ICADE BUSINESS SCHOOL

# MODELOS DE GESTIÓN DE CARTERAS: COMPARACIÓN Y PROPUESTA DE MEJORA

Autor: María Díaz Cid

Director: Itziar Gómez de la Vega

Madrid
Julio - 2016

# Índice

# Resumen de tablas e ilustraciones

Resumen

*La optimización de carteras es un tema de creciente importancia en el mundo financiero. Este Trabajo Fin de Máter analiza cuatro de los modelos más relevantes de gestión de carteras -Markowitz (1952), Sharpe (1964), Konno y Yamazaki (1991) y Black & Litterman (1992)-, y determina sus puntos fuertes y débiles, proponiendo mejoras a estos últimos -medida de rentabilidad, medida del riesgo inherente a los activos y de contagio entre los mismos y asunción de normalidad en los modelos-. Los modelos se implementan de forma empírica con objeto de analizar cuál minimiza el error absoluto, utilizando una base de datos que se extiende desde 2006 hasta 2012. Los datos de los tres años siguiente, 2013 a 2015, se utilizan con propósitos de validación. Las aportaciones más significativas de los resultados de este estudio son las siguientes: (1) en el modelo de Markowitz los incrementos de rentabilidad conllevan incrementos del riesgo directamente proporcionales, ya que presenta una tendencia lineal; (2) la cartera de mercado de Sharpe no se puede determinar para un mercado muy diversificado; (3) el modelo de Konno y Yamazaki no diversifica por sí mismo y, al introducir restricciones que le obligan a diversificar, éstas no reducen el riesgo; (4) en el modelo de BL se comprueba que efectivamente atiende a las expectativas del inversor y que, al contrario de los otros modelos, genera rentabilidades esperadas y no pesos de los activos. En base a estos resultados se concluye que el modelo de BL es el más fiable, aunque ello depende de la fiabilidad de las expectativas de los gestores. Por otro lado, se contrastan las hipótesis acerca de las áreas de mejora de los modelos aplicándolas al modelo de BL, obteniendo un mayor error aplicando el modelo modificado por dichas áreas que utilizando el modelo original. Este resultado se considera debido al procedimiento de implementación.*

***Palabras clave:*** *Markowitz, Sharpe, Konno y Yamazaki, Black – Litterman, gestión de carteras, expectativas, frontera eficiente, Value at Risk, CoVaR, normalidad, riesgo.*

# Abstract

Portfolio management is an issue of growing importance in the financial world. This paper analyses four of the most relevant models of portfolio management: Markowitz (1952), Sharpe (1964), Konno and Yamazaki (1991) and Black & Litterman (1992), determining their strengths and weaknesses. An alternative is proposed for weaknesses: profitability measure, risk measure both for individual assets and contagion among them and normal assumption. An empirical study is conducted with a database of 2006-2012. The portfolios resulting from each of the models are analysed and its absolute error is calculated using a database of 2013-2015. The highlighting results are the following: (1) in Markowitz model, profitability is linearly related to risk; (2) Sharpe portfolio cannot be determined for a market highly diversified; (3) Konno and Yamazaki model does not diversify itself and restrictions introduced by the manager does not reduce risk; (4) it is proved that BL model meets the expectations of the investor and that, unlike other models, it generates expected returns instead of weights for the assets. Based on the previous results, we conclude that the BL model is the most reliable. However, it depends on the manager expectation's confidence. On the other hand, the hypotheses about improvement areas are contrasted, by applying them to the BL model. The results show that the modified model is less accurate than the original Black & Litterman model, but this inaccuracy is considered to be related to the implementation process.

***Key Words:*** *Markowitz, Sharpe, Konno y Yamazaki, Black – Litterman, portfolio management, views, efficient frontier, Value at Risk, CoVaR, normality, risk.*

# 1. Introducción

## Objetivo de la investigación

En este trabajo de investigación nos proponemos modificar uno de los modelos más importantes de la actualidad para la gestión de carteras, con el fin de que el modelo resultante: 1) permita anticipar el comportamiento que van a seguir los activos que dispone un inversor, o que quiere incluir en su cartera, con mayor exactitud que los modelos existentes, para poder determinar el peso de cada activo en la cartera y 2) tenga en consideración las preferencias y/o expectativas del gestor de carteras.

El trabajo comienza con un análisis de cuatro modelos de gestión de carteras: Markowitz (1952), Sharpe (1964), Konno y Yamazaki (1991) y Black & Litterman (1992). Los resultados de este análisis permiten detectar los puntos fuertes y débiles de cada uno con objeto de proponer cuatro áreas de mejora. Finalmente, el trabajo compara empíricamente las predicciones del modelo propuesto con los anteriores con objeto de determinar si mejora sus predicciones y compara las carteras óptimas resultantes de cada modelo.

La elección de esos cuatro modelos está realizada considerando, por un lado, Markowitz (1952) y Sharpe (1964), es decir, aquellos que fijaron las bases de la gestión moderna de carteras y constituyen los pilares en los que se basan todos los modelos posteriores. Por otro lado, se han seleccionado modelos más actuales que proporcionan mejoras importantes a los anteriores. Así, Konno y Yamazaki (1991) muestran un enfoque lineal, solventando algunos de los problemas de los modelos iniciales, y Black Litterman (1992), que fue el primer modelo en incorporar las expectativas del inversor en el modelo de gestión.

A lo largo del trabajo de investigación se demostrará empíricamente que, para conseguir mayores niveles de rentabilidad, el exceso de riesgo que hay que asumir es el mismo independientemente de si la rentabilidad es baja o alta, de acuerdo con el modelo de Markowitz. La cartera de mercado de Sharpe sólo se puede determinar si el mercado analizado no está muy diversificado. El modelo de Konno y Yamazaki no disminuye el riesgo al diversificar. El modelo de Black & Litterman atiende de forma efectiva a las expectativas del inversor y es el más fiable de los analizados -siempre que las expectativas del inversor también sean fiables. Por otro lado, se modifica el modelo de Black & Litterman, cambiando alguno de los puntos débiles antes mencionados y se compara su error y el del modelo original, obteniendo que el modelo modificado produce errores absolutos mayores.

## Justificación y relevancia

La velocidad de crecimiento del mercado financiero español hace que éste sector adquiera cada vez más importancia. El aumento de sus usuarios, a su vez, incrementa la competencia. Esto hace que cada vez se requieran métodos más sofisticados para obtener beneficios elevados en el mercado. Según Zoido Martínez (2015), el volumen de capitalización de la renta variable y fija en España en 1964 era de 3.100 millones de euros, frente a los 2.480.000 millones del 2014. Así, el dinero que mueven los dos principales mercados financieros, renta fija y variable, se ha multiplicado aproximadamente por 800 en los últimos 50 años. La creciente evolución de la capitalización de la renta variable, llegando a máximos en 2007 con casi 1,4 billones de euros en el mercado bursátil, se ilustra en la Figura 1.

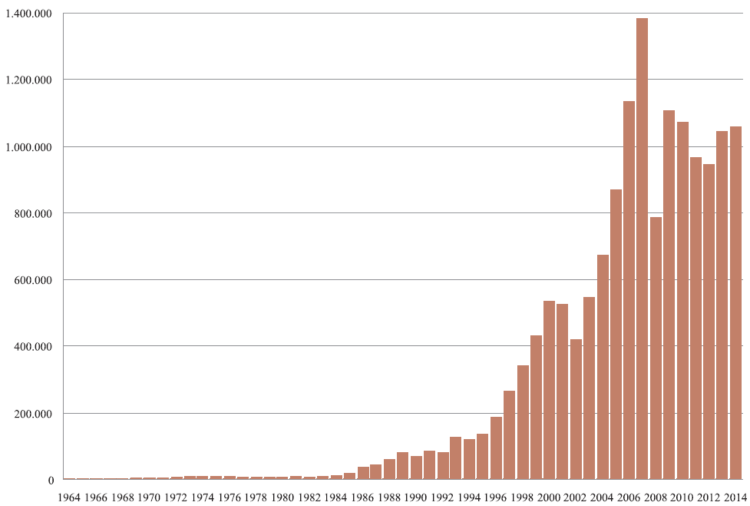


Figura 1. Capitalización de la renta variable en la bolsa española. 1964-2014 Datos en millones de euros al cierre del año Fuente: (Zoido Martínez, 2015)

En la Figura se aprecia claramente un mayor crecimiento a partir de los años 80, con la apertura de España al resto del mundo y la economía de libre mercado. A esto hay que añadir el aumento de instituciones dedicadas a regular y supervisar las transacciones y mercados financieros, lo que proporciona más confianza a los inversores y el aumento de la actividad (Krugman & Wells, 1953).

También en los años 90 hubo un gran crecimiento del mercado, con la creación de la Asociación Española de Intermediarios Financieros (AIAF) -que es el mercado de renta fija corporativa integrado en BME[1]-, la creación del Mercado Español de Futuros Financieros (MEFF) -mercado de derivados, futuros y opciones-, y sobre todo, con la creación en 1887 el mercado de deuda pública anotada, que dio lugar a la creación del mercado electrónico en 1989. Este último acontecimiento es especialmente relevante debido a que facilita la compra - venta de productos financieros, acercando el mercado especialmente a los inversores particulares (Bolsa de Madrid, 2016).

La inversión extranjera ha tenido especial importancia en el desarrollo del mercado español (Zoido Martínez, 2015), ya que en 2014 representaban el 43% del valor de mercado (según los datos provisionales, se cree que en 2015 esta cifra llegó al 44%) (Bolsas y Mercados Españoles, 2015). Por otra parte, el cambio de la composición del ahorro de las familias españolas también ayudó al impulso del mercado de valores, en detrimento del mercado bancario. En 1985, solo el 33,6% del ahorro de las familias tenía como fuente el mercado de valores (Zoido Martínez, 2015). En 2014 este porcentaje alcanzó el 60%, mostrando que las familias invierten cada vez en mayor proporción en acciones, bonos, fondos, planes de pensiones, seguros de vida y otros instrumentos de inversión colectiva.

Como muestra del incremento de la actividad del mercado financiero tomamos el mercado de renta variable. Según datos de Bolsas y Mercados Españoles, entre 2003

[1] Bolsas y Mercados Españoles

y 2015, se observa un crecimiento exponencial del número de órdenes emitidas en el mercado (ver Figura 2), que pasan de 28,5 a 645,2 millones en 13 años, multiplicándose por 23. Este hecho pone en evidencia el aumento de la importancia de conocer y predecir el mercado, abarcando este interés a una población cada vez mayor con intereses muy diversos.

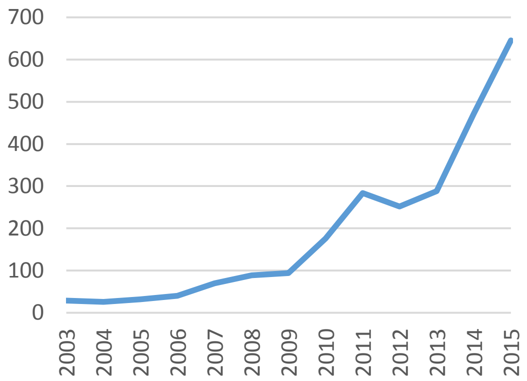


Figura 2. Número de órdenes de acciones negociadas en la bolsa española. 2003-2015
Datos en millones
Fuente: (Bolsas y Mercados Españoles, 2015)

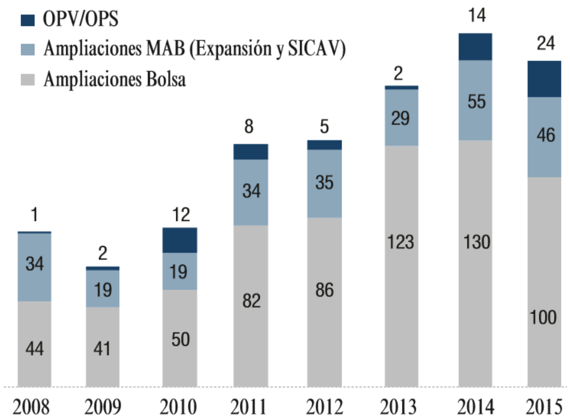


Figura 3. Nº de empresas que se han financiado a través del mercado español. 2008-2015
Fuente: (Bolsas y Mercados Españoles, 2015)

La creciente importancia del mercado financiero puede observarse, no sólo a través de los inversores, que son unidades económicas con superávit y representan la oferta de fondos; sino también a través de las empresas, que son unidades económicas con déficit y representan la demanda de fondos. Así, la Figura 3 muestra que las empresas acuden al mercado financiero para financiar sus inversiones de forma cada vez mayor. De esta forma, la gestión de carteras también adquiere cada vez mayor importancia.

Al aumento en el número de inversores y de las empresas que solicitan financiación hay que añadir, para disponer de una descripción completa del escenario actual del mercado, que el tipo de activos financieros mediante los que se busca financiación son cada vez más sofisticados: de la existencia únicamente de bonos y acciones, se ha pasado a incluir en la cartera diversos productos, como ETFs, SICAVs, distintos tipos de deuda, productos estructurados, derivados…, que son productos con mayor riesgo. Este hecho lo pone en evidencia la creación de la Directiva MiFID, la cual tiene como objeto la protección de los inversores ante el mercado más arriesgado en el que nos encontramos.

También cabe destacar la creciente influencia de las finanzas del comportamiento. Desde que von Neumann y Morgensten (1944) postularon la Teoría Financiera Clásica, la visión del mercado financiero era racional, basada en la toma de decisiones que maximicen la función de utilidad del inversor (Markowitz, 1952), que tiene que cumplir una serie de axiomas (Von Neuman & Morgensten, 1944). Esta teoría tiene una gran importancia en este trabajo, ya que todos los modelos que se analizan parten de unas hipótesis establecidas siguiendo la Teoría Financiera Clásica. Esta teoría se fundamenta en diversos experimentos que confirmaban la racionalidad del inversor. Sin embargo, ya en 1979, Kahneman y Tversky demostraron empíricamente que los inversores no siempre actuaban racionalmente y, junto con estudios posteriores, nació la corriente de finanzas del comportamiento. Esta corriente afirma que factores psicológicos, sociológicos y líneas de arbitraje también afectan al inversor en su toma de decisiones, haciendo que las mismas sean subjetivas e irracionales (Cano & Cardoso, 2015). Debido a la evidencia empírica de la importancia de estos factores, debemos incluirlos en nuestros modelos de gestión de carteras.

Estos hechos complican de forma importante el conocimiento del mercado y hace que sólo inversores con altos conocimientos de finanzas puedan invertir sin requerir la ayuda de gestores de carteras. Sin embargo, como se ha mencionado anteriormente, el número de inversores está creciendo, incluyendo un gran número de inversores particulares con escasos conocimientos financieros.

Estos son los motivos que justifican, y al mismo tiempo animan, a buscar modelos de gestión de carteras más sofisticados y que minimicen los errores que los modelos existentes producen, como en este Trabajo Fin de Máster. En este proceso de búsqueda y elaboración de modelos no hay que olvidar que, el hecho de basar la toma de decisiones respecto a la gestión de las carteras únicamente en el resultado de los modelos matemáticos -alimentados de datos históricos o simulaciones- junto con las líneas de inferencia de cada inversor particular -en las que vienen representadas sus características personales, como por ejemplo su aversión al riesgo-, proporcionaría el mismo resultado para cualquier inversor, perdiendo de esta forma activos muy valiosos en el proceso, como por ejemplo, la experiencia del gestor (Markowitz, 1952).

A todo lo anterior hay añadir que, en la vida real, cada inversor tiene unas expectativas diferentes sobre la rentabilidad de los activos, ya sea relativa a el comportamiento de un país (España vs Italia), de un sector (telecomunicaciones vs banca), de una clase de activo (renta variable vs renta fija) o de un activo en concreto (Santander vs Telefónica). Este hecho se debe, tanto a las características personales del gestor -preferencias subjetivas-, como a que ningún mercado es eficiente[2] -no todos los inversores poseen información privilegiada sobre las compañías y los inversores que la poseen, no poseen información sobre todas las compañías ni operan con ella.

Una vez puesto en evidencia la necesidad de disponer de mejores modelos de gestión de carteras, se hace necesario buscar cuál es la forma de mejorar los existentes. No hay que olvidar que para intentar reproducir la realidad (modelizar), se asumen unas bases sobre las que se construyen los modelos. Los modelos pretenden replicar la realidad de los datos históricos para, mediante su extrapolación a tiempos futuros, predecir el comportamiento del mercado. Sin embargo, ninguno de ellos lo realiza de forma exacta, por una parte porque el número de suposiciones a introducir sería infinito, y por otra, porque los comportamientos de los mercados pueden cambiar con el tiempo. Así, en este trabajo no se pretende eliminar ese error por completo y replicar la realidad con exactitud, algo que consideramos fuera de nuestro alcance sino conseguir un modelo más exacto que los ya existentes, minimizando el error entre las predicciones y la realidad. Para ello es necesario detectar cuáles son las asunciones que más se alejan de la realidad en cada uno de los modelos analizados y modificarlas de forma que reproduzcan la realidad actual de forma más exacta.

[2] En todo el trabajo vamos a asumir que los mercados son semi-eficientes (Fama, 1970). Asumimos ese estado del mercado ya que el modelo Black-Litterman, que es en el que nos vamos a basar principalmente, tiene como uno de sus tres pilares esta asunción (Idzorek, 2002).

## Metodología

El trabajo de investigación comienza por un estudio del estado actual de los modelos de gestión de carteras gracias al estudio de la bibliografía existente. De entre las diferentes fuentes de información consultadas, los trabajos de Markowitz (1952), Sharpe (1964), Konno y Yamazaki (1991), y Black & Litterman (1992) han sido objeto de un estudio detallado, analizando sus puntos fuertes y débiles. Como ya se comentó en el objetivo de la investigación, se eligen estos cuatro modelos ya que Markowitz (1952) y Sharpe (1964) asentaron las bases de la teoría moderna de carteras; y Konno y Yamazaki (1991) y Black & Litterman (1992) se han seleccionado por ser modelos más modernos, que solventan problemas de los anteriores: enfoque lineal y la introducción de las expectativas del inversor, respectivamente.

En base a los resultados obtenidos, se proponen cuatro puntos de mejora y se formulan las nuevas hipótesis que sustituyen las establecidas para estos cuatro puntos. Los puntos de mejora se han seleccionado atendiendo a los fallos más criticados por la literatura (Baixauli-Soler, Alfaro-Cid, & Fernández-Blanco, 2011), (Giacometti, Bertocchi, Rachev, & Fabozzi, 2005), (Meucci, Beyond Black-Litterman: Views on Non-Normal Markets, 2005), (Meucci, The Black-Litterman Approach: Original model and extensions, 2010), (Tsao, 2010). Por ello, los puntos propuestos son los siguientes:

- Uso del APT[3] como medida de la rentabilidad, en lugar del CAPM.
- Uso del *value at risk* (VaR) como medida del riesgo de los activos, en lugar de la varianza.
- Uso del CoVaR como medida del contagio de riesgo entre activos, en lugar de la covarianza.
- No asunción de normalidad en las distribuciones de rentabilidad de los activos

El siguiente paso consiste en comparar los resultados de predicción proporcionados por las nuevas hipótesis y las ya establecidas utilizando una base de datos. Para ello se toma como base el modelo de Black & Litterman (Black & Litterman, 1992) que, como se comprueba en el apartado Resultados, es el que presenta un acercamiento más real al mercado, ya que los otros tienen un enfoque más teórico (Baixauli-Soler, Alfaro-Cid, & Fernández-Blanco, 2011). En este modelo se sustituirán, uno a uno, los puntos débiles por las nuevas propuestas que constituyen la aportación al nuevo modelo. De esta forma, el proceso de comparación llevado a cabo permite valorar cuantitativamente y de forma independiente la posible mejora de cada una de las propuestas de modificación respecto a los modelos establecidos en la literatura. La aportación final de este Trabajo fin de Máster consiste en la formulación del nuevo modelo con las aportaciones que hayan demostrado mejorar el modelo.

## Base de datos

La base de datos que se ha utilizado en este Trabajo Fin de Máster se ha restringido a datos correspondientes al mercado español procedentes de Bloomberg. La Tabla 1 recoge los índices incluidos en dicha base de datos, representativos de distintas opciones de inversión.

[3] Asset Pricing Model

| Medida proporcionada | Activo | Definición |
|---|---|---|
| Rentabilidad libre de riesgo | Bono español a 10 años | Bono emitido por el Estado Español con vencimiento en 10 años |
| Rentabilidad del mercado | Ibex 35 | Índice de referencia de la bolsa española, que incluye los 25 valores con mayor capitalización admitidos a cotización en la bolsa española. |
| Renta fija corporativa | Santander Renta Fija Privada FI | Fondo de inversión de renta fija corporativa con calidad crediticia BBB o superior (de acuerdo con S&P[4]) |
| Renta fija soberana | Bloomberg Spain Sovereign Bond Index | Índice de renta fija de soberana que puede incluir bonos estatales, autonómicos y municipales. |
| Renta variable | Ibex 35 | Índice de referencia de la bolsa española, que incluye los 25 valores con mayor capitalización admitidos a cotización en la bolsa española. |
| Materias primas | Sabadell Commodities Base FI | Fondo de inversión sobre materias primas. Puede conseguir su exposición a las mismas a través de derivados o invirtiendo en otros fondos sobre materias primas. |
| CDS[5] | iTraxx Europe UCITS ETF | Índice compuesto por CDS. Es una medida de la calidad crediticia de los activos que lo componen. |
| Real Estate | CX Propietat FII | Fondo que invierte en inmuebles urbanos para su arrendamiento. Mide los precios de activos inmobiliarios. |
| Small caps[6] | iShares MSCI Small Cap UCITS ETF | Fondo que invierte en sociedades de pequeña capitalización |

Tabla 1: Activos incluidos en la base de datos
Fuente: Elaboración propia

Con objeto de evitar que la base de datos sea excesivamente grande y que el programa utilizado (Excel) realice los cálculos en un tiempo prudencial, se ha trabajado con rentabilidades mensuales, calculadas a partir de la variación de las medias mensuales de los datos diarios proporcionados por Bloomberg.

[4] Standard and Poor's. Agencia de calificación de calidad de riesgo.
[5] Credit Default Swap
[6] Las sociedades calificadas como *small cap* tienen una capitalización de entre $300 millones hasta $2 billones.

La base de datos históricos comprende los años 2006 a 2015. La elección de un periodo de diez años se ha realizado considerando que un periodo largo como el elegido recoge tanto épocas de recesión como de recuperación económica, compensando sus efectos. Por otra parte, se ha buscado una base de datos lo más actualizada posible, de forma que sea eficiente para reproducir el mercado actual.

Los diez años de datos se han dividido en dos bloques: los siete primeros se han utilizado para elaborar los modelos, implementando las nuevas hipótesis, mientras que los tres restantes se han reservado con propósitos de comparación de los resultados de predicción. El procedimiento seguido es por lo tanto una simulación del día 1 de enero de 2013, disponiendo de datos hasta esa fecha para modelizar la evolución de los mercados. La eficiencia de los nuevos modelos se demuestra en el *futuro*, es decir, con los datos del 1 de enero de 2013 al 31 de diciembre de 2015, dado que consideramos un horizonte de inversión de tres años.

## Estructura de la investigación

Tras un resumen de la investigación desarrollada, en el que se resaltan las conclusiones, este Trabajo Fin de Máster se estructura en seis capítulos. El primer capítulo, que es en el que nos hallamos, es introductorio. A continuación, en el capítulo dos se revisan los cuatro modelos estudiados -Markowitz (1952), Sharpe (1964), Konno y Yamazaki (1991) y Black-Litterman (1992)-, resaltando sus puntos fuertes y débiles. En el tercer capítulo se presentan cuatro áreas de mejora: medida de la rentabilidad de mercado, medida del riesgo de los activos, medida del contagio de riesgo entre activos y asunción de normalidad. Se explican los problemas que presentan los modelos actuales respecto a esas áreas y se propone como solventar dichos problemas. En el cuarto capítulo se contrastan las hipótesis de las áreas de mejora expuestas en el tercer capítulo. Se termina en el quinto capítulo con las conclusiones a las que se llega a lo largo del trabajo y en el sexto capítulo se proponen futuras líneas de investigación.

# 2. Revisión de la Literatura

La revisión teórica de la bibliografía consultada (Markowitz, 1952), (Sharpe, 1964), (Konno & Yamazaki, 1991), (Mokotoff Miguel, 2002), (Black & Litterman, 1992), (Cheung, 2009) y (Idzorek, 2002) pone en evidencia que existen unas líneas básicas que constituyen los pilares en los que se fundamentan todos los modelos de gestión de carteras:

- **El objetivo de un modelo de gestión de carteras consiste en maximizar la rentabilidad y minimizar el riesgo.** Así, aunque cada modelo define la rentabilidad y el riesgo con unos parámetros distintos, todos tienen el mismo fin: obtener la máxima rentabilidad de la inversión asumiendo el mínimo riesgo.
- **Un modelo de gestión de carteras busca la máxima diversificación posible, ya que es "*observable y racional*" que ello reduce el riesgo** (Markowitz, 1952). Hay que tener en cuenta que no sólo hay que diversificar seleccionando distintos tipos de activos, sino que también hay que diversificar atendiendo a otros factores, como por ejemplo el sector.

Partiendo de estas líneas básicas, cada uno de los modelos de gestión de carteras presenta sus peculiaridades que le convierten en más o menos eficiente. A continuación, se describen las características propias de los cuatro modelos que se analizan en este Trabajo Fin de Máster.

## Markowitz

Markowitz (1952) propuso un modelo de selección de carteras de inversión basado en la experiencia, es decir, en la observación de variables estadísticas durante un periodo de tiempo. Los patrones que seguían estos datos estadísticos son analizados y utilizados para predecir comportamientos futuros de dichos activos, lo que determinaría la selección de una cartera en concreto.

En este modelo se proponen dos pasos a seguir para la selección de carteras: En primer lugar, hay que determinar el binomio (rentabilidad esperada – varianza)[7] para cada activo en estudio, determinando la frontera eficiente en la que las carteras incluidas ofrecen la máxima rentabilidad para un nivel de riesgo dado, o que minimiza el riesgo para un nivel de rentabilidad determinado. El segundo paso consiste en seleccionar la cartera que más se adecúa al inversor, teniendo en cuenta su perfil de riesgo y otros actores no computacionales, a través de las curvas de indiferencia. Cabe destacar que la frontera eficiente es la misma para todos los inversores, mientras que la cartera que se elige en el segundo paso depende del inversor.

Las hipótesis en las que se basa el modelo de Markowitz son las siguientes:

- El mercado se desarrolla en un ambiente de incertidumbre en el que los rendimientos de los activos están relacionados, por lo que es posible determinar una rentabilidad esperada y una varianza de forma matemática

[7] A partir de ahora lo denominaremos $(\mu_{ij}, \sigma_{ij})$

- Todos los inversores son adversos al riesgo, aunque en distinto grado, por lo que van a actuar de acuerdo con la regla del binomio $(\mu_{ij}\ ,\ \sigma_{ij})$
- Los inversores son racionales, en el sentido que tienen preferencias transitivas (si prefieren *x* a *y* e *y* a *z*, también preferirán *x* a *z*)
- Tienen un horizonte de inversión de un único periodo, al comienzo del cual forman las carteras y al final del cual, liquidan las carteras.

El modelo de Markowitz presenta la siguiente formulación:

$$Min \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}x_i x_j$$

$$\text{s.a} \quad \sum_{j=1}^{n} r_j x_j \geq \rho C$$

$$\rho = \frac{\sum_{j=1}^{n} r_j x_j}{n}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = C$$

$$0 \leq x_j \leq u_j\,, \quad j=1,2,...,n$$

Donde:

σij es la covarianza de las rentabilidades de las acciones i y j, σij=E[(Ri-ri)(Rj-rj)]

xj es la cantidad de dinero a invertir en la acción j.

rj es la rentabilidad esperada de la acción j, rj=E[Rj]

uj es la cantidad máxima de dinero que puede invertirse en la acción j

C es la cantidad disponible para invertir

ρ indica la rentabilidad mínima exigida por los inversores

Este modelo fue un hito y llevó a su autor a ganar el Premio Nobel de Economía en el año 1990. Define las bases de la teoría moderna de gestión de carteras, aunque presenta una serie de inconvenientes (Mokotoff Miguel, 2002) (Michaud, 1989):

- Considera que los títulos son infinitamente divisibles.
- Al ser un modelo cuadrático, es un modelo muy complejo para trabajar con muchos activos[8].
- El modelo asume que la probabilidad es estática y que la rentabilidad de los activos se distribuye de forma normal, mientras que la rentabilidad varía en función del tiempo y no siempre de forma normal.

[8] El número de rentabilidades esperadas, varianzas y covarianzas necesarios para el modelo es de $\frac{n+(3n)}{2}$

- Muchos inversores no consideran la varianza como una buena medida del riesgo, ya que toma todos los desvíos respecto a la media como algo no deseado. Sin embargo, los desvíos positivos son buenos para el inversor.
- La solución óptima de un problema cuadrático suele tener muchos elementos distintos de cero, lo que significa que el inversor tiene que invertir en muchos activos distintos y en pequeñas proporciones. Esto conlleva diversos problemas, como los altos costes de transacción (que no se tienen en cuenta), que en ocasiones no se pueden comprar cantidades muy pequeñas de acciones o la dificultad de gestionar carteras con un gran número de distintos activos.
- No tiene en cuentas las expectativas del gestor. Define las ponderaciones de los activos basado únicamente en parámetros matemáticos, llegando a la misma decisión independientemente del gestor.
- Implica baja diversificación y alto riesgo ya que, al usar rentabilidades históricas, los datos están sesgados, derivando en altas rentabilidades y bajas varianzas y covarianzas. Esto genera carteras concentradas en muy pocos títulos. (Giacometti, Bertocchi, Rachev, & Fabozzi, 2005)
- Al utilizar datos históricos, asume que el mercado replica su comportamiento en el futuro.
- Pequeños cambios respecto a las rentabilidades históricas provocan grandes cambios en la cartera óptima (Franco-Arbeláez, Avendaño-Rúa, & Barbutín-Díaz, 2011).

## Sharpe

William Sharpe (1964) propuso un modelo basado en el modelo de Markowitz, pero modifica los fallos que encontró en él, que se explican a continuación. El punto de partida es la frontera eficiente definida por Markowitz, pero rechaza que todos sus puntos sean eficientes. Afirma que todos son eficientes si no tenemos en cuenta que hay activos sin riesgo, pero que al incluir la posibilidad de invertir en activos seguros, solo hay una cartera eficiente compuesta únicamente por activos arriesgados incluida dentro de la frontera eficiente de Markowitz. Esta cartera es la *cartera de mercado* y matemáticamente viene definida por el punto en el que la frontera eficiente de Markowtiz es tangente a la recta que pasa por el activo libre de riesgo. Esta recta es la frontera eficiente de Sharpe y se denomina *Línea del Mercado de Capitales*. Por ello, el modelo de Sharpe puede expresarse de forma lineal mediante la relación entre el rendimiento del activo libre de riesgo y de la cartera de activos con riesgo.

Como todos los inversores comprarían los activos que forman la cartera de mercado, esos activos aumentarían de precio y el resto de activos bajarían de precio, lo que provocaría que la curva de posibilidades de inversión cambiase, cambiando a su vez la cartera de mercado. La curva de posibilidades de inversión se haría cada vez más lineal, por lo que varias combinaciones de activos con riesgo serían eficientes y no todos los inversores invertirían en carteras equivalentes.

La formulación del modelo de Sharpe es:

$$Min \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}x_i x_j$$

$$\text{s.a} \qquad \sum_{j=1}^{n} r_j x_j \geq \rho C$$

$$\rho = r_f + \beta(r_M - r_f)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = C$$

$$0 \leq x_j \leq u_j, \quad j=1,2,...,n$$

Donde,

$r_M$ indica la rentabilidad del mercado

$r_f$ indica la rentabilidad del activo libre de riesgo

$\beta$ mide el efecto de variaciones del mercado sobre la cartera; $\beta = \frac{\sigma_{jM}}{\sigma_M^2}$

El resto de parámetros están definidos en el modelo de Markowitz

Las mejoras que aporta Sharpe frente al modelo de Markowitz son:

- Añade la correlación entre los activos que forman la cartera.
- Añade activos libres de riesgo a la cartera.
- Define que el precio de los activos tiene dos componentes: el precio del tiempo, que es el mismo que el interés de un activo libre de riesgo, y el precio del riesgo que asume el inversor, que el exceso de rentabilidad

Los problemas que presenta este modelo son:

- Asume que hay un único tipo de interés libre de riesgo al que todos los inversores pueden prestar y pedir prestado indefinidamente.
- Además, supone que todos los inversores tienen las mismas expectativas sobre los activos.
- Mide el riesgo con la $\beta$. Ese parámetro utiliza la covarianza, que no es una buena medida del contagio de riesgo (se explicará el por qué en los puntos de mejora).

Del modelo de Sharpe nace el CAPM. Esta medida de la rentabilidad de los activos divide la rentabilidad en los dos factores antes mencionados: rentabilidad obtenida por el tiempo, sin asumir más riesgos ($r_f$) y la rentabilidad que se obtiene por asumir un riesgo extra inherente al activo ($\beta\,(r_M - r_f)$). La prima de riesgo $(r_M - r_f)$ mide el riesgo adicional que hay que asumir al invertir en el mercado y $\beta$ mide si el activo/cartera estudiado asume un riesgo, y por lo tanto una rentabilidad, mayor o menor a la del mercado. El CAPM también es uno de los pilares sobre los que se fundamenta el modelo de Black-Litterman (Idzorek, 2002). Este es uno de los puntos que creemos que se pueden mejorar en los actuales modelos de gestión de carteras, por lo que en el capítulo 3 analizaremos sus problemas y propondremos una solución a los mismos.

## Konno y Yamazaki

Para solventar los problemas que presentaba el modelo de Markowitz, Hiroshi Konno y Hiroaki Yamazaki (1991) también formularon un nuevo modelo que pretendía, manteniendo las ventajas del modelo de Markowitz en cuanto al equilibrio del mercado, pero eliminando las dificultades que presenta un modelo cuadrático. Konno y Yamazaki propusieron un modelo lineal en el que utilizan la desviación absoluta de la media como medida del riesgo[9] y que, además, solo penaliza las desviaciones negativas respecto a la media.

La formulación que presenta el modelo de Konno y Yamazaki es la siguente:

$$Min \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} y_t$$

$$\text{s.a.} \qquad y_t + \sum_{i=1}^{n} (r_{it} - r_i)\, x_i \geq 0\,, \qquad t = 1, 2, \ldots, T$$

$$\sum_{i=1}^{n} r_i\, x_i \geq r$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

$$-\mathrm{u_i} \leq x_i \leq u_i\,, \qquad i = 1, 2 \ldots n$$

Donde:

$y_t$ es una variable auxiliar que se introduce para definir que sólo afectan al modelo las desviaciones negativas (i.e., por debajo de la media)

$r_{it}$ indica la rentabilidad del activo i en el momento t

$u_i$ indica la cantidad máxima a invertir en el activo i

*r* es la rentabilidad mínima exigida por el inversor

Este nuevo modelo presenta las siguientes ventajas (Konno & Yamazaki, 1991):

- No es necesario calcular la matriz de covarianzas, lo cual genera problemas computacionales para un gran número de activos.
- La resolución de un problema lineal es mucho más simple que la de un problema cuadrático, lo que permite resolverlo en un tiempo muy inferior.
- El número máximo de soluciones positivas es 2T+2. Al ser este resultado independiente de N, no importa el tamaño de activos y, para limitar el resultado, solo hay que reducir el número de periodos de la muestra.
- La medida del riesgo solo penaliza desviaciones negativas respecto a la media. El inversor no quiere recibir rentabilidades inferiores a la media, pero está dispuesto a obtener rentabilidades superiores.

[9] Minimizar la desviación absoluta es equivalente a minimizar la varianza siempre que la rentabilidad esté distribuida normalmente.

Pero también presenta los siguientes inconvenientes:

- No introduce las expectativas del gestor, por lo que todos los gestores formarían las mismas carteras, dependiendo siempre de las curvas de indiferencia del inversor.
- La medida de rentabilidad no es efectiva, ya que las ponderaciones que asigna el modelo a cada activo son las máximas permitidas ($u_i$). Esto indica que el modelo no diversifica por sí solo, sino que muestra la diversificación que le impone el gestor en las restricciones.

## Black-Litterman

El modelo de Black-Litterman[10] surge como una solución intuitiva para a los dos problemas de los modelos cuantitativos de gestión de carteras. Según Black y Litterman (1992), los problemas que presentan estos modelos son 1) Asignar una rentabilidad esperada a cada activo, ya que las rentabilidades históricas no se suelen repetir en el futuro y que los gestores no tienen expectativas de rentabilidad sobre todos los activos de sus carteras; y 2) los pesos de los activos en la cartera óptima son muy sensibles a variaciones en las rentabilidades esperadas que se les asignan. La solución que propone BL es la combinación del modelo de optimización de Markowitz con su binomio $(\mu, \sigma^2)$ con el CAPM de Sharpe.

El modelo parte de la situación de equilibrio del mercado (oferta igual a demanda), que es la que sucedería si todos los inversores tuviesen las mismas expectativas -o no tuviesen expectativas-[11]. Por otro lado, al contrario que los modelos que acabamos de analizar, el modelo de Black & Litterman no establece una rentabilidad objetivo y determina las ponderaciones necesarias para conseguirla, sino que partiendo de las ponderaciones actuales de los activos -capitalización en el mercado- determina qué rentabilidad obtendríamos. Una vez determinada la rentabilidad esperada por el mercado, el modelo hace su principal aportación, que es introducir las expectativas de los gestores sobre el comportamiento de los activos.

Cabe destacar que BL mide excesos de rentabilidad, entendiendo por exceso de rentabilidad la diferencia entre la rentabilidad del activo y la tasa libre de riesgo, ya que lo que hay que analizar el cuánto vas a ganar por asumir el riesgo.

Las expectativas que podemos incluir en el modelo tienen que ir acompañadas de un nivel de confianza[12] y pueden ser de tres tipos (Franco-Arbeláez, Avendaño-Rúa, & Barbutín-Díaz, 2011):

- Absoluta: por ejemplo, la renta variable va a tener una rentabilidad del 2% mensual.
- Relativa simple: por ejemplo, la renta fija soberana va a superar a la renta variable en un 1% mensual.

---

[10] De ahora en adelante, BL

[11] Si asumimos que los inversores no tienen expectativas, lo que implica que asumen continuos movimientos del mercado siguiendo sus rentabilidades históricas, todos ellos querrían invertir en el activo más rentable y no en el resto, provocando variaciones en las rentabilidades históricas.

[12] El nivel de confianza se mide como $\frac{w_{BL} - w_{mercado}}{100\% - w_{mercado}}$ (Franco-Arbeláez, Avendaño-Rúa, & Barbutín-Díaz, 2011)

- Relativa compuesta: conjuntamente, la renta fija soberana y la corporativa van a superar a la renta variable en un 1,5% mensual.

Los tres pilares en los que se basa el modelo (Idzorek, 2002) son: 1) la asunción de que el mercado es semi-eficiente, 2) el *Capital Asset Pricing Model*[13] como medida de las rentabilidades de los distintos activos en el mercado y 3) el *Teorema de Bayes*, que hace posible la incorporación de las expectativas a la información histórica (Franco-Arbeláez, Avendaño-Rúa, & Barbutín-Díaz, 2011).

El modelo de BL es el que se muestra a continuación:

$$E\,(R) = [(\tau\,\Sigma)^{-1} + P'\,\Omega\,P]^{-1}\,[(\tau\,\Sigma)^{-1}\,\Pi + P'\,\Omega^{-1}\,Q]$$

Donde,

$E\,(R)$: Es un vector ( N x 1 ) que indica el exceso de rentabilidad esperado de cada uno de los activos que forman la cartera.

$\tau$: En la literatura hay mucha discrepancia sobre cómo determinar el valor de este escalar. En general se define como un escalar que tiene un valor cercano a 0 debido a su incertidumbre (Black and Litterman (1992) y Lee (2000)) y es más o menos inversamente proporcional al peso relativo de Π. En este caso, consideraremos que es igual a 1 dividido entre el número de activos incluidos en el modelo (Blamont and Firoozye (2003)).

Σ: es una matriz de dimensiones (N[14] x N) que indica el riesgo de los activos. BL define este parámetro como la matriz de covarianzas.

$P$: Es una matriz (K[15] x N) que expresa las expectativas (vistas) de exceso/defecto de rentabilidad del inversor relacionadas con cada activo.

Ω: Es una matriz diagonal (K x K) que mide el error de las vistas. Los imputs que utiliza son los coeficientes de confianza de cada una de las vistas. La matriz es diagonal ya que se asume la independencia de las vistas.

Π: Es un vector (N x 1) que indica la rentabilidad que esperamos obtener según el mercado. $\Pi = \lambda \Sigma w_{mk}$. Donde:

- $\lambda$ es el coeficiente de aversión al riesgo. Viene determinado por $\frac{R_M - r_f}{\sigma_M^2}$, donde la rentabilidad esperada por el mercado se calcula mediante el *CAPM*. Si $\lambda = 0$, el inversor es neutral respecto al riesgo; si $\lambda < 0$, el inversor busca alto riesgo, ya que las inversiones más dispersas se ven beneficiadas; y si $\lambda > 0$, el inversor es averso al riesgo (situación normal).
- $w_{mk}$ es peso del activo en el mercado. Lo vamos a medir en función de su capitalización.

$Q$: es un vector (K x 1) que define las vistas. Cada uno de los elementos de la matriz es el valor de rentabilidad absoluta o relativa que define la vista. $Q$ incluye un factor de error $\varepsilon$ que es un vector (K x 1) aleatorio, independiente y se distribuye según

[13] De ahora en adelante CAPM
[14] Número de activos
[15] Número de vistas

una normal (0,1); por ello, a menos que el inversor tenga un nivel de confianza del 100% en sus visiones, el vector $\varepsilon$ está definido por el vector $\vec{0}$.

Este modelo, como ya hemos mencionado, la principal ventaja que aporta es la incorporación de expectativas del gestor. Sin embargo, presenta errores en la medida de ciertos parámetros y en sus asunciones:

- Uno de sus pilares dice que el CAPM se cumple en el mercado. En capítulo 3 explicaremos que hay una medida más eficiente.
- Mide el riesgo de los activos y el riesgo de contagio entre activos mediante la varianza y covarianza. En el capítulo 3 también mostraremos los errores de estas medidas.
- Asume que las rentabilidades de los activos siguen una distribución gaussiana.
- Problemas de dimensiones ya que, para un gran número de activos, las matrices son demasiado grandes y difíciles de tratar en cuanto a cálculos.
- Dificultad de determinar varios parámetros ($\tau$, $\Omega$).
- Dificultad de cuantificar la correlación entre las expectativas. Muchos autores asumen su independencia, pero esto no es real.

# 3. Puntos de mejora

## Medida de rentabilidad

Si el mercado está en equilibrio -punto de partida de BL- y el mercado sigue el CAPM, los pesos que muestran los activos en el mercado -su capitalización- forman la cartera óptima en términos de rentabilidad-riesgo (Giacometti, Bertocchi, Rachev, & Fabozzi, 2005). Estaríamos en el caso que propone Markowitz, en el que la cartera óptima es en la que todos los inversores quieren estar posicionados, convirtiéndose en la cartera de mercado.

En este estudio queremos proponer como medida alternativa de la rentabilidad de los activos el APT, como alternativa al CAPM, ya que:

- El APT es un indicador bueno en el medio y largo plazo, mientras que el CAPM no es una buena medida para medio y largo plazo, ya que el valor de beta varía con el tiempo, por lo que habría que recalcularlo; sin embargo, es una buena medida en el corto plazo (Bodie et al, 2012).
- El APT se basa en factores de riesgo, generalmente macroeconómicos, que afectan al activo; mientras que el CAPM está basado en el activo concreto. Es más fácil y práctico controlar -cubrir- los factores macro que cada uno de los activos individualmente. Por este mismo motivo, las funciones que definen los modelos implican dependencia lineal de los factores de riesgo (APT) o los activos (CAPM). Hay casos en los que no existe relación entre el mercado y los activos, por lo que el modelo no es válido.
- El CAPM incluye todos los riesgos en un único factor (ß), mientras que le APT desglosa diferentes riesgos o factores. Ello nos permite analizar mejor los riesgos que afectan al activo.

Sharpe, en su modelo del APT, se basa en unos supuestos para simplificar el modelo que hay que tener en cuenta al utilizarlo:

- No hay costes de transacción.
- No hay posibilidades de arbitraje.
- Todos los inversores tienen las mismas expectativas.
- Existe un tipo de interés al que se puede prestar y pedir prestado.

La formulación del APT es la siguiente:

$$R_p = r_f + a_1\beta_1 + \cdots + a_s\beta_s + \varepsilon$$

Sabiendo que,

$R_p$: rentabilidad esperada del activo p

$R_f$: rentabilidad del activo libre de riesgo

$\beta_s$: prima de riesgo del factor macroeconómico s para el activo p

$a_s$: sensibilidad del activo p al factor macro s

$\varepsilon$: factor de error de media 0

## Medida del riesgo de los activos

Como demuestra empíricamente Chen-Yung Tsao (2010), un análisis de activos siguiendo el binomio media-varianza, conllevaría una ineficiente distribución de los pesos, especialmente cuando los retornos de los activos no son normales. El uso de la varianza implica la asunción de que las rentabilidades de los activos siguen una distribución normal multivariante o que la función de utilidad del inversor es cuadrática.

Otro problema que presenta la varianza es que penaliza las rentabilidades alejadas de la media, indiferentemente de si son positivas (más rentabilidad de la esperada) o negativas (pérdida respecto a lo esperado).

En Konno y Yamazaki, el riesgo es medido con la desviación absoluta. Esta medida soluciona el problema de la complejidad del modelo cuadrático de la varianza, mediante una aproximación lineal; sin embargo, mantiene el problema de la asunción de normalidad.

Como medida alternativa a la varianza y a la desviación absoluta, varios autores proponen el Valor al Riesgo (VaR) y la Pérdida Esperada (ES[16]). El VaR mide la pérdida máxima esperada bajo un nivel de confianza determinado y en un periodo de tiempo determinado. Es el límite máximo que el gestor de carteras espera perder. En cambio, la ES mide la pérdida esperada en caso de sobrepasar el límite que marca el VaR. Matemáticamente, es la media ponderada de las pérdidas menores o iguales al VaR.

En este estudio vamos a utilizar la ES, ya que el VaR sólo indica la máxima pérdida esperada, pero si se pasa ese límite, pierdes el control sobre la pérdida esperada. Es decir, el VaR no diferencia entre distribuciones con colas gordas o estrechas, por lo que produce una medida del riesgo distorsionada. Para calcularlo, utilizaremos el método histórico, en el que se asume que las rentabilidades futuras van a ser iguales que las pasadas. Esta asunción es errónea, pero más próxima a la realidad que si asumimos que los activos se distribuyen siguiendo una normal multivariante que, además, es el fallo que queremos corregir.

## Medida del contagio de riesgo entre activos

Para medir el contagio de riesgo entre activos vamos a utilizar el CoVaR. Esta medida la propusieron Tobias Adrian y Markus K. Brunnermeier en 2011 ya que, como consecuencia de la crisis de 2008, se dieron cuenta de que no era tan importante el riesgo inherente a una sociedad, sino el efecto que producía una sociedad en riesgo sobre el resto del sistema. Adrian y Brunnermeier definen el CoVaR como el VaR del sector financiero condicionado a la sociedad *i* en condiciones de estrés.

Las ventajas que presenta esta medida son:

- La formación de carteras basándonos en el riesgo individual de cada activo puede llevarnos a asumir un riesgo sistémico excesivo. Tenemos que minimizar el efecto sistémico.

[16] Expected Shortfall o Tail Loss

- Nos ayuda a estudiar la dispersión del riesgo entre activo, por lo que podemos saber si hay activos muy correlados con el resto y que, por lo tanto, aumentan excesivamente el riesgo de la cartera para tomar decisiones sobre si mantener el activo en la cartera o excluirlo de la misma.
- El CoVaR del activo *i* sobre *j*, no es el mismo que el CoVaR del activo *j* sobre el *i*. Por ello, podemos identificar correctamente los flujos de contagio entre activos[17].
- Al contrario que la covarianza, no es un valor estático, en cuanto a que presenta diferentes medidas en función de la tipología de cola que presente la distribución y los diferentes niveles de confianza que queramos considerar.

Hay que tener en cuenta que el CoVaR no indica causalidad. Esto tiene especial importancia cuando se analizan un conjunto de sociedades similares y afectadas por un factor común. Si una de ellas entra en situación de estrés, ello no implica que el resto entren también en situación de estrés.

Debido a que en el caso del riesgo individual de los activos hemos considerado la ES en vez del VaR, en este caso vamos a considerar también el CoES, en lugar del CoVaR. El CoES se calcula como la media ponderada de todas las pérdidas que se podrían incurrir si el riesgo es mayor que el indicado por el CoVaR a un nivel de confianza $q$:

$$CoES = E\left(X_i \middle| X_i < CoVaR_i^q\right)$$

## Asunción de normalidad

Se asume la distribución de normalidad, ya que ello evita numerosos problemas computacionales (Meucci, The Black-Litterman Approach: Original model and extensions, 2010). Sin embargo, múltiples estudios demuestran que las rentabilidades de los activos no se ajustan a una distribución Gaussiana (Giacometti, Bertocchi, Rachev, & Fabozzi, 2005). La distribución de los activos suele ser más leptocúrtica, asimétrica y las colas son más gordas que en la Gaussiana, es decir, la probabilidad de que las rentabilidades sean extremas es mayor (Franco-Arbeláez, Avendaño-Rúa, & Barbutín-Díaz, 2011).

Las distribuciones a las que más se ajustan las rentabilidades son las distribuciones alfa estable y la t-Student (Giacometti, Bertocchi, Rachev, & Fabozzi, 2005).

[17] Hay que recordar que $Cov_{i,j} = Cov_{j,i}$

# 4. Resultados

## Markowitz

Como ya explicamos en la Revisión de la Literatura, Markowitz halla la frontera eficiente atendiendo al binomio $\left(\mu_{ij}\ ,\ \sigma_{ij}^{2}\right)$. Como se muestra en el Gráfico 1, la cartera de mínima varianza obtenida con los activos disponibles ofrece una rentabilidad esperada de 0,323% y una varianza de 0,006%. De acuerdo con Markowitz, ésta es la cartera con menor riesgo que podemos formar. A partir de ella nace una curva que indica las carteras eficientes en el sentido media – varianza. Para ver las carteras eficientes obtenidas, ver Anexo 1.

Merece la pena analizar la frontera eficiente de Markowitz desde el punto de vista desviación típica - rentabilidad[18] (ver Gráfico 2). El ajuste de esta frontera eficiente a una recta tiene una bondad del ajuste, medido con el coeficiente de determinación, de $R^2$ = 99,99%. Si ajustamos la parte izquierda de la curva, la más cercana a la cartera de mínima varianza, obtenemos una bondad del ajuste del 95,5%. De este modo, podemos analizar el binomio (desviación típica – rentabilidad) como una recta.

Analizando la pendiente de la recta de regresión, que es 8,8795, nos indica que, para aumentar la rentabilidad en 1 punto porcentual, debemos asumir casi 9 puntos porcentuales más de riesgo, medido mediante la desviación típica.

Cabe destacar que, para obtener rentabilidades superiores, hay que tomar posiciones muy grandes en los activos que ofrecen rentabilidades más extremas. Así, en el Gráfico 3 podemos ver cómo se toman posiciones largas con mucho peso en bonos corporativos, ya que es el activo que más rentabilidad esperada ofrece. También se observa que el activo en el que se toman posiciones cortas con más peso es en el índice Itraxx, el cual esta inversamente correlacionado con todos los activos de la cartera, excepto con los bonos corporativos, con los que su correlación es muy baja (en el Anexo 3 se muestra la información relativa a matrices de covarianza y correlación y rentabilidades de los activos).

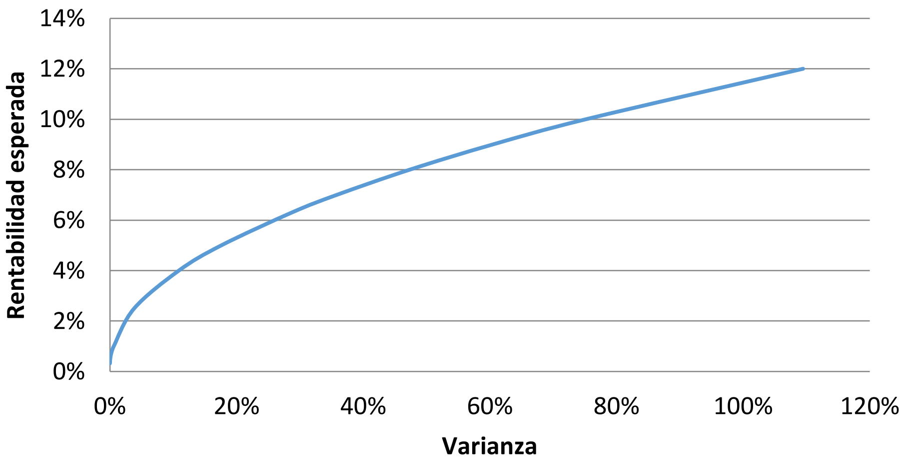


Gráfico 1: Frontera Eficiente de Markowitz (media – varianza)
Fuente: Elaboración propia

[18] Markowitz (1952) representaba la rentabilidad en el eje de abscisas y el riesgo en el eje de ordenadas.

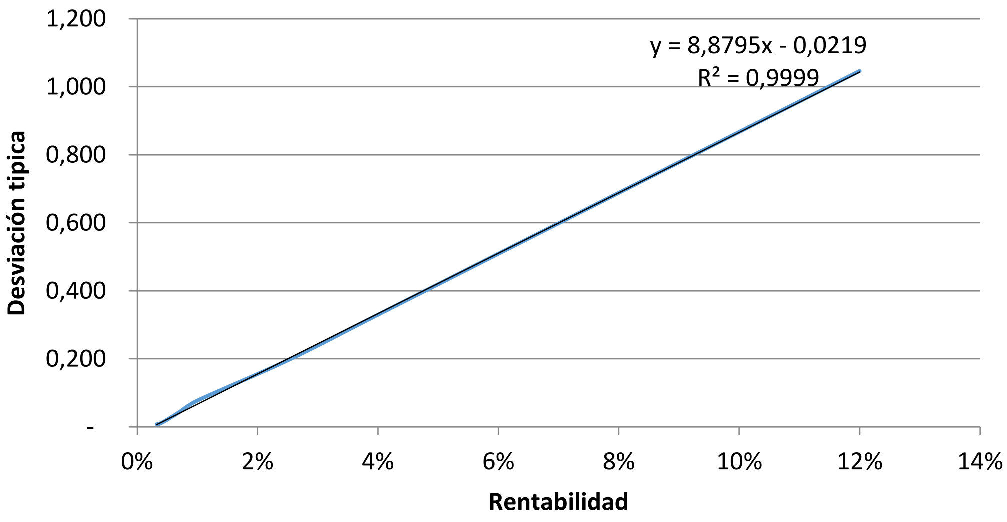


Gráfico 2: Frontera Eficiente de Markowitz (desviación típica - rentabilidad)
Fuente: Elaboración propia

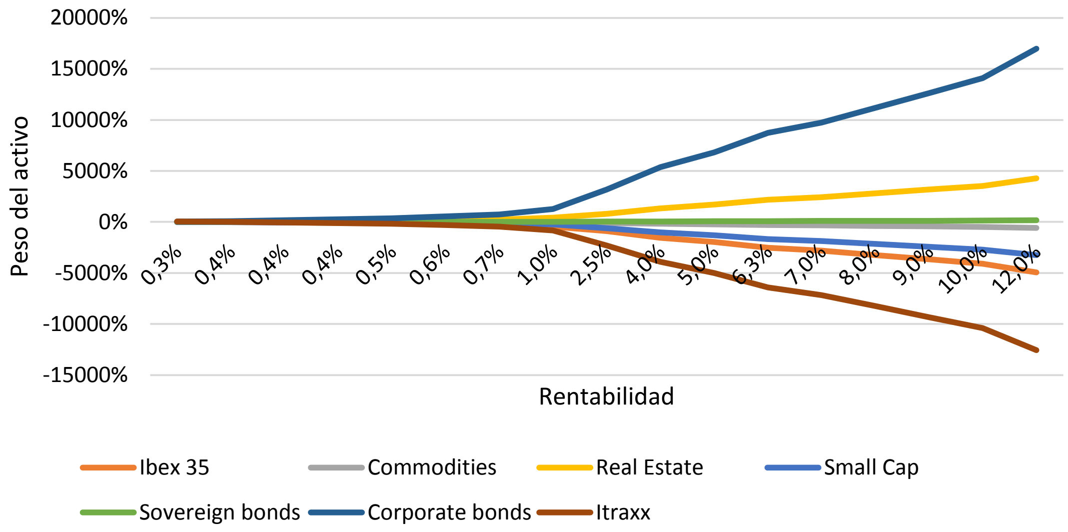


Gráfico 3: Relación entre rentabilidad obtenida y peso de los activos en el modelo de Markowitz
Fuente: Elaboración propia

## Sharpe

Atendiendo a lo explicado en la Revisión de la Literatura, la Frontera Eficiente de Sharpe se determina mediante la tangente a la Frontera Eficiente de Markowtiz que pasa por el activo libre de riesgo -bono español a 10 años-, siendo la Cartera de Mercado el punto de tangencia. En el caso analizado no podemos determinar la Cartera de Mercado, ya que el bono español y la curva de Markowitz son tangentes en el infinito.

El hecho de no hallar la Cartera de Mercado se debe a que la pendiente de la curva en todos sus puntos es la misma o, lo que es lo mismo, el exceso de riesgo que tenemos que asumir para incrementar la rentabilidad en 1 punto básico es el mismo a lo largo de toda la curva. Esto ocurre ya que sólo asumimos riesgo sistémico.

Debido a la gran variedad de activos distintos introducidos en la base de datos, que diversifica tanto en materia de tipos de activos -CDS, renta variable, renta fija, etc.- como por sectores y empresas -al introducir índices y fondos en el modelo, se consigue diversificar también por empresa, sin tener que complicar el modelo introduciendo más activos. Por ello, conseguimos una cartera muy diversificada, consiguiendo eliminar el riesgo inherente a los activos.

## Konno y Yamazaki

En el Anexo 2 aparece una selección de carteras eficientes que podemos formar siguiendo el modelo de Konno y Yamazaki. En dichas carteras se aprecia que los pesos que toman los activos tienden a alcanzar el valor máximo permitido en las restricciones, demostrando así lo que ya avanzamos en la literatura: que el modelo no diversifica por sí sólo, sino que es necesario restringir los pesos para imponer una mayor o menor diversificación.

Por otra parte, el Gráfico 4 ilustra claramente la linealidad del modelo de Konno y Yamazaki, con ajustes de bondad superiores al 99%. En el gráfico también llama la atención que las desviaciones absolutas sean negativas. Este hecho ocurre al realizar posiciones cortas -hay que recordar que el modelo mide las desviaciones absolutas de cada activo, ponderadas por su peso sobre la cartera-. Este gráfico se debe interpretar conceptualmente de modo que cuanto más nos alejemos del eje de ordenadas, más riesgo tiene nuestra cartera, ya sea negativo o positivo. De esta forma, las carteras situadas en el eje de ordenadas son, de acuerdo con el modelo, inversiones libres de riesgo. Este hecho no implica que no hayamos asumido riesgo individualmente con cada activo, sino que las desviaciones que se producen en posiciones largas y cortas se compensan, eliminando el riesgo total de la cartera.

En la modificación propuesta al modelo es necesario tener en cuenta que el hecho de introducir restricciones que limitan la cantidad máxima a invertir en cada activo, también está limitando la rentabilidad máxima que se puede alcanzar, no estando limitada la misma cuando no se incluye esta restricción. Así, en el Gráfico 4 están representadas las rentabilidades máximas que es posible alcanzar en función de los límites impuestos. Por ejemplo, si se limita el peso de los activos a ± 0,2 es posible obtener una rentabilidad máxima de 0,5%; mientras que si limitamos el peso a ± 0,8 la rentabilidad máxima se incrementa hasta el 1,8%.

Otro análisis relevante de la modificación del modelo se obtiene a partir de la representación gráfica de la desviación típica de las carteras formadas utilizando este modelo y su rentabilidad (Gráfico 5). Así, en el Gráfico 5 se observa que no todas estas carteras son eficientes en el sentido rentabilidad – desviación típica, por lo que el modelo de Konno y Yamazaki no es apropiado para inversores que consideren la desviación típica una buena medida del riesgo. Además, las carteras que en términos de desviación absoluta estaban libres de riesgo, se convierten en carteras arriesgadas al medir su riesgo mediante la desviación típica. De hecho, la cartera libre de riesgo según Konno y Yamazaki, no en todos los casos es la cartera de menor riesgo. De ello podemos concluir que el modelo de Konno y Yamazaki no puede ser analizado en el sentido riesgo - desviación típica, ya que llevaría a conclusiones contrarias a lo que realmente indica el modelo.

En el Gráfico 5 también puede observarse que no aparece una clara distinción, en lo que se refiere al riesgo, entre las curvas con restricciones más o menos severas. Así, no se aprecia la diversificación al medirla mediante la desviación típica.

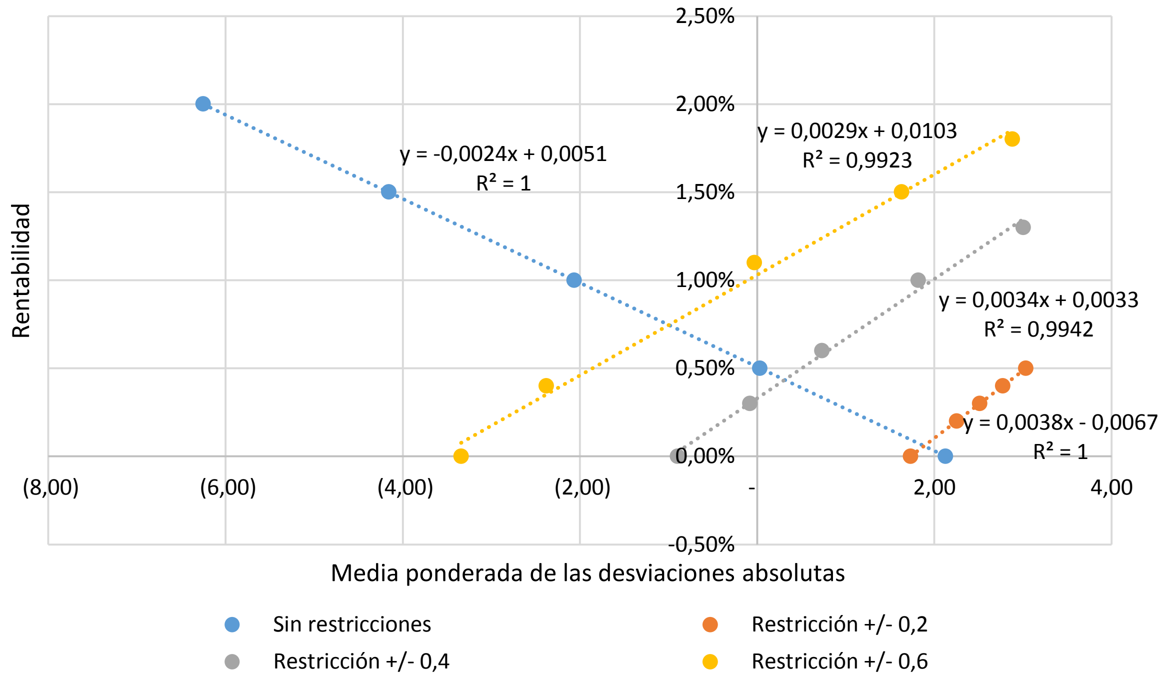


Gráfico 4: Carteras formadas con el modelo de Konno y Yamazaki.
Rentabilidad – Media ponderada de las desviaciones absolutas
Fuente: Elaboración propia

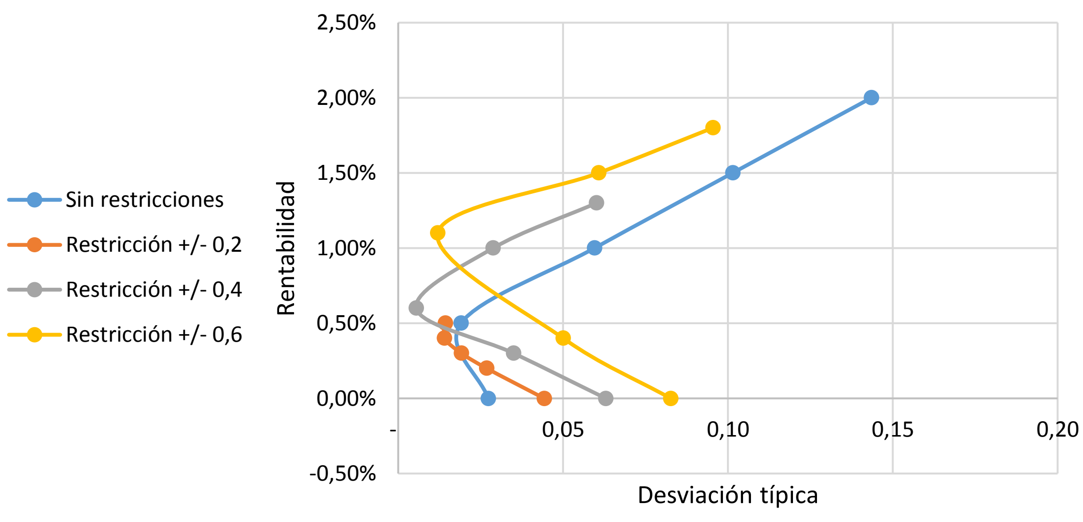


Gráfico 5: Carteras formadas con el modelo de Konno y Yamazaki.
Rentabilidad – Desviación típica
Fuente: Elaboración propia

## Black & Litterman

Recordando lo que ya se mencionó en la Sección 2. Revisión de la Literatura, el modelo de Black & Litterman, al contrario que los otros tres modelos estudiados, genera rentabilidades esperadas -a partir de las rentabilidades históricas y las expectativas del inversor- en base a las cuales el inversor decidirá el peso de cada activo en la cartera. Por el contrario, los otros tres modelos generan los pesos que deberían tener los activos en la cartera.

| | Rentabilidad a priori | Rentabilidad generada por el modelo |
|---|---|---|
| Ibex 35 | 0,12% | 0,37% |
| Materias Primas | 0,10% | 0,29% |
| Mercado Inmobiliario | 0,15% | 0,36% |
| Pequeña Capitalización | 0,13% | 0,65% |
| Itraxx | -0,03% | -0,53% |
| Renta Fija Soberana | 0,03% | 0,09% |
| Renta Fija Corporativa | 0,00% | -0,02% |

Tabla 7: Rentabilidades del modelo de Black & Litterman
Fuente: Elaboración propia

En lo que sigue se analizan paso a paso los parámetros a introducir en este modelo y los resultados obtenidos en las distintas etapas con objeto de describir cómo funciona el modelo.

Las dos expectativas introducidas inicialmente en el modelo son las siguientes:

- Expectativa 1: La cotización de las empresas de pequeña capitalización va a superar a la cotización del mercado inmobiliario en 60 pb[19].
- Expectativa 2[20]: La cotización de la deuda soberana va a superar a la deuda corporativa en 20 pb.

La rentabilidad que el mercado espera obtener -medida con Π- y la rentabilidad generada por el modelo al incluir las expectativas expuestas en el párrafo anterior, junto con las medidas de error, aparecen recogidas en la Tabla 7. Las expectativas del inversor han afectado del siguiente modo a la rentabilidad esperada:

- Expectativa 1: La diferencia entre las rentabilidades esperadas de las empresas de pequeña capitalización y del mercado inmobiliario era, históricamente, de -2 pb, mientras que la diferencia en las expectativas era de +60 pb. La diferencia de rentabilidades que espera el modelo es de +29 pb.
- Expectativa 2: La diferencia entre las rentabilidades históricas de la renta fija soberana y de la renta fija corporativa era de +3 pb y la diferencia según las expectativas era de +20 pb. La diferencia entre las rentabilidades que genera el modelo es de +11 pb.

[19] Se utiliza la abreviatura “pb” para “Puntos básicos”
[20] Esta expectativa refleja una situación poco común ya que, en una situación normal del mercado, la curva de tipos de deuda soberana es inferior en rentabilidad a la curva de tipo de deuda corporativa. En el periodo 2006 – 2012, el mercado estuvo en una situación anómala por la crisis de deuda soberana, en la que los tipos de interés de deuda soberana eran superiores a los de la deuda corporativa.

Como puede apreciarse, el modelo ajusta las rentabilidades esperadas a las expectativas del inversor. El resultado no coincide, ni con la rentabilidad a priori, ni con las expectativas, ya que ambas presentan un error asociado que el modelo considera.

Una vez determinadas las rentabilidades esperadas, se calculan las carteras eficientes en el sentido (media – varianza) mediante un problema de optimización -debe recordarse en este punto que Black & Litterman mide el riesgo con la varianza-. Las carteras obtenidas están representadas en el Gráfico 6 y definidas en la Tabla 8 (Anexo 4). Aunque la gráfica muestra una tendencia curva, una aproximación lineal resulta bastante aceptable dado que la bondad del ajuste del 96,5%.

El problema que presenta la optimización de este modelo es el mismo que en el caso del modelo de Konno y Yamazaki: El modelo no diversifica por sí mismo. En la Tabla 8 se observa que sólo se toman posiciones en Pequeña Capitalización, Itraxx y Renta Fija Corporativa. Esto sucede debido que Pequeña Capitalización es la que mayor rentabilidad esperada ofrece. Por otra parte, Itraxx y Renta Fija Corporativa muestran correlaciones negativas con la mayoría de activos, por lo que ayudan a reducir el riesgo.

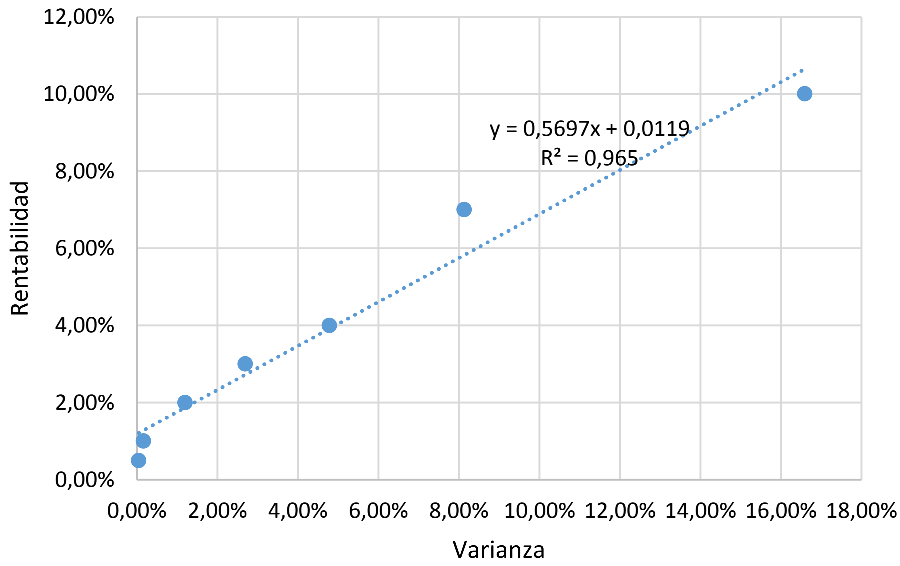


Gráfico 6: Carteras eficientes según el modelo de Black & Litterman.
Fuente: Elaboración propia

## Comparativa de los modelos

Una vez analizados los resultados de los modelos individualmente, en esta sección se procederá a su comparación. El parámetro considerado en el procedimiento de comparación está basado en la bondad de los resultados de predicción proporcionados por cada modelo para el caso analizado, es decir, en la exactitud con la que cada modelo reproduce los datos considerados como futuro comparado con el resto. Para ello el primer paso consiste en medir los errores absolutos que se habrían obtenido con cada una de las carteras formadas a los 3 años de realizar las inversiones. Aunque cada modelo presenta una medida distinta del riesgo, en este Trabajo Fin de Máster se utilizará la varianza para todos ellos, ya que es necesario unificar los parámetros con objeto de proceder a una comparación.

El Gráfico 7 pone de manifiesto que el error mínimo que se obtiene en los tres modelos es muy similar, dado que todas las rectas de regresión tienen una ordenada en el origen de entre 0,02 y 0,03. Sin embargo, al comparar las pendientes de las líneas de tendencia se observa que el modelo de Konno y Yamazaki es el que proporciona errores menores al incrementar el riesgo asumido. No obstante, la bondad del ajuste de la recta de regresión de este modelo es muy bajo ($R^2$ = 0,515) debido a la gran dispersión de los puntos con bajo riesgo. Esta gran dispersión aparece como consecuencia de haber generado los puntos que se alejan del origen sin restricción de cantidad máxima a invertir por activo. No obstante, si se incluyen restricciones en el modelo, el error no se minimiza tanto. Por todo ello no es posible afirmar que el modelo de Konno y Yamazaki genere carteras con errores absolutos menores.

Al realizar una comparación de los errores de los modelos de Markowitz y de Black & Litterman, se observa que ambos ofrecen un buen ajuste a la recta de regresión -mayor en ambos casos del 95%-. Además, el modelo de Black & Litterman genera para el caso considerado menores errores que Markowitz al asumir riesgos iguales. No obstante, estos resultados no son extrapolables de forma general, dado que los resultados del modelo de Black & Litterman dependen de forma importante de si las expectativas del inversor son correctas o erróneas, por lo que no necesariamente proporcionará un error menor al que proporciona el modelo de Markowitz en cualquier otro caso sometido a un análisis equivalente.

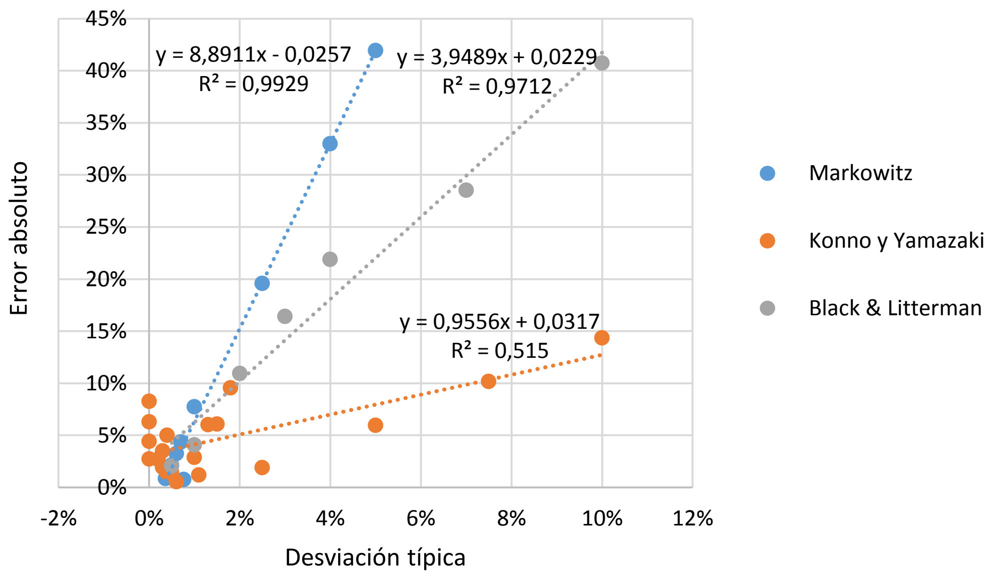


Gráfico 7: Errores de las carteras en los distintos modelos en función del riesgo que se asume.
Fuente: Elaboración propia

## Medida de la eficiencia de las mejoras

En esta Sección se analiza la eficiencia de las propuestas de mejora basadas en el análisis de los distintos modelos de gestión de carteras. El análisis de la eficiencia se plantea inicialmente como la comparación del error obtenido de la aplicación del modelo original de Black & Litterman con la aplicación del mismo modelo tras la incorporación de los puntos de mejora propuestos. Como se describió anteriormente, los cuatro puntos de mejora propuestos son los siguientes:

1. Medida de la rentabilidad usando el APT en vez del CAPM.
2. Medida del riesgo de los activos usando el VaR en vez de la varianza.
3. Medida del contagio de riesgo entre activos usando el CoVaR en vez de la covarianza.
4. No asunción de normalidad para las distribuciones que siguen los activos y sus errores.

No obstante, la implementación de los puntos 1 y 4 conllevaría la variación del modelo de Black & Litterman por completo, para lo que se requiere una base matemática muy importante, superando el alcance de este Trabajo Fin de Máster. Así, únicamente se han implementado los puntos de mejora 2 y 3 en el análisis de eficiencia que se describe a continuación.

Los resultados obtenidos muestran que el error absoluto que genera el modelo original de Black & Litterman es de 4,94% de rentabilidad, en términos absolutos. En cambio, el error que se produce al realizar los cambios propuestos es de 109,81% de rentabilidad, también en términos absolutos. Utilizando estos resultados como base debe concluirse que el modelo original permite determinar las rentabilidades de los activos con mucha más fiabilidad que el modelo incluyendo las mejoras propuestas. Sin embargo, dados los fuertes argumentos expuestos anteriormente acerca de estas áreas de mejora, existen razones de peso para considerar que el error del nuevo modelo no radica en la nueva forma de medir el riesgo, tanto del activo individualmente como de contagio entre activos -y por tanto en un fallo de la mejora propuesta-, sino a que la implementación de estas nuevas medidas no se ha realizado eficazmente debido a la dificultad matemática que conlleva el proceso de implementación.

# 5. Conclusiones

En este Trabajo Fin de Máster se han analizado cuatro modelos de gestión de carteras, los cuales han generado grandes avances en la gestión de éstas: Markowitz (1952), Sharpe (1964), Konno y Yamazaki (1991) y Black & Litterman (1992). En el proceso de análisis llevado a cabo se han determinado los puntos fuertes y débiles de cada uno de los modelos mencionados para, posteriormente, proponer cuatro medidas alternativas para los cuatro puntos débiles más relevantes, de acuerdo con la literatura. Los cuatro puntos débiles analizados son: La medida de la rentabilidad, la medida del riesgo inherente a los activos y de contagio entre activos, y la asunción de normalidad en los modelos.

Una vez analizada la bibliografía relacionada con el tema objeto de este estudio, el trabajo se ha centrado en un estudio empírico de si las hipótesis antes expuestas se cumplen para la base de datos analizada. Dicha base de datos está enfocada en el mercado español e incluye índices y fondos de inversión sobre bonos corporativos y soberanos, derivados de crédito, renta variable, mercado inmobiliario, empresas cotizadas de pequeña capitalización y materias primas. Los datos de los primeros siete años se han utilizado en la elaboración del modelo, utilizando con propósitos de validación los correspondientes a los tres años restantes incluidos en la base de datos. El procedimiento y resultados más relevantes de este estudio se exponen a continuación.

Se ha realizado un análisis de la creación de carteras utilizando cada uno de los modelos estudiados. Las conclusiones obtenidas a partir de los resultados del análisis para cada modelo son los siguientes:

- Para conseguir un aumento de rentabilidad, según el modelo de Markowitz, es necesario asumir un exceso de riesgo que, medido a través de la desviación típica, presenta un buen ajuste a una recta. Así, el incremento de 1 punto porcentual de rentabilidad conlleva asumir el mismo exceso de riesgo independientemente de la rentabilidad que esperemos recibir. No obstante, cuanta más rentabilidad se espere recibir, más necesario será incrementar las posiciones en los activos tanto de compra como de venta, lo que aumenta su riesgo, a pesar de que este hecho no se ve reflejado en la desviación típica.

- El modelo de Sharpe no proporciona ninguna cartera de mercado para la base de datos utilizada. Esto se debe a la alta diversificación que ofrece la base de datos, que incluye una gran variedad de activos financieros, llevando matemáticamente a obtener la cartera de mercado en el límite cuando el riesgo tiendo a infinito. Este resultado indica que no existe ninguna cartera posible para las condiciones consideradas.

- En el modelo de Konno y Yamazaki se ha comprobado lo que ya anticipaba la bibliografía: el modelo no diversifica por sí solo, sino que el inversor tiene que introducir restricciones para limitar la cantidad máxima de cada activo. A pesar de obligar al modelo a diversificar, esto no produce una reducción del riesgo medido con la desviación absoluta, aunque conceptualmente sí que lo minimiza. El efecto más destacado de incluir dichas restricciones es que limita la rentabilidad máxima que se espera recibir, ya que para recibir rentabilidades altas se hace necesario tomar posiciones muy grandes en los activos. Además, al ser un modelo que minimiza el riesgo a través de las desviaciones absolutas, comprobamos que carece de sentido su análisis en función de la varianza -o desviación típica-, ya que genera carteras ineficientes bajo esta métrica.

- El modelo de Black & Litterman genera rentabilidades esperadas en base a la rentabilidad histórica y a las expectativas, en lugar de los pesos que han de tomar los activos en las carteras. Se ha comprobado que el modelo, efectivamente, ajusta la rentabilidad que espera el mercado con las expectativas del inversor. Posteriormente se han generado carteras eficientes en el sentido media – varianza, comprobando que, al igual que los modelos anteriores, presentaba un buen ajuste a una recta.

Se han comparado los resultados de los distintos modelos para ver cuál habría predicho mejor el futuro. Para ello se midieron los errores absolutos de cada una de las carteras formadas, ajustándolos a una recta para facilitar la comparación. Las conclusiones obtenidas son las siguientes:

- Aunque la recta de regresión a la que se ajusta el modelo de Konno y Yamazaki era la de menor pendiente -y, por lo tanto, la que menor error a posteriori ofrece al asumir mayor riesgo-, la recta de regresión no ofrece un buen ajuste, por lo que los resultados de la comparación no son conclusivos.

- Comparando el modelo de Markowitz y del de Black & Litterman, el que menor error ofrece en el caso estudiado es el segundo. No obstante, dado que las soluciones del modelo de Black & Litterman dependen en gran medida de las expectativas del inversor y del error asociado a las mismas, no siempre será este modelo el que ofrezca resultados más fiables.

Se ha creado un nuevo modelo de gestión de carteras, incorporando algunos de los cambios propuestos en el capítulo de puntos de mejora al modelo de Black & Litterman. En un análisis de la eficiencia de ambos modelos, el original y el modificado, se concluye que:

- El error absoluto del modelo original es mucho menor que el que genera el modelo modificado. Sin embargo, dado que se ha demostrado empíricamente que las medidas propuestas son más exactas que las incluidas inicialmente en el modelo, se considera que el elevado error que genera el nuevo modelo se debe a que la implementación de estas nuevas medidas no se ha realizado eficazmente debido a la dificultad matemática que conlleva dicho proceso.

Como conclusión final de este Trabajo Fin de Máster, y considerando los estudios llevados a cabo en el marco de los cuatro modelos analizados, se pone en evidencia que los modelos de gestión de carteras existentes no permiten determinar con exactitud el comportamiento del mercado actual español. Sin embargo, se están realizando grandes avances en dichos modelos, desde que Markowitz, en 1952, formuló el modelo que dio origen a la teoría moderna de gestión de carteras, hasta el modelo de Black & Litterman que, como se ha demostrado, es el que mejor predice el comportamiento de los activos, siempre que el gestor de carteras ofrezca expectativas cercanas a la realidad. A pesar de haber avanzado notablemente en los últimos 60 años hasta conseguir una mayor aproximación a la realidad en los modelos de gestión de carteras recientes, queda demostrado que aún quedan muchos puntos de mejora por implementar en los mismos, con los que se podría conseguir un error menor y, por lo tanto, una gestión más eficiente de las carteras.

## 6. Futuras líneas de investigación

El presente Trabajo Fin de Máster presenta un análisis de las debilidades de los principales modelos de gestión de carteras utilizados actualmente por las compañías gestoras de activos financieros. Una vez detectadas dichas debilidades se proponen mejoras objetivas que se deducen del estudio de la bibliografía existente sobre la gestión de carteras. La implementación de estos puntos de mejora en el modelo de Black & Litterman no proporciona sin embargo los resultados esperados. Sin embargo, las debilidades detectadas en los modelos se constatan objetivamente y las nuevas propuestas están basadas en argumentos sólidos. De esta forma, como ya se indicó en las Secciones 4. Resultados y 5. Conclusión, se considera que el error que se produce se encuentra en la implementación realizada de dichas propuestas de mejora en el modelo de Black & Litterman. Es por ello que procede finalizar esta memoria proponiendo tres líneas de investigación futuras que se espera que contribuyan de forma importante a la continuación de este trabajo de investigación:

- La realización de un tratamiento matemático adecuado en la implementación de las mejoras propuestas del modelo de Black & Litterman.
  Una herramienta que proporcionaría los métodos adecuados para ello es *Matlab*, por lo que se pretende abordar en un futuro próximo la implementación de los cuatro puntos propuestos en este Trabajo Fin de Máster en el Modelo de Black & Litterman aprovechando esta herramienta. Esto permitirá comprobar si, efectivamente, dicha implementación produce una mejora de los resultados, tal y como se espera de las hipótesis y desarrollos realizados en este trabajo.

- El estudio de los puntos fuertes de otros modelos de gestión de carteras y su implementación en el modelo de Black & Litterman.
  Este estudio permitiría añadir mejoras adicionales a las cuatro ya propuestas en este Trabajo Fin de Máster

- La aplicación de las modificaciones propuestas a carteras que incluyan activos de mercados internacionales, sin restringir al ámbito español, tal y como requiere una evolución de los mercados hacia una gestión globalizada en la inversión.

El objetivo final de estas tres líneas de investigación se engloba dentro del objetivo de este Trabajo Fin de Máster: la mejora de los modelos existentes de gestión de carteras. Para ello, sería deseable que las tres líneas propuestas de investigación avanzaran de forma paralela, lo que consideramos totalmente viable.

# Bibliografía


Adrian, T., & K. Brunnermeier, M. (15 de 11 de 2011). CoVaR. *Federal Reserve of New York Staff Reports Nº 348*. Obtenido de https://www.newyorkfed.org/medialibrary/media/research/staff_reports/sr348.pdf

Baixauli-Soler, J., Alfaro-Cid, E., & Fernández-Blanco, M. (2011). Mean-VaR Portfolio Selection Under Real Constraints. *Computational Economics*, 113-131.

Black, F., & Litterman, R. (1992). Global Portfolio Optimization. *Financial Analysts Journal*, 28-43.

Bloomberg, Base de Datos. (Junio de 2016).

Bolsa de Madrid. (2016). Obtenido de http://www.bolsamadrid.es/

Bolsas y Mercados Españoles. (2015). La actividad de los inversores y La financiación. En *Informe de mercados 2015* (págs. 47-62).

Cano, C., & Cardoso, E. (2015). El Impacto de los Sesgos Conductuales en la Toma de Decisiones de Inversión. *MONEDA II FINANZAS DEL COMPORTAMIENTO 162*, 28 - 33.

Cheung, W. (2009). The Black-Litterman Model Explained. *Journal of Asset Management*, 229-243.

Fama, E. (05 de 1970). Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work. *The Journal of Finance, Vol. 25, No. 2*, 383-417 .

Franco-Arbeláez, L., Avendaño-Rúa, C., & Barbutín-Díaz, H. (2011). Modelo de Markowitz y modelo de Black-Litterman en la optimización de portafolios de inversión. *Revistas Tecno Lógicas, nº 26*, 71-88.

Giacometti, R., Bertocchi, M., Rachev, S., & Fabozzi, F. (2005). Stable distributions in the Black-Litterman approach to the asset allocation.

Idzorek, T. (2002). A Step-By-Step Guide To The Black-Litterman Model. Obtenido de https://faculty.fuqua.duke.edu/~charvey/Teaching/BA453_2006/Idzorek_onBL.pdf

Konno, H., & Yamazaki, H. (1991). Mean-Absolute Deviation Portfolio Optimization Model and Its Applications to Tokyo Stock Market. *Management Science, Vol. 37, Nº 5* , 519-531 .

Krugman, P., & Wells, R. (1953). *Introducción a la Macroeconomía.*

Markowitz, H. (1952). Portfolio Selection. *The Journal of Finance, Vol. 7, Nº 1*, 71-91.

Meucci, A. (2005). Beyond Black-Litterman: Views on Non-Normal Markets. *ARPM - Advanced Risk and Portfolio Management*.

Meucci, A. (2010). The Black-Litterman Approach: Original model and extensions. *The Encyclopedia of Quantitative Finance*.

Michaud, R. (1989). The Markowitz optimization enigma: is optimized optimal? *Financial Analysts Journal, 45 (1)*, 31-42.

Mokotoff Miguel, E. (2002). Programación Lineal: Resolución de problemas en hoja de cálculo.

*Second Hand Words*. (2016). Obtenido de http://secondhandwords.weebly.com/comparing-the-arbitrage-pricing-theory-and-the-capital-asset-pricing-model.html

Sharpe, W. (1964). Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium Under Conditions of Risk. *The Journal of Finance, Vol 19, Nº 3* , 425-442.

Tsao, C.-Y. (10 de 2010). Portfolio selection based on the mean-VaR efficient frontier. *Quanitative Finance, Vol 10, Nº 8*, 931-945.

Von Neuman, J., & Morgensten, O. (1944). Theory of Games and Economic Behaviour.

Zoido Martínez, A. (2015). Los mercados de capitales en España: 1965-2015. Factor de impulso al desarrollo de la economía. En *50 AÑOS DE ANALISIS FINANCIERO EN ESPAÑA* (págs. 69-81). Instituto Español de Analistas Financieros.

# Anexo 1

| | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Ibex 35** | 15% | -2% | -39% | -75% | -110% | -181% | -252% | -465% | -907% | -1541% | -1964% | -2518% | -2810% | -3232% | -3655% | -4078% | -4923% |
| **Commodities** | 13% | 14% | 4% | -1% | -7% | -18% | -29% | -62% | -96% | -174% | -225% | -292% | -328% | -379% | -431% | -482% | -585% |
| **Real Estate** | -14% | 1% | 37% | 69% | 102% | 168% | 233% | 430% | 786% | 1336% | 1702% | 2183% | 2436% | 2803% | 3169% | 3536% | 4270% |
| **Small Cap** | -7% | -17% | -35% | -53% | -71% | -107% | -143% | -251% | -613% | -1031% | -1309% | -1674% | -1866% | -2145% | -2423% | -2702% | -3259% |
| **Sovereign bonds** | 0% | 1% | 1% | 2% | 3% | 4% | 6% | 10% | 32% | 53% | 68% | 87% | 97% | 111% | 125% | 140% | 169% |
| **Corporate bonds** | 33% | 83% | 175% | 267% | 359% | 544% | 729% | 1283% | 3191% | 5369% | 6821% | 8723% | 9725% | 11177% | 12629% | 14082% | 16986% |
| **Itraxx** | 59% | 21% | -43% | -110% | -177% | -311% | -444% | -846% | -2291% | -3912% | -4993% | -6408% | -7154% | -8235% | -9315% | -10396% | -12557% |

| | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Desviación Típica** | 0,008 | 0,009 | 0,012 | 0,016 | 0,022 | 0,032 | 0,044 | 0,077 | 0,196 | 0,330 | 0,419 | 0,537 | 0,599 | 0,688 | 0,778 | 0,867 | 1,046 |
| **Varianza** | 0,01% | 0,01% | 0,01% | 0,03% | 0,05% | 0,11% | 0,19% | 0,60% | 3,83% | 10,88% | 17,59% | 28,81% | 35,83% | 47,35% | 60,48% | 75,21% | 109,49% |
| **Rentabilidad Esperada** | 0,32% | 0,36% | 0,40% | 0,45% | 0,50% | 0,60% | 0,70% | 1,00% | 2,50% | 4,00% | 5,00% | 6,31% | 7,00% | 8,00% | 9,00% | 10,00% | 12,00% |

Tabla 2: Selección de carteras que componen la frontera eficiente de Markowitz.

Fuente: Elaboración propia

# Anexo 2

| | Sin restricciones | | | | | Restricción +/- 0,2 | | | | | Restricción +/- 0,4 | | | | | Restricción +/- 0,6 | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Ibex 35** | 53% | -24% | -101% | -178% | -254% | 20% | 20% | 20% | 20% | 20% | 16% | 0% | -16% | -38% | -40% | -13% | -39% | -60% | -60% | -60% |
| **Commodities** | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 20% | 20% | 20% | 20% | 20% | 40% | 40% | 40% | 40% | 21% | 60% | 60% | 37% | 6% | -16% |
| **Real Estate** | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 11% | 0% | -6% | -11% | -17% | -40% | -40% | -40% | -40% | -40% | -60% | -60% | -60% | -60% | -60% |
| **Small Cap** | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 20% | 20% | 20% | 20% | 20% | 40% | 40% | 40% | 40% | 40% | 53% | 60% | 60% | 60% | 60% |
| **Sovereign bonds** | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | -11% | 0% | 6% | 11% | 17% | -36% | -20% | -4% | 18% | 39% | -60% | -41% | 3% | 34% | 56% |
| **Corporate bonds** | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 20% | 20% | 20% | 20% | 20% | 40% | 40% | 40% | 40% | 40% | 60% | 60% | 60% | 60% | 60% |
| **Itraxx** | 47% | 124% | 201% | 278% | 354% | 20% | 20% | 20% | 20% | 20% | 40% | 40% | 40% | 40% | 40% | 60% | 60% | 60% | 60% | 60% |
| **Desviación absoluta x peso del activo** | 2,13 | 0,03 | -2,06 | -4,16 | -6,25 | 1,73 | 2,25 | 2,51 | 2,77 | 3,04 | -0,90 | -0,08 | 0,73 | 1,82 | 3,00 | -3,34 | -2,38 | -0,03 | 1,63 | 2,88 |
| **Desv. típica** | 0,03 | 0,02 | 0,06 | 0,10 | 0,14 | 0,04 | 0,03 | 0,02 | 0,01 | 0,01 | 0,06 | 0,04 | 0,01 | 0,03 | 0,06 | 0,08 | 0,05 | 0,01 | 0,06 | 0,10 |
| **Varianza** | 0,07% | 0,04% | 0,35% | 1,03% | 2,06% | 0,20% | 0,07% | 0,04% | 0,02% | 0,02% | 0,40% | 0,12% | 0,00% | 0,08% | 0,36% | 0,68% | 0,25% | 0,01% | 0,37% | 0,91% |
| **Rentabilidad** | 0,00% | 0,50% | 1,00% | 1,50% | 2,00% | 0,00% | 0,20% | 0,30% | 0,40% | 0,50% | 0,00% | 0,30% | 0,60% | 1,00% | 1,30% | 0,00% | 0,40% | 1,10% | 1,50% | 1,80% |

Tabla 3: Selección de carteras eficientes según el modelo de Konno y Yamazaki en función del peso máximo por activo.

Fuente: Elaboración propia

# Anexo 3

| Activos | Rentabilidad media del periodo 2006 - 2012 | Rentabilidad media del periodo 2012 - 2015 |
|---|---|---|
| **Ibex 35** | -0,31% | 0,83% |
| **Materias Primas** | 0,22% | -1,33% |
| **Mercado Inmobiliario** | -0,24% | 1,18% |
| **Pequeña capitalización** | 0,36% | 1,70% |
| **Itraxx** | 1,55% | -0,80% |
| **Renta Fija Soberana** | 0,36% | 0,30% |
| **Renta Fija Corporativa** | 0,34% | 0,49% |

Tabla 4: Rentabilidades medias de los activos y periodos analizados
Fuente: Elaboración propia

| | *Ibex 35* | *Materias Primas* | *Mercado Inmobiliario* | *Pequeña Capitalización* | *Itraxx* | *Renta Fija Soberana* | *Renta Fija Corporativa* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ibex 35 | 0,00274 | 0,00111 | 0,00251 | 0,00268 | -0,00508 | 0,00032 | -0,00009 |
| Materias Primas | 0,00111 | 0,00154 | 0,00135 | 0,00151 | -0,00232 | 0,00017 | -0,00016 |
| Mercado Inmobiliario | 0,00251 | 0,00135 | 0,00261 | 0,00313 | -0,00487 | 0,00039 | -0,00006 |
| Pequeña Capitalización | 0,00268 | 0,00151 | 0,00313 | 0,00203 | -0,00523 | 0,00040 | -0,00014 |
| Itraxx | -0,00508 | -0,00232 | -0,00487 | -0,00523 | 0,01655 | -0,00051 | 0,00033 |
| Renta Fija Soberana | 0,00032 | 0,00017 | 0,00039 | 0,00040 | -0,00051 | 0,00014 | 0,00004 |
| Renta Fija Corporativa | -0,00009 | -0,00016 | -0,00006 | -0,00014 | 0,00033 | 0,00004 | 0,00010 |

Tabla 5: Matriz de covarianzas
Fuente: Elaboración propia

| | *Ibex 35* | *Materias Primas* | *Mercado Inmobiliario* | *Pequeña Capitalización* | *Itraxx* | *Renta Fija Soberana* | *Renta Fija Corporativa* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ibex 35 | 1,00000 | 0,44776 | 0,76241 | 0,86864 | -0,74984 | 0,52454 | -0,17190 |
| Materias Primas | 0,44776 | 1,00000 | 0,45148 | 0,54146 | -0,37863 | 0,31261 | -0,33252 |
| Mercado Inmobiliario | 0,76241 | 0,45148 | 1,00000 | 0,84267 | -0,59815 | 0,52033 | -0,09314 |
| Pequeña Capitalización | 0,86864 | 0,54146 | 0,84267 | 1,00000 | -0,68591 | 0,57616 | -0,23826 |
| Itraxx | -0,74984 | -0,37863 | -0,59815 | -0,68591 | 1,00000 | -0,33639 | 0,25698 |
| Renta Fija Soberana | 0,52454 | 0,31261 | 0,52033 | 0,57616 | -0,33639 | 1,00000 | 0,34481 |
| Renta Fija Corporativa | -0,17190 | -0,33252 | -0,09314 | -0,23826 | 0,25698 | 0,34481 | 1,00000 |

Tabla 6: Matriz de correlaciones
Fuente: Elaboración propia

# Anexo 4

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Ibex 35** | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% |
| **Materias Primas** | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% |
| **Mercado Inmobiliario** | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% |
| **Pequeña Capitalización** | 101% | 203% | 551% | 827% | 1102% | 1420% | 2029% |
| **Itraxx** | 29% | 58% | 171% | 257% | 343% | 405% | 578% |
| **Renta Fija Soberana** | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% | 0% |
| **Renta Fija Corporativa** | 26% | 52% | 312% | 467% | 623% | 366% | 523% |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Desviación típica** | 0,02 | 0,04 | 0,11 | 0,16 | 0,22 | 0,29 | 0,41 |
| **Varianza** | 0,04% | 0,17% | 1,20% | 2,69% | 4,79% | 8,13% | 16,59% |
| **Rentabilidad** | 0,50% | 1,00% | 2,00% | 3,00% | 4,00% | 7,00% | 10,00% |

Tabla 8: Carteras formadas por el modelo de Black & Litterman
Fuente: Elaboración propia