0,06599	1,68	0,01751	2,3	0,00114
0,18	0,7991	0,56	0,4284	0,94	0,1837	1,32	0,06194	1,70	0,01612	2,4	0,00069
0,20	0,7773	0,58	0,4121	0,96	0,1746	1,34	0,05809	1,72	0,01500	2,5	0,00041
0,22	0,7557	0,60	0,3961	0,98	0,1658	1,36	0,05444	1,74	0,01387	2,6	0,00024
0,24	0,7343	0,62	0,3806	1,00	0,1573	1,38	0,05098	1,76	0,01281	2,7	0,00013
0,26	0,7131	0,64	0,3654	1,02	0,1472	1,40	0,04772	1,78	0,01183	2,8	0,00008
0,28	0,6921	0,66	0,3506	1,04	0,1413	1,42	0,04462	1,80	0,01091	2,9	0,00004
0,30	0,6714	0,68	0,3362	1,06	0,1339	1,44	0,04170	1,82	0,01006	3,0	0,00002
0,32	0,6509	0,70	0,3222	1,08	0,1267	1,46	0,03895	1,84	0,00926	3,2	0,00001
0,34	0,6306	0,72	0,3086	1,10	0,1198	1,48	0,03635	1,86	0,00853	3,4	0
0,36	0,6107	0,74	0,2953	1,12	0,1132	1,50	0,03390	1,88	0,00784	3,6	0

El flujo de calor superficial es La imposición instantánea de un escalón de temperatura superficial es una idealización: produce $q_s'' \propto t^{-1/2}$ y, por tanto, un flujo formalmente infinito cuando $t \to 0^+$. La singularidad es integrable, de modo que la energía transferida en cualquier intervalo finito permanece finita; una interfaz real suaviza el escalón mediante su resistencia y capacidad.

$$\boxed{q''(x=0) = -k\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} = \frac{k(T_s - T_0)}{\sqrt{\pi\alpha t}}} \tag{2.200}$$

Ampliación. Los casos 2 a 5 se conservan para consulta. No son necesarios para dominar el modelo básico de temperatura superficial impuesta.

Caso 2: flujo superficial constante.

$$\boxed{T(x,t) - T_0 = \frac{q_s''}{k}\left[2\sqrt{\frac{\alpha t}{\pi}}\, e^{-x^2/(4\alpha t)} - x\,\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right)\right]} \tag{2.201}$$

Como $k = \rho c \alpha$, la misma solución puede escribirse de forma equivalente como

$$T(x,t) - T_0 = \frac{q_s''}{\rho c \alpha}\left[2\sqrt{\frac{\alpha t}{\pi}}\, e^{-x^2/(4\alpha t)} - x\,\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right)\right]. \tag{2.202}$$

con

$$-k\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} = q_s''. \tag{2.203}$$

Caso 3: convección sobre la superficie.

$$\boxed{\frac{T(x,t) - T_0}{T_\infty - T_0} = \mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right) - e^{hx/k + h^2\alpha t/k^2}\,\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} + \frac{h\sqrt{\alpha t}}{k}\right)} \tag{2.204}$$

con

$$q''(x=0) = h\,[T_\infty - T(0,t)]. \tag{2.205}$$

Aquí q'' se ha tomado positivo *entrante* al sólido, en la dirección $+x$. Con el convenio vectorial de normal exterior en la superficie $x = 0$, esta misma condición se escribe

$$-k \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_0 = h\,[T_\infty - T(0,t)]. \tag{2.206}$$

Caso 4: pulso de energía superficial. Para un pulso de energía e_s [J/m^2]:

$$\boxed{T(x,t) - T_0 = \frac{e_s}{k\sqrt{\pi t/\alpha}}\, e^{-x^2/(4\alpha t)}} \tag{2.207}$$

Caso 5: temperatura superficial periódica. Si la superficie oscila como

$$T_s(t) = T_0 + \hat{T}_s \sin(\omega t), \tag{2.208}$$

entonces

$$\boxed{\frac{T(x,t) - T_0}{\hat{T}_s} = e^{-x\sqrt{\omega/(2\alpha)}} \sin\left(\omega t - x\sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}}\right)} \tag{2.209}$$

La figura 2.15 ilustra la amortiguación y el desfase de una excitación superficial periódica. Debe leerse como un perfil espacial en un instante dado: las líneas discontinuas marcan la envolvente $\pm\hat{T}_s e^{-x\sqrt{\omega/(2\alpha)}}$ y la oscilación interna aparece retrasada en fase respecto de la superficie.

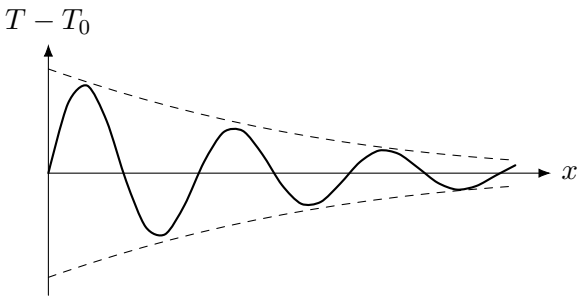


Figura 2.15: Temperatura superficial periódica en un sólido semi-infinito: amortiguación exponencial y desfase con la profundidad.

El criterio de penetración térmica debe comprobarse antes de usar cualquiera de estas soluciones. La regla $4\sqrt{\alpha t} \lesssim L$ tiene como igualdad $Fo_L = 1/16 = 0{,}0625$; el intervalo $Fo_L \lesssim 0{,}05$–$0{,}10$ es una banda práctica de tolerancia, no una equivalencia exacta ni una frontera matemática rígida. Si además $Bi \ll 1$, el modelo de capacidad concentrada suele ser más coherente que el semi-infinito.

2.9.2 Contacto entre sólidos semi-infinitos

El contacto breve entre dos sólidos se entiende bien mediante la efusividad térmica $e = \sqrt{k\rho c}$. En unidades SI, $[e] = \mathrm{W\,s^{1/2}/(m^2K)}$. Este parámetro mide la capacidad de un material para intercambiar calor con otro durante tiempos cortos. Un material con efusividad alta puede absorber o ceder calor rápidamente sin cambiar mucho su temperatura superficial; por eso domina la temperatura de contacto en el modelo ideal de contacto plano, perfecto e instantáneo.

Cuando dos sólidos grandes se ponen en contacto, la temperatura de la interfaz no suele ser la media aritmética de las temperaturas iniciales. El material que tiene mayor efusividad térmica $\sqrt{k\rho c}$ impone más fuertemente su temperatura, porque combina capacidad para almacenar energía y capacidad para conducirla hacia o desde la interfaz. Este resultado permite comparar cualitativamente la

respuesta térmica inicial, pero no predice por sí solo la sensación humana: también intervienen presión, rugosidad, humedad, resistencia real de contacto, duración, espesor de los tejidos y perfusión sanguínea. El ejercicio 24 desarrolla estas limitaciones.

La figura 2.16 muestra el contacto ideal entre dos sólidos semi-infinitos.

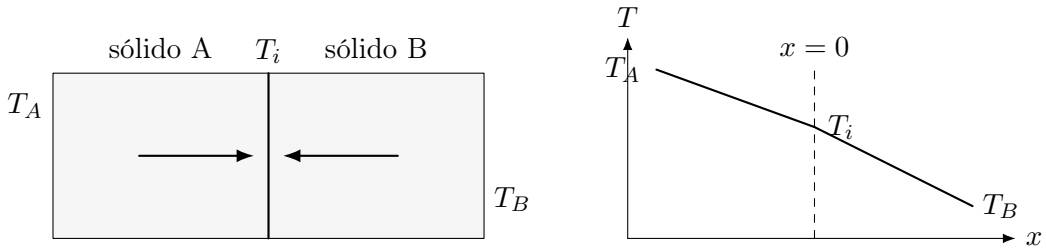


Figura 2.16: Contacto entre dos sólidos semi-infinitos: la temperatura de interfaz es constante y queda más próxima al material con mayor efusividad térmica.

Se consideran dos sólidos homogéneos y semi-infinitos, con propiedades constantes y temperaturas iniciales uniformes T_A y T_B. El contacto plano se establece en $t = 0$, el transporte es unidimensional normal a la interfaz y esta se idealiza perfecta: sin resistencia térmica, sin capacidad interfacial y sin generación. Si existe resistencia de contacto, rugosidad apreciable o una capa intermedia, debe utilizarse el modelo de la Sección de resistencia de contacto y aparecen dos temperaturas interfaciales. El flujo en la unión cumple

$$\boxed{q'' = \frac{k_A(T_A - T_i)}{\sqrt{\pi \alpha_A t}} = \frac{k_B(T_i - T_B)}{\sqrt{\pi \alpha_B t}}} \tag{2.210}$$

De aquí,

$$\frac{T_A - T_i}{T_i - T_B} = \frac{k_B}{k_A}\left(\frac{\alpha_A}{\alpha_B}\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{(k\rho c)_B}{(k\rho c)_A}}. \tag{2.211}$$

Como $\alpha = k/(\rho c)$, la temperatura de contacto es

$$\boxed{T_i = \frac{T_A\sqrt{(k\rho c)_A} + T_B\sqrt{(k\rho c)_B}}{\sqrt{(k\rho c)_A} + \sqrt{(k\rho c)_B}}} \tag{2.212}$$

La continuidad de flujo en la interfaz no implica pendientes iguales en ambos sólidos; las pendientes se ajustan según k y α para que el flujo sea el mismo a ambos lados.

La temperatura T_i no depende del tiempo mientras el modelo semi-infinito sea válido. Su valor está más próximo a la temperatura inicial del cuerpo con mayor efusividad térmica, proporcional a $\sqrt{k\rho c}$. Por eso dos materiales a la misma temperatura ambiental pueden producir sensaciones térmicas distintas al tocarlos: el material con mayor efusividad impone con más intensidad su temperatura en la interfaz.

Como ejemplo, para $T_{\text{piel}} = 34°\text{C}$ y $T_{\text{cuerpo}} = 10°\text{C}$:

La tabla 2.13 resume valores orientativos de sensación térmica por contacto.

Tabla 2.13: Sensación térmica por contacto, según $k\rho c$. Valores orientativos, sensibles a propiedades, humedad, temperatura y estado superficial.

Material	$k\rho c\,[\mathrm{kg^2/(s^5K^2)}]$	T_i
Tierra seca	$\sim 2{,}8\cdot 10^6$	21,7°C
Corcho	$\sim 1{,}2\cdot 10^4$	32,4°C
Madera	$\sim 6{,}9\cdot 10^5$	25,7°C
Acero	$\sim 2{,}8\cdot 10^8$	12,1°C
Cuerpo humano, aproximadamente agua	$\sim 2{,}5\cdot 10^6$	–

La tabla anterior es ilustrativa: no sustituye una evaluación con propiedades medidas a la temperatura de interés. En materiales porosos como madera, corcho o tierra, la humedad puede modificar mucho k, ρc y la efusividad.

La sensación de frío aumenta en el orden: corcho, madera, tierra seca, acero. Si los cuerpos estuvieran más calientes que la piel, el corcho parecería el menos caliente y el acero el más caliente.

Una forma rápida de interpretar el ejemplo es usar la efusividad $e_t = \sqrt{k\rho c}$. Para la piel, con $k\rho c \simeq 2{,}5\cdot 10^6$, resulta $e_t \simeq 1{,}58\cdot 10^3$ en unidades SI. Para el acero, con $k\rho c \simeq 2{,}8\cdot 10^8$, $e_t \simeq 1{,}67\cdot 10^4$, aproximadamente diez veces mayor. Por eso, al tocar acero a 10 °C, la temperatura instantánea de contacto se aproxima mucho más a la del acero que a la de la piel y se obtiene $T_i \simeq 12$ °C: la extracción inicial de calor es intensa y se siente más frío que la madera o el corcho a la misma temperatura.

Ampliación. Este bloque es de consulta. En el nivel básico basta con reconocer cuándo el modelo analítico deja de ser adecuado y cómo se verifica una solución numérica.

2.10 Métodos numéricos de conducción

Cuando la geometría, las condiciones de contorno, las propiedades variables o la generación interna impiden una solución cerrada sencilla, se discretiza el dominio. La idea central es conservar energía en cada nodo: lo que entra por conducción, convección, radiación o generación debe equilibrarse con lo que sale y con el almacenamiento si el problema es transitorio.

Hay dos rutas numéricas relacionadas para obtener las ecuaciones nodales: sustituir derivadas por diferencias finitas o escribir un balance de energía sobre un pequeño volumen de control alrededor del nodo. En una malla uniforme, con operador lineal, propiedades constantes y discretización centrada, ambas rutas pueden producir el mismo esténcil interior. No son universalmente equivalentes: difieren en mallas no uniformes, interfaces, geometrías curvilíneas, coeficientes variables y formulaciones donde la conservación local debe imponerse cara por cara. Para una malla uniforme, las aproximaciones centrales básicas son

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_m \simeq \frac{T_{m+1} - T_{m-1}}{2\Delta x}, \tag{2.213}$$

$$\left.\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right|_m \simeq \frac{T_{m+1} - 2T_m + T_{m-1}}{\Delta x^2}. \tag{2.214}$$

El método de volumen de control es especialmente seguro en fronteras, materiales compuestos y $k(T)$, porque obliga a escribir las áreas, distancias medias y flujos cara por cara.

Las fórmulas siguientes corresponden a una malla ortogonal uniforme con $\Delta x = \Delta y$, espesor uniforme, conductividad escalar constante y el nodo centrado en su volumen de control. En una frontera, el volumen de control es un semivolumen y la cara convectiva debe identificarse explícitamente; mallas no uniformes o propiedades variables requieren coeficientes diferentes. Para una malla cuadrada

bidimensional, en régimen estacionario, material homogéneo, $\Delta x = \Delta y$ y sin generación, un nodo interior satisface

$$\boxed{T_P = \frac{T_E + T_W + T_N + T_S}{4}.} \tag{2.215}$$

Con generación uniforme,

$$\boxed{T_P = \frac{T_E + T_W + T_N + T_S}{4} + \frac{q'''\Delta x^2}{4k}.} \tag{2.216}$$

Estas expresiones son balances energéticos nodales, no simples promedios arbitrarios. Si una cara del nodo está en una frontera convectiva, radiativa o adiabática, el balance debe modificarse incorporando el flujo de esa cara.

Como ejemplo mínimo, considérese un nodo superficial 1D de espesor de control $\Delta x/2$, con un vecino interior E, convección exterior (h,T_∞) y generación uniforme. En régimen estacionario,

$$\boxed{T_P = \frac{T_E + Bi_\Delta T_\infty + q'''\Delta x^2/(2k)}{1 + Bi_\Delta}}, \qquad Bi_\Delta = \frac{h\Delta x}{k}. \tag{2.217}$$

Para una esquina 2D de malla cuadrada, con dos caras convectivas y vecinos E y N, el balance estacionario por unidad de profundidad da, en general,

$$\boxed{T_P = \frac{T_E + T_N + Bi_W T_{\infty,W} + Bi_S T_{\infty,S} + q'''\Delta x^2/(2k)}{2 + Bi_W + Bi_S}}, \qquad Bi_W = \frac{h_W\Delta x}{k}, \quad Bi_S = \frac{h_S\Delta x}{k}. \tag{2.218}$$

La expresión anterior permite coeficientes y focos distintos en ambas caras. Si $h_W = h_S = h$, entonces $Bi_W = Bi_S = Bi_\Delta$ y se recupera el denominador $2 + 2Bi_\Delta$; si además ambas caras ven el mismo fluido, $T_{\infty,W} = T_{\infty,S} = T_\infty$. Estos ejemplos muestran por qué no conviene aplicar la fórmula del nodo interior en una frontera.

Para conducción transitoria unidimensional con malla uniforme y método explícito,

$$\boxed{T_m^{p+1} = Fo_\Delta T_{m-1}^p + (1 - 2Fo_\Delta)T_m^p + Fo_\Delta T_{m+1}^p + Fo_\Delta \frac{q'''\Delta x^2}{k}} \tag{2.219}$$

con

$$Fo_\Delta = \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}. \tag{2.220}$$

Para estabilidad del esquema explícito en una pared unidimensional se requiere, en ausencia de complicaciones de frontera,

$$Fo_\Delta \le \frac{1}{2}. \tag{2.221}$$

La frontera convectiva puede ser más restrictiva. Para el nodo superficial anterior, usando un esquema explícito,

$$\boxed{T_P^{p+1} = \left[1 - 2Fo_\Delta(1 + Bi_\Delta)\right] T_P^p + 2Fo_\Delta T_E^p + 2Fo_\Delta Bi_\Delta T_\infty + Fo_\Delta \frac{q'''\Delta x^2}{k}.} \tag{2.222}$$

La condición de estabilidad asociada es

$$\boxed{Fo_\Delta(1 + Bi_\Delta) \le \frac{1}{2}.} \tag{2.223}$$

Por tanto, aumentar h o refinar la frontera sin ajustar Δt puede hacer inestable un cálculo explícito aunque los nodos interiores cumplan $Fo_\Delta \le 1/2$.

En dos dimensiones, para pasos Δx y Δy, una condición usual de estabilidad del esquema explícito es Para una malla no uniforme ($\Delta x \neq \Delta y$), deben evaluarse por separado los números de Fourier de cada dirección:

$$\boxed{Fo_x + Fo_y \leq \frac{1}{2}, \qquad Fo_x = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2}, \quad Fo_y = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta y^2}.} \tag{2.224}$$

Si la malla es cuadrada y $Fo_x = Fo_y = Fo_\Delta$, se recupera el caso particular $Fo_\Delta \leq 1/4$. Para un nodo de frontera con convección en la dirección x, usando un medio volumen de control normal a esa cara, una condición suficiente es $Fo_x(1 + Bi_x) + Fo_y \leq 1/2$, con $Bi_x = h\Delta x/k$. Los métodos implícitos son más estables, pero exigen resolver sistemas de ecuaciones y, si hay radiación exacta o propiedades dependientes de T, iterar dentro de cada paso temporal.

La convergencia espacial y temporal debe estudiarse por separado. Primero se refina Δx con un Δt suficientemente pequeño; después se fija la malla y se refina Δt. Cambiar ambos a la vez puede ocultar compensaciones y modifica Fo_Δ. En cada estudio se comprueba además el balance global y, cuando exista, una solución analítica límite.

2.11 Criterios de revisión rápida

Esta sección debe usarse como una comprobación final de ingeniería. No pretende sustituir al cálculo, sino obligar a mirar el resultado antes de aceptarlo. Si una conclusión contradice la intuición física básica, normalmente hay un error de signo, de área, de unidades o de hipótesis.

Una forma práctica de revisar consiste en recorrer mentalmente el camino del calor. En una trayectoria en serie, la misma potencia atraviesa todas las capas; en paralelo, la potencia se reparte entre caminos. En transitorio, hay que decidir si la energía se almacena de forma casi uniforme o si aparecen gradientes internos importantes.

La tabla 2.14 resume comprobaciones rápidas antes de aceptar un resultado de conducción.

Tabla 2.14: Comprobaciones rápidas antes de aceptar un resultado.

Aspecto	Comprobación de ingeniería
Régimen estacionario	Sin generación interna, la potencia total debe ser la misma en todas las secciones de una trayectoria en serie.
Pared plana	Si k es constante y no hay generación, el perfil debe ser lineal. Una curvatura exige generación, $k(T)$ o un efecto multidimensional.
Cilindros y esferas	Sin generación y con potencia radial constante, q'' disminuye con el radio. Con generación volumétrica dentro de un cuerpo macizo puede aumentar con r.
Red térmica	Una resistencia en serie aumenta la resistencia total; una rama en paralelo reduce la resistencia equivalente.
Resistencia equivalente	Los dos nodos deben representar superficies isotermas completas; compruebe además las dimensiones, la longitud considerada y el rango geométrico de validez.
Conservación en serie	En régimen estacionario, las potencias que atraviesan capas en serie deben coincidir en magnitud; si cambian sin generación intermedia, hay un error de área, signo o resistencia.
Números adimensionales	Antes de aceptar una simplificación, comprobar que Bi, Fo o Fo_L caen dentro del rango de validez del modelo elegido.
Transitorio	Bi decide si puede despreciarse el gradiente interno y Fo mide cuánto ha avanzado la difusión térmica.
Límite temporal	En enfriamiento o calentamiento hacia un ambiente fijo, el flujo superficial debe tender a cero cuando $T \to T_\infty$ o cuando desaparece el salto térmico impuesto.
Aletas	Deben tener eficacia suficientemente mayor que la unidad; si no, añaden material sin mejorar de forma significativa la transmisión térmica.

Secuencia corta de validación

Para cerrar un ejercicio, resulta útil responder cuatro preguntas. Primera: ¿la potencia calculada fluye desde la zona caliente hacia la fría o hay generación que justifique un máximo interno? Segunda: ¿la resistencia dominante coincide con lo que sugieren los materiales y las áreas? Tercera: ¿la temperatura máxima queda por debajo del límite admisible del material? Cuarta: ¿los números adimensionales usados para simplificar el problema están dentro del rango recomendado? Esta revisión suele ser más eficaz que repetir mecánicamente el álgebra.

2.12 Resumen operativo

Ruta mínima de conducción

Caso	Decisión y modelo	Comprobación rápida
Estacionario sin generación	Elegir pared, cilindro o esfera; usar red o ecuación de Laplace.	La misma potencia cruza cada elemento en serie y las temperaturas son compatibles con las fronteras.
Geometría compleja	$q = (T_1 - T_2)/R_{\text{cond},12}$; incorporar la resistencia equivalente entre los dos nodos térmicos.	Los nodos representan superficies isotermas completas y se respeta el rango de validez.
Generación interna	Usar Poisson y localizar simetría, máximo y superficies de evacuación.	La generación total debe igualar el calor evacuado.
Aletas	Calcular m, eficiencia y área realmente expuesta.	$0 < \eta_f \leq 1$ y no se cuentan áreas dos veces.
Transitorio finito	Calcular primero Bi; si $Bi < 0{,}1$, usar capacidad concentrada; si no, solución espacial.	$T(0) = T_i$ y $T \to T_\infty$ sin sobrepasos no justificados.
Sólido semi-infinito	Comparar la profundidad de penetración con el espesor real.	La perturbación debe ser pequeña antes de alcanzar la frontera opuesta.

Antes de avanzar Debe poder elegir geometría, régimen y condición de contorno antes de escribir la ecuación, y usar Bi y Fo como criterios físicos, no sólo como números.

2.13 Autoevaluación y asimilación

Responda primero sin consultar el capítulo. No se busca reproducir una fórmula de memoria, sino justificar el modelo, anticipar una tendencia y detectar resultados físicamente imposibles. Después compare con las respuestas orientativas.

Comprensión conceptual

C1. ¿Qué diferencia física existe entre la ecuación de Laplace y la de Poisson en conducción estacionaria?

C2. Explique con palabras qué compara el número de Biot y por qué un valor pequeño permite usar una temperatura uniforme en el sólido.

C3. ¿Qué mide el número de Fourier en un problema transitorio?

C4. ¿Por qué una capa de aislamiento cilíndrico puede aumentar inicialmente la pérdida de calor cuando el radio exterior es menor que el radio crítico?

C5. Explique qué reproducen los dos nodos de una resistencia térmica equivalente y por qué este modelo no convierte en unidimensional el campo real de temperaturas.

Microejercicios de decisión

M1. Una pared plana tiene $k = 0{,}50\ \text{W/(m K)}$, $A = 2\ \text{m}^2$, $L = 0{,}10\ \text{m}$ y $\Delta T = 20\ \text{K}$. Calcule R_{cond} y q.

M2. Un sólido tiene $h = 8\ \text{W/(m}^2\,\text{K)}$, $L_c = 0{,}010\ \text{m}$ y $k = 2\ \text{W/(m K)}$. Estime Bi y decida si el modelo de resistencia interna despreciable es razonable como primera aproximación.

Detecta y corrige el error

E1. En un esquema explícito, reducir Δx manteniendo fijo Δt siempre mejora la estabilidad.

E2. Una aleta con mayor rendimiento η_f transmite necesariamente más calor que otra con menor rendimiento.

Análisis de sensibilidad

S1. En una pared plana, estacionaria, unidimensional, sin generación y con temperaturas de cara impuestas, ¿qué ocurre con q y con el gradiente térmico si se duplica k?

S2. En un sólido bien aproximado por el modelo concentrado, ¿qué efecto tiene aumentar h sobre la constante de tiempo y sobre la rapidez del calentamiento o enfriamiento?

Respuestas orientativas **C1.** Laplace corresponde a ausencia de generación volumétrica; Poisson incorpora $q''' \neq 0$. **C2.** Bi compara la resistencia interna por conducción con la resistencia superficial por convección. Si es pequeño, el interior iguala su temperatura mucho más rápido de lo que intercambia calor con el ambiente. **C3.** Mide el tiempo transcurrido frente al tiempo característico de difusión térmica, $Fo = \alpha t/L_c^2$. **C4.** Al añadir aislamiento crece el área convectiva; antes del radio crítico ese aumento de área puede dominar sobre el aumento de resistencia conductiva. **C5.** Los nodos de una resistencia equivalente representan superficies completas idealizadas como isotermas. $q = \Delta T/R$ es una relación global entre esos nodos; el campo local puede seguir siendo bidimensional o tridimensional. **M1.** $R = L/(kA) = 0{,}10$ K/W y $q = 200$ W. **M2.** $Bi = 0{,}04$; al ser menor que 0,1, el modelo concentrado es razonable como primera aproximación. **E1.** Si Δx se reduce a la mitad manteniendo Δt, Fo_Δ se cuadruplica. El esquema solo se vuelve inestable si ese aumento hace que se supere el limite aplicable; para conservar exactamente el mismo Fo_Δ y el mismo margen de estabilidad debe usarse $\Delta t_{\text{nuevo}} = \Delta t_{\text{anterior}}/4$. **E2.** El rendimiento mide aprovechamiento del área, no la potencia total. Una aleta grande puede transferir más calor aunque tenga menor rendimiento; hay que considerar también eficacia, área y resistencia. **S1.** Bajo las hipótesis declaradas (régimen estacionario, 1D, sin generación y temperaturas de cara fijas), $q = kA\Delta T/L$ se duplica al duplicar k, mientras que el gradiente impuesto $\Delta T/L$ no cambia. Fuera de esas condiciones, las temperaturas y el gradiente pueden acoplarse a k y la proporcionalidad no es general. **S2.** La constante de tiempo disminuye y la respuesta se acelera, siempre que el aumento de h no invalide la hipótesis de temperatura uniforme.

Criterio de dominio Debe poder distinguir régimen estacionario y transitorio, escoger geometría, interpretar Bi y Fo y anticipar el efecto de k, h y L. Los cálculos especiales sólo son útiles después de dominar estas decisiones.

2.14 Ejercicios

Cómo usar las fichas de los problemas La etiqueta de **nivel** indica la carga de modelado, no la longitud del cálculo. Las **competencias** señalan qué se practica y el campo **propiedades** aclara si los valores están dados o deben buscarse e interpolarse. En los problemas avanzados se ofrecen tres pistas graduadas: consulte primero sólo la pista 1; abra las siguientes únicamente si sigue bloqueado. Las respuestas breves deben usarse para comprobar el resultado después de resolver, no como sustituto del planteamiento.

Ejercicio 1. Pared compuesta con aislamiento.

Nivel: Intermedio | **Competencias:** redes, interfaces y resistencia dominante | **Propiedades:** dadas

Un recinto a 20 °C está separado del exterior a −15 °C por una pared de 20 m^2 constituida por una capa interior de hormigón de 30 cm de espesor y conductividad 1 $\mathrm{W/(m\,K)}$, y otra exterior de material aislante, poliestireno, de 2 cm y conductividad 0,028 $\mathrm{W/(m\,K)}$. Sabiendo que los coeficientes combinados de transmisión de calor por convección y radiación interior y exterior son 5 $\mathrm{W/(m^2\,K)}$ y 10 $\mathrm{W/(m^2\,K)}$, respectivamente, calcular la potencia térmica que atraviesa la pared y las temperaturas de las superficies interior, exterior e intermedia.

Ejercicio 2. Conducción con conductividad variable.

Nivel: Intermedio | **Competencias:** integración, conductividad variable y unidades | **Propiedades:** dadas

Una lámina de bronce, aleación de cobre y estaño, de 2 m×0,7 m y 10 mm de espesor mantiene una de sus caras a 600 K y la otra a 400 K. Dado que la temperatura cambia de forma considerable en el espesor, se va a considerar la variación de la conductividad térmica del material con la temperatura, dada por

$$k = k_0(1 + \beta T),$$

donde $k_0 = 38\,\mathrm{W/(m\,K)}$ y $\beta = 9{,}21 \times 10^{-4}\,\mathrm{/K}$. Calcular la potencia térmica que atraviesa la lámina. En esta correlación empírica, T se introduce en kelvin y su uso queda restringido al intervalo suministrado, $400\,\mathrm{K} \le T \le 600\,\mathrm{K}$. El parámetro k_0 es el intercepto del ajuste asociado a esa escala de temperatura; no debe interpretarse como una propiedad universal ni extrapolarse fuera del intervalo.

Ejercicio 3. Flujo de Couette entre placas.

Nivel: Intermedio | **Competencias:** signos, generación viscosa y balance | **Propiedades:** dadas

Entre dos láminas planas paralelas, ambas a temperatura T_s y separadas $h = 1\,\mathrm{mm}$, se desarrolla un flujo de Couette en régimen laminar,

$$u = U\frac{y}{h},$$

La ecuación de cantidad de movimiento determina el perfil de velocidad anterior; la ecuación de energía, incluyendo disipación viscosa, proporciona la distribución de temperatura y es

$$T(y) = T_s + \frac{\mu}{2k}\left(\frac{U}{h}\right)^2 y(h - y),$$

siendo $U = 10\,\mathrm{m/s}$ la velocidad de la placa móvil, $\mu = 0{,}2\,\mathrm{kg/(m\,s)}$ la viscosidad y k la conductividad del fluido confinado. Tome $y = 0$ en la placa inferior fija y $y = h$ en la placa superior móvil, con $+y$ hacia arriba. Calcule (i) la componente cartesiana $q''_y = -k\,\mathrm{d}T/\mathrm{d}y$ en ambas paredes y (ii) el flujo normal saliente del fluido en cada pared, definido positivo hacia la placa correspondiente.

Ejercicio 4. Cable enterrado con aislamiento.

Nivel: Intermedio | **Competencias:** geometría cilíndrica y resistencia térmica equivalente | **Propiedades:** dadas

Un cable eléctrico de cobre de 5 mm de radio discurre enterrado paralelamente a la superficie a una profundidad de 1 m, medida hasta el eje del cable. El conductor está recubierto de un material aislante eléctrico de 5 mm de espesor y conductividad térmica 0,1 W/(m K). La conductividad térmica del suelo vale 1 W/(m K) y la temperatura del mismo en todos los puntos alejados del cable, incluida la superficie, es de 27 °C. Calcular la potencia térmica evacuada por metro de cable y la temperatura exterior del aislante si la temperatura de la unión conductor–aislante es de 33,9 °C.

Ejercicio 5. Carga térmica de un congelador.

Nivel: Intermedio | **Competencias:** caminos paralelos y carga térmica | **Propiedades:** dadas

Un congelador está constituido por una cavidad cúbica de 2 m de lado, donde la base puede suponerse térmicamente aislada. La pared tiene una primera capa metálica, cuyo espesor y resistencia térmica pueden despreciarse, y una capa de aislante térmico de 50 mm de espesor y conductividad 0,030 W/(m K). En un momento dado la temperatura interior es de −15 °C y la exterior de 35 °C. Se pide la carga térmica del congelador si los coeficientes de transmisión de calor combinados por convección y radiación valen 3 W/(m^2 K), tanto interna como externamente.

Ejercicio 6. Encapsulado esférico en cámara criogénica.

Nivel: Intermedio | **Competencias:** convección, radiación y balance | **Propiedades:** dadas

Un encapsulado esférico de 100 mm de diámetro, conteniendo componentes electrónicos, se sitúa dentro de una cámara de grandes dimensiones donde un medio gaseoso criogénico está a −196 °C y las paredes de la cámara a −198 °C. La operación correcta de los componentes limita su temperatura máxima a 80 °C. Puede suponerse que la resistencia térmica del encapsulado es nula, lo que supone que la temperatura en su interior es uniforme. La superficie externa del encapsulado es gris difusa con emisividad igual a 0,3. Se reserva T_∞ para el gas y T_{sur} para las paredes del entorno radiante. El intercambio convectivo con el medio gaseoso se caracteriza mediante el coeficiente efectivo

$$h = 0{,}98\,\Delta T^{1/3} \quad [\mathrm{W/(m^2\,K)}].$$

Aquí $\Delta T = |T_s - T_\infty|$ se introduce en kelvin. El coeficiente numérico 0,98 es dimensional y sólo es válido con h en W m^{-2}K^{-1} y ΔT en K; sus unidades son W m^{-2}K$^{-4/3}$. Esta ley empírica se adopta como caracterización completa del medio exterior. No se especifican composición ni presión y, por tanto, no debe interpretarse el fluido como aire atmosférico en equilibrio a −196 °C. Para la temperatura máxima de la cápsula, se pide calcular los coeficientes de transmisión de calor por radiación y convección, y la potencia térmica total neta evacuada por la cápsula.

Ejercicio 7. Desempañado de luna trasera.

Nivel: Intermedio | **Competencias:** diseño, generación y condensación | **Propiedades:** dadas

Una forma de desempañar la luna trasera de un automóvil, vidrio de espesor 4 mm y conductividad 1,4 W/(m K), podría ser proyectando una corriente de aire caliente a una temperatura de 40 °C sobre la superficie interior, consiguiendo un coeficiente de convección 30 W/(m^2 K). El coeficiente de convección y temperatura exteriores, que cambian con las condiciones atmosféricas y la velocidad de circulación del vehículo, en un momento valen 65 W/(m^2 K) y −30 °C. Otra forma de desempañar la luna consiste en calefactarla adhiriendo a la superficie interior una resistencia eléctrica a modo de hilo muy fino uniformemente distribuido. Tomar como temperatura de rocío interior $T_{\text{rocío}} = 15$ °C; para esta segunda alternativa, el aire interior está a $T_i = 25$ °C y $h_i = 5$ W/(m^2 K). Se pide: (a) calcular las temperaturas de las caras interior y exterior con soplado de aire caliente; (b) decidir si aparece condensación o escarcha en la cara interior; y (c) calcular el flujo eléctrico mínimo por unidad de área que mantiene la cara interior justo en $T_{\text{rocío}}$ para la segunda alternativa.

Ejercicio 8. Curado radiante de un film sobre sustrato.

Nivel: Avanzado | **Competencias:** estacionario, absorción radiante y capas | **Propiedades:** dadas

En un proceso de fabricación se deposita un film transparente sobre un sustrato de otro material, ambos de 1 mm de espesor. Para curar la unión es necesario mantenerla a 60 °C, para lo cual se va a emplear una fuente de radiación que proporciona un flujo q_0'' en $\mathrm{W/m^2}$. Se consideran dos fuentes de radiación distintas: una de longitud de onda corta, para la cual el film es transparente, y otra de longitud de onda larga frente a la cual el film es opaco. En el caso (a) se supone el film totalmente transparente ($\tau_f = 1$); en el caso (b), totalmente opaco y absorbente ($\alpha_f = 1$). La cara posterior del sustrato se mantiene a 30 °C, mientras que la superficie libre del film intercambia calor con un ambiente equivalente a 20 °C mediante un coeficiente superficial total linealizado $h_{\mathrm{eq}} = 50\,\mathrm{W/(m^2\,K)}$. Este coeficiente ya agrupa convección y radiación térmica exterior; no se añade ni se elimina una segunda rama radiativa independiente. La conductividad del film vale $0{,}025\,\mathrm{W/(m\,K)}$ y la del sustrato $0{,}05\,\mathrm{W/(m\,K)}$. La resistencia de contacto entre ambos es despreciable. Se busca el estado estacionario unidimensional: no hay almacenamiento de energía en las capas. Para cada fuente se pide el flujo incidente requerido q_0'' y la temperatura de la superficie libre del film, manteniendo la interfaz film–sustrato a 60 °C.

Ejercicio 9. Pared compuesta con generación y contacto.

Nivel: Avanzado | **Competencias:** generación, contacto y balance | **Propiedades:** dadas

Una pared plana compuesta está constituida por dos capas A y B de conductividades $k_A = 50\,\mathrm{W/(m\,K)}$ y $k_B = 130\,\mathrm{W/(m\,K)}$, y espesores $L_A = 30\,\mathrm{mm}$ y $L_B = 15\,\mathrm{mm}$. La cara izquierda de A se mantiene térmicamente aislada, mientras que la cara libre de B está en contacto con un fluido a temperatura de 80 °C. El cuerpo A tiene introducida una resistencia eléctrica uniformemente distribuida que presenta una generación volumétrica uniforme $q''' = 2 \times 10^6\,\mathrm{W/m^3}$. Además, entre ambos cuerpos existe una resistencia de contacto de valor $2{,}5 \times 10^{-4}\,\mathrm{m^2\,K/W}$. Calcular el coeficiente de convección mínimo $h_{\mathrm{mín}}$ del fluido para que la temperatura máxima de la pared no supere los 150 °C; cualquier $h \geq h_{\mathrm{mín}}$ satisface el límite.

Ejercicio 10. Cable eléctrico con aislamiento y contacto.

Nivel: Intermedio | **Competencias:** cilindro, contacto y temperatura máxima | **Propiedades:** dadas

Un cable eléctrico aéreo consta de un núcleo de cobre, de conductividad térmica $k = 386\,\mathrm{W/(m\,K)}$ y resistividad eléctrica $\rho_e = 1{,}72 \times 10^{-8}\,\Omega\,\mathrm{m}$, de 5 mm de diámetro, atravesado por una corriente de 50 A. Exteriormente está recubierto con 1 mm de aislante térmico y eléctrico, cuya conductividad térmica es $0{,}1\,\mathrm{W/(m\,K)}$. Entre el núcleo y el aislante hay una conductancia de contacto, inverso de la resistencia de contacto, de $1500\,\mathrm{W/(m^2\,K)}$. La resistividad eléctrica ρ_e, las conductividades k y la conductancia de contacto h_c se tratan como valores constantes representativos del intervalo de temperaturas. El coeficiente de convección exterior vale $20\,\mathrm{W/(m^2\,K)}$, siendo la temperatura ambiente de 42 °C. Desprecie la radiación térmica exterior. Se pide la potencia térmica disipada por metro de cable y la temperatura máxima del mismo.

Ejercicio 11. Pared con calefacción para evitar condensación.

Nivel: Intermedio | **Competencias:** diseño, condensación y balance nodal | **Propiedades:** dadas

Una pared de ladrillo de 12 cm de espesor y conductividad $0{,}930\,\mathrm{W/(m\,K)}$ está enlucida interiormente con 2 cm de mortero de yeso con conductividad $0{,}488\,\mathrm{W/(m\,K)}$. El ambiente exterior está a −7 °C y el coeficiente de convección vale $25\,\mathrm{W/(m^2\,K)}$. En el interior la temperatura es 20 °C, el coeficiente de convección vale $10\,\mathrm{W/(m^2\,K)}$ y la humedad relativa existente es tal que da una temperatura de rocío de 16 °C. Para evitar la condensación interior, se instala sobre el mortero de yeso una pared térmica de 5 mm de espesor y conductividad $0{,}7\,\mathrm{W/(m\,K)}$, que actúa como fuente térmica uniformemente distribuida. La pared térmica se enluce también con una capa de 2 cm de yeso.

Determine explícitamente: (a) la temperatura de la cara interior sin calefacción y si existe riesgo de condensación; (b) el flujo calefactor mínimo por unidad de área para mantener esa cara en la temperatura límite indicada; y (c) la temperatura de la cara exterior en esa condición de diseño.

Ejercicio 12. Transistor con cápsula aleteada.

Nivel: Avanzado | **Competencias:** aletas, contacto y diseño térmico | **Propiedades:** dadas

Para aumentar la potencia máxima que es capaz de evacuar un transistor cilíndrico de 4 mm de diámetro y 6 mm de altura, se le inserta una cápsula de aluminio, $k = 200\,\mathrm{W/(m\,K)}$, constituida por un anillo de 1 mm de espesor sobre el que van adosadas 12 aletas rectas de 10 mm de longitud y 0,7 mm de espesor. En la unión transistor–cápsula existe una resistencia de contacto de valor $1 \times 10^{-3}\,\mathrm{m^2\,K/W}$. El aire ambiente está a 20 °C, proporcionando un coeficiente de convección aproximadamente uniforme sobre toda la superficie de $25\,\mathrm{W/(m^2\,K)}$, con y sin cápsula. La temperatura máxima de la superficie del transistor es de 80 °C. Desprecie la radiación térmica de la cápsula y del transistor, pues no se proporciona emisividad. Supuesto despreciable la potencia evacuada por las bases laterales del transistor y del anillo, calcular la máxima potencia térmica que puede evacuar el transistor desnudo, con las aletas y el rendimiento de la superficie aletada.

Ejercicio 13. Cilindro de motor con aletas.

Nivel: Avanzado | **Competencias:** aletas anulares, área y masa | **Propiedades:** dadas

El cilindro del motor de un scooter está fabricado de aleación de aluminio, de conductividad $186\,\mathrm{W/(m\,K)}$ y densidad $2700\,\mathrm{kg/m^3}$, y tiene una altura de 0,15 m y un diámetro exterior de 50 mm. Bajo condiciones de operación típicas, la superficie externa del cilindro está a una temperatura de $T_1 = 227\,^\circ\mathrm{C}$ y se expone al aire ambiental a 27 °C con un coeficiente de convección de $50\,\mathrm{W/(m^2\,K)}$. Unas aletas anulares están fundidas íntegramente con el cilindro para aumentar la transmisión de calor a los alrededores. Considerar cinco de estas aletas de espesor 6 mm, longitud 20 mm e igualmente espaciadas. Desprecie la radiación térmica exterior; el intercambio superficial se modela únicamente mediante el coeficiente convectivo dado. Calcular la potencia disipada por el cilindro sin aletas, la potencia total con las cinco aletas y el peso total de las cinco aletas.

Ejercicio 14. Barra de cobre entre paredes.

Nivel: Avanzado | **Competencias:** aleta con dos extremos y balance | **Propiedades:** dadas

Una barra de cobre, conductividad $350\,\mathrm{W/(m\,K)}$, de 60 mm de diámetro y 1 m de longitud está unida por sus extremos a sendas paredes cuyas temperaturas pueden considerarse constantes y uniformes en 200 °C y 100 °C. No existe resistencia de contacto entre la barra y las paredes. La temperatura de la corriente exterior de aire es de 40 °C. Calcular la potencia transmitida por cada pared y al ambiente a través de la barra para los dos valores $h = 41\,\mathrm{W/(m^2\,K)}$ y $h = 10\,\mathrm{W/(m^2\,K)}$.

Ejercicio 15. Congelación de agua mediante una barra aleteada.

Nivel: Intermedio | **Competencias:** cambio de fase, aleta y tiempo | **Propiedades:** dadas

Un recipiente cúbico de 1 m de lado interior está térmicamente aislado por todas sus caras y contiene una mezcla agua–hielo a 0 °C. Una base de la barra se mantiene en contacto perfecto con la mezcla y fija $T_b = 0\,^\circ\mathrm{C}$; desde esa base se extiende al exterior una longitud activa $L = 1\,\mathrm{m}$, de diámetro 0,2 m y conductividad $75\,\mathrm{W/(m\,K)}$, expuesta al ambiente frío. Se pide el tiempo que tardará en convertirse en hielo todo el volumen de agua, sabiendo que el coeficiente de convección y radiación en torno a la barra es de $20\,\mathrm{W/(m^2\,K)}$ y que las temperaturas ambiente y del entorno radiante son ambas $-15\,^\circ\mathrm{C}$. Calor latente de cambio de fase agua–hielo: $334\,\mathrm{kJ/kg}$.

Ejercicio 16. Pared cilíndrica con generación y aletas.

Nivel: Avanzado | **Competencias:** generación cilíndrica, aletas y sistema | **Propiedades:** dadas

Una pared cilíndrica compuesta presenta generación interna uniforme en la pared C y aletas adosadas en la cara exterior de D. El análisis se realiza por metro de longitud axial. Se fija $L_z = 1\,\mathrm{m}$ y se desprecia la radiación exterior. Como $r = r_2$ es adiabático, las conductividades de A y B no intervienen en el cálculo de la rama exterior; se conservan sólo para describir el conjunto físico. Los radios son $r_1 = 0{,}05\,\mathrm{m}$, $r_2 = 0{,}10\,\mathrm{m}$, $r_3 = 0{,}20\,\mathrm{m}$ y $r_4 = 0{,}40\,\mathrm{m}$. La superficie $r = r_2$ es adiabática, de modo que no circula calor hacia las capas interiores A y B; toda la generación de C se evacua hacia r_3, atraviesa D y sale por la superficie aleteada. Para la generación máxima admisible, el caso límite es $T_{\mathrm{mín},C} = T(r_3) = 190\,^{\circ}\mathrm{C}$. El conjunto está en un entorno con un fluido a temperatura $120\,^{\circ}\mathrm{C}$ y coeficiente de convección $80\,\mathrm{W/(m^2\,K)}$. Las conductividades son $k_A = 1\,\mathrm{W/(m\,K)}$, $k_B = 2\,\mathrm{W/(m\,K)}$, $k_C = 10\,\mathrm{W/(m\,K)}$ y $k_D = 20\,\mathrm{W/(m\,K)}$. Las aletas tienen $0{,}2\,\mathrm{m}$ de longitud, $30\,\mathrm{mm}$ de diámetro, conductividad $k = 200\,\mathrm{W/(m\,K)}$ y están dispuestas a razón de 48 por metro de longitud de pared. Calcule (a) la generación volumétrica máxima $q'''_{\mathrm{máx}}$ compatible con el límite anterior y (b) la temperatura máxima dentro de la pared C y su posición radial.

Ejercicio 17. Enfriamiento transitorio de un cubo de aluminio.

Nivel: Avanzado | **Competencias:** transitorio, radiación linealizada y validez | **Propiedades:** dadas

Una pieza cúbica de aluminio anodizado negro de $1\,\mathrm{m}$ de lado se enfría al aire desde una temperatura inicial de $275\,^{\circ}\mathrm{C}$. Tanto el aire como el entorno que rodea a la pieza se encuentran a la temperatura de $25\,^{\circ}\mathrm{C}$. La superficie del aluminio se comporta como cuerpo gris difuso con emisividad 0,8. Durante el proceso, la pieza se mantiene apoyada sobre un material que puede considerarse aislante térmico. Los coeficientes de convección medios, para el rango de temperatura de trabajo, son $4{,}9\,\mathrm{W/(m^2\,K)}$ para las caras laterales y $7{,}3\,\mathrm{W/(m^2\,K)}$ para la cara superior. Las propiedades medias del aluminio son: densidad $2790\,\mathrm{kg/m^3}$, calor específico $883\,\mathrm{J/(kg\,K)}$ y conductividad $170\,\mathrm{W/(m\,K)}$. Se pide: (a) comprobar la validez del modelo concentrado con el coeficiente superficial máximo y, si es admisible, calcular la constante de tiempo y el tiempo necesario para que el exceso de temperatura descienda al 1 %; (b) calcular la energía total evacuada en ese intervalo; y (c) repetir únicamente la comprobación de validez para un segundo escenario con $h_{\mathrm{lat}} = 95\,\mathrm{W/(m^2\,K)}$ y $h_{\mathrm{sup}} = 97\,\mathrm{W/(m^2\,K)}$, indicando el método que debería usarse si $Bi > 0{,}1$.

Ejercicio 18. Radiador de una estación espacial.

Nivel: Avanzado | **Competencias:** transitorio radiativo y dimensionado | **Propiedades:** dadas

A medida que las estaciones espaciales crecen de tamaño aumenta el consumo de energía eléctrica y, para evitar que las temperaturas de los compartimientos interiores excedan cierto valor límite, es necesario transmitir la energía disipada al espacio, lo cual sólo puede llevarse a cabo por radiación. El Radiador de Gotas Líquidas es una solución a este problema, donde el calor se transmite a un aceite para aplicaciones al vacío, que posteriormente se inyecta al espacio en forma de pequeñas gotas esféricas. A continuación, las gotas se recogen en un colector tras haber recorrido una distancia determinada a lo largo de la cual se enfrían al radiar su energía térmica al espacio, que en primera aproximación se puede considerar a una temperatura equivalente de $0\,\mathrm{K}$. A partir de aquí se inicia de nuevo el ciclo de refrigeración. Se idealizan gotas aisladas entre sí, factor de forma unidad hacia un fondo negro uniforme, ausencia de irradiaciones adicionales, propiedades constantes y ausencia de evaporación o cambio de fase. Sabiendo que las gotas presentan una emisividad de 0,95, $0{,}5\,\mathrm{mm}$ de diámetro, y que se inyectan al espacio a una temperatura de $227\,^{\circ}\mathrm{C}$ y velocidad de $0{,}1\,\mathrm{m/s}$. Para el aceite se toman $\rho = 800\,\mathrm{kg/m^3}$, $c = 500\,\mathrm{J/(kg\,K)}$ y $k = 20\,\mathrm{W/(m\,K)}$. Calcular la longitud que deben recorrer las gotas para que su temperatura descienda hasta $27\,^{\circ}\mathrm{C}$, repetir para una temperatura del espacio de $3\,\mathrm{K}$, y calcular la energía evacuada por una gota.

Ejercicio 19. Congelación de una tubería enterrada.

Nivel: Intermedio | **Competencias:** sólido semiinfinito, erfc y diseño | **Propiedades:** dadas

En zonas donde la temperatura del aire permanece por debajo de 0 °C durante períodos largos, hay que prestar atención a la posible congelación del agua en tubos subterráneos. Sea un lugar cubierto de nieve a $-8\,°\mathrm{C}$ durante un período de 60 d, cuyas propiedades medias del suelo son $k = 0{,}35\,\mathrm{W/(m\,K)}$ y $\alpha = 0{,}15 \times 10^{-6}\,\mathrm{m^2/s}$. Supuesta una temperatura inicial y uniforme del suelo de 7 °C, calcular la profundidad mínima de soterramiento de una tubería para evitar la congelación del agua en su interior.

Ejercicio 20. Muro rociado con agua fría.

Nivel: Intermedio | **Competencias:** sólido semiinfinito y rango de validez | **Propiedades:** dadas

Un muro de hormigón, $\rho = 2100\,\mathrm{kg/m^3}$, $k = 1{,}4\,\mathrm{W/(m\,K)}$ y $c = 880\,\mathrm{J/(kg\,K)}$, de 0,8 m de espesor a 127 °C, es rociado con una gran cantidad de agua a 27 °C. Se idealiza que el rociado mantiene $T(0,t) = 27\,°\mathrm{C}$, equivalente al límite $h \to \infty$. Se pide calcular las temperaturas en un punto situado a 5 cm de la superficie y en la cara posterior en el tiempo asociado al umbral docente $Fo_L = 0{,}05$ para la aproximación semiinfinita, así como la profundidad en la que la temperatura es de 85 °C para el tiempo anterior. La frontera es de temperatura impuesta; no se usa un Biot convectivo para seleccionar el modelo. La aproximación semiinfinita se evalúa mediante penetración térmica o Fo_L, adoptando 0,05 sólo como tolerancia docente.

Ejercicio 21. Sólido semiinfinito con radiación solar.

Nivel: Avanzado | **Competencias:** flujo impuesto, materiales y semiinfinito | **Propiedades:** dadas

Un bloque grueso de madera, $k = 1{,}26\,\mathrm{W/(m\,K)}$ y $\alpha = 1{,}1 \times 10^{-5}\,\mathrm{m^2/s}$, a 20 °C, es expuesto a un flujo superficial neto absorbido constante $q''_s = 1250\,\mathrm{W/m^2}$. Al estar ya especificado el flujo neto que entra en el sólido, no intervienen α_s ni ε; serían necesarias si se proporcionase irradiancia solar y hubiera que construir el balance radiativo. Calcular la temperatura de la superficie expuesta del bloque tras 20 min, repetir si el bloque fuese de aluminio, $k = 237\,\mathrm{W/(m\,K)}$ y $\alpha = 9{,}71 \times 10^{-5}\,\mathrm{m^2/s}$, y calcular los espesores mínimos de las paredes que hacen posible el comportamiento como sólido semiinfinito.

Ejercicio 22. Pared contra incendios con cubierta de acero.

Nivel: Avanzado | **Competencias:** frontera radiante y transitorio | **Propiedades:** dadas

Una pared de protección contra incendios, $k = 1{,}4\,\mathrm{W/(m\,K)}$ y $\alpha = 0{,}75 \times 10^{-6}\,\mathrm{m^2/s}$, de 15 cm de espesor, tiene una cubierta de acero de 4 mm de espesor. La cubierta de acero queda repentinamente expuesta a la acción de una llama, que puede suponerse como un cuerpo negro a 727 °C. La superficie de la cubierta de acero está muy oxidada y presenta una emisividad de 0,9. Calcular cuánto tiempo será necesario para que la superficie irradiada alcance el límite de temperatura indicado. En el modelo semiinfinito, la superficie irradiada $x = 0$ es el punto más caliente durante el calentamiento y el límite se escribe $T(0,t) = 227\,°\mathrm{C}$. La llama se idealiza negra, uniforme y ocupando todo el campo de visión de la pared ($\varepsilon_L = 1$, $F_{L\to s} = 1$); se desprecia la convección entre llama y pared. La temperatura inicial es de 27 °C. Despreciar la resistencia conductiva de la cubierta metálica.

Ejercicio 23. Onda térmica en una chapa de aluminio.

Nivel: Intermedio | **Competencias:** Fourier, pulso corto y estimación | **Propiedades:** dadas

Calcular el tiempo que tarda la onda térmica en atravesar una chapa de aluminio de 4 mm de espesor cuando pasa de estar a la sombra a exponerse al sol a razón de $545\,\mathrm{W/m^2}$, siendo las propiedades de la chapa $k = 237\,\mathrm{W/(m\,K)}$ y $\alpha = 9{,}71 \times 10^{-5}\,\mathrm{m^2/s}$. Calcular también la temperatura superficial de la chapa transcurrido ese tiempo, si inicialmente se encuentra a 20 °C.

Ejercicio 24. Contacto térmico ideal con distintos materiales.

Nivel: Intermedio | **Competencias:** efusividad, contacto e interpretación | **Propiedades:** tabla del anexo

Probablemente hayas experimentado alguna vez el hecho de que el contacto con distintos materiales a igual temperatura genera una sensación térmica diferente. Considera cobre, vidrio pirex, poliestireno expandido estirado, mármol y pino blanco, todos a 15 °C. Asumiendo que la temperatura superficial de la mano se encuentra a 35 °C y que las propiedades termo-físicas del cuerpo fueran las del agua, determina las temperaturas ideales instantáneas de contacto con los diferentes materiales y ordénalos cualitativamente por sensación térmica. Repetir si los materiales estuviesen a 60 °C. La ordenación no constituye un modelo fisiológico completo.

Pistas graduadas para los problemas avanzados

Use una pista cada vez

Ej. 8

Pista 1 – modelo. Red estacionaria unidimensional por unidad de área, sin almacenamiento.

Pista 2 – ecuación. Separe el caso de absorción en la interfaz del caso de absorción en la cara exterior y escriba en cada nodo potencia absorbida igual a suma de salidas.

Pista 3 – control. El balance debe cerrar exactamente y h_{eq} ya incluye el intercambio superficial total.

Ej. 9

Pista 1 – modelo. Conducción unidimensional con generación, capas en serie y resistencia de contacto.

Pista 2 – ecuación. Integre la ecuación con generación en la capa activa, use $\Delta T_c = q'' R''_c$ y obtenga el coeficiente mínimo que respeta el límite térmico.

Pista 3 – control. Compruebe el balance entre generación y calor evacuado, las dos temperaturas de contacto y que cualquier $h \geq h_{\text{mín}}$ satisface la restricción.

Ej. 12

Pista 1 – modelo. Red de conducción hacia la base y convección desde superficie aleteada, usando eficiencia global.

Pista 2 – ecuación. Calcule primero la eficiencia de una aleta y después use $q = h\,[A_b + \eta_f A_f](T_b - T_\infty)$, añadiendo la resistencia de contacto.

Pista 3 – control. Las eficiencias deben estar entre 0 y 1 y la disipación total debe sumar base expuesta y aletas sin contar áreas dos veces.

Ej. 13

Pista 1 – modelo. Modelo de aletas anulares o longitudinales más convección desde la superficie base.

Pista 2 – ecuación. Use la solución de aleta anular o su eficiencia tabulada, calcule el área realmente expuesta y sume base más aletas sin duplicar superficies.

Pista 3 – control. Verifique $0 < \eta_f \leq 1$, que la potencia total supera la de la superficie desnuda y que las áreas usadas son las realmente expuestas.

Ej. 14

Pista 1 – modelo. Conducción unidimensional en una barra con condiciones térmicas en sus extremos y, si procede, pérdidas laterales.

Pista 2 – ecuación. Resuelva la ecuación de aleta con dos temperaturas de extremo; las potencias en ambos extremos y la pérdida lateral deben cerrar el balance.

Pista 3 – control. La temperatura debe quedar entre las condiciones extremas y, en estacionario sin generación, la potencia que entra debe ser igual a la que sale.

Ej. 16

Pista 1 – modelo. Conducción cilíndrica con generación acoplada a una red exterior aleteada.

Pista 2 – ecuación. Empiece por el balance global de generación. La condición adiabática fija el lugar del máximo y la superficie aleteada proporciona la conductancia exterior.

Pista 3 – control. La generación total debe igualar la suma de pérdidas exteriores y la temperatura máxima debe aparecer donde exige la simetría y la generación.

Ej. 17

Pista 1 – modelo. Capacidad concentrada, previa comprobación de Bi, con convección en toda el área expuesta.

Pista 2 – ecuación. Linealice la radiación con un h_r medio, compruebe Biot y use el modelo concentrado sólo en los apartados en que $Bi \leq 0{,}1$.

Pista 3 – control. Compruebe $Bi \leq 0{,}1$, ausencia de sobrepaso de la temperatura ambiente y límites correctos en $t = 0$ y $t \to \infty$.

Ej. 18

Pista 1 – modelo. Equilibrio radiativo estacionario con absorción y emisión, sin convección.

Pista 2 – ecuación. Para una gota concentrada, escriba $mc\,\mathrm{d}T/\mathrm{d}t = -\varepsilon\sigma A(T^4 - T_e^4)$ y relacione el tiempo con L/v.

Pista 3 – control. La potencia emitida neta debe igualar la carga térmica y todas las temperaturas usadas en términos de cuarta potencia deben estar en kelvin.

Ej. 21

Pista 1 – modelo. Conducción transitoria semiinfinita con condición de flujo superficial neto.

Pista 2 – ecuación. Use la solución de sólido semiinfinito con flujo superficial impuesto y compruebe después el espesor mínimo mediante una profundidad de penetración térmica.

Pista 3 – control. La superficie debe ser la zona más caliente durante la irradiación y la energía absorbida acumulada debe ser coherente con el aumento térmico y las pérdidas.

Ej. 22

Pista 1 – modelo. Conducción transitoria multicapa o aproximación semiinfinita, con continuidad de flujo e interfaces.

Pista 2 – ecuación. Convierta la radiación de la llama en un flujo neto sobre la superficie y use la solución semiinfinita para temperatura superficial impuesta o flujo equivalente.

Pista 3 – control. Las temperaturas deben ser continuas en interfaces perfectas, el flujo debe conservarse y la hipótesis temporal elegida debe ser compatible con los espesores.

Respuestas breves de comprobación

Respuestas orientativas Consulte este bloque sólo después de completar el planteamiento. Se da el resultado final y un control físico; la solución desarrollada permanece en la sección siguiente.

Ej. 1

Resultado. $q = 532{,}6\,\mathrm{W}$; $T_1 = 14{,}7\,^\circ\mathrm{C}$, $T_2 = 6{,}7\,^\circ\mathrm{C}$ y $T_3 = -12{,}3\,^\circ\mathrm{C}$.

Control. Las temperaturas de interfaz deben descender de forma monótona y la suma de todas las caídas qR debe dar $T_i - T_e$.

Ej. 2

Resultado. $q = 1{,}55 \times 10^6\,\mathrm{W}$.

Control. Al sustituir las temperaturas extremas en la expresión integrada debe recuperarse el mismo flujo en toda la pared y las unidades deben ser de potencia o flujo según el área usada.

Ej. 3

Resultado. $q''_{y=0} = -1{,}0 \times 10^4\,\mathrm{W/m^2}$ y $q''_{y=h} = +1{,}0 \times 10^4\,\mathrm{W/m^2}$.

Control. El calor evacuado por las paredes debe igualar la generación viscosa integrada; el perfil debe satisfacer exactamente ambas condiciones de contorno.

Ej. 4

Resultado. $q' = 3{,}545\,\mathrm{W/m}$ y $T_{s,\mathrm{ais}} = 30{,}0\,^\circ\mathrm{C}$.

Control. La misma potencia lineal debe atravesar el aislante y el suelo: $q'_{\mathrm{ais}} = q'_{\mathrm{suelo}} = 3{,}545\,\mathrm{W/m}$; $T_{s,\mathrm{ais}}$ es la temperatura de la superficie exterior del aislante.

Ej. 5

Resultado. $q = 440{,}0\,\mathrm{W}$.

Control. La carga total debe ser la suma de las contribuciones de paredes, aristas y esquinas, todas con signo de entrada al recinto frío.

Ej. 6

Resultado. $h_r = 0{,}950\,\mathrm{W/(m^2\,K)}$, $h_c = 6{,}381\,\mathrm{W/(m^2\,K)}$ y $q = 63{,}6\,\mathrm{W}$.

Control. Con potencia saliente positiva, $q_c > 0$ y $q_r > 0$; las temperaturas de T^4 se introducen en kelvin y $q_c + q_r = 63{,}6\,\mathrm{W}$ debe cerrar el balance.

Ej. 7 **Resultado.** $T_{s,i} = -5{,}2\,^\circ\mathrm{C}$, $T_{s,o} = -9{,}1\,^\circ\mathrm{C}$ y $q''_0 \simeq 2417\,\mathrm{W/m^2}$.
Control. La generación eléctrica total debe igualar las pérdidas; la superficie objetivo debe alcanzar, pero no quedar por debajo de, la temperatura de diseño.

Ej. 8 **Resultado.** $q''_{0,a} = 2166{,}7\,\mathrm{W/m^2}$ y $q''_{0,b} = 6500\,\mathrm{W/m^2}$.
Control. En régimen estacionario, la potencia absorbida debe igualar la suma de las dos salidas y no aparece almacenamiento.

Ej. 9 **Resultado.** $T_{A,c} = 132\,^\circ\mathrm{C}$, $T_{B,c} = 117\,^\circ\mathrm{C}$ y $h_{\mín} \simeq 1995\,\mathrm{W/(m^2\,K)}$.
Control. Debe cumplirse $\Delta T_c = q'' R''_c = 15\,\mathrm{K}$ y cualquier $h \geq h_{\mín}$ mantiene $T_{\máx} \leq 150\,^\circ\mathrm{C}$.

Ej. 10 **Resultado.** $q' = 2{,}19\,\mathrm{W/m}$ y $T_{\máx} \simeq 48{,}2\,^\circ\mathrm{C}$.
Control. La potencia por unidad de longitud generada debe igualar la evacuada y la temperatura debe disminuir hacia el ambiente.

Ej. 11 **Resultado.** $T_{\mathrm{sup,int}} = 11{,}3\,^\circ\mathrm{C}$, $q''_G = 59{,}34\,\mathrm{W/m^2}$ y $T_{\mathrm{sup,ext}} = -3{,}0\,^\circ\mathrm{C}$.
Control. Con la potencia calculada, la superficie crítica debe coincidir con el valor objetivo y el balance entre flujos a ambos lados debe cerrarse.

Ej. 12 **Resultado.** $q_{\text{sin aletas}} = 0{,}113\,\mathrm{W}$, $q_{\text{con aletas}} = 1{,}627\,\mathrm{W}$ y $\eta_T = 0{,}987$.
Control. Las eficiencias deben estar entre 0 y 1 y la disipación total debe sumar base expuesta y aletas sin contar áreas dos veces.

Ej. 13 **Resultado.** $q_{\text{sin aletas}} = 235{,}6\,\mathrm{W}$, $q_{\text{con aletas}} = 701{,}9\,\mathrm{W}$ y $W = 3{,}495\,\mathrm{N}$.
Control. Verifique $0 < \eta_f \leq 1$, que la potencia total supera la de la superficie desnuda y que las áreas usadas son las realmente expuestas.

Ej. 14 **Resultado.** Para $h = 41\,\mathrm{W/(m^2\,K)}$: $q_0 = 425{,}4\,\mathrm{W}$, $q_L = -112{,}9\,\mathrm{W}$ y $q_{\mathrm{amb}} = 538{,}3\,\mathrm{W}$. Para $h = 10\,\mathrm{W/(m^2\,K)}$: $q_0 = 204{,}0\,\mathrm{W}$, $q_L = 24{,}3\,\mathrm{W}$ y $q_{\mathrm{amb}} = 179{,}7\,\mathrm{W}$.
Control. La temperatura debe quedar entre las condiciones extremas y, en estacionario sin generación, la potencia que entra debe ser igual a la que sale.

Ej. 15 **Resultado.** $t_{\mathrm{ideal}} = 4{,}16 \times 10^6\,\mathrm{s} \simeq 48{,}1\,\mathrm{d}$.
Control. La barra se resuelve como aleta estacionaria y la mezcla permanece a $0\,^\circ\mathrm{C}$; debe cumplirse $q\,t_{\mathrm{ideal}} = mH_f$.

Ej. 16 **Resultado.** $q''' = 77\,163\,\mathrm{W/m^3}$ y $T_{\máx} = 221{,}1\,^\circ\mathrm{C}$.
Control. La generación total debe igualar la suma de pérdidas exteriores y la temperatura máxima debe aparecer donde exige la simetría y la generación.

Ej. 17 **Resultado.** $t_c = 9\,\mathrm{h}\,41\,\mathrm{min}$, $t_{0,01} = 44\,\mathrm{h}\,35\,\mathrm{min}$, $T_{0,01} = 27{,}5\,^\circ\mathrm{C}$ y $Q_{0,01} = 609{,}7\,\mathrm{MJ}$.
Control. Compruebe $Bi \leq 0{,}1$, ausencia de sobrepaso de la temperatura ambiente y límites correctos en $t = 0$ y $t \to \infty$.

Ej. 18 **Resultado.** $L \simeq 0{,}599\,\mathrm{m}$ tanto para $T_e = 0$ como para $3\,\mathrm{K}$; $Q = 5{,}2\,\mathrm{mJ}$ por gota.
Control. La potencia emitida neta debe igualar la carga térmica y todas las temperaturas usadas en términos de cuarta potencia deben estar en kelvin.

Ej. 19 **Resultado.** $H \simeq 0{,}91\,\mathrm{m}$.
Control. La profundidad de penetración debe ser compatible con la hipótesis elegida y el tiempo calculado debe crecer con el cuadrado de la distancia característica.

Ej. 20 **Resultado.** $T(5\,\mathrm{cm}) = 42{,}7\,^\circ\mathrm{C}$, $T(e) = 126{,}8\,^\circ\mathrm{C}$ y $x(T = 85\,^\circ\mathrm{C}) = 0{,}204\,\mathrm{m}$.
Control. Compruebe que la profundidad térmica al tiempo calculado es menor que el espesor disponible y que la temperatura es monótona con la profundidad.

Ej. 21 **Resultado.** Madera: $T_s = 148{,}6\,^\circ\text{C}$ y $L_{\text{mín}} = 0{,}514\,\text{m}$; aluminio: $T_s = 22{,}0\,^\circ\text{C}$ y $L_{\text{mín}} = 1{,}527\,\text{m}$.

Control. La superficie debe ser la zona más caliente durante la irradiación y la energía absorbida acumulada debe ser coherente con el aumento térmico y las pérdidas.

Ej. 22 **Resultado.** $t = 31{,}5\,\text{s}$.

Control. Las temperaturas deben ser continuas en interfaces perfectas, el flujo debe conservarse y la hipótesis temporal elegida debe ser compatible con los espesores.

Ej. 23 **Resultado.** $t \simeq 8{,}2\,\text{ms}$ y $T_s \simeq 20{,}002\,^\circ\text{C}$.

Control. La amplitud debe decrecer exponencialmente con la profundidad y el desfase debe aumentar sin cambiar la frecuencia de la onda.

Ej. 24 **Resultado.** A 15 °C, temperaturas de contacto desde cobre a poliestireno: 15,8; 22,8; 25,0; 30,1 y 34,5 °C. A 60 °C: 59,0; 50,2; 47,5; 41,1 y 35,6 °C.

Control. La temperatura inicial de contacto debe quedar entre las dos temperaturas iniciales y desplazarse hacia la del material de mayor efusividad.

2.15 Ejercicios resueltos

Cómo trabajar los ejercicios resueltos Antes de leer las operaciones, deténgase en el recuadro **Antes de calcular**: anticipe el sentido del calor, la resistencia o capacidad dominante y el modelo que espera utilizar. Al terminar, use la **Comprobación final** para verificar balance, límites físicos, unidades y rango de validez. El objetivo no es adivinar el número, sino saber qué resultado sería razonable antes de obtenerlo.

Los ejercicios resueltos de esta sección desarrollan los enunciados anteriores con una secuencia uniforme: identificación del sistema físico, datos, hipótesis, ecuaciones, resolución numérica e interpretación. Se conserva la numeración original de los problemas aportados para que los enunciados, las figuras y las soluciones puedan cotejarse directamente con el material de partida.

Criterio de resolución Antes de sustituir números conviene decidir si el modelo es estacionario o transitorio, plano, cilíndrico o esférico, con o sin generación interna, y si las resistencias están en serie, en paralelo o combinadas. Esa decisión fija la ecuación aplicable y evita mezclar áreas, temperaturas de referencia o coeficientes incompatibles.

2.15.1 Ejercicio resuelto 1. Pared compuesta con aislamiento

Descripción del problema

Un recinto a 20 °C está separado del exterior a −15 °C por una pared de 20 m^2 constituida por una capa interior de hormigón de 30 cm de espesor y conductividad 1 W/(m K), y otra exterior de material aislante, poliestireno, de 2 cm y conductividad 0,028 W/(m K). Sabiendo que los coeficientes combinados de transmisión de calor por convección y radiación interior y exterior son 5 W/(m^2 K) y 10 W/(m^2 K), respectivamente, calcular la potencia térmica que atraviesa la pared y las temperaturas de las superficies interior, exterior e intermedia.

Datos.

- $T_{\infty,i} = 20\,°\text{C}$, $T_{\infty,e} = -15\,°\text{C}$. En este ejercicio se identifican además $T_1 \equiv T_{s,i}$, $T_2 \equiv T_{12}$ y $T_3 \equiv T_{s,e}$, de modo que ambiente, superficies e interfaz no se confundan.
- $A = 20\,\text{m}^2$.
- $L_h = 0{,}3\,\text{m}$, $k_h = 1\,\text{W/(m K)}$.
- $L_a = 0{,}02\,\text{m}$, $k_a = 0{,}028\,\text{W/(m K)}$.
- $h_i = 5\,\text{W/(m}^2\,\text{K)}$, $h_e = 10\,\text{W/(m}^2\,\text{K)}$.

Se pide.

a) Potencia térmica que atraviesa la pared.

b) Temperaturas de las superficies interior, intermedia y exterior.

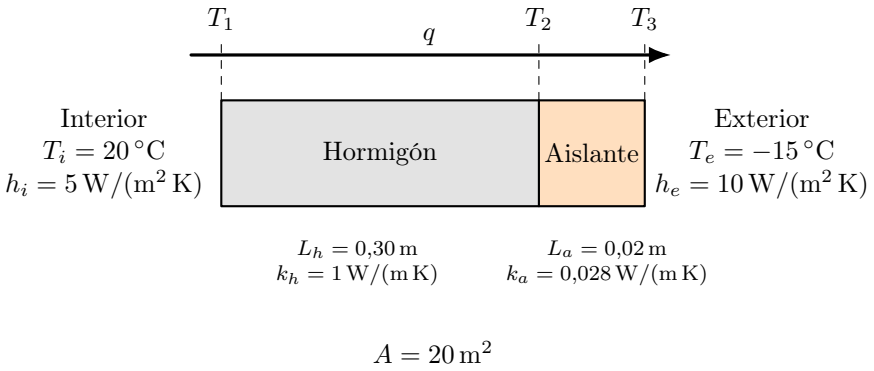


Figura 2.17: Esquema de pared compuesta y circuito térmico del Ejercicio 1.

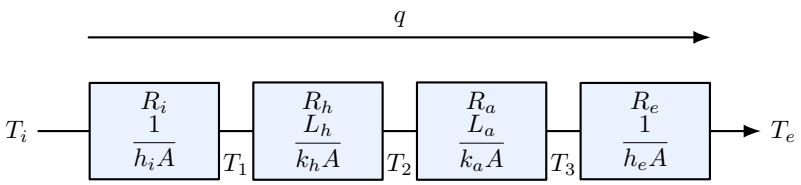


Figura 2.18: Circuito térmico equivalente detallado del Ejercicio 1.

Resolución del problema

Antes de calcular

Predicción física. El calor irá del recinto hacia el exterior. El aislante, aunque es delgado, debe producir una caída de temperatura importante por su baja conductividad.

Modelo esperado. Resistencias de película y capas sólidas en serie.

Simplificaciones y modelo.

Se considera régimen estacionario, flujo unidimensional y propiedades constantes. La pared, las dos películas superficiales y las dos capas sólidas forman una cadena de resistencias térmicas en serie; por tanto, el mismo flujo q recorre todas las capas. El sentido positivo de q se toma desde el recinto caliente hacia el exterior frío. Las temperaturas intermedias se obtienen acumulando las caídas qR desde el interior.

Las resistencias térmicas son:

$$\frac{1}{h_i A} = 0{,}010\,\mathrm{K/W}, \qquad \frac{L_h}{k_h A} = 0{,}015\,\mathrm{K/W}, \qquad \frac{L_a}{k_a A} = 0{,}0357\,\mathrm{K/W}, \qquad \frac{1}{h_e A} = 0{,}005\,\mathrm{K/W}.$$

La potencia térmica es:

$$q = \frac{T_i - T_e}{\sum R} = \frac{20 - (-15)}{0{,}010 + 0{,}015 + 0{,}0357 + 0{,}005} = 532{,}6\,\mathrm{W}.$$

Las temperaturas superficiales son:

$$T_1 = T_i - q\frac{1}{h_i A} = 14{,}7\,^\circ\mathrm{C},$$

$$T_2 = T_1 - q\frac{L_h}{k_h A} = 6{,}7\,^\circ\mathrm{C},$$

$$T_3 = T_2 - q\frac{L_a}{k_a A} = T_e + q\frac{1}{h_e A} = -12{,}3\,^\circ\mathrm{C}.$$

Resultado.

$$\boxed{q = 532{,}6\,\mathrm{W}, \qquad T_1 = 14{,}7\,^\circ\mathrm{C}, \qquad T_2 = 6{,}7\,^\circ\mathrm{C}, \qquad T_3 = -12{,}3\,^\circ\mathrm{C}}$$

La resistencia del aislante, $R_a = 0{,}0357\,\mathrm{K/W}$, es la mayor de la serie y concentra la mayor parte del salto térmico. Por eso la cara exterior del aislante queda a $-12{,}3\,^\circ\mathrm{C}$, muy próxima al ambiente exterior, mientras que el flujo total queda limitado principalmente por esa capa.

Comprobación final

Las temperaturas de interfaz deben descender de forma monótona y la suma de todas las caídas qR debe dar $T_i - T_e$.

2.15.2 Ejercicio resuelto 2. Conducción con conductividad variable

Descripción del problema

Una lámina de bronce, aleación de cobre y estaño, de $2\,\mathrm{m}\times0{,}7\,\mathrm{m}$ y $10\,\mathrm{mm}$ de espesor mantiene una de sus caras a $600\,\mathrm{K}$ y la otra a $400\,\mathrm{K}$. Dado que la temperatura cambia de forma considerable en el espesor, se va a considerar la variación de la conductividad térmica del material con la temperatura, dada por

$$k = k_0(1 + \beta T),$$

donde $k_0 = 38\,\mathrm{W/(m\,K)}$ y $\beta = 9{,}21 \times 10^{-4}/\mathrm{K}$. Calcular la potencia térmica que atraviesa la lámina. En esta correlación empírica, T se introduce en kelvin y su uso queda restringido al intervalo suministrado, $400\,\mathrm{K} \le T \le 600\,\mathrm{K}$. El parámetro k_0 es el intercepto del ajuste asociado a esa escala de temperatura; no debe interpretarse como una propiedad universal ni extrapolarse fuera del intervalo.

Datos.

- $A = 2\,\mathrm{m} \times 0{,}7\,\mathrm{m} = 1{,}4\,\mathrm{m}^2$.
- $L = 10\,\mathrm{mm} = 0{,}01\,\mathrm{m}$.
- $T_1 = 600\,\mathrm{K}$, $T_2 = 400\,\mathrm{K}$.
- $k_0 = 38\,\mathrm{W/(m\,K)}$.
- $\beta = 9{,}21 \times 10^{-4}/\mathrm{K}$.

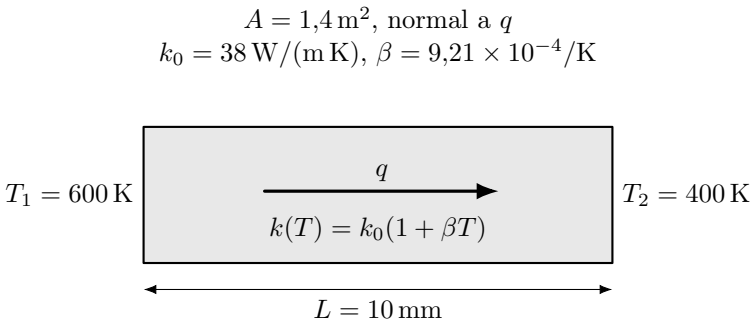


Figura 2.19: Esquema unidimensional de la lámina; el área A es perpendicular al espesor L.

Resolución del problema

Antes de calcular

Predicción física. El flujo será constante en régimen estacionario, pero el perfil de temperatura no será lineal porque k cambia con T.

Modelo esperado. Integración de la ley de Fourier con conductividad variable y temperaturas de contorno conocidas.

Simplificaciones y modelo.

Como la conductividad depende de la temperatura, no se sustituye directamente por un valor constante. En régimen estacionario el flujo de calor es uniforme, por lo que se integra la ley de Fourier a través del espesor usando $k(T)$. El resultado equivale a emplear una conductividad media integrada entre T_1 y T_2.

Por tratarse de un problema unidimensional y estacionario:

$$q = -kA\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = -k_0(1 + \beta T)A\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}.$$

Separando variables e integrando, considerando que q es constante en régimen estacionario:

$$\frac{q}{k_0 A}\int_0^L \mathrm{d}x = -\int_{T_1}^{T_2}(1+\beta T)\,\mathrm{d}T.$$

Por tanto:

$$\frac{q}{k_0 A}[x]_0^L = -\left[T+\beta\frac{T^2}{2}\right]_{T_1}^{T_2}.$$

De donde:

$$q = \frac{k_0 A}{L}(T_1-T_2)\left[1+\beta\frac{T_1+T_2}{2}\right].$$

Sustituyendo:

$$q = \frac{38\cdot 1{,}4}{0{,}01}(600-400)\left[1+9{,}21\cdot 10^{-4}\frac{600+400}{2}\right] = 1{,}55\times 10^6\,\mathrm{W}.$$

Resultado.

$$\boxed{q = 1{,}55\times 10^6\,\mathrm{W}}$$

La potencia es muy elevada porque la lámina es delgada y el área de paso es grande. Además, la corrección por conductividad variable no es marginal: el factor $1+\beta(T_1+T_2)/2 \simeq 1{,}46$ aumenta el flujo aproximadamente un 46 % respecto al cálculo con $k = k_0$ constante.

Comprobación final

Al sustituir las temperaturas extremas en la expresión integrada debe recuperarse el mismo flujo en toda la pared y las unidades deben ser de potencia o flujo según el área usada.

2.15.3 Ejercicio resuelto 3. Flujo de Couette entre placas

Descripción del problema

Entre dos láminas planas paralelas, ambas a temperatura T_s y separadas $h = 1\,\text{mm}$, se desarrolla un flujo de Couette en régimen laminar,

$$u = U\frac{y}{h},$$

La ecuación de cantidad de movimiento determina el perfil de velocidad anterior; la ecuación de energía, incluyendo disipación viscosa, proporciona la distribución de temperatura y es

$$T(y) = T_s + \frac{\mu}{2k}\left(\frac{U}{h}\right)^2 y(h-y),$$

siendo $U = 10\,\text{m/s}$ la velocidad de la placa móvil, $\mu = 0{,}2\,\text{kg/(m s)}$ la viscosidad y k la conductividad del fluido confinado. Tome $y = 0$ en la placa inferior fija y $y = h$ en la placa superior móvil, con $+y$ hacia arriba. Calcule la componente cartesiana q''_y en ambas paredes y los dos flujos normales salientes del fluido.

Datos.

- $h = 1\,\text{mm} = 1 \times 10^{-3}\,\text{m}$.
- $U = 10\,\text{m/s}$.
- $\mu = 0{,}2\,\text{kg/(m s)}$.
- Ambas láminas están a temperatura T_s.

Se pide.

a) Componentes cartesianas $q''_y(0)$ y $q''_y(h)$.

b) Flujos normales salientes $q''_{n,\text{inf}}$ y $q''_{n,\text{sup}}$.

c) Comprobación del balance con la disipación viscosa integrada.

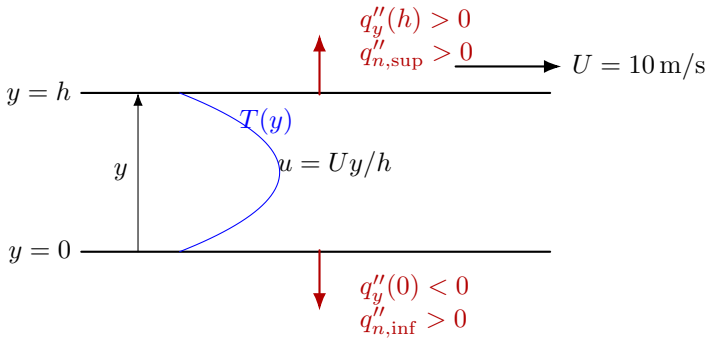


Figura 2.20: Esquema del flujo de Couette del Ejercicio 3.

Resolución del problema

Antes de calcular

Predicción física. El rozamiento viscoso genera calor dentro del fluido. La temperatura máxima aparecerá donde la evacuación hacia las placas sea más difícil.

Modelo esperado. Conducción unidimensional con generación viscosa distribuida y condiciones térmicas en las placas.

Simplificaciones y modelo.

Se supone régimen estacionario, flujo hidrodinámicamente desarrollado, propiedades k y μ constantes, ausencia de gradientes térmicos axiales y conducción unidimensional en y. Con $u = u(y)$, el balance de energía es El movimiento del fluido es paralelo a las placas; por tanto, en la dirección normal y el transporte de calor se calcula mediante conducción. La disipación viscosa genera un máximo de temperatura en el interior del fluido y el calor sale hacia ambas placas. El signo de q'' se interpreta con el eje y positivo hacia arriba. El perfil de velocidad no procede de la ecuación de energía. Para Couette estacionario, plenamente desarrollado y sin gradiente de presión,

$$\mu \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}y^2} = 0, \qquad u(0) = 0, \quad u(h) = U,$$

de donde $u = Uy/h$. La temperatura se obtiene de la ecuación de energía con disipación viscosa,

$$k \frac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}y^2} + \mu \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} \right)^2 = 0, \qquad T(0) = T(h) = T_s,$$

que conduce a la parábola indicada.

A pesar de que el fluido está en movimiento, al no existir movimiento en sentido vertical se puede aplicar la ley de Fourier en esta dirección:

$$q''(y) = -k \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}y}.$$

A partir de:

$$T(y) = T_s + \frac{\mu}{2k} \left(\frac{U}{h} \right)^2 y(h - y),$$

se obtiene:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}y} = \frac{\mu}{2k} \left(\frac{U}{h} \right)^2 (h - 2y).$$

En la lámina superior:

$$q''(y = h) = -k \frac{\mu}{2k} \left(\frac{U}{h} \right)^2 (h - 2h) = +\frac{\mu}{2} \frac{U^2}{h} = 1{,}0 \times 10^4 \,\mathrm{W/m^2}.$$

En la lámina inferior:

$$q''(y = 0) = -k \frac{\mu}{2k} \left(\frac{U}{h} \right)^2 h = -\frac{\mu}{2} \frac{U^2}{h} = -1{,}0 \times 10^4 \,\mathrm{W/m^2}.$$

Resultado.

$$\boxed{q''_y(0) = -1{,}0 \times 10^4 \,\mathrm{W/m^2}, \qquad q''_y(h) = +1{,}0 \times 10^4 \,\mathrm{W/m^2}}$$

Como la normal exterior del fluido es $\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{e}_y$ en la placa inferior y $\boldsymbol{n} = +\boldsymbol{e}_y$ en la superior,

$$\boxed{q''_{n,\mathrm{inf}} = q''_{n,\mathrm{sup}} = 1{,}0 \times 10^4 \,\mathrm{W/m^2}.}$$

Los signos opuestos pertenecen sólo a la componente cartesiana q''_y; físicamente, el calor sale del fluido por las dos placas. La disipación por unidad de volumen es $\Phi = \mu(U/h)^2$ y, al integrarla en el espesor, $\Phi h = \mu U^2/h = 2{,}0 \times 10^4 \,\mathrm{W/m^2}$, exactamente la suma de los dos flujos salientes.

Comprobación final

El calor evacuado por las paredes debe igualar la generación viscosa integrada; el perfil debe satisfacer exactamente ambas condiciones de contorno.

2.15.4 Ejercicio resuelto 4. Cable enterrado con aislamiento

Descripción del problema

Un cable eléctrico de cobre de 5 mm de radio discurre enterrado paralelamente a la superficie a una profundidad de 1 m, medida hasta el eje del cable. El conductor está recubierto de un material aislante eléctrico de 5 mm de espesor y conductividad térmica 0,1 W/(m K). La conductividad térmica del suelo vale 1 W/(m K) y la temperatura del mismo en todos los puntos alejados del cable, incluida la superficie, es de 27 °C. Calcular la potencia térmica evacuada por metro de cable y la temperatura exterior del aislante si la temperatura de la unión conductor–aislante es de 33,9 °C.

Datos.

- $r_0 = 5\,\text{mm}$.
- $r_1 = 10\,\text{mm}$.
- $H = 1\,\text{m}$.
- $k_a = 0{,}1\,\text{W/(m K)}$.
- $k_s = 1\,\text{W/(m K)}$.
- $T_0 = 33{,}9\,^\circ\text{C}$.
- $T_s = 27\,^\circ\text{C}$.

Se pide.

a) Potencia térmica evacuada por metro de cable.

b) Temperatura exterior del aislante.

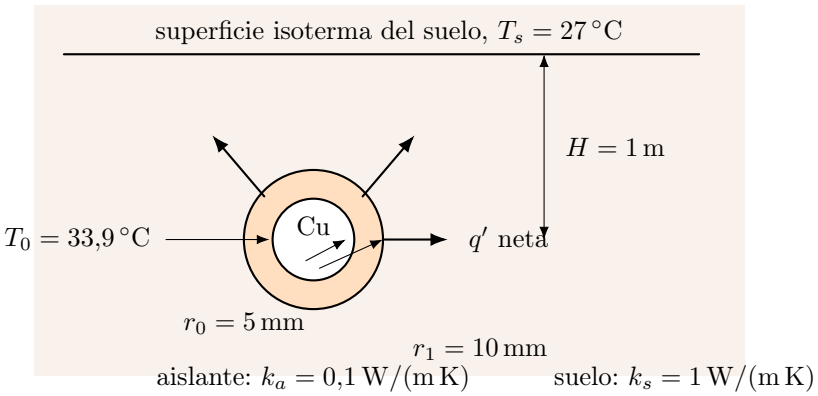


Figura 2.21: Geometría del cable enterrado. El campo en el suelo es bidimensional; las flechas sólo indican la salida neta de calor.

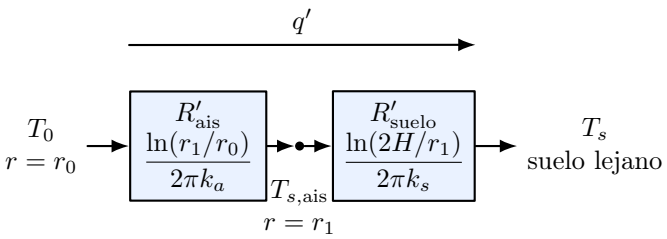


Figura 2.22: Circuito por unidad de longitud. Las resistencias R' tienen unidades K m/W y la expresión del suelo es la aproximación para $H/r_1 \gg 1$.

Resolución del problema

Antes de calcular

Predicción física. Con los datos del modelo, T_0 es la mayor temperatura conocida del dominio aislamiento–suelo y se toma como temperatura de la superficie del conductor. Afirmar la temperatura máxima dentro del metal requeriría modelar su generación y conducción internas; el calor se propaga desde esa superficie hacia el terreno. En este problema la resistencia exterior es conductiva, no convectiva; debe comprobarse la monotonía de la resistencia total.

Modelo esperado. Resistencias cilíndricas concéntricas combinadas con la conducción hacia el terreno.

Simplificaciones y modelo.

El problema se modela por metro de longitud de cable. El calor atraviesa primero el aislante cilíndrico y después se disipa en el suelo. Para el suelo se utiliza la resistencia térmica equivalente correspondiente a un cilindro enterrado próximo a una superficie isoterma, válida aquí porque $H/r_1 = 100$ y, por tanto, la superficie está muy alejada en comparación con el radio exterior.

Como $H > 3r_1$, la resistencia térmica del suelo se aproxima por:

$$R_s = \frac{\ln(2H/r_1)}{2\pi k_s L}.$$

La potencia térmica evacuada por una longitud L de cable es:

$$q = \frac{T_0 - T_s}{\dfrac{\ln(r_1/r_0)}{2\pi k_a L} + \dfrac{\ln(2H/r_1)}{2\pi k_s L}} = 3{,}545\, L\,\mathrm{W}.$$

Por tanto:

$$q' = \frac{q}{L} = 3{,}545\,\mathrm{W/m}.$$

La temperatura de la superficie exterior del aislante, en $r = r_1$, es:

$$T_{s,\mathrm{ais}} = T_0 - q\frac{\ln(r_1/r_0)}{2\pi k_a L} = T_s + q\frac{\ln(2H/r_1)}{2\pi k_s L} = 30{,}0\,^\circ\mathrm{C}.$$

Como control independiente, $q'_{\mathrm{ais}} = (T_0 - T_{s,\mathrm{ais}})/R'_{\mathrm{ais}}$ y $q'_{\mathrm{suelo}} = (T_{s,\mathrm{ais}} - T_s)/R'_{\mathrm{suelo}}$ deben producir el mismo valor $3{,}545\,\mathrm{W/m}$.

Resultado.

$$\boxed{q' = 3{,}545\,\mathrm{W/m}, \qquad T_{s,\mathrm{ais}} = 30{,}0\,^\circ\mathrm{C}}$$

La caída térmica total es pequeña, sólo 6,9 K, por lo que la potencia por metro resulta reducida. Las resistencias del aislante y del suelo son comparables, del mismo orden: ninguna de las dos puede despreciarse sin alterar apreciablemente T_1.

El criterio clásico $r_c = k/h$ no es aplicable aquí porque presupone una resistencia exterior convectiva. Para una profundidad H y radio exterior variable r_1, la resistencia por unidad de longitud es

$$R'(r_1) = \frac{\ln(r_1/r_0)}{2\pi k_a} + \frac{\operatorname{acosh}(H/r_1)}{2\pi k_s},$$

La contribución del suelo es exacta en términos de $\operatorname{acosh}(H/r_1)$. La aproximación $\ln(2H/r_1)$ sólo se usa para $H/r_1 \gg 1$; con $H/r_1 = 100$ su error relativo es $4{,}72 \times 10^{-6}$. y su derivada puede escribirse

$$\frac{dR'}{dr_1} = \frac{1}{2\pi r_1}\left[\frac{1}{k_a} - \frac{H}{k_s\sqrt{H^2 - r_1^2}}\right].$$

Con $k_a = 0{,}1\,\mathrm{W/(m\,K)}$, $k_s = 1\,\mathrm{W/(m\,K)}$ y $H \gg r_1$, el corchete es aproximadamente $10 - 1 > 0$. La resistencia aumenta monótonamente con el espesor: a diferencia del caso con convección exterior, añadir aislamiento siempre reduce la potencia transmitida hacia el suelo.

Comprobación final

La potencia perdida por unidad de longitud debe coincidir con la generada o impuesta y la temperatura debe disminuir desde el conductor hacia el ambiente.

2.15.5 Ejercicio resuelto 5. Carga térmica de un congelador

Descripción del problema

Un congelador está constituido por una cavidad cúbica de 2 m de lado, donde la base puede suponerse térmicamente aislada. La pared tiene una primera capa metálica, cuyo espesor y resistencia térmica pueden despreciarse, y una capa de aislante térmico de 50 mm de espesor y conductividad 0,030 W/(m K). En un momento dado la temperatura interior es de −15 °C y la exterior de 35 °C. Se pide la carga térmica del congelador si los coeficientes de transmisión de calor combinados por convección y radiación valen 3 W/(m^2 K), tanto interna como externamente.

Datos.

- $H = 2\,\text{m}$.
- $e = 50\,\text{mm} = 0{,}05\,\text{m}$.
- $k_a = 0{,}030\,\text{W/(m K)}$.
- $T_i = -15\,^\circ\text{C}$.
- $T_e = 35\,^\circ\text{C}$.
- $h_i = h_e = 3\,\text{W/(m}^2\,\text{K)}$.

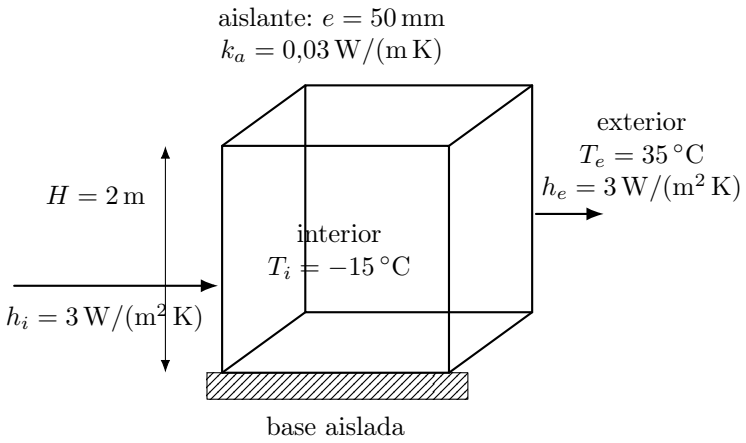
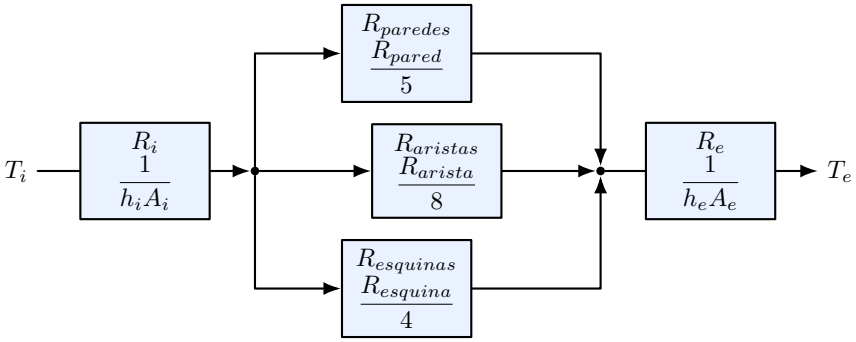


Figura 2.23: Esquema del congelador del Ejercicio 5.



Conducción global modelada mediante tres familias de caminos en paralelo: 5 paredes planas, 8 aristas y 4 esquinas.

Figura 2.24: Circuito térmico equivalente detallado del congelador del Ejercicio 5.

Resolución del problema

Antes de calcular

Predicción física. El calor entrará en el congelador por paredes, aristas y esquinas. Las paredes aportarán la mayor parte, pero los puentes tridimensionales no deben omitirse.

Modelo esperado. Suma de caminos de conducción en paralelo mediante resistencias térmicas equivalentes.

Simplificaciones y modelo.

La base del congelador no participa en la transmisión de calor, de modo que sólo se consideran cinco caras. Además de la conducción plana a través de las caras, se añaden las contribuciones por aristas y esquinas mediante las resistencias térmicas equivalentes de esas geometrías, ya que el espesor del aislante no es estrictamente nulo frente a las dimensiones del cubo. Esta red exige además idealizar las chapas interior y exterior como superficies lateralmente isotermas. Una resistencia transversal pequeña no garantiza por sí sola esa uniformidad; la hipótesis elimina explícitamente los gradientes dentro de cada chapa.

El intercambio total se calcula considerando paredes, aristas y esquinas:

$$q_T = 5q_{\text{pared 1D}} + 8q_{\text{aristas}} + 4q_{\text{esquinas}}.$$

Las áreas de intercambio interior y exterior son:

$$A_i = 5H^2 = 20\,\text{m}^2,$$

$$A_e = 4(H+2e)(H+e) + (H+2e)^2 = 21{,}63\,\text{m}^2.$$

Las resistencias convectivas son:

$$\frac{1}{h_i A_i} = 0{,}0167\,\text{K/W}, \qquad \frac{1}{h_e A_e} = 0{,}0154\,\text{K/W}.$$

Para una pared:

$$R_{\text{pared}} = \frac{e}{k_a H^2} = 0{,}417\,\text{K/W}, \qquad R_{\text{paredes}} = \frac{R_{\text{pared}}}{5} = 0{,}0833\,\text{K/W}.$$

Para las aristas:

$$R_{\text{arista}} = \frac{1}{0{,}54\,k_a H} = 30{,}86\,\text{K/W}, \qquad R_{\text{aristas}} = \frac{R_{\text{arista}}}{8} = 3{,}858\,\text{K/W}.$$

Para las esquinas:

$$R_{\text{esquina}} = \frac{1}{0{,}15\,k_a e} = 4444{,}4\,\text{K/W}, \qquad R_{\text{esquinas}} = \frac{R_{\text{esquina}}}{4} = 1111{,}1\,\text{K/W}.$$

La resistencia conductiva equivalente es:

$$R_{\text{cond}} = \left(\frac{1}{R_{\text{paredes}}} + \frac{1}{R_{\text{aristas}}} + \frac{1}{R_{\text{esquinas}}}\right)^{-1}.$$

La resistencia total resulta:

$$R_T = \frac{1}{h_i A_i} + R_{\text{cond}} + \frac{1}{h_e A_e} = 0{,}1136\,\text{K/W}.$$

Por tanto:

$$q = \frac{T_e - T_i}{R_T} = \frac{35 - (-15)}{0{,}1136} = 440{,}0\,\mathrm{W}.$$

Resultado.

$$\boxed{q = 440{,}0\,\mathrm{W}}$$

La contribución dominante es la conducción aproximadamente unidimensional a través de las cinco caras activas. Las aristas y esquinas están incluidas mediante resistencias térmicas equivalentes, pero su contribución es muy pequeña frente a la de las paredes planas: en la práctica son despreciables frente a las paredes, pues sus conductancias equivalentes apenas modifican la conductancia total. Por ello el resultado es prácticamente el de un cálculo 1D de cinco paredes en paralelo.

Comprobación final

La carga total debe ser la suma de las contribuciones de paredes, aristas y esquinas, todas con signo de entrada al recinto frío.

2.15.6 Ejercicio resuelto 6. Encapsulado esférico en cámara criogénica

Descripción del problema

Un encapsulado esférico de 100 mm de diámetro, conteniendo componentes electrónicos, se sitúa dentro de una cámara de grandes dimensiones donde un medio gaseoso criogénico está a $-196\,^{\circ}\mathrm{C}$ y las paredes de la cámara a $-198\,^{\circ}\mathrm{C}$. La operación correcta de los componentes limita su temperatura máxima a $80\,^{\circ}\mathrm{C}$. Puede suponerse que la resistencia térmica del encapsulado es nula, lo que supone que la temperatura en su interior es uniforme. La superficie externa del encapsulado es gris difusa con emisividad igual a 0,3. Se reserva T_∞ para el gas y T_{sur} para las paredes del entorno radiante. El intercambio convectivo con el medio gaseoso se caracteriza mediante el coeficiente efectivo

$$h = 0{,}98\,\Delta T^{1/3} \quad [\mathrm{W/(m^2\,K)}].$$

Aquí $\Delta T = |T_s - T_\infty|$ se introduce en kelvin. El coeficiente numérico 0,98 es dimensional y sólo es válido con h en $\mathrm{W\,m^{-2}K^{-1}}$ y ΔT en K; sus unidades son $\mathrm{W\,m^{-2}K^{-4/3}}$. Esta ley empírica se adopta como caracterización completa del medio exterior. No se especifican composición ni presión y, por tanto, no debe interpretarse el fluido como aire atmosférico en equilibrio a $-196\,^{\circ}\mathrm{C}$. Para la temperatura máxima de la cápsula, se pide calcular los coeficientes de transmisión de calor por radiación y convección, y la potencia térmica total neta evacuada por la cápsula.

Datos.

- $D = 100\,\mathrm{mm}$, $R = 0{,}05\,\mathrm{m}$.
- $T_s = 80\,^{\circ}\mathrm{C}$.
- $T_\infty = -196\,^{\circ}\mathrm{C}$.
- $T_{\mathrm{paredes}} = -198\,^{\circ}\mathrm{C}$.
- $\varepsilon = 0{,}3$.
- $\sigma = 5{,}67 \times 10^{-8}\,\mathrm{W/(m^2\,K^4)}$. En todos los cálculos de este ejercicio se adopta $\sigma = 5{,}670\,374\,419 \times 10^{-8}\,\mathrm{W/(m^2\,K^4)}$ y $T_L = 1000{,}15\,\mathrm{K}$. Si se redondea a 1000 K y $5{,}67 \times 10^{-8}$, la pequeña diferencia debe atribuirse únicamente al redondeo.

Se pide.

a) h_r y h_c.

b) Potencia térmica total evacuada.

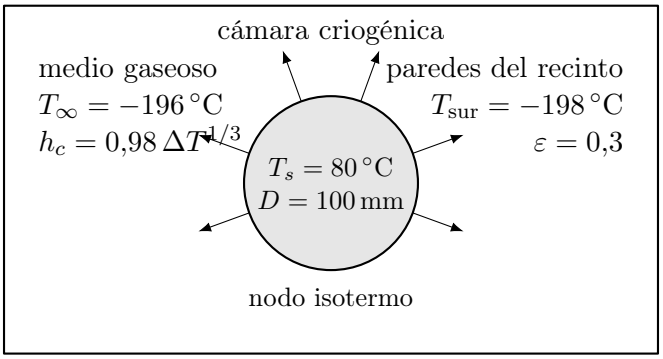


Figura 2.25: Nodo esférico isotermo con dos intercambios hacia focos térmicos distintos.

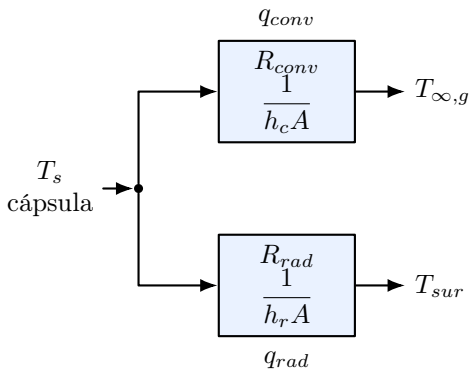


Figura 2.26: Ramas de convección y radiación que parten del mismo nodo superficial y terminan en focos térmicos distintos. No constituyen un paralelo estricto de dos terminales.

Resolución del problema

Antes de calcular

Predicción física. La cápsula caliente perderá calor hacia el ambiente criogénico. La radiación y la convección exterior actuarán simultáneamente.

Modelo esperado. Conducción radial en la cápsula más condiciones de contorno externas combinadas.

Simplificaciones y modelo.

No se resuelve un campo de conducción radial: el encapsulado se idealiza como un único nodo isotermo en balance estacionario, al despreciar su resistencia interna. La potencia evacuada es la suma de dos mecanismos en paralelo: convección hacia el medio gaseoso criogénico y radiación hacia las paredes frías de la cámara. Para la radiación se usa el coeficiente linealizado entre dos superficies grises-difusas con el recinto grande actuando como entorno.

El coeficiente radiativo linealizado es:

$$h_r = \varepsilon\sigma\left(T_s^2 + T_{\text{paredes}}^2\right)\left(T_s + T_{\text{paredes}}\right) = 0{,}950\,\text{W}/(\text{m}^2\,\text{K}),$$

con las temperaturas expresadas en kelvin. Se usa la conversión exacta $T[\text{K}] = T[^\circ\text{C}] + 273{,}15$: $T_s = 353{,}15\,\text{K}$ y $T_{\text{sur}} = 75{,}15\,\text{K}$. Con $\sigma = 5{,}670\,374\,419 \times 10^{-8}\,\text{W}/(\text{m}^2\,\text{K}^4)$ se obtiene $h_r = 0{,}9498\,\text{W}/(\text{m}^2\,\text{K})$, que redondea a $0{,}950\,\text{W}/(\text{m}^2\,\text{K})$. Usar 273 en lugar de 273,15 explica pequeñas discrepancias históricas en la tercera cifra.

El coeficiente convectivo es:

$$h_c = 0{,}98\,(T_s - T_\infty)^{1/3} = 6{,}381\,\text{W}/(\text{m}^2\,\text{K}).$$

El área de la esfera es:

$$A = 4\pi R^2 = 0{,}0314\,\text{m}^2.$$

Las potencias por radiación y convección son:

$$q_r = h_r A(T_s - T_{\text{paredes}}) = 8{,}295\,\text{W},$$

$$q_c = h_c A(T_s - T_\infty) = 55{,}325\,\text{W}.$$

La potencia total neta evacuada es:

$$q = q_r + q_c = 63{,}620\,\text{W}.$$

Resultado.

$$\boxed{h_r = 0{,}950\,\text{W}/(\text{m}^2\,\text{K}), \qquad h_c = 6{,}381\,\text{W}/(\text{m}^2\,\text{K}), \qquad q = 63{,}6\,\text{W}}$$

El intercambio convectivo efectivo domina la evacuación porque h_c es varias veces mayor que h_r: aporta aproximadamente 55 W, frente a unos 8 W por radiación. La convección y la radiación conectan con focos distintos: el medio gaseoso criogénico y las paredes de la cámara. La linealización de la radiación, $h_r = \varepsilon\sigma(T_s^2 + T_{sur}^2)(T_s + T_{sur})$, debe hacerse con temperaturas absolutas; si se usaran grados Celsius en esa expresión se obtendría un coeficiente físicamente incorrecto.

Comprobación final

Con potencia saliente positiva, $q_c > 0$ y $q_r > 0$; las temperaturas radiativas se introducen en kelvin y $q_c + q_r$ debe igualar la disipación admisible.

2.15.7 Ejercicio resuelto 7. Desempañado de luna trasera

Descripción del problema

Una forma de desempañar la luna trasera de un automóvil, vidrio de espesor 4 mm y conductividad 1,4 W/(m K), podría ser proyectando una corriente de aire caliente a una temperatura de 40 °C sobre la superficie interior, consiguiendo un coeficiente de convección 30 W/(m^2 K). El coeficiente de convección y temperatura exteriores, que cambian con las condiciones atmosféricas y la velocidad de circulación del vehículo, en un momento valen 65 W/(m^2 K) y −30 °C. Otra forma de desempañar la luna consiste en calefactarla adhiriendo a la superficie interior una resistencia eléctrica a modo de hilo muy fino uniformemente distribuido. Tomar como temperatura de rocío interior $T_{\text{rocío}} = 15\,°\text{C}$; para esta segunda alternativa, el aire interior está a $T_i = 25\,°\text{C}$ y $h_i = 5\,\text{W/(m}^2\,\text{K)}$. Se pide: (a) calcular las temperaturas de las caras interior y exterior con soplado de aire caliente; (b) decidir si aparece condensación o escarcha en la cara interior; y (c) calcular el flujo eléctrico mínimo por unidad de área que mantiene la cara interior justo en $T_{\text{rocío}}$ para la segunda alternativa.

Datos.

- $L = 4\,\text{mm} = 0{,}004\,\text{m}$.
- $k = 1{,}4\,\text{W/(m K)}$.
- Primer caso: $T_i = 40\,°\text{C}$, $h_i = 30\,\text{W/(m}^2\,\text{K)}$.
- Condiciones exteriores: $T_e = -30\,°\text{C}$, $h_e = 65\,\text{W/(m}^2\,\text{K)}$.
- Temperatura de rocío interior: $T_{\text{rocío}} = 15\,°\text{C}$.
- Segundo caso: $T_i = 25\,°\text{C}$, $h_i = 5\,\text{W/(m}^2\,\text{K)}$.

Se pide.

a) Temperaturas interior y exterior del vidrio.

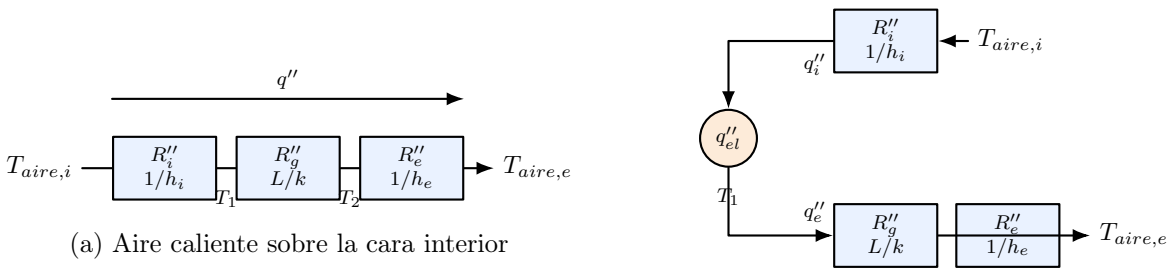
b) Comprobar si se formará condensación en la cara interior.

c) Potencia térmica mínima por unidad de área que debe aportar la resistencia calefactora.



(a) Soplado de aire caliente, sin resistencia eléctrica (b) Calefacción superficial eléctrica

Figura 2.27: Las dos alternativas del Ejercicio 7 usan condiciones interiores diferentes y no deben superponerse en un único esquema.



(a) Aire caliente sobre la cara interior

(b) Fuente superficial: $q''_{el} + q''_i = q''_e$

Figura 2.28: Redes por unidad de área de las dos alternativas del Ejercicio 7.

Resolución del problema

Antes de calcular

Predicción física. La calefacción debe elevar la cara del vidrio por encima de la temperatura crítica de empañamiento. Aumentar la potencia eléctrica eleva la temperatura superficial.

Modelo esperado. Balance estacionario en una superficie con aporte eléctrico uniforme q''_{el} y pérdidas hacia ambos lados. No se modela generación volumétrica en el vidrio.

Simplificaciones y modelo.

Primero se analiza el vidrio sin resistencia calefactora como una pared plana con dos películas convectivas. La temperatura de la cara interior se compara con la temperatura de rocío para decidir si aparece condensación. Después, en el caso con hilo calefactor, se impone la condición límite $T_1 = T_{\text{rocío}}$ y se hace un balance de energía en la superficie calefactada.

Apartados a) y b).

El flujo de calor por unidad de área es:

$$q'' = \frac{T_i - T_e}{\dfrac{1}{h_i} + \dfrac{L}{k} + \dfrac{1}{h_e}} = 1357{,}2\,\text{W/m}^2.$$

La temperatura de la cara interior del vidrio es:

$$T_1 = T_i - \frac{q''}{h_i} = -5{,}2\,^\circ\text{C}.$$

Como

$$T_1 = -5{,}2\,^\circ\text{C} < T_{\text{rocío}} = 15\,^\circ\text{C},$$

habrá condensación. Además, dado que la temperatura del vidrio es inferior a $0\,^\circ$C, se formará escarcha.

La temperatura de la cara exterior es:

$$T_2 = T_1 - q''\frac{L}{k} = T_e + \frac{q''}{h_e} = -9{,}1\,^\circ\text{C}.$$

Apartado c).

Para que haya visibilidad a través de la luna trasera, se requiere $T_1 > T_{\text{rocío}}$. En el límite:

$$T_1 = T_{\text{rocío}} = 15\,^\circ\text{C}.$$

El flujo hacia el interior del habitáculo es:

$$q''_1 = \frac{T_i - T_1}{1/h_i} = \frac{25 - 15}{1/5} = 50\,\text{W/m}^2.$$

Este flujo entra al nodo calefactado desde el aire de cabina, ya que el aire interior está a 25 °C y la superficie se fija en 15 °C. Por ello la resistencia eléctrica no debe aportar todo el calor que sale hacia el exterior, sino sólo la diferencia entre lo que sale y lo que ya aporta el aire interior.

El flujo hacia el exterior es:

$$q_2'' = \frac{T_1 - T_e}{\dfrac{L}{k} + \dfrac{1}{h_e}} = 2466{,}9\,\mathrm{W/m^2}.$$

La resistencia se idealiza como una fuente superficial de potencia por unidad de área, q''_{el}, aplicada en la cara interior. La potencia mínima aportada por la resistencia es: Este valor es un mínimo teórico estacionario. El diseño real debe incorporar margen por variación de humedad, no uniformidad térmica, incertidumbre en h y estrategia de control.

$$q_0'' = q_2'' - q_1'' = 2416{,}9\,\mathrm{W/m^2}.$$

Resultado.

$$\boxed{T_{\mathrm{interior}} = -5{,}2\,^\circ\mathrm{C}, \qquad T_{\mathrm{exterior}} = -9{,}1\,^\circ\mathrm{C}, \qquad q_0'' \simeq 2417\,\mathrm{W/m^2}}$$

En el primer caso la cara interior queda por debajo del punto de rocío y también por debajo de 0 °C; por tanto, además de condensación, puede aparecer escarcha. La resistencia eléctrica debe aportar aproximadamente 2,4 kW/m^2: no cubre todo el flujo hacia el exterior, porque el aire del habitáculo también aporta calor al nodo calefactado.

Comprobación final

La generación eléctrica total debe igualar las pérdidas; la superficie objetivo debe alcanzar, pero no quedar por debajo de, la temperatura de diseño.

2.15.8 Ejercicio resuelto 8. Curado radiante de un film sobre sustrato

Descripción del problema

En un proceso de fabricación se deposita un film transparente sobre un sustrato de otro material, ambos de 1 mm de espesor. Para curar la unión es necesario mantenerla a 60 °C, para lo cual se va a emplear una fuente de radiación que proporciona un flujo q_0'' en $\mathrm{W/m^2}$. Se consideran dos fuentes de radiación distintas: una de longitud de onda corta, para la cual el film es transparente, y otra de longitud de onda larga frente a la cual el film es opaco. En el caso (a) se supone el film totalmente transparente ($\tau_f = 1$); en el caso (b), totalmente opaco y absorbente ($\alpha_f = 1$). La cara posterior del sustrato se mantiene a 30 °C, mientras que la superficie libre del film intercambia calor con un ambiente equivalente a 20 °C mediante un coeficiente superficial total linealizado $h_{\mathrm{eq}} = 50\,\mathrm{W/(m^2\,K)}$. Este coeficiente ya agrupa convección y radiación térmica exterior; no se añade ni se elimina una segunda rama radiativa independiente. La conductividad del film vale $0{,}025\,\mathrm{W/(m\,K)}$ y la del sustrato $0{,}05\,\mathrm{W/(m\,K)}$. La resistencia de contacto entre ambos es despreciable. Se busca el estado estacionario unidimensional: no hay almacenamiento de energía en las capas. Para cada fuente se pide el flujo incidente requerido q_0'' y la temperatura de la superficie libre del film, manteniendo la interfaz film–sustrato a 60 °C.

Datos.

- $L_F = L_S = 1\,\mathrm{mm} = 0{,}001\,\mathrm{m}$.
- $k_F = 0{,}025\,\mathrm{W/(m\,K)}$.
- $k_S = 0{,}05\,\mathrm{W/(m\,K)}$.
- $T_2 = 60\,^{\circ}\mathrm{C}$.
- $T_3 = 30\,^{\circ}\mathrm{C}$.
- $T_{\mathrm{aire}} = 20\,^{\circ}\mathrm{C}$.
- $h_{\mathrm{eq}} = 50\,\mathrm{W/(m^2\,K)}$.

Se pide.

a) q_0'' si el film es transparente a la fuente de radiación ($\tau_f = 1$, $\alpha_f = 0$) y el sustrato presenta absortancia igual a 1 ($\alpha_s = 1$).

b) q_0'' si el film es opaco a la fuente y toda la radiación incidente se absorbe en la superficie exterior del film ($\alpha_f = 1$, $\tau_f = 0$).

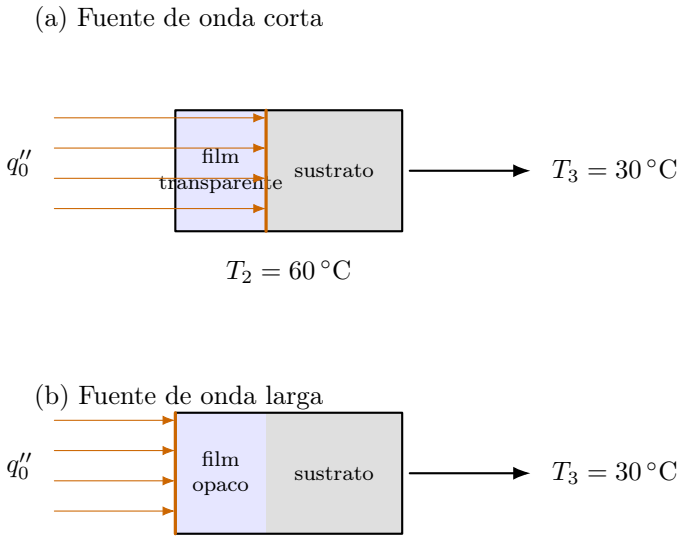
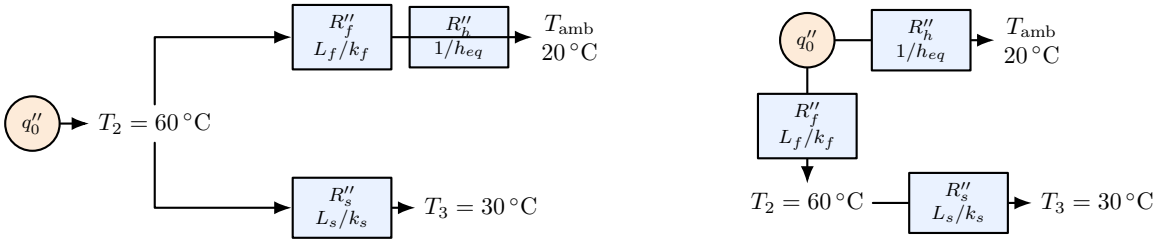


Figura 2.29: En (a) la onda corta atraviesa el film y se absorbe en la interfaz; en (b) la onda larga se absorbe en la superficie libre.



(a) Fuente absorbida en la interfaz (b) Fuente absorbida en la superficie libre

Figura 2.30: Redes térmicas por unidad de área asociadas a las dos idealizaciones ópticas. En ambos paneles se conserva la misma nomenclatura: $T_2 = 60\,^\circ\mathrm{C}$ en la interfaz, $T_3 = 30\,^\circ\mathrm{C}$ en la cara posterior y $T_{\mathrm{amb}} = 20\,^\circ\mathrm{C}$ en el foco exterior.

Resolución del problema

Antes de calcular

Predicción física. La radiación absorbida calentará primero el film y después el sustrato. El balance solicitado es estacionario: la potencia absorbida debe igualar las salidas hacia la cara posterior y hacia el ambiente equivalente.

Modelo esperado. Red estacionaria por unidad de área con absorción en la interfaz o en la superficie libre.

Simplificaciones y modelo.

La clave es identificar dónde se absorbe la radiación. Si el film es transparente, la energía se absorbe en la unión film–sustrato y desde ahí se reparte hacia el aire y hacia la cara posterior. Si el film es opaco, la energía se absorbe en la superficie exterior del film, que debe estar más caliente para conducir hacia la unión y, simultáneamente, perder calor mediante el intercambio superficial equivalente.

Apartado a): film transparente a la fuente de radiación.

El calor que atraviesa el sustrato es:

$$q_1'' = \frac{T_2 - T_3}{L_S/k_S} = \frac{60 - 30}{0{,}001/0{,}05} = 1500{,}0\,\mathrm{W/m^2}.$$

El calor evacuado hacia el aire a través del film y por el intercambio superficial equivalente es:

$$q_2'' = \frac{T_2 - T_{\text{aire}}}{L_F/k_F + 1/h_{\text{eq}}} = \frac{60 - 20}{0{,}001/0{,}025 + 1/50} = 666{,}7\,\text{W/m}^2.$$

Por tanto:

$$q_0'' = q_1'' + q_2'' = 2166{,}7\,\text{W/m}^2.$$

Apartado b): film opaco a la fuente de radiación.

El calor que atraviesa el sustrato es el mismo:

$$q_1'' = \frac{T_2 - T_3}{L_S/k_S} = 1500{,}0\,\text{W/m}^2.$$

La temperatura de la superficie exterior del film es:

$$T_1 = T_2 + q_1'' \frac{L_F}{k_F} = 120{,}0\,^\circ\text{C}.$$

El calor evacuado hacia el ambiente equivalente es:

$$q_2'' = \frac{T_1 - T_{\text{aire}}}{1/h} = 5000{,}0\,\text{W/m}^2.$$

Por tanto:

$$q_0'' = q_1'' + q_2'' = 6500{,}0\,\text{W/m}^2.$$

Resultado.

$$\boxed{q_{0,a}'' = 2166{,}7\,\text{W/m}^2, \qquad q_{0,b}'' = 6500\,\text{W/m}^2}$$

La diferencia entre ambos valores es física: si la radiación se absorbe en la unión, casi toda la potencia se emplea en mantenerla caliente; si se absorbe en la cara externa del film, una parte importante se pierde directamente hacia el aire antes de llegar a la unión, por lo que la fuente debe ser mucho más intensa.

Comprobación final

La potencia absorbida debe igualar exactamente las dos salidas estacionarias; no debe añadirse una rama radiativa exterior distinta de h_{eq}.

2.15.9 Ejercicio resuelto 9. Pared compuesta con generación y contacto

Descripción del problema

Una pared plana compuesta está constituida por dos capas A y B de conductividades $k_A = 50\,\mathrm{W/(m\,K)}$ y $k_B = 130\,\mathrm{W/(m\,K)}$, y espesores $L_A = 30\,\mathrm{mm}$ y $L_B = 15\,\mathrm{mm}$. La cara izquierda de A se mantiene térmicamente aislada, mientras que la cara libre de B está en contacto con un fluido a temperatura de 80 °C. El cuerpo A tiene introducida una resistencia eléctrica uniformemente distribuida que presenta una generación volumétrica uniforme $q''' = 2 \times 10^6\,\mathrm{W/m^3}$. Además, entre ambos cuerpos existe una resistencia de contacto de valor $2{,}5 \times 10^{-4}\,\mathrm{m^2\,K/W}$. Calcular el coeficiente de convección mínimo $h_{\mathrm{mín}}$ del fluido para que la temperatura máxima de la pared no supere los 150 °C; cualquier $h \geq h_{\mathrm{mín}}$ satisface el límite.

Datos.

- $k_A = 50\,\mathrm{W/(m\,K)}$, $L_A = 30\,\mathrm{mm}$.
- $k_B = 130\,\mathrm{W/(m\,K)}$, $L_B = 15\,\mathrm{mm}$.
- $q''' = 2 \times 10^6\,\mathrm{W/m^3}$.
- $R''_c = 2{,}5 \times 10^{-4}\,\mathrm{m^2\,K/W}$.
- $T_\infty = 80\,^\circ\mathrm{C}$.
- $T_{\mathrm{máx}} = 150\,^\circ\mathrm{C}$.

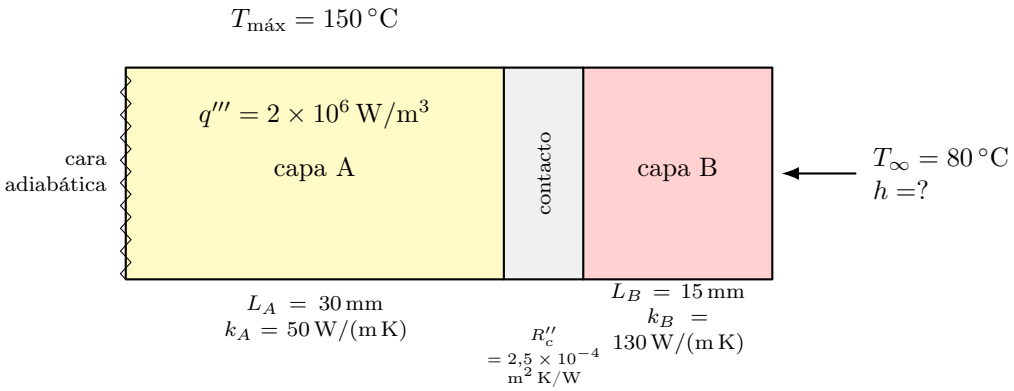


Figura 2.31: Pared compuesta con generación interna y convección del Ejercicio 9.

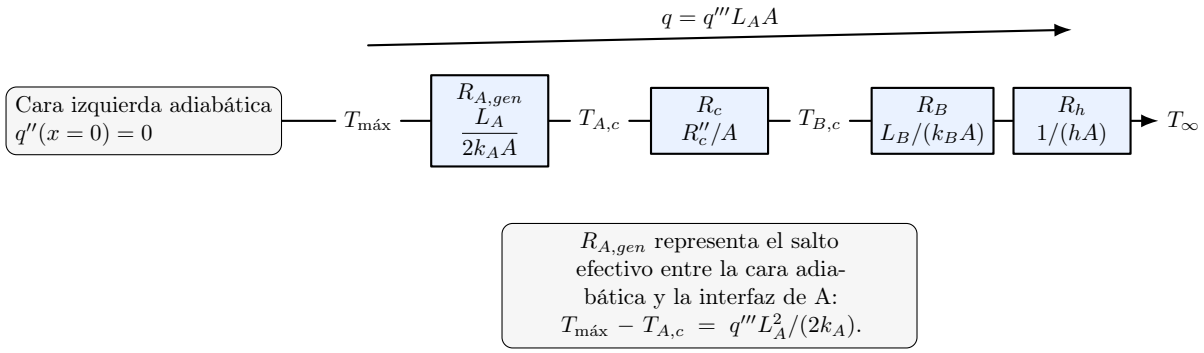


Figura 2.32: Esquema de resistencias térmicas desde la zona de máxima temperatura hasta el fluido del Ejercicio 9.

Resolución del problema

Antes de calcular

Predicción física. La generación interna produce un máximo de temperatura dentro de la capa activa. Una resistencia de contacto introduce un salto de temperatura finito.

Modelo esperado. Conducción unidimensional con generación, capas en serie y resistencia de contacto.

Simplificaciones y modelo.

La cara izquierda de A es adiabática, por lo que el flujo allí es nulo. Como A genera calor uniformemente, la temperatura máxima se sitúa en esa cara aislada. Toda la potencia generada en A sale hacia la derecha; por balance, el flujo superficial es $q'' = q'''L_A$. A partir de ahí atraviesa la resistencia de contacto, la capa B y la película convectiva.

Tomamos $x = 0$ en la cara izquierda aislada de A y $x = L_A$ en la interfaz A–B. En A se resuelve la ecuación de conducción estacionaria con generación uniforme,

$$\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{q'''}{k_A},$$

con condición adiabática en $x = 0$, es decir, $\mathrm{d}T/\mathrm{d}x|_{x=0} = 0$. Por ello la temperatura máxima está en la cara aislada:

$$T_1 = T_{\text{máx}} = 150\,^\circ\text{C}.$$

La caída de temperatura entre la cara aislada y la interfaz A–B se obtiene integrando el perfil parabólico:

$$T_1 - T_2 = \frac{q'''L_A^2}{2k_A} = \frac{2\cdot 10^6(0{,}03)^2}{2\cdot 50} = 18{,}0\,\text{K}.$$

De aquí:

$$T_{A,c} = 132{,}0\,^\circ\text{C}.$$

La potencia térmica por unidad de área que sale por la cara derecha de A es:

$$q'' = q'''L_A = 2\cdot 10^6\cdot 0{,}03 = 60\,000\,\text{W/m}^2.$$

La caída localizada en el contacto es

$$\Delta T_c = q''R_c'' = 60000(2{,}5\cdot 10^{-4}) = 15\,\text{K},$$

por lo que las dos temperaturas de interfaz, situadas en la misma coordenada geométrica, son

$$T_{A,c} = 132\,^\circ\text{C}, \qquad T_{B,c} = T_{A,c} - \Delta T_c = 117\,^\circ\text{C}.$$

Desde el lado B del contacto hasta el fluido,

$$q'' = \frac{T_{B,c} - T_\infty}{L_B/k_B + 1/h}.$$

Sustituyendo,

$$60000 = \frac{117 - 80}{0{,}015/130 + 1/h},$$

y el valor límite es

$$h_{\text{mín}} = 1994{,}9\,\text{W/(m}^2\,\text{K)}.$$

Resultado.

$$\boxed{h_{\text{mín}} \simeq 1995\,\text{W/(m}^2\,\text{K)}, \qquad h \geq h_{\text{mín}}}$$

El valor elevado de $h_{\text{mín}}$ se debe a que la generación en A impone un flujo muy grande, $q'' = 60\,000\,\text{W/m}^2$, y sólo se dispone de 52 K entre la interfaz A–B y el fluido para evacuarlo a través del contacto, la capa B y la película convectiva. La resistencia de contacto no es dominante, pero tampoco es despreciable dentro de esa cadena exterior.

Comprobación final

Compruebe el balance entre generación y calor evacuado, que $\Delta T_c = q'' R_c'' = 15\,\text{K}$ y que cualquier $h \geq h_{\text{mín}}$ mantiene $T_{\text{máx}} \leq 150\,^\circ\text{C}$.

2.15.10 Ejercicio resuelto 10. Cable eléctrico con aislamiento y contacto

Descripción del problema

Un cable eléctrico aéreo consta de un núcleo de cobre, de conductividad térmica $k = 386\,\mathrm{W/(m\,K)}$ y resistividad eléctrica $\rho_e = 1{,}72 \times 10^{-8}\,\Omega\,\mathrm{m}$, de 5 mm de diámetro, atravesado por una corriente de 50 A. Exteriormente está recubierto con 1 mm de aislante térmico y eléctrico, cuya conductividad térmica es $0{,}1\,\mathrm{W/(m\,K)}$. Entre el núcleo y el aislante hay una conductancia de contacto, inverso de la resistencia de contacto, de $1500\,\mathrm{W/(m^2\,K)}$. La resistividad eléctrica ρ_e, las conductividades k y la conductancia de contacto h_c se tratan como valores constantes representativos del intervalo de temperaturas. El coeficiente de convección exterior vale $20\,\mathrm{W/(m^2\,K)}$, siendo la temperatura ambiente de 42 °C. Desprecie la radiación térmica exterior. Se pide la potencia térmica disipada por metro de cable y la temperatura máxima del mismo.

Datos.

- $r_1 = 2{,}5\,\mathrm{mm}$.
- $r_2 = 3{,}5\,\mathrm{mm}$.
- $I = 50\,\mathrm{A}$.
- $\rho_e = 1{,}72 \times 10^{-8}\,\Omega\,\mathrm{m}$.
- $k_{\mathrm{Cu}} = 386\,\mathrm{W/(m\,K)}$.
- $k_a = 0{,}1\,\mathrm{W/(m\,K)}$.
- $R_c'' = 1/1500 = 6{,}667 \times 10^{-4}\,\mathrm{m^2\,K/W}$.
- $h_e = 20\,\mathrm{W/(m^2\,K)}$.
- $T_e = 42\,^\circ\mathrm{C}$.

Se pide.

a) Potencia térmica disipada por metro de cable.

b) Temperatura máxima.

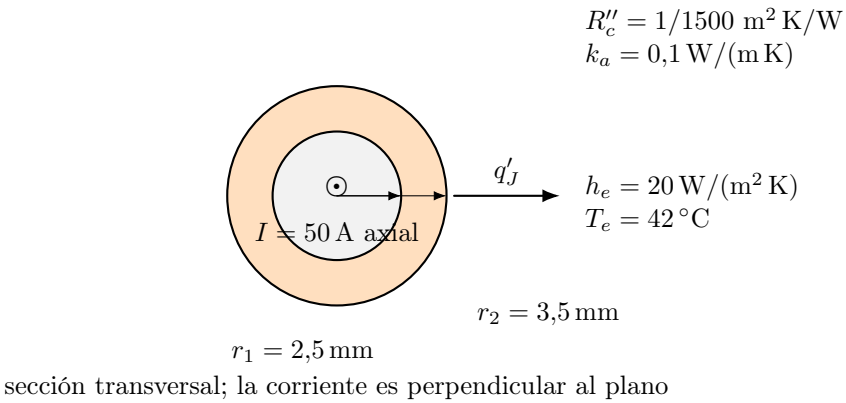


Figura 2.33: Cable eléctrico con corriente axial y evacuación térmica radial del Ejercicio 10.

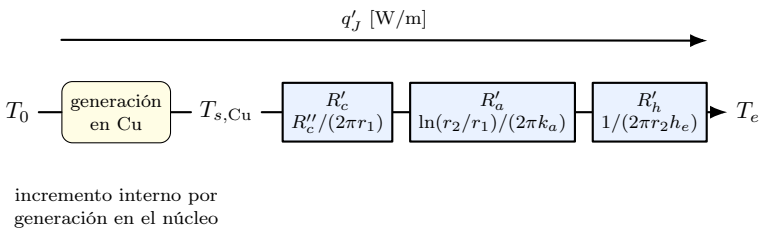


Figura 2.34: Red térmica completa por unidad de longitud. Todas las resistencias primadas están en K m/W.

Resolución del problema

Antes de calcular

Predicción física. La temperatura máxima estará en el conductor. El aislamiento y el contacto dificultan la evacuación y elevan esa temperatura.

Modelo esperado. Generación Joule en geometría cilíndrica con resistencias radiales y de contacto.

Simplificaciones y modelo.

La potencia térmica procede del efecto Joule en el núcleo de cobre. El cálculo se separa en tres etapas: (1) generación Joule por unidad de longitud, $q' = \rho_e I^2/(\pi r_1^2)$; (2) cadena radial contacto–aislante–convección, que fija la temperatura de la superficie del cobre; y (3) incremento interno por generación volumétrica, que da la diferencia entre superficie y eje.

Se supone corriente continua, densidad de corriente uniforme en la sección, resistividad constante y ausencia de efectos pelicular y de proximidad. Bajo estas hipótesis, La potencia generada por efecto Joule es:

$$q = RI^2 = \rho_e \frac{L}{A} I^2 = \rho_e \frac{L}{\pi r_1^2} I^2 = 2{,}19\, L\,\mathrm{W}.$$

Por tanto:

$$q' = \frac{q}{L} = 2{,}19\,\mathrm{W/m}.$$

El calor se evacua desde la superficie del cobre al ambiente mediante resistencia de contacto, conducción en el aislante y convección:

$$q = \frac{T_1 - T_e}{\dfrac{R''_c}{A_1} + \dfrac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi k_a L} + \dfrac{1}{h_e A_2}},$$

donde:

$$A_1 = 2\pi r_1 L, \qquad A_2 = 2\pi r_2 L.$$

Usando además:

$$q = \rho_e \frac{L}{\pi r_1^2} I^2,$$

se obtiene:

$$T_1 = T_e + \rho_e \frac{I^2}{2\pi^2 r_1^2} \left[\frac{R''_c}{r_1} + \frac{\ln(r_2/r_1)}{k_a} + \frac{1}{h_e r_2} \right] = 48{,}2\,^\circ\mathrm{C}.$$

En el núcleo de cobre, modelado como cilindro macizo con generación interna:

$$T(r) = T_s + \frac{q'''}{4k_{\mathrm{Cu}}}(R^2 - r^2) = T_1 + \frac{q'''}{4k_{\mathrm{Cu}}}(r_1^2 - r^2).$$

La generación volumétrica es:

$$q''' = \frac{q}{\mathrm{vol}} = \frac{\rho_e \dfrac{L}{\pi r_1^2} I^2}{\pi r_1^2 L} = \rho_e \left(\frac{I}{\pi r_1^2} \right)^2 = 111\,534\,\mathrm{W/m^3}.$$

La temperatura máxima tiene lugar en el centro del cable:

$$T_0 = T_1 + \frac{q'''}{4k_{\mathrm{Cu}}} r_1^2 = 48{,}2\,^{\circ}\mathrm{C}.$$

Resultado.

$$\boxed{q' = 2{,}19\,\mathrm{W/m}, \qquad T_{\mathrm{máx}} \simeq 48{,}2\,^{\circ}\mathrm{C}}$$

El incremento interno entre la superficie del cobre y su eje es de sólo unas $5{\cdot}10^{-4}\,\mathrm{K}$, por lo que el núcleo puede considerarse prácticamente isotermo. Por eso se redondean tanto la temperatura superficial del cobre como la máxima a 48,2 °C: dar más cifras no aporta información física. La temperatura máxima está controlada por la cadena contacto–aislante–convección, no por la conducción dentro del cobre.

Comprobación final

La potencia por unidad de longitud generada debe igualar la evacuada y la temperatura debe disminuir hacia el ambiente.

2.15.11 Ejercicio resuelto 11. Pared con calefacción para evitar condensación

Descripción del problema

Una pared de ladrillo de 12 cm de espesor y conductividad 0,930 W/(m K) está enlucida interiormente con 2 cm de mortero de yeso con conductividad 0,488 W/(m K). El ambiente exterior está a −7 °C y el coeficiente de convección vale 25 W/(m^2 K). En el interior la temperatura es 20 °C, el coeficiente de convección vale 10 W/(m^2 K) y la humedad relativa existente es tal que da una temperatura de rocío de 16 °C. Para evitar la condensación interior, se instala sobre el mortero de yeso una pared térmica de 5 mm de espesor y conductividad 0,7 W/(m K), que actúa como fuente térmica uniformemente distribuida. La pared térmica se enluce también con una capa de 2 cm de yeso.

Datos.

- $L_L = 0{,}12\,\text{m}$, $k_L = 0{,}930\,\text{W/(m K)}$.
- $L_Y = 0{,}02\,\text{m}$, $k_Y = 0{,}488\,\text{W/(m K)}$.
- $L_T = 0{,}005\,\text{m}$, $k_T = 0{,}7\,\text{W/(m K)}$.
- $T_e = -7\,°\text{C}$, $h_e = 25\,\text{W/(m}^2\,\text{K)}$.
- $T_i = 20\,°\text{C}$, $h_i = 10\,\text{W/(m}^2\,\text{K)}$.
- $T_{\text{rocío}} = 16\,°\text{C}$.

Se pide.

a) Temperatura superficial interior antes de la instalación de la fuente térmica.

b) Potencia mínima por metro cuadrado de pared que hay que aportar a la fuente térmica para eliminar completamente la condensación interior.

c) Temperatura superficial exterior después de la conexión de la fuente térmica.

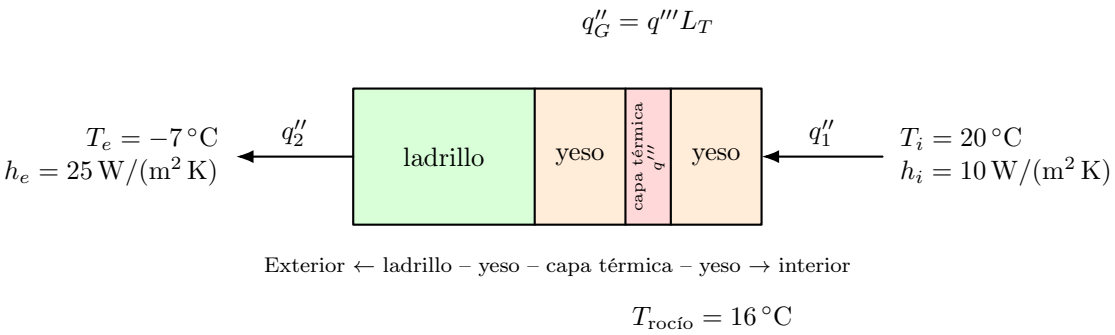


Figura 2.35: Pared multicapa del Ejercicio 11. En la condición límite, q''_1 entra desde el recinto y q''_2 sale al exterior.

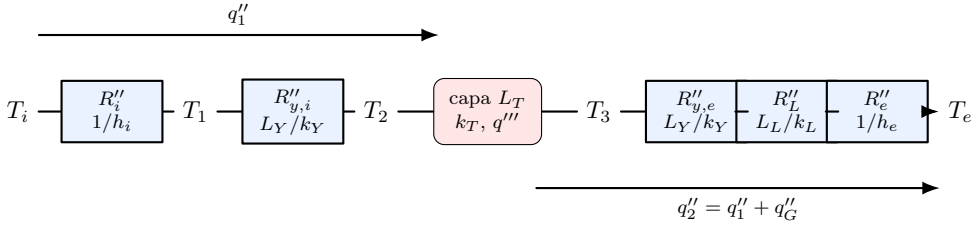


Figura 2.36: Esquema por unidad de área de la pared con generación distribuida.

Resolución del problema

Antes de calcular

Predicción física. La potencia de calefacción mínima será la que mantenga la superficie interior justo en la temperatura límite de no condensación.

Modelo esperado. Balance de flujos en una pared compuesta con una fuente superficial o interna.

Simplificaciones y modelo.

El apartado inicial sirve para comprobar que la pared original condensa. Para dimensionar la pared térmica se mantiene una nomenclatura única de nodos de interior a exterior en el caso con fuente: T_1 es la superficie interior que se fija en el punto de rocío; T_2 y T_3 son las caras interior y exterior de la pared térmica; T_4 y T_5 pertenecen al yeso exterior y al ladrillo, y T_6 es la superficie exterior. La pared original, antes de instalar la fuente, se identifica aparte mediante $T_{s,i}^{(0)}$. Se impone la condición límite de no condensación, $T_1 = 16\,^\circ\mathrm{C}$, En servicio debe fijarse una temperatura objetivo superior al punto de rocío mediante un margen de seguridad; la igualdad sólo define el mínimo ideal. y se reparte la potencia generada entre el flujo que vuelve hacia el interior y el flujo que se evacua hacia el exterior.

Apartado a).

Antes de la instalación de la pared térmica y de la capa interior adicional de yeso:

$$q'' = \frac{T_i - T_e}{\dfrac{1}{h_i} + \dfrac{L_Y}{k_Y} + \dfrac{L_L}{k_L} + \dfrac{1}{h_e}} = \frac{20 - (-7)}{\dfrac{1}{10} + \dfrac{0{,}02}{0{,}488} + \dfrac{0{,}12}{0{,}930} + \dfrac{1}{25}} = 87{,}1\,\mathrm{W/m^2}.$$

La temperatura superficial interior antes de instalar la pared térmica se denota aquí como $T_{s,i}^{(0)}$, para no confundirla con los nodos T_1,T_2,T_3 del caso con fuente térmica:

$$T_{s,i}^{(0)} = T_i - q''\frac{1}{h_i} = 20 - 87{,}1\frac{1}{10} = 11{,}3\,^\circ\mathrm{C}.$$

Como $T_{s,i}^{(0)} < T_{\text{rocío}}$, habría condensación.

Apartado b).

Para que no haya condensación, en el límite:

$$T_1 = 16\,^\circ\mathrm{C}.$$

El flujo hacia la izquierda de la pared térmica es:

$$q_1'' = \frac{T_i - T_1}{1/h_i} = \frac{20 - 16}{1/10} = 40\,\mathrm{W/m^2}.$$

La temperatura en la cara izquierda de la pared térmica es:

$$T_2 = T_1 - q_1''\frac{L_Y}{k_Y} = 16 - 40\frac{0{,}02}{0{,}488} = 14{,}4\,^\circ\mathrm{C}.$$

El flujo hacia la derecha se expresa como:

$$q_2'' = \frac{T_3 - T_e}{\dfrac{L_Y}{k_Y} + \dfrac{L_L}{k_L} + \dfrac{1}{h_e}} = \frac{T_3 - (-7)}{\dfrac{0{,}02}{0{,}488} + \dfrac{0{,}12}{0{,}930} + \dfrac{1}{25}} = 4{,}762\,(T_3 + 7).$$

Para una pared plana con generación uniforme, las potencias en las caras son: Se define una coordenada s positiva desde el recinto interior hacia el exterior, con origen en el plano medio de la pared térmica. Así, $T_2 = T(s = -L_T/2)$, $T_3 = T(s = +L_T/2)$ y $q'' > 0$ representa flujo en el sentido $+s$.

$$q''_{-L/2} = -q'''\frac{L_T}{2} + \frac{k_T(T_2 - T_3)}{L_T},$$

$$q''_{L/2} = q'''\frac{L_T}{2} + \frac{k_T(T_2 - T_3)}{L_T}.$$

Igualando:

$$-q'''\frac{0{,}005}{2} + \frac{0{,}7(14{,}36 - T_3)}{0{,}005} = 40,$$

$$q'''\frac{0{,}005}{2} + \frac{0{,}7(14{,}36 - T_3)}{0{,}005} = 4{,}762(T_3 + 7).$$

El sistema conduce a:

$$q''' = 11\,868\,\mathrm{W/m^3}, \qquad T_3 = 13{,}9\,^\circ\mathrm{C}.$$

La potencia generada por metro cuadrado de pared es:

$$q''_G = q'''L_T = 11868 \cdot 0{,}005 = 59{,}34\,\mathrm{W/m^2}.$$

Apartado c).

La temperatura superficial exterior se obtiene directamente desde la película convectiva exterior, $T_{s,ext} = T_e + q''_2/h_e$:

$$T_{\mathrm{sup,ext}} = T_e + q''_2\frac{1}{h_e} = -3{,}0\,^\circ\mathrm{C}.$$

No se introduce aquí un salto adicional a través del yeso: la superficie exterior está conectada al ambiente por la convección exterior y el tramo sólido previo ya está incluido en el cálculo de q''_2.

Resultado.

$$\boxed{T_{\mathrm{sup,int}} = 11{,}3\,^\circ\mathrm{C}, \qquad q''_G = 59{,}34\,\mathrm{W/m^2}, \qquad T_{\mathrm{sup,ext}} = -3{,}0\,^\circ\mathrm{C}}$$

La potencia generada es moderada porque sólo hay que elevar la superficie interior hasta el punto de rocío. El balance correcto es $q''_1 + q''_G = q''_2$: una parte de la potencia compensa el flujo que vuelve hacia el interior y el resto se evacua hacia el exterior.

Comprobación final

Con la potencia calculada, la superficie crítica debe coincidir con el valor objetivo y el balance entre flujos a ambos lados debe cerrarse.

2.15.12 Ejercicio resuelto 12. Transistor con cápsula aleteada

Descripción del problema

Para aumentar la potencia máxima que es capaz de evacuar un transistor cilíndrico de 4 mm de diámetro y 6 mm de altura, se le inserta una cápsula de aluminio, $k = 200\,\mathrm{W/(m\,K)}$, constituida por un anillo de 1 mm de espesor sobre el que van adosadas 12 aletas rectas de 10 mm de longitud y 0,7 mm de espesor. En la unión transistor–cápsula existe una resistencia de contacto de valor $1 \times 10^{-3}\,\mathrm{m^2\,K/W}$. El aire ambiente está a 20 °C, proporcionando un coeficiente de convección aproximadamente uniforme sobre toda la superficie de $25\,\mathrm{W/(m^2\,K)}$, con y sin cápsula. La temperatura máxima de la superficie del transistor es de 80 °C. Desprecie la radiación térmica de la cápsula y del transistor, pues no se proporciona emisividad. Supuesto despreciable la potencia evacuada por las bases laterales del transistor y del anillo, calcular la máxima potencia térmica que puede evacuar el transistor desnudo, con las aletas y el rendimiento de la superficie aletada.

Datos.

- $d_1 = 4\,\mathrm{mm}$, $r_1 = 2\,\mathrm{mm}$.
- $d_2 = 6\,\mathrm{mm}$, $r_2 = 3\,\mathrm{mm}$.
- $H = 6\,\mathrm{mm}$.
- $L = 10\,\mathrm{mm}$.
- $e = 0{,}7\,\mathrm{mm}$.
- $N = 12$.
- $k = 200\,\mathrm{W/(m\,K)}$.
- $R_c'' = 1 \times 10^{-3}\,\mathrm{m^2\,K/W}$.
- $T_1 = 80\,^\circ\mathrm{C}$, $T_\infty = 20\,^\circ\mathrm{C}$.
- $h = 25\,\mathrm{W/(m^2\,K)}$.

Se pide.

a) Potencia máxima evacuada sin anillo.

b) Potencia máxima evacuada con aletas.

c) Rendimiento de la superficie aletada.

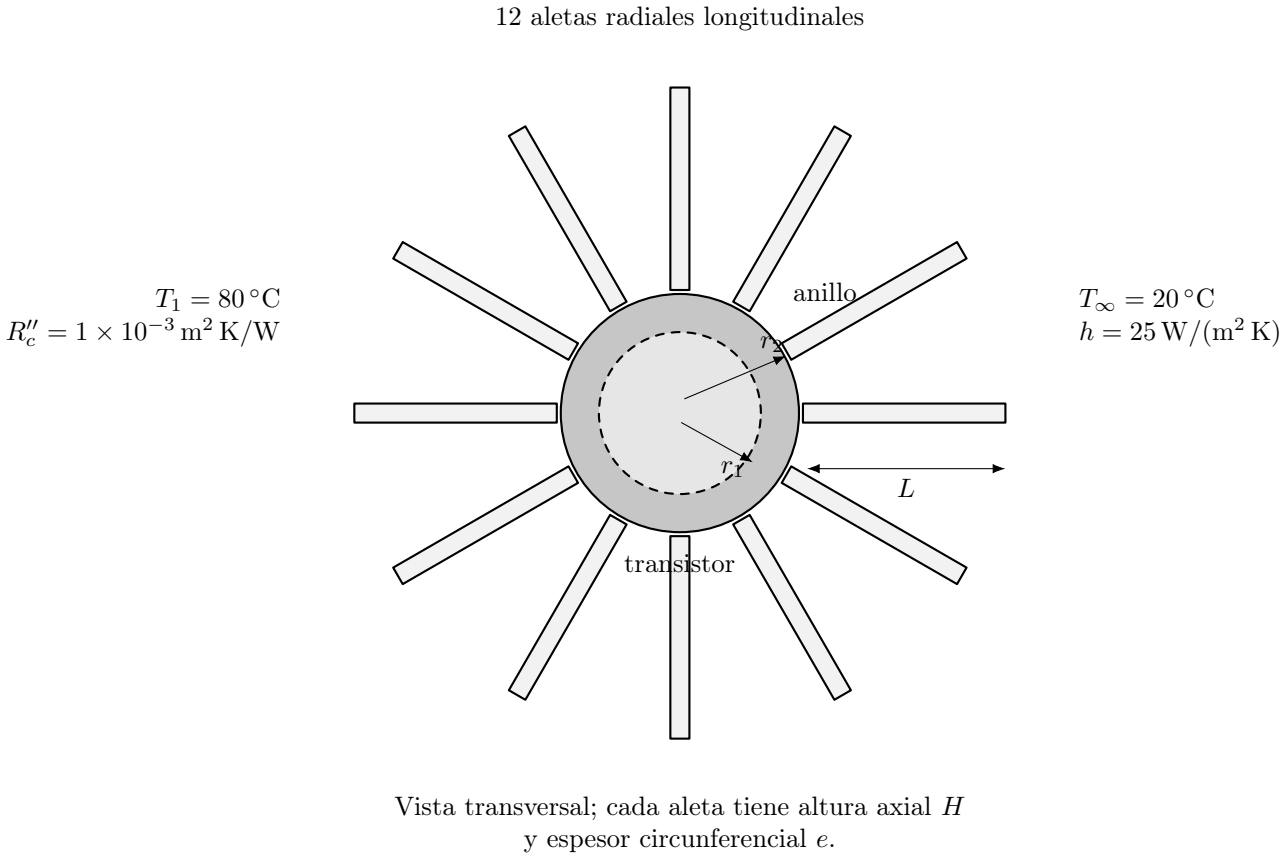
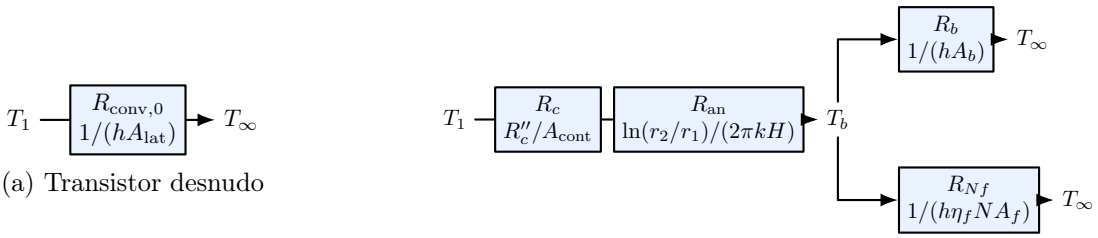


Figura 2.37: Geometría coherente con el modelo de 12 aletas rectas radiales del Ejercicio 12.



(a) Transistor desnudo

(b) Cápsula aleteada

Figura 2.38: Redes equivalentes. En el caso aleteado, T_b es la temperatura de la base exterior después del contacto y del anillo.

Resolución del problema

Antes de calcular

Predicción física. Las aletas aumentarán la disipación, aunque cada aleta real será menos eficaz que una aleta isoterma. La base descubierta también disipará calor.

Modelo esperado. Red de conducción hacia la base y convección desde superficie aleteada, usando eficiencia global.

Simplificaciones y modelo.

El transistor desnudo se resuelve por convección directa desde su superficie lateral. Con cápsula se construye una red térmica: resistencia de contacto, conducción en el anillo y, en paralelo, convección desde la base descubierta y desde las aletas. La eficiencia de aleta corrige que la temperatura no es uniforme a lo largo de cada aleta.

Apartado a): transistor sin aletas.

$$q = h(2\pi r_1 H)(T_1 - T_\infty) = 0{,}113\,\mathrm{W}.$$

Apartado b): transistor con aletas.

Las aletas son convectivas en el extremo, pero se resuelven como adiabáticas mediante longitud corregida.

La resistencia de contacto es:

$$\frac{R_c''}{2\pi r_1 H} = 13{,}263\,\mathrm{K/W}.$$

La resistencia conductiva del anillo es:

$$\frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi k H} = 0{,}0538\,\mathrm{K/W}.$$

El área de base descubierta es:

$$A_b = (2\pi r_2 - Ne)H = 6{,}27 \times 10^{-5}\,\mathrm{m}^2.$$

Su resistencia convectiva es:

$$R_b = \frac{1}{hA_b} = 638\,\mathrm{K/W}.$$

Para cada aleta, la corrección general de punta es

$$L_c = L + \frac{A_c}{P}, \qquad A_c = eH, \quad P = 2(e+H).$$

En una aleta rectangular delgada, $A_c/P \simeq e/2$; con los datos presentes,

$$L_c = L + \frac{eH}{2(e+H)} = 0{,}010\,31\,\mathrm{m}.$$

$$p = 2(e+H) = 0{,}0134\,\mathrm{m}, \qquad A_k = eH = 4{,}20 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}^2.$$

El parámetro de aleta es:

$$m = \sqrt{\frac{hp}{kA_k}} = 19{,}970/\mathrm{m}.$$

Así:

$$mL_c = 0{,}2060, \qquad \eta_f = \frac{\tanh(mL_c)}{mL_c} = 0{,}9861.$$

El área de cada aleta es:

$$A_f = pL + A_k = 1{,}382 \times 10^{-4}\,\mathrm{m}^2.$$

La resistencia equivalente de las N aletas es:

$$R_{Nf} = \frac{1}{hNA_f\eta_f} = 24{,}460\,\mathrm{K/W}.$$

La resistencia total es:

$$R_T = \frac{R_c''}{2\pi r_1 H} + \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi k H} + \left(\frac{1}{R_{Nf}} + \frac{1}{R_b}\right)^{-1} = 36{,}876\,\mathrm{K/W}.$$

Por tanto:

$$q = \frac{T_1 - T_\infty}{R_T} = \frac{80 - 20}{36{,}876} = 1{,}6271\,\mathrm{W}.$$

La temperatura del nodo de base después del contacto y del anillo es

$$T_b = T_1 - q\,(R_c + R_{\mathrm{an}}) = 58{,}331\,^\circ\mathrm{C}.$$

Desde ese nodo, la potencia se reparte en las dos ramas:

$$q_b = hA_b(T_b - T_\infty) = 0{,}0601\,\mathrm{W}, \qquad q_f = NhA_f\eta_f(T_b - T_\infty) = 1{,}5671\,\mathrm{W},$$

por lo que $q_s = q_b + q_f = 1{,}6272\,\mathrm{W}$, salvo redondeo.

Apartado c): rendimiento de la superficie aletada.

$$A_T = A_b + NA_f = 1{,}721 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^2.$$

$$\eta_T = 1 - \frac{NA_f}{A_T}(1 - \eta_f) = 0{,}987.$$

También:

$$\eta_T = \frac{q_s}{hA_T(T_b - T_\infty)} = 0{,}987.$$

Resultado.

$$\boxed{q_{\text{sin aletas}} = 0{,}113\,\mathrm{W}, \qquad q_{\text{con aletas}} = 1{,}627\,\mathrm{W}, \qquad \eta_T = 0{,}987}$$

Las aletas multiplican la disipación por un factor cercano a 14 respecto al transistor desnudo. El rendimiento global de la superficie aleteada, $\eta_T = 0{,}987$, confirma que el área añadida trabaja casi a plena eficacia. Aun así, la resistencia de contacto, $R_c \simeq 13{,}3\,\mathrm{K/W}$, representa más de un tercio de la resistencia total y limita la mejora conseguida por la superficie extendida.

Comprobación final

Las eficiencias deben estar entre 0 y 1; T_b es el nodo posterior al contacto y al anillo, y debe cumplirse $q_s = q_b + q_f$ sin contar áreas dos veces.

2.15.13 Ejercicio resuelto 13. Cilindro de motor con aletas

Descripción del problema

El cilindro del motor de un scooter está fabricado de aleación de aluminio, de conductividad $186\,\mathrm{W/(m\,K)}$ y densidad $2700\,\mathrm{kg/m^3}$, y tiene una altura de 0,15 m y un diámetro exterior de 50 mm. Bajo condiciones de operación típicas, la superficie externa del cilindro está a una temperatura de $T_1 = 227\,^\circ\mathrm{C}$ y se expone al aire ambiental a $27\,^\circ\mathrm{C}$ con un coeficiente de convección de $50\,\mathrm{W/(m^2\,K)}$. Unas aletas anulares están fundidas íntegramente con el cilindro para aumentar la transmisión de calor a los alrededores. Considerar cinco de estas aletas de espesor 6 mm, longitud 20 mm e igualmente espaciadas. Desprecie la radiación térmica exterior; el intercambio superficial se modela únicamente mediante el coeficiente convectivo dado. Calcular la potencia disipada por el cilindro sin aletas, la potencia total con las cinco aletas y el peso total de las cinco aletas.

Datos.

- $r_1 = 0{,}025\,\mathrm{m}$.
- $r_2 = 0{,}045\,\mathrm{m}$.
- $H = 0{,}15\,\mathrm{m}$.
- $t = 6\,\mathrm{mm} = 0{,}006\,\mathrm{m}$.
- $N = 5$.
- $T_1 = 227\,^\circ\mathrm{C}$, $T_\infty = 27\,^\circ\mathrm{C}$.
- $h = 50\,\mathrm{W/(m^2\,K)}$.
- $k = 186\,\mathrm{W/(m\,K)}$.
- $\rho = 2700\,\mathrm{kg/m^3}$.
- $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$.

Se pide.

a) Potencias caloríficas disipadas sin aletas y con aletas.

b) Peso total de las cinco aletas.

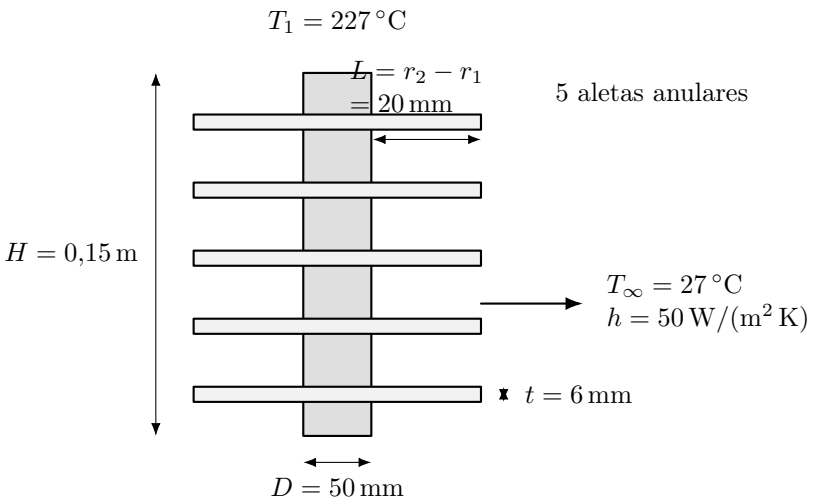
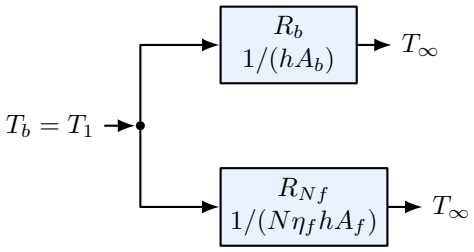


Figura 2.39: Cilindro del scooter con aletas anulares. La longitud L es radial y t es el espesor axial de cada aleta.



La base descubierta y el conjunto de aletas son dos ramas equivalentes entre T_b y T_∞; η_f incorpora la conducción dentro de cada aleta.

Figura 2.40: Red de resistencias de la superficie aleteada del cilindro del Ejercicio 13.

Resolución del problema

Antes de calcular

Predicción física. Las aletas reducirán la temperatura del cilindro para una misma generación o permitirán evacuar más potencia a igual temperatura.

Modelo esperado. Modelo de aletas anulares o longitudinales más convección desde la superficie base.

Simplificaciones y modelo.

Las aletas son anulares y forman parte del cilindro, por lo que no hay resistencia de contacto. Se calcula primero la disipación del cilindro liso y después la de la superficie extendida, combinando el área de base descubierta con el área de las aletas afectada por su eficiencia. Para el extremo convectivo se usa el radio corregido.

Apartado a): sin aletas.

$$q_T = h(2\pi r_1 H)(T_1 - T_\infty) = 50 \cdot 2\pi \cdot 0{,}025 \cdot 0{,}15(227 - 27) = 235{,}6\,\mathrm{W}.$$

Con aletas.

Se usa:

$$q_T = \frac{T_1 - T_\infty}{R_T} = hA_T\eta_T(T_1 - T_\infty),$$

donde:

$$\eta_T = 1 - \frac{NA_f}{A_T}(1 - \eta_f).$$

Las áreas son:

$$A_f = 2\pi(r_2^2 - r_1^2) + 2\pi r_2 t = 0{,}010\,49\,\mathrm{m}^2,$$
$$A_b = 2\pi r_1(H - Nt) = 0{,}018\,85\,\mathrm{m}^2,$$
$$A_T = NA_f + A_b = 0{,}071\,31\,\mathrm{m}^2.$$

La aleta es convectiva en el extremo, pero se resuelve como adiabática con radio corregido:

$$r_{2c} = r_2 + \frac{t}{2} = 0{,}048\,\mathrm{m}.$$

El parámetro de aleta anular es:

$$m = \sqrt{\frac{2h}{kt}} = 9{,}4660/\mathrm{m}.$$

$$mr_1 = 0{,}2367, \qquad mr_{2c} = 0{,}4544.$$

	I_0	I_1	K_0	K_1
$mr_1 = 0{,}2367$	1.0140	0.1192	1.5931	3.9799
$mr_{2c} = 0{,}4544$	–	0.2331	–	1.8689

Tabla 2.15: Valores de funciones de Bessel usados en el Ejercicio 13.

El rendimiento de la aleta es:

$$\eta_f = \frac{2r_1}{m(r_{2c}^2 - r_1^2)} \frac{K_1(mr_1)I_1(mr_{2c}) - I_1(mr_1)K_1(mr_{2c})}{I_0(mr_1)K_1(mr_{2c}) + K_0(mr_1)I_1(mr_{2c})} = 0{,}9786.$$

Entonces:

$$\eta_T = 1 - \frac{NA_f}{A_T}(1 - \eta_f) = 0{,}9842.$$

La potencia con aletas es:

$$q_T = hA_T\eta_T(T_1 - T_\infty) = 701{,}9\,\mathrm{W}.$$

Apartado b): peso de las aletas.

$$W = Mg = \rho V g = \rho\left[N\pi(r_2^2 - r_1^2)t\right] g = 3{,}495\,\mathrm{N}.$$

Resultado.

$$\boxed{q_{\text{sin aletas}} = 235{,}6\,\mathrm{W}, \qquad q_{\text{con aletas}} = 701{,}9\,\mathrm{W}, \qquad W = 3{,}495\,\mathrm{N}}$$

El peso calculado corresponde a una masa $M = W/g \simeq 0{,}356\,\mathrm{kg}$. Las aletas casi triplican la potencia disipada, con una eficiencia elevada porque su longitud corregida no es grande frente a la escala de conducción radial.

Comprobación final

Verifique $0 < \eta_f \leq 1$, que la potencia total supera la de la superficie desnuda y que las áreas usadas son las realmente expuestas.

2.15.14 Ejercicio resuelto 14. Barra de cobre entre paredes

Descripción del problema

Una barra de cobre, conductividad $350\,\mathrm{W/(m\,K)}$, de $60\,\mathrm{mm}$ de diámetro y $1\,\mathrm{m}$ de longitud está unida por sus extremos a sendas paredes cuyas temperaturas pueden considerarse constantes y uniformes en $200\,^\circ\mathrm{C}$ y $100\,^\circ\mathrm{C}$. No existe resistencia de contacto entre la barra y las paredes. La temperatura de la corriente exterior de aire es de $40\,^\circ\mathrm{C}$. Calcular la potencia transmitida por cada pared y al ambiente a través de la barra para los dos valores $h = 41\,\mathrm{W/(m^2\,K)}$ y $h = 10\,\mathrm{W/(m^2\,K)}$.

Datos.

- $k = 350\,\mathrm{W/(m\,K)}$.
- $d = 60\,\mathrm{mm}$.
- $L = 1\,\mathrm{m}$.
- $T_b = 200\,^\circ\mathrm{C}$.
- $T_L = 100\,^\circ\mathrm{C}$.
- $T_\infty = 40\,^\circ\mathrm{C}$.
- $h = 41\,\mathrm{W/(m^2\,K)}$ y $h = 10\,\mathrm{W/(m^2\,K)}$.

Se pide.

a) Potencias para $h = 41\,\mathrm{W/(m^2\,K)}$.

b) Potencias para $h = 10\,\mathrm{W/(m^2\,K)}$.

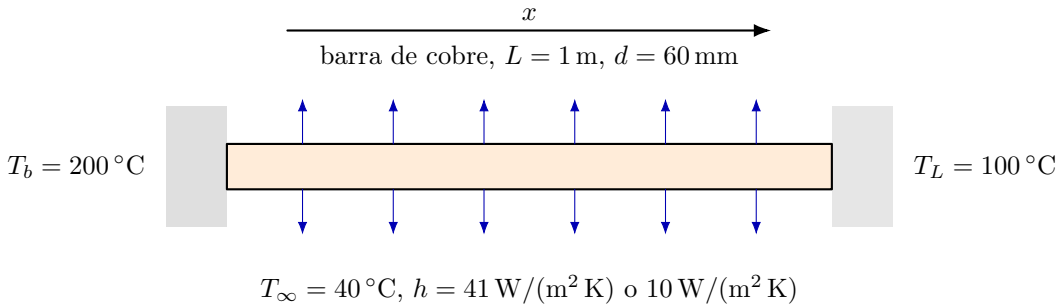


Figura 2.41: Barra entre dos paredes con pérdidas convectivas al ambiente del Ejercicio 14.

Resolución del problema

Antes de calcular

Predicción física. Por la alta conductividad del cobre, el gradiente interno será moderado. El calor irá desde la pared más caliente hacia la más fría.

Modelo esperado. Conducción unidimensional en una barra con condiciones térmicas en sus extremos y, si procede, pérdidas laterales.

Simplificaciones y modelo.

La barra se comporta como una aleta de sección constante, pero con temperatura prescrita en ambos extremos. Por eso se usa la solución hiperbólica con $T(0)$ y $T(L)$ conocidos. El signo de $q(L)$ indica si el calor entra o sale de la pared derecha; el calor cedido al aire se obtiene por balance entre los flujos axiales de los extremos.

El problema se resuelve como una aleta con temperatura prescrita en el extremo, $T_L = 100\,^\circ\mathrm{C}$.

Para una aleta de sección constante:

$$T(x) = T_\infty + \frac{(T_L - T_\infty)\sinh(mx) + (T_b - T_\infty)\sinh[m(L-x)]}{\sinh(mL)}.$$

La potencia conducida en la dirección x es:

$$q(x) = -kA_k\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = -kA_k m\frac{(T_L - T_\infty)\cosh(mx) - (T_b - T_\infty)\cosh[m(L-x)]}{\sinh(mL)}.$$

Además:

$$m = \sqrt{\frac{hp}{kA_k}}, \qquad A_k = \frac{\pi d^2}{4} = 0{,}002\,83\,\mathrm{m}^2, \qquad p = \pi d = 0{,}1885\,\mathrm{m}.$$

Apartado a): $h = 41\,\mathrm{W/(m^2\,K)}$.

$$m = 2{,}795/\mathrm{m}.$$

En la base, $x = 0$:

$$q_{\text{base}} = q(0) = 425{,}4\,\mathrm{W}.$$

En el extremo, $x = L$:

$$q_{\text{extremo}} = q(L) = -112{,}9\,\mathrm{W}.$$

Con el criterio de signos de $q(x)$ positivo en la dirección $+x$, el calor evacuado al ambiente es:

$$q_{\text{ambiente}} = q(0) - q(L) = 425{,}4 - (-112{,}9) = 538{,}3\,\mathrm{W}.$$

Apartado b): $h = 10\,\mathrm{W/(m^2\,K)}$.

$$m = 1{,}380/\mathrm{m}.$$

$$q_{\text{base}} = 204{,}0\,\mathrm{W}, \qquad q_{\text{extremo}} = 24{,}3\,\mathrm{W}.$$

Por tanto:

$$q_{\text{ambiente}} = q(0) - q(L) = 204{,}0 - 24{,}3 = 179{,}7\,\mathrm{W}.$$

Resultado.

$h = 41\,\mathrm{W/(m^2\,K)}$:	$q_{x=0} = 425{,}4\,\mathrm{W}$,	$q_{x=L} = -112{,}9\,\mathrm{W}$,	$q_{\text{amb}} = 538{,}3\,\mathrm{W}$,
$h = 10\,\mathrm{W/(m^2\,K)}$:	$q_{x=0} = 204{,}0\,\mathrm{W}$,	$q_{x=L} = 24{,}3\,\mathrm{W}$,	$q_{\text{amb}} = 179{,}7\,\mathrm{W}$.

El signo de $q(L)$ identifica el sentido de intercambio con la pared derecha. Con $h = 41\,\mathrm{W/(m^2\,K)}$ se obtiene $q(L) < 0$: la pared derecha aporta calor a la barra y esa potencia también acaba disipándose al ambiente. Con $h = 10\,\mathrm{W/(m^2\,K)}$, en cambio, $q(L) > 0$: la barra cede una pequeña potencia a la pared derecha. El balance global se escribe siempre como $q_{amb} = q(0) - q(L)$.

Para $h = 41\,\mathrm{W/(m^2\,K)}$, la solución presenta un mínimo interno de aproximadamente $83{,}98\,^\circ\mathrm{C}$, inferior a la temperatura de la pared fría, porque el aire exterior está a $40\,^\circ\mathrm{C}$. El mínimo se localiza imponiendo $\mathrm{d}T/\mathrm{d}x = 0$; por tanto, no debe suponerse que el perfil es monótono entre las dos paredes.

Comprobación final

La temperatura debe quedar entre las condiciones extremas y, en estacionario sin generación, la potencia que entra debe ser igual a la que sale.

2.15.15 Ejercicio resuelto 15. Congelación de agua mediante una barra aleteada

Descripción del problema

Un recipiente cúbico de 1 m de lado interior está térmicamente aislado por todas sus caras y contiene una mezcla agua–hielo a 0 °C. Una base de la barra se mantiene en contacto perfecto con la mezcla y fija $T_b = 0\,°\mathrm{C}$; desde esa base se extiende al exterior una longitud activa $L = 1\,\mathrm{m}$, de diámetro 0,2 m y conductividad $75\,\mathrm{W/(m\,K)}$, expuesta al ambiente frío. Se pide el tiempo que tardará en convertirse en hielo todo el volumen de agua, sabiendo que el coeficiente de convección y radiación en torno a la barra es de $20\,\mathrm{W/(m^2\,K)}$ y que las temperaturas ambiente y del entorno radiante son ambas $-15\,°\mathrm{C}$. Calor latente de cambio de fase agua–hielo: $334\,\mathrm{kJ/kg}$.

Datos.

- $D = 0{,}2\,\mathrm{m}$.
- $L = 1\,\mathrm{m}$.
- $k = 75\,\mathrm{W/(m\,K)}$.
- $T_b = 0\,°\mathrm{C}$.
- $T_\infty = -15\,°\mathrm{C}$.
- $h = 20\,\mathrm{W/(m^2\,K)}$.
- $H_f = 334\,\mathrm{kJ/kg}$.

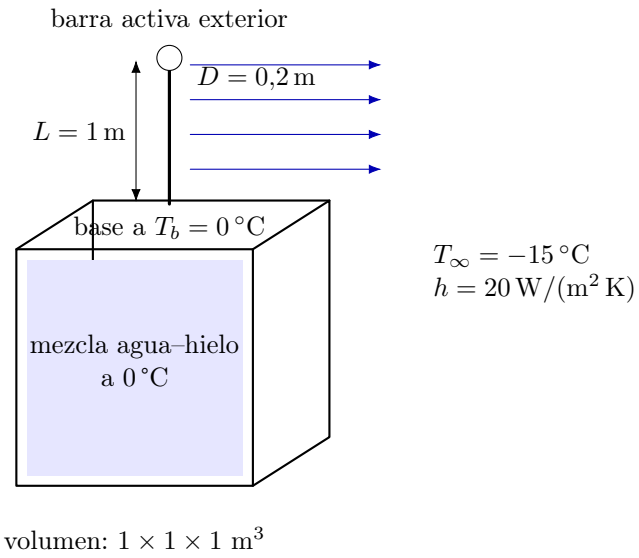
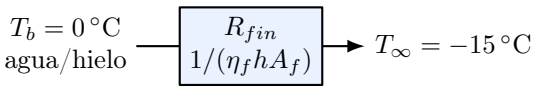


Figura 2.42: Mezcla agua–hielo a 0 °C conectada a una barra cuya longitud activa exterior cede calor al ambiente frío.



La barra se comporta como una aleta de base a temperatura casi constante igual a la de la mezcla agua–hielo.

Figura 2.43: Modelo de resistencia térmica equivalente usado para el Ejercicio 15.

Resolución del problema

Antes de calcular

Predicción física. La mezcla permanece a 0 °C mientras coexistan agua y hielo; la barra extrae calor latente a potencia aproximadamente estacionaria.

Modelo esperado. Aleta estacionaria unida a un foco de cambio de fase y balance global de calor latente.

Simplificaciones y modelo.

La barra actúa como una aleta que extrae calor latente de la mezcla agua–hielo a 0 °C y lo cede al ambiente frío. Una vez estimada la potencia térmica extraída, el tiempo de congelación se obtiene dividiendo la energía latente necesaria para solidificar el volumen de agua entre dicha potencia.

La longitud exterior activa de un metro se trata como una aleta con base a 0 °C y condición convectiva en el extremo, aunque se resuelve como adiabática con longitud corregida:

$$L_c = L + \frac{D}{4} = 1{,}05\,\mathrm{m}.$$

$$m = \sqrt{\frac{hp}{kA_k}} = 2{,}3094/\mathrm{m}.$$

$$mL_c = 2{,}4249.$$

El rendimiento de aleta es:

$$\eta_f = \frac{\tanh(mL_c)}{mL_c} = 0{,}4060.$$

El área de intercambio es:

$$A_f = \pi DL + \frac{\pi D^2}{4} = 0{,}6597\,\mathrm{m}^2.$$

La potencia evacuada por la barra es:

$$q = hA_f(T_b - T_\infty)\eta_f = 80{,}3\,\mathrm{W}.$$

La energía necesaria para congelar el volumen de agua es, tomando $\rho_{agua} \simeq 1000\,\mathrm{kg/m^3}$:

$$M_{agua} = \rho V = 1000\,\mathrm{kg}, \qquad Q = M_{agua}H_f = 1000 \cdot 334\,\mathrm{kJ} = 3{,}34 \times 10^8\,\mathrm{J}.$$

El tiempo de congelación ideal es:

$$t_{\mathrm{ideal}} = \frac{Q}{q} = 4{,}16 \times 10^6\,\mathrm{s} \simeq 48{,}1\,\mathrm{d}.$$

Resultado.

$$\boxed{t_{\mathrm{ideal}} = 4{,}16 \times 10^6\,\mathrm{s} \simeq 48{,}1\,\mathrm{d}}$$

El tiempo ideal de congelación estimado es de unas 48 d. Como comprobación de plausibilidad, el orden de magnitud es ahora coherente con el calor latente de fusión del agua; un cálculo con 2500 kJ/kg, valor propio del orden de la vaporización, daría casi un año y habría sido físicamente sospechoso. El modelo sigue siendo optimista, porque trata la barra como una aleta estacionaria en contacto directo con el agua; en la práctica, al crecer una capa de hielo alrededor de la barra aparecería una resistencia adicional y el tiempo real aumentaría.

Comprobación final

La potencia de la aleta debe ser positiva hacia el ambiente frío y el tiempo debe satisfacer $q\,t_{\mathrm{ideal}} = mH_f$; no se usa un modelo de calentamiento sensible ni de capacidad concentrada del agua.

2.15.16 Ejercicio resuelto 16. Pared cilíndrica con generación y aletas

Descripción del problema

Una pared cilíndrica compuesta presenta generación interna en la pared C y aletas adosadas en la cara más exterior. El conjunto está en un entorno con un fluido a temperatura 120 °C y coeficiente de convección 80 W/(m² K). Los radios de las diferentes paredes son los indicados en la figura y sus conductividades son $k_A = 1\,\mathrm{W/(m\,K)}$, $k_B = 2\,\mathrm{W/(m\,K)}$, $k_C = 10\,\mathrm{W/(m\,K)}$ y $k_D = 20\,\mathrm{W/(m\,K)}$. Las aletas tienen 0,2 m de longitud, 30 mm de diámetro, conductividad $k = 200\,\mathrm{W/(m\,K)}$ y están dispuestas a razón de 48 por metro de longitud de pared.

Datos.

- $r_1 = 0{,}05\,\mathrm{m}$, $r_2 = 0{,}10\,\mathrm{m}$, $r_3 = 0{,}20\,\mathrm{m}$, $r_4 = 0{,}40\,\mathrm{m}$.
- $k_A = 1\,\mathrm{W/(m\,K)}$, $k_B = 2\,\mathrm{W/(m\,K)}$.
- $k_C = 10\,\mathrm{W/(m\,K)}$, $k_D = 20\,\mathrm{W/(m\,K)}$.
- $T_\infty = 120\,^\circ\mathrm{C}$.
- $h = 80\,\mathrm{W/(m^2\,K)}$.
- Aletas: $L_f = 0{,}2\,\mathrm{m}$, $d_f = 30\,\mathrm{mm}$, $k_f = 200\,\mathrm{W/(m\,K)}$.
- $N = 48$ aletas por metro de longitud de pared.

Se pide.

a) Generación interna en la pared C para que la temperatura mínima en esta pared no supere 190 °C.

b) Temperatura máxima.

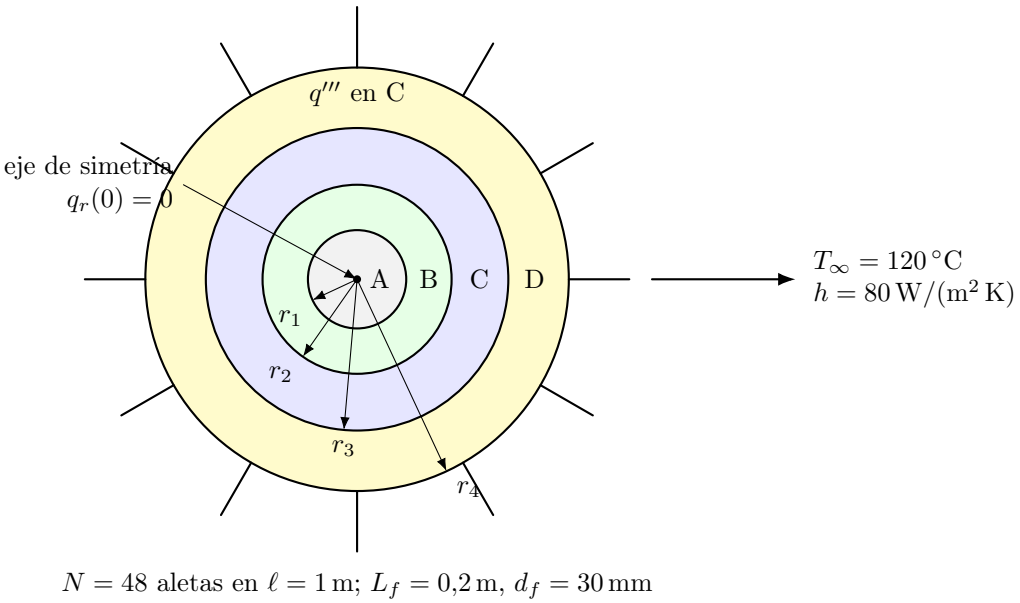


Figura 2.44: Pared cilíndrica maciza y concéntrica. Se indican los cuatro radios y la condición de simetría que conduce a flujo nulo en A y B.

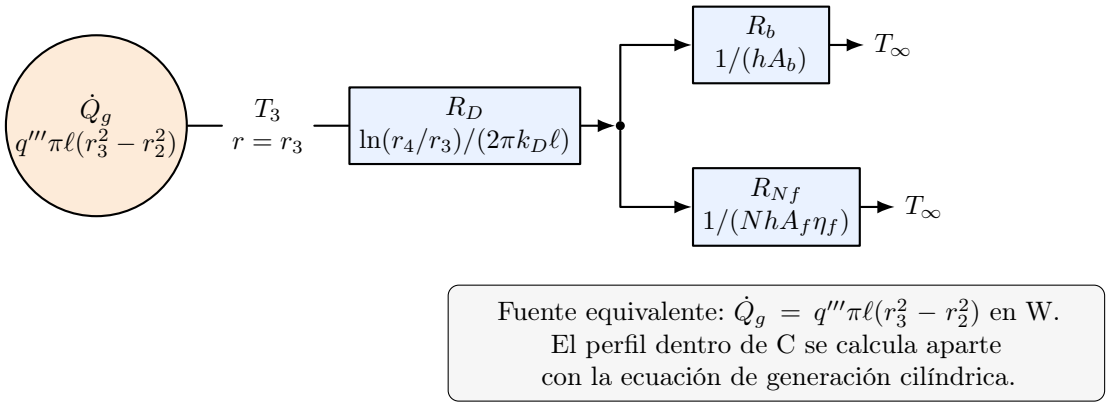


Figura 2.45: Circuito térmico equivalente de la evacuación exterior en el Ejercicio 16.

Resolución del problema

Antes de calcular

Predicción física. La generación produce la temperatura máxima en la región activa; las aletas ofrecen caminos adicionales de salida y reducen ese máximo.

Modelo esperado. Conducción cilíndrica con generación acoplada a una red exterior aleteada.

Simplificaciones y modelo.

La generación se produce sólo en la capa C. Como el flujo hacia el interior es nulo en el límite considerado, toda la potencia generada se evacua hacia el exterior a través de la capa D y de la superficie aleteada. La resistencia exterior combina en paralelo la base descubierta y las aletas.

La potencia generada en la pared C sale hacia el exterior atravesando D y luego la superficie aleteada. El perfil de temperatura en C procede de integrar la EDO radial con generación imponiendo $q(r_2) = 0$ en la cara interior adiabática. Las paredes A y B se mantienen a la misma temperatura que el lado más caliente de C, por lo que no hay flujo de calor a través de A y B:

$$T_0 = T_1 = T_2.$$

Apartado a).

La temperatura mínima en la pared C se toma en $r = r_3$:

$$T_3 = 190\,^\circ\mathrm{C}.$$

Para una longitud de pared $\ell = 1\,\mathrm{m}$, la resistencia conductiva de la pared D es:

$$R_D = \frac{\ln(r_4/r_3)}{2\pi k_D \ell} = 0{,}005\,52\,\mathrm{K/W}.$$

Para las aletas, usando aproximación adiabática con longitud corregida:

$$L_c = L_f + \frac{d_f}{4} = 0{,}2075\,\mathrm{m}.$$

$$m = \sqrt{\frac{hp}{k_f A_k}} = \sqrt{\frac{4h}{k_f d_f}} = 7{,}303/\mathrm{m}.$$

$$mL_c = 1{,}515, \qquad \eta_f = \frac{\tanh(mL_c)}{mL_c} = 0{,}599.$$

El área de cada aleta es:

$$A_f = \pi d_f L_f + \frac{\pi d_f^2}{4} = 0{,}0196\,\mathrm{m}^2.$$

La resistencia equivalente de las aletas es:

$$R_{Nf} = \frac{1}{N h A_f \eta_f} = \frac{1}{80 \cdot 48 \cdot 0{,}0196 \cdot 0{,}599} = 0{,}0222\,\mathrm{K/W}.$$

El área de base descubierta es:

$$A_b = 2\pi r_4 \ell - N\frac{\pi d_f^2}{4} = 2{,}479\,\mathrm{m}^2.$$

La resistencia de base es:

$$R_b = \frac{1}{h A_b} = 0{,}005\,04\,\mathrm{K/W}.$$

La resistencia total entre T_3 y el ambiente es:

$$R_T = R_D + \left(\frac{1}{R_{Nf}} + \frac{1}{R_b}\right)^{-1} = 0{,}009\,63\,\mathrm{K/W}.$$

Por tanto:

$$q = \frac{T_3 - T_\infty}{R_T} = \frac{190 - 120}{0{,}00963} = 7272\,\mathrm{W}.$$

La generación en C satisface:

$$q(r_3) - q(r_2) = \pi \ell q'''(r_3^2 - r_2^2).$$

Como $q(r_2) = 0$ y $q(r_3) = q$:

$$q = \pi \ell q'''(r_3^2 - r_2^2).$$

De aquí:

$$q''' = \frac{q}{\pi \ell (r_3^2 - r_2^2)} = 77\,163\,\mathrm{W/m}^3.$$

Apartado b).

Para esta configuración no existe una resistencia equivalente simple en la pared C, por lo que se integra la ecuación radial de conducción cilíndrica con generación uniforme, imponiendo $q(r_2) = 0$ en el lado adiabático y la temperatura conocida en r_3. De esa integración se obtiene:

$$q(r_2) = \frac{2\pi k_C \ell (T_2 - T_3)}{\ln(r_3/r_2)} - \pi \ell q''' r_2^2 \left[\frac{(r_3/r_2)^2 - 1}{2\ln(r_3/r_2)} - 1\right].$$

Como $q(r_2) = 0$:

$$0 = \frac{2\pi k_C \ell (T_2 - T_3)}{\ln(r_3/r_2)} - \pi \ell q''' r_2^2 \left[\frac{(r_3/r_2)^2 - 1}{2\ln(r_3/r_2)} - 1\right].$$

Resolviendo:

$$T_{\text{máx}} = T_2 = 221{,}1\,^\circ\mathrm{C}.$$

Resultado.

$$\boxed{q''' = 77\,163\,\mathrm{W/m}^3, \qquad T_{\text{máx}} = 221{,}1\,^\circ\mathrm{C}}$$

La temperatura máxima queda en r_2, el lado adiabático de la capa generadora C, mientras que la mínima de C se fija en r_3. Las capas A y B no conducen en el caso límite porque no hay flujo hacia el interior.

Comprobación final

La generación total debe igualar la suma de pérdidas exteriores y la temperatura máxima debe aparecer donde exige la simetría y la generación.

2.15.17 Ejercicio resuelto 17. Enfriamiento transitorio de un cubo de aluminio

Descripción del problema

Una pieza cúbica de aluminio anodizado negro de 1 m de lado se enfría al aire desde una temperatura inicial de 275 °C. Tanto el aire como el entorno que rodea a la pieza se encuentran a la temperatura de 25 °C. La superficie del aluminio se comporta como cuerpo gris difuso con emisividad 0,8. Durante el proceso, la pieza se mantiene apoyada sobre un material que puede considerarse aislante térmico. Los coeficientes de convección medios, para el rango de temperatura de trabajo, son 4,9 $\mathrm{W/(m^2\,K)}$ para las caras laterales y 7,3 $\mathrm{W/(m^2\,K)}$ para la cara superior. Las propiedades medias del aluminio son: densidad 2790 $\mathrm{kg/m^3}$, calor específico 883 $\mathrm{J/(kg\,K)}$ y conductividad 170 $\mathrm{W/(m\,K)}$.

Datos.

- $L = 1\,\mathrm{m}$.
- $T_0 = 275\,^\circ\mathrm{C}$.
- $T_\infty = T_r = 25\,^\circ\mathrm{C}$.
- $\varepsilon = 0{,}8$.
- $h_1 = 4{,}9\,\mathrm{W/(m^2\,K)}$, caras laterales.
- $h_2 = 7{,}3\,\mathrm{W/(m^2\,K)}$, cara superior.
- $\rho = 2790\,\mathrm{kg/m^3}$.
- $c_e = 883\,\mathrm{J/(kg\,K)}$.
- $k = 170\,\mathrm{W/(m\,K)}$.

Se pide.

a) Constante de tiempo del proceso de enfriamiento.

b) Tiempo necesario y temperatura final para los cuales $T - T_\infty = 0{,}01(T_0 - T_\infty)$.

c) Energía térmica evacuada hasta $T - T_\infty = 0{,}01(T_0 - T_\infty)$ y hasta la temperatura final de equilibrio.

d) Comprobar si el modelo de capacidad concentrada sigue siendo válido e indicar qué método debería utilizarse si deja de serlo cuando el coeficiente de convección lateral medio vale 95 $\mathrm{W/(m^2\,K)}$ y el de la cara superior 97 $\mathrm{W/(m^2\,K)}$. No se piden tiempos ni energías con la ecuación concentrada cuando $Bi > 0{,}1$.

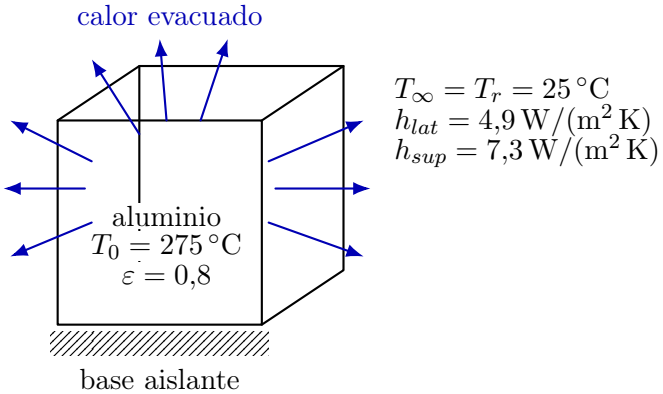


Figura 2.46: Cubo de aluminio enfriándose por convección y radiación en el Ejercicio 17.

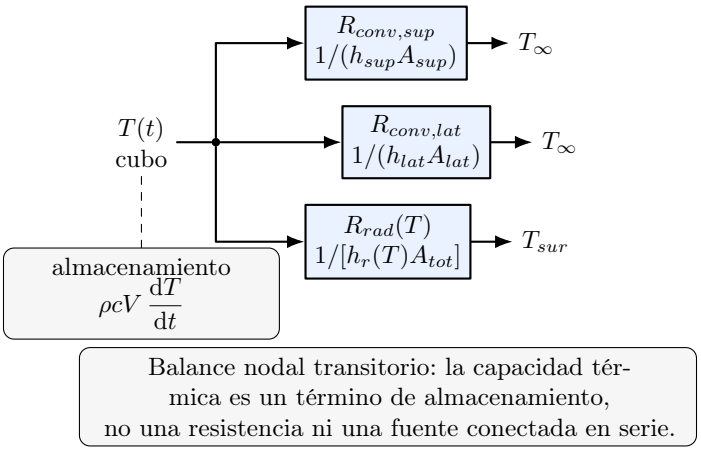


Figura 2.47: Balance nodal y ramas externas del modelo concentrado del Ejercicio 17.

Resolución del problema

Antes de calcular

Predicción física. Si Bi es pequeño, el cubo se enfriará casi uniformemente y su temperatura se acercará de forma exponencial a la del ambiente.

Modelo esperado. Capacidad concentrada, previa comprobación de Bi, con convección en toda el área expuesta.

Simplificaciones y modelo.

Antes de usar el modelo de capacidad concentrada se verifica el número de Biot sobre las cinco caras activas, ya que la base está aislada. La validez se comprueba con el mayor coeficiente superficial del intervalo: $h_{\text{máx}} = \bar{h}_c + h_r(T_0)$, porque el coeficiente radiativo secante es máximo al inicio. El coeficiente medio $\bar{h} = \bar{h}_c + \bar{h}_r$ se reserva para la constante de tiempo linealizada. En el primer caso $\text{Bi} < 0{,}1$, por lo que la temperatura del cubo puede considerarse uniforme y el enfriamiento puede aproximarse como exponencial. Esta exponencialidad es aproximada, porque la radiación real es no lineal en T^4. En el segundo caso el aumento de h hace que $\text{Bi} > 0{,}1$, de modo que ya no es válido el modelo de resistencia interna despreciable.

Apartado a).

El coeficiente convectivo medio se obtiene de:

$$q_{\text{conv}} = \sum_i h_i A_i (T - T_\infty) = \bar{h}_c A_T (T - T_\infty),$$

por tanto:

$$\bar{h}_c = \frac{\sum_i h_i A_i}{A_T} = \frac{4{,}9(4L^2) + 7{,}3(L^2)}{5L^2} = 5{,}38\,\text{W/(m}^2\,\text{K)}.$$

El coeficiente radiativo medio linealizado es:

$$\bar{h}_r = \varepsilon\sigma(\bar{T}^2 + T_r^2)(\bar{T} + T_r).$$

Con:

$$\bar{T} = \frac{T_0 + T_f}{2} = \frac{275 + 25}{2} = 150\,^\circ\text{C} = 423\,\text{K},$$

se obtiene:

$$\bar{h}_r = 0{,}8 \cdot 5{,}67 \cdot 10^{-8}(423^2 + 298^2)(423 + 298) = 8{,}76\,\text{W/(m}^2\,\text{K)}.$$

Por tanto:

$$\bar{h} = \bar{h}_c + \bar{h}_r = 14{,}14\,\text{W/(m}^2\,\text{K)}.$$

Para la comprobación de validez se evalúa la radiación en la temperatura inicial:

$$h_{r,\,\text{máx}} = \varepsilon\sigma(T_0^2 + T_r^2)(T_0 + T_r) = 14{,}95\,\text{W/(m}^2\,\text{K)}, \qquad h_{\text{máx}} = \bar{h}_c + h_{r,\,\text{máx}} = 20{,}33\,\text{W/(m}^2\,\text{K)}.$$

El número de Biot de control es:

$$\text{Bi}_{\text{máx}} = \frac{h_{\text{máx}} L_c}{k} = \frac{20{,}33 \cdot 0{,}2}{170} = 0{,}024 < 0{,}1,$$

donde:

$$L_c = \frac{V}{A} = \frac{L^3}{5L^2} = 0{,}2\,\text{m}.$$

Por tanto, es aplicable el modelo de resistencia interna despreciable:

$$t_c = \frac{\rho V c_e}{\bar{h} A} = \frac{2790 \cdot 1^3 \cdot 883}{14{,}14 \cdot 5} = 9\,\text{h}\,41\,\text{min}.$$

Apartado b).

$$\frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \exp\left(-\frac{\bar{h} A}{\rho V c_e} t\right) = \exp\left(-\frac{t}{t_c}\right) = 0{,}01.$$

Por tanto:

$$t_{0{,}01} = -t_c \ln(0{,}01) = 44\,\text{h}\,35\,\text{min}.$$

La temperatura correspondiente es:

$$T_{0{,}01} = T_\infty + 0{,}01(T_0 - T_\infty) = 25 + 0{,}01(275 - 25) = 27{,}5\,^\circ\text{C}.$$

Apartado c).

En general:

$$Q = \int q\,\text{d}t.$$

Pero, como Bi $< 0{,}1$, la temperatura dentro del cuerpo es uniforme en todo momento y:

$$Q = m c_e \Delta T.$$

Hasta $T_{0{,}01}$:

$$Q_{0{,}01} = \rho V c_e (T_0 - T_{0{,}01}) = 2790 \cdot 1^3 \cdot 883(275 - 27{,}5) = 609{,}7\,\text{MJ}.$$

Hasta el equilibrio final:

$$Q_{\text{total}} = \rho V c_e (T_0 - T_f) = 2790 \cdot 1^3 \cdot 883(275 - 25) = 615{,}9\,\text{MJ}.$$

Apartado d).

Si:

$$h_1 = 95\,\text{W/(m}^2\,\text{K)}, \qquad h_2 = 97\,\text{W/(m}^2\,\text{K)},$$

entonces:

$$\bar{h}_c = \frac{\sum_i h_i A_i}{A_T} = 95{,}4\,\text{W/(m}^2\,\text{K)}.$$

El coeficiente radiativo medio se mantiene:

$$\bar{h}_r = 8{,}76\,\mathrm{W/(m^2\,K)}.$$

Por tanto:

$$\bar{h} = \bar{h}_c + \bar{h}_r = 104{,}2\,\mathrm{W/(m^2\,K)}.$$

Para el control de validez se conserva $h_{r,\,\mathrm{máx}} = 14{,}95\,\mathrm{W/(m^2\,K)}$ y se usa

$$h_{\mathrm{máx}} = \bar{h}_c + h_{r,\,\mathrm{máx}} = 110{,}35\,\mathrm{W/(m^2\,K)}.$$

Por tanto:

$$\mathrm{Bi}_{\mathrm{máx}} = \frac{h_{\mathrm{máx}} L_c}{k} = \frac{110{,}35 \cdot 0{,}2}{170} = 0{,}130 > 0{,}1.$$

No es aplicable el modelo de resistencia interna despreciable. Por tanto, no se calculan en este apartado una constante de tiempo, tiempos ni energías mediante la ecuación exponencial. Para resolver el segundo caso debe utilizarse un modelo transitorio con gradientes internos; para un cubo, una aproximación por producto de soluciones unidimensionales o un método numérico tridimensional es más coherente que fingir una solución concentrada.

Resultado.

$$\boxed{t_c = 9\,\mathrm{h}\,41\,\mathrm{min}, \qquad t_{0{,}01} = 44\,\mathrm{h}\,35\,\mathrm{min}, \qquad T_{0{,}01} = 27{,}5\,^\circ\mathrm{C}}$$

$$\boxed{Q_{0{,}01} = 609{,}7\,\mathrm{MJ}, \qquad Q_{\mathrm{total}} = 615{,}9\,\mathrm{MJ}, \qquad \text{para el caso d), } \mathrm{Bi}_{\mathrm{máx}} = 0{,}130 > 0{,}1}$$

La energía cedida al alcanzar el 1 % de la diferencia inicial ya es casi la energía total posible, lo que confirma que el proceso está prácticamente terminado. La constante de tiempo obtenida debe interpretarse como una aproximación media, porque la radiación se ha linealizado y su contribución domina sobre la convección en el intervalo térmico considerado.

Comprobación final

Compruebe $Bi \leq 0{,}1$, ausencia de sobrepaso de la temperatura ambiente y límites correctos en $t = 0$ y $t \to \infty$.

2.15.18 Ejercicio resuelto 18. Radiador de una estación espacial

Descripción del problema

A medida que las estaciones espaciales crecen de tamaño aumenta el consumo de energía eléctrica y, para evitar que las temperaturas de los compartimientos interiores excedan cierto valor límite, es necesario transmitir la energía disipada al espacio, lo cual sólo puede llevarse a cabo por radiación. El Radiador de Gotas Líquidas es una solución a este problema, donde el calor se transmite a un aceite para aplicaciones al vacío, que posteriormente se inyecta al espacio en forma de pequeñas gotas esféricas. A continuación, las gotas se recogen en un colector tras haber recorrido una distancia determinada a lo largo de la cual se enfrían al radiar su energía térmica al espacio, que en primera aproximación se puede considerar a una temperatura equivalente de 0 K. A partir de aquí se inicia de nuevo el ciclo de refrigeración. Se idealizan gotas aisladas entre sí, factor de forma unidad hacia un fondo negro uniforme, ausencia de irradiaciones adicionales, propiedades constantes y ausencia de evaporación o cambio de fase. Sabiendo que las gotas presentan una emisividad de 0,95, 0,5 mm de diámetro, y que se inyectan al espacio a una temperatura de 227 °C y velocidad de 0,1 m/s. Para el aceite se toman $\rho = 800\,\mathrm{kg/m^3}$, $c = 500\,\mathrm{J/(kg\,K)}$ y $k = 20\,\mathrm{W/(m\,K)}$. Calcular la longitud que deben recorrer las gotas para que su temperatura descienda hasta 27 °C, repetir para una temperatura del espacio de 3 K, y calcular la energía evacuada por una gota.

Datos.

- $\varepsilon = 0{,}95$.
- $d = 0{,}5\,\mathrm{mm}$.
- $T_0 = 227\,^\circ\mathrm{C} = 500\,\mathrm{K}$.
- $T_f = 27\,^\circ\mathrm{C} = 300\,\mathrm{K}$.
- $v = 0{,}1\,\mathrm{m/s}$.
- $\rho = 800\,\mathrm{kg/m^3}$.
- $c = 500\,\mathrm{J/(kg\,K)}$.
- $k = 20\,\mathrm{W/(m\,K)}$.

Se pide.

a) Longitud para $T_e = 0\,\mathrm{K}$.

b) Longitud para $T_e = 3\,\mathrm{K}$.

c) Energía evacuada por una gota.

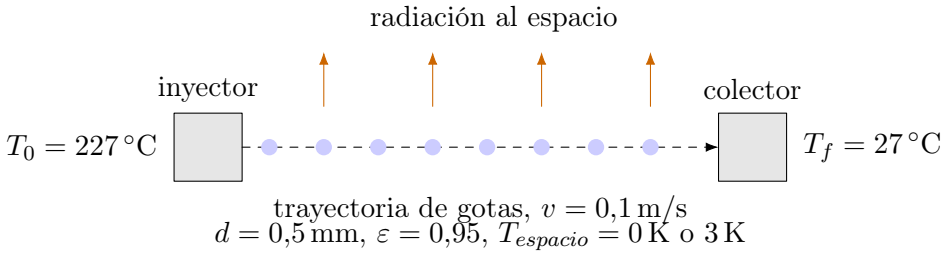


Figura 2.48: Radiador de gotas líquidas del Ejercicio 18.

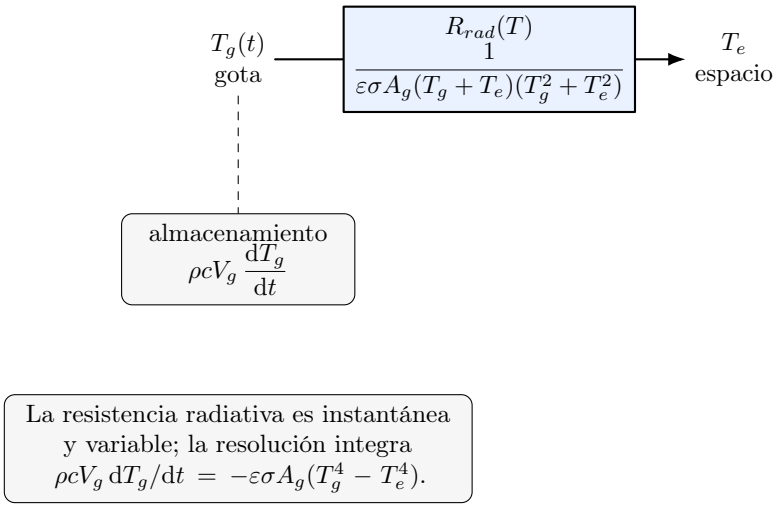


Figura 2.49: Balance nodal del enfriamiento radiativo no lineal de una gota en el Ejercicio 18.

Resolución del problema

Antes de calcular

Predicción física. En el espacio, el radiador debe emitir exactamente la potencia que recibe. Más área o mayor emisividad permiten trabajar a menor temperatura.

Modelo esperado. Equilibrio radiativo estacionario con absorción y emisión, sin convección.

Simplificaciones y modelo.

La gota es muy pequeña, por lo que el número de Biot radiativo es despreciable y su temperatura se considera uniforme. El enfriamiento se produce sólo por radiación, lo que conduce al balance $\rho V c\,\mathrm{d}T/\mathrm{d}t = -\varepsilon\sigma A_r(T^4 - T_e^4)$ y a una ecuación diferencial no lineal en T^4. Para $T_e = 3\,\mathrm{K}$ el resultado prácticamente coincide con el de $T_e = 0\,\mathrm{K}$ porque T_e^4 es despreciable frente a T^4 de la gota entre $300\,\mathrm{K}$ y $500\,\mathrm{K}$.

Corresponde a un caso de enfriamiento radiante. Se comprueba si puede resolverse mediante el modelo de resistencia interna despreciable.

Apartado a): $T_e = 0\,\mathrm{K}$.

La longitud característica de una esfera es:

$$L_c = \frac{V}{A} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{4\pi R^2} = \frac{R}{3} = \frac{d}{6} = 8{,}33 \times 10^{-5}\,\mathrm{m}.$$

Con:

$$\bar{T} = \frac{T_0 + T_f}{2} = 400\,\mathrm{K},$$

el coeficiente radiativo linealizado es:

$$h = h_r = \varepsilon\sigma(\bar{T}^2 + T_e^2)(\bar{T} + T_e) = 3{,}45\,\mathrm{W/(m^2\,K)}.$$

El número de Biot es:

$$\mathrm{Bi} = \frac{hL_c}{k} = 1{,}44 \cdot 10^{-5} < 0{,}1.$$

Por tanto, es aplicable el modelo de resistencia interna despreciable.

Para una temperatura de fondo cualquiera, el balance de energía de una gota de temperatura uniforme es: variación de energía interna igual a potencia radiada neta,

$$\rho V c \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -\varepsilon\sigma A_r \left(T^4 - T_e^4\right).$$

Para $T_e = 0\,\mathrm{K}$ se reduce a

$$\rho V c \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -\varepsilon\sigma A_r T^4.$$

La integración proporciona:

$$t = \left(\frac{1}{T_f^3} - \frac{1}{T_0^3}\right)\frac{\rho V c}{3\varepsilon\sigma A_r} = 5{,}99\,\mathrm{s}.$$

La longitud recorrida es:

$$L = vt = 0{,}1 \cdot 5{,}99 = 0{,}599\,\mathrm{m}.$$

Apartado b): $T_e = 3\,\mathrm{K}$.

$$\bar{T} = 400\,\mathrm{K}, \qquad h_r = 3{,}47\,\mathrm{W/(m^2\,K)}.$$

$$\mathrm{Bi} = 1{,}45 \cdot 10^{-5} < 0{,}1.$$

La solución integrada para $T_e \neq 0$ es:

$$t = -\frac{\rho V c}{4\varepsilon A_r \sigma T_e^3}\left\{\ln\left(\frac{T_f - T_e}{T_f + T_e}\right) - \ln\left(\frac{T_0 - T_e}{T_0 + T_e}\right) - 2\left[\arctan\left(\frac{T_f}{T_e}\right) - \arctan\left(\frac{T_0}{T_e}\right)\right]\right\}.$$

Sustituyendo:

$$t = 5{,}99\,\mathrm{s}.$$

Por tanto:

$$L = vt = 0{,}599\,\mathrm{m}.$$

Apartado c): energía evacuada.

$$Q = mc(T_0 - T_f) = \left(\rho\frac{4}{3}\pi R^3\right)c(T_0 - T_f) = 5{,}2\,\mathrm{mJ}.$$

Resultado.

$$\boxed{L_{T_e=0\,\mathrm{K}} = 0{,}599\,\mathrm{m}, \qquad L_{T_e=3\,\mathrm{K}} = 0{,}599\,\mathrm{m}, \qquad Q = 5{,}2\,\mathrm{mJ}}$$

La longitud de vuelo necesaria es de sólo unas décimas de metro para una gota individual; que el resultado sea idéntico para 0 K y 3 K confirma que la radiación de fondo del espacio es despreciable frente a la emisión de la gota. La energía evacuada por cada gota es muy pequeña, de modo que un radiador real necesita un caudal enorme de gotas en paralelo.

Comprobación final

La potencia emitida neta debe igualar la carga térmica y todas las temperaturas usadas en términos de cuarta potencia deben estar en kelvin.

2.15.19 Ejercicio resuelto 19. Congelación de una tubería enterrada

Descripción del problema

En zonas donde la temperatura del aire permanece por debajo de 0 °C durante períodos largos, hay que prestar atención a la posible congelación del agua en tubos subterráneos. Sea un lugar cubierto de nieve a −8 °C durante un período de 60 d, cuyas propiedades medias del suelo son $k = 0{,}35\,\mathrm{W/(m\,K)}$ y $\alpha = 0{,}15 \times 10^{-6}\,\mathrm{m^2/s}$. Supuesta una temperatura inicial y uniforme del suelo de 7 °C, calcular la profundidad mínima de soterramiento de una tubería para evitar la congelación del agua en su interior.

Datos.

- $T_s = -8\,^\circ\mathrm{C}$.
- $T_0 = 7\,^\circ\mathrm{C}$.
- $T(H,t) = 0\,^\circ\mathrm{C}$.
- $t = 60\,\mathrm{d} = 5\,184\,000\,\mathrm{s}$.
- $k = 0{,}35\,\mathrm{W/(m\,K)}$.
- $\alpha = 0{,}15 \times 10^{-6}\,\mathrm{m^2/s}$.

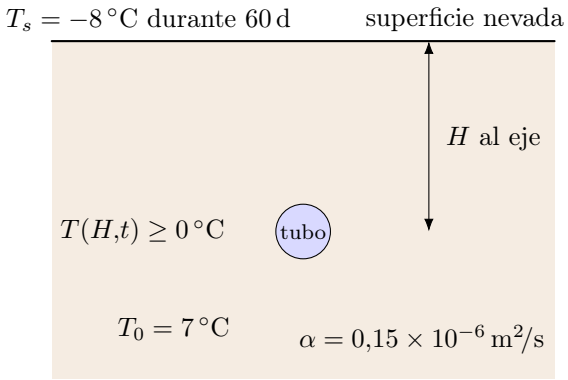


Figura 2.50: Modelo de suelo semiinfinito con tubería enterrada del Ejercicio 19.

Resolución del problema

Antes de calcular

Predicción física. El enfriamiento penetra gradualmente en el terreno; la tubería no puede responder instantáneamente a la temperatura superficial.

Modelo esperado. Conducción transitoria en medio semiinfinito; compruebe la escala temporal y geométrica antes de elegir el modelo.

Simplificaciones y modelo.

El suelo se modela como un sólido semiinfinito sometido a un cambio brusco de temperatura superficial. La profundidad mínima se obtiene imponiendo que, al cabo de 60 d, la temperatura en la posición de la tubería no baje de 0 °C.

Para el suelo se considera el modelo de sólido semiinfinito con cambio brusco de temperatura superficial:

$$\frac{T(x,t) - T_0}{T_s - T_0} = \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right).$$

Sustituyendo la condición límite de congelación:

$$\frac{0-7}{-8-7} = 0{,}4667 = \operatorname{erfc}\left(\frac{H}{2\sqrt{\alpha t}}\right).$$

De la tabla de la función error complementaria:

$$0{,}4667 = \operatorname{erfc}(\eta) \quad \Rightarrow \quad \eta \simeq 0{,}515.$$

Por tanto:

$$\eta = \frac{H}{2\sqrt{\alpha t}},$$

y:

$$H = 2\eta\sqrt{\alpha t} = 2(0{,}515)\sqrt{0{,}15 \cdot 10^{-6} \cdot 5184000} = 0{,}91\,\text{m}.$$

Resultado.

$$\boxed{H \simeq 0{,}91\,\text{m}}$$

La interpretación es directa: a profundidades de aproximadamente 0,91 m o mayores, el frente térmico asociado a los 60 d de nieve a $-8\,^{\circ}\text{C}$ no alcanza la temperatura de congelación en la tubería.

Comprobación final

La profundidad de penetración debe ser compatible con la hipótesis elegida y el tiempo calculado debe crecer con el cuadrado de la distancia característica.

2.15.20 Ejercicio resuelto 20. Muro rociado con agua fría

Descripción del problema

Un muro de hormigón, $\rho = 2100\,\mathrm{kg/m^3}$, $k = 1{,}4\,\mathrm{W/(m\,K)}$ y $c = 880\,\mathrm{J/(kg\,K)}$, de 0,8 m de espesor a 127 °C, es rociado con una gran cantidad de agua a 27 °C. Se idealiza que el rociado mantiene $T(0,t) = 27\,^\circ\mathrm{C}$, equivalente al límite $h \to \infty$. Se pide calcular las temperaturas en un punto situado a 5 cm de la superficie y en la cara posterior en el tiempo asociado al umbral docente $Fo_L = 0{,}05$ para la aproximación semiinfinita, así como la profundidad en la que la temperatura es de 85 °C para el tiempo anterior. La frontera es de temperatura impuesta; no se usa un Biot convectivo para seleccionar el modelo. La aproximación semiinfinita se evalúa mediante penetración térmica o Fo_L, adoptando 0,05 sólo como tolerancia docente.

Datos.

- $\rho = 2100\,\mathrm{kg/m^3}$.
- $k = 1{,}4\,\mathrm{W/(m\,K)}$.
- $c = 880\,\mathrm{J/(kg\,K)}$.
- $e = 0{,}8\,\mathrm{m}$.
- $T_0 = 127\,^\circ\mathrm{C}$.
- $T_s = T_\infty = 27\,^\circ\mathrm{C}$.

Se pide.

a) $T(x = 5\,\mathrm{cm}, t_{\mathrm{máx}})$ y $T(x = e, t_{\mathrm{máx}})$.

b) Profundidad donde $T = 85\,^\circ\mathrm{C}$ para $t = t_{\mathrm{máx}}$.

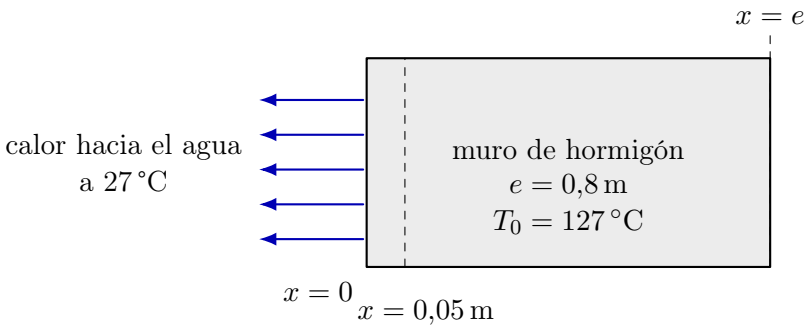


Figura 2.51: Muro de hormigón rociado con agua del Ejercicio 20.

Resolución del problema

Antes de calcular

Predicción física. El rociado enfría primero la superficie y el frente térmico avanza hacia el interior. El centro permanece inicialmente próximo a su temperatura inicial.

Modelo esperado. Sólido semiinfinito con temperatura superficial impuesta, mientras la penetración sea pequeña frente al espesor.

Simplificaciones y modelo.

El chorro abundante de agua permite aproximar la superficie rociada como una superficie a temperatura impuesta. Se calcula primero el tiempo máximo para que el muro pueda tratarse como sólido semiinfinito y, con ese tiempo, se evalúa la solución con función error complementaria en distintas profundidades.

La difusividad térmica es:

$$\alpha = \frac{k}{\rho c} = \frac{1{,}4}{2100 \cdot 880} = 7{,}58 \times 10^{-7}\,\mathrm{m^2/s}.$$

La respuesta normalizada de la cara opuesta es $5{,}34 \times 10^{-4}$; $Fo_L = 0{,}05$ es un umbral docente de influencia detectable, no un límite estricto.

Como $T(0,t)$ está impuesta, no se calcula Bi. La validez se comprueba mediante Fo_L y la respuesta térmica en la cara opuesta.

El modelo de sólido semiinfinito es aplicable si:

$$\mathrm{Fo} = \frac{\alpha t}{e^2} < 0{,}05.$$

El tiempo máximo de aplicación es:

$$\mathrm{Fo}_{\mathrm{máx}} = \frac{\alpha t_{\mathrm{máx}}}{e^2} = 0{,}05,$$

por lo que:

$$t_{\mathrm{máx}} = \frac{0{,}05 e^2}{\alpha} = 42\,240\,\mathrm{s} = 11{,}7\,\mathrm{h}.$$

Por tratarse de un chorro abundante de agua, tiene lugar un cambio brusco de temperatura superficial:

$$T_s = 27\,^\circ\mathrm{C}.$$

La solución de sólido semiinfinito es:

$$\frac{T(x,t) - T_0}{T_s - T_0} = \mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right).$$

Apartado a.1): temperatura a 5 cm.

$$\eta = \left.\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right|_{x=0{,}05\,\mathrm{m},\, t=t_{\mathrm{máx}}} = 0{,}13975.$$

De tablas:

$$\mathrm{erfc}(\eta) = 0{,}8433.$$

Por tanto:

$$0{,}8433 = \frac{T - 127}{27 - 127},$$

y:

$$T = 42{,}7\,^\circ\mathrm{C}.$$

Apartado a.2): temperatura en la cara posterior.

$$\eta = \frac{e}{2\sqrt{\alpha t_{\mathrm{máx}}}} = 2{,}236.$$

De tablas:

$$\mathrm{erfc}(\eta) = 0{,}001566.$$

Así:

$$0{,}001566 = \frac{T - 127}{27 - 127},$$

y:

$$T = 126{,}8\,^{\circ}\mathrm{C}.$$

Apartado b).

Para $T = 85\,^{\circ}\mathrm{C}$:

$$\operatorname{erfc}(\eta) = \frac{T - T_0}{T_s - T_0} = \frac{85 - 127}{27 - 127} = 0{,}420.$$

De tablas:

$$\eta = 0{,}570.$$

Por tanto:

$$x = 2\eta\sqrt{\alpha t_{\text{máx}}} = 0{,}204\,\mathrm{m}.$$

Resultado.

$$\boxed{\begin{array}{cc} t_{Fo=0{,}05} = 11{,}7\,\mathrm{h}, & T(x = 5\,\mathrm{cm}) = 42{,}7\,^{\circ}\mathrm{C}, \\ T(x = e) = 126{,}8\,^{\circ}\mathrm{C}, & x(T = 85\,^{\circ}\mathrm{C}) = 0{,}204\,\mathrm{m}. \end{array}}$$

La cara posterior permanece prácticamente a la temperatura inicial, $T(e) = 126{,}8\,^{\circ}\mathrm{C} \approx T_0$, lo que confirma a posteriori que la hipótesis de sólido semiinfinito es coherente para $t_{\text{máx}}$.

Comprobación final

Compruebe que la profundidad térmica al tiempo calculado es menor que el espesor disponible y que la temperatura es monótona con la profundidad.

2.15.21 Ejercicio resuelto 21. Sólido semiinfinito con radiación solar

Descripción del problema

Un bloque grueso de madera, $k = 1{,}26\,\mathrm{W/(m\,K)}$ y $\alpha = 1{,}1 \times 10^{-5}\,\mathrm{m^2/s}$, a $20\,^\circ\mathrm{C}$, es expuesto a un flujo superficial neto absorbido constante $q_s'' = 1250\,\mathrm{W/m^2}$. Al estar ya especificado el flujo neto que entra en el sólido, no intervienen α_s ni ε; serían necesarias si se proporcionase irradiancia solar y hubiera que construir el balance radiativo. Calcular la temperatura de la superficie expuesta del bloque tras 20 min, repetir si el bloque fuese de aluminio, $k = 237\,\mathrm{W/(m\,K)}$ y $\alpha = 9{,}71 \times 10^{-5}\,\mathrm{m^2/s}$, y calcular los espesores mínimos de las paredes que hacen posible el comportamiento como sólido semiinfinito.

Datos.

- Madera: $k = 1{,}26\,\mathrm{W/(m\,K)}$, $\alpha = 1{,}1 \times 10^{-5}\,\mathrm{m^2/s}$.
- Aluminio: $k = 237\,\mathrm{W/(m\,K)}$, $\alpha = 9{,}71 \times 10^{-5}\,\mathrm{m^2/s}$.
-
- $q_s'' = 1250\,\mathrm{W/m^2}$ se interpreta como flujo neto absorbido.
- $T_0 = 20\,^\circ\mathrm{C}$.
- $q_s'' = 1250\,\mathrm{W/m^2}$.
- $t = 20\,\mathrm{min}$.

Se pide.

a) Temperatura superficial para el bloque de madera.

b) Temperatura superficial para el bloque de aluminio.

c) Espesores mínimos para comportamiento como sólido semiinfinito.

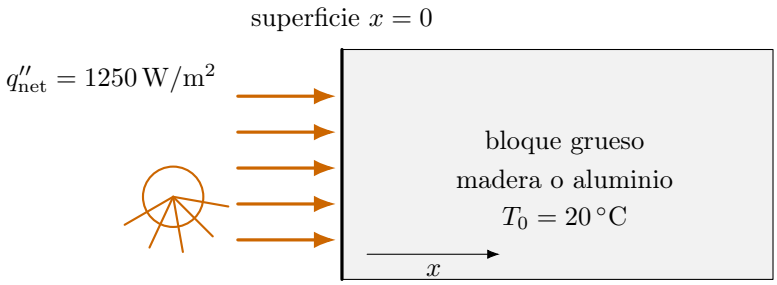


Figura 2.52: Sólido semiinfinito sometido a un flujo superficial neto constante en el Ejercicio 21.

Resolución del problema

Antes de calcular

Predicción física. La radiación solar eleva la temperatura superficial antes que las capas profundas. La respuesta depende de la energía absorbida, no de la incidente total.

Modelo esperado. Conducción transitoria semiinfinita con condición de flujo superficial neto.

Simplificaciones y modelo.

El bloque se trata como un sólido semiinfinito sometido a un flujo superficial constante. Al estar pintado de negro ideal, se toma que toda la radiación solar incidente se absorbe, de modo que el flujo impuesto es q_s''.

Para un sólido semiinfinito inicialmente a temperatura uniforme T_0 y sometido a flujo constante en la superficie $x = 0$:

$$T_s(t) - T_0 = \frac{2q_s''\sqrt{t}}{e\sqrt{\pi}}, \qquad e = \sqrt{k\rho c} = \frac{k}{\sqrt{\alpha}}.$$

La elevación superficial bajo flujo impuesto está gobernada por la efusividad e; la difusividad α gobierna por separado la profundidad de penetración $\sim \sqrt{\alpha t}$.

$$\frac{2q_s''\sqrt{t}}{e\sqrt{\pi}} = \frac{2q_s''}{k}\sqrt{\frac{\alpha t}{\pi}}.$$

Bloque de madera.

$$T_{s,\text{madera}} = 20 + \frac{2(1250)}{1{,}26}\sqrt{\frac{1{,}1\cdot 10^{-5}(20\cdot 60)}{\pi}} = 148{,}6\,^\circ\text{C}.$$

Bloque de aluminio.

$$T_{s,\text{aluminio}} = 20 + \frac{2(1250)}{237}\sqrt{\frac{9{,}71\cdot 10^{-5}(20\cdot 60)}{\pi}} = 22{,}0\,^\circ\text{C}.$$

La gran diferencia entre ambos resultados se debe a que el aluminio tiene una conductividad mucho mayor, por lo que distribuye la energía absorbida en una zona interna más amplia y apenas eleva su temperatura superficial.

Para estimar el espesor mínimo que permite seguir usando el modelo de sólido semiinfinito se impone el criterio:

$$\text{Fo} = \frac{\alpha t}{L^2} < 0{,}05.$$

En el límite:

$$L_{\text{mín}} = \sqrt{\frac{\alpha t}{0{,}05}}.$$

Así:

$$L_{\text{madera}} = \sqrt{\frac{1{,}1\cdot 10^{-5}(1200)}{0{,}05}} = 0{,}514\,\text{m},$$

$$L_{\text{aluminio}} = \sqrt{\frac{9{,}71\cdot 10^{-5}(1200)}{0{,}05}} = 1{,}527\,\text{m}.$$

Resultado.

$$\boxed{T_{s,\text{madera}} = 148{,}6\,^\circ\text{C}, \quad T_{s,\text{aluminio}} = 22{,}0\,^\circ\text{C}, \quad L_{\text{madera}} = 0{,}514\,\text{m}, \quad L_{\text{aluminio}} = 1{,}527\,\text{m}}$$

Los espesores mínimos corresponden al instante considerado, es decir, en ese instante $t = 20\,\text{min}$. Si la pared fuese más delgada, la cara posterior empezaría a responder antes y el modelo de sólido semiinfinito dejaría de representar correctamente la evolución térmica.

Comprobación final

La superficie debe ser la zona más caliente durante la irradiación y la energía absorbida acumulada debe ser coherente con el aumento térmico y las pérdidas.

2.15.22 Ejercicio resuelto 22. Pared contra incendios con cubierta de acero

Descripción del problema

Una pared de protección contra incendios, $k = 1{,}4\,\mathrm{W/(m\,K)}$ y $\alpha = 0{,}75 \times 10^{-6}\,\mathrm{m^2/s}$, de 15 cm de espesor, tiene una cubierta de acero de 4 mm de espesor. La cubierta de acero queda repentinamente expuesta a la acción de una llama, que puede suponerse como un cuerpo negro a 727 °C. La superficie de la cubierta de acero está muy oxidada y presenta una emisividad de 0,9. Calcular cuánto tiempo será necesario para que la superficie irradiada alcance el límite de temperatura indicado. En el modelo semiinfinito, la superficie irradiada $x = 0$ es el punto más caliente durante el calentamiento y el límite se escribe $T(0,t) = 227\,^\circ\mathrm{C}$. La llama se idealiza negra, uniforme y ocupando todo el campo de visión de la pared ($\varepsilon_L = 1$, $F_{L\to s} = 1$); se desprecia la convección entre llama y pared. La temperatura inicial es de 27 °C. Despreciar la resistencia conductiva de la cubierta metálica.

Datos.

- $k = 1{,}4\,\mathrm{W/(m\,K)}$.
- $\alpha = 0{,}75 \times 10^{-6}\,\mathrm{m^2/s}$.
- $L = 0{,}15\,\mathrm{m}$.
- Espesor del acero: 4 mm.
- $T_0 = 27\,^\circ\mathrm{C}$.
- $T_{\mathrm{máx}} = 227\,^\circ\mathrm{C}$.
- $T_L = 727\,^\circ\mathrm{C} = 1000{,}15\,\mathrm{K} \simeq 1000\,\mathrm{K}$.
- $\varepsilon_p = 0{,}9$.
- Llama como cuerpo negro: $\varepsilon_L = 1$.

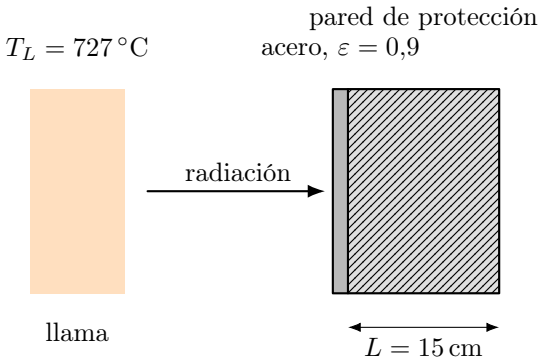


Figura 2.53: Pared de protección contra incendios expuesta a una llama en el Ejercicio 22.

Resolución del problema

Antes de calcular

Predicción física. La cubierta de acero retrasa, pero no elimina, la llegada del calentamiento a la cara protegida. La temperatura interior debe aumentar con el tiempo.

Modelo esperado. Conducción transitoria multicapa o aproximación semiinfinita, con continuidad de flujo e interfaces.

Simplificaciones y modelo.

La cubierta metálica se considera sin resistencia conductiva, por lo que el calor absorbido se aplica directamente como flujo superficial sobre la pared. El punto más caliente es la superficie irradiada, y

el tiempo se obtiene con la solución de sólido semiinfinito para flujo superficial constante. Al final se verifica que el número de Fourier es pequeño, confirmando la hipótesis semiinfinita.

Se trata de un transitorio térmico. Considerando la temperatura media de la pared entre la inicial y la final del transitorio:

$$\bar{T} = 127\,^{\circ}\mathrm{C} = 400\,\mathrm{K},$$

y la temperatura de la llama:

$$T_L = 727\,^{\circ}\mathrm{C} = 1000\,\mathrm{K},$$

el coeficiente de radiación linealizado vale:

$$\bar{h}_r = \varepsilon_p \sigma (\bar{T}^2 + T_L^2)(\bar{T} + T_L).$$

Sustituyendo:

$$\bar{h}_r = 0{,}9 \cdot 5{,}67 \cdot 10^{-8}(400^2 + 1000^2)(400 + 1000) = 82{,}9\,\mathrm{W/(m^2\,K)}.$$

El número de Biot es:

$$\mathrm{Bi} = \frac{\bar{h}_r L_c}{k} = \frac{82{,}9 \cdot 0{,}15}{1{,}4} = 8{,}9 > 0{,}1.$$

Este cálculo no se usa para plantear una convección equivalente, sino para descartar la capacidad concentrada: existirán gradientes internos importantes. A continuación se modela la acción de la llama como un flujo radiativo absorbido aproximadamente constante en la superficie.

Como la llama se comporta como cuerpo negro:

$$q_1'' = \varepsilon_L \sigma T_L^4 = 1 \cdot 5{,}67 \cdot 10^{-8}(1000)^4 = 56\,700\,\mathrm{W/m^2}.$$

La potencia radiante absorbida por la pared depende de la absortancia α_p de la superficie. Para cuerpo gris difuso:

$$\alpha_p = \varepsilon_p = 0{,}9.$$

Por tanto:

$$q_s'' = q_2'' = \alpha_p q_1'' = 0{,}9 \cdot 56700 = 51\,030\,\mathrm{W/m^2}.$$

Esto corresponde al caso de sólido semiinfinito con flujo de calor superficial constante:

$$T(x,t) - T_0 = \frac{q_s''}{k}\left[2\sqrt{\frac{\alpha t}{\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{4\alpha t}\right) - x\ \mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right)\right].$$

Por la física del problema, el punto más caliente está en la superficie por la que incide la llama, $x = 0$:

$$227 - 27 = \frac{51030}{1{,}4}\left[2\sqrt{\frac{0{,}75 \cdot 10^{-6} t}{\pi}}\right].$$

De aquí:

$$t = 31{,}5\,\mathrm{s}.$$

Para este tiempo:

$$\mathrm{Fo} = \frac{\alpha t}{L^2} = \frac{0{,}75 \cdot 10^{-6} \cdot 31{,}5}{0{,}15^2} = 0{,}0011.$$

Como Fo $< 0{,}05$, la aplicación del modelo de sólido semiinfinito es adecuada con el mismo criterio usado en el resto de problemas transitorios.

Resultado.

$$\boxed{t = 31{,}5\,\mathrm{s}}$$

La aproximación de flujo constante ignora la reemisión de la superficie calentada, $\varepsilon_p \sigma T_s^4$. A 500 K vale aproximadamente $0{,}9\sigma(500)^4 \simeq 3{,}2 \times 10^3\,\mathrm{W/m^2}$, del orden del 6 % del flujo absorbido de $51\,030\,\mathrm{W/m^2}$; por tanto, para este transitorio corto la simplificación es razonable, aunque tenderá a sobrestimar ligeramente el calentamiento.

Comprobación final

Las temperaturas deben ser continuas en interfaces perfectas, el flujo debe conservarse y la hipótesis temporal elegida debe ser compatible con los espesores.

2.15.23 Ejercicio resuelto 23. Onda térmica en una chapa de aluminio

Descripción del problema

Calcular el tiempo que tarda la onda térmica en atravesar una chapa de aluminio de 4 mm de espesor cuando pasa de estar a la sombra a exponerse al sol a razón de $545\,\mathrm{W/m^2}$, siendo las propiedades de la chapa $k = 237\,\mathrm{W/(m\,K)}$ y $\alpha = 9{,}71 \times 10^{-5}\,\mathrm{m^2/s}$. Calcular también la temperatura superficial de la chapa transcurrido ese tiempo, si inicialmente se encuentra a 20 °C.

Datos.

- $L = 4\,\mathrm{mm}$.
- $q''_s = 545\,\mathrm{W/m^2}$.
- $k = 237\,\mathrm{W/(m\,K)}$.
- $\alpha = 9{,}71 \times 10^{-5}\,\mathrm{m^2/s}$.
- $T_0 = 20\,^\circ\mathrm{C}$.

Se pide.

a) Tiempo que tarda la onda térmica en atravesar la chapa.

b) Temperatura superficial transcurrido ese tiempo.

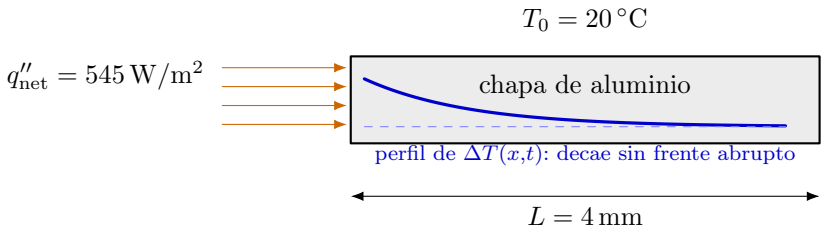


Figura 2.54: Chapa sometida súbitamente a un flujo térmico neto en el Ejercicio 23.

Resolución del problema

Antes de calcular

Predicción física. Una oscilación térmica se amortigua y se retrasa al penetrar en el sólido. A mayor frecuencia, menor profundidad de penetración.

Modelo esperado. Solución periódica de conducción unidimensional en sólido semiinfinito.

Simplificaciones y modelo.

La chapa empieza a calentarse desde una cara por un flujo solar constante. Para estimar el instante en que la perturbación térmica alcanza la cara opuesta se usa el mismo criterio de validez del sólido semiinfinito:

$$\mathrm{Fo} = \frac{\alpha t}{L^2} = 0{,}05.$$

Este instante no es una frontera física exacta ni un tiempo único, sino una definición práctica basada en un umbral de penetración térmica; con otro umbral de Fourier se obtendría otro tiempo.

Despejando:

$$t = \frac{0{,}05 L^2}{\alpha} = \frac{0{,}05(0{,}004)^2}{9{,}71 \cdot 10^{-5}} = 8{,}24 \times 10^{-3}\,\mathrm{s} \simeq 8{,}2\,\mathrm{ms}.$$

Durante ese breve intervalo la temperatura superficial puede calcularse con la solución de sólido semiinfinito sometido a flujo constante:

$$T_s(t) - T_0 = \frac{2q_s''\sqrt{t}}{e\sqrt{\pi}}, \qquad e = \sqrt{k\rho c} = \frac{k}{\sqrt{\alpha}}.$$

La elevación superficial bajo flujo impuesto está gobernada por la efusividad e; la difusividad α gobierna por separado la profundidad de penetración $\sim \sqrt{\alpha t}$.

$$\frac{2q_s''\sqrt{t}}{e\sqrt{\pi}} = \frac{2q_s''}{k}\sqrt{\frac{\alpha t}{\pi}}.$$

Por tanto:

$$T_s = 20 + \frac{2(545)}{237}\sqrt{\frac{9{,}71\cdot 10^{-5}(8{,}24\cdot 10^{-3})}{\pi}} = 20{,}002\,^\circ\mathrm{C}.$$

El incremento es muy pequeño porque el tiempo es del orden de milisegundos y la conductividad del aluminio es elevada.

Resultado.

$$\boxed{t = 8{,}2\,\mathrm{ms}, \qquad T_s = 20{,}002\,^\circ\mathrm{C}}$$

El resultado es una estimación basada en el umbral $\mathrm{Fo} = 0{,}05$ —es decir, $Fo = 0{,}05$— y no es único ni un tiempo físico exacto de propagación. La temperatura superficial apenas aumenta porque el intervalo es de milisegundos y el aluminio tiene una difusividad elevada, de modo que absorbe el pulso sin calentarse apreciablemente.

Comprobación final

La amplitud debe decrecer exponencialmente con la profundidad y el desfase debe aumentar sin cambiar la frecuencia de la onda.

2.15.24 Ejercicio resuelto 24. Contacto térmico ideal con distintos materiales

Descripción del problema

Probablemente hayas experimentado alguna vez el hecho de que el contacto con distintos materiales a igual temperatura genera una sensación térmica diferente. Considera cobre, vidrio pirex, poliestireno expandido estirado, mármol y pino blanco, todos a 15 °C. Asumiendo que la temperatura superficial de la mano se encuentra a 35 °C y que las propiedades termo-físicas del cuerpo fueran las del agua, determina las temperaturas ideales instantáneas de contacto con los diferentes materiales y ordénalos cualitativamente por sensación térmica. Repetir si los materiales estuviesen a 60 °C. La ordenación no constituye un modelo fisiológico completo.

Datos.

	Cobre	Mármol	Vidrio	Poliestireno	Pino	Agua
ρ [kg/m^3]	8933	2680	2225	55	640	995.0
c [J/(kg K)]	385	830	835	1210	2805	4178
k [W/(m K)]	401	2.8	1.4	0.027	0.15	0.62
$k\rho c$	$1{,}38 \times 10^9$	$6{,}23 \times 10^6$	$2{,}60 \times 10^6$	$1{,}80 \times 10^3$	$2{,}69 \times 10^5$	$2{,}58 \times 10^6$

Tabla 2.16: Propiedades termo-físicas para el Ejercicio 24.

Se pide.

a) Temperatura ideal instantánea de contacto y orden cualitativo para materiales inicialmente a 15 °C.

b) Temperatura ideal instantánea de contacto y orden cualitativo para materiales inicialmente a 60 °C.

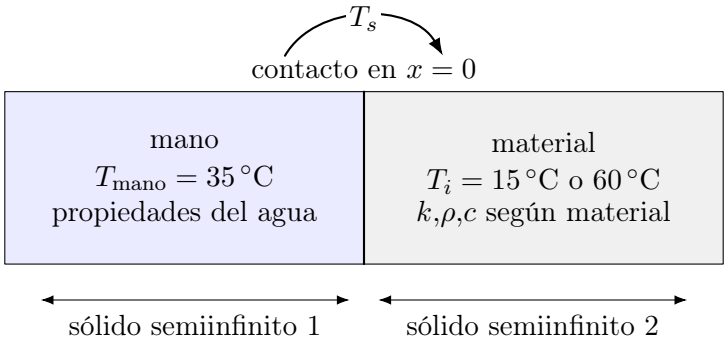


Figura 2.55: Modelo ideal de contacto térmico instantáneo entre la mano y un material en el Ejercicio 24.

Resolución del problema

Antes de calcular

Predicción física. El material con mayor efusividad extraerá calor más deprisa de la piel y se percibirá más frío, aunque todos estén a la misma temperatura inicial.

Modelo esperado. Contacto transitorio entre dos sólidos semiinfinitos mediante efusividades térmicas.

Simplificaciones y modelo.

El contacto inicial entre la mano y el material se modela como el contacto entre dos sólidos semiinfinitos. Esta idealización no incluye resistencia real de contacto, presión, rugosidad, humedad, duración del contacto, espesor de los tejidos ni perfusión sanguínea; por ello sólo predice la temperatura

interfacial instantánea y permite una comparación cualitativa. La temperatura instantánea de contacto depende de la efusividad térmica:

$$e = \sqrt{k\rho c}.$$

La efusividad tiene unidades $[e] = \mathrm{W\,s^{1/2}/(m^2K)}$ cuando k, ρ y c se expresan en SI.

Si el material está inicialmente a T_m y la mano se aproxima como agua a $T_h = 35\,^\circ\mathrm{C}$, la temperatura de contacto es:

$$T_s = \frac{e_m T_m + e_h T_h}{e_m + e_h},$$

donde e_m es la efusividad del material y e_h la de la mano. Cuanto mayor es e_m, más se aproxima T_s a la temperatura inicial del material; por eso los metales se sienten más fríos cuando están a baja temperatura y más calientes cuando están a alta temperatura.

La efusividad de la mano se obtiene de las propiedades del agua:

$$e_h = \sqrt{k\rho c}_{\text{agua}} = \sqrt{2{,}58 \cdot 10^6}.$$

Como ejemplo, para el cobre a $15\,^\circ\mathrm{C}$:

$$T_s = \frac{\sqrt{1{,}38 \cdot 10^9}(15) + \sqrt{2{,}58 \cdot 10^6}(35)}{\sqrt{1{,}38 \cdot 10^9} + \sqrt{2{,}58 \cdot 10^6}} = 15{,}8\,^\circ\mathrm{C}.$$

Repitiendo el mismo cálculo para todos los materiales, y mostrando ya la tabla completa de los cinco T_s de cada caso, se obtienen las siguientes temperaturas de contacto:

	Cobre	Mármol	Vidrio	Pino	Poliestireno
$T_m = 15\,^\circ\mathrm{C}$	15,8	22,8	25,0	30,1	34,5
$T_m = 60\,^\circ\mathrm{C}$	59,0	50,2	47,5	41,1	35,6

La ordenación cualitativa se construye a partir de la separación de T_s respecto a la temperatura de la mano: cuanto menor sea T_s en el caso frío, más frío se percibe el material; cuanto mayor sea T_s en el caso caliente, más caliente se percibe.

Resultado.

Para materiales a $15\,^\circ\mathrm{C}$:

Cobre: 15,8 °C , el más frío,
Mármol: 22,8 °C,
Vidrio: 25,0 °C,
Pino: 30,1 °C,
Poliestireno: 34,5 °C , el menos frío.

Para materiales a $60\,^\circ\mathrm{C}$:

Cobre: 59,0 °C , el más caliente,
Mármol: 50,2 °C,
Vidrio: 47,5 °C,
Pino: 41,1 °C,
Poliestireno: 35,6 °C , el menos caliente.

Los materiales con mayor efusividad térmica arrastran la temperatura de contacto hacia su propia temperatura inicial y por eso se perciben más extremos: el cobre se siente muy frío a $15\,^\circ\mathrm{C}$ y muy

caliente a 60 °C. El poliestireno, con efusividad baja, apenas modifica la temperatura de la piel y por eso se percibe mucho más neutro.

Comprobación final

La temperatura inicial de contacto debe quedar entre las dos temperaturas iniciales y desplazarse hacia la del material de mayor efusividad.

CAPÍTULO 3

Radiación térmica

Introducción

La radiación térmica es el intercambio de energía en forma de ondas electromagnéticas asociado a la temperatura de la materia. A diferencia de la conducción y de la convección, no necesita un medio material para propagarse: de hecho, el transporte radiante es especialmente eficaz en el vacío. Esta diferencia explica que la energía procedente del Sol pueda llegar a la Tierra después de atravesar regiones de espacio prácticamente vacías.

En conducción y convección suele ser suficiente trabajar con diferencias de temperatura en grados Celsius o kelvin, porque las ecuaciones dependen de diferencias lineales. En radiación, sin embargo, las expresiones fundamentales contienen temperaturas absolutas elevadas a la cuarta potencia. Por ello, toda temperatura que aparezca en términos como T^4, en la ley de Planck o en la ley de Wien debe escribirse en kelvin.

La tabla 3.1 introduce la notación imprescindible; la tabla ampliada de referencia se encuentra al final del capítulo. El capítulo se centra en el intercambio radiante entre superficies opacas, grises y difusas. Esta es una simplificación de ingeniería: las superficies reales pueden depender de la longitud de onda, de la dirección, de la rugosidad, de la oxidación, de la limpieza y de la temperatura. Sin embargo, para muchas aplicaciones resulta suficiente trabajar con propiedades hemisféricas totales, es decir, promediadas sobre todas las longitudes de onda y sobre todas las direcciones del hemisferio exterior a la superficie.

Resultados de aprendizaje Al terminar este capítulo, el alumno será capaz de:

- distinguir emisión, irradiación, radiosidad y flujo neto;
- aplicar Stefan–Boltzmann y las propiedades radiantes de superficies opacas;
- obtener factores de forma mediante inspección, suma, simetría y reciprocidad;
- construir redes de radiosidad para dos o más superficies grises difusas;
- analizar pantallas radiantes y balances con radiación solar;
- comprobar que los factores de forma y los intercambios cumplen límites físicos.

Antes de empezar Balance de energía, temperaturas absolutas, álgebra de sistemas lineales y redes de resistencias del capítulo 1.

Árbol de decisión para radiación

1. Objeto pequeño dentro de un entorno grande: use el modelo de superficie pequeña en recinto grande.
2. Superficies negras: combine $E_b = \sigma T^4$ con factores de forma.
3. Superficies grises, difusas y opacas: construya una red de radiosidad.
4. Varias superficies: obtenga primero los F_{ij} mediante suma, reciprocidad y simetría.
5. Radiación solar: separe propiedades de onda corta y emisión térmica de onda larga.
6. Compruebe $0 \leq F_{ij} \leq 1$, $\sum_j F_{ij} = 1$ y el balance global.

Núcleo. Cuerpo negro, propiedades totales, factores de forma y redes de radiosidad constituyen el contenido esencial.

Ampliación. Intensidad radiativa, formulación espectral detallada y definición integral de factores de forma justifican el modelo, pero no son requisito previo para los problemas básicos.

Tabla 3.1: Notación mínima para comenzar el capítulo de radiación.

Símbolo	Pregunta física que responde	Unidad
$E_b = \sigma T^4$	¿Cuánto emitiría una superficie negra a esta temperatura?	$\mathrm{W/m^2}$
ε	¿Qué fracción de la emisión de cuerpo negro emite la superficie real?	–
G	¿Cuánta radiación llega a la superficie?	$\mathrm{W/m^2}$
J	¿Cuánta radiación abandona la superficie, sumando emisión y reflexión?	$\mathrm{W/m^2}$
F_{ij}	¿Qué fracción de lo que sale de i llega directamente a j?	–

Vocabulario mínimo antes de calcular En una primera lectura basta con distinguir cinco ideas. E_b es la emisión ideal asociada a la temperatura; ε corrige esa emisión para una superficie real; G llega a la superficie; J abandona la superficie; y F_{ij} describe qué parte de lo que sale de una superficie alcanza otra. El resto de símbolos se introduce cuando se necesita y se reúne de nuevo al final del capítulo.

Cómo plantear un problema de radiación

Un problema de radiación debe comenzar identificando qué superficies participan realmente en el intercambio. En conducción basta con seguir una trayectoria material; en radiación, en cambio, importa qué superficies se ven entre sí, qué parte de la radiación emitida por una llega a otra y qué ocurre con la radiación que se refleja o se transmite.

Secuencia recomendada Dibujar las superficies participantes, asignar temperaturas absolutas, decidir si se modelan como negras o como grises difusas opacas, comprobar si existe transmitancia, calcular o elegir los factores de forma, escribir las ecuaciones de radiosidad e irradiancia o la red de resistencias radiantes, añadir convección y radiación solar si aparecen y revisar el signo de la potencia obtenida. Si el resultado contiene T^4, las temperaturas deben estar en kelvin.

En problemas exteriores es frecuente mezclar radiación térmica, radiación solar y convección. Entonces no basta con una única emisividad: puede ser necesario distinguir la absortancia solar α_s, asociada a onda corta, de la emisividad infrarroja ε, asociada a la emisión térmica de cuerpos a

temperatura ambiente. Esta distinción es esencial en recubrimientos selectivos, superficies blancas, vidrio, captadores solares y aislamiento reflectivo.

Alcance frente a textos de referencia El tratamiento que sigue está alineado con el nivel habitual de una asignatura de Transmisión de Calor de tercer curso: leyes de cuerpo negro, propiedades radiantes, factores de forma, redes de radiosidad para superficies grises difusas, pantallas, radiación solar-atmosférica y balances superficiales. Textos como Çengel y Ghajar desarrollan además la intensidad radiativa y funciones tabuladas de cuerpo negro; se incorporan aquí sus definiciones básicas para cerrar la coherencia conceptual, pero la resolución de problemas del capítulo se mantiene en formulación integrada por áreas y factores de forma.

3.1 Radiación térmica y dos bandas espectrales

Toda materia a temperatura superior al cero absoluto emite radiación térmica. Para resolver la mayoría de problemas del curso no es necesario memorizar primero el espectro electromagnético completo. Es más útil distinguir dos familias de energía que pueden llegar a una superficie:

- **radiación solar de onda corta**, procedente de una fuente cercana a 5800 K, cuya absorción se caracteriza mediante α_s;
- **radiación térmica infrarroja de onda larga**, emitida por superficies a temperaturas habituales de ingeniería, cuya emisión se caracteriza mediante ε.

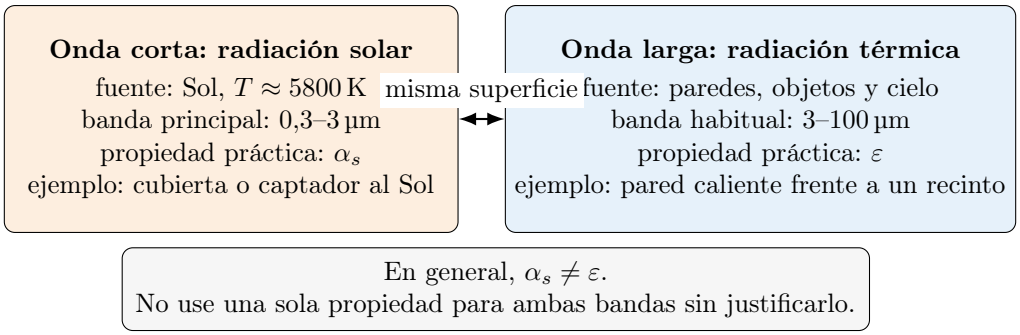


Figura 3.1: Dos bandas que conviene separar antes de estudiar el espectro completo: radiación solar de onda corta y emisión térmica infrarroja de onda larga.

Primera imagen mental La temperatura fija cuánto podría emitir una superficie mediante $E_b = \sigma T^4$. La emisividad indica cuánto emite realmente. La geometría decide qué superficies se ven mediante F_{ij}. Si además llega radiación solar, su absorción se calcula con α_s, no automáticamente con ε.

Ampliación: ubicación en el espectro electromagnético

Ampliación. Este bloque explica el contexto espectral completo. Puede posponerse en una primera lectura orientada a balances, factores de forma y redes de radiosidad.

La figura 3.2 sitúa la radiación térmica dentro del espectro electromagnético. Una onda electromagnética se caracteriza por su frecuencia f, su longitud de onda λ y su velocidad de propagación c. En el vacío se cumple

$$\boxed{c = \lambda f} \tag{3.1}$$

La frecuencia depende de la fuente emisora, mientras que la longitud de onda y la velocidad pueden variar al atravesar un medio material. En el vacío, la radiación electromagnética viaja a la velocidad de la luz.

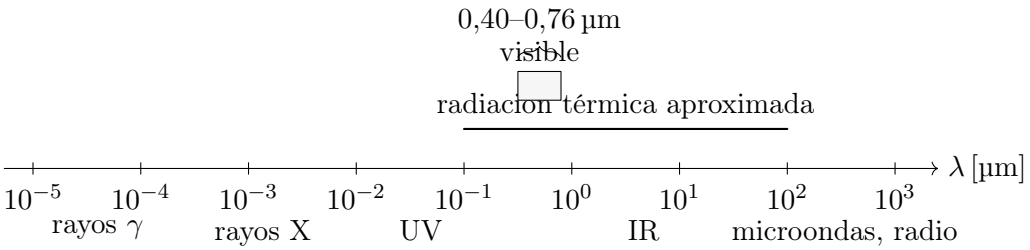


Figura 3.2: Esquema del espectro electromagnético y localización aproximada de la radiación térmica y de la luz visible.

Tabla 3.2: Bandas orientativas del espectro electromagnético expresadas en micras. Los límites son convencionales y pueden solaparse ligeramente entre fuentes.

Banda	Intervalo aproximado de longitudes de onda
Rayos gamma	10^{-7} a 10^{-4} µm
Rayos X	10^{-5} a 10^{-2} µm
Rayos ultravioleta	10^{-2} a $4{,}0 \times 10^{-1}$ µm
Luz visible	$4{,}0 \times 10^{-1}$ a $7{,}6 \times 10^{-1}$ µm
Radiación infrarroja	$7{,}6 \times 10^{-1}$ a 10^{2} µm
Microondas	10^{2} a 10^{6} µm
Ondas de radio	$> 10^{6}$ µm

Nota física. Los rayos cósmicos son principalmente partículas cargadas de alta energía y no constituyen una banda del espectro electromagnético; por eso no se ordenan en esta tabla por longitud de onda.

Nota. También se emplean las denominaciones históricas *ondas hertzianas* y *ondas radiofónicas*. En tablas modernas suelen agruparse dentro de las radiofrecuencias; las radiofónicas son una subbanda de uso en comunicación, no una familia física separada.

La tabla clasifica por frecuencia o longitud de onda, no por mecanismo de generación. Los intervalos pueden solaparse: rayos X y gamma se distinguen a menudo por su origen, no por una frontera espectral única. Las ondas de radio de ingeniería se generan normalmente mediante corrientes oscilantes y cargas aceleradas en antenas; no existe un mecanismo universal de "cristales excitados" para toda esa banda.

La radiación ultravioleta ocupa el extremo de menor longitud de onda de la radiación térmica. Como orden de magnitud, un cuerpo negro de unos 5800 K emite alrededor del 12 % de su potencia por debajo de $\lambda \simeq 0{,}4\,\mu\text{m}$, según los límites de banda adoptados. El porcentaje del espectro solar real cambia con el modelo espectral y, en superficie terrestre, con la absorción y dispersión atmosféricas. Esta absorción es fundamental para limitar los daños biológicos asociados a la radiación ultravioleta; de ahí la importancia histórica de restringir sustancias destructoras de ozono, como algunos refrigerantes clorados. Se citan explícitamente los freones R12 y R22 como ejemplos históricos de fluidos frigoríficos vinculados a este problema, además de otros productos como agentes limpiadores o aerosoles.

Las microondas, situadas a longitudes de onda mucho mayores, también son radiación electromagnética. En un horno microondas son generadas por magnetrones y absorbidas con eficacia por moléculas polares del alimento, especialmente agua. Esta energía electromagnética se transforma finalmente en energía térmica por agitación molecular, de forma que el calentamiento se produce dentro de parte del volumen del alimento y no sólo en la superficie.

La radiación térmica se considera habitualmente comprendida entre 0,1 y 100 µm. Esta banda incluye parte del ultravioleta, la luz visible y el infrarrojo. La luz visible ocupa una fracción muy estrecha, aproximadamente de 0,40 a 0,76 µm, con el violeta en el extremo de menor longitud de onda y el rojo

en el extremo de mayor longitud de onda. La radiación solar ocupa principalmente el intervalo de 0,3 a 3 µm; aproximadamente la mitad corresponde a luz visible y el resto a ultravioleta e infrarrojo.

La radiación térmica no debe confundirse con la radiactividad. La radiactividad se refiere a procesos nucleares de emisión de partículas o radiación ionizante; la radiación térmica es emisión electromagnética asociada a la temperatura. Además, a diferencia de conducción y convección, la radiación puede intercambiarse entre dos cuerpos separados por un medio más frío que ambos. Así ocurre con la radiación solar que atraviesa capas altas de aire frío antes de alcanzar la superficie terrestre.

En un medio ópticamente opaco, emisión y absorción se concentran en una profundidad óptica pequeña frente a la dimensión del cuerpo, pero no existe un espesor universal: depende del material, la longitud de onda, el estado y el coeficiente de absorción. En medios transparentes o semitransparentes la interacción puede ser volumétrica.

La potencia radiante emitida por una superficie real de área A, temperatura T_s y emisividad ε viene dada por la ley de Stefan–Boltzmann:

$$\boxed{q = \varepsilon \sigma A T_s^4} \tag{3.2}$$

con

$$\sigma = 5{,}67 \times 10^{-8}\ \mathrm{W/(m^2\,K^4)}. \tag{3.3}$$

En forma de potencia emisiva por unidad de área,

$$\boxed{E = \frac{q}{A} = \varepsilon \sigma T_s^4} \tag{3.4}$$

3.2 Radiación del cuerpo negro

El cuerpo negro es una idealización que emite la máxima potencia radiante posible para una temperatura dada. Por tanto, es un emisor ideal con $\varepsilon = 1$. También absorbe toda la radiación incidente, de modo que $\alpha = 1$, y como $\alpha + \rho + \tau = 1$, verifica $\rho = 0$ y $\tau = 0$. No refleja ni transmite radiación incidente.

Para un cuerpo negro,

$$\boxed{q_b = \sigma A T_s^4} \tag{3.5}$$

$$\boxed{E_b = \sigma T_s^4} \tag{3.6}$$

El cuerpo negro es además un emisor difuso: desde cada punto de su superficie emite con la misma intensidad en todas las direcciones del hemisferio exterior.



Figura 3.3: Representación conceptual de emisión difusa y no difusa. En la práctica se aproximan muchas superficies reales por grises difusas.

La figura 3.3 distingue esquemáticamente una emisión difusa de una no difusa. La anchura de la banda visible es pequeña frente al espectro térmico completo. Por ello no debe confundirse el color visual de una superficie con su comportamiento radiativo total. Una superficie puede verse blanca porque refleja fuertemente en el visible y, aun así, comportarse casi como negra en infrarrojo. En

sentido contrario, una superficie metálica puede parecer oscura en algunas condiciones de iluminación y, sin embargo, tener baja emisividad térmica si está pulida.

Que una superficie se vea negra en el visible no garantiza que sea negra en todo el espectro térmico. La nieve y la pintura blanca reflejan luz visible y se ven blancas, pero pueden absorber y emitir intensamente en el infrarrojo. Por el contrario, un metal pulido puede reflejar gran parte de la radiación térmica aunque no se vea blanco en el sentido habitual.

Un ejemplo de superficie que se aproxima mucho al comportamiento negro en un intervalo amplio es la pintura de negro de humo o negro de hollín, formada principalmente por carbono obtenido por combustión incompleta de sustancias como aceites, grasas, brea, hulla, maderas resinosas, plantas o gas natural. La idea importante no es su color visual aislado, sino su alta absorción y emisión en el espectro térmico relevante.

Ley de Planck. La figura 3.4 muestra curvas de Planck para varias temperaturas. La emisión total de un cuerpo negro es la suma de las contribuciones en todas las longitudes de onda. La potencia emisiva monocromática de cuerpo negro se expresa mediante la ley de Planck:

$$\boxed{E_{b\lambda} = \frac{3{,}74177 \times 10^{8}}{\lambda^{5}\left[\exp\left(\dfrac{1{,}43878 \times 10^{4}}{\lambda T}\right) - 1\right]}} \tag{3.7}$$

si T está en kelvin y λ en µm, con $E_{b\lambda}$ en $\mathrm{W/(m^2\,\mu m)}$. Esta es la forma de potencia emisiva espectral hemisférica por unidad de longitud de onda; no debe confundirse con la radiancia espectral por unidad de ángulo sólido ni con la forma escrita por frecuencia.

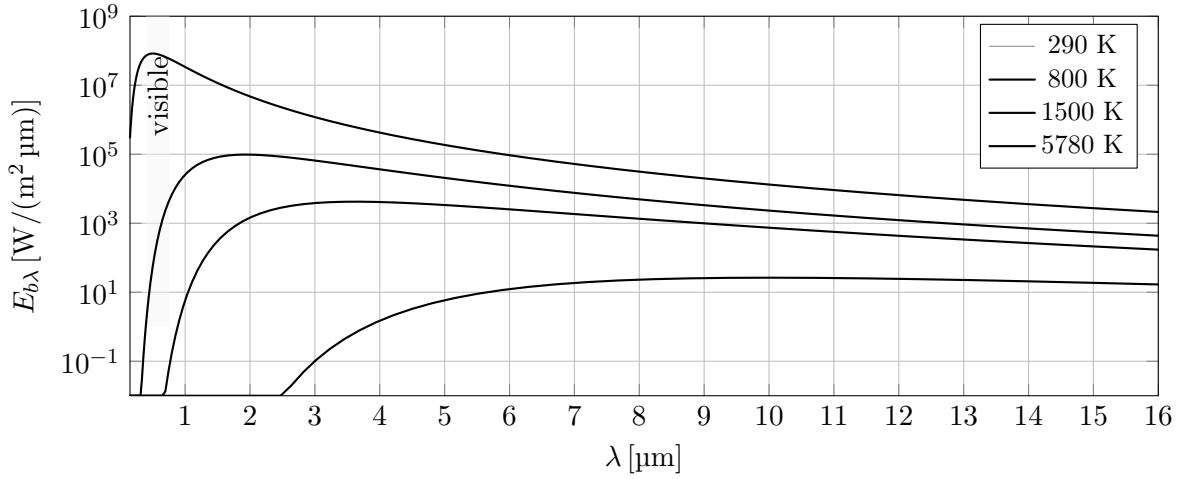


Figura 3.4: Curvas de Planck: al aumentar la temperatura, crece la emisión y el máximo se desplaza hacia longitudes de onda menores.

El área bajo la curva $E_{b\lambda}$ da la potencia emisiva total:

$$\int_0^\infty E_{b\lambda}\,\mathrm{d}\lambda = \sigma T^4. \tag{3.8}$$

La posición del máximo viene dada por la ley de desplazamiento de Wien:

$$\boxed{\lambda_{\mathrm{máx}} T = 2897{,}8\ \mu\mathrm{m\,K}} \tag{3.9}$$

El valor anterior corresponde al máximo de la distribución expresada por longitud de onda. Si el espectro se representa por frecuencia o por otra variable espectral, el máximo aparece en otra posición aunque la física sea la misma.

El Sol, con una temperatura superficial efectiva próxima a 5780 K, tiene su máximo de emisión en la zona visible. Las superficies por debajo de unos 800 K emiten casi completamente en el infrarrojo y no son visibles por emisión propia. Un calentador eléctrico puede calentar antes de brillar; cuando alcanza alrededor de 1000 K empieza a emitir en rojo mate, después rojo brillante y, a temperaturas superiores, un brillo casi blanco porque emite en una banda visible más amplia.

Fracción de emisión en una banda espectral. En aplicaciones donde interesa saber qué parte de la radiación cae entre dos longitudes de onda, se define la función de radiación de cuerpo negro

$$F_{0\to\lambda}(T) = \frac{\displaystyle\int_0^{\lambda} E_{b\lambda}(\lambda,T)\,\mathrm{d}\lambda}{\sigma T^4}. \tag{3.10}$$

La fracción emitida entre λ_1 y λ_2 se obtiene como

$$F_{\lambda_1\to\lambda_2}(T) = F_{0\to\lambda_2}(T) - F_{0\to\lambda_1}(T). \tag{3.11}$$

En la práctica esta función se evalúa con tablas en función del producto λT, porque la integral de la ley de Planck no tiene una forma elemental cómoda. Esta herramienta permite, por ejemplo, estimar la fracción solar en visible o la fracción infrarroja emitida por una superficie a temperatura ambiente. La tabla siguiente da valores orientativos suficientes para interpretar órdenes de magnitud; para cálculos de proyecto debe usarse la tabla completa que proporcione la bibliografía especializada o la documentación técnica disponible.

λT [µm K]	$F_{0\to\lambda}$
1200	0,002
2000	0,066
2897,8	0,250
4107	0,500
5270	0,659
7000	0,808
10000	0,914
14400	0,963
∞	1,000

Ampliación. Esta nota explica el origen direccional de la radiación. Puede omitirse en una primera lectura orientada a balances integrados.

Nota sobre intensidad radiativa. La intensidad radiativa I describe radiación por unidad de área normal a la dirección de propagación y por unidad de ángulo sólido. Es necesaria para deducir factores de forma desde superficies diferenciales. Para un emisor difuso, la intensidad no depende de la dirección y se cumple

$$E = \pi I, \qquad I_b = \frac{E_b}{\pi} = \frac{\sigma T^4}{\pi}. \tag{3.12}$$

En este capítulo no se resolverán problemas mediante integración angular de intensidades; se usarán factores de forma ya calculados o reglas de reciprocidad, suma, simetría y superposición.

El color que se percibe normalmente en los cuerpos no es su emisión térmica propia, sino la radiación visible que reflejan al ser iluminados. Las cámaras térmicas detectan infrarrojo; algunos animales, como las serpientes de cascabel, son sensibles a la radiación infrarroja, y las abejas pueden detectar ultravioleta.

3.3 Propiedades de radiación

Las propiedades radiantes describen cómo una superficie emite, absorbe, refleja o transmite radiación.

Historia de la energía en una superficie Primero llega una irradiancia G. Esa energía incidente se reparte en tres destinos: una parte se absorbe, otra se refleja y, si el material no es opaco, otra se transmite. Al mismo tiempo, la superficie emite energía propia por estar a temperatura T. Más adelante se llamará radiosidad J a todo lo que abandona la superficie: emisión propia más reflexión. Mantener esta historia evita confundir G, E y J.

En metales, madera, ladrillo y la mayoría de materiales sólidos habituales, la radiación térmica se trata como un fenómeno superficial. En vidrio, agua y materiales semitransparentes, una parte de la radiación visible puede penetrar y ser absorbida en el volumen; sin embargo, estos materiales son a menudo prácticamente opacos al infrarrojo.

Las propiedades radiantes pueden depender de la longitud de onda, de la dirección de incidencia o emisión, de la temperatura, del acabado superficial, de la oxidación, de la suciedad y de los tratamientos químicos. Por ello se distinguen propiedades monocromáticas, direccionales, hemisféricas y totales. En ingeniería térmica básica se trabaja a menudo con propiedades hemisféricas totales.

3.3.1 Emisividad

La emisividad ε expresa cuánto se aproxima la emisión de una superficie real a la emisión de un cuerpo negro a la misma temperatura:

$$\boxed{\varepsilon = \frac{E}{E_b}} \tag{3.13}$$

Su valor está entre 0 y 1. No es una propiedad universal del material base: depende de la capa superficial, rugosidad, oxidación, limpieza, temperatura, longitud de onda y dirección. Como la emisión de sólidos opacos se concentra en pocas micras superficiales, una pintura o un recubrimiento delgado puede modificar intensamente la emisión radiante.

La figura 3.5 muestra por qué la aproximación gris difusa es una simplificación. Una emisividad monocromática ε_λ puede variar de forma irregular con λ. Para simplificar, se sustituye la superficie real por un cuerpo gris: una superficie ficticia cuya emisividad no depende de la longitud de onda y que emite la misma potencia total a la temperatura considerada. Si además la emisión no depende de la dirección, se habla de superficie difusa. En el resto del capítulo se usará, salvo indicación contraria, la aproximación gris difusa.

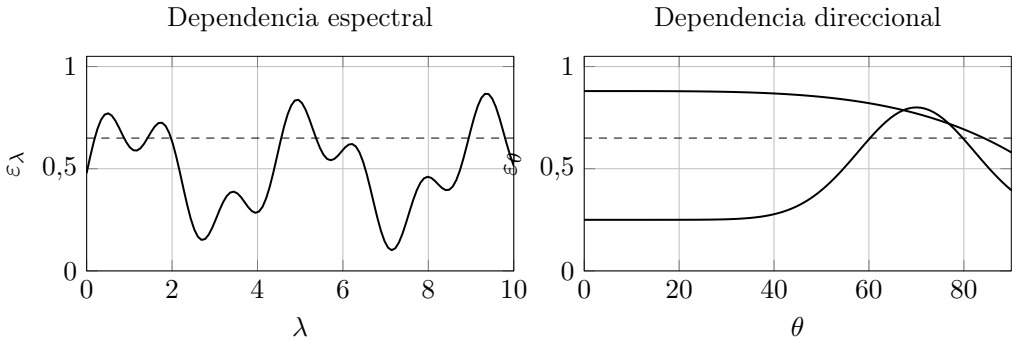


Figura 3.5: La emisividad real puede variar con longitud de onda y dirección. En ambos paneles, la misma línea discontinua, $\varepsilon_g = 0{,}65$, representa una única aproximación gris difusa.

Tabla 3.3: Emisividades hemisféricas típicas de algunas superficies, agrupadas por tipo de acabado.

Material	Emisividad
Metales pulidos o brillantes	
Hoja de aluminio	0,07
Cobre pulido	0,03
Oro pulido	0,03
Plata pulida	0,02
Acero inoxidable pulido	0,17
Metales tratados u oxidados	
Aluminio anodizado	0,82
Pinturas, materiales constructivos y no metales	
Pintura negra	0,98
Pintura blanca	0,90
Papel blanco	0,92–0,97
Pavimento asfalto	0,85–0,93
Ladrillo rojo	0,93–0,96
Madera	0,82–0,92
Suelo	0,93–0,96
Agua	0,96
Superficies biológicas o naturales	
Piel humana	0,95
Vegetación	0,92–0,96

La tabla 3.3 resume valores típicos de emisividad. Los metales pulidos suelen tener emisividad baja; los no metales, pinturas y superficies rugosas suelen tener emisividad alta. La oxidación y el anodizado de metales pueden elevar mucho la emisividad. Por tanto, los valores tabulados deben leerse como orientativos: dos entradas con el mismo nombre de material pueden diferir si el acabado superficial no es el mismo. En particular, no es equivalente un acero inoxidable recién pulido de laboratorio a un acero inoxidable laminado o con oxidación superficial, ni una hoja de aluminio nueva muy brillante a una hoja comercial envejecida.

3.3.2 Absortancia, reflectancia y transmitancia

La figura 3.6 resume las contribuciones radiantes que intervienen en una superficie. Al mismo tiempo que emite, una superficie recibe radiación procedente de su entorno. La irradiancia G es la radiación incidente por unidad de área. De ella, una fracción ρG se refleja, una fracción αG se absorbe y, si el material es semitransparente, una fracción τG se transmite.

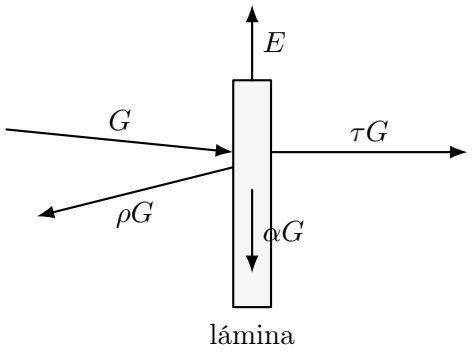


Figura 3.6: Descomposición de una irradiancia incidente en radiación reflejada, absorbida y transmitida, junto con la emisión propia de la superficie.

El balance de la radiación incidente es

$$G = \rho G + \alpha G + \tau G, \tag{3.14}$$

por tanto

$$\boxed{1 = \rho + \alpha + \tau} \tag{3.15}$$

Casos de interés:

$$\text{cuerpo opaco:} \qquad \tau = 0, \qquad \alpha + \rho = 1, \tag{3.16}$$

$$\text{transparente perfecto:} \qquad \tau = 1, \qquad \alpha = \rho = 0, \tag{3.17}$$

$$\text{cuerpo negro:} \qquad \alpha = 1, \qquad \rho = \tau = 0. \tag{3.18}$$

En una superficie opaca gris difusa, la ley de Kirchhoff permitirá escribir $\alpha = \varepsilon$. Por tanto, si ρ es alta, α y ε son bajas; este es el comportamiento típico de metales pulidos. En superficies mates y rugosas, ρ baja y α y ε tienden a ser altas.

Conviene distinguir cuatro magnitudes. E es emisión propia; G es radiación incidente; ρG es radiación reflejada; J, que se introducirá más adelante, es la radiosidad o radiación total que abandona una superficie: emisión propia más reflexión.

3.4 Ley de Kirchhoff

La figura 3.7 ayuda a interpretar la ley de Kirchhoff mediante una cavidad isotérmica. La ley de Kirchhoff se obtiene considerando equilibrio térmico radiativo en una cavidad a temperatura uniforme. Si dentro de un recinto a temperatura T se coloca un cuerpo negro también a T, el equilibrio exige que la radiación incidente sobre el cuerpo sea igual a la emisión de cuerpo negro:

$$G = E_b. \tag{3.19}$$

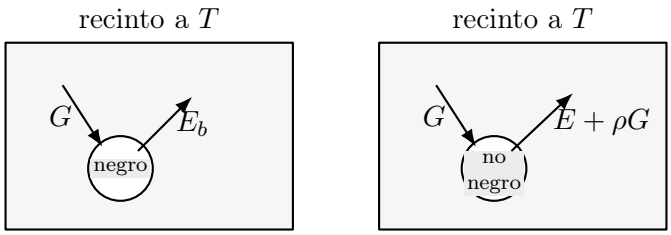


Figura 3.7: Cavidad isotérmica usada para interpretar la ley de Kirchhoff. En equilibrio, la superficie no puede ganar ni perder energía neta.

Si en la misma cavidad se coloca una superficie no negra a la misma temperatura, el equilibrio energético conduce a

$$\alpha G = E = \varepsilon E_b. \tag{3.20}$$

Como $G = E_b$, resulta

$$\boxed{\alpha = \varepsilon} \tag{3.21}$$

Esta igualdad es rigurosa en equilibrio térmico para la misma longitud de onda y dirección. En forma espectral y direccional,

$$\varepsilon_{\lambda,\theta} = \alpha_{\lambda,\theta}. \tag{3.22}$$

Ley de Kirchhoff en tres niveles

1. **Rigurosa:** en equilibrio, para la misma longitud de onda y dirección, $\varepsilon_{\lambda,\theta} = \alpha_{\lambda,\theta}$.
2. **Modelo gris total:** si la superficie y la radiación pueden promediarse de forma coherente, se usa $\varepsilon \simeq \alpha$.
3. **Problema solar:** la radiación incidente y la emisión propia pertenecen a bandas distintas; por ello, en general, $\alpha_s \neq \varepsilon$.

No memorice $\alpha = \varepsilon$ como una identidad universal sin comprobar el nivel de aproximación.

En problemas de ingeniería con superficies grises difusas se emplea la aproximación global $\varepsilon = \alpha$, siempre que la radiación incidente proceda de cuerpos de temperatura no muy diferente o que se esté trabajando con propiedades medias adecuadas.

La advertencia práctica es importante: no puede suponerse en general que la absortancia solar α_s, asociada a radiación de alta temperatura y onda corta, sea igual a la emisividad infrarroja ε de una superficie a temperatura ambiente. Una pintura blanca puede reflejar fuertemente en el visible y, sin embargo, emitir bien en infrarrojo. El vidrio puede transmitir radiación solar visible y ser casi opaco a la radiación infrarroja. Por tanto, en radiación solar se distingue α_s de α.

3.5 Intercambio de radiación entre superficies negras y factores de forma

Para superficies negras, la radiación que abandona una superficie es simplemente su emisión de cuerpo negro. Si dos superficies negras se ven parcialmente, sólo una fracción de la energía que sale de una llega directamente a la otra. Esa fracción es el factor de forma.

El factor de forma F_{ij} se define como la fracción de radiación que sale de la superficie i y llega directamente a la superficie j:

$$F_{ij} = \frac{\text{radiación que sale de } i \text{ y llega directamente a } j}{\text{radiación total que sale de } i}. \tag{3.23}$$

Por definición,

$$0 \leq F_{ij} \leq 1. \tag{3.24}$$

Tres reglas antes de buscar una fórmula de factor de forma

1. **Suma:** en un recinto cerrado, $\sum_j F_{ij} = 1$.
2. **Reciprocidad:** $A_i F_{ij} = A_j F_{ji}$.
3. **Aditividad y simetría:** una superficie compuesta puede dividirse en partes y las superficies geométricamente equivalentes tienen factores iguales.

Empiece siempre por estas reglas. Consulte una expresión tabulada sólo para el factor independiente que no pueda obtenerse por inspección.

Ejemplo mínimo sin integrales En un conducto largo de sección triangular equilátera, cada cara es plana y no se ve a sí misma, por lo que $F_{11} = 0$. Las otras dos caras son simétricas respecto a la primera, de modo que $F_{12} = F_{13}$. La regla de suma da $F_{12} + F_{13} = 1$, y por tanto $F_{12} = F_{13} = 1/2$. La geometría se resuelve con suma y simetría, sin recurrir a la integral general.

Comprobaciones intuitivas Una superficie plana o convexa no se ve a sí misma: $F_{ii} = 0$. Una superficie cóncava sí puede hacerlo. Si una superficie pequeña está completamente rodeada por otra muy grande, suele cumplirse $F_{12} \simeq 1$, pero por reciprocidad $F_{21} = A_1/A_2 \ll 1$. Un factor de forma depende de geometría y visibilidad, no de temperatura ni emisividad.

Profundización. La definición integral permite deducir factores de forma; en problemas ordinarios se priorizan inspección, suma, reciprocidad y simetría.

Profundización: definición diferencial e integral

Si dos elementos diferenciales de área se ven directamente, separados una distancia R, y sus normales forman los ángulos θ_i y θ_j con la línea que los une, el factor diferencial desde $\mathrm{d}A_i$ hacia $\mathrm{d}A_j$ es

$$\mathrm{d}F_{i\to j} = \frac{\cos\theta_i \cos\theta_j}{\pi R^2}\,\mathrm{d}A_j. \tag{3.25}$$

Al integrar sobre dos superficies finitas,

$$F_{ij} = \frac{1}{A_i}\int_{A_i}\int_{A_j} \frac{\cos\theta_i \cos\theta_j}{\pi R^2}\,\mathrm{d}A_j\,\mathrm{d}A_i. \tag{3.26}$$

Esta expresión explica por qué los factores de forma dependen sólo de la geometría relativa, de la orientación y de la visibilidad directa entre superficies, pero no de la temperatura ni de las propiedades radiantes. La figura 3.8 representa el intercambio directo entre dos superficies.

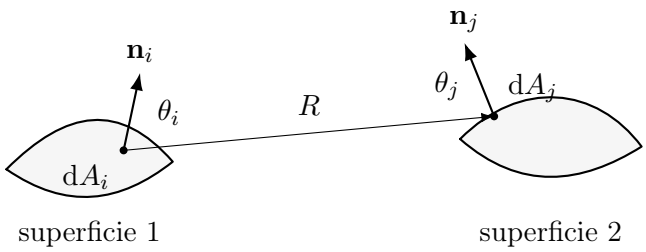


Figura 3.8: Geometría diferencial del factor de forma: elementos de área, normales, ángulos y distancia de visibilidad directa.

Para superficies negras,

$$q_{1\to 2} = E_{b1} A_1 F_{12}, \tag{3.27}$$
$$q_{2\to 1} = E_{b2} A_2 F_{21}. \tag{3.28}$$

La potencia neta que sale de 1 y llega a 2 es

$$q_{12} = E_{b1} A_1 F_{12} - E_{b2} A_2 F_{21}. \tag{3.29}$$

Si ambas están a la misma temperatura, el intercambio neto debe ser nulo; de ahí se obtiene la regla de reciprocidad:

$$\boxed{A_i F_{ij} = A_j F_{ji}} \tag{3.30}$$

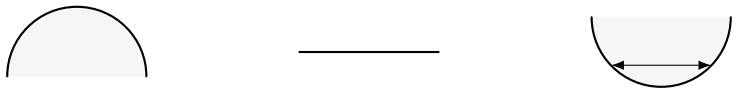
Por tanto, para dos superficies negras a temperaturas distintas,

$$\boxed{q_{12} = A_1 F_{12}\sigma\left(T_1^4 - T_2^4\right) = A_2 F_{21}\sigma\left(T_1^4 - T_2^4\right)} \tag{3.31}$$

En un recinto cerrado de n superficies, toda la radiación que sale de una superficie i debe llegar a alguna superficie del recinto, incluida ella misma si es cóncava. De ahí la regla de la suma:

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} F_{ij} = 1} \tag{3.32}$$

Una superficie convexa o plana no se ve a sí misma, por lo que $F_{ii} = 0$. Una superficie cóncava puede tener $F_{ii} > 0$, como se indica en la figura 3.9.



convexa $F_{ii} = 0$ | plana $F_{ii} = 0$ | cóncava $F_{ii} > 0$

Figura 3.9: Auto-visión respecto de la cara que limita el recinto. Sólo la superficie cóncava puede interceptar radiación emitida por otra parte de sí misma.

Si una superficie completa i ve a una superficie j dividida en m partes, se aplica

$$\boxed{F_{ij} = \sum_{k=1}^{m} F_{ik}} \tag{3.33}$$

Si la superficie dividida j ve a una superficie completa i, la reciprocidad da

$$\boxed{F_{ji} = \frac{\sum_{k=1}^{m} A_k F_{ki}}{\sum_{k=1}^{m} A_k}} \tag{3.34}$$

La tabla 3.4 reúne factores de forma básicos. Cuando existen simetrías, pueden igualarse factores. Si i y j son simétricas respecto a k, entonces $F_{ik} = F_{jk}$. También pueden utilizarse transformaciones geométricas compatibles: por ejemplo, si toda la radiación que va desde una superficie hacia una cavidad debe atravesar una abertura, el factor hacia la cavidad puede sustituirse por el factor hacia la abertura.

En las tablas siguientes, F_{ij} es la fracción de la radiación que abandona la superficie emisora i y alcanza directamente la superficie receptora j. La numeración, la orientación y las dimensiones pertenecen al croquis asociado a cada fila; no deben trasladarse entre geometrías. Las fórmulas suponen superficies difusas, medio no participante y las idealizaciones geométricas indicadas, como longitud infinita, coaxialidad, concentricidad o plano idealmente infinito.

Tabla 3.4: Factores de forma básicos usados con frecuencia.

Configuración	Factor de forma
Cilindros concéntricos largos	$F_{11} = 0, \quad F_{12} = 1, \quad F_{21} = A_1/A_2, \quad F_{22} = 1 - A_1/A_2$
Conducto largo de sección triangular equilátera, interpretado como prisma largo; factores entre caras laterales	$F_{ii} = 0, \quad F_{ij} = 1/2$ para $i \neq j$.
Placas paralelas largas del mismo ancho	$F_{12} = F_{21} = \sqrt{1 + (c/a)^2} - c/a.$
Placas adyacentes largas	$F_{12} = \frac{1}{2}\left[1 + c/a - \sqrt{1 + (c/a)^2}\right].$
Cuña simétrica larga	$F_{12} = F_{21} = 1 - \sin(\alpha/2).$
Cilindro largo paralelo a placa plana idealmente infinita	$F_{12} = 1/2.$
Esferas concéntricas	$F_{11} = 0,\ F_{12} = 1,\ F_{21} = A_1/A_2,\ F_{22} = 1 - A_1/A_2.$
Tetraedro regular; factores entre sus caras	$F_{ii} = 0, \quad F_{ij} = 1/3$ para $i \neq j$.
Esfera cercana a una superficie plana idealmente infinita	$F_{12} = 1/2.$
Superficie pequeña perpendicular al eje de una superficie de revolución	$F_{12} = \sin^2\theta.$
Superficie en el interior de una esfera	$F_{12} = A_2/(4\pi R^2).$
Discos coaxiales paralelos	Con $u_1 = r_1/s$, $u_2 = r_2/s$, donde s es la separación axial entre los planos, y $S = 1 + (1 + u_2^2)/u_1^2$: $$F_{12} = \frac{1}{2}\left\{S - \left[S^2 - 4\left(\frac{u_2}{u_1}\right)^2\right]^{1/2}\right\}.$$

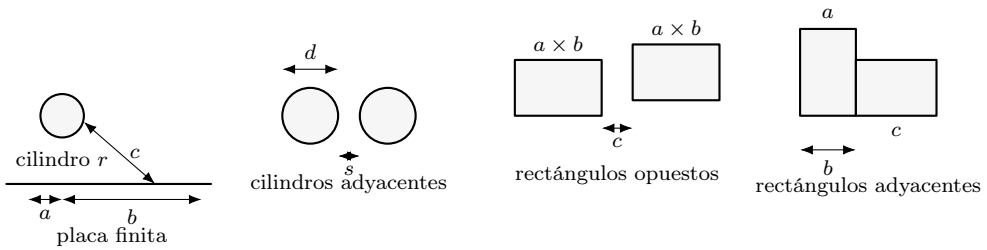


Figura 3.10: Croquis simplificados para interpretar las variables de la tabla de factores de forma complementarios.

Tabla 3.5: Factores de forma complementarios. Las variables se definen en cada fila y en el croquis previo.

Configuración	Factor de forma
Cilindro largo paralelo a una placa finita. Radio r; distancia perpendicular c al plano; bordes de la placa a distancias algebraicas a y b del pie de la perpendicular.	$F_{12} = \dfrac{r}{b-a}\left[\arctan\left(\dfrac{b}{c}\right) - \arctan\left(\dfrac{a}{c}\right)\right].$
Cilindros adyacentes largos y paralelos con diámetros iguales. Diámetro d; separación entre superficies s. Si la tabla usa distancia entre ejes S_e, entonces $X = S_e/d$.	$X = 1 + \dfrac{s}{d}, \qquad F_{12} = F_{21} = \dfrac{1}{\pi}\left[\sqrt{X^2-1} + \sin^{-1}\left(\dfrac{1}{X}\right) - X\right].$
Rectángulos opuestos paralelos, idénticos y alineados. Lados a, b, separación c.	$X = \dfrac{a}{c}, \quad Y = \dfrac{b}{c}.$ $F_{12} = \dfrac{2}{\pi XY}\left\{\ln\left[\dfrac{(1+X^2)(1+Y^2)}{1+X^2+Y^2}\right]^{1/2} - X\tan^{-1}X - Y\tan^{-1}Y + X\sqrt{1+Y^2}\tan^{-1}\left(\dfrac{X}{\sqrt{1+Y^2}}\right) + Y\sqrt{1+X^2}\tan^{-1}\left(\dfrac{Y}{\sqrt{1+X^2}}\right)\right\}.$
Rectángulos adyacentes con arista común b. Rectángulo 1 de altura a; rectángulo 2 de profundidad c.	$H = \dfrac{a}{b}, \quad W = \dfrac{c}{b}.$ $F_{12} = \dfrac{1}{\pi W}\left\{W\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{W}\right) + H\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{H}\right) - \sqrt{H^2+W^2}\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{H^2+W^2}}\right) + \dfrac{1}{4}\ln\left[\dfrac{(1+W^2)(1+H^2)}{1+W^2+H^2}\right] + \dfrac{W^2}{4}\ln\left[\dfrac{W^2(1+W^2+H^2)}{(1+W^2)(W^2+H^2)}\right] + \dfrac{H^2}{4}\ln\left[\dfrac{H^2(1+W^2+H^2)}{(1+H^2)(W^2+H^2)}\right]\right\}.$

La figura 3.10 define las variables geométricas usadas en la tabla 3.5. En un recinto negro de N superficies, la potencia neta que sale de i es

$$\boxed{q_i = A_i\sigma \sum_{j=1}^{N} F_{ij}\left(T_i^4 - T_j^4\right)} \tag{3.35}$$

3.6 Intercambio de radiación entre superficies grises difusas opacas

Las superficies reales no se comportan, en general, como cuerpos negros: emiten menos que un cuerpo negro a la misma temperatura y reflejan parte de la radiación que reciben. Conservar todas las dependencias espectrales, direccionales y especulares haría el cálculo ordinario demasiado complejo.

Por eso se adopta el modelo de *superficies grises, difusas y opacas*. Este modelo significa:

- **opacas**: no transmiten radiación, de modo que $\tau = 0$ y $\alpha + \rho = 1$;
- **grises**: las propiedades radiantes no dependen de la longitud de onda dentro del intervalo térmico considerado;
- **difusas**: la emisión y la reflexión no tienen una dirección preferente;
- **isotermas**: cada superficie del recinto se representa mediante una única temperatura.

Con estas hipótesis se puede usar una analogía de red muy parecida a la de las resistencias térmicas, pero conviene no olvidar que, antes de linealizar, el potencial de la red no es la temperatura, sino la potencia emisiva de cuerpo negro o la radiosidad.

La forma más clara de organizar el problema es separar tres ideas. Primero, cada superficie tiene una capacidad ideal de emitir, representada por $E_b = \sigma T^4$. Segundo, la superficie real no siempre deja salir esa emisión ideal completa; esa diferencia se representa mediante una resistencia superficial. Tercero, una vez que la radiación ha salido de una superficie, sólo una fracción llega directamente a cada una de las demás; esa conexión geométrica se representa mediante una resistencia espacial. Con este esquema, el problema deja de ser una sucesión de fórmulas aisladas y pasa a ser una red de nodos E_b y J, análoga a un circuito.

Idea central de la red radiante El nodo $E_{b,i}$ representa lo que emitiría la superficie i si fuera negra a la temperatura T_i. El nodo J_i representa lo que realmente abandona la superficie, sumando emisión propia y reflexión. La resistencia superficial une $E_{b,i}$ con J_i; la resistencia espacial une J_i con J_j. Por eso, en un recinto de dos superficies aparece una cadena en serie, mientras que en un recinto de tres o más superficies aparece una red con ramas en paralelo y ecuaciones nodales.

Etapa 1. Una superficie: emisión, reflexión y balance

La *radiosidad* J_i es toda la radiación que abandona la superficie i por unidad de área. Incluye dos contribuciones: la radiación emitida por la propia superficie y la radiación incidente que se refleja. La *irradiancia* G_i es la radiación que llega a la superficie i por unidad de área. Por tanto,

$$\boxed{J_i = E_i^{\text{emit}} + \rho_i G_i} \tag{3.36}$$

Para una superficie gris, difusa y opaca se tiene $\rho_i = 1 - \alpha_i = 1 - \varepsilon_i$, y por la ley de Kirchhoff $\alpha_i = \varepsilon_i$. Además, $E_i^{\text{emit}} = \varepsilon_i E_{b,i}$. Así,

$$\boxed{J_i = \varepsilon_i E_{b,i} + (1 - \varepsilon_i) G_i} \tag{3.37}$$

En un recinto cerrado, la irradiancia que llega a i procede de las radiosidades de todas las superficies que ve:

$$\boxed{G_i = \sum_{j=1}^{N} F_{ij} J_j} \tag{3.38}$$

Sustituyendo,

$$\boxed{J_i = \varepsilon_i E_{b,i} + (1-\varepsilon_i) \sum_{j=1}^{N} F_{ij} J_j} \tag{3.39}$$

Esta ecuación es la base del método de radiosidades. Si $\varepsilon_i = 1$, la superficie es negra y la expresión se reduce inmediatamente a $J_i = E_{b,i} = \sigma T_i^4$, porque no hay radiación reflejada.

La potencia neta que sale de la superficie i se obtiene restando lo que llega de lo que sale:

$$\boxed{q_i = A_i(J_i - G_i) = A_i \sum_{j=1}^{N} F_{ij}(J_i - J_j)} \tag{3.40}$$

El signo es importante: $q_i > 0$ significa que la superficie i pierde energía por radiación; $q_i < 0$ significa que recibe energía neta.

Entre dos superficies concretas, la potencia neta que va de i a j es

$$\boxed{q_{ij} = A_i F_{ij}(J_i - J_j) = A_j F_{ji}(J_i - J_j)} \tag{3.41}$$

Si $J_i > J_j$, el intercambio neto va de i hacia j; si $J_i < J_j$, el sentido real es el contrario.

Esta última expresión ayuda a interpretar los factores de forma. Aunque F_{ij} sea grande, el intercambio puede ser pequeño si las radiosidades son parecidas. Y aunque una superficie sea muy caliente, puede intercambiar poco con otra si apenas la ve, es decir, si F_{ij} es pequeño. La radiación entre superficies depende simultáneamente de nivel térmico, propiedades radiantes y geometría.

Resistencias de la red de radiosidad

A partir de la relación de radiosidad se obtiene, para una superficie no negra ($\varepsilon_i \neq 1$),

$$\boxed{q_i = \frac{E_{b,i} - J_i}{R_{s,i}}, \qquad R_{s,i} = \frac{1-\varepsilon_i}{\varepsilon_i A_i}} \tag{3.42}$$

El término $R_{s,i}$ se denomina *resistencia superficial de radiación*. Representa la dificultad de la superficie para emitir radiación neta respecto a un cuerpo negro. Si $\varepsilon_i \to 1$, esta resistencia tiende a cero y la superficie se comporta como negra.

La interacción geométrica entre dos nodos de radiosidad se representa mediante la *resistencia espacial*

$$\boxed{q_{ij} = \frac{J_i - J_j}{R_{ij}}, \qquad R_{ij} = \frac{1}{A_i F_{ij}} = \frac{1}{A_j F_{ji}}} \tag{3.43}$$

La igualdad de las dos formas se debe a la reciprocidad $A_i F_{ij} = A_j F_{ji}$.

No confundir dos tipos de resistencia Las resistencias $R_{s,i}$ y R_{ij} de la red de radiosidad tienen unidades de $1/\mathrm{m}^2$, porque el potencial de la red es E_b o J, en $\mathrm{W/m}^2$. No son resistencias térmicas en K/W. Una resistencia térmica ordinaria sólo aparece cuando se linealiza $T_1^4 - T_2^4$ y se escribe $q = \Delta T / R_{\mathrm{rad}}$.

La figura 3.11 muestra la red equivalente para dos superficies grises difusas. Para dos superficies, si se define

$$D_{12} = \frac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1 A_1} + \frac{1}{A_1 F_{12}} + \frac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2 A_2}, \tag{3.44}$$

la expresión exacta es

$$q_{12} = \frac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{D_{12}}. \tag{3.45}$$

Como $T_1^4 - T_2^4 = (T_1 - T_2)(T_1 + T_2)(T_1^2 + T_2^2)$, puede escribirse de forma linealizada exacta entre esas dos temperaturas como

$$\boxed{q_{12} = \frac{T_1 - T_2}{R_{\text{rad},12}}, \qquad R_{\text{rad},12} = \frac{D_{12}}{\sigma(T_1 + T_2)(T_1^2 + T_2^2)}} \tag{3.46}$$

Esta $R_{\text{rad},12}$ sí tiene unidades de K/W, pero depende de las temperaturas absolutas. Por tanto, si las temperaturas cambian mucho durante un proceso, la resistencia linealizada también cambia.

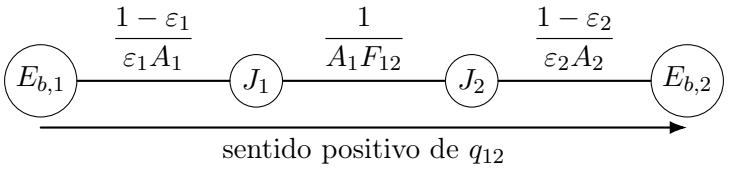


Figura 3.11: Red de resistencias radiantes para dos superficies grises difusas.

3.6.1 Etapa 2. Recinto de dos superficies grises difusas

Cuando el recinto sólo tiene dos superficies, toda la potencia que sale de una llega a la otra en sentido neto. Por conservación de energía,

$$q_1 = q_{12} = -q_2. \tag{3.47}$$

La red queda formada por tres resistencias en serie: una resistencia superficial de la superficie 1, una resistencia espacial y una resistencia superficial de la superficie 2. Por tanto,

$$\boxed{q_{12} = \frac{\sigma\left(T_1^4 - T_2^4\right)}{\dfrac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1 A_1} + \dfrac{1}{A_1 F_{12}} + \dfrac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2 A_2}}} \tag{3.48}$$

La fórmula es válida para dos superficies grises, difusas y opacas que formen un recinto. La geometría sólo entra a través de A_1, A_2 y F_{12}.

Para usarla sin errores conviene leer el denominador como suma de tres obstáculos: la superficie 1 se aparta del cuerpo negro por $(1-\varepsilon_1)/(\varepsilon_1 A_1)$, la geometría limita la visión directa mediante $1/(A_1 F_{12})$, y la superficie 2 se aparta del cuerpo negro por $(1-\varepsilon_2)/(\varepsilon_2 A_2)$. Si una superficie es negra, su obstáculo superficial desaparece; si las dos superficies se ven completamente, el obstáculo espacial toma su valor mínimo para esa área.

Uso rápido en dos superficies Comprobar primero si las superficies forman realmente un recinto de dos superficies. Después calcular F_{12} y usar reciprocidad para verificar $A_1 F_{12} = A_2 F_{21}$. Finalmente sustituir temperaturas en K. El signo de q_{12} sale de $T_1^4 - T_2^4$: si es positivo, el calor neto sale de 1 hacia 2.

Paredes planas paralelas grandes. Si las placas son muy grandes frente a su separación, $F_{12} \simeq 1$ y $A_1 = A_2 = A$. Entonces

$$\boxed{q_{12} = \frac{A\sigma\left(T_1^4 - T_2^4\right)}{\dfrac{1}{\varepsilon_1} + \dfrac{1}{\varepsilon_2} - 1}} \tag{3.49}$$

Una forma muy clara de leer esta expresión es introducir la emisividad efectiva

$$\varepsilon_{\text{ef}} = \frac{1}{1/\varepsilon_1 + 1/\varepsilon_2 - 1}, \tag{3.50}$$

de modo que $q_{12} = A\varepsilon_{\text{ef}}\sigma(T_1^4 - T_2^4)$. Si ambas placas son negras, $\varepsilon_{\text{ef}} = 1$; si una de ellas tiene baja emisividad, ε_{ef} disminuye mucho.

Cilindros concéntricos largos. Para dos cilindros concéntricos largos, con el cilindro 1 dentro del 2, se toma $F_{12} = 1$ y $A_1/A_2 = r_1/r_2$. Así,

$$\boxed{q_{12} = \frac{A_1\sigma\left(T_1^4 - T_2^4\right)}{\dfrac{1}{\varepsilon_1} + \dfrac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2}\dfrac{r_1}{r_2}}} \tag{3.51}$$

Si el cilindro exterior es muy grande, $r_1/r_2 \to 0$, y su emisividad deja de influir de forma apreciable.

Esferas concéntricas. Para dos esferas concéntricas, $F_{12} = 1$ y $A_1/A_2 = (r_1/r_2)^2$, por lo que

$$\boxed{q_{12} = \frac{A_1\sigma\left(T_1^4 - T_2^4\right)}{\dfrac{1}{\varepsilon_1} + \dfrac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2}\left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)^2}} \tag{3.52}$$

Objeto convexo pequeño en una cavidad grande. Si $A_1 \ll A_2$ y $F_{12} \simeq 1$, el término de la superficie grande en el denominador,

$$\frac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2}\frac{A_1}{A_2},$$

se hace despreciable. La misma simplificación se obtiene si la cavidad se comporta casi como negra, $\varepsilon_2 \to 1$. En ambos casos,

$$\boxed{q_{12} \simeq \varepsilon_1 A_1\sigma\left(T_1^4 - T_2^4\right)} \tag{3.53}$$

Esta es una de las expresiones más usadas en problemas prácticos de intercambio con paredes, hornos, cámaras, cielos radiativos o envolventes grandes.

Linealización para combinar con convección. Para combinar radiación con convección suele escribirse $q = h_r A(T_s - T_{\text{sur}})$, donde T_{sur} representa unos alrededores radiantes genéricos. En el caso de una superficie pequeña dentro de una cavidad grande,

$$\boxed{h_r = \varepsilon\sigma(T_s^2 + T_{\text{sur}}^2)(T_s + T_{\text{sur}})} \tag{3.54}$$

El coeficiente h_r no es una propiedad constante: depende de las temperaturas absolutas. Por eso debe recalcularse si cambia mucho el nivel térmico del problema.

Para dos placas paralelas grandes puede usarse primero la emisividad efectiva

$$\varepsilon_{\text{ef}} = \frac{1}{1/\varepsilon_1 + 1/\varepsilon_2 - 1}, \tag{3.55}$$

y después escribir

$$h_{r,12} = \varepsilon_{\text{ef}}\sigma(T_1 + T_2)(T_1^2 + T_2^2), \tag{3.56}$$

$$q_{12} = h_{r,12}A(T_1 - T_2). \tag{3.57}$$

Esta forma linealizada es útil para combinar radiación y convección en redes térmicas convencionales, siempre que se recuerde que $h_{r,12}$ debe evaluarse con las temperaturas absolutas del problema.

Ejemplo patrón: dos superficies grises. Este ejemplo debe dominarse antes de pasar a recintos de tres superficies. Dos placas paralelas muy grandes están a $T_1 = 800\,\mathrm{K}$ y $T_2 = 500\,\mathrm{K}$, con emisividades $\varepsilon_1 = 0{,}2$ y $\varepsilon_2 = 0{,}7$. La potencia radiante neta por unidad de área es

$$q''_{12} = \frac{\sigma\left(T_1^4 - T_2^4\right)}{\dfrac{1}{\varepsilon_1} + \dfrac{1}{\varepsilon_2} - 1} \tag{3.58}$$

$$= \frac{5{,}67 \times 10^{-8}\left(800^4 - 500^4\right)}{1/0{,}2 + 1/0{,}7 - 1} \tag{3.59}$$

$$= 3{,}63 \times 10^3\ \mathrm{W/m^2}. \tag{3.60}$$

El signo positivo indica que el calor neto sale de la placa 1 y llega a la placa 2.

Ejemplo resuelto: superficie pequeña en cavidad grande. Una superficie pequeña de área $A_1 = 0{,}1\,\mathrm{m^2}$, emisividad $\varepsilon_1 = 0{,}8$ y temperatura $T_1 = 500\,\mathrm{K}$ intercambia radiación con una cavidad grande a $T_2 = 300\,\mathrm{K}$. Entonces

$$q_{12} \simeq \varepsilon_1 A_1 \sigma\left(T_1^4 - T_2^4\right) \tag{3.61}$$

$$= 0{,}8 \cdot 0{,}1 \cdot 5{,}67 \times 10^{-8}\left(500^4 - 300^4\right) \tag{3.62}$$

$$= 246{,}8\ \mathrm{W}. \tag{3.63}$$

La linealización da el mismo resultado si se evalúa h_r entre esas dos temperaturas:

$$h_r = \varepsilon_1 \sigma (T_1 + T_2)(T_1^2 + T_2^2) \tag{3.64}$$

$$= 0{,}8 \cdot 5{,}67 \times 10^{-8}\,(500 + 300)(500^2 + 300^2) \tag{3.65}$$

$$= 12{,}34\ \mathrm{W/(m^2\,K)}, \tag{3.66}$$

$$q_{12} = h_r A_1 (T_1 - T_2) = 246{,}8\ \mathrm{W}. \tag{3.67}$$

Red gráfica o ecuaciones directas Ambos métodos expresan el mismo balance. Para dos superficies, la red en serie suele ser la opción más clara y conduce directamente a una resistencia equivalente. Para tres o más superficies, las ecuaciones de radiosidad suelen ser más compactas. Elija un método principal y úselo de forma coherente; la red puede quedar como apoyo visual, no como un segundo procedimiento independiente.

Etapa 3. Varias superficies: método directo de radiosidades

El método de red es muy visual para dos o tres superficies. Para recintos con más superficies, resulta más cómodo escribir directamente una ecuación por superficie. Hay dos formas equivalentes, según el dato conocido.

Si se conoce la **potencia neta** que sale de la superficie i, se usa

$$\boxed{q_i = A_i \sum_{j=1}^{N} F_{ij}(J_i - J_j)} \tag{3.68}$$

Si se conoce la **temperatura** de la superficie i, entonces $E_{b,i} = \sigma T_i^4$ es conocido y se usa

$$\boxed{\sigma T_i^4 = J_i + \frac{1 - \varepsilon_i}{\varepsilon_i} \sum_{j=1}^{N} F_{ij}(J_i - J_j)} \tag{3.69}$$

El término con $j = i$ no aporta nada porque $J_i - J_i = 0$. Si la superficie es negra, $\varepsilon_i = 1$, se impone directamente $J_i = E_{b,i}$. Si la superficie es reirradiadora, se impone $q_i = 0$; en ese caso $J_i = E_{b,i}$, pero la temperatura puede ser desconocida y se calcula después como $T_i = (J_i/\sigma)^{1/4}$.

Procedimiento general de cálculo Primero se calculan todos los factores de forma. Después se decide qué condición tiene cada superficie: temperatura conocida, potencia neta conocida, superficie negra o superficie reirradiadora. A continuación se escriben tantas ecuaciones como superficies tenga el recinto y se resuelve el sistema lineal de radiosidades. Al final se calculan las potencias con $q_i = A_i \sum_j F_{ij}(J_i - J_j)$ y se comprueba que, en un recinto cerrado sin pérdidas externas, $\sum_i q_i = 0$.

3.6.2 Aplicación a recintos de tres superficies grises difusas

El recinto de tres superficies no se reduce necesariamente a una serie. Sólo se dibuja la rama J_i–J_j si $F_{ij} > 0$; para $F_{ij} = 0$ la rama no existe, de forma equivalente a una resistencia infinita. La red puede ser mallada sin estar completamente conectada.

Para cada superficie y para cada pareja de superficies se definen

$$R_{s,i} = \frac{1-\varepsilon_i}{\varepsilon_i A_i}, \qquad R_{ij} = \frac{1}{A_i F_{ij}} = \frac{1}{A_j F_{ji}}. \tag{3.70}$$

Si las tres temperaturas están especificadas, los potenciales $E_{b,i} = \sigma T_i^4$ son conocidos. Aplicando conservación de potencia en cada nodo de radiosidad se obtiene

$$\frac{E_{b,1} - J_1}{R_{s,1}} + \frac{J_2 - J_1}{R_{12}} + \frac{J_3 - J_1}{R_{13}} = 0, \tag{3.71}$$

$$\frac{J_1 - J_2}{R_{12}} + \frac{E_{b,2} - J_2}{R_{s,2}} + \frac{J_3 - J_2}{R_{23}} = 0, \tag{3.72}$$

$$\frac{J_1 - J_3}{R_{13}} + \frac{J_2 - J_3}{R_{23}} + \frac{E_{b,3} - J_3}{R_{s,3}} = 0. \tag{3.73}$$

La interpretación es directa: en cada nodo, la suma algebraica de potencias que entran y salen debe ser nula. Las ecuaciones son lineales en las radiosidades, aunque dependan de temperaturas elevadas a la cuarta potencia a través de $E_b = \sigma T^4$.

Para resolver a mano o con calculadora suele ser más limpio escribir el sistema en forma de conductancias. Definiendo

$$g_i = \frac{1}{R_{s,i}} = \frac{\varepsilon_i A_i}{1-\varepsilon_i}, \qquad g_{ij} = \frac{1}{R_{ij}} = A_i F_{ij}, \tag{3.74}$$

las ecuaciones anteriores se escriben como

$$(g_1 + g_{12} + g_{13})J_1 - g_{12}J_2 - g_{13}J_3 = g_1 E_{b,1}, \tag{3.75}$$

$$-g_{12}J_1 + (g_2 + g_{12} + g_{23})J_2 - g_{23}J_3 = g_2 E_{b,2}, \tag{3.76}$$

$$-g_{13}J_1 - g_{23}J_2 + (g_3 + g_{13} + g_{23})J_3 = g_3 E_{b,3}. \tag{3.77}$$

Esta forma deja claro qué coeficientes van en la diagonal y cuáles fuera de ella. Si una superficie es negra, no se usa $g_i \to \infty$; simplemente se fija $J_i = E_{b,i}$ y se elimina esa incógnita del sistema. Si una superficie es reirradiadora, no se usa su ecuación de temperatura, sino la condición $q_i = 0$. La forma superficial $q_i = (E_{b,i} - J_i)/R_{s,i}$ queda indeterminada como $0/0$ cuando $\varepsilon_i = 1$. Para una superficie negra, la potencia se obtiene del balance espacial $q_i = A_i \sum_j F_{ij}(J_i - J_j)$, o directamente como incógnita de la ecuación nodal una vez impuesto $J_i = E_{b,i}$.

Una vez resuelto el sistema, las potencias netas que salen de cada superficie son

$$q_1 = \frac{E_{b,1} - J_1}{R_{s,1}} = \frac{J_1 - J_2}{R_{12}} + \frac{J_1 - J_3}{R_{13}}, \tag{3.78}$$

$$q_2 = \frac{E_{b,2} - J_2}{R_{s,2}} = \frac{J_2 - J_1}{R_{12}} + \frac{J_2 - J_3}{R_{23}}, \tag{3.79}$$

$$q_3 = \frac{E_{b,3} - J_3}{R_{s,3}} = \frac{J_3 - J_1}{R_{13}} + \frac{J_3 - J_2}{R_{23}}. \tag{3.80}$$

Como comprobación, en un recinto cerrado sin pérdidas externas debe cumplirse

$$q_1 + q_2 + q_3 = 0. \tag{3.81}$$

Si no se cumple, hay un error de signo, de factor de forma o de unidades. La figura 3.12 resume la red de resistencias correspondiente.

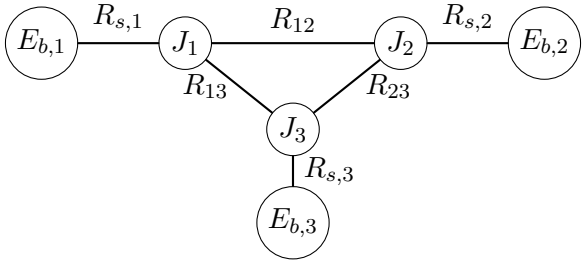


Figura 3.12: Red de resistencias radiantes para un recinto de tres superficies grises difusas en el caso mostrado, donde los tres factores mutuos son positivos.

Superficie negra. Si una superficie es negra, su resistencia superficial es nula. Por ejemplo, si la superficie 3 es negra, se impone directamente

$$J_3 = E_{b,3} = \sigma T_3^4. \tag{3.82}$$

No se escribe una ecuación superficial adicional para ella; su nodo de radiosidad queda fijado.

Superficie reirradiadora. Una superficie reirradiadora no tiene intercambio neto hacia el exterior del recinto, de modo que $q_i = 0$. Para una superficie 3 reirradiadora,

$$\frac{J_3 - J_1}{R_{13}} + \frac{J_3 - J_2}{R_{23}} = 0. \tag{3.83}$$

De aquí se deduce directamente que su radiosidad es una media ponderada de las radiosidades que ve:

$$\boxed{J_3 = \frac{J_1/R_{13} + J_2/R_{23}}{1/R_{13} + 1/R_{23}}} \tag{3.84}$$

Después de calcular J_3, su temperatura se obtiene mediante

$$T_3 = \left(\frac{J_3}{\sigma}\right)^{1/4}. \tag{3.85}$$

Esta situación aparece, por ejemplo, en pantallas o paredes delgadas sin generación interna, donde la energía absorbida por una cara acaba reemitiéndose sin acumulación neta. La clave es que una superficie reirradiadora no se prescribe por su temperatura, sino por su balance energético nulo.

Potencia prescrita. Si se conoce la potencia neta q_1 y no la temperatura de la superficie 1, se escribe primero

$$q_1 = \frac{J_1 - J_2}{R_{12}} + \frac{J_1 - J_3}{R_{13}}. \tag{3.86}$$

Después se recupera el potencial de cuerpo negro mediante

$$E_{b,1} = J_1 + R_{s,1} q_1, \tag{3.87}$$

y finalmente

$$T_1 = \left(\frac{E_{b,1}}{\sigma} \right)^{1/4}. \tag{3.88}$$

Este planteamiento es el más natural cuando una superficie contiene una resistencia eléctrica o un calentador de potencia conocida.

Lista de comprobación para dos y tres superficies Todos los F_{ij} deben estar entre 0 y 1; cada fila debe cumplir $\sum_j F_{ij} = 1$; la reciprocidad $A_i F_{ij} = A_j F_{ji}$ debe cumplirse; las temperaturas que entran en $E_b = \sigma T^4$ deben estar en K; una potencia positiva sale de la superficie definida; y, en un recinto cerrado sin pérdidas externas, la suma de potencias netas debe ser cero.

Errores frecuentes No se deben sumar directamente resistencias radiantes de red con resistencias convectivas en K/W. Primero se resuelve la red de radiosidades o se linealiza la radiación en torno a las temperaturas del problema. Tampoco debe imponerse $J = \sigma T^4$ a una superficie gris cualquiera: eso sólo es cierto para superficies negras o para superficies reirradiadoras una vez conocido su balance neto nulo.

3.7 Escudos o pantallas de radiación

La figura 3.13 ilustra el efecto de interponer una pantalla opaca. Una pantalla de radiación es una lámina opaca interpuesta entre dos superficies. Aunque no tenga mucho espesor, reduce el intercambio radiante porque divide el salto radiativo en varios intercambios sucesivos y añade resistencias superficiales. Su eficacia aumenta si sus caras tienen baja emisividad, es decir, alta reflectancia.

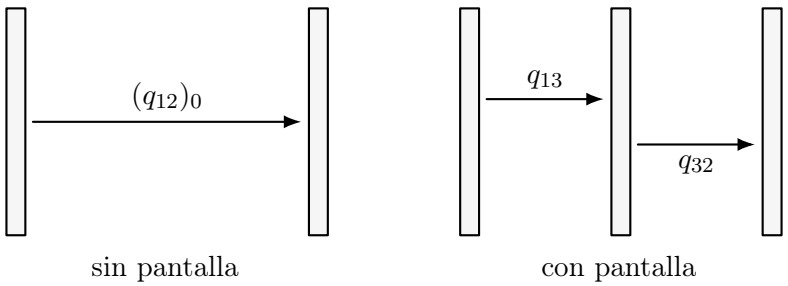


Figura 3.13: La interposición de una pantalla opaca reduce el intercambio neto por radiación.

Sin pantalla, para dos superficies grises,

$$(q_{12})_0 = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{\dfrac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1 A_1} + \dfrac{1}{A_1 F_{12}} + \dfrac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2 A_2}}. \tag{3.89}$$

Con una pantalla 3, cuyas caras izquierda y derecha tienen emisividades ε_{3a} y ε_{3b}, se obtiene. Para una pantalla plana muy delgada suele tomarse $A_{3a} = A_{3b} = A_3$.

$$q_{12} = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{\dfrac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1 A_1} + \dfrac{1}{A_1 F_{1,3a}} + \dfrac{1-\varepsilon_{3a}}{\varepsilon_{3a} A_{3a}} + \dfrac{1-\varepsilon_{3b}}{\varepsilon_{3b} A_{3b}} + \dfrac{1}{A_{3b} F_{3b,2}} + \dfrac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2 A_2}}. \tag{3.90}$$

Si se trata de placas paralelas grandes, con $F \simeq 1$, mismas áreas y la misma emisividad en todos los planos, incluidas las dos caras de cada pantalla, y se interponen n pantallas idénticas, la potencia se reduce según

$$\boxed{(q_{12})_n = \frac{(q_{12})_0}{n+1}} \tag{3.91}$$

Con una pantalla se reduce al 50 % de la potencia inicial; con dos pantallas queda el 33 % de la potencia inicial, es decir, una reducción del 67 %; con tres queda el 25 %, es decir, una reducción del 75 %. Más allá del valor idealizado, la idea física es que una superficie opaca intermedia reduce de forma importante la intercambio radiante entre un foco caliente y otro frío.

Como $\rho = 1 - \alpha$ y, para grises difusas opacas, $\alpha = \varepsilon$, una superficie muy reflectante tiene baja emisividad. Si $\rho \to 1$, entonces $\varepsilon \to 0$, la resistencia superficial crece y el intercambio radiante tiende a anularse. Por eso se emplean superficies pulidas, metalizadas o aluminizadas como aislamiento reflectivo, en termos, cámaras de aire, protecciones frente a hornos y pantallas frente a radiación solar.

3.8 Radiaciones solar y atmosférica

La radiación solar llega a la Tierra después de interactuar con la atmósfera. El Sol puede aproximarse como un cuerpo negro de temperatura superficial efectiva próxima a 5780 K. Es un cuerpo casi esférico de diámetro aproximado $1{,}39 \times 10^9$ m, situado a una distancia media de $1{,}50 \times 10^{11}$ m de la Tierra. Emite alrededor de $3{,}8 \times 10^{26}$ W, de los cuales sólo una fracción muy pequeña, del orden de $1{,}7 \times 10^{17}$ W, intercepta la Tierra. Esa energía procede de reacciones nucleares de fusión en el interior solar, donde núcleos de hidrógeno se combinan para formar helio; por eso el Sol puede interpretarse, físicamente, como un reactor de fusión natural. Algunos textos clásicos de transmisión de calor citan temperaturas del núcleo del orden de 40×10^6 K; los modelos solares actuales suelen situarlas más cerca de $1{,}5 \times 10^7$ K. En cualquier caso, la temperatura que se usa para modelar la emisión solar exterior no es la del núcleo, sino la temperatura efectiva superficial, del orden de 5780 K. La irradiancia solar extraterrestre media sobre una superficie perpendicular a los rayos solares, a la distancia media Tierra–Sol, se adopta en este capítulo como

$$\boxed{G_0 = 1353 \ \mathrm{W/m^2}} \tag{3.92}$$

Nota de consistencia bibliográfica Se mantiene $G_0 = 1353\,\mathrm{W/m^2}$ como valor de referencia adoptado en este capítulo. Algunas ediciones de Çengel y Ghajar y fuentes modernas emplean valores ligeramente distintos, por ejemplo alrededor de 1361 o 1373 $\mathrm{W/m^2}$, debido a convenciones y actualizaciones metrológicas. Para aplicaciones concretas debe usarse el valor especificado para el caso de estudio o, en su defecto, el valor de referencia adoptado en este libro.

La constante solar se mide en el exterior de la atmósfera y sobre una superficie perpendicular a los rayos solares. La distancia Tierra–Sol no es constante: conviene recordar que es mínima en torno a principios de enero, durante el perihelio, y máxima en torno a principios de julio, durante el afelio. Por tanto, la proximidad orbital no explica por sí sola las estaciones.

Prácticamente toda la radiación solar que alcanza la superficie terrestre se concentra entre 0,3 y 3 µm. En un día claro, la componente directa que llega a la superficie rara vez supera $950\,\mathrm{W/m^2}$, y puede ser bastante menor si hay nubosidad, polvo o contaminación atmosférica.

Al atravesar la atmósfera, la radiación solar se atenúa por absorción y dispersión. La absorción se debe principalmente a gases como O_2, O_3, H_2O y CO_2. El oxígeno absorbe en una banda estrecha alrededor de 0,76 µm. El ozono absorbe casi por completo la radiación ultravioleta por debajo de 0,3 µm, de manera importante entre 0,3 y 0,4 µm y algo en el visible, protegiendo a los sistemas biológicos. El vapor de agua y el dióxido de carbono absorben de forma importante en el infrarrojo. También el polvo y otros contaminantes atmosféricos absorben radiación en diversas bandas.

La dispersión atmosférica es un proceso volumétrico de redistribución angular producido por moléculas de aire, aerosoles, polvo y gotas de agua. No debe confundirse con la reflexión difusa en una superficie: la radiación cambia de dirección al interactuar con partículas distribuidas en el volumen atmosférico. Las moléculas de oxígeno y nitrógeno dispersan con mayor intensidad longitudes de onda cortas, lo

que explica el color azul del cielo. En amaneceres y atardeceres, el camino atmosférico es mayor y las componentes azul y violeta se atenúan más, dejando predominio de tonos rojizos y anaranjados.

La figura 3.14 representa el balance superficial exterior. La irradiancia solar incidente sobre una superficie tiene una parte directa y una parte difusa:

$$\boxed{G_s = G_{sD}\cos\beta + G_{sd}} \tag{3.93}$$

Aquí G_{sD} es la radiación solar directa, G_{sd} la radiación solar difusa y β el ángulo entre los rayos solares y la normal a la superficie. Si hay superficies cercanas que reflejan radiación solar directa o difusa, se añade

$$\boxed{G_{s,i} = G_{sD}\left[\cos\beta_i + \sum_{j=1}^{n}\rho_{s,j}\cos\beta_j F_{ij}\right] + G_{sd}\left[F_{i,\text{cielo}} + \sum_{j=1}^{n}\rho_{s,j}F_{ij}\right]} \tag{3.94}$$

En la forma simplificada se toma $F_{i,\text{cielo}} \simeq 1$. Si las superficies vecinas ocupan una parte apreciable del hemisferio visto por la superficie i, debe usarse $F_{i,\text{cielo}} = 1 - \sum_j F_{ij}$ para no contar dos veces la radiación difusa del cielo. La radiación solar absorbida por una superficie opaca es

$$\boxed{q''_{\text{abs},s} = \alpha_s G_s} \tag{3.95}$$

En los balances siguientes, G_s designa la irradiancia que incide *sobre el plano de la superficie*. Si el dato disponible es la irradiancia directa normal $G_{b,n}$, la contribución sobre la superficie es $G_{b,n}\,\max(0,\cos\beta)$. Un dato ya referido al plano no debe proyectarse una segunda vez.

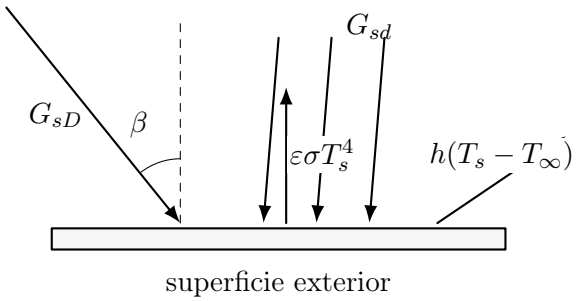


Figura 3.14: Balance conceptual de radiación solar directa, radiación difusa, emisión térmica y convección sobre una superficie exterior.

En este libro se usa T_{sur} para alrededores radiantes genéricos y T_{cielo} sólo para el caso atmosférico específico. La atmósfera también emite radiación térmica, principalmente por CO_2 y H_2O. Su emisión se concentra de manera importante en las bandas de 5 a 8 µm y por encima de 13 µm. La irradiancia infrarroja descendente G_{LW} es el dato físico primario. Puede expresarse mediante una temperatura efectiva $T_{\text{cielo,ef}} = (G_{\text{LW}}/\sigma)^{1/4}$ sólo para el campo visual representado. Su valor depende de humedad, nubosidad, perfil térmico, orientación y modelo atmosférico; otras superficies visibles requieren factores de forma y temperaturas separados. Como valor orientativo, esta temperatura efectiva se sitúa aproximadamente entre $-43\,^\circ\text{C}$, para cielo frío y despejado, y $12\,^\circ\text{C}$, para cielo cálido con nubes. En la fórmula radiante debe convertirse siempre a kelvin antes de elevarla a la cuarta potencia.

Un balance superficial habitual, con signo positivo hacia la superficie, es

$$\boxed{q''_{\text{neto}} = \alpha_s G_s - h(T_s - T_\infty) - \varepsilon\sigma\left(T_s^4 - T_{\text{cielo}}^4\right)} \tag{3.96}$$

Esta expresión cambia de signo si se adopta el convenio de potencia saliente. Lo importante es mantener el mismo criterio en todos los términos.

Los gases elementales como H_2, O_2 y N_2 tienen absorción y emisión despreciables a temperaturas moderadas, por lo que se tratan como transparentes en muchos problemas. En cambio, gases de moléculas mayores, como vapor de agua y dióxido de carbono, pueden absorber y emitir de forma significativa. Como referencia de escala incluida como referencia de escala, una capa de vapor de agua a 1 bar y 100 °C puede emitir más del 50 % de la energía que emitiría un cuerpo negro a la misma temperatura.

3.9 Propiedades radiantes de una superficie

La radiación emitida por cuerpos a baja o media temperatura es principalmente infrarroja, mientras que la radiación solar procede de una fuente de alta temperatura y es de onda corta. Por ello se distinguen las propiedades infrarrojas (α,ρ,τ) de las solares (α_s,ρ_s,τ_s). Junto con la emisividad ε, aparecen siete propiedades relacionadas por

$$\alpha + \rho + \tau = 1, \tag{3.97}$$

$$\alpha_s + \rho_s + \tau_s = 1, \tag{3.98}$$

$$\alpha = \varepsilon \qquad \text{para cuerpo gris en radiación térmica.} \tag{3.99}$$

Para cuerpos opacos, $\tau = \tau_s = 0$. Entonces quedan cinco propiedades y sólo dos son independientes; se suelen escoger ε y α_s.

Tabla 3.6: Propiedades radiantes aproximadas de algunas superficies opacas.

Acabado superficial	α_s	ε	α_s/ε
Recubrimientos selectivos para captación solar			
Cromo negro depositado electrolíticamente	0,95	0,15	6,3
Níquel negro depositado electrolíticamente	0,90	0,15	6,0
Óxido de cobre sobre hoja de cobre	0,87	0,12	7,3
Metales y acabados metálicos			
Aluminio pulido	0,09	0,03	3,0
Aluminio anodizado	0,14	0,84	0,17
Hoja de aluminio nueva o muy brillante	0,15	0,05	3,0
Cobre pulido	0,18	0,03	6,0
Cobre viejo	0,65	0,75	0,87
Acero inoxidable laminado/acabado comercial	0,37	0,60	0,62
Acero inoxidable no pulido	0,50	0,21	2,4
Óxido negro de níquel	0,92	0,08	11,5
Cromo negro	0,87	0,09	9,7
Teflón	0,85	0,12	7,1
Materiales constructivos, recubrimientos comunes y superficies naturales			
Hormigón	0,60	0,88	0,7
Mármol blanco	0,46	0,95	0,5
Ladrillo rojo	0,63	0,93	0,7
Asfalto	0,90	0,90	1,0
Pintura negra	0,97	0,97	1,0
Pintura blanca	0,14	0,93	0,15
Nieve	0,28	0,97	0,3
Piel humana caucásica	0,62	0,97	0,64

Los cocientes α_s/ε de la tabla 3.6 se han calculado con las cifras de la tabla y se redondean a dos cifras significativas cuando ayuda a evitar ambigüedades. Para captación solar interesa α_s alta y ε baja: se absorbe mucha radiación solar y se pierde poca energía por emisión infrarroja. Por eso los recubrimientos selectivos se valoran mediante α_s/ε; valores altos son adecuados para captadores solares térmicos. Para rechazo de calor bajo el Sol interesa lo contrario: baja α_s y, si se desea enfriamiento radiativo, alta emisividad infrarroja.

Para aislamiento reflectivo se exige baja emisividad, o alta reflectancia infrarroja $\rho = 1 - \varepsilon$. Es el principio de las paredes interiores reflectantes de un termo y de capas aluminizadas en cámaras de aire de construcción. Si la superficie reflectante está a la sombra, su absortancia solar no interviene: lo importante es su baja emisividad frente a la radiación térmica intercambiada dentro de la cámara.

3.10 Efecto invernadero

El efecto invernadero se produce cuando un material o una atmósfera transmite bien la radiación procedente de fuentes de alta temperatura y onda corta, pero bloquea o absorbe la radiación infrarroja procedente de fuentes de baja temperatura. Entre los ejemplos citados habitualmente están el vidrio, los plásticos transparentes, el vapor de agua, el dióxido de carbono y el metano. En términos de propiedades, presentan transmitancia solar τ_s alta y transmitancia infrarroja τ baja.

La figura 3.15 muestra de forma cualitativa el comportamiento espectral del vidrio corriente. El vidrio corriente es un ejemplo: transmite con eficacia la radiación visible y parte del infrarrojo cercano, aproximadamente entre 0,4 y 2,5 µm, aunque bloquea buena parte de la radiación ultravioleta de menor longitud de onda. Por encima de unas 3 µm se vuelve prácticamente opaco a la radiación térmica infrarroja. Por eso un coche al Sol se calienta más de lo que lo haría sin cristales: entra radiación solar de onda corta, las superficies interiores se calientan y emiten infrarrojo, pero esa radiación sale con dificultad.

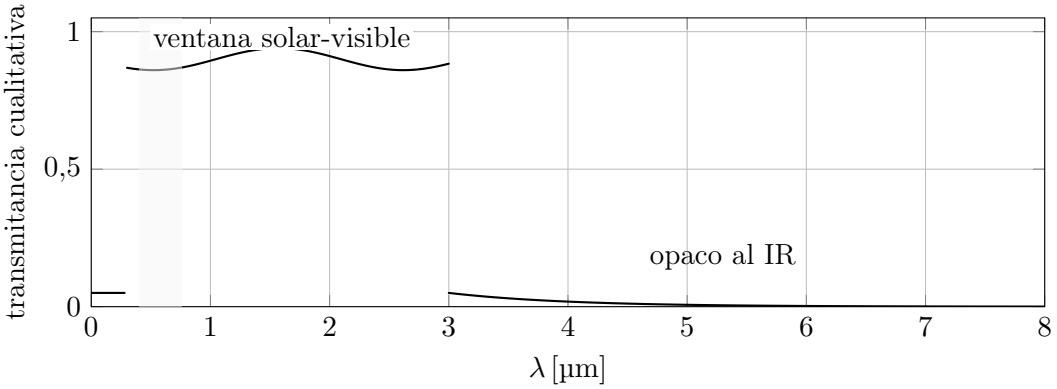


Figura 3.15: Transmitancia cualitativa del vidrio corriente: alta en una ventana de onda corta y muy baja en infrarrojo térmico.

El mismo principio aparece en invernaderos agrícolas y, a escala planetaria, en la atmósfera terrestre. El vapor de agua, el dióxido de carbono y el metano son relativamente transparentes a parte de la radiación solar, pero absorben y emiten en bandas infrarrojas. Al aumentar la opacidad infrarroja, la radiación que escapa al espacio procede, en promedio, de niveles atmosféricos efectivos más altos y fríos; para restablecer el balance, la superficie y la atmósfera baja alcanzan temperaturas mayores. La amplitud térmica de zonas desérticas no depende sólo de la humedad: también intervienen nubosidad, humedad del suelo, mezcla atmosférica, albedo y capacidad térmica superficial.

El incremento de gases de efecto invernadero por actividad humana, especialmente CO_2 y en menor cantidad gases como CH_4[1], modifica el balance radiativo de la Tierra. Desde el punto de vista físico, el mecanismo esencial es radiativo: se altera la facilidad con que la superficie terrestre y la atmósfera baja emiten energía infrarroja hacia el espacio. Este enfoque conecta la idea con la reducción de emisiones mediante tecnologías menos contaminantes, procesos más eficientes energéticamente y una presencia creciente de energías renovables como solar, eólica o geotérmica.

Referencia de notación ampliada

La tabla siguiente reúne la notación completa del capítulo. No es necesario memorizarla antes de estudiar los conceptos; se incluye como referencia para localizar símbolos usados en apartados avanzados y problemas de aplicación.

[1] El potencial de calentamiento global, o GWP por sus siglas en inglés, es un índice integrado de forzamiento radiativo definido por el IPCC. Se cita aquí sólo como contexto ambiental; su cálculo detallado excede el alcance de este capítulo.

Tabla 3.7: Símbolos principales empleados en radiación térmica.

Símbolo	Significado	Unidad
q	Potencia térmica radiante total.	W
q''	Potencia térmica radiante por unidad de área.	$\mathrm{W/m^2}$
E	Potencia emisiva de una superficie real.	$\mathrm{W/m^2}$
E_b	Potencia emisiva de cuerpo negro.	$\mathrm{W/m^2}$
$E_{b\lambda}$	Potencia emisiva monocromática de cuerpo negro.	$\mathrm{W/(m^2\,\mu m)}$
G	Irradiancia o radiación incidente sobre una superficie.	$\mathrm{W/m^2}$
J	Radiosidad: radiación total que abandona una superficie, emitida y reflejada.	$\mathrm{W/m^2}$
σ	Constante de Stefan–Boltzmann.	$\mathrm{W/(m^2 \cdot K^4)}$
ε	Emisividad hemisférica total.	–
α, α_s	Absortancia infrarroja o térmica y absortancia solar.	–
ρ, ρ_s	Reflectancia infrarroja o térmica y reflectancia solar.	–
τ, τ_s	Transmitancia infrarroja o térmica y transmitancia solar.	–
F_{ij}	Factor de forma de i hacia j.	–
A_i	Área de la superficie i.	$\mathrm{m^2}$
T_s, T_{sur}, T_{cielo}	Temperatura superficial, temperatura de alrededores radiantes genéricos y temperatura efectiva del cielo.	K
h_r	Coeficiente linealizado de radiación.	$\mathrm{W/(m^2\,K)}$
R_{rad}	Resistencia térmica radiante.	K/W

3.11 Criterios de revisión rápida y errores típicos

Antes de resolver un problema de radiación conviene separar la parte geométrica de la parte energética. Primero se identifican las superficies, sus áreas y los factores de forma; después se decide si las superficies pueden tratarse como negras, grises difusas u opacas selectivas; por último se escribe el balance de radiosidades, resistencias radiantes o balance global que corresponda.

Comprobaciones mínimas en radiación Los factores de forma que salen de una superficie deben sumar la unidad; una superficie convexa no se ve a sí misma; la potencia neta debe ir, en conjunto, de las superficies más calientes a las más frías; y la radiación solar de onda corta no debe mezclarse sin más con la radiación infrarroja de onda larga. En superficies selectivas se usan α_s para la absorción solar y ε para el intercambio infrarrojo.

Los errores más frecuentes son usar una emisividad donde corresponde una absortancia solar, olvidar la auto-visión en superficies cóncavas, aplicar una red de dos superficies a un recinto de tres superficies, o sumar un coeficiente radiativo linealizado a la convección cuando las temperaturas de fluido y entorno radiante no son iguales.

3.12 Resumen operativo

Ruta mínima de radiación

Pregunta	Modelo mínimo	Comprobación rápida
¿Qué emite un cuerpo negro?	$E_b = \sigma T^4$.	Usar kelvin; la emisión crece con rapidez al aumentar T.
¿Qué abandona una superficie gris?	$J = \varepsilon E_b + (1-\varepsilon)G$ para una superficie opaca gris difusa.	J combina emisión propia y reflexión; no es sinónimo de E_b.
¿Qué superficies se ven?	Completar F_{ij} mediante suma, reciprocidad, aditividad y simetría.	$0 \le F_{ij} \le 1$ y $\sum_j F_{ij} = 1$.
¿Negra o gris?	Superficies negras: balance directo; grises: red de radiosidades.	En un recinto cerrado, la suma algebraica de potencias netas es cero.
¿Solar o térmica?	Separar absorción de onda corta y emisión infrarroja.	No imponer $\alpha_s = \varepsilon$ sin justificación espectral.

Antes de avanzar Debe distinguir E_b, G y J, completar los factores de forma antes de escribir balances y reconocer cuándo basta un intercambio de dos superficies y cuándo hace falta una red.

3.13 Autoevaluación y asimilación

Responda primero sin consultar el capítulo. No se busca reproducir una fórmula de memoria, sino justificar el modelo, anticipar una tendencia y detectar resultados físicamente imposibles. Después compare con las respuestas orientativas.

Comprensión conceptual

C1. Distinga emisión de cuerpo negro E_b, irradiancia G y radiosidad J.

C2. ¿Bajo qué condiciones puede usarse la igualdad $\alpha = \varepsilon$ sin añadir subíndices espectrales o direccionales?

C3. Enuncie las reglas de suma, reciprocidad y aditividad de los factores de forma y explique qué información aporta cada una.

C4. Para una superficie negra, ¿qué relación existe entre J y E_b? ¿Significa eso que el flujo neto sea siempre cero?

Microejercicios sin calculadora

M1. Si la temperatura absoluta de un cuerpo negro se duplica, ¿por qué factor cambia su potencia emisiva total?

M2. Dos superficies cumplen $A_1 = 1\ \mathrm{m}^2$, $F_{12} = 0{,}8$ y $A_2 = 4\ \mathrm{m}^2$. Calcule F_{21} mediante reciprocidad.

Detecta y corrige el error

E1. Si una superficie pequeña está completamente rodeada por otra grande, entonces $F_{\text{grande}\to\text{pequeña}} = 1$.

E2. La ley de Kirchhoff permite usar la emisividad térmica de una superficie como absortividad solar en cualquier situación.

Análisis de sensibilidad

S1. Entre dos placas grandes a temperaturas fijas, ¿qué ocurre con el intercambio neto si disminuye la emisividad de ambas?

S2. ¿Por qué una pantalla radiativa de baja emisividad reduce la transferencia aunque introduce una superficie intermedia adicional?

Respuestas orientativas **C1.** E_b es la emisión ideal a una temperatura; G es la radiación que llega; J es la radiación que abandona una superficie por emisión y reflexión. **C2.** Para equilibrio termodinámico y propiedades evaluadas en las mismas condiciones espectrales y direccionales; en el modelo gris se usa la igualdad total como aproximación coherente. **C3.** Suma: $\sum_j F_{ij} = 1$ en un recinto; reciprocidad: $A_i F_{ij} = A_j F_{ji}$; aditividad: el factor hacia una superficie compuesta es la suma de los factores hacia sus partes. **C4.** Para una superficie negra $J = E_b$, pero el flujo neto es $E_b - G$ y sólo se anula si la irradiancia coincide con la emisión. **M1.** Aumenta por $2^4 = 16$. **M2.** $F_{21} = A_1 F_{12}/A_2 = 0{,}2$. **E1.** Es $F_{\text{pequeña}\to\text{grande}} = 1$; el factor inverso se obtiene por reciprocidad y suele ser menor que uno. **E2.** La radiación solar y la emisión térmica ocupan bandas distintas; deben usarse α_s y ε apropiadas a cada banda. **S1.** Disminuye el intercambio neto porque aumenta la resistencia superficial radiativa. **S2.** La pantalla divide el intercambio directo y añade dos resistencias superficiales; con baja emisividad, la resistencia total aumenta mucho.

Criterio de dominio Antes de construir una red de radiosidades debe poder identificar qué llega, qué sale, qué superficies se ven y qué factores de forma se obtienen por geometría, suma o reciprocidad.

3.14 Ejercicios

Los enunciados siguientes recogen, sin resolución, los problemas de radiación térmica que se desarrollan en la sección posterior. Su finalidad es que el lector pueda intentar primero el planteamiento geométrico, radiante o energético antes de consultar la solución desarrollada.

Cómo usar las fichas de los problemas La etiqueta de **nivel** indica la carga de modelado, no la longitud del cálculo. Las **competencias** señalan qué se practica y el campo **propiedades** aclara si los valores están dados o deben buscarse e interpolarse. En los problemas avanzados se ofrecen tres pistas graduadas: consulte primero sólo la pista 1; abra las siguientes únicamente si sigue bloqueado. Las respuestas breves deben usarse para comprobar el resultado después de resolver, no como sustituto del planteamiento.

Ejercicio 1. Factores de forma en configuraciones elementales. **Nivel:** Básico | **Competencias:** cierre, reciprocidad y simetría | **Propiedades:** geométricas

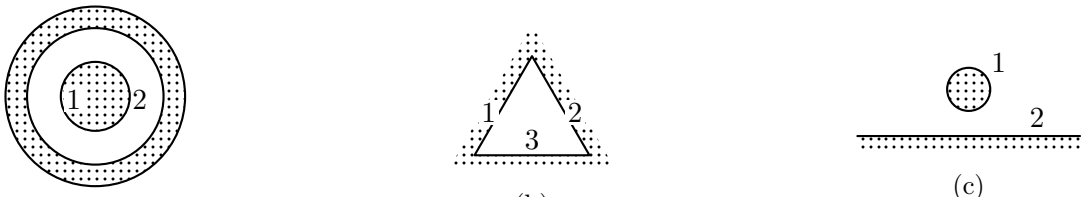
Obtener las expresiones de los factores de forma entre las diferentes superficies de las siguientes configuraciones:

a) Cilindros o esferas concéntricas.

b) Conducto largo de sección transversal con forma de triángulo equilátero.

c) Cilindro largo paralelo a una superficie plana grande o esfera cercana a un plano de grandes dimensiones.

Figura de apoyo del enunciado.



(a) (b) (c)

Figura 3.16: Configuraciones del Ejercicio 1.

Ejercicio 2. Álgebra de factores de forma con superficies compuestas. **Nivel:** Intermedio | **Competencias:** aditividad, reciprocidad y álgebra | **Propiedades:** geométricas

Partiendo de los factores de forma de las configuraciones tabuladas, determinar las expresiones de F_{13} en la figura a) y de F_{14} en la figura b). En la figura b) suponga $A_1 = A_3$, $A_2 = A_4$ y una simetría geométrica que intercambia simultáneamente $1 \leftrightarrow 3$ y $2 \leftrightarrow 4$; esas hipótesis son necesarias para usar $F_{13} = F_{31}$, $F_{24} = F_{42}$ y $F_{14} = F_{32}$.

Figura de apoyo del enunciado.



(a) (b)

Figura 3.17: Configuraciones del Ejercicio 2. En (b), las flechas discontinuas señalan las correspondencias isométricas $1 \leftrightarrow 3$ y $2 \leftrightarrow 4$.

Ejercicio 3. Comprobación de factores de forma compuestos. **Nivel:** Intermedio | **Competencias:** validación, límites y cierre | **Propiedades:** geométricas

Evaluar si la solución del apartado b) del Ejercicio 2 es apropiada para las configuraciones indicadas. Además de $A_1 = A_3$ y $A_2 = A_4$, suponga que las distancias, orientaciones y posiciones relativas de las superficies correspondientes son iguales bajo la transformación $1 \leftrightarrow 3$, $2 \leftrightarrow 4$. Discuta por qué la igualdad de áreas, por sí sola, no bastaría.

Figura de apoyo del enunciado.



Figura 3.18: Configuraciones del Ejercicio 3. Las flechas discontinuas muestran la correspondencia geométrica exigida, además de $A_1 = A_3$ y $A_2 = A_4$.

Ejercicio 4. Disco frente a la superficie interior de un tubo. **Nivel:** Intermedio | **Competencias:** tabla geométrica, reciprocidad y áreas | **Propiedades:** geométricas

Determinar el factor de forma del disco A_1, de diámetro 20 cm, sobre la superficie interior lateral A_2 del tubo, de diámetro 40 cm y longitud 20 cm. El disco dista 20 cm del tubo.

Figura de apoyo del enunciado.

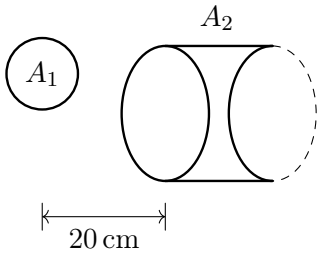


Figura 3.19: Geometría del disco y del tubo del Ejercicio 4.

Ejercicio 5. Horno largo rectangular con superficies grises difusas. **Nivel:** Avanzado | **Competencias:** radiosidades, sistema lineal y balance | **Propiedades:** dadas

Un horno largo, que se usa para los procesos de relajación de tensiones y revenido, tiene sección transversal de 3 m×3 m, con paredes laterales 2 y 4 a 1427 °C, techo 3 a 1127 °C y suelo 1 a 327 °C. Las superficies son grises y difusas con una emisividad de 0,5. Calcular:

a) La radiosidad J y el flujo de calor radiante q'' de cada superficie.

b) La potencia radiante por metro de longitud, perpendicularmente al plano del dibujo, de cada superficie.

Figura de apoyo del enunciado.

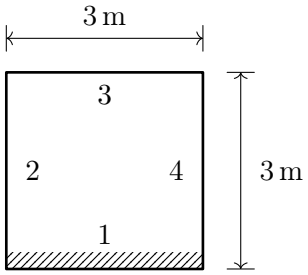


Figura 3.20: Sección transversal del horno del Ejercicio 5.

Ejercicio 6. Horno cilíndrico de tres superficies. **Nivel:** Avanzado | **Competencias:** recinto de tres superficies y balance | **Propiedades:** dadas

Calcular la potencia térmica por radiación desde cada una de las superficies interiores de un horno cilíndrico de 1 m de altura y 2 m de diámetro. Las bases se comportan como superficies grises difusas con emisividades $\varepsilon_1 = 0{,}8$ y $\varepsilon_2 = 0{,}4$, cuyas temperaturas son $T_1 = 700\,\mathrm{K}$ y $T_2 = 500\,\mathrm{K}$. La superficie lateral se modela como cuerpo negro, $\varepsilon_3 = 1$, y se mantiene a $T_3 = 400\,\mathrm{K}$.

Ejercicio 7. Pantalla de radiación entre placas planas. **Nivel:** Intermedio | **Competencias:** pantalla, resistencias radiantes y comparación | **Propiedades:** dadas

Una lámina de aluminio de emisividad 0,1 por ambas caras se sitúa entre dos cuerpos planos próximos con temperaturas de 527 °C y 227 °C, cuyas emisividades valen 0,2 y 0,7, respectivamente. Determinar el flujo de calor, en $\mathrm{W/m^2}$, entre las superficies 1 y 2 sin y con la lámina de aluminio interpuesta. Modele las tres láminas como placas grandes, paralelas y de igual área, con factores de forma unidad entre superficies consecutivas. Los huecos están al vacío; la pantalla es delgada, isoterma y sin almacenamiento. Se desprecia conducción por soportes, pérdidas por bordes y cualquier intercambio convectivo.

Ejercicio 8. Esferas concéntricas grises difusas. **Nivel:** Intermedio | **Competencias:** esferas concéntricas y dimensionado | **Propiedades:** dadas

Una esfera hueca 2, de diámetro $D_2 = 1\,\mathrm{m}$, contiene en su interior otra esfera maciza 1. Ambas son opacas, grises y difusas. Las emisividades son $\varepsilon_1 = 0{,}7$ y $\varepsilon_2 = 0{,}3$, y las temperaturas son $T_1 = 27\,^\circ\mathrm{C}$ y $T_2 = 87\,^\circ\mathrm{C}$. Calcular el diámetro D_1 de la esfera interior para que su potencia radiante neta sea $q_1 = -100\,\mathrm{W}$.

Ejercicio 9. Tubo intermedio como pantalla radiante. **Nivel:** Avanzado | **Competencias:** pantalla cilíndrica y equilibrio | **Propiedades:** dadas

Una barra maciza de 1 m de diámetro está dentro de un tubo muy delgado de 2 m de diámetro, el cual está a su vez dentro de otro tubo de 4 m de diámetro. La emisividad de todas las superficies vale 0,7, las cuales se comportan como superficies grises difusas. Sabiendo que la temperatura de la barra maciza es 400 K y la del tubo más exterior 600 K, calcular la temperatura del tubo intermedio. Todos los huecos están al vacío, con ausencia de aire. Los cilindros se modelan suficientemente largos para despreciar los efectos de extremo; el tubo intermedio es una pantalla delgada e isoterma, y se desprecia la conducción por sus soportes.

Figura de apoyo del enunciado.

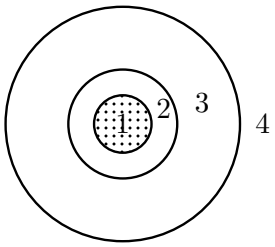


Figura 3.21: Cilindros concéntricos del Ejercicio 9.

Ejercicio 10. Temperatura efectiva y potencia radiante del Sol. **Nivel:** Intermedio | **Competencias:** cuerpo negro, Sol y geometría | **Propiedades:** dadas

Sabiendo que la constante solar, medida por encima de la atmósfera, vale $G_0 = 1353\,\mathrm{W/m^2}$; que el diámetro del Sol es de $1{,}392 \times 10^6\,\mathrm{km}$ y emite como un cuerpo negro; que el diámetro de la Tierra es de $12\,742\,\mathrm{km}$; y que el radio medio de la órbita terrestre alrededor del Sol vale $1{,}496 \times 10^8\,\mathrm{km}$, calcular: Se adopta una órbita circular a distancia fija, el Sol como emisor negro isotrópico y la Tierra como receptor pequeño en el campo lejano. La sección interceptora es normal al haz. La potencia total se denota por $\dot{Q}$; para un receptor extenso o inclinado habría que integrar la irradiancia proyectada sobre su área.

a) La temperatura efectiva del Sol desde el punto de vista radiante.

b) La potencia radiante total emitida por el Sol.

c) La potencia radiante solar interceptada por la Tierra.

Ejercicio 11. Bombilla con convección y radiación. **Nivel:** Intermedio | **Competencias:** convección, radiación y dimensionado | **Propiedades:** dadas

Se pretende que la temperatura de la esfera de una bombilla de incandescencia de 100 W no supere los 100 °C. En el interior de la lámpara existe vacío intenso. La bombilla se encuentra en el interior de una habitación cuyas paredes están a 15 °C y el ambiente a 20 °C. El coeficiente de convección cristal-ambiente es de $10\,\mathrm{W/(m^2\,K)}$ y el cristal de la bombilla se comporta como cuerpo gris. Calcular el diámetro de la esfera de la bombilla y los porcentajes de radiación emitida por el filamento que se disipan de forma convectiva y radiante por dicha esfera, sabiendo que el 40 % de la energía irradiada por el filamento es absorbida por el vidrio.

Ejercicio 12. Cúpula hemisférica sobre una pista de hielo. **Nivel:** Intermedio | **Competencias:** recinto de dos superficies y signos | **Propiedades:** dadas

Una pista circular de patinaje sobre hielo de 20 m de diámetro se quiere cubrir temporalmente con una cúpula hemiesférica del mismo diámetro. El hielo se mantiene a −3 °C y cierto día la temperatura media de la superficie interior de la cúpula es de 7 °C. La emisividad del hielo vale 0,97 y la de la cúpula 0,45. Calcular la transmisión de calor neta de la cúpula a la pista y de la pista a la cúpula.

Ejercicio 13. Placa horizontal a la intemperie con radiación solar. **Nivel:** Intermedio | **Competencias:** balance solar, infrarrojo e iteración | **Propiedades:** dadas

Una placa de aluminio de 4 mm de espesor está a la intemperie y dispuesta horizontalmente, apoyada sobre un material aislante térmicamente. La temperatura del aire es 20 °C, con el que mantiene un coeficiente de convección de $20\,\mathrm{W/(m^2\,K)}$. La placa recibe una radiación solar directa de $600\,\mathrm{W/m^2}$ con una altura solar de 72° y una radiación solar difusa de $110\,\mathrm{W/m^2}$. A la cara superior de la placa se le

proporciona un tratamiento selectivo de forma que presenta una absortancia solar de 0,8 y una emisividad igual a 0,2. Dicha superficie se comporta como gris difusa a la radiación infrarroja. Considérese al cielo, desde el punto de vista radiante, como un cuerpo negro a una temperatura de 5 °C. Calcular la temperatura estacionaria de la placa:

a) Al Sol.

b) A la sombra completa del haz directo, conservando la irradiancia difusa de $110\,\mathrm{W/m^2}$.

Ejercicio 14. Placa horizontal junto a una plancha vertical. **Nivel:** Avanzado | **Competencias:** factores de forma y balance multisuperficie | **Propiedades:** dadas

Calcular la temperatura estacionaria de la placa del Ejercicio 13 cuando su borde derecho comparte arista con una plancha vertical de 10 m de altura. La placa tiene 1 m de anchura y ambas superficies son infinitamente profundas. La plancha está a 67 °C y tiene $\varepsilon_3 = 0{,}65$; el suelo descubierto está a 20 °C y tiene $\varepsilon_2 = 0{,}88$; el cielo es negro a 5 °C. Mantenga sobre la placa la irradiancia solar del caso al Sol del Ejercicio 13, pero desprecie las reflexiones solares de plancha y suelo. Para cerrar el modelo infrarrojo, trate el suelo como una superficie extensa cuya radiosidad es $J_2 = \varepsilon_2\sigma T_2^4 + (1-\varepsilon_2)\sigma T_{\text{cielo}}^4$. Use superficies grises difusas y el método de cuerdas cruzadas para los factores de forma.

Figura de apoyo del enunciado.

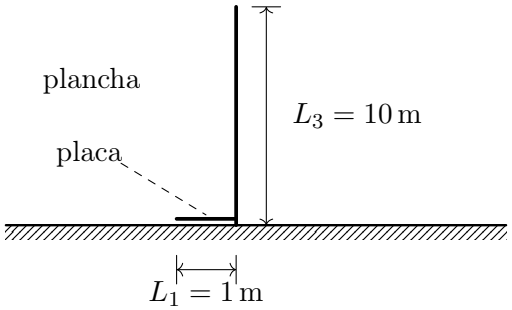


Figura 3.22: Geometría de placa, plancha y suelo en el Ejercicio 14.

Ejercicio 15. Equilibrio térmico de un vehículo espacial. **Nivel:** Avanzado | **Competencias:** balance espacial y diseño de superficie | **Propiedades:** dadas

Un vehículo espacial tiene forma de disco de grandes dimensiones y se encuentra a unos 400 km de la Tierra en la línea Sol-Tierra, con una cara enfrentada a la Tierra y la otra al Sol. La Tierra presenta unos valores medios de emisividad 0,64, absortancia solar 0,8 y temperatura superficial de 12 °C. El espacio se considera un cuerpo negro a 3 K. Una fracción f_a de ambas caras del vehículo está recubierta de pequeños puntos, uniformemente distribuidos, de un material con $\varepsilon = 0{,}44$ y $\alpha_s = 0{,}27$; el resto, la fracción $f_b = 1 - f_a$, está recubierto de otro material con $\varepsilon = 0{,}70$ y $\alpha_s = 0{,}10$. Considerando la superficie del vehículo como gris difusa para la radiación infrarroja, nula su resistencia interna, calcular las fracciones f_a y f_b que darán una temperatura superficial de equilibrio de 27 °C en el vehículo, considerando nula la actividad térmica interior del mismo. Considerar despreciable la convección con la mínima cantidad de atmósfera que envuelve al vehículo.

Ejercicio 16. Disco aislado sometido a radiación solar. **Nivel:** Intermedio | **Competencias:** equilibrio solar y selectividad | **Propiedades:** dadas

Un disco se encuentra situado por encima de la atmósfera con una cara mirando al Sol y otra a la Tierra. El disco se encuentra perfectamente aislado por los bordes y por la cara que mira a la Tierra. Calcular la temperatura de equilibrio del disco. Tomar el espacio galáctico como un cuerpo negro a una temperatura de $-270\,^{\circ}\mathrm{C}$. Considerar los siguientes casos:

a) $\alpha_s = 0{,}9$ y $\varepsilon = 0{,}9$, superficie absorbente gris; $\alpha_s = 0{,}1$ y $\varepsilon = 0{,}1$, superficie reflectora gris; $\alpha_s = 0{,}9$ y $\varepsilon = 0{,}1$, superficie absorbente selectiva; $\alpha_s = 0{,}1$ y $\varepsilon = 0{,}9$, superficie reflectora selectiva; $\alpha_s = 1$ y $\varepsilon = 1$, cuerpo negro.

b) Resolver los casos anteriores con un factor de concentración solar $f_c = 3$.

Ejercicio 17. Funcionamiento térmico de un termo. **Nivel:** Básico | **Competencias:** mecanismos de aislamiento e interpretación | **Propiedades:** cualitativas

Analizar el funcionamiento de un termo para almacenamiento de líquidos calientes o fríos. Distinga los mecanismos: el vacío elimina la convección del gas y reduce fuertemente su conducción, pero no suprime la radiación ni la conducción por el cuello, el tapón, los soportes y otros puentes sólidos. En el interior del recipiente puede existir convección natural del líquido, y la superficie exterior evacua calor por convección y radiación al ambiente.

Ejercicio 18. Ropa clara u oscura al Sol y a la sombra. **Nivel:** Intermedio | **Competencias:** balance solar y elección de material | **Propiedades:** dadas

Analizar la conveniencia de usar ropa clara, con $\varepsilon = 0{,}85$ y $\alpha_s = 0{,}70$, u oscura, con $\varepsilon = 0{,}95$ y $\alpha_s = 0{,}95$, en verano, tanto al Sol como a la sombra. Tomar la radiación solar directa y difusa del Ejercicio 13, esto es, $G_{sD} = 600\,\mathrm{W/m^2}$ con altura solar de 72°, $G_{sd} = 110\,\mathrm{W/m^2}$, y que las prendas, cuando están expuestas al Sol, están dispuestas verticalmente. Suponer una temperatura ambiente de $35\,^{\circ}\mathrm{C}$ y una actividad de reposo para la cual el coeficiente de convección vale $4\,\mathrm{W/(m^2\,K)}$. El cielo se comporta como un cuerpo negro a $10\,^{\circ}\mathrm{C}$. Despreciar el intercambio de radiación con el suelo y paredes.

Ejercicio 19. Cubiertas negras en dispositivos electrónicos. **Nivel:** Básico | **Competencias:** emisividad, entorno y criterio de diseño | **Propiedades:** cualitativas

Analizar el balance $q''_{\mathrm{int}} + \alpha_s G_s = h(T_s - T_\infty) + \varepsilon_{\mathrm{IR}}\sigma(T_s^4 - T_{\mathrm{rad}}^4) + q''_{\mathrm{cond}}$ y decidir en qué condiciones aumentar $\varepsilon_{\mathrm{IR}}$ reduce T_s. La conclusión debe condicionarse al signo de $T_s - T_{\mathrm{rad}}$ y a la absorción solar.

Pistas graduadas para los problemas avanzados

Use una pista cada vez

Ej. 5

Pista 1 – modelo. Red de radiosidades para un recinto de superficies grises difusas.

Pista 2 – ecuación. Calcule primero todos los F_{ij} y plantee una ecuación de radiosidad por superficie; después obtenga $q_i = A_i(J_i - G_i)$.

Pista 3 – control. La suma algebraica de los calores netos de todas las superficies del recinto debe ser cero y cada radiosidad debe ser físicamente compatible con su temperatura.

Ej. 6

Pista 1 – modelo. Sistema de radiosidades de tres superficies con una condición negra conocida.

Pista 2 – ecuación. Construya el sistema de tres radiosidades y use que la superficie negra cumple directamente $J = E_b$.

Pista 3 – control. Compruebe cierre de factores, balance global del recinto y que la superficie negra cumple $J = E_b$.

Ej. 9

Pista 1 – modelo. Dos intercambios radiativos acoplados por el balance de energía del tubo intermedio.

Pista 2 – ecuación. Imponga calor neto nulo en el tubo pantalla y escriba dos intercambios radiantes cilíndricos en serie.

Pista 3 – control. El calor que recibe el tubo por un lado debe ser igual al que emite por el otro y su temperatura no debe superar los extremos.

Ej. 14

Pista 1 – modelo. Factores de forma entre superficies perpendiculares más red o balance de radiosidad.

Pista 2 – ecuación. Determine los factores de forma entre placa, plancha, suelo y cielo antes de escribir un único balance energético en la placa.

Pista 3 – control. Verifique reciprocidad, cierre y que el balance global entre las superficies y el entorno se conserva.

Ej. 15

Pista 1 – modelo. Balance radiativo global con fuentes externas y emisión desde las superficies del vehículo.

Pista 2 – ecuación. Promedie las propiedades del mosaico, pero aplique el albedo con el factor de forma de la cara terrestre; en onda larga puede sumar las dos caras o usar el promedio equivalente sobre el área $2A$.

Pista 3 – control. La suma de potencias absorbidas y emitidas debe cerrar; compruebe por separado el albedo, la absorción infrarroja y que $E_a = \varepsilon_a \sigma T_v^4$.

Respuestas breves de comprobación

Respuestas orientativas Consulte este bloque sólo después de completar el planteamiento. Se da el resultado final y un control físico; la solución desarrollada permanece en la sección siguiente.

Ej. 1

Resultado. a) $F_{12} = 1$, $F_{21} = A_1/A_2$; b) los factores entre superficies distintas valen 0,5; c) $F_{12} = 0{,}5$ y $F_{21} = 0$.

Control. Cada factor debe estar entre 0 y 1 y, para cada superficie, la suma de factores hacia todas las superficies visibles debe ser 1.

Ej. 2

Resultado. $F_{13} = F_{1(2+3)} - F_{12}$ y $F_{14} = [A_{(1+2)}F_{(1+2)(3+4)} - A_1F_{13} - A_2F_{24}]/(2A_1) = F_{32}$.

Control. Compruebe cierre y reciprocidad $A_iF_{ij} = A_jF_{ji}$ en cada resultado compuesto.

Ej. 3

Resultado. La expresión del Ejercicio 2 es aplicable en las dos configuraciones.

Control. La conclusión debe sostenerse al verificar que todos los factores quedan en [0,1] y que las sumas por fila valen 1.

Ej. 4

Resultado. $F_{12} = 0{,}277$.

Control. Verifique cierre para el disco y el tubo, y reciprocidad usando las áreas correctas.

Ej. 5

Resultado. $q_1 = -477\,062\,\mathrm{W/m}$, $q_2 = q_4 = 292\,125\,\mathrm{W/m}$ y $q_3 = -107\,191\,\mathrm{W/m}$.

Control. La suma algebraica de los calores netos de todas las superficies del recinto debe ser cero y cada radiosidad debe ser físicamente compatible con su temperatura.

Ej. 6

Resultado. $q_1 = 27{,}570\,\mathrm{kW}$, $q_2 = -2{,}155\,\mathrm{kW}$ y $q_3 = -25{,}415\,\mathrm{kW}$.

Control. Compruebe cierre de factores, balance global del recinto y que la superficie negra cumple $J = E_b$.

Ej. 7

Resultado. $q''_{\text{sin pantalla}} = 3625{,}4\,\mathrm{W/m^2}$ y $q''_{\text{con pantalla}} = 805{,}6\,\mathrm{W/m^2}$.

Control. La pantalla debe tener calor neto cero, temperatura entre las placas y una potencia menor que sin pantalla.

Ej. 8 **Resultado.** $D_1 = 0{,}330\,\text{m}$.

Control. Verifique reciprocidad, límites cuando una emisividad tiende a 1 y que el signo corresponde a $T_1^4 - T_2^4$.

Ej. 9 **Resultado.** $T_2 = T_3 = 555{,}1\,\text{K} = 282{,}1\,^\circ\text{C}$.

Control. El calor que recibe el tubo por un lado debe ser igual al que emite por el otro y su temperatura no debe superar los extremos.

Ej. 10 **Resultado.** $T_S = 5762\,\text{K}$, $q_{\text{Sol}} = 3{,}805 \times 10^{20}\,\text{MW}$ y $q_{\text{Sol}\to\text{Tierra}} = 1{,}731 \times 10^{11}\,\text{MW}$.

Control. Use kelvin, compruebe unidades y contraste que la temperatura obtenida sea compatible con el máximo espectral visible.

Ej. 11 **Resultado.** $D = 108\,\text{mm}$; $q_{\text{conv}} = 29{,}5\,\text{W}$ y $q_{\text{rad}} = 10{,}5\,\text{W}$.

Control. La suma de convección y radiación debe igualar la potencia eléctrica y ambas pérdidas deben tener el mismo sentido.

Ej. 12 **Resultado.** $q_{\text{cúpula}\to\text{pista}} = 9{,}027\,\text{kW}$ y el intercambio opuesto tiene el mismo módulo y signo contrario.

Control. Compruebe cierre de factores y que la potencia neta coincide con el balance energético de la pista.

Ej. 13 **Resultado.** $T_{\text{Sol}} = 44{,}8\,^\circ\text{C}$ y $T_{\text{sombra}} = 23{,}4\,^\circ\text{C}$.

Control. La energía absorbida debe igualar las pérdidas; use propiedades solares e infrarrojas en sus bandas correspondientes y temperaturas absolutas en T^4.

Ej. 14 **Resultado.** $T_{\text{placa}} = 48{,}2\,^\circ\text{C}$.

Control. Verifique reciprocidad, cierre y que el balance global entre las superficies y el entorno se conserva.

Ej. 15 **Resultado.** $f_a \simeq 0{,}739$, $f_b \simeq 0{,}261$.

Control. El albedo debe usar F_{2-T}, no el promedio F_{v-T}, cuando se multiplica por el área de una sola cara; además, $E_a = \varepsilon_a \sigma T_v^4 \simeq 202{,}5\,\text{W/m}^2$.

Ej. 16 **Resultado.** Para $f_c = 1$: 119,9; 119,9; 407,6; -46,2 y 119,9 °C. Para $f_c = 3$: 244,1; 244,1; 622,8; 25,5 y 244,1 °C, en el orden de superficies del enunciado.

Control. La potencia absorbida debe igualar la emitida y no deben confundirse el área proyectada al Sol y el área total que irradia.

Ej. 17 **Resultado.** El vacío reduce conducción/convección y las superficies de baja emisividad reducen radiación.

Control. La potencia por todas las ramas debe sumar la pérdida total y el resultado debe disminuir al mejorar el vacío o reducir la emisividad.

Ej. 18 **Resultado.** Al Sol: $T_{\text{oscura}} = 48{,}2\,^\circ\text{C}$ y $T_{\text{clara}} = 43{,}3\,^\circ\text{C}$; a la sombra: 20,9 y 21,6 °C.

Control. Compruebe que la diferencia entre colores procede de la absorción solar y que las temperaturas de equilibrio satisfacen el balance de cada caso.

Ej. 19 **Resultado.** Una emisividad mayor favorece el enfriamiento sólo si $T_s > T_{\text{rad}}$ y la absorción solar no domina; si $T_s < T_{\text{rad}}$, la radiación neta calienta la cubierta.

Control. Verifique el balance completo de generación, Sol, convección, radiación y conducción.

3.15 Ejercicios resueltos

Cómo trabajar los ejercicios resueltos Antes de leer las operaciones, deténgase en el recuadro **Antes de calcular**: anticipe el sentido del calor, la resistencia o capacidad dominante y el modelo que espera utilizar. Al terminar, use la **Comprobación final** para verificar balance, límites físicos, unidades y rango de validez. El objetivo no es adivinar el número, sino saber qué resultado sería razonable antes de obtenerlo.

Los problemas resueltos de esta sección siguen la misma metodología del libro: primero se identifica el sistema físico, después se fijan las simplificaciones, se construye el modelo de factores de forma, radiosidades, resistencias radiantes o balance energético, se escriben las ecuaciones y finalmente se interpreta el resultado. La numeración original de los problemas se conserva para que el bloque pueda compararse con la hoja de enunciados.

Regla práctica Antes de sustituir números conviene decidir qué tipo de problema se tiene: cálculo geométrico de factores de forma, recinto gris-difuso, pantalla de radiación, balance solar-atmosférico o balance energético con convección y radiación. Esa clasificación determina si procede usar una red de radiosidades, una resistencia equivalente, una relación tabulada de factores de forma o una ecuación global de energía.

Orden recomendado de estudio No es obligatorio resolver los ejercicios en orden numérico. Para una primera vuelta, alterne geometría y aplicación física: 1 (reglas básicas de factores de forma), 8 (dos superficies concéntricas), 7 (pantalla), 10 (cuerpo negro y Sol), 11 (convección más radiación) y 13 (balance solar). Después complete 2–6 para dominar recintos y álgebra geométrica, y deje 14–19 para integración y criterio de diseño. Así se evita estudiar la radiación como una sucesión de ejercicios puramente geométricos.

Uso de temperaturas Siempre que aparezcan términos radiantes exactos de la forma σT^4, las temperaturas se introducen en kelvin. Las temperaturas en grados Celsius sólo se mantienen en diferencias lineales, por ejemplo en términos convectivos $hA(T_s - T_\infty)$ o en resistencias linealizadas.

Errores comunes a evitar No debe forzarse una red de resistencias cuando el problema es puramente geométrico de factores de forma. Tampoco debe mezclarse radiación solar de onda corta con radiación infrarroja de onda larga sin distinguir absortancia solar α_s y emisividad infrarroja ε. En recintos grises difusos, la radiosidad J_i y la potencia emisiva de cuerpo negro E_{bi} no son la misma magnitud.

Convención de notación y signos En las soluciones se usa $E_{bi} = \sigma T_i^4$ para la potencia emisiva de cuerpo negro, J_i para la radiosidad y G_i para la irradiación. En los balances de radiación gris difusa, el término propio emitido por la superficie es $\varepsilon_i E_{bi}$. Las temperaturas que aparecen elevadas a la cuarta potencia se introducen siempre en kelvin. Se toma $q_i > 0$ cuando la potencia neta sale de la superficie i, y $q_{i\to j} > 0$ cuando el intercambio va de i hacia j.

3.15.1 Ejercicio resuelto 1. Factores de forma en configuraciones elementales

Descripción del problema

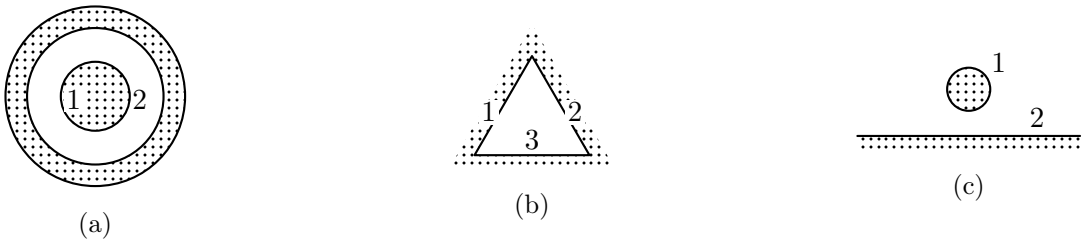
Obtener las expresiones de los factores de forma entre las diferentes superficies de las siguientes configuraciones:

Se pide.

a) Cilindros o esferas concéntricas.

b) Conducto largo de sección transversal con forma de triángulo equilátero.

c) Cilindro largo paralelo a una superficie plana grande o esfera cercana a un plano de grandes dimensiones.



(a) (b) (c)

Figura 3.23: Configuraciones del Ejercicio 1.

Resolución del problema

Antes de calcular

Predicción física. Los factores deben obtenerse primero por geometría, simetría y cierre. Una superficie convexa no se ve a sí misma.

Modelo esperado. Reglas de cierre, reciprocidad y simetría aplicadas antes de recurrir a fórmulas específicas.

1. Simplificaciones. Se aplican las hipótesis indicadas por el enunciado y se escoge el modelo mínimo que representa el intercambio dominante. A partir de ahí se pasa al planteamiento geométrico, radiante o energético correspondiente.

2. Modelo adoptado, ecuaciones y resolución.

Caso a). Hay $n = 2$ superficies, por lo que existen $n^2 = 4$ factores de visión.

La superficie interior es convexa, luego no se ve a sí misma:

$$F_{11} = 0.$$

Por la regla de la suma aplicada a la superficie 1:

$$F_{11} + F_{12} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad F_{12} = 1.$$

Por la regla de reciprocidad entre 1 y 2:

$$A_1 F_{12} = A_2 F_{21} \qquad \Rightarrow \qquad F_{21} = F_{12}\frac{A_1}{A_2} = \frac{A_1}{A_2}.$$

Finalmente, por la regla de la suma aplicada a la superficie 2:

$$F_{21} + F_{22} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad F_{22} = 1 - F_{21} = 1 - \frac{A_1}{A_2}.$$

Caso b). Hay $n = 3$ superficies, por lo que existen $n^2 = 9$ factores de visión.

Al tratarse de superficies planas:

$$F_{11} = F_{22} = F_{33} = 0.$$

Por simetría:

$$F_{12} = F_{13} = F_{21} = F_{23} = F_{31} = F_{32}.$$

Aplicando la regla de la suma:

$$F_{11} + F_{12} + F_{13} = 1.$$

Como $F_{11} = 0$, resulta:

$$F_{ij} = 0{,}5, \qquad i \neq j.$$

Caso c).

Se define la superficie 1 como el cilindro o la esfera convexa; la superficie 2 como la cara del plano que mira a 1; y la superficie auxiliar 3 como el resto del hemisferio exterior visible desde 1. Para una superficie convexa, $F_{11} = 0$. En el límite de un plano infinito, la simetría direccional respecto del plano que pasa por el centro de 1 y es paralelo a 2 divide el espacio visible en dos semiespacios iguales:

$$F_{12} = F_{13} = \frac{1}{2}.$$

La reciprocidad se aplica antes de tomar el límite de área:

$$A_1 F_{12} = A_2 F_{21}, \qquad F_{21} = \frac{A_1}{2A_2}.$$

Manteniendo finita el área de 1 y haciendo $A_2 \to \infty$, resulta rigurosamente $F_{21} \to 0$. No se utiliza un cociente indeterminado entre dos áreas infinitas.

3. Conclusiones o interpretación.

a)	$F_{11} = 0, \quad F_{12} = 1, \quad F_{21} = \dfrac{A_1}{A_2}, \quad F_{22} = 1 - \dfrac{A_1}{A_2}.$
b)	$F_{11} = F_{22} = F_{33} = 0, \quad F_{12} = F_{13} = F_{21} = F_{23} = F_{31} = F_{32} = 0{,}5.$
c)	$F_{12} = 0{,}5, \quad F_{21} = 0.$

Comprobación final

Cada factor debe estar entre 0 y 1 y, para cada superficie, la suma de factores hacia todas las superficies visibles debe ser 1.

3.15.2 Ejercicio resuelto 2. Álgebra de factores de forma con superficies compuestas

Descripción del problema

Partiendo de factores de forma tabulados, determinar F_{13} en la figura a) y F_{14} en la figura b). En la figura b) se supone $A_1 = A_3$, $A_2 = A_4$ y una isometría que intercambia simultáneamente $1 \leftrightarrow 3$ y $2 \leftrightarrow 4$.



Figura 3.24: Configuraciones del Ejercicio 2. En (b), las flechas discontinuas señalan las correspondencias isométricas $1 \leftrightarrow 3$ y $2 \leftrightarrow 4$.

Resolución del problema

Antes de calcular

Predicción física. Las superficies compuestas permiten sumar áreas visibles, pero no sumar factores sin ponderar por área.

Modelo esperado. Álgebra de factores de forma con aditividad, reciprocidad y las simetrías declaradas.

1. Simplificaciones. En el apartado b), las superficies correspondientes son congruentes y ocupan posiciones equivalentes. Por tanto, además de $A_1 = A_3$ y $A_2 = A_4$, se cumplen las igualdades de factores inducidas por la isometría. Sin esa información geométrica, la igualdad de áreas no bastaría.

2. Modelo adoptado, ecuaciones y resolución.

Apartado a). Por aditividad respecto de la superficie receptora:

$$F_{1(2+3)} = F_{12} + F_{13},$$

de modo que:

$$\boxed{F_{13} = F_{1(2+3)} - F_{12}}.$$

Apartado b). Se dispone de F_{13}, F_{24} y $F_{(1+2)(3+4)}$. La definición del factor de una superficie emisora compuesta es:

$$F_{(1+2)(3+4)} = \frac{A_1 F_{1(3+4)} + A_2 F_{2(3+4)}}{A_{(1+2)}}. \tag{1}$$

Con:

$$F_{1(3+4)} = F_{13} + F_{14}, \qquad F_{2(3+4)} = F_{23} + F_{24}, \tag{2}$$

resulta:

$$A_{(1+2)} F_{(1+2)(3+4)} = A_1 F_{13} + A_1 F_{14} + A_2 F_{23} + A_2 F_{24}. \tag{3}$$

Por reciprocidad e isometría:

$$A_2 F_{23} = A_3 F_{32} = A_1 F_{14}. \tag{4}$$

Sustituyendo (4) en (3) y despejando:

$$\boxed{F_{14} = \frac{A_{(1+2)} F_{(1+2)(3+4)} - A_1 F_{13} - A_2 F_{24}}{2A_1}}$$

y, por la isometría declarada:

$$F_{32} = F_{14}.$$

3. Conclusiones o interpretación. La aditividad simple se aplica cuando se divide la superficie receptora. Cuando se divide la superficie emisora, los factores deben ponderarse por las áreas emisoras. Las igualdades entre factores de pares diferentes proceden de la geometría, no sólo de la igualdad de áreas.

Comprobación final

Compruebe que los factores obtenidos pertenecen a [0,1], que las sumas por fila cierran al incluir todas las superficies visibles y que se satisface $A_i F_{ij} = A_j F_{ji}$.

3.15.3 Ejercicio resuelto 3. Comprobación de factores de forma compuestos

Descripción del problema

Evaluar si la solución del apartado b) del Ejercicio 2 es apropiada para las configuraciones indicadas. Además de $A_1 = A_3$ y $A_2 = A_4$, se supone que distancias, orientaciones, visibilidad y posiciones relativas se conservan bajo la transformación $1 \leftrightarrow 3$, $2 \leftrightarrow 4$.

Antes de calcular

Predicción física. Una expresión algebraica sólo es válida si respeta geometría, cierre y reciprocidad.

Modelo esperado. Comprobación de las hipótesis que justifican cada igualdad usada en el Ejercicio 2.



Figura 3.25: Configuraciones del Ejercicio 3. Las flechas discontinuas muestran la correspondencia geométrica exigida, además de $A_1 = A_3$ y $A_2 = A_4$.

1. Simplificaciones. Las transformaciones indicadas deben conservar la geometría relativa y la visibilidad. No se utiliza la igualdad de áreas como sustituto de la simetría.

2. Modelo adoptado, ecuaciones y resolución. La reciprocidad y las igualdades de áreas permiten escribir:

$$F_{13} = F_{31}, \qquad F_{24} = F_{42}.$$

La isometría adicional intercambia los pares de superficies y proporciona:

$$F_{14} = F_{32}, \qquad F_{23} = F_{41}.$$

Por tanto, las hipótesis utilizadas en el Ejercicio 2 se cumplen en ambas configuraciones redibujadas y su expresión para F_{14} es aplicable.

Si sólo se conocieran $A_1 = A_3$ y $A_2 = A_4$, no podría afirmarse lo mismo: superficies de igual área pueden estar a distancias u orientaciones diferentes, estar parcialmente ocultas o ver regiones distintas del entorno.

3. Conclusiones o interpretación.

Sí, en ambos casos, siempre que se cumpla la isometría declarada.

Comprobación final

Verifique por separado: reciprocidad para cada par, conservación de la visibilidad bajo la isometría, pertenencia de los factores a [0,1] y cierre al incluir todas las superficies visibles.

3.15.4 Ejercicio resuelto 4. Disco frente a la superficie interior de un tubo

Descripción del problema

Determinar el factor de forma del disco A_1, de diámetro 20 cm, sobre la superficie interior lateral A_2 del tubo, de diámetro 40 cm y longitud 20 cm. El disco dista 20 cm del tubo.

Datos.

- Diámetro del disco: $D_1 = 20\,\text{cm}$.
- Diámetro del tubo: $D_2 = 40\,\text{cm}$.
- Longitud del tubo: $L = 20\,\text{cm}$.
- Distancia del disco al tubo: 20 cm.

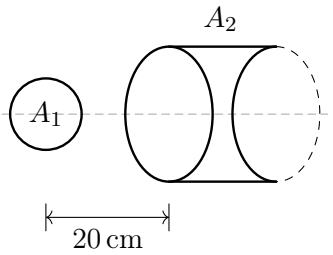


Figura 3.26: Geometría del disco y del tubo del Ejercicio 4.

Resolución del problema

Antes de calcular

Predicción física. El disco convexo no se ve a sí mismo y toda la radiación que sale hacia el interior debe repartirse entre las superficies del tubo.

Modelo esperado. Factores de forma mediante cierre, reciprocidad y descomposición de superficies.

1. Simplificaciones. Se aplican las hipótesis indicadas por el enunciado y se escoge el modelo mínimo que representa el intercambio dominante. A partir de ahí se pasa al planteamiento geométrico, radiante o energético correspondiente.

2. Modelo adoptado, ecuaciones y resolución.

Teniendo en cuenta que toda la radiación que atraviesa la superficie ficticia 3 llega a las superficies 2 y 4:

$$F_{13} = F_{12} + F_{14}.$$

Esta es una partición condicionada de trayectorias que cruzan la boca. El cierre total del disco en una geometría abierta exige incluir el exterior: $F_{1,\text{ext}} = 1 - \sum_j F_{1j}$.

Por tanto:

$$F_{12} = F_{13} - F_{14}.$$

Los factores F_{13} y F_{14} corresponden a dos discos paralelos y concéntricos tabulados. En esta construcción, el disco ficticio 3 cierra la boca de entrada del tubo y el disco ficticio 4 cierra la boca

de salida. Por tanto, la diferencia entre los dos factores tabulados deja únicamente la contribución que intercepta la superficie lateral interior del tubo:

$$F_{12} = F_{1\to\text{boca de entrada}} - F_{1\to\text{boca de salida}}.$$

Esta forma de plantearlo evita calcular directamente el intercambio con una superficie cilíndrica lateral, que no es el factor tabulado de uso inmediato.

3. Conclusiones o interpretación.

$$\boxed{F_{12} = 0{,}277}$$

Comprobación final

Verifique cierre para el disco y el tubo, y reciprocidad usando las áreas correctas.

3.15.5 Ejercicio resuelto 5. Horno largo rectangular con superficies grises difusas

Descripción del problema

Un horno largo, que se usa para procesos de relajación de tensiones y revenido, tiene una sección transversal de $3\,\mathrm{m} \times 3\,\mathrm{m}$, con paredes laterales 2 y 4 a $1427\,^\circ\mathrm{C}$, techo 3 a $1127\,^\circ\mathrm{C}$ y suelo 1 a $327\,^\circ\mathrm{C}$. Las superficies son grises y difusas con una emisividad de 0,5. Se trabaja con una longitud axial de referencia $L_z = 1\,\mathrm{m}$. Por ello $A_i' = A_i/L_z$ tiene unidades de metro, las resistencias radiativas se expresan por unidad de longitud y todas las potencias del ejercicio se denotan q_i' en W/m.

Datos.

- $T_1 = 327\,^\circ\mathrm{C} = 600\,\mathrm{K}$.
- $T_2 = T_4 = 1427\,^\circ\mathrm{C} = 1700\,\mathrm{K}$.
- $T_3 = 1127\,^\circ\mathrm{C} = 1400\,\mathrm{K}$.
- $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = 0{,}5$.
- Sección transversal: $3\,\mathrm{m} \times 3\,\mathrm{m}$.

Se pide.

a) La radiosidad J y el flujo de calor radiante q'' de cada superficie.

b) La potencia radiante por metro de longitud de cada superficie.

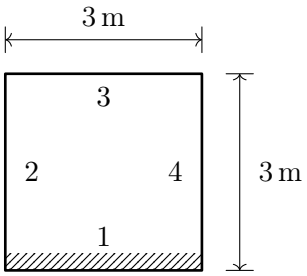


Figura 3.27: Sección transversal del horno del Ejercicio 5.

Resolución del problema

Antes de calcular

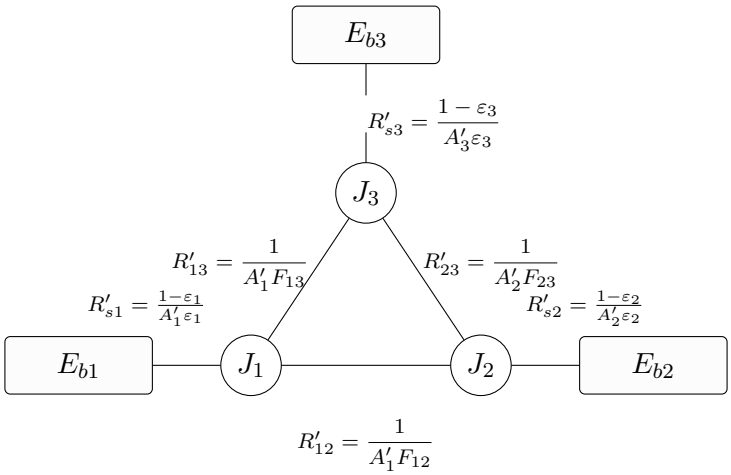
Predicción física. El calor neto irá de las superficies más calientes a las más frías. Las superficies grises reflejan parte de la irradiación, por lo que J no coincide con E_b.

Modelo esperado. Red de radiosidades para un recinto de superficies grises difusas.

1. Simplificaciones. Se aplican las hipótesis indicadas por el enunciado y se escoge el modelo mínimo que representa el intercambio dominante. A partir de ahí se pasa al planteamiento geométrico, radiante o energético correspondiente.

2. Modelo adoptado, ecuaciones y resolución.

Esquema de resistencias radiantes.



Superficies equivalentes: 1 suelo, 2 laterales agrupadas, 3 techo.

Figura 3.28: Red de radiosidades por unidad de longitud axial empleada para resolver el horno del Ejercicio 5; las áreas de las resistencias son $A'_i = A_i/L_z$.

En los problemas de radiación con superficies grises y difusas se resuelve un sistema de ecuaciones para obtener las radiosidades J_i. Como las superficies 2 y 4 tienen igual temperatura y emisividad, se agrupan en una misma superficie equivalente 2. Con $a = c = 3\,\mathrm{m}$, F_{22} no es autovisión de una pared plana individual: representa el intercambio entre las dos paredes laterales disjuntas 2 y 4 agrupadas en un único nodo.

El sistema de ecuaciones para las radiosidades es:

$$J_i = E_i + (1-\varepsilon_i)\sum_{j=1}^{n} J_j F_{ij}.$$

Desarrollado para las tres superficies equivalentes:

$$J_1 = E_1 + (1-\varepsilon_1)\left[J_1F_{11} + J_2F_{12} + J_3F_{13}\right],$$

$$J_2 = E_2 + (1-\varepsilon_2)\left[J_1F_{21} + J_2F_{22} + J_3F_{23}\right],$$

$$J_3 = E_3 + (1-\varepsilon_3)\left[J_1F_{31} + J_2F_{32} + J_3F_{33}\right].$$

Donde, para compactar la escritura, se denota por E_i el término emisor $\varepsilon_i E_{bi} = \varepsilon_i\sigma T_i^4$:

$$E_1 = \varepsilon_1\sigma T_1^4 = 0{,}5\cdot 5{,}67\times10^{-8}\,\mathrm{W/(m^2\,K^4)}\cdot(600\,\mathrm{K})^4 = 3674\,\mathrm{W/m^2},$$

$$E_2 = \varepsilon_2\sigma T_2^4 = 236\,782\,\mathrm{W/m^2},$$

$$E_3 = \varepsilon_3\sigma T_3^4 = 108\,909\,\mathrm{W/m^2}.$$

Los factores de forma son:

$$F_{11} = F_{33} = 0,$$

ya que las superficies 1 y 3 no se ven a sí mismas.

Para el caso bidimensional:

$$F_{13} = F_{31} = F_{22} = \sqrt{1+\left(\frac{c}{a}\right)^2} - \frac{c}{a} = 0{,}414.$$

Por la regla de la suma:

$$F_{12} = 1 - F_{11} - F_{13} = 0{,}586.$$

Por simetría:

$$F_{32} = 0{,}586.$$

Por reciprocidad:

$$F_{21} = F_{12}\frac{A_1}{A_2} = 0{,}586\frac{3}{6} = 0{,}293.$$

Por simetría:

$$F_{23} = 0{,}293.$$

El sistema queda:

$$J_1 = 3674 + (1-0{,}5)\left[0 + 0{,}586J_2 + 0{,}414J_3\right],$$
$$J_2 = 236782 + (1-0{,}5)\left[0{,}293J_1 + 0{,}414J_2 + 0{,}293J_3\right],$$
$$J_3 = 108909 + (1-0{,}5)\left[0{,}414J_1 + 0{,}586J_2 + 0\right].$$

Resolviendo:

$$J_1 = 166\,369\,\mathrm{W/m^2}, \qquad J_2 = 376\,189\,\mathrm{W/m^2}, \qquad J_3 = 253\,549\,\mathrm{W/m^2}.$$

Las potencias caloríficas se calculan mediante:

$$q_i' = \frac{\varepsilon_i}{1-\varepsilon_i}A_i'(E_{bi} - J_i).$$

Para la superficie 1:

$$q_1' = \frac{0{,}5}{1-0{,}5}A_1'(7348 - 166369) = -477\,062\,\mathrm{W/m}.$$

Para la superficie equivalente formada por las paredes laterales 2 y 4:

$$q_{2,\mathrm{eq}}' = \frac{0{,}5}{1-0{,}5}A_2'(473564 - 376189) = 584\,250\,\mathrm{W/m}.$$

Para la superficie 3:

$$q_3' = \frac{0{,}5}{1-0{,}5}A_3'(217819 - 253549) = -107\,191\,\mathrm{W/m}.$$

Donde:

$$E_{b1} = \sigma T_1^4 = \frac{E_1}{\varepsilon_1} = 7348\,\mathrm{W/m^2},$$
$$E_{b2} = 473\,564\,\mathrm{W/m^2}, \qquad E_{b3} = 217\,819\,\mathrm{W/m^2}.$$

La ecuación de comprobación, tomando un volumen de control que incluya el espacio interior del horno, es:

$$q_e + q_G = q_s + \dot{U} + \dot{W}.$$

En régimen estacionario:

$$q_e = q_s, \qquad \sum_i q_i' = 0.$$

Por tanto:

$$q_1' + q_{2,\mathrm{eq}}' + q_3' \simeq 0.$$

Volviendo al problema original:

$$q'_1 = -477\,062\,\mathrm{W/m}, \qquad q'_2 = q'_4 = \frac{q'_{2,\mathrm{eq}}}{2} = \frac{584250}{2} = 292\,125\,\mathrm{W/m}, \qquad q'_3 = -107\,191\,\mathrm{W/m}.$$

Los flujos por unidad de superficie son:

$$q''_1 = \frac{-477062}{3} = -159\,021\,\mathrm{W/m^2},$$
$$q''_2 = q''_4 = \frac{292125}{3} = 97\,375\,\mathrm{W/m^2},$$
$$q''_3 = \frac{-107191}{3} = -35\,730\,\mathrm{W/m^2}.$$

Comentarios.

- La radiosidad $J = E + \rho G$ siempre es positiva.
- Las potencias caloríficas por radiación son positivas cuando salen del cuerpo y negativas cuando llegan a él.
- Cuando hay varios cuerpos a diferentes temperaturas, la potencia radiante del más caliente es siempre positiva, la del más frío siempre negativa y la de los cuerpos a temperaturas intermedias puede ser positiva o negativa.

Cálculos complementarios.

Para evitar confusión con cada pared lateral individual, se denota por "2,eq" la superficie equivalente formada por las paredes 2 y 4. Los intercambios por unidad de longitud de esa superficie equivalente con las demás son:

$$q'_{ij} = A'_i F_{ij}(J_i - J_j), \qquad i,j \in \{1,2_{\mathrm{eq}},3\}.$$

Así:

$$q'_{21} = A'_2 F_{21}(J_2 - J_1) = 368\,729\,\mathrm{W/m},$$
$$q'_{22} = A'_2 F_{22}(J_2 - J_2) = 0\,\mathrm{W/m},$$
$$q'_{23} = A'_2 F_{23}(J_2 - J_3) = 215\,523\,\mathrm{W/m}.$$

Al sumar:

$$q'_{2,\mathrm{eq}} = q'_{21} + q'_{22} + q'_{23} = 584\,251\,\mathrm{W/m}.$$

La irradiación incidente sobre la superficie lateral equivalente, integrada por unidad de longitud, es:

$$G_2 A'_2 = (J_1 F_{21} + J_2 F_{22} + J_3 F_{23}) A'_2 = 1\,672\,882\,\mathrm{W/m}.$$

La potencia reflejada por unidad de longitud en la superficie lateral equivalente es:

$$\rho_2 G_2 A'_2 = (1-\alpha_2)(J_1 F_{21} + J_2 F_{22} + J_3 F_{23}) A'_2 = (1-\varepsilon_2)(J_1 F_{21} + J_2 F_{22} + J_3 F_{23}) A'_2.$$

Como $\rho_2 = 1 - \varepsilon_2 = 0{,}5$:

$$\rho_2 G_2 A'_2 = 0{,}5\, G_2 A'_2 = 836\,441\,\mathrm{W/m}.$$

Este valor corrige la igualdad accidental entre calor incidente y calor reflejado; sólo podrían coincidir si $\rho_2 = 1$, lo que no ocurre en este problema.

La potencia neta de la superficie lateral equivalente también puede calcularse como:

$$q'_{2,\mathrm{eq}} = (E_2 + \rho_2 G_2 - G_2) A'_2 = 584\,251\,\mathrm{W/m}.$$

La potencia por unidad de longitud que, saliendo de la superficie lateral equivalente, es interceptada por 3 es:

$$q'_{2\to 3} = J_2 A'_2 F_{23} = 661\,099\,\mathrm{W/m}.$$

La potencia por unidad de longitud que, saliendo de 3, es interceptada por la superficie lateral equivalente es:

$$q'_{3\to 2} = J_3 A'_3 F_{32} = 445\,577\,\mathrm{W/m}.$$

Por tanto:

$$q'_{23} = q'_{2\to 3} - q'_{3\to 2} = 215\,523\,\mathrm{W/m}.$$

3. Conclusiones o interpretación.

$$\boxed{J_1 = 166\,369\,\mathrm{W/m^2}, \quad J_2 = 376\,189\,\mathrm{W/m^2}, \quad J_3 = 253\,549\,\mathrm{W/m^2}}$$

$$\boxed{q''_1 = -159\,021\,\mathrm{W/m^2}, \quad q''_2 = q''_4 = 97\,375\,\mathrm{W/m^2}, \quad q''_3 = -35\,730\,\mathrm{W/m^2}}$$

$$\boxed{q'_1 = -477\,062\,\mathrm{W/m}, \quad q'_2 = q'_4 = 292\,125\,\mathrm{W/m}, \quad q'_3 = -107\,191\,\mathrm{W/m}}$$

Comprobación final

La suma algebraica de los calores netos de todas las superficies del recinto debe ser cero y cada radiosidad debe ser físicamente compatible con su temperatura.

3.15.6 Ejercicio resuelto 6. Horno cilíndrico de tres superficies

Descripción del problema

Calcular la potencia térmica por radiación desde cada una de las superficies interiores de un horno cilíndrico de 1 m de altura y 2 m de diámetro. Las bases se comportan como superficies grises difusas con emisividades $\varepsilon_1 = 0{,}8$ y $\varepsilon_2 = 0{,}4$, cuyas temperaturas son $T_1 = 700\,\mathrm{K}$ y $T_2 = 500\,\mathrm{K}$. La superficie lateral se modela como cuerpo negro, $\varepsilon_3 = 1$, y se mantiene a $T_3 = 400\,\mathrm{K}$.

Datos.

- Altura: $H = 1\,\mathrm{m}$.
- Diámetro: $D = 2\,\mathrm{m}$.
- $T_1 = 700\,\mathrm{K}$, $\varepsilon_1 = 0{,}8$.
- $T_2 = 500\,\mathrm{K}$, $\varepsilon_2 = 0{,}4$.
- $T_3 = 400\,\mathrm{K}$, $\varepsilon_3 \simeq 1$.

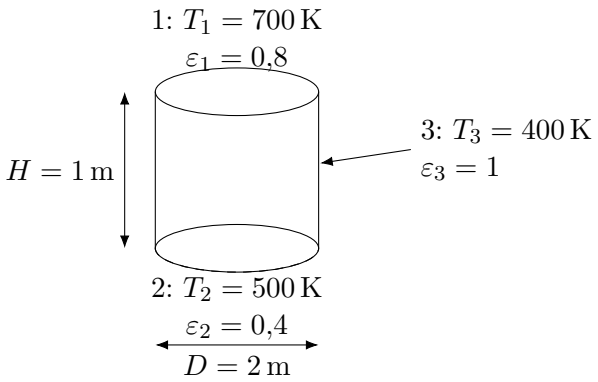


Figura 3.29: Horno cilíndrico del Ejercicio 6, con dimensiones y propiedades asociadas a cada superficie.

Resolución del problema

Antes de calcular

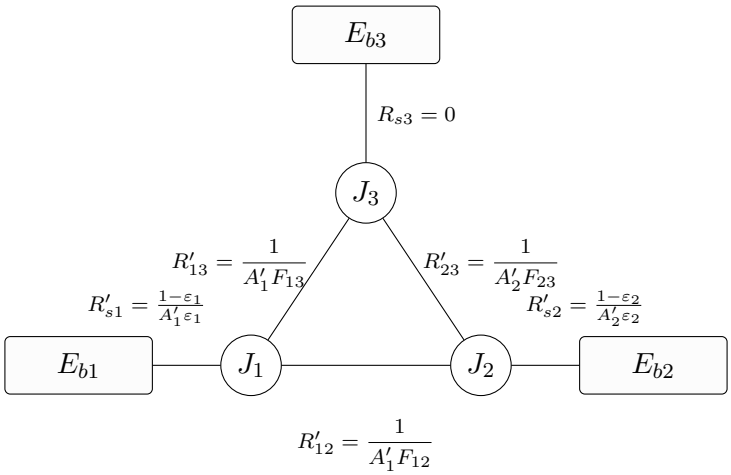
Predicción física. La superficie negra simplifica la red porque su radiosidad coincide con la emisión de cuerpo negro. El sentido neto seguirá las temperaturas.

Modelo esperado. Sistema de radiosidades de tres superficies con una condición negra conocida.

1. Simplificaciones. Se aplican las hipótesis indicadas por el enunciado y se escoge el modelo mínimo que representa el intercambio dominante. A partir de ahí se pasa al planteamiento geométrico, radiante o energético correspondiente.

2. Modelo adoptado, ecuaciones y resolución.

Esquema de resistencias radiantes.



La superficie lateral es casi negra, por eso su resistencia superficial se anula.

Figura 3.30: Esquema de resistencias radiantes del horno cilíndrico del Ejercicio 6.

Los factores de forma son:

$$F_{11} = 0,$$

$$F_{12} = 0{,}382,$$

para discos coaxiales paralelos tabulados. Por tanto:

$$F_{13} = 1 - F_{11} - F_{12} = 0{,}618.$$

Por simetría:

$$F_{21} = F_{12} = 0{,}382, \qquad F_{22} = 0,$$

$$F_{23} = 1 - F_{21} - F_{22} = 0{,}618.$$

Por reciprocidad:

$$F_{31} = F_{13}\frac{A_1}{A_3} = 0{,}309.$$

Por simetría:

$$F_{32} = F_{31} = 0{,}309.$$

Finalmente:

$$F_{33} = 1 - F_{31} - F_{32} = 0{,}382.$$

Las radiosidades cumplen:

$$J_1 = E_1 + (1-\varepsilon_1)\left[J_1F_{11} + J_2F_{12} + J_3F_{13}\right],$$

$$J_2 = E_2 + (1-\varepsilon_2)\left[J_1F_{21} + J_2F_{22} + J_3F_{23}\right],$$

$$J_3 = E_3 + (1-\varepsilon_3)\left[J_1F_{31} + J_2F_{32} + J_3F_{33}\right].$$

Como $\varepsilon_3 = 1$:

$$J_3 = E_3.$$

Donde E_i representa el término emisor $\varepsilon_i E_{bi}$:

$$E_1 = \varepsilon_1\sigma T_1^4 = 10\,891\,\mathrm{W/m^2},$$

$$E_2 = \varepsilon_2\sigma T_2^4 = 1418\,\mathrm{W/m^2},$$

$$E_3 = \varepsilon_3 \sigma T_3^4 = 1452\,\mathrm{W/m^2}.$$

Resolviendo:

$$J_1 = 11\,420\,\mathrm{W/m^2}, \qquad J_2 = 4573\,\mathrm{W/m^2}, \qquad J_3 = 1452\,\mathrm{W/m^2}.$$

Las potencias caloríficas de las bases son:

$$q_1 = \frac{\varepsilon_1 A_1}{1-\varepsilon_1}(E_{b1} - J_1) = 27{,}570\,\mathrm{kW},$$

$$q_2 = \frac{\varepsilon_2 A_2}{1-\varepsilon_2}(E_{b2} - J_2) = -2{,}155\,\mathrm{kW}.$$

Para la superficie lateral, al aproximarse a un cuerpo negro, no es aplicable la expresión con resistencia superficial. En su lugar:

$$q_3 = (J_3 - G_3)A_3.$$

La irradiación sobre 3 es:

$$G_3 = \sum_{j=1}^{n} J_j F_{3j} = J_1 F_{31} + J_2 F_{32} + J_3 F_{33} = 5496\,\mathrm{W/m^2}.$$

Así:

$$q_3 = -25{,}415\,\mathrm{kW}.$$

3. Conclusiones o interpretación.

$$\boxed{q_1 = 27{,}570\,\mathrm{kW}, \qquad q_2 = -2{,}155\,\mathrm{kW}, \qquad q_3 = -25{,}415\,\mathrm{kW}}$$

Comprobación final

Compruebe cierre de factores, balance global del recinto y que la superficie negra cumple $J = E_b$.

3.15.7 Ejercicio resuelto 7. Pantalla radiante entre dos placas paralelas

Descripción del problema

Una lámina de aluminio de emisividad 0,1 por ambas caras se sitúa entre dos cuerpos planos próximos con temperaturas de 527 °C y 227 °C, cuyas emisividades valen 0,2 y 0,7, respectivamente. Determinar el flujo de calor, en $\mathrm{W/m^2}$, entre las superficies 1 y 2 sin y con la lámina de aluminio interpuesta. Modele las tres láminas como placas grandes, paralelas y de igual área, con factores de forma unidad entre superficies consecutivas. Los huecos están al vacío; la pantalla es delgada, isoterma y sin almacenamiento. Se desprecia conducción por soportes, pérdidas por bordes y cualquier intercambio convectivo.

Datos.

- $T_1 = 527\,^\circ\mathrm{C}$.
- $T_2 = 227\,^\circ\mathrm{C}$.
- $\varepsilon_1 = 0{,}2$.
- $\varepsilon_2 = 0{,}7$.
- Lámina de aluminio: $\varepsilon = 0{,}1$ por ambas caras.

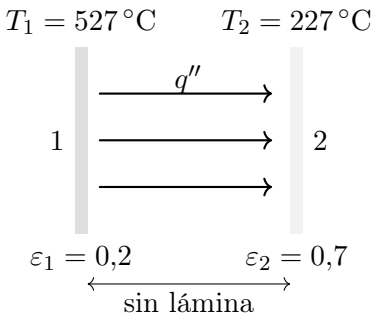


Figura 3.31: Dos placas paralelas próximas.

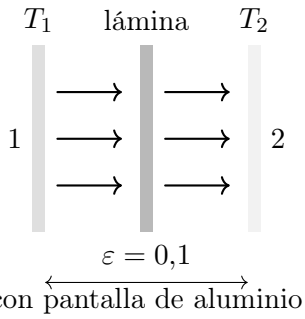


Figura 3.32: Placas con lámina interpuesta.

Figura 3.33: Intercambio radiante entre superficies planas del Ejercicio 7.

Resolución del problema

Antes de calcular

Predicción física. La pantalla debe reducir el intercambio entre las placas y alcanzar una temperatura intermedia.

Modelo esperado. Resistencias radiativas en serie con balance nulo en la pantalla adiabática.

1. Simplificaciones. Se aplican las hipótesis indicadas por el enunciado y se escoge el modelo mínimo que representa el intercambio dominante. A partir de ahí se pasa al planteamiento geométrico, radiante o energético correspondiente.

2. Modelo adoptado, ecuaciones y resolución.

Esquema de resistencias radiantes por unidad de área.

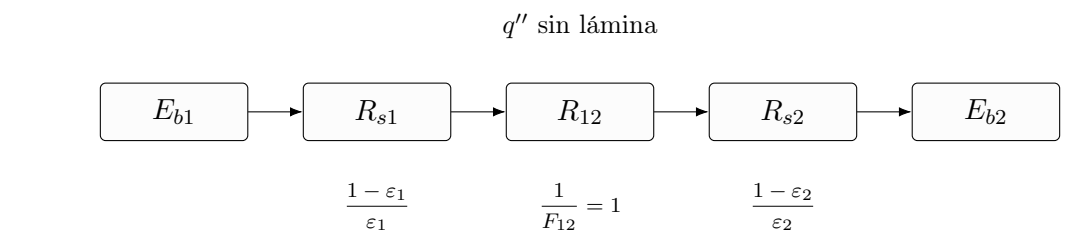


Figura 3.34: Sin lámina interpuesta.

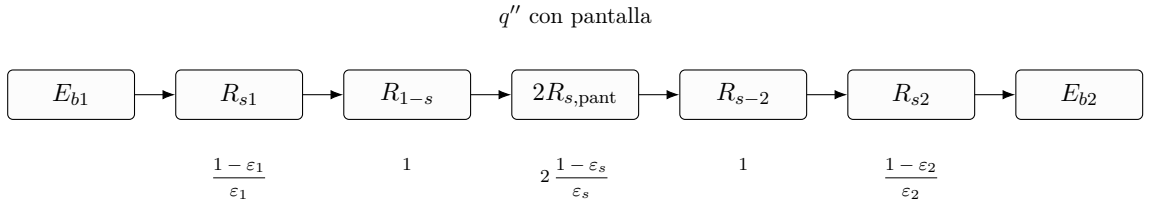


Figura 3.35: Con pantalla de aluminio.

Figura 3.36: Red equivalente en serie por unidad de área del Ejercicio 7.

Al tratarse de placas planas muy próximas y extensas, se toma:

$$F_{12} = 1.$$

Además, para superficies grises difusas opacas se emplea la red de resistencias radiantes por unidad de área. Sin lámina interpuesta: Con pantalla, el estado estacionario exige el balance $q''_{1s} = q''_{s2}$; esa igualdad determina la temperatura de la pantalla y garantiza que no se almacena energía en ella.

$$q''_{12} = \frac{\sigma\left(T_1^4 - T_2^4\right)}{\dfrac{1}{\varepsilon_1} + \dfrac{1}{\varepsilon_2} - 1}.$$

Las temperaturas absolutas son:

$$T_1 = 527\,^\circ\text{C} = 800\,\text{K}, \qquad T_2 = 227\,^\circ\text{C} = 500\,\text{K}.$$

Por tanto:

$$q''_{12} = \frac{\sigma\left(800^4 - 500^4\right)}{\dfrac{1}{0{,}2} + \dfrac{1}{0{,}7} - 1} = 3625{,}4\,\text{W/m}^2.$$

Cuando se introduce la lámina de aluminio, ésta actúa como pantalla radiante. En régimen estacionario, el mismo flujo atraviesa el espacio 1–pantalla y el espacio pantalla–2. La resistencia total por unidad de área es la suma de las dos resistencias radiantes:

$$R_{\text{tot}} = \left(\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_s} - 1\right) + \left(\frac{1}{\varepsilon_s} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1\right),$$

donde $\varepsilon_s = 0{,}1$ es la emisividad de cada cara de la lámina. Así:

$$q''_{12,s} = \frac{\sigma\left(T_1^4 - T_2^4\right)}{\left(\dfrac{1}{\varepsilon_1} + \dfrac{1}{\varepsilon_s} - 1\right) + \left(\dfrac{1}{\varepsilon_s} + \dfrac{1}{\varepsilon_2} - 1\right)}.$$

Sustituyendo:

$$q''_{12,s} = \frac{\sigma\left(800^4 - 500^4\right)}{\left(\dfrac{1}{0{,}2} + \dfrac{1}{0{,}1} - 1\right) + \left(\dfrac{1}{0{,}1} + \dfrac{1}{0{,}7} - 1\right)} = 805{,}6\,\text{W/m}^2.$$

La lámina reduce el flujo porque añade dos resistencias superficiales de baja emisividad. Físicamente, una baja emisividad implica una alta reflectancia infrarroja.

3. Conclusiones o interpretación.

$$\boxed{q''_{\text{sin lámina}} = 3625{,}4\,\text{W/m}^2}$$

$$\boxed{q''_{\text{con lámina}} = 805{,}6\,\text{W/m}^2}$$

Comprobación final

La pantalla debe tener calor neto cero, temperatura entre las placas y una potencia menor que sin pantalla.

3.15.8 Ejercicio resuelto 8. Intercambio radiante entre esferas concéntricas

Descripción del problema

Una esfera hueca 2, de diámetro $D_2 = 1\,\text{m}$, contiene en su interior otra esfera maciza 1. Ambas son opacas, grises y difusas. Las emisividades son $\varepsilon_1 = 0{,}7$ y $\varepsilon_2 = 0{,}3$, y las temperaturas son $T_1 = 27\,^\circ\text{C}$ y $T_2 = 87\,^\circ\text{C}$. Calcular el diámetro D_1 de la esfera interior para que su potencia radiante neta sea $q_1 = -100\,\text{W}$.

Datos.

- $D_2 = 1\,\text{m}$.
- $\varepsilon_1 = 0{,}7$.
- $\varepsilon_2 = 0{,}3$.
- $T_1 = 27\,^\circ\text{C}$.
- $T_2 = 87\,^\circ\text{C}$.
- $q_1 = -100\,\text{W}$.

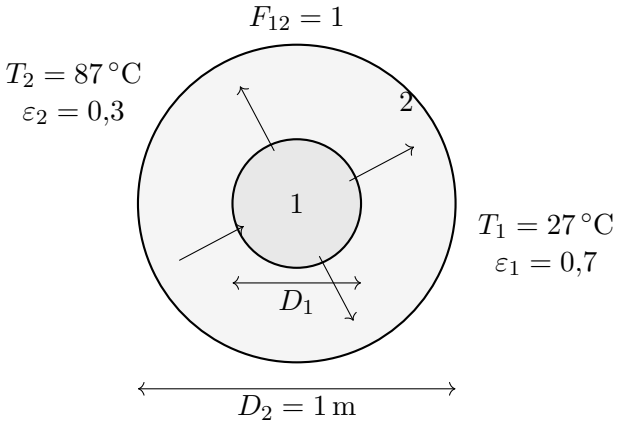


Figura 3.37: Esfera maciza interior y esfera hueca exterior del Ejercicio 8.

Resolución del problema

Antes de calcular

Predicción física. La esfera interior ve por completo a la exterior, por lo que $F_{12} = 1$. El calor va de la esfera caliente a la fría.

Modelo esperado. Intercambio de dos superficies grises concéntricas usando la resistencia geométrica y las superficiales.

1. Simplificaciones. Se aplican las hipótesis indicadas por el enunciado y se escoge el modelo mínimo que representa el intercambio dominante. A partir de ahí se pasa al planteamiento geométrico, radiante o energético correspondiente.

2. Modelo adoptado, ecuaciones y resolución.

Esquema de resistencias radiantes.

$$q_1 = -100\,\mathrm{W}$$

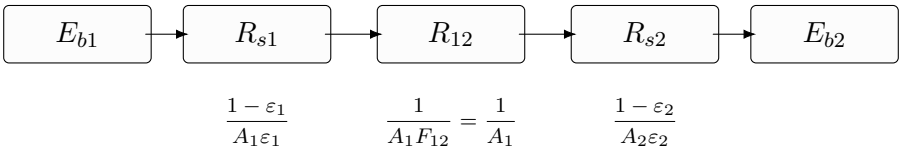


Figura 3.38: Red equivalente para las dos esferas concéntricas del Ejercicio 8.

Para dos superficies grises difusas que forman un recinto:

$$q_1 = \frac{\sigma\left(T_1^4 - T_2^4\right)}{\dfrac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1 A_1} + \dfrac{1}{A_1 F_{12}} + \dfrac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2 A_2}} = -100\,\mathrm{W}.$$

En este caso:

$$F_{12} = 1,$$
$$A_2 = \pi D_2^2 = 3{,}142\,\mathrm{m}^2.$$

Resolviendo:

$$D_1 = 0{,}3295\,\mathrm{m}.$$

También puede resolverse mediante:

$$q_i = \sum_{j=1}^{n} A_i F_{ij}(J_i - J_j),$$

o bien:

$$q_i = \frac{\varepsilon_i A_i}{1-\varepsilon_i}(E_{bi} - J_i).$$

En cualquiera de estos dos casos sería necesario resolver el sistema de radiosidades:

$$J_i = \varepsilon_i E_{bi} + (1-\varepsilon_i)\sum_{j=1}^{n} J_j F_{ij}.$$

3. Conclusiones o interpretación.

$$\boxed{D_1 = 0{,}330\,\mathrm{m}}$$

Comprobación final

Verifique reciprocidad, límites cuando una emisividad tiende a 1 y que el signo corresponde a $T_1^4 - T_2^4$.

3.15.9 Ejercicio resuelto 9. Tubo intermedio como pantalla radiante

Descripción del problema

Una barra maciza de 1 m de diámetro está dentro de un tubo muy delgado de 2 m de diámetro, el cual está a su vez dentro de otro tubo de 4 m de diámetro. La emisividad de todas las superficies vale 0,7, las cuales se comportan como superficies grises difusas. Sabiendo que la temperatura de la barra maciza es 400 K y la del tubo más exterior 600 K, calcular la temperatura del tubo intermedio. Todos los huecos están al vacío. Los cilindros se modelan suficientemente largos para despreciar los efectos de extremo; el tubo intermedio es una pantalla delgada e isoterma, y se desprecia la conducción por sus soportes.

Datos.

- $D_1 = 1\,\mathrm{m}$.
- $D_2 = D_3 = 2\,\mathrm{m}$.
- $D_4 = 4\,\mathrm{m}$.
- $T_1 = 400\,\mathrm{K}$.
- $T_4 = 600\,\mathrm{K}$.
- $\varepsilon = 0{,}7$.
- $T_2 = T_3$.

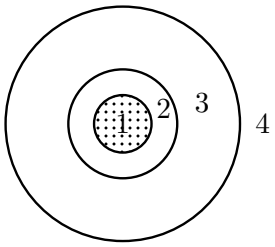


Figura 3.39: Cilindros concéntricos del Ejercicio 9.

Resolución del problema

Antes de calcular

Predicción física. El tubo intermedio actúa como pantalla y debe adoptar una temperatura entre las superficies extremas.

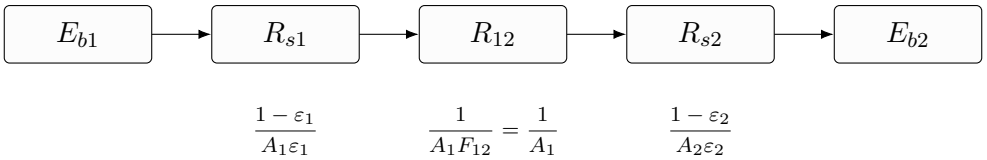
Modelo esperado. Dos intercambios radiativos acoplados por el balance de energía del tubo intermedio.

1. Simplificaciones. Se aplican las hipótesis indicadas por el enunciado y se escoge el modelo mínimo que representa el intercambio dominante. A partir de ahí se pasa al planteamiento geométrico, radiante o energético correspondiente.

2. Modelo adoptado, ecuaciones y resolución.

Esquema de resistencias radiantes.

Intercambio barra 1 – cara interior del tubo 2



Intercambio cara exterior 3 – tubo exterior 4

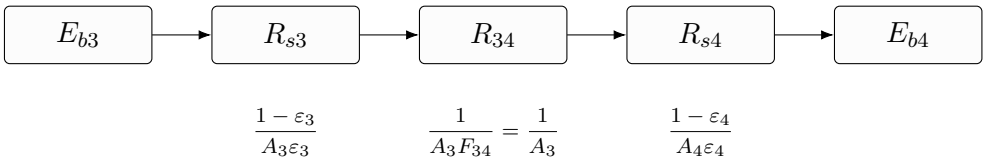


Figura 3.40: El tubo intermedio se trata como pantalla delgada: se desacopla el intercambio en dos redes en serie con la condición $q_{12} = q_{34}$ y $T_2 = T_3$.

Para el intercambio entre 1 y 2:

$$q_{12} = \frac{A_1\sigma\left(T_1^4 - T_2^4\right)}{\dfrac{1}{\varepsilon_1} + \dfrac{r_1}{r_2}\dfrac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2}}.$$

Para el intercambio entre 3 y 4:

$$q_{34} = \frac{A_3\sigma\left(T_3^4 - T_4^4\right)}{\dfrac{1}{\varepsilon_3} + \dfrac{r_3}{r_4}\dfrac{1-\varepsilon_4}{\varepsilon_4}}.$$

En régimen estacionario:

$$q_{12} = q_{34}.$$

Además:

$$A_1 = \pi D_1 L, \qquad A_2 = A_3 = \pi D_2 L, \qquad A_4 = \pi D_4 L.$$

Con:

$$T_2 = T_3,$$

se obtiene:

$$T_2 = \left[\frac{\left[1 + \dfrac{D_2}{D_4}(1-\varepsilon)\right]T_1^4 + \left[\dfrac{D_2}{D_1} + (1-\varepsilon)\right]T_4^4}{\dfrac{D_2}{D_1} + 2 - \varepsilon + \dfrac{D_2}{D_4}(1-\varepsilon)}\right]^{1/4}.$$

Sustituyendo:

$$T_2 = 555{,}1\,\mathrm{K}.$$

3. Conclusiones o interpretación.

$$\boxed{T_2 = T_3 = 555{,}1\,\mathrm{K} = 282{,}1\,^\circ\mathrm{C}}$$

Comprobación final

El calor que recibe el tubo por un lado debe ser igual al que emite por el otro y su temperatura no debe superar los extremos.

3.15.10 Ejercicio resuelto 10. Temperatura efectiva y potencia radiante del Sol

Descripción del problema

Sabiendo que la constante solar, medida por encima de la atmósfera, vale $G_0 = 1353\,\mathrm{W/m^2}$, que el diámetro del Sol es $1{,}392 \times 10^6$ km y suponiendo que emite como un cuerpo negro, que el diámetro de la Tierra es 12 742 km y que el radio medio de la órbita terrestre alrededor del Sol vale $1{,}496 \times 10^8$ km, calcular:

a) la temperatura efectiva del Sol desde el punto de vista radiante;

b) la potencia radiante total emitida por el Sol;

c) la potencia radiante solar interceptada por la Tierra.

Datos.

- $G_0 = 1353\,\mathrm{W/m^2}$.
- $D_S = 1{,}392 \times 10^6$ km.
- $D_T = 12\,742$ km.
- $R_{\text{órbita}} = 1{,}496 \times 10^8$ km.
- El Sol emite como cuerpo negro.

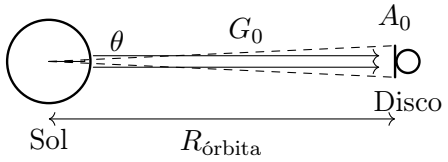


Figura 3.41: Geometría Sol-disco usada para calcular el factor $F_{0S} = \sin^2\theta$.

Resolución del problema

Antes de calcular

Predicción física. La longitud de onda de máxima emisión permite estimar la temperatura solar; la potencia total crecerá con T^4 y con el área solar.

Modelo esperado. Leyes de Wien y Stefan–Boltzmann aplicadas como aproximación de cuerpo negro.

1. Simplificaciones. Se aplican las hipótesis indicadas por el enunciado y se escoge el modelo mínimo que representa el intercambio dominante. A partir de ahí se pasa al planteamiento geométrico, radiante o energético correspondiente.

2. Modelo adoptado, ecuaciones y resolución.

Apartado a). La potencia radiante del Sol interceptada por un satélite de área A_0, dispuesto perpendicularmente a los rayos solares por encima de la atmósfera, es: La relación geométrica utilizada a continuación es la aproximación de campo lejano: el elemento receptor $\mathrm{d}A_0$ es pequeño respecto de $R^2_{\text{órbita}}$ y su normal es paralela al haz. Si el receptor fuera extenso, curvo o inclinado, la potencia debería obtenerse integrando $G_0 \cos\theta\,\mathrm{d}A$ sobre la superficie iluminada.

$$q_{\text{Sol}} F_{S0} = G_0 A_0. \tag{1}$$

El factor de forma Sol-disco, F_{S0}, no está tabulado directamente, pero sí el de un disco sobre un cuerpo esférico. Por reciprocidad:

$$q_{\text{Sol}} F_{S0} = (J_S A_S) F_{S0} = J_S A_0 F_{0S}. \tag{2}$$

Para el disco frente al Sol:

$$F_{0S} = \sin^2\theta = \left(\frac{R_S}{R_{\text{órbita}}}\right)^2. \tag{3}$$

Como el Sol se comporta como cuerpo negro:

$$J_S = E_S + \rho_S G_S.$$

Con $\rho_S = 0$ y $\varepsilon_S = 1$:

$$J_S = E_S = \sigma T_S^4. \tag{4}$$

Sustituyendo (3) y (4) en (2):

$$q_{\text{Sol}} F_{S0} = \sigma T_S^4 A_0 \left(\frac{R_S}{R_{\text{órbita}}}\right)^2.$$

Llevando esta expresión a (1):

$$\sigma T_S^4 A_0 \left(\frac{R_S}{R_{\text{órbita}}}\right)^2 = G_0 A_0.$$

De donde:

$$T_S = \left[\frac{G_0}{\sigma}\left(\frac{R_{\text{órbita}}}{R_S}\right)^2\right]^{1/4}.$$

Sustituyendo:

$$T_S = 5762\,\text{K}.$$

También podría obtenerse considerando que la suma de G_0 sobre un área igual a la esfera de la órbita terrestre es la potencia emitida por el Sol:

$$q_{\text{Sol}} = \int_{\text{esfera órbita terrestre}} G_0\,\text{d}A = G_0\,4\pi R_{\text{órbita}}^2.$$

Combinando con:

$$q_{\text{Sol}} = J_S A_S = E_S A_S = \sigma T_S^4\,4\pi R_S^2,$$

se llega a la misma expresión:

$$T_S = \left[\frac{G_0}{\sigma}\left(\frac{R_{\text{órbita}}}{R_S}\right)^2\right]^{1/4}.$$

Apartado b). La potencia radiante emitida por el Sol es:

$$q_{\text{Sol}} = J_S A_S = \sigma T_S^4 (4\pi R_S^2).$$

Sustituyendo:

$$q_{\text{Sol}} = 3{,}805 \times 10^{20}\,\text{MW}.$$

Apartado c). La potencia radiante interceptada por la Tierra se calcula como la interceptada por un disco de igual diámetro que la Tierra:

$$q_{\text{Sol}\to\text{Tierra}} = G_0 \pi R_{\text{Tierra}}^2.$$

Sustituyendo:

$$q_{\text{Sol}\to\text{Tierra}} = 1{,}731 \times 10^{11}\,\text{MW}.$$

Nota. En el apartado a) podría haberse calculado F_{S0} directamente sin pasar por F_{0S}, considerando al Sol como un disco plano. En ese caso F_{S0} correspondería a dos discos paralelos concéntricos tabulados.

3. Conclusiones o interpretación.

$$\boxed{T_S = 5762\,\mathrm{K}}$$

$$\boxed{q_{\mathrm{Sol}} = 3{,}805 \times 10^{20}\,\mathrm{MW}}$$

$$\boxed{q_{\mathrm{Sol}\to\mathrm{Tierra}} = 1{,}731 \times 10^{11}\,\mathrm{MW}}$$

Comprobación final

Use kelvin, compruebe unidades y contraste que la temperatura obtenida sea compatible con el máximo espectral visible.

3.15.11 Ejercicio resuelto 11. Bombilla con convección y radiación

Descripción del problema

Se pretende que la temperatura de la esfera de una bombilla de incandescencia de 100 W no supere los 100 °C. En el interior de la lámpara existe vacío intenso. La bombilla se encuentra en el interior de una habitación cuyas paredes están a 15 °C y el ambiente a 20 °C. El coeficiente de convección cristal-ambiente es de $10\,\mathrm{W/(m^2\,K)}$ y el cristal de la bombilla se comporta como cuerpo gris. Calcular el diámetro de la esfera de la bombilla y los porcentajes de radiación emitida por el filamento que se disipan de forma convectiva y radiante por dicha esfera, sabiendo que el 40 % de la energía irradiada por el filamento es absorbida por el vidrio.

Datos.

- $q_0 = 100\,\mathrm{W}$.
- $T = 100\,^\circ\mathrm{C}$.
- $T_{\mathrm{paredes}} = 15\,^\circ\mathrm{C}$.
- $T_\infty = 20\,^\circ\mathrm{C}$.
- $h_c = 10\,\mathrm{W/(m^2\,K)}$.
- $\alpha = 0{,}4$.
- $\varepsilon = \alpha = 0{,}4$.

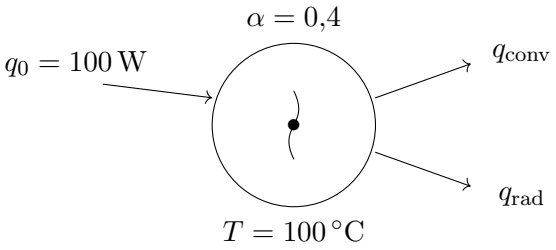


Figura 3.42: Balance energético de la esfera de la bombilla.

Resolución del problema

Antes de calcular

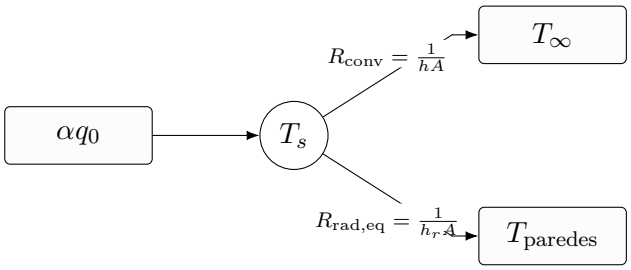
Predicción física. La potencia eléctrica se repartirá entre convección y radiación. La bombilla debe estar más caliente que el aire y el entorno.

Modelo esperado. Balance estacionario con dos mecanismos de pérdida en paralelo.

1. Simplificaciones. Se aplican las hipótesis indicadas por el enunciado y se escoge el modelo mínimo que representa el intercambio dominante. A partir de ahí se pasa al planteamiento geométrico, radiante o energético correspondiente.

2. Modelo adoptado, ecuaciones y resolución.

Esquema térmico equivalente.



La rama radiativa representa una resistencia equivalente linealizada alrededor de la temperatura de funcionamiento.

Figura 3.43: Circuito térmico equivalente de la esfera de la bombilla del Ejercicio 11.

Al tratarse el interior de la bombilla de un contorno cerrado, del total $q_0 = 100\,\text{W}$ radiado por el filamento, la fracción αq_0 es absorbida por el vidrio. El resto atraviesa el vidrio.

Por tanto, la cantidad αq_0 se transmite por radiación y convección desde el vidrio al entorno:

$$\alpha q_0 = h_c A(T - T_\infty) + \varepsilon\sigma A\left(T^4 - T_{\text{paredes}}^4\right).$$

Teniendo en cuenta que:

$$\varepsilon = \alpha = 0{,}4, \qquad A \simeq \pi D^2,$$

y sustituyendo los valores:

$$D = 0{,}108\,\text{m}.$$

La potencia disipada por convección es:

$$q_{\text{conv}} = h_c A(T - T_\infty) = 29{,}5\,\text{W}.$$

La potencia disipada por radiación es:

$$q_{\text{rad}} = \varepsilon\sigma A\left(T^4 - T_{\text{paredes}}^4\right) = 10{,}5\,\text{W}.$$

Respecto de los 100 W emitidos por el filamento:

$$\frac{q_{\text{conv}}}{q_0} \times 100 = 29{,}5\,\%, \qquad \frac{q_{\text{rad}}}{q_0} \times 100 = 10{,}5\,\%.$$

3. Conclusiones o interpretación.

$$\boxed{D = 108\,\text{mm}}$$

$$\boxed{q_{\text{conv}} = 29{,}5\,\text{W}, \qquad q_{\text{rad}} = 10{,}5\,\text{W}}$$

Comprobación final

La suma de convección y radiación debe igualar la potencia eléctrica y ambas pérdidas deben tener el mismo sentido.

3.15.12 Ejercicio resuelto 12. Cúpula hemisférica sobre una pista de hielo

Descripción del problema

Una pista circular de patinaje sobre hielo de 20 m de diámetro se quiere cubrir temporalmente con una cúpula hemiesférica del mismo diámetro. El hielo se mantiene a $-3\,^{\circ}\mathrm{C}$ y cierto día la temperatura media de la superficie interior de la cúpula es de $7\,^{\circ}\mathrm{C}$. La emisividad del hielo vale 0,97 y la de la cúpula 0,45. Calcular la transferencia neta de calor por radiación de la cúpula a la pista y de la pista a la cúpula.

Datos.

- Diámetro: $D = 20\,\mathrm{m}$.
- $T_1 = 7\,^{\circ}\mathrm{C}$, cúpula.
- $T_2 = -3\,^{\circ}\mathrm{C}$, pista.
- $\varepsilon_1 = 0{,}45$, cúpula.
- $\varepsilon_2 = 0{,}97$, hielo.

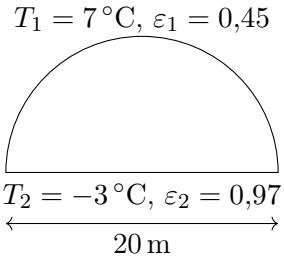


Figura 3.44: Cúpula hemiesférica sobre pista circular.

Resolución del problema

Antes de calcular

Predicción física. La pista intercambia radiación con la cúpula y puede perder calor hacia superficies efectivamente más frías. La geometría controla qué superficies se ven.

Modelo esperado. Balance radiativo mediante factores de forma y, si procede, convección adicional.

1. Simplificaciones. Se aplican las hipótesis indicadas por el enunciado y se escoge el modelo mínimo que representa el intercambio dominante. A partir de ahí se pasa al planteamiento geométrico, radiante o energético correspondiente.

2. Modelo adoptado, ecuaciones y resolución.

Esquema de resistencias radiantes.

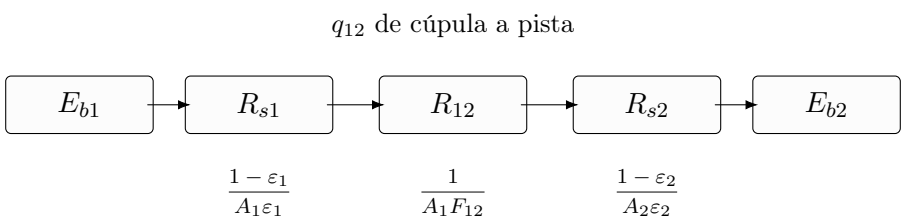


Figura 3.45: Red equivalente para el intercambio entre cúpula y pista del Ejercicio 12.

El calor por radiación debe ir del cuerpo más caliente, la cúpula, al más frío, la pista.

Al tratarse de un recinto constituido por dos superficies:

$$q_{\text{cúpula-pista}} = q_{12} = \frac{\sigma\left(T_1^4 - T_2^4\right)}{\dfrac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1 A_1} + \dfrac{1}{A_1 F_{12}} + \dfrac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2 A_2}}.$$

Las áreas son:

$$A_1 = \frac{1}{2} 4\pi r^2 = 628{,}3\,\text{m}^2,$$

$$A_2 = \pi r^2 = 314{,}2\,\text{m}^2.$$

El factor de forma es:

$$F_{12} = F_{21}\frac{A_2}{A_1}.$$

Como $F_{21} = 1$:

$$F_{12} = \frac{A_2}{A_1} = 0{,}5.$$

Sustituyendo:

$$q_{\text{cúpula-pista}} = 9027\,\text{W}.$$

Por tanto:

$$q_{\text{pista-cúpula}} = q_{21} = -q_{12} = -9027\,\text{W}.$$

Es decir, la cúpula pierde 9027 W de calor por radiación, y ese mismo calor lo recibe la pista.

3. Conclusiones o interpretación.

$$\boxed{q_{\text{cúpula-pista}} = 9{,}027\,\text{kW}}$$

$$\boxed{q_{\text{pista-cúpula}} = -9{,}027\,\text{kW}}$$

Comprobación final

Compruebe cierre de factores y que la potencia neta coincide con el balance energético de la pista.

3.15.13 Ejercicio resuelto 13. Placa horizontal a la intemperie con radiación solar

Descripción del problema

Una placa de aluminio de 4 mm de espesor está a la intemperie y dispuesta horizontalmente, con la cara inferior apoyada sobre un aislamiento ideal. El aire está a 20 °C y el coeficiente convectivo sobre la cara superior es $20\,\mathrm{W/(m^2\,K)}$. La placa recibe una irradiancia solar directa *normal al haz* de $600\,\mathrm{W/m^2}$, con altura solar de 72°, y una irradiancia difusa horizontal de $110\,\mathrm{W/m^2}$. La cara activa es opaca, tiene absortancia solar $\alpha_{s1} = 0{,}8$ y emisividad infrarroja $\varepsilon_1 = 0{,}2$, y se modela como gris y difusa en onda larga. El cielo se idealiza como cuerpo negro a 5 °C. Calcular la temperatura estacionaria:

a) al Sol;

b) a la sombra, bloqueando sólo el haz directo y manteniendo la irradiancia difusa.

Datos.

- $T_\infty = 20\,^\circ\mathrm{C}$, $T_{\mathrm{cielo}} = 5\,^\circ\mathrm{C}$.
- $h = 20\,\mathrm{W/(m^2\,K)}$.
- $G_{b,n} = 600\,\mathrm{W/m^2}$, $G_{d,h} = 110\,\mathrm{W/m^2}$.
- $\beta_1 = 18°$ respecto de la normal de la placa.
- $\alpha_{s1} = 0{,}8$, $\varepsilon_1 = 0{,}2$.

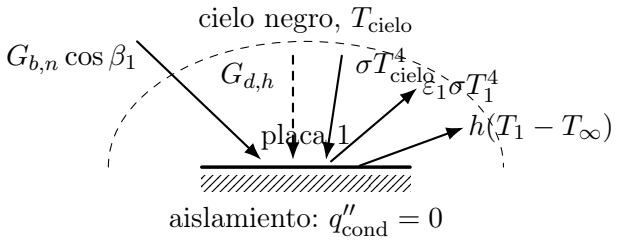


Figura 3.46: Balance energético de la cara superior de la placa del Ejercicio 13. $G_{b,n}$ es la irradiancia directa normal al haz.

Resolución del problema

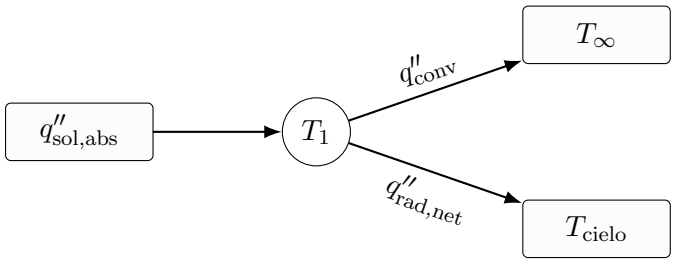
Antes de calcular

Predicción física. La placa selectiva absorbe gran parte de la onda corta y emite poco en onda larga. Al Sol debe quedar por encima del aire; en sombra, al conservarse el difuso, puede permanecer ligeramente por encima de T_∞.

Modelo esperado. Balance no lineal por unidad de área entre absorción solar, convección y radiación neta hacia un cielo negro.

1. Simplificaciones. Se considera una temperatura uniforme en la placa, propiedades constantes, cara inferior adiabática, cielo despejado equivalente y ausencia de radiación de onda larga procedente del suelo o de obstáculos. La irradiancia directa se proyecta una sola vez porque el dato $600\,\mathrm{W/m^2}$ es normal al haz.

2. Modelo adoptado, ecuaciones y resolución.



La rama radiativa es no lineal; no se introduce un h_r constante.

Figura 3.47: Esquema de balance de la placa del Ejercicio 13.

La irradiancia solar sobre el plano horizontal es:

$$G_{s,1} = G_{b,n}\cos\beta_1 + G_{d,h}.$$

La potencia solar absorbida por unidad de área es:

$$q''_{\text{sol,abs}} = \alpha_{s1} G_{s,1}.$$

Como la cara superior ve únicamente el hemisferio celeste idealizado, $F_{1\to\text{cielo}} = 1$. El intercambio infrarrojo neto es:

$$q''_{\text{rad,net}} = \varepsilon_1 \sigma \left(T_1^4 - T_{\text{cielo}}^4\right).$$

El balance estacionario queda:

$$\alpha_{s1}\left(G_{b,n}\cos\beta_1 + G_{d,h}\right) = h(T_1 - T_\infty) + \varepsilon_1\sigma\left(T_1^4 - T_{\text{cielo}}^4\right). \tag{1}$$

Placa al Sol. Con temperaturas absolutas:

$$q''_{\text{sol,abs}} = 544{,}507\,\text{W/m}^2.$$

La raíz de (1) es:

$$T_1 = 317{,}973\,\text{K} = 44{,}823\,^\circ\text{C}.$$

En ese estado:

$$q''_{\text{conv}} = 496{,}458\,\text{W/m}^2, \qquad q''_{\text{rad,net}} = 48{,}049\,\text{W/m}^2.$$

Placa a la sombra. Se anula sólo el haz directo y se conserva $G_{d,h}$:

$$\alpha_{s1} G_{d,h} = h(T_1 - T_\infty) + \varepsilon_1\sigma\left(T_1^4 - T_{\text{cielo}}^4\right).$$

La solución es:

$$T_1 = 296{,}558\,\text{K} = 23{,}408\,^\circ\text{C}.$$

3. Conclusiones o interpretación.

$$\boxed{T_{1,\text{Sol}} \simeq 44{,}8\,^\circ\text{C}} \qquad \boxed{T_{1,\text{sombra}} \simeq 23{,}4\,^\circ\text{C}}$$

Comprobación final

Compruebe que la suma de convección y radiación neta coincide con la absorción solar, que $G_{b,n}$ se proyecta una sola vez y que todas las temperaturas de los términos T^4 están en kelvin.

3.15.14 Ejercicio resuelto 14. Placa horizontal junto a una plancha vertical

Descripción del problema

Calcular la temperatura estacionaria de la placa del Ejercicio 13 cuando su borde derecho comparte arista con una plancha vertical de 10 m de altura. La placa tiene 1 m de anchura y ambas superficies son infinitamente profundas. La plancha está a 67 °C, con $\varepsilon_3 = 0{,}65$; el suelo descubierto está a 20 °C, con $\varepsilon_2 = 0{,}88$; y el cielo es negro a 5 °C. Se mantiene sobre la placa la irradiancia solar del caso al Sol del Ejercicio 13 y se desprecian las reflexiones solares de plancha y suelo. En onda larga, el suelo se aproxima mediante:

$$J_2 = \varepsilon_2 \sigma T_2^4 + (1 - \varepsilon_2)\sigma T_4^4,$$

donde la superficie 4 es el cielo. Las superficies se consideran grises y difusas en infrarrojo.

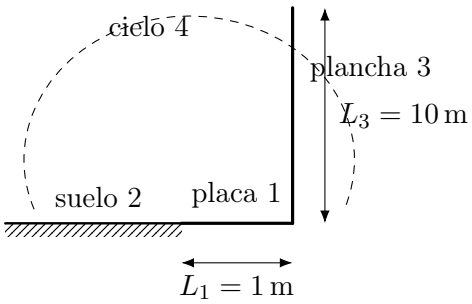


Figura 3.48: Geometría bidimensional del Ejercicio 14. El suelo descubierto comienza en el borde exterior de la placa y se prolonga hasta el infinito.

Resolución del problema

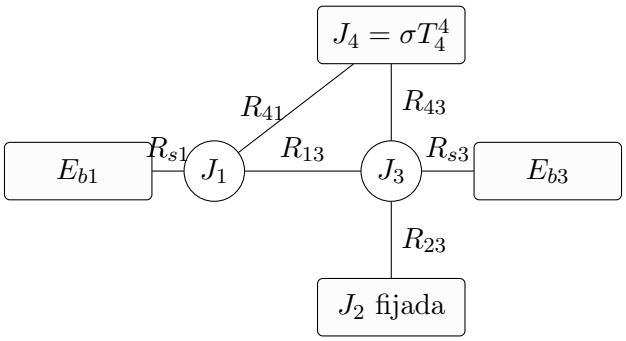
Antes de calcular

Predicción física. La plancha caliente aumenta la irradiación infrarroja sobre la placa, pero ésta sigue perdiendo la mayor parte de la energía por convección.

Modelo esperado. Cierre geométrico por cuerdas cruzadas y solución acoplada de J_1, J_3 y T_1.

1. Simplificaciones. Se trabaja por unidad de profundidad. La placa y la plancha son isotermas; el suelo y el cielo se tratan como focos extensos según el cierre especificado. La placa no ve directamente el suelo coplanario. Se omiten reflexiones solares y sólo la placa recibe el término solar del Ejercicio 13.

2. Modelo adoptado, ecuaciones y resolución.



$F_{12} = 0$: no existe rama directa placa–suelo.

Figura 3.49: Red infrarroja del Ejercicio 14. El cielo es una cuarta superficie y la placa no ve directamente el suelo.

Por el método de cuerdas cruzadas:

$$F_{13} = \frac{L_1 + L_3 - \sqrt{L_1^2 + L_3^2}}{2L_1} = 0{,}475\,062.$$

Para la placa plana:

$$F_{12} = 0, \qquad F_{14} = 1 - F_{13} = 0{,}524\,938.$$

Por reciprocidad:

$$F_{31} = \frac{L_1}{L_3} F_{13} = 0{,}047\,506.$$

La cara de la plancha orientada hacia la placa ve la semiplanicie horizontal con factor total 1/2 y el cielo con factor 1/2. Por tanto:

$$F_{32} = \frac{1}{2} - F_{31} = 0{,}452\,494, \qquad F_{34} = \frac{1}{2}.$$

Se verifica:

$$F_{31} + F_{32} + F_{34} = 1.$$

Las radiosidades fijas son:

$$J_4 = \sigma T_4^4 = 339{,}413\,\mathrm{W/m^2},$$

$$J_2 = \varepsilon_2 \sigma T_2^4 + (1 - \varepsilon_2) J_4 = 409{,}244\,\mathrm{W/m^2}.$$

El sistema acoplado es:

$$G_1 = F_{13} J_3 + F_{14} J_4, \qquad J_1 = \varepsilon_1 \sigma T_1^4 + (1 - \varepsilon_1) G_1,$$

$$G_3 = F_{31} J_1 + F_{32} J_2 + F_{34} J_4, \qquad J_3 = \varepsilon_3 \sigma T_3^4 + (1 - \varepsilon_3) G_3.$$

El balance de la placa es:

$$\alpha_{s1} \left(G_{b,n} \cos\beta_1 + G_{d,h} \right) = h(T_1 - T_\infty) + \varepsilon_1 \left(\sigma T_1^4 - G_1 \right). \tag{2}$$

La resolución conjunta proporciona:

$$T_1 = 319{,}241\,\mathrm{K} = 46{,}091\,^\circ\mathrm{C},$$

$$J_1 = 498{,}203\,\mathrm{W/m^2}, \qquad J_3 = 625{,}903\,\mathrm{W/m^2}, \qquad G_1 = 475{,}513\,\mathrm{W/m^2}.$$

El cierre energético por unidad de área es:

$$\underbrace{544{,}507\,\mathrm{W/m^2}}_{\text{solar absorbida}} = \underbrace{521{,}818\,\mathrm{W/m^2}}_{\text{convección}} + \underbrace{22{,}689\,\mathrm{W/m^2}}_{\text{radiación infrarroja neta}}.$$

3. Conclusiones o interpretación.

$$\boxed{T_{\text{placa}} \simeq 46{,}1\,^\circ\mathrm{C}}$$

El valor 48,2 °C del original no se reproduce con el recinto y las hipótesis ahora declarados.

Comprobación final

Compruebe $F_{12} = 0$, el cierre de la placa y de la plancha, la reciprocidad $L_1 F_{13} = L_3 F_{31}$ y el balance de la ecuación (2).

3.15.15 Ejercicio resuelto 15. Equilibrio térmico de un vehículo espacial

Descripción del problema

Un vehículo espacial se modela como un disco delgado e isotermo, situado a 400 km sobre el punto subsolar terrestre. Una cara es normal al Sol y la otra mira al centro de la Tierra. Use $G_0 = 1353\,\mathrm{W/m^2}$ y $R_T = 6371\,\mathrm{km}$. La Tierra se idealiza como esfera difusa uniforme con $\varepsilon_T = 0{,}64$, $\alpha_{sT} = 0{,}8$ y $T_T = 12\,^\circ\mathrm{C}$; su radiosidad solar efectiva es $J_{sT} = (1-\alpha_{sT})G_0$. El espacio es negro a 3 K. En ambas caras, una fracción f_a está recubierta con un material de $\varepsilon_a = 0{,}44$, $\alpha_{sa} = 0{,}27$, y el resto $f_b = 1 - f_a$ con $\varepsilon_b = 0{,}70$, $\alpha_{sb} = 0{,}10$. Desprecie convección, potencia interna y efectos de borde. Calcular las fracciones necesarias para mantener el vehículo a 27 °C.

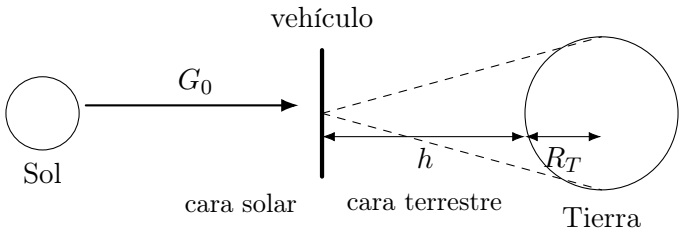


Figura 3.50: Vehículo del Ejercicio 15. Las dos caras tienen la misma temperatura y composición, pero reciben irradiaciones diferentes.

Resolución del problema

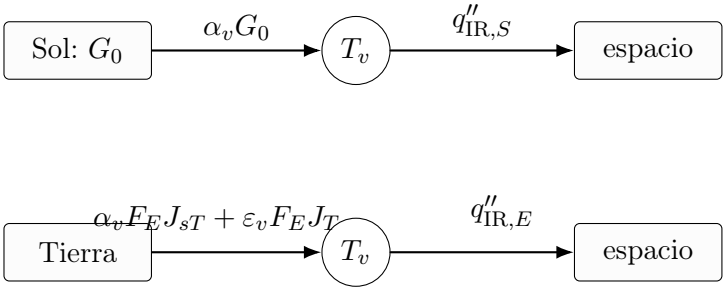
Antes de calcular

Predicción física. La cara solar recibe el haz directo y la cara terrestre recibe el albedo y la radiación térmica de la Tierra. En onda larga, sumar las caras por separado o promediar la irradiación sobre $2A$ da exactamente la misma potencia total.

Modelo esperado. Use F_{2-T} para el albedo que incide sobre una sola cara; reserve $F_{v-T} = F_{2-T}/2$ para un promedio definido sobre las dos caras.

1. Simplificaciones. Se emplean propiedades efectivas de mosaico, mezcla areal sin interacción lateral, Tierra difusa uniforme, disco pequeño frente a la escala orbital, caras paralelas al frente solar y al plano local terrestre, y espacio negro. La potencia interior y la convección son nulas.

2. Modelo adoptado, ecuaciones y resolución.



Separar las caras aclara el origen de cada término; el promedio infrarrojo sobre $2A$ es equivalente.

Figura 3.51: Balances separados de la cara solar y de la cara terrestre del Ejercicio 15.

Las propiedades efectivas son:

$$\alpha_v = \alpha_{sa} f_a + \alpha_{sb}(1 - f_a), \qquad \varepsilon_v = \varepsilon_a f_a + \varepsilon_b (1 - f_a).$$

El factor de forma de la cara terrestre hacia la Tierra es:

$$F_{2-T} \equiv F_E = \left(\frac{R_T}{R_T + h}\right)^2 = 0{,}885\,339.$$

Si se define un factor medio sobre el vehículo completo, de área total $2A$,

$$F_{v-T} = \frac{AF_{1-T} + AF_{2-T}}{2A} = \frac{1}{2}F_{2-T} = 0{,}442\,669, \qquad F_{1-T} = 0.$$

El factor medio F_{v-T} es válido para expresar la potencia infrarroja total sobre $2A$. No debe insertarse en el término de albedo si ese término se multiplica por el área A de la única cara que recibe la radiación reflejada.

En la banda solar:

$$J_{sT} = (1 - \alpha_{sT})G_0 = 270{,}6\,\mathrm{W/m^2}.$$

La irradiación solar efectiva que interviene en la potencia absorbida es, por unidad del área de una cara,

$$G_s = G_0 + F_{2-T}J_{sT} = G_0\,[1 + (1 - \alpha_{sT})F_{2-T}] \simeq 1592{,}6\,\mathrm{W/m^2}.$$

En onda larga:

$$J_C = \sigma T_C^4 = 4{,}593 \times 10^{-6}\,\mathrm{W/m^2},$$

$$J_T = \varepsilon_T \sigma T_T^4 + (1 - \varepsilon_T)J_C = 239{,}930\,\mathrm{W/m^2}.$$

La cara solar ve sólo el espacio:

$$G_{\mathrm{IR},S} = J_C.$$

La cara terrestre ve la Tierra y el resto del hemisferio ocupado por el espacio:

$$G_{\mathrm{IR},E} = F_{2-T}J_T + (1 - F_{2-T})J_C = 212{,}420\,\mathrm{W/m^2}.$$

El tratamiento infrarrojo promediado es matemáticamente equivalente al balance cara por cara:

$$\overline{G}_{\mathrm{IR},v} = \frac{G_{\mathrm{IR},S} + G_{\mathrm{IR},E}}{2}, \qquad 2A\varepsilon_v \overline{G}_{\mathrm{IR},v} = A\varepsilon_v\,(G_{\mathrm{IR},S} + G_{\mathrm{IR},E})\,.$$

Por tanto, el promediado infrarrojo no es el origen del error.

A la temperatura objetivo,

$$\sigma T_v^4 = 460{,}19\,\mathrm{W/m^2},$$

$$E_a = \varepsilon_a \sigma T_v^4 = 202{,}5\,\mathrm{W/m^2}, \qquad E_b = \varepsilon_b \sigma T_v^4 = 322{,}1\,\mathrm{W/m^2}.$$

El valor $197{,}5\,\mathrm{W/m^2}$ no corresponde a $\varepsilon_a = 0{,}44$ y constituye un error aritmético independiente.

Por unidad del área de una cara, el balance total del disco es:

$$\alpha_v\,(G_0 + F_{2-T}J_{sT}) + \varepsilon_v\,(G_{\mathrm{IR},S} + G_{\mathrm{IR},E}) = 2\varepsilon_v \sigma T_v^4. \tag{3}$$

Sustituyendo $T_v = 300{,}15\,\mathrm{K}$ y resolviendo (3), los valores no redondeados del factor geométrico proporcionan $f_a \simeq 0{,}7395$. Si se usan los valores intermedios redondeados $F_{2-T} = 0{,}886$, $E_a = 202{,}5\,\mathrm{W/m^2}$ y $E_b = 322{,}1\,\mathrm{W/m^2}$, se obtiene:

$$f_a = 0{,}7392, \qquad f_b = 0{,}2608.$$

En ambos casos, el resultado publicable con tres cifras decimales es $f_a = 0{,}739$ y $f_b = 0{,}261$. Las propiedades efectivas, con los valores redondeados anteriores, resultan:

$$\alpha_v = 0{,}225\,664, \qquad \varepsilon_v = 0{,}507\,808.$$

El cierre por unidad de área de una cara es:

$$\underbrace{305{,}323\,\mathrm{W/m^2}}_{\text{Sol directo}} + \underbrace{54{,}103\,\mathrm{W/m^2}}_{\text{Sol reflejado por la Tierra}} + \underbrace{107{,}960\,\mathrm{W/m^2}}_{\text{IR terrestre}} \simeq \underbrace{467{,}383\,\mathrm{W/m^2}}_{\text{emisión de las dos caras}} .$$

Las radiosidades locales de las dos caras son distintas:

$$J_{v,S} = \varepsilon_v \sigma T_v^4 + (1-\varepsilon_v) G_{\mathrm{IR},S}, \qquad J_{v,E} = \varepsilon_v \sigma T_v^4 + (1-\varepsilon_v) G_{\mathrm{IR},E}.$$

No obstante, para el balance infrarrojo total puede emplearse su promedio areal, porque ambas caras tienen la misma superficie y composición. Resolverlas por separado es una elección de presentación, no una corrección física necesaria.

3. Conclusiones o interpretación.

$$\boxed{f_a \simeq 0{,}739} \qquad \boxed{f_b \simeq 0{,}261}$$

El resultado original $f_a \simeq 0{,}787$ procede de usar el factor medio $F_{v-T} = F_{2-T}/2$ en el término de albedo, aunque ese término actúa sobre una sola cara, y del error aritmético $E_a = 197{,}5\,\mathrm{W/m^2}$ en lugar de $202{,}5\,\mathrm{W/m^2}$. El promedio infrarrojo sobre $2A$ es correcto y no debe identificarse como causa del fallo.

Comprobación final

Compruebe $f_a + f_b = 1$, use F_{2-T} sólo en el albedo de la cara terrestre, confirme $E_a = \varepsilon_a \sigma T_v^4$ y verifique el balance de la ecuación (3).

3.15.16 Ejercicio resuelto 16. Disco aislado sometido a radiación solar

Descripción del problema

Un disco se encuentra por encima de la atmósfera con una cara normal al Sol y la cara posterior perfectamente aislada, al igual que los bordes. Use $G_0 = 1353\,\mathrm{W/m^2}$ y calcule la temperatura de equilibrio de la cara activa. El espacio se modela como cuerpo negro a $-270\,^\circ\mathrm{C}$. Considere cinco parejas (α_s,ε):

$$(0{,}9{,}0{,}9),\quad (0{,}1{,}0{,}1),\quad (0{,}9{,}0{,}1),\quad (0{,}1{,}0{,}9),\quad (1{,}1),$$

primero con $f_c = 1$ y después con un factor de concentración solar $f_c = 3$.

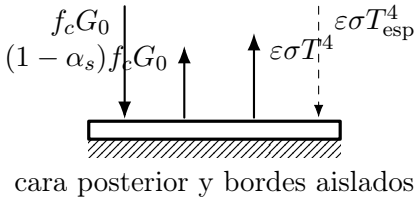


Figura 3.52: Balance de la cara activa del disco del Ejercicio 16.

Resolución del problema

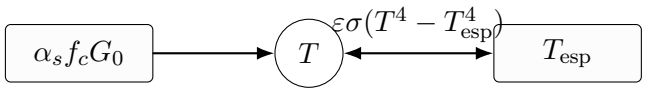
Antes de calcular

Predicción física. La temperatura depende del cociente α_s/ε y crece como $f_c^{1/4}$. Un recubrimiento selectivo con alta absorción solar y baja emisividad alcanza la mayor temperatura.

Modelo esperado. Balance radiativo estacionario de una única cara activa, manteniendo el pequeño término de irradiación del espacio.

1. Simplificaciones. La cara activa es isoterma, opaca y de propiedades constantes. No existen convección, conducción por bordes ni intercambio por la cara posterior. El factor f_c multiplica la irradiancia solar que llega normal a la cara. No se incluyen pérdidas ópticas adicionales del concentrador.

2. Modelo adoptado, ecuaciones y resolución.



Intercambio radiativo no lineal; no se usa una resistencia con h_r constante.

Figura 3.53: Esquema equivalente del balance no lineal del disco del Ejercicio 16.

El balance estacionario de la cara activa es:

$$\alpha_s f_c G_0 + \varepsilon\sigma T_{\mathrm{esp}}^4 = \varepsilon\sigma T^4.$$

Por tanto:

$$T = \left[T_{\mathrm{esp}}^4 + \frac{\alpha_s f_c G_0}{\varepsilon\sigma}\right]^{1/4}. \tag{4}$$

A $-270\,^\circ\mathrm{C}$, $T_{\mathrm{esp}} = 3{,}15\,\mathrm{K}$ y su contribución es numéricamente despreciable frente al término solar, pero se conserva para que el modelo sea coherente con el dato.

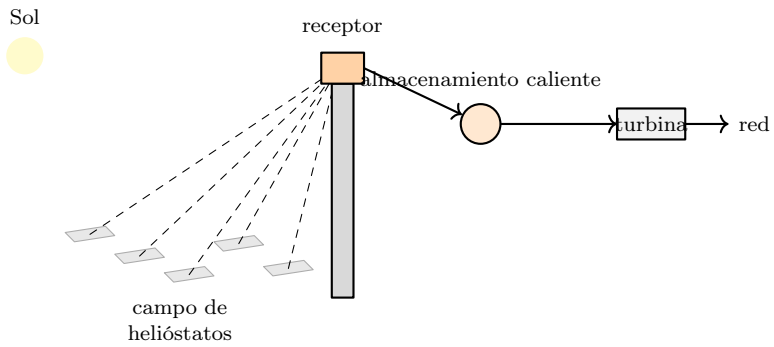


Figura 3.54: Ejemplo de concentración solar. El factor f_c del ejercicio es una idealización de la irradiancia que alcanza el receptor; las pérdidas ópticas reales no se modelan.

f_c	α_s	ε	$T\,[^\circ\mathrm{C}]$	α_s/ε
1	0,9	0,9	119,9	1
1	0,1	0,1	119,9	1
1	0,9	0,1	407,6	9,0
1	0,1	0,9	−46,2	0,111
1	1	1	119,9	1
3	0,9	0,9	244,1	1
3	0,1	0,1	244,1	1
3	0,9	0,1	622,8	9,0
3	0,1	0,9	25,5	0,111
3	1	1	244,1	1

Tabla 3.8: Temperatura de equilibrio del disco para distintos valores de α_s, ε y f_c, calculada mediante (4).

Bajo estas hipótesis, dos superficies con el mismo cociente α_s/ε alcanzan la misma temperatura. La conclusión deja de ser exacta si las propiedades varían con la temperatura o con el espectro, si aparecen pérdidas convectivas o conductivas, o si el concentrador tiene pérdidas ópticas dependientes de la geometría.

3. Conclusiones o interpretación.

$$\begin{aligned} f_c = 1: &\quad T = 119{,}9\,^\circ\mathrm{C},\ 119{,}9\,^\circ\mathrm{C},\ 407{,}6\,^\circ\mathrm{C},\ -46{,}2\,^\circ\mathrm{C},\ 119{,}9\,^\circ\mathrm{C},\\ f_c = 3: &\quad T = 244{,}1\,^\circ\mathrm{C},\ 244{,}1\,^\circ\mathrm{C},\ 622{,}8\,^\circ\mathrm{C},\ 25{,}5\,^\circ\mathrm{C},\ 244{,}1\,^\circ\mathrm{C}. \end{aligned}$$

Comprobación final

Compruebe que la potencia solar absorbida coincide con la radiación neta al espacio, que $T \propto f_c^{1/4}$ cuando domina el término solar y que la cara posterior aislada no se cuenta como área emisora.

3.15.17 Ejercicio resuelto 17. Funcionamiento térmico de un termo

Descripción del problema

Analizar el funcionamiento de un termo para almacenamiento de líquidos calientes o fríos. Distinga los mecanismos: el vacío elimina la convección del gas y reduce fuertemente su conducción, pero no suprime la radiación ni la conducción por el cuello, el tapón, los soportes y otros puentes sólidos. En el interior del recipiente puede existir convección natural del líquido, y la superficie exterior evacua calor por convección y radiación al ambiente.

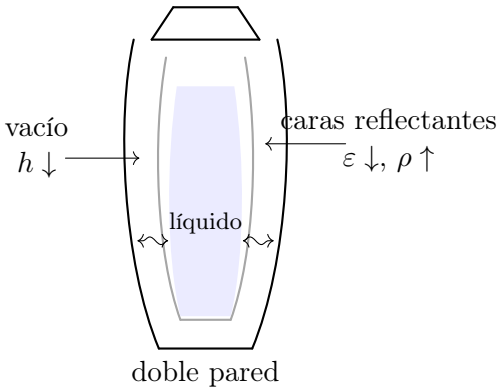


Figura 3.55: Esquema de un termo: doble pared, vacío y superficies interiores de baja emisividad.

Resolución del problema

Antes de calcular

Predicción física. El termo reduce la pérdida al aumentar resistencias y disminuir radiación entre paredes. La temperatura del contenido cambiará lentamente.

Modelo esperado. Red combinada de conducción, convección y radiación, seguida de un balance transitorio o estacionario según lo pedido.

1. Simplificaciones. Se aplican las hipótesis indicadas por el enunciado y se escoge el modelo mínimo que representa el intercambio dominante. A partir de ahí se pasa al planteamiento geométrico, radiante o energético correspondiente.

2. Modelo adoptado, ecuaciones y resolución.

Esquema de resistencias dominante en el termo.

La convección queda muy reducida por el vacío

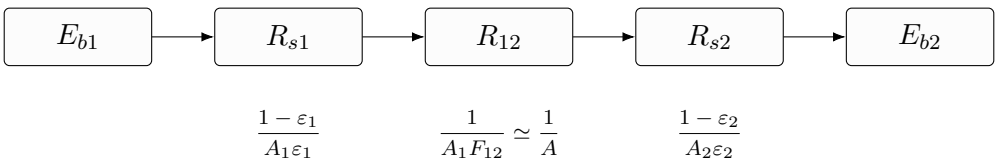


Figura 3.56: Red radiativa principal de la doble pared del termo del Ejercicio 17.

Un termo está constituido por un recipiente de doble pared donde se ha practicado el vacío para reducir drásticamente las pérdidas por convección:

$$\left[\frac{1}{hA} \uparrow\right].$$

Además, las caras interiores enfrentadas de la doble pared son espejos, es decir, tienen alta reflectancia y, por tanto, muy baja emisividad: Para una superficie opaca, $\alpha+\rho=1$. La ley de Kirchhoff establece $\varepsilon_{\lambda,\Omega}=\alpha_{\lambda,\Omega}$ en la misma longitud de onda, dirección y estado de equilibrio. Sólo bajo la aproximación gris-difusa usada aquí puede escribirse en forma total $\varepsilon \simeq \alpha = 1-\rho$.

Esto es determinante para reducir las pérdidas por radiación.

Desde el punto de vista radiante, se trata de un contorno con sólo dos superficies:

$$q_{12}=\frac{E_{b1}-E_{b2}}{\dfrac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1 A_1}+\dfrac{1}{A_1 F_{12}}+\dfrac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2 A_2}}.$$

Si:

$$\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon, \qquad A_1\simeq A_2=A, \qquad F_{12}\simeq 1,$$

entonces:

$$q_{12}=\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}A(E_{b1}-E_{b2}).$$

Esto conduce a un enfriamiento o calentamiento muy lento del contenido cuando la emisividad es muy baja, es decir, cuando la reflectancia es alta.

ε	$\varepsilon/(2-\varepsilon)$
1	1
0,9	0,818
0,8	0,667
0,7	0,538
0,6	0,429
0,5	0,333
0,4	0,250
0,3	0,176
0,2	0,111
0,1	0,053
0,01	0,005
0,001	0,001

Tabla 3.9: Evolución de $\varepsilon/(2-\varepsilon)$ con la emisividad.

Se observa que cuanto menor es la emisividad del material, tanto más se parece a un espejo y tanto menor es el calor radiante a través de la doble pared. Por tanto, mejora el aislamiento por radiación.

3. Conclusiones o interpretación.

Un termo reduce la convección mediante vacío
y la radiación mediante superficies de baja emisividad.

Comprobación final

La potencia por todas las ramas debe sumar la pérdida total y el resultado debe disminuir al mejorar el vacío o reducir la emisividad.

3.15.18 Ejercicio resuelto 18. Ropa clara u oscura al Sol y a la sombra

Descripción del problema

Comparar, como modelo de una lámina textil aislada del cuerpo, una prenda clara con $\varepsilon = 0{,}85$ y $\alpha_s = 0{,}70$, y una oscura con $\varepsilon = 0{,}95$ y $\alpha_s = 0{,}95$. Al Sol, la lámina es vertical, su normal horizontal apunta al azimut solar, recibe una irradiancia directa normal $G_{b,n} = 600\,\mathrm{W/m^2}$ con altura solar $\gamma = 72°$ y una irradiancia difusa ya referida al plano vertical $G_{d,v} = 110\,\mathrm{W/m^2}$. En sombra completa se anulan ambas contribuciones solares. Use $T_\infty = 35\,°\mathrm{C}$, $h = 4\,\mathrm{W/(m^2\,K)}$ y un cielo negro a $T_c = 10\,°\mathrm{C}$. Desprecie suelo, paredes, conducción con el cuerpo, metabolismo, evaporación y sudoración.

Datos.

- Ropa clara: $\varepsilon_c = 0{,}85$, $\alpha_{s,c} = 0{,}70$.
- Ropa oscura: $\varepsilon_o = 0{,}95$, $\alpha_{s,o} = 0{,}95$.
- $G_{b,n} = 600\,\mathrm{W/m^2}$, $G_{d,v} = 110\,\mathrm{W/m^2}$, $\gamma = 72°$.
- $T_\infty = 35\,°\mathrm{C} = 308{,}15\,\mathrm{K}$, $T_c = 10\,°\mathrm{C} = 283{,}15\,\mathrm{K}$.
- $h = 4\,\mathrm{W/(m^2\,K)}$.

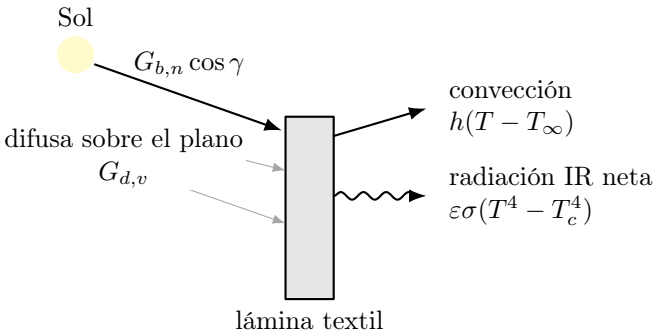


Figura 3.57: Balance energético de la lámina textil idealizada del Ejercicio 18.

Resolución del problema

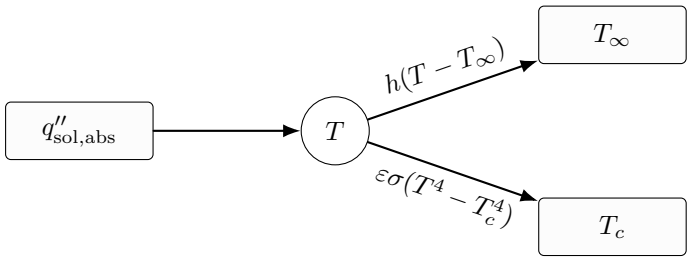
Antes de calcular

Predicción física. Dentro de este modelo superficial, la mayor absortancia solar de la lámina oscura eleva su temperatura al Sol. En sombra completa sólo compiten convección y radiación infrarroja.

Modelo esperado. Balances no lineales por unidad de área; no se introduce una resistencia radiativa constante.

1. Simplificaciones. La lámina es isoterma, opaca y gris-difusa en onda larga. $G_{d,v}$ es un dato ya proyectado sobre el plano vertical; no debe confundirse con irradiancia difusa horizontal. La normal horizontal de la lámina coincide con el azimut solar, por lo que el ángulo de incidencia del haz sobre esa normal es γ. El modelo no representa una persona ni predice confort o riesgo térmico.

2. Modelo adoptado, ecuaciones y resolución.



$q''_{\text{sol,abs}} = \alpha_s(G_{b,n}\cos\gamma + G_{d,v})$ al Sol y 0 en sombra completa.

Figura 3.58: Balance nodal no lineal de la lámina textil.

La componente directa sobre la superficie vertical es:

$$G_{b,v} = G_{b,n}\cos\gamma = 600\cos 72^\circ = 185{,}410\,\mathrm{W/m^2}. \tag{5}$$

Al Sol:

$$\alpha_s\left(G_{b,n}\cos\gamma + G_{d,v}\right) = \varepsilon\sigma\left(T^4 - T_c^4\right) + h\left(T - T_\infty\right). \tag{6}$$

En sombra completa:

$$0 = \varepsilon\sigma\left(T^4 - T_c^4\right) + h\left(T - T_\infty\right). \tag{7}$$

La raíz de cada balance proporciona:

	Ropa oscura	Ropa clara
T al Sol [°C]	48,17	43,31
T en sombra completa [°C]	20,89	21,56

Tabla 3.10: Temperaturas de equilibrio de la lámina para los datos definidos sobre su plano.

La definición de la irradiancia difusa es esencial. Si los $110\,\mathrm{W/m^2}$ fuesen un dato *horizontal* y se adoptase un cielo isotrópico sin reflexión del suelo, una superficie vertical recibiría:

$$G_{d,v} = G_{d,h}\frac{1+\cos 90^\circ}{2} = \frac{G_{d,h}}{2} = 55\,\mathrm{W/m^2}. \tag{8}$$

Con esa interpretación alternativa, las temperaturas al Sol serían 43,42 °C para la lámina oscura y 39,46 °C para la clara. Si una sombra geométrica bloquease sólo el haz y conservase ese difuso, resultarían 26,32 °C y 25,82 °C, respectivamente. Estos valores no sustituyen el caso principal: muestran que "sombra" y "irradiancia difusa" deben definirse antes de calcular.

3. Conclusiones o interpretación.

$$\begin{array}{rr} T_{\text{oscura, Sol}} = 48{,}17\,^\circ\mathrm{C}, & T_{\text{clara, Sol}} = 43{,}31\,^\circ\mathrm{C}, \\ T_{\text{oscura, sombra completa}} = 20{,}89\,^\circ\mathrm{C}, & T_{\text{clara, sombra completa}} = 21{,}56\,^\circ\mathrm{C}. \end{array}$$

Dentro de la lámina aislada, una menor α_s reduce el calentamiento solar y una mayor ε_{IR} favorece la pérdida hacia un cielo más frío. No puede transformarse esta comparación en una recomendación para personas sin modelar cuerpo, metabolismo, contacto, ventilación, humedad, sudoración y evaporación.

Comprobación final

Compruebe los residuos de (6) y (7), que el haz se proyecta una sola vez, que $G_{d,v}$ pertenece al plano de la lámina y que las temperaturas de cuarta potencia están en kelvin.

3.15.19 Ejercicio resuelto 19. Cubiertas negras en dispositivos electrónicos

Descripción del problema

Analizar el balance $q''_{\text{int}} + \alpha_s G_s = h(T_s - T_\infty) + \varepsilon_{\text{IR}}\sigma(T_s^4 - T_{\text{rad}}^4) + q''_{\text{cond}}$ y decidir en qué condiciones aumentar ε_{IR} reduce T_s. La conclusión debe condicionarse al signo de $T_s - T_{\text{rad}}$ y a la absorción solar.

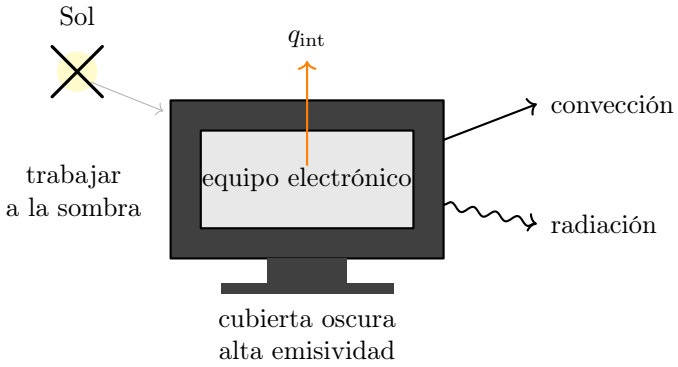


Figura 3.59: Dispositivo electrónico con generación interna de calor y cubierta oscura trabajando a la sombra.

Resolución del problema

Antes de calcular

Predicción física. Una cubierta negra emite radiación térmica con eficacia, pero también absorbe más si recibe radiación externa. Su ventaja depende del entorno.

Modelo esperado. Balance de generación interna, convección y radiación desde la cubierta.

1. Simplificaciones. Se aplican las hipótesis indicadas por el enunciado y se escoge el modelo mínimo que representa el intercambio dominante. A partir de ahí se pasa al planteamiento geométrico, radiante o energético correspondiente.

2. Modelo adoptado, ecuaciones y resolución.

A la vista del problema anterior, y teniendo en cuenta que estos dispositivos generan calor internamente, lo que sería equivalente al calor metabólico de las personas, no deben situarse al Sol: la absorción solar aumentaría la temperatura de funcionamiento y reduciría el margen de disipación térmica.

A la sombra se elimina el haz solar directo, pero el signo del intercambio infrarrojo sigue dependiendo de $T_s^4 - T_{\text{rad}}^4$. Una emisividad alta enfría si la cubierta está más caliente que su entorno radiante y la calienta si está más fría.

3. Conclusiones o interpretación.

Conviene usar color oscuro para dispositivos electrónicos que trabajan a la sombra.

Comprobación final

La potencia disipada debe igualar la carga electrónica y el efecto de la emisividad debe tener el signo esperado para la situación planteada.

CAPÍTULO 4

Convección

Introducción

La convección es el mecanismo de transmisión de calor que aparece cuando una superficie intercambia energía con un fluido. En la zona inmediatamente adherida a la pared el fluido cumple la condición de no deslizamiento, de modo que la transmisión local se produce por conducción dentro del propio fluido. Sin embargo, fuera de esa subcapa, el movimiento macroscópico del fluido transporta energía por advección y modifica de forma decisiva el gradiente térmico en la pared. Por eso la convección combina difusión térmica y movimiento del fluido.

La expresión de uso más habitual es la ley de enfriamiento de Newton,

$$q = hA(T_s - T_\infty), \tag{4.1}$$

cuando la superficie está a temperatura uniforme T_s y el fluido no perturbado está a T_∞. En flujo interno se sustituye T_∞ por la temperatura media de masa T_b. Aunque la ley tiene forma sencilla, el coeficiente h no es una propiedad del fluido: depende de la geometría, de las propiedades, de la velocidad, del régimen laminar o turbulento, de la condición térmica de la pared y, en convección natural, del salto térmico y de la gravedad.

El capítulo se organiza en los apartados principales: dependencias funcionales, convección forzada externa, flujo interno, convección natural y convección mixta. Las correlaciones y expresiones de consulta se recogen de forma unificada en el Anexo A. Dentro de la placa plana se conservan explícitamente los subapartados de capa límite, definición de $\bar{h}$, potencia total y número de Nusselt. En flujo interno se separan las distribuciones $T_b(x)$ y $T_s(x)$ para flujo impuesto y pared isoterma, y se incluyen las tablas y correlaciones de uso en laminar, turbulento y recintos confinados. La tabla 4.1 resume los símbolos principales del capítulo.

Resultados de aprendizaje Al terminar este capítulo, el alumno será capaz de:

- identificar convección externa, interna, natural y mixta;
- seleccionar longitud característica y temperatura de evaluación de propiedades;
- calcular e interpretar Re, Pr, Ra, Ri y Nu;
- elegir una correlación por geometría, régimen y condición térmica;
- obtener h, la potencia térmica y las temperaturas relevantes;
- comprobar rango de validez y orden de magnitud del coeficiente convectivo.

Antes de empezar Ley de Newton, propiedades termo-físicas, balances de energía, nociones de mecánica de fluidos y significado de régimen laminar o turbulento.

Árbol de selección de correlaciones

1. Decida si el movimiento es impuesto, de flotación o mixto.
2. Identifique flujo externo o interno y la geometría: placa, cilindro, esfera, tubo, banco o recinto.
3. Elija la longitud característica y evalúe propiedades a la temperatura indicada.
4. Calcule los números adimensionales que determinan el régimen.
5. Seleccione una correlación cuyo rango incluya el caso y calcule Nu.
6. Obtenga $h = Nu\,k/L_c$ y aplique $q = hA(T_s - T_\infty)$.
7. Compare h con valores típicos y revise si la iteración ha convergido.

Núcleo. Placa y cilindro externos, flujo interno en tubo, convección natural básica y selección de propiedades forman el núcleo.

Ampliación. Metales líquidos, bancos específicos, recintos confinados y combinaciones avanzadas de convección mixta se mantienen como consulta.

Tabla 4.1: Notación mínima para comenzar el capítulo.

Símbolo	Lectura física
h	Intensidad del intercambio entre una superficie y un fluido. No es una propiedad aislada del fluido.
$\mathrm{Nu} = hL_c/k$	Mejora del intercambio respecto a una conducción de referencia en el fluido.
$\mathrm{Re} = uL_c/\nu$	Indica si predominan inercia o viscosidad en movimiento forzado.
$\mathrm{Pr} = \nu/\alpha$	Compara la difusión de cantidad de movimiento y de temperatura.
T_s,T_∞,T_b	Temperatura superficial, temperatura de corriente libre y temperatura media de masa.
L_c,A	Longitud característica de la correlación y área real de intercambio.

La notación adicional se introduce cuando se necesita. El formulario ampliado del Anexo A reúne la lista completa de símbolos y correlaciones.

Tabla 4.2: Órdenes de magnitud habituales del coeficiente de convección.

Modo	Fluido o proceso	Rango típico de h [W/(m^2 K)]
Convección natural	gases	2–25
Convección natural	líquidos	50–1000
Convección forzada	gases	25–250
Convección forzada	líquidos	50–20000
Cambio de fase	ebullición y condensación	2500–100000

La tabla 4.2 recoge valores orientativos. En un cálculo de diseño debe obtenerse h mediante una correlación apropiada para la geometría, el régimen de flujo y el intervalo de propiedades.

Cómo plantear un problema de convección

Antes de elegir una correlación conviene clasificar el problema. En flujo externo el fluido rodea una placa, cilindro, esfera u otra superficie y se usa una temperatura de corriente libre T_∞. En flujo interno el fluido circula por un conducto y la referencia térmica es la temperatura media de masa T_b, que cambia axialmente. Después se decide si el movimiento es forzado, natural o mixto. En convección forzada la velocidad característica está impuesta y el número de Reynolds gobierna el régimen. En convección natural la velocidad aparece por flotación y se trabaja con Grashof o Rayleigh.

Secuencia recomendada Dibujar la geometría, identificar el área de intercambio, escoger la longitud característica, evaluar propiedades a la temperatura indicada por la correlación, calcular los números adimensionales, comprobar rangos de validez, obtener $\overline{\mathrm{Nu}}$, calcular $\bar{h} = \overline{\mathrm{Nu}}k/L$ y evaluar la potencia con la diferencia de temperatura correcta.

4.1 Magnitudes mínimas y dependencias funcionales

Antes de escribir una correlación, conviene responder cuatro preguntas físicas:

Las cuatro preguntas que gobiernan la convección

1. **¿Qué mueve el fluido?** Una velocidad impuesta conduce a Re; la flotación conduce a Ra.
2. **¿Cómo se difunden velocidad y temperatura?** La respuesta está en Pr.
3. **¿Qué geometría y longitud controlan la capa límite?** La correlación debe usar exactamente esa L_c.
4. **¿Cuánto mejora el movimiento el intercambio?** La respuesta final es Nu, del que se obtiene h.

Según que la convección sea forzada, natural o mixta, las dependencias funcionales del número de Nusselt cambian. En forma general:

$$\text{Convección forzada:} \quad \overline{\mathrm{Nu}} = f(\text{geometría,Re,Pr}), \tag{4.2}$$

$$\text{Convección natural:} \quad \overline{\mathrm{Nu}} = f(\text{geometría,Gr,Pr}) = f(\text{geometría,Ra}), \tag{4.3}$$

$$\text{Convección mixta:} \quad \overline{\mathrm{Nu}} = f(\text{geometría,Re,Pr,Gr}). \tag{4.4}$$

Los números adimensionales principales son

$$\mathrm{Re} = \frac{u_\infty L}{\nu} \qquad \text{fuerzas de inercia frente a fuerzas viscosas,} \tag{4.5}$$

$$\mathrm{Gr} = \frac{g\beta|T_s - T_\infty|L^3}{\nu^2} \qquad \text{fuerzas de empuje frente a fuerzas viscosas,} \tag{4.6}$$

$$\mathrm{Pr} = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\mu c_p}{k} \qquad \text{relación entre difusividad cinemática y térmica,} \tag{4.7}$$

$$\mathrm{Ra} = \mathrm{GrPr} = \frac{g\beta|\Delta T|L^3}{\nu\alpha}. \tag{4.8}$$

Tabla 4.3: Números adimensionales que guían la selección.

Número	Pregunta física que responde
$\mathrm{Re} = \dfrac{uL_c}{\nu}$	¿Domina la inercia o la viscosidad? Permite decidir el régimen en convección forzada.
$\mathrm{Pr} = \dfrac{\nu}{\alpha}$	¿Se difunde antes la velocidad o la temperatura? Relaciona los espesores de las capas límite.
$\mathrm{Nu} = \dfrac{hL_c}{k}$	¿Cuánto aumenta el intercambio respecto a conducción pura en el fluido?
$\mathrm{Ra} = \dfrac{g\beta\lvert\Delta T\rvert L_c^3}{\nu\alpha}$	¿Puede la flotación organizar un movimiento natural apreciable?
$\mathrm{Ri} = \dfrac{\mathrm{Gr}}{\mathrm{Re}^2}$	¿Manda la corriente forzada, la flotación o ambas?

Profundización. Los números de Grashof, Peclet y Stanton son útiles para interpretar o generalizar resultados, pero no son necesarios para comenzar. Se definen como $Gr = Ra/Pr$, $Pe = Re\,Pr$ y $St = Nu/(Re\,Pr)$.

La tabla 4.3 debe leerse como un mapa de decisión, no como una lista para memorizar. El orden operativo habitual es Re o Ra, después Pr, luego la correlación de Nu y, por último, h.

Desde un punto de vista conceptual, muchas correlaciones adoptan formas del tipo

$$\overline{\mathrm{Nu}} = C\mathrm{Re}^m\mathrm{Pr}^n, \qquad \overline{\mathrm{Nu}} = C'\mathrm{Gr}^{m'}\mathrm{Pr}^{n'} = C''\mathrm{Ra}^n. \tag{4.9}$$

Estas expresiones son útiles para interpretar tendencias, pero no deben usarse como sustituto de correlaciones ajustadas a datos experimentales con rangos de validez. En convección, una fórmula sin longitud característica, temperatura de propiedades y rango de aplicación está incompleta.

4.1.1 Ley de Newton, resistencia convectiva y Nusselt

La ley de Newton se escribe, para una superficie isoterma, Se adopta una normal exterior desde el sólido hacia el fluido y $q'' > 0$ saliente. Así, $q'' = h(T_s - T_\infty) = -k\,\partial T/\partial n$ en la cara sólida; al invertir la normal debe invertirse coherentemente el signo.

$$\boxed{q = hA(T_s - T_\infty).} \tag{4.10}$$

Si se trabaja con módulo de potencia, se toma $q = hA|T_s - T_\infty|$ y se define por separado el sentido físico del calor. La resistencia convectiva asociada es

$$\boxed{R_{\mathrm{conv}} = \frac{1}{hA}, \qquad q = \frac{\Delta T}{R_{\mathrm{conv}}}.} \tag{4.11}$$

Como el fluido adherido a la pared está localmente en reposo, el flujo convectivo también puede obtenerse desde el gradiente conductivo en la pared:

$$q'' = h(T_s - T_\infty) = -k_f \left.\frac{\partial T}{\partial n}\right|_{\mathrm{pared}}. \tag{4.12}$$

El número de Nusselt relaciona el intercambio convectivo con la conducción de referencia en el fluido:

$$\boxed{\mathrm{Nu} = \frac{hL}{k_f}.} \tag{4.13}$$

Si Nu = 1, el intercambio equivale a conducción pura en una capa de espesor L. La advección aumenta el gradiente en la pared y hace que Nu sea normalmente mucho mayor que la unidad.

4.2 Convección forzada: flujo externo

En flujo externo una corriente incide sobre una superficie o un cuerpo. La velocidad de referencia es la de corriente libre u_∞, no perturbada por la presencia del cuerpo. La temperatura de referencia es T_∞, salvo que una correlación indique otra temperatura de evaluación para propiedades.

4.2.1 Proceso de cálculo de la potencia térmica

El procedimiento de cálculo se organiza así:

1. Identificar la geometría: placa plana, cilindro, esfera u otra configuración.
2. Elegir la longitud característica: longitud desde el borde de ataque en placa, diámetro en cilindro o esfera.
3. Evaluar propiedades, normalmente a la temperatura de película $T_f = (T_s + T_\infty)/2$, salvo indicación contraria.
4. Calcular Re y Pr, decidir el régimen y comprobar el rango de validez.
5. Obtener $\overline{\mathrm{Nu}}$ y calcular $\bar{h} = \overline{\mathrm{Nu}} k_f / L$.
6. Determinar la potencia con $q = \bar{h} A (T_s - T_\infty)$ o con la diferencia térmica media adecuada.

En forma compacta,

$$\boxed{\bar{h} = \frac{\overline{\mathrm{Nu}} k_f}{L}, \qquad q = \bar{h} A \Delta T.} \tag{4.14}$$

Tabla 4.4: Regla única para evaluar propiedades en los casos básicos.

Caso	Temperatura recomendada	Observación
Forzada externa	$T_f = (T_s + T_\infty)/2$	Usar k,ν,Pr a T_f, salvo que la correlación indique explícitamente T_∞ o una corrección de pared.
Forzada interna	temperatura media de masa representativa	En cálculos globales suele usarse $(T_{b,e} + T_{b,s})/2$; una corrección puede requerir además μ_s.
Natural externa	$T_f = (T_s + T_\infty)/2$	Para gas ideal, $\beta \simeq 1/T_f$ con temperatura absoluta.
Mixta	una base coherente para ambos mecanismos	No combinar Nu_{forz} y Nu_{nat} calculados con propiedades incompatibles.

Algoritmo cuando la temperatura de propiedades no es conocida

1. Suponga una temperatura representativa y obtenga propiedades.
2. Calcule Re, Pr, Nu, h y la temperatura de salida o de pared.
3. Actualice la temperatura de evaluación con el nuevo resultado.
4. Repita hasta que la temperatura y h cambien menos que la tolerancia elegida.
5. Compruebe que todas las iteraciones permanecen dentro del rango de la correlación.

Tabla 4.5: Correlación docente principal para los casos más habituales.

Caso básico	Opción principal	Decisión previa imprescindible
Placa plana forzada	laminar o media con transición	decidir Re_L, condición térmica y longitud desde el borde de ataque
Cilindro aislado en flujo cruzado	Churchill–Bernstein	usar D y comprobar $Re_D Pr$
Esfera en flujo forzado	correlación de Whitaker	evaluar la corrección de viscosidad si procede
Tubo laminar desarrollado	$Nu = 3{,}66$ o $4{,}36$	distinguir pared isoterma y flujo impuesto
Tubo turbulento desarrollado	Gnielinski	comprobar Re, Pr, rugosidad y desarrollo
Placa vertical natural	Churchill–Chu	usar Ra_L y orientación correcta

4.2.2 Placa plana

La placa plana es la configuración base para estudiar el desarrollo de capas límite. En ella las variables locales dependen de la distancia x al borde de ataque y el coeficiente local h_x suele disminuir a medida que la capa límite térmica crece.

4.2.2.1 Capa límite hidrodinámica o de velocidad

Sea una placa plana inmersa en una corriente que discurre paralelamente a velocidad u_∞. Por la condición de no deslizamiento, la velocidad es nula en la pared. Lejos de la placa, la velocidad conserva el valor u_∞. La zona donde existe gradiente de velocidad se denomina capa límite hidrodinámica, como se esquematiza en la figura 4.1.

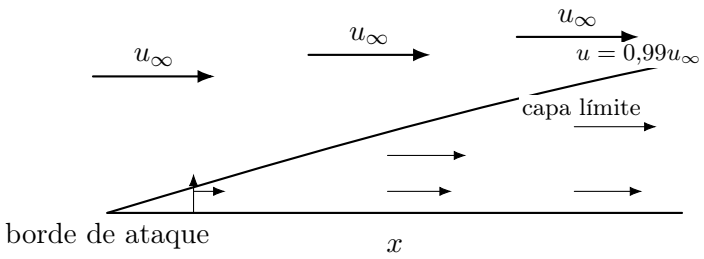


Figura 4.1: Capa límite hidrodinámica sobre una placa plana.

El espesor δ se define convencionalmente como la distancia a la pared donde $u = 0{,}99u_\infty$. En la zona laminar el movimiento es ordenado. Cuando el número de Reynolds local

$$\mathrm{Re}_x = \frac{u_\infty x}{\nu} \tag{4.15}$$

entra en una región de transición cuya posición depende de rugosidad y turbulencia exterior. El valor Re_c sólo es un empalme convencional entre correlaciones; cualquier salto de h_x es artificial. En problemas de ingeniería se toma habitualmente $\mathrm{Re}_c \simeq 5 \cdot 10^5$ como referencia. En placas muy lisas y corrientes poco perturbadas puede desplazarse aproximadamente dentro del intervalo 10^5–$3 \cdot 10^6$; valores superiores solo deben usarse si la fuente del problema justifica una corriente extremadamente poco perturbada.

4.2.2.2 Capa límite térmica

Si $T_s \neq T_\infty$, se desarrolla una zona donde la temperatura cambia desde T_s en la pared hasta T_∞ en la corriente libre. El espesor δ_t de la capa límite térmica se define como la distancia donde se ha alcanzado el 99 % del salto térmico entre pared y corriente libre. La figura 4.2 compara cualitativamente ambos espesores.

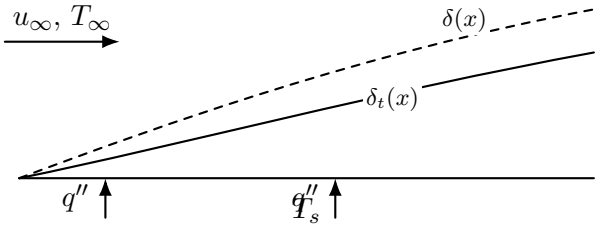


Figura 4.2: Comparación cualitativa entre capa límite térmica y capa límite hidrodinámica.

El número de Prandtl mide la relación entre ambas difusividades. Para una placa plana isoterma puede usarse la estimación

$$\frac{\delta}{\delta_t} \simeq \mathrm{Pr}^{1/3}. \tag{4.16}$$

Por tanto, si $\mathrm{Pr} > 1$, la capa límite térmica es más delgada que la hidrodinámica; si $\mathrm{Pr} < 1$, ocurre lo contrario. Los metales líquidos presentan $\mathrm{Pr} \ll 1$, mientras que aceites viscosos tienen $\mathrm{Pr} \gg 1$.

Valores orientativos que ayudan a interpretar el espesor relativo de las capas límite son: metales líquidos, $\mathrm{Pr} \sim 10^{-3}$ y $\delta/\delta_t \sim 0{,}1$; aire, $\mathrm{Pr} \sim 0{,}7$ y capas de espesor comparable; agua, $\mathrm{Pr} \sim 5$ y $\delta/\delta_t \sim 1{,}8$; aceites de lubricación, $\mathrm{Pr} \sim 10^3$ y $\delta/\delta_t \sim 10$. Los metales líquidos, como mercurio o sodio, se citan en refrigeración de alta potencia por su elevada capacidad de transporte térmico, aunque exigen precauciones importantes: el sodio reacciona violentamente con agua y el mercurio es tóxico.

4.2.2.3 Variación cualitativa de $h(x)$

En una placa con $T_s = \mathrm{cte}$, el flujo local puede escribirse como

$$q''(x) = h(x)(T_s - T_\infty). \tag{4.17}$$

Como en la pared el fluido está en reposo,

$$q''(x) = -k_f \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0}. \tag{4.18}$$

Combinando ambas expresiones,

$$h(x) = -\frac{k_f}{T_s - T_\infty} \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0}. \tag{4.19}$$

Si se aproxima el perfil térmico en la capa límite por una ley lineal,

$$\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0} \simeq \frac{T_\infty - T_s}{\delta_t}, \qquad h(x) \simeq \frac{k_f}{\delta_t(x)}. \tag{4.20}$$

Combinando la aproximación lineal con la ley de Fourier también queda

$$q''(x) \simeq -k_f \frac{T_\infty - T_s}{\delta_t(x)}, \tag{4.21}$$

de modo que el flujo local sigue cualitativamente la misma tendencia que $h(x)$: disminuye al crecer δ_t y aumenta bruscamente cuando la capa límite pasa a turbulenta.

Como δ_t crece con x, $h(x)$ disminuye en la zona laminar. Al pasar a turbulento se produce un salto de h, porque la mezcla turbulenta adelgaza la resistencia térmica efectiva cerca de la pared.

4.2.2.4 Definición del valor medio de h

Para una placa rectangular de área $A = bL$, la potencia total es

$$q = \int_A q'' \, \mathrm{d}A = \int_A h(T_s - T_\infty) \, \mathrm{d}A. \tag{4.22}$$

Si T_s es uniforme,

$$q = (T_s - T_\infty) \int_A h \, \mathrm{d}A = \bar{h} A (T_s - T_\infty), \tag{4.23}$$

por lo que

$$\boxed{\bar{h} = \frac{1}{A} \int_A h \, \mathrm{d}A.} \tag{4.24}$$

Para una placa de anchura constante,

$$\bar{h} = \frac{1}{L} \int_0^L h(x) \, \mathrm{d}x. \tag{4.25}$$

Aunque se deduce de forma directa para $T_s = \text{cte}$, esta definición se usa también como valor medio geométrico de h cuando la temperatura superficial no es uniforme.

4.2.2.5 Potencia térmica total intercambiada

La potencia total se calcula de forma distinta según la condición térmica de la superficie. Si la placa es isoterma,

$$\boxed{q = \bar{h} A (T_s - T_\infty) \qquad (T_s = \text{cte}).} \tag{4.26}$$

Si T_s no es uniforme, la expresión exacta no se obtiene con una media aritmética simple, sino integrando localmente:

$$q = \int_A h \, [T_s(\vec{r}) - T_\infty], \mathrm{d}A. \tag{4.27}$$

Para conservar una forma global se define una diferencia de temperatura media eficaz,

$$\Delta T_{\text{ef}} \equiv \frac{1}{\bar{h} A} \int_A h \, [T_s(\vec{r}) - T_\infty], \mathrm{d}A, \tag{4.28}$$

de modo que

$$\boxed{q = \bar{h} A \Delta T_{\text{ef}}.} \tag{4.29}$$

Esta ΔT_{ef} es una media ponderada por el propio coeficiente local; no debe confundirse con la media aritmética de $T_s - T_\infty$. En particular, para flujo de calor uniforme $q_s'' = \text{cte}$, la potencia también viene dada por

$$q = q_s'' A. \tag{4.30}$$

4.2.2.6 Definición del número de Nusselt

Tomando $y^* = y/L$ y $T^* = (T - T_\infty)/(T_s - T_\infty)$, la expresión de h se transforma en

$$h = -\frac{k_f}{L} \left. \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right|_{y^*=0}. \tag{4.31}$$

Se define

$$\boxed{\text{Nu} = -\left. \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right|_{y^*=0} = \frac{hL}{k_f}.} \tag{4.32}$$

La interpretación como cociente de resistencias es

$$\mathrm{Nu} = \frac{hL}{k_f} = \frac{L/(k_f A)}{1/(hA)} = \frac{R_{\mathrm{cond,fluido}}}{R_{\mathrm{conv}}}. \tag{4.33}$$

De forma equivalente, Nu puede leerse como un multiplicador de el intercambio respecto al caso puramente conductivo en el fluido:

$$q_{\mathrm{conv}} = \mathrm{Nu}\, q_{\mathrm{cond,ref}}. \tag{4.34}$$

Para placa plana se distinguen valores locales y medios:

$$\mathrm{Nu}_x = \frac{h_x x}{k_f}, \qquad \overline{\mathrm{Nu}} = \frac{\bar{h} L}{k_f}. \tag{4.35}$$

La relación entre ambos se obtiene partiendo de $\bar{h} = (1/L)\int_0^L h_x \,\mathrm{d}x$. Como $h_x = \mathrm{Nu}_x k_f/x$ y $\bar{h} = \overline{\mathrm{Nu}}_L k_f/L$, para anchura constante resulta

$$\boxed{\overline{\mathrm{Nu}}_L = \frac{1}{L}\int_0^L \mathrm{Nu}_x \,\frac{L}{x}\,\mathrm{d}x.} \tag{4.36}$$

Esta forma evita interpretar erróneamente $\bar{\mathrm{Nu}}$ como la media aritmética simple de Nu_x.

4.2.2.7 Correlaciones sobre placa plana en convección forzada

Se definen

$$\mathrm{Re}_x = \frac{u_\infty x}{\nu}, \qquad \mathrm{Re}_c = \frac{u_\infty x_c}{\nu}, \qquad \mathrm{Re}_L = \frac{u_\infty L}{\nu}, \qquad T_f = \frac{T_s + T_\infty}{2}. \tag{4.37}$$

Para T_s = cte, con Pr $>$ 0,6: **Pared a temperatura uniforme.** Las expresiones siguientes corresponden exclusivamente a placa isoterma: régimen laminar antes de la transición y, cuando proceda, régimen turbulento o medio mixto dentro de los rangos indicados.

$$\text{laminar:} \quad \mathrm{Nu}_x = 0{,}332\mathrm{Re}_x^{1/2}\mathrm{Pr}^{1/3}, \qquad \overline{\mathrm{Nu}} = 0{,}664\mathrm{Re}_L^{1/2}\mathrm{Pr}^{1/3}, \tag{4.38}$$

$$\text{turbulento local:} \quad \mathrm{Nu}_x = 0{,}0296\mathrm{Re}_x^{4/5}\mathrm{Pr}^{1/3},$$

$$\text{medio mixto:} \quad \overline{\mathrm{Nu}} = \left[0{,}664\mathrm{Re}_c^{1/2} + 0{,}037\left(\mathrm{Re}_L^{4/5} - \mathrm{Re}_c^{4/5}\right)\right]\mathrm{Pr}^{1/3}. \tag{4.39}$$

Ruta docente para una placa isoterma Use la expresión laminar si toda la placa permanece por debajo de la transición. Si existe una zona laminar seguida de otra turbulenta, use la correlación media mixta para la placa completa. Las expresiones locales sirven para conocer h_x, no para sustituir directamente el coeficiente medio en la potencia total.

Ampliación. Churchill–Ozoe, extremos iniciales no calentados, metales líquidos y correlaciones alternativas se conservan como consulta para casos que se apartan de la ruta básica.

La correlación de Churchill y Ozoe para laminar, válida para todo Pr con $\mathrm{Re}_x\mathrm{Pr} > 100$, es

$$\mathrm{Nu}_x = \frac{0{,}3387\mathrm{Re}_x^{1/2}\mathrm{Pr}^{1/3}}{\left[1 + (0{,}0468/\mathrm{Pr})^{2/3}\right]^{1/4}}, \tag{4.40}$$

$$\overline{\mathrm{Nu}} = \frac{0{,}6774\mathrm{Re}_L^{1/2}\mathrm{Pr}^{1/3}}{\left[1 + (0{,}0468/\mathrm{Pr})^{2/3}\right]^{1/4}}. \tag{4.41}$$

Ampliación. Correlación específica para metales líquidos; no es necesaria en la primera ruta de aprendizaje.

Para metales líquidos, $\mathrm{Pr} < 0{,}05$ y $\mathrm{Re}_x\mathrm{Pr} > 100$:

$$\mathrm{Nu}_x = 0{,}565(\mathrm{Re}_x\mathrm{Pr})^{1/2}, \qquad \overline{\mathrm{Nu}} = 1{,}130(\mathrm{Re}_L\mathrm{Pr})^{1/2}. \tag{4.42}$$

Para placa con extremo inicial no calentado, $x > x_0$, se introducen correcciones por el arranque de la capa térmica:

$$\text{laminar:} \quad \mathrm{Nu}_x = \frac{0{,}332\mathrm{Re}_x^{1/2}\mathrm{Pr}^{1/3}}{\left[1-(x_0/x)^{3/4}\right]^{1/3}}, \tag{4.43}$$

$$\text{turbulento:} \quad \mathrm{Nu}_x = \frac{0{,}0296\mathrm{Re}_x^{4/5}\mathrm{Pr}^{1/3}}{\left[1-(x_0/x)^{9/10}\right]^{1/9}}. \tag{4.44}$$

Si la capa límite es turbulenta desde el borde de ataque, la correlación media se escribe

$$\overline{\mathrm{Nu}} = 0{,}037\mathrm{Re}_L^{4/5}\mathrm{Pr}^{1/3}, \qquad 0{,}6 < \mathrm{Pr} < 60. \tag{4.45}$$

Si existe una zona laminar inicial seguida de una zona turbulenta, una expresión de Chilton–Colburn para la placa completa es

$$\overline{\mathrm{Nu}} = \left[0{,}664\mathrm{Re}_c^{1/2} + 0{,}037(\mathrm{Re}_L^{4/5} - \mathrm{Re}_c^{4/5})\right]\mathrm{Pr}^{1/3}, \qquad 0{,}6 < \mathrm{Pr} < 60, \qquad \mathrm{Re}_L \lesssim 10^8. \tag{4.46}$$

Como alternativa bibliográfica, la forma canónica de Whitaker para placa plana con transición se escribe

$$\begin{aligned} &\overline{\mathrm{Nu}} = 0{,}036\mathrm{Pr}^{0{,}43}\left(\mathrm{Re}_L^{0{,}8} - 9200\right)\left(\frac{\mu_\infty}{\mu_s}\right)^{1/4}, \\ &0{,}7 < \mathrm{Pr} < 380, \qquad 2\times10^5 < \mathrm{Re}_L < 5{,}5\times10^6, \\ &0{,}26 \lesssim \frac{\mu_\infty}{\mu_s} \lesssim 3{,}5. \end{aligned} \tag{4.47}$$

Esta expresión debe emplearse de manera coherente con sus hipótesis de evaluación de propiedades y corrección de viscosidad. En este texto se mantiene Chilton–Colburn como correlación mixta recomendada por su conexión directa con la integración laminar–turbulenta.

Para flujo superficial uniforme $q''_s = \text{cte}$: **Flujo de calor superficial uniforme.** Esta familia es distinta de la de $T_s = \text{cte}$: los coeficientes locales y medios sólo deben combinarse con la condición $q'' = \text{cte}$ y con el régimen de Reynolds correspondiente.

$$\text{laminar:} \quad \mathrm{Nu}_x = 0{,}453\mathrm{Re}_x^{1/2}\mathrm{Pr}^{1/3}, \quad \overline{\mathrm{Nu}} = 0{,}906\mathrm{Re}_L^{1/2}\mathrm{Pr}^{1/3}, \tag{4.48}$$

$$\text{turbulento desde el borde de ataque:} \quad \mathrm{Nu}_x = 0{,}0308\mathrm{Re}_x^{4/5}\mathrm{Pr}^{1/3}, \quad \overline{\mathrm{Nu}} = 0{,}0385\mathrm{Re}_L^{4/5}\mathrm{Pr}^{1/3}. \tag{4.49}$$

Media de h_x y temperatura superficial media Los coeficientes 0,906 y 0,0385 corresponden a la media aritmética espacial, $\bar{h}_\mathrm{a} = L^{-1}\int_0^L h_x\,\mathrm{d}x$, y son los adecuados para obtener la potencia total sobre la placa. No reproducen la temperatura superficial media cuando q'' es uniforme. Para esa finalidad debe emplearse el coeficiente armónico equivalente

$$\bar{h}_T = \frac{q''}{\bar{T}_s - T_\infty}.$$

En régimen laminar resulta $\bar{h}_T = 1{,}5h_L$, equivalente a $\overline{Nu}_T = 0{,}6795\, Re_L^{1/2} Pr^{1/3}$; si la capa límite es turbulenta desde el borde de ataque, $\bar{h}_T = 1{,}2h_L$, equivalente a $\overline{Nu}_T = 0{,}03696\, Re_L^{4/5} Pr^{1/3}$.

Si la placa completa presenta una zona laminar inicial seguida de una zona turbulenta,

$$\overline{\mathrm{Nu}} = \left[0{,}906\mathrm{Re}_c^{1/2} + 0{,}0385(\mathrm{Re}_L^{4/5} - \mathrm{Re}_c^{4/5})\right] \mathrm{Pr}^{1/3}. \tag{4.50}$$

Como correlación de referencia adicional para flujo laminar con $q''_s = \text{cte}$ y todo Pr, la forma de Churchill-Ozoe puede escribirse cambiando los coeficientes de la placa isoterma:

$$\mathrm{Nu}_x = \frac{0{,}4637\mathrm{Re}_x^{1/2}\mathrm{Pr}^{1/3}}{\left[1 + (0{,}0207/\mathrm{Pr})^{2/3}\right]^{1/4}}, \qquad \mathrm{Re}_x\mathrm{Pr} \geq 100. \tag{4.51}$$

Para $\mathrm{Re}_{cr} = 5 \cdot 10^5$, la expresión mixta de uso habitual en placa isoterma también puede escribirse como

$$\overline{\mathrm{Nu}} = (0{,}037\mathrm{Re}_L^{4/5} - 871)\mathrm{Pr}^{1/3}, \qquad 5 \cdot 10^5 \leq \mathrm{Re}_L \leq 10^7. \tag{4.52}$$

Esta forma y la expresión con Re_c explícito representan el mismo empalme integrado cuando se adopta $\mathrm{Re}_c = 5 \times 10^5$. Por tanto comparten la condición de transición, $0{,}6 < Pr < 60$ y el mismo dominio de Re_L; no deben tratarse como correlaciones independientes ni combinarse con valores diferentes de Re_c.

4.2.3 Cilindros

Para flujo cruzado sobre un cilindro isoterma, la longitud característica es el diámetro D:

$$\mathrm{Re}_D = \frac{u_\infty D}{\nu}, \qquad \bar{h} = \frac{\overline{\mathrm{Nu}}_D k_f}{D}. \tag{4.53}$$

Las propiedades suelen evaluarse a $T_f = (T_s + T_\infty)/2$, salvo correlaciones que indiquen lo contrario.

La correlación de Churchill y Bernstein para cilindro circular, válida para $\mathrm{Re}_D\mathrm{Pr} \geq 0{,}2$ en todo el intervalo de Pr, puede escribirse como

$$\boxed{\overline{\mathrm{Nu}}_D = 0{,}3 + \frac{0{,}62\mathrm{Re}_D^{1/2}\mathrm{Pr}^{1/3}}{\left[1 + (0{,}4/\mathrm{Pr})^{2/3}\right]^{1/4}} \left[1 + \left(\frac{\mathrm{Re}_D}{282000}\right)^{5/8}\right]^{4/5}.} \tag{4.54}$$

Se adopta esta forma unificada como correlación recomendada. Las formas parciales por tramos se omiten para evitar duplicidades y elecciones artificiales entre expresiones que proceden de la misma correlación compacta.

Ruta docente para un cilindro aislado Calcule Re_D con el diámetro exterior, use propiedades a la temperatura indicada y aplique Churchill–Bernstein como primera opción. Hilpert y Zhukauskas se reservan para comparación, geometrías no circulares o requisitos específicos de evaluación de propiedades.

Ampliación. Límite de advección muy débil, tablas de Hilpert y correlación de Zhukauskas.

Para el límite de advección muy débil alrededor de un cilindro, una correlación de uso restringido para $\mathrm{Re}_D\mathrm{Pr} < 0{,}2$ es

$$\overline{\mathrm{Nu}}_D = \frac{1}{0{,}8237 - \ln\left[(\mathrm{Re}_D\mathrm{Pr})^{1/2}\right]}. \tag{4.55}$$

Este límite de bajo Peclet se mantiene separado de Hilpert y Churchill–Bernstein. Requiere un cilindro aislado en una corriente no confinada y propiedades compatibles con la correlación; los efectos de confinamiento, turbulencia libre y flotación pueden aumentar el intercambio y dejan el ajuste fuera de alcance.

Las constantes de Hilpert para cilindros circulares y no circulares se recogen en las tablas 4.6 y 4.7. La correlación de Hilpert adopta la forma

$$\overline{\mathrm{Nu}}_D = C\mathrm{Re}_D^m \mathrm{Pr}^{1/3}, \qquad 0{,}4 < \mathrm{Re}_D < 4\cdot 10^5, \quad \mathrm{Pr} > 0{,}6. \tag{4.56}$$

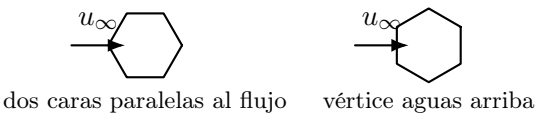
Tabla 4.6: Constantes de Hilpert para cilindro circular en flujo cruzado.

Re_D	C	m
0,4–4	0,989	0,330
4–40	0,911	0,385
40–4.000	0,683	0,466
4.000–40.000	0,193	0,618
40.000–400.000	0,027	0,805

Tabla 4.7: Constantes de Hilpert para cilindros no circulares en flujo cruzado.

Configuración transversal	Rango de Re_L	C	m
Cuadrado girado 45° respecto al flujo (rombo)	5.000–100.000	0,246	0,588
Cuadrado con caras paralelas/perpendiculares al flujo	5.000–100.000	0,102	0,675
Hexágono con dos caras paralelas al flujo	5.000–19.500	0,160	0,638
Hexágono con dos caras paralelas al flujo	19.500–100.000	0,0385	0,782
Hexágono con un vértice aguas arriba	5.000–100.000	0,153	0,638
Placa o rectángulo delgado transversal	4.000–15.000	0,228	0,731

En las filas no circulares se usa $\mathrm{Re}_L = u_\infty L_\perp/\nu$, donde $L_\perp$ es la cota proyectada normal al flujo definida por la geometría tabulada. No debe sustituirse automáticamente por el diámetro hidráulico, que pertenece al flujo interno y sólo sería admisible con una justificación específica. En los hexágonos se distinguen dos orientaciones, mostradas en la figura 4.3: dos caras paralelas al flujo o un vértice aguas arriba.



dos caras paralelas al flujo vértice aguas arriba

Figura 4.3: Orientaciones usadas en la tabla de Hilpert para secciones hexagonales.

La correlación de Zhukauskas para cilindro circular emplea propiedades a T_∞, salvo Pr_s a T_s:

$$\overline{\mathrm{Nu}}_D = C\mathrm{Re}_D^m \mathrm{Pr}^n \left(\frac{\mathrm{Pr}}{\mathrm{Pr}_s}\right)^{1/4}, \qquad 1 < \mathrm{Re}_D < 10^6, \qquad 0{,}7 < \mathrm{Pr} < 500, \tag{4.57}$$

con $n = 0{,}37$ si $\mathrm{Pr} \le 10$ y $n = 0{,}36$ si $\mathrm{Pr} > 10$. La tabla 4.8 proporciona las constantes de la correlación.

Tabla 4.8: Constantes de Zhukauskas para cilindro circular.

Re_D	C	m
1–40	0,75	0,4
40–1.000	0,51	0,5
1.000–200.000	0,26	0,6
200.000–1.000.000	0,076	0,7

4.2.4 Esferas

En una esfera isoterma sometida a flujo transversal forzado,

$$\mathrm{Re}_D = \frac{u_\infty D}{\nu}, \qquad \bar{h} = \frac{\overline{\mathrm{Nu}}_D k_f}{D}. \tag{4.58}$$

Con propiedades a T_∞, excepto μ_s a T_s, se usa

$$\boxed{\overline{\mathrm{Nu}}_D = 2 + (0{,}4\mathrm{Re}_D^{1/2} + 0{,}06\mathrm{Re}_D^{2/3})\mathrm{Pr}^{0{,}4}\left(\frac{\mu}{\mu_s}\right)^{1/4}.} \tag{4.59}$$

Rango de validez:

$$3{,}5 < \mathrm{Re}_D < 7{,}6 \cdot 10^4, \qquad 0{,}71 < \mathrm{Pr} < 380, \qquad 1 < \frac{\mu}{\mu_s} < 3{,}2. \tag{4.60}$$

El término 2 representa el límite conductivo alrededor de una esfera; los términos restantes incorporan el aumento por advección.

Profundización. Los bancos de tubos requieren velocidad máxima entre tubos y corrección por número de filas. Deben estudiarse después del cilindro aislado.

4.2.5 Bancos de tubos en flujo cruzado

Los bancos de tubos aparecen de forma natural en baterías de refrigeración, calderas, condensadores, evaporadores y otros intercambiadores compactos. Aunque cada tubo se parezca localmente al caso de cilindro circular en flujo cruzado, el flujo que alcanza las filas posteriores ya ha sido acelerado y perturbado por las filas anteriores. Por ello no debe aplicarse sin más la correlación de un cilindro aislado a todos los tubos del haz.

La geometría se caracteriza mediante el paso transversal S_T, el paso longitudinal S_L, el diámetro exterior D, el número de filas en la dirección del flujo N_L y el número de tubos por fila N_T. En disposición tresbolillo se define además el paso diagonal

$$S_D = \sqrt{S_L^2 + \left(\frac{S_T}{2}\right)^2}. \tag{4.61}$$

La velocidad que gobierna el intercambio no es la velocidad de aproximación u_∞, sino la velocidad máxima entre tubos. Se exige $S_T > D$ y, en tresbolillo, $S_D > D$. Las correlaciones se usan aproximadamente en $10 < Re_{D,\,\mathrm{máx}} < 2 \times 10^6$ y $0{,}7 < Pr < 500$, con el corrector por número de filas cuando corresponda. Para banco alineado,

$$u_{\mathrm{máx}} = u_\infty \frac{S_T}{S_T - D}. \tag{4.62}$$

Para banco en tresbolillo debe tomarse la mayor velocidad entre el estrechamiento transversal y el diagonal:

$$u_{\mathrm{máx}} = u_\infty \ \mathrm{máx}\left[\frac{S_T}{S_T - D}, \frac{S_T}{2(S_D - D)}\right]. \tag{4.63}$$

Con ella se define

$$\mathrm{Re}_{D,\,\mathrm{máx}} = \frac{u_{\mathrm{máx}} D}{\nu}. \tag{4.64}$$

La figura 4.4 muestra los pasos geométricos usados en bancos alineados y en tresbolillo.

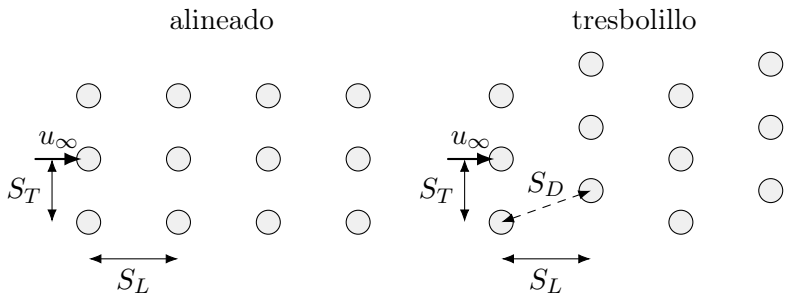


Figura 4.4: Parámetros geométricos de un banco de tubos alineado y en tresbolillo.

Para bancos con al menos unas veinte filas, una correlación de Zhukauskas de uso habitual es

$$\overline{\mathrm{Nu}}_D = C\mathrm{Re}_{D,\,\mathrm{máx}}^{m}\mathrm{Pr}^{0,36}\left(\frac{\mathrm{Pr}}{\mathrm{Pr}_s}\right)^{1/4}, \qquad 0{,}7 \lesssim \mathrm{Pr} \lesssim 500. \tag{4.65}$$

Las propiedades se evalúan a una temperatura media representativa del fluido, excepto Pr_s, que se evalua a la temperatura superficial del tubo. Los coeficientes C y m dependen de la disposición del banco y se resumen en la tabla 4.9:

Tabla 4.9: Constantes de Zhukauskas para bancos de tubos en flujo cruzado.

Disposicion	Rango de $\mathrm{Re}_{D,\,\mathrm{máx}}$	C	m
Alineado	10–100	0,80	0,40
Alineado	100–1.000	0,51	0,50
Alineado	1.000–200.000	0,27	0,63
Alineado	200.000–2.000.000	0,021	0,84
Tresbolillo	10–100	0,90	0,40
Tresbolillo	100–1.000	0,51	0,50
Tresbolillo	1.000–200.000	$0{,}35(S_T/S_L)^{1/5}$	0,60
Tresbolillo	200.000–2.000.000	0,022	0,84

Si el banco tiene menos de veinte filas, el valor anterior se multiplica por un factor de corrección C_N:

$$\overline{\mathrm{Nu}}_{D,N_L} = C_N\,\overline{\mathrm{Nu}}_{D,N_L\geq 20}. \tag{4.66}$$

La tabla 4.10 ofrece valores de uso frecuente para C_N:

Tabla 4.10: Factor corrector por número de filas N_L en bancos de tubos.

N_L	1	2	3	4	5	7	10	13	16	20
Alineado	0,70	0,80	0,86	0,90	0,92	0,95	0,97	0,98	0,99	1,00
Tresbolillo	0,64	0,76	0,84	0,89	0,92	0,95	0,97	0,98	0,99	1,00

Para tubos de longitud L_z y superficie aproximadamente isoterma, el área exterior de intercambio del banco es

$$A_s = N_T N_L \pi D L_z. \tag{4.67}$$

El balance energético y la ley convectiva global son

$$q = \dot{m}c_p(T_{b,s} - T_{b,e}) = \bar{h}A_s\Delta T_{\mathrm{lm}}, \tag{4.68}$$

con

$$\Delta T_{\mathrm{lm}} = \frac{\Delta T_e - \Delta T_s}{\ln(\Delta T_e/\Delta T_s)}, \qquad \Delta T_e = T_s - T_{b,e}, \qquad \Delta T_s = T_s - T_{b,s}. \tag{4.69}$$

De forma equivalente, si T_s y $\bar{h}$ se consideran constantes,

$$T_{b,s} = T_s - (T_s - T_{b,e}) \exp\left(-\frac{\bar{h} A_s}{\dot{m} c_p}\right). \tag{4.70}$$

Estas expresiones deben aplicarse con el signo físico correspondiente: si el banco calienta al fluido, $T_{b,s} > T_{b,e}$; si lo enfría, $T_{b,s} < T_{b,e}$. En problemas de diseño de intercambiadores, este bloque proporciona el coeficiente exterior del haz, que después se combina con la resistencia de pared y el coeficiente interior para obtener el coeficiente global.

4.3 Convección forzada: flujo interno

En flujo interno el fluido está confinado por las paredes de un conducto. La capa límite no crece indefinidamente: al cabo de una longitud de entrada ocupa toda la sección y el flujo pasa a estar desarrollado. El tratamiento térmico debe distinguir entre desarrollo hidrodinámico, desarrollo térmico y variación axial de la temperatura media de masa.

Ruta de decisión para flujo interno

1. Calcule Re_{D_h} y decida laminar o turbulento.
2. Compare L con las longitudes de entrada hidrodinámica y térmica.
3. Distinga pared isoterma de flujo superficial impuesto.
4. En laminar desarrollado, use el valor de Nu asociado a la condición térmica y a la sección.
5. En turbulento desarrollado, use Gnielinski como opción principal.
6. Cierre siempre con el balance $q = \dot{m} c_p (T_{b,s} - T_{b,e})$.

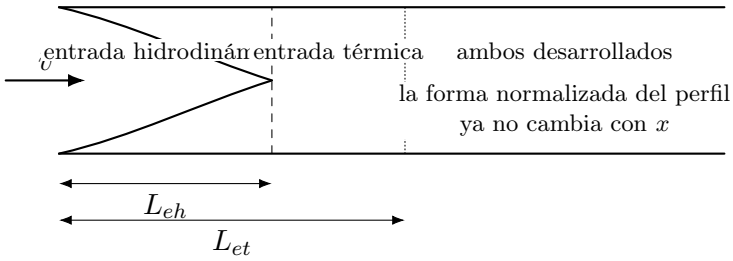


Figura 4.5: Lectura conjunta de las regiones de entrada hidrodinámica y térmica.

El orden relativo dibujado es sólo ilustrativo. En flujo laminar de tubo circular, las estimaciones $L_{eh}/D \simeq 0{,}05\mathrm{Re}_D$ y $L_{et}/D \simeq 0{,}05\mathrm{Re}_D\mathrm{Pr}$ implican $L_{et}/L_{eh} \simeq \mathrm{Pr}$: para $\mathrm{Pr} < 1$ la entrada térmica puede terminar antes que la hidrodinámica, mientras que para $\mathrm{Pr} > 1$ ocurre lo contrario. Las condiciones de entrada y de pared también pueden modificar esta comparación.

4.3.1 Consideraciones hidrodinámicas

El número de Reynolds en un conducto circular es

$$\mathrm{Re}_D = \frac{\bar{v} D}{\nu} = \frac{\rho \bar{v} D}{\mu}. \tag{4.71}$$

Para conductos no circulares se usa el diámetro hidráulico

$$\boxed{D_h = \frac{4 A_c}{p},} \tag{4.72}$$

donde A_c es el área de sección de flujo y p el perímetro mojado. Para $\mathrm{Re} \lesssim 2300$ el flujo interno suele clasificarse como laminar y para $\mathrm{Re} \gtrsim 4000$ como turbulento. La banda aproximada $2300 < \mathrm{Re} < 4000$ es de transición y sigue siendo sensible a la entrada, rugosidad, perturbaciones y estabilidad del montaje; no representa un salto físico universal. La zona inicial en la que el perfil de velocidad se desarrolla se denomina longitud de entrada hidrodinámica L_{eh}. Como referencia de validación frente a textos clásicos, para flujo laminar en tubo circular se emplean las estimaciones

$$\frac{L_{eh}}{D} \simeq 0{,}05\mathrm{Re}_D, \qquad \frac{L_{et}}{D} \simeq 0{,}05\mathrm{Re}_D\mathrm{Pr}, \tag{4.73}$$

mientras que en turbulento suele bastar con tomar longitudes de entrada del orden de $10D$. Estas expresiones no sustituyen a las correlaciones de entrada cuando el desarrollo sea parte esencial del problema, pero sirven para comprobar si las tablas de flujo desarrollado pueden aplicarse.

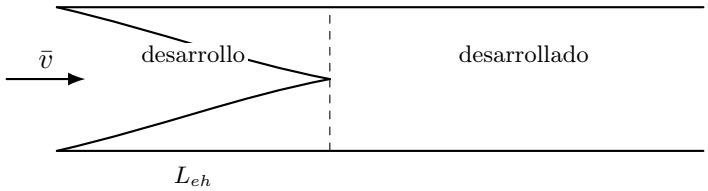


Figura 4.6: Desarrollo hidrodinámico cualitativo en un conducto.

4.3.2 Consideraciones térmicas

Si el fluido entra a temperatura diferente de la pared, aparece una capa límite térmica que nace con espesor nulo en la entrada y crece hasta alcanzar el eje o la zona central del conducto. A partir de ahí el flujo está térmicamente desarrollado. La longitud de entrada térmica L_{et} no coincide necesariamente con la hidrodinámica y depende de Pr y del régimen.

En flujo desarrollado hidrodinámicamente el perfil de velocidad ya no cambia con x. En cambio, el perfil de temperatura puede seguir desplazándose en nivel porque el fluido continúa ganando o perdiendo energía a lo largo del conducto. Lo que se estabiliza en flujo térmicamente desarrollado es la forma adimensional del perfil, no necesariamente la temperatura local. Operativamente, para un tubo circular puede escribirse como

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{T_s(x) - T(r,x)}{T_s(x) - T_b(x)}\right] = 0. \tag{4.74}$$

En conductos no circulares se sustituye r por la coordenada transversal correspondiente; la idea física es la misma: la forma normalizada del campo térmico deja de depender de x, aunque T_b y, según la condición de contorno, T_s puedan variar axialmente.

4.3.3 Temperatura media de masa o temperatura media de mezcla adiabática

Qué representa realmente T_b T_b no es la media aritmética de las temperaturas de la sección. Es la única temperatura uniforme que transportaría la misma entalpía que el perfil real de velocidad y temperatura. Las zonas por las que pasa más caudal pesan más en la media.

La temperatura media de masa T_b en una sección es la temperatura que se obtendría al mezclar adiabáticamente el caudal que atraviesa dicha sección, sin disipación viscosa. Su definición energética es

$$\boxed{T_b = \frac{\displaystyle\int_A \rho u c_p T \,\mathrm{d}A}{\dot{m} c_p}.} \tag{4.75}$$

Si las propiedades no varían apreciablemente,

$$T_b = \frac{\int_A Tu \, \mathrm{d}A}{\bar{u}A}. \tag{4.76}$$

El flujo convectivo local en un conducto se escribe

$$q'' = h(T_s - T_b). \tag{4.77}$$

La temperatura T_b juega en flujo interno el papel de T_∞ en flujo externo, pero con una diferencia esencial: T_∞ suele ser constante, mientras que T_b cambia con x por el balance de energía.

4.3.4 Distribución longitudinal de la temperatura de masa $T_b(x)$ y de la superficial $T_s(x)$ del conducto

Considérese un conducto de sección A_c, perímetro mojado p, longitud L, caudal másico $\dot{m}$, temperatura de masa de entrada $T_{b,e}$ y salida $T_{b,s}$. Se desprecia la conducción axial en el fluido, la disipación viscosa y la variación de propiedades.

4.3.4.1 Flujo de calor uniforme $q''_s = \text{cte}$

Para una rebanada diferencial $\mathrm{d}x$, el balance es

$$\dot{m}c_p \, \mathrm{d}T_b = q''_s p \, \mathrm{d}x. \tag{4.78}$$

Integrando,

$$\boxed{T_b(x) = T_{b,e} + \frac{q''_s p}{\dot{m}c_p} x.} \tag{4.79}$$

La temperatura superficial se obtiene de $q''_s = h(T_s - T_b)$:

$$\boxed{T_s(x) = T_b(x) + \frac{q''_s}{h}.} \tag{4.80}$$

Si h se mantiene aproximadamente constante, $T_s(x)$ es paralela a $T_b(x)$. Para enfriamiento del fluido, $q''_s < 0$ y ambas pendientes cambian de signo.

4.3.4.2 Temperatura superficial uniforme $T_s = \text{cte}$

El balance diferencial es

$$\dot{m}c_p \, \mathrm{d}T_b = h(T_s - T_b)p \, \mathrm{d}x. \tag{4.81}$$

Como T_s es constante,

$$\mathrm{d}T_b = -\mathrm{d}(T_s - T_b), \tag{4.82}$$

y por tanto, en la forma más general,

$$\ln \frac{T_s - T_b(x)}{T_s - T_{b,e}} = -\int_0^x \frac{h(\xi)p(\xi)}{\dot{m}c_p}, \mathrm{d}\xi. \tag{4.83}$$

Si $h(\xi)$ y $p(\xi)$ se sustituyen por valores medios representativos,

$$\int_0^x \frac{h(\xi)p(\xi)}{\dot{m}c_p} \, \mathrm{d}\xi \simeq \frac{\bar{h}\,\bar{p}}{\dot{m}c_p} x. \tag{4.84}$$

En conductos de perímetro constante, $\bar{p} = p$, y queda

$$\ln \frac{T_s - T_b(x)}{T_s - T_{b,e}} = -\frac{\bar{h}p}{\dot{m}c_p} x. \tag{4.85}$$

La solución es

$$\boxed{T_b(x) = T_s - (T_s - T_{b,e}) \exp\left(-\frac{\bar{h}p}{\dot{m}c_p}x\right).} \tag{4.86}$$

Particularizando en $x = L$:

$$\boxed{\ln\frac{T_s - T_{b,s}}{T_s - T_{b,e}} = -\frac{\bar{h}pL}{\dot{m}c_p} = -\frac{\bar{h}A_{\text{conv}}}{\dot{m}c_p}.} \tag{4.87}$$

Estas expresiones son válidas también para enfriamiento si los signos se interpretan con la diferencia $T_s - T_b$.

4.3.5 Potencia térmica intercambiada entre el conducto y el fluido

Independientemente de la condición de contorno, la potencia debe entenderse como una integral local:

$$q = \int_0^L h(x)p(x)\,[T_s(x) - T_b(x)],\mathrm{d}x. \tag{4.88}$$

Si se desea escribir una forma global, se define la diferencia de temperatura eficaz interna

$$\Delta T_{\text{ef,int}} \equiv \frac{1}{\bar{h}A_{\text{conv}}} \int_0^L h(x)p(x)\,[T_s(x) - T_b(x)],\mathrm{d}x, \tag{4.89}$$

y entonces

$$\boxed{q = \bar{h}A_{\text{conv}}\Delta T_{\text{ef,int}}.} \tag{4.90}$$

Esta definición evita interpretar $\overline{(T_s - T_b)}$ como una media aritmética cuando h, T_s o T_b cambian a lo largo del conducto. Además, por balance global de energía en el fluido,

$$\boxed{q = \dot{m}c_p(T_{b,s} - T_{b,e}).} \tag{4.91}$$

4.3.5.1 Flujo de calor uniforme

Si $q''_s = \text{cte}$, la potencia total viene directamente dada por

$$\boxed{q = q''_s A_{\text{conv}} = q''_s pL.} \tag{4.92}$$

La diferencia $T_s - T_b = q''_s/h$ es constante si h lo es.

4.3.5.2 Temperatura superficial uniforme

Para $T_s = \text{cte}$, la diferencia media correcta no es aritmética sino logarítmica. Definiendo

$$\Delta T_e = T_s - T_{b,e}, \qquad \Delta T_s = T_s - T_{b,s}, \tag{4.93}$$

se obtiene

$$\boxed{\Delta T_{\text{lm}} = \frac{\Delta T_e - \Delta T_s}{\ln(\Delta T_e/\Delta T_s)} = \frac{\Delta T_s - \Delta T_e}{\ln(\Delta T_s/\Delta T_e)}.} \tag{4.94}$$

La potencia queda

$$\boxed{q = \bar{h}A_{\text{conv}}\Delta T_{\text{lm}}.} \tag{4.95}$$

4.3.6 Implementación de flujos con temperatura superficial uniforme y con flujo de calor uniforme

Las dos condiciones de contorno más usadas en flujo interno tienen interpretaciones físicas diferentes. El flujo impuesto representa una potencia superficial fijada; la pared isoterma representa una superficie mantenida por contacto con un foco o por cambio de fase.

4.3.6.1 Flujo de calor uniforme $q''_s = \text{cte}$

Si $q''_s > 0$, se transmite calor al fluido. Puede implementarse mediante una resistencia eléctrica arrollada con paso constante sobre la tubería y, para aproximar mejor la condición, recubriendo exteriormente con aislante. Otra situación de interés es la absorción de radiación solar en una pared de colector: la potencia que llega al fluido procede de la fracción $\alpha_s G_s$ absorbida.

Si $q''_s < 0$, se extrae calor del fluido. Esta condición no se implementa con una resistencia eléctrica; requeriría un dispositivo de enfriamiento repartido, por ejemplo compartimentos sucesivos recorridos por fluidos cada vez más fríos $T_1 > T_2 > \cdots > T_n$. Cuanto menor sea el ancho de los compartimentos, más se aproxima la condición de flujo superficial uniforme negativo. En ambos casos,

$$q = q''_s p L, \qquad T_b(x) = T_{b,e} + \frac{q''_s p}{\dot{m} c_p} x. \tag{4.96}$$

4.3.6.2 Temperatura superficial uniforme $T_s = \text{cte}$

Se aproxima cuando la pared está en contacto con un medio de capacidad térmica elevada, con un fluido en cambio de fase o con una superficie muy conductora y regulada. La diferencia $T_s - T_b$ decrece exponencialmente a lo largo del conducto en calentamiento y aumenta en módulo de forma equivalente en enfriamiento.

4.3.6.3 Variación cualitativa de los perfiles de temperatura del fluido

En el tratamiento de flujo interno se distingue explícitamente la evolución cualitativa del perfil de temperatura dentro del conducto, porque ayuda a no confundir $T_b(x)$, $T_s(x)$ y la temperatura local $T(r,x)$. Para $q''_s = \text{cte}$, la forma transversal del perfil permanece aproximadamente semejante cuando el flujo está térmicamente desarrollado, mientras que su nivel medio se desplaza axialmente. Si $q''_s > 0$, el fluido se calienta y T_b aumenta; si $q''_s < 0$, el fluido se enfría y T_b disminuye. En ambos casos, para h aproximadamente constante, $T_s(x) - T_b(x) = q''_s/h$.

Para $T_s = \text{cte}$, la pared fija el límite térmico exterior y el perfil no solo se desplaza en nivel, sino que también modifica su forma hasta acercarse asíntoticamente a T_s. En una tubería suficientemente larga, $T_b \to T_s$ y la potencia adicional intercambiada por unidad de longitud tiende a cero. Esta observación es clave para interpretar el uso de ΔT_{lm}: la diferencia de temperatura eficaz no es constante, sino que decrece exponencialmente en el sentido del flujo.

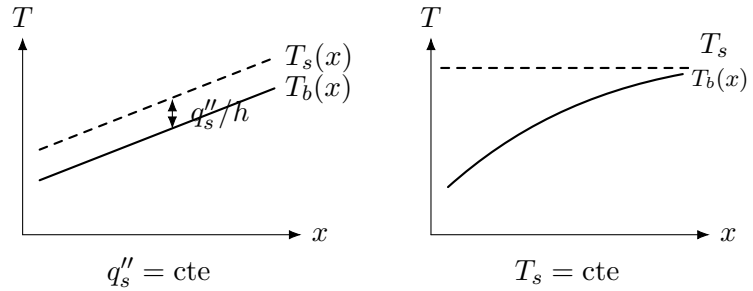


Figura 4.7: Evolución cualitativa de T_b y T_s en conductos para flujo impuesto y pared isoterma.

4.3.6.4 Resumen de cálculo para flujo interno

Tabla 4.11: Resumen de ecuaciones de flujo interno.

Condición	Ecuaciones principales
$q''_s = \text{cte}$	$q = q''_s pL$, $T_b(x) = T_{b,e} + q''_s px/(\dot{m}c_p)$, $T_s(x) = T_b(x) + q''_s/h$.
$T_s = \text{cte}$	$T_b(x) = T_s - (T_s - T_{b,e})e^{-\bar{h}px/(\dot{m}c_p)}$, $q = \bar{h}A\Delta T_{\text{lm}}$.
Balance global	$q = \dot{m}c_p(T_{b,s} - T_{b,e})$.

4.3.6.5 Flujo laminar desarrollado $\text{Re}_D < 2300$

En laminar desarrollado, Nu depende de la geometría y de la condición de contorno. Para tubo circular, los dos valores que deben distinguirse son:

Tabla 4.12: Significado de los valores 3,66 y 4,36.

Nu	Condición en la pared	Lectura y error frecuente
3,66	$T_s = \text{cte}$	La pared se mantiene isoterma. No usarlo si lo impuesto es una potencia superficial uniforme.
4,36	$q''_s = \text{cte}$	El flujo superficial es uniforme. No implica que T_s sea constante.

Ambos valores exigen flujo laminar, tubo circular y desarrollo hidrodinámico y térmico completos. Para conductos no circulares térmica e hidrodinámicamente desarrollados, la tabla da valores característicos. Se incluyen también el tubo circular y la sección triangular para que la tabla recoja las geometrías de uso habitual: En esta tabla $Nu = \bar{h}D_h/k$, con $D_h = 4A_c/p$, y para rectángulos se adopta $b/a \geq 1$. Cada columna exige que la condición térmica indicada, T_s uniforme o q''_s uniforme, se aplique a todo el perímetro mojado térmicamente activo. Si sólo se calienta una parte del perímetro o se mezclan condiciones de pared, los valores tabulados no son aplicables.

Tabla 4.13: Nusselt en flujo laminar desarrollado para distintas secciones de conducto.

Sección	Parámetro	q''_s uniforme	T_s uniforme
Circular	–	4,36	3,66
Rectangular	$b/a = 1$	3,61	2,98
Rectangular	$b/a = 1{,}43$	3,73	3,08
Rectangular	$b/a = 2$	4,12	3,39
Rectangular	$b/a = 3$	4,79	3,96
Rectangular	$b/a = 4$	5,33	4,44
Rectangular	$b/a = 8$	6,49	5,60
Placas paralelas	$b/a \to \infty$	8,24	7,54
Triangular equilátero	–	3,11	2,47

El valor $b/a = 1$ corresponde a sección cuadrada. El límite $b/a \to \infty$ representa placas paralelas.

Para el espacio anular entre tubos concéntricos, con una superficie isoterma y la otra aislada, se usan los valores de la tabla 4.14:

Tabla 4.14: Nusselt en ánulos concéntricos desarrollados.

D_i/D_o	Nu_i	Nu_o
0	–	3,66
0,05	17,46	4,06
0,10	11,56	4,11
0,25	7,37	4,23
0,50	5,74	4,43
1,00	4,86	4,86

Nu_i corresponde a la superficie exterior del tubo interior cuando el tubo exterior está aislado. Nu_o corresponde a la superficie interior del tubo exterior cuando el tubo interior está aislado.

4.3.6.6 Región de entrada laminar en tubos

Cuando la longitud del conducto no es suficiente para alcanzar el desarrollo térmico completo, no deben usarse directamente los valores 3,66 o 4,36. Para un tubo circular con temperatura superficial uniforme, una correlación media frecuente para la región de entrada es

$$\overline{\mathrm{Nu}} = 3{,}66 + \frac{0{,}0668(D/L)\mathrm{RePr}}{1 + 0{,}04[(D/L)\mathrm{RePr}]^{2/3}}. \tag{4.97}$$

Si la variación de viscosidad entre pared y masa es importante, puede emplearse la forma tipo Sieder–Tate de entrada laminar,

$$\overline{\mathrm{Nu}} = 1{,}86\left(\mathrm{RePr}\frac{D}{L}\right)^{1/3}\left(\frac{\mu_b}{\mu_s}\right)^{0{,}14}. \tag{4.98}$$

Estas expresiones son correlaciones medias de ingeniería; deben usarse con las mismas temperaturas de propiedades y condiciones de entrada que las del problema real.

4.3.6.7 Flujo turbulento desarrollado

En turbulento desarrollado, las correlaciones dependen menos de la condición de contorno y de la forma exacta de la sección. Para conductos no circulares suele usarse D_h.

Correlación principal para flujo turbulento interno Use Gnielinski como primera opción para tubos lisos cuando el caso esté dentro de sus rangos. Dittus–Boelter es una estimación más sencilla; Sieder–Tate se reserva para variaciones importantes de viscosidad.

La correlación de Gnielinski es

$$\boxed{\mathrm{Nu} = \frac{(f/8)(\mathrm{Re} - 1000)\mathrm{Pr}}{1 + 12{,}7(f/8)^{1/2}(\mathrm{Pr}^{2/3} - 1)},} \tag{4.99}$$

con

$$0{,}5 < \mathrm{Pr} < 2000, \qquad 3000 < \mathrm{Re} < 5 \cdot 10^6, \tag{4.100}$$

y f el factor de fricción de Darcy. Para tubos lisos, una forma explícita coherente con el rango de Gnielinski es la primera ecuación de Petukhov, usando logaritmo natural,

$$f = (0{,}790\ln\mathrm{Re} - 1{,}64)^{-2}, \qquad 3000 < \mathrm{Re} < 5 \cdot 10^6. \tag{4.101}$$

Ampliación. Petukhov alternativo, Dittus–Boelter, Sieder–Tate, metales líquidos y correcciones especiales se conservan para contraste o casos no cubiertos por la ruta principal.

Como referencia de contraste de Çengel para flujo turbulento plenamente desarrollado también puede escribirse la segunda ecuación de Petukhov:

$$\mathrm{Nu} = \frac{(f/8)\mathrm{RePr}}{1{,}07 + 12{,}7(f/8)^{1/2}(\mathrm{Pr}^{2/3} - 1)}, \qquad 0{,}5 \le \mathrm{Pr} \le 2000, \qquad 10^4 < \mathrm{Re} < 5 \cdot 10^6. \tag{4.102}$$

La forma de Gnielinski incluida arriba mejora su comportamiento en la zona turbulenta baja al sustituir Re por Re − 1000 y modificar el denominador; por ello se mantiene como correlación preferente para el rango amplio indicado.

Como contraste con Çengel y como herramienta de comprobación rápida en tubos lisos turbulentos, pueden citarse también las correlaciones clásicas:

$$\text{Dittus–Boelter:} \qquad \mathrm{Nu} = 0{,}023\mathrm{Re}^{0,8}\mathrm{Pr}^{n}, \quad n = 0{,}4 \text{ si el fluido se calienta}, \quad n = 0{,}3 \text{ si se enfría}, \tag{4.103}$$

$$\text{Sieder–Tate:} \qquad \mathrm{Nu} = 0{,}027\mathrm{Re}^{0,8}\mathrm{Pr}^{1/3}\left(\frac{\mu_b}{\mu_s}\right)^{0,14}. \tag{4.104}$$

Dittus–Boelter se usa para flujo turbulento plenamente desarrollado en tubos lisos, con $\mathrm{Re} \gtrsim 10^4$, $L/D \gtrsim 10$ y diferencia moderada entre pared y fluido; como referencia de rango, la forma de Colburn asociada cubre aproximadamente $0{,}7 \le \mathrm{Pr} \le 160$. Sieder–Tate extiende el uso cuando la variación de viscosidad pared–masa no es despreciable, con $\mathrm{Re} \gtrsim 10^4$ y $0{,}7 \le \mathrm{Pr} \le 1{,}67 \cdot 10^4$. Gnielinski se mantiene como correlación preferente por su mejor comportamiento en rangos amplios y en zona turbulenta moderada; Dittus–Boelter es más simple y útil para estimaciones cuando se cumplen sus hipótesis.

Para metales líquidos, Notter–Sleicher y Sleicher–Rouse proponen expresiones equivalentes de uso para $0{,}004 < \mathrm{Pr}_s < 0{,}1$ y $10^4 < \mathrm{Re} < 10^6$, evaluando el número de Prandtl a temperatura superficial cuando se siga la formulación de Çengel:

$$T_s = \text{cte}: \qquad \mathrm{Nu} = 4{,}8 + 0{,}0156\mathrm{Re}^{0,85}\mathrm{Pr}_s^{0,93}, \tag{4.105}$$

$$q_s'' = \text{cte}: \qquad \mathrm{Nu} = 6{,}3 + 0{,}0167\mathrm{Re}^{0,85}\mathrm{Pr}_s^{0,93}. \tag{4.106}$$

4.3.6.8 Corrección por variación radial de propiedades

Si las propiedades se evalúan a la temperatura media entre entrada y salida se corrige la variación longitudinal, pero no la variación radial entre pared y centro. Una corrección usual es

$$\mathrm{Nu} = \mathrm{Nu}_b\left(\frac{\mu_s}{\mu_b}\right)^{n} \text{ en líquidos}, \qquad \mathrm{Nu} = \mathrm{Nu}_b\left(\frac{T_s}{T_b}\right)^{n} \text{ en gases}. \tag{4.107}$$

Los exponentes indicados en el formulario son:

Tabla 4.15: Exponentes de corrección por propiedades variables.

Régimen y fluido	Calentamiento	Enfriamiento
Laminar, líquido	-0,11	-0,11
Laminar, gas	0	0
Turbulento, líquido	-0,25	-0,11
Turbulento, gas	-0,55	0

4.3.7 Consideraciones finales del flujo interno

En flujo laminar, Nu es sensible a la condición de contorno y a la geometría. Por eso no debe sustituirse automáticamente una correlación de tubo circular por otra de conducto rectangular.

En flujo turbulento, la subcapa viscosa junto a la pared domina gran parte de la resistencia térmica y la forma del perfil en el núcleo es menos importante. Muchas correlaciones de tubos circulares pueden aplicarse a conductos no circulares usando D_h, siempre que se respeten el rango de validez y la rugosidad.

Los metales líquidos son una excepción importante: como $\mathrm{Pr} \ll 1$, la condición de contorno sigue afectando de forma apreciable al resultado.

Control de orden de magnitud de h Un valor calculado no debe aceptarse solo porque la correlación devuelve un número. En gases forzados suelen esperarse decenas o centenas de $\mathrm{W/(m^2\,K)}$; en líquidos forzados pueden alcanzarse centenas o miles. Si el resultado difiere en varios órdenes de magnitud, revise longitud, unidades, velocidad y temperatura de propiedades.

4.4 Convección natural o libre

Se definen $\Delta\rho = \rho_\infty - \rho^*$ y $\Delta T = T^* - T_\infty$, de modo que $F_F = \Delta\rho\, gV$. Bajo Boussinesq, la densidad se mantiene constante salvo en la flotación y $\Delta\rho \simeq \rho\beta\Delta T$. Para una estimación de escala se usa $V \sim L^3$; no se identifica L^3 con el volumen exacto de toda geometría.

Si el cambio de densidad procede de un cambio de temperatura,

$$\beta = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_p = \frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p. \tag{4.108}$$

Para gases ideales,

$$\beta \simeq \frac{1}{T}, \tag{4.109}$$

con T en kelvin. Para líquidos debe consultarse β tabulada. Como $\Delta\rho \simeq \rho\beta\Delta T$ y $V \sim L^3$, la fuerza de flotación escala como

$$F_F \simeq \rho\beta\Delta T\, gL^3. \tag{4.110}$$

De esta escala surge el número de Grashof.

Una consecuencia práctica de esta formulación es que la convección natural desaparece si no hay gravedad efectiva o si el fluido no cambia de densidad con la temperatura. Para la mayoría de fluidos $\beta > 0$: el fluido calentado asciende y el enfriado desciende. El agua entre $0\,^\circ\mathrm{C}$ y $4\,^\circ\mathrm{C}$ es una excepción conocida, porque su densidad aumenta al calentarse en ese intervalo. También puede existir flotación por gradientes de composición; por ejemplo, aire más húmedo puede ascender por tener menor densidad que el aire seco cercano. En una placa vertical de longitud característica L, la escala de velocidad inducida puede estimarse como $u \sim \sqrt{\beta|\Delta T|gL}$, lo que explica que Gr sustituya a Re cuando la velocidad no es conocida a priori.

En convección natural las velocidades suelen ser pequeñas, habitualmente del orden de pocos metros por segundo o menos; por ello los coeficientes de convección natural en gases suelen ser más bajos que en convección forzada. El número de Reynolds no es el parámetro de partida porque la velocidad se desconoce a priori. Se usan Gr y Ra.

Ruta de decisión para convección natural

1. Dibuje la gravedad y decida si el fluido calentado puede ascender o el enfriado descender.
2. Elija la longitud característica de la geometría.
3. Evalúe propiedades a T_f y calcule Ra.
4. Use la correlación correspondiente a orientación y rango.
5. Calcule $h = Nu\,k/L_c$ y compare con los valores típicos de convección natural.

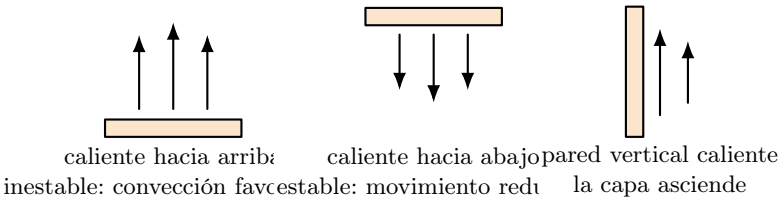


Figura 4.8: La orientación determina si la estratificación térmica favorece o dificulta el movimiento natural.

En una placa vertical puede existir una zona laminar, una transición y una zona turbulenta natural. A diferencia de la placa en convección forzada, donde h_x tiende a disminuir claramente en turbulento al alejarse del borde de ataque, en convección natural turbulenta sobre placa el coeficiente local queda aproximadamente independiente de la altura. Esto se entiende con $\overline{\mathrm{Nu}} = C\mathrm{Ra}^{1/3}$:

$$h \sim \frac{k}{L} C \left(\frac{g\beta|\Delta T|L^3}{\nu\alpha} \right)^{1/3} = Ck \left(\frac{g\beta|\Delta T|}{\nu\alpha} \right)^{1/3}, \tag{4.111}$$

por lo que, dentro de una correlación con exponente cercano a 1/3, la dependencia explícita con la longitud se vuelve débil. Es una escala aproximada: no elimina los efectos de borde, la transición ni la dependencia contenida en la correlación. Además, $Ra = Gr\,Pr$; ambos números sólo son numéricamente semejantes cuando Pr es próximo a uno.

4.4.1 Flujo natural externo

En flujo natural externo, la superficie está rodeada por un fluido suficientemente grande para que exista una temperatura de fluido no perturbado T_∞. La potencia se calcula como

$$q = \bar{h}A(T_s - T_\infty), \qquad \bar{h} = \frac{\overline{\mathrm{Nu}}k}{L}. \tag{4.112}$$

Las propiedades se evalúan generalmente a $(T_s + T_\infty)/2$. En una pared vertical calentada, la capa límite puede ser laminar y después turbulenta, con transición característica alrededor de $\mathrm{Gr}_x \sim 10^9$ o $\mathrm{Ra}_x \sim 10^9$, según el criterio usado.

4.4.1.1 Pared vertical

La longitud característica es la altura L. Como correlación preferente de uso general para una placa vertical se adopta la forma de Churchill–Chu de rango amplio,

$$\overline{\mathrm{Nu}} = \left[0{,}825 + \frac{0{,}387\mathrm{Ra}^{1/6}}{\left[1 + (0{,}492/\mathrm{Pr})^{9/16}\right]^{8/27}} \right]^2, \qquad 10^{-1} \lesssim \mathrm{Ra} \lesssim 10^{12}. \tag{4.113}$$

Esta expresión reproduce razonablemente tanto el intervalo laminar como la zona turbulenta y evita cambios bruscos artificiales al cruzar la transición. Como forma laminar simple, útil para estimaciones rápidas dentro de su rango, puede emplearse

$$\overline{\mathrm{Nu}} = 0{,}68 + \frac{0{,}670\mathrm{Ra}^{1/4}}{\left[1 + (0{,}492/\mathrm{Pr})^{9/16}\right]^{4/9}}, \qquad \mathrm{Ra} \lesssim 10^9. \tag{4.114}$$

4.4.1.2 Pared inclinada

El ángulo θ se mide desde la horizontal ($\theta = 0°$ para placa horizontal y $\theta = 90°$ para placa vertical). La relación se aplica a la cara caliente orientada hacia arriba o a la cara fría orientada hacia abajo, con $\theta_{\mathrm{mín}} = 30°$.

La longitud característica es la longitud de la pared en el sentido del flujo. Para las caras indicadas como A en el formulario se usa

$$\mathrm{Ra}_\theta = \mathrm{Ra}\,\sin\theta, \tag{4.115}$$

y las mismas expresiones de pared vertical sustituyendo Ra por Ra_θ, con $\theta_{\min} = 30°$. Para las caras B debe consultarse bibliografía específica porque la orientación puede estabilizar o desestabilizar la capa límite.

4.4.1.3 Cilindro horizontal de gran longitud

La longitud característica es el diámetro D. Morgan propone

$$\overline{\mathrm{Nu}} = C\mathrm{Ra}^n. \tag{4.116}$$

Tabla 4.16: Constantes de Morgan para cilindro horizontal.

Rango de Ra	C	n
10^{-10}–10^{-2}	0,675	0,058
10^{-2}–10^{2}	1,02	0,148
10^{2}–10^{4}	0,85	0,188
10^{4}–10^{7}	0,48	0,25
10^{7}–10^{12}	0,125	0,333

Las correlaciones de Morgan son por tramos y pueden producir pequeños saltos de $\overline{\mathrm{Nu}}$ al cruzar las fronteras de Ra. Cuando se quiera una expresión continua de rango amplio para cilindro horizontal, es preferible usar Churchill–Chu. Churchill y Chu dan

$$\overline{\mathrm{Nu}}_D = \left[0{,}60 + \frac{0{,}387\mathrm{Ra}^{1/6}}{\left[1 + (0{,}559/\mathrm{Pr})^{9/16}\right]^{8/27}}\right]^2, \qquad \mathrm{Ra} < 10^{12}. \tag{4.117}$$

Un cilindro vertical de gran longitud puede tratarse como placa vertical cuando

$$D \geq \frac{35L}{\mathrm{Gr}^{1/4}}. \tag{4.118}$$

4.4.1.4 Esfera

La longitud característica es el diámetro D. Churchill propone

$$\overline{\mathrm{Nu}} = 2 + \frac{0{,}589\mathrm{Ra}^{1/4}}{\left[1 + (0{,}469/\mathrm{Pr})^{9/16}\right]^{4/9}}, \qquad \mathrm{Ra} < 10^{11}, \quad \mathrm{Pr} > 0{,}7. \tag{4.119}$$

4.4.1.5 Superficies horizontales

La longitud característica es

$$L = \frac{A}{p}, \tag{4.120}$$

donde A es el área de la superficie y p su perímetro. Debe distinguirse si la fuerza de flotación aleja el fluido de la superficie o lo estabiliza contra ella.

Configuracion estable: cara inferior caliente o cara superior fria; la flotacion mantiene el fluido estratificado contra la superficie y el intercambio es mas debil:

$$\overline{\mathrm{Nu}} = 0{,}27\mathrm{Ra}^{1/4}, \qquad 10^5 < \mathrm{Ra} < 10^{10}. \tag{4.121}$$

Configuracion inestable: cara superior caliente o cara inferior fria; la flotacion aleja el fluido de la superficie y favorece las plumas convectivas:

$$\overline{\mathrm{Nu}} = 0{,}54\mathrm{Ra}^{1/4}, \qquad 10^4 < \mathrm{Ra} < 10^7, \tag{4.122}$$

$$\overline{\mathrm{Nu}} = 0{,}15\mathrm{Ra}^{1/3}, \qquad 10^7 < \mathrm{Ra} < 10^{11}. \tag{4.123}$$

Las dos expresiones de la configuracion inestable son ajustes empiricos por tramos. Su pequena falta de coincidencia en $\mathrm{Ra} = 10^7$ no representa una discontinuidad fisica de la conveccion; cerca del cambio de rama debe interpretarse como incertidumbre de correlacion.

Ampliación. Los recintos confinados se estudian después de dominar superficies externas en convección natural.

4.4.2 Flujo natural confinado

En recintos cerrados existe una separación L entre pared caliente y fría. Se define

$$q = \bar{h}A(T_H - T_C), \qquad \bar{h} = \frac{\overline{\mathrm{Nu}}k}{L}, \qquad T_m = \frac{T_H + T_C}{2}. \tag{4.124}$$

En una capa horizontal calentada desde abajo, la convección de Rayleigh–Bénard se inicia alrededor de $\mathrm{Ra}_L \simeq 1708$. En huecos verticales calentados lateralmente y en recintos concéntricos existe circulación para cualquier diferencia de temperatura no nula; $\mathrm{Ra}_L \simeq 1000$ y $\mathrm{Ra}^* \simeq 100$ son umbrales de la rama esencialmente conductiva, para la que $k_{\mathrm{ef}} \simeq k$ y $\overline{\mathrm{Nu}} \simeq 1$, no umbrales de inicio del movimiento.

4.4.2.1 Recintos rectangulares horizontales

Para capas horizontales calentadas desde abajo se usa el umbral de Rayleigh–Bénard: aparece convección natural a partir de $\mathrm{Ra}_L \simeq 1708$, mientras que si la pared caliente está arriba el fluido queda establemente estratificado y domina la conducción, con $\overline{\mathrm{Nu}} = 1$. Como ampliación de comprobación frente a Çengel para recintos horizontales calentados desde abajo, pueden emplearse correlaciones de referencia como

$$\overline{\mathrm{Nu}} = 0{,}195\mathrm{Ra}_L^{1/4}, \qquad 10^4 < \mathrm{Ra}_L < 4 \cdot 10^5, \tag{4.125}$$

$$\overline{\mathrm{Nu}} = 0{,}068\mathrm{Ra}_L^{1/3}, \qquad 4 \cdot 10^5 < \mathrm{Ra}_L < 10^7, \tag{4.126}$$

para aire y gases de $0{,}5 < \mathrm{Pr} < 2$. Para líquidos o gases con $\mathrm{Ra}_L < 10^8$, la correlación de Hollands puede escribirse de forma compacta como

$$\overline{\mathrm{Nu}} = 1 + 1{,}44\left[1 - \frac{1708}{\mathrm{Ra}_L}\right]_+ + \left[\left(\frac{\mathrm{Ra}_L}{5830}\right)^{1/3} - 1\right]_+, \tag{4.127}$$

donde $[X]_+ = 0$ si $X < 0$. Estas expresiones no sustituyen a las correlaciones específicas para recintos inclinados o verticales, pero completan el caso horizontal que se mencionan de forma cualitativa. La forma de Hollands es la opción preferente cuando se necesita continuidad con el límite conductivo $Nu = 1$. Los ajustes de potencia anteriores son alternativas empíricas dentro de sus propios rangos; no deben promediarse con Hollands ni entre sí en las zonas de solapamiento.

4.4.2.2 Recinto hueco rectangular inclinado largo ($H/L > 10$)

Para $0 \le \theta < 60°$ y $0 < \mathrm{Ra} < 10^5$:

$$\overline{\mathrm{Nu}} = 1 + 1{,}44\left[1 - \frac{1708}{\mathrm{Ra}\cos\theta}\right]_+ \left[1 - \frac{1708[\sin(1{,}8\theta)]^{1{,}6}}{\mathrm{Ra}\cos\theta}\right]$$

$$+\left[\left(\frac{\mathrm{Ra}\cos\theta}{5830}\right)^{1/3}-1\right]_+. \quad (4.128)$$

Aquí $[X]_+ = \text{máx}(0,X)$. El término con coeficiente 1,44 multiplica al producto de los dos primeros corchetes, mientras que el tercer corchete se suma de forma independiente. Para $\theta = 60°$ y $0 < \mathrm{Ra} < 10^7$,

$$\overline{\mathrm{Nu}}_{60} = \text{máx}\{\mathrm{Nu}_1,\mathrm{Nu}_2\}, \quad (4.129)$$

con

$$\mathrm{Nu}_1 = \left\{1+\left[\frac{0{,}0936\mathrm{Ra}^{0,314}}{1+\dfrac{0{,}5}{\left[1+\left(\dfrac{\mathrm{Ra}}{3160}\right)^{20,6}\right]^{0,1}}}\right]^7\right\}^{1/7}, \quad (4.130)$$

$$\mathrm{Nu}_2 = \left(0{,}104+\frac{0{,}175}{H/L}\right)\mathrm{Ra}^{0,283}. \quad (4.131)$$

Para $60° < \theta < 90°$:

$$\overline{\mathrm{Nu}} = \frac{90-\theta}{30}\overline{\mathrm{Nu}}_{60}+\frac{\theta-60}{30}\overline{\mathrm{Nu}}_{90}. \quad (4.132)$$

Para $\theta = 90°$ y $10^3 < \mathrm{Ra} < 10^7$:

$$\overline{\mathrm{Nu}}_{90} = \text{máx}\{\mathrm{Nu}_1,\mathrm{Nu}_2,\mathrm{Nu}_3\}, \quad (4.133)$$

$$\mathrm{Nu}_1 = 0{,}0605\mathrm{Ra}^{1/3}, \quad (4.134)$$

$$\mathrm{Nu}_2 = \left\{1+\left[\frac{0{,}104\mathrm{Ra}^{0,293}}{1+(6310/\mathrm{Ra})^{1,36}}\right]^3\right\}^{1/3}, \quad (4.135)$$

$$\mathrm{Nu}_3 = 0{,}242\left(\frac{\mathrm{Ra}}{H/L}\right)^{0,272}. \quad (4.136)$$

Si $\mathrm{Ra} \leq 1000$, se adopta $\overline{\mathrm{Nu}}_{90} = 1$.

4.4.2.3 Recinto hueco vertical corto con superficies horizontales aisladas ($H/L < 10$)

Para $1 < H/L < 2$,

$$\overline{\mathrm{Nu}} = 0{,}18\left(\frac{\mathrm{Pr}}{0{,}2+\mathrm{Pr}}\mathrm{Ra}\right)^{0,29}, \quad (4.137)$$

con $10^{-3} < \mathrm{Pr} < 10^5$ y $10^3 < \mathrm{RaPr}/(0{,}2+\mathrm{Pr})$. Para $2 < H/L < 10$,

$$\overline{\mathrm{Nu}} = 0{,}22\left(\frac{\mathrm{Pr}}{0{,}2+\mathrm{Pr}}\mathrm{Ra}\right)^{0,28}\left(\frac{H}{L}\right)^{-1/4}, \quad (4.138)$$

con $\mathrm{Pr} < 10^5$ y $10^3 < \mathrm{Ra} < 10^{10}$.

4.4.2.4 Cilindros largos concéntricos

Las correlaciones de esta sección suponen ejes horizontales, superficies concéntricas e isotermas, longitud suficiente para despreciar los extremos y una orientación térmica expresamente indicada. El

límite $k_{\text{ef}} = k$ representa transporte global prácticamente conductivo; no demuestra que la velocidad del fluido sea exactamente nula.

La longitud característica es

$$L_c = \frac{D_o - D_i}{2}. \tag{4.139}$$

La potencia se expresa usando una conductividad efectiva:

$$q = \frac{\Delta T}{\ln(D_o/D_i)/(2\pi k_{\text{ef}} L_z)}. \tag{4.140}$$

Si $\text{Ra}^* < 100$, $k_{\text{ef}} = k$. Para $10^2 < \text{Ra}^* < 10^7$, $0{,}70 \le \text{Pr} \le 6000$, y propiedades evaluadas a $(T_i + T_o)/2$:

$$\frac{k_{\text{ef}}}{k} = 0{,}386 \left(\frac{\text{Pr}}{0{,}861 + \text{Pr}} \right)^{1/4} (\text{Ra}^*)^{1/4}, \tag{4.141}$$

Nota de coherencia Se adopta el coeficiente 0,386, que es el valor publicado en la correlación original de Raithby–Hollands y el reproducido por la bibliografía de referencia. El valor 0,368 que aparece en algunas transcripciones docentes debe interpretarse como una errata de copia.

$$\text{Ra}^* = \frac{[\ln(D_o/D_i)]^4}{L_c^3 \left(D_i^{-3/5} + D_o^{-3/5} \right)^5} \text{Ra}. \tag{4.142}$$

Si la correlación proporciona $k_{\text{ef}}/k < 1$, debe imponerse $k_{\text{ef}} = k$, porque la convección natural en el hueco no puede reducir el intercambio por debajo del límite conductivo estable.

4.4.2.5 Esferas concéntricas

La longitud característica es

$$L_c = \frac{D_o - D_i}{2}. \tag{4.143}$$

La potencia se expresa como

$$q = \frac{\Delta T}{L_c/(\pi D_o D_i k_{\text{ef}})}. \tag{4.144}$$

Para $10^2 < \text{Ra}^* < 10^4$, $0{,}70 \le \text{Pr} \le 4200$, y propiedades evaluadas a $(T_i + T_o)/2$:

$$\frac{k_{\text{ef}}}{k} = 0{,}74 \left(\frac{\text{Pr}}{0{,}861 + \text{Pr}} \right)^{1/4} (\text{Ra}^*)^{1/4}, \tag{4.145}$$

$$\text{Ra}^* = \frac{L_c \text{Ra}}{(D_o D_i)^4 \left(D_i^{-7/5} + D_o^{-7/5} \right)^5}. \tag{4.146}$$

También aquí debe imponerse $k_{\text{ef}} = k$ si la evaluación de la correlación arrojase $k_{\text{ef}}/k < 1$.

Profundización. Determine primero si domina la convección forzada o natural mediante Ri. Consulte combinaciones específicas sólo si ambos mecanismos son comparables.

4.5 Convección mixta

Núcleo. El núcleo operativo es: identificar geometría y orientación, calcular Re y Gr, formar $Ri = Gr/Re^2$, decidir qué mecanismo domina y, sólo si ambos son relevantes, calcular por separado $\overline{Nu}_f$ y $\overline{Nu}_n$, clasificar la interacción como ayudada, opuesta o transversal y aplicar la regla de combinación correspondiente.

La **convección mixta** aparece cuando existe simultáneamente un movimiento impuesto del fluido y un movimiento inducido por flotación, y ninguno de los dos puede despreciarse. El movimiento impuesto puede proceder de un ventilador, una bomba, el viento, una corriente incidente o cualquier otra causa externa. Su intensidad se caracteriza, para la longitud correspondiente, mediante el número de Reynolds,

$$\mathrm{Re}_L = \frac{u_\infty L}{\nu}. \tag{4.147}$$

La flotación, por su parte, nace de las variaciones de densidad producidas por la diferencia térmica en presencia de gravedad.

El objetivo docente de esta sección no es memorizar un catálogo nuevo de correlaciones, sino conectar los modelos ya estudiados de convección forzada y natural. El procedimiento consiste en construir dos *soluciones límite del mismo problema*: la que resultaría si sólo actuase el movimiento impuesto y la que resultaría si sólo actuase la flotación. Después se determina si realmente es necesario combinarlas.

4.5.1 Número de Richardson

El cociente de referencia es el número de Richardson:

$$\boxed{\mathrm{Ri} = \frac{\mathrm{Gr}}{\mathrm{Re}^2}.} \tag{4.148}$$

Si Gr y Re se forman con la misma longitud característica,

$$\mathrm{Ri} = \frac{g\beta|T_s - T_\infty|L}{u_\infty^2}. \tag{4.149}$$

Por tanto, Ri representa, en orden de magnitud, la razón entre los efectos de flotación y los efectos inerciales del movimiento impuesto. Si aumenta u_∞, Ri disminuye y gana importancia la convección forzada; si aumenta $|T_s - T_\infty|$, Ri aumenta y gana importancia la flotación.

En este curso se conserva el criterio histórico de ingeniería:

$$\mathrm{Ri} < 0{,}1 \quad \Rightarrow \quad \text{domina la convección forzada,} \tag{4.150}$$

$$0{,}1 \leq \mathrm{Ri} \leq 10 \quad \Rightarrow \quad \text{convección mixta,} \tag{4.151}$$

$$\mathrm{Ri} > 10 \quad \Rightarrow \quad \text{domina la convección natural.} \tag{4.152}$$

En los extremos puede adoptarse, como primera aproximación,

$$\mathrm{Ri} < 0{,}1 : \ \overline{Nu} \simeq \overline{Nu}_f, \qquad \mathrm{Ri} > 10 : \ \overline{Nu} \simeq \overline{Nu}_n. \tag{4.153}$$

Los valores 0,1 y 10 son **criterios orientativos de ingeniería**, no fronteras físicas exactas entre regímenes. Además, Re y Gr sólo pueden compararse mediante Ri si se han construido con una longitud característica coherente.

4.5.2 Orientación de los movimientos

La magnitud de Ri no indica si las dos contribuciones se ayudan o se oponen. Esa decisión exige observar la geometría, la gravedad y el sentido de la corriente impuesta.

Para una superficie vertical caliente, el fluido próximo a la pared suele ascender por flotación. Así, una corriente forzada ascendente es **ayudada** y una corriente forzada descendente es **opuesta**. Si la superficie está más fría que el fluido, el sentido de la flotación se invierte.

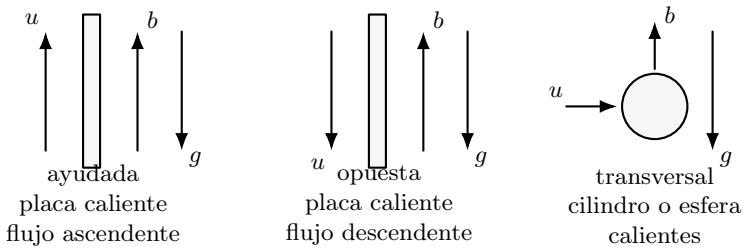


Figura 4.9: Clasificación geométrica de la convección mixta. u es el movimiento impuesto, b el movimiento de flotación y g la gravedad. Si el cuerpo está más frío que el fluido, el sentido de b se invierte.

Flujo ayudado o favorable. La corriente forzada y la flotación tienen aproximadamente el mismo sentido.

Flujo opuesto. La flotación actúa contra la corriente impuesta. Si ambas contribuciones son comparables pueden aparecer separación, recirculación o inversión local.

Interacción transversal. La flotación y el movimiento impuesto son aproximadamente perpendiculares, como ocurre con frecuencia en un cuerpo caliente sometido a una corriente horizontal.

4.5.3 Cálculo previo de las contribuciones puras

Antes de combinar nada se calculan dos Nusselt **medios** de referencia:

$\overline{Nu}_f$**.** Nusselt medio que se obtendría al aplicar al problema la correlación de **convección forzada pura** correspondiente a esa misma geometría.

$\overline{Nu}_n$**.** Nusselt medio que se obtendría al aplicar al problema la correlación de **convección natural pura** correspondiente.

No son dos caminos térmicos independientes. Son dos soluciones límite del mismo campo de flujo; por ello, en general,

$$h_{\text{mix}} \neq h_f + h_n. \tag{4.154}$$

Por ejemplo, para una placa vertical en flujo forzado laminar, cuando se cumplen sus hipótesis,

$$\overline{Nu}_f = 0{,}664\, Re_L^{1/2} Pr^{1/3}. \tag{4.155}$$

La contribución natural se obtiene con la correlación de placa vertical estudiada en la sección de convección natural, como Churchill–Chu cuando corresponda. La secuencia es: calcular $\overline{Nu}_f$, calcular $\overline{Nu}_n$, evaluar Ri y combinar sólo si el régimen es realmente mixto.

4.5.4 Reglas operativas de convección mixta externa

En la bibliografía se encuentran reglas del tipo

$$\overline{Nu}^{\,n} = \overline{Nu}_f^{\,n} \pm \overline{Nu}_n^{\,n}, \tag{4.156}$$

que deben interpretarse como aproximaciones de ingeniería y no como leyes universales. Churchill mostró para convección asistida que la combinación cúbica representa adecuadamente la interacción de las soluciones límite y que puede requerirse un valor límite Nu_0 [12]. Para el uso docente de este curso se adoptan las siguientes reglas históricas, ligadas además a la orientación del flujo y no sólo a la geometría [13].

Valor límite Nu_0

En estas reglas se emplean

$$Nu_0 = 0 \text{ para superficies planas,} \qquad Nu_0 = 0{,}3 \text{ para cilindros,} \qquad Nu_0 = 2 \text{ para esferas.} \tag{4.157}$$

Nu_0 es un **valor límite u offset asintótico asociado a la familia de correlaciones utilizada**. La combinación se aplica a los incrementos respecto de ese valor. En una esfera, $Nu_0 = 2$ coincide con el conocido límite de conducción estacionaria desde una esfera hacia un medio infinito; esa interpretación no debe extenderse sin matices a todas las geometrías o correlaciones.

Movimientos en el mismo sentido: regla cúbica ayudada

Para placa vertical, cilindro horizontal y esfera, cuando la corriente impuesta y la flotación se ayudan:

$$\boxed{(\overline{Nu} - Nu_0)^3 = (\overline{Nu}_f - Nu_0)^3 + (\overline{Nu}_n - Nu_0)^3.} \tag{4.158}$$

Movimientos en sentidos opuestos: regla cúbica opuesta

En el material histórico del curso se emplea

$$\boxed{(\overline{Nu} - Nu_0)^3 = \left|(\overline{Nu}_f - Nu_0)^3 - (\overline{Nu}_n - Nu_0)^3\right|.} \tag{4.159}$$

Esta relación es una **aproximación de ingeniería**. Cuando las contribuciones natural y forzada son comparables, el flujo opuesto puede presentar separación, recirculación o inversión local que una simple diferencia de Nusselt no reproduce. Para cálculos de diseño de alta precisión debe preferirse una correlación específica de convección mixta.

Placa horizontal con interacción transversal

Para la regla histórica utilizada en el curso:

$$\boxed{\overline{Nu}^{7/2} = \overline{Nu}_f^{7/2} + \overline{Nu}_n^{7/2}, \qquad \overline{Nu} = \left(\overline{Nu}_f^{7/2} + \overline{Nu}_n^{7/2}\right)^{2/7}.} \tag{4.160}$$

La formulación se entiende como una estimación para interacción transversal y debe acompañarse de las correlaciones puras apropiadas a la orientación térmica de la placa.

Cilindros y esferas con interacción transversal

Para un cilindro con corriente forzada cruzada respecto a su eje, o para una esfera, cuando la flotación es aproximadamente transversal al movimiento impuesto:

$$\boxed{(\overline{Nu} - Nu_0)^4 = (\overline{Nu}_f - Nu_0)^4 + (\overline{Nu}_n - Nu_0)^4.} \tag{4.161}$$

Una esfera no lleva por tanto "exponente 4" por ser esfera: si el movimiento impuesto es aproximadamente paralelo a la flotación, el caso es ayudado u opuesto y se utiliza la regla cúbica; si es transversal, se utiliza la regla de cuarta potencia.

Nusselt medio Las reglas anteriores se aplican a **valores medios** del número de Nusselt. No deben utilizarse sin justificación para obtener valores locales.

4.5.5 Aplicación por geometrías

4.5.5.1 Placa vertical

El procedimiento recomendado es:

1. calcular Re_L;
2. calcular Gr_L o Ra_L con la misma longitud L;
3. formar $Ri = Gr_L/Re_L^2$;
4. decidir si domina natural, forzada o si el régimen es mixto;
5. si es mixto, calcular $\overline{Nu}_f$ y $\overline{Nu}_n$;
6. identificar flujo ayudado u opuesto;
7. utilizar la regla cúbica correspondiente, con $Nu_0 = 0$;
8. calcular h y q.

4.5.5.2 Placas horizontales

La flotación es transversal al flujo forzado paralelo a la placa y depende de si la superficie térmicamente activa mira hacia arriba o hacia abajo. En el núcleo del curso se utiliza la regla de potencia 7/2 anterior, después de calcular por separado los Nusselt medios forzado y natural con las correlaciones apropiadas. Deben respetarse siempre la orientación térmica y los rangos de validez de ambas correlaciones puras.

4.5.5.3 Cilindros y esferas

Con corriente transversal a la flotación se utiliza la regla de cuarta potencia y el Nu_0 correspondiente: 0,3 para cilindros y 2 para esferas. Si la corriente forzada es aproximadamente paralela a la flotación, el caso se reclasifica como ayudado u opuesto y se usa la regla cúbica. En un cilindro, la regla transversal indicada presupone flujo forzado cruzado respecto a su eje.

4.5.6 Propiedades en las correlaciones mixtas

Las correlaciones puras natural y forzada no siempre prescriben las propiedades a la misma temperatura. Por ello, cada contribución debe calcularse siguiendo la prescripción de su propia correlación. Al convertir el Nusselt mixto en h debe declararse qué conductividad k se adopta. No existe una elección universal válida para todas las correlaciones. En los ejercicios históricos se mantiene la convención de propiedades con la que fueron resueltos y se indica expresamente cuando es relevante.

Ampliación. El flujo interno mixto se conserva como material de consulta. Para el núcleo de GITI basta reconocerlo con Ri_D y saber que, si la flotación es relevante, deben buscarse correlaciones específicas.

Ampliación – Convección mixta en flujo interno

En conductos verticales la flotación puede ayudar u oponerse al flujo medio. Un diagnóstico preliminar es

$$\mathrm{Ri}_D = \frac{\mathrm{Gr}_D}{\mathrm{Re}_D^2}, \qquad \mathrm{Gr}_D = \frac{g\beta|T_s - T_b|D_h^3}{\nu^2}. \tag{4.162}$$

Para un fluido calentado por una pared vertical, el movimiento de flotación junto a la pared tiende a ascender: el flujo medio ascendente es ayudado y el descendente opuesto. En enfriamiento ocurre lo contrario.

Tabla 4.17: Diagnóstico de orientación para convección mixta interna en conductos verticales.

Proceso	Flujo ascendente	Flujo descendente
Fluido calentado por la pared	ayudado	opuesto
Fluido enfriado por la pared	opuesto	ayudado

En tubos horizontales la flotación genera corrientes secundarias y estratificación transversal. Puede usarse como diagnóstico preliminar

$$\mathrm{Ri}_D = \frac{g\beta|T_s - T_b|D_h}{\bar{v}^2}. \tag{4.163}$$

Si Ri_D deja de ser pequeño, correlaciones puramente forzadas como Dittus–Boelter, Sieder–Tate o Gnielinski pueden ser insuficientes. Debe buscarse una correlación específica adecuada a geometría, orientación, régimen y condición térmica [14].

4.5.7 Procedimiento recomendado de cálculo

1. Identificar geometría y orientación respecto a la gravedad.
2. Elegir la longitud característica.
3. Evaluar las propiedades siguiendo la prescripción de cada correlación.
4. Calcular Re, Gr, Pr y, cuando corresponda, Ra.
5. Calcular $Ri = Gr/Re^2$.
6. Si $Ri < 0{,}1$, usar $\overline{Nu} \simeq \overline{Nu}_f$; si $Ri > 10$, usar $\overline{Nu} \simeq \overline{Nu}_n$; si $0{,}1 \leq Ri \leq 10$, continuar con el cálculo mixto.
7. Calcular por separado $\overline{Nu}_f$ y $\overline{Nu}_n$.
8. Determinar si la interacción es ayudada, opuesta o transversal.
9. Seleccionar la regla específica de combinación o, si existe, una correlación mixta más apropiada.
10. Obtener $\overline{Nu}_{\mathrm{mix}}$, h y q.
11. Comprobar rangos de Re, Ra y Pr, longitud característica, temperatura de propiedades y coherencia física del resultado.

4.5.8 Advertencias de coherencia física

- No sumar directamente $h_f + h_n$: ambas contribuciones modifican el mismo campo de velocidad y temperatura.
- No mezclar longitudes características al formar Ri.
- Comprobar los rangos de las correlaciones puras antes de combinarlas.
- Las reglas de combinación son aproximaciones empíricas de ingeniería, no leyes universales.
- Las reglas presentadas aquí se aplican a Nusselt medios.
- En flujo opuesto debe extremarse la cautela, especialmente cuando $\overline{Nu}_f$ y $\overline{Nu}_n$ son comparables.
- Cuando exista una correlación específica de convección mixta para la geometría y el régimen estudiados, debe preferirse frente a una regla genérica.
- Ri sirve fundamentalmente como diagnóstico de la importancia relativa de flotación e inercia; no sustituye la selección de la correlación.

Microejemplo guiado: seleccionar antes de calcular

Una corriente de aire a 20 °C incide transversalmente sobre un cilindro de $D = 20\,\text{mm}$, cuya superficie está a 80 °C. La velocidad es 5 m/s. Para mostrar el procedimiento, se toman a $T_f = 50\,°\text{C}$: $k = 0{,}028\,\text{W/(m K)}$, $\nu = 1{,}8 \cdot 10^{-5}\,\text{m}^2/\text{s}$, $Pr = 0{,}70$ y, para aire ideal, $\beta \simeq 1/T_f = 3{,}095 \times 10^{-3}/\text{K}$.

1. **Clasificación preliminar:** flujo externo sobre un cilindro aislado en flujo cruzado. Antes de despreciar la flotación se compara con la inercia usando la misma longitud D.
2. **Longitud:** $L_c = D$, no la longitud axial del cilindro.
3. **Régimen:** $Re_D = u_\infty D/\nu \simeq 5{,}6 \cdot 10^3$.
4. **Flotación frente a inercia:** $Gr_D = g\beta|T_s - T_\infty|D^3/\nu^2 \simeq 4{,}55 \cdot 10^4$ y $Ri_D = Gr_D/Re_D^2 \simeq 1{,}457 \cdot 10^{-3} \ll 0{,}1$. Por ello la correlación puramente forzada es adecuada.
5. **Correlación:** Churchill–Bernstein, porque es la opción principal para esta geometría y el caso cumple su rango básico.
6. **Resultado:** $Nu_D \simeq 38{,}7$ y $h = Nu_D k/D \simeq 54\,\text{W/(m}^2\,\text{K)}$.
7. **Comprobación:** el valor está en el orden de magnitud esperable para aire en convección forzada.

El aprendizaje principal no es el número final, sino la secuencia: geometría → longitud → propiedades → régimen → correlación → validación.

4.6 Criterios de revisión rápida y errores típicos

En convección, la correlación sólo es válida si se usan la longitud característica, la temperatura de propiedades y el intervalo de aplicación para los que fue propuesta. Antes de calcular h, debe decidirse si el flujo es externo o interno, forzado o natural, laminar o turbulento, desarrollado o de entrada, y si la superficie se aproxima mejor como isoterma o con flujo impuesto.

Comprobaciones mínimas en convección Calcular siempre los números adimensionales que gobiernan el problema antes de escoger la correlación: Re, Pr, Nu, Gr, Ra o Ri, según proceda. Si las propiedades dependen de la temperatura, usar la temperatura de película o de masa indicada por la correlación. En convección mixta, comprobar si los mecanismos ayudan o se oponen antes de combinar los Nusselt.

Los errores más frecuentes son usar el diámetro exterior cuando la correlación pide diámetro hidráulico, mezclar propiedades evaluadas a temperaturas distintas, aplicar una correlación turbulenta en régimen laminar, olvidar el desarrollo térmico de entrada en conductos cortos o aceptar un h cuyo orden de magnitud no corresponde al fluido ni al régimen. En convección mixta deben evitarse además estos fallos específicos:

1. usar sólo convección forzada sin comprobar Ri cuando existen gravedad y una diferencia térmica importante;
2. formar Ri con Re y Gr construidos con longitudes distintas;
3. suponer que toda esfera utiliza exponente 4, sin comprobar la orientación;
4. sumar directamente $\overline{Nu}_f + \overline{Nu}_n$ o $h_f + h_n$;
5. usar una regla para Nusselt medio como si proporcionase un valor local;
6. aplicar ciegamente la resta cúbica en flujo opuesto cuando las dos contribuciones son comparables;
7. combinar correlaciones puras sin comprobar sus rangos de validez.

Miniprácticas de decisión

Antes de abordar los problemas largos, resuelva sin calculadora:

1. ¿Qué longitud característica usaría para aire en flujo cruzado sobre un cilindro largo?
2. En un tubo corto, ¿qué debe comprobar antes de usar $Nu = 3{,}66$ o $4{,}36$?
3. Si una placa caliente horizontal mira hacia arriba, ¿la estratificación favorece o dificulta la convección natural?
4. Si $Ri = 0{,}02$, ¿qué mecanismo puede dominar? ¿Y si $Ri = 25$?
5. Un valor de $h = 8000\,\mathrm{W/(m^2\,K)}$ para aire a baja velocidad, ¿es razonable sin cambio de fase?

Respuestas breves Diámetro exterior; comprobar desarrollo hidrodinámico y térmico y la condición de pared; convección favorecida; forzada para $Ri = 0{,}02$ y natural para $Ri = 25$; el último valor exige revisar unidades, geometría o mecanismo físico.

4.7 Resumen operativo

Ruta mínima de convección

Caso	Secuencia de selección	Comprobación rápida
Flujo externo	Geometría $\to L_c \to Re, Pr \to Nu \to h$.	Verificar transición, rango y si se requiere valor local o medio.
Flujo interno	Definir D_h, desarrollo hidrodinámico/térmico y condición de pared.	Conservar el balance $q = \dot{m} c_p \Delta T_b$ y usar el área mojada correcta.
Convección natural	Elegir orientación, L_c y propiedades; calcular Ra.	El signo de $T_s - T_\infty$ y la orientación determinan estabilidad y movimiento.
Convección mixta	Calcular $Ri = Gr/Re^2$; si ambas contribuciones importan, obtener $\overline{Nu}_f$ y $\overline{Nu}_n$ e identificar la orientación.	Usar la regla de combinación correspondiente a ayudada, opuesta o transversal.
Propiedades y correlación	Evaluar a la temperatura prescrita y comprobar todos los rangos.	Obtener primero Nu y sólo después $h = Nu\,k/L_c$.

Antes de avanzar Debe justificar geometría, longitud característica, temperatura de propiedades y correlación. Una fórmula con unidades correctas no es válida si se usa fuera de rango.

4.8 Autoevaluación y asimilación

Responda primero sin consultar el capítulo. No se busca reproducir una fórmula de memoria, sino justificar el modelo, anticipar una tendencia y detectar resultados físicamente imposibles. Después compare con las respuestas orientativas.

Comprensión conceptual

C1. ¿Por qué el coeficiente h no es una propiedad del fluido como k, ρ o μ?

C2. ¿Por qué la temperatura de evaluación de propiedades debe ser la indicada por la correlación y no elegirse siempre como T_∞?

C3. ¿Qué condiciones físicas distinguen los valores $Nu = 3{,}66$ y $Nu = 4{,}36$ en flujo laminar interno completamente desarrollado?

C4. ¿Qué información aportan Ra en convección natural y Ri en convección mixta?

C5. Una esfera inicialmente fría se encuentra en aire más caliente. ¿En qué sentido actúa inicialmente la flotación junto a la esfera? Si la corriente forzada asciende, ¿la interacción es ayudada u opuesta? ¿Y si la corriente impuesta es horizontal?

Microejercicios de selección

M1. Una correlación da $Nu = 50$ para aire con $k = 0{,}026\ \mathrm{W/(m\,K)}$ y longitud característica $L = 0{,}50$ m. Calcule h.

M2. En un tubo, $\rho = 1\ \mathrm{kg/m^3}$, $v = 2$ m/s, $D = 0{,}05$ m y $\mu = 10^{-5}$ Pa s. Estime Re_D e identifique el régimen probable.

Detecta y corrige el error

E1. En flujo cruzado sobre un cilindro, la longitud característica correcta es siempre la longitud axial del cilindro.

E2. Basta con que Re esté dentro del intervalo de una correlación para que su uso sea válido.

Análisis de sensibilidad

S1. Para una placa plana en régimen laminar, $\overline{h} \propto L^{-1/2}$. ¿Cómo cambia $\overline{h}$ al duplicar L manteniendo el resto constante?

S2. Al aumentar la velocidad de un flujo forzado, ¿qué tendencias cabe esperar en Re, Nu, h y la pérdida de carga?

Respuestas orientativas **C1.** h resume el efecto conjunto de propiedades, velocidad, geometría, régimen, condición de pared y desarrollo de la capa límite. **C2.** Las propiedades pueden variar mucho con la temperatura y cada correlación fue ajustada usando una convención concreta; cambiarla rompe su consistencia. **C3.** $Nu = 3{,}66$ corresponde a pared a temperatura uniforme y $Nu = 4{,}36$ a flujo de calor superficial uniforme, para tubo circular y flujo completamente desarrollado. **C4.** Ra mide la intensidad de la flotación frente a difusión viscosa y térmica; Ri compara convección natural y forzada. **M1.** $h = Nu\,k/L = 2{,}6\ \mathrm{W/(m^2\,K)}$. **M2.** $Re_D = 10^4$; el flujo es probablemente turbulento, aunque debe verificarse también el desarrollo y el rango de la correlación elegida. **E1.** Para flujo cruzado la longitud característica es normalmente el diámetro exterior. **E2.** También deben cumplirse geometría, condición térmica, intervalo de Pr, tipo de promedio, desarrollo y temperatura de propiedades. **S1.** Se reduce a $1/\sqrt{2} \simeq 0{,}71$ del valor inicial. **S2.** En general aumentan Re, Nu y h, pero también crece la pérdida de carga y la potencia de bombeo.

Criterio de dominio La habilidad esencial no es memorizar muchas correlaciones, sino justificar seis decisiones: geometría, mecanismo, régimen, longitud característica, propiedades y rango de validez.

Esta parte final del capítulo reúne ejercicios aplicados de convección y de transmisión de calor combinada. Se organiza igual que el resto del libro: primero se presentan los enunciados sin resolver, para facilitar el planteamiento autónomo, y después se desarrollan las soluciones con una secuencia uniforme de hipótesis, modelo físico, red de resistencias, ecuaciones, cálculo e interpretación.

Cómo usar este capítulo Antes de consultar cada solución conviene identificar la geometría, el mecanismo dominante, las temperaturas de referencia, la longitud característica, el área de intercambio y el criterio de régimen. En las soluciones se mantiene explícitamente la red de resistencias cuando tiene sentido físico, y se indica la excepción cuando el ejercicio se basa sólo en correlaciones locales o medias sin nodos térmicos discretos.

4.9 Ejercicios

Los enunciados siguientes se recogen sin resolución. Su finalidad es que el lector intente primero el planteamiento físico, la selección de correlaciones y el balance energético antes de consultar la solución desarrollada.

Cómo usar las fichas de los problemas La etiqueta de **nivel** indica la carga de modelado, no la longitud del cálculo. Las **competencias** señalan qué se practica y el campo **propiedades** aclara si los valores están dados o deben buscarse e interpolarse. En los problemas avanzados se ofrecen tres pistas graduadas: consulte primero sólo la pista 1; abra las siguientes únicamente si sigue bloqueado. Las respuestas breves deben usarse para comprobar el resultado después de resolver, no como sustituto del planteamiento.

Convección.

Flujo externo.

Ejercicio 1. Techo plano de una cabaña en flujo externo.

Nivel: Intermedio | **Competencias:** flujo externo, transición y correlación | **Propiedades:** buscar/interpolar

El viento sopla con una velocidad de 8 m/s sobre una cabaña con el techo plano y cuadrado de 5 m de lado, que forma parte de una estación de investigación de la Antártida. Si la temperatura ambiente es de unos −23 °C, calcular el coeficiente de convección medio y la potencia térmica evacuada por el techo si su temperatura exterior es de −21 °C. Tomar $\mathrm{Re}_c = 5 \cdot 10^5$.

Ejercicio 2. Calentadores discretos sobre una placa plana isoterma.

Nivel: Avanzado | **Competencias:** coeficiente local, discretización y máximo | **Propiedades:** buscar/interpolar

Una placa plana se mantiene a una temperatura superficial uniforme de 230 °C mediante el uso de calentadores eléctricos de 50 mm de longitud y controlados de forma independiente, cuando se la hace incidir paralelamente aire atmosférico a 25 °C y 60 m/s. La placa es suficientemente larga aguas abajo para que su extremo final no altere la capa límite en los calentadores considerados y tiene 1 m de ancha, perpendicularmente al plano del dibujo. Los calentadores son contiguos, sin huecos, y se numeran desde el borde de ataque $x = 0$: el calentador i ocupa $(i-1)\,50\,\mathrm{mm} \le x \le i\,50\,\mathrm{mm}$. Tomar $\mathrm{Re}_c = 5 \cdot 10^5$. Se pide: En el planteamiento general mantenga Re_c simbólico, con $x_c = Re_c \nu / u_\infty$, y aplique por tramos la correlación local laminar para $x < x_c$ y la turbulenta para $x > x_c$. El valor 5×10^5 es la referencia numérica adoptada para esta placa.

a) ¿En qué calentador la potencia eléctrica es máxima?

b) ¿Cuál es el valor de dicha potencia?

Ejercicio 3. Obtención de Nusselt medio a partir de correlaciones locales.

Nivel: Intermedio | **Competencias:** integración y Nusselt medio | **Propiedades:** simbólicas

Sea una placa plana de longitud L y temperatura superficial uniforme sometida a un flujo paralelo. Partiendo de las expresiones del Nusselt local $\mathrm{Nu}(x)$, determinar el Nusselt medio sobre la placa en los siguientes supuestos:

a) El flujo sobre la placa es laminar.

b) El flujo sobre la placa es mixto.

c) Repetir los apartados anteriores suponiendo que el flujo de calor superficial es uniforme.

Ejercicio 4. Lámina deslizante con rozamiento, convección forzada y radiación.

Nivel: Avanzado | **Competencias:** rozamiento, conducción, convección y radiación | **Propiedades:** buscar/interpolar

Una lámina plana muy ancha, en la dimensión perpendicular al dibujo, de longitud $L = 10\,\mathrm{m}$ y espesor $e = 20\,\mathrm{mm}$ desliza con una velocidad $v = 2\,\mathrm{m/s}$ sobre otra superficie fija y de conductividad nula. Entre ambas existe un coeficiente de rozamiento $\lambda = 0{,}1$. La temperatura del recinto de grandes dimensiones y del aire en contacto con la lámina es 37 °C. Las propiedades del material de la lámina son: densidad $\rho = 3000\,\mathrm{kg/m^3}$ y conductividad $k = 0{,}5\,\mathrm{W/(m\,K)}$. La superficie superior de la chapa se comporta como un cuerpo gris difuso con emisividad $\varepsilon = 0{,}7$. Considerar el Reynolds crítico para la lámina plana igual a 10^6. Despreciar la convección natural de la lámina con el aire exterior. Calcular las temperaturas de ambas caras de la lámina.

Ejercicio 5. Cilindro calentado internamente en flujo cruzado.

Nivel: Avanzado | **Competencias:** rangos de correlación y comparación experimental | **Propiedades:** buscar/interpolar

Un cilindro de 12,7 mm de diámetro y 94 mm de longitud es sometido a una corriente transversal de aire a 10 m/s y 26,2 °C. Internamente, el cilindro dispone de una resistencia eléctrica que genera una potencia de 46 W, de la cual el 15 % se disipa por radiación. Los extremos del cilindro están térmicamente aislados. Supuesto que la temperatura superficial del cilindro es uniforme y de valor 128,4 °C, calcular:

a) El coeficiente de convección real.

b) Los coeficientes de convección por las correlaciones de Churchill–Bernstein, Nakai–Okazaki, Hilpert y Zhukauskas.

Flujo interno.

Ejercicio 6. Enfriamiento de aceite en tubo con pared isoterma.

Nivel: Intermedio | **Competencias:** flujo interno, desarrollo térmico y balance | **Propiedades:** buscar/interpolar

Un flujo de aceite SAE 50, aceite de motor, pasa a razón de $\dot{m} = 0{,}007\,\mathrm{kg/s}$ a través de un tubo de 10 mm de diámetro y 1,5 m de longitud. La temperatura de la pared del tubo puede suponerse uniforme en 27 °C, siendo la temperatura de masa de entrada del aceite de 104 °C. Calcular la temperatura de masa de la salida, el coeficiente de convección medio y la potencia térmica transmitida. El factor de fricción vale $f = 0{,}02$.

Ejercicio 7. Calentamiento de aire en conducto rectangular.

Nivel: Intermedio | **Competencias:** conducto no circular, diámetro hidráulico y balance | **Propiedades:** buscar/interpolar

Una corriente de aire ambiente fluye a razón de $\dot{m} = 0{,}11\,\mathrm{kg/s}$ a través de un conducto rectangular de 0,5 m de alto, 10 mm de profundidad perpendicular al dibujo y 0,8 m de largo, que forma parte de un intercambiador de calor tipo carcasa. Las paredes están a 327 °C y la temperatura de masa de la corriente incidente es de 127 °C. Sabiendo que el factor de fricción vale $f = 0{,}0267$, determinar la temperatura media de masa en la salida, el coeficiente de convección medio y la potencia intercambiada.

Ejercicio 8. Conducto cuadrado con convección interna y externa.

Nivel: Avanzado | **Competencias:** convección interna/externa y conductancia global | **Propiedades:** buscar/interpolar

Sea un conducto de 7 m de longitud, sección cuadrada con 100 mm de lado, espesor de pared despreciable y temperatura superficial uniforme. Internamente transporta un fluido 1 con un Reynolds de 700. Suponga el flujo interno hidrodinámica y térmicamente desarrollado. Externamente le incide de forma perpendicular un fluido 2 a una velocidad uniforme de corriente libre de 10 m/s. Se fija una cara plana del conducto a barlovento y se toma como longitud característica el lado exterior normal a la corriente. La aplicación de Hilpert a la sección cuadrada se usa como aproximación docente formal con las propiedades efectivas suministradas, no como validación universal para cualquier orientación o fluido real. Se pide:

a) El producto $\overline{U}A$.

b) Ídem suponiendo que el conducto tiene un espesor de pared de 5 mm, manteniendo la dimensión interior de 100 mm, con una conductividad de $80\,\mathrm{W/(m\,K)}$.

Considerar constantes las propiedades de ambos fluidos:

$$\begin{aligned} &\text{Fluido 1:} \quad k_1 = 1\,\mathrm{W/(m\,K)}, \\ &\text{Fluido 2:} \quad k_2 = 10\,\mathrm{W/(m\,K)}, \quad \nu_2 = 1\times10^{-4}\,\mathrm{m^2/s}, \quad \mathrm{Pr}_2 = 1. \end{aligned}$$

Convección natural y mixta. En adelante, los ejercicios que involucren convección forzada deberán contemplar la posibilidad de que exista también convección natural.

Ejercicio 9. Pérdida convectiva en la cámara de aire de un colector inclinado.

Nivel: Intermedio | **Competencias:** cavidad inclinada y convección natural | **Propiedades:** buscar/interpolar

Considérese un colector solar de placa plana de 2 m de longitud y 1 m de ancho que está inclinado 60° respecto a la horizontal. Dispone de una cubierta de vidrio, separada de la placa absorbedora 2 cm, estando el espacio entre ambas relleno de aire a 1 bar de presión absoluta. Calcular la pérdida de calor por convección si las temperaturas de la cubierta y de la placa son 32 °C y 62 °C, respectivamente. Suponer despreciable la pérdida por los cantos del colector.

Ejercicio 10. Cámara de aire entre paredes con convección y radiación.

Nivel: Avanzado | **Competencias:** cavidad, radiación y comienzo de convección | **Propiedades:** dadas

Una pared compuesta de 3 m de altura tiene una cámara de aire, a presión de 1 bar, de 10 cm de ancha. Las caras interiores de las paredes presentan temperaturas de 25 °C y 35 °C, y emisividad $\varepsilon = 0{,}91$, comportándose como superficies grises difusas.

Despreciando el calor transmitido por los extremos superior e inferior del hueco, calcular:

a) La potencia térmica total que se transmite entre ambas paredes.

b) La diferencia de temperatura para la que la correlación abandona la rama esencialmente conductiva, convencionalmente $\overline{Nu} = 1$ o $Ra_L \simeq 1000$; no se interpreta como inicio absoluto del movimiento. Suponer que la temperatura media del aire dentro de la cámara permanece constante.

c) El ancho de la cámara que sitúa las condiciones iniciales en ese mismo cruce convencional de la rama esencialmente conductiva.

d) La potencia térmica transmitida si la cámara en su estado inicial se rellena de un aislante sólido de conductividad $0{,}046\,\mathrm{W/(m\,K)}$.

Ejercicio 11. Disipación de una tarjeta vertical con convección natural y mixta.

Nivel: Avanzado | **Competencias:** convección mixta, Richardson y orientación | **Propiedades:** buscar/interpolar

Considérese una tarjeta de ordenador de 175 mm de altura y 250 mm de longitud dispuesta en posición vertical a una temperatura más o menos uniforme de 67 °C, en contacto con aire a 20 °C por ambas caras. Estimar la potencia térmica que es posible disipar suponiendo las siguientes condiciones:

a) Únicamente convección natural.

b) Corriente forzada ascendente a velocidades de 0,1 m/s, 0,6 m/s y 5 m/s.

c) Repetir el apartado anterior considerando sentido descendente de la corriente forzada.

Ejercicio 12. Calentamiento transitorio de una esfera de acero.

Nivel: Avanzado | **Competencias:** transitorio, convección natural/forzada y radiación | **Propiedades:** buscar/interpolar

Una esfera maciza de acero de 0,5 m de diámetro se somete a un proceso de calentamiento desde una temperatura inicial de −10 °C hasta 51 °C en un recinto de grandes dimensiones con aire a 100 °C y paredes a 150 °C. La emisividad de la superficie de la esfera vale $\varepsilon = 0{,}4$ y la de las paredes $\varepsilon_p = 0{,}87$, ambas consideradas grises difusas. Se pide:

a) La energía térmica absorbida por la esfera, supuesto que las temperaturas inicial y final son uniformes.

b) El tiempo de calentamiento de la esfera en los siguientes supuestos: ausencia de movimiento forzado del aire; corriente forzada ascendente de aire a 1,5 m/s; corriente forzada horizontal de aire a 1,5 m/s.

Usar para el acero $\rho = 7830\,\mathrm{kg/m^3}$, $c = 434\,\mathrm{J/(kg\,K)}$ y $k = 64\,\mathrm{W/(m\,K)}$.

Ejercicio 13. Colector solar plano con cubierta de vidrio.

Nivel: Avanzado | **Competencias:** colector solar, mecanismos combinados y rendimiento | **Propiedades:** buscar/interpolar

Un colector solar plano está formado por varios tubos en paralelo dentro de una carcasa, recubierta por arriba por un vidrio, llamada cubierta. El colector está dispuesto horizontalmente y recibe por el lado del vidrio una radiación solar total incidente, difusa y directa perpendicularmente, a razón de $700\,\mathrm{W/m^2}$. El vidrio de la cubierta transmite el 88 % y absorbe el 5 % de la radiación solar incidente, y tiene una emisividad de 0,9. Las dimensiones del colector solar son de 2 m × 1,2 m, vistas por la superficie

incidente solar. La temperatura de la cubierta es 35 °C y la del aire ambiente 25 °C. La velocidad del viento es 30 km/h. La temperatura del cielo vale −40 °C. El agua entra a los tubos del colector solar a razón de 1 kg/min. Tomar Reynolds crítico para convección forzada $5 \cdot 10^5$. Calcular:

a) La pérdida de calor total del colector, considerando que la parte trasera y los cantos disponen de una gruesa capa de aislante. Considerar despreciable la convección natural frente a la forzada.

b) El rendimiento del colector, definido como el cociente entre el calor que se lleva el agua y el calor solar incidente.

c) El salto térmico del agua en el colector.

Ejercicio 14. Agua en anillo entre tubos concéntricos.

Nivel: Avanzado | **Competencias:** anillo, diámetro hidráulico y propiedades variables | **Propiedades:** buscar/interpolar

Por el espacio entre dos tubos concéntricos de diámetros 0,025 m y 0,1 m fluye agua a razón de 0,05 kg/s. El agua entra a 20 °C y sale a 80 °C. La temperatura del tubo interior es de 120 °C; el tubo de mayor diámetro está aislado térmicamente por el exterior. Calcular la longitud de los tubos y la potencia térmica intercambiada.

Ejercicio 15. Chimenea con humos, radiación solar y convección natural.

Nivel: Avanzado | **Competencias:** balance no lineal, radiación solar y convección natural | **Propiedades:** buscar/interpolar

Una chimenea de 10 m de altura y 1 m de diámetro exterior descarga 0,125 kg/s de humos, que experimentan un descenso de temperatura de 30 °C a su paso por ella. El calor específico a presión constante de los humos vale 1600 J/(kg K). Un día sin viento, la temperatura del aire circundante es de 33 °C, igual a la temperatura de todo el entorno radiante. La radiación solar total incidente sobre la superficie exterior de la chimenea es de 500 W/m^2, y tanto la emisividad como la absortancia solar de la superficie externa valen 0,9. Obtener la temperatura de la superficie exterior de la chimenea, que se asume uniforme.

Transmisión de calor combinada.

Ejercicio 16. Pared compuesta con cámara de aire y radiación entre superficies.

Nivel: Avanzado | **Competencias:** pared compuesta, cavidad y radiación | **Propiedades:** dadas

Una pared de 3 m de altura está constituida por dos capas de ladrillo de 5 cm de espesor y conductividad 0,93 W/(m K), y una cámara de aire de 10 cm entre ambas. La pared de la izquierda forma parte de un recinto donde el aire T_i y las paredes T_a están a 21 °C; la pared derecha comunica con otro recinto donde aire T_e y paredes T_b están a 2 °C. Suponiendo que la contribución al intercambio radiante de los tramos superior e inferior de la cámara de aire es despreciable, calcular la potencia térmica transmitida entre ambos recintos trabajando por 1 m de profundidad perpendicular al dibujo y despreciando los efectos de borde, así como las temperaturas T_1, T_2, T_3 y T_4. Cada recinto se idealiza con sección 3 m × 3 m: las superficies de pared 1 y 4 tienen $A_1 = A_4 = 3\,\text{m}^2$ por metro de profundidad, y el resto de paredes agrupadas de cada recinto tiene $A_a = A_b = 9\,\text{m}^2$. Se toma $F_{1a} = F_{4b} = 1$ y la reciprocidad fija $A_a F_{a1} = A_1$ y $A_b F_{b4} = A_4$. Tomar para las superficies 2 y 3 una emisividad de 0,91, y 0,85 para el resto, a, 1, 4 y b. Todas ellas pueden considerarse grises difusas opacas. Tomar para el aire propiedades constantes, dadas a 280 K: $k = 0{,}0255$ W/(m K), $\rho = 1{,}265$ kg/m^3, $c_p = 1008$ J/(kg K), $\nu = 1{,}391 \times 10^{-5}$ m^2/s y Pr = 0,69.

Ejercicio 17. Encapsulado esférico en cámara criogénica.

Nivel: Intermedio | **Competencias:** convección efectiva, radiación y balance | **Propiedades:** dadas

Basado en el ejercicio 6 de conducción. Un encapsulado esférico de 100 mm de diámetro, conteniendo componentes electrónicos, se sitúa dentro de una cámara de grandes dimensiones donde un medio gaseoso criogénico está a −196 °C y las paredes a −198 °C. La operación correcta de los componentes limita su temperatura máxima a 80 °C. Puede suponerse que la resistencia térmica del encapsulado es nula. La superficie externa del encapsulado es gris difusa con emisividad 0,3. El intercambio convectivo con el medio se caracteriza mediante $h_c = 0{,}98\,|T_s - T_\infty|^{1/3}$ en $\mathrm{W/(m^2\,K)}$. La correlación es una caracterización efectiva y no presupone aire atmosférico a esa temperatura. Para la temperatura máxima de la cápsula, se pide:

a) Los coeficientes de transmisión de calor por radiación y convección.

b) La potencia térmica total neta evacuada por la cápsula.

Pistas graduadas para los problemas avanzados

Use una pista cada vez

Ej. 2

Pista 1 – modelo. Superposición o tratamiento por tramos de placas con longitud inicial no calentada.

Pista 2 – ecuación. Integre el coeficiente local sobre la longitud de cada calentador y compare la potencia necesaria en cada tramo, incluyendo la transición.

Pista 3 – control. La suma de aportaciones debe reproducir la potencia total y cada correlación debe usar la longitud efectiva que le corresponde.

Ej. 4

Pista 1 – modelo. Balance superficial no lineal con disipación viscosa, convección forzada y radiación.

Pista 2 – ecuación. La potencia de rozamiento entra por la cara inferior; conecte ambas caras por conducción y cierre en la cara superior con convección más radiación.

Pista 3 – control. La potencia generada o aportada debe igualar la suma de pérdidas y la solución térmica debe respetar los rangos de la correlación convectiva.

Ej. 5

Pista 1 – modelo. Balance de generación con convección forzada en flujo cruzado alrededor de cilindro.

Pista 2 – ecuación. Obtenga primero $h_{\mathrm{real}} = q_{\mathrm{conv}}/[A(T_s - T_\infty)]$ y después evalúe cada correlación sólo si se cumple su rango.

Pista 3 – control. Compruebe la correlación con Re_D y Pr, y que $hA(T_s - T_\infty)$ iguala la generación total.

Ej. 8

Pista 1 – modelo. Red de resistencias con coeficientes convectivos obtenidos de correlaciones internas y externas.

Pista 2 – ecuación. Calcule las conductancias interna y externa con sus áreas correctas y combínelas con la conducción de la pared para obtener UA.

Pista 3 – control. Los flujos calculados por ambas caras deben ser iguales y las temperaturas de pared deben quedar entre las de los fluidos.

Ej. 10

Pista 1 – modelo. Coeficiente equivalente de cavidad más intercambio radiativo linealizado o exacto.

Pista 2 – ecuación. Sume convección natural en la cámara y radiación entre placas; para el inicio de convección imponga el Rayleigh crítico.

Pista 3 – control. La potencia total debe ser la suma de ambas contribuciones y los coeficientes equivalentes deben producir el mismo flujo que las expresiones originales.

Ej. 11 **Pista 1 – modelo.** Calcule $Ri = Gr/Re^2$ para decidir primero qué mecanismo domina.

Pista 2 – orientación. Si el régimen es mixto, obtenga por separado $\overline{Nu}_f$ y $\overline{Nu}_n$ y determine si la corriente impuesta ayuda o se opone a la flotación.

Pista 3 – control. Use la regla cúbica correspondiente sólo después de comprobar los rangos de las correlaciones puras y la coherencia de la longitud característica.

Ej. 12 **Pista 1 – modelo.** Compruebe primero la validez de capacidad concentrada con $L_c = V/A$.

Pista 2 – convección. Calcule las contribuciones natural y forzada, evalúe Ri e identifique la orientación: la esfera inicialmente fría invierte el sentido de la flotación respecto al caso de una esfera caliente.

Pista 3 – control. Escoja la regla cúbica si los movimientos son paralelos/opuestos y la de cuarta potencia si son transversales; después combine con la radiación y verifique $Bi \leq 0{,}1$ y evolución monótona.

Ej. 13 **Pista 1 – modelo.** Balance de colector con red de resistencias y mecanismos convectivos/-radiativos acoplados.

Pista 2 – ecuación. El balance solar del vidrio separa transmisión, absorción y pérdidas; la potencia útil al agua es la transmitida menos las pérdidas del colector.

Pista 3 – control. La energía solar absorbida debe igualar calor útil más pérdidas; todas las temperaturas internas deben quedar en un orden físicamente razonable.

Ej. 14 **Pista 1 – modelo.** Convección interna en conducto anular, con correlación y área mojada adecuadas.

Pista 2 – ecuación. Use $D_h = D_o - D_i$ para el anillo, evalúe propiedades a una temperatura media e integre la ecuación de calentamiento con pared isoterma.

Pista 3 – control. Verifique la definición de D_h, el rango de Reynolds y que la potencia por convección coincide con el aumento de entalpía del agua.

Ej. 15 **Pista 1 – modelo.** Balance térmico no lineal con convección interna, conducción, absorción solar, convección natural y radiación.

Pista 2 – ecuación. La temperatura superficial satisface un balance no lineal entre calor de los humos, absorción solar, convección natural y radiación.

Pista 3 – control. La suma de entradas debe igualar la de salidas y cada correlación debe evaluarse con su temperatura y longitud característica correctas.

Ej. 16 **Pista 1 – modelo.** Red en serie de capas sólidas y una cámara con convección natural confinada más radiación.

Pista 2 – ecuación. Construya una red desde cada ambiente hasta la cámara y modele la cámara con convección natural y radiación en paralelo.

Pista 3 – control. El mismo flujo debe atravesar toda la pared, las temperaturas deben ser monótonas y la resistencia equivalente de la cámara debe reproducir ambas contribuciones.

Respuestas breves de comprobación

Respuestas orientativas Consulte este bloque sólo después de completar el planteamiento. Se da el resultado final y un control físico; la solución desarrollada permanece en la sección siguiente.

Ej. 1 **Resultado.** Chilton–Colburn: $\bar{h} = 21{,}6\,\mathrm{W/(m^2\,K)}$ y $q = 1082\,\mathrm{W}$; Whitaker: $\bar{h} = 22{,}4\,\mathrm{W/(m^2\,K)}$, $q = 1122\,\mathrm{W}$.

Control. Compruebe temperatura de película, rango de Pr y Re, unidades de h y que las correlaciones alternativas den resultados del mismo orden.

Ej. 2 **Resultado.** El máximo aparece en el calentador 6; $\bar{h}_6 = 138\,\mathrm{W/(m^2\,K)}$ y $q_{\mathrm{máx}} = 1414\,\mathrm{W}$.

Control. La suma de aportaciones debe reproducir la potencia total y cada correlación debe usar la longitud efectiva que le corresponde.

Ej. 3 **Resultado.** Para placa laminar isoterma, $\overline{Nu}_L = 0{,}664 Re_L^{1/2} Pr^{1/3}$; para flujo superficial uniforme, el coeficiente es 0,906 (media aritmética de h_x; para obtener $\overline{T}_s$ úsese $\bar{h} = 1{,}5 h_L$ en régimen laminar). En régimen mixto se suman los tramos laminar y turbulento integrados.

Control. El resultado medio debe ser coherente con la tendencia local y conservar las unidades al pasar de Nusselt a h.

Ej. 4 **Resultado.** $\overline{T}_{s,\mathrm{sup}} = 52{,}6\,^\circ\mathrm{C}$ y $\overline{T}_{s,\mathrm{inf}} = 57{,}3\,^\circ\mathrm{C}$.

Control. La potencia generada o aportada debe igualar la suma de pérdidas y la solución térmica debe respetar los rangos de la correlación convectiva.

Ej. 5 **Resultado.** $h_{\mathrm{real}} = 102{,}0\,\mathrm{W/(m^2\,K)}$; Churchill 95,3; Hilpert 87,5; Zhukauskas 103,8; Nakai no es aplicable.

Control. Compruebe la correlación con Re_D y Pr, y que $hA(T_s - T_\infty)$ iguala la generación total.

Ej. 6 **Resultado.**

$$T_{b,s} = 88{,}5\,^\circ\mathrm{C}, \qquad \bar{h} = 73{,}2\,\mathrm{W/(m^2\,K)}, \qquad q \simeq 238\,\mathrm{W}.$$

Control. La temperatura de propiedades debe ser coherente con la solución final, la salida debe quedar entre entrada y pared y el balance de energía debe cerrar.

Ej. 7 **Resultado.** $T_{b,s} = 207{,}3\,^\circ\mathrm{C}$, $h = 70{,}4\,\mathrm{W/(m^2\,K)}$ y $q = 8983\,\mathrm{W}$.

Control. Verifique D_h, Reynolds, longitud de entrada y que $q = \dot{m} c_p (T_{b,s} - T_{b,e})$ coincide con la transferencia calculada por $hA\Delta T$.

Ej. 8 **Resultado.** $\overline{U}A = 83{,}0\,\mathrm{W/K}$ con el modelo detallado y $82{,}8\,\mathrm{W/K}$ con la aproximación.

Control. Los flujos calculados por ambas caras deben ser iguales y las temperaturas de pared deben quedar entre las de los fluidos.

Ej. 9 **Resultado.** $q \simeq 160\,\mathrm{W}$.

Control. Compruebe el rango de la correlación, que $\mathrm{Nu} \geq 1$ cuando hay convección y que el flujo va de la placa caliente a la fría.

Ej. 10 **Resultado.** $q''_{\mathrm{tot}} = 67{,}87\,\mathrm{W/m^2}$, $\Delta T_{\mathrm{inicio}} \simeq 0{,}011\,\mathrm{K}$, $L_{\mathrm{inicio}} = 10\,\mathrm{mm}$ y $q'' = 4{,}60\,\mathrm{W/m^2}$.

Control. La potencia total debe ser la suma de ambas contribuciones y los coeficientes equivalentes deben producir el mismo flujo que las expresiones originales.

Ej. 11 **Resultado.** Con las propiedades impresas, $q_{\mathrm{natural}} = 22{,}37\,\mathrm{W}$. Para $u = 0{,}6\,\mathrm{m/s}$, la regla cúbica proporciona aproximadamente 33,66 W en sentido ayudado y 25,07 W en sentido opuesto. Para $u = 0{,}1\,\mathrm{m/s}$ domina la convección natural y para $u = 5\,\mathrm{m/s}$ domina la forzada, con $q \simeq 86{,}55\,\mathrm{W}$.

Control. Compruebe primero $\mathrm{Ri} = \mathrm{Gr}/\mathrm{Re}^2$, después la orientación y, sólo cuando ambas contribuciones sean relevantes, aplique la regla de combinación correspondiente.

Ej. 12 **Resultado.** $Q = 13{,}567\,\mathrm{MJ}$; tiempos linealizados: 5,595 h sin forzado, 4,417 h con flujo ascendente y 4,20 h con flujo horizontal. La integración no lineal de control da 5,560 h y 4,169 h para los casos natural y horizontal.

Control. Debe cumplirse $Bi \leq 0{,}1$, la evolución debe ser monótona y el error de linealización debe quedar cuantificado.

Ej. 13 **Resultado.** $q_{\mathrm{pérdidas}} = 1287\,\mathrm{W}$, $\eta = 0{,}234$ (23,4 por ciento) y $\Delta T_{\mathrm{agua}} = 5{,}65\,^\circ\mathrm{C}$.

Control. La energía solar absorbida debe igualar calor útil más pérdidas; todas las temperaturas internas deben quedar en un orden físicamente razonable.

Ej. 14 **Resultado.** $L \simeq 35{,}1\,\mathrm{m}$ con la aproximación plenamente desarrollada y $q \simeq 12\,543\,\mathrm{W}$.

Control. Verifique $L_h \simeq 3{,}49\,\mathrm{m}$, $L_t \simeq 12{,}39\,\mathrm{m}$, la definición de D_h y el balance de entalpía.

Ej. 15 **Resultado.** $T_s \simeq 86{,}1\,^{\circ}\mathrm{C}$.

Control. La suma de entradas debe igualar la de salidas y cada correlación debe evaluarse con su temperatura y longitud característica correctas.

Ej. 16 **Resultado.** $q = 98{,}36\,\mathrm{W}$ por metro; $T_1 = 16{,}31$, $T_2 = 14{,}55$, $T_3 = 8{,}84$ y $T_4 = 7{,}07\,^{\circ}\mathrm{C}$.

Control. El mismo flujo debe atravesar toda la pared, las temperaturas deben ser monótonas y la resistencia equivalente de la cámara debe reproducir ambas contribuciones.

Ej. 17 **Resultado.** $h_c = 6{,}381\,\mathrm{W/(m^2\,K)}$, $h_r = 0{,}950\,\mathrm{W/(m^2\,K)}$ y $q_{\mathrm{máx}} = 63{,}6\,\mathrm{W}$.

Control. La correlación caracteriza un medio gaseoso criogénico efectivo, no aire atmosférico; use kelvin en radiación y compruebe $q_{\mathrm{máx}} = q_c + q_r$.

4.10 Ejercicios resueltos

Cómo trabajar los ejercicios resueltos Antes de leer las operaciones, deténgase en el recuadro **Antes de calcular**: anticipe el sentido del calor, la resistencia o capacidad dominante y el modelo que espera utilizar. Al terminar, use la **Comprobación final** para verificar balance, límites físicos, unidades y rango de validez. El objetivo no es adivinar el número, sino saber qué resultado sería razonable antes de obtenerlo.

En todos los ejercicios resueltos de este capítulo se sigue la misma secuencia metodológica del libro: (i) simplificaciones físicas, (ii) modelo de resistencias o justificación de que no procede, (iii) ecuaciones, (iv) resolución numérica y (v) conclusiones o interpretación de ingeniería. La intención no es memorizar correlaciones aisladas, sino consolidar una forma ordenada de plantear problemas de convección y transmisión combinada.

Criterio de coherencia Las resistencias térmicas se dibujan sólo cuando unen nodos de temperatura bien definidos. En convección pura por correlaciones, el circuito se interpreta como una resistencia global equivalente; en ejercicios de radiación exacta o transitorios se indica si se usa linealización o capacidad térmica concentrada.

Convección. Los ejercicios resueltos 1 a 15 desarrollan casos de convección externa, convección interna, convección natural, convección mixta y balances con radiación o aporte solar.

4.10.1 Ejercicio resuelto 1. Techo plano de una cabaña en flujo externo

El resultado de este ejercicio es únicamente la potencia convectiva de una cara exterior del techo. Se supone viento uniforme y superficie isoterma; se excluyen radiación, infiltración, ventilación, puentes térmicos y las demás caras de la cabaña. No debe interpretarse como la pérdida térmica total del edificio.

Descripción del problema

El viento sopla con una velocidad de 8 m/s sobre una cabaña con el techo plano y cuadrado de 5 m de lado, que forma parte de una estación de investigación de la Antártida. Si la temperatura ambiente es de unos −23 °C, calcular el coeficiente de convección medio y la potencia térmica evacuada por el techo si su temperatura exterior es de −21 °C. Tomar $\mathrm{Re}_c = 5 \cdot 10^5$.

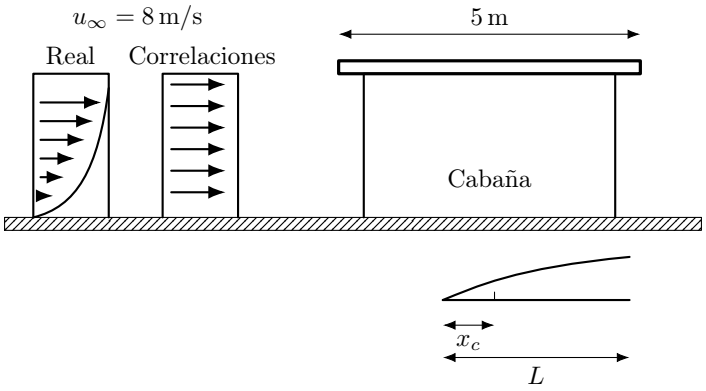


Figura 4.10: Esquema del ejercicio resuelto 1: flujo paralelo sobre el techo plano de la cabaña y transición en la capa límite.

Datos.

- $u_\infty = 8\,\mathrm{m/s}$.
- $L = 5\,\mathrm{m}$, $A = L^2 = 25\,\mathrm{m}^2$.
- $T_\infty = -23\,^\circ\mathrm{C}$.
- $T_s = -21\,^\circ\mathrm{C}$.
- $\mathrm{Re}_c = 5 \cdot 10^5$.

Se pide.

a) Coeficiente de convección medio.

b) Potencia térmica evacuada por el techo.

Resolución del problema

Antes de calcular

Predicción física. El calor irá del techo más caliente al aire más frío. Si existe transición, la zona turbulenta dominará buena parte de la transferencia.

Modelo esperado. Convección forzada externa sobre placa plana, seleccionando régimen y correlación a partir de Reynolds.

1. Simplificaciones. Se considera el techo como una placa plana isoterma sometida a flujo externo paralelo. El viento se toma paralelo al lado de 2 m, que es la longitud de desarrollo usada en Re_L.

La radiación solar reflejada, la convección y la emisión infrarroja neta se contabilizan como términos distintos. El régimen es estacionario, las propiedades del aire se evalúan a la temperatura de película y la potencia se calcula con un coeficiente medio sobre toda la superficie del techo.

2. Modelo adoptado de resistencias.

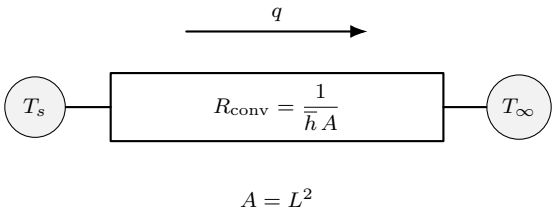


Figura 4.11: Red térmica equivalente del techo entre la superficie isoterma y el aire exterior.

3. Ecuaciones. El planteamiento simbólico es:

$$T_f = \frac{T_s + T_\infty}{2}, \qquad \mathrm{Re}_x = \frac{u_\infty x}{\nu}, \qquad x_c = \frac{\mathrm{Re}_c \nu}{u_\infty}, \qquad \mathrm{Re}_L = \frac{u_\infty L}{\nu}.$$

Como $x_c < L$, la placa trabaja en régimen mixto. Las dos correlaciones medias que se comparan son:

$$\overline{\mathrm{Nu}}_{CC} = \left[0{,}664\,\mathrm{Re}_c^{1/2} + 0{,}037\left(\mathrm{Re}_L^{4/5} - \mathrm{Re}_c^{4/5}\right)\right]\mathrm{Pr}^{1/3},$$

$$\overline{\mathrm{Nu}}_{W} = 0{,}664\,\mathrm{Re}_c^{1/2}\mathrm{Pr}^{1/3} + 0{,}036\,\mathrm{Re}_L^{4/5}\mathrm{Pr}^{0{,}43}\left[1 - \left(\frac{\mathrm{Re}_c}{\mathrm{Re}_L}\right)^{4/5}\right].$$

Finalmente,

$$\overline{h} = \frac{\overline{\mathrm{Nu}}\,k}{L}, \qquad q = \overline{h}A(T_s - T_\infty), \qquad A = L^2.$$

4. Resolución de ecuaciones.

La temperatura de evaluación de propiedades es

$$T_f = \frac{T_s + T_\infty}{2} = \frac{-21 + (-23)}{2} = -22\,^\circ\mathrm{C}.$$

De la tabla de propiedades del aire:

$$\begin{aligned} \rho &= 1{,}405\,\mathrm{kg/m^3}, & c_p &= 1004\,\mathrm{J/(kg\,K)},\\ \mu &= 161{,}98\times10^{-7}\,\mathrm{kg/(m\,s)}, & \nu &= 11{,}526\times10^{-6}\,\mathrm{m^2/s},\\ k &= 21{,}956\times10^{-3}\,\mathrm{W/(m\,K)}, & \alpha &= 15{,}554\times10^{-6}\,\mathrm{m^2/s},\\ \mathrm{Pr} &= \frac{\nu}{\alpha} = 0{,}741. \end{aligned}$$

La posición de transición se obtiene de:

$$\mathrm{Re}_c = \frac{u_\infty x_c}{\nu} = 5\cdot10^5 \quad\Longrightarrow\quad x_c = 0{,}720\,\mathrm{m} < L = 5\,\mathrm{m},$$

por lo que el régimen es mixto. Además,

$$\mathrm{Re}_L = \frac{u_\infty L}{\nu} = 3\,470\,415.$$

Para $T_s = \text{cte}$, usando Chilton–Colburn:

$$\overline{\mathrm{Nu}} = \left[0{,}664\,\mathrm{Re}_c^{1/2} + 0{,}037\left(\mathrm{Re}_L^{4/5} - \mathrm{Re}_c^{4/5}\right)\right]\mathrm{Pr}^{1/3} = 4928,$$

con $0{,}6 < \mathrm{Pr} < 60$ y $\mathrm{Re}_L < 10^8$.

Por tanto:

$$\overline{h} = \frac{\overline{\mathrm{Nu}}\,k}{L} = 21{,}6\,\mathrm{W/(m^2\,K)}.$$

La potencia térmica evacuada es:

$$q = \overline{h}A(T_s - T_\infty) = 21{,}6\,(5\cdot 5)\,[-21-(-23)] = 1082\,\mathrm{W}.$$

Para $T_s = \mathrm{cte}$ se aplica la forma canónica de Whitaker:

$$\overline{\mathrm{Nu}} = 0{,}036\mathrm{Pr}^{0{,}43}\left(\mathrm{Re}_L^{0{,}8} - 9200\right)\left(\frac{\mu_\infty}{\mu_s}\right)^{1/4},$$

$$0{,}7 < \mathrm{Pr} < 380, \qquad 2\times 10^5 < \mathrm{Re}_L < 5{,}5\times 10^6, \qquad 0{,}26 \lesssim \frac{\mu_\infty}{\mu_s} \lesssim 3{,}5.$$

Como $T_s - T_\infty = 2\,\mathrm{K}$, la corrección de viscosidad es prácticamente unidad. Con $\mathrm{Re}_L = 3\,470\,415$ y $\mathrm{Pr} = 0{,}741$:

$$\overline{\mathrm{Nu}} = 5112, \qquad \overline{h} = \frac{5112\,k}{L} = 22{,}4\,\mathrm{W/(m^2\,K)}, \qquad q = \overline{h}A(T_s - T_\infty) = 1122\,\mathrm{W}.$$

5. Conclusiones o interpretación.

Chilton–Colburn:	$\overline{h} = 21{,}6\,\mathrm{W/(m^2\,K)}$,	$q = 1082\,\mathrm{W}$,
Whitaker:	$\overline{h} = 22{,}4\,\mathrm{W/(m^2\,K)}$,	$q = 1122\,\mathrm{W}$.

Comprobación final

Compruebe temperatura de película, rango de Pr y Re, unidades de h y que las correlaciones alternativas den resultados del mismo orden.

4.10.2 Ejercicio resuelto 2. Calentadores discretos sobre una placa plana isoterma

Descripción del problema

Una placa plana se mantiene a una temperatura superficial uniforme de 230 °C mediante el uso de calentadores eléctricos de 50 mm de longitud y controlados de forma independiente, cuando se la hace incidir paralelamente aire atmosférico a 25 °C y 60 m/s. La placa es suficientemente larga aguas abajo para que su extremo final no altere la capa límite en los calentadores considerados y tiene 1 m de ancha, perpendicularmente al plano del dibujo. Los calentadores son contiguos, sin huecos, y se numeran desde el borde de ataque $x = 0$: el calentador i ocupa $(i-1)\,50\,\text{mm} \leq x \leq i\,50\,\text{mm}$. Tomar $\text{Re}_c = 5 \cdot 10^5$. Se pide: a) ¿en qué calentador la potencia eléctrica es máxima?; b) ¿cuál es el valor de dicha potencia?

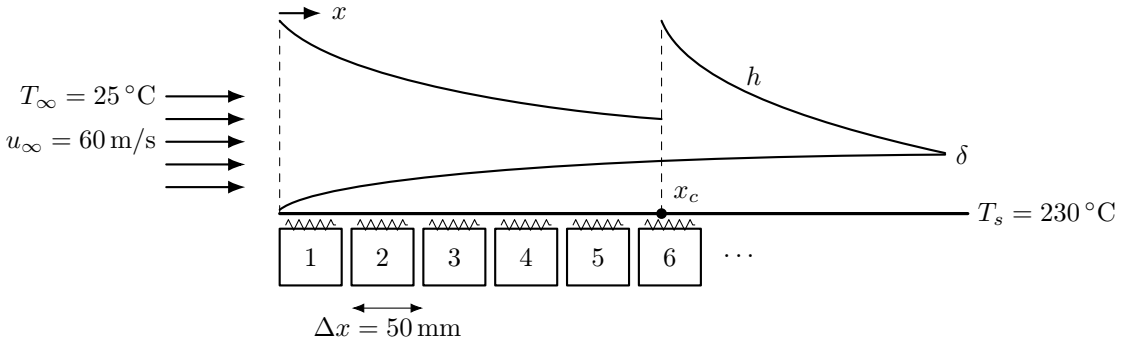


Figura 4.12: Esquema del ejercicio resuelto 2: placa plana con calentadores independientes y evolución de h y δ.

Datos.

- $T_s = 230\,°\text{C}$.
- $T_\infty = 25\,°\text{C}$.
- $u_\infty = 60\,\text{m/s}$.
- $\Delta x = 50\,\text{mm} = 0{,}05\,\text{m}$.
- Ancho de placa: $b = 1\,\text{m}$.
- $\text{Re}_c = 5 \cdot 10^5$.

Se pide.

a) Calentador en el que la potencia eléctrica es máxima.

b) Valor de dicha potencia.

Resolución del problema

Antes de calcular

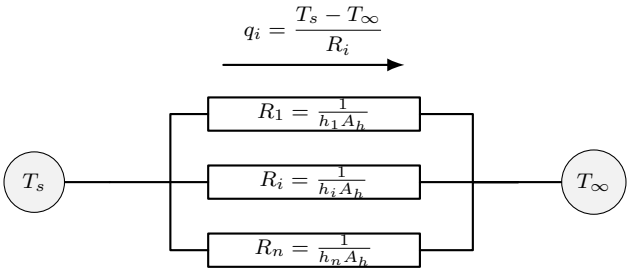
Predicción física. La placa es continua, lisa e isoterma; la capa límite nace una sola vez en $x = 0$.

Modelo esperado. Las tiras son particiones energéticas y sus potencias se obtienen por diferencias de transferencias acumuladas.

1. Simplificaciones. La placa es continua, lisa e isoterma; los calentadores sólo particionan la energía. Para $[x_{i-1},x_i]$, q_i es la diferencia entre las transferencias acumuladas desde el único borde de ataque. Se supone régimen estacionario, rendimiento eléctrico unitario y pérdidas por radiación, cara posterior, laterales y contactos despreciables; por ello $P_{\text{el},i} = q_{\text{conv},i}$ es una potencia eléctrica mínima

ideal. La evaluación se hace por tramos respecto de $x_c = Re_c\nu/u_\infty$: la integral usa la rama laminar antes de x_c y la rama turbulenta después de x_c, sin reiniciar la capa límite en cada calentador.

2. Modelo adoptado de resistencias.



cada calentador se modela como un tramo con $A_h = b\,\Delta x$

Figura 4.13: Modelo de conductancias convectivas por tramos para la placa con calentadores discretos.

3. Ecuaciones. Para cada calentador se calcula primero el coeficiente medio acumulado hasta la posición x y después se obtiene el coeficiente medio de tramo por diferencia de potencias:

$$\mathrm{Re}_x = \frac{u_\infty x}{\nu}, \qquad x_c = \frac{\mathrm{Re}_c \nu}{u_\infty}, \qquad \overline{h}_{0\to x} = \frac{\overline{\mathrm{Nu}}_{0\to x} k}{x}.$$

Si el calentador ocupa el intervalo $[x_{i-1},x_i]$, entonces

$$q_i = b\,(T_s - T_\infty)\left(\overline{h}_{0\to x_i} x_i - \overline{h}_{0\to x_{i-1}} x_{i-1}\right),$$

$$\overline{h}_i = \frac{q_i}{b\Delta x (T_s - T_\infty)}.$$

El calentador crítico es el que proporciona el mayor q_i.

4. Resolución de ecuaciones.

Como

$$q_i = \overline{h}_i A\,(T_s - T_\infty),$$

la potencia será máxima donde lo sea $\overline{h}_i$.

La temperatura de evaluación de propiedades es:

$$T_f = \frac{T_s + T_\infty}{2} = \frac{230 + 25}{2} = 127{,}5\,^\circ\mathrm{C}.$$

De la tabla de propiedades del aire:

$$\nu = 2{,}606 \times 10^{-5}\,\mathrm{m^2/s}, \qquad k = 3{,}287 \times 10^{-2}\,\mathrm{W/(m\,K)}, \qquad \mathrm{Pr} = 0{,}7061.$$

Se calcula x_c:

$$\mathrm{Re}_c = \frac{u_\infty x_c}{\nu} = 5 \cdot 10^5 \quad \Longrightarrow \quad x_c = 0{,}22\,\mathrm{m}.$$

Por tanto, la potencia máxima puede darse en $N = 1$, $N = 5$ o $N = 6$.

Para $N = 1$:

$$\mathrm{Re}_L = \frac{u_\infty \Delta x}{\nu} = \frac{60 \cdot 0{,}05}{2{,}606 \cdot 10^{-5}} = 115119 < \mathrm{Re}_c,$$

por lo que el flujo es laminar. Entonces:

$$\overline{\mathrm{Nu}}_L = 0{,}664\,\mathrm{Re}_L^{1/2}\mathrm{Pr}^{1/3} = 200{,}6, \qquad \mathrm{Pr} > 0{,}6,$$

y

$$\overline{h}_1 = \frac{\overline{\mathrm{Nu}}_L k}{\Delta x} = 131{,}9\,\mathrm{W/(m^2\,K)}.$$

Para $N = 5$:

$$x_i = 0{,}20\,\mathrm{m}, \qquad x_f = 0{,}25\,\mathrm{m}.$$
$$\mathrm{Re}_{x_i} = 460476 < \mathrm{Re}_c, \qquad \mathrm{Re}_{x_f} = 575595 > \mathrm{Re}_c.$$

Para el tramo $0 - x_i$, laminar:

$$\overline{\mathrm{Nu}}_{0-x_i} = 0{,}664\,\mathrm{Re}_{x_i}^{1/2}\mathrm{Pr}^{1/3} = 401{,}2.$$

Para el tramo $0 - x_f$, mixto con Chilton–Colburn:

$$\overline{\mathrm{Nu}}_{0-x_f} = 560{,}4, \qquad 0{,}6 < \mathrm{Pr} < 60, \qquad \mathrm{Re}_L < 10^8.$$

Así:

$$\overline{h}_{0-x_i} = \frac{\overline{\mathrm{Nu}}_{0-x_i} k}{x_i} = 65{,}9\,\mathrm{W/(m^2\,K)},$$
$$\overline{h}_{0-x_f} = \frac{\overline{\mathrm{Nu}}_{0-x_f} k}{x_f} = 73{,}7\,\mathrm{W/(m^2\,K)}.$$

La relación entre los coeficientes medios es:

$$\overline{h}_{0-x_i} = \frac{1}{x_i}\int_0^{x_i} h\,\mathrm{d}x, \qquad \overline{h}_{0-x_f} = \frac{1}{x_f}\int_0^{x_f} h\,\mathrm{d}x.$$

Por tanto:

$$\overline{h}_5 = \overline{h}_{x_i - x_f} = \frac{1}{x_f - x_i}\int_{x_i}^{x_f} h\,\mathrm{d}x = \frac{x_f \overline{h}_{0-x_f} - x_i \overline{h}_{0-x_i}}{\Delta x} = 104{,}7\,\mathrm{W/(m^2\,K)}.$$

Para $N = 6$:

$$x_i = 0{,}25\,\mathrm{m}, \qquad x_f = 0{,}30\,\mathrm{m}.$$
$$\mathrm{Re}_{x_i} = 575595 > \mathrm{Re}_c, \qquad \mathrm{Re}_{x_f} = 690714 > \mathrm{Re}_c.$$
$$\overline{\mathrm{Nu}}_{0-x_i}(N=6) = \overline{\mathrm{Nu}}_{0-x_f}(N=5) = 560{,}4,$$
$$\overline{\mathrm{Nu}}_{0-x_f} = 770{,}3.$$
$$\overline{h}_{0-x_i} = 73{,}7\,\mathrm{W/(m^2\,K)}, \qquad \overline{h}_{0-x_f} = 84{,}4\,\mathrm{W/(m^2\,K)}.$$
$$\overline{h}_6 = 138{,}0\,\mathrm{W/(m^2\,K)}.$$

Finalmente:

$$\overline{h}_{\mathrm{máx}} = \overline{h}_6 = 138{,}0\,\mathrm{W/(m^2\,K)}.$$

Con $A = \Delta x\, b = 0{,}05\,\mathrm{m}^2$:

$$P_{\mathrm{el,min,ideal}} = q_{\mathrm{conv},6} = \overline{h}_{\mathrm{máx}} A (T_s - T_\infty) = 138{,}0 \cdot 0{,}05 \cdot (230 - 25) = 1414\,\mathrm{W}.$$

5. Conclusiones o interpretación.

$$\boxed{N = 6, \qquad \overline{h}_6 = 138\,\mathrm{W/(m^2\,K)}, \qquad P_{\mathrm{el,min,ideal}} = 1414\,\mathrm{W}.}$$

Comprobación final

La suma de aportaciones debe reproducir la potencia convectiva total y cada correlación debe usar la longitud efectiva que le corresponde. El valor publicado es la potencia eléctrica mínima ideal bajo $\eta_{\mathrm{el}} = 1$ y pérdidas no convectivas despreciables; un diseño real requiere margen y un balance adicional de radiación, cara posterior, laterales y contactos.

4.10.3 Ejercicio resuelto 3. Obtención de Nusselt medio a partir de correlaciones locales

Descripción del problema

Sea una placa plana de longitud L y temperatura superficial uniforme sometida a un flujo paralelo. Partiendo de las expresiones del Nusselt local $\mathrm{Nu}(x)$, determinar el Nusselt medio sobre la placa en los siguientes supuestos: a) flujo laminar; b) flujo mixto; c) repetir los apartados anteriores suponiendo flujo de calor superficial uniforme.

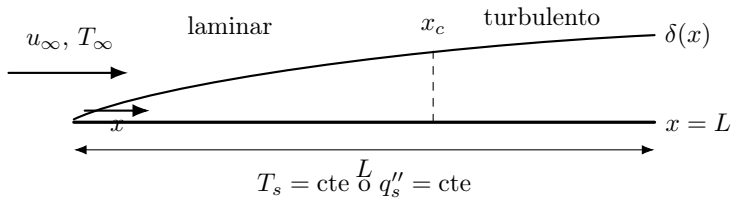


Figura 4.14: Esquema del ejercicio resuelto 3: placa plana de longitud L con capa límite y posible transición en x_c.

Se pide.

a) $\overline{\mathrm{Nu}}$ para flujo laminar y $T_s = \text{cte}$.

b) $\overline{\mathrm{Nu}}$ para flujo mixto y $T_s = \text{cte}$.

c) $\overline{\mathrm{Nu}}$ para flujo laminar y mixto con $q''_s = \text{cte}$.

Resolución del problema

Antes de calcular

Predicción física. El Nusselt medio no se obtiene sustituyendo directamente una posición arbitraria en la correlación local; debe integrarse o usarse la relación media adecuada.

Modelo esperado. Integración de h_x o de Nu_x sobre la longitud para obtener el valor medio.

1. Simplificaciones. El ejercicio es analítico y no requiere datos numéricos. Se supone placa plana de longitud L, propiedades constantes y correlaciones locales válidas en los rangos indicados. La magnitud buscada es el valor medio espacial de Nusselt.

2. Modelo adoptado de resistencias. En este ejercicio no procede dibujar un circuito clásico de resistencias térmicas, porque el objetivo es deducir expresiones de Nu medio a partir de correlaciones locales, no resolver un intercambio entre nodos térmicos discretos.

3. Ecuaciones. La definición común es:

$$\overline{h}_L = \frac{1}{L}\int_0^L h_x \,\mathrm{d}x, \qquad \overline{\mathrm{Nu}}_L = \frac{\overline{h}_L L}{k}.$$

Para correlaciones locales de la forma $\mathrm{Nu}_x = C\mathrm{Re}_x^m \mathrm{Pr}^n$ se usa:

$$h_x = \frac{k}{x} C \left(\frac{u_\infty x}{\nu}\right)^m \mathrm{Pr}^n,$$

por lo que la integración de x^{m-1} conduce a los coeficientes medios. En régimen mixto se integra de 0 a x_c con la correlación laminar y de x_c a L con la turbulenta.

4. Resolución de ecuaciones.

Para una placa plana:

$$\overline{h} = \frac{1}{L}\int_0^L h_x \,\mathrm{d}x, \qquad \overline{\mathrm{Nu}}_L = \frac{\overline{h}L}{k} = \int_0^L \frac{\mathrm{Nu}_x}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Para $T_s = \text{cte}$ y flujo laminar:

$$\mathrm{Nu}_x = 0{,}332\,\mathrm{Re}_x^{1/2}\mathrm{Pr}^{1/3}.$$

Entonces:

$$\overline{\mathrm{Nu}}_L = \int_0^L 0{,}332\left(\frac{u_\infty x}{\nu}\right)^{1/2}\frac{\mathrm{Pr}^{1/3}}{x}\,\mathrm{d}x = 0{,}664\,\mathrm{Re}_L^{1/2}\mathrm{Pr}^{1/3}.$$

Para flujo mixto, integrando desde 0 hasta x_c con correlación laminar y desde x_c hasta L con correlación turbulenta:

$$\overline{\mathrm{Nu}}_L = \left[0{,}664\,\mathrm{Re}_c^{1/2} + 0{,}037\left(\mathrm{Re}_L^{4/5} - \mathrm{Re}_c^{4/5}\right)\right]\mathrm{Pr}^{1/3}.$$

Para $q_s'' = \text{cte}$, en régimen laminar:

$$\mathrm{Nu}_x = 0{,}453\,\mathrm{Re}_x^{1/2}\mathrm{Pr}^{1/3},$$

por lo que:

$$\overline{\mathrm{Nu}}_L = 0{,}906\,\mathrm{Re}_L^{1/2}\mathrm{Pr}^{1/3}.$$

Para flujo mixto con $q_s'' = \text{cte}$:

$$\overline{\mathrm{Nu}}_L = \left[0{,}906\,\mathrm{Re}_c^{1/2} + 0{,}0385\left(\mathrm{Re}_L^{4/5} - \mathrm{Re}_c^{4/5}\right)\right]\mathrm{Pr}^{1/3}.$$

5. Conclusiones o interpretación.

Laminar, $T_s = \text{cte}$:	$\overline{\mathrm{Nu}}_L = 0{,}664\,\mathrm{Re}_L^{1/2}\mathrm{Pr}^{1/3}$,
Mixto, $T_s = \text{cte}$:	$\overline{\mathrm{Nu}}_L = \left[0{,}664\,\mathrm{Re}_c^{1/2} + 0{,}037\left(\mathrm{Re}_L^{4/5} - \mathrm{Re}_c^{4/5}\right)\right]\mathrm{Pr}^{1/3}$,
Laminar, $q_s'' = \text{cte}$:	$\overline{\mathrm{Nu}}_L = 0{,}906\,\mathrm{Re}_L^{1/2}\mathrm{Pr}^{1/3}$,
Mixto, $q_s'' = \text{cte}$:	$\overline{\mathrm{Nu}}_L = \left[0{,}906\,\mathrm{Re}_c^{1/2} + 0{,}0385\left(\mathrm{Re}_L^{4/5} - \mathrm{Re}_c^{4/5}\right)\right]\mathrm{Pr}^{1/3}$.

Comprobación final

El resultado medio debe ser coherente con la tendencia local y conservar las unidades al pasar de Nusselt a h.

4.10.4 Ejercicio resuelto 4. Lámina deslizante con rozamiento, convección forzada y radiación

En los tiempos transitorios del capítulo debe declararse la temperatura representativa usada para evaluar h y las propiedades. Si la radiación se linealiza, el resultado es aproximado y debe indicarse el intervalo térmico de linealización. Después de obtener h, compruebe el Biot con el mayor coeficiente superficial relevante antes de aceptar el modelo concentrado. El análisis se hace en el marco de la lámina. $u_{\mathrm{rel}} = |u_\infty - u_s|$ y $x = 0$ es el borde que encuentra primero esa corriente relativa; $Re_x = u_{\mathrm{rel}} x/\nu$. Si cambia el signo de $u_\infty - u_s$, cambia el borde de ataque.

Descripción del problema

Una lámina plana muy ancha, en la dimensión perpendicular al dibujo, de longitud $L = 10\,\mathrm{m}$ y espesor $e = 20\,\mathrm{mm}$ desliza con velocidad $v = 2\,\mathrm{m/s}$ sobre una superficie fija idealmente adiabática. El coeficiente de rozamiento es $\lambda = 0{,}1$ y se supone que toda la potencia de fricción entra en la lámina. El aire está inicialmente en reposo, de modo que la velocidad relativa sobre la cara superior tiene módulo $u_{\mathrm{rel}} = v$. El aire y un recinto radiante grande se encuentran a 37 °C. La lámina tiene $\rho = 3000\,\mathrm{kg/m^3}$ y $k_s = 0{,}5\,\mathrm{W/(m\,K)}$; su cara superior es gris difusa, con $\varepsilon = 0{,}7$. Use $\mathrm{Re}_c = 10^6$ y, sólo para aislar el acoplamiento forzado–radiativo, omita la convección natural. Calcule las temperaturas medias de ambas caras y sus valores máximos dentro de este modelo.

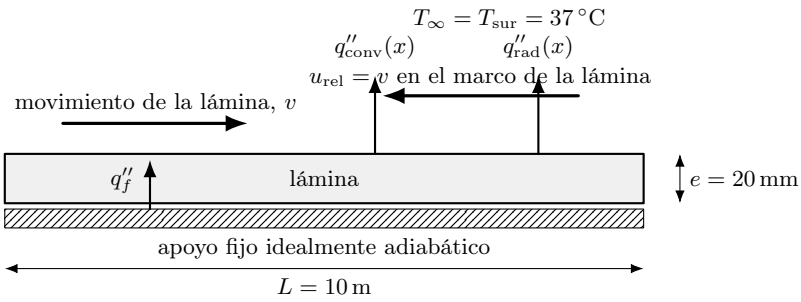


Figura 4.15: Lámina deslizante: el rozamiento aporta un flujo uniforme, mientras que la convección y las temperaturas superficiales varían a lo largo de x.

Datos.

- $L = 10\,\mathrm{m}$, $e = 0{,}020\,\mathrm{m}$, $v = u_{\mathrm{rel}} = 2\,\mathrm{m/s}$.
- $\lambda = 0{,}1$, $\rho = 3000\,\mathrm{kg/m^3}$, $k_s = 0{,}5\,\mathrm{W/(m\,K)}$.
- $T_\infty = T_{\mathrm{sur}} = 37\,^\circ\mathrm{C}$, $\varepsilon = 0{,}7$, $\mathrm{Re}_c = 10^6$.

Se pide. Las temperaturas medias y máximas de las caras superior e inferior.

Resolución del problema

Antes de calcular

Predicción física. El flujo de fricción es uniforme, pero el coeficiente local h_x cambia con la distancia al borde de ataque. Por ello las caras no son isotermas.

Modelo esperado. Balance local no lineal, seguido de integración espacial.

1. Simplificaciones. Se adopta régimen estacionario, anchura grande, conducción local unidimensional a través del espesor y conducción longitudinal despreciable. La carga normal se identifica con el peso de la lámina, el contacto es completo y toda la potencia de fricción se asigna a la lámina porque el apoyo se idealiza adiabático. Las propiedades del aire se evalúan a una temperatura de

película media y se usa una transición abrupta en $\mathrm{Re}_x = \mathrm{Re}_c$. La convección natural se omite por indicación del enunciado; al final se comprueba el alcance de esta idealización.

2. Modelo local.

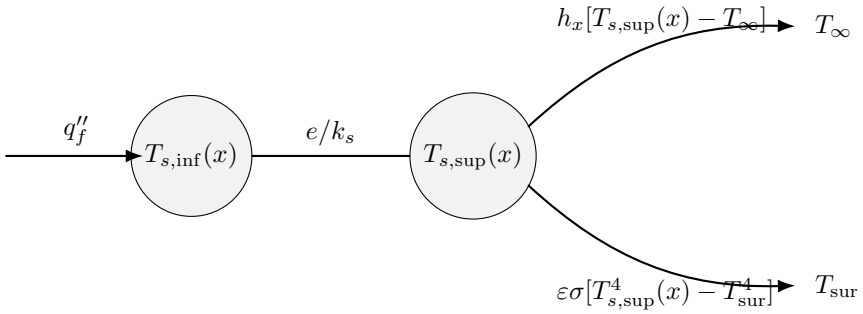


Figura 4.16: Balance local coherente del ejercicio resuelto 4. La radiación se conserva en forma exacta, no como una resistencia lineal constante.

3. Ecuaciones. La potencia de rozamiento por unidad de área es

$$q''_f = \lambda \rho e g v.$$

Con x medido desde el borde de ataque del flujo relativo,

$$\mathrm{Re}_x = \frac{u_{\mathrm{rel}} x}{\nu}, \qquad x_c = \frac{\mathrm{Re}_c \nu}{u_{\mathrm{rel}}}, \qquad h_x = \frac{k_a}{x}\mathrm{Nu}_x,$$

$$\mathrm{Nu}_x = \begin{cases} 0{,}453 \mathrm{Re}_x^{1/2} \mathrm{Pr}^{1/3}, & \mathrm{Re}_x \le \mathrm{Re}_c, \\ 0{,}0308 \mathrm{Re}_x^{4/5} \mathrm{Pr}^{1/3}, & \mathrm{Re}_x > \mathrm{Re}_c. \end{cases}$$

El balance local de la cara superior y el salto a través de la lámina son

$$q''_f = h_x[T_{s,\mathrm{sup}}(x) - T_\infty] + \varepsilon\sigma[T^4_{s,\mathrm{sup}}(x) - T^4_{\mathrm{sur}}],$$

$$T_{s,\mathrm{inf}}(x) = T_{s,\mathrm{sup}}(x) + \frac{q''_f e}{k_s}.$$

Las temperaturas medias se definen por $\overline{T} = L^{-1}\int_0^L T(x)\,dx$.

4. Resolución de ecuaciones.

$$q''_f = 0{,}1(3000)(0{,}020)(9{,}81)(2) = 117{,}72\,\mathrm{W/m^2}.$$

La iteración sobre la temperatura de película media converge a $T_f \simeq 44{,}8\,^\circ\mathrm{C}$, para la que se emplean

$$\nu = 1{,}748 \times 10^{-5}\,\mathrm{m^2/s}, \qquad k_a = 2{,}698 \times 10^{-2}\,\mathrm{W/(m\,K)}, \qquad \mathrm{Pr} = 0{,}724.$$

Así,

$$\mathrm{Re}_L = 1{,}144 \times 10^6, \qquad x_c = 8{,}74\,\mathrm{m}.$$

La solución numérica del balance local y su integración proporcionan

$$\overline{T}_{s,\mathrm{sup}} = 52{,}6\,^\circ\mathrm{C}, \qquad T_{s,\mathrm{sup,max}} \simeq 55{,}3\,^\circ\mathrm{C} \quad (x \simeq x_c^-),$$

$$\overline{q}''_{\mathrm{conv}} = 38{,}0\,\mathrm{W/m^2}, \qquad \overline{q}''_{\mathrm{rad}} = 79{,}7\,\mathrm{W/m^2},$$

cuya suma recupera $q''_f = 117{,}7\,\mathrm{W/m^2}$. El salto conductivo es uniforme:

$$\Delta T_{\mathrm{cond}} = \frac{q''_f e}{k_s} = 4{,}71\,\mathrm{K}.$$

Por tanto,

$$\overline{T}_{s,\mathrm{inf}} = 57{,}3\,^\circ\mathrm{C}, \qquad T_{s,\mathrm{inf,max}} \simeq 60{,}0\,^\circ\mathrm{C}.$$

Como comprobación de alcance, usando $\beta \simeq 1/T_f$ y la diferencia media,

$$\mathrm{Ri}_L = \frac{g\beta(\overline{T}_{s,\mathrm{sup}} - T_\infty)L}{u_{\mathrm{rel}}^2} \simeq 1{,}2.$$

La flotación no es despreciable según el criterio habitual. Los valores anteriores son, por tanto, el resultado del modelo didáctico sólo forzado impuesto por el enunciado, no una predicción completa de la lámina real.

5. Conclusiones o interpretación.

$$\boxed{\overline{T}_{s,\mathrm{sup}} = 52{,}6\,^\circ\mathrm{C}, \qquad \overline{T}_{s,\mathrm{inf}} = 57{,}3\,^\circ\mathrm{C}}$$

$$\boxed{T_{s,\mathrm{sup,max}} \simeq 55{,}3\,^\circ\mathrm{C}, \qquad T_{s,\mathrm{inf,max}} \simeq 60{,}0\,^\circ\mathrm{C}}$$

Comprobación final

Compruebe el balance medio, el salto conductivo uniforme y el rango de las correlaciones. No interprete el modelo sólo forzado como físicamente completo cuando Ri_L es de orden unidad.

4.10.5 Ejercicio resuelto 5. Cilindro calentado internamente en flujo cruzado

Descripción del problema

Un cilindro de 12,7 mm de diámetro y 94 mm de longitud es sometido a una corriente transversal de aire a 10 m/s y 26,2 °C. Internamente, el cilindro dispone de una resistencia eléctrica que genera una potencia de 46 W, de la cual el 15 % se disipa por radiación. Los extremos del cilindro están térmicamente aislados. Supuesto que la temperatura superficial del cilindro es uniforme y de valor 128,4 °C, calcular: a) el coeficiente de convección real; b) los coeficientes de convección por las correlaciones de Churchill–Bernstein, Nakai–Okazaki, Hilpert y Zhukauskas. Antes de calcular cada correlación, compruebe sus rangos de Reynolds y Prandtl. Si Nakai–Okazaki queda fuera de su intervalo, la respuesta correcta para esa rama es "correlación no aplicable", sin extrapolarla.

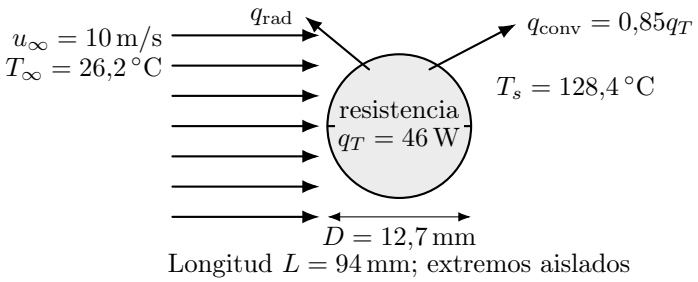


Figura 4.17: Esquema del ejercicio resuelto 5: cilindro calentado internamente sometido a flujo cruzado.

Datos.

- $D = 12{,}7\,\text{mm} = 0{,}0127\,\text{m}$.
- $L = 94\,\text{mm} = 0{,}094\,\text{m}$.
- $u_\infty = 10\,\text{m/s}$.
- $T_\infty = 26{,}2\,^\circ\text{C}$.
- $T_s = 128{,}4\,^\circ\text{C}$.
- $q_T = 46\,\text{W}$.
- $q_{\text{conv}} = 0{,}85\,q_T$.

Se pide.

a) h_{real}.

b) h mediante Churchill–Bernstein, Nakai–Okazaki, Hilpert y Zhukauskas.

Resolución del problema

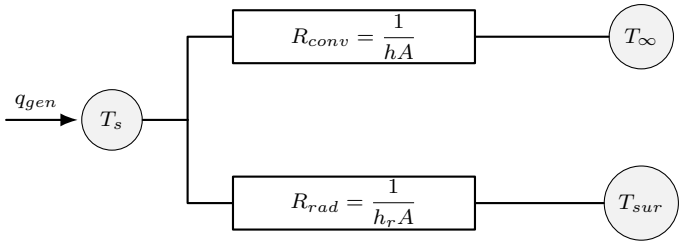
Antes de calcular

Predicción física. La generación interna eleva la temperatura del cilindro hasta que la convección exterior evacúa la misma potencia.

Modelo esperado. Balance de generación con convección forzada en flujo cruzado alrededor de cilindro.

1. Simplificaciones. El cilindro se supone isotermo, con extremos térmicamente aislados y área de intercambio lateral. La potencia eléctrica útil para convección se obtiene descontando la fracción radiada; las propiedades del aire se evalúan a la temperatura de película. Las correlaciones de flujo cruzado para cilindro largo se usan como aproximación de ingeniería: $L/D = 0{,}094/0{,}0127 = 7{,}40$. Los extremos aislados no transfieren calor, pero no se resuelve explícitamente la perturbación tridimensional del flujo cerca de ellos.

2. Modelo adoptado de resistencias.



$A = \pi DL$ (extremos aislados)

Figura 4.18: Balance en paralelo de convección y radiación del cilindro calentado internamente.

3. Ecuaciones. La medida experimental da directamente:

$$q_{conv} = 0{,}85 q_T = h_{real}(\pi DL)(T_s - T_\infty).$$

Para las correlaciones de flujo cruzado se calcula:

$$\mathrm{Re}_D = \frac{u_\infty D}{\nu}, \qquad h = \frac{\mathrm{Nu}_D k}{D}.$$

Se contrastan Churchill–Bernstein, Hilpert y Zhukauskas dentro de sus rangos de validez; Nakai–Okazaki sólo se aplicaría si se satisficiera su intervalo de RePr.

4. Resolución de ecuaciones.

El coeficiente real se obtiene a partir de las medidas:

$$q_{\mathrm{conv,real}} = h_{\mathrm{real}}(\pi DL)(T_s - T_\infty) = 0{,}85 \cdot 46.$$

Por tanto:

$$h_{\mathrm{real}} = 102{,}0\,\mathrm{W/(m^2\,K)}.$$

Churchill–Bernstein.

La temperatura de propiedades es:

$$T_f = \frac{T_s + T_\infty}{2} = 77{,}3\,^\circ\mathrm{C}.$$

$$k = 0{,}029\,34\,\mathrm{W/(m\,K)}, \qquad \nu = 2{,}069 \times 10^{-5}\,\mathrm{m^2/s}, \qquad \mathrm{Pr} = 0{,}7160.$$

$$\mathrm{Re} = \frac{u_\infty D}{\nu} = 6138.$$

La posible flotación se comprueba con

$$\mathrm{Ri}_D = \frac{\mathrm{Gr}_D}{\mathrm{Re}_D^2} = 3{,}63 \cdot 10^{-4} \ll 1,$$

por lo que la convección natural es despreciable frente al flujo impuesto.

$$\mathrm{Nu} = 0{,}3 + \frac{0{,}62\,\mathrm{Re}^{1/2}\mathrm{Pr}^{1/3}}{\left[1 + (0{,}4/\mathrm{Pr})^{2/3}\right]^{1/4}} \left[1 + \left(\frac{\mathrm{Re}}{282000}\right)^{5/8}\right]^{4/5} = 41{,}3, \qquad \mathrm{RePr} > 0{,}2.$$

$$h = \frac{\mathrm{Nu}k}{D} = 95{,}3\,\mathrm{W/(m^2\,K)}.$$

Nakai–Okazaki.

$$\mathrm{Nu} = \frac{1}{0{,}8237 - \ln(\mathrm{RePr})^{1/2}}, \qquad \mathrm{RePr} = 4395 \not< 0{,}2.$$

Por tanto, la correlación no es aplicable. *Comentario técnico.* La correlación de Nakai–Okazaki no se aplica porque el producto RePr queda fuera de su intervalo de validez; por tanto, no condiciona el resultado final.

Hilpert.

$$\mathrm{Nu} = C\mathrm{Re}^m\mathrm{Pr}^{1/3} = 37{,}9, \qquad 0{,}4 < \mathrm{Re} < 4 \cdot 10^5, \qquad \mathrm{Pr} > 0{,}6.$$

Para $\mathrm{Re} = 6138$, de la tabla de Hilpert:

$$C = 0{,}193, \qquad m = 0{,}618.$$

$$h = 87{,}5\,\mathrm{W/(m^2\,K)}.$$

Zhukauskas.

La temperatura de propiedades es $T_\infty = 26{,}2\,^\circ\mathrm{C}$:

$$k = 0{,}025\,60\,\mathrm{W/(m\,K)}, \qquad \nu = 1{,}573 \times 10^{-5}\,\mathrm{m^2/s}, \qquad \mathrm{Pr} = 0{,}729.$$

Además:

$$\mathrm{Pr}_s = \mathrm{Pr}(T_s = 128{,}4\,^\circ\mathrm{C}) = 0{,}706.$$

$$\mathrm{Re} = \frac{u_\infty D}{\nu} = 8074.$$

$$\overline{\mathrm{Nu}} = C\mathrm{Re}^m\mathrm{Pr}^n\left(\frac{\mathrm{Pr}}{\mathrm{Pr}_s}\right)^{1/4} = 51{,}5, \qquad 1 < \mathrm{Re} < 10^6, \qquad 0{,}7 < \mathrm{Pr} < 500.$$

De la tabla de Zhukauskas, para $\mathrm{Re} = 8074$:

$$C = 0{,}26, \qquad m = 0{,}6.$$

Como $\mathrm{Pr} < 10$, de la tabla:

$$n = 0{,}37.$$

$$h = 103{,}8\,\mathrm{W/(m^2\,K)}.$$

5. Conclusiones o interpretación.

$$\boxed{\begin{aligned} h_{\mathrm{real}} &= 102{,}0\,\mathrm{W/(m^2\,K)},\\ h_{\mathrm{Churchill}} &= 95{,}3\,\mathrm{W/(m^2\,K)},\\ h_{\mathrm{Nakai}} &= \text{no aplicable},\\ h_{\mathrm{Hilpert}} &= 87{,}5\,\mathrm{W/(m^2\,K)},\\ h_{\mathrm{Zhukauskas}} &= 103{,}8\,\mathrm{W/(m^2\,K)}. \end{aligned}}$$

Comentario técnico. Las diferencias pequeñas respecto al resumen inicial proceden del redondeo de propiedades y constantes de correlación; se conservan los valores calculados en el desarrollo.

Comprobación final

Compruebe $L/D = 7{,}40$, $\mathrm{Ri}_D \ll 1$, los rangos de Re_D y Pr, y que $hA(T_s - T_\infty)$ iguala la fracción convectiva de la generación.

4.10.6 Ejercicio resuelto 6. Enfriamiento de aceite en tubo con pared isoterma

Descripción del problema

Un flujo de aceite SAE 50, aceite de motor, pasa a razón de 0,007 kg/s a través de un tubo de 10 mm de diámetro y 1,5 m de longitud. La temperatura de la pared del tubo puede suponerse uniforme en 27 °C, siendo la temperatura de masa de entrada del aceite de 104 °C. Calcular la temperatura de masa de la salida, el coeficiente de convección medio y la potencia térmica transmitida. El factor de fricción vale 0,02.

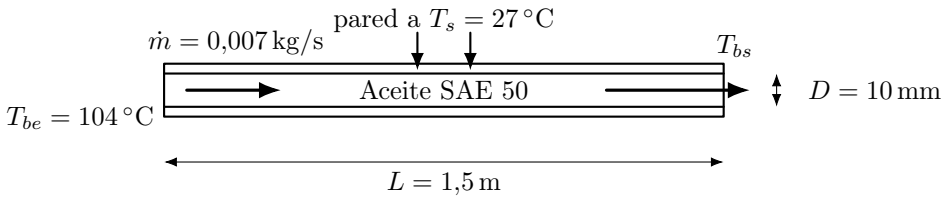


Figura 4.19: Esquema del ejercicio resuelto 6: enfriamiento de aceite en tubo circular con pared a temperatura uniforme.

Datos.

- Aceite SAE 50.
- $\dot{m} = 0{,}007\,kg/s$.
- $D = 10\,mm = 0{,}010\,m$.
- $L = 1{,}5\,m$.
- $T_s = 27\,°C$.
- $T_{be} = 104\,°C$.
- $f = 0{,}02$.

Se pide.

a) Temperatura de masa de salida T_{bs}.

b) Coeficiente de convección medio.

c) Potencia térmica transmitida.

Resolución del problema

Antes de calcular

Predicción física. La temperatura media del aceite se acercará a la de la pared sin cruzarla. Como las propiedades dependen de la temperatura, será necesaria una iteración.

Modelo esperado. Convección interna con pared isoterma, balance energético y propiedades evaluadas iterativamente.

1. Simplificaciones. Se adopta régimen estacionario en flujo interno, pared a temperatura constante y propiedades evaluadas de forma coherente con la temperatura media del fluido. La variación de temperatura de masa se calcula mediante el balance diferencial integrado.

2. Modelo adoptado de resistencias.

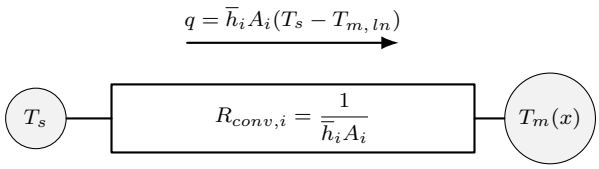


Figura 4.20: Resistencia convectiva global entre la pared isoterma y el aceite en flujo interno.

3. Ecuaciones.

La corriente es laminar y se encuentra en entrada térmica. Como la viscosidad cambia mucho entre la masa y la pared, se emplea Sieder–Tate:

$$\overline{\mathrm{Nu}} = 1{,}86\left(\mathrm{RePr}\frac{D}{L}\right)^{1/3}\left(\frac{\mu_b}{\mu_s}\right)^{0{,}14}, \qquad \overline{h} = \frac{\overline{\mathrm{Nu}}k}{D}.$$

Para una pared isoterma, la temperatura de salida resulta de

$$T_{bs} = T_s + (T_{be} - T_s)\exp\left(-\frac{\overline{h}\pi DL}{\dot{m}c_p}\right), \qquad q = \dot{m}c_p(T_{be} - T_{bs}).$$

4. Resolución de ecuaciones. La iteración converge a $T_b \simeq 96{,}2\,^\circ\mathrm{C}$. Con propiedades interpoladas en torno a la temperatura media se obtienen $\mathrm{Re} \simeq 41$, $\mathrm{Pr} \simeq 346$, $k = 0{,}1371\,\mathrm{W/(m\,K)}$ y $\mu_b/\mu_s \simeq 0{,}037$. Por tanto,

$$\left(\frac{\mu_b}{\mu_s}\right)^{0{,}14} = 0{,}630, \qquad \overline{\mathrm{Nu}} = 1{,}86(94{,}6)^{1/3}(0{,}037)^{0{,}14} = 5{,}34,$$

$$\overline{h} = \frac{5{,}34 \cdot 0{,}1371}{0{,}010} = 73{,}2\,\mathrm{W/(m^2\,K)}.$$

Con $A = \pi DL = 0{,}047\,12\,\mathrm{m}^2$,

$$\frac{\overline{h}A}{\dot{m}c_p} = 0{,}2248, \qquad T_{bs} = 27 + (104 - 27)e^{-0{,}2248} = 88{,}5\,^\circ\mathrm{C},$$

$$q = 0{,}007 \cdot 2193\,(104 - 88{,}5) = 238{,}0\,\mathrm{W}.$$

La comprobación por diferencia logarítmica, $\Delta T_{lm} = 68{,}96\,\mathrm{K}$, reproduce la misma potencia.

5. Conclusiones o interpretación.

$$\boxed{T_{bs} = 88{,}5\,^\circ\mathrm{C}, \qquad \overline{h} = 73{,}2\,\mathrm{W/(m^2\,K)}, \qquad q \simeq 238\,\mathrm{W}.}$$

Comprobación final

La temperatura de propiedades debe ser coherente con la solución final, la salida debe quedar entre entrada y pared y el balance de energía debe cerrar.

4.10.7 Ejercicio resuelto 7. Calentamiento de aire en conducto rectangular

La variable del fluido es la temperatura de masa $T_b(x)$, desde $T_{b,e}$ hasta $T_{b,s}$. Deben comprobarse L/D_h, las longitudes de entrada y que el factor de fricción dado se interprete como Darcy.

Descripción del problema

Una corriente de aire ambiente fluye a razón de 0,11 kg/s a través de un conducto rectangular de 0,5 m de alto, 10 mm de profundidad perpendicular al dibujo y 0,8 m de largo, que forma parte de un intercambiador de calor tipo carcasa. Las paredes están a 327 °C y la temperatura de masa de la corriente incidente es de 127 °C. Sabiendo que el factor de fricción vale 0,0267, determinar la temperatura media de masa en la salida, el coeficiente de convección medio y la potencia intercambiada.

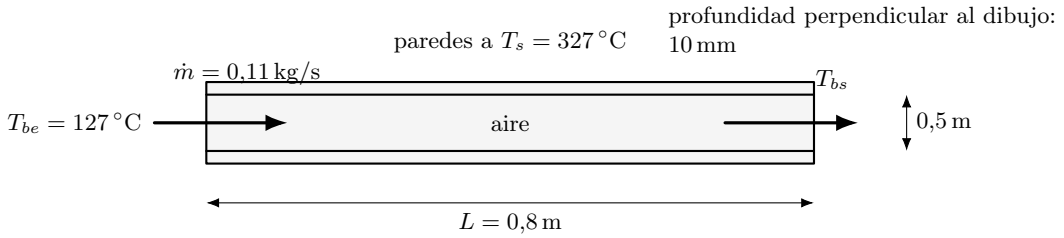


Figura 4.21: Esquema del ejercicio resuelto 7: conducto rectangular con pared caliente y flujo interno de aire.

Datos.

- $\dot{m} = 0{,}11\,kg/s$.
- Conducto rectangular: 0,5 m de alto, 10 mm de profundidad perpendicular al dibujo y 0,8 m de largo.
- $T_s = 327\,°C$.
- $T_{be} = 127\,°C$.
- $f = 0{,}0267$.

Se pide.

a) T_{bs}.

b) Coeficiente de convección medio.

c) Potencia intercambiada.

Resolución del problema

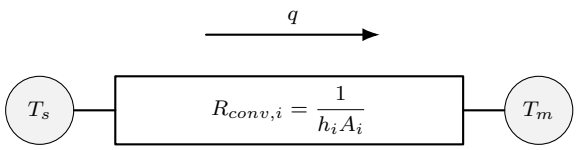
Antes de calcular

Predicción física. El aire se calentará a lo largo del conducto y su temperatura de salida quedará entre la entrada y la pared.

Modelo esperado. Convección interna en conducto no circular usando diámetro hidráulico, régimen y condición térmica correctos.

1. Simplificaciones. El conducto se modela como flujo interno con temperatura superficial uniforme. Se usa el diámetro hidráulico para el régimen y para el Nusselt, y se evalúa la potencia mediante la evolución exponencial de la temperatura media de masa.

2. Modelo adoptado de resistencias.



conducto rectangular con intercambio interno dominante

Figura 4.22: Resistencia convectiva interna del conducto rectangular referida a la temperatura media del aire.

3. Ecuaciones. El conducto se reduce a un diámetro hidráulico:

$$D_h = \frac{4A_c}{p}, \qquad \mathrm{Re} = \frac{\dot{m} D_h}{\mu A_c}.$$

Para flujo turbulento se emplea Gnielinski:

$$\mathrm{Nu}_b = \frac{(f/8)(\mathrm{Re} - 1000)\mathrm{Pr}}{1 + 12{,}7(f/8)^{1/2}(\mathrm{Pr}^{2/3} - 1)}.$$

La corrección térmica para gas se aplica sobre Nu_b y después:

$$h = \frac{\mathrm{Nu} k}{D_h}, \qquad T_{bs} = T_s - (T_s - T_{be}) \exp\left(-\frac{hA_s}{\dot{m} c_p}\right), \qquad q = \dot{m} c_p (T_{bs} - T_{be}).$$

4. Resolución de ecuaciones.

La temperatura de evaluación de propiedades es:

$$T_b = \frac{T_{be} + T_{bs}}{2}.$$

Como T_{bs} es desconocida, se toma inicialmente:

$$T_{bs}^{(0)} = \frac{127 + 327}{2} = 227\,^\circ\mathrm{C}.$$

Así:

$$T_b^{(0)} = \frac{127 + 227}{2} = 177\,^\circ\mathrm{C}.$$

De la tabla de propiedades del aire:

$$\begin{aligned} &\rho = 0{,}784\,\mathrm{kg/m^3}, && c_p = 1019\,\mathrm{J/(kg\,K)}, \\ &\mu = 2{,}4914 \times 10^{-5}\,\mathrm{kg/(m\,s)}, && \nu = 3{,}18 \times 10^{-5}\,\mathrm{m^2/s}, \\ &k = 0{,}036\,26\,\mathrm{W/(m\,K)}, && \mathrm{Pr} = 0{,}6995. \end{aligned}$$

$$A = 0{,}010 \cdot 0{,}5 = 0{,}005\,\mathrm{m^2}.$$

$$p = 2(0{,}010 + 0{,}5) = 1{,}02\,\mathrm{m}.$$

$$A_{\mathrm{conv}} = pL = 1{,}02 \cdot 0{,}8 = 0{,}816\,\mathrm{m^2}.$$

$$D_h = 4\frac{A}{p} = 0{,}0196\,\mathrm{m}.$$

$$v = \frac{\dot{m}}{\rho A} = 28{,}1\,\mathrm{m/s}.$$

$$\mathrm{Re} = \frac{v D_h}{\nu} = 17303 > 2300,$$

por lo que el flujo es turbulento.

Con Gnielinski:

$$\mathrm{Nu}_b = \frac{(f/8)(\mathrm{Re}-1000)\mathrm{Pr}}{1+12{,}7(f/8)^{1/2}(\mathrm{Pr}^{2/3}-1)} = 45{,}1,$$

con

$$0{,}5 < \mathrm{Pr} < 2000, \qquad 3000 < \mathrm{Re} < 5\cdot 10^6.$$

El factor $f = 0{,}0267$ es el factor de fricción de Darcy.

La corrección de Nusselt por temperatura, para calentamiento de gas turbulento, usa $n = -0{,}55$:

$$\mathrm{Nu} = \mathrm{Nu}_b\left(\frac{T_s}{T_b}\right)^n = 45{,}1\left(\frac{327+273{,}15}{177+273{,}15}\right)^{-0{,}55} = 38{,}5.$$

$$h = \frac{\mathrm{Nu}k}{D_h} = 71{,}1\,\mathrm{W/(m^2\,K)}.$$

$$\frac{hpL}{\dot{m}c_p} = 0{,}5180.$$

$$T_{bs} = T_s - (T_s - T_{be})\exp\left(-\frac{hpL}{\dot{m}c_p}\right) = 327 - (327-127)e^{-0{,}5180} = 207{,}9\,^\circ\mathrm{C}.$$

Como el valor inicial era 227 °C, no está convergido.

Segunda iteración:

$$T_b^{(1)} = \frac{127+207{,}9}{2} = 167{,}4\,^\circ\mathrm{C}.$$

Propiedades:

$$\rho = 0{,}801\,\mathrm{kg/m^3}, \qquad c_p = 1017\,\mathrm{J/(kg\,K)},$$
$$\mu = 2{,}4511\times 10^{-5}\,\mathrm{kg/(m\,s)}, \qquad \nu = 3{,}06\times 10^{-5}\,\mathrm{m^2/s},$$
$$k = 0{,}035\,61\,\mathrm{W/(m\,K)}, \qquad \mathrm{Pr} = 0{,}7006.$$

$$v = 27{,}5\,\mathrm{m/s}, \qquad \mathrm{Re} = 17599 > 2300.$$

$$\mathrm{Nu}_b(\mathrm{Gnielinski}) = 45{,}9.$$

$$\mathrm{Nu} = 38{,}7.$$

$$h = 70{,}4\,\mathrm{W/(m^2\,K)}.$$

$$\frac{hpL}{\dot{m}c_p} = 0{,}5131.$$

$$T_{bs} = 207{,}3\,^\circ\mathrm{C},$$

que se considera convergido frente al valor anterior de 207,9 °C.

Con $T_s = \mathrm{cte}$:

$$q = hA_{\mathrm{conv}}\Delta T_{\mathrm{lm}}.$$

$$\Delta T_e = T_s - T_{be} = 327 - 127 = 200\,^\circ\mathrm{C},$$

$$\Delta T_s = T_s - T_{bs} = 327 - 207{,}3 = 119{,}7\,^\circ\mathrm{C}.$$

$$\Delta T_{\mathrm{lm}} = \frac{\Delta T_e - \Delta T_s}{\ln(\Delta T_e/\Delta T_s)} = 156{,}4\,^\circ\mathrm{C}.$$

$$q = 70{,}4\cdot 0{,}816\cdot 156{,}4 = 8983\,\mathrm{W}.$$

También:

$$q = \dot{m}c_p(T_{bs} - T_{be}) = 0{,}11\cdot 1017\cdot(207{,}3-127) = 8983\,\mathrm{W}.$$

5. Conclusiones o interpretación.

$$\boxed{T_{bs} = 207{,}3\,^\circ\mathrm{C}, \qquad h = 70{,}4\,\mathrm{W/(m^2\,K)}, \qquad q = 8983\,\mathrm{W}.}$$

Comprobación final

Verifique D_h, Reynolds, longitud de entrada y que $q = \dot{m}c_p(T_{b,s} - T_{b,e})$ coincide con la transferencia calculada por $hA\Delta T$.

4.10.8 Ejercicio resuelto 8. Conducto cuadrado con convección interna y externa

Descripción del problema

Sea un conducto de 7 m de longitud, sección cuadrada con 100 mm de lado, espesor de pared nulo y temperatura superficial uniforme. Internamente transporta un fluido 1 con un Reynolds de 700. Se adopta como hipótesis que el flujo interno está hidrodinámica y térmicamente desarrollado en la región de cálculo. Externamente le incide de forma perpendicular un fluido 2 a una velocidad uniforme de corriente libre de 10 m/s. Se fija una cara plana del conducto a barlovento y se toma como longitud característica el lado exterior normal a la corriente. La aplicación de Hilpert a la sección cuadrada se usa como aproximación docente formal con las propiedades efectivas suministradas, no como validación universal para cualquier orientación o fluido real. Se pide: a) el producto $\overline{U}A$; b) ídem suponiendo que el conducto tiene un espesor de pared de 5 mm, manteniendo la dimensión interior de 100 mm, con una conductividad de 80 W/(m K). Considerar constantes las propiedades de ambos fluidos: fluido 1, $k_1 = 1\,\mathrm{W/(m\,K)}$; fluido 2, $k_2 = 10\,\mathrm{W/(m\,K)}$, $\nu_2 = 1 \times 10^{-4}\,\mathrm{m^2/s}$ y $\mathrm{Pr}_2 = 1$.

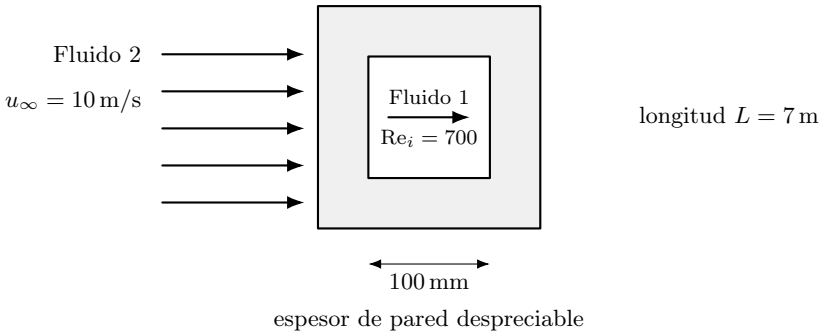


Figura 4.23: Esquema del ejercicio resuelto 8: conducto cuadrado con flujo interno y flujo externo perpendicular.

Datos.

- $L = 7\,\mathrm{m}$.
- Conducto cuadrado interior de lado $l_i = 0{,}1\,\mathrm{m}$.
- $\mathrm{Re}_i = 700$.
- $u_\infty = 10\,\mathrm{m/s}$.
- $k_1 = 1\,\mathrm{W/(m\,K)}$.
- $k_2 = 10\,\mathrm{W/(m\,K)}$.
- $\nu_2 = 1 \times 10^{-4}\,\mathrm{m^2/s}$.
- $\mathrm{Pr}_2 = 1$.
- En el apartado b): $e = 5\,\mathrm{mm}$, $k_s = 80\,\mathrm{W/(m\,K)}$.

Se pide.

a) $\overline{U}A$ con espesor de pared nulo.

b) $\overline{U}A$ con espesor de pared no nulo.

Resolución del problema

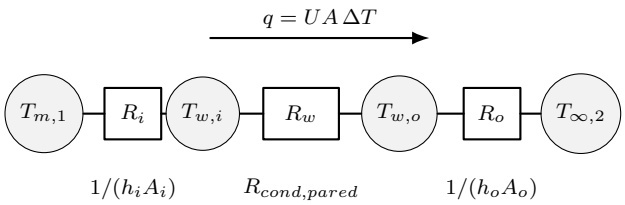
Antes de calcular

Predicción física. La transferencia queda limitada por la combinación de convección interna, conducción de pared y convección externa; la mayor resistencia controla el salto principal.

Modelo esperado. Red de resistencias con coeficientes convectivos obtenidos de correlaciones internas y externas.

1. Simplificaciones. Se separan las resistencias convectivas interna y externa. Para el exterior, la cara frontal del cuadrado está normal a la corriente y la longitud característica es l_e. Las constantes de Hilpert, originalmente correlacionadas para geometrías específicas, se aplican aquí como aproximación docente indicada por el ejercicio. En el caso de pared despreciable sólo hay convecciones en serie; con pared de espesor finito se añade una resistencia conductiva aproximada de pared delgada coherente con la geometría cuadrada. $\mathrm{Re}_i = 700$ sólo identifica el régimen laminar; no demuestra desarrollo térmico. El valor $\mathrm{Nu}_i = 2{,}98$ se usa por la hipótesis explícita de desarrollo completo. Como no se proporciona Pr_i, no puede verificarse la longitud de entrada térmica.

2. Modelo adoptado de resistencias.



en el apartado a) $R_w = 0$; en el apartado b) se usa la resistencia de pared cuadrada indicada en la solución

Figura 4.24: Cadena de resistencias interior–pared–exterior del conducto cuadrado.

3. Ecuaciones. Para el interior del conducto cuadrado:

$$D_h = \frac{4A_c}{p}, \qquad R_i = \frac{1}{h_i A_i}, \qquad h_i = \frac{\mathrm{Nu}_i k_f}{D_h}.$$

La resistencia conductiva de pared delgada se modela como:

$$R_k \simeq \frac{e}{k_p A_m}.$$

En el exterior, para flujo cruzado sobre sección cuadrada:

$$\mathrm{Re}_o = \frac{u_\infty D}{\nu}, \qquad \mathrm{Nu}_o = C\mathrm{Re}_o^m \mathrm{Pr}^{1/3}, \qquad R_o = \frac{1}{h_o A_o}.$$

La conductancia global se obtiene de:

$$(UA)^{-1} = R_i + R_k + R_o.$$

4. Resolución de ecuaciones.

a) Espesor de pared nulo.

Flujo interno:

$$\mathrm{Re} = 700 \quad \Longrightarrow \quad \text{flujo laminar.}$$

Para $T_s = \text{cte}$ y conducto cuadrado plenamente desarrollado:

$$\mathrm{Nu} = 2{,}98.$$

Como $D_h = l_i$:

$$h_i = \frac{\mathrm{Nu}k_1}{D_h} = \frac{2{,}98 \cdot 1}{0{,}1} = 29{,}8\,\mathrm{W/(m^2\,K)}.$$

Flujo externo:

$$\mathrm{Re} = \frac{u_\infty l_i}{\nu_2} = \frac{10 \cdot 0{,}1}{10^{-4}} = 10^4.$$

Con Hilpert:

$$C = 0{,}102, \qquad m = 0{,}675.$$

$$\mathrm{Nu} = C\mathrm{Re}^m\mathrm{Pr}^{1/3} = 0{,}102 \cdot 10000^{0{,}675} \cdot 1^{1/3} = 51{,}12.$$

$$h_e = \frac{\mathrm{Nu}k_2}{l_i} = \frac{51{,}12 \cdot 10}{0{,}1} = 5112\,\mathrm{W/(m^2\,K)}.$$

El producto global es:

$$\overline{U}A = \frac{1}{\sum R} = \frac{1}{\dfrac{1}{h_iA_i} + \dfrac{1}{h_eA_e}}.$$

Como

$$A_i = A_e = 4 \cdot 0{,}1 \cdot 7 = 2{,}8\,\mathrm{m^2},$$

se obtiene:

$$\overline{U}A = 83{,}0\,\mathrm{W/K}.$$

b) Espesor de pared no nulo.

Flujo interno:

$$\mathrm{Nu} = 2{,}98, \qquad h_i = 29{,}8\,\mathrm{W/(m^2\,K)}.$$

El lado exterior vale:

$$l_e = 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}005 = 0{,}11\,\mathrm{m}.$$

Flujo externo:

$$\mathrm{Re} = \frac{u_\infty l_e}{\nu_2} = 11000.$$

Con Hilpert:

$$C = 0{,}102, \qquad m = 0{,}675.$$

$$\mathrm{Nu} = C\mathrm{Re}^m\mathrm{Pr}^{1/3} = 54{,}5.$$

$$h_e = \frac{\mathrm{Nu}k_2}{l_e} = 4956\,\mathrm{W/(m^2\,K)}.$$

Las áreas son:

$$A_i = 4 \cdot 0{,}1 \cdot 7 = 2{,}8\,\mathrm{m^2}, \qquad A_e = 4 \cdot 0{,}11 \cdot 7 = 3{,}08\,\mathrm{m^2}.$$

La resistencia conductiva de la pared cuadrada delgada se estima con el área media de conducción:

$$l_m = \frac{l_i + l_e}{2} = 0{,}105\,\mathrm{m}, \qquad A_m = 4l_mL = 4 \cdot 0{,}105 \cdot 7 = 2{,}94\,\mathrm{m^2}.$$

$$R_k \simeq \frac{e}{k_sA_m} = \frac{0{,}005}{80 \cdot 2{,}94} = 2{,}126 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{K/W}.$$

Con

$$R_i = \frac{1}{h_iA_i} = 1{,}198 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{K/W}, \qquad R_o = \frac{1}{h_eA_e} = 6{,}55 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{K/W},$$

la pared representa

$$\frac{R_k}{R_i + R_k + R_o} = 1{,}76 \cdot 10^{-3} \simeq 0{,}18\,\%.$$

Por ello, el error de modelar las cuatro caras como paredes planas con área media, incluida la incertidumbre local de las esquinas, tiene una influencia despreciable sobre el UA global de este ejercicio.

Comentario técnico. Para esta geometría cuadrada de pared delgada se usa una resistencia conductiva aproximada de pared plana basada en el área media. Esta resistencia es muy pequeña frente a la resistencia convectiva interna, por lo que no modifica de forma apreciable el producto global $\overline{U}A$.

Entonces:

$$\overline{U}A = \frac{1}{\dfrac{1}{h_i A_i} + R_k + \dfrac{1}{h_e A_e}} = 82{,}8\,\mathrm{W/K}.$$

5. Conclusiones o interpretación.

a) $\overline{U}A = 83{,}0\,\mathrm{W/K}$,
b) $\overline{U}A = 82{,}8\,\mathrm{W/K}$.

Comprobación final

Compruebe que $UA > 0$, que la resistencia convectiva interna domina y que la pared aporta sólo aproximadamente el 0,18 por ciento de la resistencia total. No se solicitan temperaturas de pared porque faltan las temperaturas de masa de ambos fluidos.

4.10.9 Ejercicio resuelto 9. Pérdida térmica a través de la cámara de aire de un colector inclinado

Descripción del problema

Considérese un colector solar de placa plana de 2 m de longitud y 1 m de ancho, inclinado 60° respecto de la horizontal. La cubierta de vidrio está separada de la placa absorbedora una distancia normal de 2 cm; el hueco contiene aire a 1 bar. Las temperaturas de la placa y de la cubierta son 62 °C y 32 °C, respectivamente. Se pide la transferencia de calor a través del gas, despreciando los cantos.

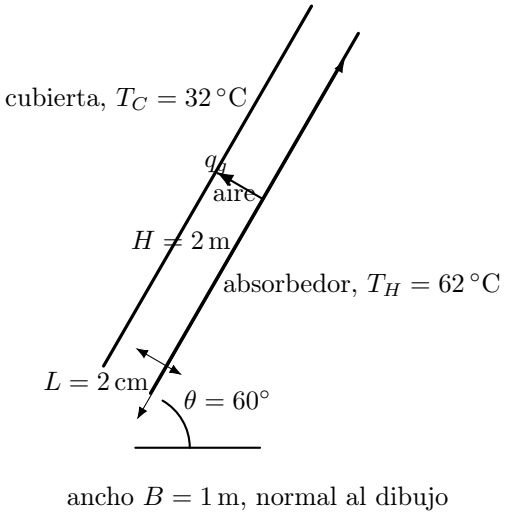


Figura 4.25: Colector inclinado. La separación L se mide normal a las placas y el ángulo desde la horizontal.

Datos.

$$H = 2\,\mathrm{m}, \quad B = 1\,\mathrm{m}, \quad L = 0{,}02\,\mathrm{m}, \quad \theta = 60°, \quad T_H = 62\,^\circ\mathrm{C}, \quad T_C = 32\,^\circ\mathrm{C}.$$

Resolución del problema

Antes de calcular

Predicción física. El número de Nusselt del hueco incluye el límite conductivo y la intensificación debida a la circulación por flotación.

Modelo esperado. Correlación de recinto inclinado largo, con L como separación normal.

1. Simplificaciones. Las placas son paralelas e isotermas, $H/L = 100 > 10$, el gas se trata con propiedades constantes a la temperatura media y se desprecian los cantos. La tabla disponible es para 1 atm; usarla para 1 bar introduce una diferencia pequeña que se declara como aproximación docente.

2. Modelo. La transferencia a través del gas se escribe

$$q_g = \bar{h}_g A (T_H - T_C), \qquad \bar{h}_g = \frac{\overline{Nu}_L k}{L}, \qquad A = HB.$$

Aunque se denomine coeficiente convectivo, $\overline{Nu}_L = 1$ representa conducción pura y $\overline{Nu}_L > 1$ incorpora la intensificación advectiva.

3. Cálculo.

$$T_f = \frac{T_H + T_C}{2} = 47\,^\circ\mathrm{C}, \qquad \beta = \frac{1}{320{,}15} = 3{,}1235 \times 10^{-3}\,/\mathrm{K}.$$

Con $k = 0{,}027\,134\,\mathrm{W/(m\,K)}$, $\nu = 1{,}77 \times 10^{-5}\,\mathrm{m^2/s}$ y $\alpha = 2{,}44 \times 10^{-5}\,\mathrm{m^2/s}$:

$$Ra_L = \frac{g\beta(T_H - T_C)L^3}{\nu\alpha} = 1{,}7028 \times 10^4.$$

Para $\theta = 60°$, $0 < Ra_L < 10^7$ y $H/L > 10$:

$$G = \frac{0{,}5}{[1 + (Ra_L/3160)^{20{,}6}]^{0{,}1}} = 0{,}01556,$$

$$Nu_1 = \left\{ 1 + \left[\frac{0{,}0936 Ra_L^{0{,}314}}{1+G} \right]^7 \right\}^{1/7} = 1{,}9665,$$

$$Nu_2 = \left(0{,}104 + \frac{0{,}175}{H/L} \right) Ra_L^{0{,}283} = 1{,}6661, \qquad \overline{Nu}_L = \text{máx}(Nu_1, Nu_2) = 1{,}9665.$$

Por tanto,

$$\bar{h}_g = \frac{1{,}9665(0{,}027134)}{0{,}02} = 2{,}6680\,\text{W}/(\text{m}^2\,\text{K}),$$

$$\boxed{q_g = \bar{h}_g (HB)(T_H - T_C) = 160{,}08\,\text{W} \simeq 160\,\text{W}.}$$

Comprobación final

Compruebe que L es la separación normal, que $H/L = 100$, que $\overline{Nu}_L \geq 1$ y que el calor pasa de la placa absorbedora a la cubierta.

4.10.10 Ejercicio resuelto 10. Cámara de aire entre paredes con convección y radiación

Descripción del problema

Una pared de 3 m de altura y muy ancha, perpendicularmente al plano del dibujo, tiene una cámara de aire de 10 cm de espesor. Las caras interiores de las paredes presentan temperaturas de 25 °C y 35 °C, y emisividad $\varepsilon = 0{,}91$, comportándose como superficies grises difusas. Despreciando el calor transmitido por los extremos superior e inferior del hueco, calcular: a) el flujo de calor total que se transmite entre ambas paredes; b) la diferencia de temperaturas asociada al cruce convencional desde la rama esencialmente conductiva ($\overline{Nu} \simeq 1$) hacia una intensificación apreciable por flotación; c) el espesor de la cámara que produce ese mismo cruce con las temperaturas iniciales; d) el flujo de calor transmitido si la cámara en su estado inicial se rellena de un aislante sólido de conductividad 0,046 W/(m K).

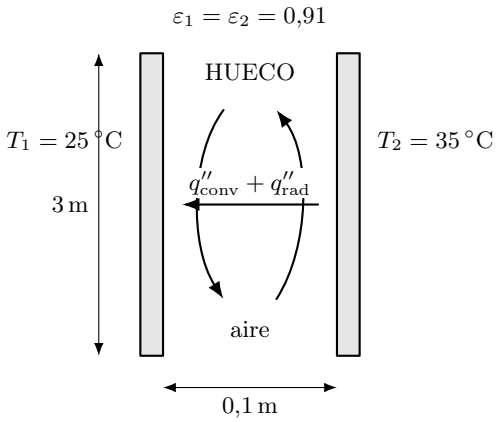


Figura 4.26: Esquema del ejercicio resuelto 10: cámara vertical de aire entre dos superficies grises difusas.

Datos.

- Altura de pared: $H = 3\,\mathrm{m}$.
- Espesor de cámara: $L = 0{,}1\,\mathrm{m}$.
- $T_1 = 25\,^\circ\mathrm{C}$.
- $T_2 = 35\,^\circ\mathrm{C}$.
- $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0{,}91$.
- $k_{\mathrm{aislante}} = 0{,}046\,\mathrm{W/(m\,K)}$.

Se pide.

a) q''_{tot}.

b) ΔT del cruce convencional $Ra_L \simeq 1000$.

c) Espesor L correspondiente al cruce convencional.

d) q'' con aislante sólido.

Resolución del problema

Antes de calcular

Predicción física. Convección natural y radiación transfieren calor en paralelo entre las paredes; ninguna debe sumarse dos veces.

Modelo esperado. Coeficiente equivalente de cavidad más intercambio radiativo linealizado o exacto.

1. Simplificaciones. Las paredes interiores se consideran grises difusas e isótermas. La transmisión entre ellas se descompone en convección natural confinada y radiación en paralelo; los extremos superior e inferior del hueco se tratan como adiabáticos.

2. Modelo adoptado de resistencias.

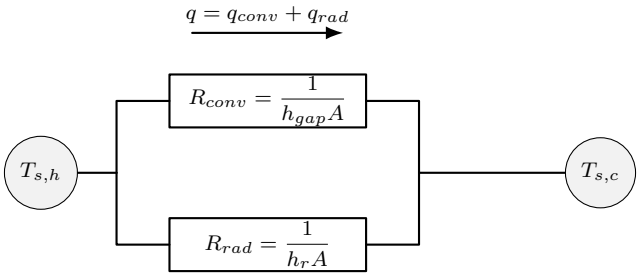


Figura 4.27: Ramas paralelas de convección natural y radiación entre las paredes de la cámara de aire.

3. Ecuaciones. La radiación entre placas grises paralelas se calcula tomando positivo el flujo desde la pared caliente 2 hacia la pared fría 1:

$$q''_{rad,2\to1} = \frac{\sigma(T_2^4 - T_1^4)}{1/\varepsilon_2 + 1/\varepsilon_1 - 1} > 0, \qquad T_2 > T_1, \quad T_1, T_2 \text{ en kelvin.}$$

La convección natural confinada usa:

$$\mathrm{Ra} = \frac{\beta \Delta T g L^3}{\nu \alpha}, \qquad q''_{conv} = \frac{\mathrm{Nu} k}{L} \Delta T.$$

La pérdida total es la suma en paralelo:

$$q''_{tot} = q''_{rad} + q''_{conv}.$$

4. Resolución de ecuaciones.

El calor a través del hueco se transmite por convección y radiación. Para la radiación, puede aplicarse la expresión de intercambio entre dos superficies planas muy próximas:

$$q''_{\mathrm{rad}} = q''_{2\to1} = \frac{\sigma\left(T_2^4 - T_1^4\right)}{\dfrac{1}{\varepsilon_1} + \dfrac{1}{\varepsilon_2} - 1} = 52{,}69\,\mathrm{W/m^2}.$$

Para la convección:

$$q''_{\mathrm{conv}} = h(T_2 - T_1).$$

Temperatura de propiedades:

$$T_f = \frac{T_1 + T_2}{2} = 30\,^\circ\mathrm{C}.$$

$$k = 0{,}025\,88\,\mathrm{W/(m\,K)}, \qquad \nu = 1{,}608 \times 10^{-5}\,\mathrm{m^2/s}, \qquad \mathrm{Pr} = 0{,}7282.$$

$$\beta = \frac{1}{\overline{T}} = \frac{1}{30 + 273{,}15} = 0{,}003\,30/\mathrm{K}.$$

$$\mathrm{Ra} = \frac{\beta \Delta T\, g L^3}{\nu^2}\mathrm{Pr} = \frac{0{,}00330 \cdot (35-25) \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}1^3}{(1{,}608 \cdot 10^{-5})^2}\, 0{,}7282 = 911811.$$

Para $\theta = 90°$, $10^3 < \mathrm{Ra} < 10^7$ y $H/L > 10$:

$$\mathrm{Nu}_{90°} = \text{máx}\{\mathrm{Nu}_1, \mathrm{Nu}_2, \mathrm{Nu}_3\} = 5{,}867.$$

$$\mathrm{Nu}_1 = 0{,}0605\, \mathrm{Ra}^{1/3} = 5{,}867.$$

$$\mathrm{Nu}_2 = \left\{1 + \left[\frac{0{,}104\, \mathrm{Ra}^{0{,}293}}{1 + (6310/\mathrm{Ra})^{1{,}36}}\right]^3\right\}^{1/3} = 5{,}801.$$

$$\mathrm{Nu}_3 = 0{,}242 \left(\frac{\mathrm{Ra}}{H/L}\right)^{0{,}272} = 4{,}010.$$

Además, $\mathrm{Nu}_{90°} = 1$ para $\mathrm{Ra} \leq 1000$.

Así:

$$h = \frac{\mathrm{Nu} k}{L} = 1{,}518\, \mathrm{W/(m^2\, K)}.$$

$$q''_{\mathrm{conv}} = h(T_2 - T_1) = 1{,}518 \cdot 10 = 15{,}18\, \mathrm{W/m^2}.$$

$$q''_{\mathrm{tot}} = q''_{\mathrm{conv}} + q''_{\mathrm{rad}} = 15{,}18 + 52{,}69 = 67{,}87\, \mathrm{W/m^2}.$$

Para localizar el cruce convencional de la correlación entre la rama esencialmente conductiva y la intensificación apreciable por flotación se adopta $Ra_L = 1000$. En una cámara vertical puede existir una circulación débil para cualquier $\Delta T \neq 0$; los resultados siguientes no son un umbral de aparición del movimiento:

$$\mathrm{Ra} = \frac{\beta \Delta T\, g L^3}{\nu^2}\mathrm{Pr} = \frac{0{,}00330 \cdot \Delta T \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}1^3}{(1{,}608 \cdot 10^{-5})^2}\, 0{,}7282 = 1000.$$

Por tanto:

$$\Delta T = 0{,}011\, °\mathrm{C}.$$

Para el espesor del hueco con las temperaturas iniciales:

$$\mathrm{Ra} = \frac{0{,}00330 \cdot (35-25) \cdot 9{,}81 \cdot L^3}{(1{,}608 \cdot 10^{-5})^2}\, 0{,}7282 \geq 1000,$$

de donde:

$$L \geq 0{,}010\, \mathrm{m}.$$

Si la pared se rellena de aislante:

$$q'' = \frac{T_2 - T_1}{l/k} = \frac{35-25}{0{,}1/0{,}046} = 4{,}60\, \mathrm{W/m^2}.$$

5. Conclusiones o interpretación.

a) $q''_{\mathrm{tot}} = 67{,}87\, \mathrm{W/m^2}$,
b) $\Delta T_{\mathrm{inicio}} = 0{,}011\, °\mathrm{C} \simeq 0{,}011\, \mathrm{K}$,
c) $L_{\mathrm{inicio}} = 10\, \mathrm{mm}$,
d) $q'' = 4{,}60\, \mathrm{W/m^2}$.

Comprobación final

La potencia total debe ser la suma de ambas contribuciones y los coeficientes equivalentes deben producir el mismo flujo que las expresiones originales.

4.10.11 Ejercicio resuelto 11. Disipación de una tarjeta vertical con convección natural y mixta

Descripción del problema

Considérese una tarjeta de ordenador de 175 mm de altura y 250 mm de longitud dispuesta en posición vertical a una temperatura más o menos uniforme de 67 °C, en contacto con aire a 20 °C por ambas caras. Estimar la potencia térmica que es posible disipar suponiendo las siguientes condiciones: a) únicamente convección natural; b) corriente forzada ascendente a velocidades 0,1 m/s, 0,6 m/s y 5 m/s; c) repetir el apartado anterior considerando sentido descendente de la corriente forzada.

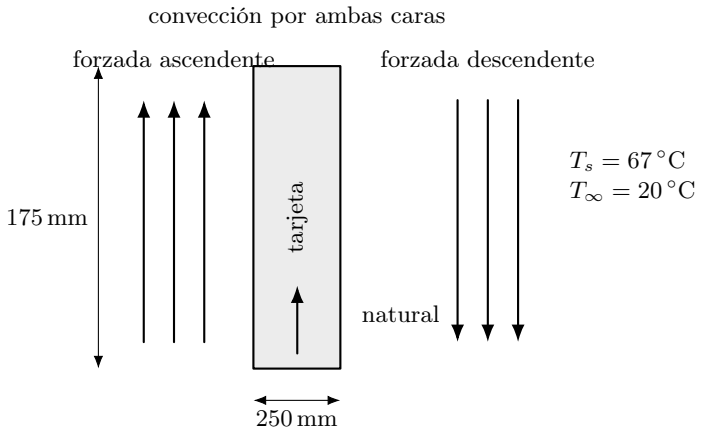


Figura 4.28: Esquema del ejercicio resuelto 11: tarjeta vertical con convección natural y corrientes forzadas ascendente/descendente.

Datos.

- Altura: $L = 175\,\mathrm{mm} = 0{,}175\,\mathrm{m}$.
- Longitud: $B = 250\,\mathrm{mm} = 0{,}250\,\mathrm{m}$.
- $T_s = 67\,^\circ\mathrm{C}$.
- $T_\infty = 20\,^\circ\mathrm{C}$.
- Velocidades: $u_\infty = 0{,}1\,\mathrm{m/s}$, $0{,}6\,\mathrm{m/s}$ y $5\,\mathrm{m/s}$.
- Ambas caras en contacto con el aire.

Se pide. Potencia térmica disipable en convección natural, forzada ascendente y forzada descendente.

Resolución del problema

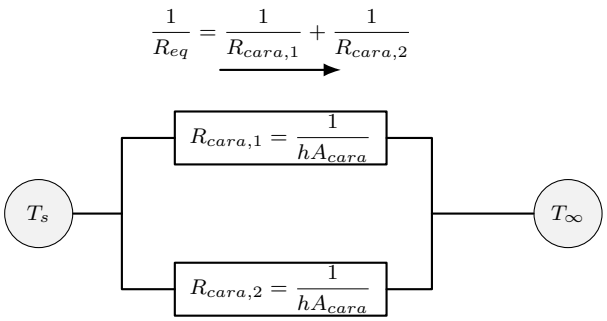
Antes de calcular

Predicción física. La convección natural siempre existe; el flujo forzado puede reforzarla, oponerse a ella o dominarla. Como la tarjeta está caliente y es vertical, la flotación asciende: la corriente forzada ascendente es ayudada y la descendente es opuesta. El cociente de Richardson anticipará qué mecanismo pesa más.

Modelo esperado. Calcular primero los Nusselt medios natural y forzado, formar $Ri = Gr/Re^2$ y combinar sólo cuando ambos mecanismos sean relevantes.

1. Simplificaciones. La tarjeta se considera isoterma y vertical, con intercambio por ambas caras. Se calcula primero la convección natural y después se compara con la convección forzada ascendente o descendente para decidir el tratamiento mixto.

2. Modelo adoptado de resistencias.



se evalúa h mediante la correlación natural suministrada

Figura 4.29: Dos ramas convectivas, una por cada cara, para la tarjeta vertical.

3. Ecuaciones. Para la placa vertical:

$$\mathrm{Ra}_L = \frac{\beta(T_s - T_\infty)gL^3}{\nu\alpha}, \qquad \mathrm{Nu}_n = 0{,}68 + \frac{0{,}670\mathrm{Ra}_L^{1/4}}{[1 + (0{,}492/\mathrm{Pr})^{9/16}]^{4/9}}.$$

La convección forzada laminar sobre placa se estima con:

$$\mathrm{Nu}_f = 0{,}664\mathrm{Re}_L^{1/2}\mathrm{Pr}^{1/3}, \qquad \mathrm{Re}_L = \frac{u_\infty L}{\nu}.$$

La importancia relativa se decide con:

$$\frac{\mathrm{Gr}}{\mathrm{Re}_L^2}, \qquad \mathrm{Gr} = \frac{\mathrm{Ra}}{\mathrm{Pr}}.$$

Si el régimen es mixto, las cantidades que se combinan son Nusselt *medios*. Para la placa, $Nu_0 = 0$, y el material histórico del curso emplea:

$$\overline{\mathrm{Nu}}^3 = \overline{\mathrm{Nu}}_f^3 + \overline{\mathrm{Nu}}_n^3 \quad \text{(ayudada)},$$

$$\overline{\mathrm{Nu}}^3 = \left|\overline{\mathrm{Nu}}_f^3 - \overline{\mathrm{Nu}}_n^3\right| \quad \text{(opuesta)}.$$

La segunda expresión es una regla de combinación aproximada de ingeniería y requiere especial cautela cuando ambas contribuciones son comparables. Finalmente,

$$q = h(2LB)(T_s - T_\infty), \qquad h = \frac{\overline{\mathrm{Nu}}k}{L}.$$

4. Resolución de ecuaciones.

La temperatura de evaluación de propiedades es:

$$T_f = \frac{T_s + T_\infty}{2} = \frac{67 + 20}{2} = 43{,}5\,^\circ\mathrm{C}.$$

De las tablas del aire:

$$\nu = 1{,}736 \times 10^{-5}\,\mathrm{m^2/s}, \qquad k = 0{,}0275\,\mathrm{W/(m\,K)}, \qquad \mathrm{Pr} = 0{,}725.$$

a) Sólo convección natural.

$$\Delta T = T_s - T_\infty = 47.$$

$$\beta = \frac{1}{\overline{T}} = 0{,}003\,16/\mathrm{K}.$$

$$\mathrm{Ra} = \frac{\beta \Delta T\, g L^3}{\nu \alpha} = \frac{\beta \Delta T\, g L^3}{\nu^2}\mathrm{Pr} = 1{,}88 \cdot 10^7.$$

Con Churchill–Chu, utilizando de forma consistente las propiedades impresas,

$$\overline{\mathrm{Nu}}_n = 0{,}68 + \frac{0{,}670\mathrm{Ra}^{1/4}}{\left[1 + (0{,}492/\mathrm{Pr})^{9/16}\right]^{4/9}} = 34{,}61, \qquad \mathrm{Ra} < 10^9.$$

$$h_n = \frac{\overline{\mathrm{Nu}}_n k}{L} = 5{,}44\,\mathrm{W/(m^2\,K)}.$$

$$A_{\mathrm{conv}} = 2LB = 2 \cdot 0{,}175 \cdot 0{,}250 = 0{,}0875\,\mathrm{m^2}.$$

$$q_n = h_n A(T_s - T_\infty) = 22{,}37\,\mathrm{W}.$$

Auditoría de coherencia numérica La solución histórica imprimía $\overline{\mathrm{Nu}}_n = 34{,}1$, $q_n = 21{,}9\,\mathrm{W}$, $\overline{\mathrm{Nu}}_f = 45{,}7$ para $0{,}6\,\mathrm{m/s}$ y $\overline{\mathrm{Nu}}_f = 131{,}9$ para $5\,\mathrm{m/s}$. Esos valores no se reproducen al sustituir literalmente $\nu = 1{,}736 \times 10^{-5}\,\mathrm{m^2/s}$, $k = 0{,}0275\,\mathrm{W/(m\,K)}$ y $\mathrm{Pr} = 0{,}725$ en las correlaciones que se muestran. Por ello se considera una errata numérica demostrable y, a partir de aquí, se conservan las mismas ecuaciones y metodología pero se recalculan todas las ramas con un único juego coherente de propiedades. Los valores históricos se recogen en el informe de auditoría de esta edición.

b) $u_\infty = 0{,}1\,\mathrm{m/s}$.

Evaluación de convección natural frente a convección forzada:

$$\mathrm{Re} = \frac{u_\infty L}{\nu} = 1008.$$

$$\mathrm{Gr} = \frac{\mathrm{Ra}}{\mathrm{Pr}} \simeq 2{,}591 \cdot 10^7.$$

$$\mathrm{Ri} = \frac{\mathrm{Gr}}{\mathrm{Re}^2} = 25{,}5 > 10.$$

La convección forzada es despreciable en el modelo operativo:

$$\overline{\mathrm{Nu}}_{\mathrm{mixto}} \approx \overline{\mathrm{Nu}}_n = 34{,}61, \qquad q \approx 22{,}37\,\mathrm{W}.$$

Como comprobación algebraica, la correlación forzada da $\overline{\mathrm{Nu}}_f = 18{,}94$. Si, pese a $\mathrm{Ri} > 10$, se evaluasen las reglas cúbicas, resultarían aproximadamente $23{,}53\,\mathrm{W}$ en sentido ayudado y $21{,}07\,\mathrm{W}$ en sentido opuesto. La decisión recomendada sigue siendo usar la solución natural dominante, $q \simeq 22{,}37\,\mathrm{W}$.

c) $u_\infty = 0{,}6\,\mathrm{m/s}$.

$$\mathrm{Re} = 6048.$$

$$\mathrm{Ri} = \frac{\mathrm{Gr}}{\mathrm{Re}^2} = 0{,}708.$$

Como $0{,}1 < \mathrm{Ri} < 10$, hay convección mixta y no se pueden despreciar ni la natural ni la forzada.

Para convección forzada laminar:

$$\overline{\mathrm{Nu}}_f = 0{,}664\,\mathrm{Re}_L^{1/2}\mathrm{Pr}^{1/3} = 46{,}39, \qquad \mathrm{Pr} > 0{,}6, \qquad \mathrm{Re}_L < \mathrm{Re}_c.$$

Para la corriente **ascendente**, la flotación de la tarjeta caliente también asciende y la interacción es ayudada:

$$(\overline{\mathrm{Nu}} - \mathrm{Nu}_0)^3 = (\overline{\mathrm{Nu}}_f - \mathrm{Nu}_0)^3 + (\overline{\mathrm{Nu}}_n - \mathrm{Nu}_0)^3.$$

Para placas, $\mathrm{Nu}_0 = 0$:

$$\overline{\mathrm{Nu}}_n = 34{,}61, \qquad \overline{\mathrm{Nu}}_f = 46{,}39, \qquad \overline{\mathrm{Nu}} = 52{,}09.$$

$$h = 8{,}19\,\mathrm{W/(m^2\,K)}, \qquad q = 33{,}66\,\mathrm{W}.$$

Para la corriente **descendente**, el movimiento impuesto se opone a la flotación ascendente y se utiliza la regla cúbica opuesta como estimación de ingeniería:

$$(\overline{\mathrm{Nu}} - \mathrm{Nu}_0)^3 = \left|(\overline{\mathrm{Nu}}_f - \mathrm{Nu}_0)^3 - (\overline{\mathrm{Nu}}_n - \mathrm{Nu}_0)^3\right|.$$

$$\overline{\mathrm{Nu}} = 38{,}79, \qquad h = 6{,}10\,\mathrm{W/(m^2\,K)}, \qquad q = 25{,}07\,\mathrm{W}.$$

Esta rama opuesta debe interpretarse como una aproximación de ingeniería; cuando ambas contribuciones son comparables conviene preferir una correlación específica si se requiere precisión de diseño.

d) $u_\infty = 5\,\mathrm{m/s}$.

$$\mathrm{Re} = 50403.$$

$$\mathrm{Ri} = \frac{\mathrm{Gr}}{\mathrm{Re}^2} = 0{,}0102 < 0{,}1.$$

La flotación es despreciable frente al movimiento impuesto:

$$\overline{\mathrm{Nu}}_f = 0{,}664\,\mathrm{Re}_L^{1/2}\mathrm{Pr}^{1/3} = 133{,}92, \qquad \mathrm{Pr} > 0{,}6, \qquad \mathrm{Re}_L < \mathrm{Re}_c.$$

$$\overline{\mathrm{Nu}}_{\mathrm{mixto}} \approx \overline{\mathrm{Nu}}_f = 133{,}92, \qquad h = 21{,}04\,\mathrm{W/(m^2\,K)}, \qquad q = 86{,}55\,\mathrm{W}.$$

Esto resuelve explícitamente la antigua discrepancia entre 84,6 W y 85,1 W: ninguno de esos dos valores es reproducible con el conjunto de propiedades impreso. Con las cifras declaradas, la rama puramente forzada es 86,55 W. Si se evaluara la regla cúbica fuera de la necesidad operativa, se obtendrían 87,04 W para interacción ayudada y 86,04 W para interacción opuesta, diferencias pequeñas coherentes con $\mathrm{Ri} \ll 1$.

5. Conclusiones o interpretación.

$$\boxed{q_{\mathrm{natural}} = 22{,}37\,\mathrm{W}.}$$

u_∞	Ri	modelo operativo	potencia recomendada
0,1 m/s	25,5	natural dominante	22,37 W
0,6 m/s	0,708	mixta ayudada/opuesta	33,66 W / 25,07 W
5 m/s	0,0102	forzada dominante	86,55 W

Comprobación final

Compruebe $\mathrm{Ri} = \mathrm{Gr}/\mathrm{Re}^2$, los rangos de ambas correlaciones, la orientación ayudada u opuesta y que todas las ramas utilizan el mismo juego de propiedades. Para $\mathrm{Ri} > 10$ o $\mathrm{Ri} < 0{,}1$ adopte respectivamente el modelo puro natural o forzado; aplique la combinación sólo cuando ambas contribuciones sean relevantes.

4.10.12 Ejercicio resuelto 12. Calentamiento transitorio de una esfera de acero

Descripción del problema

Una esfera maciza de acero de 0,5 m de diámetro se somete a un proceso de calentamiento desde una temperatura inicial de $-10\,^{\circ}\mathrm{C}$ hasta $51\,^{\circ}\mathrm{C}$ en un recinto de grandes dimensiones con aire a $100\,^{\circ}\mathrm{C}$ y paredes a $150\,^{\circ}\mathrm{C}$. La emisividad de la superficie de la esfera vale 0,4 y la de las paredes 0,87, ambas consideradas grises difusas. Se pide: a) la energía térmica absorbida por la esfera, supuesto que las temperaturas inicial y final son uniformes; b) el tiempo de calentamiento de la esfera en los siguientes supuestos: ausencia de movimiento forzado del aire; corriente forzada ascendente de aire a 1,5 m/s; corriente forzada horizontal de aire a 1,5 m/s. Resuelto con las siguientes propiedades para el acero: $\rho = 7830\,\mathrm{kg/m^3}$, $c = 434\,\mathrm{J/(kg\,K)}$ y $k = 64\,\mathrm{W/(m\,K)}$.

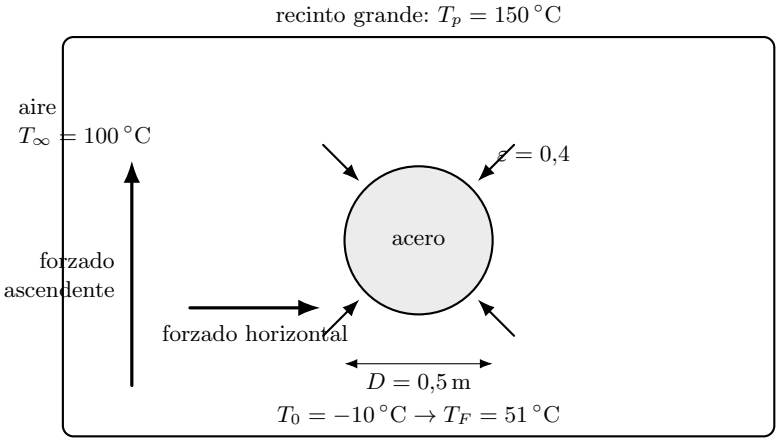


Figura 4.30: Esquema del ejercicio resuelto 12: esfera de acero calentada por convección y radiación en un recinto grande.

Datos.

- $D = 0{,}5\,\mathrm{m}$.
- $T_0 = -10\,^{\circ}\mathrm{C}$.
- $T_F = 51\,^{\circ}\mathrm{C}$.
- $T_\infty = 100\,^{\circ}\mathrm{C}$.
- $T_p = 150\,^{\circ}\mathrm{C}$.
- $\varepsilon = 0{,}4$.
- $\varepsilon_p = 0{,}87$.
- Acero: $\rho = 7830\,\mathrm{kg/m^3}$, $c = 434\,\mathrm{J/(kg\,K)}$, $k_s = 64\,\mathrm{W/(m\,K)}$.

Se pide.

a) Energía térmica absorbida por la esfera.

b) Tiempo de calentamiento sin forzado, con forzado ascendente y con forzado horizontal.

Resolución del problema

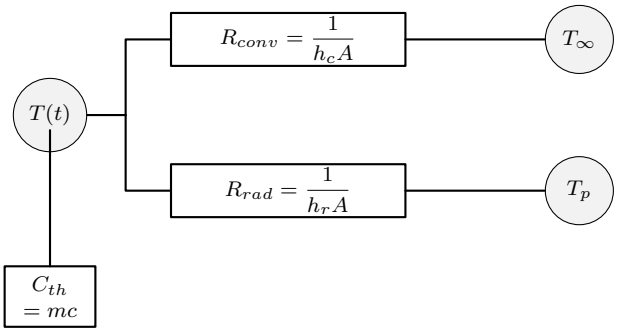
Antes de calcular

Predicción física. Antes de usar capacidad concentrada debe comprobarse Biot. Si es válido, toda la esfera cambia casi a la misma temperatura.

Modelo esperado. Modelo transitorio concentrado con $L_c = V/A$ y coeficiente convectivo apropiado.

1. Simplificaciones. La esfera se modela como cuerpo de temperatura uniforme cuando el número de Biot lo permite. La capacidad térmica del sólido se combina con las pérdidas o ganancias por convección y radiación linealizada hacia el aire y las paredes.

2. Modelo adoptado de resistencias.



modelo concentrado: la esfera almacena energía y la cede/recibe por convección y radiación

Figura 4.31: Modelo concentrado de la esfera con almacenamiento y pérdidas por convección y radiación.

3. Ecuaciones. La energía almacenada por la esfera es:

$$Q = mc(T_F - T_0) = \rho V c(T_F - T_0).$$

Para el transitorio se comprueba primero el modelo concentrado:

$$\mathrm{Bi} = \frac{(h_c + h_r)L_c}{k_s}, \qquad L_c = \frac{V}{A}.$$

La convección natural y forzada se calculan con sus correlaciones de esfera, se combinan si hay convección mixta y la radiación se linealiza con:

$$h_r = \varepsilon\sigma(\overline{T}_s^2 + T_p^2)(\overline{T}_s + T_p).$$

El tiempo sale de la solución concentrada:

$$\frac{T - T_{eq}}{T_0 - T_{eq}} = \exp\left[-\frac{(h_c + h_r)A}{\rho V c}t\right], \qquad T_{eq} = \frac{h_c T_\infty + h_r T_p}{h_c + h_r}.$$

4. Resolución de ecuaciones.

Para el acero:

$$\rho = 7830\,\mathrm{kg/m^3}, \qquad c = 434\,\mathrm{J/(kg\,K)}, \qquad k_s = 64\,\mathrm{W/(m\,K)}.$$

a) Energía absorbida.

$$Q = mc(T_F - T_0) = (\rho V)c(T_F - T_0).$$

$$Q = 7830\left(\frac{4}{3}\pi\,0{,}25^3\right)434[51 - (-10)] = 13\,567\,192\,\mathrm{J}.$$

b1) Sin efecto forzado.

Convección natural.

Temperatura superficial media de la esfera durante el transitorio:

$$\overline{T}_s = \frac{-10 + 51}{2} = 20{,}5\,^\circ\mathrm{C}.$$

Temperatura de propiedades:

$$T_f = \frac{\overline{T}_s + T_\infty}{2} = \frac{20{,}5 + 100}{2} = 60{,}25\,^\circ\mathrm{C}.$$

Propiedades del aire:

$$\begin{aligned} &\rho = 1{,}058\,\mathrm{kg/m^3}, && c_p = 1007\,\mathrm{J/(kg\,K)},\\ &\mu = 2{,}009\times10^{-5}\,\mathrm{kg/(m\,s)}, && \nu = 1{,}898\times10^{-5}\,\mathrm{m^2/s},\\ &k = 0{,}0281\,\mathrm{W/(m\,K)}, && \mathrm{Pr} = 0{,}720. \end{aligned}$$

$$\beta = \frac{1}{\overline{T}} = \frac{1}{60{,}25 + 273{,}15} = 0{,}003\,001/\mathrm{K}.$$

$$\Delta T = T_\infty - \overline{T}_s = 100 - 20{,}5 = 79{,}5\,^\circ\mathrm{C}.$$

$$\mathrm{Ra} = \frac{\beta\Delta T\, g D^3}{\nu\alpha} = \frac{\beta\Delta T\, g D^3}{\nu^2}\mathrm{Pr} = 5{,}847\cdot10^8.$$

$$\overline{\mathrm{Nu}}_n = 2 + \frac{0{,}589\mathrm{Ra}^{1/4}}{\left[1 + (0{,}469/\mathrm{Pr})^{9/16}\right]^{4/9}} = 72{,}8, \qquad \mathrm{Ra} < 10^{11}, \qquad \mathrm{Pr} > 0{,}7.$$

$$h_c = \frac{\mathrm{Nu}k}{D} = 4{,}09\,\mathrm{W/(m^2\,K)}.$$

Radiación:

$$h_r = \varepsilon\sigma(\overline{T}_s^2 + T_p^2)(\overline{T}_s + T_p),$$

donde las temperaturas se emplean en kelvin:

$$\varepsilon = 0{,}4, \qquad \overline{T}_s = 293{,}5\,\mathrm{K}, \qquad T_p = 423\,\mathrm{K}.$$

Entonces:

$$h_r = 4{,}31\,\mathrm{W/(m^2\,K)}.$$

En el límite adoptado, la esfera es pequeña frente a una envolvente isoterma mucho mayor, $A_{\text{esfera}}/A_{\text{paredes}} \to 0$, y ve prácticamente sólo ese entorno. En ese límite el intercambio neto es $q_r = \varepsilon_s\sigma A_s(T_s^4 - T_p^4)$ y la emisividad de la envolvente no aparece. En un recinto finito, no isotermo o con otras superficies visibles, ε_p y los factores de forma sí intervienen.

El coeficiente total es:

$$h = h_c + h_r = 8{,}40\,\mathrm{W/(m^2\,K)}.$$

La longitud característica es:

$$L_c = \frac{V}{A} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{4\pi R^2} = \frac{R}{3} = 0{,}0833\,\mathrm{m}.$$

$$\mathrm{Bi} = \frac{hL_c}{k_s} = \frac{8{,}40\cdot0{,}0833}{64} = 0{,}011 < 0{,}1,$$

por lo que es aplicable el método de la resistencia interna despreciable, MRID.

La ecuación empleada es la solución del balance concentrado con temperatura de equilibrio combinada convectiva-radiativa; aquí T_p es la temperatura efectiva de las paredes del recinto:

$$\frac{(T-T_\infty)+\dfrac{\overline{h}_r}{\overline{h}_c+\overline{h}_r}(T_\infty-T_p)}{(T_0-T_\infty)+\dfrac{\overline{h}_r}{\overline{h}_c+\overline{h}_r}(T_\infty-T_p)}=\exp\left[-\frac{(\overline{h}_c+\overline{h}_r)A}{\rho V c}\,t\right]=\exp\left[-\frac{\overline{h}_c+\overline{h}_r}{\rho L_c c}\,t\right].$$

Con $T=T_F$, se obtiene:

$$t=5{,}595\,\text{h}.$$

b2) Con convección forzada ascendente.

Convección forzada. La temperatura de propiedades es $T_\infty=100\,^\circ\text{C}$, excepto μ_s a $T_s=20{,}5\,^\circ\text{C}$:

$$\mu=2{,}181\times10^{-5}\,\text{kg/(m s)},\qquad \nu=2{,}306\times10^{-5}\,\text{m}^2/\text{s},$$

$$k=0{,}030\,95\,\text{W/(m K)},\qquad \text{Pr}=0{,}711,\qquad \mu_s=1{,}827\times10^{-5}\,\text{kg/(m s)}.$$

$$\text{Re}=\frac{vD}{\nu}=32524.$$

$$\overline{\text{Nu}}_f=2+\left(0{,}4\text{Re}^{1/2}+0{,}06\text{Re}^{2/3}\right)\text{Pr}^{0{,}4}\left(\frac{\mu}{\mu_s}\right)^{1/4}=123{,}5,$$

con

$$3{,}5<\text{Re}=32524<7{,}6\cdot10^4,\qquad 0{,}71<\text{Pr}=0{,}711<380,$$

$$1<\frac{\mu}{\mu_s}=1{,}19<3{,}2.$$

Para evaluar convección natural y forzada:

$$\text{Gr}=\frac{\text{Ra}}{\text{Pr}}=8{,}121\cdot10^8,\qquad \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2}=0{,}768.$$

Ninguna contribución es despreciable.

Como la esfera está más fría que el aire durante el intervalo de cálculo, el fluido próximo a su superficie se enfría, aumenta su densidad y la flotación actúa hacia abajo. La corriente forzada asciende; ambos movimientos son, por tanto, **opuestos**, y se utiliza la regla cúbica con $Nu_0=2$:

$$(\overline{\text{Nu}}-\text{Nu}_0)^3=\left|(\overline{\text{Nu}}_f-\text{Nu}_0)^3-(\overline{\text{Nu}}_n-\text{Nu}_0)^3\right|.$$

$$\overline{\text{Nu}}_n=72{,}8,\qquad \overline{\text{Nu}}_f=123{,}5,\qquad \text{Nu}_0=2.$$

$$\overline{\text{Nu}}=114{,}9.$$

$$h_c=\frac{\text{Nu}k}{D}=\frac{114{,}9\cdot0{,}03095}{0{,}5}=7{,}11\,\text{W/(m}^2\,\text{K)}.$$

Aquí aparece la cuestión de la conductividad empleada para evaluar h_{mixta}, pues el Nusselt natural se ha calculado con propiedades a $(T_s+T_\infty)/2$, y el Nusselt forzado a T_∞. En este ejercicio se adopta, como convención de cálculo histórica, la conductividad asociada a la evaluación forzada, $k=0{,}030\,95\,\text{W/(m K)}$, porque es la contribución de mayor Nusselt. Esta elección no constituye una regla universal para otras correlaciones de convección mixta.

El coeficiente total es:

$$h=h_c+h_r=11{,}42\,\text{W/(m}^2\,\text{K)}.$$

$$\text{Bi}=0{,}015<0{,}1,$$

por lo que es aplicable el MRID. Con la misma ecuación:

$$t = 4{,}417\,\mathrm{h}.$$

b3) Con convección forzada horizontal.

La esfera sigue estando más fría que el aire, por lo que la flotación es aproximadamente vertical y descendente junto a su superficie. La corriente impuesta es horizontal: la interacción es, por tanto, **transversal**, y se utiliza la regla de cuarta potencia para esfera:

$$(\overline{\mathrm{Nu}} - \mathrm{Nu}_0)^4 = (\overline{\mathrm{Nu}}_f - \mathrm{Nu}_0)^4 + (\overline{\mathrm{Nu}}_n - \mathrm{Nu}_0)^4.$$

$$\overline{\mathrm{Nu}}_n = 72{,}8, \qquad \overline{\mathrm{Nu}}_f = 123{,}5, \qquad \mathrm{Nu}_0 = 2.$$

$$\overline{\mathrm{Nu}} = 126{,}9.$$

$$h_c = \frac{\mathrm{Nu}k}{D} = \frac{126{,}9 \cdot 0{,}03095}{0{,}5} = 7{,}86\,\mathrm{W/(m^2\,K)},$$

empleando la conductividad coherente con el cálculo forzado, $k = 0{,}030\,95\,\mathrm{W/(m\,K)}$, porque el Nusselt forzado es el mayor de las dos contribuciones.

$$h = h_c + h_r = 12{,}17\,\mathrm{W/(m^2\,K)}.$$

$$\mathrm{Bi} = 0{,}015 < 0{,}1,$$

por lo que es aplicable el MRID. Entonces:

$$t = 4{,}20\,\mathrm{h}.$$

5. Conclusiones o interpretación.

$$\begin{aligned} Q &= 13\,567\,192\,\mathrm{J}, \\ t_{\text{sin forzado}} &= 5{,}595\,\mathrm{h}, \\ t_{\text{forzado ascendente}} &= 4{,}417\,\mathrm{h}, \\ t_{\text{forzado horizontal}} &= 4{,}20\,\mathrm{h}. \end{aligned}$$

Control de la linealización. Como h_r depende de T^4 y los coeficientes convectivos varían con la temperatura, se ha integrado también el balance concentrado no lineal de referencia,

$$\rho V c\,\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = A\left[h_c(T)(T_\infty - T) + \varepsilon\sigma(T_p^4 - T^4)\right].$$

Con las mismas correlaciones, se obtienen $t = 5{,}560\,\mathrm{h}$ para convección natural y $t = 4{,}169\,\mathrm{h}$ para flujo horizontal. Las diferencias respecto a los valores linealizados son del orden del 0,6–0,7 por ciento, por lo que el modelo con coeficientes medios es adecuado para el objetivo docente. El caso ascendente opuesto se conserva como estimación linealizada y debe identificarse como tal.

Comprobación final

Debe cumplirse $Bi \leq 0{,}1$, la temperatura debe evolucionar monótonamente y los límites temporal inicial y final deben recuperarse.

4.10.13 Ejercicio resuelto 13. Colector solar plano con cubierta de vidrio

Descripción del problema

Un colector solar plano está formado por varios tubos en paralelo dentro de una carcasa, recubierta por arriba por un vidrio, llamada cubierta. El colector está dispuesto horizontalmente y recibe por el lado del vidrio una radiación solar total incidente, difusa y directa perpendicularmente, a razón de $700\,\mathrm{W/m^2}$. El vidrio de la cubierta transmite el 88 % y absorbe el 5 % de la radiación solar incidente, y tiene una emisividad de 0,9. Las dimensiones del colector solar son de $2\,\mathrm{m} \times 1{,}2\,\mathrm{m}$, vistas por la superficie incidente solar. La temperatura de la cubierta es 35 °C y la del aire ambiente 25 °C. La velocidad del viento es 30 km/h. La temperatura del cielo vale −40 °C. El agua entra a los tubos del colector solar a razón de 1 kg/min. Tomar Reynolds crítico para convección forzada $5 \cdot 10^5$. Calcular: a) pérdida de calor total del colector; b) rendimiento del colector; c) salto térmico del agua en el colector.

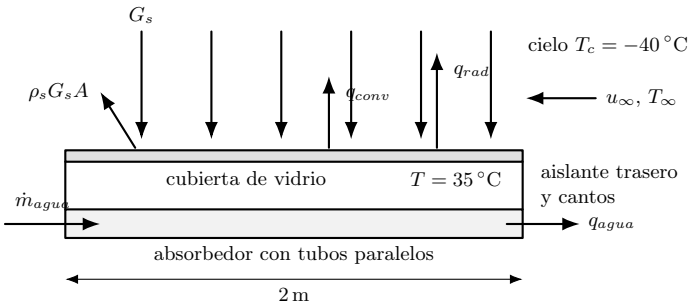


Figura 4.32: Esquema del ejercicio resuelto 13: colector solar plano con vidrio, absorbedor, pérdidas y agua circulante.

Datos.

- $G_s = 700\,\mathrm{W/m^2}$.
- $\tau_s = 0{,}88$.
- $\alpha_s = 0{,}05$.
- $\varepsilon = 0{,}9$.
- $A = 2 \cdot 1{,}2 = 2{,}4\,\mathrm{m^2}$.
- $T = 35\,^\circ\mathrm{C} = 308\,\mathrm{K}$.
- $T_\infty = 25\,^\circ\mathrm{C}$.
- $u_\infty = 30\,\mathrm{km/h}$.
- $T_c = -40\,^\circ\mathrm{C} = 233\,\mathrm{K}$.
- $\dot{m}_{\mathrm{agua}} = 1\,\mathrm{kg/min}$.
- $\mathrm{Re}_c = 5 \cdot 10^5$.

Se pide.

a) Pérdida de calor total.

b) Rendimiento del colector.

c) Salto térmico del agua.

Resolución del problema

Antes de calcular

Predicción física. La radiación solar absorbida se reparte entre calor útil y pérdidas por la cubierta y el entorno. Una cubierta más aislante eleva la temperatura de la placa.

Modelo esperado. Balance de colector con red de resistencias y mecanismos convectivos/radiativos acoplados.

1. Simplificaciones. El balance separa radiación solar absorbida y transmitida, pérdidas desde la cubierta hacia ambiente y cielo, y calor útil absorbido por el agua. La parte trasera y los cantos se consideran aislados, como indica el enunciado.

2. Modelo adoptado de resistencias.

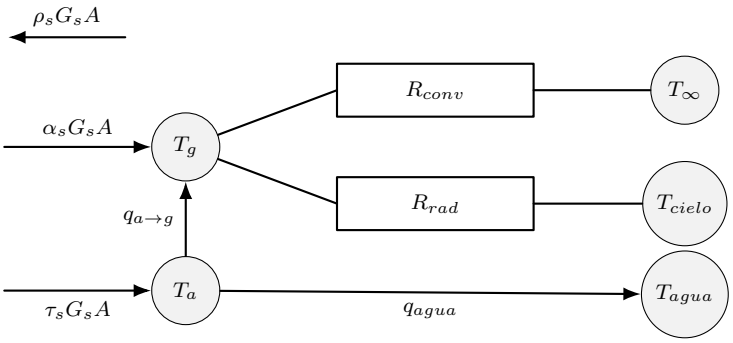


Figura 4.33: Red térmica y balances ópticos corregidos del colector solar.

3. Ecuaciones. El balance solar y térmico se descompone en:

$$q_{sol} = GA, \qquad q_{ref} = \rho_s GA, \qquad q_{abs,g} = \alpha_g GA, \qquad q_{trans} = \tau_g GA.$$

Las pérdidas de la cubierta son:

$$q_{conv} = hA(T_g - T_\infty), \qquad q_{rad} = \varepsilon_g \sigma A(T_g^4 - T_{cielo}^4).$$

El coeficiente h se obtiene como placa plana en flujo externo:

$$\mathrm{Re}_L = \frac{u_\infty L}{\nu}, \qquad h = \frac{\overline{\mathrm{Nu}}k}{L}.$$

Los balances se separan para no duplicar términos:

$$\underbrace{GA}_{\text{incidente}} = \underbrace{\rho_s GA}_{\text{reflejado}} + \underbrace{\alpha_s GA}_{\text{absorbido por vidrio}} + \underbrace{\tau_s GA}_{\text{transmitido}},$$

$$\alpha_s GA + q_{a\to g} = q_{conv} + q_{rad}, \qquad \tau_s GA = q_{agua} + q_{a\to g}.$$

Al eliminar $q_{a\to g}$:

$$q_{agua} = (\tau_s + \alpha_s)GA - q_{conv} - q_{rad} = (1 - \rho_s)GA - q_{conv} - q_{rad}.$$

Finalmente,

$$\eta = \frac{q_{agua}}{GA}, \qquad \Delta T_{agua} = \frac{q_{agua}}{\dot{m} c_p}.$$

4. Resolución de ecuaciones.

Las pérdidas del colector son todas las que van en sentido de salida:

$$q_{\text{pérdidas}} = q_{\text{solar,reflejado}} + q_{\text{rad,infra}} + q_{\text{conv}}.$$

$$q_{\text{pérdidas}} = \rho_s G_s A + \varepsilon\sigma A(T^4 - T_c^4) + hA(T - T_\infty).$$

Como para el vidrio:

$$\alpha_s + \rho_s + \tau_s = 1,$$

se tiene:

$$\rho_s = 1 - \alpha_s - \tau_s = 1 - 0{,}05 - 0{,}88 = 0{,}07.$$

Entonces:

$$q_{\text{solar,reflejado}} = \rho_s G_s A = 0{,}07 \cdot 700 \cdot (2 \cdot 1{,}2) = 117{,}6\,\text{W}.$$

El término $\varepsilon\sigma(T^4 - T_c^4)A$ corresponde a la radiación infrarroja y al caso de un cuerpo pequeño, el colector, rodeado por otro mucho más grande, el cielo. El suelo también forma parte del entorno del colector, pero no se ven entre sí y, por tanto, no interviene:

$$q_{\text{rad,infra}} = 0{,}9 \cdot 5{,}67 \cdot 10^{-8}(308^4 - 233^4)(2 \cdot 1{,}2) = 741{,}2\,\text{W}.$$

Para el coeficiente de convección exterior aire–cubierta de vidrio, la temperatura de propiedades es:

$$T_f = \frac{35 + 25}{2} = 30\,^\circ\text{C}.$$

T [°C]	ρ [kg/m^3]	c_p [J/(kg K)]	k [W/(m K)]	α [m^2/s]	ν [m^2/s]	Pr [-]
30	1,164	1007	0,02588	$2{,}21 \cdot 10^{-5}$	$1{,}6080 \cdot 10^{-5}$	0,7282

Tabla 4.18: Propiedades del aire para el ejercicio resuelto 13.

Se comprueba si existe flujo laminar o mixto:

$$\text{Re}_L = \frac{u_\infty L}{\nu} = \frac{(30/3{,}6) \cdot 2}{1{,}6080 \cdot 10^{-5}} = 1{,}036 \cdot 10^6.$$

Como $\text{Re}_L > \text{Re}_c = 5 \cdot 10^5$, el flujo es mixto: comienza laminar y pasa a turbulento dentro de la longitud del colector.

$$\overline{\text{Nu}}(\text{Chilton}) = \left[0{,}664\,\text{Re}_c^{1/2} + 0{,}037\left(\text{Re}_L^{4/5} - \text{Re}_c^{4/5}\right)\right]\text{Pr}^{1/3} = 1377,$$

con

$$0{,}6 < \text{Pr} < 60, \qquad \text{Re}_L < 10^8.$$

$$h = \frac{\overline{\text{Nu}}k}{L} = \frac{1378 \cdot 0{,}02588}{2} = 17{,}8\,\text{W/(m}^2\,\text{K)}.$$

$$q_{\text{conv}} = hA(T - T_\infty) = 17{,}83 \cdot (2 \cdot 1{,}2) \cdot (35 - 25) = 427{,}8\,\text{W}.$$

Por tanto:

$$q_{\text{pérdidas}} = 117{,}6 + 741{,}2 + 427{,}8 = 1286{,}6\,\text{W}.$$

El rendimiento del colector es:

$$\eta = \frac{q_{\text{agua}}}{q_{\text{solar incidente}}}.$$

Aplicando la ecuación de conservación de la energía al colector en su conjunto:

$$q_e + q_G = q_s + \dot{W}_{\text{exp}} + \dot{U}.$$

$$G_s A + 0 = (\rho_s G_s A + q_{\text{conv}} + q_{\text{rad,infra}} + q_{\text{agua}}) + 0 + 0.$$

$$q_{\text{agua}} = G_s A(1 - \rho_s) - q_{\text{conv}} - q_{\text{rad,infra}}.$$

$$q_{\text{agua}} = 700 \cdot 2{,}4(1 - 0{,}07) - 427{,}9 - 741{,}2 = 393{,}3\,\text{W}.$$

La potencia solar incidente es:

$$q_{\text{solar incidente}} = G_s A = 700 \cdot 2{,}4 = 1680\,\text{W}.$$

$$\eta = \frac{q_{\text{agua}}}{q_{\text{solar incidente}}} = \frac{393{,}3}{1680} = 23{,}4\,\%.$$

También:

$$q_{\text{agua}} = q_{\text{solar incidente}} - q_{\text{pérdidas}} = 1680 - 1286{,}7 = 393{,}3\,\text{W}.$$

Para el salto térmico del agua:

$$q_{\text{agua}} = \dot{m} c_p \Delta T.$$

$$\Delta T = \frac{q_{\text{agua}}}{\dot{m} c_p} = \frac{393{,}3}{(1/60) \cdot 4180} = 5{,}65\,^\circ\text{C}.$$

Se ha tomado el calor específico del agua a una temperatura media supuesta de 45 °C.

5. Conclusiones o interpretación.

$$\boxed{q_{\text{pérdidas}} = 1287\,\text{W}, \qquad \eta = 23{,}4\,\%, \qquad \Delta T_{\text{agua}} = 5{,}65\,^\circ\text{C}.}$$

Comprobación final

La energía solar absorbida debe igualar calor útil más pérdidas; todas las temperaturas internas deben quedar en un orden físicamente razonable.

4.10.14 Ejercicio resuelto 14. Agua en anillo entre tubos concéntricos

Descripción del problema

Por el espacio entre dos tubos concéntricos de diámetros 0,025 m y 0,1 m fluye agua a razón de 0,05 kg/s. El agua entra a 20 °C y sale a 80 °C. La temperatura del tubo interior es de 120 °C; el tubo de mayor diámetro está aislado térmicamente por el exterior. Calcular la longitud de los tubos y la potencia térmica intercambiada.

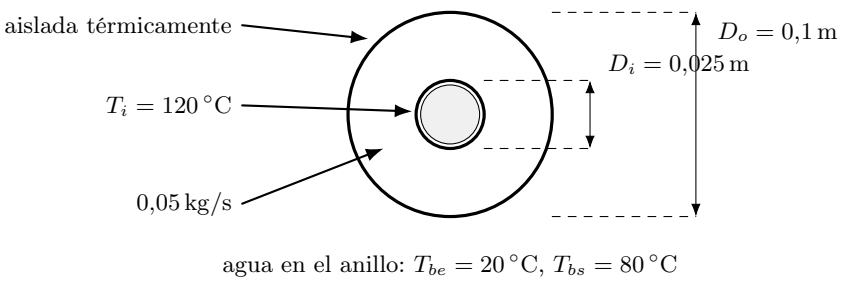


Figura 4.34: Esquema del ejercicio resuelto 14: flujo de agua por el anillo entre dos tubos concéntricos.

Datos.

- $D_i = 0{,}025\,m$.
- $D_o = 0{,}1\,m$.
- $\dot{m} = 0{,}05\,kg/s$.
- $T_{be} = 20\,°C$.
- $T_{bs} = 80\,°C$.
- $T_s = 120\,°C$ en el tubo interior.
- Tubo exterior aislado.

Se pide.

a) Longitud de los tubos.

b) Potencia térmica intercambiada.

Resolución del problema

Antes de calcular

Predicción física. El régimen en el anillo se determina con diámetro hidráulico y propiedades del agua; la superficie caliente debe ceder calor al flujo.

Modelo esperado. Convección interna en conducto anular, con correlación y área mojada adecuadas.

1. Simplificaciones. El flujo se desarrolla en el anillo entre tubos concéntricos. El tubo exterior está aislado, de modo que el calor útil procede del tubo interior a temperatura impuesta; se emplea el diámetro hidráulico de la sección anular.

2. Modelo adoptado de resistencias.

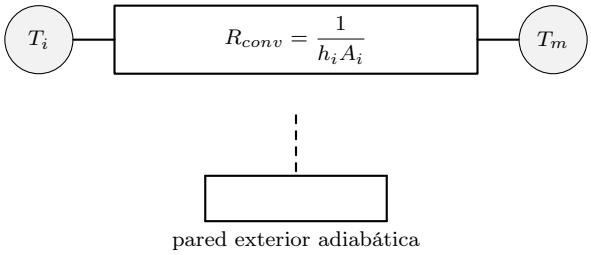


Figura 4.35: Resistencia convectiva desde el tubo interior caliente al agua del anillo; la pared exterior es adiabática.

3. Ecuaciones. Para el anillo:

$$A_c = \frac{\pi}{4}(D_o^2 - D_i^2), \qquad p_m = \pi(D_o + D_i), \qquad D_h = \frac{4A_c}{p_m} = D_o - D_i.$$

El régimen se decide con:

$$\mathrm{Re} = \frac{v D_h \rho}{\mu}, \qquad v = \frac{\dot{m}}{\rho A_c}.$$

Como sólo calienta el tubo interior, se usa Nu_i de anillo y la corrección de viscosidad:

$$\mathrm{Nu} = \mathrm{Nu}_i \left(\frac{\mu_s}{\mu_b}\right)^n, \qquad h_i = \frac{\mathrm{Nu} k}{D_h}.$$

La ley exponencial para pared isoterma se escribe con el perímetro calefactor $p_h = \pi D_i$:

$$T_{bs} = T_s - (T_s - T_{be}) \exp\left(-\frac{h_i p_h L}{\dot{m} c_p}\right),$$

$$L = -\frac{\dot{m} c_p}{h_i p_h} \ln\left(\frac{T_s - T_{bs}}{T_s - T_{be}}\right), \qquad q = \dot{m} c_p (T_{bs} - T_{be}).$$

4. Resolución de ecuaciones.

Temperatura de propiedades:

$$T_b = \frac{T_{be} + T_{bs}}{2} = \frac{80 + 20}{2} = 50\,^\circ\mathrm{C}.$$

T [°C]	ρ [kg/m^3]	c_p [J/(kg K)]	k [W/(m K)]	μ [kg/(m s)]	Pr [-]
50	988,1	4181	0,644	$5{,}47 \cdot 10^{-4}$	3,55
120	–	–	–	$2{,}3 \cdot 10^{-4}$	–

Tabla 4.19: Propiedades usadas para el ejercicio resuelto 14.

Comentario técnico. El valor $\mu_s = 1{,}30 \cdot 10^{-5}$ kg/(m s) que aparecía en la solución original no es representativo de agua líquida presurizada a 120 °C. Se adopta $\mu_s \simeq 2{,}3 \cdot 10^{-4}$ kg/(m s), que mantiene la misma potencia térmica pero modifica la longitud necesaria del tubo.

El perímetro mojado es:

$$p = \pi(D_o + D_i) = 0{,}393\,\mathrm{m}.$$

El área de flujo:

$$A = \frac{\pi}{4}(D_o^2 - D_i^2) = 0{,}007\,363\,\mathrm{m}^2.$$

La velocidad media:

$$v = \frac{\dot{m}}{A\rho} = 0{,}006\,87\,\text{m/s}.$$

El diámetro hidráulico:

$$D_h = 4\frac{A}{p} = D_o - D_i = 0{,}075\,\text{m}.$$

$$\text{Re} = \frac{vD_h\rho}{\mu} = 931 < 2300,$$

por lo que el flujo es laminar.

Las estimaciones de entrada para flujo laminar son

$$L_h \simeq 0{,}05\text{Re}D_h = 3{,}49\,\text{m}, \qquad L_t \simeq 0{,}05\text{RePr}D_h = 12{,}39\,\text{m}.$$

La longitud calculada, próxima a 35,1 m, supera ambas escalas, pero la región de entrada térmica no es nula. Usar $\text{Nu}_i = 7{,}37$ plenamente desarrollado en toda la longitud constituye una aproximación que desprecia el aumento de transferencia en la entrada; una predicción más precisa exigiría una correlación media de desarrollo térmico.

Puesto que el tubo más pequeño está a temperatura uniforme y el tubo exterior está aislado, hay que emplear Nu_i para el cálculo de h.

D_i/D_o	Nu_i	Nu_o
0	–	3,66
0,05	17,46	4,06
0,10	11,56	4,11
0,25	7,37	4,23
0,50	5,74	4,43
1,00	4,86	4,86

Tabla 4.20: Números de Nusselt para el conducto anular del ejercicio resuelto 14.

Para:

$$\frac{D_i}{D_o} = 0{,}25,$$

de la tabla:

$$\text{Nu}_i = 7{,}37.$$

La corrección de Nusselt por temperatura usa $n = -0{,}11$, para líquido en régimen laminar que se calienta:

$$\text{Nu} = \text{Nu}_b\left(\frac{\mu_s}{\mu_b}\right)^n = 7{,}37\left(\frac{2{,}3\cdot 10^{-4}}{5{,}47\cdot 10^{-4}}\right)^{-0{,}11} = 8{,}10.$$

$$h_i = \frac{\text{Nu}k}{D_h} = \frac{8{,}10\cdot 0{,}644}{0{,}075} = 69{,}5\,\text{W/(m}^2\,\text{K)}.$$

Para un fluido en contacto con una pared a temperatura uniforme, $T_s = 120\,^\circ\text{C}$, la ley de temperatura del fluido es:

$$T_b(x) = T_s - (T_s - T_{be})\exp\left(-\frac{\overline{h}p}{\dot{m}c_p}x\right).$$

En la expresión anterior, p es el perímetro de la superficie de transmisión de calor, correspondiente a D_i:

$$p = \pi D_i = 0{,}0785\,\text{m}.$$

Por tanto:

$$T_{bs} = T_s - (T_s - T_{be}) \exp\left(-\frac{\overline{h}pL}{\dot{m}c_p}\right).$$

Despejando:

$$L = -\frac{\dot{m}c_p}{hp} \ln\left(\frac{T_s - T_{bs}}{T_s - T_{be}}\right) = 35{,}1\,\text{m}.$$

La potencia térmica:

$$q = \dot{m}c_p(T_{bs} - T_{be}) = 0{,}05 \cdot 4181 \cdot (80 - 20) = 12\,543\,\text{W}.$$

También:

$$q = hA_{\text{conv}}\Delta T_{\text{lm}} = 12\,543\,\text{W}.$$

$$A_{\text{conv}} = \pi D_i L = 2{,}76\,\text{m}^2.$$

$$\Delta T_{\text{lm}} = \frac{\Delta T_e - \Delta T_s}{\ln(\Delta T_e/\Delta T_s)},$$

con:

$$\Delta T_e = 120 - 20 = 100\,^\circ\text{C}, \qquad \Delta T_s = 120 - 80 = 40\,^\circ\text{C}.$$

Por tanto:

$$\Delta T_{\text{lm}} = 65{,}48\,^\circ\text{C}.$$

5. Conclusiones o interpretación.

$$\boxed{L = 35{,}1\,\text{m}, \qquad q \simeq 12\,543\,\text{W}.}$$

Comentario técnico. El valor de longitud encuadrado corresponde al cálculo principal con la viscosidad de pared indicada en la fuente original; la alternativa con una viscosidad tabulada más representativa queda indicada en la nota de propiedades anterior.

Comprobación final

Verifique D_h, L_h, L_t y el rango de Reynolds. Identifique $L \simeq 35{,}1$ m como resultado de la aproximación plenamente desarrollada y compruebe el balance de entalpía.

4.10.15 Ejercicio resuelto 15. Chimenea con calor de humos, radiación solar, convección natural y radiación

Descripción del problema

Una chimenea de 10 m de altura y 1 m de diámetro exterior descarga 0,125 kg/s de humos, que experimentan un descenso de temperatura de 30 °C a su paso por ella. El calor específico a presión constante de los humos vale 1600 J/(kg K). Un día sin viento, la temperatura del aire circundante es de 33 °C, igual a la temperatura de todo el entorno radiante. La radiación solar total incidente sobre la superficie exterior de la chimenea es de 500 W/m^2, y tanto la emisividad como la absortancia solar de la superficie externa valen 0,9. Obtener la temperatura de la superficie exterior de la chimenea, que se asume uniforme.

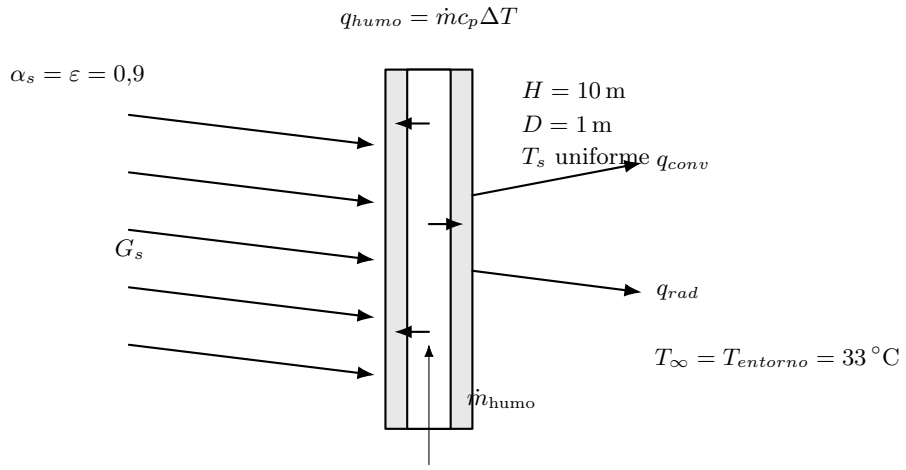


Figura 4.36: Esquema del ejercicio resuelto 15: balance energético sobre la chimenea sin viento.

Datos.

- $H = 10\,\text{m}$.
- $D = 1\,\text{m}$.
- $\dot{m}_h = 0{,}125\,\text{kg/s}$.
- Descenso de temperatura de humos: $\Delta T_h = 30\,^\circ\text{C}$.
- $c_{p,h} = 1600\,\text{J/(kg K)}$.
- $T_\infty = 33\,^\circ\text{C}$.
- $T_{\text{entorno}} = 33\,^\circ\text{C}$.
- $G_s = 500\,\text{W/m}^2$.
- $\varepsilon = \alpha_s = 0{,}9$.

Se pide. Temperatura superficial exterior de la chimenea.

Resolución del problema

Antes de calcular

Predicción física. La temperatura de la chimenea resulta de varias entradas y salidas: humos y Sol aportan energía; convección y radiación exterior la evacuan.

Modelo esperado. Balance térmico no lineal con convección interna, conducción, absorción solar, convección natural y radiación.

1. Simplificaciones. Se plantea un balance estacionario sobre la superficie exterior de la chimenea. Entran el calor cedido por los humos y la radiación solar absorbida; salen la convección natural al aire y la radiación térmica al entorno.

2. Modelo adoptado de resistencias.

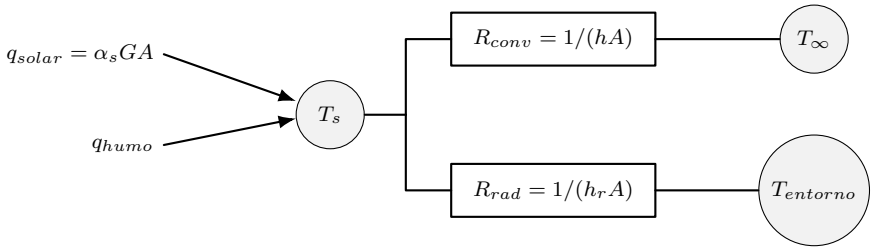


Figura 4.37: Balance superficial de la chimenea: aportes solar y de los humos y pérdidas por convección y radiación.

3. Ecuaciones. El balance en la superficie exterior de la chimenea es:

$$q_{humo} + q_{solar} = q_{conv} + q_{rad}.$$

El aporte solar es:

$$q_{solar} = \alpha_s G A,$$

y las pérdidas son:

$$q_{conv} = hA(T_s - T_\infty), \qquad q_{rad} = \varepsilon\sigma A(T_s^4 - T_{entorno}^4).$$

El coeficiente h se obtiene iterativamente con la correlación de Churchill–Chu para placa vertical:

$$\mathrm{Ra}_H = \frac{\beta(T_s - T_\infty)gH^3}{\nu\alpha}, \qquad \mathrm{Nu}_H = \left[0{,}825 + \frac{0{,}387\mathrm{Ra}_H^{1/6}}{[1 + (0{,}492/\mathrm{Pr})^{9/16}]^{8/27}}\right]^2, \qquad h = \frac{\mathrm{Nu}_H k}{H}.$$

4. Resolución de ecuaciones.

Haciendo un balance de energía sobre la pared de la chimenea:

$$\underbrace{\alpha_s G_s A}_{\text{calor solar absorbido}} + q_{\text{humo}} = \underbrace{\varepsilon\sigma(T_s^4 - T_{\text{entorno}}^4)A}_{\text{calor perdido por radiación}} + \underbrace{h(T_s - T_\infty)A}_{\text{calor perdido por convección}}. \tag{1}$$

Donde:

$$q_{\text{solar}} = \alpha_s G_s A = 0{,}9 \cdot 500 \cdot (\pi \cdot 1 \cdot 10) = 14\,137\,\text{W}.$$

$$q_{\text{humo}} = \dot{m} c_p (T_{\text{entrada}} - T_{\text{salida}}) = 0{,}125 \cdot 1600 \cdot 30 = 6000\,\text{W}.$$

Este término se asigna íntegramente a la pared lateral sólo bajo régimen estacionario, sin almacenamiento en los gases o la pared, fugas, pérdidas axiales ni otros sumideros internos. Si cualquiera de esos mecanismos existe, los 6000 W son una cota superior para el calor transferido a esta pared.

$$q_{\text{rad}} = A\varepsilon\sigma(T_s^4 - T_{\text{entorno}}^4) = \pi D L \varepsilon\sigma(T_s^4 - T_{\text{entorno}}^4).$$

Usando temperatura absoluta, $T_{\text{entorno}} = 33 + 273{,}15 = 306{,}15\,\text{K}$:

$$q_{\text{rad}} = \pi \cdot 1 \cdot 10 \cdot 0{,}9 \cdot 5{,}67 \cdot 10^{-8}\left(T_s^4 - 306{,}15^4\right) = 1{,}60315 \cdot 10^{-6}(T_s^4 - 306{,}15^4).$$

La convección se escribe:

$$q_{\text{conv}} = hA(T_s - T_\infty) = h(\pi \cdot 1 \cdot 10)(T_s - 306{,}15) = 31{,}415\,h(T_s - 306{,}15).$$

Sustituyendo en (1):

$$14137{,}2 + 6000 = 1{,}60315 \cdot 10^{-6}(T_s^4 - 306{,}15^4) + 31{,}415\,h(T_s - 306{,}15). \tag{2}$$

Como h depende de la temperatura superficial T_s, hay que resolver por iteraciones.

Para evaluar h natural sobre la chimenea, y siguiendo el formulario, se trata como una superficie plana vertical de longitud igual a la altura de la chimenea, $L = H = 10\,\text{m}$, y ancho B igual al perímetro, $B = \pi \cdot 1\,\text{m}$, siempre que:

$$D \geq \frac{35H}{\text{Gr}_H^{1/4}}.$$

Primera iteración, suponiendo:

$$T_s = 40\,^\circ\text{C}.$$

Temperatura de propiedades:

$$T_f = \frac{40 + 33}{2} = 36{,}5\,^\circ\text{C}.$$

$$\text{Pr} = 0{,}7264, \qquad \nu = 1{,}669 \times 10^{-5}\,\text{m}^2/\text{s}, \qquad k = 0{,}026\,36\,\text{W}/(\text{m K}).$$

$$\beta = \frac{1}{\overline{T}} = 0{,}003\,231/\text{K}.$$

$$\text{Ra} = \frac{\beta \Delta T\, g L^3}{\nu^2}\text{Pr} = \frac{0{,}003231 \cdot (40 - 33) \cdot 9{,}81 \cdot 10^3}{(1{,}669 \cdot 10^{-5})^2}\,0{,}7264 = 5{,}786 \cdot 10^{11}.$$

$$\text{Gr} = \frac{\text{Ra}}{\text{Pr}} = 8 \cdot 10^{11}.$$

La condición geométrica queda:

$$D = 1\,\text{m} > \frac{35H}{\text{Gr}_H^{1/4}} = 0{,}37\,\text{m},$$

por lo que es válida.

$$\text{Nu} = \left[0{,}825 + \frac{0{,}387\text{Ra}^{1/6}}{\left[1 + (0{,}492/\text{Pr})^{9/16}\right]^{8/27}}\right]^2 = 930.$$

$$h = \frac{\text{Nu}k}{L} = 2{,}45\,\text{W}/(\text{m}^2\,\text{K}).$$

Sustituyendo h en la ecuación (2), resulta:

$$T_s = 95{,}1\,^\circ\text{C}.$$

Segunda iteración:

$$T_f = \frac{95{,}1 + 33}{2} = 64\,^\circ\text{C}.$$

$$\text{Pr} = 0{,}7192, \qquad \nu = 1{,}936 \times 10^{-5}\,\text{m}^2/\text{s}, \qquad k = 0{,}028\,37\,\text{W}/(\text{m K}).$$

$$\beta = 0{,}002\,967/\text{K}.$$

$$\text{Ra} = 3{,}466 \cdot 10^{12}.$$

$$\mathrm{Gr} = \frac{\mathrm{Ra}}{\mathrm{Pr}} = 4{,}8 \cdot 10^{12}.$$

$$D = 1\,\mathrm{m} > \frac{35H}{\mathrm{Gr}_H^{1/4}} = 0{,}24\,\mathrm{m},$$

por lo que es válida.

$$\mathrm{Nu} = 1662.$$

$$h = 4{,}72\,\mathrm{W/(m^2\,K)}.$$

Sustituyendo en la ecuación (2):

$$T_s = 85{,}4\,^\circ\mathrm{C}.$$

Una iteración adicional, actualizando de nuevo las propiedades con la temperatura obtenida, da:

$$T_s = 86{,}1\,^\circ\mathrm{C},$$

que se asume como válida. En esta última iteración se verifica:

$$\mathrm{Gr} = \frac{\mathrm{Ra}}{\mathrm{Pr}} = 4{,}3 \cdot 10^{12}, \qquad D = 1\,\mathrm{m} > \frac{35H}{\mathrm{Gr}_H^{1/4}} = 0{,}24\,\mathrm{m}.$$

5. Conclusiones o interpretación.

$$\boxed{T_s \simeq 86{,}1\,^\circ\mathrm{C}.}$$

Transmisión de calor combinada. Los ejercicios resueltos 16 y 17 combinan convección, conducción y radiación dentro de una misma red térmica, por lo que conviene identificar cuidadosamente qué resistencias están en serie y cuáles actúan en paralelo.

Comprobación final

La suma de entradas debe igualar la de salidas y cada correlación debe evaluarse con su temperatura y longitud característica correctas.

4.10.16 Ejercicio resuelto 16. Pared compuesta con cámara de aire y radiación entre superficies

Descripción del problema

Una pared de 3 m de altura está constituida por dos capas de ladrillo de 5 cm de espesor y conductividad 0,93 W/(m K), y una cámara de aire de 10 cm entre ambas. La pared de la izquierda forma parte de un recinto donde el aire T_i y las paredes T_a están a 21 °C; la pared derecha comunica con otro recinto donde aire T_e y paredes T_b están a 2 °C. Suponiendo que la contribución al intercambio radiante de los tramos superior e inferior de la cámara de aire es despreciable, calcular la potencia térmica transmitida entre ambos recintos trabajando por 1 m de profundidad perpendicular al dibujo y despreciando los efectos de borde, así como las temperaturas T_1, T_2, T_3 y T_4. Cada recinto se idealiza con sección 3 m × 3 m: las superficies de pared 1 y 4 tienen $A_1 = A_4 = 3\,\mathrm{m}^2$ por metro de profundidad, y el resto de paredes agrupadas de cada recinto tiene $A_a = A_b = 9\,\mathrm{m}^2$. Se toma $F_{1a} = F_{4b} = 1$ y la reciprocidad fija $A_a F_{a1} = A_1$ y $A_b F_{b4} = A_4$. Tomar para las superficies 2 y 3 una emisividad de 0,91, y 0,85 para el resto, a, 1, 4 y b. Todas ellas pueden considerarse grises difusas opacas. Tomar para el aire propiedades constantes, dadas a 280 K: $k = 0{,}0255\,\mathrm{W/(m\,K)}$, $\rho = 1{,}265\,\mathrm{kg/m^3}$, $c_p = 1008\,\mathrm{J/(kg\,K)}$, $\nu = 1{,}391 \times 10^{-5}\,\mathrm{m^2/s}$ y $\mathrm{Pr} = 0{,}69$.

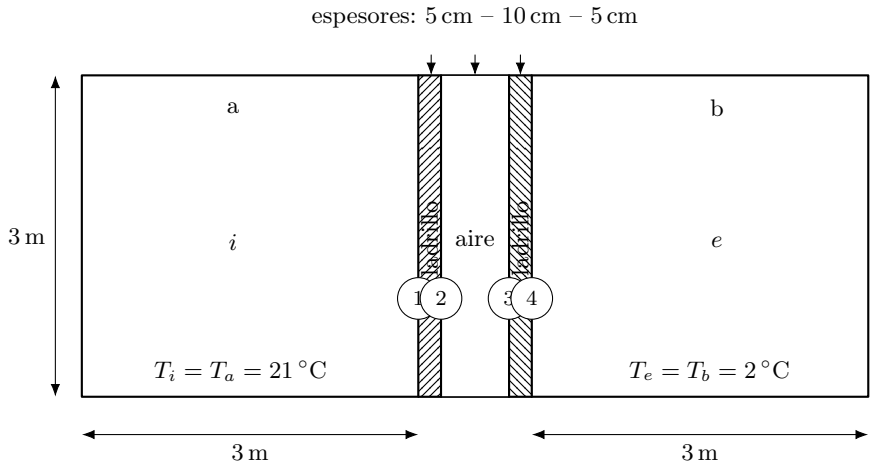


Figura 4.38: Esquema de la pared compuesta del ejercicio resuelto 16.

Datos.

- Altura de pared: $H = 3\,\mathrm{m}$.
- Profundidad considerada: 1 m.
- Capas de ladrillo: $e_l = 5\,\mathrm{cm}$, $k_l = 0{,}93\,\mathrm{W/(m\,K)}$.
- Cámara de aire: $e_a = 10\,\mathrm{cm}$.
- $T_i = T_a = 21\,^\circ\mathrm{C}$.
- $T_e = T_b = 2\,^\circ\mathrm{C}$.
- $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0{,}91$.
- $\varepsilon_a = \varepsilon_1 = \varepsilon_4 = \varepsilon_b = 0{,}85$.
- Aire a 280 K: $k = 0{,}0255\,\mathrm{W/(m\,K)}$, $\rho = 1{,}265\,\mathrm{kg/m^3}$, $c_p = 1008\,\mathrm{J/(kg\,K)}$, $\nu = 1{,}391 \times 10^{-5}\,\mathrm{m^2/s}$ y $\mathrm{Pr} = 0{,}69$.

Se pide.

a) Potencia térmica transmitida entre ambos recintos por metro de profundidad.

b) Temperaturas T_1, T_2, T_3 y T_4.

Resolución del problema

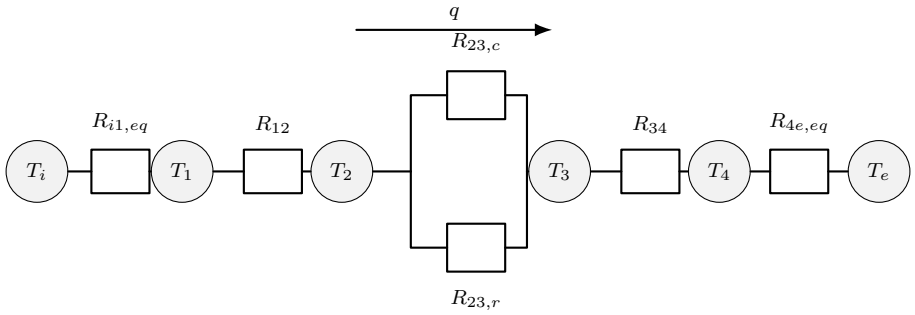
Antes de calcular

Predicción física. La cámara de aire y la radiación entre sus superficies actúan como una resistencia equivalente dentro de la pared compuesta.

Modelo esperado. Red en serie de capas sólidas y una cámara con convección natural confinada más radiación.

1. Simplificaciones. La pared compuesta se analiza por metro de profundidad. Se usa una profundidad unitaria y se desprecian los bordes; no se impone una "profundidad infinita". La sección 3×3 m^2 declarada en el enunciado proporciona $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = 3\,\text{m}^2$ y $A_a = A_b = 9\,\text{m}^2$, con las relaciones de reciprocidad indicadas. Las capas de ladrillo se representan por conducción plana y la cámara de aire combina convección natural confinada y radiación entre superficies grises difusas.

2. Modelo adoptado de resistencias.



$R_{i1,eq}$ y $R_{4e,eq}$ incluyen convección y radiación exterior equivalentes; en la cámara, $R_{23,c}$ y $R_{23,r}$ están en paralelo

Figura 4.39: Red térmica de la pared compuesta: capas conductoras, cámara de aire y películas exteriores equivalentes.

3. Ecuaciones. La red se resuelve con conducción en serie y convección-radiación en paralelo en las superficies. Para cada salto conductivo:

$$q = \frac{T_i - T_j}{R_{cond}}, \qquad R_{cond} = \frac{e}{kA}.$$

En cada interfaz convectiva-radiante:

$$q = hA(T_s - T_\infty) + q_{rad}.$$

La radiacion entre superficies grises difusas puede organizarse mediante resistencias de la red de radiosidad:

$$\mathcal{R}_s^{(J)} = \frac{1-\varepsilon}{A\varepsilon}, \qquad \mathcal{R}_{ij}^{(J)} = \frac{1}{AF_{ij}}.$$

Estas magnitudes tienen unidades de 1/m^2 y no son resistencias termicas en K/W. Para A, F_{ij} y ε constantes, las resistencias de radiosidad no dependen de la temperatura. El sistema es no lineal por los potenciales radiativos $E_b = \sigma T^4$ y, cuando procede, por los coeficientes convectivos dependientes de la temperatura. Si se introduce una resistencia termica secante equivalente, esa magnitud derivada si debe actualizarse en cada iteracion.

4. Resolución de ecuaciones.

El ejercicio combina radiación entre $a-1$, $2-3$ y $4-b$, convección entre $i-1$, $2-3$ y $4-e$, y conducción entre $1-2$ y $3-4$. Por tanto, exige un proceso iterativo de resolución.

Se toman como valores iniciales:

$$T_1 = 19\,^\circ\mathrm{C}, \qquad T_2 = 11\,^\circ\mathrm{C}, \qquad T_3 = 9\,^\circ\mathrm{C}, \qquad T_4 = 4\,^\circ\mathrm{C}.$$

Primera iteración.

Convección:

$$h_{i1} = 1{,}860\,\mathrm{W/(m^2\,K)} \quad \text{flujo externo, convección natural, pared vertical,}$$
$$h_{23} = 1{,}007\,\mathrm{W/(m^2\,K)} \quad \text{flujo interno, convección natural, recinto vertical,}$$
$$h_{4e} = 1{,}895\,\mathrm{W/(m^2\,K)} \quad \text{flujo externo, convección natural, pared vertical.}$$

Las resistencias convectivas son:

$$R_{i1} = \frac{1}{h_{i1}A_1} = 0{,}1793\,\mathrm{K/W},$$
$$R_{23} = \frac{1}{h_{23}A_2} = 0{,}3309\,\mathrm{K/W},$$
$$R_{4e} = \frac{1}{h_{4e}A_4} = 0{,}1759\,\mathrm{K/W}.$$

Conducción, cuyas resistencias no dependen de las temperaturas:

$$R_{12} = R_{34} = \frac{L}{kA} = 0{,}0179\,\mathrm{K/W}.$$

Radiación. Dado que se desprecian los tramos superior e inferior de la cámara de aire y las bases delantera y trasera en todos los recintos, por considerarlos muy largos en la dirección perpendicular al dibujo, todos los intercambios radiantes implican solo dos superficies. La relacion exacta en T^4 se conserva como ecuacion de gobierno. Por tanto:

$$q_{ij} = \frac{E_{b,i} - E_{b,j}}{\dfrac{1-\varepsilon_i}{\varepsilon_i A_i} + \dfrac{1}{A_i F_{ij}} + \dfrac{1-\varepsilon_j}{\varepsilon_j A_j}}.$$

Como

$$T_i^4 - T_j^4 = (T_i^2 + T_j^2)(T_i^2 - T_j^2) = (T_i^2 + T_j^2)(T_i + T_j)(T_i - T_j),$$

si, para facilitar el acoplamiento con la red conductivo-convectiva, se define una resistencia termica secante equivalente:

$$q_{ij} = \frac{\sigma(T_i^2 + T_j^2)(T_i + T_j)}{\dfrac{1-\varepsilon_i}{\varepsilon_i A_i} + \dfrac{1}{A_i F_{ij}} + \dfrac{1-\varepsilon_j}{\varepsilon_j A_j}}(T_i - T_j) = \frac{T_i - T_j}{R_{ij}^{(T)}}.$$

Por tanto:

$$R_{ij}^{(T)} = \frac{\dfrac{1-\varepsilon_i}{\varepsilon_i A_i} + \dfrac{1}{A_i F_{ij}} + \dfrac{1-\varepsilon_j}{\varepsilon_j A_j}}{\sigma(T_i^2 + T_j^2)(T_i + T_j)}.$$

Para a y 1:

$$R_{a1}^{(T)} = \frac{\dfrac{1-\varepsilon_a}{\varepsilon_a A_a} + \dfrac{1}{A_a F_{a1}} + \dfrac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1 A_1}}{\sigma(T_a^2 + T_1^2)(T_a + T_1)}.$$

Teniendo en cuenta que $A_a F_{a1} = A_1 F_{1a}$ y que $F_{1a} = 1$, resulta:

$$A_a F_{a1} = A_1 = 3\,\mathrm{m}^2.$$

Sustituyendo:

$$R_{a1}^{(T)} = 0{,}0722\,\mathrm{K/W}.$$

Operando análogamente para $2-3$ y $4-b$:

$$R_{23,\mathrm{rad}}^{(T)} = \frac{\dfrac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2 A_2} + \dfrac{1}{A_2 F_{23}} + \dfrac{1-\varepsilon_3}{\varepsilon_3 A_3}}{\sigma(T_2^2+T_3^2)(T_2+T_3)} = 0{,}0777\,\mathrm{K/W}.$$

$$R_{4b}^{(T)} = \frac{\dfrac{1-\varepsilon_4}{\varepsilon_4 A_4} + \dfrac{1}{A_4 F_{4b}} + \dfrac{1-\varepsilon_b}{\varepsilon_b A_b}}{\sigma(T_4^2+T_b^2)(T_4+T_b)} = 0{,}0864\,\mathrm{K/W}.$$

Se ha considerado $F_{23} \simeq 1$ y $A_4 F_{4b} = A_4 = 3\,\mathrm{m}^2$, pues $F_{4b} = 1$.

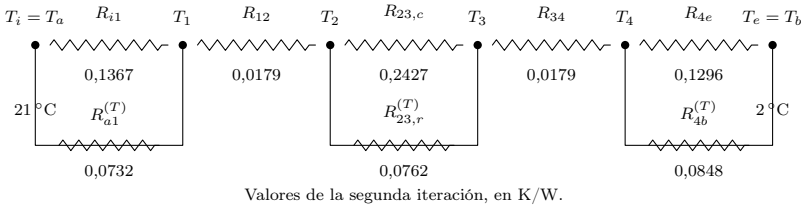


Figura 4.40: Circuito de resistencias termicas del ejercicio resuelto 16. Las ramas radiativas se representan mediante resistencias termicas secantes $R^{(T)}$ en K/W, no mediante las resistencias de radiosidad $\mathcal{R}^{(J)}$ en $1/\mathrm{m}^2$.

Las áreas de las distintas superficies son:

$$A_a = 9\,\mathrm{m}^2, \qquad A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = 3\,\mathrm{m}^2, \qquad A_b = 9\,\mathrm{m}^2.$$

La resistencia total de la primera iteración es:

$$R_{\mathrm{tot}} = 0{,}2081\,\mathrm{K/W}.$$

La potencia es:

$$q = \frac{21-2}{0{,}2081} = 91{,}29\,\mathrm{W}.$$

A partir de aquí, las nuevas temperaturas son:

$$T_1 = 16{,}30\,^\circ\mathrm{C} \quad (\text{anterior } 19\,^\circ\mathrm{C}),$$

$$T_2 = 14{,}67\,^\circ\mathrm{C} \quad (\text{anterior } 11\,^\circ\mathrm{C}),$$

$$T_3 = 8{,}92\,^\circ\mathrm{C} \quad (\text{anterior } 9\,^\circ\mathrm{C}),$$

$$T_4 = 7{,}29\,^\circ\mathrm{C} \quad (\text{anterior } 4\,^\circ\mathrm{C}).$$

$$T_e = 2{,}00\,^\circ\mathrm{C} \quad \text{comprobación}.$$

Segunda iteración.

Convección:

$$h_{i1} = 2{,}439\,\mathrm{W/(m^2\,K)}, \qquad h_{23} = 1{,}373\,\mathrm{W/(m^2\,K)}, \qquad h_{4e} = 2{,}572\,\mathrm{W/(m^2\,K)}.$$

$$R_{i1} = 0{,}1367\,\mathrm{K/W}, \qquad R_{23} = 0{,}2427\,\mathrm{K/W}, \qquad R_{4e} = 0{,}1296\,\mathrm{K/W}.$$

Conducción:

$$R_{12} = R_{34} = \frac{L}{kA} = 0{,}0179\,\mathrm{K/W}.$$

Radiación:

$$R_{a1}^{(T)} = 0{,}0732\,\mathrm{K/W}, \qquad R_{23,\mathrm{rad}}^{(T)} = 0{,}0762\,\mathrm{K/W}, \qquad R_{4b}^{(T)} = 0{,}0848\,\mathrm{K/W}.$$

La resistencia total es:

$$R_{\mathrm{tot}} = 0{,}1928\,\mathrm{K/W}.$$

La potencia es:

$$q = 98{,}57\,\mathrm{W}.$$

Las temperaturas resultantes son:

$$T_1 = 16{,}30\,^\circ\mathrm{C}, \qquad T_2 = 14{,}54\,^\circ\mathrm{C}, \qquad T_3 = 8{,}82\,^\circ\mathrm{C}, \qquad T_4 = 7{,}05\,^\circ\mathrm{C}.$$

Haciendo una nueva iteración, resulta:

	Iteración 0	Iteración 1	Iteración 2	Iteración 3
T_1 [°C]	19	16,30	16,30	16,31
T_2 [°C]	11	14,67	14,54	14,55
T_3 [°C]	9	8,92	8,82	8,84
T_4 [°C]	4	7,29	7,05	7,07
q [W]	–	91,29	98,57	98,36

Tabla 4.21: Iteraciones del ejercicio resuelto 16.

5. Conclusiones o interpretación.

$$\boxed{q = 98{,}36\,\mathrm{W} \quad \text{por metro de profundidad}}$$

$$\boxed{T_1 = 16{,}31\,^\circ\mathrm{C}, \qquad T_2 = 14{,}55\,^\circ\mathrm{C}, \qquad T_3 = 8{,}84\,^\circ\mathrm{C}, \qquad T_4 = 7{,}07\,^\circ\mathrm{C}.}$$

Comprobación final

El mismo flujo debe atravesar toda la pared, las temperaturas deben ser monótonas y la resistencia equivalente de la cámara debe reproducir ambas contribuciones.

4.10.17 Ejercicio resuelto 17. Encapsulado esférico en cámara criogénica

Descripción del problema

Basado en el ejercicio 6 de conducción. Un encapsulado esférico de 100 mm de diámetro, con componentes electrónicos, se sitúa dentro de una cámara de grandes dimensiones. El exterior se modela como un medio gaseoso criogénico a $-196\,^\circ\mathrm{C}$, caracterizado mediante la correlación efectiva

$$h_c = 0{,}98\,|T_s - T_\infty|^{1/3} \quad [\mathrm{W/(m^2\,K)}],$$

y las paredes del recinto están a $-198\,^\circ\mathrm{C}$. La correlación suministrada define completamente el intercambio convectivo para el ejercicio; no se asignan composición ni presión al medio y no debe interpretarse como aire atmosférico en equilibrio a esa temperatura. La temperatura máxima admisible del encapsulado es $80\,^\circ\mathrm{C}$, su resistencia interna se desprecia y la superficie exterior es gris difusa con emisividad 0,3. Se piden h_c, h_r y la potencia máxima que puede evacuarse.

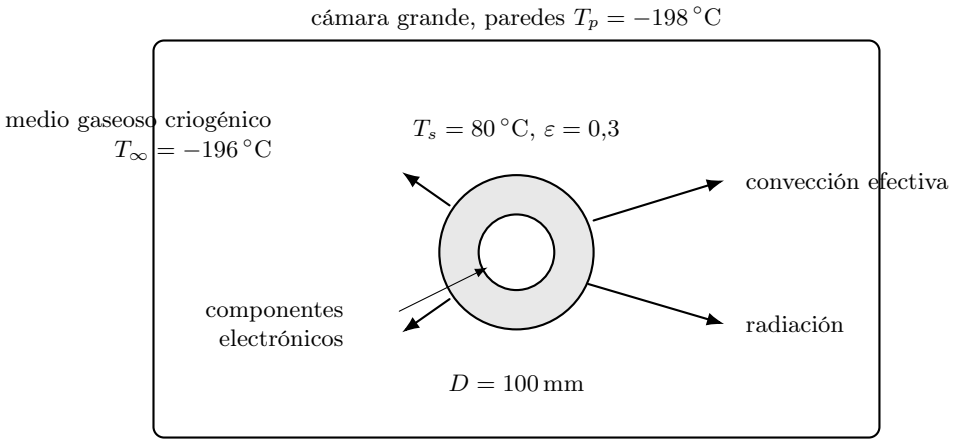


Figura 4.41: Encapsulado isotermo con convección efectiva hacia el medio gaseoso y radiación hacia las paredes del recinto.

Datos.

- $D = 0{,}1\,\mathrm{m}$, $T_s = 80\,^\circ\mathrm{C}$.
- $T_\infty = -196\,^\circ\mathrm{C}$, $T_p = -198\,^\circ\mathrm{C}$.
- $\varepsilon = 0{,}3$ y $\sigma = 5{,}67 \times 10^{-8}\,\mathrm{W/(m^2\,K^4)}$.
- $h_c = 0{,}98|T_s - T_\infty|^{1/3}$.

Resolución del problema

Antes de calcular

Predicción física. La cápsula caliente evacúa energía simultáneamente hacia el medio gaseoso y hacia las paredes frías.

Modelo esperado. Balance de un nodo isotermo con dos salidas hacia focos distintos.

La correlación efectiva da

$$h_c = 0{,}98(80 - (-196))^{1/3} = 6{,}381\,\mathrm{W/(m^2\,K)}.$$

La radiación hacia un recinto grande se linealiza de forma exacta entre T_s y T_p:

$$h_r = \varepsilon\sigma(T_s^2 + T_p^2)(T_s + T_p) = 0{,}950\,\mathrm{W/(m^2\,K)},$$

con temperaturas absolutas. El área exterior de la esfera es

$$A = \pi D^2 = 0{,}031\,42\,\mathrm{m}^2.$$

Por tanto,

$$q_c = h_c A(T_s - T_\infty) = 55{,}33\,\mathrm{W}, \qquad q_r = h_r A(T_s - T_p) = 8{,}29\,\mathrm{W},$$
$$q_{\mathrm{máx}} = q_c + q_r = 63{,}62\,\mathrm{W}.$$

Resultado.

$$\boxed{h_c = 6{,}381\,\mathrm{W/(m^2\,K)}, \qquad h_r = 0{,}950\,\mathrm{W/(m^2\,K)}, \qquad q_{\mathrm{máx}} = 63{,}6\,\mathrm{W}.}$$

La convección efectiva y la radiación terminan en focos distintos; sus potencias se suman, pero no forman un paralelo estricto de dos terminales. La formulación no requiere propiedades termofísicas de "aire" a $-196\,^\circ\mathrm{C}$, porque el comportamiento exterior está definido por la correlación suministrada.

Comprobación final

Verifique el cierre $q_{\mathrm{máx}} = q_c + q_r$, use kelvin en T^4, compruebe que ambas potencias son salientes y que la correlación natural es compatible con el intervalo térmico. Como el medio criogénico no se identifica como aire atmosférico, deben declararse fase, composición y presión si se pretende sustituir la correlación efectiva por propiedades tabuladas.

CAPÍTULO 5

Intercambiadores de calor

Introducción

Un intercambiador de calor es un dispositivo destinado a transmitir energía térmica entre dos corrientes a diferente temperatura. En la mayor parte de los equipos una corriente caliente cede calor a una corriente fría a través de una pared metálica que impide la mezcla de los fluidos. Esta descripción sencilla reúne, sin embargo, varios fenómenos estudiados en capítulos anteriores: convección en el lado caliente, conducción a través de la pared, convección en el lado frío, posible radiación, presencia de aletas, ensuciamiento y pérdidas de carga.

La utilidad de los intercambiadores aparece en centrales térmicas, condensadores, evaporadores, calderas, bombas de calor, circuitos frigoríficos, radiadores de automóviles, calefacción de edificios, industria alimentaria, industria química y sistemas de recuperación de energía. En todos ellos se debe cumplir una doble especificación. La primera es térmica: transmitir la potencia necesaria para alcanzar las temperaturas deseadas. La segunda es hidráulica: conseguirlo sin imponer una pérdida de carga inaceptable ni una potencia de bombeo excesiva.

Desde el punto de vista del cálculo conviene distinguir entre el análisis local de los mecanismos de transmisión de calor y el análisis global del equipo. En conducción o convección se estudia una pared, una capa límite o una superficie concreta. En intercambiadores se agrupan esos fenómenos en magnitudes globales, como la conductancia UA, la diferencia de temperatura logarítmica media o la efectividad. Estas magnitudes no eliminan la física local; la resumen para poder diseñar y comparar equipos completos. La Tabla 5.1 resume la notación mínima usada en el capítulo.

Resultados de aprendizaje Al terminar este capítulo, el alumno será capaz de:

- dibujar las corrientes y aplicar el balance energético global;
- interpretar C_c, C_f, C_{min}, C_r y los límites de temperatura;
- construir una conductancia global UA con áreas coherentes;
- elegir entre DTLM y efectividad–NUT según los datos conocidos;
- utilizar el factor F en configuraciones multipaso;
- comprobar factibilidad, conservación de energía y $0 \leq \epsilon \leq 1$.

Antes de empezar Balances de energía, convección, conducción en paredes y redes de resistencias. Es necesario distinguir entrada/salida y caliente/frío antes de iniciar el cálculo.

Selector de método para intercambiadores

1. Dibuje las corrientes y calcule $C_c = \dot{m}_c c_{p,c}$ y $C_f = \dot{m}_f c_{p,f}$.
2. Escriba el balance y determine C_{min}, C_{max} y la potencia máxima posible.
3. Si se conocen las cuatro temperaturas terminales y se busca área o UA, use DTLM.
4. Si se conoce UA y se buscan temperaturas de salida, use efectividad–NUT.
5. En equipos multipaso o cruzados con DTLM, aplique el factor F.
6. Compruebe temperaturas alcanzables, $q_c = q_f$ y coherencia del área de referencia de U.

Núcleo. Balance energético, UA, DTLM, C_{min}, efectividad y NUT constituyen el núcleo operativo.

Ampliación. Fórmulas explícitas de F, relaciones inversas poco frecuentes y detalles hidráulicos se conservan como consulta.

Tabla 5.1: Notación mínima para comenzar el capítulo. El resto de símbolos se introduce donde se utiliza.

Símbolo	Lectura física
C_c, C_f	Tasa de capacidad térmica de cada corriente: $C = \dot{m}c_p$ [W/K]. Indica la potencia necesaria por kelvin de cambio de la corriente.
C_{min}	Menor capacidad térmica. Es la corriente que más cambia de temperatura y la que limita q_{max}.
UA	Conductancia global del equipo. Resume convección, pared, ensuciamiento y aletas.
ΔT_{lm}	Diferencia de temperatura media apropiada cuando se conocen las temperaturas terminales.
F	Corrección de la DTLM para configuraciones multipaso o cruzadas.
ϵ	Fracción de la potencia máxima posible que realmente intercambia el equipo.
NUT	Tamaño térmico adimensional del equipo: $NUT = UA/C_{min}$.

Convención de subíndices en este capítulo En este capítulo, los subíndices c y f significan, respectivamente, *caliente* y *frío*. Por tanto, T_f representa una temperatura del fluido frío cuando aparece en la notación de intercambiadores; no debe confundirse con la temperatura de película empleada en convección.

Cómo plantear un problema de intercambiadores

La resolución de un problema de intercambiadores debe comenzar con un esquema de las dos corrientes. Es necesario identificar cuál es el fluido caliente y cuál es el frío, en qué puntos entran y salen, si circulan en equicorriente, contracorriente, flujo cruzado o varios pasos, y qué temperaturas y gastos másicos se conocen. Después se escriben las capacidades térmicas $C_c = \dot{m}_c c_{p,c}$ y $C_f = \dot{m}_f c_{p,f}$, o bien se reconoce que una corriente tiene capacidad térmica prácticamente infinita si cambia de fase o si su gasto másico es muy grande.

El segundo paso es aplicar el balance de energía global. La potencia cedida por el fluido caliente debe coincidir, salvo pérdidas al exterior, con la ganada por el fluido frío. Esta comprobación es una de las mejores formas de detectar errores de signos o temperaturas mal asignadas. A continuación

se estima la conductancia UA a partir de una red de resistencias, de un dato de catálogo o de una correlación experimental.

Con esos datos se elige el método de cálculo. Si se conocen o se fijan las cuatro temperaturas de entrada y salida, el método de la diferencia de temperatura logarítmica media es directo para dimensionar el área. Si se conoce el intercambiador y se buscan las temperaturas de salida, el método efectividad–NUT evita iteraciones iniciales y suele ser el camino más limpio.

Secuencia recomendada Dibujar el equipo, marcar entradas y salidas, calcular C_c y C_f, identificar $C_{\text{mín}}$, escribir el balance energético, construir o tomar UA, elegir DTLM o efectividad–NUT y comprobar el resultado. Las temperaturas no deben cruzarse de forma imposible, F debe estar normalmente entre 0 y 1, la efectividad debe cumplir $0 \leq \epsilon \leq 1$ y el calor cedido por el caliente debe ser el ganado por el frío.

5.1 Las tres preguntas que gobiernan el cálculo

La geometría de un intercambiador puede ser muy variada, pero el cálculo térmico global siempre responde a tres preguntas, en este orden:

Tabla 5.2: Estructura mínima de cualquier problema de intercambiadores.

Pregunta	Herramienta	Qué aporta
1. ¿Cuánto calor puede ceder y recibir cada corriente?	Balance energético y capacidades $C = \dot{m}c_p$	Relaciona q con los cambios de temperatura y permite comprobar conservación.
2. ¿Con qué facilidad atraviesa el calor el equipo?	Red de resistencias y UA	Resume convección, pared, ensuciamiento y aletas.
3. ¿Cómo se conectan entradas, salidas y tamaño térmico?	DTLM o efectividad–NUT	Permite dimensionar un equipo o predecir sus prestaciones.

Orden de trabajo No empiece por una carta ni por una correlación de efectividad. Primero dibuje las corrientes y cierre el balance; después construya o identifique UA; sólo entonces elija DTLM o efectividad–NUT. La configuración geométrica determina qué expresión concreta se usa, pero no cambia este orden lógico.

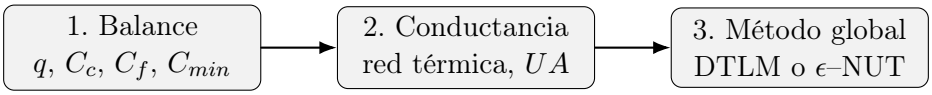


Figura 5.1: Ruta conceptual del capítulo. Cada bloque responde a una pregunta distinta y debe resolverse en ese orden.

5.2 Balance de energía global

El balance global se plantea sobre el intercambiador completo. Se adoptan las hipótesis habituales: régimen estacionario, ausencia de trabajo externo dentro del volumen de control, equipo térmicamente aislado del exterior, variaciones de energía cinética y potencial despreciables, y calores específicos constantes evaluados a temperatura media cuando no hay cambio de fase.

Para un intercambiador de dos corrientes, la potencia térmica cedida por el fluido caliente debe coincidir con la ganada por el frío:

$$\boxed{q = \dot{m}_c c_{p,c}(T_{c,e} - T_{c,s}) = \dot{m}_f c_{p,f}(T_{f,s} - T_{f,e})} \tag{5.1}$$

Definiendo las capacidades térmicas

$$C_c = \dot{m}_c c_{p,c}, \qquad C_f = \dot{m}_f c_{p,f}, \tag{5.2}$$

se obtiene

$$\boxed{q = C_c(T_{c,e} - T_{c,s}) = C_f(T_{f,s} - T_{f,e})} \tag{5.3}$$

En un evaporador idealizado, el fluido frío cambia de fase y su temperatura permanece casi constante. El balance puede escribirse como

$$q = \dot{m}_c c_{p,c}(T_{c,e} - T_{c,s}) = \dot{m}_f |\Delta h_f|. \tag{5.4}$$

En un condensador idealizado, el fluido caliente condensa y cede calor latente: Se define $q > 0$ desde la corriente caliente hacia la fría y $|\Delta h|$ como magnitud positiva del cambio de entalpía. Una convención algebraica alternativa debe conservar sus signos en todo el balance.

$$q = \dot{m}_c |\Delta h_c| = \dot{m}_f c_{p,f}(T_{f,s} - T_{f,e}). \tag{5.5}$$

La capacidad térmica de una corriente es

$$\boxed{C = \dot{m} c_p = \frac{q}{\Delta T}} \tag{5.6}$$

Esta expresión permite interpretar los límites. Si $\dot{m}$ es muy grande, C también lo es y la corriente cambia muy poco de temperatura. Si una corriente cambia de fase a temperatura casi constante, entonces $\Delta T \simeq 0$ para una potencia finita y se modela como $C \to \infty$.

Interpretación de C Para una misma potencia, la corriente con menor capacidad térmica experimenta el mayor salto de temperatura. Por ello $C_{\text{mín}}$ limita la máxima potencia recuperable y aparece en la definición de $q_{\text{máx}}$ y de NUT.

5.2.1 Potencia máxima y límites de temperatura

Antes de elegir un método conviene calcular el límite ideal

$$\boxed{q_{\text{máx}} = C_{min}(T_{c,e} - T_{f,e})} \tag{5.7}$$

Este valor no es la potencia real del equipo. Es el máximo que permitirían las temperaturas de entrada si la corriente de menor capacidad térmica pudiera alcanzar idealmente la temperatura de entrada de la otra corriente. Ese estado requiere el límite $UA \to \infty$; para cualquier conductancia finita se cumple $q = \epsilon q_{\text{máx}} < q_{\text{máx}}$. Por tanto, cualquier solución debe cumplir $0 \le q \le q_{\text{máx}}$.

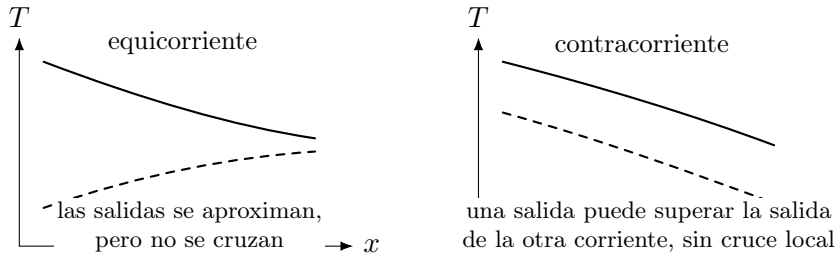


Figura 5.2: Límites cualitativos de temperatura. En cualquier sección local debe mantenerse $T_c(x) \ge T_f(x)$.

Comprobación previa Si una temperatura de salida propuesta obliga a $q > q_{max}$ o produce un cruce local de perfiles, el objetivo no es alcanzable con las condiciones de entrada dadas, aunque la sustitución algebraica produzca un número.

5.3 Coeficiente global de transmisión de calor

El cálculo global de un intercambiador se puede representar mediante una red de resistencias entre las temperaturas medias de los fluidos. La cadena física es: convección desde el fluido caliente a la pared, posible ensuciamiento en el lado caliente, conducción por la pared, ensuciamiento en el lado frío y convección hacia el fluido frío.

5.3.1 Primer nivel: pared limpia y una sola área

Empiece por el caso más sencillo: dos convecciones y una pared limpia, sin aletas ni ensuciamiento y usando una misma área de referencia. La resistencia total es

$$\boxed{R_T^{(0)} = \frac{1}{h_c A} + R_{cond} + \frac{1}{h_f A}, \qquad UA = \frac{1}{R_T^{(0)}}} \tag{5.8}$$

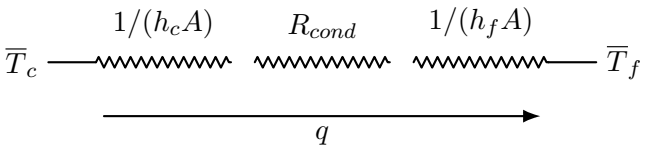


Figura 5.3: Red mínima para comprender UA: convección caliente, pared y convección fría.

5.3.2 Segundo nivel: ensuciamiento, aletas y áreas distintas

Cuando el caso simple está entendido se añaden, una a una, las resistencias de ensuciamiento, el rendimiento de las aletas y las áreas físicas diferentes de cada lado. La red completa queda entonces:

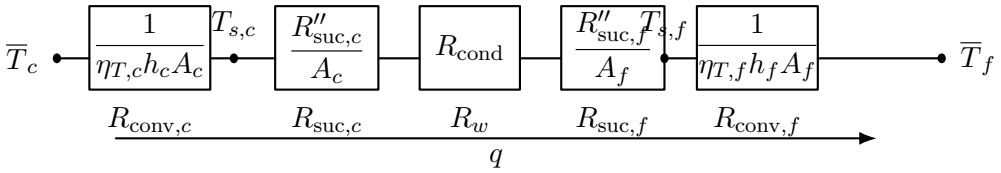


Figura 5.4: Red térmica entre las temperaturas medias de ambos fluidos. Cada resistencia indica su área de referencia.

La resistencia total es

$$\boxed{R_T = \frac{1}{h_c A_c \eta_{T,c}} + \frac{R''_{\text{suc},c}}{A_c} + R_{\text{cond}} + \frac{R''_{\text{suc},f}}{A_f} + \frac{1}{h_f A_f \eta_{T,f}}} \tag{5.9}$$

Los coeficientes de película h_c y h_f no son propiedades del intercambiador aisladas del resto del curso: se obtienen mediante las correlaciones de convección del Capítulo 4, usando la geometría y el régimen de flujo de cada lado. La resistencia conductiva de pared y el rendimiento total de superficies aleteadas enlazan con los modelos de conducción y aletas del Capítulo 2.

La conductancia global del intercambiador es

$$\boxed{UA = \frac{1}{R_T}} \tag{5.10}$$

Tiene unidades de W/K. Es una admitancia térmica: cuanto mayor es UA, mayor potencia se transmite para una diferencia media de temperatura dada.

La Figura 5.4 y la ecuación de R_T deben leerse juntas: cada resistencia convectiva y de ensuciamiento está asociada al área física del lado correspondiente. Por ello U sólo tiene significado cuando se especifica el área de referencia; en cambio, el producto UA representa la misma conductancia global del equipo.

La resistencia conductiva depende de la geometría. Para una pared plana,

$$R_{\text{cond}} = \frac{L}{kA}. \tag{5.11}$$

Para una pared cilíndrica de longitud axial L_z,

$$R_{\text{cond}} = \frac{\ln(r_o/r_i)}{2\pi k L_z}. \tag{5.12}$$

El coeficiente global U siempre debe referirse a un área concreta. Si se usa el área del lado caliente,

$$UA = U_c A_c. \tag{5.13}$$

Si se usa el área del lado frío,

$$UA = U_f A_f. \tag{5.14}$$

Ambas expresiones representan la misma conductancia global. Lo que no debe hacerse es mezclar términos referidos a áreas distintas sin convertirlos. En superficies aleteadas, el rendimiento total η_T ya incorpora que no toda la superficie aleteada trabaja a la temperatura de la base; es la misma magnitud que el rendimiento global de superficie aleteada introducido en el Capítulo 2, escrita aquí con subíndice T para distinguir el lado caliente y el lado frío.

Área de referencia: qué cambia y qué no cambia En un tubo, el área interior es $A_i = \pi D_i L$ y la exterior es $A_o = \pi D_o L$. El valor numérico del coeficiente global depende del área elegida:

$$U_i A_i = U_o A_o = UA.$$

Como normalmente $A_o > A_i$, los valores U_i y U_o no coinciden. Sin embargo, el producto UA sí representa la misma conductancia física. El error típico consiste en calcular U_i y multiplicarlo después por A_o, lo que altera artificialmente la potencia.

Construcción segura de UA La forma menos propensa a errores es sumar primero resistencias en K/W usando el área física de cada término, obtener R_T y calcular $UA = 1/R_T$. Sólo después, si se necesita un coeficiente U, se divide por el área de referencia escogida.

5.3.3 Valores orientativos de U y control de orden de magnitud

Antes de aceptar un resultado conviene comprobar si el coeficiente global obtenido tiene un orden de magnitud razonable. Los valores de U dependen del área de referencia, de los fluidos, de la velocidad, de la geometría, del ensuciamiento y de si existe cambio de fase. Aun así, los rangos siguientes son útiles como primera comprobación de ingeniería:

Tabla 5.3: Rangos orientativos de U para comprobar órdenes de magnitud. Los valores no sustituyen al cálculo con correlaciones ni a los datos de fabricante.

Situación térmica	Rango típico de U [W/(m^2 K)]	Comentario
Gas–gas	10–40	Dominan las bajas conductividades y los bajos coeficientes convectivos de los gases.
Agua–agua	850–1700	Valores elevados si las velocidades son suficientes y las superficies están limpias.
Agua–aceite	100–350	El lado del aceite suele introducir una resistencia importante.
Condensación o ebullición con agua	10^3–10^4	El cambio de fase produce coeficientes de convección altos, aunque el ensuciamiento puede ser decisivo.
Líquido–gas con aletas	30–300 referido al lado del gas	El valor cambia mucho con el área de referencia; por eso siempre debe indicarse el área usada.

Si un cálculo preliminar produce, por ejemplo, un U de varios miles de W/(m^2 K) en un equipo gas–gas sin cambio de fase, o un U extremadamente bajo en un condensador limpio, debe revisarse la red de resistencias, el área de referencia y las unidades. Esta comprobación no demuestra que el valor sea correcto, pero detecta errores frecuentes de escala.

5.4 Métodos de cálculo de intercambiadores

Existen dos familias de métodos de uso común: el método de la diferencia de temperatura logarítmica media y el método efectividad–NUT. Ambos son equivalentes cuando se aplican con las mismas hipótesis, pero se adaptan mejor a tipos de problema distintos.

Tabla 5.4: Selector operativo del método global.

Datos y objetivo	**Método preferente**	Motivo
Cuatro temperaturas terminales conocidas o fijadas; se busca UA o área	**DTLM**	La fuerza impulsora media puede calcularse directamente.
Temperaturas de entrada y UA conocidos; se buscan q y salidas	**ϵ–NUT**	No necesita conocer previamente las temperaturas de salida.
Equipo multipaso o cruzado dimensionado con temperaturas terminales	**DTLM con F**	F corrige la diferencia media de contracorriente ideal.
Se prescribe una efectividad objetivo	**ϵ–NUT inverso**	Permite calcular el NUT y el UA requeridos.

Checklist de factibilidad antes de elegir una fórmula

1. Compruebe que $T_{c,e} > T_{f,e}$ y defina con claridad entradas y salidas.
2. Calcule C_c, C_f, C_{min} y q_{max}.
3. Verifique que la potencia o las salidas pedidas no exigen $q > q_{max}$.
4. Identifique la configuración real y el área a la que se refiere U.
5. Sólo entonces seleccione DTLM, F o una correlación ϵ–NUT.

5.4.1 Tipos de problemas

Antes de escoger un método conviene distinguir si el objetivo es analizar un intercambiador existente o dimensionar uno nuevo. Esta distinción evita usar iteraciones innecesarias o pedir datos que todavía no se conocen.

5.4.1.1 Problemas de actuaciones

En un problema de actuaciones se dispone de un intercambiador ya construido o seleccionado. Se conocen su geometría o su UA, las temperaturas de entrada y los gastos másicos. Se buscan la potencia intercambiada y las temperaturas de salida. El método natural es efectividad–NUT, porque no exige conocer previamente las salidas.

5.4.1.2 Problemas de dimensionado

En un problema de dimensionado se desea calcular el área o tamaño de un intercambiador para alcanzar ciertas temperaturas de salida. Si las cuatro temperaturas terminales están fijadas, el método DTLM permite obtener directamente UA y, a partir de U, el área requerida. El método efectividad–NUT también puede usarse si el diseño se formula mediante una efectividad objetivo.

5.4.2 Método de la diferencia de temperatura logarítmica media

El método DTLM expresa la potencia como producto de una conductancia global y una diferencia media de temperatura. Su forma básica supone régimen estacionario, ausencia de pérdidas externas, U aproximadamente constante sobre el área considerada y calores específicos constantes en el intervalo de trabajo:

$$\boxed{q = U A F \, \Delta T_{\mathrm{lm}}} \tag{5.15}$$

El factor F vale 1 en equicorriente y contracorriente simples de un paso, y corrige la diferencia media en configuraciones multipaso o de flujo cruzado.

La diferencia de temperatura logarítmica media se define como

$$\boxed{\Delta T_{\mathrm{lm}} = \frac{\Delta T_1 - \Delta T_2}{\ln(\Delta T_1/\Delta T_2)} = \frac{\Delta T_2 - \Delta T_1}{\ln(\Delta T_2/\Delta T_1)}} \tag{5.16}$$

Las dos formas son equivalentes si se mantiene la misma definición de ΔT_1 y ΔT_2. La DTLM real requiere diferencias terminales no nulas y del mismo signo a lo largo de la configuración considerada. Si cambian de signo existe un cruce térmico local y esta expresión no representa una fuerza impulsora continua. Cuando $\Delta T_1 \approx \Delta T_2$, la forma directa pierde precisión numérica por cancelación; debe usarse el límite común o una evaluación estable, por ejemplo mediante una función numérica equivalente a `log1p`. Si $\Delta T_1 = \Delta T_2$, el límite es

$$\Delta T_{\mathrm{lm}} = \Delta T_1 = \Delta T_2. \tag{5.17}$$

Para equicorriente,

$$\Delta T_1 = T_{c,e} - T_{f,e}, \qquad \Delta T_2 = T_{c,s} - T_{f,s}. \tag{5.18}$$

Para contracorriente,

$$\Delta T_1 = T_{c,e} - T_{f,s}, \qquad \Delta T_2 = T_{c,s} - T_{f,e}. \tag{5.19}$$

En configuraciones más complejas se calcula normalmente la DTLM como si el equipo fuera de contracorriente y después se multiplica por el factor de corrección F.

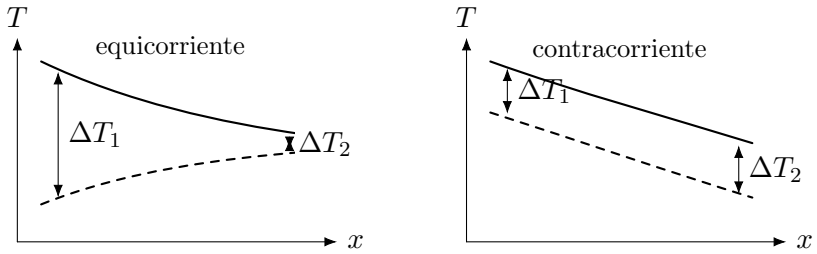


Figura 5.5: Diferencias terminales de temperatura usadas en la DTLM para equicorriente y contracorriente.

El factor de corrección F recoge la desviación respecto de la DTLM de contracorriente ideal. En intercambiadores de carcasa y tubos multipaso, placas con pasos complejos o flujo cruzado, $0 < F \leq 1$ dentro del dominio de la carta; en general $F < 1$, aunque $F \to 1$ en ciertos límites. En las cartas de corrección se emplean normalmente dos parámetros adimensionales. Con la notación de este capítulo puede escribirse

$$P = \frac{T_{f,s} - T_{f,e}}{T_{c,e} - T_{f,e}}, \qquad R_F = \frac{T_{c,e} - T_{c,s}}{T_{f,s} - T_{f,e}}. \tag{5.20}$$

El parámetro P mide el calentamiento relativo del fluido frío respecto al salto máximo disponible entre entradas. El parámetro R_F compara el enfriamiento del fluido caliente con el calentamiento del fluido frío; si no hay cambio de fase, también puede relacionarse con las capacidades térmicas mediante $R_F = C_f/C_c$, siempre que las dos corrientes cumplan el balance $C_c(T_{c,e} - T_{c,s}) = C_f(T_{f,s} - T_{f,e})$. Se usa R_F, y no simplemente R, para no confundirlo con una resistencia térmica.

Lectura guiada de una carta F Considere un equipo 1–2 con $T_{c,e} = 150\,^\circ\text{C}$, $T_{c,s} = 90\,^\circ\text{C}$, $T_{f,e} = 30\,^\circ\text{C}$ y $T_{f,s} = 70\,^\circ\text{C}$. Primero:

$$P = \frac{70 - 30}{150 - 30} = 0{,}333, \qquad R_F = \frac{150 - 90}{70 - 30} = 1{,}50.$$

En la carta de un paso por carcasa se localiza la curva $R_F = 1{,}5$, se entra con $P \simeq 0{,}33$ y se lee aproximadamente $F \simeq 0{,}91$. La expresión analítica da $F = 0{,}910$. Finalmente se comprueba $0 < F \leq 1$. El orden correcto es: calcular parámetros, elegir el panel geométrico, interpolar, leer y validar; no se elige F por semejanza visual con otro ejercicio.

Si el fluido frío apenas cambia de temperatura, $P \to 0$ y las cartas dan $F \to 1$. Si el fluido caliente apenas cambia de temperatura, $R_F \to 0$ y también se obtiene $F \to 1$. En esas condiciones el equipo se comporta, desde el punto de vista de la DTLM, casi como un intercambiador ideal de una corriente. Valores muy bajos de F suelen indicar un diseño térmicamente poco conveniente, porque una parte importante del área no se aprovecha con una diferencia de temperatura favorable.

5.4.2.1 Cálculo explícito de F para un paso por carcasa

Ampliación. La expresión analítica de F evita leer la carta, pero en una primera aproximación basta comprender sus parámetros y su rango físico.

Para un intercambiador de carcasa y tubos con un paso por carcasa y un número par de pasos por tubos, el factor de corrección F puede calcularse mediante una expresión analítica equivalente a la carta habitual. Con los parámetros definidos arriba,

$$F = \frac{\sqrt{R_F^2+1}}{R_F-1}\,\frac{\ln\left(\dfrac{1-P}{1-PR_F}\right)}{\ln\left[\dfrac{2-P\left(R_F+1-\sqrt{R_F^2+1}\right)}{2-P\left(R_F+1+\sqrt{R_F^2+1}\right)}\right]}, \qquad R_F \neq 1. \tag{5.21}$$

Para $R_F = 1$ se usa el límite de la expresión anterior:

$$F = \frac{\sqrt{2}\,P}{(1-P)\,\ln\left[\dfrac{2-P(2-\sqrt{2})}{2-P(2+\sqrt{2})}\right]}. \tag{5.22}$$

Estas fórmulas sólo son utilizables si todos los argumentos de los logaritmos son positivos y si el valor resultante satisface $0 < F \leq 1$. En particular, para $R_F \neq 1$ debe cumplirse

$$1 - PR_F > 0, \qquad 2 - P\left(R_F + 1 + \sqrt{R_F^2+1}\right) > 0. \tag{5.23}$$

Si alguna de estas condiciones falla, el conjunto de temperaturas terminales propuesto no es físicamente alcanzable con esta configuración de un paso por carcasa; debe aumentarse el número de carcasas, modificar el objetivo térmico o cambiar de configuración. Para flujo cruzado y configuraciones más complejas se emplean cartas, tablas o programas de cálculo específicos.

Uso del factor de corrección F Para un intercambiador simple en equicorriente o contracorriente, $F = 1$ y no se emplean cartas. Para carcasa y tubos multipaso, flujo cruzado o configuraciones equivalentes, se calcula primero ΔT_{lm} como si el equipo fuese de contracorriente y después se multiplica por $F(P,R_F)$. Si las diferencias terminales cambian de signo, la DTLM deja de representar una fuerza impulsora física continua y el planteamiento debe revisarse antes de continuar.

5.4.2.2 Relación entre cartas $F(P,R_F)$ y método ϵ–NUT

Las cartas del factor de corrección F pueden generarse de forma reproducible a partir de las correlaciones ϵ–NUT. Para ello se usa la DTLM de contracorriente normalizada,

$$\Theta^{*}_{\mathrm{lm},cc} = \frac{\Delta T_{\mathrm{lm},cc}}{T_{c,e} - T_{f,e}} = \frac{P(R_F-1)}{\ln[(1-P)/(1-R_FP)]}, \tag{5.24}$$

y la relación

$$F = \frac{\epsilon}{\mathrm{NUT}\;\Theta^{*}_{\mathrm{lm},cc}}. \tag{5.25}$$

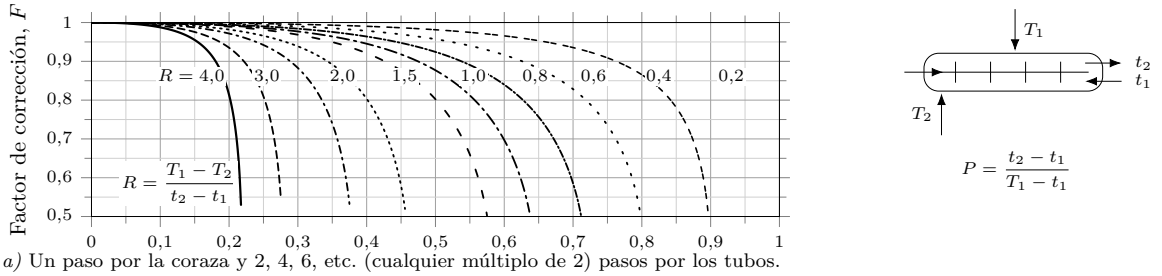
La conversión entre los parámetros de las cartas y los del método de efectividad es

$$\begin{aligned} R_F \leq 1: &\quad \epsilon = P, &\quad C_r = R_F, \\ R_F > 1: &\quad \epsilon = R_FP, &\quad C_r = 1/R_F. \end{aligned} \tag{5.26}$$

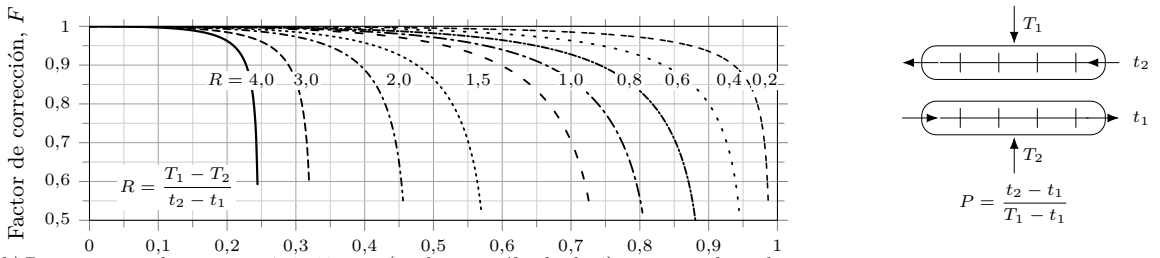
Esta forma es útil para verificar numéricamente las cartas de F de carcasa y tubos y de flujo cruzado, siempre que los argumentos de los logaritmos sean positivos y que las temperaturas terminales correspondan a un intercambiador físicamente posible.

5.4.2.3 Gráficas del factor de corrección F

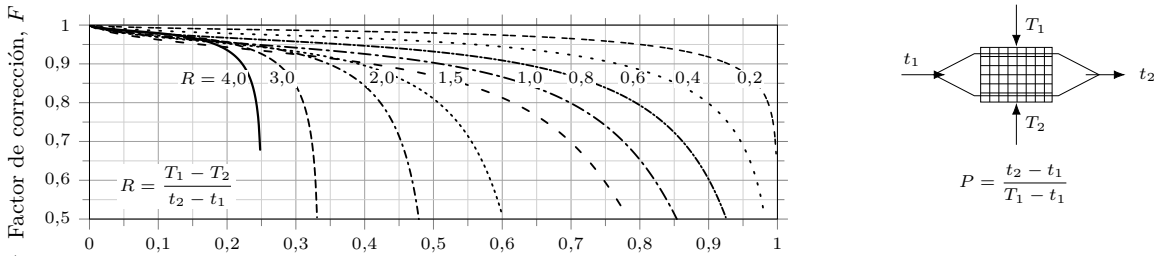
Además de las expresiones analíticas, conviene disponer de cartas de lectura rápida del factor de corrección F. La Figura 5.6 se ha regenerado desde cero, en escala de grises, a partir de correlaciones estándar de Incropera/Çengel y se ha comprobado cualitativamente frente a las cartas de referencia, en particular la carta (c) de flujo cruzado con ambos fluidos no mezclados. Estas curvas permiten estimar con rapidez si la geometría elegida conduce a valores aceptables de F o si, por el contrario, el diseño queda en una zona poco recomendable.



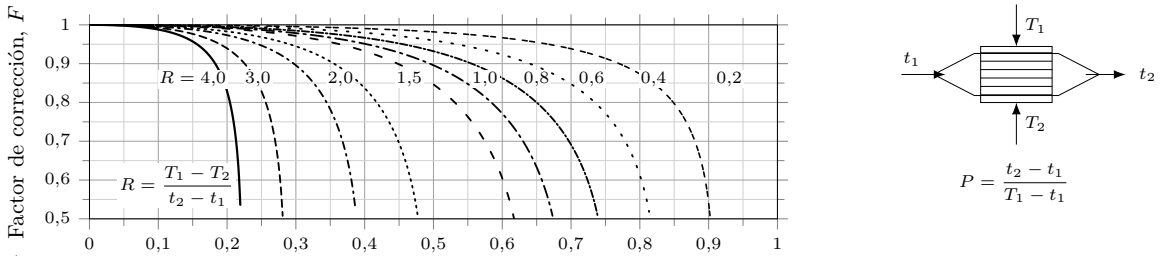
a) Un paso por la coraza y 2, 4, 6, etc. (cualquier múltiplo de 2) pasos por los tubos.



b) Dos pasos por la coraza y 4, 8, 12, etc. (cualquier múltiplo de 4) pasos por los tubos.



c) Flujo cruzado de un solo paso con los dos fluidos de flujo no mezclado.



d) Flujo cruzado de un solo paso con uno de los fluidos de flujo mezclado y el otro no mezclado.

Figura 5.6: Cartas del factor de corrección F: uno y dos pasos por carcasa, flujo cruzado con ambos fluidos no mezclados y flujo cruzado con el fluido frío mezclado y el caliente no mezclado. En la figura, T_1,T_2 designan las temperaturas caliente de entrada y salida, t_1,t_2 las frías, y el símbolo R de la carta coincide con R_F en el texto.

Como puede apreciarse en la Figura 5.6, el factor de corrección F disminuye al aumentar P y, en general, también al aumentar R_F, de modo que las zonas de F bajo advierten sobre configuraciones térmicamente menos favorables. El panel de flujo cruzado con una corriente mezclada corresponde específicamente al fluido frío mezclado; según el valor de $R_F = C_f/C_c$, esa corriente puede ser C_{min}

o C_{max}. No debe sustituirse por la correlación del caso opuesto sin comprobar qué corriente está mezclada. En problemas de diseño académico es habitual exigir $F \gtrsim 0{,}75$ como criterio de comodidad térmica, aunque el valor admisible exacto depende del contexto del problema y de las restricciones geométricas.

5.4.3 Método efectividad–NUT

5.4.3.1 Definiciones básicas

El método efectividad–NUT compara la potencia real con la máxima potencia que podría intercambiarse de forma ideal. Se definen

$$C_{\text{mín}} = \text{mín}(C_c, C_f), \qquad C_{\text{máx}} = \text{máx}(C_c, C_f), \qquad C_r = \frac{C_{\text{mín}}}{C_{\text{máx}}} \leq 1. \tag{5.27}$$

El número de unidades de transferencia es

$$\boxed{\text{NUT} = \frac{UA}{C_{\text{mín}}}} \tag{5.28}$$

La máxima potencia posible se obtiene suponiendo que la corriente de menor capacidad térmica alcanza, idealmente, la temperatura de entrada de la otra corriente:

$$\boxed{q_{\text{máx}} = C_{\text{mín}}(T_{c,e} - T_{f,e})} \tag{5.29}$$

La corriente con $C_{\text{máx}}$ no puede imponer por sí sola el límite térmico: si alcanzase la temperatura extrema de la otra corriente, su balance exigiría una potencia mayor que la que la corriente de $C_{\text{mín}}$ puede aceptar o ceder. Por eso el límite ideal lo marca siempre $C_{\text{mín}}$. La efectividad es

$$\boxed{\epsilon = \frac{q}{q_{\text{máx}}}, \qquad 0 \leq \epsilon \leq 1} \tag{5.30}$$

Por tanto,

$$\boxed{q = \epsilon\, C_{\text{mín}}(T_{c,e} - T_{f,e})} \tag{5.31}$$

El caso $C_r = 0$ representa una corriente de capacidad térmica infinita, bien por gasto másico muy grande o por cambio de fase. El caso $C_r = 1$ representa dos corrientes con igual capacidad térmica. En general, para un mismo NUT, la efectividad disminuye al aumentar C_r.

Tabla 5.5: Límites de efectividad cuando el área tiende a infinito. Estos límites sirven para detectar objetivos térmicos imposibles antes de iterar o leer cartas.

Configuración	$\epsilon_{\text{máx}}$ cuando NUT $\to \infty$
Equicorriente	$\dfrac{1}{1+C_r}$
Contracorriente, $C_r < 1$	1
Contracorriente, $C_r = 1$	1 asintótico
Carcasa y tubos 1–2 con $C_r = 1$	$2 - \sqrt{2} \simeq 0{,}586$
Cualquier configuración con $C_r = 0$	1

5.4.3.2 Relaciones de efectividad

Las correlaciones siguientes se expresan con $C_r = C_{\text{mín}}/C_{\text{máx}}$. Se usa la notación $C_r = C_{\text{mín}}/C_{\text{máx}}$ para evitar confusión con resistencias térmicas.

Todas las correlaciones de esta sección presuponen NUT ≥ 0 y $0 \leq C_r \leq 1$. Las expresiones inversas sólo son válidas cuando la efectividad requerida es físicamente alcanzable. Por ejemplo, en equicorriente se exige $\epsilon < 1/(1 + C_r)$, porque ése es su límite cuando el área tiende a infinito; en contracorriente con $C_r < 1$ el límite ideal es $\epsilon \to 1$.

Tabla 5.6: Relaciones directas que constituyen el núcleo docente.

Configuración	Relación de efectividad
$C_r = 0$	$\epsilon = 1 - e^{-NUT}$
Equicorriente	$\epsilon = \dfrac{1 - e^{-NUT(1+C_r)}}{1 + C_r}$
Contracorriente, $C_r < 1$	$\epsilon = \dfrac{1 - e^{-NUT(1-C_r)}}{1 - C_r e^{-NUT(1-C_r)}}$
Contracorriente, $C_r = 1$	$\epsilon = \dfrac{NUT}{1 + NUT}$

Qué debe aprenderse y qué debe consultarse Conviene dominar las cuatro relaciones anteriores y saber seleccionar una carta o tabla para flujo cruzado y carcasa–tubos. No es necesario memorizar el inventario completo de configuraciones especiales.

Ampliación. La tabla completa siguiente se mantiene como referencia para configuraciones de flujo cruzado y carcasa–tubos.

Tabla 5.7: Relaciones de efectividad $\epsilon = f(\text{NUT}, C_r)$ para configuraciones habituales.

Configuración	Efectividad
Una sola corriente o cualquier intercambiador con $C_r = 0$	$\epsilon = 1 - \exp(-\text{NUT})$
Flujo paralelo en equicorriente	$\epsilon = \dfrac{1 - \exp[-\text{NUT}(1 + C_r)]}{1 + C_r}$
Flujo en contracorriente, $C_r < 1$	$\epsilon = \dfrac{1 - \exp[-\text{NUT}(1 - C_r)]}{1 - C_r \exp[-\text{NUT}(1 - C_r)]}$
Flujo en contracorriente, $C_r = 1$	$\epsilon = \dfrac{\text{NUT}}{1 + \text{NUT}}$
Flujo cruzado, ambos fluidos sin mezclar	$\epsilon = 1 - \exp\left\{\dfrac{\text{NUT}^{0,22}}{C_r}\left[\exp(-C_r\,\text{NUT}^{0,78}) - 1\right]\right\}$
$C_{\text{máx}}$ mezclado y $C_{\text{mín}}$ sin mezclar	$\epsilon = \dfrac{1}{C_r}\left\{1 - \exp\left[C_r\left(e^{-\text{NUT}} - 1\right)\right]\right\}$
$C_{\text{mín}}$ mezclado y $C_{\text{máx}}$ sin mezclar	$\epsilon = 1 - \exp\left\{-\dfrac{1}{C_r}\left[1 - e^{-C_r\,\text{NUT}}\right]\right\}$
Carcasa y tubos: un paso por carcasa, 2,4,6,... pasos por tubos	$\epsilon_1 = \dfrac{2}{1 + C_r + \sqrt{1 + C_r^2}\,\frac{1+\exp[-\text{NUT}\sqrt{1+C_r^2}]}{1-\exp[-\text{NUT}\sqrt{1+C_r^2}]}}$
Carcasa y tubos: n pasos por carcasa y número par de pasos por tubos, $2n$,$4n$,$6n$,...	$\epsilon = \dfrac{\left(\frac{1-\epsilon_1 C_r}{1-\epsilon_1}\right)^n - 1}{\left(\frac{1-\epsilon_1 C_r}{1-\epsilon_1}\right)^n - C_r}$, $C_r \neq 1$, donde ϵ_1 se evalúa con NUT/n. Para $C_r = 1$: $\epsilon = \dfrac{n\epsilon_1}{1 + (n-1)\epsilon_1}$.

La relación de flujo cruzado con ambos fluidos sin mezclar es una correlación aproximada de uso habitual, válida en su dominio básico $0 < C_r \leq 1$ y $NUT \geq 0$. Su precisión debe contrastarse con cartas o una solución específica cuando NUT es grande o la efectividad se aproxima a sus límites, y no debe interpretarse como una solución exacta cerrada; por eso su inversa se obtiene por lectura de carta o resolución numérica. Las configuraciones de flujo cruzado en las que ambos fluidos están completamente mezclados no se incluyen en el formulario principal. Son casos menos habituales y, cuando sean necesarios, conviene acudir a tablas específicas o a software de diseño con la geometría real del equipo.

5.4.3.3 Relaciones inversas de NUT: consulta

En problemas de dimensionado puede resultar más cómodo despejar NUT a partir de una efectividad requerida. Para algunas configuraciones existe fórmula explícita; en otras se resuelve numéricamente.

Ampliación. Las relaciones inversas se consultan cuando la incógnita es NUT. No es necesario memorizarlas.

Tabla 5.8: Relaciones inversas NUT $= f(\epsilon, C_r)$ para configuraciones habituales.

Configuración	Número de unidades de transferencia
Una sola corriente o $C_r = 0$	$\mathrm{NUT} = -\ln(1-\epsilon)$
Flujo paralelo en equicorriente	$\mathrm{NUT} = -\dfrac{\ln[1-\epsilon(1+C_r)]}{1+C_r}$
Flujo en contracorriente, $C_r < 1$	$\mathrm{NUT} = \dfrac{1}{1-C_r}\ln\left(\dfrac{1-\epsilon C_r}{1-\epsilon}\right)$
Flujo en contracorriente, $C_r = 1$	$\mathrm{NUT} = \dfrac{\epsilon}{1-\epsilon}$
Flujo cruzado, ambos fluidos sin mezclar	No existe fórmula explícita sencilla; se resuelve numéricamente.
$C_{\text{máx}}$ mezclado y $C_{\text{mín}}$ sin mezclar	$\mathrm{NUT} = -\ln\left[1+\dfrac{\ln(1-\epsilon C_r)}{C_r}\right]$
$C_{\text{mín}}$ mezclado y $C_{\text{máx}}$ sin mezclar	$\mathrm{NUT} = -\dfrac{1}{C_r}\ln[1+C_r\ln(1-\epsilon)]$
Carcasa y tubos: un paso por carcasa	$\mathrm{NUT} = -\dfrac{1}{\sqrt{1+C_r^2}}\ln\left(\dfrac{E-1}{E+1}\right)$, $E = \dfrac{2/\epsilon-(1+C_r)}{\sqrt{1+C_r^2}}$.
Carcasa y tubos: n pasos por carcasa	$\dfrac{\mathrm{NUT}}{n} = -\dfrac{1}{\sqrt{1+C_r^2}}\ln\left(\dfrac{E-1}{E+1}\right)$, $E = \dfrac{2(\Phi-C_r)/(\Phi-1)-(1+C_r)}{\sqrt{1+C_r^2}}$, $\Phi = \left(\dfrac{\epsilon C_r-1}{\epsilon-1}\right)^{1/n}$.

Uso de las tablas de efectividad Las expresiones de carcasa y tubos suponen los arreglos ideales indicados por el número de pasos. En equipos reales, las fugas entre deflectores, by-pass, distribución no uniforme, conducción axial, variación de propiedades y ensuciamiento pueden requerir factores de corrección de fabricante. En un cálculo académico, las tablas son adecuadas si se respeta la configuración geométrica y se emplea el mismo UA global que en la definición de NUT.

5.4.3.4 Comportamiento cualitativo de la efectividad

Para todos los intercambiadores ideales, la mayor efectividad se obtiene en el límite físico $C_r \to 0$ con $C_{\text{mín}}$ finito y $C_{\text{máx}}/C_{\text{mín}} \to \infty$, es decir, cuando una corriente tiene capacidad térmica efectiva muy grande. No debe confundirse con el caso degenerado $C_{\text{mín}} \to 0$, para el que $q_{\text{máx}} = C_{\text{mín}}(T_{h,e} - T_{c,e}) \to 0$. La peor situación suele estar cerca de $C_r = 1$, donde ambas corrientes tienen capacidades parecidas. Para $C_r = 0$, todos los intercambiadores cumplen la misma relación

$$\epsilon = 1 - e^{-\,\text{NUT}}. \tag{5.32}$$

Para NUT pequeño, las diferencias entre configuraciones son reducidas. Cuando NUT aumenta, la contracorriente se separa como configuración más eficiente. Aumentar UA aumenta NUT, pero con rendimientos decrecientes: cada incremento adicional de área produce una mejora menor de efectividad. Esta lectura cualitativa puede comprobarse directamente en las Figuras 5.7, 5.8 y 5.9.

5.4.3.5 Gráficas ϵ–NUT

Las familias de curvas siguientes permiten visualizar de forma inmediata cómo cambia la efectividad con C_r, la configuración geométrica y el valor de NUT. Las Figuras 5.7–5.9 se han reconstruido con un estilo gráfico deliberadamente cercano al de los textos clásicos: escala de grises, diferenciación por trazos y rotulación directa de curvas, de modo que puedan usarse como cartas de consulta rápida además de como apoyo conceptual.

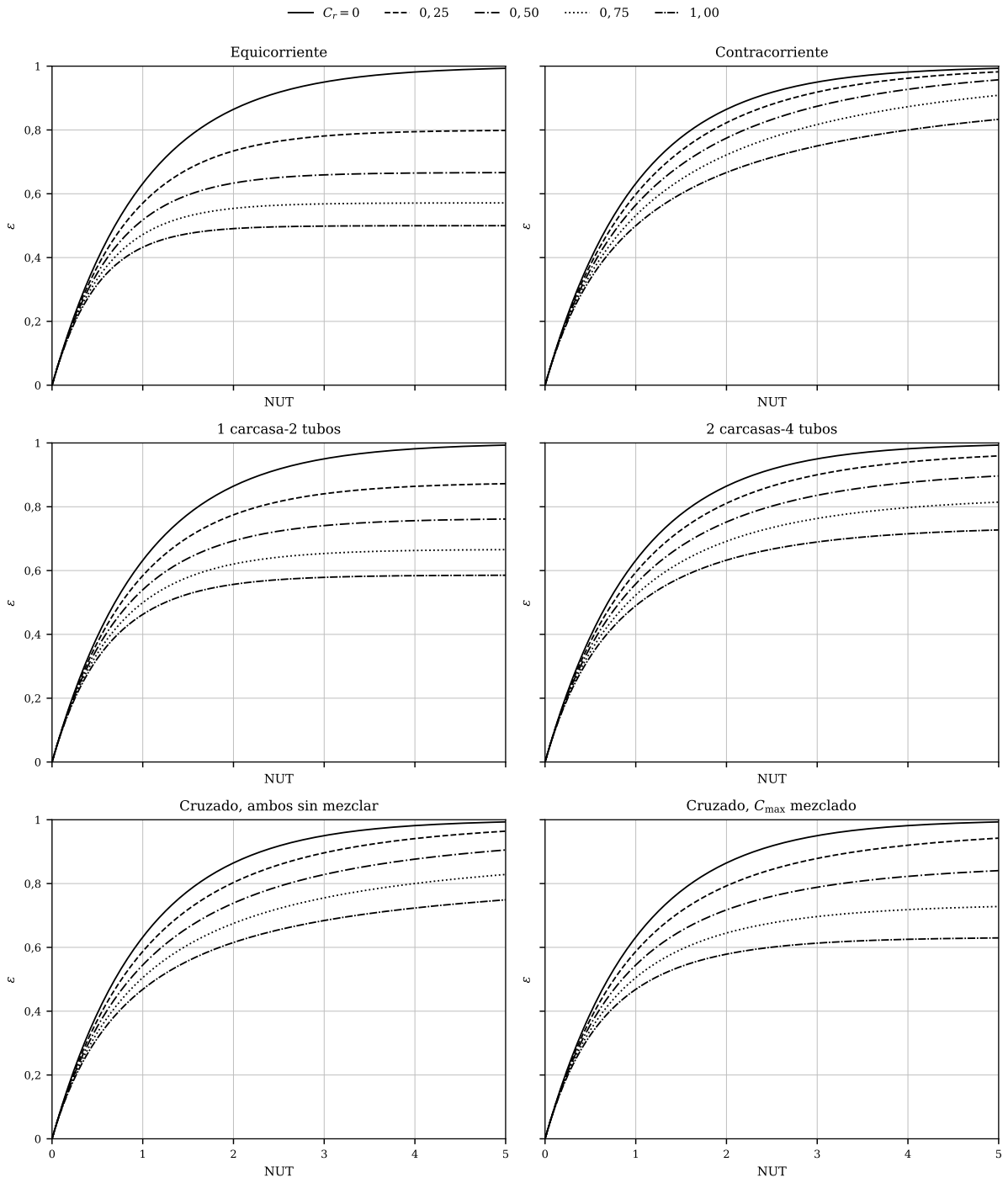


Figura 5.7: Familias ϵ–NUT para configuraciones habituales y varios valores de C_r. En flujo cruzado se muestran el caso con ambos fluidos sin mezclar y el caso con C_{max} mezclado; el caso con C_{min} mezclado se consulta en la Tabla 5.7.

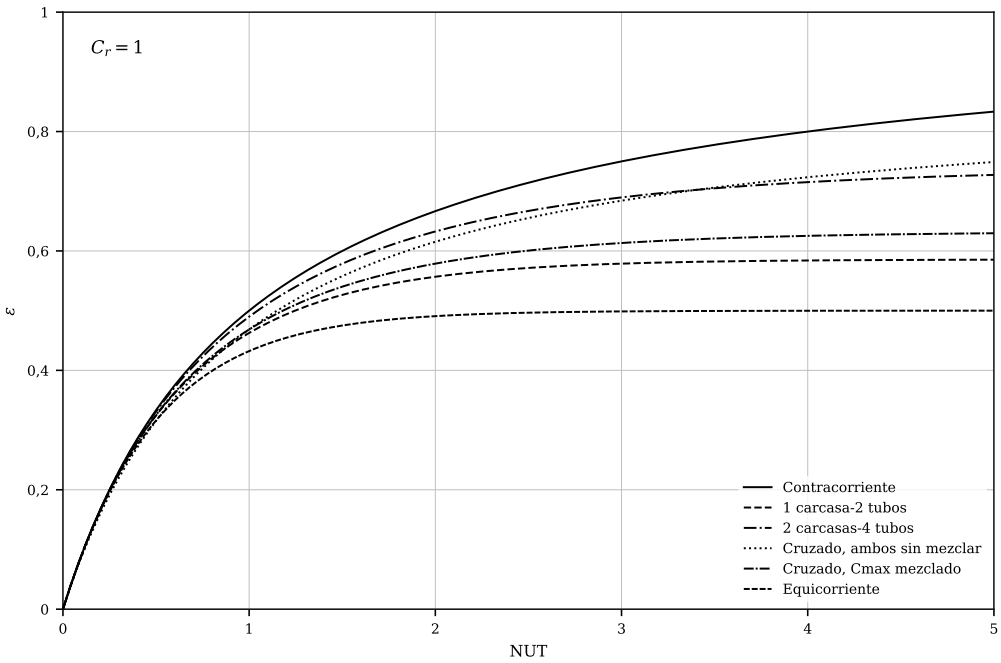


Figura 5.8: Comparación de configuraciones para $C_r = 1$: contracorriente ofrece la mayor efectividad y equicorriente la menor.

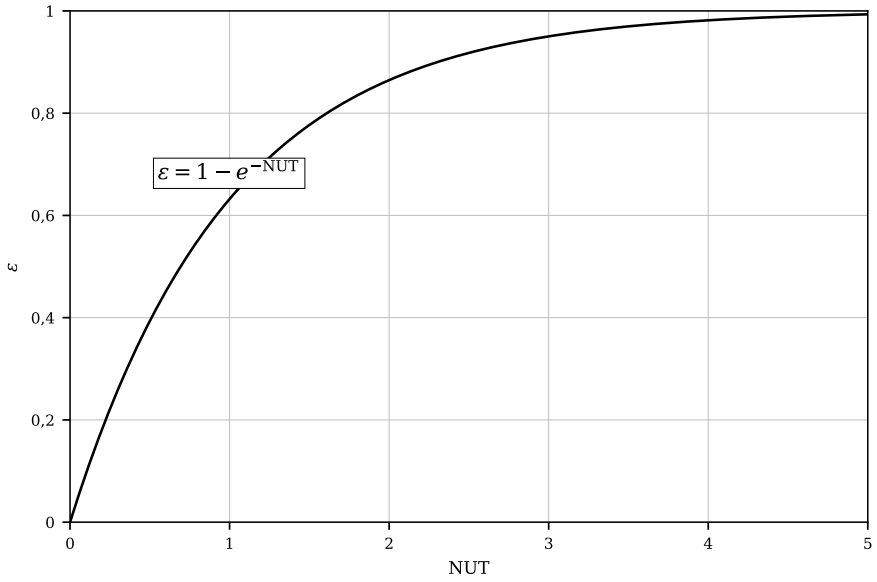


Figura 5.9: Caso universal $C_r = 0$. Todas las configuraciones colapsan en la misma curva, $\epsilon = 1 - e^{-\,\mathrm{NUT}}$.

La Figura 5.7 permite comparar simultáneamente el efecto de la geometría y del cociente de capacidades térmicas; la Figura 5.8 resume la jerarquía de configuraciones cuando ambas corrientes tienen capacidades térmicas iguales; y la Figura 5.9 recoge el caso límite universal, muy útil cuando una de las corrientes experimenta cambio de fase o tiene una capacidad térmica muy superior a la otra.

5.5 Comparación y recetas de resolución

Los métodos DTLM y efectividad–NUT describen la misma transmisión global de calor bajo las mismas hipótesis. La diferencia principal está en los datos de partida. La DTLM necesita conocer

las diferencias terminales de temperatura, por lo que es especialmente cómoda en dimensionado. El método efectividad–NUT usa UA y las temperaturas de entrada para obtener directamente la potencia y las salidas, por lo que es especialmente cómodo en actuaciones.

Tabla 5.9: Comparación práctica entre los métodos DTLM y efectividad–NUT.

Aspecto	DTLM	Efectividad–NUT
Datos más cómodos	Temperaturas de entrada y salida conocidas o fijadas.	Temperaturas de entrada conocidas, UA conocido y salidas desconocidas.
Uso típico	Dimensionado de área o conductancia.	Análisis de prestaciones de un equipo existente.
Magnitud central	ΔT_{lm} y factor de corrección F.	ϵ, NUT y C_r.
Iteraciones	Puede requerir iterar si faltan temperaturas de salida.	Evita la iteración inicial en problemas de actuaciones.
Advertencia	Definir bien ΔT_1, ΔT_2 y el área de referencia de U.	Usar la correlación adecuada a la configuración y respetar $0 \leq \epsilon \leq 1$.

Dos recetas que conviene recordar **Dimensionado con DTLM:** balance → q; diferencias terminales → ΔT_{lm}; geometría → F; conductancia $UA = q/(F\Delta T_{lm})$; área $A = UA/U$. **Actuaciones con ϵ–NUT:** capacidades → C_{min},C_r; tamaño → $NUT = UA/C_{min}$; geometría → ϵ; potencia $q = \epsilon q_{max}$; balance → temperaturas de salida.

5.6 Configuraciones de flujo: interpretación y consulta

Una vez dominados balance, UA y elección de método, la configuración permite seleccionar las diferencias terminales o la correlación de efectividad adecuada. Para una primera lectura basta distinguir equicorriente, contracorriente, flujo cruzado y equipos multipaso. Las demás clasificaciones se conservan como consulta constructiva.

Profundización. Esta sección explica cómo la geometría modifica las temperaturas y la correlación global; no cambia el balance energético ni la definición de UA.

5.6.1 Según la variación de temperatura de los fluidos

5.6.1.1 Intercambiadores de una corriente

Se habla de intercambiador de una corriente, en el sentido térmico usado aquí, cuando sólo una de las corrientes cambia apreciablemente su temperatura. Esto ocurre, por ejemplo, en un evaporador o en un condensador idealizados: la corriente que cambia de fase puede absorber o ceder una potencia importante a temperatura casi constante. También puede ocurrir cuando uno de los fluidos tiene un gasto másico tan grande que su salto térmico resulta despreciable, como una pequeña tubería intercambiando calor con el cauce de un río o con una corriente de aire muy grande.

En un condensador, el fluido caliente condensa aproximadamente a temperatura constante y cede calor a un fluido frío que se calienta. En un evaporador, el fluido frío evapora aproximadamente a temperatura constante y recibe calor de un fluido caliente que se enfría.

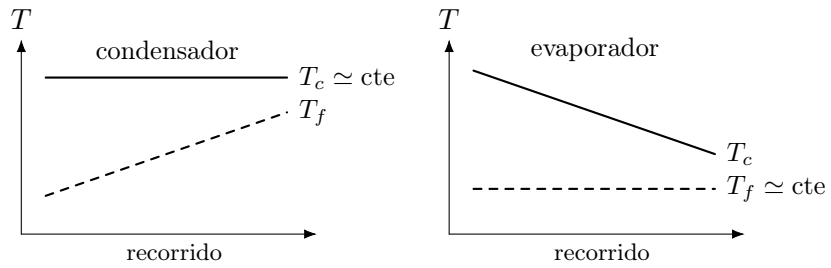


Figura 5.10: Perfiles cualitativos de temperatura en condensador y evaporador idealizados. La corriente que cambia de fase se representa con temperatura prácticamente constante.

5.6.1.2 Intercambiadores de dos corrientes

En los intercambiadores de dos corrientes cambian de forma apreciable las temperaturas de ambos fluidos. Es el caso más habitual cuando no hay cambio de fase y los dos gastos másicos son finitos. La corriente caliente se enfría y la corriente fría se calienta, cumpliendo el balance

$$q = C_c(T_{c,e} - T_{c,s}) = C_f(T_{f,s} - T_{f,e}). \tag{5.33}$$

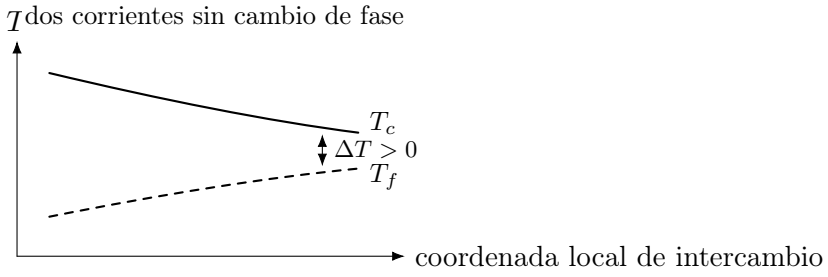


Figura 5.11: Perfil cualitativo admisible sin cambio de fase: en cada posición de intercambio, la corriente caliente permanece por encima de la fría.

5.6.2 Según la configuración del flujo

5.6.2.1 Flujos paralelos en equicorriente

En un intercambiador en equicorriente los dos fluidos entran por el mismo extremo y avanzan en el mismo sentido. La diferencia de temperatura entre ellos disminuye a lo largo del equipo. Constructivamente puede representarse mediante dos tubos concéntricos: un fluido circula por el tubo interior y el otro por el espacio anular.

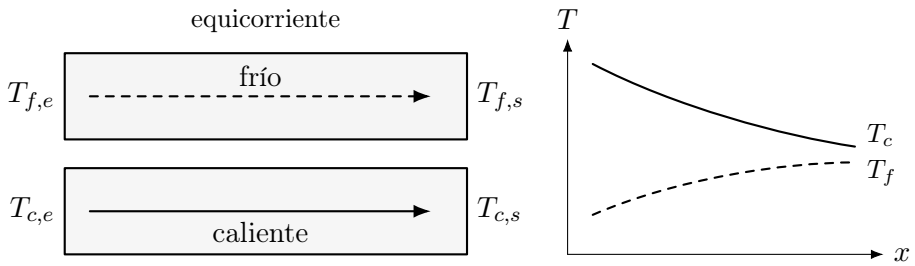


Figura 5.12: Intercambiador de flujos paralelos en equicorriente y perfil cualitativo de temperaturas.

Esta configuración tiene una limitación térmica importante. Si el objetivo es enfriar el fluido caliente, éste no puede salir por debajo de la temperatura de salida del fluido frío: en el límite de longitud infinita se tendría $T_{c,s} = T_{f,s}$. Si el objetivo es calentar el fluido frío, éste no puede salir por encima de la temperatura de salida del fluido caliente. Por tanto, para las mismas entradas, gastos y área, la equicorriente suele ser menos favorable que la contracorriente.

5.6.2.2 Flujos paralelos en contracorriente

En contracorriente los fluidos circulan en sentidos opuestos. La diferencia local de temperatura puede aumentar, disminuir o mantenerse aproximadamente constante según las capacidades térmicas de las corrientes. Esta configuración es la referencia ideal para recuperación de calor, porque permite mayores saltos térmicos de cada fluido.

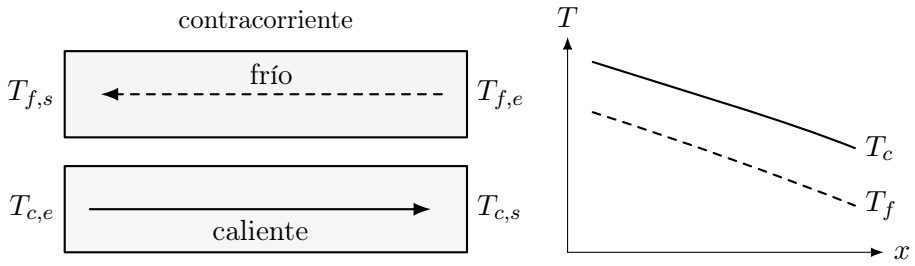


Figura 5.13: Intercambiador en contracorriente. Al dibujar las dos temperaturas frente a la misma coordenada geométrica, el fluido frío entra por la derecha y sale por la izquierda.

Sólo la corriente con menor capacidad térmica puede aproximarse al límite impuesto por la temperatura de entrada de la otra: si $C_c = C_{\text{mín}}$, entonces idealmente $T_{c,s} \to T_{f,e}$; si $C_f = C_{\text{mín}}$, entonces $T_{f,s} \to T_{c,e}$. La corriente con $C_{\text{máx}}$ no alcanza simultáneamente el límite opuesto. Estos límites sólo se alcanzan con área infinita y sin irreversibilidades adicionales, pero sirven para definir la potencia máxima en el método efectividad–NUT.

5.6.2.3 Flujo cruzado

En un intercambiador de flujo cruzado las corrientes discurren según direcciones aproximadamente perpendiculares. Su comportamiento térmico suele quedar entre la equicorriente y la contracorriente para entradas, gastos y tamaño comparables. El radiador de un vehículo es un ejemplo típico: el líquido caliente circula por el interior de tubos y el aire frío cruza exteriormente el haz.

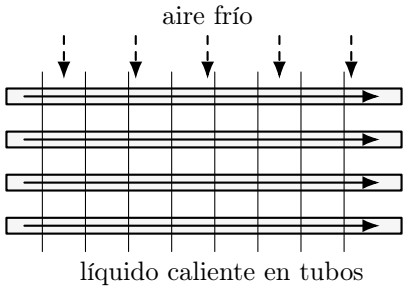


Figura 5.14: Esquema de flujo cruzado: una corriente atraviesa el haz en una dirección y la otra circula por tubos aproximadamente perpendiculares.

En flujo cruzado se distingue entre corrientes mezcladas y no mezcladas. Una corriente está no mezclada cuando queda confinada en varios canales paralelos y no puede redistribuirse transversalmente. Está mezclada cuando circula por un conducto común y puede igualar parcialmente su temperatura en la dirección transversal. No existe una jerarquía universal que dependa sólo del número de corrientes mezcladas. La efectividad cambia según cuál de ellas sea $C_{\text{mín}}$ o $C_{\text{máx}}$; debe usarse la correlación específica de la configuración real y su dominio de validez.

5.6.2.4 Regeneradores y recuperadores: distinción física

Un *recuperador* transfiere calor de forma continua a través de una pared fija que mantiene separadas las dos corrientes; los intercambiadores de tubos, placas y flujo cruzado descritos en este capítulo

son recuperadores. Un *regenerador*, en cambio, utiliza una matriz de gran capacidad térmica que almacena energía de una corriente y la entrega después a la otra. Las corrientes atraviesan la matriz en intervalos distintos, o bien una matriz rotativa pasa sucesivamente por ambas corrientes.

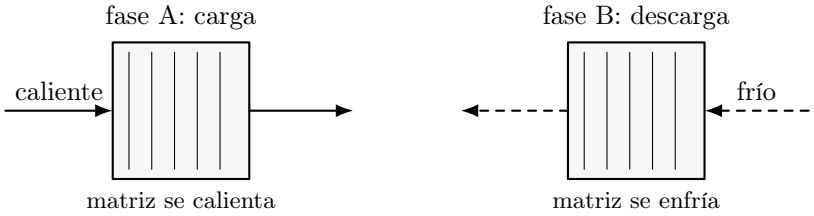


Figura 5.15: Regenerador de matriz fija representado en dos fases sucesivas. Las dos corrientes no atraviesan simultáneamente el mismo paso de la matriz.

Los regeneradores se emplean en precalentamiento de aire de combustión, recuperación de calor de humos y ventilación con recuperación energética. Su campo térmico es intrínsecamente transitorio y periódico, aunque las temperaturas medias de operación puedan estabilizarse. Esta distinción evita usar como sinónimos *regenerador* y *recuperador*.

5.6.2.5 Número de pasos

Se denomina paso a cada trayectoria completa que realiza una corriente a través del intercambiador. Puede haber un paso por tubos y un paso por carcasa, dos pasos por tubos y un paso por carcasa, dos pasos por carcasa y cuatro por tubos, etc. Aumentar el número de pasos puede incrementar la velocidad sólo si se mantienen el caudal, el número total de tubos y su geometría, de modo que disminuye el área de flujo paralelo disponible; en otras configuraciones la velocidad puede no aumentar. En cualquier caso, los pasos modifican los coeficientes de convección y el patrón térmico. No equivale simplemente a multiplicar o dividir longitudes, porque parte del recorrido puede trabajar en equicorriente y parte en contracorriente.

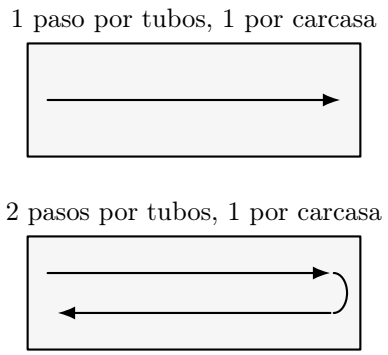


Figura 5.16: Esquema simplificado de número de pasos por tubos. En equipos reales el flujo de carcasa puede tener también varios pasos.

5.7 Tipos constructivos más habituales: consulta aplicada

Profundización. El objetivo de esta sección es reconocer la geometría y sus compromisos térmicos e hidráulicos; no se exige memorizar un catálogo de equipos.

5.7.1 Intercambiador de carcasa y tubos

El intercambiador de carcasa y tubos consta de una carcasa cilíndrica exterior y un haz de tubos en su interior. Un fluido circula por los tubos y el otro por el espacio de carcasa. Las placas tubulares

fijan los extremos de los tubos y separan los colectores de entrada y salida. La configuración más sencilla tiene un paso por carcasa y un paso por tubos.

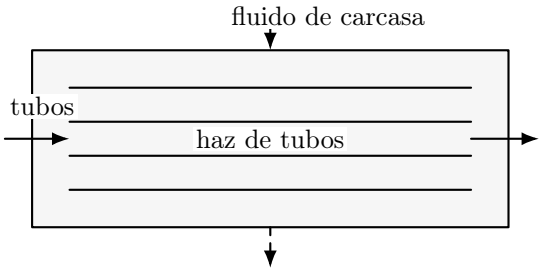


Figura 5.17: Intercambiador de carcasa y tubos de un paso por carcasa y un paso por tubos.

5.7.1.1 Intercambiador de tubos concéntricos

El caso elemental de un único tubo interior y una carcasa exterior se denomina intercambiador de tubos concéntricos. Es útil para explicar la física, porque puede operar en equicorriente o en contracorriente con una geometría muy sencilla. Su principal inconveniente es el área limitada, dada por el área lateral del tubo. Si la potencia requerida no es pequeña, la longitud necesaria resulta excesiva; por eso, en equipos industriales se sustituye el tubo único por un haz de tubos en paralelo.

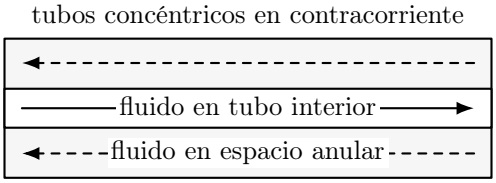


Figura 5.18: Intercambiador de tubos concéntricos. La pared del tubo interior separa las dos corrientes y constituye el área principal de intercambio térmico.

5.7.1.2 Configuraciones multipaso y deflectores

Si el equipo resultara demasiado largo, los tubos pueden realizar varios pasos dentro de la carcasa. En un equipo 1–2 hay un paso por carcasa y dos pasos por tubos. Sin embargo, no se obtiene simplemente la mitad de longitud que en un equipo equivalente de un paso, porque una parte del recorrido puede comportarse de forma más parecida a equicorriente y otra a contracorriente. Esta es una de las razones por las que se usan factores correctores en el método DTLM.

Los deflectores obligan al fluido de la carcasa a cruzar transversalmente el haz de tubos. Esto aumenta la turbulencia y el coeficiente de convección, pero también aumenta la pérdida de carga. En la práctica, la separación y geometría de los deflectores se eligen equilibrando mejora térmica y coste hidráulico.

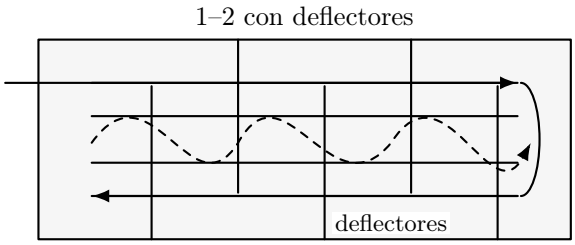


Figura 5.19: Intercambiador de carcasa y tubos 1–2 con deflectores. Los deflectores favorecen flujo cruzado sobre el haz.

5.7.2 Intercambiador de placas

Un intercambiador de placas está formado por chapas delgadas apiladas, separadas mediante juntas que sellan el exterior y dirigen las corrientes por canales alternos. Cada placa dispone de orificios de entrada y salida. La disposición de las juntas hace que el fluido caliente circule por unos huecos y el frío por los adyacentes, normalmente en contracorriente.

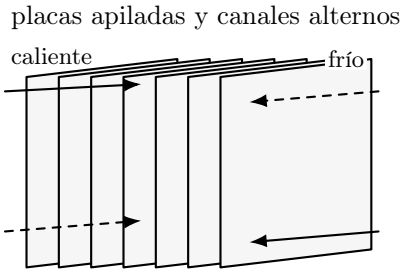


Figura 5.20: Esquema simplificado de un intercambiador de placas. Las placas y juntas dirigen los flujos por canales alternos.

5.7.3 Intercambiador de flujos cruzados aleteados

El radiador de un automóvil es un ejemplo representativo. El líquido caliente circula por tubos paralelos, habitualmente de sección rectangular, y el aire atraviesa el exterior de los tubos. Como el coeficiente de convección del lado del gas suele ser mucho menor que el del líquido, se colocan aletas en el lado del aire. Así se reduce la resistencia térmica dominante y aumenta la potencia evacuada.

Este criterio conecta con el estudio de aletas: las aletas se colocan preferentemente en el lado de mayor resistencia convectiva. En un intercambiador líquido–gas, ese lado suele ser el gas. Colocarlas en el lado líquido produciría una mejora mucho menor si la resistencia del líquido ya es pequeña.

La tabla usa índices adimensionales R/R_0. La eficiencia de aleta está incorporada en la reducción efectiva del lado aleteado; los valores son ilustrativos, no resistencias dimensionales.

Tabla 5.10: Efecto orientativo de colocar aletas en el lado líquido o en el lado gas de un intercambiador líquido–gas.

Resistencia	Sin aletas	Aletas lado líquido	Aletas lado gas
R_{gas}/R_0	100	100	10
R_{pared}/R_0	1	1	1
R_{liq}/R_0	10	1	10
R_{total}/R_0	111	102	21
Reducción relativa	–	8 %	81 %

La reducción es $(111 - 102)/111 = 0{,}081$, es decir, 8,1 por ciento, al aletear el líquido; y $(111 - 21)/111 = 0{,}811$, es decir, 81,1 por ciento, al aletear el gas.

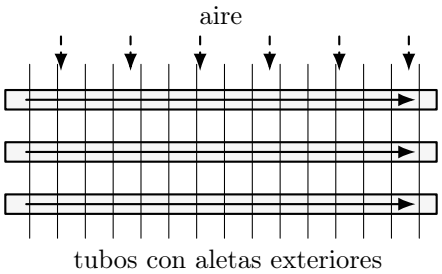


Figura 5.21: Intercambiador de flujo cruzado aleteado. Las aletas exteriores aumentan el área efectiva del lado del aire.

5.8 Aspectos constructivos e hidráulicos: alcance del curso

Alcance hidráulico En este libro la pérdida de carga se trata como comprobación básica cuando el enunciado proporciona f, K o una correlación sencilla. El diseño hidráulico detallado de carcasa–tubos, placas y bancos aleteados queda fuera del núcleo del curso.

La rugosidad superficial puede aumentar la turbulencia cerca de la pared y, con ello, los coeficientes de convección. En intercambiadores de placas se consigue mediante chapas onduladas; en tubos, mediante rugosidad helicoidal o superficies corrugadas; en intercambiadores aleteados, mediante aletas onduladas o interrumpidas. El efecto térmico puede ser favorable porque aumenta h, pero no es gratuito: la resistencia hidráulica crece y se requiere mayor potencia de bombeo o ventilación.

Debe distinguirse la rugosidad diseñada del ensuciamiento. El ensuciamiento aparece cuando se depositan sales, partículas, productos de corrosión, aceites, biofilm u otros materiales sobre las superficies. A diferencia de la rugosidad intencionada, el ensuciamiento suele reducir UA, añade una resistencia térmica adicional y puede estrechar pasos de flujo, aumentando también la pérdida de carga. En diseño real se introduce mediante resistencias de ensuciamiento R''_{suc}.

Rugosidad frente a ensuciamiento Una superficie ondulada puede ser una mejora deliberada para aumentar h; una capa de depósito es una degradación que añade resistencia térmica y dificulta el flujo. En ambos casos puede aumentar la pérdida de carga, pero sólo el primero se introduce como decisión de diseño.

Los valores siguientes son órdenes de magnitud. En diseño deben sustituirse por datos de norma, fabricante o especificación del proyecto.

Tabla 5.11: Valores orientativos de resistencia de ensuciamiento R''_{suc} para estimaciones preliminares.

Fluido o servicio	R''_{suc} típico [$\text{m}^2\,\text{K/W}$]	Comentario
Agua tratada o agua limpia de circuito	$0{,}9\times10^{-4}$–$1{,}0\times10^{-4}$	Valor bajo; típico de agua controlada químicamente.
Agua de red o agua dulce sin tratar	$2{,}0\times10^{-4}$	Aumenta con dureza, sólidos disueltos y temperatura.
Agua de mar a temperatura moderada	$0{,}9\times10^{-4}$–$2{,}0\times10^{-4}$	Puede crecer con biofouling o incrustaciones.
Vapor de agua limpio	$1{,}0\times10^{-4}$	Sensible a arrastre de gotas o contaminantes.
Aire o gases industriales	$2{,}0\times10^{-4}$–$4{,}0\times10^{-4}$	Depende mucho de polvo, hollín y composición.
Aceites o combustibles pesados	$5{,}0\times10^{-4}$–$9{,}0\times10^{-4}$	Suele ser uno de los lados controlantes.

5.8.1 Pérdida de carga: bloque mínimo de comprobación

El dimensionado térmico no fija por sí solo la potencia de bombeo. Si el problema proporciona datos hidráulicos o pide una estimación sencilla, puede usarse la forma básica

$$\boxed{\Delta p \simeq f\frac{L_h}{D_h}\frac{\rho v^2}{2} + \sum K\frac{\rho v^2}{2}} \tag{5.34}$$

donde f es el factor de fricción, L_h una longitud hidráulica característica, D_h el diámetro hidráulico, K coeficientes de pérdidas locales y v una velocidad media representativa. La potencia de bombeo o ventilación se estima como

$$\boxed{\dot{W}_p = \frac{\dot{V}\,\Delta p}{\eta_p} = \frac{\dot{m}\,\Delta p}{\rho\eta_p}} \tag{5.35}$$

La expresión $\dot{W}_p = \dot{V}\Delta p/\eta_p$ supone densidad aproximadamente constante y es apropiada para líquidos o para gases con una relación de presiones suficientemente pequeña. Si la compresibilidad es apreciable, la potencia del compresor debe calcularse a partir del incremento de entalpía, $\dot{W} \simeq \dot{m}\,(h_2 - h_1)/\eta$, con el modelo termodinámico correspondiente. Este bloque sólo es suficiente para ejercicios en los que se dan f, K, D_h o una correlación hidráulica. Para diseño detallado de carcasa y tubos, placas o bancos de tubos se requieren correlaciones específicas de pérdida de carga.

5.9 Errores típicos al resolver problemas de intercambiadores

Errores frecuentes Antes de aceptar una solución conviene descartar estos fallos habituales: confundir $C_{\text{mín}}$ con el fluido caliente; aplicar una carta de F a un intercambiador simple en equicorriente o contracorriente, donde $F = 1$; interpretar R_F como resistencia térmica en lugar de cociente de saltos térmicos; usar una correlación de flujo cruzado mezclado sin comprobar si el fluido mezclado es $C_{\text{mín}}$ o $C_{\text{máx}}$; aplicar la fórmula de n pasos por carcasa en $C_r = 1$ sin usar la forma límite; y pedir una efectividad mayor que la máxima físicamente alcanzable por la configuración.

5.10 Criterios prácticos de aplicación y verificación

En un problema de dimensionado con DTLM conviene seguir una secuencia cerrada: primero se determina q con el balance de energía, después se calculan las diferencias terminales de temperatura, a continuación se evalúa ΔT_{lm} y, si procede, F, y finalmente se obtiene $UA = q/(F\Delta T_{\text{lm}})$. Sólo al final se calcula el área, usando un U referido a la misma área.

En un problema de actuaciones con efectividad–NUT la secuencia es distinta: se calculan C_c, C_f, $C_{\text{mín}}$ y C_r; se evalúa $\text{NUT} = UA/C_{\text{mín}}$; se escoge la correlación geométrica correcta; se obtiene $q = \epsilon C_{\text{mín}}(T_{c,e} - T_{f,e})$; y se calculan las temperaturas de salida mediante el balance energético.

Comprobaciones mínimas Antes de aceptar una solución deben verificarse cinco condiciones: q cedido por el fluido caliente coincide con el ganado por el frío; las temperaturas de salida no violan los límites de la configuración; $0 \le \epsilon \le 1$; $0 < F \le 1$ cuando se usa DTLM corregida; y el valor de U tiene un orden de magnitud compatible con los fluidos y el área de referencia.

5.11 Cierre del capítulo

El capítulo se ha organizado alrededor de tres preguntas: cuánto calor pueden intercambiar las corrientes, qué conductancia global tiene el equipo y qué método conecta entradas, salidas y tamaño térmico. Las configuraciones y tipos constructivos aparecen después como apoyo para escoger la expresión correcta y comprender sus compromisos hidráulicos.

Como comprobación final, cualquier solución debe respetar cinco ideas: la potencia cedida y ganada debe coincidir si el intercambiador está aislado; las temperaturas terminales deben ser compatibles con la configuración de flujo; UA debe construirse con áreas coherentes; la efectividad debe quedar entre cero y uno; y el factor de corrección F, si aparece, debe cumplir $0 < F \leq 1$. Además, los parámetros P y R_F deben corresponder a las mismas temperaturas terminales usadas en el balance energético. Si alguna de estas condiciones falla, el resultado no debe aceptarse aunque las unidades parezcan correctas.

5.12 Resumen operativo

Ruta mínima de intercambiadores

Paso	Modelo mínimo	Comprobación rápida
Balance	$q = \dot{m}_c(h_{c,e} - h_{c,s}) = \dot{m}_f(h_{f,s} - h_{f,e})$; si c_p es aproximadamente constante, $q = C\Delta T$.	El calor cedido y ganado coincide salvo pérdidas declaradas; si se calcula caída de presión, declare si f es Darcy o Fanning.
Límite térmico	$q_{\text{máx}} = C_{\text{mín}}(T_{c,e} - T_{f,e})$.	$q \leq q_{\text{máx}}$ y las salidas son alcanzables.
Conductancia	Construir $1/(UA)$ con convección, pared, ensuciamiento y aletas.	Mantener coherencia entre U_i,A_i y U_o,A_o: el producto UA es único.
DTLM	Usar cuando se conocen las temperaturas terminales; aplicar F si la configuración no es equi/contracorriente simple.	$0 < F \leq 1$ y ninguna diferencia terminal cambia de signo de forma incompatible.
ϵ–NUT	Usar cuando se conoce UA y se buscan salidas: $NUT = UA/C_{\text{mín}}$.	$0 \leq \epsilon \leq 1$, balance de ambas corrientes y límites terminales.

Antes de avanzar Debe poder decidir entre DTLM y ϵ–NUT sin probar fórmulas, construir UA con áreas coherentes y rechazar temperaturas de salida físicamente imposibles.

5.13 Autoevaluación y asimilación

Responda primero sin consultar el capítulo. No se busca reproducir una fórmula de memoria, sino justificar el modelo, anticipar una tendencia y detectar resultados físicamente imposibles. Después compare con las respuestas orientativas.

Comprensión conceptual

C1. ¿Por qué $C_{\text{mín}}$ no tiene por qué corresponder al fluido frío ni al de menor caudal másico?

C2. Interprete físicamente $q_{\text{máx}} = C_{\text{mín}}(T_{c,e} - T_{f,e})$.

C3. ¿Por qué U_i y U_o pueden ser distintos mientras que $U_iA_i = U_oA_o = UA$ debe ser el mismo?

C4. ¿Qué información del enunciado hace preferible DTLM y cuál hace preferible el método ϵ–NUT?

Microejercicios sin tablas

M1. Dos corrientes tienen $C_c = 400$ W/K, $C_f = 1000$ W/K y $T_{c,e} - T_{f,e} = 50$ K. Calcule $C_{\text{mín}}$, C_r y $q_{\text{máx}}$.

M2. Si la efectividad del equipo anterior es $\epsilon = 0{,}65$, calcule la potencia térmica real.

Detecta y corrige el error

E1. Un intercambiador multipaso bien diseñado puede tener un factor de corrección $F > 1$ respecto a la contracorriente ideal.

E2. Si se calcula U_i con el área interior y U_o con la exterior, ambos coeficientes deben tener el mismo valor numérico.

Análisis de sensibilidad

S1. ¿Cómo afectan el ensuciamiento creciente y una resistencia adicional de pared a UA, NUT y la potencia intercambiada?

S2. Para las mismas entradas, UA y capacidades térmicas, ¿qué configuración suele alcanzar mayor efectividad: equicorriente o contracorriente? Explique por qué.

Respuestas orientativas **C1.** $C = \dot{m}c_p$; depende simultáneamente del caudal y del calor específico, no de que la corriente sea fría o caliente. **C2.** Es el límite impuesto por la corriente con menor capacidad térmica: en el límite ideal podría aproximarse a la temperatura de entrada de la otra corriente. **C3.** El coeficiente cambia al cambiar el área de referencia, pero la conductancia global UA representa el mismo equipo y debe conservarse. **C4.** DTLM es directo cuando se conocen o pueden obtenerse las cuatro temperaturas terminales; ϵ–NUT es natural cuando se conoce UA y se buscan las salidas o las prestaciones. **M1.** $C_{\text{mín}} = 400$ W/K, $C_r = 0{,}40$ y $q_{\text{máx}} = 20$ kW. **M2.** $q = 0{,}65 \times 20 = 13$ kW. **E1.** Por definición, la corrección respecto a la DTLM de contracorriente cumple $0 < F \leq 1$. **E2.** Los valores de U_i y U_o suelen ser distintos porque $A_i \neq A_o$; lo que se conserva es su producto por el área correspondiente. **S1.** Aumenta la resistencia total, por lo que disminuyen UA, NUT, la efectividad y la potencia, manteniendo iguales las entradas. **S2.** La contracorriente suele ser más efectiva porque mantiene una diferencia de temperatura útil a lo largo de una mayor parte del equipo y permite aproximaciones terminales más favorables.

Criterio de dominio Debe poder resolver primero el balance, identificar $C_{\text{mín}}$, construir un único UA coherente y escoger el método. Una solución que viole los límites de temperatura, $0 \leq \epsilon \leq 1$ o $0 < F \leq 1$ debe rechazarse.

5.14 Ejercicios

Los enunciados siguientes recogen, sin resolución, los problemas de intercambiadores de calor que se desarrollan en la sección posterior. Su finalidad es que el lector pueda intentar primero el balance energético, la identificación de capacidades térmicas y la elección entre DTLM y efectividad–NUT antes de consultar la solución desarrollada.

Cómo usar las fichas de los problemas La etiqueta de **nivel** indica la carga de modelado, no la longitud del cálculo. Las **competencias** señalan qué se practica y el campo **propiedades** aclara si los valores están dados o deben buscarse e interpolarse. En los problemas avanzados se ofrecen tres pistas graduadas: consulte primero sólo la pista 1; abra las siguientes únicamente si sigue bloqueado. Las respuestas breves deben usarse para comprobar el resultado después de resolver, no como sustituto del planteamiento.

Ejercicio 1. Intercambiador de tubos en flujo cruzado aire–agua

Nivel: Avanzado | **Competencias:** balance, flujo cruzado y efectividad–NUT | **Propiedades:** dadas

Un intercambiador está constituido por 60 tubos de cobre. Por el interior de cada tubo circula agua caliente y por el exterior pasa una corriente de aire en flujo cruzado confinada en una carcasa rectangular adiabática. Se conocen el coeficiente global referido al área exterior de los tubos, las condiciones de entrada y los gastos. Se pide calcular las temperaturas de salida de ambas corrientes y la potencia térmica intercambiada por los métodos efectividad–NUT y DTLM.

Datos.

$$N = 60, \qquad D_i = 20\,\text{mm}, \qquad D_e = 25\,\text{mm}, \qquad L = 5\,\text{m},$$
$$\dot{m}_{c,\text{tubo}} = 0{,}075\,\text{kg/s}, \qquad T_{c,e} = 100\,^\circ\text{C},$$
$$v_f = 2\ \text{m/s}, \qquad A_{\text{entrada}} = 5\,\text{m}^2, \qquad T_{f,e} = 20\,^\circ\text{C},$$
$$U_o = 100\,\text{W/(m}^2\,\text{K)}, \qquad c_{p,c} = 4217\,\text{J/(kg K)}, \qquad c_{p,f} = 1007\,\text{J/(kg K)},$$
$$\rho_f = 1{,}204\,\text{kg/m}^3.$$

Ejercicio 2. Dimensionado comparado de varias configuraciones

Nivel: Avanzado | **Competencias:** DTLM, factor de corrección y comparación | **Propiedades:** dadas

Se desea enfriar una solución desde 70 °C hasta 40 °C usando agua fría a 10 °C. La solución caliente circula por la carcasa y el agua por los tubos. El coeficiente U_c está referido al área caliente A_c. Para las configuraciones multipaso se emplean las relaciones ideales estándar de uno o dos pasos por carcasa y un número par de pasos por tubos, despreciando fugas, derivaciones y pérdidas exteriores. Se pide calcular el área de intercambio necesaria para cuatro configuraciones: equicorriente, contracorriente, un paso por carcasa con cuatro pasos por tubos y dos pasos por carcasa con cuatro pasos por tubos.

Datos.

$$\dot{m}_c = 15\,\text{kg/s}, \qquad T_{c,e} = 70\,^\circ\text{C}, \qquad T_{c,s} = 40\,^\circ\text{C}, \qquad c_{p,c} = 3550\,\text{J/(kg K)},$$
$$\dot{m}_f = 13\,\text{kg/s}, \qquad T_{f,e} = 10\,^\circ\text{C}, \qquad c_{p,f} = 4180\,\text{J/(kg K)},$$
$$U_c = 2000\,\text{W/(m}^2\,\text{K)}.$$

Ejercicio 3. Refrigeración de aceite en tubos concéntricos

Nivel: Avanzado | **Competencias:** conductancia global, ensuciamiento y dimensionado | **Propiedades:** dadas

Un intercambiador de tubos concéntricos enfría aceite SAE 50 mediante agua. El agua circula por el tubo interior de cobre y el aceite por el espacio anular. Se conocen los coeficientes de convección, la conductividad del cobre y resistencias de ensuciamiento iguales y especificadas por separado en ambas caras del tubo interior. Se pide la longitud necesaria en equicorriente y contracorriente para que el aceite salga a 60 °C.

Datos.

$$D_1 = 19\,\text{mm}, \quad D_2 = 25\,\text{mm}, \quad D_3 = 29\,\text{mm}, \quad D_4 = 35\,\text{mm},$$
$$\dot{m}_f = 0{,}2\,\text{kg/s}, \quad T_{f,e} = 30\,^\circ\text{C}, \quad c_{p,f} = 4175\,\text{J/(kg K)},$$
$$\dot{m}_c = 0{,}1\,\text{kg/s}, \quad T_{c,e} = 100\,^\circ\text{C}, \quad T_{c,s} = 60\,^\circ\text{C}, \quad c_{p,c} = 2131\,\text{J/(kg K)},$$
$$R''_{\text{suc},c} = R''_{\text{suc},f} = 0{,}001\,\text{m}^2\,\text{K/W}, \quad k_{\text{Cu}} = 386\,\text{W/(m K)},$$
$$h_c = 176\,\text{W/(m}^2\,\text{K)}, \quad h_f = 4012\,\text{W/(m}^2\,\text{K)}.$$

Ejercicio 4. Determinación de U en un intercambiador 1–2

Nivel: Intermedio | **Competencias:** balance inverso, factor F y coeficiente U | **Propiedades:** dadas

Un intercambiador de carcasa y tubos con un paso por carcasa y dos pasos por tubos intercambia 400 kW entre dos corrientes de agua. Se conocen las temperaturas de salida, los gastos másicos y el área de intercambio. Se pide calcular el coeficiente global U.

Datos.

$$\dot{m}_c = 5\,\text{kg/s}, \quad T_{c,s} = 60\,^\circ\text{C}, \quad \dot{m}_f = 10\,\text{kg/s}, \quad T_{f,s} = 25\,^\circ\text{C},$$
$$c_p = 4000\,\text{J/(kg K)}, \quad q = 400\,\text{kW}, \quad A = 10\,\text{m}^2.$$

Ejercicio 5. Enfriamiento de aire con un baño agua–hielo

Nivel: Avanzado | **Competencias:** convección interna, DTLM y cambio de fase | **Propiedades:** dadas

Un sistema de aire acondicionado enfría aire haciéndolo pasar por el interior de diez tubos de cobre sumergidos en un baño de agua–hielo a 0 °C. Se pide calcular el coeficiente de convección medio del aire, la longitud necesaria de los tubos y el tiempo hasta fundir todo el hielo disponible. El volumen total del baño es $V = 10\,\text{m}^3$ y la fracción inicial de hielo 0,80 es volumétrica. Se idealiza un baño bien mezclado y prácticamente adiabático; mientras quede hielo permanece a 0 °C y toda la carga recibida se destina a calor latente.

Datos.

$$N = 10, \quad D = 50\,\text{mm}, \quad \dot{m} = 0{,}1\,\text{kg/s}, \quad T_{b,e} = 24\,^\circ\text{C}, \quad T_{b,s} = 14\,^\circ\text{C},$$
$$T_s = 0\,^\circ\text{C}, \quad V = 10\,\text{m}^3, \quad \phi_{h,0} = 0{,}80, \quad f = 0{,}02,$$
$$\rho_{\text{hielo}} = 920\,\text{kg/m}^3, \quad \Delta h = 3{,}34 \cdot 10^5\ \text{J/kg}.$$

A 19 °C se toman

$$\rho = 1{,}208\,\text{kg/m}^3, \quad c_p = 1007\,\text{J/(kg K)}, \quad k = 0{,}0251\,\text{W/(m K)},$$
$$\mu = 1{,}820 \times 10^{-5}\,\text{kg/(m s)}, \quad \nu = 1{,}507 \times 10^{-5}\,\text{m}^2\text{/s}, \quad \text{Pr} = 0{,}731.$$

Pistas graduadas para los problemas avanzados

Use una pista cada vez

Ej. 1

Pista 1 – modelo. Método ϵ–NUT porque se conocen entradas y conductancia, pero no las salidas; DTLM sirve como comprobación iterativa.

Pista 2 – ecuación. Calcule C_c, C_f, $C_{\text{mín}}$, C_r y $NUT = UA/C_{\text{mín}}$; use la relación de flujo cruzado antes del balance de salidas.

Pista 3 – control. Verifique $0 \le \epsilon \le 1$, $q \le q_{\text{máx}}$, balance en ambas corrientes y temperaturas de salida comprendidas entre las entradas.

Ej. 2

Pista 1 – modelo. Balance energético común y comparación de relaciones ϵ–NUT o factores F para cada configuración.

Pista 2 – ecuación. Obtenga primero q y la temperatura de salida fría. Para cada configuración use $A = q/(UF\Delta T_{lm})$, con $F = 1$ en equi/contracorriente.

Pista 3 – control. Todas las configuraciones deben entregar la misma potencia de diseño; las áreas deben ser positivas y la mejor configuración debe coincidir con la predicción cualitativa.

Ej. 3

Pista 1 – modelo. Balance de ambas corrientes y método DTLM para tubos concéntricos, con U y longitud desconocida.

Pista 2 – ecuación. Construya $1/(UA)$ con convección, ensuciamiento y pared cilíndrica referidos a áreas compatibles; después use DTLM para cada sentido.

Pista 3 – control. Las salidas deben respetar los límites terminales, los balances de ambas corrientes deben coincidir y la longitud calculada debe ser positiva.

Ej. 5

Pista 1 – modelo. Intercambiador con una corriente de capacidad efectiva muy grande, equivalente a $C_r \to 0$.

Pista 2 – ecuación. Obtenga h con la correlación interna, use la ley exponencial con pared a temperatura constante y cierre el tiempo con el calor latente del hielo.

Pista 3 – control. Verifique $0 \le \epsilon \le 1$, temperatura de salida entre entrada y baño, y balance entre la caída de entalpía del aire y la carga transferida.

Respuestas breves de comprobación

Respuestas orientativas Consulte este bloque sólo después de completar el planteamiento. Se da el resultado final y un control físico; la solución desarrollada permanece en la sección siguiente.

Ej. 1

Resultado. $T_{c,s} = 91{,}5\,^\circ\text{C}$, $T_{f,s} = 33{,}4\,^\circ\text{C}$ y $q = 162\,\text{kW}$.

Control. Verifique $0 \le \epsilon \le 1$, $q \le q_{\text{máx}}$, balance en ambas corrientes y temperaturas de salida comprendidas entre las entradas.

Ej. 2

Resultado. $A_{\text{eq}} = 61{,}9\,\text{m}^2$, $A_{\text{cc}} = 26{,}4\,\text{m}^2$, $A_{1-4} = 32{,}5\,\text{m}^2$ y $A_{2-4} = 27{,}5\,\text{m}^2$.

Control. Todas las configuraciones deben entregar la misma potencia de diseño; las áreas deben ser positivas y la mejor configuración debe coincidir con la predicción cualitativa.

Ej. 3

Resultado. $L_{\text{contracorriente}} = 20{,}9\,\text{m}$ y $L_{\text{equicorriente}} = 22{,}8\,\text{m}$.

Control. Las salidas deben respetar los límites terminales, los balances de ambas corrientes deben coincidir y la longitud calculada debe ser positiva.

Ej. 4

Resultado. $U = 813{,}7\,\text{W/(m}^2\,\text{K)}$.

Control. Compruebe que los balances de ambas corrientes concuerdan, que $0 < F \le 1$ y que no se mezclan áreas interior y exterior.

Ej. 5

Resultado. $h = 13{,}5\,\text{W/(m}^2\,\text{K)}$, $L = 2{,}55\,\text{m}$ por tubo y $t_{\text{ideal}} = 678{,}1\,\text{h} = 28{,}3$ días.

Control. Verifique $0 \le \epsilon \le 1$, temperatura de salida entre entrada y baño, y balance entre la caída de entalpía del aire y la carga transferida.

5.15 Ejercicios resueltos

Cómo trabajar los ejercicios resueltos Antes de leer las operaciones, deténgase en el recuadro **Antes de calcular**: anticipe el sentido del calor, la resistencia o capacidad dominante y el modelo que espera utilizar. Al terminar, use la **Comprobación final** para verificar balance, límites físicos, unidades y rango de validez. El objetivo no es adivinar el número, sino saber qué resultado sería razonable antes de obtenerlo.

Los ejercicios resueltos de esta sección aplican la metodología del capítulo: primero se identifica el equipo y las corrientes, después se escribe el balance energético y, finalmente, se escoge entre el método DTLM y el método efectividad–NUT. En todos los casos se mantiene la misma secuencia de trabajo: descripción física, datos, simplificaciones, modelo de resistencias o conductancia global, ecuaciones, resolución numérica e interpretación del resultado.

Método común de resolución En intercambiadores de calor conviene separar dos niveles. El nivel local agrupa convección, conducción y ensuciamiento en una conductancia global UA. El nivel global usa esa conductancia junto con balances de energía, DTLM o efectividad–NUT. No debe mezclarse un coeficiente U referido a un área con otra área distinta: siempre debe cumplirse $UA = U_c A_c = U_f A_f$.

Práctica guiada esencial

Antes de abordar los cinco ejercicios largos, los ejemplos siguientes aíslan una sola decisión cada vez. Deben poder resolverse sin buscar una configuración compleja: su objetivo es consolidar balance, capacidades, UA, DTLM y efectividad–NUT.

Microejemplo 1 – Balance puro de dos corrientes (básico) Agua caliente: $\dot{m}_c = 0{,}20\,\mathrm{kg/s}$, $c_p = 4180\,\mathrm{J/(kg\,K)}$, $T_{c,e} = 80\,^\circ\mathrm{C}$ y $T_{c,s} = 60\,^\circ\mathrm{C}$. Agua fría: $\dot{m}_f = 0{,}30\,\mathrm{kg/s}$ y $T_{f,e} = 20\,^\circ\mathrm{C}$. Sin pérdidas:

$$q = \dot{m}_c c_p (T_{c,e} - T_{c,s}) = 16{,}72\,\mathrm{kW}, \qquad T_{f,s} = T_{f,e} + \frac{q}{\dot{m}_f c_p} = 33{,}3\,^\circ\mathrm{C}.$$

Lectura física: la corriente fría tiene mayor capacidad térmica, por lo que cambia menos su temperatura que la caliente.

Microejemplo 2 – $C_{\mín}$ y potencia máxima (básico) Sean $C_c = 1500\,\mathrm{W/K}$, $C_f = 900\,\mathrm{W/K}$, $T_{c,e} = 120\,^\circ\mathrm{C}$ y $T_{f,e} = 20\,^\circ\mathrm{C}$:

$$C_{\mín} = C_f = 900\,\mathrm{W/K}, \qquad C_r = \frac{900}{1500} = 0{,}60,$$

$$q_{\máx} = C_{\mín}(T_{c,e} - T_{f,e}) = 90\,\mathrm{kW}.$$

Lectura física: la corriente fría limita el intercambio máximo y será la que experimente el mayor cambio de temperatura.

Microejemplo 3 – Construcción de una conductancia UA (básico) Pared limpia de área $A = 10\,\mathrm{m^2}$, $h_c = 500\,\mathrm{W/(m^2\,K)}$, $h_f = 50\,\mathrm{W/(m^2\,K)}$, espesor $e = 1\,\mathrm{mm}$ y $k = 15\,\mathrm{W/(m\,K)}$:

$$R_T = \frac{1}{h_c A} + \frac{e}{kA} + \frac{1}{h_f A} = 2{,}207 \times 10^{-3}\,\mathrm{K/W},$$

$$UA = \frac{1}{R_T} = 453\,\mathrm{W/K}, \qquad U = \frac{UA}{A} = 45{,}3\,\mathrm{W/(m^2\,K)}.$$

Lectura física: domina la convección del lado con h_f menor; aumentar mucho h_c apenas mejoraría el conjunto.

Microejemplo 4 – Dimensionado por DTLM (básico) Intercambiador simple en contracorriente con $T_{c,e} = 120\,^\circ\text{C}$, $T_{c,s} = 80\,^\circ\text{C}$, $T_{f,e} = 20\,^\circ\text{C}$, $T_{f,s} = 50\,^\circ\text{C}$ y $q = 50\,\text{kW}$. Como $F = 1$: Los datos implican $C_c = 1250\,\text{W/K}$ y $C_f = 1667\,\text{W/K}$; ambos balances reproducen 50 kW. Esta compatibilidad debe verificarse antes de calcular UA.

$$\Delta T_1 = 120 - 50 = 70\,\text{K}, \qquad \Delta T_2 = 80 - 20 = 60\,\text{K},$$

$$\Delta T_{lm} = \frac{70 - 60}{\ln(70/60)} = 64{,}9\,\text{K}, \qquad UA = \frac{q}{\Delta T_{lm}} = 771\,\text{W/K}.$$

Lectura física: la DTLM queda entre las dos diferencias terminales, como debe ocurrir.

Microejemplo 5 – Prestaciones por efectividad–NUT (intermedio) Intercambiador de tubos concéntricos en contracorriente: $UA = 1200\,\text{W/K}$, $C_c = 2000\,\text{W/K}$, $C_f = 1000\,\text{W/K}$, $T_{c,e} = 100\,^\circ\text{C}$ y $T_{f,e} = 20\,^\circ\text{C}$.

$$C_{\text{mín}} = 1000\,\text{W/K}, \quad C_r = 0{,}50, \quad NUT = 1{,}20,$$

$$\epsilon = \frac{1 - e^{-NUT(1-C_r)}}{1 - C_r\, e^{-NUT(1-C_r)}} = 0{,}622, \qquad q = \epsilon C_{\text{mín}}(T_{c,e} - T_{f,e}) = 49{,}7\,\text{kW}.$$

$$T_{c,s} = 75{,}1\,^\circ\text{C}, \qquad T_{f,s} = 69{,}7\,^\circ\text{C}.$$

Comprobación: $q < q_{\text{máx}} = 80\,\text{kW}$, $0 < \epsilon < 1$ y, en contracorriente, las temperaturas terminales siguen siendo físicamente posibles.

Qué debe dominar antes de seguir El alumno debe poder explicar por qué $C_{\text{mín}}$ limita $q_{\text{máx}}$, construir UA sin mezclar áreas, reconocer cuándo usar DTLM y cuándo efectividad–NUT, y comprobar que las temperaturas de salida respetan el balance y los límites físicos.

5.15.1 Ejercicio resuelto 1. Intercambiador de tubos en flujo cruzado aire–agua

Descripción del problema

Un intercambiador está constituido por 60 tubos de cobre. Por el interior de cada tubo circula agua caliente y por el exterior pasa una corriente de aire en flujo cruzado confinada en una carcasa rectangular adiabática. Se conocen el coeficiente global referido al área exterior de los tubos, las condiciones de entrada y los gastos. Se pide calcular las temperaturas de salida de ambas corrientes y la potencia térmica intercambiada por los métodos efectividad–NUT y DTLM.

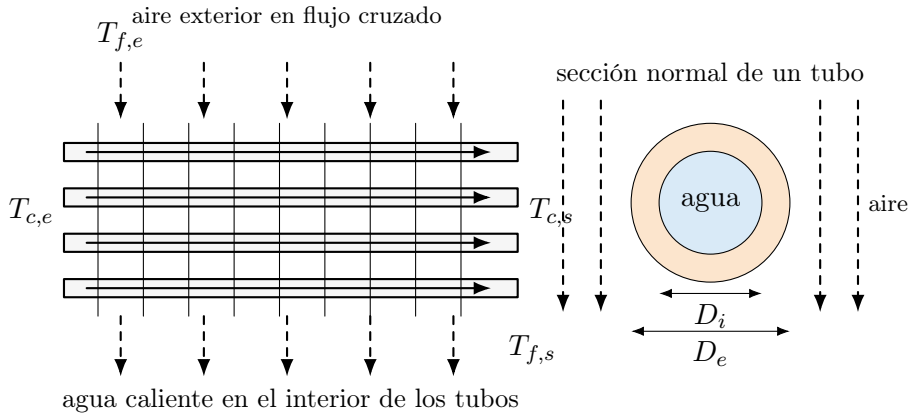


Figura 5.22: Intercambiador de flujo cruzado del ejercicio resuelto 1.

Datos.

$$N = 60, \qquad D_i = 20\,\text{mm}, \qquad D_e = 25\,\text{mm}, \qquad L = 5\,\text{m},$$
$$\dot{m}_{c,\text{tubo}} = 0{,}075\,\text{kg/s}, \qquad T_{c,e} = 100\,^\circ\text{C},$$
$$v_f = 2\ \text{m/s}, \qquad A_{\text{entrada}} = 5\,\text{m}^2, \qquad T_{f,e} = 20\,^\circ\text{C},$$
$$U_o = 100\,\text{W/(m}^2\,\text{K)}, \qquad c_{p,c} = 4217\,\text{J/(kg K)}, \qquad c_{p,f} = 1007\,\text{J/(kg K)},$$
$$\rho_f = 1{,}204\,\text{kg/m}^3.$$

Resolución del problema

Antes de calcular

Predicción física. El aire, al tener menor capacidad térmica, sufrirá el mayor cambio de temperatura. Ninguna salida puede cruzar la temperatura de entrada de la otra corriente.

Modelo esperado. Se comienza por efectividad–NUT porque se conocen las dos temperaturas de entrada y la conductancia U_oA_o, pero no las temperaturas de salida. Después se resuelve de forma independiente por DTLM con el factor de corrección de flujo cruzado.

1. Simplificaciones e hipótesis. Se considera régimen estacionario, carcasa adiabática, propiedades constantes y coeficiente global uniforme. El agua es la corriente caliente y el aire la fría. Para el modelo de flujo cruzado se supone que el aire, que resultará ser $C_{\text{mín}}$, queda mezclado transversalmente, mientras que el agua permanece sin mezclar entre tubos. El coeficiente U_o está referido al área exterior, por lo que se utiliza $A_o = \pi D_e L N$.

2. Modelo físico y parámetros comunes. Aunque el enunciado proporciona directamente U_o, la transmisión radial engloba convección interior, conducción en el cobre y convección exterior. La Figura 5.23 recuerda la base física de U_o; no sustituye el tratamiento global de la diferencia de temperaturas.

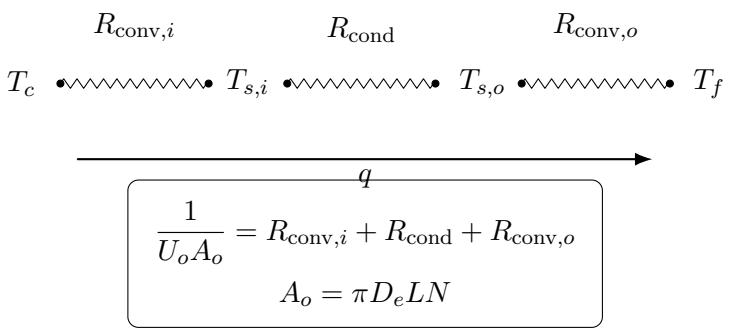


Figura 5.23: Base resistiva de definición del coeficiente global U_o; la diferencia motriz global se trata mediante efectividad–NUT o DTLM.

Las capacidades térmicas son

$$C_c = (0{,}075 \cdot 60)4217 = 18\,976{,}5\,\text{W/K}, \qquad \dot{m}_f = 2 \cdot 5 \cdot 1{,}204 = 12{,}04\,\text{kg/s},$$

$$C_f = 12{,}04 \cdot 1007 = 12\,124{,}28\,\text{W/K}.$$

Por tanto,

$$C_{\text{mín}} = C_f, \qquad C_{\text{máx}} = C_c, \qquad C_r = 0{,}638910.$$

El área exterior y el número de unidades de transferencia son

$$A_o = \pi(0{,}025)(5)(60) = 23{,}5619\,\text{m}^2,$$

$$\text{NUT} = \frac{100 \cdot 23{,}5619}{12124{,}28} = 0{,}194337.$$

3. Método principal: efectividad–NUT. Para flujo cruzado con $C_{\text{mín}}$ mezclado y $C_{\text{máx}}$ no mezclado se emplea

$$\epsilon = 1 - \exp\left[-\frac{1}{C_r}\left(1 - e^{-C_r\,\text{NUT}}\right)\right].$$

Sustituyendo,

$$\epsilon = 0{,}167029.$$

La potencia máxima y la potencia real son

$$q_{\text{máx}} = C_{\text{mín}}(T_{c,e} - T_{f,e}) = 12124{,}28(100 - 20) = 969{,}942\,\text{kW},$$

$$q = \epsilon q_{\text{máx}} = 162{,}008\,\text{kW}.$$

Del balance de ambas corrientes,

$$T_{c,s} = 100 - \frac{162008}{18976{,}5} = 91{,}463\,^\circ\text{C},$$

$$T_{f,s} = 20 + \frac{162008}{12124{,}28} = 33{,}362\,^\circ\text{C}.$$

4. Segundo método: DTLM iterativo. Como al comienzo se desconocen las dos salidas, DTLM requiere iteración. Se supone inicialmente una salida caliente, el balance determina la salida fría, se evalúan P, R_F y el factor F de la disposición de flujo cruzado, y se actualiza la potencia con

$$q_{UA} = U_o A_o F \Delta T_{\text{lm}}.$$

La tabla siguiente muestra una secuencia representativa iniciada con $T_{c,s}^{(0)} = 80\,^\circ\text{C}$:

Iteración	$T_{c,s}$ (°C)	$T_{f,s}$ (°C)	F	q_{UA} (kW)
1	80,00	51,30	0,9681	123,52
2	93,49	30,19	0,9979	168,44
3	91,12	33,89	0,9958	160,93
4	91,52	33,27	0,9962	162,19
convergencia	91,463	33,362	0,996181	162,008

En la solución convergida,

$$P = \frac{T_{f,s} - T_{f,e}}{T_{c,e} - T_{f,e}} = 0{,}167029, \qquad R_F = \frac{T_{c,e} - T_{c,s}}{T_{f,s} - T_{f,e}} = 0{,}638910,$$

$$\Delta T_1 = T_{c,e} - T_{f,s} = 66{,}638\,\mathrm{K}, \qquad \Delta T_2 = T_{c,s} - T_{f,e} = 71{,}463\,\mathrm{K},$$

$$\Delta T_{\mathrm{lm}} = 69{,}022\,\mathrm{K}, \qquad F = 0{,}996181.$$

Así,

$$q = 100 \cdot 23{,}5619 \cdot 0{,}996181 \cdot 69{,}022 = 162{,}008\,\mathrm{kW}.$$

No debe detenerse la iteración en el valor intermedio próximo a 169 kW; ese valor no satisface simultáneamente el balance y la ecuación global del intercambiador.

5. Comparación de métodos e interpretación.

Método	q (kW)	$T_{c,s}$ (°C)	$T_{f,s}$ (°C)
Efectividad–NUT	162,008	91,463	33,362
DTLM iterativo	162,008	91,463	33,362

Los dos caminos coinciden. El método efectividad–NUT es claramente el más directo en este caso porque las salidas eran las incógnitas.

$$\boxed{T_{c,s} \simeq 91{,}5\,^\circ\mathrm{C}, \qquad T_{f,s} \simeq 33{,}4\,^\circ\mathrm{C}, \qquad q \simeq 162{,}0\,\mathrm{kW}.}$$

Comprobación final

Compruebe $q_c = q_f$, $0 < \epsilon < 1$, $0 < F \leq 1$, diferencias terminales positivas y el cierre $q = U_o A_o F \Delta T_{\mathrm{lm}}$.

5.15.2 Ejercicio resuelto 2. Dimensionado comparado de varias configuraciones

Descripción del problema

Se desea enfriar una solución desde 70 °C hasta 40 °C usando agua fría a 10 °C. La solución caliente circula por la carcasa y el agua por los tubos. Se pide comparar el área térmica necesaria para cuatro configuraciones ideales: equicorriente, contracorriente, un paso por carcasa con cuatro pasos por tubos y dos pasos por carcasa con cuatro pasos por tubos. La comparación se realiza con el mismo coeficiente global referido al lado caliente; no incluye todavía el efecto de cada disposición sobre velocidades, pérdida de carga, coeficientes locales, coste o complejidad constructiva.

Datos.

$$\dot{m}_c = 15\,\mathrm{kg/s}, \qquad T_{c,e} = 70\,^\circ\mathrm{C}, \qquad T_{c,s} = 40\,^\circ\mathrm{C}, \qquad c_{p,c} = 3550\,\mathrm{J/(kg\,K)},$$

$$\dot{m}_f = 13\,\mathrm{kg/s}, \qquad T_{f,e} = 10\,^\circ\mathrm{C}, \qquad c_{p,f} = 4180\,\mathrm{J/(kg\,K)},$$

$$U_c = 2000\,\mathrm{W/(m^2\,K)}.$$

Resolución del problema

Antes de calcular

Predicción física. La contracorriente debe necesitar menos área que la equicorriente para la misma carga térmica. Las configuraciones multipaso deben quedar entre ambos extremos ideales.

Modelo esperado. Se comienza por DTLM porque la salida caliente está prescrita y el balance proporciona directamente la salida fría. Después se comprueban las cuatro áreas mediante efectividad–NUT.

1. Simplificaciones e hipótesis. El equipo se considera adiabático hacia el exterior, con propiedades constantes y U_c uniforme referido al área del lado caliente. Para aislar el efecto de la configuración se mantiene el mismo U_c en los cuatro casos. En los multipaso se adopta el modelo ideal de carcasa tipo E, sin fugas, derivaciones, conducción longitudinal ni pérdidas exteriores.

2. Modelo físico. El dato U_c ya engloba las resistencias locales. La Figura 5.24 recuerda su interpretación sin fijar la disposición global del equipo.

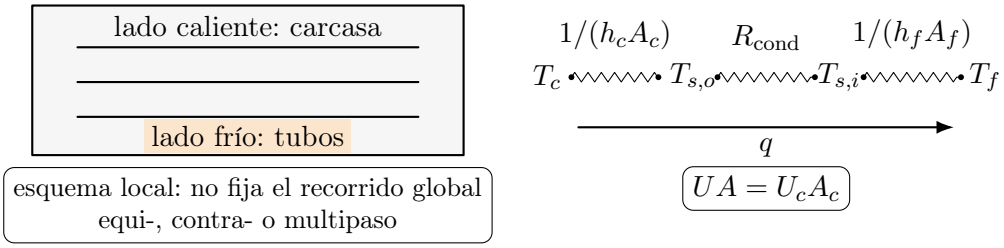


Figura 5.24: Interpretación local del coeficiente global referido al lado caliente. El esquema no representa ninguna de las cuatro disposiciones globales comparadas.

3. Balance energético y parámetros comunes. Las capacidades térmicas son

$$C_c = 15 \cdot 3550 = 53\,250\,\mathrm{W/K}, \qquad C_f = 13 \cdot 4180 = 54\,340\,\mathrm{W/K}.$$

Por tanto,

$$C_{\mathrm{mín}} = C_c, \qquad C_{\mathrm{máx}} = C_f, \qquad C_r = 0{,}979941.$$

La potencia que debe extraerse es

$$q = C_c(70 - 40) = 1597{,}5\,\mathrm{kW}.$$

El balance en el agua proporciona

$$T_{f,s} = 10 + \frac{1597500}{54340} = 39{,}398\,^{\circ}\mathrm{C}.$$

4. Método principal: DTLM.

a) Equicorriente.

$$\Delta T_1 = 70 - 10 = 60\,\mathrm{K}, \qquad \Delta T_2 = 40 - 39{,}398 = 0{,}602\,\mathrm{K},$$

$$\Delta T_{\mathrm{lm}} = 12{,}9064\,\mathrm{K}, \qquad F = 1,$$

$$\boxed{A_{\mathrm{eq}} = \frac{1597500}{2000 \cdot 12{,}9064} = 61{,}8879\,\mathrm{m}^2.}$$

b) Contracorriente.

$$\Delta T_1 = 70 - 39{,}398 = 30{,}602\,\mathrm{K}, \qquad \Delta T_2 = 40 - 10 = 30\,\mathrm{K},$$

$$\Delta T_{\mathrm{lm}} = 30{,}2999\,\mathrm{K}, \qquad F = 1,$$
$$\boxed{A_{\mathrm{cc}} = 26{,}3615\,\mathrm{m}^2.}$$

Para las configuraciones multipaso se usa esta DTLM de contracorriente como referencia. Con

$$P = \frac{T_{f,s} - T_{f,e}}{T_{c,e} - T_{f,e}} = 0{,}489971, \qquad R_F = \frac{T_{c,e} - T_{c,s}}{T_{f,s} - T_{f,e}} = 1{,}020469,$$

la evaluación analítica de las relaciones equivalentes a las cartas proporciona

$$F_{1-4} = 0{,}811717, \qquad F_{2-4} = 0{,}958604.$$

c) Un paso por carcasa y cuatro pasos por tubos.

$$\boxed{A_{1-4} = \frac{1597500}{2000 \cdot 30{,}2999 \cdot 0{,}811717} = 32{,}4762\,\mathrm{m}^2.}$$

d) Dos pasos por carcasa y cuatro pasos por tubos.

$$\boxed{A_{2-4} = \frac{1597500}{2000 \cdot 30{,}2999 \cdot 0{,}958604} = 27{,}4999\,\mathrm{m}^2.}$$

Las lecturas gráficas redondeadas $F \simeq 0{,}80$ y $F \simeq 0{,}95$ son útiles como comprobación, pero generan pequeñas diferencias de área por la resolución de la carta.

5. Segundo método: efectividad–NUT. La potencia máxima y la efectividad exigida son

$$q_{\mathrm{máx}} = C_{\mathrm{mín}}(70 - 10) = 3195\,\mathrm{kW}, \qquad \epsilon = \frac{1597{,}5}{3195} = 0{,}500.$$

En cada configuración se invierte su relación $\epsilon(\mathrm{NUT}, C_r)$ y se calcula

$$A_c = \frac{C_{\mathrm{mín}}\,\mathrm{NUT}}{U_c}.$$

a) Equicorriente.

$$\mathrm{NUT} = -\frac{\ln[1 - \epsilon(1 + C_r)]}{1 + C_r} = 2{,}324428, \qquad A_c = 61{,}8879\,\mathrm{m}^2.$$

b) Contracorriente.

$$\mathrm{NUT} = \frac{1}{1 - C_r} \ln\left(\frac{1 - \epsilon C_r}{1 - \epsilon}\right) = 0{,}990103, \qquad A_c = 26{,}3615\,\mathrm{m}^2.$$

c) Un paso por carcasa y cuatro pasos por tubos.

$$E = \frac{2/\epsilon - (1 + C_r)}{\sqrt{1 + C_r^2}} = 1{,}442794,$$

$$\mathrm{NUT} = -\frac{1}{\sqrt{1 + C_r^2}} \ln\left(\frac{E - 1}{E + 1}\right) = 1{,}219763, \qquad A_c = 32{,}4762\,\mathrm{m}^2.$$

d) Dos pasos por carcasa y cuatro pasos por tubos. Con $n = 2$,

$$\Phi = \left(\frac{\epsilon C_r - 1}{\epsilon - 1}\right)^{1/n} = 1{,}009980,$$

$$E_n = \frac{2(\Phi - C_r)/(\Phi - 1) - (1 + C_r)}{\sqrt{1 + C_r^2}} = 2{,}885518,$$

$$\mathrm{NUT} = -\frac{n}{\sqrt{1 + C_r^2}} \ln\left(\frac{E_n - 1}{E_n + 1}\right) = 1{,}032859, \qquad A_c = 27{,}4999\,\mathrm{m}^2.$$

6. Comparación de métodos e interpretación.

Configuración	A_c por DTLM (m^2)	A_c por ϵ–NUT (m^2)
Equicorriente	61,8879	61,8879
Contracorriente	26,3615	26,3615
1 carcasa–4 tubos	32,4762	32,4762
2 carcasas–4 tubos	27,4999	27,4999

Se verifica

$$A_{\mathrm{cc}} < A_{2-4} < A_{1-4} < A_{\mathrm{eq}}.$$

La contracorriente mantiene la mayor fuerza impulsora. En la familia ideal estudiada, aumentar de una a dos carcasas aproxima el comportamiento al contracorriente, aunque en un diseño real también deben considerarse pérdida de carga, coste y variación de U.

Comprobación final

Las cuatro configuraciones deben entregar $q = 1597{,}5\,\mathrm{kW}$. Compruebe $0 < F \leq 1$, el cierre $q = U_c A_c F \Delta T_{\mathrm{lm}}$ y la coincidencia con $A_c = C_{\mathrm{mín}}\,\mathrm{NUT}\,/U_c$.

5.15.3 Ejercicio resuelto 3. Refrigeración de aceite en tubos concéntricos

Descripción del problema

Un intercambiador de tubos concéntricos enfría aceite SAE 50 mediante agua. El agua circula por el tubo interior de cobre y el aceite por el espacio anular. Se conocen los coeficientes de convección, la conductividad del cobre y resistencias de ensuciamiento iguales y especificadas por separado en ambas caras del tubo interior. Se pide la longitud necesaria en equicorriente y contracorriente para que el aceite salga a $60\,^{\circ}\mathrm{C}$.

Datos.

$$D_1 = 19\,\mathrm{mm}, \quad D_2 = 25\,\mathrm{mm}, \quad D_3 = 29\,\mathrm{mm}, \quad D_4 = 35\,\mathrm{mm},$$
$$\dot{m}_f = 0{,}2\,\mathrm{kg/s}, \quad T_{f,e} = 30\,^{\circ}\mathrm{C}, \quad c_{p,f} = 4175\,\mathrm{J/(kg\,K)},$$
$$\dot{m}_c = 0{,}1\,\mathrm{kg/s}, \quad T_{c,e} = 100\,^{\circ}\mathrm{C}, \quad T_{c,s} = 60\,^{\circ}\mathrm{C}, \quad c_{p,c} = 2131\,\mathrm{J/(kg\,K)},$$
$$R''_{\mathrm{suc},c} = R''_{\mathrm{suc},f} = 0{,}001\,\mathrm{m^2\,K/W}, \quad k_{\mathrm{Cu}} = 386\,\mathrm{W/(m\,K)},$$
$$h_c = 176\,\mathrm{W/(m^2\,K)}, \quad h_f = 4012\,\mathrm{W/(m^2\,K)}.$$

Resolución del problema

Antes de calcular

Predicción física. El aceite se enfría y el agua se calienta; la contracorriente debe requerir menos longitud que la equicorriente.

Modelo esperado. Se comienza por DTLM porque, una vez realizado el balance, quedan conocidas las cuatro temperaturas terminales. Después se comprueba la longitud mediante efectividad–NUT.

1. Simplificaciones e hipótesis. Se considera régimen estacionario, propiedades constantes y pérdidas exteriores despreciables. La transmisión se produce desde el aceite caliente del anular hacia

el agua fría del tubo interior. Las dos resistencias de ensuciamiento son independientes y valen cada una $R''_{\text{suc}} = 0{,}001\,\text{m}^2\,\text{K/W}$.

2. Modelo de resistencias y conductancia por unidad de longitud. La pared conductora relevante es el tubo interior de cobre, comprendido entre D_1 y D_2. Los diámetros D_3 y D_4 delimitan el anular y la carcasa exterior, pero no intervienen en la conducción radial del tubo interior.

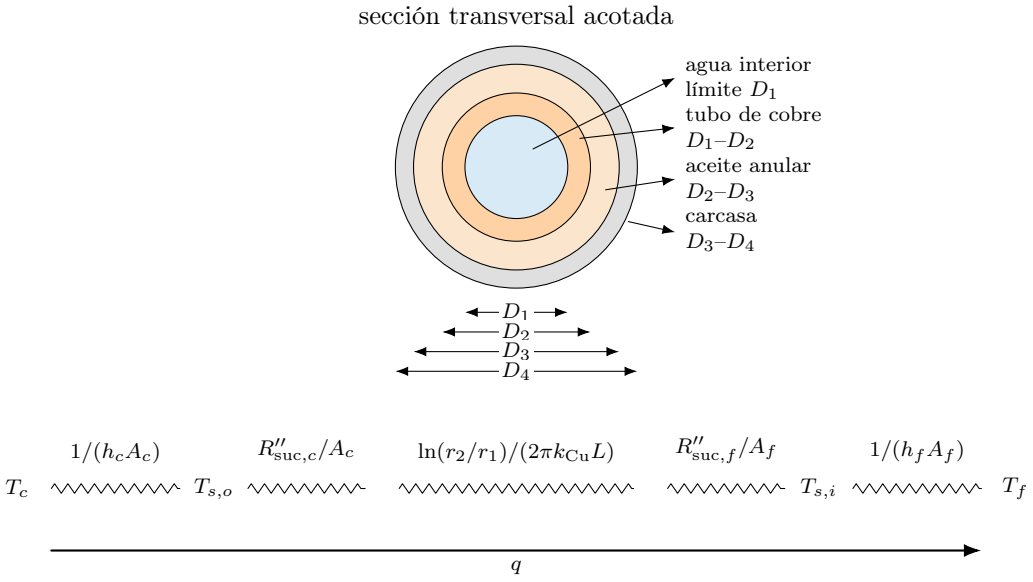


Figura 5.25: Sección transversal acotada y red de resistencias del intercambiador. D_1 limita el agua; D_1–D_2 es el tubo de cobre; D_2–D_3 es el anular de aceite y D_3–D_4 la carcasa.

Las áreas de referencia son

$$A_c = \pi D_2 L = 0{,}0785398L, \qquad A_f = \pi D_1 L = 0{,}0596903L.$$

La resistencia total es

$$\frac{1}{UA} = \frac{1}{h_c A_c} + \frac{R''_{\text{suc},c}}{A_c} + \frac{\ln(D_2/D_1)}{2\pi k_{\text{Cu}} L} + \frac{R''_{\text{suc},f}}{A_f} + \frac{1}{h_f A_f}.$$

Sustituyendo sin redondear prematuramente las áreas,

$$\boxed{\frac{UA}{L} = 9{,}423\,51\,\text{W/(K m)}}, \qquad UA = 9{,}42351L\ \text{W/K}.$$

3. Balance energético común. La carga viene fijada por el aceite:

$$q = 0{,}1 \cdot 2131(100 - 60) = 8524\,\text{W}.$$

Para el agua,

$$T_{f,s} = 30 + \frac{8524}{0{,}2 \cdot 4175} = 40{,}208\,^\circ\text{C}.$$

4. Método principal: DTLM. En un intercambiador de tubos concéntricos puro, $F = 1$ tanto en contracorriente como en equicorriente.

Contracorriente.

$$\Delta T_1 = 100 - 40{,}208 = 59{,}792\,\text{K}, \qquad \Delta T_2 = 60 - 30 = 30\,\text{K},$$

$$\Delta T_{\text{lm}} = 43{,}1970\,\text{K}.$$

Por tanto,

$$\boxed{L_{\mathrm{cc}} = \frac{8524}{9{,}42351 \cdot 43{,}1970} = 20{,}940\,\mathrm{m}.}$$

Equicorriente.

$$\Delta T_1 = 100 - 30 = 70\,\mathrm{K}, \qquad \Delta T_2 = 60 - 40{,}208 = 19{,}792\,\mathrm{K},$$

$$\Delta T_{\mathrm{lm}} = 39{,}7458\,\mathrm{K},$$

$$\boxed{L_{\mathrm{eq}} = \frac{8524}{9{,}42351 \cdot 39{,}7458} = 22{,}758\,\mathrm{m}.}$$

La segunda diferencia terminal de equicorriente es $T_{c,s} - T_{f,s}$; no debe confundirse con $T_{c,s} - T_{f,e}$.

5. Segundo método: efectividad–NUT. Las capacidades son

$$C_c = 0{,}1 \cdot 2131 = 213{,}1\,\mathrm{W/K}, \qquad C_f = 0{,}2 \cdot 4175 = 835\,\mathrm{W/K},$$

por lo que

$$C_{\mathrm{mín}} = C_c, \qquad C_r = 0{,}255210, \qquad \epsilon = \frac{8524}{213{,}1(100-30)} = 0{,}571429.$$

En contracorriente,

$$\mathrm{NUT} = \frac{1}{1-C_r}\ln\left(\frac{1-\epsilon C_r}{1-\epsilon}\right) = 0{,}925989,$$

y como $\mathrm{NUT} = 9{,}42351L/213{,}1$,

$$L_{\mathrm{cc}} = 20{,}940\,\mathrm{m}.$$

En equicorriente,

$$\mathrm{NUT} = -\frac{\ln[1-\epsilon(1+C_r)]}{1+C_r} = 1{,}006395,$$

$$L_{\mathrm{eq}} = 22{,}758\,\mathrm{m}.$$

6. Comparación de métodos e interpretación.

Configuración	L por DTLM (m)	L por ϵ–NUT (m)
Contracorriente	20,940	20,940
Equicorriente	22,758	22,758

Ambos métodos coinciden y confirman que la contracorriente requiere menos longitud.

$$\boxed{L_{\mathrm{contracorriente}} \simeq 20{,}9\,\mathrm{m}, \qquad L_{\mathrm{equicorriente}} \simeq 22{,}8\,\mathrm{m}.}$$

Comprobación final

Compruebe el balance en ambas corrientes, la igualdad de las dos soluciones, $F = 1$ para los dos arreglos de tubos concéntricos y la construcción coherente de UA con las dos resistencias de ensuciamiento.

5.15.4 Ejercicio resuelto 4. Determinación de U en un intercambiador 1–2

Descripción del problema

Un intercambiador ideal de carcasa y tubos con un paso por carcasa y dos pasos por tubos intercambia 400 kW entre dos corrientes de agua. Se conocen las temperaturas de salida, los gastos másicos y el área de referencia del coeficiente global. Se pide determinar U referido a esa área. El área se denota

A_{ref} en todo el desarrollo y debe identificarse como interior, exterior u otra referencia. Cambiarla modifica U, pero no la conductancia UA del equipo.

Datos.

$$\dot{m}_c = 5\,\text{kg/s}, \qquad T_{c,s} = 60\,^\circ\text{C}, \qquad \dot{m}_f = 10\,\text{kg/s}, \qquad T_{f,s} = 25\,^\circ\text{C},$$
$$c_p = 4000\,\text{J/(kg K)}, \qquad q = 400\,\text{kW}, \qquad A_{\text{ref}} = 10\,\text{m}^2.$$

Resolución del problema

Antes de calcular

Predicción física. La potencia ya es un dato. El balance permite reconstruir las dos temperaturas de entrada y, con las cuatro temperaturas terminales conocidas, la DTLM es el camino más natural para obtener UA.

Modelo esperado. Se comienza por DTLM con el factor de corrección de un intercambiador 1–2 y se verifica después mediante efectividad–NUT.

1. Simplificaciones e hipótesis. Ambas corrientes son agua líquida con c_p constante. El equipo es adiabático hacia el exterior, U se considera uniforme y se refiere exclusivamente a A_{ref}. Se adopta el modelo ideal de un paso por carcasa y dos pasos por tubos, sin fugas, derivaciones, conducción longitudinal ni pérdidas térmicas.

2. Modelo global. Los datos permiten identificar la conductancia global UA_{ref}, pero no separar resistencias locales. La Figura 5.26 representa esa resistencia equivalente del equipo completo.

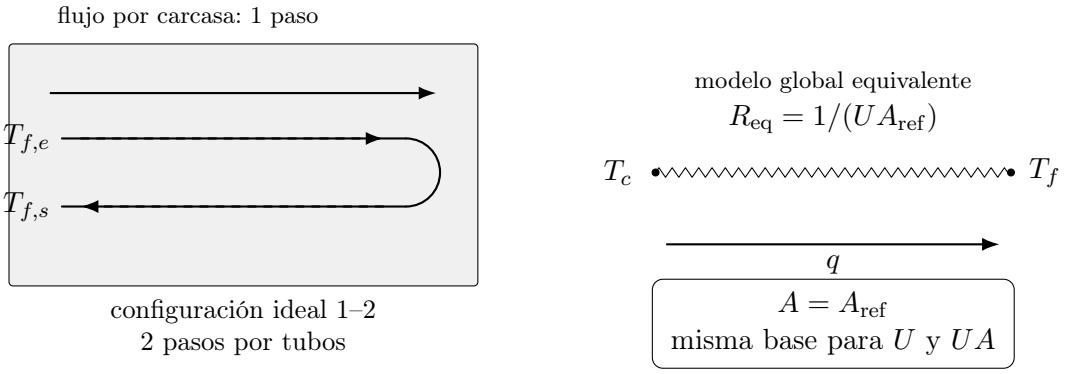


Figura 5.26: Configuración 1–2 y resistencia térmica global equivalente del ejercicio resuelto 4.

3. Balance energético y temperaturas terminales. Las capacidades son

$$C_c = 5 \cdot 4000 = 20\,000\,\text{W/K}, \qquad C_f = 10 \cdot 4000 = 40\,000\,\text{W/K}.$$

Del balance,

$$T_{c,e} = 60 + \frac{400000}{20000} = 80\,^\circ\text{C}, \qquad T_{f,e} = 25 - \frac{400000}{40000} = 15\,^\circ\text{C}.$$

4. Método principal: DTLM. La DTLM de contracorriente de referencia se calcula con

$$\Delta T_1 = 80 - 25 = 55\,\text{K}, \qquad \Delta T_2 = 60 - 15 = 45\,\text{K},$$

$$\Delta T_{\text{lm}} = \frac{55 - 45}{\ln(55/45)} = 49{,}832\,89\,\text{K}.$$

Para la configuración 1–2,

$$P = \frac{T_{f,s} - T_{f,e}}{T_{c,e} - T_{f,e}} = \frac{10}{65} = 0{,}153846, \qquad R_F = \frac{T_{c,e} - T_{c,s}}{T_{f,s} - T_{f,e}} = 2.$$

Con $S = \sqrt{R_F^2 + 1}$, el factor analítico de corrección es

$$F = \frac{S}{R_F - 1} \frac{\ln[(1-P)/(1-PR_F)]}{\ln\left[\dfrac{2 - P(R_F + 1 - S)}{2 - P(R_F + 1 + S)}\right]} = 0{,}986402.$$

Por tanto,

$$UA_{\text{ref}} = \frac{400000}{0{,}986402 \cdot 49{,}83289} = 8137{,}482\,\text{W/K},$$

$$\boxed{U = \frac{8137{,}482}{10} = 813{,}748\,\text{W/(m}^2\,\text{K)}.}$$

Una lectura gráfica redondeada $F \simeq 0{,}98$ conduce a un valor próximo a $819\,\text{W/(m}^2\,\text{K)}$; la diferencia procede de la precisión de la carta y no representa otra solución física.

5. Segundo método: efectividad–NUT. Aquí

$$C_{\text{mín}} = 20\,000\,\text{W/K}, \qquad C_{\text{máx}} = 40\,000\,\text{W/K}, \qquad C_r = 0{,}5.$$

La potencia máxima y la efectividad son

$$q_{\text{máx}} = 20000(80 - 15) = 1300\,\text{kW}, \qquad \epsilon = \frac{400}{1300} = 0{,}307692.$$

Para un paso ideal por carcasa y un número par de pasos por tubos,

$$E = \frac{2/\epsilon - (1 + C_r)}{\sqrt{1 + C_r^2}} = 4{,}472136,$$

$$\text{NUT} = -\frac{1}{\sqrt{1 + C_r^2}} \ln\left(\frac{E - 1}{E + 1}\right) = 0{,}406874.$$

Así,

$$UA_{\text{ref}} = \text{NUT}\, C_{\text{mín}} = 8137{,}482\,\text{W/K},$$

$$\boxed{U = 813{,}748\,\text{W/(m}^2\,\text{K)}.}$$

6. Comparación de métodos e interpretación.

Método	UA (W/K)	U (W/(m^2 K))
DTLM + F	8137,482	813,748
Efectividad–NUT	8137,482	813,748

Los dos métodos son equivalentes cuando se utiliza el factor de corrección con precisión suficiente y la misma área de referencia.

Comprobación final

Compruebe $q_c = q_f = 400\,\text{kW}$, $0 < \epsilon < 1$, $0 < F \leq 1$, el cierre $q = UA_{\text{ref}} F \Delta T_{\text{lm}}$ y el uso de la misma base de área en $U = UA_{\text{ref}}/A_{\text{ref}}$.

5.15.5 Ejercicio resuelto 5. Enfriamiento de aire con un baño agua–hielo

Descripción del problema

Un sistema de aire acondicionado enfría aire haciéndolo pasar por el interior de diez tubos de cobre sumergidos en un baño de agua–hielo a 0 °C. Se pide calcular el coeficiente de convección medio del aire, la longitud necesaria de los tubos y el tiempo hasta fundir todo el hielo disponible. El volumen total del baño es $V = 10\,\mathrm{m}^3$ y la fracción inicial de hielo 0,80 es volumétrica. Se idealiza un baño bien mezclado y prácticamente adiabático; mientras quede hielo permanece a 0 °C y toda la carga recibida se destina a calor latente.

Datos.

$$N = 10, \qquad D = 50\,\mathrm{mm}, \qquad \dot{m} = 0{,}1\,\mathrm{kg/s}, \qquad T_{b,e} = 24\,^\circ\mathrm{C}, \qquad T_{b,s} = 14\,^\circ\mathrm{C},$$

$$T_s = 0\,^\circ\mathrm{C}, \qquad V = 10\,\mathrm{m}^3, \qquad \phi_{h,0} = 0{,}80, \qquad f = 0{,}02,$$

$$\rho_{\mathrm{hielo}} = 920\,\mathrm{kg/m}^3, \qquad \Delta h = 3{,}34 \cdot 10^5\ \mathrm{J/kg}.$$

A 19 °C se toman

$$\rho = 1{,}208\,\mathrm{kg/m}^3, \qquad c_p = 1007\,\mathrm{J/(kg\,K)}, \qquad k = 0{,}0251\,\mathrm{W/(m\,K)},$$

$$\mu = 1{,}820 \times 10^{-5}\,\mathrm{kg/(m\,s)}, \qquad \nu = 1{,}507 \times 10^{-5}\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}, \qquad \mathrm{Pr} = 0{,}731.$$

Resolución del problema

Antes de calcular

Predicción física. El baño agua–hielo permanece casi a temperatura constante; el aire se aproximará a esa temperatura sin cruzarla.

Modelo esperado. Intercambiador con una corriente de capacidad efectiva muy grande, equivalente a $C_r \to 0$.

1. Simplificaciones. El baño permanece a 0 °C mientras quede hielo. El lado exterior, asociado al cambio de fase, se toma con resistencia pequeña frente a la convección interior del aire. Las propiedades del aire se evalúan a la temperatura media de masa, $T_b = (24 + 14)/2 = 19\,^\circ\mathrm{C}$. El factor de fricción $f = 0{,}02$ se toma como dato del enunciado y se interpreta como factor de Darcy. Si no fuese un dato impuesto y se tratase de un tubo liso, debería calcularse con una correlación de fricción, como la de Petukhov; en tal caso el valor sería mayor y cambiarían Nu, h y la longitud necesaria.

2. Modelo adoptado de resistencias. La red completa por tubo incluye convección interior, conducción en la pared y convección exterior hacia el baño. Como no se proporcionan espesor de pared ni h_o, se impone como hipótesis de diseño la simplificación indicada en la Figura 5.27, $UA \simeq h_i A_i$. El cambio de fase sugiere una resistencia exterior pequeña, pero no permite demostrarla sin h_o, espesor y propiedades de pared.

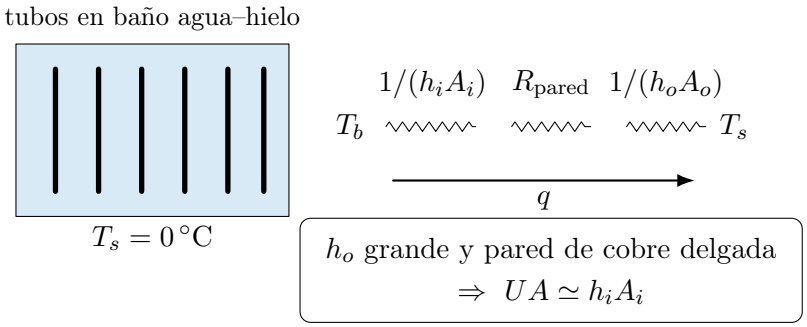


Figura 5.27: Red completa y simplificación de resistencias para los tubos sumergidos en baño agua–hielo.

3. Ecuaciones. La velocidad media se obtiene con el área total de los diez tubos:

$$A_s = N\frac{\pi D^2}{4}, \qquad v = \frac{\dot m}{\rho A_s}. \tag{5.36}$$

Después,

$$\mathrm{Re} = \frac{vD}{\nu}, \qquad \mathrm{Nu} = \frac{(f/8)(\mathrm{Re}-1000)\,\mathrm{Pr}}{1+12{,}7(f/8)^{1/2}(\mathrm{Pr}^{2/3}-1)}, \qquad h = \frac{\mathrm{Nu}k}{D}. \tag{5.37}$$

La longitud se obtiene con $UA \simeq h\pi DLN$ y

$$q = \dot m c_p (T_{b,e} - T_{b,s}). \tag{5.38}$$

4. Resolución de ecuaciones. El área total de paso es

$$A_s = 10\frac{\pi(0{,}05)^2}{4} = 0{,}019\,63\,\mathrm{m}^2.$$

La velocidad media es

$$v = \frac{0{,}1}{1{,}208 \cdot 0{,}01963} = 4{,}216\ \mathrm{m/s}.$$

Por tanto,

$$\mathrm{Re} = \frac{4{,}216 \cdot 0{,}05}{1{,}507 \cdot 10^{-5}} = 13988,$$

que corresponde a flujo turbulento. Con la correlación de Gnielinski,

$$\mathrm{Nu} = 26{,}964,$$

y

$$h = \frac{26{,}964 \cdot 0{,}0251}{0{,}05} = 13{,}54\,\mathrm{W/(m^2\,K)}.$$

La potencia extraída del aire es

$$q = 0{,}1 \cdot 1007(24-14) = 1007\ \mathrm{W}.$$

La conductancia aproximada es

$$UA = h\pi DLN = 13{,}54\pi \cdot 0{,}05 \cdot L \cdot 10 = 21{,}262L\ \mathrm{W/K}.$$

Como el baño actúa como foco isotermo de capacidad térmica efectiva muy grande, se toma el límite $C_r \to 0$ y

$$\epsilon = \frac{q}{\dot m c_p (T_{b,e} - T_s)} = \frac{1007}{100{,}7(24-0)} = 0{,}417.$$

En el límite $C_r \to 0$,

$$\mathrm{NUT} = -\ln(1-\epsilon) = 0{,}539.$$

Con $\mathrm{NUT} = UA/C_{\mín} = 21{,}262L/100{,}7$,

$$L = 2{,}55\,\mathrm{m}.$$

La misma longitud se obtiene por DTLM, pues

$$\Delta T_{\mathrm{lm}} = \frac{24-14}{\ln(24/14)} = 18{,}55\ \mathrm{K}, \qquad L = \frac{1007}{21{,}262 \cdot 18{,}55} = 2{,}55\,\mathrm{m}.$$

La masa inicial de hielo es

$$m_{\mathrm{hielo}} = 0{,}80 \cdot 10 \cdot 920 = 7360\ \mathrm{kg}.$$

Por tanto,

$$t_{\text{ideal}} = \frac{m_{\text{hielo}}\Delta h}{q} = \frac{7360 \cdot 3{,}34 \cdot 10^5}{1007} = 2441152 \text{ s}.$$

En horas y días,

$$t_{\text{ideal}} = 678{,}1 \text{ h} = 28{,}3 \text{ días}.$$

5. Conclusiones o interpretación. La longitud se calcula bajo la hipótesis impuesta $UA \simeq h_i A_i$; con los datos disponibles no puede demostrarse de forma independiente que el lado del aire sea la resistencia dominante. El tiempo calculado es ideal: ganancias térmicas externas hacia el baño aportarían energía adicional al hielo y reducirían el tiempo real de fusión. Mientras quede hielo, el baño fija prácticamente la temperatura exterior de los tubos. Los resultados son válidos usando el factor de fricción impuesto $f = 0{,}02$; si se recalculase f para tubo liso, habría que rehacer el coeficiente convectivo. Los resultados son

$$\boxed{h = 13{,}5\,\text{W}/(\text{m}^2\,\text{K}), \qquad L = 2{,}55\,\text{m}, \qquad t_{\text{ideal}} = 678{,}1 \text{ h} = 28{,}3 \text{ días}.}$$

Comprobación final

Verifique $0 \leq \epsilon \leq 1$, temperatura de salida entre entrada y baño, y balance entre la caída de entalpía del aire y la carga transferida.

Bibliografía

[1] T. L. Bergman, A. S. Lavine, F. P. Incropera y D. P. DeWitt, *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*, 8.ª ed. Wiley, 2017.

[2] Y. A. Çengel y A. J. Ghajar, *Heat and Mass Transfer: Fundamentals and Applications*, 6.ª ed. McGraw Hill, 2020.

[3] J. P. Holman, *Heat Transfer*, 10.ª ed. McGraw-Hill, 2010.

[4] F. Kreith, R. M. Manglik y M. S. Bohn, *Principles of Heat Transfer*, 8.ª ed. Cengage Learning, 2018.

[5] A. Bejan, *Convection Heat Transfer*, 4.ª ed. Wiley, 2013.

[6] W. M. Kays, M. E. Crawford y B. Weigand, *Convective Heat and Mass Transfer*, 4.ª ed. McGraw-Hill, 2005.

[7] J. R. Howell, M. P. Mengüç, K. Daun y R. Siegel, *Thermal Radiation Heat Transfer*, 7.ª ed. CRC Press, 2020.

[8] M. F. Modest y S. Mazumder, *Radiative Heat Transfer*, 4.ª ed. Academic Press, 2021.

[9] H. S. Carslaw y J. C. Jaeger, *Conduction of Heat in Solids*, 2.ª ed. Oxford University Press, 1959.

[10] R. K. Shah y D. P. Sekulić, *Fundamentals of Heat Exchanger Design*. Wiley, 2003.

[11] S. Kakaç, H. Liu y A. Pramuanjaroenkij, *Heat Exchangers: Selection, Rating, and Thermal Design*, 4.ª ed. CRC Press, 2020.

[12] S. W. Churchill, "A Comprehensive Correlating Equation for Laminar, Assisting, Forced and Free Convection", *AIChE Journal*, vol. 23, n.º 1, pp. 10–16, 1977. DOI: 10.1002/aic.690230103.

[13] S. W. Churchill, "Combined Free and Forced Convection Around Immersed Bodies", in E. U. Schlünder (ed.), *Heat Exchanger Design Handbook*, Hemisphere Publishing Corp., Washington, DC, 1983, Sec. 2.5.9.

[14] S. W. Churchill, "Combined Free and Forced Convection in Channels", in E. U. Schlünder (ed.), *Heat Exchanger Design Handbook*, Hemisphere Publishing Corp., Washington, DC, 1983, Sec. 2.5.10.

Anexo A. Formulario

1 Tema 2. Conducción

1.1 Resistencias estacionarias sin generación

Geometría / modo	Resistencia o potencia
Pared plana	$R = \dfrac{L}{kA}$
Cilindro	$R = \dfrac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi kL}$
Esfera	$R = \dfrac{1/r_1 - 1/r_2}{4\pi k}$
Convección	$R = \dfrac{1}{hA}$
Radiación linealizada	$R = \dfrac{1}{h_r A} \qquad h_r = \varepsilon\sigma(T_1^2 + T_2^2)(T_1 + T_2)$
Radiación exacta	$q = \varepsilon\sigma A(T_1^4 - T_2^4)$

1.2 Resistencias térmicas equivalentes de conducción

Caso	Nodo 1: T_1	Nodo 2: T_2 y condiciones	$R_{\text{cond},12}$
Esfera en medio infinito	Superficie esférica D	Medio lejano	$\dfrac{1}{2\pi kD} = \dfrac{1}{4\pi kr}$
Esfera enterrada	Superficie de la esfera D	Plano isotermo a distancia z del centro; $z > D/2$	$\dfrac{1 - D/(4z)}{2\pi kD}$
Cilindro largo enterrado	Superficie del cilindro D	Plano isotermo a distancia z del eje; $L \gg D$	$R_{\text{cond},12} = \dfrac{\cosh^{-1}(2z/D)}{2\pi kL}$ para $D/2 < z < 3D/2$; $R_{\text{cond},12} \simeq \dfrac{\ln(4z/D)}{2\pi kL}$ para $z > 3D/2$
Viga rectangular enterrada	Superficie de la viga $a \times b$	Plano isotermo del medio; $L \gg z,a,b$	$R_{\text{cond},12} \simeq \dfrac{[\ln(1 + z/a)]^{0,59}(z/b)^{0,078}}{2{,}756\,kL}$
Cilindro vertical largo	Superficie lateral D,L	Medio semi-infinito lejano; $L \gg D$	$R_{\text{cond},12} \simeq \dfrac{\ln(4L/D)}{2\pi kL}$
Dos cilindros paralelos	Cilindro D_1	Cilindro D_2; centros separados s y $L \gg D_1,D_2,s$	$\dfrac{\cosh^{-1}\left(\frac{4s^2 - D_1^2 - D_2^2}{2D_1D_2}\right)}{2\pi kL}$
Fila de cilindros enterrados	Cada cilindro D	Plano isotermo; separación w, profundidad z y cilindros largos	$R^{(\text{cil})}_{\text{cond},12} = \dfrac{\ln\left[\frac{2w}{\pi D}\sinh\left(\frac{2\pi z}{w}\right)\right]}{2\pi kL}$
Cilindro en plano medio de pared	Cilindro D	Caras externas isotermas; semidistancia $z > 0{,}5D$	$R_{\text{cond},12} \simeq \dfrac{\ln(8z/\pi D)}{2\pi kL}$
Cilindro en barra cuadrada	Cilindro D	Contorno cuadrado w; centrado y $L \gg w > D$	$R_{\text{cond},12} \simeq \dfrac{\ln(1{,}08w/D)}{2\pi kL}$
Cilindros excéntricos	Cilindro interior D_1	Cilindro exterior D_2; $e < (D_2 - D_1)/2$ y $L \gg D_2$	$\dfrac{\cosh^{-1}\left(\frac{D_1^2 + D_2^2 - 4e^2}{2D_1D_2}\right)}{2\pi kL}$
Prismas cuadrados concéntricos	Cuadrado interior b	Cuadrado exterior a; $L \gg a$	$R_{\text{cond},12} \simeq \dfrac{0{,}93\ln(a/b) - 0{,}0502}{2\pi kL}$ para $a/b \geq 1{,}4$; $R_{\text{cond},12} \simeq \dfrac{0{,}785\ln(a/b)}{2\pi kL}$ para $1 < a/b < 1{,}4$
Disco superficial en sólido semi-infinito	Disco isotermo D	Sólido lejos del disco	$\dfrac{1}{2kD} = \dfrac{1}{4kr}$
Disco enterrado paralelo a la superficie	Disco isotermo D	Medio lejano o plano isotermo; z es la distancia normal entre el disco y ese plano isotermo de referencia	$R_{\text{cond},12} \simeq \dfrac{1}{4kD}$ para $z \gg D$; $R_{\text{cond},12} = \dfrac{1}{2kD}$ para $z = 0$
Arista de dos paredes	Superficies interiores	Superficies exteriores	$R_{\text{cond},12} \simeq \dfrac{1}{0{,}54\,kW}$
Esquina de tres paredes	Superficies interiores	Superficies exteriores	$R_{\text{cond},12} \simeq \dfrac{1}{0{,}15\,kL}$

1.3 Generación interna uniforme

Caso	Fórmulas
Pared plana	$T(x) = \dfrac{q''' L^2}{8k}\left(1 - \dfrac{4x^2}{L^2}\right) - (T_1 - T_2)\dfrac{x}{L} + \dfrac{T_1 + T_2}{2}$
Máximo en pared	$x^* = \dfrac{(T_2 - T_1)k}{Lq'''} \qquad T^* = \dfrac{q''' L^2}{8k} + \dfrac{(T_1 - T_2)^2 k}{2L^2 q'''} + \dfrac{T_1 + T_2}{2}$
Cilindro macizo	$T(r) = T_s + \dfrac{q'''}{4k}(R^2 - r^2) \qquad q(r) = \pi r^2 L q''' \qquad R_R = \dfrac{1}{4\pi k L}$
Cilindro hueco	$T(r) = T_1 - (T_1 - T_2)\dfrac{\ln(r/r_1)}{\ln(r_2/r_1)} + \dfrac{q'''}{4k}\left[(r_2^2 - r_1^2)\dfrac{\ln(r/r_1)}{\ln(r_2/r_1)} - (r^2 - r_1^2)\right]$
Extremo en cilindro hueco	$r^* = \left[\dfrac{r_2^2 - r_1^2}{2\ln(r_2/r_1)} - \dfrac{2k(T_1 - T_2)}{q'''\ln(r_2/r_1)}\right]^{1/2}$ $r_1 < r^* < r_2$; en caso contrario, el extremo cae fuera del dominio físico y no debe evaluarse.

1.4 Recubrimiento cilíndrico/esférico

Caso	Fórmulas
Radio crítico	$r_{c,\text{cil}} = \dfrac{k_a}{h_e} \qquad r_{c,\text{esf}} = \dfrac{2k_a}{h_e}$

1.5 Aletas

Bloque	Fórmulas
Variables	$\theta = T - T_\infty \qquad \theta_b = T_b - T_\infty \qquad m = \sqrt{\dfrac{hP}{kA_c}}$
Modelo 1D	$\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}x^2} - m^2\theta = 0 \qquad q_f = -kA_{c,b}\left.\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right\|_{x=0} \qquad q_f = hA_f\eta_f\theta_b$
Magnitudes	$M = \sqrt{hPkA_c}\,\theta_b$
Superficie aleteada	$\eta_f = \dfrac{q_f}{hA_f\theta_b} \qquad \epsilon_f = \dfrac{q_f}{hA_{c,b}\theta_b} \qquad R_f = \dfrac{1}{hA_f\eta_f}$
	$A_T = A_b + NA_f \qquad \eta_T = 1 - \dfrac{NA_f}{A_T}(1 - \eta_f) \qquad R_T = \dfrac{1}{hA_T\eta_T}$
Contacto en base	$R_{\text{rama}} = \dfrac{R_c''}{NA_{c,b}} + \dfrac{1}{NhA_f\eta_f}$

Condiciones de contorno para aletas de base recta y sección constante.

Punta	$\theta(x)/\theta_b$	q_f
Adiabática	$\dfrac{\cosh[m(L-x)]}{\cosh(mL)}$	$M\tanh(mL)$
Convectiva	$\dfrac{mkA_c\cosh[m(L-x)] + hA_p\sinh[m(L-x)]}{mkA_c\cosh(mL) + hA_p\sinh(mL)}$	$M\dfrac{mkA_c\tanh(mL) + hA_p}{mkA_c + hA_p\tanh(mL)}$
Infinita	e^{-mx}	M
T_L prescrita	$\dfrac{\sinh[m(L-x)] + (\theta_L/\theta_b)\sinh(mx)}{\sinh(mL)}$	$M\dfrac{\cosh(mL) - \theta_L/\theta_b}{\sinh(mL)}$

Tipo tabulado	Esquema	Rendimiento η_f
Recta rectangular		$m=\sqrt{\frac{hP}{kA_c}},\quad L_c=L+\frac{A_p}{P},\quad \eta_f=\frac{\tanh(mL_c)}{mL_c}$
Recta triangular		$m=\sqrt{\frac{2h}{kt}},\qquad \eta_f=\frac{1}{mL}\frac{I_1(2mL)}{I_0(2mL)}$
Recta parabólica		$m=\sqrt{\frac{2h}{kt}},\qquad \eta_f=\frac{2}{\sqrt{4(mL)^2+1}+1}$
Anular rectangular		$m=\sqrt{\frac{2h}{kt}},\quad r_{2c}=r_2+\frac{t}{2},\quad \eta_f=C_2\frac{\Phi_1}{\Phi_0}$
Aguja cilíndrica		$m=\sqrt{\frac{4h}{kD}},\quad L_c=L+\frac{D}{4},\quad \eta_f=\frac{\tanh(mL_c)}{mL_c}$
Aguja cónica		$m=\sqrt{\frac{4h}{kD}},\qquad \eta_f=\frac{2}{mL}\frac{I_2(2mL)}{I_1(2mL)}$
Aguja parabólica		$m=\sqrt{\frac{4h}{kD}},\qquad \eta_f=\frac{2}{\sqrt{\frac{4}{9}(mL)^2+1}+1}$

$$\Phi_1 = K_1(mr_1)I_1(mr_{2c}) - I_1(mr_1)K_1(mr_{2c}),$$
$$\Phi_0 = I_0(mr_1)K_1(mr_{2c}) + K_0(mr_1)I_1(mr_{2c}),$$
$$C_2 = \frac{2r_1/m}{r_{2c}^2 - r_1^2}.$$

Tabla 2: Funciones de Bessel modificadas escaladas para el calculo de aletas anulares.

x	$e^{-x}I_0(x)$	$e^{-x}I_1(x)$	$e^{x}K_0(x)$	$e^{x}K_1(x)$
0,00	1,0000	0,0000	∞	∞
0,10	0,9071	0,0453	2,6823	10,8902
0,20	0,8269	0,0823	2,1408	5,8334
0,30	0,7576	0,1124	1,8526	4,1252
0,40	0,6974	0,1368	1,6627	3,2587
0,50	0,6450	0,1564	1,5241	2,7310
0,60	0,5993	0,1722	1,4167	2,3739
0,80	0,5241	0,1945	1,2582	1,9179
1,00	0,4658	0,2079	1,1445	1,6362
1,2	0,4198	0,2153	1,0575	1,4429
1,4	0,3831	0,2185	0,9881	1,3011
1,6	0,3533	0,2190	0,9309	1,1919
1,8	0,3289	0,2177	0,8828	1,1048
2,0	0,3085	0,2153	0,8416	1,0335
2,4	0,2766	0,2085	0,7740	0,9229
2,8	0,2528	0,2007	0,7206	0,8405
3,0	0,2430	0,1968	0,6978	0,8066
3,6	0,2193	0,1856	0,6405	0,7245
4,0	0,2070	0,1788	0,6093	0,6816
4,6	0,1919	0,1695	0,5701	0,6292
5,0	0,1835	0,1640	0,5478	0,6003
6,0	0,1667	0,1521	0,5019	0,5422
7,0	0,1537	0,1423	0,4658	0,4981
8,0	0,1434	0,1341	0,4366	0,4631
9,0	0,1350	0,1272	0,4123	0,4346
10,0	0,1278	0,1213	0,3916	0,4108
12,0	0,1164	0,1115	0,3582	0,3728
14,0	0,1076	0,1037	0,3321	0,3437

1.6 Transitorio: resistencia interna despreciable

Caso	Fórmulas
Criterio	$Bi = \dfrac{\bar{h}L_c}{k} \lesssim 0{,}1, \qquad L_c = \dfrac{V}{A_s}$
Convección	$t_c = \dfrac{\rho V c}{\bar{h}A_s}, \qquad \dfrac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \exp\left(-\dfrac{t}{t_c}\right)$
Generación e irradiación constante	$\dfrac{(T - T_\infty) - \dfrac{\alpha_s G A_G + q''' V}{\bar{h}A_s}}{(T_0 - T_\infty) - \dfrac{\alpha_s G A_G + q''' V}{\bar{h}A_s}} = \exp\left(-\dfrac{t}{t_c}\right)$
Radiación pura a $T_{\text{sur}} = 0$	$T(t; T_{\text{sur}} = 0) = \left(\dfrac{1}{T_0^3} + \dfrac{3\varepsilon\sigma A_r}{\rho V c} t\right)^{-1/3}$

1.7 Sólido semi-infinito

$$x \geq 0, \quad T(x,0) = T_0, \quad T(\infty,t) = T_0, \quad \eta = \frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}, \quad Fo_L = \frac{\alpha t}{L^2} \lesssim 0{,}05\text{–}0{,}10.$$

Caso	Condición en $x = 0$	Resultado
T_s constante	$T(0,t) = T_s$	$\dfrac{T - T_0}{T_s - T_0} = \operatorname{erfc}(\eta) \qquad q_s'' = \dfrac{k(T_s - T_0)}{\sqrt{\pi\alpha t}}$
q_s'' constante	$-kT_x(0,t) = q_s''$	$T - T_0 = \dfrac{q_s''}{k}\left[2\sqrt{\dfrac{\alpha t}{\pi}} e^{-\eta^2} - x \operatorname{erfc}(\eta)\right]$
Convección repentina	$-kT_x(0,t) = h[T_\infty - T(0,t)]$	$\dfrac{T - T_0}{T_\infty - T_0} = \operatorname{erfc}(\eta) - e^{hx/k + h^2\alpha t/k^2} \operatorname{erfc}\left(\eta + \dfrac{h\sqrt{\alpha t}}{k}\right)$
Energía superficial instantánea	$e_s = E_s/A$ en $t = 0$	$T - T_0 = \dfrac{e_s}{k\sqrt{\pi t/\alpha}} e^{-\eta^2}$
Superficie periódica	$T(0,t) = T_0 + \hat{T}_s \sin \omega t$	$T - T_0 = \hat{T}_s e^{-x\sqrt{\omega/(2\alpha)}} \sin\left(\omega t - x\sqrt{\dfrac{\omega}{2\alpha}}\right)$
Contacto entre dos sólidos	T_A,T_B uniformes al inicio	$T_i = \dfrac{T_A\sqrt{(k\rho c)_A} + T_B\sqrt{(k\rho c)_B}}{\sqrt{(k\rho c)_A} + \sqrt{(k\rho c)_B}}$

Tabla 3: Valores de las funciones error y error complementaria.

η	$\operatorname{erf}(\eta)$	$\operatorname{erfc}(\eta)$	η	$\operatorname{erf}(\eta)$	$\operatorname{erfc}(\eta)$
0,0	0,000 00	1,000 00	1,6	0,976 35	0,023 65
0,1	0,112 46	0,887 54	1,7	0,983 79	0,016 21
0,2	0,222 70	0,777 30	1,8	0,989 09	0,010 91
0,3	0,328 63	0,671 37	1,9	0,992 79	0,007 21
0,4	0,428 39	0,571 61	2,0	0,995 32	0,004 68
0,5	0,520 50	0,479 50	2,1	0,997 02	0,002 98
0,6	0,603 86	0,396 14	2,2	0,998 14	0,001 86
0,7	0,677 80	0,322 20	2,3	0,998 86	0,001 14
0,8	0,742 10	0,257 90	2,4	0,999 31	0,000 69
0,9	0,796 91	0,203 09	2,5	0,999 59	0,000 41
1,0	0,842 70	0,157 30	2,6	0,999 76	0,000 24
1,1	0,880 21	0,119 79	2,7	0,999 87	0,000 13
1,2	0,910 31	0,089 69	2,8	0,999 92	0,000 08
1,3	0,934 01	0,065 99	2,9	0,999 96	0,000 04
1,4	0,952 29	0,047 71	3,0	0,999 98	0,000 02
1,5	0,966 11	0,033 89			

2 Tema 3. Radiación térmica

2.1 Constante de Stefan–Boltzmann

$$\sigma = 5{,}67 \times 10^{-8}\ \mathrm{W/(m^2\,K^4)}.$$

2.2 Cuerpo negro y superficie real gris

$$E_b = \sigma T^4,$$
$$E = \varepsilon \sigma T^4.$$

2.3 Factores de forma

Regla recíproca: $A_i F_{ij} = A_j F_{ji}$,

Regla de la suma (contornos cerrados): $\sum_{j=1}^{n} F_{ij} = 1$,

Superficie completa sobre otra dividida: $F_{ij} = \sum_{k=1}^{m} F_{ik}$,

Superficie dividida sobre otra completa: $F_{ji} = \dfrac{\sum_{k=1}^{m} A_k F_{ki}}{\sum_{k=1}^{m} A_k}$.

Tabla 4: Factores de forma básicos de uso frecuente en el formulario.

Configuración	Factor de forma
Cilindros concéntricos largos	$F_{11}=0,\quad F_{12}=1,\quad F_{21}=A_1/A_2,\quad F_{22}=1-A_1/A_2.$
Esferas concéntricas	$F_{11}=0,\quad F_{12}=1,\quad F_{21}=A_1/A_2,\quad F_{22}=1-A_1/A_2.$
Placas paralelas largas del mismo ancho	$F_{12}=F_{21}=\sqrt{1+(c/a)^2}-c/a.$
Placas adyacentes largas	$F_{12}=\frac{1}{2}[1+c/a-\sqrt{1+(c/a)^2}].$
Cuña simétrica larga	$F_{12}=F_{21}=1-\sin(\alpha/2).$
Cilindro largo paralelo a placa plana idealmente infinita	$F_{12}=1/2.$
Esfera cercana a una superficie plana idealmente infinita	$F_{12}=1/2.$
Tetraedro regular, entre caras	$F_{ii}=0,\quad F_{ij}=1/3$ para $i\neq j.$
Superficie pequeña perpendicular al eje de una superficie de revolución	$F_{12}=\sin^2\theta.$
Superficie en el interior de una esfera	$F_{12}=A_2/(4\pi R^2).$

2.4 Superficies negras

$$q_{ij} = A_i F_{ij} \sigma (T_i^4 - T_j^4),$$
$$q_i = A_i \sigma \sum_{j=1}^{N} F_{ij}(T_i^4 - T_j^4).$$

2.5 Superficies grises difusas opacas

$$J_i = E_i + \rho_i G_i,$$
$$G_i = \sum_{j=1}^{n} F_{ij} J_j,$$
$$J_i = \varepsilon_i E_{b,i} + (1-\varepsilon_i) \sum_{j=1}^{n} F_{ij} J_j,$$
$$q_{ij} = A_i F_{ij}(J_i - J_j) = A_j F_{ji}(J_i - J_j),$$
$$q_i = A_i(J_i - G_i) = A_i \sum_{j=1}^{n} F_{ij}(J_i - J_j),$$

$$q_i = \frac{\varepsilon_i A_i}{1-\varepsilon_i}(E_{b,i} - J_i) \qquad (\varepsilon_i \neq 1).$$

2.6 Red de resistencias radiantes

$$R_{s,i} = \frac{1-\varepsilon_i}{\varepsilon_i A_i}, \qquad R_{ij} = \frac{1}{A_i F_{ij}} = \frac{1}{A_j F_{ji}},$$
$$\frac{E_{b,i} - J_i}{R_{s,i}} = \sum_{j=1}^{N} \frac{J_i - J_j}{R_{ij}}.$$

2.7 Recinto de dos superficies grises

$$q_{12} = \frac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\dfrac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1 A_1} + \dfrac{1}{A_1 F_{12}} + \dfrac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2 A_2}}.$$

2.8 Casos particulares de dos superficies

Para placas paralelas grandes $F_{12} = 1$, $A_1 = A_2 = A$:

$$q_{12} = \frac{A\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\dfrac{1}{\varepsilon_1} + \dfrac{1}{\varepsilon_2} - 1}.$$

Para cilindros concéntricos largos ($F_{12} = 1$, $A_1/A_2 = r_1/r_2$):

$$q_{12} = \frac{A_1\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\dfrac{1}{\varepsilon_1} + \dfrac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2}\dfrac{r_1}{r_2}}.$$

Para esferas concéntricas ($F_{12} = 1$, $A_1/A_2 = (r_1/r_2)^2$):

$$q_{12} = \frac{A_1\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\dfrac{1}{\varepsilon_1} + \dfrac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2}\left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)^2}.$$

Para una superficie pequeña en una cavidad grande ($A_1 \ll A_2$ o $\varepsilon_2 \to 1$):

$$q_{12} \simeq \varepsilon_1 A_1 \sigma(T_1^4 - T_2^4).$$

2.9 Radiación solar y atmósfera

$$G_s = G_{sD}\cos\theta + G_{sd},$$
$$G_{s,i} = G_{sD}\cos\theta_i + G_{sD}\sum_{j=1}^{n}\rho_{s,j}\cos\theta_j F_{ij} + G_{sd}\left[F_{i,\text{cielo}} + \sum_{j=1}^{n}\rho_{s,j}F_{ij}\right].$$

2.10 Pantallas de radiación

$$(q_{12})_0 = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{\dfrac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1 A_1} + \dfrac{1}{A_1 F_{12}} + \dfrac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2 A_2}},$$
$$(q_{12})_n = \frac{(q_{12})_0}{n+1} \qquad \text{(placas grandes, } F \simeq 1\text{, misma } \varepsilon\text{)}.$$

3 Tema 4. Convección

3.1 Leyes básicas y números adimensionales

$$q = hA\Delta T, \qquad R_{\text{conv}} = \frac{1}{hA}, \qquad q'' = h\Delta T,$$
$$\text{Re} = \frac{uL}{\nu} = \frac{\rho uL}{\mu}, \qquad \text{Pr} = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\mu c_p}{k}, \qquad \text{Nu} = \frac{hL}{k},$$
$$\text{Gr} = \frac{g\beta|\Delta T|L^3}{\nu^2}, \qquad \text{Ra} = \text{GrPr} = \frac{g\beta|\Delta T|L^3}{\nu\alpha}, \qquad \text{Ri} = \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2},$$
$$\text{Pe} = \text{RePr}, \qquad \text{St} = \frac{\text{Nu}}{\text{RePr}} = \frac{h}{\rho u c_p}.$$

3.2 Placa plana en convección forzada

$$\text{Re}_x = \frac{u_\infty x}{\nu}, \qquad \text{Re}_c = \frac{u_\infty x_c}{\nu}, \qquad \text{Re}_L = \frac{u_\infty L}{\nu},$$
$$h_x = \frac{\text{Nu}_x k}{x}, \qquad \bar{h} = \frac{\overline{\text{Nu}} k}{L}, \qquad T_f = \frac{T_\infty + T_s}{2}.$$

$$\text{Re}_c \simeq 5 \times 10^5$$

Tabla 5: Correlaciones de placa plana con $T_s = \text{cte}$.

Caso	Valor local	Valor medio	Rango
Laminar	$\text{Nu}_x = 0{,}332\text{Re}_x^{1/2}\text{Pr}^{1/3}$	$\overline{\text{Nu}} = 0{,}664\text{Re}_L^{1/2}\text{Pr}^{1/3}$	$\text{Pr} > 0{,}6$.
Churchill–Ozoe	$\text{Nu}_x = \frac{0{,}3387\text{Re}_x^{1/2}\text{Pr}^{1/3}}{[1+(0{,}0468/\text{Pr})^{2/3}]^{1/4}}$	$\overline{\text{Nu}} = \frac{0{,}6774\text{Re}_L^{1/2}\text{Pr}^{1/3}}{[1+(0{,}0468/\text{Pr})^{2/3}]^{1/4}}$	$\text{Re}_x\text{Pr} > 100$ (local), $\text{Re}_L\text{Pr} > 100$ (medio); todo Pr.
Metales líquidos	$\text{Nu}_x = 0{,}565(\text{Re}_x\text{Pr})^{1/2}$	$\overline{\text{Nu}} = 1{,}130(\text{Re}_L\text{Pr})^{1/2}$	$\text{Re}_x\text{Pr} > 100$ (local), $\text{Re}_L\text{Pr} > 100$ (medio), $\text{Pr} < 0{,}05$.
Extremo no calentado, laminar	$\text{Nu}_x = \frac{0{,}332\text{Re}_x^{1/2}\text{Pr}^{1/3}}{[1-(x_0/x)^{3/4}]^{1/3}}$	–	$x > x_0$, $\text{Pr} > 0{,}6$.
Turbulento desde el borde de ataque	$\text{Nu}_x = 0{,}0296\text{Re}_x^{4/5}\text{Pr}^{1/3}$	$\overline{\text{Nu}} = 0{,}037\text{Re}_L^{4/5}\text{Pr}^{1/3}$	$0{,}6 < \text{Pr} < 60$.
Extremo no calentado, turbulento	$\text{Nu}_x = \frac{0{,}0296\text{Re}_x^{4/5}\text{Pr}^{1/3}}{[1-(x_0/x)^{9/10}]^{1/9}}$	–	$x > x_0$.
Mixto laminar+turbulento, Chilton–Colburn	–	$\overline{\text{Nu}} = [0{,}664\text{Re}_c^{1/2} + 0{,}037(\text{Re}_L^{4/5} - \text{Re}_c^{4/5})]\text{Pr}^{1/3}$	$0{,}6 < \text{Pr} < 60$, $\text{Re}_L < 10^8$.
Equivalencia	–	$\overline{\text{Nu}} = (0{,}037\text{Re}_L^{4/5} - 871)\text{Pr}^{1/3}$	$\text{Re}_c = 5 \times 10^5$.
Whitaker	–	$\overline{\text{Nu}} = 0{,}036\text{Pr}^{0{,}43}(\text{Re}_L^{0{,}8} - 9200)(\mu_\infty/\mu_s)^{1/4}$	$0{,}7 < \text{Pr} < 380$; $2\times10^5 < \text{Re}_L < 5{,}5 \times 10^6$; $0{,}26 \lesssim \mu_\infty/\mu_s \lesssim 3{,}5$.

Tabla 6: Correlaciones de placa plana con $q_s'' = \text{cte}$.

Caso	Valor local	Valor medio	Rango
Laminar	$\text{Nu}_x = 0{,}453\text{Re}_x^{1/2}\text{Pr}^{1/3}$	$\overline{\text{Nu}} = 0{,}906\text{Re}_L^{1/2}\text{Pr}^{1/3}$	$\text{Pr} > 0{,}6$.
Turbulento desde el borde de ataque	$\text{Nu}_x = 0{,}0308\text{Re}_x^{4/5}\text{Pr}^{1/3}$	$\overline{\text{Nu}} = 0{,}0385\text{Re}_L^{4/5}\text{Pr}^{1/3}$	$0{,}6 < \text{Pr} < 60$.
Mixto laminar + turbulento	–	$\overline{\text{Nu}} = [0{,}906\text{Re}_c^{1/2} + 0{,}0385(\text{Re}_L^{4/5} - \text{Re}_c^{4/5})]\text{Pr}^{1/3}$	$0{,}6 < \text{Pr} < 60$.

3.3 Flujo transversal forzado a cilindros y esferas

Para cilindro y esfera se usa normalmente $L = D$:

$$\mathrm{Re}_D = \frac{u_\infty D}{\nu}, \qquad \bar{h} = \frac{\overline{\mathrm{Nu}}_D k}{D}.$$

3.3.1 Cilindro circular isotermo

Propiedades a $T_f = (T_\infty + T_s)/2$, salvo que la correlación especifique otra cosa. Churchill–Bernstein, válida para $\mathrm{Re}_D\mathrm{Pr} \geq 0{,}2$ en todo el intervalo de Pr, forma unificada recomendada:

$$\overline{\mathrm{Nu}}_D = 0{,}3 + \frac{0{,}62\mathrm{Re}_D^{1/2}\mathrm{Pr}^{1/3}}{[1+(0{,}4/\mathrm{Pr})^{2/3}]^{1/4}}\left[1+\left(\frac{\mathrm{Re}_D}{282000}\right)^{5/8}\right]^{4/5}.$$

Correlación para advección muy débil alrededor de cilindro:

$$\overline{\mathrm{Nu}}_D = \frac{1}{0{,}8237 - \ln\left[(\mathrm{Re}_D\mathrm{Pr})^{1/2}\right]}, \qquad \mathrm{Re}_D\mathrm{Pr} < 0{,}2.$$

Hilpert:

$$\overline{\mathrm{Nu}}_D = C\mathrm{Re}_D^m\mathrm{Pr}^{1/3}, \qquad 0{,}4 < \mathrm{Re}_D < 4\cdot 10^5, \quad \mathrm{Pr} > 0{,}6.$$

Tabla 7: Constantes de Hilpert: cilindro circular y cilindros no circulares.

Geometría	Re_D o Re_L	C	m
Circular	0,4–4	0,989	0,330
Circular	4–40	0,911	0,385
Circular	40–4.000	0,683	0,466
Circular	4.000–40.000	0,193	0,618
Circular	40.000–400.000	0,027	0,805
Cuadrado girado 45° respecto al flujo (rombo)	5.000–100.000	0,246	0,588
Cuadrado con caras paralelas/perpendiculares al flujo	5.000–100.000	0,102	0,675
Hexágono con dos caras paralelas al flujo	5.000–19.500	0,160	0,638
Hexágono con dos caras paralelas al flujo	19.500–100.000	0,0385	0,782
Hexágono con un vértice aguas arriba	5.000–100.000	0,153	0,638
Placa o rectángulo delgado transversal	4.000–15.000	0,228	0,731

Zhukauskas, propiedades a T_∞ excepto Pr_s a T_s:

$$\overline{\mathrm{Nu}}_D = C\mathrm{Re}_D^m\mathrm{Pr}^n\left(\frac{\mathrm{Pr}}{\mathrm{Pr}_s}\right)^{1/4}, \quad 1 < \mathrm{Re}_D < 10^6, \quad 0{,}7 < \mathrm{Pr} < 500.$$

$n = 0{,}37$ si $\mathrm{Pr} \leq 10$ y $n = 0{,}36$ si $\mathrm{Pr} > 10$.

Tabla 8: Constantes de Zhukauskas para cilindro circular.

Re_D	C	m
1–40	0,75	0,4
40–1.000	0,51	0,5
1.000–200.000	0,26	0,6
200.000–1.000.000	0,076	0,7

3.3.2 Esfera isoterma

Propiedades a T_∞ excepto μ_s a T_s:

$$\overline{\mathrm{Nu}}_D = 2 + (0{,}4\mathrm{Re}_D^{1/2} + 0{,}06\mathrm{Re}_D^{2/3})\mathrm{Pr}^{0{,}4}\left(\frac{\mu}{\mu_s}\right)^{1/4},$$

$$3{,}5 < \mathrm{Re}_D < 7{,}6\cdot 10^4, \qquad 0{,}71 < \mathrm{Pr} < 380, \qquad 1 < \frac{\mu}{\mu_s} < 3{,}2.$$

3.4 Flujo interno forzado en conductos

Para cualquier conducto se adopta $D_h = 4A_c/p$; en un tubo circular $D_h = D$.

$$\dot{m} = \rho Q, \qquad \mathrm{Re}_{D_h} = \frac{\bar{v} D_h \rho}{\mu} = \frac{\bar{v} D_h}{\nu}, \bar{h} = \frac{\overline{\mathrm{Nu}} k}{D_h}.$$

Para conductos no circulares:

$$D_h = 4\frac{A_c}{p},$$

donde A_c es el área de la sección de flujo y p el perímetro mojado. Propiedades a $(T_{b,e} + T_{b,s})/2$, excepto propiedades de pared cuando se indique.

$$q = \dot{m} c_p (T_{b,s} - T_{b,e}), \qquad q = \bar{h} A_{\mathrm{conv}} \Delta T_{\mathrm{ef,int}}.$$

3.4.1 Pared a temperatura constante

Para $T_s = \mathrm{cte}$:

$$q = \bar{h} A_{\mathrm{conv}} \Delta T_{\mathrm{lm}},$$
$$\Delta T_{\mathrm{lm}} = \frac{\Delta T_e - \Delta T_s}{\ln(\Delta T_e / \Delta T_s)} = \frac{\Delta T_s - \Delta T_e}{\ln(\Delta T_s / \Delta T_e)}, \qquad \Delta T_{e,s} = T_s - T_{b,e,s},$$
$$T_b(x) = T_s - (T_s - T_{b,e}) e^{-\bar{h} p x / (\dot{m} c_p)}.$$

3.4.2 Flujo superficial constante

Para $q_s'' = \mathrm{cte}$:

$$q = q_s'' A_{\mathrm{conv}} = q_s'' p L,$$
$$T_b(x) = T_{b,e} + \frac{q_s'' p}{\dot{m} c_p} x,$$
$$T_s(x) = T_b(x) + \frac{q_s''}{h}.$$

Tabla 9: Flujo laminar desarrollado: Nusselt para secciones de conducto.

Sección / b/a	q_s'' uniforme	T_s uniforme
Circular	4,36	3,66
Rectangular 1	3,61	2,98
Rectangular 1,43	3,73	3,08
Rectangular 2	4,12	3,39
Rectangular 3	4,79	3,96
Rectangular 4	5,33	4,44
Rectangular 8	6,49	5,60
Placas paralelas ∞	8,24	7,54
Triangular equilátero	3,11	2,47

Tabla 10: Flujo laminar desarrollado en ánulos concéntricos. Una superficie isoterma y la otra aislada.

D_i/D_o	Nu_i	Nu_o
0	–	3,66
0,05	17,46	4,06
0,10	11,56	4,11
0,25	7,37	4,23
0,50	5,74	4,43
$D_i/D_o \to 1$	4,86	4,86

Región de entrada laminar en tubo circular

Pared a temperatura constante:

$$\overline{\mathrm{Nu}} = 3{,}66 + \frac{0{,}0668(D/L)\mathrm{RePr}}{1 + 0{,}04[(D/L)\mathrm{RePr}]^{2/3}}.$$

Sieder–Tate de entrada

$$\overline{\mathrm{Nu}} = 1{,}86\left(\mathrm{RePr}\frac{D}{L}\right)^{1/3}\left(\frac{\mu_b}{\mu_s}\right)^{0{,}14}.$$

Turbulento desarrollado — Gnielinski

La banda $2300 < \mathrm{Re} < 4000$ es transicional y depende del estado de entrada y de las perturbaciones; no debe interpolarse como si la transición fuese universal.

$$\mathrm{Nu} = \frac{(f/8)(\mathrm{Re} - 1000)\mathrm{Pr}}{1 + 12{,}7(f/8)^{1/2}(\mathrm{Pr}^{2/3} - 1)}, \quad 0{,}5 < \mathrm{Pr} < 2000, \quad 3000 < \mathrm{Re} < 5 \cdot 10^6.$$

$$f = (0{,}790\ln\mathrm{Re} - 1{,}64)^{-2}, \qquad 3000 < \mathrm{Re} < 5 \cdot 10^6.$$

Segunda ecuación de Petukhov — tubos lisos turbulentos

$$\mathrm{Nu} = \frac{(f/8)\mathrm{RePr}}{1{,}07 + 12{,}7(f/8)^{1/2}(\mathrm{Pr}^{2/3} - 1)}, \qquad 0{,}5 \le \mathrm{Pr} \le 2000, \qquad 10^4 < \mathrm{Re} < 5 \cdot 10^6.$$

Correlaciones de comprobación rápida en turbulento interno

Dittus–Boelter: $\mathrm{Nu} = 0{,}023\mathrm{Re}^{0{,}8}\mathrm{Pr}^{n}$, $\mathrm{Re} \gtrsim 10^4$, $L/D \gtrsim 10$, $0{,}7 \lesssim \mathrm{Pr} \lesssim 160$,
$n = 0{,}4$ si el fluido se calienta, $n = 0{,}3$ si se enfría,

Sieder–Tate: $\mathrm{Nu} = 0{,}027\mathrm{Re}^{0{,}8}\mathrm{Pr}^{1/3}\left(\frac{\mu_b}{\mu_s}\right)^{0{,}14}$, $\mathrm{Re} \gtrsim 10^4$, $L/D \gtrsim 10$,
$0{,}7 \le \mathrm{Pr} \le 1{,}67 \cdot 10^4$.

Metales líquidos — Notter–Sleicher / Sleicher–Rouse

$$T_s = \text{cte}: \quad \mathrm{Nu} = 4{,}8 + 0{,}0156\mathrm{Re}^{0{,}85}\mathrm{Pr}_s^{0{,}93},$$
$$q_s'' = \text{cte}: \quad \mathrm{Nu} = 6{,}3 + 0{,}0167\mathrm{Re}^{0{,}85}\mathrm{Pr}_s^{0{,}93},$$

con $0{,}004 < \mathrm{Pr}_s < 0{,}1$ y $10^4 < \mathrm{Re} < 10^6$.

Corrección por propiedades variables

$$\mathrm{Nu} = \mathrm{Nu}_b \left(\frac{\mu_s}{\mu_b}\right)^n \quad \text{líquidos}, \qquad \mathrm{Nu} = \mathrm{Nu}_b \left(\frac{T_s}{T_b}\right)^n \quad \text{gases.} \quad T_s, T_b \text{ en kelvin}$$

Tabla 11: Exponentes n para la corrección de propiedades.

Régimen y fluido	Calentar	Enfriar
Laminar, líquido	-0,11	-0,11
Laminar, gas	0	0
Turbulento, líquido	-0,25	-0,11
Turbulento, gas	-0,55	0

3.5 Convección natural externa

Para cilindros y esferas de diámetro D:

$$\mathrm{Ra} = \frac{\beta |\Delta T| g D^3}{\nu \alpha}, \qquad \bar{h} = \frac{\overline{\mathrm{Nu}} k}{D}.$$

Para superficies planas de longitud L, o recintos con separación L:

$$\mathrm{Ra} = \frac{\beta |\Delta T| g L^3}{\nu \alpha}, \qquad \bar{h} = \frac{\overline{\mathrm{Nu}} k}{L}.$$

Se define $\Delta T = T_s - T_\infty$. Propiedades a la temperatura de película $T_f = (T_s + T_\infty)/2$.

Pared vertical — Churchill–Chu (rango amplio)

$$\overline{\mathrm{Nu}} = \left[0{,}825 + \frac{0{,}387 \mathrm{Ra}^{1/6}}{[1 + (0{,}492/\mathrm{Pr})^{9/16}]^{8/27}}\right]^2, \qquad 10^{-1} \lesssim \mathrm{Ra} \lesssim 10^{12}.$$

Pared vertical — forma laminar simple de comprobación

$$\overline{\mathrm{Nu}} = 0{,}68 + \frac{0{,}670 \mathrm{Ra}^{1/4}}{[1 + (0{,}492/\mathrm{Pr})^{9/16}]^{4/9}}, \qquad \mathrm{Ra} \lesssim 10^9.$$

Pared inclinada

Usar $\mathrm{Ra}_\theta = \mathrm{Ra} \sin\theta$, donde θ se mide desde la horizontal ($\theta = 0°$ horizontal y $\theta = 90°$ vertical). La aproximacion se restringe a $30° \leq \theta \leq 90°$ y a la cara caliente orientada hacia arriba o la cara fria orientada hacia abajo.

Cilindro horizontal largo — Morgan

Tabla 12: Morgan: $\overline{\mathrm{Nu}} = C\mathrm{Ra}^n$ para cilindro horizontal.

Rango de Ra	C	n
10^{-10}–10^{-2}	0,675	0,058
10^{-2}–10^{2}	1,02	0,148
10^{2}–10^{4}	0,85	0,188
10^{4}–10^{7}	0,48	0,25
10^{7}–10^{12}	0,125	0,333

Cilindro horizontal largo — Churchill–Chu

$$\overline{\mathrm{Nu}}_D = \left[0{,}60 + \frac{0{,}387\mathrm{Ra}^{1/6}}{[1+(0{,}559/\mathrm{Pr})^{9/16}]^{8/27}}\right]^2, \qquad \mathrm{Ra} < 10^{12}.$$

Cilindro vertical largo

Se trata como placa vertical si $D \geq 35L/\mathrm{Gr}^{1/4}$.

Esfera — Churchill

$$\overline{\mathrm{Nu}} = 2 + \frac{0{,}589\mathrm{Ra}^{1/4}}{[1+(0{,}469/\mathrm{Pr})^{9/16}]^{4/9}}, \qquad \mathrm{Ra} < 10^{11}, \quad \mathrm{Pr} > 0{,}7.$$

Superficies horizontales

Con $L = A/p$:

$$\overline{\mathrm{Nu}} = 0{,}27\mathrm{Ra}^{1/4}, \qquad 10^5 < \mathrm{Ra} < 10^{10} \quad \text{cara caliente hacia abajo o fría hacia arriba,}$$
$$\overline{\mathrm{Nu}} = 0{,}54\mathrm{Ra}^{1/4}, \qquad 10^4 < \mathrm{Ra} < 10^{7} \quad \text{cara caliente hacia arriba o fría hacia abajo,}$$
$$\overline{\mathrm{Nu}} = 0{,}15\mathrm{Ra}^{1/3}, \qquad 10^7 < \mathrm{Ra} < 10^{11} \quad \text{misma orientación inestable, rango alto.}$$

3.6 Convección natural confinada

$$q = \bar{h}A(T_H - T_C), \qquad \bar{h} = \frac{\overline{\mathrm{Nu}}k}{L}, \qquad T_m = \frac{T_H + T_C}{2}.$$

En capas horizontales calentadas desde abajo, el inicio de Rayleigh–Bénard ocurre hacia $\mathrm{Ra}_L \simeq 1708$. En huecos verticales y recintos concéntricos hay circulación para toda diferencia térmica no nula; $\mathrm{Ra}_L \simeq 1000$ y $\mathrm{Ra}^* \simeq 100$ delimitan la rama esencialmente conductiva ($k_{\mathrm{ef}} \simeq k$, $\overline{\mathrm{Nu}} \simeq 1$).

Recintos horizontales

Si la pared caliente está arriba se adopta $\overline{\mathrm{Nu}} = 1$.

Recinto rectangular inclinado largo ($H/L > 10$)

$$0 \le \theta < 60^\circ: \quad \overline{\mathrm{Nu}} = 1 + 1{,}44\left[1 - \frac{1708}{\mathrm{Ra}\cos\theta}\right]_+ \left[1 - \frac{1708[\sin(1{,}8\theta)]^{1{,}6}}{\mathrm{Ra}\cos\theta}\right] + \left[\left(\frac{\mathrm{Ra}\cos\theta}{5830}\right)^{1/3} - 1\right]_+,$$

$$\theta = 60^\circ: \quad \overline{\mathrm{Nu}}_{60} = \max\{\mathrm{Nu}_{60,1}, \mathrm{Nu}_{60,2}\},$$

$$\mathrm{Nu}_{60,1} = \left\{1 + \left[\frac{0{,}0936\mathrm{Ra}^{0{,}314}}{1 + \dfrac{0{,}5}{\left[1 + \left(\dfrac{\mathrm{Ra}}{3160}\right)^{20{,}6}\right]^{0{,}1}}}\right]^7\right\}^{1/7},$$

$$\mathrm{Nu}_{60,2} = \left(0{,}104 + \frac{0{,}175}{H/L}\right)\mathrm{Ra}^{0{,}283},$$

$$60^\circ < \theta < 90^\circ: \quad \overline{\mathrm{Nu}} = \frac{90 - \theta}{30}\overline{\mathrm{Nu}}_{60} + \frac{\theta - 60}{30}\overline{\mathrm{Nu}}_{90},$$

$$\theta = 90^\circ: \quad \overline{\mathrm{Nu}}_{90} = \max\{\mathrm{Nu}_{90,1}, \mathrm{Nu}_{90,2}, \mathrm{Nu}_{90,3}\}, \qquad 10^3 < \mathrm{Ra} < 10^7,$$

$$\mathrm{Nu}_{90,1} = 0{,}0605\mathrm{Ra}^{1/3},$$

$$\mathrm{Nu}_{90,2} = \left\{1 + \left[\frac{0{,}104\mathrm{Ra}^{0{,}293}}{1 + (6310/\mathrm{Ra})^{1{,}36}}\right]^3\right\}^{1/3},$$

$$\mathrm{Nu}_{90,3} = 0{,}242\left(\frac{\mathrm{Ra}}{H/L}\right)^{0{,}272}, \qquad \overline{\mathrm{Nu}}_{90} = 1 \quad (\mathrm{Ra} \le 1000).$$

Recinto vertical corto

Dos paredes laterales isotermas separadas horizontalmente una distancia L, altura H y tapas superior e inferior adiabáticas. Se usa $Ra = Ra_L = \beta g|\Delta T|L^3/(\nu\alpha)$ basado en la separación horizontal. Para $H/L < 10$:

$$\overline{\mathrm{Nu}} = 0{,}18\left(\frac{\mathrm{Pr}}{0{,}2 + \mathrm{Pr}}\mathrm{Ra}\right)^{0{,}29}, \qquad 1 < H/L < 2, \quad 10^{-3} < \mathrm{Pr} < 10^5, \quad 10^3 < \frac{\mathrm{RaPr}}{0{,}2 + \mathrm{Pr}},$$

$$\overline{\mathrm{Nu}} = 0{,}22\left(\frac{\mathrm{Pr}}{0{,}2 + \mathrm{Pr}}\mathrm{Ra}\right)^{0{,}28}\left(\frac{H}{L}\right)^{-1/4}, \quad 2 < H/L < 10, \quad \mathrm{Pr} < 10^5, \quad 10^3 < \mathrm{Ra} < 10^{10}.$$

Cilindros largos concéntricos

$$L_c = \frac{D_o - D_i}{2}, \qquad q = \frac{\Delta T}{\ln(D_o/D_i)/(2\pi k_{\mathrm{ef}} L_z)},$$

$$k_{\text{ef}} = k, \qquad \text{Ra}^* < 100,$$
$$\frac{k_{\text{ef}}}{k} = 0{,}386\left(\frac{\text{Pr}}{0{,}861+\text{Pr}}\right)^{1/4}(\text{Ra}^*)^{1/4}, \qquad 10^2 < \text{Ra}^* < 10^7, \quad 0{,}70 \le \text{Pr} \le 6000,$$
$$\text{Ra}^* = \frac{[\ln(D_o/D_i)]^4}{L_c^3(D_i^{-3/5}+D_o^{-3/5})^5}\text{Ra}.$$

Si la correlación diera $k_{\text{ef}}/k < 1$, debe adoptarse $k_{\text{ef}} = k$, ya que la convección no puede reducir la conducción pura en el modelo equivalente.

Esferas concéntricas

$$L_c = \frac{D_o - D_i}{2}, \qquad q = \frac{\Delta T}{L_c/(\pi D_o D_i k_{\text{ef}})},$$
$$\frac{k_{\text{ef}}}{k} = 0{,}74\left(\frac{\text{Pr}}{0{,}861+\text{Pr}}\right)^{1/4}(\text{Ra}^*)^{1/4}, \qquad 10^2 < \text{Ra}^* < 10^4, \quad 0{,}70 \le \text{Pr} \le 4200,$$
$$\text{Ra}^* = \frac{L_c\text{Ra}}{(D_oD_i)^4\left(D_i^{-7/5}+D_o^{-7/5}\right)^5}.$$

Si la correlación diera $k_{\text{ef}}/k < 1$, se usa $k_{\text{ef}} = k$.

3.7 Convección mixta

Diagnóstico mediante Richardson

$$\boxed{\mathrm{Ri} = \frac{\mathrm{Gr}}{\mathrm{Re}^2} = \frac{g\beta|\Delta T|L}{u^2}}$$

$$\begin{array}{ll} \mathrm{Ri} < 0{,}1 & \overline{\mathrm{Nu}} \simeq \overline{\mathrm{Nu}}_f \quad \text{(forzada dominante)}, \\ 0{,}1 \leq \mathrm{Ri} \leq 10 & \text{régimen mixto}, \\ \mathrm{Ri} > 10 & \overline{\mathrm{Nu}} \simeq \overline{\mathrm{Nu}}_n \quad \text{(natural dominante)}. \end{array}$$

Valores límite de la familia de correlaciones

$$\boxed{Nu_0 = 0 \text{ (placa)}, \qquad Nu_0 = 0{,}3 \text{ (cilindro)}, \qquad Nu_0 = 2 \text{ (esfera)}}$$

Reglas de combinación para Nusselt medios

$$\begin{aligned} \text{Ayudada:} \qquad & (\overline{\mathrm{Nu}} - Nu_0)^3 = (\overline{\mathrm{Nu}}_f - Nu_0)^3 + (\overline{\mathrm{Nu}}_n - Nu_0)^3, \\ \text{Opuesta:} \qquad & (\overline{\mathrm{Nu}} - Nu_0)^3 = \left|(\overline{\mathrm{Nu}}_f - Nu_0)^3 - (\overline{\mathrm{Nu}}_n - Nu_0)^3\right|, \\ \text{Transversal, placa horizontal:} \qquad & \overline{\mathrm{Nu}}^{7/2} = \overline{\mathrm{Nu}}_f^{7/2} + \overline{\mathrm{Nu}}_n^{7/2}, \\ \text{Transversal, cilindro o esfera:} \qquad & (\overline{\mathrm{Nu}} - Nu_0)^4 = (\overline{\mathrm{Nu}}_f - Nu_0)^4 + (\overline{\mathrm{Nu}}_n - Nu_0)^4. \end{aligned}$$

Reglas aproximadas de ingeniería para Nusselt medios en convección mixta externa. Calcular primero $\overline{Nu}_f$ y $\overline{Nu}_n$ con las correlaciones puras de la misma geometría. La orientación de los movimientos determina la regla; cuando exista una correlación específica de convección mixta, debe preferirse.

4 Tema 5. Intercambiadores de calor

4.1 Hipótesis y límites de aplicación

Las ecuaciones siguientes se aplican a intercambiadores en régimen estacionario, sin pérdidas apreciables al exterior, sin trabajo externo dentro del volumen de control, con variaciones de energía cinética y potencial despreciables y propiedades evaluadas a una temperatura media representativa.

4.2 Balance de energía y temperaturas de salida

Para dos corrientes sin cambio de fase:

$$\boxed{q = \dot{m}_c c_{p,c}(T_{c,e} - T_{c,s}) = \dot{m}_f c_{p,f}(T_{f,s} - T_{f,e})}$$

$$\boxed{C_c = \dot{m}_c c_{p,c}, \qquad C_f = \dot{m}_f c_{p,f}}$$

$$\boxed{q = C_c(T_{c,e} - T_{c,s}) = C_f(T_{f,s} - T_{f,e})}$$

Evaporador idealizado, si el fluido frío evapora:

$$q = C_c(T_{c,e} - T_{c,s}) = \dot{m}_f |\Delta h_f|.$$

Condensador idealizado, si el fluido caliente condensa:

$$q = \dot{m}_c |\Delta h_c| = C_f(T_{f,s} - T_{f,e}).$$

4.3 Red de resistencias y coeficiente global

$$\boxed{R_T = \frac{1}{\eta_{T,c} h_c A_c} + \frac{R''_{\text{suc},c}}{A_c} + R_{\text{cond}} + \frac{R''_{\text{suc},f}}{A_f} + \frac{1}{\eta_{T,f} h_f A_f}}$$

$$\boxed{UA = \frac{1}{R_T} = U_c A_c = U_f A_f}$$

Para un tubo sin aletas, usando áreas interior y exterior:

$$\boxed{\frac{1}{UA} = \frac{1}{h_i A_i} + \frac{R''_{\text{suc},i}}{A_i} + \frac{\ln(r_o/r_i)}{2\pi k L_z} + \frac{R''_{\text{suc},o}}{A_o} + \frac{1}{h_o A_o}}$$

4.4 Método de la diferencia de temperatura logarítmica media

$$\boxed{q = UA\, F\, \Delta T_{\text{lm}}}$$

$$\boxed{\Delta T_{\text{lm}} = \frac{\Delta T_1 - \Delta T_2}{\ln(\Delta T_1/\Delta T_2)}}$$

Tabla 13: Diferencias terminales para DTLM.

Configuración	ΔT_1	ΔT_2
Equicorriente	$T_{c,e} - T_{f,e}$	$T_{c,s} - T_{f,s}$
Contracorriente	$T_{c,e} - T_{f,s}$	$T_{c,s} - T_{f,e}$

Para configuraciones de carcasa y tubos multipaso o flujo cruzado, se calcula normalmente la DTLM como si el equipo fuese de contracorriente y se corrige con F:

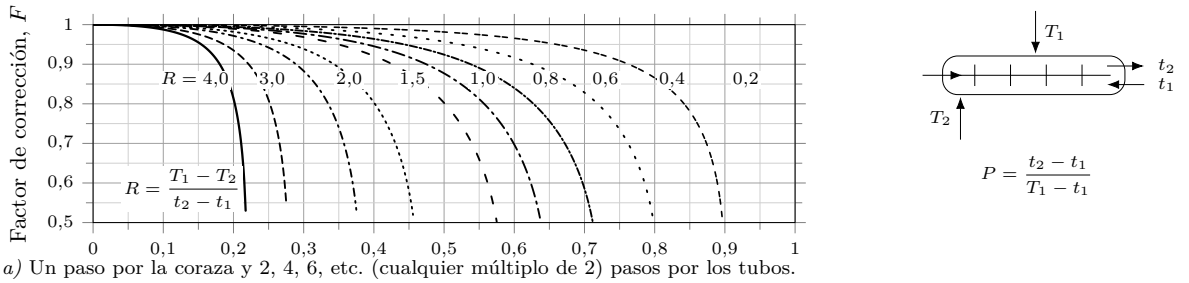
$$0 < F \leq 1, \qquad F = 1 \text{ en equicorriente y contracorriente simples.}$$

Parámetros habituales para cartas de corrección:

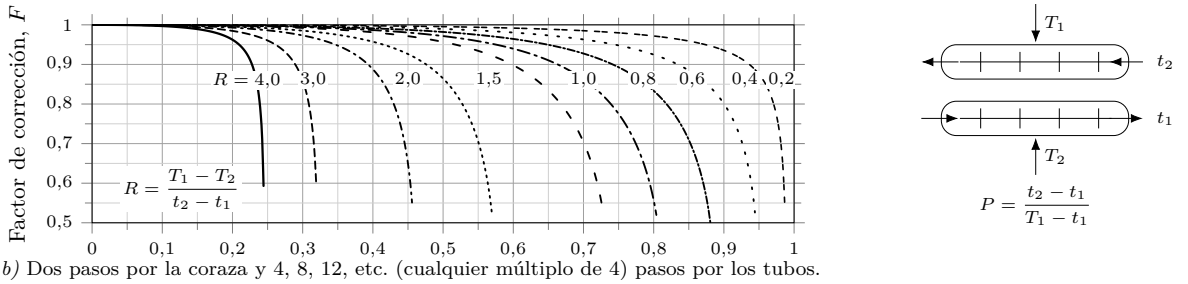
$$\boxed{P = \frac{T_{f,s} - T_{f,e}}{T_{c,e} - T_{f,e}}, \qquad R_F = \frac{T_{c,e} - T_{c,s}}{T_{f,s} - T_{f,e}}}$$

4.4.1 Cartas y gráficas de consulta

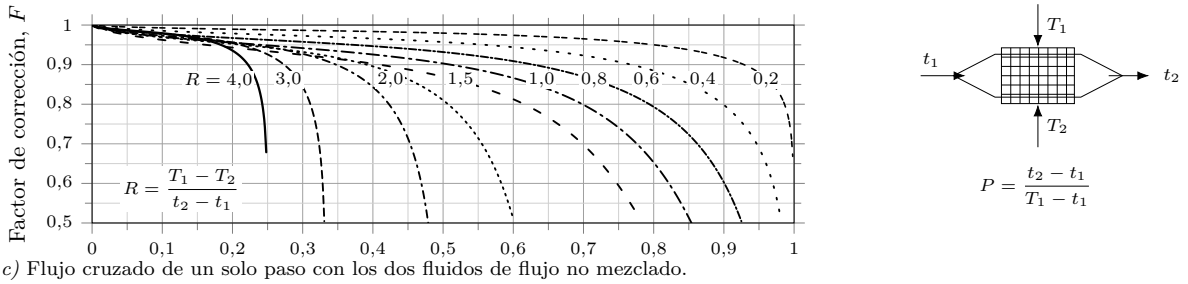
La Figura 1 permite una lectura rápida del factor de corrección. Es una ayuda gráfica: no debe extrapolarse fuera de sus ejes y, para cálculos finales, prevalecen las ecuaciones y las comprobaciones de factibilidad.



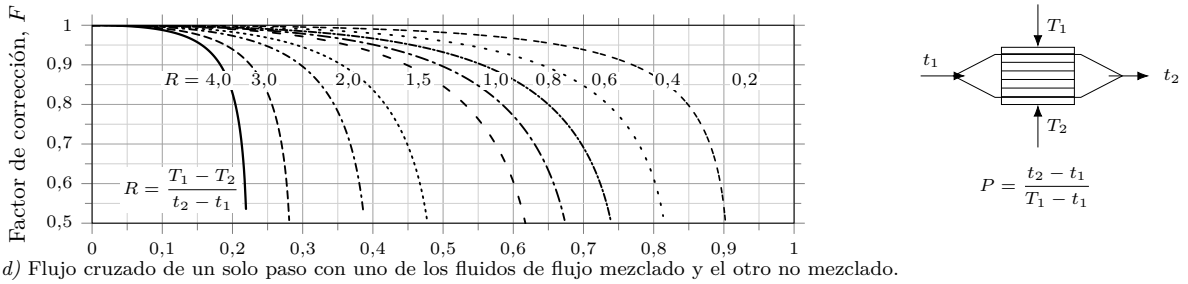
a) Un paso por la coraza y 2, 4, 6, etc. (cualquier múltiplo de 2) pasos por los tubos.



b) Dos pasos por la coraza y 4, 8, 12, etc. (cualquier múltiplo de 4) pasos por los tubos.



c) Flujo cruzado de un solo paso con los dos fluidos de flujo no mezclado.



d) Flujo cruzado de un solo paso con uno de los fluidos de flujo mezclado y el otro no mezclado.

Figura 1: Cartas $F(P,R_F)$. Use únicamente el panel correspondiente a la geometría y patrón de mezcla reales. El panel de flujo cruzado con una corriente mezclada corresponde al fluido frío mezclado y al caliente no mezclado. La notación T_1,T_2,t_1,t_2,R equivale a caliente entrada/salida, frío entrada/salida y R_F.

4.5 Método efectividad–NUT

4.5.1 Tasas de capacidad térmica, límites y potencia máxima

$$\boxed{C_c = \dot{m}_c c_{p,c}, \qquad C_f = \dot{m}_f c_{p,f}, \qquad C_{\text{mín}} = \text{mín}(C_c, C_f), \qquad C_r = \frac{C_{\text{mín}}}{C_{\text{máx}}}}$$

$$\boxed{0 \leq C_r \leq 1, \qquad q_{\text{máx}} = C_{\text{mín}}(T_{c,e} - T_{f,e}), \qquad q = \epsilon q_{\text{máx}}}, \qquad T_{c,e} > T_{f,e}$$

$$\boxed{\text{NUT} = \frac{UA}{C_{\text{mín}}}, \qquad \epsilon = \frac{q}{q_{\text{máx}}}, \qquad q = \epsilon C_{\text{mín}}(T_{c,e} - T_{f,e})}$$

$$\boxed{0 \leq \epsilon \leq \epsilon_{\text{máx}}}$$

El valor de $\epsilon_{\text{máx}}$ depende de la configuración. Una vez calculado q, se recuperan $T_{c,s}$ y $T_{f,s}$ con el balance de energía.

4.5.2 Relaciones directas de efectividad

Las relaciones siguientes dan la efectividad en funcion de NUT y C_r para las configuraciones de uso mas habitual.

Tabla 14: Relaciones directas $\epsilon = f(\text{NUT}, C_r)$ para configuraciones simples.

Configuracion	Efectividad
Una corriente a temperatura casi constante o $C_r = 0$	$\epsilon = 1 - e^{-\text{NUT}}$
Equicorriente	$\epsilon = \dfrac{1 - e^{-\text{NUT}(1+C_r)}}{1 + C_r}$
Contracorriente, $C_r < 1$	$\epsilon = \dfrac{1 - e^{-\text{NUT}(1-C_r)}}{1 - C_r e^{-\text{NUT}(1-C_r)}}$
Contracorriente, $C_r = 1$	$\epsilon = \dfrac{\text{NUT}}{1 + \text{NUT}}$

Tabla 15: Relaciones directas $\epsilon = f(\mathrm{NUT}, C_r)$ para carcasa y tubos y flujo cruzado.

Configuracion	Efectividad
Carcasa y tubos, 1 paso por carcasa y 2,4,6,... pasos por tubos	$\epsilon_1 = \dfrac{2}{1 + C_r + \sqrt{1+C_r^2}\,\dfrac{1+e^{-\mathrm{NUT}\sqrt{1+C_r^2}}}{1-e^{-\mathrm{NUT}\sqrt{1+C_r^2}}}}$
Carcasa y tubos, n pasos por carcasa y numero par de pasos por tubos, $2n$,$4n$,$6n$,...	$\epsilon = \dfrac{\left(\dfrac{1-\epsilon_1 C_r}{1-\epsilon_1}\right)^n - 1}{\left(\dfrac{1-\epsilon_1 C_r}{1-\epsilon_1}\right)^n - C_r}$, $C_r \neq 1$, donde ϵ_1 se evalua con NUT/n. Para $C_r = 1$: $\epsilon = \dfrac{n\epsilon_1}{1+(n-1)\epsilon_1}$.
Flujo cruzado, ambos fluidos no mezclados	$\epsilon = 1 - \exp\left[\dfrac{\mathrm{NUT}^{0,22}}{C_r}\left(e^{-C_r \mathrm{NUT}^{0,78}} - 1\right)\right]$
Flujo cruzado, $C_{\text{máx}}$ mezclado y $C_{\text{mín}}$ sin mezclar	$\epsilon = \dfrac{1}{C_r}\left[1 - \exp\left(C_r(e^{-\mathrm{NUT}} - 1)\right)\right]$
Flujo cruzado, $C_{\text{mín}}$ mezclado y $C_{\text{máx}}$ sin mezclar	$\epsilon = 1 - \exp\left[-\dfrac{1}{C_r}\left(1 - e^{-C_r \mathrm{NUT}}\right)\right]$

Para la relación de un paso por carcasa, el valor por continuidad es $\epsilon_1(0) = 0$. Cuando $x = \mathrm{NUT}\sqrt{1+C_r^2}$ es pequeño, evalúe $(1+e^{-x})/(1-e^{-x}) = \coth(x/2)$ mediante una forma estable o su desarrollo límite, en vez de formar directamente el cociente $0/0$.

4.5.3 Relaciones inversas útiles

Estas expresiones permiten estimar NUT a partir de la efectividad cuando existe forma inversa cerrada.

Tabla 16: Relaciones inversas NUT $= f(\epsilon, C_r)$ para configuraciones simples.

Configuracion	Numero de unidades de transferencia
$C_r = 0$	$\mathrm{NUT} = -\ln(1-\epsilon)$
Equicorriente	$\mathrm{NUT} = -\dfrac{\ln[1-\epsilon(1+C_r)]}{1+C_r}$
Contracorriente, $C_r < 1$	$\mathrm{NUT} = \dfrac{1}{1-C_r}\ln\left(\dfrac{1-\epsilon C_r}{1-\epsilon}\right)$
Contracorriente, $C_r = 1$	$\mathrm{NUT} = \dfrac{\epsilon}{1-\epsilon}$
Flujo cruzado, $C_{\text{máx}}$ mezclado y $C_{\text{mín}}$ sin mezclar, $0 < C_r \leq 1$	$\mathrm{NUT} = -\ln\left[1 + \dfrac{\ln(1-\epsilon C_r)}{C_r}\right]$
Flujo cruzado, $C_{\text{mín}}$ mezclado y $C_{\text{máx}}$ sin mezclar, $0 < C_r \leq 1$	$\mathrm{NUT} = -\dfrac{1}{C_r}\ln[1 + C_r \ln(1-\epsilon)]$

Tabla 17: Relaciones inversas NUT $= f(\epsilon, C_r)$ para carcasa y tubos y flujo cruzado no mezclado.

Configuracion	Numero de unidades de transferencia
Carcasa y tubos, 1 paso por carcasa	$\mathrm{NUT} = -\dfrac{1}{\sqrt{1+C_r^2}}\ln\left(\dfrac{E-1}{E+1}\right)$, $E = \dfrac{2/\epsilon - (1+C_r)}{\sqrt{1+C_r^2}}$.
Carcasa y tubos, n pasos por carcasa	Para $C_r \neq 1$: $\mathrm{NUT} = -\dfrac{n}{\sqrt{1+C_r^2}}\ln\left(\dfrac{E_n-1}{E_n+1}\right)$, $\Phi = \left(\dfrac{\epsilon C_r - 1}{\epsilon - 1}\right)^{1/n}$, $E_n = \dfrac{2(\Phi - C_r)/(\Phi - 1) - (1+C_r)}{\sqrt{1+C_r^2}}$. Para $C_r = 1$, usar la formula directa limite y resolver $\epsilon = n\epsilon_1/[1 + (n-1)\epsilon_1]$.
Flujo cruzado, ambos no mezclados	Resolver numericamente la ecuacion directa o leer la carta ϵ–NUT.

4.5.4 Gráficas

La Figura 2 reúne las gráficas de consulta del método efectividad–NUT. En la parte superior se muestran las familias de curvas; en la parte inferior se integran la comparación para $C_r = 1$ y la curva universal $C_r = 0$. No deben extrapolarse fuera de sus ejes y, para cálculos finales, prevalecen las ecuaciones.

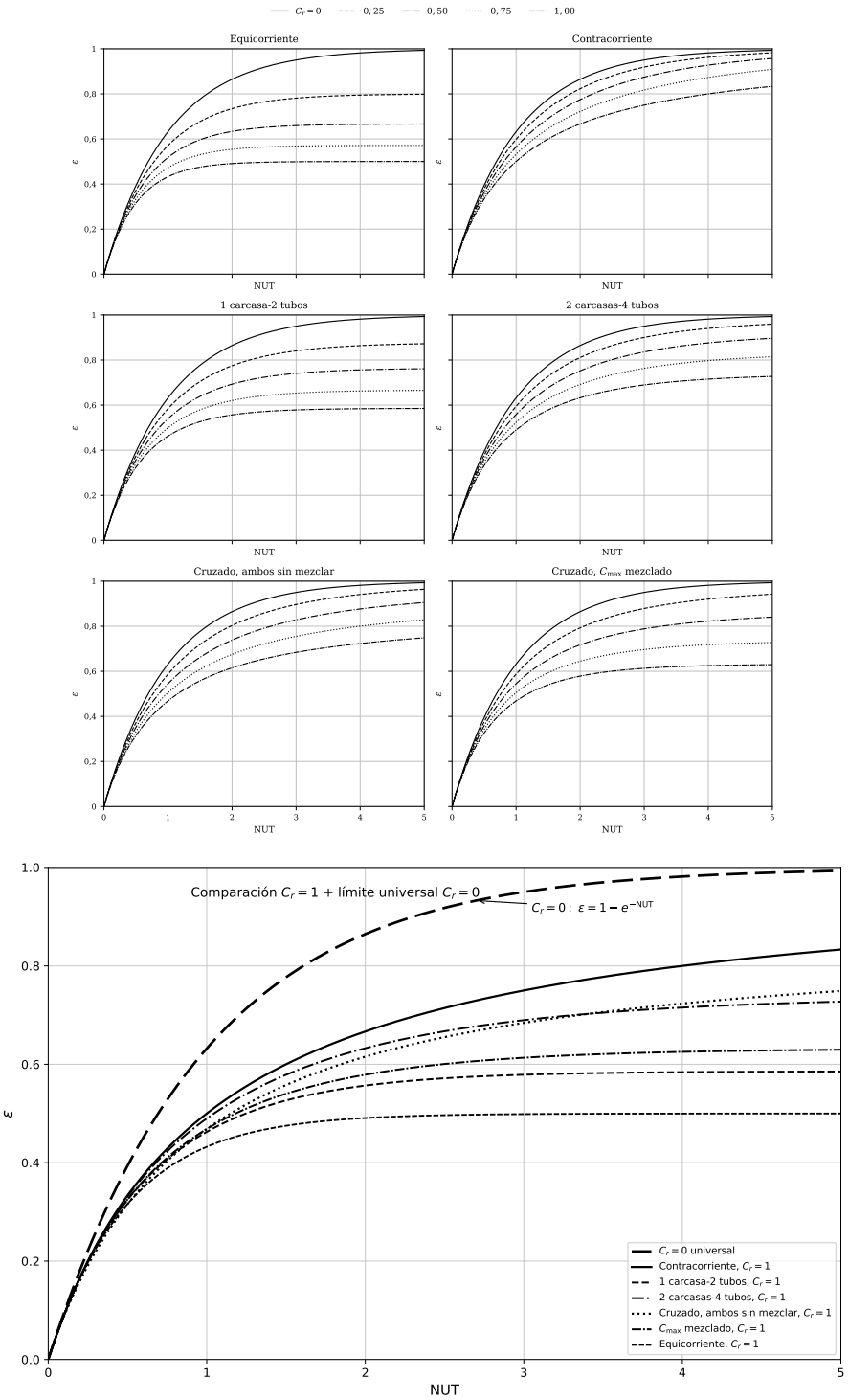


Figura 2: Gráficas ϵ–NUT: familias de curvas (arriba) y comparación integrada para $C_r = 1$ con la curva universal $C_r = 0$, $\epsilon = 1 - e^{-\mathrm{NUT}}$ (abajo). Para flujo cruzado con una corriente mezclada, la familia superior representa $C_{\text{máx}}$ mezclado; el caso $C_{\text{mín}}$ mezclado se consulta en las tablas.

Anexo B. Propiedades termo-físicas

B.1 Sólidos, aislantes y superficies

Tabla B.1: Propiedades de metales sólidos de uso frecuente en transmisión de calor

Material	T_{fus} [K]	ρ [kg/m^3]	c_p [J/(kg K)]	k [W/(m K)]	α [10^{-6} m^2/s]
Metales de alta conductividad					
Aluminio puro	933	2 702	903	237	97,1
Aluminio 2024-T6	775	2 770	875	177	73,0
Cobre puro	1 358	8 933	385	401	117
Latón 70 % Cu–30 % Zn	1 188	8 530	380	110	33,9
Bronce comercial	1 293	8 800	420	52	14
Aceros y materiales estructurales					
Hierro puro	1 810	7 870	447	80,2	23,1
Acero al carbono simple	–	7 854	434	60,5	17,7
Acero AISI 1010	–	7 832	434	63,9	18,8
Acero inoxidable AISI 304	1 670	7 900	477	14,9	3,95
Acero inoxidable AISI 316	–	8 238	468	13,4	3,48
Aleaciones y aplicaciones de alta temperatura					
Nicromo 80 % Ni–20 % Cr	1 672	8 400	420	12	3,4
Inconel X-750	1 665	8 510	439	11,7	3,1
Titanio	1 953	4 500	522	21,9	9,32

Tabla B.2: Propiedades orientativas de aislantes habituales en problemas de conducción

Material	Forma habitual	ρ [kg/m^3]	k [W/(m K)]	c_p [kJ/(kg K)]
Paneles y mantas aislantes				
Lana mineral	manta o panel	32 a 240	0,042	0,71 a 0,96
Vidrio celular	panel o placa	136	0,055	1,0
Poliestireno expandido	panel	16	0,040	1,2
Poliuretano expandido	panel o espuma	24 a 40	0,023 a 0,026	1,6
Corcho	panel	120	0,039	1,80
Rellenos y materiales especiales				
Perlita expandida	relleno o panel	16 a 66	0,039 a 0,052	1,09 a 1,26
Celulosa insuflada	relleno suelto	37 a 51	0,039 a 0,046	–
Aerogel de sílice	manta o relleno	122	0,025	–

Tabla B.3: Emisividades térmicas totales hemisféricas de superficies comunes

Superficie	Temperatura [K]	Emisividad ε
Metales limpios o pulidos: emisividad baja		
Aluminio pulido	300 a 900	0,04 a 0,06
Cobre pulido	300 a 500	0,04 a 0,05
Latón pulido	350	0,09
Acero, chapa pulida	300 a 500	0,08 a 0,14
Acero inoxidable pulido	300 a 1 000	0,17 a 0,30
Metales oxidados o comerciales: emisividad media-alta		
Aluminio, chapa comercial	400	0,09
Aluminio muy oxidado	400 a 800	0,20 a 0,33
Aluminio anodizado	300	0,8
Cobre oxidado	600 a 1 000	0,5 a 0,8
Hierro fundido	300	0,44
Hierro oxidado	300	0,61
Hierro oxidado a alta temperatura	500 a 900	0,64 a 0,78
Acero, chapa comercial	500 a 1 200	0,20 a 0,32
Acero muy oxidado	300	0,81
Acero inoxidable muy oxidado	600 a 1 000	0,70 a 0,80
Pinturas, construcción y superficies no metálicas		
Pintura de aluminio	300	0,40 a 0,50
Pintura negra brillante	300	0,88
Pintura blanca o esmalte blanco	300	0,90
Pavimento asfáltico	300	0,85 a 0,93
Ladrillo común	300	0,93 a 0,96
Hormigón	300	0,88 a 0,94
Vidrio de ventana	300	0,90 a 0,95
Yeso blanco	300	0,93
Hollín	300 a 500	0,95
Teflón	300 a 500	0,85 a 0,92
Agua profunda	273 a 373	0,95 a 0,96
Madera	300	0,90 a 0,94

B.2 Agua saturada

Tabla B.4: Agua saturada: fase liquida, propiedades termodinamicas y de transporte

T [°C]	p_{sat} [kPa]	ρ_l [kg/m^3]	h_{fg} [kJ/kg]	$c_{p,l}$ [J/(kg K)]	k_l [W/(m K)]	μ_l [kg/(m s)]	Pr_l [–]	β [K^{-1}]
0,01	0,611 3	999,8	2 501	4 217	0,561	$1{,}792 \times 10^{-3}$	13,5	$-0{,}068 \times 10^{-3}$
5	0,872 1	999,9	2 490	4 205	0,571	$1{,}519 \times 10^{-3}$	11,2	$0{,}015 \times 10^{-3}$
10	1,227 6	999,7	2 478	4 194	0,580	$1{,}307 \times 10^{-3}$	9,45	$0{,}733 \times 10^{-3}$
15	1,705 1	999,1	2 466	4 185	0,589	$1{,}138 \times 10^{-3}$	8,09	$0{,}138 \times 10^{-3}$
20	2,339	998,0	2 454	4 182	0,598	$1{,}002 \times 10^{-3}$	7,01	$0{,}195 \times 10^{-3}$
25	3,169	997,0	2 442	4 180	0,607	$0{,}891 \times 10^{-3}$	6,14	$0{,}247 \times 10^{-3}$
30	4,246	996,0	2 431	4 178	0,615	$0{,}798 \times 10^{-3}$	5,42	$0{,}294 \times 10^{-3}$
35	5,628	994,0	2 419	4 178	0,623	$0{,}720 \times 10^{-3}$	4,83	$0{,}337 \times 10^{-3}$
40	7,384	992,1	2 407	4 179	0,631	$0{,}653 \times 10^{-3}$	4,32	$0{,}377 \times 10^{-3}$
45	9,593	990,1	2 395	4 180	0,637	$0{,}596 \times 10^{-3}$	3,91	$0{,}415 \times 10^{-3}$
50	12,35	988,1	2 383	4 181	0,644	$0{,}547 \times 10^{-3}$	3,55	$0{,}451 \times 10^{-3}$
55	15,76	985,2	2 371	4 183	0,649	$0{,}504 \times 10^{-3}$	3,25	$0{,}484 \times 10^{-3}$
60	19,94	983,3	2 359	4 185	0,654	$0{,}467 \times 10^{-3}$	2,99	$0{,}517 \times 10^{-3}$
65	25,03	980,4	2 346	4 187	0,659	$0{,}433 \times 10^{-3}$	2,75	$0{,}548 \times 10^{-3}$
70	31,19	977,5	2 334	4 190	0,663	$0{,}404 \times 10^{-3}$	2,55	$0{,}578 \times 10^{-3}$
75	38,58	974,7	2 321	4 193	0,667	$0{,}378 \times 10^{-3}$	2,38	$0{,}607 \times 10^{-3}$
80	47,39	971,8	2 309	4 197	0,670	$0{,}355 \times 10^{-3}$	2,22	$0{,}653 \times 10^{-3}$
85	57,83	968,1	2 296	4 201	0,673	$0{,}333 \times 10^{-3}$	2,08	$0{,}670 \times 10^{-3}$
90	70,14	965,3	2 283	4 206	0,675	$0{,}315 \times 10^{-3}$	1,96	$0{,}702 \times 10^{-3}$
95	84,55	961,5	2 270	4 212	0,677	$0{,}297 \times 10^{-3}$	1,85	$0{,}716 \times 10^{-3}$
100	101,33	957,9	2 257	4 217	0,679	$0{,}282 \times 10^{-3}$	1,75	$0{,}750 \times 10^{-3}$
110	143,27	950,6	2 230	4 229	0,682	$0{,}255 \times 10^{-3}$	1,58	$0{,}798 \times 10^{-3}$
120	198,53	943,4	2 203	4 244	0,683	$0{,}232 \times 10^{-3}$	1,44	$0{,}858 \times 10^{-3}$
130	270,1	934,6	2 174	4 263	0,684	$0{,}213 \times 10^{-3}$	1,33	$0{,}913 \times 10^{-3}$
140	361,3	921,7	2 145	4 286	0,683	$0{,}197 \times 10^{-3}$	1,24	$0{,}970 \times 10^{-3}$
150	475,8	916,6	2 114	4 311	0,682	$0{,}183 \times 10^{-3}$	1,16	$1{,}025 \times 10^{-3}$
160	617,8	907,4	2 083	4 340	0,680	$0{,}170 \times 10^{-3}$	1,09	$1{,}145 \times 10^{-3}$
170	791,7	897,7	2 050	4 370	0,677	$0{,}160 \times 10^{-3}$	1,03	$1{,}178 \times 10^{-3}$
180	1 002,1	887,3	2 015	4 410	0,673	$0{,}150 \times 10^{-3}$	0,983	$1{,}210 \times 10^{-3}$
190	1 254,4	876,4	1 979	4 460	0,669	$0{,}142 \times 10^{-3}$	0,947	$1{,}280 \times 10^{-3}$
200	1 553,8	864,3	1 941	4 500	0,663	$0{,}134 \times 10^{-3}$	0,910	$1{,}350 \times 10^{-3}$
220	2 318	840,3	1 859	4 610	0,650	$0{,}122 \times 10^{-3}$	0,865	$1{,}520 \times 10^{-3}$
240	3 344	813,7	1 767	4 760	0,632	$0{,}111 \times 10^{-3}$	0,836	$1{,}720 \times 10^{-3}$
260	4 688	783,7	1 663	4 970	0,609	$0{,}102 \times 10^{-3}$	0,832	$2{,}000 \times 10^{-3}$
280	6 412	750,8	1 544	5 280	0,581	$0{,}094 \times 10^{-3}$	0,854	$2{,}380 \times 10^{-3}$
300	8 581	713,8	1 405	5 750	0,548	$0{,}086 \times 10^{-3}$	0,902	$2{,}950 \times 10^{-3}$
320	11 274	667,1	1 239	6 540	0,509	$0{,}078 \times 10^{-3}$	1,00	–
340	14 586	610,5	1 028	8 240	0,469	$0{,}070 \times 10^{-3}$	1,23	–
360	18 651	528,3	720	14 690	0,427	$0{,}060 \times 10^{-3}$	2,06	–
373,946	22 064	322,0	0	–	–	$0{,}043 \times 10^{-3}$	–	–

Tabla B.5: Agua saturada: vapor saturado, propiedades termodinamicas y de transporte

T [°C]	p_{sat} [kPa]	ρ_v [kg/m^3]	$c_{p,v}$ [J/(kg K)]	k_v [W/(m K)]	μ_v [kg/(m s)]	Pr_v [–]
0,01	0,611 3	0,004 8	1 854	0,017 1	$0{,}922 \times 10^{-5}$	1,00
5	0,872 1	0,006 8	1 857	0,017 3	$0{,}934 \times 10^{-5}$	1,00
10	1,227 6	0,009 4	1 862	0,017 6	$0{,}946 \times 10^{-5}$	1,00
15	1,705 1	0,012 8	1 863	0,017 9	$0{,}959 \times 10^{-5}$	1,00
20	2,339	0,017 3	1 867	0,018 2	$0{,}973 \times 10^{-5}$	1,00
25	3,169	0,023 1	1 870	0,018 6	$0{,}987 \times 10^{-5}$	1,00
30	4,246	0,030 4	1 875	0,018 9	$1{,}001 \times 10^{-5}$	1,00
35	5,628	0,039 7	1 880	0,019 2	$1{,}016 \times 10^{-5}$	1,00
40	7,384	0,051 2	1 885	0,019 6	$1{,}031 \times 10^{-5}$	1,00
45	9,593	0,065 5	1 892	0,020 0	$1{,}046 \times 10^{-5}$	1,00
50	12,35	0,083 1	1 900	0,020 4	$1{,}062 \times 10^{-5}$	1,00
55	15,76	0,104 5	1 908	0,020 8	$1{,}077 \times 10^{-5}$	1,00
60	19,94	0,130 4	1 916	0,021 2	$1{,}093 \times 10^{-5}$	1,00
65	25,03	0,161 4	1 926	0,021 6	$1{,}110 \times 10^{-5}$	1,00
70	31,19	0,198 3	1 936	0,022 1	$1{,}126 \times 10^{-5}$	1,00
75	38,58	0,242 1	1 948	0,022 5	$1{,}142 \times 10^{-5}$	1,00
80	47,39	0,293 5	1 962	0,023 0	$1{,}159 \times 10^{-5}$	1,00
85	57,83	0,353 6	1 977	0,023 5	$1{,}176 \times 10^{-5}$	1,00
90	70,14	0,423 5	1 993	0,024 0	$1{,}193 \times 10^{-5}$	1,00
95	84,55	0,504 5	2 010	0,024 6	$1{,}210 \times 10^{-5}$	1,00
100	101,33	0,597 8	2 029	0,025 1	$1{,}227 \times 10^{-5}$	1,00
110	143,27	0,826 3	2 071	0,026 2	$1{,}261 \times 10^{-5}$	1,00
120	198,53	1,121	2 120	0,027 5	$1{,}296 \times 10^{-5}$	1,00
130	270,1	1,496	2 177	0,028 8	$1{,}330 \times 10^{-5}$	1,01
140	361,3	1,965	2 244	0,030 1	$1{,}365 \times 10^{-5}$	1,02
150	475,8	2,546	2 314	0,031 6	$1{,}399 \times 10^{-5}$	1,02
160	617,8	3,256	2 420	0,033 1	$1{,}434 \times 10^{-5}$	1,05
170	791,7	4,119	2 490	0,034 7	$1{,}468 \times 10^{-5}$	1,05
180	1 002,1	5,153	2 590	0,036 4	$1{,}502 \times 10^{-5}$	1,07
190	1 254,4	6,388	2 710	0,038 2	$1{,}537 \times 10^{-5}$	1,09
200	1 553,8	7,852	2 840	0,040 1	$1{,}571 \times 10^{-5}$	1,11
220	2 318	11,60	3 110	0,044 2	$1{,}641 \times 10^{-5}$	1,15
240	3 344	16,73	3 520	0,048 7	$1{,}712 \times 10^{-5}$	1,24
260	4 688	23,69	4 070	0,054 0	$1{,}788 \times 10^{-5}$	1,35
280	6 412	33,15	4 835	0,060 5	$1{,}870 \times 10^{-5}$	1,49
300	8 581	46,15	5 980	0,069 5	$1{,}965 \times 10^{-5}$	1,69
320	11 274	64,57	7 900	0,083 6	$2{,}084 \times 10^{-5}$	1,97
340	14 586	92,62	11 870	0,110	$2{,}255 \times 10^{-5}$	2,43
360	18 651	144,0	25 800	0,178	$2{,}571 \times 10^{-5}$	3,73
373,946	22 064	322,0	–	–	$4{,}313 \times 10^{-5}$	–

B.3 Líquidos monofásicos no acuosos y metales líquidos

Tabla B.6: Líquidos seleccionados: propiedades principales.

T [°C]	ρ [kg/m^3]	c_p [J/(kg K)]	k [W/(m K)]	β [K^{-1}]
Metanol (CH_3OH)				
20	788,4	2 515	0,198 7	0,001 18
30	779,1	2 577	0,198 0	0,001 20
40	769,6	2 644	0,197 2	0,001 23
50	760,1	2 718	0,196 5	0,001 27
60	750,4	2 798	0,195 7	0,001 32
70	740,4	2 885	0,195 0	0,001 37
Isobutano (R600a)				
−100	683,8	1 881	0,138 3	0,001 42
−75	659,3	1 970	0,135 7	0,001 50
−50	634,3	2 069	0,128 3	0,001 61
−25	608,2	2 180	0,118 1	0,001 77
0	580,6	2 306	0,106 8	0,001 99
25	550,7	2 455	0,095 6	0,002 32
50	517,3	2 640	0,085 1	0,002 86
75	478,5	2 896	0,075 7	0,003 85
100	429,6	3 361	0,066 9	0,006 28
Glicerina*				
0	1 276	2 262	0,282 0	–
5	1 273	2 288	0,283 5	–
10	1 270	2 320	0,284 6	–
15	1 267	2 354	0,285 6	–
20	1 264	2 386	0,286 0	–
25	1 261	2 416	0,286 0	–
30	1 258	2 447	0,286 0	–
35	1 255	2 478	0,286 0	–
40	1 252	2 513	0,286 3	–
Aceite lubricante de motor*				
0	899,0	1 797	0,146 9	0,000 70
20	888,1	1 881	0,145 0	0,000 70
40	876,0	1 964	0,144 4	0,000 70
60	863,9	2 048	0,140 4	0,000 70
80	852,0	2 132	0,138 0	0,000 70
100	840,0	2 220	0,136 7	0,000 70
120	828,9	2 308	0,134 7	0,000 70
140	816,8	2 395	0,133 0	0,000 70
150	810,3	2 441	0,132 7	0,000 70
Metales líquidos				
Mercurio (Hg), punto de fusión: −39 °C				
0	13 595	140,4	8,182 00	$1{,}810 \times 10^{-4}$
25	13 534	139,4	8,515 33	$1{,}810 \times 10^{-4}$
50	13 473	138,6	8,836 32	$1{,}810 \times 10^{-4}$
75	13 412	137,8	9,156 32	$1{,}810 \times 10^{-4}$
100	13 351	137,1	9,467 06	$1{,}810 \times 10^{-4}$
150	13 231	136,1	10,077 80	$1{,}810 \times 10^{-4}$

Continúa en la página siguiente

Continuación de la Tabla B.6

T [°C]	ρ [kg/m^3]	c_p [J/(kg K)]	k [W/(m K)]	β [K^{-1}]
200	13 112	135,5	10,654 65	$1{,}815 \times 10^{-4}$
250	12 993	135,3	11,181 50	$1{,}829 \times 10^{-4}$
300	12 873	135,3	11,681 50	$1{,}854 \times 10^{-4}$
Plomo (Pb), punto de fusión: 327 °C				
400	10 506	158	15,97	–
450	10 449	156	15,74	–
500	10 390	155	15,54	–
550	10 329	155	15,39	–
600	10 267	155	15,23	–
650	10 206	155	15,07	–
700	10 145	155	14,91	–
Sodio (Na), punto de fusión: 98 °C				
100	927,3	1 378	85,84	–
200	902,5	1 349	80,84	–
300	877,8	1 320	75,84	–
400	853,0	1 296	71,20	–
500	828,5	1 284	67,41	–
600	804,0	1 272	63,63	–
NaK-78, punto de fusión: −11 °C				
100	847,3	944,4	25,64	–
200	823,2	922,5	26,27	–
300	799,1	900,6	26,89	–
400	775,0	879,0	27,50	–
500	751,5	880,1	27,89	–
600	728,0	881,2	28,28	–

Tabla B.7: Líquidos seleccionados: propiedades de transporte.

T [°C]	α [m^2/s]	μ [kg/(m s)]	ν [m^2/s]	Pr [–]
Metanol (CH_3OH)				
20	$1{,}002 \times 10^{-7}$	$5{,}857 \times 10^{-4}$	$7{,}429 \times 10^{-7}$	7,414
30	$9{,}862 \times 10^{-8}$	$5{,}088 \times 10^{-4}$	$6{,}531 \times 10^{-7}$	6,622
40	$9{,}690 \times 10^{-8}$	$4{,}460 \times 10^{-4}$	$5{,}795 \times 10^{-7}$	5,980
50	$9{,}509 \times 10^{-8}$	$3{,}942 \times 10^{-4}$	$5{,}185 \times 10^{-7}$	5,453
60	$9{,}320 \times 10^{-8}$	$3{,}510 \times 10^{-4}$	$4{,}677 \times 10^{-7}$	5,018
70	$9{,}128 \times 10^{-8}$	$3{,}146 \times 10^{-4}$	$4{,}250 \times 10^{-7}$	4,655
Isobutano (R600a)				
−100	$1{,}075 \times 10^{-7}$	$9{,}305 \times 10^{-4}$	$1{,}360 \times 10^{-6}$	12,65
−75	$1{,}044 \times 10^{-7}$	$5{,}624 \times 10^{-4}$	$8{,}531 \times 10^{-7}$	8,167
−50	$9{,}773 \times 10^{-8}$	$3{,}769 \times 10^{-4}$	$5{,}942 \times 10^{-7}$	6,079
−25	$8{,}906 \times 10^{-8}$	$2{,}688 \times 10^{-4}$	$4{,}420 \times 10^{-7}$	4,963
0	$7{,}974 \times 10^{-8}$	$1{,}993 \times 10^{-4}$	$3{,}432 \times 10^{-7}$	4,304
25	$7{,}069 \times 10^{-8}$	$1{,}510 \times 10^{-4}$	$2{,}743 \times 10^{-7}$	3,880
50	$6{,}233 \times 10^{-8}$	$1{,}155 \times 10^{-4}$	$2{,}233 \times 10^{-7}$	3,582
75	$5{,}460 \times 10^{-8}$	$8{,}785 \times 10^{-5}$	$1{,}836 \times 10^{-7}$	3,363
100	$4{,}634 \times 10^{-8}$	$6{,}483 \times 10^{-5}$	$1{,}509 \times 10^{-7}$	3,256
Glicerina*				
0	$9{,}773 \times 10^{-8}$	10,49	$8{,}219 \times 10^{-3}$	84 101
5	$9{,}732 \times 10^{-8}$	6,730	$5{,}287 \times 10^{-3}$	54 327
10	$9{,}662 \times 10^{-8}$	4,241	$3{,}339 \times 10^{-3}$	34 561
15	$9{,}576 \times 10^{-8}$	2,496	$1{,}970 \times 10^{-3}$	20 570
20	$9{,}484 \times 10^{-8}$	1,519	$1{,}201 \times 10^{-3}$	12 671
25	$9{,}388 \times 10^{-8}$	0,993 4	$7{,}878 \times 10^{-4}$	8 392
30	$9{,}291 \times 10^{-8}$	0,658 2	$5{,}232 \times 10^{-4}$	5 631
35	$9{,}195 \times 10^{-8}$	0,434 7	$3{,}464 \times 10^{-4}$	3 767
40	$9{,}101 \times 10^{-8}$	0,307 3	$2{,}455 \times 10^{-4}$	2 697
Aceite lubricante de motor*				
0	$9{,}097 \times 10^{-8}$	3,814	$4{,}242 \times 10^{-3}$	46 636
20	$8{,}680 \times 10^{-8}$	0,837 4	$9{,}429 \times 10^{-4}$	10 863
40	$8{,}391 \times 10^{-8}$	0,217 7	$2{,}485 \times 10^{-4}$	2 962
60	$7{,}934 \times 10^{-8}$	0,073 99	$8{,}565 \times 10^{-5}$	1 080
80	$7{,}599 \times 10^{-8}$	0,032 32	$3{,}794 \times 10^{-5}$	499,3
100	$7{,}330 \times 10^{-8}$	0,017 18	$2{,}046 \times 10^{-5}$	279,1
120	$7{,}042 \times 10^{-8}$	0,010 29	$1{,}241 \times 10^{-5}$	176,3
140	$6{,}798 \times 10^{-8}$	0,006 558	$8{,}029 \times 10^{-6}$	118,1
150	$6{,}708 \times 10^{-8}$	0,005 344	$6{,}595 \times 10^{-6}$	98,31
Metales líquidos				
Mercurio (Hg), punto de fusión: −39 °C				
0	$4{,}287 \times 10^{-6}$	$1{,}687 \times 10^{-3}$	$1{,}241 \times 10^{-7}$	0,028 9
25	$4{,}514 \times 10^{-6}$	$1{,}534 \times 10^{-3}$	$1{,}133 \times 10^{-7}$	0,025 1
50	$4{,}734 \times 10^{-6}$	$1{,}423 \times 10^{-3}$	$1{,}056 \times 10^{-7}$	0,022 3
75	$4{,}956 \times 10^{-6}$	$1{,}316 \times 10^{-3}$	$9{,}819 \times 10^{-8}$	0,019 8
100	$5{,}170 \times 10^{-6}$	$1{,}245 \times 10^{-3}$	$9{,}326 \times 10^{-8}$	0,018 0
150	$5{,}595 \times 10^{-6}$	$1{,}126 \times 10^{-3}$	$8{,}514 \times 10^{-8}$	0,015 2
200	$5{,}996 \times 10^{-6}$	$1{,}043 \times 10^{-3}$	$7{,}959 \times 10^{-8}$	0,013 3
250	$6{,}363 \times 10^{-6}$	$9{,}820 \times 10^{-4}$	$7{,}558 \times 10^{-8}$	0,011 9

Continúa en la página siguiente

Continuación de la Tabla B.7

T [°C]	α [m^2/s]	μ [kg/(m s)]	ν [m^2/s]	Pr [–]
300	$6{,}705 \times 10^{-6}$	$9{,}336 \times 10^{-4}$	$7{,}252 \times 10^{-8}$	0,010 8
Plomo (Pb), punto de fusión: 327 °C				
400	$9{,}623 \times 10^{-6}$	$2{,}277 \times 10^{-3}$	$2{,}167 \times 10^{-7}$	0,022 52
450	$9{,}649 \times 10^{-6}$	$2{,}065 \times 10^{-3}$	$1{,}976 \times 10^{-7}$	0,020 48
500	$9{,}651 \times 10^{-6}$	$1{,}884 \times 10^{-3}$	$1{,}814 \times 10^{-7}$	0,018 79
550	$9{,}610 \times 10^{-6}$	$1{,}758 \times 10^{-3}$	$1{,}702 \times 10^{-7}$	0,017 71
600	$9{,}568 \times 10^{-6}$	$1{,}632 \times 10^{-3}$	$1{,}589 \times 10^{-7}$	0,016 61
650	$9{,}526 \times 10^{-6}$	$1{,}505 \times 10^{-3}$	$1{,}475 \times 10^{-7}$	0,015 49
700	$9{,}483 \times 10^{-6}$	$1{,}379 \times 10^{-3}$	$1{,}360 \times 10^{-7}$	0,014 34
Sodio (Na), punto de fusión: 98 °C				
100	$6{,}718 \times 10^{-5}$	$6{,}892 \times 10^{-4}$	$7{,}432 \times 10^{-7}$	0,011 06
200	$6{,}639 \times 10^{-5}$	$5{,}385 \times 10^{-4}$	$5{,}967 \times 10^{-7}$	0,008 987
300	$6{,}544 \times 10^{-5}$	$3{,}878 \times 10^{-4}$	$4{,}418 \times 10^{-7}$	0,006 751
400	$6{,}437 \times 10^{-5}$	$2{,}720 \times 10^{-4}$	$3{,}188 \times 10^{-7}$	0,004 953
500	$6{,}335 \times 10^{-5}$	$2{,}411 \times 10^{-4}$	$2{,}909 \times 10^{-7}$	0,004 593
600	$6{,}220 \times 10^{-5}$	$2{,}101 \times 10^{-4}$	$2{,}614 \times 10^{-7}$	0,004 202
NaK-78, punto de fusión: −11 °C				
100	$3{,}205 \times 10^{-5}$	$5{,}707 \times 10^{-4}$	$6{,}736 \times 10^{-7}$	0,021 02
200	$3{,}459 \times 10^{-5}$	$4{,}587 \times 10^{-4}$	$5{,}572 \times 10^{-7}$	0,016 11
300	$3{,}736 \times 10^{-5}$	$3{,}467 \times 10^{-4}$	$4{,}339 \times 10^{-7}$	0,011 61
400	$4{,}037 \times 10^{-5}$	$2{,}357 \times 10^{-4}$	$3{,}041 \times 10^{-7}$	0,007 53
500	$4{,}217 \times 10^{-5}$	$2{,}108 \times 10^{-4}$	$2{,}805 \times 10^{-7}$	0,006 65
600	$4{,}408 \times 10^{-5}$	$1{,}859 \times 10^{-4}$	$2{,}553 \times 10^{-7}$	0,005 79

B.4 Aire seco y gases diluidos no reactivos a presión atmosférica

Tabla B.8: Aire seco a 1 atm: propiedades principales

T [°C]	ρ [kg/m^3]	c_p [J/(kg K)]	k [W/(m K)]	μ [kg/(m s)]
−150	2,866	983	0,011 71	$8{,}636 \times 10^{-6}$
−100	2,038	966	0,015 82	$1{,}189 \times 10^{-5}$
−50	1,582	999	0,019 79	$1{,}474 \times 10^{-5}$
−40	1,514	1 002	0,020 57	$1{,}527 \times 10^{-5}$
−30	1,451	1 004	0,021 34	$1{,}579 \times 10^{-5}$
−20	1,394	1 005	0,022 11	$1{,}630 \times 10^{-5}$
−10	1,341	1 006	0,022 88	$1{,}680 \times 10^{-5}$
0	1,292	1 006	0,023 64	$1{,}729 \times 10^{-5}$
5	1,269	1 006	0,024 01	$1{,}754 \times 10^{-5}$
10	1,246	1 006	0,024 39	$1{,}778 \times 10^{-5}$
15	1,225	1 007	0,024 76	$1{,}802 \times 10^{-5}$
20	1,204	1 007	0,025 14	$1{,}825 \times 10^{-5}$
25	1,184	1 007	0,025 51	$1{,}849 \times 10^{-5}$
30	1,164	1 007	0,025 88	$1{,}872 \times 10^{-5}$
35	1,145	1 007	0,026 25	$1{,}895 \times 10^{-5}$
40	1,127	1 007	0,026 62	$1{,}918 \times 10^{-5}$
45	1,109	1 007	0,026 99	$1{,}941 \times 10^{-5}$
50	1,092	1 007	0,027 35	$1{,}963 \times 10^{-5}$
60	1,059	1 007	0,028 08	$2{,}008 \times 10^{-5}$
70	1,028	1 007	0,028 81	$2{,}052 \times 10^{-5}$
80	0,999 4	1 008	0,029 53	$2{,}096 \times 10^{-5}$
90	0,971 8	1 008	0,030 24	$2{,}139 \times 10^{-5}$
100	0,945 8	1 009	0,030 95	$2{,}181 \times 10^{-5}$
120	0,897 7	1 011	0,032 35	$2{,}264 \times 10^{-5}$
140	0,854 2	1 013	0,033 74	$2{,}345 \times 10^{-5}$
160	0,814 8	1 016	0,035 11	$2{,}420 \times 10^{-5}$
180	0,778 8	1 019	0,036 46	$2{,}504 \times 10^{-5}$
200	0,745 9	1 023	0,037 79	$2{,}577 \times 10^{-5}$
250	0,674 6	1 033	0,041 04	$2{,}760 \times 10^{-5}$
300	0,615 8	1 044	0,044 18	$2{,}934 \times 10^{-5}$
350	0,566 4	1 056	0,047 21	$3{,}101 \times 10^{-5}$
400	0,524 3	1 069	0,050 15	$3{,}261 \times 10^{-5}$
450	0,488 0	1 081	0,052 98	$3{,}415 \times 10^{-5}$
500	0,456 5	1 093	0,055 72	$3{,}563 \times 10^{-5}$
600	0,404 2	1 115	0,060 93	$3{,}846 \times 10^{-5}$
700	0,362 7	1 135	0,065 81	$4{,}111 \times 10^{-5}$
800	0,328 9	1 153	0,070 37	$4{,}362 \times 10^{-5}$
900	0,300 8	1 169	0,074 65	$4{,}600 \times 10^{-5}$
1 000	0,277 2	1 184	0,078 68	$4{,}826 \times 10^{-5}$
1 500	0,199 0	1 234	0,095 99	$5{,}817 \times 10^{-5}$
2 000	0,155 3	1 264	0,111 13	$6{,}630 \times 10^{-5}$

Tabla B.9: Aire seco a 1 atm: propiedades de transporte

T [°C]	α [m^2/s]	ν [m^2/s]	Pr [–]
−150	$4{,}158 \times 10^{-6}$	$3{,}013 \times 10^{-6}$	0,724 6
−100	$8{,}036 \times 10^{-6}$	$5{,}837 \times 10^{-6}$	0,726 3
−50	$1{,}252 \times 10^{-5}$	$9{,}319 \times 10^{-6}$	0,744 0
−40	$1{,}356 \times 10^{-5}$	$1{,}008 \times 10^{-5}$	0,743 6
−30	$1{,}465 \times 10^{-5}$	$1{,}087 \times 10^{-5}$	0,742 5
−20	$1{,}578 \times 10^{-5}$	$1{,}169 \times 10^{-5}$	0,740 8
−10	$1{,}696 \times 10^{-5}$	$1{,}252 \times 10^{-5}$	0,738 7
0	$1{,}818 \times 10^{-5}$	$1{,}338 \times 10^{-5}$	0,736 2
5	$1{,}880 \times 10^{-5}$	$1{,}382 \times 10^{-5}$	0,735 0
10	$1{,}944 \times 10^{-5}$	$1{,}426 \times 10^{-5}$	0,733 6
15	$2{,}009 \times 10^{-5}$	$1{,}470 \times 10^{-5}$	0,732 3
20	$2{,}074 \times 10^{-5}$	$1{,}516 \times 10^{-5}$	0,730 9
25	$2{,}141 \times 10^{-5}$	$1{,}562 \times 10^{-5}$	0,729 6
30	$2{,}208 \times 10^{-5}$	$1{,}608 \times 10^{-5}$	0,728 2
35	$2{,}277 \times 10^{-5}$	$1{,}655 \times 10^{-5}$	0,726 8
40	$2{,}346 \times 10^{-5}$	$1{,}702 \times 10^{-5}$	0,725 5
45	$2{,}416 \times 10^{-5}$	$1{,}750 \times 10^{-5}$	0,724 1
50	$2{,}487 \times 10^{-5}$	$1{,}798 \times 10^{-5}$	0,722 8
60	$2{,}632 \times 10^{-5}$	$1{,}896 \times 10^{-5}$	0,720 2
70	$2{,}780 \times 10^{-5}$	$1{,}995 \times 10^{-5}$	0,717 7
80	$2{,}931 \times 10^{-5}$	$2{,}097 \times 10^{-5}$	0,715 4
90	$3{,}086 \times 10^{-5}$	$2{,}201 \times 10^{-5}$	0,713 2
100	$3{,}243 \times 10^{-5}$	$2{,}306 \times 10^{-5}$	0,711 1
120	$3{,}565 \times 10^{-5}$	$2{,}522 \times 10^{-5}$	0,707 3
140	$3{,}898 \times 10^{-5}$	$2{,}745 \times 10^{-5}$	0,704 1
160	$4{,}241 \times 10^{-5}$	$2{,}975 \times 10^{-5}$	0,701 4
180	$4{,}593 \times 10^{-5}$	$3{,}212 \times 10^{-5}$	0,699 2
200	$4{,}954 \times 10^{-5}$	$3{,}455 \times 10^{-5}$	0,697 4
250	$5{,}890 \times 10^{-5}$	$4{,}091 \times 10^{-5}$	0,694 6
300	$6{,}871 \times 10^{-5}$	$4{,}765 \times 10^{-5}$	0,693 5
350	$7{,}892 \times 10^{-5}$	$5{,}475 \times 10^{-5}$	0,693 7
400	$8{,}951 \times 10^{-5}$	$6{,}219 \times 10^{-5}$	0,694 8
450	$1{,}004 \times 10^{-4}$	$6{,}997 \times 10^{-5}$	0,696 5
500	$1{,}117 \times 10^{-4}$	$7{,}806 \times 10^{-5}$	0,698 6
600	$1{,}352 \times 10^{-4}$	$9{,}515 \times 10^{-5}$	0,703 7
700	$1{,}598 \times 10^{-4}$	$1{,}133 \times 10^{-4}$	0,709 2
800	$1{,}855 \times 10^{-4}$	$1{,}326 \times 10^{-4}$	0,714 9
900	$2{,}122 \times 10^{-4}$	$1{,}529 \times 10^{-4}$	0,720 6
1 000	$2{,}398 \times 10^{-4}$	$1{,}741 \times 10^{-4}$	0,726 0
1 500	$3{,}908 \times 10^{-4}$	$2{,}922 \times 10^{-4}$	0,747 8
2 000	$5{,}664 \times 10^{-4}$	$4{,}270 \times 10^{-4}$	0,753 9

Tabla B.10: Gases diluidos no reactivos seleccionados a 1 atm: propiedades principales

T [°C]	ρ [kg/m^3]	c_p [J/(kg K)]	k [W/(m K)]	μ [kg/(m s)]
Dióxido de carbono (CO_2)				
−50	2,403 5	746	0,010 51	$1{,}129 \times 10^{-5}$
0	1,963 5	811	0,014 56	$1{,}375 \times 10^{-5}$
50	1,659 7	866,6	0,018 58	$1{,}612 \times 10^{-5}$
100	1,437 3	914,8	0,022 57	$1{,}841 \times 10^{-5}$
150	1,267 5	957,4	0,026 52	$2{,}063 \times 10^{-5}$
200	1,133 6	995,2	0,030 44	$2{,}276 \times 10^{-5}$
300	0,935 8	1 060	0,038 14	$2{,}682 \times 10^{-5}$
400	0,796 8	1 112	0,045 65	$3{,}061 \times 10^{-5}$
500	0,693 7	1 156	0,052 93	$3{,}416 \times 10^{-5}$
1 000	0,421 3	1 292	0,084 91	$4{,}898 \times 10^{-5}$
1 500	0,302 5	1 356	0,106 88	$6{,}106 \times 10^{-5}$
2 000	0,235 9	1 387	0,115 22	$7{,}322 \times 10^{-5}$
Monóxido de carbono (CO)				
−50	1,529 7	1 081	0,019 01	$1{,}378 \times 10^{-5}$
0	1,249 7	1 048	0,022 78	$1{,}629 \times 10^{-5}$
50	1,056 3	1 039	0,026 41	$1{,}863 \times 10^{-5}$
100	0,914 8	1 041	0,029 92	$2{,}080 \times 10^{-5}$
150	0,806 7	1 049	0,033 30	$2{,}283 \times 10^{-5}$
200	0,721 4	1 060	0,036 56	$2{,}472 \times 10^{-5}$
300	0,595 6	1 085	0,042 77	$2{,}812 \times 10^{-5}$
400	0,507 1	1 111	0,048 60	$3{,}111 \times 10^{-5}$
500	0,441 5	1 135	0,054 12	$3{,}379 \times 10^{-5}$
1 000	0,268 1	1 226	0,078 94	$4{,}557 \times 10^{-5}$
1 500	0,192 5	1 279	0,104 58	$6{,}321 \times 10^{-5}$
2 000	0,150 2	1 309	0,138 33	$9{,}826 \times 10^{-5}$
Metano (CH_4)				
−50	0,876 1	2 243	0,023 67	$8{,}564 \times 10^{-6}$
0	0,715 8	2 217	0,030 42	$1{,}028 \times 10^{-5}$
50	0,605 0	2 302	0,037 66	$1{,}191 \times 10^{-5}$
100	0,524 0	2 443	0,045 34	$1{,}345 \times 10^{-5}$
150	0,462 0	2 611	0,053 44	$1{,}491 \times 10^{-5}$
200	0,413 2	2 791	0,061 94	$1{,}630 \times 10^{-5}$
300	0,341 1	3 158	0,079 96	$1{,}886 \times 10^{-5}$
400	0,290 4	3 510	0,099 18	$2{,}119 \times 10^{-5}$
500	0,252 9	3 836	0,119 33	$2{,}334 \times 10^{-5}$
1 000	0,153 6	5 042	0,225 62	$3{,}281 \times 10^{-5}$
1 500	0,110 3	5 701	0,318 57	$4{,}434 \times 10^{-5}$
2 000	0,086 0	6 001	0,367 50	$6{,}360 \times 10^{-5}$
Hidrógeno (H_2)				
−50	0,110 10	12 635	0,140 4	$7{,}293 \times 10^{-6}$
0	0,089 95	13 920	0,165 2	$8{,}391 \times 10^{-6}$
50	0,076 03	14 349	0,188 1	$9{,}427 \times 10^{-6}$
100	0,065 84	14 473	0,209 5	$1{,}041 \times 10^{-5}$
150	0,058 06	14 492	0,229 6	$1{,}136 \times 10^{-5}$
200	0,051 93	14 482	0,248 6	$1{,}228 \times 10^{-5}$
300	0,042 87	14 481	0,284 3	$1{,}403 \times 10^{-5}$

Continúa en la página siguiente

Continuación de la Tabla B.10

T [°C]	ρ [kg/m^3]	c_p [J/(kg K)]	k [W/(m K)]	μ [kg/(m s)]
400	0,036 50	14 540	0,318 0	$1{,}570 \times 10^{-5}$
500	0,031 78	14 653	0,350 9	$1{,}730 \times 10^{-5}$
1 000	0,019 30	15 577	0,520 6	$2{,}455 \times 10^{-5}$
1 500	0,013 86	16 553	0,658 1	$3{,}099 \times 10^{-5}$
2 000	0,010 81	17 400	0,548 0	$3{,}690 \times 10^{-5}$
Nitrógeno (N_2)				
−50	1,529 9	957,3	0,020 01	$1{,}390 \times 10^{-5}$
0	1,249 8	1 035	0,023 84	$1{,}640 \times 10^{-5}$
50	1,056 4	1 042	0,027 46	$1{,}874 \times 10^{-5}$
100	0,914 9	1 041	0,030 90	$2{,}094 \times 10^{-5}$
150	0,806 8	1 043	0,034 16	$2{,}300 \times 10^{-5}$
200	0,721 5	1 050	0,037 27	$2{,}494 \times 10^{-5}$
300	0,595 6	1 070	0,043 09	$2{,}849 \times 10^{-5}$
400	0,507 2	1 095	0,048 48	$3{,}166 \times 10^{-5}$
500	0,441 6	1 120	0,053 58	$3{,}451 \times 10^{-5}$
1 000	0,268 1	1 213	0,079 38	$4{,}594 \times 10^{-5}$
1 500	0,192 5	1 266	0,117 93	$5{,}562 \times 10^{-5}$
2 000	0,150 2	1 297	0,185 90	$6{,}426 \times 10^{-5}$
Oxígeno (O_2)				
−50	1,747 5	984,4	0,020 67	$1{,}616 \times 10^{-5}$
0	1,427 7	928,7	0,024 72	$1{,}916 \times 10^{-5}$
50	1,206 8	921,7	0,028 67	$2{,}194 \times 10^{-5}$
100	1,045 1	931,8	0,032 54	$2{,}451 \times 10^{-5}$
150	0,921 6	947,6	0,036 37	$2{,}694 \times 10^{-5}$
200	0,824 2	964,7	0,040 14	$2{,}923 \times 10^{-5}$
300	0,680 4	997,1	0,047 51	$3{,}350 \times 10^{-5}$
400	0,579 3	1 025	0,054 63	$3{,}744 \times 10^{-5}$
500	0,504 4	1 048	0,061 48	$4{,}114 \times 10^{-5}$
1 000	0,306 3	1 121	0,091 98	$5{,}732 \times 10^{-5}$
1 500	0,219 9	1 165	0,119 01	$7{,}133 \times 10^{-5}$
2 000	0,171 6	1 201	0,147 05	$8{,}417 \times 10^{-5}$
Vapor de agua (H_2O)				
−50	0,983 9	1 892	0,013 53	$7{,}187 \times 10^{-6}$
0	0,803 8	1 874	0,016 73	$8{,}956 \times 10^{-6}$
50	0,679 4	1 874	0,020 32	$1{,}078 \times 10^{-5}$
100	0,588 4	1 887	0,024 29	$1{,}265 \times 10^{-5}$
150	0,518 9	1 908	0,028 61	$1{,}456 \times 10^{-5}$
200	0,464 0	1 935	0,033 26	$1{,}650 \times 10^{-5}$
300	0,383 1	1 997	0,043 45	$2{,}045 \times 10^{-5}$
400	0,326 2	2 066	0,054 67	$2{,}446 \times 10^{-5}$
500	0,284 0	2 137	0,066 77	$2{,}847 \times 10^{-5}$
1 000	0,172 5	2 471	0,136 23	$4{,}762 \times 10^{-5}$
1 500	0,123 8	2 736	0,213 01	$6{,}411 \times 10^{-5}$
2 000	0,096 6	2 928	0,291 83	$7{,}808 \times 10^{-5}$

Tabla B.11: Gases diluidos no reactivos seleccionados a 1 atm: propiedades de transporte

T [°C]	α [m^2/s]	ν [m^2/s]	Pr [–]
Dióxido de carbono (CO_2)			
−50	$5{,}860 \times 10^{-6}$	$4{,}699 \times 10^{-6}$	0,801 9
0	$9{,}141 \times 10^{-6}$	$7{,}003 \times 10^{-6}$	0,766 1
50	$1{,}291 \times 10^{-5}$	$9{,}714 \times 10^{-6}$	0,752 0
100	$1{,}716 \times 10^{-5}$	$1{,}281 \times 10^{-5}$	0,746 4
150	$2{,}186 \times 10^{-5}$	$1{,}627 \times 10^{-5}$	0,744 5
200	$2{,}698 \times 10^{-5}$	$2{,}008 \times 10^{-5}$	0,744 2
300	$3{,}847 \times 10^{-5}$	$2{,}866 \times 10^{-5}$	0,745 0
400	$5{,}151 \times 10^{-5}$	$3{,}842 \times 10^{-5}$	0,745 8
500	$6{,}600 \times 10^{-5}$	$4{,}924 \times 10^{-5}$	0,746 0
1 000	$1{,}560 \times 10^{-4}$	$1{,}162 \times 10^{-4}$	0,745 5
1 500	$2{,}606 \times 10^{-4}$	$2{,}019 \times 10^{-4}$	0,774 5
2 000	$3{,}521 \times 10^{-4}$	$3{,}103 \times 10^{-4}$	0,881 5
Monóxido de carbono (CO)			
−50	$1{,}149 \times 10^{-5}$	$9{,}012 \times 10^{-6}$	0,784 0
0	$1{,}739 \times 10^{-5}$	$1{,}303 \times 10^{-5}$	0,749 9
50	$2{,}407 \times 10^{-5}$	$1{,}764 \times 10^{-5}$	0,732 8
100	$3{,}142 \times 10^{-5}$	$2{,}274 \times 10^{-5}$	0,723 9
150	$3{,}936 \times 10^{-5}$	$2{,}830 \times 10^{-5}$	0,719 1
200	$4{,}782 \times 10^{-5}$	$3{,}426 \times 10^{-5}$	0,716 4
300	$6{,}619 \times 10^{-5}$	$4{,}722 \times 10^{-5}$	0,713 4
400	$8{,}628 \times 10^{-5}$	$6{,}136 \times 10^{-5}$	0,711 1
500	$1{,}079 \times 10^{-4}$	$7{,}653 \times 10^{-5}$	0,708 7
1 000	$2{,}401 \times 10^{-4}$	$1{,}700 \times 10^{-4}$	0,708 0
1 500	$4{,}246 \times 10^{-4}$	$3{,}284 \times 10^{-4}$	0,773 3
2 000	$7{,}034 \times 10^{-4}$	$6{,}543 \times 10^{-4}$	0,930 2
Metano (CH_4)			
−50	$1{,}204 \times 10^{-5}$	$9{,}774 \times 10^{-6}$	0,811 6
0	$1{,}917 \times 10^{-5}$	$1{,}436 \times 10^{-5}$	0,749 4
50	$2{,}704 \times 10^{-5}$	$1{,}969 \times 10^{-5}$	0,728 2
100	$3{,}543 \times 10^{-5}$	$2{,}567 \times 10^{-5}$	0,724 7
150	$4{,}431 \times 10^{-5}$	$3{,}227 \times 10^{-5}$	0,728 4
200	$5{,}370 \times 10^{-5}$	$3{,}944 \times 10^{-5}$	0,734 4
300	$7{,}422 \times 10^{-5}$	$5{,}529 \times 10^{-5}$	0,745 0
400	$9{,}727 \times 10^{-5}$	$7{,}297 \times 10^{-5}$	0,750 1
500	$1{,}230 \times 10^{-4}$	$9{,}228 \times 10^{-5}$	0,750 2
1 000	$2{,}914 \times 10^{-4}$	$2{,}136 \times 10^{-4}$	0,733 1
1 500	$5{,}068 \times 10^{-4}$	$4{,}022 \times 10^{-4}$	0,793 6
2 000	$7{,}120 \times 10^{-4}$	$7{,}395 \times 10^{-4}$	1,038 6
Hidrógeno (H_2)			
−50	$1{,}009 \times 10^{-4}$	$6{,}624 \times 10^{-5}$	0,656 2
0	$1{,}319 \times 10^{-4}$	$9{,}329 \times 10^{-5}$	0,707 1
50	$1{,}724 \times 10^{-4}$	$1{,}240 \times 10^{-4}$	0,719 1
100	$2{,}199 \times 10^{-4}$	$1{,}582 \times 10^{-4}$	0,719 6
150	$2{,}729 \times 10^{-4}$	$1{,}957 \times 10^{-4}$	0,717 4
200	$3{,}306 \times 10^{-4}$	$2{,}365 \times 10^{-4}$	0,715 5
300	$4{,}580 \times 10^{-4}$	$3{,}274 \times 10^{-4}$	0,714 9

Continúa en la página siguiente

Continuación de la Tabla B.11

T [°C]	α [m^2/s]	ν [m^2/s]	Pr [–]
400	$5{,}992 \times 10^{-4}$	$4{,}302 \times 10^{-4}$	0,717 9
500	$7{,}535 \times 10^{-4}$	$5{,}443 \times 10^{-4}$	0,722 4
1 000	$1{,}732 \times 10^{-3}$	$1{,}272 \times 10^{-3}$	0,734 5
1 500	$2{,}869 \times 10^{-3}$	$2{,}237 \times 10^{-3}$	0,779 5
2 000	$2{,}914 \times 10^{-3}$	$3{,}414 \times 10^{-3}$	1,171 7
Nitrógeno (N_2)			
−50	$1{,}366 \times 10^{-5}$	$9{,}091 \times 10^{-6}$	0,665 5
0	$1{,}843 \times 10^{-5}$	$1{,}312 \times 10^{-5}$	0,712 1
50	$2{,}494 \times 10^{-5}$	$1{,}774 \times 10^{-5}$	0,711 4
100	$3{,}244 \times 10^{-5}$	$2{,}289 \times 10^{-5}$	0,705 6
150	$4{,}058 \times 10^{-5}$	$2{,}851 \times 10^{-5}$	0,702 5
200	$4{,}921 \times 10^{-5}$	$3{,}457 \times 10^{-5}$	0,702 5
300	$6{,}758 \times 10^{-5}$	$4{,}783 \times 10^{-5}$	0,707 8
400	$8{,}727 \times 10^{-5}$	$6{,}242 \times 10^{-5}$	0,715 3
500	$1{,}083 \times 10^{-4}$	$7{,}816 \times 10^{-5}$	0,721 5
1 000	$2{,}440 \times 10^{-4}$	$1{,}713 \times 10^{-4}$	0,702 2
1 500	$4{,}839 \times 10^{-4}$	$2{,}889 \times 10^{-4}$	0,596 9
2 000	$9{,}543 \times 10^{-4}$	$4{,}278 \times 10^{-4}$	0,448 3
Oxígeno (O_2)			
−50	$1{,}201 \times 10^{-5}$	$9{,}246 \times 10^{-6}$	0,769 4
0	$1{,}865 \times 10^{-5}$	$1{,}342 \times 10^{-5}$	0,719 8
50	$2{,}577 \times 10^{-5}$	$1{,}818 \times 10^{-5}$	0,705 3
100	$3{,}342 \times 10^{-5}$	$2{,}346 \times 10^{-5}$	0,701 9
150	$4{,}164 \times 10^{-5}$	$2{,}923 \times 10^{-5}$	0,701 9
200	$5{,}048 \times 10^{-5}$	$3{,}546 \times 10^{-5}$	0,702 5
300	$7{,}003 \times 10^{-5}$	$4{,}923 \times 10^{-5}$	0,703 0
400	$9{,}204 \times 10^{-5}$	$6{,}463 \times 10^{-5}$	0,702 3
500	$1{,}163 \times 10^{-4}$	$8{,}156 \times 10^{-5}$	0,701 0
1 000	$2{,}678 \times 10^{-4}$	$1{,}871 \times 10^{-4}$	0,698 6
1 500	$4{,}643 \times 10^{-4}$	$3{,}243 \times 10^{-4}$	0,698 5
2 000	$7{,}139 \times 10^{-4}$	$4{,}907 \times 10^{-4}$	0,687 3
Vapor de agua (H_2O)			
−50	$7{,}271 \times 10^{-6}$	$7{,}305 \times 10^{-6}$	1,004 7
0	$1{,}110 \times 10^{-5}$	$1{,}114 \times 10^{-5}$	1,003 3
50	$1{,}596 \times 10^{-5}$	$1{,}587 \times 10^{-5}$	0,994 4
100	$2{,}187 \times 10^{-5}$	$2{,}150 \times 10^{-5}$	0,983 0
150	$2{,}890 \times 10^{-5}$	$2{,}806 \times 10^{-5}$	0,971 2
200	$3{,}705 \times 10^{-5}$	$3{,}556 \times 10^{-5}$	0,959 9
300	$5{,}680 \times 10^{-5}$	$5{,}340 \times 10^{-5}$	0,940 1
400	$8{,}114 \times 10^{-5}$	$7{,}498 \times 10^{-5}$	0,924 0
500	$1{,}100 \times 10^{-4}$	$1{,}002 \times 10^{-4}$	0,910 8
1 000	$3{,}196 \times 10^{-4}$	$2{,}761 \times 10^{-4}$	0,863 9
1 500	$6{,}288 \times 10^{-4}$	$5{,}177 \times 10^{-4}$	0,823 3
2 000	$1{,}032 \times 10^{-3}$	$8{,}084 \times 10^{-4}$	0,783 3