Propiedades de convergencia de los modelos iterativos

Carlos Vázquez Irene Otero-Novas Michel Rivier
Instituto de Investigación Tecnológica (IIT)
ICAI. Universidad Pontificia Comillas
c/ Santa Cruz de Marcenado, 26. 28015 Madrid, Spain
http.//www.iit.upco.es

IIT Working Paper IIT-00-088A

Enero 2000

1 Introducción

Este anexo está dedicado al estudio de las características de convergencia de los modelos iterativos de casación. El principal resultado del trabajo muestra cómo estos modelos consiguen llegar a la solución de máxima eficiencia y hacer que el sistema opere en el mismo punto de funcionamiento que habría determinado un algoritmo de optimización centralizada.

Los desarrollos clásicos de la teoría de subastas generalmente definen un conjunto de reglas que caracterizan un tipo concreto de subasta y, a partir de ello, analizan las propiedades del mecanismo definido. La teoría marginalista, por otra parte, introduce el concepto de modelo de referencia, definiendo un sistema ideal (optimización centralizada con información perfecta) cuyos resultados debe intentar reproducir cualquier procedimiento alternativo que se quiera definir y calcula las condiciones que definen el diseño del sistema para garantizar que dicha igualdad se cumpla. En este documento, se utiliza la técnica del modelo de referencia aplicándola al estudio de las subastas. Ello permite dotar a las subastas iterativas de una base teórica sólida que garantiza que no solamente se trata de un procedimiento más o menos ingenioso que consigue obtener resultados razonables, sino que es un método riguroso que recoge completamente los acoplamientos intertemporales entre los distintos mercados y que converge a la solución óptima en un número finito de iteraciones.

2 Ofertas basadas en costes

El objetivo de todo este capítulo consiste en demostrar que los algoritmos iterativos, y en particular la casación propuesta por Wilson durante el periodo inicial del mercado de California que se describe en detalle en el apartado 2.1.2, convergen a la misma solución que se habría obtenido con un modelo centralizado de optimización. La conjetura, cuya motivación y demostración se detallarán a lo largo de los siguientes apartados, es que un proceso de subasta basado en las reglas de Wilson es un caso particular de la optimización distribuida realizada mediante relajación lagrangiana. La relajación lagrangiana es una técnica de descomposición clásica empleada para resolver determinados problemas complejos de optimización y, en particular, es muy frecuente en las aplicaciones de *unit commitment*.

Aunque el razonamiento puede extenderse a las situaciones en las que la demanda es elástica y participa en el mercado realizando ofertas de compra, supondremos por simplicidad en este estudio una demanda rígida, constante y conocida de antemano.

2.1 Conceptos básicos

2.1.1 Relajación lagrangiana

La relajación lagrangiana es una técnica de descomposición que permite tratar de forma eficiente los problemas en los que una o varias restricciones complican la resolución del problema. Es decir, que si se elimina el primer grupo de restricciones que acoplan un gran número de variables, cada uno de los otros subgrupos de ecuaciones puede resolverse aisladamente, lo que facilita notablemente el proceso de cálculo. En el problema del unit commitment, las restricciones propias de cada uno de los grupos generadores forman bloques claramente separables y es la ecuación de equilibrio generación-demanda la que los liga. Si se pudiera relajar esta restricción, sería posible resolver por separado el problema de cada uno de los generadores de una forma muy sencilla.

De este modo, se forma un problema maestro que contiene las 24 restricciones de equilibrio entre generación y demanda, una para cada hora del periodo de estudio, y una serie de subproblemas, donde cada uno de ellos modela el conjunto de restricciones propias de cada grupo generador (o empresa). El problema maestro podría incluir otro tipo de restricciones que involucrasen a más de un agente, como los servicios complementarios o los criterios de transporte, pero este tipo de condiciones no se consideran en este análisis.

El procedimiento de solución sería el siguiente:

I) El maestro realiza una propuesta de precios inicial a los subproblemas (cualquier perfil de precios es válido).

II) Éstos responden indicando la cantidad de energía que desean producir en cada hora a la vista de los precios que el maestro se ha ofrecido a pagarles.

III) A partir de estos datos, el problema maestro comprueba si se satisfacen sus propias restricciones; es decir, si la energía que los agentes desean producir cumple los 24 equilibrios de generación y demanda.

IV) En caso de que no sea así, el maestro ajusta los precios (sube los precios de las horas en las que hay más demanda que generación y baja los precios de las horas donde hay exceso de producción).

V) Se envía una nueva propuesta de precios a los agentes y el proceso vuelve a comenzar a partir del punto II).

VI) El algoritmo termina cuando el maestro es capaz de encontrar unos precios que hagan que las cantidades que los agentes quieren producir cumplan con las restricciones comunes, de modo que la generación coincida exactamente con la demanda.

2.1.2 Reglas de Wilson

El punto de partida del método de Wilson es la casación simple, donde los agentes realizan ofertas de precio y cantidad para las diferentes horas del día. Cada hora es casada independientemente de las demás mediante el cálculo del punto de corte de las curvas de oferta y demanda agregadas. Puesto que las ofertas que los agentes envían al mercado no incluyen explícitamente ni costes de arranque, ni restricciones de rampa, ni otro tipo de características técnicas y económicas de los agentes, éstos deben internalizar todas esas condiciones en sus ofertas simples de energía. Esto puede interpretarse como una descomposición del unit commitment original en dos tipos de problemas: un problema de mercado, donde se tiene en cuenta a todos los agentes, y que únicamente se preocupa de que la generación sea igual a la demanda (la casación) y un conjunto de problemas individuales, uno para cada agente, donde los generadores consideran todas las restricciones que definen su funcionamiento (los modelos de confección de ofertas).

Las reglas de Wilson, a grandes rasgos, se diseñan para permitir a los agentes modificar sus ofertas una vez que han visto los resultados de la casación, de modo que puedan corregir los posibles errores que hayan cometido al internalizar. Con las nuevas ofertas, se casa de nuevo el mercado y se vuelve a dar a los agentes oportunidad de rectificar sus datos. El proceso se detiene cuando ningún agente tiene motivos para modificar su oferta. Además, existe un conjunto de reglas destinadas a garantizar y acelerar la convergencia del proceso y que tienen una notable importancia en el comportamiento práctico de la casación. Las más relevantes son:

- El precio de la oferta debe ser siempre descendente; no está permitido modificar una oferta para aumentar su precio, ni incorporar nuevas ofertas cuando la subasta ya está empezada. Esto hace que la estrategia razonable de cualquier jugador consista en comenzar ofertando precios muy altos para luego ir bajándolos en cada iteración según le interese.
- Cualquier oferta que no haya sido aceptada en una determinada casación debe mejorar su precio en la primera oportunidad que tenga (en la siguiente iteración). Si no lo hace así, la oferta quedará congelada y ya no será posible volver a modificarla salvo que el precio del mercado suba por encima del nivel que tenía cuando se congeló la oferta. De este modo, se consigue que los agentes no se limiten a esperar a las últimas rondas para mejorar su oferta, sino que se vean obligados a ir revelando parte de sus preferencias a lo largo de las iteraciones intermedias.
- Las ofertas que se modifiquen deben mejorar el precio de mercado existente en una cierta cantidad mínima ε. Con ello se hace que los precios vayan, poco a poco, disminuyendo y se acelera la convergencia del proceso.
- En cualquier instante, es posible retirar del mercado una determinada oferta. No obstante, esta decisión es irrevocable y no se podrá en ningún caso volver a incorporar a la subasta la energía retirada.

Las implicaciones y la utilidad de cada una de estas reglas se analizarán en profundidad a lo largo de los siguientes apartados.

El mercado, dividido en un modelo de casación (análogo al problema maestro de la relajación lagrangiana) y unos modelos de confección de ofertas (análogos a los subproblemas), operaría de la siguiente forma:

i) Los agentes envían unas primeras ofertas de precio y cantidad al operador del mercado, con precios muy altos.

ii) Se realiza una casación y se obtienen unos precios iniciales.

iii) A la vista de estos precios, los agentes determinan cuánta energía desean producir en cada hora.

iv) Cada agente modifica sus propias ofertas de precios para cada uno de los bloques de energía con el objetivo de conseguir producir el perfil de generación determinado en iii)

- Si se quiere generar más energía de la que ha sido casada en la iteración anterior (éste es el caso más frecuente, especialmente en las primeras iteraciones donde el precio del mercado es muy alto), se deberá reducir el precio de oferta de los bloques de energía que no fueron aceptados en la iteración anterior y que se pretende que sí lo sean en la presente iteración. El nuevo precio de oferta será igual a $\rho_h^{j-1} - \varepsilon$ (el precio de mercado de la hora *h* en la iteración anterior *j-1*, menos el decremento mínimo fijado por las reglas)*. El precio de oferta de los bloques de energía que sí fueron aceptados originalmente no debe, en principio, modificarse.
- Si el generador quiere producir menos energía de la que le fue casada en la iteración anterior, retirará de la subasta las correspondientes ofertas.

v) Con estas nuevas ofertas, se realiza una casación, se obtienen unos nuevos precios y se vuelve al punto iii).

vi) El proceso termina cuando ninguno de los agentes tiene interés en modificar sus ofertas.

---

* El precio ofertado podría ser éste o cualquier otro inferior pero, en principio, cualquier otra solución resulta peor que ésta ya que reduce las posibilidades de maniobra del generador en las siguientes iteraciones.

2.1.3 Comparación*

Los dos primeros puntos i) y ii) del método de Wilson tienen como finalidad básica obtener un primer perfil de precios del mercado, equivalente al perfil inicial propuesto por la relajación lagrangiana en I). A partir de estos precios, los subproblemas determinan el nivel de energía que se quiere producir en cada hora, tanto en la subasta de Wilson iii) como en la optimización II).

El siguiente paso para la relajación lagrangiana III) consiste en comparar el total de la energía que los agentes quieren producir con el total de la demanda. Si ambas cantidades no son iguales, se procederá a modificar los precios; en caso contrario, el proceso habrá terminado. En el método de Wilson iv) el procedimiento es ligeramente diferente: cada agente compara la energía que quiere producir con la energía que le fue aceptada en la casación. Intuitivamente, la energía que un grupo desea generar pero que no ha podido colocar en el mercado es una medida del desajuste que existe entre la generación que está disponible para un cierto precio y la demanda del sistema y es análogo al criterio del método de relajación.

Para ver esto mejor, podemos realizar el sumatorio de esta condición para el conjunto de los agentes del sistema, obteniendo que la suma de toda la energía que los agentes quieren producir debe ser igual a la suma de toda la energía aceptada en la casación. Y considerando que este segundo término es, por definición de casación, igual a la demanda, se llega al mismo criterio de actualización empleado en la relajación lagrangiana. Así, siempre que la relajación lagrangiana detecte una situación en la que deben modificarse los precios y proseguir iterando, la subasta de Wilson también lo detectará. Las siguientes ecuaciones explican estas igualdades con más claridad.

<u>Relajación lagrangiana</u> cambia los precios si $\boxed{\sum_i g_i^j \neq D}$

<u>Wilson</u> cambia los precios si $\left.\begin{array}{c} g_1^j \neq q_1^j \\ \vdots \\ g_i^j \neq q_i^j \\ \vdots \\ g_N^j \neq q_N^j \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_i g_i^j \neq \sum_i q_i^j \Rightarrow \boxed{\sum_i g_i^j \neq D}$

---

* Nótese que los número en mayúscula corresponden a pasos del método de relajación lagrangiana mientras que los números en minúscula corresponden a etapas del método de Wilson.

Siendo g_i^j la energía que el agente i desea producir teniendo en cuenta los precios de la iteración j.

q_i^j la generación adjudicada al agente i en la casación de la iteración j.

D la demanda total del sistema, que se supone rígida.

Aun así, hay que mencionar que el método de Wilson realiza comparaciones individuales para cada uno de los agentes, mientras que la relajación lagrangiana solamente hace comprobaciones sobre los datos totales. En algunas situaciones, por ejemplo si dos agentes quieren modificar su producción en cantidades iguales y de signo contrario, esto podría dar lugar a que el método de Wilson detectase que todavía es necesario corregir las ofertas a pesar de que la relajación lagrangiana estimase que los precios ya son correctos. En este tipo de casos, la casación de Wilson necesitaría una iteración adicional, pero el precio que resulte de ella será, en general, el mismo precio de la iteración anterior, y el proceso concluirá en este punto. Así, el resultado de ambos modelos será finalmente igual.

El proceso de cálculo de los nuevos precios IV) y iv) se discute en detalle en el siguiente apartado. Los dos últimos pasos V) / v) y VI) / vi) son totalmente análogos para ambos modelos.

2.2 Actualización de los precios

2.2.1 Relajación lagrangiana

La parte más delicada de este proceso de optimización es la forma de ir actualizando los precios entre las distintas iteraciones para que los resultados se vayan acercando progresivamente a la solución del problema y que el proceso converja a una situación donde se satisfagan todas las restricciones del problema maestro.

Cuando todo el problema es lineal, la relajación lagrangiana puede ser reemplazada con ventaja por la descomposición de Dantzig-Wolfe, cuya estructura general es la misma que la del método de relajación. En este caso, el objetivo del problema maestro consiste en encontrar una combinación lineal de las soluciones enviadas por los subproblemas a lo largo de las diferentes iteraciones que cumpla con las restricciones de complicación. Al ser lineal, esto puede resolverse mediante una optimización explícita por cualquiera de los procedimientos convencionales (simplex, etc.). Esta optimización permite obtener los precios de cada restricción de una manera muy sencilla a partir de las correspondientes variables duales. La relajación lagrangiana es una extensión de este concepto al campo no lineal. La no linealidad hace que ya no sea posible resolver el problema mediante una combinación de las soluciones de los subproblemas y que sea necesario emplear en el problema maestro técnicas de optimización no lineal, heurísticas, para ir actualizando los precios y encontrar las señales económicas adecuadas. No obstante, puesto que la filosofía de ambos procedimientos es esencialmente la misma, emplearemos el algoritmo de Dantzig-Wolfe como referencia en el diseño del mecanismo de relajación lagrangiana.

- *Relación entre los precios y las restricciones del problema maestro*

Hasta ahora, se ha mostrado cómo en la relajación lagrangiana se emplean los precios de las distintas horas para influir en las decisiones de producción de los agentes y conseguir que se cumplan los diferentes equilibrios entre generación y demanda. Es preciso definir en este momento cuáles son los precios que controlan cada uno de los desequilibrios. Por ejemplo, si en un determinado instante del proceso iterativo existe un desajuste en una cierta hora *h* y el resto de las horas están perfectamente equilibradas, ¿debe cambiarse simplemente el precio de la hora *h*, o deben alterarse también los precios de otras horas más o menos adyacentes?. En general, ¿es necesario modificar los precios de todas las horas de acuerdo con unos determinados coeficientes cuando aparece un *mismatch* en una hora cualquiera?. Se trata, en definitiva, de determinar cuál debe ser la forma de la matriz que relaciona los precios con las restricciones en el problema maestro.

Supongamos una descomposición de Dantzig-Wolfe en la que las restricciones del problema maestro toman la forma

$$\sum_i a_{i,j} \cdot x_i = b_j \quad : \pi_j \qquad \text{para las distintas restricciones } j$$

Donde $a_{i,j}$ y b_j son coeficientes, mientras que las distintas x_i son variables y los π_j representan las correspondientes variables duales de cada restricción.

Entonces, el método de Dantzig-Wolfe envía a los subproblemas una información que penaliza a las distintas variables en función de su influencia en los costes del problema maestro. La función objetivo de los subproblemas se transforma, de este modo, en:

$$min \quad Z - \sum_i x_i \cdot \sum_j \left(a_{i,j} \cdot \pi_j \right)$$

Donde Z es la función objetivo original del subproblema que no tiene en cuenta las restricciones del problema maestro (es igual a sus costes de operación) y el término $\sum_j (a_{i,j} \cdot \pi_j)$ es la penalización que soporta cada variable x_i.

En el modelo de *unit commitment* que se ha formulado en este informe, las restricciones del problema maestro son:

$$\sum_i g_{i,h} = d_h \quad :\pi_h \qquad \text{para las distintas horas } h$$

Donde $g_{i,h}$ es la generación que produce el grupo i durante la hora h y d_h es la demanda de la hora h.

Así, la función objetivo de los subproblemas queda definida como

$$min \quad Z - \sum_{i,h} g_{i,h} \cdot \pi_h$$

Se observa que cada uno de los $g_{i,h}$ solamente está penalizado por la variable dual del equilibrio generación-demanda de la propia hora h. Es decir, que la energía producida en una hora cualquiera sólo tiene influencia, a efectos del problema maestro, en la restricción de equilibrio que corresponde a esa hora. Ésta es la estructura que debe trasladarse al modelo de relajación lagrangiana.

La relajación lagrangiana construye una serie de precios ρ_h, uno para cada hora, que, en principio, dependen de los 24 *mismatches* de las restricciones de equilibrio generación-demanda. Con estos precios, la función objetivo a la que se enfrenta cada uno de los subproblemas es la clásica maximización de beneficios.

$$max \quad \sum_{i,h} \rho_h \cdot g_{i,h} - Z$$

Por comparación con la función objetivo del modelo de Dantzig-Wolfe (cambiando los signos para pasar del problema de maximización al de minimización), se observa que para que ambas funciones sean iguales ρ_h debería ser igual a π_h. Ya que el problema no es lineal, no es posible calcular de forma simple π_h, pero este resultado implica que las aproximaciones que el modelo de optimización no lineal haga del precio ρ_h deben basarse solamente en la información de la restricción de equilibrio en la hora h, que es la ecuación con la que se calculaba π_h. Es decir, que las modificaciones del precio de una determinada hora únicamente deben depender del estado en el que se encuentre la restricción de balance de esa hora.

De este modo, la matriz inicial que relacionaba los precios con las restricciones en el problema maestro queda reducida a una simple matriz diagonal, donde cada precio controla solamente la ecuación de balance correspondiente a su propia hora e ignora los *mismatches* que pudieran aparecer en cualquiera de las otras horas. Los acoplamientos temporales, que sí existen en el *unit commitment*, no se encuentran en el problema maestro, sino en los subproblemas, y por este motivo el maestro puede limitarse a controlar la restricción que corresponde a cada hora con el propio precio de esa hora, sin incorporar acoplamientos entre ellas.

- *Dirección de modificación de los precios*

Una vez que se ha determinado cuál es la restricción que debe controlar cada uno de los precios, la regla básica que debe seguirse en la actualización de éstos es que la modificación contribuya a disminuir el desajuste detectado en la correspondiente ecuación de balance. Es decir, que si se observa un exceso de generación, el precio debe modificarse de forma que haga disminuir la generación (o aumentar la demanda), y viceversa. Por supuesto, esto implica que el precio no cambiará si no existe ningún desequilibrio en la restricción.

En el *unit commitment* este proceso es muy sencillo de controlar. Una subida de precios siempre implicará un aumento de la generación ofrecida por los agentes y una disminución de los precios siempre contribuirá a reducir la producción de modo que la dirección en la que deben modificarse los precios resulta muy sencilla de calcular y queda claramente definida por estas reglas:

$$\begin{cases} \sum_i g_{i,h}^j < d_h & \Rightarrow \quad \rho_h^{j+1} > \rho_h^j \\ \sum_i g_{i,h}^j > d_h & \Rightarrow \quad \rho_h^{j+1} < \rho_h^j \\ \sum_i g_{i,h}^j = d_h & \Rightarrow \quad \rho_h^{j+1} = \rho_h^j \end{cases}$$

- *Modificación de los precios: módulo*

Finalmente, queda por determinar cuál debe ser el valor de la mencionada modificación de los precios. Éste es el aspecto sobre el que existen mayores diferencias prácticas. En este análisis nos centraremos en el método del subgradiente, que es una de las técnicas heurísticas más extendidas para el tratamiento del problema del *unit commitment*.

El método del subgradiente modifica el precio de una hora cualquiera en una determinada iteración sumándole un término que es proporcional al *mismatch* de la correspondiente ecuación de balance. Así, cuanto más lejos esté la restricción de ser satisfecha, mayor será el cambio que se produzca en el precio. Este término incluye una constante de proporcionalidad que, a su vez, depende del número de iteraciones, de modo que las variaciones de precios van siendo cada vez menores a medida que el número de iteraciones aumenta.

$$\rho_h^j = \rho_h^{j-1} + t_h^j$$

$$t_h^j = \frac{x_h^{j-1}}{a+b\cdot j}$$

$$x_h^{j-1} = \sum_i g_{i,h}^{j-1} - d_h$$

Donde j indica el número de iteraciones y a y b son parámetros, generalmente constantes, que se ajustan en función de las características de cada problema. t_h^j es el término aditivo que modifica el precio de la hora h para dar lugar al precio de la iteración j. x_h^j es el *mismatch* de la ecuación de balance de la hora h en la iteración j.

En general, la mayoría de los métodos que modificasen los precios en la dirección correcta serían válidos y llegarían a converger a la solución óptima (aunque, seguramente, algunos métodos consumirían bastante más iteraciones que otros). Para garantizar la convergencia solamente deben satisfacerse dos condiciones simples, que se conocen como teorema del límite:

- $\lim_{j\to\infty} \sum_j t_j = \infty$ Es decir, que el algoritmo sea capaz de recorrer todo el espacio de soluciones (aunque sea en un número infinito de iteraciones). Con ello se consigue que el modelo no quede limitado a soluciones "cercanas" al punto de partida, sino que sea capaz de moverse tan lejos de la solución inicial como sea necesario.

- $\lim_{j\to\infty} t_j = 0$ Es decir, que los saltos de precios vayan siendo cada vez menores a medida que el número de iteraciones avanza. Gracias a este criterio se consigue que, al cabo de un cierto número de iteraciones, el modelo siempre pueda llegar al nivel de tolerancia deseado, de forma que los saltos que da el proceso de búsqueda en su avance sean lo suficientemente pequeños como para no pasar de largo la solución.

Ajustando adecuadamente los parámetros a y b del método del subgradiente es sencillo conseguir que se cumplan estos criterios. Al mismo tiempo, la calibración de estos parámetros intentará reducir al máximo el número de iteraciones.

2.2.2 Reglas de Wilson

➢ *Descripción del mecanismo de ajuste de precios*

El proceso de ajuste de precios en la casación de Wilson no está motivado por una modificación directa de los precios por parte del problema maestro, sino que está gobernado por los cambios que realizan los agentes en los precios de las ofertas de energía que envían al mercado. Estas ofertas, al ser casadas en el problema maestro, dan lugar a modificaciones de los precios. No obstante, vamos a ver que este proceso es equivalente a la actualización de los precios de la relajación lagrangiana. Se pueden contemplar varias situaciones:

- El caso más común se presenta cuando existe un cierto número de ofertas que no han sido aceptadas en la iteración anterior pero que quieren volver a entrar en el despacho en la presente iteración (esto es equivalente a un *mismatch* en el que existe un exceso de generación). Entonces, las reglas de la casación de Wilson obligan a estos grupos a modificar su precio de oferta y rebajarlo hasta $\rho_h^{j-1} - \varepsilon$ (el precio de mercado de la hora h en la iteración anterior j-1, menos el decremento mínimo fijado por las reglas).

  Si la cantidad de energía que quiere entrar en el mercado y que se oferta al precio $\rho_h^{j-1} - \varepsilon$ es suficientemente grande, desplazará de la casación a todas las ofertas aceptadas en la iteración anterior que tenían un precio superior al suyo y esto hará que el precio disminuya en una cantidad ε, de modo que $\rho_h^{j} = \rho_h^{j-1} - \varepsilon$. Éste es el caso más frecuente.

- Si existen bloques de energía que quieren entrar en el despacho, pero su tamaño es relativamente pequeño, las nuevas ofertas no llegarán a marcar el precio en la iteración j y éste quedará fijado en algún punto intermedio entre ρ_h^{j-1} y $\rho_h^{j-1} - \varepsilon$.

- Si, por el contrario, lo que predominan son ofertas que han sido aceptadas en la iteración j-1 pero que deciden que no es rentable para ellas permanecer en el despacho y quieren retirarse (esto es equivalente a un defecto de generación), en la nueva curva de oferta de la iteración j faltarán una serie de ofertas de generación que antes habían sido aceptadas pero que ahora han sido retiradas. La casación deberá reemplazarlas por las siguientes ofertas en el orden de mérito, que serán ofertas a un precio superior que no habían sido casadas anteriormente. En consecuencia, el precio de esta hora aumentará.

➢ *Verificación de las condiciones básicas*

Comparando con la descripción anterior de la relajación lagrangiana, se puede comprobar que el comportamiento del método de Wilson es equivalente al del procedimiento de optimización para cada una de las características descritas. En efecto, los cambios en el precio de cada hora dependen únicamente de cuánta energía se quiera meter en el mercado o retirar del mismo en esa hora, de modo que se puede decir que el precio de la hora h únicamente depende del *mismatch* de la ecuación de equilibrio generación-demanda de la propia hora h.

Por otra parte, se comprueba que los ajustes de los precios cumplen perfectamente con el requisito de moverse siempre en la dirección que tienda a solucionar el problema: si existe un defecto de generación, los precios subirán para corregir ese defecto y si existe un exceso de producción, los precios bajarán para reducir la cantidad de potencia ofertada.

➢ *Verificación de las características del módulo de las modificaciones de los precios*

El método de Wilson cuenta con más información que la relajación lagragiana para construir los nuevos precios de la siguiente iteración. Mientras que la relajación lagrangiana debe limitarse a realizar propuestas más o menos heurísticas basándose en el valor de los *mismatches* entre generación y demanda, el método de Wilson cuenta con toda la información adicional que representa la curva de oferta los generadores. Puede interpretarse que esta curva juega un papel parecido al que juega el gradiente en otros procedimientos de descomposición, informando de cuánto debe cambiarse el precio en una determinada hora para conseguir un determinado nivel de generación en esa hora. Idealmente, esta información podría bastar para obtener la solución del problema en una única iteración pero, sin embargo, la curva de oferta no contempla el efecto de los acoplamientos temporales en el problema y, por este motivo, la información de la curva de oferta sólo es válida en un pequeño entorno alrededor del punto de trabajo para el cual las repercusiones de los acoplamientos temporales permanecen constantes, análogamente a un gradiente. De este modo, las sucesivas iteraciones van actualizando las curvas de oferta para los nuevos puntos de trabajo.

Cuando el precio se está moviendo en la dirección ascendente, el método de Wilson determina la actualización de los precios siguiendo rigurosamente la información proporcionada por la curva de ofertas. Sin embargo, cuando el precio se modifica en dirección descendente, las reglas de Wilson truncan la curva de oferta para que la diferencia máxima de precios sea igual a ε. Es decir, que los precios varían de acuerdo con la información de la curva de ofertas si la cantidad es menor que ε y varían ε si la curva de ofertas indica alguna cantidad mayor. Este último caso (desplazamiento en dirección descendente e igual a ε) es el más frecuente.

Esta forma de truncar la curva de oferta podría parecer *a priori* una pérdida de información que hace que el método trabaje de una forma mucho más lenta. Sin embargo, este procedimiento de avance consigue reducir notablemente las oscilaciones del proceso. Éste es un dilema clásico en la optimización no lineal: si los métodos avanzan rápidamente, es muy fácil que tengan que oscilar muchas veces alrededor de la solución óptima; pero si se les hace avanzar despacio para que no pasen por alto la solución, entonces el método converge de forma muy lenta. Esta estrategia de barrido descendente, generalización de las características de la subasta inglesa, que emplea el método de Wilson puede constituir una forma adecuada de evitar las oscilaciones típicas de la relajación lagrangiana y de Dantzig-Wolfe que haga que el método compense su lentitud inicial con una convergencia mucho mejor en las últimas etapas del proceso[*]. De hecho, es posible que este tipo de lógica pueda implantarse con éxito en otros problemas de optimización pura que no tienen relación con los mercados.

Comparando con la relajación lagrangiana y con el método del subgradiente, esta estrategia de actualización de los precios es equivalente a ir modificando los parámetros a y b en cada iteración para que el salto entre los precios de dos iteraciones consecutivas sea igual a un cierto valor precalculado (en unos casos ε y en otros el resultado obtenido de la curva de ofertas). La posibilidad de modificar los parámetros a lo largo de las distintas iteraciones se emplea con frecuencia en las variantes más avanzadas del método del subgradiente. En cualquier caso, aunque la actualización de precios del método de Wilson no sigue estrictamente las características del método del subgradiente, sí verifica las dos condiciones requeridas para que cualquier procedimiento de actualización converja.

[*] Además, esta estrategia resulta más fácil de implantar en un contexto de mercado y favorece la transparencia de la casación.

- Cuando las variaciones de precios están limitadas al valor ε, teniendo en cuenta que ε es un valor finito, siempre se verificará que $\lim_{j\to\infty}\sum_j t_j = \infty$ y se podrá garantizar que el modelo es capaz de recorrer todo el espacio de soluciones y no quedará condicionado por el punto inicial de la búsqueda.

  Cuando el método de Wilson sigue los resultados de la curva de ofertas, las excursiones de los precios entre unas iteraciones y otras son mucho mayores que cuando está limitado a ε, de modo que también se verificará que $\lim_{j\to\infty}\sum_j t_j = \infty$

- La segunda de las condiciones $\lim_{j\to\infty} t_j = 0$ exige que el salto entre los precios de dos iteraciones consecutivas vaya disminuyendo progresivamente a lo largo del proceso para conseguir que en algún momento se alcance la tolerancia deseada. Si las modificaciones de los precios son iguales a ε, basta con fijar un valor de ε igual o menor a la tolerancia requerida para garantizar que la diferencia de precios entre dos iteraciones próximas a la solución va a ser menor que la tolerancia requerida.

  Si las variaciones de precios están gobernadas por la curva de oferta de los generadores, las propias características de la casación hacen que los saltos en precios sean pequeños cuando se encuentran cerca de la solución final.

2.3 Conclusión

Este desarrollo muestra que el proceso de convergencia de las reglas de Wilson es un caso particular de una relajación lagrangiana y que, por tanto, se puede garantizar que las subastas iterativas convergen al mismo resultado óptimo* al que habría llegado el procedimiento de optimización. De este modo, las reglas de Wilson deben ser consideradas como un método completamente eficiente y capaz de asignar de forma óptima los recursos del sistema.

---

* El resultado de la relajación lagragiana es el despacho de mínimo coste, salvo por los problemas que pueden aparecer por culpa de las variables enteras y los criterios de cierre.

3 Desarrollos en curso y trabajos futuros

- El primer punto que debe estudiarse es el relacionado con la regla de cierre del procedimiento. Todos los mecanismos matemáticos basados en descomposición de precios presentan un problema conocido como el *duality gap* que hace que, en ocasiones, no exista ningún precio capaz de inducir a los agentes a cumplir las restricciones del problema maestro. Por ejemplo, si se tiene un grupo con un coste de 10 y una potencia de 150 que debe alimentar a una demanda de 100, cualquier precio superior a igual a 10 hará que el generador quiera producir 150, con lo que habrá un exceso de potencia, pero cualquier precio inferior a 10 hará que el grupo no produzca y, por tanto, aparecerá un defecto de potencia.

  En la casación simple, este tipo de circunstancias dan lugar a que se necesiten reglas de reparto para adjudicar las cantidades casadas que corresponden a las ofertas que tienen un precio igual al marginal del sistema. En el modelo de casación español, un problema similar es el que origina la necesidad de emplear un procedimiento final de búsqueda en árbol para el tratamiento de la condición de ingresos mínimos.

  La relajación lagrangiana cuenta con técnicas que permiten afrontar esta cuestión y encontrar en punto de funcionamiento óptimo. En el modelo de Wilson, la regla que determina la irreversibilidad de la retirada de las ofertas sirve para tener en cuenta este problema. Es preciso estudiar si esta regla es adecuada para evitar que los precios del modelo oscilen alrededor de la solución óptima y si esto conduce en todos los casos a la solución más eficiente.

- Otro aspecto que es interesante incorporar a los métodos de casación iterativos es la elasticidad de la demanda. En la demostración anterior se ha supuesto una demanda rígida de modo que eran solamente los generadores los que modificaban sus ofertas de iteración en iteración. Estas reglas deben ser generalizadas para permitir a las demandas ofertar en igualdad de condiciones a lo largo del proceso.

- En los desarrollos realizados, se han adoptado ciertas hipótesis implícitas acerca de la evolución de las restricciones de los grupos a medida que cambian los precios. En concreto, se ha supuesto que cuanto más alto es el precio más sencillo es que se cumplan las restricciones de los subproblemas. Debe realizarse un estudio completo de los diferentes tipos posibles de restricciones de los subproblemas, caracterizándolos matemáticamente, para determinar su comportamiento a lo largo del proceso. En particular, es posible que las restricciones de limitación de energía tengan características diferentes de las de otras condiciones (precio, etc.) que es preciso estudiar adecuadamente.

- Por último, es posible considerar la posibilidad de incluir en el método de casación otro tipo de productos, como los mercados de servicios complementarios o las restricciones de la red de transporte. Esto requeriría tener en cuenta al mismo tiempo elementos sobre cómo realizar la casación en cada uno de estos mercados individualmente y elementos sobre cómo tratar una restricción cualquiera dentro del problema maestro de una casación iterativa.