



**COMILLAS**

UNIVERSIDAD PONTIFICIA

ICAI

GRADO EN INGENIERÍA MATEMÁTICA E  
INTELIGENCIA ARTIFICIAL

TRABAJO FIN DE GRADO

PROPIEDADES ESTADÍSTICAS DE LA  
MANIPULACIÓN A GRAN ESCALA

Autor: Alba Barriopedro Barra

Director: Emanuel Gastón Mompó Pavesi

Madrid

Mayo de 2026



Declaro, bajo mi responsabilidad, que el Proyecto presentado con el título

Propiedades estadísticas de la manipulación a gran escala

en la ETS de Ingeniería - ICAI de la Universidad Pontificia Comillas en el

curso académico 2025/26 es de mi autoría, original e inédito y

no ha sido presentado con anterioridad a otros efectos.

El Proyecto no es plagio de otro, ni total ni parcialmente y la información que ha sido

tomada de otros documentos está debidamente referenciada.



Fdo.: Alba Barriopedro Barra

Fecha: 15/06/2026

Autorizada la entrega del proyecto

EL DIRECTOR DEL PROYECTO

Fdo.: Emanuel Gastón Mompó Pavesi

Fecha: 15/06/2026





**COMILLAS**

UNIVERSIDAD PONTIFICIA

ICAI

GRADO EN INGENIERÍA MATEMÁTICA E  
INTELIGENCIA ARTIFICIAL

TRABAJO FIN DE GRADO

PROPIEDADES ESTADÍSTICAS DE LA  
MANIPULACIÓN A GRAN ESCALA

Autor: Alba Barriopedro Barra

Director: Emanuel Gastón Mompó Pavesi

Madrid



# PROPIEDADES ESTADÍSTICAS DE LA MANIPULACIÓN A GRAN ESCALA

**Autor: Barriopedro Barra, Alba.**

Director: Gastón Mompó Pavesi, Emanuel.

Entidad Colaboradora: ICAI – Universidad Pontificia Comillas

## RESUMEN DEL PROYECTO

Este Trabajo Fin de Grado estudia la capacidad de agentes móviles locales para modificar estructuras colectivas emergentes en sistemas complejos. Para ello se emplea el modelo de Ising bidimensional, ampliamente utilizado para analizar fenómenos de alineamiento y consenso [1]. A partir de configuraciones autoorganizadas generadas mediante la dinámica de Metropolis, se introducen agentes que actúan localmente sobre la red y se desplazan por ella. Los resultados muestran que intervenciones locales pueden inducir cambios globales significativos, identificándose umbrales de actuación y configuraciones capaces de recuperar estados de consenso de forma robusta y eficiente.

**Palabras clave:** Modelo de Ising, Sistemas Complejos, Agentes Móviles, Consenso, Simulación Monte Carlo, Recuperación de Información, Física Estadística, Dinámica Colectiva

### 1. Introducción

Los sistemas complejos están formados por numerosos elementos que interactúan localmente y generan comportamientos colectivos a gran escala. Comprender cómo surgen y evolucionan estas estructuras es una cuestión de gran interés en física, biología y ciencias sociales. En este trabajo se utiliza el modelo de Ising bidimensional para estudiar la capacidad de agentes móviles para modificar configuraciones previamente organizadas en dominios. El objetivo es analizar hasta qué punto perturbaciones locales pueden recuperar estados de consenso global y cómo influyen parámetros como la temperatura, la frecuencia de actuación y el número de agentes presentes en el sistema.

### 2. Objetivos

El objetivo principal de este trabajo es analizar cómo perturbaciones locales móviles pueden modificar la organización colectiva de un sistema complejo descrito mediante el modelo de Ising.

Para ello, se estudia la dinámica natural del sistema y se evalúa la capacidad de agentes móviles para recuperar estados alineados a partir de configuraciones inicialmente fragmentadas. Además, se analiza cómo variables como la temperatura efectiva, la frecuencia de actuación y el número de agentes afectan a la probabilidad de alcanzar consenso, al tiempo necesario para lograrlo y a la estabilidad de los estados finales.

Como hipótesis de partida, se plantea que incrementar el número de agentes y su frecuencia de actuación favorecerá la recuperación del consenso y reducirá los tiempos de convergencia.

### 3. Descripción del modelo/sistema/herramienta

El procedimiento experimental se divide en dos etapas. Primero, una red de espines inicialmente aleatoria evoluciona mediante dinámica de Metropolis hasta formar dominios autoorganizados. Y posteriormente, se introducen agentes móviles que actúan localmente sobre la red. Durante esta segunda fase se estudia la evolución de magnitudes como la magnetización, la probabilidad de recuperación del consenso y la estabilidad de los estados finales. Un resumen de este esquema de trabajo puede verse en la Ilustración 1.



Ilustración 1 Esquema general del procedimiento experimental

### 4. Resultados

Los resultados muestran que la capacidad de recuperación depende fuertemente tanto del número de agentes como de su frecuencia de actuación. Mientras que un único agente presenta una eficacia limitada cerca de la transición crítica, la introducción de múltiples agentes produce mejoras muy significativas. Se identifican umbrales de actuación a partir de los cuales la probabilidad de recuperación se aproxima al 100%. Esto se ve claramente reflejado en el mapa de calor de la Ilustración 2, en el que se presenta el porcentaje de recuperación para distintos números de agentes y frecuencias de actuación de los mismos.

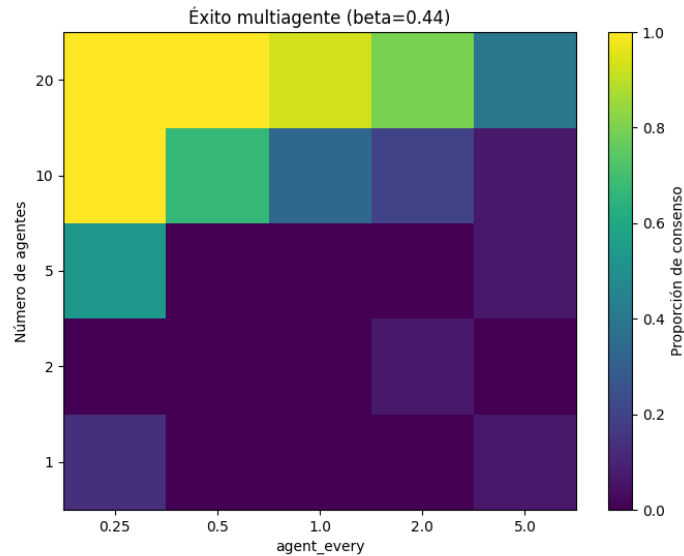


Ilustración 2 Mapa de calor del éxito en función del número de agentes y la frecuencia de actuación

## 5. Conclusiones

Los resultados muestran que perturbaciones estrictamente locales pueden producir cambios globales significativos en sistemas complejos autoorganizados. En particular, se observa que tanto el número de agentes como su frecuencia de actuación influyen significativamente en la recuperación del consenso.

La principal aportación del trabajo consiste en estudiar agentes móviles sobre configuraciones previamente organizadas mediante la dinámica natural del modelo de Ising, identificando umbrales de actuación y regiones donde la recuperación resulta especialmente eficiente.

Estos resultados sugieren que mecanismos locales simples pueden utilizarse para modificar el comportamiento colectivo de sistemas complejos y constituyen una base para futuras extensiones del modelo.

## Referencias

- [1] C. Castellano, S. Fortunato y V. Loreto, «Statistical Physics of Social Dynamics,» *Reviews of Modern Physics*, vol. 81, nº 2, pp. 591-646, 2009.



# STATISTICAL PROPERTIES OF LARGE-SCALE MANIPULATION

**Author: Barriopedro Barra, Alba.**

Supervisor: Gastón Mompó Pavesi, Emanuel.

Collaborating Entity: ICAI – Universidad Pontificia Comillas

## ABSTRACT

This Final Degree Project studies the ability of local mobile agents to modify emergent collective structures in complex systems. This work is based on the two-dimensional Ising model, a framework widely used to analyze alignment and consensus phenomena [1]. Starting from self-organized configurations generated through Metropolis dynamics, mobile agents are introduced to act locally on the network and move across it. The results show that local interventions can induce significant global changes, identifying thresholds and configurations capable of recovering consensus states in a robust and efficient manner.

**Keywords:** Ising Model, Complex Systems, Mobile Agents, Consensus, Monte Carlo Simulation, Information Recovery, Statistical Physics, Collective Dynamics

## 1. Introduction

Complex systems are composed of numerous elements that interact locally and generate collective behaviors on a large scale. Understanding how these structures emerge and evolve is a topic of great interest in physics, biology, and social sciences. In this work, the two-dimensional Ising model is used to study the ability of mobile agents to modify configurations previously organized into domains. The objective is to analyze the extent to which local perturbations can recover global consensus states and how parameters such as temperature, actuation frequency, and the number of agents influence this process.

## 2. Objectives

The main objective of this work is to analyze how local mobile perturbations can modify the collective organization of a complex system described by the Ising model.

To achieve this, the natural dynamics of the system are studied and the ability of mobile agents to recover aligned states from initially fragmented configurations is evaluated. In addition, the effects of effective temperature, actuation frequency, and the number of agents are evaluated in terms of consensus probability, convergence time and the stability of the final states.

As a working hypothesis, it is proposed that increasing both the number of agents and their activation frequency will favor consensus recovery and reduce convergence times.

### 3. Description of the proposed system

The experimental procedure is divided into two stages. First, an initially random spin lattice evolves through Metropolis dynamics until self-organized domains are formed. Subsequently, mobile agents that act locally on the network are introduced. During this second stage, the evolution of metrics such as magnetization, the probability of consensus recovery and the stability of the final states are studied. A summary of this workflow is shown in Ilustración 3.

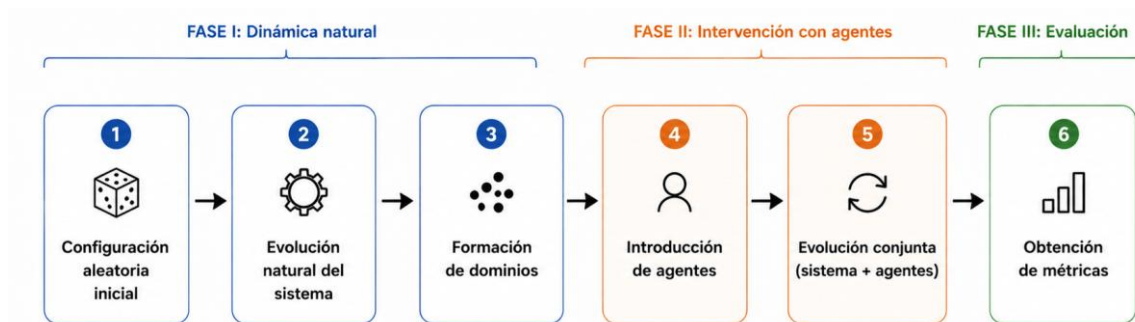
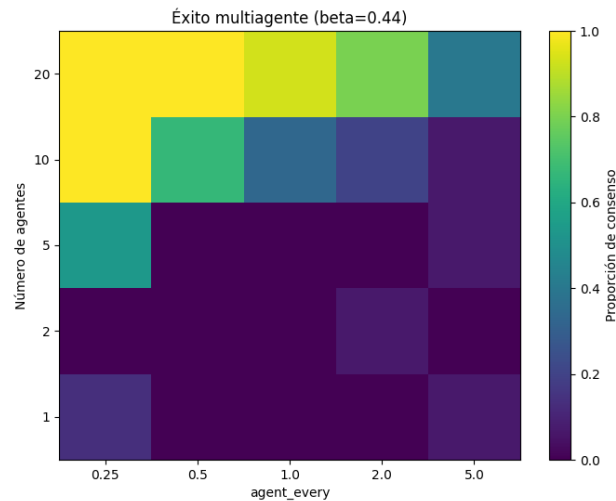


Ilustración 3 General scheme of the experimental procedure

### 4. Results

The results show that the recovery capability strongly depends on both the number of agents and their activation frequency. While a single agent exhibits limited effectiveness near the critical transition, the introduction of multiple agents produces highly significant improvements. Action thresholds are identified beyond which the probability of recovery approaches 100%. This behavior is clearly reflected in the heatmap in Ilustración 4 which shows the recovery percentage for different numbers of agents and activation frequencies.



*Ilustración 4 Success heatmap depending on the number of agents and their activation frequency*

## 5. Conclusions

The results show that strictly local perturbations can produce significant global changes in self-organized complex systems. In particular, both the number of agents and their activation frequency have a substantial impact on consensus recovery.

The main contribution of this work is the study of mobile agents acting on configurations previously organized through the natural dynamics of the Ising model, identifying action thresholds and parameter regions where recovery is especially efficient.

These results suggest that simple local mechanisms can be used to modify the collective behavior of complex systems and provide a basis for future extensions of the model.

## 6. References

- [1] C. Castellano, S. Fortunato y V. Loreto, «Statistical Physics of Social Dynamics,» *Reviews of Modern Physics*, vol. 81, nº 2, pp. 591-646, 2009.



## Índice de la memoria

<b>Capítulo 1. Introducción .....</b>	<b>1</b>
1.1 Contexto y Motivación .....	1
1.2 Objetivos .....	2
1.3 Aplicaciones potenciales .....	3
1.3.1 Recuperación de información degradada en medios físicos .....	3
1.3.2 Sistemas magnéticos y materiales con dominios .....	4
1.3.3 Analogías con sistemas sociales .....	4
1.3.4 Sistemas con agentes correctores o perturbaciones externas .....	5
1.4 Alineación con los ODS .....	5
1.5 Estructura del Trabajo .....	6
<b>Capítulo 2. Estado del Arte y fundamentos teóricos .....</b>	<b>8</b>
2.1 Modelo de Ising .....	8
2.2 Algoritmo de metropolis y simulación Monte Carlo .....	11
2.3 Métricas del sistema .....	12
2.3.1 Magnetización .....	13
2.3.2 Energía .....	13
2.3.3 Capacidad calorífica .....	14
2.3.4 Consenso .....	15
2.3.5 Tiempo hasta consenso .....	15
2.3.6 Media y varianza de la magnetización .....	16
2.4 Trabajos relacionados .....	16
2.4.1 Modelos de Ising y dinámica social .....	17
2.4.2 Agentes externos y control de sistemas complejos .....	17
2.4.3 Recuperación de información en medios físicos .....	18
<b>Capítulo 3. Sistema/Modelo Desarrollado .....</b>	<b>20</b>
3.1 Planteamiento del problema .....	20
3.2 Diseño general del experimento .....	22
3.3 Implementación .....	24
3.3.1 Modelo de Ising y generación de comunidades .....	24
3.3.2 Modelo de agentes móviles .....	25

3.3.3 Extensión multiagente .....	26
3.3.4 Métricas y criterio de recuperación .....	27
3.3.5 Implementación computacional.....	27
<b>Capítulo 4. Resultados.....</b>	<b>29</b>
4.1 Dinámica natural del sistema .....	29
4.1.1 Evolución temporal de la magnetización .....	29
4.1.2 Magnetización final en función de beta.....	31
4.1.3 Energía en función de beta.....	32
4.1.4 Capacidad calorífica .....	33
4.1.5 Formación espontánea de dominios.....	33
4.2 Influencia de un único agente.....	35
4.2.1 Ejemplos cualitativos de la acción del agente.....	35
4.2.2 Probabilidad de recuperación del conceso .....	36
4.2.3 Estado final del sistema.....	38
4.2.4 Tiempo hasta el consenso.....	40
4.3 Influencia de múltiples agentes .....	42
4.3.1 Probabilidad de recuperación del consenso .....	42
4.3.2 Evolución dinámica del sistema .....	45
4.3.3 Tiempo necesario para alcanzar el consenso.....	47
<b>Capítulo 5. Conclusiones.....</b>	<b>52</b>
<b>Capítulo 6. Trabajos Futuros.....</b>	<b>55</b>
6.1 Agentes inteligentes .....	55
6.2 Redes complejas .....	56
6.3 Opiniones no binarias.....	56
6.4 Agentes competitivos .....	57
6.5 Aplicación a medios físicos reales .....	57
<b>Capítulo 7. Bibliografía.....</b>	<b>59</b>
<b>ANEXO I 61</b>	
I.1 Estructura general del código .....	61
I.2 Parámetros principales de simulación .....	62
I.3 Inicialización de la red.....	63

---

I.4 Cálculo de la magnetización.....	63
I.5 Cálculo de la energía .....	63
I.6 Algoritmo de Metropolis .....	64
I.7 Generación de configuraciones auto organizadas.....	65
I.8 Modelo de agente móvil .....	66
I.9 Movimiento de los agentes .....	66
I.10 Influencia local del agente .....	67
I.11 Simulación con agentes .....	68
I.12 Criterio de consenso .....	69
I.13 Ejecución de múltiples simulaciones.....	69
I.14 Barrido de parámetros .....	71
I.15 Cálculo de las métricas .....	71
I.16 Generación de mapas de calor .....	72
I.17 Reproducibilidad .....	73
I.18 Consideraciones finales .....	73

## *Índice de figuras*

Ilustración 1 Esquema general del procedimiento experimental.....	8
Ilustración 2 Mapa de calor del éxito en función del número de agentes y la frecuencia de actuación.....	9
Ilustración 3 General scheme of the experimental procedure .....	12
Ilustración 4 Success heatmap depending on the number of agents and their activation frequency .....	13
Ilustración 5 Representación esquemática de las interacciones locales consideradas en el modelo .....	9
Ilustración 6 Ejemplo de configuraciones con distinta energía pero misma magnetización	14
Ilustración 7 Esquema general del procedimiento experimental.....	23
Ilustración 8 Evolución temporal de la magnetización para distintos betas.....	30
Ilustración 9 Magnetización media final en función de distintos beta .....	31
Ilustración 10 Energía media por espín en función de beta.....	32
Ilustración 11 Capacidad calorífica en función de beta.....	33
Ilustración 12 Configuraciones finales de distintos dominios.....	34
Ilustración 13 Estado del sistema antes y después de la actuación de un agente sin éxito..	35
Ilustración 14 Estado del sistema antes y después de la actuación de un agente con éxito	36
Ilustración 15 Porcentaje de éxito del agente según su frecuencia de interacción para distintos valores de beta .....	37
Ilustración 16 Magnetización final media para distintos valores de beta y frecuencias de actuación del agente.....	39
Ilustración 17 Sweeps medios necesarios hasta alcanzar el conceso para distintos valores de beta y frecuencias de actuación del agente.....	41
Ilustración 18 Mapa de calor del éxito en función del número de agentes y la frecuencia de actuación.....	43

Ilustración 19 Evolución del éxito en función del número de agentes para tres frecuencias de actuación.....	44
Ilustración 20 Evolución de la magnetización con el tiempo para distintos números de agentes .....	46
Ilustración 21 Tiempo medio hasta alcanzar el consenso para distintos números de agentes y frecuencias de actuación.....	48
Ilustración 22 Mapa de calor del tiempo necesario hasta alcanzar consenso para distintos números de agentes y frecuencias de actuación .....	49
Ilustración 23 Magnetización media contra varianza de la magnetización para distintos números de agentes.....	50



# Capítulo 1. INTRODUCCIÓN

## 1.1 CONTEXTO Y MOTIVACIÓN

Muchos sistemas naturales y artificiales están formados por un gran número de elementos simples que interactúan entre sí localmente. A pesar de que estas interacciones son simples, el comportamiento colectivo que surge a gran escala puede llegar a ser muy complejo. Este tipo de fenómenos ocurren en áreas muy diversas como la física estadística, la biología, la economía o el estudio de dinámicas sociales.

Uno de los aspectos más interesantes de estos sistemas es que pueden crear estructuras organizadas de forma espontánea. A partir de reglas simples, pueden aparecer regiones estables que evolucionan con el tiempo, y estas estructuras pueden mantenerse, dividirse o desaparecer, lo que lleva a transiciones entre estados ordenados y desordenados.

El modelo de Ising es una de las herramientas más utilizadas para estudiar fenómenos colectivos y procesos de autoorganización, aunque originalmente se creó para describir materiales magnéticos. El modelo representa un sistema de partículas binarias, llamadas espines, que pueden estar en dos estados y que interactúan con sus vecinos más cercanos. A pesar de su simplicidad, es capaz de reproducir propiedades complejas como la formación de dominios magnéticos y transiciones de fase.

Además, el modelo de Ising también ha sido aplicado como una aproximación para describir sistemas sociales y dinámicas de opinión. Desde esta perspectiva, cada espín representa la opinión binaria de una persona y la magnetización global indica la opinión media de la población. Asimismo, los dominios generados espontáneamente pueden interpretarse como comunidades y las perturbaciones externas como agentes que influyen sobre el sistema.

En los últimos años, ha aumentado el interés por estudiar cómo modificar o recuperar configuraciones colectivas. Desde el punto de vista físico, esto se relaciona con la

recuperación de información almacenada en medios magnéticos, donde el paso del tiempo, el ruido o las perturbaciones pueden desordenar la alineación original de las partículas. Un ejemplo de ello son las cintas VHS o discos magnéticos, donde la información se codifica mediante orientaciones locales y puede deteriorarse.

Resulta interesante analizar hasta qué punto pequeñas perturbaciones locales pueden recuperar el alineamiento global en un sistema previamente fragmentado. Esto puede estudiarse mediante agentes que interactúan con regiones concretas de la red y que compiten con la dinámica natural del sistema. El análisis de este comportamiento permite explorar cuestiones relacionadas con la estabilidad de las configuraciones colectivas y la resistencia de los dominios autoorganizados.

## **1.2 OBJETIVOS**

El objetivo principal de este trabajo es estudiar, mediante el modelo de Ising bidimensional, cómo las perturbaciones locales móviles afectan la organización de un sistema. Concretamente, se pretende analizar si agentes externos que actúan de forma local pueden favorecer la aparición de configuraciones más ordenadas y estables, y bajo qué condiciones este proceso es más efectivo.

Para lograr este objetivo general, se plantean los siguientes objetivos específicos:

- Caracterizar la dinámica natural del modelo de Ising bidimensional para distintos valores de parámetros, analizando la formación de dominios, la transición entre estados ordenados y desordenados y las principales propiedades macroscópicas del sistema.
- Analizar el comportamiento de magnitudes físicas relevantes, como la magnetización, la energía y la capacidad calorífica, estudiando su evolución y su relación con el grado de orden presente en la red.

- Desarrollar un modelo de agentes móviles capaces de influir localmente sobre el sistema, con el fin de estudiar cómo perturbaciones externas afectan a la organización colectiva de la red.
- Evaluar el efecto de distintos parámetros asociados a los agentes, incluyendo su frecuencia de actuación, su número y las condiciones del entorno, sobre la capacidad del sistema para alcanzar configuraciones más ordenadas.
- Cuantificar la eficacia de los agentes mediante métricas de recuperación y estabilidad, analizando el consenso alcanzado, el tiempo necesario para lograrlo y las propiedades estadísticas de las configuraciones finales.
- Identificar las condiciones y umbrales bajo los cuales la influencia local de los agentes produce cambios significativos en el comportamiento global del sistema.

En conjunto, estos objetivos permitirán comprender cómo las perturbaciones locales móviles afectan la organización de un sistema y cómo podemos hacer que un sistema se vuelva más ordenado y estable.

### ***1.3 APLICACIONES POTENCIALES***

Aunque el modelo de Ising fue desarrollado originalmente para estudiar fenómenos magnéticos, su simplicidad y capacidad para reproducir comportamientos colectivos complejos lo han convertido en una herramienta útil en muchos campos científicos. La forma en que las estructuras organizadas aparecen a partir de interacciones locales es un fenómeno común en sistemas muy diferentes, lo que permite que los resultados de este trabajo puedan interpretarse desde diferentes perspectivas. A continuación, se plantearán algunas aplicaciones de interés físico y, por último, una aplicación de interés social.

#### **1.3.1 RECUPERACIÓN DE INFORMACIÓN DEGRADADA EN MEDIOS FÍSICOS**

Una posible aplicación de este estudio es la recuperación de información en medios físicos. En algunos sistemas magnéticos, la información se representa mediante la orientación de partículas o dominios magnéticos. Con el tiempo, el ruido y las perturbaciones externas

pueden provocar una pérdida parcial de la alineación original, lo que dificulta la recuperación de la información almacenada.

Los agentes introducidos en este trabajo pueden interpretarse como mecanismos correctores que actúan localmente en el sistema para restaurar configuraciones más ordenadas. Analizar su capacidad para recuperar el alineamiento global puede aportar información útil sobre la eficacia de estrategias de corrección distribuidas en sistemas degradados.

### **1.3.2 SISTEMAS MAGNÉTICOS Y MATERIALES CON DOMINIOS**

El modelo de Ising es una representación simplificada de materiales ferromagnéticos en los que los espines vecinos tienden a alinearse. En ciertas condiciones, aparecen dominios magnéticos que son regiones donde la orientación de los espines es homogénea, separadas por fronteras en las que coexisten diferentes orientaciones.

Estudiar la formación, estabilidad y evolución de estos dominios es importante en física de materiales, ya que ayuda a entender mejor los mecanismos que gobiernan la aparición de orden colectivo y la respuesta del sistema a perturbaciones externas. En este contexto, los agentes móviles pueden considerarse influencias locales que pueden modificar la estructura de dominios existente y favorecer determinados estados de alineamiento.

### **1.3.3 ANALOGÍAS CON SISTEMAS SOCIALES**

Además de sus aplicaciones físicas, el modelo de Ising ha sido utilizado con frecuencia para representar fenómenos relacionados con la dinámica de opinión en poblaciones. Recordamos que en esta interpretación cada espín representa la opinión de un individuo sobre una cuestión binaria, mientras que las interacciones locales modelan la influencia que los individuos ejercen en su entorno más cercano.

La magnetización puede considerarse como una medida de la opinión promedio de la población y los dominios representan comunidades o grupos de individuos con opiniones similares. Asimismo, la coexistencia de varios dominios puede asociarse a fenómenos de polarización, donde diferentes grupos mantienen posiciones distintas de forma estable.

Aunque este trabajo mantiene un enfoque físico, esta interpretación social proporciona una herramienta intuitiva para entender el significado de muchas de las métricas analizadas y facilita la comparación con estudios previos realizados en el ámbito de los sistemas sociales complejos.

### **1.3.4 SISTEMAS CON AGENTES CORRECTORES O PERTURBACIONES EXTERNAS**

Finalmente, los agentes móviles considerados en este trabajo pueden interpretarse de forma general como entidades que introducen información o perturbaciones en un sistema complejo. Dependiendo del contexto, estos agentes pueden representar mecanismos de corrección, procesos de control distribuido, fuentes externas de influencia o elementos encargados de modificar localmente el estado del sistema.

Estudiar cómo la eficacia de estos agentes depende de factores como su número, frecuencia de actuación o entorno dinámico permite entender mejor la relación entre acciones locales y comportamiento global. Este tipo de análisis es relevante en muchos problemas donde pequeñas intervenciones distribuidas pueden generar efectos significativos en la organización colectiva del sistema.

## ***1.4 ALINEACIÓN CON LOS ODS***

Este trabajo se centra principalmente en el Objetivo de Desarrollo Sostenible 9 (Industria, Innovación e Infraestructura), al contribuir al desarrollo y aplicación de herramientas de modelado computacional para el estudio de sistemas complejos. El uso de simulaciones basadas en el modelo de Ising y métodos Monte Carlo permite analizar fenómenos colectivos difíciles de estudiar experimentalmente, proporcionando un marco flexible para la investigación de procesos de auto organización, estabilidad y recuperación de información. Este tipo de métodos son una herramienta muy relevante en el ámbito de la innovación científica y tecnológica.

Asimismo, el trabajo puede relacionarse parcialmente con el Objetivo de Desarrollo Sostenible 16 (Paz, Justicia e Instituciones Sólidas), debido a la interpretación social del

modelo. La representación de individuos mediante espines y la formación espontánea de comunidades permiten estudiar de forma simplificada fenómenos como el consenso, la polarización y la estabilidad de sistemas colectivos.

Por tanto, este proyecto contribuye principalmente al avance de herramientas de simulación y análisis de sistemas complejos, manteniendo además una conexión indirecta con el estudio de dinámicas colectivas presentes en distintos contextos sociales.

## ***1.5 ESTRUCTURA DEL TRABAJO***

La presente memoria se organiza en siete capítulos principales.

En el Capítulo 1 se introduce el contexto del problema, la motivación del trabajo, los objetivos perseguidos y las posibles aplicaciones del estudio, así como su alineación con los Objetivos de Desarrollo Sostenible.

El Capítulo 2 presenta los fundamentos teóricos necesarios para comprender el trabajo. En él se describen el modelo de Ising, el algoritmo de Metropolis empleado en las simulaciones, las métricas utilizadas para caracterizar el sistema y los trabajos relacionados más relevantes.

En el Capítulo 3 se detalla el modelo desarrollado, incluyendo el diseño de los experimentos, la implementación del sistema y la definición de los agentes móviles utilizados para introducir perturbaciones locales sobre la red.

El Capítulo 4 recoge los resultados obtenidos. En primer lugar, se analiza la dinámica natural del sistema y, posteriormente, se estudia la influencia de uno o varios agentes sobre la capacidad de recuperación del consenso y la estabilidad de las configuraciones finales.

En el Capítulo 5 se presentan las conclusiones principales del trabajo, evaluando el grado de cumplimiento de los objetivos e hipótesis planteados.

El Capítulo 6 describe diversas líneas de trabajo futuro que permitirían ampliar el alcance del modelo y explorar nuevas aplicaciones.

Finalmente, el Capítulo 7 recopila las referencias bibliográficas empleadas a lo largo del documento, mientras que los anexos incluyen información complementaria relacionada con la implementación y los experimentos realizados.

## Capítulo 2. ESTADO DEL ARTE Y FUNDAMENTOS

### TEÓRICOS

#### 2.1 *MODELO DE ISING*

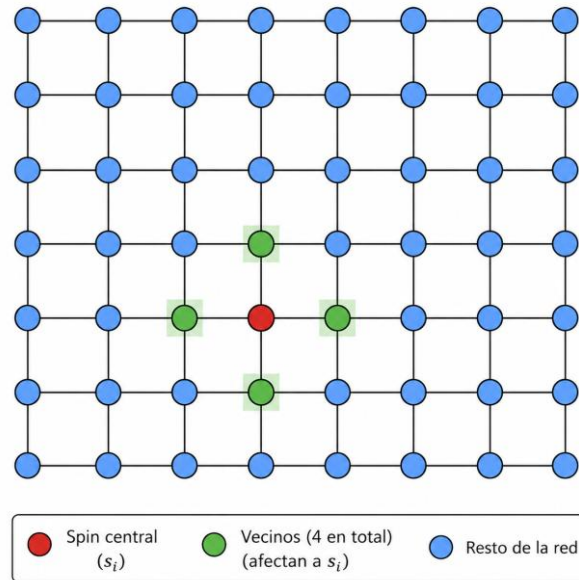
El modelo de Ising es uno de los modelos más importantes y estudiados en la física estadística (Ising, 1925). Originalmente fue desarrollado para describir el comportamiento de materiales ferromagnéticos y, a pesar de su aparente simplicidad, es capaz de reproducir fenómenos colectivos complejos como la formación de dominios magnéticos, las transiciones de fase o la aparición de estructuras auto organizadas.

En su forma más básica, el modelo consiste en una red de partículas llamadas espines donde cada espín puede estar en dos estados posibles, representados matemáticamente como

$$s_i \in \{-1, +1\},$$

donde  $s_i = -1$  y  $s_i = +1$  indican las dos posibles orientaciones de la partícula.

En este trabajo se considera una red cuadrada de tamaño  $L \times L$ , donde cada espín solo interactúa con sus vecinos más próximos. La Ilustración 5 ilustra esquemáticamente esta interacción local, mostrando un espín central y los espines vecinos que contribuyen a determinar su energía. Esta hipótesis de interacción local, aunque sencilla, es suficiente para generar comportamientos colectivos complejos a gran escala.



*Ilustración 5 Representación esquemática de las interacciones locales consideradas en el modelo*

Aunque las redes de interacción presentes en sistemas reales suelen tener estructuras mucho más complejas, la red cuadrada constituye uno de los escenarios más estudiados dentro de la física estadística. Su comportamiento es muy conocido y presenta propiedades especialmente importantes para este trabajo, como la aparición espontánea de dominios de espines alineados y transiciones entre estados ordenados y desordenados. Utilizar una red cuadrada permite analizar el efecto de los agentes móviles en un entorno controlado y ampliamente validado en la literatura, antes de considerar estructuras de red más complejas.

La configuración energética del sistema viene determinada por el siguiente Hamiltoniano:

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} s_i s_j,$$

donde  $J$  representa la intensidad de interacción entre espines. En este trabajo se asume que  $J$  es uniforme para todas las interacciones de la red, es decir, todos los pares de espines vecinos interactúan con la misma intensidad. Además, la notación  $\langle i,j \rangle$  indica que el sumatorio se realiza únicamente sobre pares de espines vecinos, evitando contar dos veces la misma interacción.

Cuando  $J > 0$ , como ocurre en el presente trabajo, el sistema favorece que los espines vecinos tengan la misma orientación. Esto lleva a la formación de dominios magnéticos donde la mayoría de los espines comparten orientación, este tipo de interacción se denomina ferromagnética.

El modelo de Ising también tiene una transición de fase entre estados ordenados y desordenados (Onsager, 1944). Para valores elevados de temperatura, los espines presentan orientaciones prácticamente aleatorias, y por tanto, la red no muestra una estructura global definida y la magnetización tiende a cero. Por el contrario, cuando la temperatura disminuye las interacciones entre vecinos adquieren un papel importante y aparecen grandes dominios alineados. En este régimen, el sistema se vuelve más ordenado y la magnetización aumenta.

Entre ambos comportamientos existe una región crítica con fuertes fluctuaciones y una gran sensibilidad a pequeñas perturbaciones. En el modelo de Ising bidimensional esta transición ocurre alrededor de un valor crítico de  $\beta_c \approx 0.44$ , donde  $\beta$  representa al inverso de la temperatura ( $\beta = 1/T$ ). Esta zona es muy interesante porque da lugar a configuraciones complejas y altamente dinámicas (Onsager, 1944).

Aunque el modelo fue creado para describir sistemas físicos, se ha aplicado a otros ámbitos. Una interpretación habitual es asociar cada espín con la opinión de un individuo en una población. La magnetización puede interpretarse como la opinión promedio de la población, y los dominios representan comunidades o grupos de individuos con opiniones similares (Castellano, Fortunato, & Loreto, 2009).

El modelo de Ising es una herramienta útil para estudiar fenómenos como la formación de consenso, la polarización social y la difusión de opiniones en redes complejas (Castellano, Fortunato, & Loreto, 2009) (Galam, 2008). En este trabajo, se analiza cómo perturbaciones locales móviles pueden modificar la organización de una red previamente estructurada en dominios.

## 2.2 ALGORITMO DE METROPOLIS Y SIMULACIÓN MONTE CARLO

El modelo de Ising define las posibles configuraciones del sistema y que energía tienen cada una de ellas. Sin embargo, para entender cómo evolucionan con el tiempo necesitamos una forma de generar nuevas configuraciones y decidir cuáles son aceptables. Para ello, en este trabajo se emplea el algoritmo de Metropolis (Metropolis, Rosenbluth, Rosenbluth, Teller, & Teller, 1953), uno de los métodos Monte Carlo más utilizados en física estadística.

Los métodos Monte Carlo son una forma de simular sistemas complejos generando procesos aleatorios. En el caso del modelo de Ising, estos métodos permiten simular la evolución de una red de espines bajo fluctuaciones térmicas, y cómo se comporta en equilibrio térmico.

El algoritmo de Metropolis actualiza la red de espines poco a poco. En cada paso se elige un espín al azar y se intenta cambiar su orientación, generando una variación de energía que puede calcularse a partir de la Hamiltoniana del sistema descrita en la sección anterior. Posteriormente, el algoritmo decide si acepta o rechaza el cambio propuesto. Si la nueva configuración reduce la energía total del sistema el cambio siempre se acepta porque el sistema se vuelve más estable. Sin embargo, si la energía aumenta el cambio solo se acepta con una determinada probabilidad:

$$P(\Delta E) = \begin{cases} 1, & \Delta E \leq 0 \\ e^{-\beta \Delta E}, & \Delta E > 0 \end{cases}$$

donde  $E = H$ , y  $\beta$  representa el inverso de la temperatura:

$$\beta = \frac{1}{T}$$

Esta regla de aceptación es uno de los aspectos fundamentales del algoritmo. La probabilidad de aceptar un cambio depende de la variación de energía y de la temperatura. Si la temperatura es alta (valores pequeños de  $\beta$ ), es más probable que se acepten cambios que

aumentan la energía, como consecuencia los espines cambian de orientación con frecuencia y el sistema se vuelve desordenado.

Por el contrario, cuando la temperatura disminuye (valores altos de  $\beta$ ) las configuraciones que aumentan energía son aceptadas con mucha menos frecuencia. Por tanto, las interacciones entre espines vecinos predominan sobre el ruido térmico y el sistema se vuelve más estable.

La competición entre interacción local y fluctuaciones térmicas es la responsable de la transición entre los regímenes ordenados y desordenados en el modelo de Ising. Cerca de la temperatura crítica, pequeños cambios pueden hacer que el sistema cambie de forma significativa.

En las simulaciones realizadas en este trabajo, la evolución del sistema se implementa mediante repetidas aplicaciones del algoritmo de Metropolis sobre una red bidimensional con condiciones de contorno periódicas. Cada ciclo completo de actualización, denominado Monte Carlo sweep, consiste en realizar aproximadamente  $L^2$  intentos de modificación de espines, de manera que cada espín tiene en promedio la oportunidad de actualizar su estado una vez por ciclo (Newman & Barkema, 1999). Esto permite estudiar la evolución temporal del sistema y analizar cómo diferentes valores de  $\beta$  influyen en la formación de dominios, la estabilidad de las configuraciones y la respuesta frente a perturbaciones externas.

### **2.3 MÉTRICAS DEL SISTEMA**

Para entender cómo se comporta el sistema y cómo evoluciona cuando se le introducen perturbaciones con agentes móviles necesitamos definir algunas medidas que indiquen cómo está el estado global de la red y cómo cambia con el tiempo. Algunas de estas magnitudes vienen de la física estadística (Newman & Barkema, 1999) y otras se han creado específicamente para para ver cómo de bien se recupera y se estabiliza el sistema.

### 2.3.1 MAGNETIZACIÓN

La magnetización es una de las medidas más importantes del modelo de Ising, ya que indica el grado de alineamiento global de los espines. Se calcula sumando el estado de cada espín y dividiéndolo por el número total de espines:

$$m = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N s_i$$

donde  $N = L^2$  representa el número total de espines de la red y  $s_i$  el estado del espín  $i$ .

Cuando todos los espines apuntan en la misma dirección la magnetización toma valores cercanos a  $\pm 1$ . Por el contrario, cuando los espines están distribuidos de manera equilibrada la magnetización se aproxima a cero.

Desde el punto de vista físico, la magnetización indica el grado de orden global del sistema, permitiendo distinguir entre configuraciones alineadas y desordenadas. En este trabajo resulta especialmente útil para poder evaluar la capacidad de los agentes para inducir alineamiento en una red inicialmente dividida en dominios. También podemos interpretar la magnetización como la opinión promedio de la población, valores cercanos a cero significan que hay grupos con opiniones opuestas, mientras que valores altos significan que la mayoría de la gente está de acuerdo.

### 2.3.2 ENERGÍA

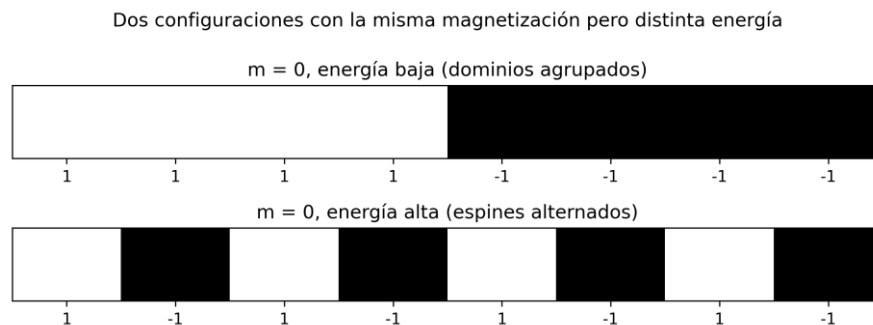
La energía indica el grado de coherencia local existente entre espines vecinos y se calcula a partir de la Hamiltoniana del sistema. En este trabajo, la energía total del sistema coincide con el valor de la Hamiltoniana, es decir,  $E = H$ . Para facilitar la comparación entre simulaciones con distinto tamaño de red, se utilizará frecuentemente la energía por espín,

$$e = \frac{E}{N},$$

donde  $N = L^2$  representa el número total de espines de la red.

Desde el punto de vista físico, configuraciones con poca energía se corresponden con estados donde la mayoría de los espines vecinos apuntan en la misma dirección, mientras que configuraciones con alta energía presentan muchas fronteras entre dominios y un mayor desorden local.

La energía proporciona información adicional a la magnetización. Dos configuraciones pueden tener la misma magnetización, pero diferente energía dependiendo de cómo estén distribuidos los espines. La Ilustración 6 muestra un ejemplo de dos configuraciones que tienen la misma magnetización total ( $m = 0$ ), ya que contienen el mismo número de espines positivos y negativos. Pero, sin embargo, presentan un nivel energía diferente, en la primera configuración los espines iguales se agrupan formando dominios, lo que reduce el número de interacciones desfavorables y, por tanto, la energía. Y en la segunda, los espines alternan continuamente de signo, generando desacuerdos entre prácticamente todos los vecinos y aumentando significativamente la energía.



*Ilustración 6 Ejemplo de configuraciones con distinta energía pero misma magnetización*

La energía puede interpretarse socialmente como el nivel de conflicto o desacuerdo entre personas cercanas, áreas con opiniones opuestas generan más energía, mientras que comunidades homogéneas son más estables.

### 2.3.3 CAPACIDAD CALORÍFICA

La capacidad calorífica representa cuánto cambia la energía del sistema cuando cambia la temperatura. Se calcula usando la fórmula:

$$C = \beta^2 \cdot N \cdot (\langle e^2 \rangle - \langle e \rangle^2)$$

donde  $e$  es la energía por espín y los símbolos  $\langle \cdot \rangle$  indican promedios temporales.

Esta medida permite medir como responde el sistema frente a variaciones de temperatura. Cerca de una transición de fase pequeños cambios en la temperatura pueden hacer que el sistema varíe mucho, lo que aumenta la capacidad calorífica. Por este motivo, la capacidad calorífica suele utilizarse para localizar la región donde el sistema pasa de un comportamiento ordenado a uno desordenado.

Bajo una interpretación social, la capacidad calorífica puede asociarse a la sensibilidad colectiva de una población, valores altos significan que pequeños cambios externos pueden hacer que la población cambie mucho, mientras que valores bajos significan que la población es más estable y resistente al cambio.

### **2.3.4 CONSENSO**

Además de las magnitudes clásicas, en este trabajo se introduce una medida para evaluar el éxito de los agentes móviles. Se considera que el sistema ha alcanzado consenso cuando al menos el 95 % de los espines comparten la misma orientación. Esto nos permite identificar objetivamente cuándo una configuración inicialmente fragmentada se ha vuelto prácticamente alineada.

El consenso representa la recuperación de un alineamiento global dominante. En la interpretación social, equivale a la existencia de una mayoría claramente dominante dentro de la población. Esta medida nos permite ver cuán efectivos son los agentes y comparar diferentes estrategias.

### **2.3.5 TIEMPO HASTA CONSENSO**

Una vez definido el consenso, resulta natural medir el tiempo que se necesita para alcanzarlo. En este trabajo el tiempo hasta consenso es el número de ciclos de Monte Carlo necesarios para que el sistema alcance por primera vez el umbral del 95 % de espines alineados.

Mientras que la proporción de simulaciones exitosas indica si los agentes pueden cambiar la configuración global, el tiempo hasta consenso nos otorga información sobre el tiempo necesario para que esto suceda.

Por tanto, ambas medidas son complementarias para caracterizar la eficacia de las perturbaciones introducidas.

### **2.3.6 MEDIA Y VARIANZA DE LA MAGNETIZACIÓN**

Finalmente, para analizar la estabilidad de los estados alcanzados tras la actuación de los agentes, se consideran la media y la varianza de la magnetización durante las etapas finales de la simulación.

La media de la magnetización indica cuánto orden hay en el sistema una vez se ha alcanzado el régimen estacionario. Valores elevados indican configuraciones altamente ordenadas, mientras que valores bajos reflejan la persistencia de dominios con orientaciones opuestas.

Por otro lado, la varianza de la magnetización mide la intensidad de las fluctuaciones temporales. Una varianza pequeña indica que el sistema permanece estable alrededor de una configuración concreta, mientras que una varianza elevada indica la existencia de cambios continuos o fluctuaciones persistentes.

El análisis conjunto de ambas medias permite distinguir entre configuraciones completamente estabilizadas, estados parcialmente alineados y regímenes donde el sistema continúa evolucionando de forma significativa. Esta información es especialmente útil para comparar el comportamiento de diferentes configuraciones multiagente y evaluar la robustez de los estados finales obtenidos.

## **2.4 TRABAJOS RELACIONADOS**

El modelo de Ising y los métodos de física estadística se han usado durante décadas para estudiar fenómenos colectivos en sistemas compuestos por muchos elementos que interactúan localmente. Aunque su origen se basa en describir materiales magnéticos,

muchos trabajos han extendido estos modelos a contextos sociales, sistemas complejos y procesos de control distribuido.

### **2.4.1 MODELOS DE ISING Y DINÁMICA SOCIAL**

Un área donde el modelo de Ising ha tenido mucho impacto fuera de la física es en el estudio de dinámicas de opinión y comportamiento colectivo. Aquí, los espines se interpretan como opiniones binarias y las interacciones entre vecinos son mecanismos de influencia social.

Varios trabajos han mostrado que modelos inspirados en la física estadística son capaces de reproducir fenómenos como la formación de consenso, la polarización, la coexistencia de comunidades con opiniones opuestas o la difusión de información en poblaciones complejas. Un trabajo destacado es el de Castellano, Fortunato y Loreto (2009), que ofrece una visión general del uso de herramientas de física estadística para estudiar procesos sociales y dinámicas colectivas.

Más recientemente, distintos autores han estudiado modelos de opinión en redes con estructura comunitaria utilizando variantes del modelo de Ising. Con ellas analizan cómo la presencia de comunidades, influencias externas y niveles de interacción afectan a la estabilidad de configuraciones colectivas y a los tiempos necesarios para alcanzar consenso (Baldassarri, Gallo, Jacquier, & Zocca, 2023).

Estos trabajos muestran que el modelo de Ising es útil para describir sistemas donde la organización global surge a partir de interacciones locales simples, tanto en contextos físicos como sociales.

### **2.4.2 AGENTES EXTERNOS Y CONTROL DE SISTEMAS COMPLEJOS**

Además del estudio de la dinámica espontánea, muchos trabajos han analizado el efecto de agentes externos que modifican localmente el estado del sistema.

En dinámicas de opinión diferentes modelos incorporan fuentes externas de información, campañas de influencia o perturbaciones que compiten con las interacciones entre individuos (Sîrbu, Loreto, Servedio, & Tria, 2017). Estas influencias externas pueden alterar

significativamente la evolución del sistema, especialmente cerca de transiciones críticas, donde pequeñas perturbaciones son capaces de generar cambios macroscópicos.

Asimismo, diversos estudios han investigado cómo agentes localizados pueden favorecer, impedir o acelerar procesos de consenso en redes complejas (Ramos, de Aguiar, & Braha, 2018). El interés principal es comprender bajo qué condiciones una perturbación local es capaz de propagarse y modificar estructuras estabilizadas.

Este trabajo se sitúa dentro de esta línea de investigación, pero introduce varios elementos diferenciadores respecto a los estudios anteriores. En primer lugar, los agentes actúan sobre configuraciones previamente autoorganizadas mediante la dinámica natural del modelo de Ising, en lugar de partir de estados completamente aleatorios. Esto permite analizar la capacidad de las perturbaciones locales para modificar estructuras colectivas ya formadas y estudiar la resistencia de los dominios frente a influencias externas.

En segundo lugar, los agentes considerados son móviles y actúan únicamente sobre su entorno local, desplazándose por la red e introduciendo perturbaciones distribuidas espacialmente. Además, se analiza de forma sistemática el efecto de la frecuencia de actuación de los agentes, evaluando cómo la intensidad temporal de la intervención afecta a la recuperación del consenso.

Por último, además del caso de un único agente, se estudia la actuación simultánea de múltiples agentes cooperativos, permitiendo cuantificar cómo la capacidad de recuperación del sistema escala con el número de agentes presentes y comparar su eficacia colectiva frente a la actuación individual.

### **2.4.3 RECUPERACIÓN DE INFORMACIÓN EN MEDIOS FÍSICOS**

Existen aplicaciones físicas donde problemas similares aparecen de forma natural. En sistemas de almacenamiento magnético la información se representa mediante configuraciones locales de partículas o dominios magnéticos. Con el paso del tiempo, el ruido térmico, las perturbaciones externas o mecanismos de degradación se pueden alterar parcialmente estas configuraciones y dificultar la recuperación de información original.

Diversos trabajos han explorado estrategias de corrección o reconstrucción de información degradada utilizando algoritmos capaces de actuar localmente sobre el sistema. Un ejemplo reciente son estudios sobre recuperación de información almacenada en medios magnéticos degradados, donde algoritmos correctores intentan reconstruir patrones originales a partir de configuraciones deterioradas (Vopson & Lepadatu, 2022).

Aunque este trabajo no modela directamente un sistema físico concreto de almacenamiento magnético, sí comparte una idea fundamental con este tipo de problemas, analizar hasta qué punto pequeñas intervenciones locales pueden modificar o recuperar configuraciones globales previamente fragmentadas.

Desde esta perspectiva, los agentes móviles considerados pueden interpretarse como mecanismos correctores distribuidos que compiten con la dinámica natural del sistema para favorecer estados más alineados y estables.

En conclusión, la literatura revisada muestra que tanto los modelos de Ising aplicados a dinámicas sociales como los trabajos sobre control de sistemas complejos comparten una cuestión fundamental, determinar hasta qué punto intervenciones locales pueden modificar el comportamiento global de un sistema. Por tanto, la principal contribución de este trabajo consiste en estudiar agentes móviles con influencia local sobre configuraciones autoorganizadas del modelo de Ising, analizando de forma sistemática el efecto de su frecuencia de actuación y del número de agentes presentes sobre la recuperación del consenso y la estabilidad de los estados finales.

## Capítulo 3. SISTEMA/MODELO DESARROLLADO

### 3.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Los capítulos anteriores han mostrado cómo el modelo de Ising es capaz de generar estructuras complejas a partir de interacciones simples. En particular, cuando el sistema está cerca de la región crítica aparecen áreas grandes de espines alineados que coexisten con regiones de orientación opuesta. Estas configuraciones representan estados autoorganizados donde existe orden local pero no necesariamente un alineamiento global completo.

El presente trabajo se centra en analizar la respuesta de estas configuraciones cuando se enfrentan a perturbaciones externas localizadas. En lugar de estudiar sistemas completamente aleatorios, se considera una situación más realista en la que la red ya ha evolucionado espontáneamente y presenta comunidades o dominios previamente formados.

La pregunta principal que guía este estudio es:

¿Bajo qué condiciones un conjunto de perturbaciones locales móviles puede recuperar o imponer alineamiento global en un sistema de Ising previamente auto organizado en dominios?

Para responder a esta pregunta se introducen agentes móviles que pueden actuar localmente sobre la red, modificando la orientación de determinados espines y desplazándose posteriormente a nuevas posiciones. El objetivo es analizar hasta qué punto estas perturbaciones son capaces de alterar la organización natural del sistema y favorecer configuraciones más alineadas.

A partir de esta pregunta principal surgen varias preguntas específicas que estructuran el desarrollo experimental del trabajo:

- ¿Cómo cambia la capacidad de recuperación del sistema cuando se modifica el parámetro  $\beta$ , responsable del equilibrio entre interacción local y ruido térmico?
- ¿Cómo influye el número de agentes presentes en la red sobre la probabilidad de alcanzar estados altamente alineados?
- ¿Cómo afecta la frecuencia de actuación de los agentes a la velocidad y eficacia del proceso de recuperación?
- ¿Qué cambios experimentan las distintas métricas del sistema tras la introducción de perturbaciones externas?
- ¿Existen configuraciones o regímenes dinámicos especialmente resistentes a la recuperación del alineamiento global?

Para poder responder a estas preguntas se diseñarán una serie de experimentos basados en simulaciones Monte Carlo sobre redes bidimensionales. Durante la primera fase se estudiará la dinámica natural del modelo de Ising y la formación espontánea de dominios. Posteriormente, se introducirán agentes móviles con diferentes estrategias de actuación para analizar su capacidad de modificar la estructura previamente generada. De esta forma, el trabajo permitirá estudiar la robustez de los estados autoorganizados y la eficacia de distintos mecanismos de intervención local sobre sistemas complejos.

A partir de estas preguntas, se plantean las siguientes hipótesis de trabajo, que servirán como guía para interpretar los resultados obtenidos en las simulaciones:

**H1. Influencia de la temperatura efectiva.** La capacidad de los agentes para inducir consenso depende del valor de  $\beta$ . Se espera que cerca de la región crítica, donde existen dominios estables y fuertes fluctuaciones, el sistema sea más resistente a la intervención externa. Por el contrario, para valores mayores de  $\beta$ , donde la dinámica natural favorece estados más ordenados, se espera que la recuperación del consenso sea más probable.

**H2. Frecuencia de actuación del agente.** Para un número fijo de agentes y un valor dado de  $\beta$ , se espera que una mayor frecuencia de actuación aumente la probabilidad de recuperar el consenso, ya que el agente introduce perturbaciones locales con mayor frecuencia sobre la red.

**H3. Número de agentes.** Se espera que aumentar el número de agentes incremente la probabilidad de alcanzar consenso, al aumentar la cantidad de regiones de la red que son modificadas de forma simultánea.

**H4. Umbral multiagente.** Para una frecuencia de actuación fija, se espera que exista un número mínimo de agentes a partir del cual la recuperación del consenso se vuelve altamente probable. Por debajo de ese umbral, la influencia colectiva de los agentes debería ser insuficiente para modificar el estado global del sistema.

**H5. Equilibrio entre dinámica natural e intervención externa.** Se espera que la recuperación del consenso dependa de la competencia entre la dinámica natural del sistema y la acción de los agentes. En algunos regímenes, una intervención local puede ser insuficiente, mientras que en otros puede reforzar la tendencia natural del sistema hacia estados alineados y acelerar la recuperación.

**H6. Estabilidad de los estados finales.** Se espera que las configuraciones obtenidas con mayor número de agentes presenten una magnetización media más alta y una menor varianza final, indicando estados más ordenados y estables.

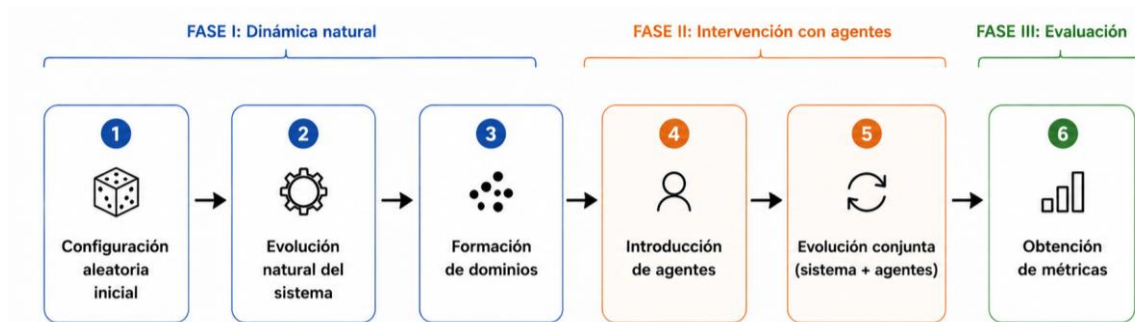
Estas hipótesis no se plantean como afirmaciones cerradas, sino como expectativas razonables derivadas del comportamiento del modelo y del diseño experimental. En el capítulo de resultados se analizará en qué medida quedan confirmadas, matizadas o rechazadas por las simulaciones realizadas.

## **3.2 DISEÑO GENERAL DEL EXPERIMENTO**

El experimento seguido en este trabajo se divide en dos fases principales. En primer lugar, se genera una configuración inicial usando la dinámica natural del modelo de Ising, sin intervención externa. En segundo lugar, se introducen agentes móviles que actúan

localmente sobre esa configuración para analizar si pueden recuperar o imponer un alineamiento global.

La Ilustración 7 resume de forma esquemática las distintas etapas que componen el procedimiento experimental seguido a lo largo de este trabajo.



*Ilustración 7 Esquema general del procedimiento experimental*

La primera fase comienza con una red cuadrada de tamaño  $L \times L$ , cuyos espines se inicializan de forma aleatoria. A partir de ahí el sistema evoluciona siguiendo el algoritmo de Metropolis descrito anteriormente. Durante esta etapa no interviene ningún agente externo y la red se organiza solo por la interacción local entre espines y el ruido térmico. El objetivo es obtener configuraciones auto organizadas en dominios.

Es especialmente interesante el régimen cercano a  $\beta \approx 0.44$ , donde el sistema no tiene un consenso global completo pero tampoco es una red totalmente desordenada. En esta región aparecen dominios de espines alineados que conviven con dominios de orientación opuesta. Por el contrario, para valores significativamente inferiores a  $\beta \approx 0.44$  el sistema se encuentra en un régimen predominantemente desordenado, donde apenas se forman dominios estables y la magnetización es cercana a cero. Como el objetivo de este trabajo es estudiar la capacidad de los agentes para recuperar estructuras colectivas previamente formadas, estos regímenes resultan menos relevantes y los experimentos con agentes se concentrarán en valores de  $\beta$  iguales o superiores al entorno de la transición crítica.

Una vez generada esta configuración inicial, comienza la segunda fase del experimento en la cual se introducen agentes móviles que pueden modificar localmente el estado de la red.

Estos agentes actúan sobre determinados espines y luego se desplazan por el sistema, generando perturbaciones localizadas.

La decisión de separar el experimento en estas dos fases es importante. Si los agentes actuaran desde una configuración completamente aleatoria, estarían influyendo también en la formación inicial de los dominios. En cambio, al introducirlos sobre una red previamente auto organizada es posible analizar de forma más clara si las perturbaciones locales son capaces de modificar estructuras colectivas ya formadas.

Durante la fase con agentes se registran distintas métricas para evaluar la evolución del sistema. Entre ellas se incluyen la magnetización, que mide el grado de alineamiento global, la proporción de simulaciones que alcanzan el criterio de recuperación, el tiempo necesario para alcanzarlo, y la media y varianza de la magnetización en la etapa final.

Este diseño permite estudiar cómo cambia la capacidad de recuperación del sistema al variar parámetros como la temperatura efectiva, el número de agentes o la frecuencia con la que actúan. De esta forma, se puede analizar no solo si el sistema alcanza un estado alineado, sino también cómo lo hace, cuánto tarda y qué grado de estabilidad presenta el estado final.

### **3.3 IMPLEMENTACIÓN**

El sistema desarrollado en este trabajo combina un modelo computacional con un mecanismo de perturbación mediante agentes móviles. El objetivo es estudiar cómo diferentes configuraciones de agentes pueden cambiar o recuperar el alineamiento global de una red auto organizada previamente en dominios.

#### **3.3.1 MODELO DE ISING Y GENERACIÓN DE COMUNIDADES**

La base del sistema es una red cuadrada de tamaño  $L \times L$ , donde cada nodo representa un espín que puede adoptar uno de dos estados posibles,  $s_i \in \{-1, +1\}$ . Estos estados

representan las dos orientaciones posibles de cada elemento del sistema y evolucionan mediante interacciones locales con los espines vecinos.

Para evitar efectos artificiales producidos por los bordes de la red, se utilizan condiciones periódicas de contorno, esto significa que los extremos opuestos de la red están conectados como si la estructura tuviera una superficie toroidal. De esta manera, todos los espines tienen el mismo número de vecinos y se elimina la influencia de regiones privilegiadas

Las configuraciones iniciales se generan asignando aleatoriamente a cada espín uno de los dos estados posibles con igual probabilidad. A partir de ahí, el sistema evoluciona mediante el algoritmo de Metropolis descrito previamente. En cada actualización se selecciona un espín aleatorio y se evalúa el cambio de energía asociado a invertir su orientación. La aceptación o rechazo de dicho cambio depende de la variación energética y del parámetro  $\beta$ , que controla el nivel de ruido térmico.

Para obtener configuraciones estables, las simulaciones se ejecutan durante varios miles de sweeps antes de introducir perturbaciones externas. Se utiliza mayoritariamente un valor de  $\beta \approx 0.44$ , que corresponde a la región crítica del modelo de Ising, ya que aparecen dominios extensos de espines alineados que coexisten con dominios de orientación opuesta. Estas configuraciones son el punto de partida de los experimentos posteriores.

### **3.3.2 MODELO DE AGENTES MÓVILES**

Una vez generadas las comunidades iniciales, se introducen agentes móviles que pueden modificar localmente la configuración de la red. Cada agente tiene una opinión fija representada por un espín positivo (+1), que intenta imponer sobre la región donde actúa.

Los agentes se desplazan por la red siguiendo una trayectoria aleatoria. En cada interacción seleccionan aleatoriamente uno de los ocho vecinos más cercanos y se desplazan a dicha posición. Esto permite que la influencia del agente se propague progresivamente por distintas zonas del sistema.

La actuación de un agente consiste en modificar la orientación de los espines presentes en una determinada vecindad alrededor de su posición. De esta forma, el agente genera una perturbación local que compite con la dinámica natural del modelo de Ising. En la implementación utilizada cada agente modifica el estado del espín situado en su posición y de los ocho vecinos más cercanos, formando una región de influencia de  $3 \times 3$  celdas. Esta elección se realizó después de hacer algunos experimentos preliminares en los que se observó que influir solo en el espín central o en los cuatro vecinos ortogonales producía efectos mucho más débiles en la dinámica general del sistema.

Además, se introduce un parámetro denominado frecuencia de actuación que controla cada cuánto tiempo intervienen los agentes respecto a la evolución natural del sistema. Esto permite estudiar distintos niveles de influencia externa.

### **3.3.3 EXTENSIÓN MULTIAGENTE**

Además de los experimentos con un único agente, se desarrolló una versión extendida del modelo que permite incorporar múltiples agentes que actúan simultáneamente sobre la misma red.

En este caso, las posiciones iniciales de los agentes se generan aleatoriamente y cada uno de ellos se mueve de forma independiente siguiendo las mismas reglas de movimiento que un agente individual. Todos los agentes tienen la misma opinión objetivo y actúan sobre su entorno inmediato al mismo tiempo.

La presencia de varios agentes trae consigo fenómenos colectivos adicionales, las regiones de influencia de los agentes pueden superponerse, reforzarse entre sí o actuar en partes diferentes del sistema. Esto permite estudiar hasta qué punto la cooperación entre perturbaciones locales afecta la capacidad del sistema para recuperarse y alinearse de nuevo.

El número total de agentes es un parámetro clave en este trabajo, ya que permite analizar si hay umbrales específicos en la influencia colectiva a partir de los cuales la recuperación del sistema se vuelve mucho más probable.

### **3.3.4 MÉTRICAS Y CRITERIO DE RECUPERACIÓN**

Para evaluar cómo funciona el sistema se utilizan varias métricas descritas previamente en el capítulo de fundamentos teóricos. La magnitud principal es la magnetización, que indica cuánto se alinean los componentes de la red en general. También se calcula la energía del sistema y se analizan las estadísticas que se obtienen de cómo cambia la magnetización con el tiempo.

Para determinar de forma objetiva si una simulación ha sido exitosa se define un criterio de recuperación basado en el consenso, se considera que el sistema se ha recuperado cuando al menos el 95% de los espines tienen la misma orientación. Este umbral permite evitar que pequeñas variaciones locales nos impidan ver configuraciones que están claramente alineadas.

Además del éxito o fracaso de cada simulación, se registra el tiempo necesario para alcanzar el consenso, proporcionando información sobre la velocidad de recuperación del sistema y permitiendo comparar distintas configuraciones de agentes.

Finalmente, para saber si los estados finales son estables se analiza la media y la variación de la magnetización al final de la simulación. La media refleja el grado de alineamiento alcanzado y la varianza permite analizar si todavía hay cambios significativos o si el estado es estable.

### **3.3.5 IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL**

Todo el sistema ha sido desarrollado en Python utilizando principalmente las bibliotecas NumPy y Matplotlib. NumPy se emplea para la gestión de las matrices que representan la red de espines y para realizar operaciones numéricas de manera eficiente, mientras que Matplotlib se utiliza para visualizar los resultados y generar las figuras incluidas en este trabajo.

Las simulaciones se ejecutan durante varios miles de sweeps de Monte Carlo, utilizando múltiples ejecuciones independientes para cada configuración experimental. A partir de estas

repeticiones se calculan medias, desviaciones típicas y proporciones de éxito para las distintas métricas analizadas.

Debido al elevado coste computacional de las simulaciones Monte Carlo, especialmente en los experimentos multiagente y en los barridos simultáneos sobre distintos valores de frecuencia y número de agentes, no fue posible realizar tantas repeticiones independientes como hubiera sido deseable para cada configuración experimental. En la mayoría de los casos se optó por realizar 15 ejecuciones independientes (runs), lo que permitió obtener una muestra suficientemente representativa dentro de las limitaciones de tiempo y recursos disponibles.

Los resultados obtenidos muestran tendencias consistentes y permiten extraer conclusiones claras sobre el comportamiento del sistema. No obstante, algunas magnitudes presentan una dispersión apreciable, especialmente en la región próxima y superior a la transición de fase, donde las fluctuaciones intrínsecas del modelo son más importantes. Un mayor número de ejecuciones habría permitido reducir la incertidumbre estadística asociada a estas estimaciones y obtener intervalos de confianza más estrechos.

Por tanto, los resultados presentados deben interpretarse como una caracterización representativa del comportamiento del sistema, aunque futuras simulaciones con un número mayor de repeticiones podrían refinar cuantitativamente algunas de las métricas analizadas.

Entre las principales decisiones de diseño adoptadas destacan el uso del algoritmo de Metropolis con actualizaciones aleatorias, la utilización de condiciones periódicas de contorno y la generación de configuraciones iniciales mediante evolución espontánea del sistema antes de introducir agentes. Estas decisiones permiten estudiar de forma controlada la interacción entre la dinámica natural del modelo y las perturbaciones externas introducidas por los agentes móviles.

## Capítulo 4. RESULTADOS

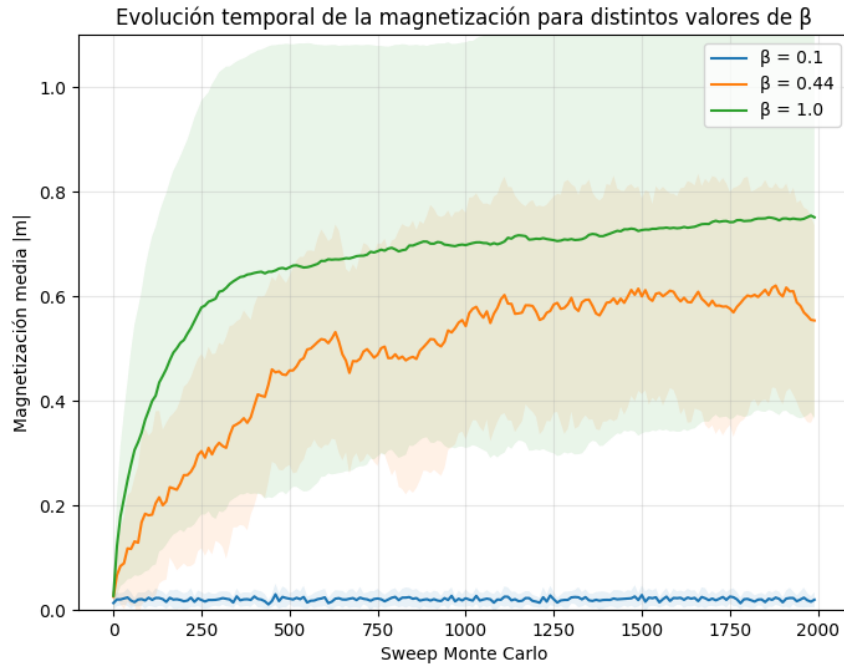
### 4.1 *DINÁMICA NATURAL DEL SISTEMA*

Antes de añadir agentes móviles, se estudió el comportamiento natural del modelo de Ising bidimensional con el objetivo de analizar cómo se desarrolla el sistema en diferentes situaciones y tener un punto de referencia para comparar posteriormente los resultados obtenidos mediante perturbaciones externas. Además de para validar la implementación contrastando con los resultados esperados.

Para ello se realizaron simulaciones Monte Carlo utilizando el algoritmo de Metropolis para distintos valores del parámetro  $\beta$ . El análisis se centró en la evolución temporal de la magnetización, la energía, la capacidad calorífica y la estructura espacial de las configuraciones finales.

#### 4.1.1 EVOLUCIÓN TEMPORAL DE LA MAGNETIZACIÓN

La Ilustración 8 muestra la evolución temporal de la magnetización media para tres valores representativos de  $\beta$ .



*Ilustración 8 Evolución temporal de la magnetización para distintos betas*

Para  $\beta = 0.1$  la magnetización se mantiene cerca de cero durante toda la simulación. En este caso el ruido térmico es más fuerte que las interacciones entre espines cercanos, provocando que las orientaciones de los espines sean prácticamente aleatorias y evitando la aparición de alineamiento global.

Cuando  $\beta = 1.0$  la situación es muy diferente. La magnetización aumenta rápidamente durante los primeros sweeps y alcanza valores elevados de forma estable. En este caso las interacciones entre vecinos predominan sobre las fluctuaciones térmicas y el sistema se vuelve más ordenado.

El caso más interesante aparece cuando  $\beta \approx 0.44$ . La magnetización crece progresivamente desde la configuración inicial, pero sin alcanzar los niveles que se ven en el régimen ordenado. Esto indica que el sistema desarrolla estructuras coherentes a gran escala, pero no llega a un consenso completo, lo que lo coloca en una región intermedia entre orden y desorden.

### 4.1.2 MAGNETIZACIÓN FINAL EN FUNCIÓN DE BETA

La Ilustración 9 muestra la magnetización media final obtenida para distintos valores de  $\beta$ .

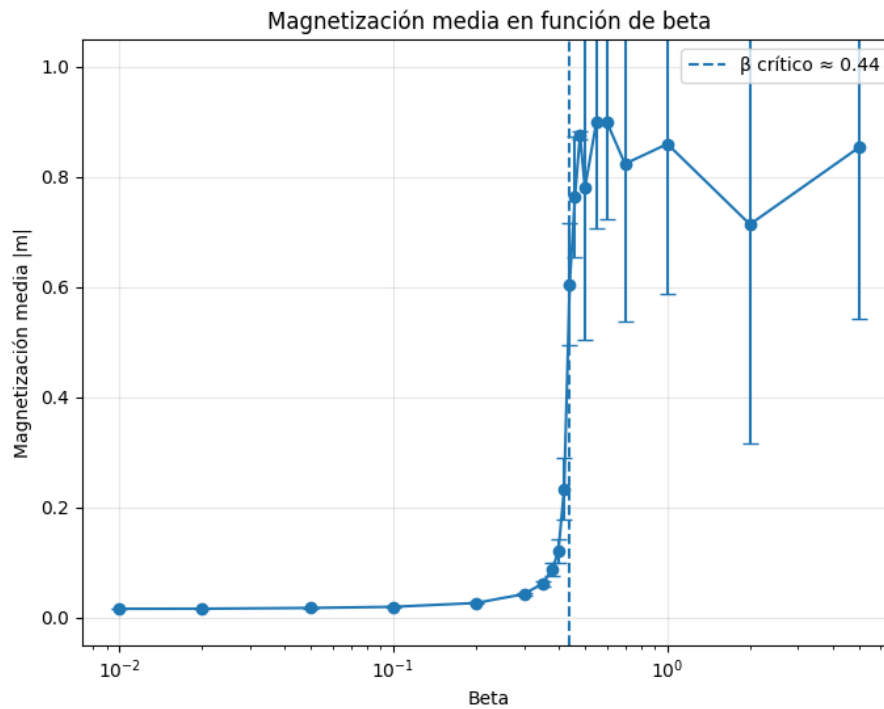


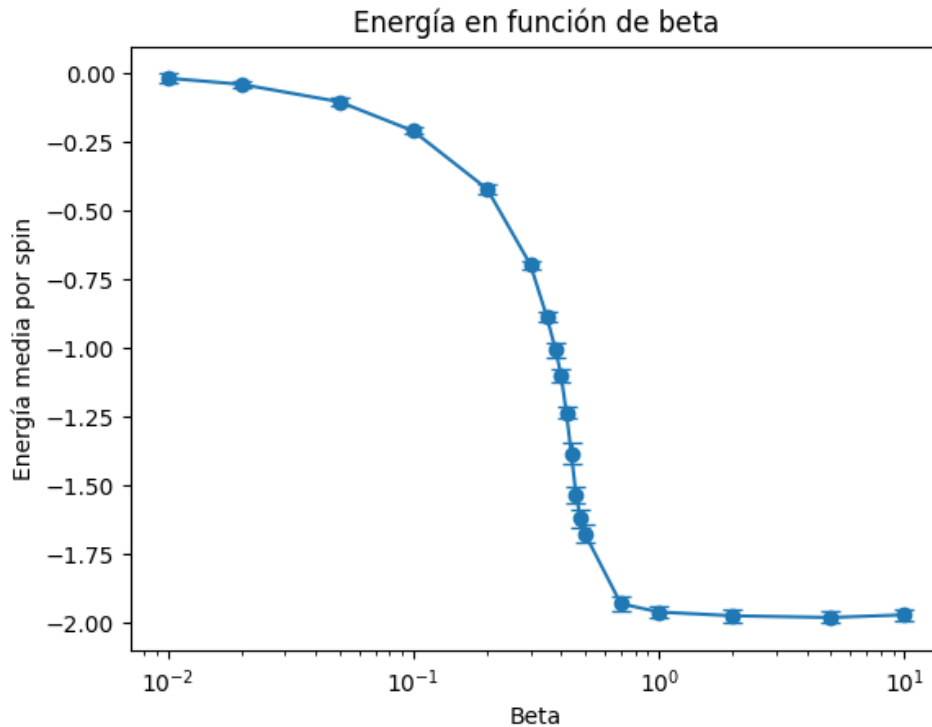
Ilustración 9 Magnetización media final en función de distintos beta

Se observa una transición clara entre dos comportamientos diferentes. Para valores pequeños de  $\beta$  la magnetización es muy cercana a cero, indicando ausencia de alineamiento global. Sin embargo, a medida que  $\beta$  aumenta la magnetización sube rápidamente hasta alcanzar valores cercanos a uno.

Además, alrededor de  $\beta \approx 0.44$  la dispersión es mucho mayor que en el resto de la curva. Esto refleja la existencia de fuertes fluctuaciones en la región crítica, donde pequeñas diferencias en las condiciones iniciales pueden llevar a configuraciones finales muy diferentes.

### 4.1.3 ENERGÍA EN FUNCIÓN DE BETA

La Ilustración 10 muestra la energía media por espín en función de  $\beta$ .



*Ilustración 10 Energía media por espín en función de beta*

Los resultados muestran que la energía disminuye progresivamente a medida que  $\beta$  aumenta. Cuando las temperaturas son altas ( $\beta$  pequeño), prevalecen configuraciones desordenadas con numerosos desacuerdos entre vecinos, lo que genera valores energéticos relativamente elevados.

Por el contrario, cuando las temperaturas son bajas ( $\beta$  grande), los espines tienden a alinearse y la energía se aproxima al valor mínimo teórico del sistema. El cambio más notable vuelve a producirse en la región crítica, donde se produce la reorganización colectiva de la red.

#### 4.1.4 CAPACIDAD CALORÍFICA

La Ilustración 11 representa la capacidad calorífica obtenida para los distintos valores de  $\beta$  analizados.

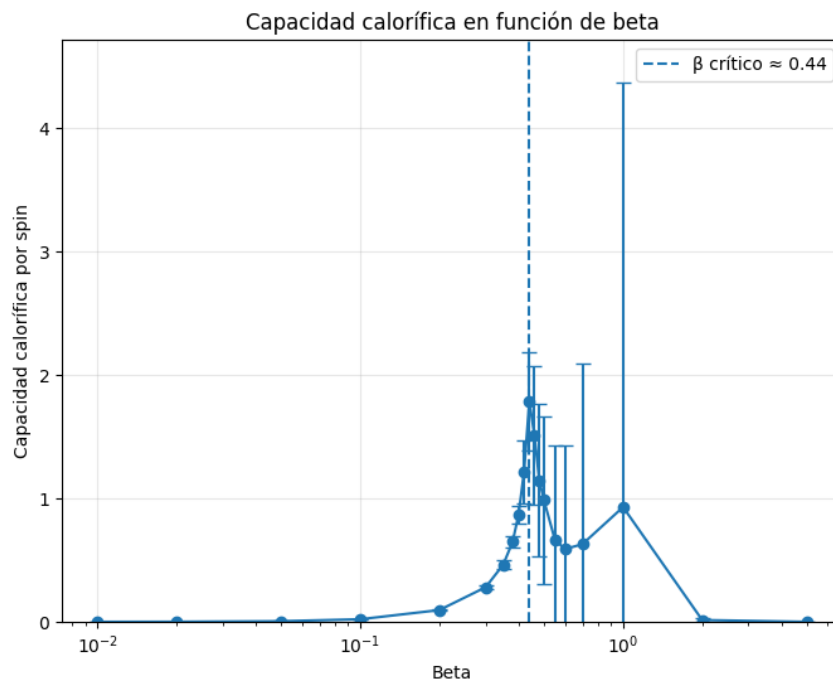


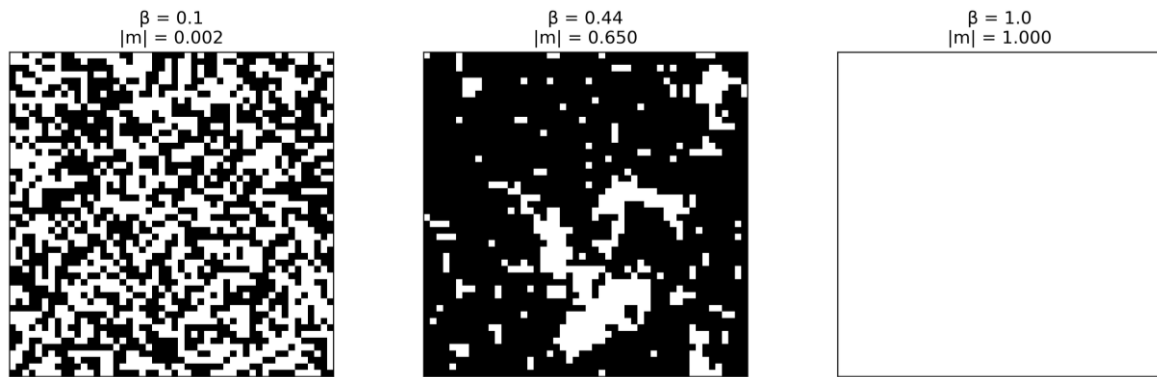
Ilustración 11 Capacidad calorífica en función de beta

Puede observarse la aparición de un máximo pronunciado alrededor de  $\beta \approx 0.44$ . Esto se ajusta a la teoría del modelo de Ising bidimensional, donde la capacidad calorífica alcanza su máximo cuando el sistema está cerca de la transición de fase.

La presencia de este pico significa que el sistema es especialmente sensible a pequeñas perturbaciones en esta región. Por lo tanto, se elige  $\beta \approx 0.44$  como el valor principal para los experimentos posteriores con agentes móviles.

#### 4.1.5 FORMACIÓN ESPONTÁNEA DE DOMINIOS

La Ilustración 12 muestra ejemplos representativos de las configuraciones finales obtenidas para  $\beta = 0.1$ ,  $\beta = 0.44$  y  $\beta = 1.0$ .



*Ilustración 12 Configuraciones finales de distintos dominios*

Para  $\beta = 0.1$  se observa una distribución prácticamente aleatoria de espines sin estructuras claras en el espacio, lo que es típico de un régimen desordenado.

En  $\beta \approx 0.44$  aparecen áreas extensas de espines alineados que coexisten con regiones donde los espines apuntan en orientación opuesta. Estas comunidades son bastante estables y generan configuraciones complejas donde no existe consenso global, pero sí organización local.

Finalmente, cuando  $\beta = 1.0$  el sistema evoluciona hacia configuraciones muy ordenadas donde una orientación domina claramente sobre la otra. Las fronteras entre las áreas se reducen mucho y la magnetización alcanza valores elevados.

Estos resultados justifican la elección de  $\beta \approx 0.44$  como régimen principal para estudiar la intervención de agentes. La presencia de dominios persistentes y fluctuaciones elevadas permite anticipar que esta región será especialmente resistente a perturbaciones locales, tal como se plantea en la hipótesis H1. Además, confirma que la eficacia de los agentes deberá interpretarse como una competencia entre la dinámica natural del sistema y la intervención externa, en línea con H5.

## 4.2 INFLUENCIA DE UN ÚNICO AGENTE

### 4.2.1 EJEMPLOS CUALITATIVOS DE LA ACCIÓN DEL AGENTE

Antes de analizar de forma cuantitativa la capacidad de recuperación del sistema, es útil observar algunos ejemplos de la evolución espacial de la red tras la introducción de un único agente móvil.

La Ilustración 13 muestra un ejemplo de un sistema que empezó en una región crítica donde aparecen dominios bien definidos de orientaciones opuestas. En la configuración inicial puede observarse la coexistencia de varias comunidades de gran tamaño, separadas por fronteras relativamente estables. Tras la actuación del agente, la configuración final muestra una reducción importante de los dominios minoritarios y un aumento de la región asociada a la orientación dominante. Sin embargo, todavía permanecen algunas comunidades aisladas con orientación contraria, por lo que no se alcanza una recuperación completa del sistema.

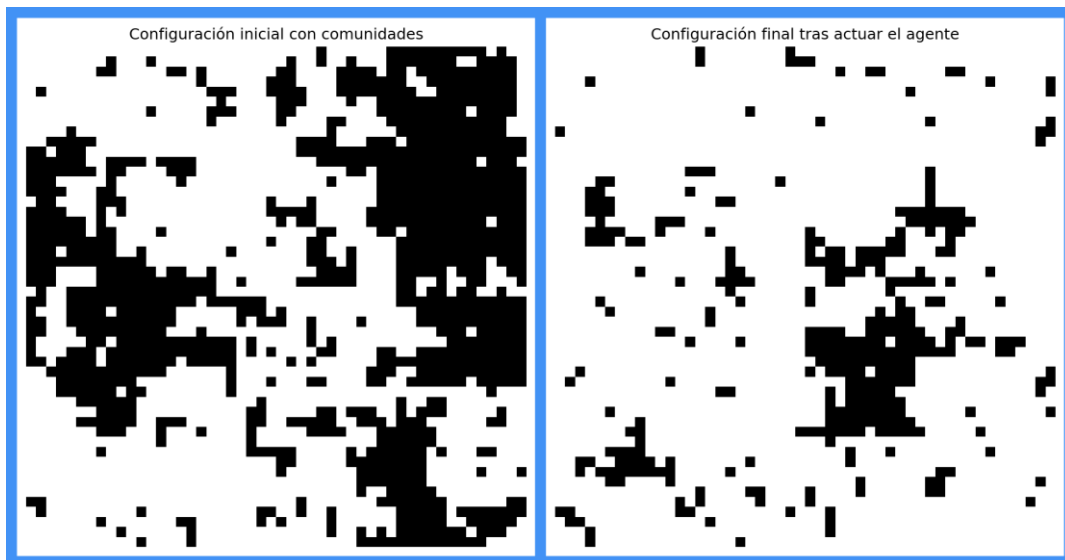
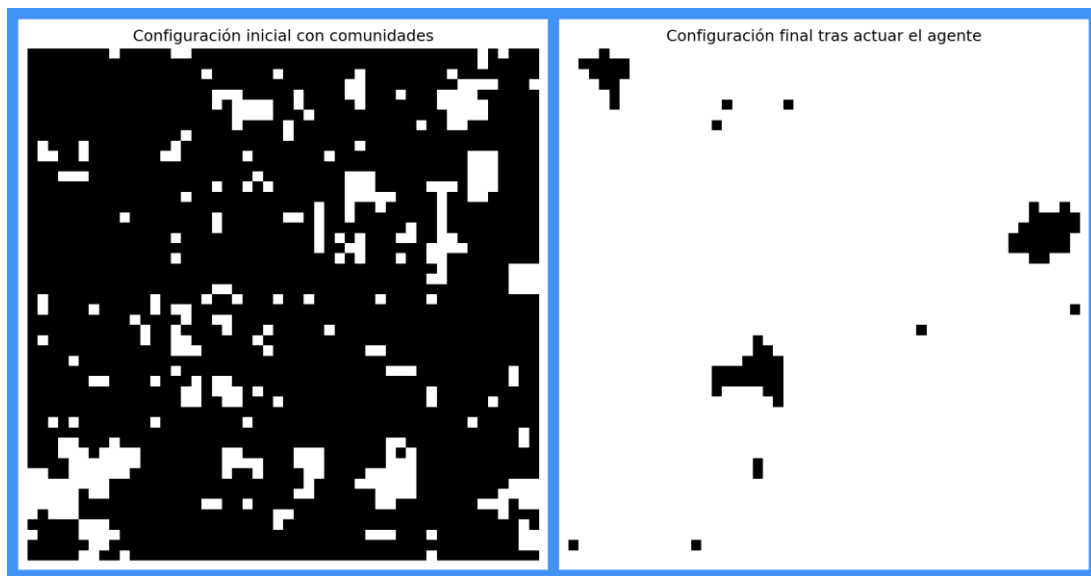


Ilustración 13 Estado del sistema antes y después de la actuación de un agente sin éxito

Por otro lado, la Ilustración 14 muestra un caso que se corresponde con un valor de  $\beta$  más elevado. En este caso el agente fue mucho más efectivo, provocando la desaparición de prácticamente todos los dominios opuestos y llevando el sistema hacia un estado muy

alineado. La configuración final presenta únicamente pequeñas fluctuaciones locales, mientras que la mayor parte de la red comparte la misma orientación. Es importante recordar que el criterio utilizado para determinar el éxito de una simulación no exige una magnetización perfecta, ya que se consideró que el sistema había alcanzado el consenso cuando la magnetización absoluta fuera  $|m| \geq 0.95$ . Por tanto, algunas configuraciones clasificadas como exitosas todavía pueden contener pequeños dominios residuales, como ocurre en este caso.



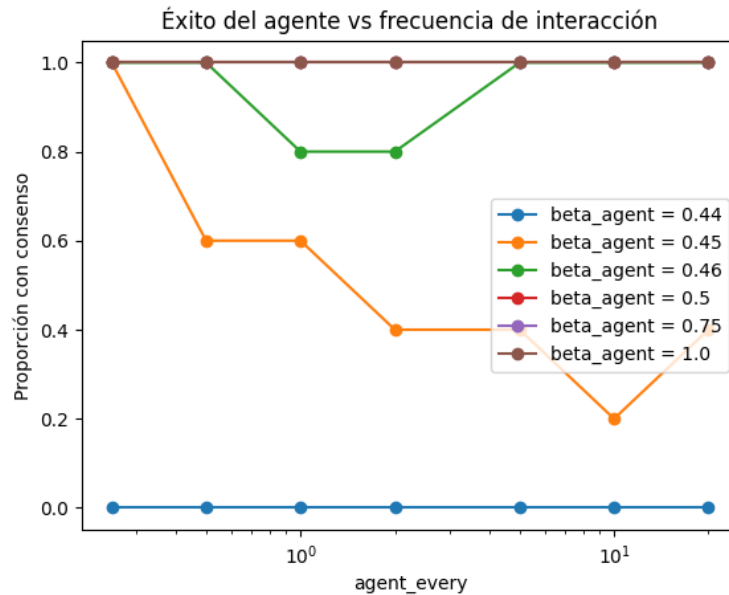
*Ilustración 14 Estado del sistema antes y después de la actuación de un agente con éxito*

Estos ejemplos muestran claramente una de las tendencias que se analizarán en los apartados siguientes, la capacidad de un único agente para recuperar el alineamiento global depende fuertemente del valor de  $\beta$ .

#### **4.2.2 PROBABILIDAD DE RECUPERACIÓN DEL CONCESO**

Una vez analizados algunos ejemplos concretos, es necesario estudiar de forma sistemática la capacidad del agente para recuperar el alineamiento global del sistema. Para ello se calculó, para cada combinación de parámetros, la proporción de simulaciones que alcanzaban el criterio de consenso definido anteriormente tras un número concreto de sweeps montacarlo.

La Ilustración 15 muestra la proporción de éxitos obtenida para distintos valores de  $\beta$  (representados como “beta\_agent” en la figura) y distintas frecuencias de actuación del agente (representadas como “agent\_every” en la figura). Los resultados muestran que la capacidad del agente para recuperar el consenso depende mucho de la temperatura efectiva del sistema. Para  $\beta = 0.44$ , que se corresponde con la región crítica identificada en el análisis de la dinámica natural, el agente no consigue recuperar el consenso en ninguna de las simulaciones realizadas. Esto indica que los dominios formados espontáneamente son muy resistentes a las perturbaciones locales.



*Ilustración 15 Porcentaje de éxito del agente según su frecuencia de interacción para distintos valores de beta*

Al aumentar ligeramente el valor de  $\beta$  a 0.45 y 0.46 aparecen comportamientos intermedios donde el agente consigue recuperar el sistema en una parte de las simulaciones, aunque la probabilidad de éxito depende de la frecuencia de actuación. Esta zona representa una transición entre un régimen que es claramente resistente y otro en el que la recuperación comienza a ser posible.

Para  $\beta \geq 0.5$  la situación cambia significativamente, el porcentaje de éxito aumenta mucho y, para los valores más altos estudiados ( $\beta = 0.75$  y  $\beta = 1$ ), el consenso se alcanza en prácticamente todas las simulaciones. En estos regímenes el propio sistema favorece la expansión de la orientación dominante, por lo que la acción del agente resulta suficiente para impulsar el proceso de alineamiento global.

Tal y como se justificó en el diseño experimental, los experimentos se realizaron únicamente para valores de  $\beta$  cercanos o superiores a la transición crítica, ya que para  $\beta$  menores el sistema permanece en un régimen desordenado donde no existen estructuras colectivas susceptibles de ser recuperadas.

Estos resultados confirman parcialmente la hipótesis H1, ya que la capacidad de recuperación depende de forma clara del valor de  $\beta$ . La región crítica, especialmente  $\beta = 0.44$ , se comporta como un régimen resistente, mientras que para valores mayores de  $\beta$  la probabilidad de consenso aumenta significativamente y de manera consistente. En cambio, la hipótesis H2 solo se confirma en parte. Aunque cabría esperar que una mayor frecuencia de actuación aumentase siempre la probabilidad de éxito, los resultados muestran un comportamiento más irregular, especialmente para valores intermedios de  $\beta$ . Esto sugiere que la frecuencia no actúa de forma independiente, sino que depende del régimen dinámico del sistema.

### 4.2.3 ESTADO FINAL DEL SISTEMA

La probabilidad de éxito proporciona información sobre si el sistema logra o no el criterio de consenso establecido, pero no permite evaluar cuál es el grado de orden alcanzado cuando el umbral no se supera. Por este motivo también se analizó la magnetización final media obtenida en cada conjunto de simulaciones.

La Ilustración 16 muestra el valor final de la magnetización absoluta para distintos valores de  $\beta$  y frecuencias de actuación del agente, en ella se observa que incluso en aquellos casos donde el consenso no llega a alcanzarse, la intervención del agente produce un aumento significativo del alineamiento global respecto a la configuración inicial.

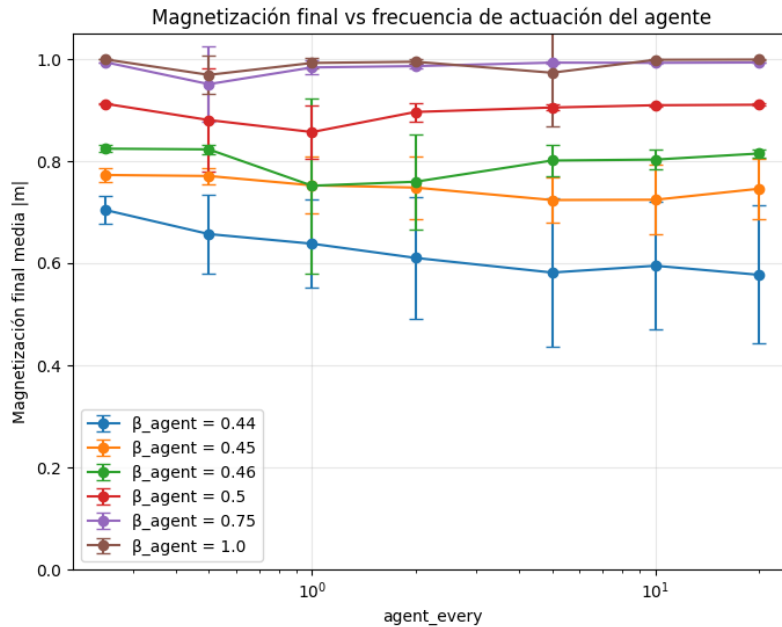


Ilustración 16 Magnetización final media para distintos valores de beta y frecuencias de actuación del agente

Este efecto se nota especialmente cuando  $\beta = 0.44$ , ya que aunque ninguna simulación supera el umbral de recuperación definido, la magnetización final alcanza valores cercanos a 0.6 - 0.7, lo que es mucho mayor que en las configuraciones iniciales de la región crítica. Esto indica que el agente es capaz de favorecer la expansión de ciertos dominios y reducir la fragmentación del sistema, aunque no logre que todo esté alineado.

A medida que  $\beta$  aumenta, la magnetización final también crece y se aproxima progresivamente a 1. Para  $\beta = 0.75$  y  $\beta = 1$  los valores finales se sitúan muy cerca de  $|m| = 1$  para prácticamente todas las frecuencias analizadas, lo que confirma que el sistema termina en configuraciones muy alineadas.

Por otra parte, las barras de error muestran que la variabilidad entre simulaciones es bastante más mayor cerca de un punto crítico, esto significa que hay muchas trayectorias que evolucionan diferente a partir de configuraciones iniciales similares. En cambio, para valores

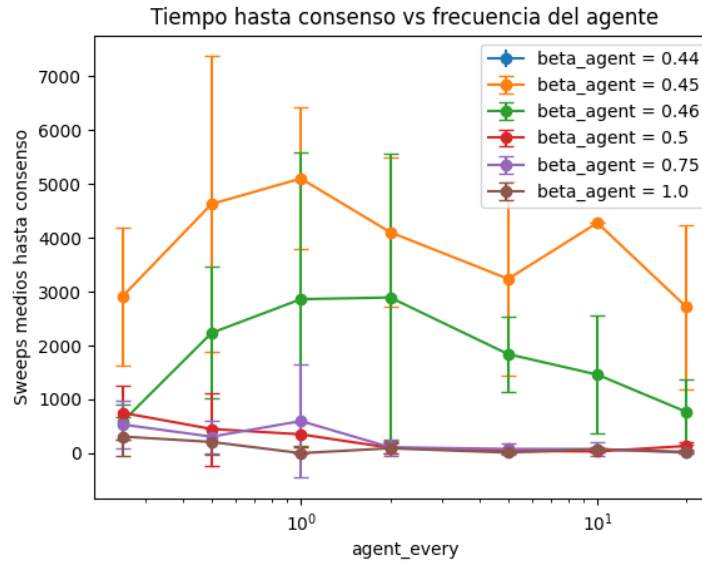
elevados de  $\beta$  la dispersión disminuye y los resultados se vuelven más reproducibles, lo que indica una dinámica más estable y predecible.

Este resultado matiza la interpretación binaria del éxito, ya que, aunque en algunos casos no se alcanza el umbral de consenso, la magnetización final muestra que la intervención del agente sí modifica el estado global de la red. Por tanto, los resultados apoyan la hipótesis H5, la recuperación no depende únicamente de la acción externa, sino del equilibrio entre dicha acción y la dinámica natural del sistema.

#### 4.2.4 TIEMPO HASTA EL CONSENSO

Además de estudiar si el agente consigue recuperar el consenso, es igualmente importante analizar la velocidad con la que se produce esa recuperación. Para ello se calculó el número medio de sweeps Monte Carlo necesarios para alcanzar el criterio de consenso en aquellas simulaciones que finalizaron con éxito.

La Ilustración 17 muestra el tiempo medio hasta el consenso para los distintos valores de  $\beta$  y frecuencias de actuación consideradas, tras realizar 15 simulaciones para cada combinación de parámetros. Los resultados muestran que los tiempos de recuperación más largos aparecen en la región cercana al punto crítico. Para  $\beta = 0.45$  y  $\beta = 0.46$  el sistema puede necesitar varios miles de sweeps para alcanzar el consenso, y además hay mucha variabilidad entre simulaciones. Esto indica que pequeñas diferencias en la configuración inicial o en la trayectoria del agente pueden llevar a resultados muy diferentes, rápidos y otros que se quedan atrapados durante mucho tiempo en configuraciones parcialmente ordenadas.



*Ilustración 17 Sweeps medios necesarios hasta alcanzar el consenso para distintos valores de beta y frecuencias de actuación del agente*

Por el contrario, para valores más altos de  $\beta$ , como  $\beta = 0.75$  o  $\beta = 1$ , los tiempos medios son significativamente menores. En estos casos el sistema ya posee una fuerte tendencia natural hacia estados alineados, por lo que la intervención del agente actúa principalmente como un mecanismo que acelera un proceso que resulta favorable desde el punto de vista dinámico. Además, la variabilidad observada entre simulaciones también disminuye, reflejando un comportamiento más estable y predecible.

No se observa una relación clara entre la frecuencia de actuación y el tiempo de recuperación. Aunque en algunos casos una actuación más frecuente parece reducir ligeramente el número de sweeps necesarios para alcanzar el consenso, las diferencias son difíciles de ver por la gran variabilidad del sistema.

El análisis temporal refuerza las conclusiones asociadas a H1 y H5. En los regímenes cercanos a la transición, el consenso tarda más en producirse y es más variable. En cambio, para valores altos de  $\beta$ , la dinámica natural favorece el alineamiento y la intervención del agente acelera un proceso que ya es favorable en términos de energía.

### 4.3 INFLUENCIA DE MÚLTIPLES AGENTES

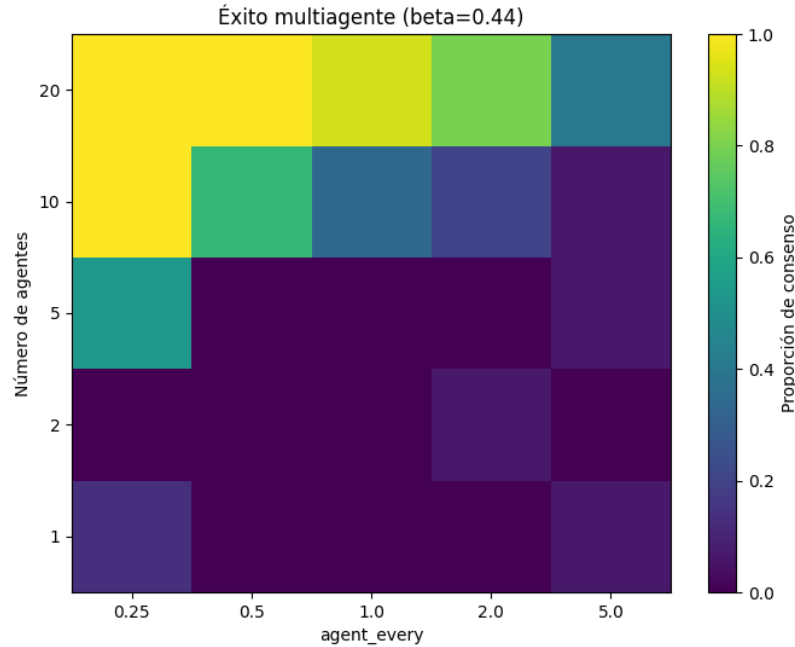
En el apartado anterior se ha estudiado la capacidad de un único agente para modificar el estado global del sistema. Los resultados mostraron que, aunque un agente puede ser capaz de inducir consenso en determinadas condiciones, su eficacia depende mucho de la temperatura del sistema y de la frecuencia con la que actúa. Entonces surge la pregunta de si la cooperación entre varios agentes permite aumentar esta capacidad de influencia y acelerar la recuperación de estados ordenados.

Con este objetivo, se han realizado simulaciones introduciendo simultáneamente varios agentes que compartían la misma opinión y actúan sobre la red con diferentes frecuencias. El análisis se centra en la región crítica del sistema, correspondiente a  $\beta = 0.44$ , donde las fluctuaciones son especialmente importantes y la dinámica natural no conduce espontáneamente a estados altamente ordenados.

#### 4.3.1 PROBABILIDAD DE RECUPERACIÓN DEL CONSENSO

La primera magnitud analizada es la proporción de simulaciones que alcanzan consenso tras la actuación de múltiples agentes. Al igual que en el apartado anterior, se considera que existe consenso cuando la magnetización absoluta supera el umbral de 0.95.

La Ilustración 18 muestra la proporción de simulaciones exitosas para distintas combinaciones del número de agentes que actúan simultáneamente y de la frecuencia con la que actúan sobre la red.



*Ilustración 18 Mapa de calor del éxito en función del número de agentes y la frecuencia de actuación*

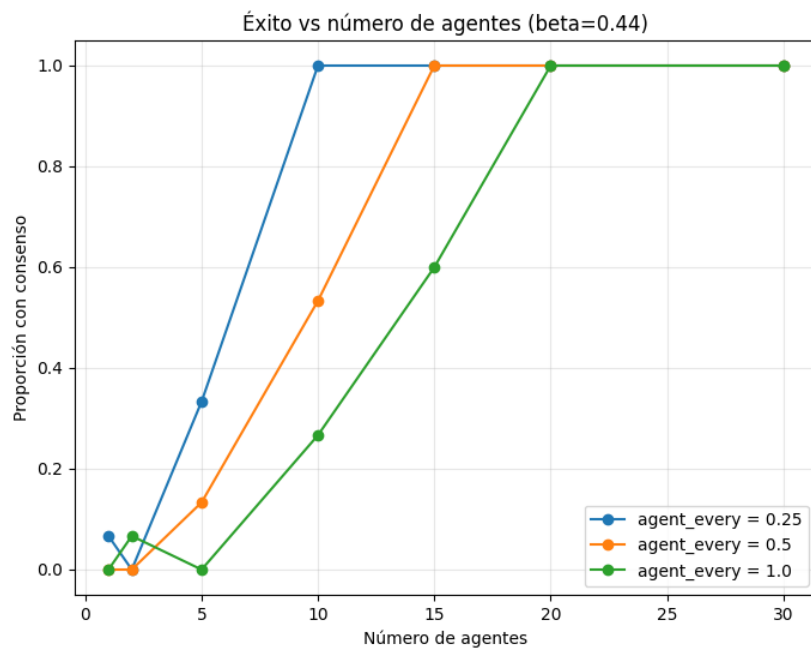
Se observa que el comportamiento depende claramente del número de agentes. Cuando únicamente hay uno o dos agentes la probabilidad de éxito es prácticamente nula en la mayoría de las configuraciones. Esto se debe a que la influencia ejercida por estos pocos agentes no es lo suficientemente fuerte como para cambiar el estado global del sistema, que sigue siendo controlado por las fluctuaciones de la región crítica.

Al aumentar el número de agentes comienzan a aparecer cambios bruscos en la probabilidad de éxito. Con cinco agentes solo se obtienen buenos resultados cuando actúan con una alta frecuencia, mientras que con diez agentes la recuperación del consenso se vuelve posible en una gran parte del espacio de parámetros. Finalmente, con veinte agentes la probabilidad de éxito alcanza valores muy cercanos o iguales a uno para casi todas las frecuencias analizadas.

Estos resultados sugieren que hay un número mínimo de agentes necesario para que su influencia en conjunto deje de ser solo local y pase a controlar la dinámica general del sistema. Una vez superado este umbral, la recuperación del consenso se vuelve altamente

probable incluso cuando la actuación de cada agente individual no sería suficiente para lograrlo.

Con el fin de visualizar más claramente cómo afecta el número de agentes, la Ilustración 19 representa la probabilidad de éxito en función del número de agentes para tres frecuencias de actuación representativas.



*Ilustración 19 Evolución del éxito en función del número de agentes para tres frecuencias de actuación*

La tendencia que se observa confirma lo que se concluyó al analizar el mapa de calor. Para todas las frecuencias estudiadas, la probabilidad de alcanzar consenso aumenta al incrementar el número de agentes presentes en la red. Además, las frecuencias de actuación más elevadas requieren un menor número de agentes para tener una probabilidad de éxito alta.

Por ejemplo, cuando los agentes actúan cada 0.25 sweeps, bastan aproximadamente diez agentes para garantizar el consenso en todas las simulaciones realizadas. Sin embargo, cuando la frecuencia disminuye hasta una actuación cada sweep, son necesarios alrededor

de veinte agentes para obtener resultados equivalentes. Esto indica que existe una compensación entre ambas variables, actuar más frecuente puede suplir en parte la falta de agentes, mientras que un mayor número de agentes puede compensar una frecuencia de actuación más baja.

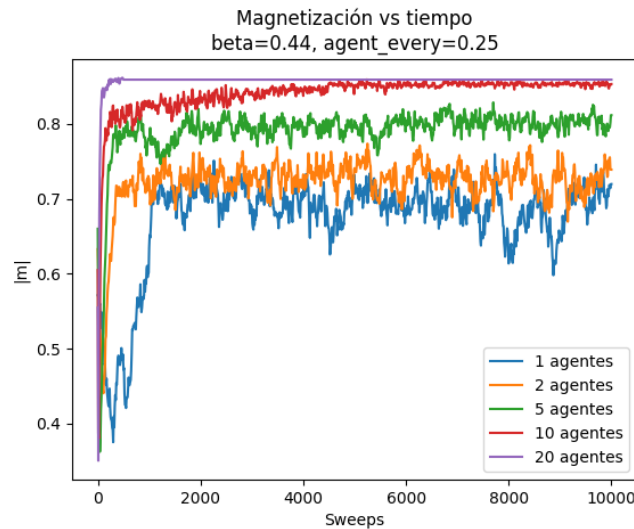
Además, la gráfica insinúa que dividir por 2 el número de agentes requiere multiplicar por 4 la frecuencia de movimiento, aunque esta hipótesis no se puede confirmar porque harían falta realizar más experimentos. Este resultado es especialmente interesante desde una perspectiva de eficiencia en el uso de recursos, ya que introduce un equilibrio entre el coste asociado a desplegar y mantener más agentes y el coste de incrementar la frecuencia de sus intervenciones. En aplicaciones reales, la estrategia óptima no consistiría únicamente de maximizar la probabilidad de éxito, sino también de encontrar un equilibrio entre rendimiento y recursos disponibles.

Estos resultados confirman la hipótesis H3, ya que el aumento del número de agentes incrementa claramente la probabilidad de alcanzar consenso. Además, también respaldan la hipótesis H4, debido a que se observa la existencia de un umbral multiagente, es decir, que por debajo de cierto número de agentes la recuperación es improbable, mientras que una vez superado dicho umbral la proporción de éxito aumenta de forma abrupta.

### **4.3.2 EVOLUCIÓN DINÁMICA DEL SISTEMA**

Los resultados anteriores muestran que aumentar el número de agentes incrementa significativamente la probabilidad de recuperar el consenso. Sin embargo, esta información no permite comprender cómo se produce esta transición ni cómo afectan los agentes al sistema con el tiempo. Para entenderlo mejor, se estudia la evolución de la magnetización a lo largo de la simulación para distintos números de agentes.

La Ilustración 20 muestra la evolución temporal de la magnetización absoluta cuando  $\beta = 0.44$  y un agente actúa cada 0.25 sweeps. Cada curva de la figura se corresponde con un número diferente de agentes actuando simultáneamente sobre la red.



*Ilustración 20 Evolución de la magnetización con el tiempo para distintos números de agentes*

En todos los casos se observa que los agentes cambian rápidamente el estado inicial durante los primeros cientos de sweeps, lo que indica que ejercen una influencia importante desde las primeras etapas de la simulación. Sin embargo, la evolución posterior depende fuertemente del número de agentes presentes.

Cuando únicamente actúa un agente, la magnetización aumenta inicialmente pero luego fluctúa mucho durante casi toda la simulación. Aunque al final el sistema se vuelve relativamente ordenado, la evolución es lenta y tiene una gran sensibilidad ante las fluctuaciones de la región crítica.

Al incrementar el número de agentes la dinámica cambia de forma importante. Con dos y cinco agentes la magnetización alcanza valores más elevados y las fluctuaciones disminuyen progresivamente debido a que la influencia colectiva de los agentes permite estabilizar configuraciones ordenadas con mayor facilidad.

La diferencia más notable aparece para diez y veinte agentes, en estos casos la magnetización crece rápidamente y se estabiliza en un valor alto. Las fluctuaciones posteriores son prácticamente inexistentes, lo que indica que el sistema queda atrapado en estados muy ordenados desde el principio de la simulación.

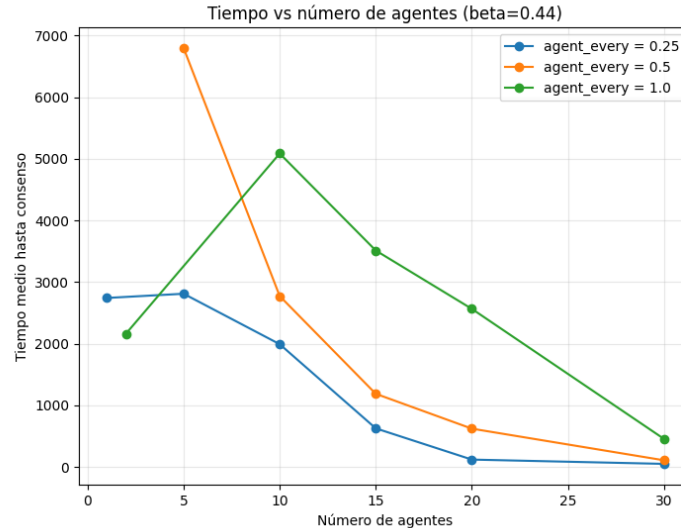
Estos resultados permiten interpretar mejor los patrones que se observaron en el apartado anterior. El aumento de la probabilidad de éxito no se debe únicamente a que existan más agentes actuando sobre la red, sino también a que todos los agentes juntos cambian la forma en que el sistema funciona con el tiempo.

La evolución temporal de la magnetización permite observar cómo funciona H3. Al aumentar el número de agentes, la magnetización crece más rápido y alcanza valores más altos, lo que indica que la acción colectiva de los agentes supera progresivamente las fluctuaciones de la región crítica. Este comportamiento también es coherente con H5, ya que la intervención externa modifica la dinámica natural del sistema hasta dirigirlo hacia estados más alineados.

Por tanto, el número de agentes no solo determina la probabilidad de alcanzar consenso, sino también la rapidez y la estabilidad con la que se construye a lo largo del tiempo. Esto sugiere que los agentes trabajan juntos de alguna manera, de modo que pequeñas contribuciones individuales se refuerzan mutuamente hasta producir una reorganización global de la red.

### **4.3.3 TIEMPO NECESARIO PARA ALCANZAR EL CONSENSO**

Además de aumentar la probabilidad de éxito, es importante analizar cómo afecta el número de agentes al tiempo necesario para que el sistema alcance el consenso. La Ilustración 21 muestra el tiempo medio necesario para alcanzar el consenso para distintas combinaciones del número de agentes y de la frecuencia de actuación. Únicamente se consideran aquellas simulaciones en las que el consenso ha sido alcanzado, utilizando el mismo criterio empleado en los apartados anteriores.



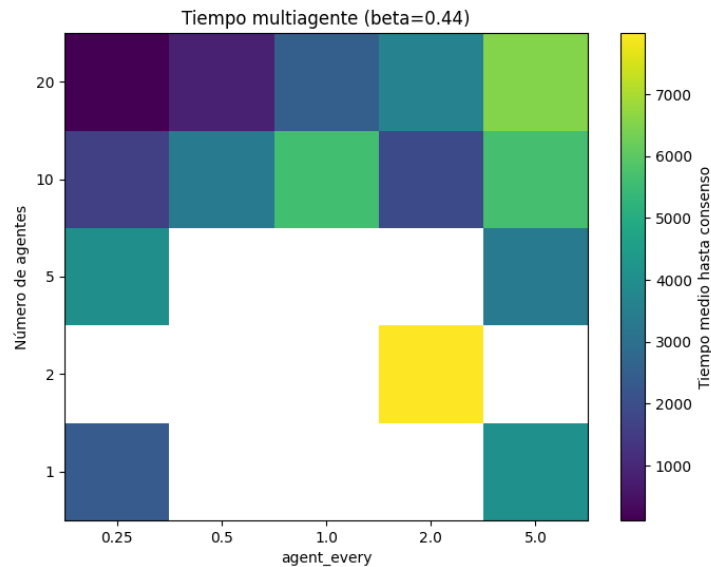
*Ilustración 21 Tiempo medio hasta alcanzar el consenso para distintos números de agentes y frecuencias de actuación.*

Se observa una tendencia general en la que al aumentar el número de agentes presentes en el sistema se reduce el tiempo de consenso. Aunque existen fluctuaciones para algunos valores intermedios, cuando el número de simulaciones exitosas es reducido, en general la evolución global es claramente descendente.

Para las tres frecuencias analizadas, los tiempos más elevados aparecen cuando únicamente intervienen uno o pocos agentes. Esto se debe a que estos agentes tienen poca influencia sobre la red y el sistema sigue cambiando durante mucho tiempo antes de alcanzar el consenso. Por otro lado, al aumentar el número de agentes, el sistema se vuelve más estable y el consenso se alcanza en un número mucho menor de sweeps.

La reducción es especialmente notable cuando se pasa de unos pocos agentes a valores intermedios. A partir de aproximadamente diez o quince agentes, la disminución de los tiempos comienza a ser menos notable, lo que sugiere la aparición de rendimientos decrecientes, es decir, que cuando la influencia colectiva es lo suficientemente intensa como para dominar la dinámica global del sistema, añadir más agentes sigue mejorando los resultados, pero con un beneficio marginal cada vez menor.

La Ilustración 22 representa los tiempos medios de consenso mediante un mapa de calor que permite visualizar simultáneamente el efecto del número de agentes y de la frecuencia de actuación.



*Ilustración 22 Mapa de calor del tiempo necesario hasta alcanzar consenso para distintos números de agentes y frecuencias de actuación*

Los resultados indican que las áreas con tiempos más bajos son aquellas donde es más probable que tengamos éxito. Esto confirma que los parámetros que ayudan a recuperar el consenso también hacen que aparezca más rápido. Concretamente, las combinaciones que incluyen un número elevado de agentes presentan los tiempos de convergencia más bajos, sin importar con qué frecuencia actúen. Por el contrario, algunas celdas del mapa de calor no muestran ningún valor, ya que en ninguna de las simulaciones realizadas para esas configuraciones se alcanzó el criterio de consenso y, por tanto, no fue posible calcular un tiempo medio de convergencia.

Por otro lado, hay algunas configuraciones con pocos agentes que tienen tiempos de consenso muy altos, incluso cuando finalmente se logra el consenso. Esto indica que, cerca del umbral de éxito, el sistema puede quedarse durante mucho tiempo en estados inestables antes de organizarse finalmente de manera ordenada.

Los tiempos de consenso también son coherentes con H3 y H4, debido a que una vez superado el umbral mínimo de agentes, el sistema no solo alcanza el consenso con mayor probabilidad, sino que además lo hace en menos tiempo. Sin embargo, la dependencia con la frecuencia de actuación no es completamente monótona, por lo que la hipótesis H2 debe considerarse solo confirmada parcialmente.

#### 4.3.4 Estabilidad de los estados finales

Los apartados anteriores han mostrado que aumentar el número de agentes incrementa la probabilidad de recuperar el consenso y reduce el tiempo necesario para alcanzarlo. Sin embargo, una vez alcanzado el consenso, también es importante analizar la estabilidad de las configuraciones finales obtenidas. Para ello, se estudian conjuntamente la magnetización media final y la varianza de esta magnetización para distintos números de agentes.

La Ilustración 23 representa la relación entre la magnetización media final y su varianza para diferentes cantidades de agentes, manteniendo fija la frecuencia de actuación en un valor representativo.

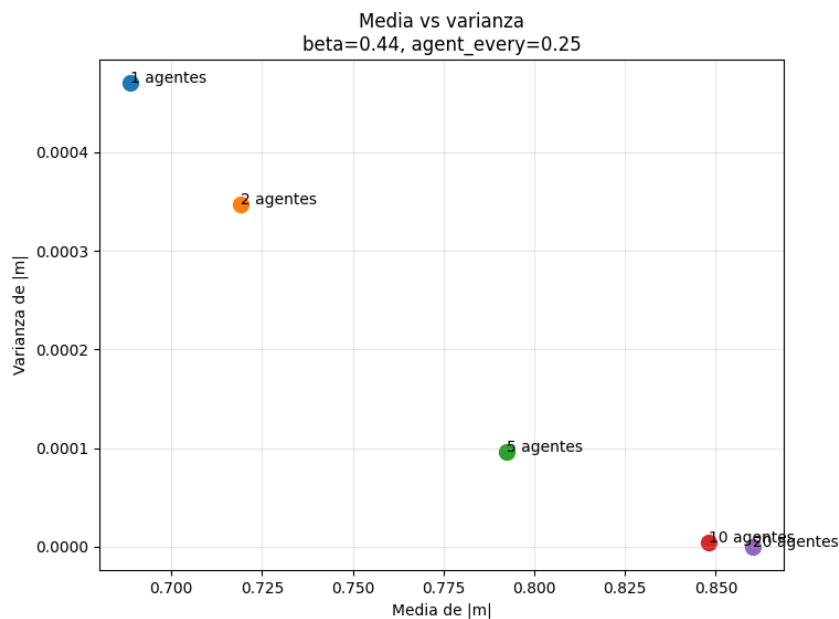


Ilustración 23 Magnetización media contra varianza de la magnetización para distintos números de agentes

Se observa una tendencia clara a medida que aumenta el número de agentes en el sistema. La magnetización media final crece progresivamente, pasando de valores moderados cuando actúan uno o dos agentes a valores significativamente más elevados cuando el número de agentes alcanza los diez o veinte. Paralelamente, la varianza va disminuyendo de forma regular, aproximándose a cero para los números de agentes mayores.

Esta evolución indica que la acción colectiva de los agentes no solo favorece la aparición de estados más ordenados, sino que también reduce las diferencias entre simulaciones independientes. Cuando hay pocos agentes, el resultado final sigue dependiendo en gran medida de las fluctuaciones aleatorias de la dinámica de Ising, lo que genera una mayor variabilidad entre realizaciones. Por el contrario, cuando intervienen muchos agentes, la influencia colectiva domina dichas fluctuaciones y conduce al sistema hacia configuraciones finales mucho más homogéneas.

La reducción simultánea de la varianza y el aumento de la magnetización media además indican una mayor robustez de los estados alcanzados. No solo es más probable recuperar el consenso, sino que el sistema converge repetidamente hacia configuraciones similares, independientemente de las condiciones específicas de cada simulación.

Estos resultados confirman la hipótesis H6. A medida que aumenta el número de agentes, la magnetización media final aumenta y la varianza disminuye, lo que indica que el sistema converge hacia configuraciones más ordenadas y reproducibles. Por tanto, el efecto de los agentes no se limita a aumentar la probabilidad de consenso, sino que también mejora la estabilidad estadística de los estados finales.

## Capítulo 5. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha estudiado cómo perturbaciones locales móviles pueden modificar la organización colectiva de un sistema descrito mediante el modelo de Ising bidimensional. Para ello, se ha analizado en primer lugar la dinámica natural del sistema, identificando los regímenes ordenados, desordenados y la región crítica asociada a la transición de fase. Posteriormente, se ha introducido un modelo de agentes móviles capaces de actuar localmente sobre la red y se ha evaluado su capacidad para recuperar configuraciones ordenadas a partir de estados inicialmente fragmentados.

Los resultados obtenidos muestran que la eficacia de los agentes depende de forma significativa de las propiedades intrínsecas del sistema y de los parámetros que caracterizan la intervención externa. En particular, se ha comprobado que la región crítica es un entorno especialmente interesante para estudiar la recuperación del consenso, ya que en ella coexisten dominios estables y fuertes fluctuaciones, dando lugar a una competición entre la dinámica natural del sistema y la acción de los agentes.

La primera hipótesis planteada (H1) establecía que la capacidad de los agentes para inducir consenso dependía del valor de  $\beta$ . Los resultados obtenidos confirman esta hipótesis porque se observó que la región crítica, situada en torno a  $\beta \approx 0.44$ , presenta una elevada resistencia a la recuperación del consenso debido a la presencia de dominios persistentes. Por el contrario, para valores superiores de  $\beta$ , donde la dinámica natural favorece configuraciones más ordenadas, la probabilidad de alcanzar consenso aumenta de forma notable.

La segunda hipótesis (H2) que se propuso fue que aumentar la frecuencia de actuación de los agentes incrementaría significativamente la probabilidad de éxito. Los resultados que se obtuvieron muestran que, en general, esto es cierto, aunque no siempre sucede de la misma manera. En algunos casos, aumentar la frecuencia de actuación tiene un efecto positivo claro, mientras que en otros casos no es tan efectivo. Por lo tanto, se puede decir que esta

idea se confirmó en parte, ya que la frecuencia de actuación de los agentes se ve influenciada por las características del sistema y no actúa de forma aislada.

La tercera hipótesis (H3) planteaba que un mayor número de agentes debía aumentar la capacidad de recuperación del consenso. Esta hipótesis queda claramente respaldada por los experimentos realizados. A medida que aumenta el número de agentes presentes simultáneamente en la red, la probabilidad de alcanzar configuraciones alineadas crece significativamente y el proceso de recuperación se vuelve más robusto frente a las fluctuaciones de la región crítica.

La cuarta hipótesis (H4) sugería la existencia de un número mínimo de agentes necesario para producir cambios globales significativos en el sistema. Los resultados obtenidos confirman esta idea de forma clara, ya que se observó que, para una frecuencia de actuación fija, existe un umbral a partir del cual la recuperación del consenso pasa de ser un fenómeno poco probable a convertirse en habitual. Esto muestra la naturaleza colectiva del proceso y demuestra que la influencia local puede producir efectos globales cuando alcanza una masa crítica suficiente.

La quinta hipótesis (H5) proponía que existe un equilibrio entre la dinámica natural del sistema y la intervención externa que se hace en él. Los experimentos realizados confirman esta idea porque la recuperación del consenso no depende de la intensidad de la intervención, sino también del estado en el que se encuentra el sistema en ese momento. Los agentes son más efectivos cuando su acción coincide con la tendencia natural de la red hacia configuraciones ordenadas, mientras que encuentran mayores dificultades en regímenes dominados por la coexistencia de dominios estables.

Finalmente, la sexta hipótesis (H6) planteaba que los estados obtenidos con un mayor número de agentes serían más estables. Los resultados de este trabajo respaldan esta hipótesis al observarse una mayor magnetización media final y una menor variabilidad entre simulaciones cuando aumenta el número de agentes. Esto indica que los agentes no solo incrementan la probabilidad de recuperación, sino que también favorecen configuraciones finales más robustas y reproducibles.

Más allá de la validación de estas hipótesis, una de las principales aportaciones de este trabajo es la introducción de un marco sencillo para estudiar procesos de recuperación de orden en sistemas complejos mediante agentes móviles. Aunque el modelo utilizado es deliberadamente simple, permite analizar de forma controlada cómo acciones locales pueden generar cambios macroscópicos y modificar la estructura global de un sistema.

Los resultados obtenidos también refuerzan la utilidad del modelo de Ising como herramienta para estudiar fenómenos colectivos más allá de la física estadística. Si se piensa en los espines como opiniones, los dominios como comunidades y los agentes como mecanismos de influencia externa, se encuentra una analogía sencilla e intuitiva que conecta este trabajo con problemas relacionados con la formación de consenso, la polarización y la dinámica de sistemas sociales complejos.

Por último, es importante señalar algunas limitaciones del estudio. El modelo se basa en una red regular bidimensional, opiniones binarias y agentes con reglas de actuación muy simples. Además, debido al coste computacional asociado a las simulaciones, el número de repeticiones realizadas para cada configuración experimental es limitado, lo que puede introducir fluctuaciones estadísticas en algunos resultados. Sin embargo, estas simplificaciones ayudan a entender los mecanismos básicos del fenómeno estudiado y asientan una base sólida para futuras extensiones del modelo.

En resumen, los resultados obtenidos demuestran que pequeñas perturbaciones locales móviles pueden alterar significativamente la forma en que funciona un sistema complejo. La eficacia de esta intervención depende de las características internas del sistema y de la intensidad y distribución de los agentes, existiendo umbrales de actuación a partir de los cuales surgen cambios colectivos de gran escala. Estos hallazgos contribuyen a una mejor comprensión de los mecanismos mediante los cuales acciones locales pueden generar organización global en sistemas compuestos por un gran número de elementos que interactúan entre sí.

## Capítulo 6. TRABAJOS FUTUROS

Aunque los resultados obtenidos permiten comprender mejor la capacidad de perturbaciones locales móviles para modificar sistemas autoorganizados, el modelo desarrollado presenta varias simplificaciones que abren múltiples posibilidades de investigación futuras. A continuación, se describen algunas las más interesantes que podrían explorarse a partir de este trabajo.

### **6.1 AGENTES INTELIGENTES**

En este trabajo los agentes se comportan de manera bastante simple, tienen una opinión fija, actúan sobre una región local y se mueven de forma aleatoria. Esta aproximación permite estudiar de forma controlada el efecto de perturbaciones externas, pero no aprovecha la información sobre el estado global del sistema. Diversos trabajos han propuesto extensiones de los modelos de dinámica de opinión incorporando agentes con distintos niveles de información y mecanismos de actuación más sofisticados (Sîrbu, Loreto, Servedio, & Tria, 2017).

Una posible extensión sería desarrollar agentes que puedan adaptarse o tomar decisiones. Por ejemplo, los agentes tener información parcial sobre la configuración de la red y utilizarla para seleccionar regiones donde su actuación resulte más efectiva. Otra posibilidad sería diseñar agentes capaces de identificar automáticamente las fronteras entre dominios y concentrar su influencia en dichas zonas, ya que suelen ser las regiones más sensibles a pequeñas perturbaciones.

Asimismo, podrían implementarse estrategias de optimización que permitieran decidir dinámicamente dónde actuar, cuándo hacerlo o cómo coordinarse con otros agentes para maximizar la velocidad de recuperación del alineamiento global.

## 6.2 REDES COMPLEJAS

El modelo utilizado en este trabajo se basa en una red cuadrada regular donde todos los espines poseen el mismo número de vecinos. Esta configuración facilita el análisis y permite comparar los resultados con la teoría clásica del modelo de Ising, sin embargo, muchas redes reales tienen estructuras mucho más complejas.

Sería especialmente interesante cómo los agentes se comportan en redes más complejas, como las redes *small-world*, las redes *scale-free* o los grafos con estructura comunitaria más realista. En estos sistemas, la forma en la que están conectados los puntos puede influir de manera significativa en la propagación la información y en la formación de estados colectivos.

Numerosos trabajos han mostrado que la estructura de la red puede modificar profundamente los procesos de consenso, polarización y formación de comunidades (Castellano, Fortunato, & Loreto, 2009). Además, estudios recientes han utilizado variantes del modelo de Ising sobre redes con estructura comunitaria para analizar cómo la topología afecta a la estabilidad de los estados colectivos (Baldassarri, Gallo, Jacquier, & Zocca, 2023). Analizar la interacción entre topología y agentes móviles permitiría hacer que el modelo sea más realista.

## 6.3 OPINIONES NO BINARIAS

Otra limitación importante del modelo de Ising es que únicamente permite dos estados posibles para cada espín. Aunque esta simplificación es adecuada para estudiar procesos básicos de alineamiento, muchos sistemas reales tienen más de dos estados posibles.

Una forma natural de mejorar el modelo sería utilizar el modelo de Potts, donde cada elemento puede tener varios estados discretos, permitiendo representar situaciones con varias alternativas simultáneas en lugar de solo dos (Wu, 1982).

También podrían explorarse modelos más complejos basados en orientaciones continuas o en interacciones heterogéneas entre partículas. Un ejemplo especialmente interesante es el modelo de Kuramoto, donde agentes externos pueden utilizarse para favorecer o impedir la sincronización de una red de osciladores (Sonnenschein, Schöll, Thiele, & Bick, 2024).

Estas variantes permitirían estudiar configuraciones más ricas y fenómenos colectivos que no pueden representarse mediante variables binarias, ampliando considerablemente el rango de aplicaciones potenciales del modelo.

#### **6.4 AGENTES COMPETITIVOS**

En el presente trabajo todos los agentes tienen el mismo objetivo y trabajan juntos para lograr una única orientación en el sistema. Pero en la vida real, hay muchos casos en los que los agentes tienen intereses opuestos y conviven.

Una posible extensión consistiría en introducir agentes que intenten imponer orientaciones contrarias dentro de la misma red. Esto crearía dinámicas de competencia entre procesos de recuperación y degradación, permitiendo estudiar fenómenos como la formación de fronteras estables, la coexistencia de dominios o la aparición de equilibrios dinámicos. Situaciones similares han sido estudiadas en modelos con perturbaciones externas capaces de modificar la evolución colectiva de sistemas complejos (Ramos, de Aguiar, & Braha, 2018).

Asimismo, podrían analizarse distintos niveles de coordinación entre agentes competidores y evaluar cómo pequeñas diferencias en número, frecuencia de actuación o capacidad de influencia afectan al resultado final.

#### **6.5 APLICACIÓN A MEDIOS FÍSICOS REALES**

Aunque el modelo desarrollado se ha utilizado principalmente para estudiar fenómenos generales de alineamiento y recuperación, existen aplicaciones potenciales en sistemas físicos donde la información se almacena mediante configuraciones locales de partículas o

dominios magnéticos. La relación entre información física y organización de sistemas materiales ha tenido un creciente interés en los últimos años (Vopson & Lepadatu, 2022).

Una posible línea de investigación sería hacer que el modelo se parezca más a lo que sucede en la vida real cuando la información se degrada o se recupera en medios magnéticos. Para ello sería necesario incluir mecanismos de deterioro temporal, ruido más realista y modelos físicos específicos del sistema de almacenamiento que se está estudiando.

Además, podrían desarrollarse agentes que actuaran como algoritmos correctores capaces de identificar regiones degradadas e intentar reconstruir la configuración original. Esto nos permitiría conectar el modelo con problemas relacionados con la preservación y recuperación de información almacenada físicamente, siendo una posible aplicación práctica de los conceptos estudiados en este trabajo. Este tipo de enfoques podría resultar especialmente interesante en sistemas donde la información se representa mediante configuraciones magnéticas susceptibles de degradarse con el tiempo (Vopson & Lepadatu, 2022).

## Capítulo 7. BIBLIOGRAFÍA

- Baldassarri, S., Gallo, A., Jacquier, V., & Zocca, A. (2023). Ising model on clustered networks: A model for opinion dynamics. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 623, 128811. doi:10.1016/j.physa.2023.128811
- Castellano, C., Fortunato, S., & Loreto, V. (2009). Statistical Physics of Social Dynamics. *Reviews of Modern Physics*, 81(2), 591-646.
- Galam, S. (2008). Sociophysics: A review of Galam models. *International Journal of Modern Physics C*, 19(3), 409-440.
- Ising, E. (1925). Beitrag zur Theorie des Ferromagnetismus. *Zeitschrift für Physik*, 253-258.
- Metropolis, N., Rosenbluth, A. W., Rosenbluth, M. N., Teller, A. H., & Teller, E. (1953). Equation of State Calculations by Fast Computing Machines. *Journal of Chemical Physics*, 21(6), 1087–1092.
- Newman, M. E., & Barkema, G. T. (1999). *Monte Carlo Methods in Statistical Physics*. Oxford University Press.
- Onsager, L. (1944). Crystal Statistics. I. A Two-Dimensional Model with an Order-Disorder Transition. *Physical Review*, 65(3-4), 117-149.
- Ramos, M., de Aguiar, M. A., & Braha, D. (2018). Opinion Dynamics on Networks under Correlated Disordered External Perturbations. *Journal of Statistical Physics*, 173(1), 54-78. doi:10.1007/s10955-018-2135-5
- Sîrbu, A., Loreto, V., Servedio, V. D., & Tria, F. (2017). Opinion dynamics: Models, extensions and external effects. En *Participatory Sensing, Opinions and Collective Awareness* (págs. 363-401). Springer. doi:10.1007/978-3-319-25658-0\_17

Sonnenschein, B., Schöll, E., Thiele, U., & Bick, C. (2024). Desynchronizing states in oscillator networks by local phase resetting. *Physical Review Research*, 6(4), 043188. doi:10.1103/PhysRevResearch.6.043188

Vopson, M. M., & Lepadatu, S. (2022). Second law of information dynamics. *AIP Advances*, 12(7), 075310. doi:10.1063/5.0100358

Wu, F. (1982). The Potts model. *Reviews of Modern Physics*, 54(1), 235–268. doi:10.1103/RevModPhys.54.235

## ANEXO I

En este anexo se recogen los principales detalles de implementación del modelo desarrollado. El objetivo no es incluir todo el código fuente utilizado, sino mostrar la estructura general del programa, las funciones principales y los fragmentos más representativos que permiten reproducir las simulaciones realizadas.

### ***1.1 ESTRUCTURA GENERAL DEL CÓDIGO***

La implementación se realizó en Python, utilizando principalmente las librerías NumPy para el cálculo numérico y Matplotlib para la generación de gráficas y visualizaciones. El código se organizó en distintos bloques funcionales:

- Inicialización de la red de espines.
- Cálculo de magnitudes físicas: magnetización, energía y capacidad calorífica.
- Implementación de la dinámica de Metropolis.
- Generación de configuraciones auto organizadas.
- Implementación de agentes móviles.
- Ejecución de simulaciones individuales y múltiples.
- Cálculo de métricas de recuperación y estabilidad.
- Generación de figuras para el análisis de resultados.

La estructura general de una simulación puede resumirse mediante el siguiente pseudocódigo:

```
Inicializar red aleatoria de tamaño L x L

Para cada sweep de la fase natural:
    Aplicar algoritmo de Metropolis
    Registrar magnetización y energía

Guardar configuración autoorganizada

Introducir agentes móviles

Para cada sweep de la fase con agentes:
    Aplicar algoritmo de Metropolis
    Mover agentes
```

```
Aplicar influencia local de los agentes
Calcular magnetización
Comprobar si se alcanza consenso
```

```
Guardar métricas finales:
magnetización final
éxito o fracaso
tiempo hasta consenso
media y varianza de la magnetización
```

## ***I.2 PARÁMETROS PRINCIPALES DE SIMULACIÓN***

Los parámetros utilizados se ajustaron en función del experimento concreto. De forma general, se trabajó con redes cuadradas de tamaño  $L \times L$ , condiciones de contorno periódicas y distintas combinaciones de valores de  $\beta$ , número de agentes y frecuencia de actuación.

Los parámetros más relevantes fueron:

```
L = 50 # Tamaño de la red
J = 1.0 # Intensidad de interacción ferromagnética
N = L * L # Número total de espines

betas = [0.44, 0.45, 0.46, 0.5, 0.75, 1.0]
agent_every_values = [0.25, 0.5, 1, 2, 5, 10, 20]
num_agents_values = [1, 2, 5, 10, 20]

n_runs = 15 # Número habitual de ejecuciones independientes
consensus_threshold = 0.95
```

Debido al coste computacional de las simulaciones Monte Carlo, especialmente en los experimentos multiagente, se emplearon generalmente 15 ejecuciones independientes por configuración experimental. Este número permitió obtener tendencias representativas, aunque algunas magnitudes presentaron dispersión estadística, especialmente cerca de la región crítica.

### ***1.3 INICIALIZACIÓN DE LA RED***

La red se inicializa asignando a cada posición un espín aleatorio con valor +1 o -1. Esto representa una configuración inicial desordenada sobre la que posteriormente actúa la dinámica natural del modelo.

```
def initialize_lattice(L):  
    """  
    Inicializa una red cuadrada L x L con espines aleatorios +1 o -1.  
    """  
    return np.random.choice([-1, 1], size=(L, L))
```

### ***1.4 CÁLCULO DE LA MAGNETIZACIÓN***

La magnetización mide el grado de alineamiento global de la red. En las simulaciones se utiliza habitualmente el valor absoluto de la magnetización, ya que interesa medir el grado de consenso independientemente de si el estado dominante es +1 o -1.

```
def magnetization(lattice):  
    """  
    Calcula la magnetización media de la red.  
    """  
    N = lattice.size  
    return np.sum(lattice) / N  
def abs_magnetization(lattice):  
    """  
    Calcula el valor absoluto de la magnetización.  
    """  
    return abs(magnetization(lattice))
```

### ***1.5 CÁLCULO DE LA ENERGÍA***

La energía se calcula a partir del Hamiltoniano del modelo de Ising. Para evitar contar dos veces las mismas interacciones, se consideran únicamente los vecinos derecho e inferior de cada espín. Las condiciones periódicas se implementan mediante el operador módulo.

```
def total_energy(lattice, J=1.0):  
    """  
    Calcula la energía total de una configuración del modelo de Ising  
    con condiciones de contorno periódicas.  
    """
```

```
L = lattice.shape[0]
E = 0.0

for i in range(L):
    for j in range(L):
        s = lattice[i, j]
        nn = lattice[(i + 1) % L, j] + lattice[i, (j + 1) % L]

        E += -J * s * nn

return E
```

La energía por espín se obtiene dividiendo la energía total entre el número total de espines:

```
def energy_per_spin(lattice, J=1.0):
    """
    Calcula la energía media por espín.
    """
    return total_energy(lattice, J) / lattice.size
```

## ***I.6 ALGORITMO DE METROPOLIS***

La dinámica natural del sistema se simula mediante el algoritmo de Metropolis. En cada actualización se selecciona un espín aleatorio, se calcula el cambio de energía que produciría invertirlo y se acepta o rechaza el cambio según la probabilidad de Metropolis.

```
def metropolis_step(lattice, beta, J=1.0):
    """
    Realiza un intento de actualización de Metropolis sobre un espín aleatorio.
    """
    L = lattice.shape[0]

    i = np.random.randint(0, L)
    j = np.random.randint(0, L)

    s = lattice[i, j]

    neighbors = (
        lattice[(i + 1) % L, j] +
        lattice[(i - 1) % L, j] +
        lattice[i, (j + 1) % L] +
        lattice[i, (j - 1) % L]
    )

    delta_E = 2 * J * s * neighbors
```

```
if delta_E <= 0:
    lattice[i, j] *= -1
else:
    if np.random.rand() < np.exp(-beta * delta_E):
        lattice[i, j] *= -1
```

Un Monte Carlo sweep consiste en realizar aproximadamente  $N = L^2$  intentos de actualización, de forma que cada espín tenga, en promedio, una oportunidad de cambiar su estado.

```
def metropolis_sweep(lattice, beta, J=1.0):
    """
    Realiza un sweep completo de Metropolis.
    """
    N = lattice.size

    for _ in range(N):
        metropolis_step(lattice, beta, J)
```

## ***1.7 GENERACIÓN DE CONFIGURACIONES AUTO ORGANIZADAS***

Antes de introducir agentes, el sistema evoluciona de forma natural para generar configuraciones con dominios. Esta fase permite estudiar la acción de los agentes sobre estructuras ya formadas, en lugar de sobre configuraciones completamente aleatorias.

```
def generate_initial_domains(L, beta, sweeps, J=1.0):
    """
    Genera una configuración auto organizada a partir de una red aleatoria.
    """
    lattice = initialize_lattice(L)

    for _ in range(sweeps):
        metropolis_sweep(lattice, beta, J)

    return lattice
```

Esta función se utilizó especialmente para valores cercanos a  $\beta \approx 0.44$ , donde aparecen dominios persistentes sin que exista necesariamente consenso global.

## ***I.8 MODELO DE AGENTE MÓVIL***

Cada agente se define por una posición dentro de la red y una opinión fija, representada por un valor +1 o -1. En cada actuación, el agente modifica localmente la red imponiendo su estado sobre la celda que ocupa y sobre su vecindad.

```
def initialize_agents(num_agents, L, opinion=1):
    """
    Inicializa agentes en posiciones aleatorias de la red.
    """
    agents = []

    for _ in range(num_agents):
        i = np.random.randint(0, L)
        j = np.random.randint(0, L)
        agents.append({"pos": (i, j), "opinion": opinion})

    return agents
```

## ***I.9 MOVIMIENTO DE LOS AGENTES***

Los agentes se mueven libremente por la red mediante desplazamientos aleatorios a una de las celdas vecinas. Las condiciones periódicas permiten que un agente que sale por un borde de la red reaparezca por el lado opuesto.

```
def move_agent(agent, L):
    """
    Mueve un agente aleatoriamente a una celda vecina.
    """
    i, j = agent["pos"]

    possible_moves = [
        (1, 0), # abajo
        (-1, 0), # arriba
        (0, 1), # derecha
        (0, -1) # izquierda
    ]

    di, dj = possible_moves[np.random.randint(0, len(possible_moves))]

    new_i = (i + di) % L
    new_j = (j + dj) % L

    agent["pos"] = (new_i, new_j)
```

## ***I.10 INFLUENCIA LOCAL DEL AGENTE***

La influencia del agente se aplica sobre una región local de la red. En los experimentos realizados, el agente impone su opinión sobre la celda central y sobre los vecinos más cercanos definidos en el modelo de actuación.

```
def apply_agent_influence(lattice, agent):
    """
    Aplica la influencia local del agente sobre la red.
    """
    L = lattice.shape[0]
    i, j = agent["pos"]
    opinion = agent["opinion"]

    affected_positions = [
        (i, j),
        ((i + 1) % L, j),
        ((i - 1) % L, j),
        (i, (j + 1) % L),
        (i, (j - 1) % L),
        ((i + 1) % L, (j + 1) % L),
        ((i + 1) % L, (j - 1) % L),
        ((i - 1) % L, (j + 1) % L),
        ((i - 1) % L, (j - 1) % L)
    ]

    for x, y in affected_positions:
        lattice[x, y] = opinion
```

En el caso multiagente, esta función se aplica de forma independiente para cada agente. Si varios agentes afectan a una misma celda, prevalece la última actualización realizada durante ese sweep.

```
def apply_all_agents(lattice, agents):
    """
    Aplica la influencia de todos los agentes.
    """
    for agent in agents:
        apply_agent_influence(lattice, agent)
```

## I.11 SIMULACIÓN CON AGENTES

La simulación con agentes combina la dinámica natural del sistema con la intervención externa. En cada sweep, la red evoluciona mediante Metropolis y, según la frecuencia definida por el parámetro `agent_every`, los agentes se mueven y actúan sobre la red.

```
def run_simulation_with_agents(
    initial_lattice,
    beta,
    num_agents=1,
    agent_every=1,
    max_sweeps=10000,
    consensus_threshold=0.95,
    J=1.0
):
    """
    Ejecuta una simulación con agentes móviles.
    """
    lattice = initial_lattice.copy()
    L = lattice.shape[0]

    agents = initialize_agents(num_agents, L, opinion=1)

    magnetization_history = []
    consensus_time = None

    for sweep in range(max_sweeps):
        metropolis_sweep(lattice, beta, J)

        if sweep % int(max(1, agent_every)) == 0:
            for agent in agents:
                move_agent(agent, L)
            apply_all_agents(lattice, agents)

        m_abs = abs_magnetization(lattice)
        magnetization_history.append(m_abs)

        if m_abs >= consensus_threshold and consensus_time is None:
            consensus_time = sweep
            break

    success = consensus_time is not None

    return {
        "final_lattice": lattice,
        "magnetization_history": magnetization_history,
        "success": success,
        "consensus_time": consensus_time
    }
```

En algunos experimentos se utilizaron valores de `agent_every` inferiores a 1 para representar frecuencias de actuación mayores que una vez por sweep. En esos casos, la implementación se adaptó para permitir varias actuaciones del agente dentro de un mismo sweep.

## ***I.12 CRITERIO DE CONSENSO***

El criterio de consenso se define como una magnetización absoluta igual o superior a 0.95. Esto equivale a exigir que al menos el 95 % de los espines estén alineados en una misma dirección.

```
def has_consensus(lattice, threshold=0.95):  
    """  
    Determina si la red ha alcanzado consenso.  
    """  
    return abs_magnetization(lattice) >= threshold
```

Este criterio permite distinguir entre configuraciones parcialmente alineadas y estados donde existe una orientación claramente dominante.

## ***I.13 EJECUCIÓN DE MÚLTIPLES SIMULACIONES***

Para estimar probabilidades de éxito, tiempos medios y estabilidad de los resultados, cada configuración experimental se repitió varias veces de forma independiente.

```
def run_multiple_simulations(  
    L,  
    beta,  
    num_agents,  
    agent_every,  
    n_runs,  
    natural_sweeps,  
    max_sweeps  
):  
    """  
    Ejecuta varias simulaciones independientes para una misma  
    configuración.  
    """  
    successes = []
```

```
consensus_times = []
final_magnetizations = []

for _ in range(n_runs):
    initial_lattice = generate_initial_domains(
        L=L,
        beta=beta,
        sweeps=natural_sweeps
    )

    result = run_simulation_with_agents(
        initial_lattice=initial_lattice,
        beta=beta,
        num_agents=num_agents,
        agent_every=agent_every,
        max_sweeps=max_sweeps
    )

    successes.append(result["success"])
    final_magnetizations.append(
        abs_magnetization(result["final_lattice"])
    )

    if result["success"]:
        consensus_times.append(result["consensus_time"])

success_rate = np.mean(successes)
mean_final_magnetization = np.mean(final_magnetizations)
var_final_magnetization = np.var(final_magnetizations)

if len(consensus_times) > 0:
    mean_consensus_time = np.mean(consensus_times)
else:
    mean_consensus_time = None

return {
    "success_rate": success_rate,
    "mean_consensus_time": mean_consensus_time,
    "mean_final_magnetization": mean_final_magnetization,
    "var_final_magnetization": var_final_magnetization
}
```

## ***I.14 BARRIDO DE PARÁMETROS***

Para estudiar el efecto de la frecuencia de actuación y del número de agentes, se realizaron barridos sobre distintas combinaciones de parámetros.

```
results = {}

for num_agents in num_agents_values:
    for agent_every in agent_every_values:

        metrics = run_multiple_simulations(
            L=L,
            beta=0.44,
            num_agents=num_agents,
            agent_every=agent_every,
            n_runs=n_runs,
            natural_sweeps=2000,
            max_sweeps=10000
        )

        results[(num_agents, agent_every)] = metrics
```

A partir de estos resultados se generaron las gráficas de éxito, tiempo hasta consenso, magnetización final y estabilidad de las configuraciones finales.

## ***I.15 CÁLCULO DE LAS MÉTRICAS***

Las principales métricas utilizadas en el análisis fueron la proporción de éxito, el tiempo medio hasta consenso, la magnetización media final y la varianza de la magnetización final.

```
success_rate = number_of_successful_runs / total_number_of_runs
mean_time = np.mean(consensus_times)
mean_magnetization = np.mean(final_magnetizations)
variance_magnetization = np.var(final_magnetizations)
```

Cuando ninguna simulación alcanzaba el consenso para una configuración determinada, el tiempo medio hasta consenso no se calculaba, ya que no existía ningún tiempo de convergencia válido para promediar.

## ***I.16 GENERACIÓN DE MAPAS DE CALOR***

Los mapas de calor se utilizaron para representar de forma conjunta el efecto del número de agentes y de la frecuencia de actuación.

```
import matplotlib.pyplot as plt

def plot_heatmap(matrix, x_labels, y_labels, title, colorbar_label):
    """
    Genera un mapa de calor para representar métricas agregadas.
    """
    plt.figure(figsize=(7, 5))
    plt.imshow(matrix, aspect="auto", origin="lower")

    plt.xticks(range(len(x_labels)), x_labels)
    plt.yticks(range(len(y_labels)), y_labels)

    plt.xlabel("agent_every")
    plt.ylabel("Número de agentes")
    plt.title(title)

    cbar = plt.colorbar()
    cbar.set_label(colorbar_label)

    plt.tight_layout()
    plt.show()
```

Esta visualización permitió identificar de forma clara regiones de éxito, zonas donde el consenso no se alcanzaba y combinaciones de parámetros con menor tiempo de convergencia.

## ***I.17 REPRODUCIBILIDAD***

Para favorecer la reproducibilidad de los experimentos, se fijaron semillas aleatorias en las simulaciones principales y se almacenaron los parámetros utilizados en cada ejecución.

```
np.random.seed(42)
```

Además, cada experimento se identificó mediante los valores de sus parámetros principales:

```
experiment_name = (  
    f"beta_{beta}_agents_{num_agents}_"  
    f"agentEvery_{agent_every}_run_{run_id}"  
)
```

Esto permitió organizar las configuraciones iniciales, finales y métricas asociadas a cada simulación.

## ***I.18 CONSIDERACIONES FINALES***

Los fragmentos incluidos en este anexo resumen los elementos esenciales de la implementación. El código completo contiene funciones adicionales para guardar resultados, generar figuras, comparar configuraciones y automatizar barridos de parámetros. Sin embargo, las funciones presentadas aquí recogen la lógica fundamental del modelo.