REVISTA DE MÉTODOS CUANTITATIVOS PARA LA ECONOMÍA Y LA EMPRESA (15). Páginas 151–167.
Junio de 2013. ISSN: 1886-516X. D.L: SE-2927-06.
URL: http://www.upo.es/RevMetCuant/art.php?id=74

La prima de riesgo recargada en un seguro de rentas: tarificación mediante el uso de una medida de riesgo coherente

Hernández Solís, Montserrat
Dpto. de Economía de la Empresa y Contabilidad, UNED
Correo electrónico: montserrath@cee.uned.es
Lozano Colomer, Cristina
Dpto. de Métodos Cuantitativos, Universidad Pontificia de Comillas (ICADE)
Correo electrónico: clozano@upcomillas.es
Vilar Zanón, José Luis
Dpto. de Economía Financiera y Actuarial, Universidad Complutense de Madrid
Correo electrónico: jlvilarz@ccee.ucm.es

RESUMEN

En este estudio se obtiene un principio de cálculo de primas, para el ramo de vida, basado en una medida de riesgo coherente, la esperanza distorsionada transformada proporcional del tanto instantáneo (Wang, 1995), que justifique la recomendación de Solvencia II de reducir, para un seguro de rentas, el efecto del tanto instantáneo de mortalidad y conseguir de este modo una prima recargada implícitamente para hacer frente a las desviaciones desfavorables de la siniestralidad real. La modalidad de seguro seleccionada para el estudio ha sido el de rentas, seguro con cobertura de supervivencia, calculándose la prima única de riesgo para las cuatro leyes de supervivencia más aceptadas, como son la primera y segunda de Dormoy, la ley de Gomperzt y la ley de Makeham. La selección de estas leyes ha sido por ser las que mejor se ajustan al modelo mediante el empleo de las tablas de mortalidad elaboradas por Pérez (2000). En los seguros de vida con cobertura de supervivencia, una experiencia de siniestralidad negativa para la compañía significa que los asegurados son más longevos de lo esperado. Así, cuando se calculan las primas, es una práctica común añadir un margen de seguridad implícito, en forma de porcentaje, a las probabilidades de fallecimiento q_x, o bien emplear una tabla de mortalidad cuyas probabilidades de fallecimiento sean inferiores a las del grupo humano considerado. Esto se puede interpretar como un decremento del tanto instantáneo con un múltiplo. En este artículo se demuestra que el empleo de la función de distorsión, hasta ahora empleada en el ramo de no vida y siendo la novedad su aplicación al ramo de vida asegurador, produce este mismo efecto, pero mediante el cálculo de una prima recargada de manera implícita.

Palabras clave: seguro de rentas; recargo; medida de riesgo coherente; función de distorsión.
Clasificación JEL: M20; C00.
MSC2010: 97M10; 97M30.

Artículo recibido el 27 de febrero de 2013 y aceptado el 31 de mayo de 2013.

The Risk Recharged Premium for a Survival Life Insurance: Recharged Premium through the Use of a Coherent Risk Measure

ABSTRACT

The goal of this study is to get a premium calculation principle, for the life insurance business, based on a coherent risk measure (Wang, 1995) in the form of power, called "Proportional Hazards (PH) Transforms" to justify the recommendation of Solvency II to reduce the effect of the mortality instantaneous rate and thus get an implicitly surcharged premium to deal deviations of actual claims regarding expected. Survival life insurance has been selected for this research, and the premium risk has been calculated for the four accepted laws of survival, such as the first and second Dormoy, Gomperzt law, and Makeham law. The selection of these laws has been taken because they best fit the model based on the numerical values assigned to the parameters by using mortality tables developed by Pérez (2000), Projected Table 2000 Spanish Mortality from 1950-1990. In the life insurance, coverage claims survival negative experience for the company means that the insured survive longer than expected (live longer). Thus, when calculating premiums, it is common practice to add a safety margin implied, as a percentage, the odds of death q_x, or use a mortality table whose chances of passing are lower than those of the human being taken into account. This can be interpreted as a decrease of the mortality instantaneous rate. In this paper we show that the use of the distortion power function, so far uses in the non-life branch and being the new application to the life insurance, produces the same effect, but calculating a implicitly surcharged premium.

Keywords: survival life insurance (annuities); surcharge; coherent risk measure; distortion function.
JEL classification: M20; C00.
MSC2010: 97M10; 97M30.

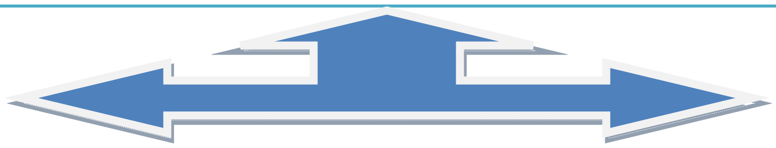
1. INTRODUCCIÓN

El riesgo asociado a sucesos aleatorios representa el factor más importante dentro del entorno asegurador. En la vida no siempre se pueden evitar los riesgos, de modo que si se llegan a producir, suelen conllevar una disminución de los ingresos. Por este motivo es preciso llevar a cabo procesos de medición del mismo y su aseguramiento, siendo ambos prioritarios para las entidades aseguradoras, así como análisis periódicos de su capacidad financiera en términos de solvencia para poder hacer frente a los riesgos. En esta idea se basa la directiva Solvencia II, cuyo objetivo es lograr una mejor defensa de los asegurados europeos a través de una correcta evaluación del riesgo, para de este modo poder reconocer las causas que pueden ocasionar pérdidas a las entidades aseguradoras, así como la correcta cuantificación del mismo.

Las cuestiones básicas en las que se sustenta Solvencia II son la fijación de los tres pilares básicos de la directiva, la especificación de los problemas de solvencia a los que se tendrán que enfrentar las entidades aseguradoras, así como el establecimiento de los requerimientos cuantitativos de capital necesarios para hacer frente a las desviaciones desfavorables de la siniestralidad. El conjunto de los informes técnicos desarrollados hasta la fecha, que son el desarrollo de Solvencia II, se denomina QIS. Éste cuenta con diferentes capítulos (QIS1, QIS2, QIS3, QIS4 y QIS5), siendo el sexto el que actualmente está en proceso de elaboración. Uno de los aspectos clave a desarrollar por Solvencia II son los tres pilares en los que se sustenta y que se muestran en la Figura 1.

Figura 1. Pilares de Solvencia II

Primer Pilar	Segundo Pilar	Tercer Pilar
Mecanismos de control y cálculo de nivel de fondos propios	Entidad supervisora	Imagen de transparencia por las entidades aseguradoras



TRIPLE OBJETIVO
Fomento y mejora de la integración del mercado único europeo de seguros
Consecución de un sector de seguros competitivo
Obtención de la convergencia y supervisión entre los supervisores

Fuente: elaboración propia.

Una entidad aseguradora no tendría problemas de solvencia para hacer frente a las prestaciones cubiertas en las pólizas ni tendría pérdidas si las desviaciones entre la siniestralidad real y la esperada fueran mínimas. El problema es que en la realidad dichas desviaciones se producen y es por esto por lo que Solvencia II, en el informe técnico QIS5, establece y fija determinados niveles de capital exigibles a las aseguradoras para el ramo de vida, así como el decremento que ha de experimentar el tanto instantáneo de mortalidad en el ramo de vida para, de este modo, evitar dichas desviaciones, en concreto para el seguro con cobertura de supervivencia. De hecho, en las compañías de seguro del ramo de vida, es una práctica común fijar un recargo de seguridad de manera implícita para protegerse del riesgo que se origina como consecuencia de dichas desviaciones, intentando de este modo proporcionar estabilidad a la empresa aseguradora.

En el informe QIS5 *Technical Specifications* (Working Document of the Commission Services, European Commission, 2010) se indica cómo ha de formularse el recargo de seguridad para el ramo de vida, en lo que se refiere a los seguros de supervivencia, cuando las probabilidades de supervivencia estimadas con la tabla de mortalidad empleada son superiores a las reales del colectivo considerado. Se origina, pues, un decremento del tanto instantáneo de mortalidad. Solvencia II recomienda un capital a la compañía aseguradora, para hacer frente a las desviaciones desfavorables que puedan surgir, que se obtenga de decrementar dicho tanto en un 20%, de un modo permanente y para todas las edades y pólizas que comprenden la cartera. Con este procedimiento, la entidad estaría garantizando los niveles de liquidez y solvencia necesarios.

Wang (1995) propone un principio de cálculo de prima recargada para seguros del ramo no vida, a partir de la medida de riesgo coherente (Artzner, 1999), la llamada esperanza distorsionada con la función de distorsión de Wang en su forma de potencia (transformada proporcional del tanto instantáneo, también llamada *Proportional Hazards Transforms* (PH)), teniendo la función de distorsión la forma $g(u) = u^{\frac{1}{\rho}}$, siendo condición necesaria para que dicha medida de riesgo sea coherente que el parámetro $\rho \geq 1$.

En este artículo se sigue la línea de trabajo abierta por Wang, pero aplicada al ramo de vida, proponiendo un principio de cálculo de prima, la esperanza distorsionada con la función de distorsión transformada proporcional del tanto instantáneo. Se demuestra que el empleo de este principio de cálculo de primas produce el mismo efecto de disminución del tanto instantáneo que utilizar una tabla de mortalidad con probabilidades de fallecimiento inferiores, para la modalidad de seguro de rentas. De esta manera, se consigue una justificación teórica, a partir de una medida de riesgo coherente, a una práctica habitual existente en el ramo de vida asegurador. El objetivo que se pretende es obtener una expresión para la prima de riesgo recargada que esté basada en la esperanza distorsionada en forma de potencia para la modalidad de seguro de rentas. Para este seguro es necesario que el valor del parámetro sea $\rho \geq 1$. Se demuestra que la medida de riesgo definida para calcular la prima verifica los axiomas de medida de riesgo coherente, por lo que este estudio supone una extensión de Wang (1995).

Solvencia II recomienda un valor del parámetro de $\rho = 1,20 > 1$, para la modalidad de seguro elegida. En este artículo se ha ampliado el campo de variación numérico de dicho parámetro para poder llevar a cabo el estudio de la tarificación en el seguro de rentas y aplicado a las cuatro leyes de supervivencia anteriormente descritas.

2. MEDIDAS DE RIESGO

En toda empresa aseguradora es necesario cuantificar el riesgo y llevar a cabo su posterior aseguramiento, tal como se ha comentado con anterioridad. Por este motivo, se hace imprescindible poder analizar los riesgos que afectan a las aseguradoras en el ramo de vida, con el fin de realizar una buena gestión de los mismos, ya que el estudio de los riesgos no se limita a cuantificarlos (medirlos) sino también a logar una óptima cobertura protectora frente a los mismos e intentar, de este modo, prevenirlos. En este artículo se va a centrar la atención en el riesgo biométrico de longevidad, siendo el riesgo biométrico el que se estudia a partir de las desviaciones que surgen entre las tasas de mortalidad que se asumen (en base a las hipótesis actuariales) y las tasas de mortalidad reales. Según Vegas (2000), el riesgo por longevidad, a partir de una tabla actuarial correctamente estimada, se define como el riesgo asociado a que el valor actual actuarial de las prestaciones a favor de una cabeza sea inferior al valor actual necesario para poder pagar dichas prestaciones, definición que es aplicable a todas la modalidades de seguros de vida con cobertura de supervivencia, así como a la constitución de los planes de pensiones. Este riesgo afecta a las pólizas en las que está contratada la cobertura de supervivencia (en forma de capital o en forma de renta, ya sea vitalicia o temporal).

Ante la situación demográfica actual, lo que cabe preguntarse es cómo pueden las personas protegerse del riesgo de ser cada vez más longevas. La respuesta está en la contratación de pólizas de vida con cobertura de supervivencia con prestación en forma de rentas, los llamados “seguros de rentas”. Estos seguros se caracterizan por la protección que ofrecen frente al riesgo de longevidad, ya que al contratar un seguro de este tipo el asegurado recibirá de manera periódica una serie de ingresos, bien sea vitalicios o temporales, que le protegerán ante el caso de que se quede sin ahorros. El inicio de la cobertura de un seguro de rentas puede ser inmediato (seguro de rentas inmediato) o puede estar diferido en el tiempo (un asegurado que contrate esta cobertura con 50 años pero no comiencen a devengarse los flujos hasta que no se alcance los 65 años). El riesgo de longevidad individualmente considerado es compensatorio: los asegurados con cobertura de supervivencia en forma de renta que son menos longevos financian a los que lo son más.

Tabla 1. Riesgos biométricos actuariales

RIESGO DE MORTALIDAD	RIESGO LONGEVIDAD	RIESGO INCAPACIDAD
Se trata de un riesgo que consiste en el aumento de la mortalidad de la cartera de la aseguradora por las pólizas contratadas.	El riesgo de longevidad es el que se origina por una reducción en la tasa de mortalidad. Comprende el aumento paulatino de la esperanza de vida de las personas, debido a una mejora en la calidad de vida. A este proceso se le conoce con el nombre de envejecimiento poblacional (Sandell, 2003). Las personas cada vez viven más años y se siguen jubilando a la misma edad, luego se está produciendo un aumento en el período en el que las personas están jubiladas.	Se trata de un riesgo producido por el efecto de algún tipo de incapacidad, temporal o permanente, en la figura del asegurado.

Fuente: elaboración propia.

La gestión del riesgo, orientado al ramo de vida, se considera que es la coordinación perfecta entre el riesgo asegurable de sobrevivir y una reducción correcta de los costes del seguro. Dicha gestión del riesgo es un objetivo a alcanzar por todas las empresas, ya que tal como dice el Teorema de Modigliani-Miller (1958), una gestión eficiente del riesgo puede tener efectos positivos, tales como una reducción de los impuestos, un mejor acceso al mercado de capitales, un incremento del valor de la empresa en caso de quiebra, así como una mejora a la hora de obtener inversiones óptimas.

Para poder gestionar adecuadamente los riesgos, es necesario cuantificarlos a través de un instrumento matemático, la llamada medida de riesgo. Para poder aplicar dicha medida es preciso que se produzca la supervivencia del asegurado (el daño económico potencialmente medible), así como la medición de la probabilidad de que acaezca ese evento de supervivencia. Una medida de riesgo se define como un funcional $M : X \to [0, \infty)$ que hace corresponder a un riesgo X un número real no negativo $M(X)$ (que puede ser infinito), el cual representa la cantidad adicional que se debe añadir a X (pérdida) para hacerlo aceptable (Gómez y Sarabia, 2008). Cuantificar el riesgo a través de este funcional (función de funciones) permite, entre otras bondades, determinar la prima del seguro (Tse, 2009), siendo éste el objetivo del presente artículo.

La medición del riesgo ha originado múltiples publicaciones (Artzner, 1999; Denuit *et al*., 2005; Landsman y Sherris, 2001; Wang, 2000). Una medida de riesgo ha de permitir llevar a cabo una asignación correcta a la variable aleatoria (pérdida) del número real no negativo que es la prima, y evitar así inconsistencias en dicha asignación. De este modo la medida de riesgo proporcionará una gestión óptima y eficiente del mismo. Una variedad de autores (Gerber, 1979; Heilmann, 1989; Hurlimann, 1994; Young, 2004) han seleccionado una serie de propiedades que debe de satisfacer una medida de riesgo (ver la Tabla 2), a pesar de la inexistencia de un criterio unificado sobre que propiedades son las que debe de cumplir dicha medida. No obstante, se van a enunciar las propiedades más comúnmente aceptadas (Artzner *et al*., 1999) para luego establecer las que se han de cumplir para que la medida de riesgo sea considerada coherente. Quedan reflejadas en la Tabla 3.

Tabla 2. Propiedades de las medidas de riesgo

PROPIEDADES DE LAS MEDIDAS DE RIESGO	
Margen seguridad acotado por la esperanza	$M(X) \geq E(X)$
Riesgo constante	$M(c) = c \quad c \geq 0$
No exceso	$M(X) \leq Max.(X)$
Monotonía	$X_1(\omega), X_2(\omega), \omega \in \Omega$ tal que $X_1(\omega) \leq X_2(\omega)$ entonces $M(X_1) \leq M(X_2)$.
Invarianza por traslaciones	$M(X + a) = M(X) + a$
Homogeneidad positiva	$M(aX) = aM(X) \quad a \geq 0$
Aditividad de riesgos comonótonos	$M(X_1 + X_2) = M(X_1) + M(X_2)$
Subaditividad	$M(X_1 + X_2) \leq M(X_1) + M(X_2)$

Fuente: elaboración propia.

Por criterio de coherencia se entiende aquél que proporciona contribuciones al riesgo económicamente racionales (Tasche, 2000). Y como lo que hace una medida de riesgo es asignar a una variable aleatoria pérdida la prima, para evitar inconsistencias en dicha asignación y que dicha medida de riesgo lleve a cabo una gestión óptima y eficiente del mismo, es preciso que cumpla cuatro propiedades, de las anteriormente enumeradas.

Tabla 3. Medidas de riesgo coherentes

MEDIDAS DE RIESGO COHERENTES
Homogeneidad positiva
Invarianza a las traslaciones
Monotonía
Subadtividad

Fuente: elaboración propia.

Estas cuatro propiedades de la Tabla 3 son aceptadas de manera universal en el ámbito financiero, aunque no ocurre lo mismo en el ámbito actuarial (Heras, 2010). En particular, la no aceptación se produce con la propiedad de homogeneidad positiva y la de subaditividad. Con respecto a la primera de ellas, los actuarios aceptan sin restricciones que la medida de riesgo se ha de mantener inalterable al cambiar, por ejemplo, la unidad monetaria. Pero cuando se argumenta que un incremento en el tamaño de la cartera va a originar un incremento directamente proporcional en la medida de riesgo, esto es discutido. Así, si se tiene en cuenta una medida de riesgo para medir, por ejemplo el riesgo de liquidez en una entidad aseguradora, muchos actuarios sostienen que un incremento en el tamaño de la cartera puede ocasionar un incremento más que proporcional en el riesgo de liquidez y, por lo tanto, hacer que las pérdidas de la cartera sean muy elevadas y la compañía no disponga de suficiente dinero para hacer frente a dichas pérdidas. En este caso se verificaría que $M(aX) > aM(X) \quad a \geq 0$. En lo que se refiere a la propiedad de subaditividad, determinados autores la defienden sin restricciones (Wang *et al.*, 1997). En cambio, otros autores (Denuit *et al.*, 2005) establecen que cuando en una cartera se mezclan riesgos que dependen positivamente los unos de los otros, el riesgo global es mayor que la suma de los riesgos individualmente considerados. Estos autores aprueban esta propiedad de subaditividad aplicada al ámbito actuarial para riesgos que no presentan una dependencia lineal, aprueban la de aditividad para riesgos independientes así como aprueban la de superaditividad para los riesgos positivamente dependientes en general y comonótonos en particular.

Existen dos tipos de medidas de riesgo, reflejados en la Tabla 4: las que se basan en los principios de cálculo de primas así como las que se basan en el capital. En este artículo se centra la atención en el principio de la función de distorsión de Wang en forma de potencia. Todo principio de cálculo de primas es una medida de riesgo, pero no viceversa. Por definición, un principio de cálculo de primas es una función H(X) que asigna a un riesgo X un número real. Dicho número real es la prima. En la práctica el principio de cálculo de prima dependerá de la función de distribución F(X) que sigue la variable aleatoria X, de modo que en vez de hablar de una función H(X) se debe de hablar de funcional H[F(X)] (Gerber, 1979). Un principio de cálculo de prima es una medida de riesgo, dado que permite obtener una prima que es la cantidad de dinero mínima que una compañía de seguros debe de cobrar a sus tomadores para que a dicha compañía le interese firmar el contrato de seguro. Por lo tanto, los principios de cálculo de primas son ejemplos claros de medidas de riesgo. La característica clara de éstos es que el número real que resulta de su aplicación a la variable aleatoria del riesgo es el candidato para ser la prima asociada a la cobertura de la prestación de dicho riesgo aleatorio.

Tabla 4. Tipos de medidas de riesgo

Basadas en los principios de cálculo de primas	Tipo de prima que proporciona	Verifica 4 axiomas coherencia
Principio de Prima neta	No proporciona prima recargada	SÍ
Principio del Valor esperado	Prima recargada de modo explícito	NO
Principio de la Varianza	Prima recargada de modo explícito	NO
Principio de la Desviación típica	Prima recargada de modo explícito	NO
Principio Exponencial	Prima recargada de modo implícito	NO
Principio de Prima Esscher	Prima recargada de modo implícito	NO
Principio de la Función Distorsión Wang	Prima recargada de modo implícito	SÍ

Basadas en el capital	Verifica 4 axiomas coherencia
VAR	NO
TVAR	SÍ

Fuente: elaboración propia.

De los principios de cálculo de primas que se muestran en la Tabla 4, el de la prima neta es el que se aplica en el ramo de vida en la actualidad. El inconveniente que plantea es que no proporciona una prima recargada, ni implícita ni explícitamente, a pesar de ser medida de riesgo coherente. Es por esto por lo que las entidades han de modificar las probabilidades de supervivencia para obtener las primas recargadas y hacer frente de este modo a las desviaciones de la siniestralidad real. El resto de los principios, a excepción del último, no constituyen medida de riesgo coherente, a pesar de proporcionar primas recargadas, ya sean implícitas o explícitas y tengan su habitual aplicación en el ramo de los seguros no vida. El último de los principios, el de la función de distorsión de Wang, proporciona una prima de riesgo recargada de manera implícita y además constituye medida de riesgo coherente. Se aplica en el ramo de los seguros generales y la novedad de este artículo es su aplicación en el ramo de vida asegurador, en concreto a un seguro de rentas.

3. FUNCIÓN DE DISTORSIÓN DE WANG: TRANSFORMADA PROPORCIONAL DEL TANTO INSTANTÁNEO

3.1 Función de distorsión

Dado un riesgo, representado por la variable aleatoria pérdida $X \geq 0$, con función de distribución y función de supervivencia respectivamente:

$$F(x) = P_r(X \leq x) \qquad (1)$$
$$S(x) = 1 - F(x)$$

la pérdida esperada de dicha variable, expresada a partir de la función de supervivencia, tiene la expresión:

$$E(X) = \int_0^{\infty} x f(x) dx = \int_0^{\infty} S_X(x) dx \qquad (2)$$

Se trata ahora de obtener una prima recargada más ajustada al riesgo basada en la denominada función de distorsión. Dada una función g no decreciente (Wang, 1995), definida por $g:[0,1]\rightarrow[0,1]$, con $g(0)=0$ y $g(1)=1$, llamada función de distorsión, se define la prima de riesgo ajustada a la medida de riesgo esperanza distorsionada como: $E_g[X]=H(X)=\int_0^{\infty} g(S_X(x))\,dx$, para un riesgo X con función de supervivencia $S_X(x)$. A esta función de supervivencia se la conoce como función de supervivencia ajustada al riesgo (Wang, 1995). Por este motivo, esta función g no puede ser cualquier función, dado que ha de verificar las propiedades necesarias para que $g(S_X(x))$ sea considerada función de supervivencia, ya que lo que hace dicha función g es transformar la función de supervivencia $S_X(x)$. Dichas propiedades son las siguientes (Wang, 1996), supuesto que estas funciones g y $S_X(x)$ son derivables:

1. La función $g(S_X(x))$ es una función no creciente con respecto a x. Para ello, siendo g y S derivables, su primera derivada ha de ser menor o igual que 0.

$$\frac{dg(S_X(x))}{dx}=g'(S_X(x))\,S'_X(x)\le 0 \tag{3}$$

2. La función $g(S_X(x))$ está comprendida entre 0 y 1 cuando $x\in[0;+\infty]$.

- $S_X(0)=1$, luego $g(S_X(0))=g(1)=1$.

- $\lim_{x\to\infty} S_X(x)=0$, luego $g\left(\lim_{x\to\infty} S_X(x)\right)=g(0)=0$.

3. Siendo g y $S_X(x)$ funciones continuas, se puede considerar a la función de supervivencia ajustada al riesgo como la función de supervivencia de otra variable aleatoria denotada por Y, con la siguiente función de densidad:

- $f_Y(x)=f_{X'}(x)=-\frac{dg(S_X(x))}{dx}=-g'(S_X(x))S'_X(x)=g'(S_X(x))f_X(x)$.

Y se tiene que $g'(S_X(x))$ es una función de ponderación de la función de densidad $f_X(x)$.

Además, si $g(x)$ es una función cóncava: $\frac{dg'(S_X(x))}{dx}=g''(S_X(x))\,S'_X(x)\ge 0$.

La función de distorsión permite definir una nueva variable aleatoria Y, ya que la función $g(S_X(x))$ tiene las propiedades de función de supervivencia explicadas anteriormente.

3.2 Transformada proporcional del tanto instantáneo

Este principio de cálculo de primas tiene una forma de función de distorsión con la siguiente expresión (Tse, 2009):

$$g(u) = u^{\frac{1}{\rho}} \quad \rho > 0 \tag{4}$$

$H(X) = \int_0^{\infty} g\left(S_X(x)\right)dx = \int_0^{\infty} \left(S_X(x)\right)^{\frac{1}{\rho}} dx$. Esta forma de función de distorsión es la que se emplea en esta investigación. Esta expresión es a nivel general, definiéndose una nueva variable aleatoria Y, a partir del riesgo inicial denotado por X, con función de densidad y prima ajustada al riesgo dadas por:

$$\begin{aligned} S_Y(x) &= \left(S_X(x)\right)^{\frac{1}{\rho}} \quad \rho > 0 \\ \Pi_\rho(X) &= E(Y) = \int_0^{\infty} \left(S_X(x)\right)^{\frac{1}{\rho}} dx \end{aligned} \tag{5}$$

De la definición establecida en la ecuación (5) se extraen las siguientes consecuencias:

1. La $E(Y)$ es una función creciente con respecto a ρ.

   $$\frac{dE(Y)}{d\rho} = -\frac{1}{\rho^2}\int_0^{\infty}\left(S_X(x)^{\frac{1}{\rho}} \operatorname{Log}\left(S_X(x)\right)\right)dx > 0.$$

   Dado que la expresión $\operatorname{Log}\left(S_X(x)\right) < 0$, a mayor ρ mayor prima ajustada al riesgo, justificándose de este modo la interpretación de dicho parámetro como un índice de aversión al riesgo, tal como indica Tse (2009).

2. Los tantos instantáneos de las variables aleatorias X e Y son proporcionales. En seguros no vida (Wang, 1995), dada la variable aleatoria no negativa X con función de distribución $F_X(x)$ y función de supervivencia $S_X(x)$, dado que:

   $$S_Y(t) = S(t)^{\frac{1}{\rho}} = [e^{-\int_0^t \mu_x(u)du}]^{\frac{1}{\rho}} = e^{-\int_0^t \frac{1}{\rho}\mu_x(u)du}$$

   Por tanto, se verifica que:

$$\mu_Y(t) = \frac{1}{\rho}\mu_x(t) \quad \rho > 0 \quad t \geq 0 \tag{6}$$

Los tantos de las variables X e Y son proporcionales, y es por esto por lo que la nueva variable aleatoria Y se denomina transformada proporcional del tanto instantáneo de la variable X, con parámetro ρ (Wang, 1996). En general, esta transformada solo necesita que el parámetro sea mayor que cero, pero en el contexto de los seguros generales se considera que el parámetro sea $\rho \geq 1$, para así proporcionar más peso a la cola de la distribución del riesgo.

3.3 Cálculo de la prima neta y la prima recargada implícitamente para la modalidad de seguro de rentas, aplicando las cuatro leyes de supervivencia

Se procede a calcular la prima neta y la prima recargada de manera implícita para esta modalidad de seguro con cobertura de supervivencia, en tiempo continuo, con capital asegurado unitario, para una cabeza de edad x. En este caso, el riesgo está representado por la variable aleatoria T(x), vida residual o tiempo de vida desde la contratación de la póliza hasta el fallecimiento del asegurado, siendo la edad de contratación la edad actuarial x. Las premisas de partida son que se abona una u.m. mientras el asegurado esté con vida, el tipo de interés técnico es i y la variable aleatoria vida residual T(x) tiene una función de distribución denominada $G_x(t)$ y una función de supervivencia $S_x(t)$. Aplicando el principio de equivalencia actuarial para obtener la prima pura única (neta), se obtiene la expresión (Bowers *et al*., 1997):

$$P = \int_0^\infty v^t \left(1 - G_x(t)\right) dt \tag{7}$$

Para adaptar este principio de equivalencia actuarial al cálculo de primas basado en la función de distorsión, se expresa esta integral en función de $S_{x}(t)$:

$$P = \int_0^\infty v^t (1 - G_x(t)) dt = \int_0^\infty v^t \, {}_t p_x \, dt = \int_0^\infty v^t S_x(t) dt \tag{8}$$

Haciendo el cambio de variable:

$$v^t = z;$$
$$t \, \mathrm{Ln}\, v = \mathrm{Ln}\, z$$
$$t = \frac{\mathrm{Ln}\, z}{\mathrm{Ln}\, v}$$

Si $t = 0$, entonces $v^0 = 1$. La variable z tomará el valor 1. Si $\lim_{t \to \infty} v^t = 0$, la variable z tomará el valor 0 puesto que el factor v es menor que la unidad. Por tanto, se tiene:

$$P = \int_0^\infty v^t \, dS_x(t) = \int_1^0 z \, dS_x\left(\frac{\mathrm{Ln}\, z}{\mathrm{Ln}\, v}\right) = -\int_0^1 z \, dS_x\left(\frac{\mathrm{Ln}\, z}{\mathrm{Ln}\, v}\right)$$

Integrando por partes:

$$z = u \quad dz = du$$
$$dS_x\left(\frac{\mathrm{Ln}\, z}{\mathrm{Ln}\, v}\right) = dv \quad v = S_x\left(\frac{\mathrm{Ln}\, z}{\mathrm{Ln}\, v}\right)$$

Se llega a la expresión de la prima única de riesgo en términos de la función de supervivencia de la variable aleatoria vida residual:

$$P = -\frac{1}{\mathrm{Lnv}} \int_0^1 S_x\left(\frac{\mathrm{Lnz}}{\mathrm{Lnv}}\right) dz \tag{9}$$

Lo que se trata de hacer a continuación es obtener una prima recargada transformando la función de supervivencia por medio de una función de distorsión en forma de potencia:

$$P_{rec} = \int_0^\infty g\left(S_X(x)\right)dx = \int_0^\infty g\left(S_X(x)\right)^{\frac{1}{\rho}} dx$$

$$P_{rec} = -\frac{1}{Lnv}\int_0^1 \left(S_x\left(\frac{Lnz}{Lnv}\right)\right)^{\frac{1}{\rho}} dz, \quad \rho \geq 1 \qquad (10)$$

Para que la prima recargada sea mayor que la prima pura, el exponente deberá ser $\frac{1}{\rho} \leq 1 \Rightarrow \rho \geq 1$.

En un seguro con cobertura de supervivencia, a la compañía aseguradora le interesa que el riesgo de longevidad del asegurado sea lo más bajo posible, para así no tener que hacer frente a la cobertura económica de la prestación cubierta en la póliza. Luego interesa que el valor del tanto instantáneo de mortalidad sea lo más elevado posible. Si se considera un tanto menor se recarga la prima ($\rho > 1$), luego la prima recargada será mayor, puesto que la compañía cobrará más dinero a los asegurados al presentar estos un tanto instantáneo de mortalidad inferior. De este modo, la función de distorsión da más peso a la cola de la variable vida residual, obteniéndose a partir de ella una prima recargada. Al ser el parámetro $\rho \geq 1$, esta esperanza distorsionada cumple las propiedades de una medida de riesgo coherente (Wang, 1995), inclusive la de subaditividad[1].

La prima recargada obtenida en (10) coincide con la prima pura de otra variable Y, con el mismo modelo de supervivencia que el de la variable inicial X, pero con un tanto instantáneo de mortalidad proporcional al tanto instantáneo de dicha variable X. Demostración de esta afirmación:

Se parte de la expresión siguiente:

$$P_{rec} = -\frac{1}{Lnv}\int_0^1 \left(S_x\left(\frac{Lnz}{Lnv}\right)\right)^{\frac{1}{\rho}} dz$$

Llamando $r = \frac{1}{\rho}$, siendo v^t=z e integrando por partes:

$$P_{rec} = -\frac{1}{Lnv}\int_\infty^0 \left(S_X(t)\right)^{\frac{1}{\rho}} v^t Lnv\, dt = \int_0^\infty v^t \left(S_X(t)\right)^{\frac{1}{\rho}} dt \qquad (11)$$

Si se llama $S_Y(t) = \left(S_X(t)\right)^{\frac{1}{\rho}}$, entonces la expresión final de la prima recargada es:

$$P_{rec} = \int_0^\infty v^t \left(S_Y(t)\right) dt \qquad (12)$$

La nueva expresión de prima obtenida se corresponde a la prima única de un seguro de la misma modalidad (seguro de vida entera) pero para una nueva variable aleatoria llamada Y, cuya función de supervivencia tiene la expresión $S_Y(t) = \left(S_X(t)\right)^{\frac{1}{\rho}}$.

La expresión del tanto instantáneo de la variable Y es la siguiente:

[1] La propiedad de subaditividad ha sido demostrada por Wang mediante el método de la inducción matemática.

$$\mu_Y(t) = -\frac{S'_Y(t)}{S_Y(t)} = -\frac{\frac{1}{\rho}S'_X(t)\left(S_X(t)\right)^{\frac{1}{\rho}-1}}{\left(S_X(t)\right)^{\frac{1}{\rho}}} = -\frac{1}{\rho}\frac{S'_X(t)}{S_X(t)} = \frac{1}{\rho}\mu_X(t) \qquad (13)$$

siendo $\mu_X(t)$ el tanto instantáneo de la variable inicial X. Por tanto, se llega al final de la demostración concluyendo que la prima recargada obtenida a partir de la medida de riesgo esperanza distorsionada coincide con la prima pura obtenida para la misma ley de supervivencia, pero con un tanto proporcional, con factor de proporcionalidad $\frac{1}{\rho}$.

En la Tabla 5 se muestran las primas únicas de riesgo netas y recargadas calculadas para las cuatro leyes de supervivencia, mediante el empleo de la función de distorsión de Wang en forma de potencia. El desarrollo matemático completo se encuentra en Hernández (2013).

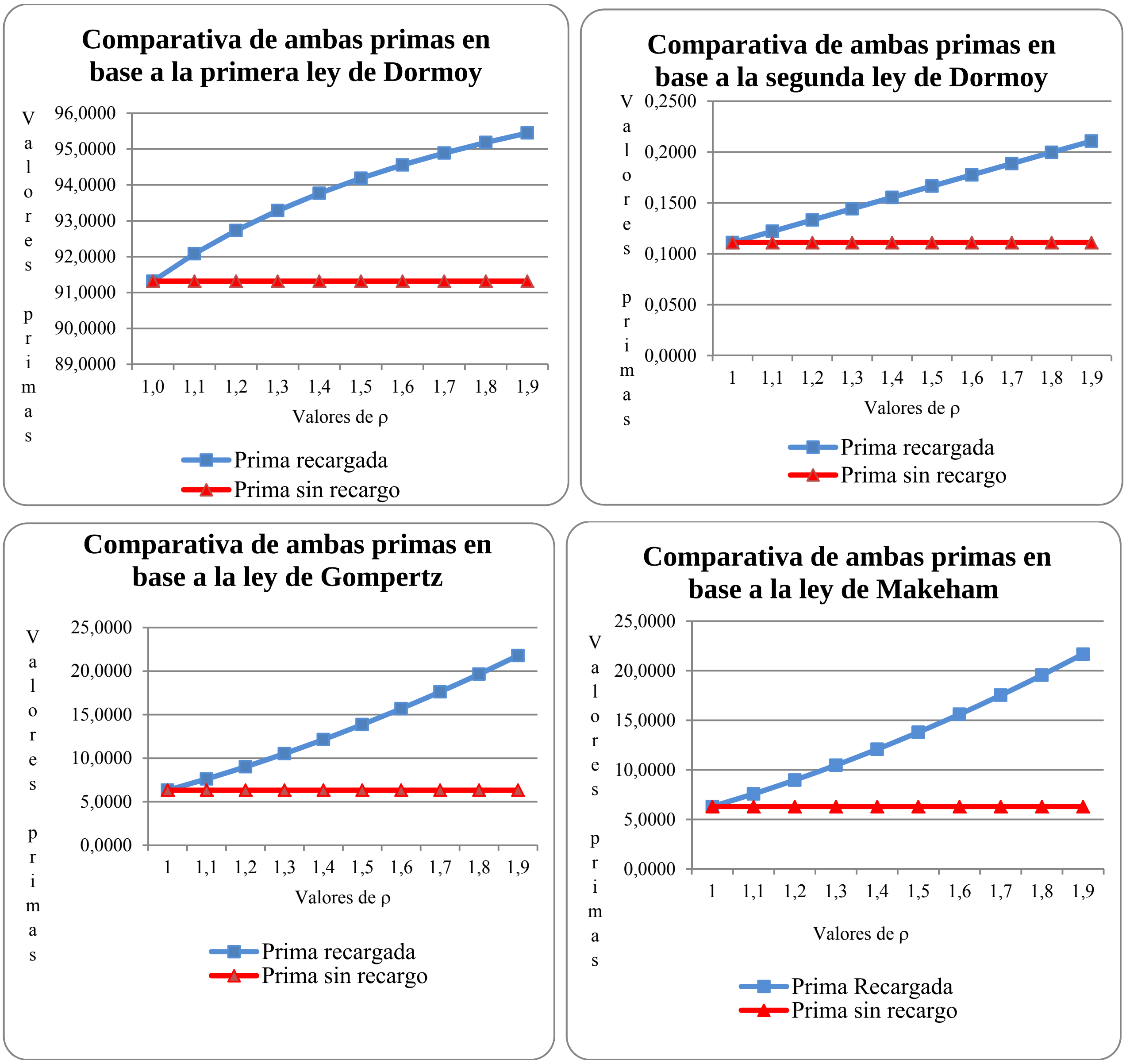
Tabla 5. Primas únicas de riesgo netas y recargadas

Leyes de supervivencia	Prima neta	Prima única riesgo recargada
Primera ley de Dormoy	$P = -\frac{1}{LnS + Lnv}$	$P_{rec} = \frac{-1}{LnS^{\frac{1}{\rho}} + Lnv}$
Segunda ley de Dormoy	$P = \frac{-1}{LnS_1 + (2x+2)LnS_2 + Lnv}$	$P_{rec} = \frac{-1}{LnS_1^{\frac{1}{\rho}} + Lnv + LnS_2^{2\frac{1}{\rho}(x+1)}}$
Ley de Gompertz	$P = \frac{-1}{g^{C^x}\left(C^{x+1}Lng + Lnv\right)}$	$P_{rec} = \frac{-1}{g^{C^x\frac{1}{\rho}}\left(C^{x+1}\frac{1}{\rho}Lng + Lnv\right)}$
Primera ley de Makeham	$P = \frac{-1}{g^{C^x}\left(LnS + C^{x+1}Lng + Lnv\right)}$	$P_{rec} = \frac{-1}{g^{C^x\frac{1}{\rho}}\left(\frac{1}{\rho}LnS + C^{x+1}\frac{1}{\rho}Lng + Lnv\right)}$

Fuente: elaboración propia. Esta Tabla relaciona las primas únicas de riesgo netas y recargadas implícitamente, a través de la función de distorsión de Wang en forma de potencia, con cada una de las leyes de supervivencia.

Con el objetivo de mostrar gráficamente cómo evoluciona la prima de riesgo recargada mediante esta medida de riesgo coherente, la transformada proporcional del tanto instantáneo, y de este modo proporcionar una justificación teórica a la práctica habitual que llevan a cabo las entidades aseguradoras de modificar las probabilidades de supervivencia y evitar así las desviaciones desfavorables de la siniestralidad real con respecto a la esperada, se detallan unos gráficos para los valores que toma el parámetro $\rho \geq 1$. Se ha considerado la recomendación realizada por Solvencia II en el documento QIS5, donde se indica que el valor del parámetro se recomienda sea de 1,20 para esta modalidad de seguro. Para este seguro con cobertura de supervivencia se han tomado valores del parámetro ρ que oscilan desde 1 hasta 1,9, con incrementos de valor 0,1. Los valores numéricos asignados a los parámetros de las cuatro leyes de supervivencia se han tomado de las tablas de mortalidad empleadas (Prieto, 2000), por ser éstas las que mejor se ajustan al modelo con el que se está trabajando en el artículo, que es el de la función de distorsión de Wang en forma de potencia, la llamada transformada proporcional del tanto instantáneo.

Figura 2. Evolución de la prima neta y la prima de riesgo recargada



Fuente: elaboración propia. En los gráficos se observa el impacto del recargo implícito sobre la prima única de riesgo según aumenta el parámetro ρ, en base a cada una de las cuatro leyes con las que se trabaja en el artículo. Los valores numéricos de ambas primas se han obtenido a partir de los valores asignados a los parámetros: edad actuarial 40 años, tipo interés técnico del 1%, $S_1 = 0,7$, $S_2 = 0,9$, $S = 0,999$, $g = 0,9969$ y $C = 1,1034$. Datos extraídos de las tablas de mortalidad elaboradas por Prieto Pérez (Prieto y Fernández, 2000): tabla proyectada del año 2000 de mortalidad española de 1950 a 1990.

4. CONCLUSIONES

En este artículo se refleja cómo se ha obtenido un principio de cálculo de prima para seguros de vida, basado en la función de distorsión de Wang en su forma de potencia y aplicado a la modalidad de seguro de supervivencia (rentas). El objetivo perseguido ha sido obtener un método alternativo de tarificación, diferente del principio basado en las esperanzas matemáticas, para calcular la prima única de riesgo recargada que refleje una siniestralidad superior a la esperada. Dicha prima está basada en una medida de riesgo coherente, la llamada esperanza distorsionada transformada proporcional del tanto instantáneo. El resultado obtenido permite justificar la práctica habitual que realizan las compañías aseguradoras, en el área de vida, de manipular el tanto instantáneo de mortalidad con el fin de obtener una prima recargada a través de un recargo implícito. La recomendación que realiza Solvencia II en lo que respecta al importe que tome dicho recargo se encuentra especificado en el informe técnico QIS5.

La función de distorsión de Wang en su forma de potencia es una medida de riesgo coherente. Para los valores que toma el parámetro $\rho \geq 1$, ya fue demostrado (Wang, 1995) que esta medida de riesgo es coherente, por verificar la propiedad de subaditividad, ya que el resto de las mismas solo precisan del valor del parámetro mayor que 0. De este modo se consigue obtener una prima de riesgo recargada mayor que la prima neta. Por tanto, una de las principales aportaciones de este artículo es que la función de distorsión seleccionada en este trabajo, la llamada esperanza distorsionada, es apta para tarificar en vida, haciendo lo análogo a lo que ya hizo Wang en 1995, pero aplicado a la rama de los seguros generales. Otro resultado logrado es que la prima recargada, calculada para todas y cada una de las leyes empleadas y para la modalidad de seguro elegida, con la función de distorsión de Wang en forma de potencia, es la misma a la que se obtendría (prima neta) a partir de otra variable aleatoria que sigue la misma ley de supervivencia, modificándose exclusivamente el valor de los parámetros. Esto significa que las leyes empleadas son invariantes ante el empleo de dicha función, tal como puede observarse en la Tabla 5.

Para la modalidad del seguro de rentas, la modificación que sufren los parámetros origina el mismo efecto en la probabilidad de fallecimiento en las cuatro leyes de supervivencia: dicha probabilidad disminuye, lo que hace que la prima recargada sea superior a la prima neta. Así se ha logrado el objetivo propuesto de recargar la prima única de riesgo de manera implícita, con el único efecto sobre las leyes de cambiar sus parámetros. Justamente la modificación que experimentan estos es que los nuevos parámetros son proporcionales a los parámetros de las leyes aplicadas para calcular la prima neta, siendo el factor de proporcionalidad el exponente de la función de distorsión transformada proporcional, $\frac{1}{\rho}$. Además, el efecto que produce la función de distorsión sobre las leyes de mortalidad utilizadas es que las nuevas leyes presentan un tanto instantáneo de mortalidad proporcional al de la ley original.

Al trabajar con la modalidad de seguro con cobertura de supervivencia, el exponente de la función de distorsión, que es el factor de proporcionalidad ya definido, ha de ser menor que uno, para que de este modo la medida de riesgo esperanza distorsionada sea una medida de riesgo coherente por verificarse así los axiomas de coherencia, y conseguir que el riesgo de longevidad sea mayor mediante el empleo de dicha función de distorsión. Con este parámetro ρ se justifica, a través de una medida de riesgo coherente, la práctica habitual en el ramo de vida de recargar el tanto instantáneo, y así poder hacer frente a las desviaciones desfavorables de la siniestralidad real con respecto a la esperada.

En esta modalidad de seguro, al ser el cociente $\frac{1}{\rho}$ proporcional al tanto instantáneo de mortalidad, conforme aumenta ρ disminuye la probabilidad de fallecimiento, luego esto implica un mayor riesgo para la compañía aseguradora. Es por esta razón por la que la entidad cobrará primas recargadas de manera implícita cada vez mayores ante incrementos en el valor de dicho parámetro. Por ello, la relación entre la prima única de riesgo recargada y el parámetro ρ será creciente.

REFERENCIAS

Artzner, P. (1999) "Application of coherent risk measures to capital requirements in insurance", *North American Actuarial Journal*, 3 (2), pp.11–15.

Aartzner, P.; Delbaen, F.; Eber, J.M.; Heath, D. (1999) "Coherent measures of risk", *Mathematical Finance*, 9, pp. 203–228.

Bowers, J.R.; Newton, L.; Gerber, H.; Jones, D. (1997) *Actuarial Mathematics,* The Society of Actuaries, Illinois.

Denuit, D.; Dhaene, J.; Goovaerts, M.; Kaas, R. (2005) *Actuarial Theory for Dependent risks: measures, orders and model,* John Wiley & Sons.

European Commission (2010) *Internal Market and Services DG. Insurance and pensions*, Brussels, *QIS5 Technical Specifications (Working Document of the Commission services).* Disponible en: https://www.ceiops.eu.

Gerber, H. (1979) *An introduction to mathematical risk theory*, Huebner Foundation.

Gómez, E.; Sarabia, J.M. (2008) *Teoría de la Credibilidad. Desarrollo y aplicaciones en primas de seguros y riesgos operacionales,* Fundación MAPFRE.

Heilmann, W. (1989) "Decision theoretic foundations of credibility theory", *Insurance: Mathematics & Economics,* 8, pp. 77–95.

Heras, A. (2010) "Medidas del riesgo y sus aplicaciones actuariales y financieras", *Economía Española y protección social*, II, pp. 69–103.

Hernández Solís, M. (2013) "Tarificación en seguros de vida con la medida de riesgo esperanza distorsionada", *Tesis Doctoral*, Universidad Complutense, Madrid.

Hurlimann, W. (2008) "Distortion Risk measures and Economic capital", *North American Actuarial Journal,* 8, pp. 86–95.

Landsman, Z.; Sherris, M. (2001) "Risk measures and insurance premium principles", *Insurance: Mathematics & Economics,* 29, pp. 103–115.

Modigliani, M.; Miller, M. (1958) "The cost of capital, Corporate Finance and the Theory of Investment", *The American Economic Review*, 48, pp. 261–297.

Prieto, E.; Fernández, J. (2000) *Tablas de Mortalidad de la Población Española de 1950 a 1990*, Editorial Aseguradora.

Sandell, R. (2003) *El envejecimiento de la población,* Real Instituto Elcano, WP 20.

Tasche, D. (2000) *Risk contributions and performance measurement*, Technische Universität München, Munich.

Tse, Y-K. (2009) *Nonlife Actuarial Models. Theory, methods and evaluation*, Cambridge University Press.

Vegas, J. (2000) "El riesgo de longevidad en los planes de pensiones", *Anales Instituto Actuarios Españoles*, 6, pp. 119–157.

Wang, S. (1995) "Insurance pricing and increased limits ratemaking by proportional hazards transforms", *Insurance Mathematics and Economic*, 17, pp. 43–54.

Wang, S. (1996) "Premium calculation by transforming the layer premium density", *Astin Bulletin*, 26.

Wang, S. (2000) "A class of distortion operators for pricing financial and insurance risk", *Journal of Risk and Insurance*, 67, pp. 15–37.

Wang, S.; Young, V.; Panjer, H. (1997) "Axiomatic characterization of insurance prices", *Insurance Mathematics and Economics*, 21, pp.173–183.

Young, V. (2004) *Premium Principles*, Encyclopedia of actuarial Science, Wiley, New York.