UNIVERSIDAD PONTIFICIA
ICAI ICADE
COMILLAS
MADRID

FACULTAD DE CIENCAS ECONÓMICAS Y
EMPRESARIALES

LOS MODELOS DE PREDICCIÓN DE LAS TASAS DE INTERÉS A CORTO PLAZO

Autor: Enrique Buendía García
Director: Mahmoud Aymo

Madrid
Junio de 2018

Enrique
Buendía
García

LOS MODELOS DE PREDICCIÓN DE LAS TASAS DE INTERÉS A CORTO PLAZO

Índice

Índice de figuras

Tablas

Gráficos

Ecuaciones

1. Introducción

La evolución de los tipos de interés a corto y medio plazo es uno de los temas más relevantes en el mundo de las finanzas. En la misma línea, la importancia de predecir el valor futuro de los tipos de interés emana de sus múltiples aplicaciones, tanto en renta variable como en renta fija, afectando tanto a los productos financieros más sencillos como a los más complejos. Así, la variación en los tipos de interés conlleva un riesgo para los tenedores de productos financieros cotizados, ya que afecta directamente al precio de los mismos. Del estudio de la evolución de los tipos se derivan, asimismo, sofisticadas estrategias de inmunización que son empleadas cada día, por ejemplo, por profesionales de la gestión de carteras en todo el mundo. Por todo ello, el estudio de los tipos de interés se antoja como un tema de extensa aplicación, por sus múltiples aplicaciones, y de elevada importancia, por los efectos que conlleva cualquier variación en los mismos.

Los modelos financieros de tasas de interés constituyen una de las herramientas de predicción más empleada en el entorno profesional. Las estimaciones que arrojan dichos modelos son empleadas para construir carteras y productos financieros complejos, por lo que escoger bien el modelo de predicción óptimo para cada circunstancia y entender el funcionamiento del mismo es de vital importancia para cualquier profesional del sector. Adicionalmente, cada modelo da lugar a resultados diferentes en función de las variables que utilice, así como del tratamiento de las mismas. Por todo ello, la investigación de los modelos financieros de predicción es un tema también extenso y de aplicación práctica en el mundo financiero actual.

1.1 Resumen y abstract

La evolución de los tipos de interés resulta un tema de extensa aplicación e interés dentro del mundo profesional de las finanzas. El presente trabajo constituye una aproximación científica a los modelos de predicción de tasas de interés a corto plazo desde un punto de vista teórico-práctico. Hemos realizado una investigación teórica, en la cual, hemos repasado la literatura existente hasta el momento sobre el tema que nos atañe, a fin de destacar los aspectos más relevantes acerca de la construcción y el funcionamiento de dichos modelos. Adicionalmente, nos hemos servido de *Python* y de las posibilidades que ofrece este lenguaje de programación, de entre las cuales destaca la existencia de librerías especializadas de acceso público, para construir varios modelos relevantes y obtener unas proyecciones significativas. Así, hemos complementado nuestro estudio teórico con una simulación empírica donde se describe el razonamiento matemático de cada uno de los modelos.

Palabras clave: modelos de predicción, tasas de interés a corto plazo, *Python*, calibración, simulación empírica.

The evolution of interest rates over time is a subject of large utility and interest inside the finance professional world. The current essay constitutes a scientific approximation to the short-term interest rate models from both a theoretical and practical point of view. We have conducted a theoretical investigation in which we have reviewed the relevant literature about this topic until present, in order to describe the most relevant factors about both the development and the performance of these models. Additionally, we have used *Python* together with all its methods, from which we highlight the existence of specialised libraries of public domain; for building the chosen models and obtaining relevant forecasts. This way, we have complemented our theoretical investigation with a practical approach where we have described the *Mathematica*l reasoning of each one of the models.

Key words: prediction models, short-term interest rates, *Python*, calibration, empirical simulation

1.2. Objetivos

El objetivo principal del presente trabajo es entender los modelos financieros de predicción de tasas de interés a corto plazo. En primer lugar, se hace necesario realizar un estudio teórico adecuado para centrar la cuestión y describir los aspectos más relevantes del tema. En segundo lugar, es posible llevar a cabo una simulación empírica para plasmar los aprendizajes obtenidos del estudio teórico sobre datos reales. Así, en concreto, realizaremos un estudio empírico sobre la bondad predictiva de cinco modelos distintos que resulten de relevancia. A fin de dotar a nuestros resultados de mayor relevancia, estimaremos las tasas de interés durante 1 año asociadas a cuatro tipos diferentes: el LIBOR, el bono español, el bono alemán y el bono americano. Consideramos, por un lado, que estableciendo un período de estimación máximo de 1 año cumplimos con las especificaciones de cada modelo (dado que se trata de modelos a corto plazo) y, por otro lado, que escogiendo cuatro tipos de interés diferentes, aportamos mayor relevancia a nuestro estudio, dada la importancia de cada uno de ellos en el entorno financiero, consiguiendo así obtener una variedad de resultados significativa a fin de obtener unos resultados aceptables.

Enlazando con lo anterior, la interpretación de los resultados obtenidos nos permitirá completar el estudio teórico realizado y, así, comprender con más certeza el funcionamiento de los modelos predictivos de tasas de interés a corto plazo. Además, podremos establecer una comparación entre los modelos propuestos a fin de señalar aquel que mejores resultados prediga.

Adicionalmente, estableceremos un objetivo secundario complementario: comprender *Python* a través de su aplicación práctica en dichos modelos. Nos valdremos de *Python* para la realización de nuestro estudio empírico y, aprovechando esta coyuntura, investigaremos acerca del funcionamiento del lenguaje programático aplicado al mundo financiero. Consideramos que el presente trabajo es una buena oportunidad para profundizar en la aplicación de los nuevos métodos y herramientas que recoge la comunidad de usuarios de *Python*, por lo que el estudio de campo presentado nos servirá para elaborar una evaluación crítica acerca de las posibilidades que ofrece *Python*.

1.3. Motivación

La motivación para realizar el presente trabajo emana de cuatro factores fundamentales: la **amplitud** del área de trabajo, el creciente **interés** en la misma, su **relevancia** y las **nuevas facilidades** que ofrece el entorno actual

Hoy en día, los modelos de predicción del precio de productos financieros concretos son una herramienta de extendido uso y relevancia. Estos arquetipos tienen como objetivo pronosticar el valor de un producto financiero concreto en un momento del tiempo determinado, por lo que resultan de especial utilidad para traders, economistas, inversores y, en definitiva, cualquier persona especializada en los mercados financieros. De acuerdo con ello, es razonable afirmar que son herramientas extensamente empleadas en el entorno profesional actual. Además, estos modelos pueden ser utilizados bajo varias motivaciones, como por ejemplo, obtener un beneficio económico de la compraventa de un producto financiero, o bien, realizar estudios económicos sobre el comportamiento de variables financieras concretas; quedando así demostrado el **amplio campo de aplicación** de los mismos.

Por un lado, la comunidad científica se esfuerza por desarrollar modelos predictivos más refinados y concretos, a fin de obtener unas predicciones cada vez más acotadas y certeras. Por otro lado, el entorno profesional demanda modelos ajustados a circunstancias cada vez más especiales, que reflejen en la mayor medida posible los factores de incertidumbre del entorno económico. Así, a raíz del **interés** existente en la predicción óptima de las variables económicas más relevantes, y ante la proliferación en las últimas décadas de productos financieros cada vez más complejos e interrelacionados, proponemos realizar un trabajo académico centrado en los modelos predictivos aplicados a bonos y derivados, especialmente aquellos más complejos.

Los modelos pertenecientes a este ámbito emplean una serie de variables iniciales que reflejan ciertas condiciones macroeconómicas de aplicación al entorno financiero en general. Una de estas variables macroeconómicas es, por ejemplo, la tasa de interés. A este respecto, cabe mencionar que la tasa de interés tiene un componente a corto plazo y un componente a largo plazo; circunstancia que será expuesta más adelante en el desarrollo del trabajo. Como hemos mencionado antes, cada vez está más valorada la capacidad de predecir con certeza las variables que determinan el funcionamiento de la economía a nivel general, especialmente después de la crisis económica del 2007 y posterior etapa de recesión. No en vano, el papel de los intermediadores financieros y las autoridades encargadas de supervisar y modificar el entorno económico-financiero ha sido enormemente cuestionado desde entonces, dando muestra de la vital importancia de la función de los mismos para el buen funcionamiento de la economía global. Por lo tanto, y en definitiva, el funcionamiento de la tasa de interés, que es el principal mecanismo de actuación de dichas instituciones, se convierte en un tema de absoluta vigencia e importancia.

En las últimas fechas, y tras un período abultado de tiempo en el que en el que la tasa de interés se ha mantenido relativamente baja, se han producido sendos anuncios por parte de la Reserva Federal de los Estados Unidos y por el Banco Central Europeo, acerca del incremento progresivo en las tasas de interés en los próximos años. Así, mientras que la FED ya ha incrementado ligeramente sus tipos, el BCE prevé elevar dichos tipos a partir de 2019, habiendo realizado un estudio previo durante 2018, lo suficientemente detallado y coherente como para minimizar las reacciones negativas de los mercados ante tal noticia. El incremento de los tipos de interés conllevará, previsiblemente, una reducción en el préstamo y créditos a las familias y empresas, por lo que cuantificar correctamente este incremento ayudará a comprender mejor el impacto global de dicha subida sobre los ciclos microeconómicos. En un país como España, en el que las pequeñas y medianas empresas generan más del 90% del PIB doméstico, conocer en profundidad dichos ciclos microeconómicos es especialmente importante.

La coyuntura económica a la que nos acabamos de referir ha llamado nuestro interés y ha sido uno de los principales motivos para la realización del presente trabajo de investigación. En resumen, nos ha llamado enormemente la atención el funcionamiento de los modelos predictivos de las tasas de interés, ya que consideramos que conocer con la mayor certeza posible esta variable se antoja de especial **relevancia** para establecer predicciones sólidas sobre los ciclos de la oferta y la demanda de los mercados financieros.

Adicionalmente, la introducción de las nuevas herramientas informáticas y el desarrollo de lenguajes de programación más sofisticados están dando lugar a **nuevas facilidades** en el entorno económico y financiero actual. Además, el carácter mayoritariamente público de estos avances facilita la accesibilidad de los mismos por parte del gran público y los orienta a ser más sencillos de comprender y más fáciles de usar. En definitiva, el entorno informático actual favorece que cualquier persona con un mínimo de conocimientos e interés pueda realizar predicciones especializadas sobre el entorno económico y financiero.

1.4. Metodología

En el presente trabajo proponemos una investigación que seguirá un enfoque deductivo, aplicando métodos cuantitativos de predicción y estimación de error. En concreto, realizaremos una revisión teórica asociada al estado de la cuestión en el momento actual, para después completar los hallazgos teóricos con una parte de estudio empírico cuantitativo.

Los objetivos descritos anteriormente quedarán validados a través de la comparación de los resultados obtenidos y la posterior discusión de las conclusiones extraídas.

Las fuentes de datos utilizadas para desarrollar la investigación propuesta han sido, principalmente, bases de datos como Business Source Complete, EconLit With Full Text y Google Scholar. Además, para nuestro estudio empírico emplearemos las librerías *SciPy*, *Numpy*, *QuantLib*, *Math* y *MatplotLib* de *Python* y datos de dominio público.

En nuestro estudio de campo hemos tenido que realizar una calibración adecuada para optimizar nuestros resultados, con el objetivo de obtener el menor error posible en nuestras estimaciones. En nuestro marco teórico se puede observar el detalle del proceso teórico de calibración, así como su importancia para realizar una estimación óptima. A nivel práctico, hemos procedido de la siguiente manera:

- En primer lugar, una vez instalado *Python*, hemos procedido a descargar los módulos matemáticos necesarios para realizar la estimación. El módulo escogido ha sido *SciPy*, ya que integra un compendio de librerías de uso estadístico y matemático realmente útiles para procesos de computación como el que estamos realizando. Desde dicho módulo, hemos extraído las siguientes librerías (que contienen procedimientos más específicos y acotados para cada uso):
    - *Numpy*: librería básica de computación matemática y estadística
    - *MatplotLib*: librería útil para realizar gráficos detallados
    - *QuantLib*: librería especializada en las finanzas cuantitativas
    - *Math*: módulo para la realización de operaciones matemáticas tanto sencillas como complejas
    - Varios métodos específicos para realizar ciertos procedimientos en la calibración

- En segundo lugar, hemos extraído los datos necesarios para realizar nuestras predicciones. En concreto, hemos seleccionado el 18 de mayo del 2017 como nuestro punto de inicio, y el 18 de mayo de 2018 como el objetivo final de predicción. También hemos estudiado predicciones en momentos intermedios, dado que nuestros modelos son a corto plazo. Para la calibración, hemos escogido un total de 21 valores anteriores al 18 de mayo de 2017, para obtener una muestra de datos lo suficientemente significativa sobre la que calibrar.

- En tercer lugar, hemos procedido a la calibración, utilizando los datos extraídos anteriormente. Hemos realizado un modelo en Excel que reflejara la formulación matemática descrita en nuestro marco teórico. Es posible consultar dicho modelo en el Anexo 1. También hemos necesitado recurrir a un código específico para realizar la calibración del modelo Hull-White.

- En cuarto lugar, hemos introducido las variables que han resultado de la calibración en cada uno de nuestros modelos y hemos predicho los resultados esperados. Los códigos empleados han surgido de librerías públicas como *Github* o páginas web especializadas. Más concretamente, los códigos para la estimación de los modelos Vasicek, CIR, Rendleman y Bartter y Brennan y Shwartz han sido extraídos del libro *"Mastering Python for Finance"* (Ma Weiming, 2015), que se encuentran en la librería en *Github* del mismo autor (Ma Weiming, Mastering-Python-for-Finance-source-codes, 2015)

  Con respecto al modelo Hull-White, hemos seguido las indicaciones aportadas por Goutham Balaraman, un autor especializado en las finanzas y la computación, tanto para la estimación del modelo (Balaraman, 2015) como para su calibración (Balaraman, Short Interest Rate Model Calibration in QuantLib Python, 2015)

Cabe la pena destacar que hemos podido encontrar guías online de ayuda e instrucciones, ofrecidas por la comunidad de usuarios de *Python*, que nos han servido para corregir los errores puntuales que han surgido durante nuestro estudio.

1.5. Estado de la cuestión

Habiendo centrado el interés y la motivación que nos han llevado a realizar el presente estudio, procederemos a describir el estado de la cuestión en el entorno académico actual. En este sentido, la bibliografía existente sobre los modelos de predicción financieros de tasas de interés es especialmente rica y extensa. Además de los numerosos estudios e investigaciones acerca de la relevancia y los principales determinantes de las tasas de interés, también existe una literatura igualmente amplia en torno a la elaboración y aplicación de los modelos predictivos de tasas de interés.

De la misma manera, existe una literatura abundante en cuanto a la comparación entre varios modelos predictivos de tasas de interés. A este respecto, encontramos publicaciones académicas que establecen, por ejemplo, una comparación empírica sobre la efectividad de modelos alternativos de predicción de tasas de interés (Chan, Karolyi, Longstaff, & Sanders, 1992), contrastes sobre la eficacia de dichos modelos al cambiar las especificaciones de los mismos, y así estimar la sensibilidad de ellos a cambios en los datos de inicio (Bali, 2000) o, entre las más recientes y específicas, una comparación de la efectividad de varios modelos en la predicción de tasas de interés aplicados a la valoración de los pasivos de las agencias aseguradoras tras la aplicación de la Directiva europea de Solvencia II (Aas, Neef, Williams, & Raabe, 2018).

Es evidente que, en los últimos años, los estudios acerca de los modelos de predicción de tasas de interés han proliferado dando lugar a modelos más complejos y específicos para cada utilidad. Los estudios más antiguos que hemos encontrado sobre la predicción del valor de derivados financieros datan de la década de 1970, por lo que la renovación de la literatura al respecto es una realidad, como bien hemos demostrado.

En cuanto a la aplicación de los lenguajes programáticos y las nuevas herramientas informáticas al campo de las finanzas, hemos encontrado una bibliografía rica en cuanto al *machine learning* y los avances en computación. Sin embargo, no hemos encontrado estudios relevantes sobre la comparación de los lenguajes de programación y la estimación del potencial de librerías públicas como *Github*. Nuestro estudio empírico demostrará que es posible arrojar predicciones significativas sobre variables económicas complejas a través del empleo de librerías públicas, de acceso universal. Consideramos que sería interesante estudiar acerca de ello con mayor profundidad en futuras investigaciones, para así dar muestra del potencial de las nuevas tecnologías aplicadas al mundo de las finanzas y de las amplias posibilidades de democratización sobre el empleo de las mismas. Dado que no hemos encontrado un número abundante de publicaciones relevantes acerca de la aplicación de *Python* al entorno financiero, la presente investigación contribuye a cubrir un hueco vacío en la literatura académica actual.

1.6. Partes principales del TFG

El trabajo contiene las siguientes partes:

- En primer lugar, encontramos una introducción donde se aglutinan la importancia de la investigación propuesta, los objetivos de la misma, la metodología a seguir y el estado de la cuestión en el momento actual.
- En segundo lugar, hemos desarrollado un marco teórico en el que nos referimos a los modelos de predicción, al nuevo entorno tecnológico y su aplicación al mundo de las finanzas y a los modelos de predicción de tasas de interés a corto plazo.
- En tercer lugar, realizaremos un estudio empírico que permita comprender mejor la investigación teórica propuesta, incluyendo una breve discusión de resultados.
- En cuarto lugar, estableceremos las conclusiones pertinentes para responder a los objetivos de la investigación actual y dar cuenta de los resultados obtenidos del conjunto de la investigación y de la nuestra experiencia al respecto.

2. Marco teórico

En esta parte, realizaremos un estudio teórico que contendrá una recopilación de los estudios más relevantes para nuestra investigación realizados hasta la fecha.

Dividiremos nuestro marco teórico en varios apartados diferenciados. El primero de ellos hablará de los modelos de predicción, para definir los conceptos a los que hace referencia nuestro estudio a nivel general. Posteriormente, indagaremos en el entorno tecnológico actual y su aplicación al mundo de las finanzas, para dar cuenta de los nuevos avances en cuanto a computación y modelización que nos puedan ser de ayuda en nuestra investigación. Más adelante, proseguiremos nuestro estudio con una descripción de la aplicación de *Python* a los modelos predictivos para dar cuenta de las posibilidades que ofrece este lenguaje de programación. Finalmente, realizaremos una investigación pormenorizada acerca de los cinco modelos de predicción de mayor relevancia para nuestro estudio empírico. En esta parte, incluiremos un estudio del proceso de calibración de los modelos que integre el razonamiento y la formulación matemática del proceso, a fin de que podamos replicar empíricamente la calibración propuesta en el estudio teórico.

2.1. Los modelos de predicción

2.1.1. Empleo

En primer lugar, abordaremos la cuestión de los modelos de predicción de precio de bonos y derivados a nivel general para definir el concepto que estamos tratando en este trabajo.

En este sentido, el trabajo de profesor Riccardo Rebonato es especialmente relevante. En uno de sus estudios, actualizado al año 2004, realiza una revisión histórica de los modelos de predicción desarrollados durante las décadas anteriores, centrándose especialmente en la estructura de dichos modelos (Rebonato, 2004).

Acerca del uso de los modelos de predicción de tasas de interés, Rebonato señala que dichos modelos son ampliamente utilizados por inversores en opciones, bonos y derivados complejos, principalmente. Para los inversores en derivados y bonos, estos modelos adquieren una función prescriptiva, ya que pueden identificar oportunidades de arbitraje en el caso de encontrar un producto financiero cuyo precio en el mercado difiera del especificado por el modelo. Por otro lado, los inversores en derivados más complejos necesitan conocer el precio de un tipo de producto financiero con mayor precisión, ya que este tipo de productos no cuentan con ningún comparable en los mercados. Debido a ello, la labor descriptiva de los modelos se hace especialmente relevante para este último tipo de inversores (Rebonato, 2004).

Es importante conocer el empleo de estos modelos para conocer las variables estadísticas más relevantes que deben integrar dichos modelos, dado que las variables de entrada deben estar relacionadas con la finalidad que persiga la predicción. De entre estas variables, la más importante es la volatilidad. El valor de la volatilidad puede ser estimado utilizando un enfoque fundamental, en el que el mayor peso de la valoración cae sobre el activo subyacente del que depende el derivado; o un enfoque derivado, más indicado para los inversores en derivados complejos que emplean varios derivados como cobertura, en el que el peso relativo de la dinámica de los subyacentes es más bien modesto (Rebonato, 2004)

2.1.2. Aspectos relevantes

En relación con lo mencionado en el último epígrafe, los dos aspectos más relevantes a la hora de construir un modelo enfocado a la negociación de derivados son, por un lado, la inmunización y la recalibración del mismo. Cuando hacemos referencia a la inmunización apuntamos al proceso de tomar posiciones para neutralizar la sensibilidad de un producto complejo a variaciones en los datos de entrada que el modelo asume como deterministas, como por ejemplo, la volatilidad. En aquellos casos en que la volatilidad es determinista y conocida (como asumen la mayoría de los modelos predictivos), no existe la necesidad de asumir la inmunización vega[1] (Rebonato, 2004). En otras palabras, frente a las demás estrategias de cobertura de derivados (de las cuales, la inmunización vega es sólo un tipo), en aquellos casos en que la calibración de la volatilidad a través del modelo permite llegar a conocerla de manera estable, la inmunización vega se hace innecesaria (Rebonato, 2004)

[1] Con inmunización vega nos referimos al proceso de cubrir una opción en función tanto del subyacente de la misma como de otra opción, con el objetivo de mantener la sensibilidad con respecto a la volatilidad en niveles iguales o cercanos a cero

En la práctica, el proceso de inmunización vega funciona relativamente bien, aunque se hace difícil su justificación teorética. Lo mismo ocurre con el proceso de recalibración de un modelo de predicción de precio de derivados, especialmente durante el proceso de negociación de la opción en cuestión. Por ambos motivos, la cuestión fundamental a la que debe hacer frente un modelo predictivo se relaciona con el proceso de selección de datos de entrada, para así reducir la necesidad de recalibración y posterior recobertura del modelo cuando se ponga en práctica en el futuro. Una adecuada elección de datos de entrada conllevará, por lo tanto, una recalibración menos agresiva en el futuro(Rebonato, 2004)

El desarrollo de la literatura existente concluye que, para estimar el precio adecuado de los derivados relacionados con las tasas de interés, bien podemos prescribir todos los factores relativos a la dinámica actual de los mercados financieros (como las tasas de interés) y el *premium* de riesgo asociado al derivado (en base al precio absoluto del mismo); o bien, podemos asignar las funciones de volatilidad y correlación (en base a la estructura de covarianzas) referidas al estado estocástico[2] de las variables del modelo (precio relativo). A este respecto, por motivos meramente prácticos, la vía del precio relativo es la convención universal adoptada por el mundo financiero (Rebonato, 2004).

De acuerdo con dicha convención, ha sido comúnmente aceptado que las volatilidades y las correlaciones son los sujetos de mayor importancia con respecto a la predicción del precio de los derivados. Cuando estos dos sujetos se interrelacionan con las prácticas del mercado descritas anteriormente (los procesos de *"hedging"* y recalibración), se concluyen importantes corolarios:

- Por un lado, la elección de las volatilidades y correlaciones aplicadas al modelo determinarán los precios de *caplets* y *swaptions* en base a los cuales se intercambiarán coberturas futuras. Los c*aplets* son un tipo de derivado financiero de estilo europeo, consistente en una opción de compra (*"call option"* en inglés) utilizado comúnmente por los profesionales del sector financiero como cobertura ante subidas de la tasas de interés. Los *swpations* son otro tipo de derivado financiero, concebido como una opción para formalizar un

[2] Al hablar del estado estocástico nos referimos a que es relativo al azar

intercambio de tasas de interés (o *"swap"* en inglés), generalmente utilizados como cobertura de opciones sobre bonos (Rebonato, 2004).

- Por otro lado, la práctica universal de la recalibración de la cobertura vega implica que el modelo escogido deba de ser lo suficientemente flexible como para permitir recuperar satisfactoriamente un cierto nivel de precios para los activos introducidos en el modelo, actualizándose de acuerdo a las fluctuaciones concretas del mercado (Rebonato, 2004).

2.1.3. La calibración

Así pues, la pregunta principal a la que deben enfrentarse los modelos de predicción es la siguiente ¿qué fuentes de información pueden proveer una estimación de la estructura de covarianzas capaz de producir los precios deseados en el futuro? Esta pregunta deriva en otra cuestión de carácter más práctico: en caso de que, a la hora de estimar las volatilidades y correlaciones de los datos de entrada del modelo, la estimación estadística y la estimación implícita den lugar a respuestas radicalmente diferentes, ¿cuál de las dos estimaciones deberíamos quedarnos para nuestro modelo? (Rebonato, 2004)

A este respecto, Rebonato, tras haber revisado la literatura existente[3], aterriza con la conclusión de que la estimación implícita de estas variables se presenta como la alternativa más adecuada. No obstante, el hecho de poder recuperar los precios actuales del mayor número de derivados corrientes (sobre el que se basa la recalibración) depende de, en última instancia, la existencia de información completa y detallada, además de eficiente, en el entorno de los mercados financieros. En caso de que exista duda razonable sobre cualquier de estas dos condiciones, la estimación implícita de la volatilidad y la correlación debería ser seriamente cuestionada (Rebonato, 2004).

Finalmente, el autor señala que el criterio más relevante para la calibración de un modelo (entendiendo calibración como la elección de los datos de entrada relativos a la volatilidad y correlación) debería ser la habilidad de recuperar posibles precios actuales y futuros de los instrumentos de cobertura. En el caso de que las volatilidades y

[3] Para más información, consultar Rebonato, R. (2004). Interest–rate term–structure pricing models: a review. Proceedings of The Royal Society: A *Mathematical* Physical and Engineering Sciences, páginas 675-678.

correlaciones requeridas para llegar a este objetivo resulten coincidir con las mismas cifras estimadas a través de la estimación implícita, el inversor podrá estar más tranquilo respecto a la adecuación de su modelo (Rebonato, 2004).

Por último, el autor señala la importancia de desarrollar nuevos modelos de predicción factibles a nivel computacional, a fin de cubrir las ineficiencias de los modelos del momento. En este sentido, el autor concluye que la expansión de nuevos métodos y tecnologías de computación y análisis se antoja fundamental para cubrir estas ineficiencias (Rebonato, 2004).

2.2. El nuevo entorno tecnológico y su aplicación al mundo de las finanzas

En este segundo apartado, procederemos a detallar las principales novedades que ofrecen las nuevas tecnologías para proporcionar una ligera idea acerca del potencial de las mismas cuando son aplicadas en el entorno financiero.

Siendo conscientes de las limitaciones del estudio de Rebonato (se trata de una publicación de hace más de 10 años), hemos querido completar su amplísima revisión de la literatura con publicaciones más recientes que reflejen los progresos de los últimos años, para así responder a las necesidades académicas señaladas por el autor.

2.2.1. Avances computacionales

Enlazando con lo anterior, hemos de señalar que, desde el año 2004, se han realizado numerosos avances tecnológicos que han permitido refinar modelos anteriores y llevarlos a un nivel superior de exactitud. El desarrollo del *machine learning* y la aplicación de técnicas de *Big Data* permiten, a día de hoy, procesar una grandísima amplitud de datos y métodos. En recientes trabajos académicos se da buena muestra de la importancia de este progreso.

Así, por mencionar un ejemplo, el trabajo de Mullainathan y Spiess nos muestra el *machine learning* como una herramienta de especial utilidad para la resolución de varios problemas económicos de predicción. Esta circunstancia se debe al propio funcionamiento del *machine learning*, que es capaz de conjuntar estructuras predictivas complejas con funciones flexibles en cuanto a la introducción de datos de entrada. En otras palabras, el *machine learning* es capaz de detectar una estructura predictiva concreta en base a datos de entrada relativamente flexibles, a través de la comparación con datos fuera del modelo (Mullainathan & Spiess, Spring 2017).

En conclusión, el *machine learning* ofrece un nuevo marco funcional predictivo de gran interés para el entorno económico en general y, en especial, para los modelos predictivos a los que hemos hecho referencia (Mullainathan & Spiess, Spring 2017).

El trabajo de Kanevski y Timonin es también de gran relevancia, por un lado, señalando los aspectos más importantes relativos a la modelización de las curvas de tasas de interés y, por otro lado, mostrando de manera empírica la utilidad y el potencial del *machine learning* en la computación financiera (Kanevski & Timonin, 2010); enlazando así con las recomendaciones realizadas por Rebonato en 2004.

Por lo tanto, el desarrollo y perfeccionamiento de las herramientas de modelización y computación, unido a la extensión en la aplicación de los lenguajes de programación en el mundo de las finanzas, complementan las limitaciones señaladas por Rebonato.

2.2.2. Lenguajes de programación

Con respecto a los avances en lenguajes programáticos, cabe destacar que, durante los últimos años, se ha ido desarrollando una literatura comparativa de los lenguajes de programación más relevantes aplicados al mundo de las finanzas. En este sentido, el estudio de Boragan y Fernández-Villaverde es especialmente significativo. En el mismo, los autores solucionan el modelo de crecimiento neoclásico estocástico (el cual, consideran banco de pruebas universal de la macroeconomía moderna) utilizando lenguajes como *C++11*, *Fortran 2008*, *Java*, *Julia*, *Python*, *Matlab*, *Mathematica*, y *R*, tanto en *Mac* como en *Windows* (Boragan Arouba & Fernández-Villaverde, 2015).

Los resultados del análisis demuestran que, de todos ellos, *C++* es el más rápido a la hora de ejecutar los algoritmos propuestos, con mucha ventaja sobre *R* y *Python*, y con menos ventaja sobre Frotran y *Java*. No obstante, los autores también indican que no han tenido en cuenta otros factores igualmente relevantes a la hora de seleccionar el lenguaje de programación idóneo para realizar un análisis económico, como la facilidad de programación, la existencia de herramientas auxiliares o la existencia de grandes comunidades de usuarios. Los autores entienden que estas variables son de especial relevancia dado que facilitan el trabajo del investigador, que puede acceder a más contenidos y de manera más sencilla (Boragan Arouba & Fernández-Villaverde, 2015)

En cuanto a *Python*, Boragan y Fernández-Villaverde señalan que la implantación del mismo código en *Numba*[4] obtiene, en este caso, mucho mejores resultados en términos de velocidad de procesamiento que sobre la plataforma *Pypy* (la cual, también está orientada a mejorar la velocidad de procesamiento). También señala que entre las principales ventajas de *Python* está la cantidad de bibliotecas de código abierto al alcance del usuario (como, por ejemplo, *Numpy*, *SciPy*, SymPy, *MatplotLib* o *pandas*).

No es necesario comprender en detalle todos los términos mencionados anteriormente. El mensaje final que desprenden estos hallazgos es que, por un lado, el desarrollo de software especializado permite acelerar la velocidad de procesamiento de *Python*, lo cual da buena muestra del potencial de refinación del lenguaje; y por otro lado, las contribuciones anónimas de toda la comunidad de *Python* a las bibliotecas públicas son una fuente de valor incalculable de cara a la democratización del mundo del análisis financiero.

Por último, el profesor Prechelt realiza un estudio comparativo de C, *C++*, *Java*, Perl, *Python*, Rexx, y Tcl, de los cuales, solo nos fijaremos en *Python*, *C++* y *Java*, por motivos de simplicidad (Prechelt, 2000). Los resultados más importantes de su análisis son los siguientes:

- En cuanto a diseño y escritura del algoritmo, *Python* consume la mitad de tiempo que *Java* y *C++*
- En cuanto a consumo del espacio en memoria, *Python* y *Java* emplean el doble que *C++*
- El procesamiento de la información es claramente más rápido en *C++* durante las primeras etapas
- *Python* es la alternativa más razonable a *C++* para el desarrollo de análisis empíricos, incluso cuando se procesen grandes cantidades de datos. Su facilidad de uso y eficiencia programática compensan sus desventajas en cuanto a consumo de memoria y velocidad.

[4] Se trata de un entorno especializado de Python para computaciones específicas

- Por último, las diferencias entre los lenguajes de programación no son especialmente significativas. Los programadores que han realizado el análisis de este estudio aprecian diferencias relevantes en cuanto a los programas empleados, no así en cuanto al lenguaje de los mismos.

De acuerdo con los estudios anteriores y, por motivos de simplicidad, escogeremos *Python* como el lenguaje de programación a partir del cual desarrollar nuestro estudio empírico. La existencia de una gran variedad de librerías abiertas y de una gran comunidad de usuarios, así como la relativa facilidad de diseño y escritura del código han sido los factores principales que han motivado nuestra decisión. Además, *Python* ostenta una serie de características complementarias que lo hacen más atractivo todavía. Se trata de un lenguaje abierto, por lo que permite su interpretación en otros lenguajes; que es multipropósito, ya que puede ser utilizado tanto para el desarrollo de operaciones analíticas a alto y bajo nivel y que, además, maneja automáticamente el consumo de memoria sin necesidad de recurrir a un programador especializado (Hilpisch, 2014)

Cabe mencionar que, a nuestro pesar, no hemos encontrado estudios comparativos de lenguajes programáticos aplicados al mundo de las finanzas y la economía lo suficientemente actualizados como para dar por absolutamente válidas las conclusiones de estos estudios. Desde la fecha de publicación de los estudios a los que hacemos mención se han realizado actualizaciones en la mayoría de los lenguajes comparados, lo cual, podría distorsionar los resultados a lo que se han hecho mención (especialmente, los del profesor Prechelt, dado que su estudio data del año 2000). Se hace necesaria la proliferación de una literatura amplia y actualizada que compare empíricamente la implementación de los lenguajes anteriormente mencionados.

2.2.3. Librerías avanzadas

Por último, para dar cuenta de avances más actualizados tanto de la investigación concreta sobre los modelos de predicción de tasas de interés como de las interrelaciones de los mismos con *Python*, disponemos de la investigación de Baker. En su disertación de 2014, el autor examina el comportamiento de ciertas variables macroeconóminas en el *kernel* de fijación de precios de una serie de modelos de predicción, con el objetivo de proveer una única estructura computacional a partir de la cual se puedan construir y estimar una serie de modelos predictivos.

El autor introduce una librería de *Python*, llamada *affine*, que consolida los enfoques más relevantes de la estimación de la tasa de interés aplicados a la predicción de precios de bonos gubernamentales en una sola estructura. Dicho con otras palabras, la contribución de Baker es especialmente relevante, ya que indaga en una biblioteca disponible en *Python* que permite tomar una única estructura para predecir el comportamiento de las tasas de interés. La aplicación de esta biblioteca simplifica enormemente los procesos de investigación empírica ya que permite realizar estudios complejos compatibles con procedimientos abiertos al público.

Más concretamente, la librería *affine* a la que hacemos mención consigue varias ventajas. Por un lado, reduce el coste de construir y resolver modelos afines de tasas de interés. Por otro lado, da lugar a una estructura computacional lo suficientemente relevante como para construir una amplia variedad de modelos de predicción similares. Por último, desarrolla un único contexto bajo el cual dicha amplia variedad de modelos pueden ser comprendidos e interpretados. Todo ello se traduce en enormes facilidades para que los investigadores desarrollen tareas analíticas avanzadas en un mismo entorno de trabajo(Baker, 2014).

Utilizando la librería *affine*, el autor es capaz de construir diez modelos diferentes de predicción de precios de bonos gubernamentales, que también integran una predicción intermedia de tasas de interés a corto y largo plazo. Como podemos ver en la tabla resumen, solamente dos de estos modelos necesitaron cambios en el núcleo de la biblioteca de *Python* para desarrollar el modelo. Como conclusión general, es evidente la facilidad de *Python* y la librería *affine* para la construcción y resolución de modelos predictivos avanzados[5]

[5] Para más información sobre la lógica y el razonamiento de estos modelos, consultar Baker, B. (2014). A Computational Approach to *Affine* Models of the Term Structure. American University., páginas 80-95

Tabla 1: Descripción de modelos alternativos, Baker, 2014

Estudio	Método de solución	Variables latentes	Modificaciones requeridas
Chen and Scott (1993)	Probabilidad directa	Sí	No
Dai and Singleton (2000)	Método generalizado de momentos	Sí	Sí
Dai and Singleton (2002)	Probabilidad directa	Sí	No
Ang and Piazzesi (2003)	Probabilidad directa	Sí	No
Bernanke et al. (2005)	Menores cuadrados no lineales	No	No
Kim and Orphanides (2005)	Filtro Kalman de máxima probabilidad	Sí	No
Kim and Wright (2005)	Filtro Kalman de máxima probabilidad	Sí	No
Diebold et al. (2006)	Filtro Kalman de máxima probabilidad	Sí	No
Cochrane and Piazzesi (2008)	Menores cuadrados no lineales	No	No
Orphanides and Wei (2012)	Probabilidad directa	Sí	Sí

Como conclusión general de este apartado, ha quedado demostrado que, a día de hoy, gracias al desarrollo de los lenguajes de programación, así como la aparición de librerías y la aportación de una comunidad especializada de usuarios cada vez más grande, las necesidades computacionales y de desarrollo tecnológico a las que hacía mención Rebonato han quedado sobradamente resueltas.

2.3. Los modelos de interés a corto plazo

Llegados a este punto, ya hemos estudiado la literatura existente sobre los modelos financieros de predicción de precios de bonos y derivados y, por ende, los modelos predictivos de tasas de interés a nivel general. En este apartado, procederemos a explicar de manera más detalladas los modelos de interés a corto plazo que han resultado de nuestro interés.

Cabe destacar que, por meros motivos de simplicidad, en este trabajo nos centraremos en aplicar empíricamente cinco modelos básicos de predicción de tasas de interés a corto plazo. No hemos querido enfocarlos a la predicción de precios de bonos, derivados, o demás productos financieros para así establecer unas conclusiones sencillas pero lo suficientemente relevantes como para no dar lugar a equívoco.

Hemos seleccionado cinco modelos básicos de especial relevancia para nuestro análisis. Todos los modelos seleccionados han aparecido, al menos una vez, en alguno de los estudios mencionados en nuestro marco teórico, siendo la base de posteriores modelos más complejos y especializados.

En los modelos de tasas de interés a corto plazo, la tasa $r(t)$ se describe como continuamente compuesta y anualizada por un corto período de tiempo infinitesimal sobre la curva de rendimientos. Por ello, la tasa $r(t)$ toma la forma de una variable estocástica en los modelos de tasas de interés. A nivel general, los modelos de predicción de tasas de interés tratan de predecir la evolución de las tasas de interés a lo largo del tiempo, y poder llegar a describir las condiciones económicas en ciertos períodos de tiempo (Ma Weiming, Mastering Python For Finance, 2015).

Estos modelos son frecuentemente utilizados para valorar cualquier derivado de las tasas de interés. Bonos, instrumentos de crédito, hipotecas y préstamos son sensibles a cambios en las tasas de interés. De esta manera, los modelos de tasas de interés se emplean en conjunción con procedimientos de valoración de precio, por lo que las tasas de interés predichas funcionan como componentes de los procedimientos de valoración (Ma Weiming, Mastering Python For Finance, 2015).

Por último, cabe mencionar que la modelización de las tasas de interés está considerada como un tema bastante complejo, dado que las tasas de interés están afectadas por una multitud de factores, tales como las decisiones políticas, las intervenciones gubernamentales o las leyes de la oferta y la demanda (Ma Weiming, 2015)

2.3.1. El modelo Vasicek

El modelo Vasicek de un factor, que utilizaremos posteriormente en nuestro estudio empírico, tiene la siguiente forma matemática en su aplicación a las tasas de interés (Ma Weiming, Mastering Python For Finance, 2015):

Ecuación 1: Formulación matemática del modelo Vasicek, Ma Weiming, 2015

$$dr(t) = K(\theta - r(t))dt + \sigma dW(t)$$

- W define el proceso Wiener, que modela el factor aleatorio de riesgo de mercado
- σ es el parámetro de la desviación estándar, que determina la volatilidad de la tasa de interés
- $(\theta - r(t))$ es el factor de derivación que describe el cambio esperado en la tasa de interés en función de un valor temporal t concreto
- θ se define como "el valor medio a largo plazo"; es decir, el valor de equilibrio de a largo plazo hacia el cual se retrae la tasa de interés
- K es la velocidad de reversión, que otorga el ajuste de velocidad y debe ser positiva para mantener la suficiente estabilidad alrededor del valor a largo plazo

Así, por ejemplo, cuando r es inferior a θ, el factor de derivación se convierte en positivo y, si K es positivo, la tasa de interés del modelo sigue una tendencia ascendente positiva

El modelo, cuya raíz se encuentra en el trabajo de Oldrich Vasicek en 1977, puede ser utilizado para la valoración de derivados de la tasa de interés, e incluso ser adaptado para estimaciones del mercado de crédito, aunque emplea principios erróneos e implica probablidades negativas. En modelo se encuadra dentro del proceso estocástico de Ornstein-Uhlenbeck, que explicaremos en apartados posteriores[6]. El

[6] El proceso Ornstein-Uhlenbeck es común a los cinco modelos tratados en esta investigación

modelo de Vasicek fue el primer modelo económico en capturar el valor de la reversión media. El modelo asume que las tasas de interés ni bajan ni decrecen indefinidamente, como hacen los precios de las acciones cotizadas. Las tasas se mueven dentro de un rango limitado, mostrando cierta tendencia a la reversión en torno a un valor determinado en el largo plazo. Esto da lugar a una fórmula explícita para la curva de rendimientos (el llamado cupón cero), además de un conjunto concreto de fórmulas para derivados, como las opciones de los bonos. También puede ser empleado para crear un árbol de tasas de interés (Naveed Nazir, 2009).

Aplicando el modelo Vasicek al cálculo del precio de los bonos implícito en el modelo de tasas a corto plazo, obtenemos una serie de conclusiones[7]:

- El modelo está libre de arbitraje, por lo que ningún bono u opción tratado por el modelo permitirá arbitraje
- Dado que se trata de un modelo de factor único, no captura los complejos cambios en las curvas de rendimiento que puedan ocurrir
- Teóricamente, el principal punto negativo es que el valor de la tasa de interés puede ser negativo.

Cabe destacar que el modelo Vasicek puede encontrar formulaciones mucho más complejas en función de la aplicación práctica del mismo.

2.3.2. El modelo de Cox Ingersoll Ross (CIR)

Este modelo nace en 1985 de la mano de John C. Cox, Jonathan E. Ingersoll y Stephen A. Ross, como una extensión del modelo de Vasicek para afrontar el problema de las tasas de interés negativas de su predecesor.

El modelo CIR para la predicción del precio de un bono asume que el procedimiento para establecer el riesgo de la tasa de interés a largo plazo se basa en la siguiente ecuación:

Ecuación 2: Formulación matemática del modelo Cox Ingersoll Ross, Ma Weiming, 2015

$$dr(t) = K(\theta - r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW(t)$$

[7] Se pueden encontrar conclusiones más detalladas en Naveed Nazir, M. (2009). Short rates and bond prices in one-factor models. Uppsala: Uppsala University, página 40

Sobre los parámetros de esta ecuación, hemos de mencionar lo siguiente:

- $K(\theta - r(t))$ es el mismo factor que en el modelo de Vasicek
- El factor de desviación estándar $\sigma\sqrt{r(t)}$ elimina la posibilidad de hallar tasas nulas o negativas a condición de que $2ab > \sigma^2$ sea respetada
- El término $\sqrt{r(t)}$ incrementa la desviación estándar cuando la tasa a corto plazo se incrementa

Las dinámicas de las tasas de interés a corto plazo se corresponden con un proceso autorregresivo donde la tasa de interés en cuestión, que se mueve de manera aleatoria, es dirigida elásticamente hacia un valor a largo plazo theta. Esta característica concuerda con la propiedad de reversión media de Vasicek.

Tras el desarrollo matemático del modelo, es posible afirmar que no hay una formulación explícita que permita llegar a una solución para el modelo en cuestión. El modelo sólo puede tener soluciones positivas, ya que, cuando la tasa de interés alcanza 0, acaba siendo positiva subsecuentemente.

Además, generalmente, cuando la tasa es baja o cercana a 0, la desviación estándar también se vuelve cercana a 0

La ventaja más importante del modelo CIR sobre el modelo Vasicek es que la tasa de interés a corto plazo que arroja el modelo es siempre no negativa. Sin embargo, al contrario que Vasicek, el modelo CIR no es Gaussiano, por lo que es más difícil de analizar (Naveed Nazir, 2009).

2.3.3. Rendleman y Bartter

Richard J. Rendleman y Brit J. Bartter desarrollaron en 1979 un modelo alternativo a los dos mencionados anteriormente, enfocado principalmente a la predicción del precio de opciones y derivados más complejas. Se trata de un modelo que emplea el mismo enfoque económico que los modelos anteriores, pero simplifica el proceso matemático de los mismos.

También al contrario que los anteriores, es un modelo de dos factores; es decir, emplea dos factores distintos en su proceso computacional.

Este modelo se deriva de manera algebraica, sin necesidad de aplicar ecuaciones estocásticas diferenciales (Rendleman & Bartter, 1979). Esto se traduce en mayor simplicidad computacional y, en definitiva, mayores facilidades para el investigador.

De acuerdo con el modelo, el procedimiento para las tasas de interés a corto plazo se define por:

Ecuación 3: Formulación matemática del modelo Rendleman-Bartter, Ma Weiming, 2015

$$dr(t) = \theta r(t)dt + \sigma r(t)dW(t)$$

Cabe mencionar que este modelo, al contrario que los anteriores, carece de la propiedad de contar con una reversión media, la cual, establece un valor determinado a largo plazo (como se ha explicado anteriormente) y crece hacia un nivel medio a largo plazo.

Estableciendo una comparación entre el modelo Rendleman-Barttrer y el CIR, comprobamos que ambos comparten una serie de características.

- Los dos modelos emplean un modelo binomial de predicción de precio.

- Ambos son dos de los modelos más utilizados en el caso de las opciones y ambos se basan en la premisa de que el precio de una acción S puede incrementar en base a un factor de incremento (u) o decrecer en base a un factor de decrecimiento (d).

- Los dos modelos se relacionan con otro modelo alternativo de fijación de precio de las opciones, el modelo Black-Scholes (el cual, es ampliamente conocido y utilizado). De hecho, ambos emplean la misma ecuación para mostrar cómo el modelo binomial puede ser reducido al modelo Black-Scholes cuando el número de observaciones n del modelo se aproxima al infinito (Lee, Chen, & Lee, 2016).

Después de haber desarrollado matemáticamente ambos modelos, Lee, Chen y Lee señalan que, en conclusión, el modelo CIR es fácil de seguir si uno cuenta con un nivel de conocimiento avanzado en la teoría de probabilidad; pero las asunciones sobre los parámetros de los modelos hacen que sus aplicaciones sean limitadas. Por otro lado, el modelo de Rendleman y Bartter es intuitivo y no requiere un nivel de conocimiento avanzado sobre la teoría de probabilidad. Sin embargo, la derivación del mismo se hace más complicada y tediosa[8].

La siguiente tabla comparativa muestra con gran detalle el contraste entre ambos modelos (Lee, Chen, & Lee, 2016)

Tabla 2: Comparación entre Rendleman-Bartter y Cox-Ingersoll-Ross, Lee, Chen & Lee, 2016

Modelo	Rendleman y Bartter	Cox Ingersoll Ross
Desarrollo matemático y de teoría de probabilidad	Álgebra básica	Álgebra básica
	Expansión de Taylor	Expansión de Taylor
	Teorema binomial	Teorema binomial
	Teorema del límite central	Teorema del límite central
	Propiedades de distribución binomial	Propiedades de distribución binomial
		Condición de Lyapounov
Asunciones	La media y varianza de los flujos de caja asociados al activo en cuestión se mantienen constantes durante el período de vida de la opción	El activo sigue un proceso binomial en cada período. Puede incrementar su valor en función de un factor u con probabilidad de crecimiento p o reducir su valor en función de un factor p con probabilidad $1-p$
		Para aplicar el teorema del límite central, se necesita escoger u, d y p
Ventajas y desventajas	Los lectores con un nivel académico universitario en matemáticas y teoría de probabilidad pueden seguir este enfoque fácilmente	Los lectores con un nivel avanzado en teoría de probabilidad pueden seguir este enfoque, pero para aquellos que no dispongan de tal nivel, puede ser difícil de seguir
	El enfoque es intuitivo, pero la derivación es más complicada y tediosa	Las asunciones sobre los parámetros u, d y p hacen que sea un enfoque más estricto

[8] Para más información a este respecto, consultar Lee, C.-F., Chen, Y., & Lee, J. (2016). Alternative Methods to Derive Option Pricing Models: Review and Comparison. Review of Quantitative Finance and Accounting, v. 47, iss. 2, páginas 435-442.

2.3.4. Brennan y Shwartz

El modelo de Brennan y Schwatz contempla dos factores, como su homólogo anterior, donde la tasa de interés a corto plazo se revierte hacia una tasa establecida a largo plazo como la media, que también sigue un proceso estocástico. El modelo se emplea principalmente para la valoración de bonos (Hsin, 1995).

Este modelo fue introducido en 1979. Define la tasa de interés a corto plazo y la tasa de perpetuidad como las principales fuentes de incertidumbre para los productos financieros dependientes de las tasas de interés.

Generalmente, para implementar cualquier modelo de valoración de bonos, se deben estimar los parámetros empleados en los procesos estocásticos de las variables seleccionadas, a través de la calibración. A este respecto, Brennan y Schwatz determinan que, dado que los procesos estocásticos de las tasas de interés son especificados de manera exógena, los datos empíricos de ciertos sustitutivos de la tasa de interés pueden ser empleados directamente en la estimación de los procedimientos. Sin embargo, la probabilidad máxima de estimación se basa únicamente en una aproximación temporal discreta sobre los procedimientos de la tasa de interés y, por lo tanto, dicha aproximación está sujeta a sufrir problemas de agregación temporal (Hsin, 1995).

En su modelo de equilibrio parcial, los autores asumen un proceso conjunto de Gauss-Markov para las variables de estado, la tasa de interés a corto plazo y las tasas de perpetuidad a largo plazo.

En definitiva, y tras haber realizado una implementación empírica del modelo, se concluye que el mismo impone menores restricciones sobre las necesidades dependientes de las tasas de interés inscritas en el procedimiento de valoración de bonos. También evita ciertas inconsistencias presentes en algunos modelos de valoración. El desempeño empírico del modelo de dos factores de Brennan y Schwartz obtiene mejores resultados que el mismo del modelo monofactorial desarrollado con anterioridad (ya que data de 1977).

Por otro lado, los análisis de sensibilidad indican que las dinámicas de la tasa de interés a largo plazo afectan al precio del bono de manera diferente a como lo hacen las dinámicas de la tasa a corto. Adicionalmente, el impacto de un cambio concreto en la tasa a largo plazo es, generalmente, mucho mayor que sobre el corto plazo. Los resultados de su estudio aportan, además, evidencias suficientes para señalar varias inadecuaciones de los modelos de un único factor (Hsin, 1995)

La formulación matemática del modelo de predicción de tasas de interés es la siguiente:

Ecuación 4: Formulación matemática del modelo Brennan y Shwartz, Ma Weiming, 2015

$$dr(t) = K(\theta - t(t))dt + \sigma r(t)dW(t)$$

En el estudio de Zabolotnyuk, Jones y Veld aplicado a la valoración de los bonos convertibles, los autores afirman que el modelo de Brennan y Shwartz cuenta con un sustento teorético de importancia, ya que explica los mecanismos económicos detrás del evento de *default*, conectando el hecho de bancarrota con la estructura de los capitales de la firma. Sin embargo, al tratarse de un modelo estructural, requiere una estimación simultánea del resto de activos susceptibles de cometer *default*. Esto último hace que la estimación del modelo sea complicada. No obstante, en el estudio se emplean diferentes procedimientos para hacer que la estimación global sea más sencilla, empleando una serie de métodos que, si bien simplifican el proceso, también reducen el ámbito de aplicación del modelo.

En el enfoque del modelo aplicado a la valoración de bonos convertibles, cabe destacar una serie de especificaciones

- El valor de la firma en concreto es la variable de estado central. Se define como el rendimiento que ofrece la firma comparado con el rendimiento ofrecido por el activo libre de riesgo a cada momento
- El efecto de dilución que resulta de la conversión del modelo debe ser tenido siempre en cuenta
- El efecto de todos los flujos de caja, de acuerdo con la evolución de la firma, debe ser igualmente tenido en cuenta.
- Los activos de la empresa deben ser suficientes como para financiar todas las recuperaciones necesarias en caso de *default*
- El proceso de determinación del precio de la acción de la empresa en el mercado está determinado endógenamente por todo lo anterior

La conclusión final del estudio de Zabolotnyuk, Jones y Veld es que el modelo Brennan-Shwartz, que data del 1979, obtiene peores resultados y es más limitado en cuanto a aplicación para la valoración de bonos convertibles más complejos, incluyendo aquellos emitidos por compañías cuya estructura de capital sea más compleja. Los otros modelos comparados en el estudio de los autores, el modelo Tsiveriotis-Fernandes (TF) y el Ayache-Forsyth-Vetzal (AFV), son versiones modernas del Brennan-Shwartz que no dependen de la estructura de capital de la firma, ya que adoptan un enfoque teorético más reducido (Zabolotnyuk, Jones, & Veld, 2010)

2.3.5. Hull White

El modelo Hull White, al cual se han referido muchos de los estudios mencionados anteriormente, se posiciona como uno de los más completos y, por tanto, principales para la predicción de derivados y bonos relacionados con la tasa de interés. Se trata de un modelo de dos factores que complementa tanto al modelo Vasicek como al modelo CIR.

Los productos financieros híbridos o exóticos, como los que venimos tratando hasta ahora, se dividen en dos categorías principales. Por un lado, existen los que son "*non-path dependent*", en el cual, los pagos dependen únicamente del valor del activo subyacente en un momento concreto. Por otro lado, en los "*path dependent*" los pagos dependen de alguna propiedad del valor del activo además del valor presente del mismo en un momento determinado. Más allá de esto, los instrumentos financieros *path dependent* pueden ser categorizados en dependencia débil o dependencia fuerte. Así, un ejemplo de dependencia débil es el siguiente: una opción "barrera" en el cual la opción se dispara si el activo subyacente adquiere un valor determinado, prescrito con anterioridad, antes de llegar a la fecha de maduración. Una opción asiática, por otro lado, nos da el ejemplo de una opción fuertemente dependiente. En este caso, por ejemplo, el precio de la opción depende del precio medio del activo desde el momento de su salida al mercado hasta el momento de expiración.

En este último tipo de derivados, es necesario introducir una variable de estado adicional para cada uno de los factores extra que afectan al precio del derivado. La adición de variables adicionales incrementa la dimensionalidad en general del problema de valoración, por lo que el desarrollador del modelo de predicción debe decidir entre valorar el derivado en cuestión utilizando un árbol de decisión o a través del método de MonteCarlo, principalmente (Fletcher & Gardner, 2009)

El modelo Hull-White cambia el parámetro temporal del modelo Vasicek, permitiendo la desviación de las fórmulas analíticas que configuran el núcleo de la distribución normal. Sin embargo, una deblidad del mismo es que también permite llegar a tasas de interés negativas con probabilidad positiva. Se trata de un modelo de interés a corto plazo, cuya ecuación estocástica diferencial para la extensión del modelo Vasicek es la siguiente (Naveed Nazir, 2009):

Ecuación 5: Formulación matemática del modelo Hull White como extensión del modelo Vasicek, Naveed Nazir, 2009

$$dr_t = (a(t) - b(t)r_t)dt + \sigma(t)dW_t$$

Entendido como extensión del modelo CIR, el modelo Hull-White se formula como:

Ecuación 6: Formulación matemática del modelo Hull White como extensión del modeloCIR, Naveed Nazir, 2009

$$dr_t = [a(t) - b(t)r_t]dt + \sigma(t)\sqrt{r_t}dW_t$$

En este caso, $a(t), b(t), \sigma(t)$ son funciones no-aleatorias de t.

Hull-White extiende el modelo CIR introduciendo un parámetro $a(t)$ que varía en función del tiempo, con una variación temporal media. La estructura temporal de las tasas de interés en el momento actual equivale a la solución de un sistema con infinitas ecuaciones, una para cada vencimiento posible. Sin embargo, no existe ninguna expresión analítica de $a(t)$ más allá de la observación de la curva de rendimiento del bono. Además, tampoco hay garantía de que una aproximación numérica a $a(t)$ mantenga la tasa de interés r positiva, por lo que la extensión no es tratable desde un punto de vista analítico (Naveed Nazir, 2009).

2.4. La calibración

Como hemos mencionado anteriormente en nuestro estudio de la literatura, el proceso de calibración es una parte fundamental de la construcción de los modelos financieros.

Centrándonos en los modelos que nos ocupan, hemos de destacar una característica común a todos ellos de relevancia. Los modelos Vasicek, CIR, Rendleman y Bartter, Brennan y Shwartz y Hull-White de un factor siguen un proceso Ornstein–Uhlenbeck de inferencia estocástica. A nivel descriptivo, se trata de un proceso de computación espacio-temporal, es decir, integra un componente espacial y otro temporal en un mismo proceso. Esto nos permite situar un punto determinado en un momento concreto, lo cual posibilita la estimación de la evolución de una variable en concreto (en nuestro caso, un tipo de interés determinado) bajo situaciones de incertidumbre (Nguyen & Veraart, 2017)

El modelo Hull-White de un factor, en concreto, es entendido como una extensión del modelo Vasicek y, por tanto, sigue también un proceso Ornstein-Uhlenbeck (Hull, 2005). Si bien lo anterior es correcto, existen muchas formas de calibrar el modelo, dada la complejidad del mismo (Gurrieri, Nakabayashi, & Wong, 2009).

En primer lugar, describiremos los métodos de calibración de los procesos Ornstein-Uhlenbeck a nivel general, y, en segundo lugar, detallaremos los métodos específicos relativos al modelo Hull-White.

2.4.1. Calibración de Ornstein-Uhlenbeck

Existen, principalmente, dos métodos distintos para calibrar el proceso Ornstein-Uhlenbeck: el método de la regresión de mínimos cuadrados y el método de máxima probabilidad (van den Berg, 2011). Por motivos de simplicidad, describiremos únicamente el método de regresión de mínimos cuadrados.

La ecuación general del proceso Ornstein-Uhlenbeck es la siguiente:

Ecuación 7: Formulación matemática del proceso Ornstein-Uhlenbeck, van den Berg, 2011

$$dSt = \lambda(\mu - S_t)dt + \sigma dW_t$$

- λ es la tasa de reversión media
- μ es la media
- σ es la volatilidad

La relación entre dos observaciones consecutivas, S_i, S_{i+1} es linear, con un término aleatorio ε:

$$S_{i+1} = aS_i + b + \varepsilon;$$

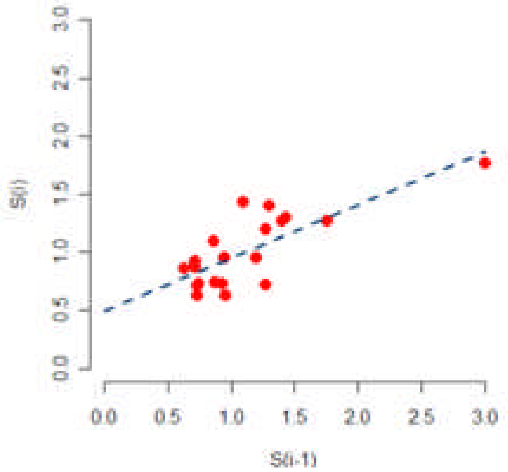


Gráfico 1: Ajuste de mínimos cuadrados, van den Berg, 2011

Y la relación entre la adecuación linear y los parámetros del modelo se define por:

$$a = e^{-\lambda\delta}$$
$$b = \mu(1 - e^{-\lambda\delta})$$
$$sd(\varepsilon) = \sigma\sqrt{\frac{1 - e^{-2\lambda\delta}}{2\lambda}}$$

Las constantes a las que se dirige la calibración pueden ser reescritas de la siguiente manera (van den Berg, 2011):

Ecuación 8: Equivalencias de los parámetros estimados en la calibración, van den Berg, 2011

$$\lambda = -\frac{\ln a}{\delta}$$
$$\mu = \frac{b}{1 - a}$$
$$\sigma = sd(\varepsilon)\sqrt{\frac{-2\ln a}{\delta(1 - a^2)}}$$

El método de la regresión de mínimos cuadrados puede ser calculado sirviéndose de las siguientes ecuaciones:

Ecuación 9: Desarrollo matemático del método de la regresión de mínimos cuadrados, van den Berg, 2011

$$S_x = \sum_{i=1}^{n} S_{i-1}$$

$$S_y = \sum_{i=1}^{n} S_i$$

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^{n} S_{i-1}^2$$

$$S_x = \sum_{i=1}^{n} S_{i-1} S_i$$

$$S_{yy} = \sum_{i=1}^{n} S^2$$

De las cuales, es posible obtener los parámetros siguientes de cara a realizar el ajuste con los mínimos cuadrados:

Ecuación 10: Equivalencias de las variables complementarias a la calibración, van den Berg, 2011

$$a = \frac{nS_{xy} - S_x S_y}{nS_{xx} - S_x^2}$$

$$b = \frac{S_y - aS_x}{n}$$

$$sd(\varepsilon) = \sqrt{\frac{nS_{yy} - S_y^2 - a(nSxy - S_x S_y)}{n(n-2)}}$$

2.4.2. Calibración de Hull-White

Existen también, en este caso, dos modelos de calibración distintos.

El primero de ellos consiste en establecer una reversión media fija introduciendo un dato de correlación determinado, para después calibrar únicamente el parámetro de volatilidad correspondiente a los precios del activo financiero que queramos conocer. Esta estrategia guarda sentido teórico a raíz de la observación de que la reversión media tiene una fuerte influencia sobre las correlaciones de las tasas de interés (Gurrieri, Nakabayashi, & Wong, 2009).

El segundo método intenta calibrar tanto la reversión media como los parámetros de volatilidad de una serie de *caps/floorlets* y/o *swaptions* de diferentes vencimientos. Esta práctica está motivada por el hecho de que ambos parámetros tienen un peso crucial en la estimación del modelo y, por tanto, no deben dejar lugar a la arbitrariedad. (Gurrieri, Nakabayashi, & Wong, 2009)

Al igual que en el caso anterior, explicaremos únicamente el método escogido para nuestra calibración por motivos de simplicidad. Cabe la pena destacar que existen varios métodos dentro de cada modelo para establecer una calibración correcta.

El método escogido busca optimizar la reversión media y la volatilidad de tal manera que el precio analítico se aproxime al precio de mercado. En otras palabras, la reversión media calibrada y la volatilidad corresponden a los puntos a y σ en los cuales la siguiente función encuentra su mínimo:

Ecuación 11: Formulación matemátoca de la calibración de Hull White, Gurrieri, Nakabayashi & Wong, 2009

$$G(a,\sigma) = \sum_{1\le i\le n_m, 1\le j\le n_t - 1} W_{i,j}\left(\frac{PV^{\mathrm{mod}}(M_i,T_j)(a,\sigma)}{PV^{mkt}(M_i,T_j)} - 1\right)^2$$

3. Estudio de campo

En esta parte del trabajo realizaremos el estudio empírico mencionado anteriormente en el trabajo. En concreto, realizaremos una estimación de cuatro tipos de interés distinto: el LIBOR a 12 meses y el tipo de interés de los bonos alemán, español y americano a 10 años. Estimaremos estos tipos de interés utilizando los cinco modelos de predicción descritos en el marco teórico a través de *Python*.

En primer lugar, señalaremos los valores de referencia de nuestras proyecciones. En segundo lugar, detallaremos el proceso de calibración que seguiremos, ofreciendo nuestros primeros resultados. En tercer lugar, explicaremos las variables de entrada de los modelos. En cuarto lugar, ofreceremos los resultados de nuestra investigación empírica. En quinto lugar, compararemos los resultados obtenidos y, finalmente, en sexto lugar, discutiremos dichos resultados.

3.1. Tipos de interés de referencia

A continuación, estableceremos una tabla comparativa con los valores referencia sobre los cuales compararemos los resultados de nuestras predicciones

Tabla 3: Resumen de los tipos de interés de referencia, Elaboración propia

Tipo de interés	Valor en 18 de mayo 2017	Valor en 18 de mayo 2018
LIBOR[9]	-0,144 %	-0, 231 %
Bono español a 10 años[10]	1,562%	1,437%
Bono alemán a 10 años[11]	0,343%	0,576%
Bono americano a 10 años[12]	2,228%	3,06%

[9] Extraído de https://fred.stlouisfed.org/series/EUR12MD156N (FRED, 2018)
[10] Extraído de https://es.investing.com/rates-bonds/spain-10-year-bond-yield-historical-data (Investing, 2018)
[11] Extraído de https://es.investing.com/rates-bonds/germany-10-year-bond-yield-historical-data (Investing, 2018)
[12] Extraído de https://es.investing.com/rates-bonds/u.s.-10-year-bond-yield-historical-data (Investing, 2018)

3.2. Estimación: calibración

De acuerdo con la investigación teórica realizada, la calibración es un proceso de vital importancia para la predicción de las tasas de interés, entendiendo calibración como el proceso de elección de los datos de entrada relativos a la volatilidad y correlación.

Para realizar la estimación deseada, hemos realizado la calibración correspondiente para obtener el valor óptimo de las constantes $K, theta$ y $sigma$, cuyo significado explicaremos en el siguiente punto. De acuerdo con los estudios destacados en nuestro marco teórico[13], los modelos Vasicek, CIR, Rendleman y Bartrerr y Brennan y Shwartz siguen un proceso estocástico Ornstein–Uhlenbeck. Aplicando el método de los mínimos cuadrados descrito en el correspondiente apartado de nuestro marco teórico[14], obtenemos los siguientes resultados:

Tabla 4: Detalle de los resultados obtenidos de la calibración para los procesos Ornstein-Uhlenbeck, Elaboración propia

	LIBOR	Bono español	Bono alemán	Bono americano
K	0,58550	0,82879	0,32024	0,35346
Theta	-0.00143	0,061802	0,0039051	0.02326
sigma	0,0000199	0,0005652	0,0003669	0,0004337

Para la calibración, hemos construido un modelo en Excel que replica los resultados obtenidos por otros estudios mencionados en nuestro marco teórico (van den Berg, 2011)[15]

[13] Consultar apartado del marco teórico: los modelos de interés a corto plazo
[14] Consultar el apartado del marco teórico: la calibración
[15] Es posible observar el detalle del modelo construido en el Anexo 1

Con respecto al modelo Hull-White, en línea con lo descrito en su apartado del marco teórico, nos hemos servido de un proceso de calibración específico[16]. Los resultados obtenidos han sido los siguientes:

Tabla 5: Detalle de los resultados obtenidos de la calibración para el modelo Hull White, Elaboración propia

	LIBOR[17]	Bono español	Bono alemán	Bono americano
Theta	-	0.01935	0.01933	0.01932
sigma	-	0.00001	0.00001	0.00001

3.3. Variables de entrada

A continuación, se describen las variables de entrada comunes a todos los modelos objeto de estudio.

- r_0 como la tasa de interés inicial en $t = 0$. En nuestro caso, corresponderá con el valor de la tasa de interés específica a 18 de mayo de 2017
- K, $theta$ y $sigma$ son las constantes calculadas a través de la calibración
- T es el periodo temporal, en cuanto a número de años. En todos los modelos construidos es igual a 1
- N es el número de intervalos escogidos para la estimación. Tendrá valor de 360 en todas nuestras estimaciones, correspondientes al número de días en 1 año.
- *seed* es el valor de inicialización que utiliza la librería *Numpy*, de *Python*, para generar una distribución de números aleatorios[18]. Tendrá valor de 1000 en todos los casos

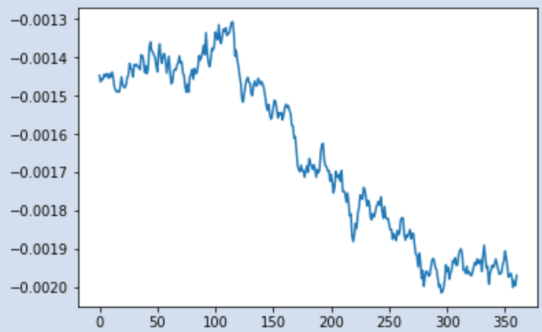
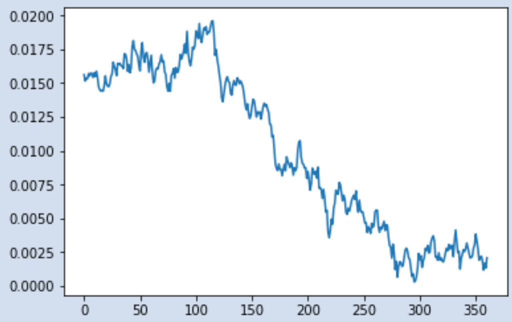
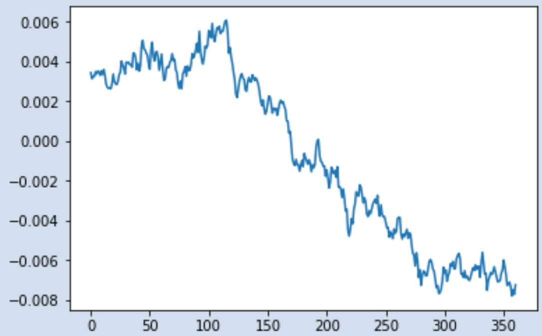
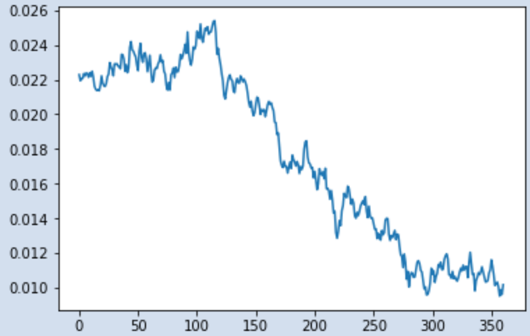
[16] Puede observar el detalle del código de *Python* empleado en la calibración en el Anexo 2
[17] La calibración del LIBOR para Hull-White ha resultado errónea. No es posible llevar a cabo la calibración propuesta partiendo de una tasa de interés negativa. Sería necesario, por tanto, realizar otra calibración más avanzada para obtener un resultado aceptable
[18] *seed* no es una constante como tal, sino un valor de referencia para que *Python* obtenga una distribución de números aleatorios sobre la cual realizar la estimación que propone el modelo.

3.4. Estimación: resultados

Los modelos objeto del presente estudio empírico dan lugar a una distribución de tasas de interés asociados a cada intervalo temporal. A continuación, se presentan las gráficas asociadas a cada estimación, obtenidas a través de *Python*. En el anexo 3 se presenta el código empleado para cada uno de los modelos.

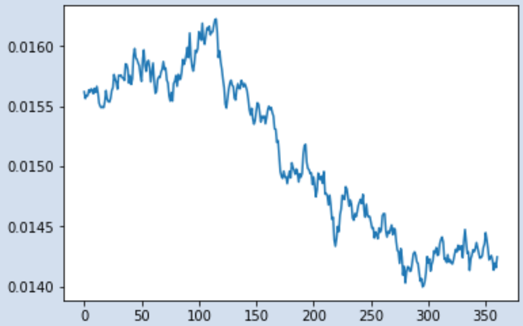
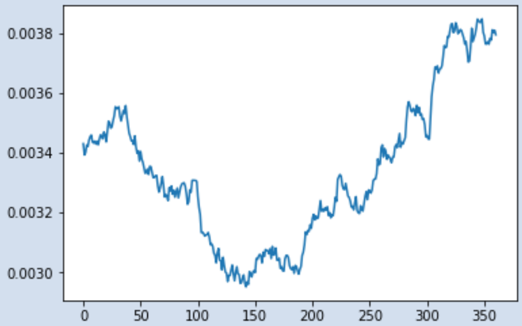
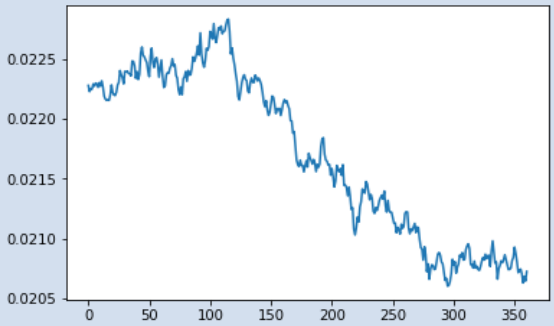
3.4.1. Vasicek

Tabla 6: Resumen de los gráficos obtenidos de acuerdo con la estimación del modelo Vasicek, Elaboración propia

LIBOR	**Bono español**
	
Bono alemán	**Bono americano**
	

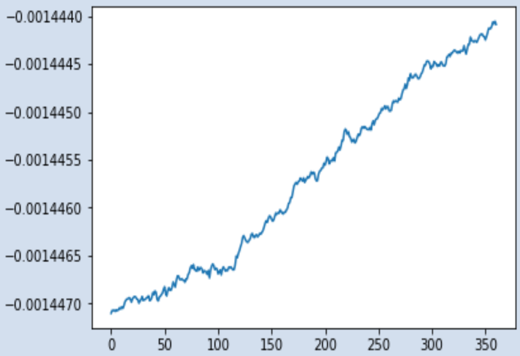
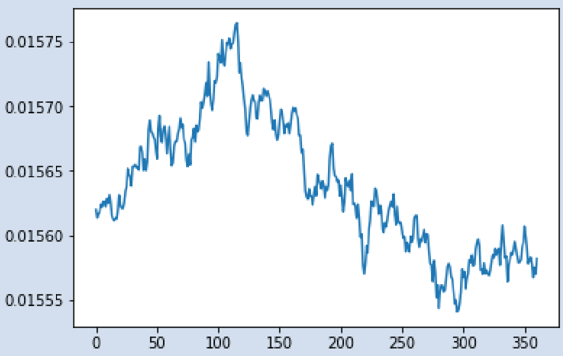
3.4.2. CIR[19]

Tabla 7: Resumen de los gráficos obtenidos de acuerdo con la estimación del modelo CIR, Elaboración propia

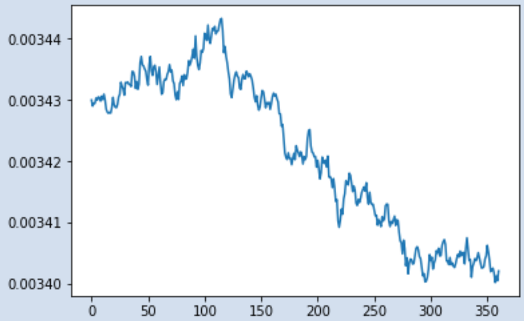
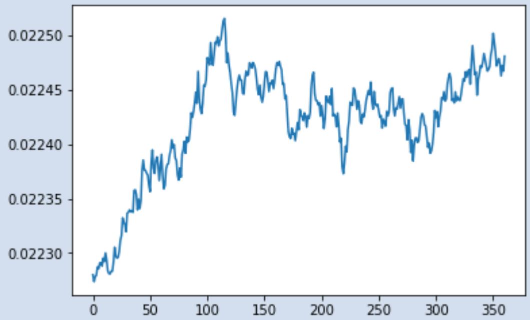
Bono español	
	
Bono alemán	**Bono americano**
	

3.4.3. Rendleman y Barttrer

Tabla 8: Resumen de los gráficos obtenidos de acuerdo con la estimación del modelo Rendleman-Bartter, Elaboración propia

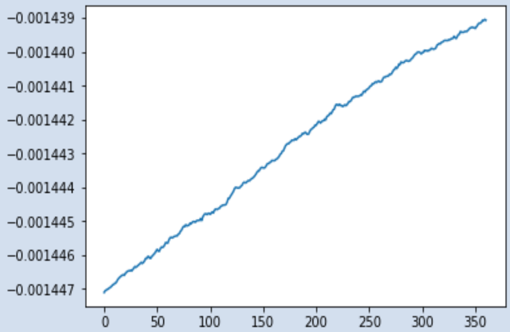
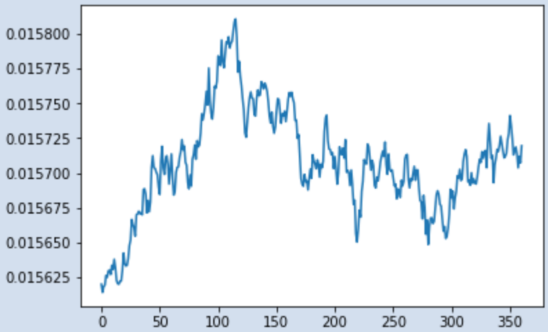
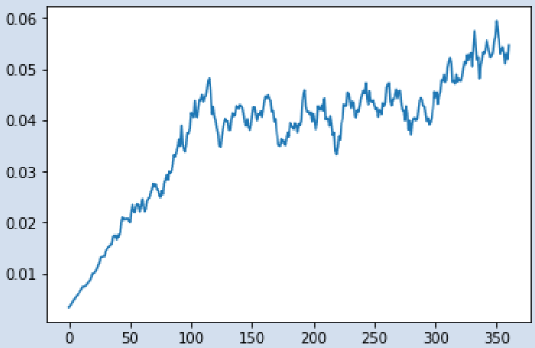
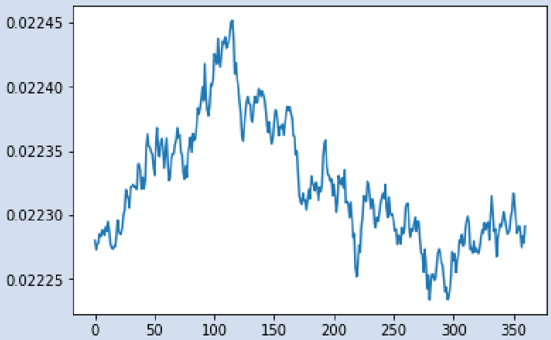
LIBOR	**Bono español**
	

[19] En este modelo no hemos podido calcular las proyecciones para el LIBOR dado que el modelo no acepta una tasa de interés negativa como variable de entrada

Bono alemán	Bono americano
	

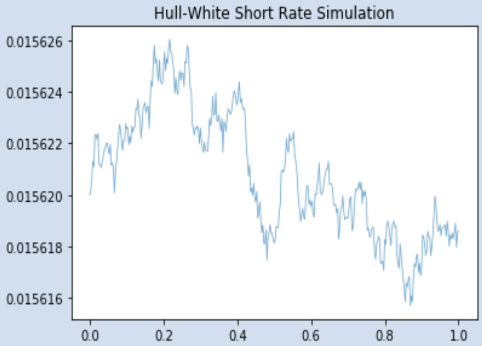
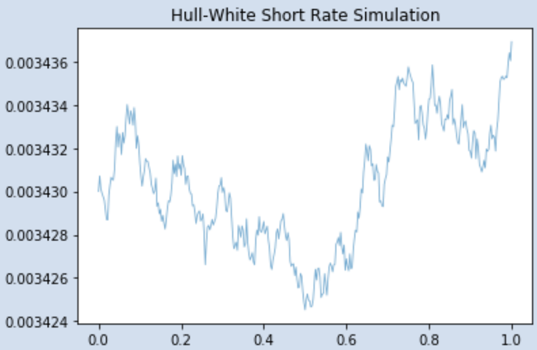
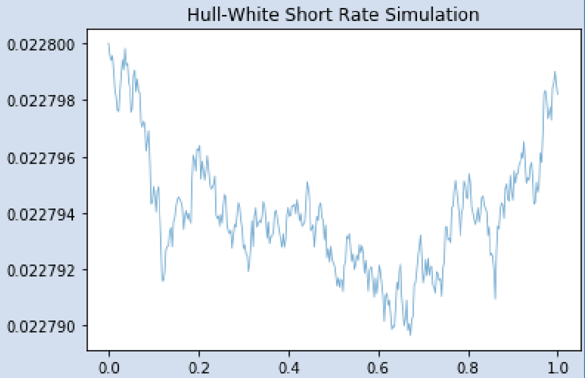
3.4.4. Bennan y Shwartz

Tabla 9: Resumen de los gráficos obtenidos de acuerdo con la estimación del modelo Brennan y Shwartz, Elaboración propia

LIBOR	Bono español
	
Bono alemán	**Bono americano**
	

3.4.5. *Hull White*[20]

Tabla 10: Resumen de los gráficos obtenidos de acuerdo con la estimación del modelo Hull White, Elaboración propia

<table>
<tr><th colspan="2">Bono español</th></tr>
<tr><td colspan="2">
</td></tr>
<tr><th>Bono alemán</th><th>Bono americano</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

3.5. Comparación

Una vez hemos obtenido los resultados de nuestra estimación, se hace necesario establecer una comparación efectiva entre todos ellos. Esto nos permitirá conocer qué modelo ha sido más acertado en sus estimaciones a fin de identificar el más adecuado de ellos. En este sentido, realizaremos dos tipos de comparación: una comparación de naturaleza gráfica y otra de carácter numérico.

---

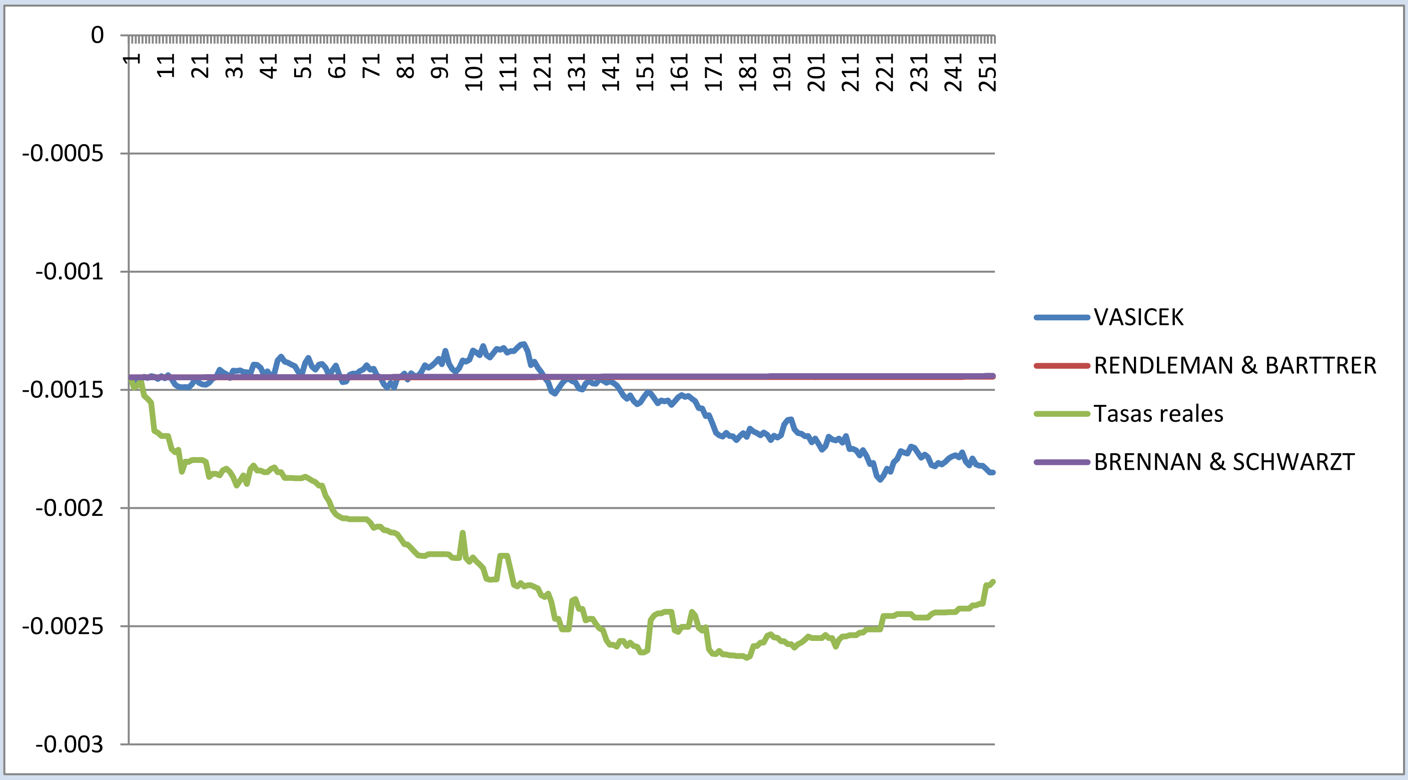
[20] Dado que no hemos podido realizar la calibración de Hull White para el LIBOR, no hemos podido construir unas proyecciones válidas

3.5.1. Comparación gráfica[21]

Para realizar nuestra comparación gráfica, hemos superpuesto los resultados obtenidos por cada modelo sobre los 4 tipos de interés con los que hemos trabajado. Los resultados son los siguientes:

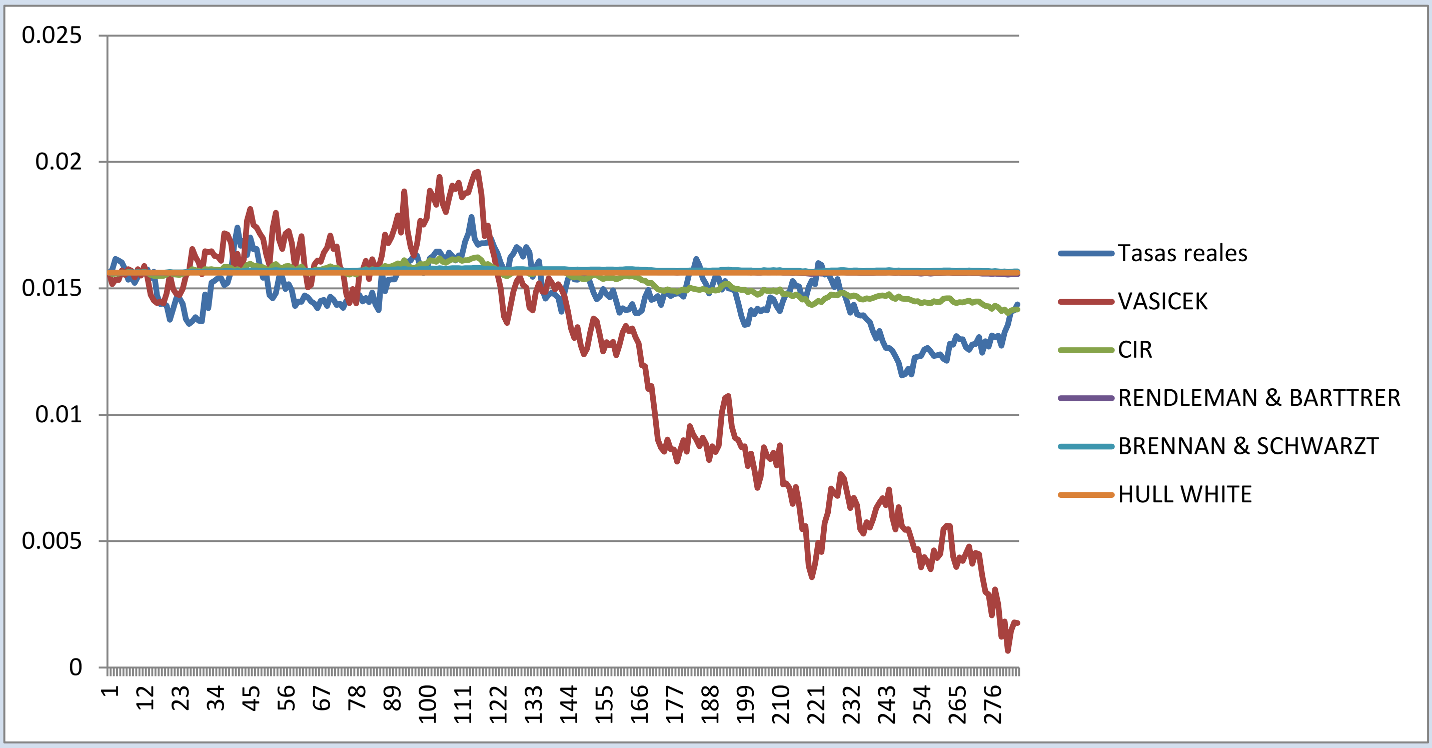
Tabla 11: Comparación gráfica de los resultados obtenidos con respecto a los datos reales para cada tipo de interés, Elaboración propia

LIBOR

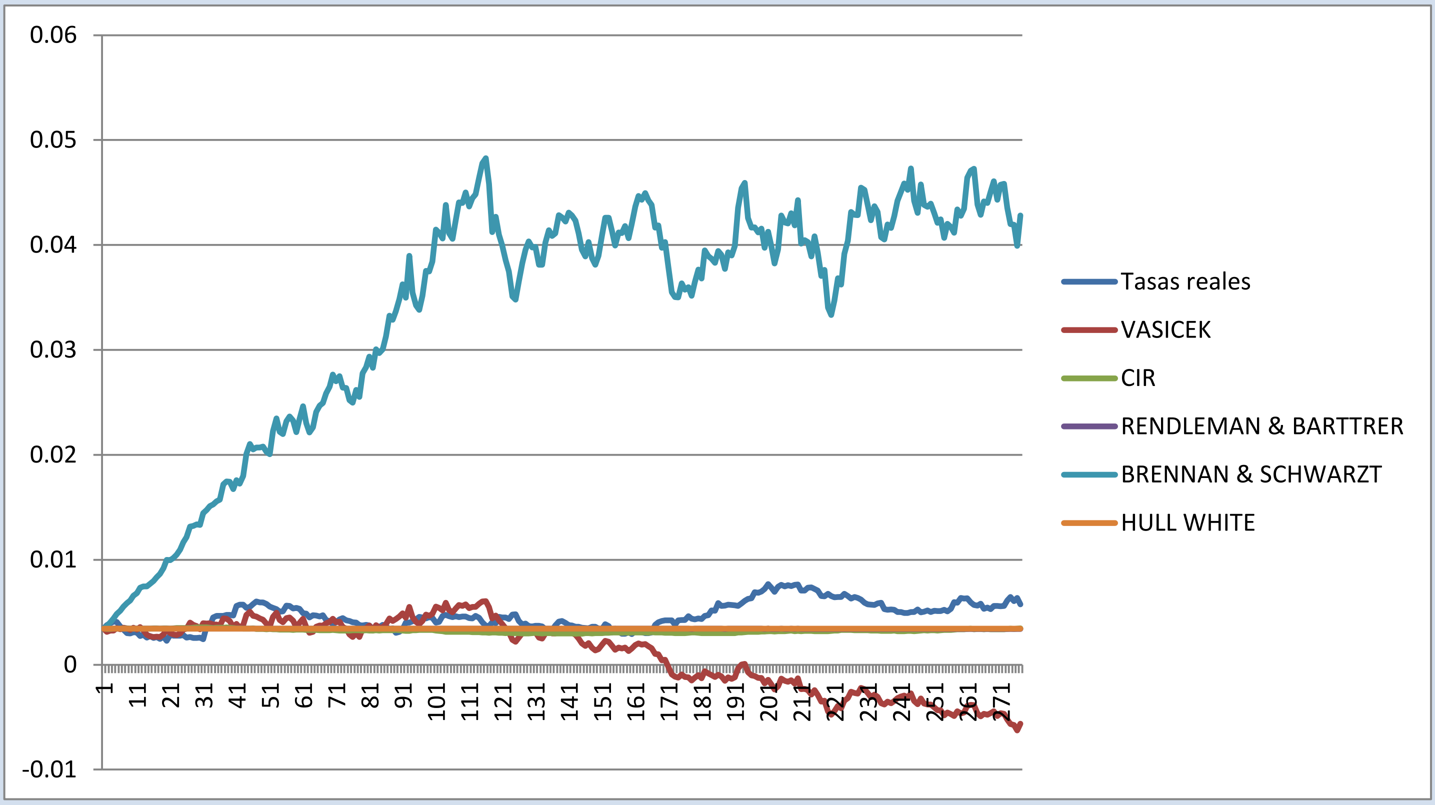


[21] Todos los gráficos contenidos en el presente apartado son de elaboración propia

Bono español



Bono alemán



Bono americano

A primera vista, podría parecer que las predicciones están alejadas del valor real de las tasas de interés. Si observamos los ejes con más detenimiento, sin embargo, comprobamos que las diferencias son, en todo caso, mínimas. Únicamente en el caso del bono alemán parece que la diferencia entre el valor real del bono y la predicción del modelo de Brennan y Schwartz está realmente alejada. En cualquier caso, ante las dudas que plantea este tipo de comparación, es necesario establecer otro método que compare el desempeño de los modelos con mayor exactitud

3.5.2. Comparación numérica

Con respecto a la comparación numérica, y en la misma línea en la que hemos venido trabajando, nos hemos servido del método del error cuadrático medio. Se trata de un procedimiento ampliamente utilizado para la comparación de predicciones especialmente. La formulación matemática de este método viene dada por: (Gonzalez, 1992)

Ecuación 12: Formulación matemática del método del error cuadrático medio, Gonzalez, 1992

$$ECM = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i - Y_i)^2$$

Donde $\hat{Y}_i$ es el vector de las proyecciones y Y_i es el vector de los valores reales.

De acuerdo con ello, hemos construido un nuevo modelo en Excel para obtener unos resultados adecuados. En el Anexo 4 se observa el detalle de dicho modelo.

En la siguiente tabla se recogen los errores obtenidos por cada modelo para cada tipo de interés escogido. Hemos resaltado el mínimo error obtenido para cada interés:

Tabla 12: Recopilación de resultados de los errores de estimación, Elaboración propia

	LIBOR	Bono español	Bono alemán	Bono americano
Vasicek	0.00000058	0.00002640	0.00003140	0.00009091
CIR	-	0.00000117	0.00000381	0.00002072
Rendleman	0.00000076	0.00000222	0.00000328	0.00001394
Brennan	0.00000076	0.00000236	0.00097601	0.00001461
Hull-White	-	0.00000138	0.00000276	0.00000525

3.6. Discusión

De acuerdo con los resultados obtenidos, podemos señalar varias conclusiones:

1. Nuestros resultados arrojan unos resultados muy adecuados, a nivel general, dado el escaso valor del error cuadrático medio de todas las predicciones propuestas.
   Este hecho sugiere que la calibración llevada a cabo ha sido acertada.

2. Hemos observado que los errores obtenidos aumentan con el paso del tiempo, es decir, tienen mayor valor cuanto más se acercan al año.
   Esta circunstancia tiene mucho sentido, dado que los modelos seleccionados se utilizan en el corto plazo.

Los resultados sugieren que, en la práctica, podrían obtenerse mejores resultados ajustando el horizonte temporal de las proyecciones y actualizando cada modelo mediante un proceso continuo de recalibración.

3. El modelo Vasicek ha demostrado ser el mejor en la estimación del LIBOR; el modelo CIR ha obtenido mejores resultados para la estimación de la tasa de interés del bono español; y el modelo Hull-White ha probado obtener con más exactitud los valores de la tasa de interés del bono alemán y americano.

   El modelo Hull-White es, por tanto, el que mejores resultados ha obtenido a nivel general.

   Esto también guarda mucho sentido, dado que es el modelo más complejo y el que más variables tiene en cuenta tanto para realizar la calibración como la estimación.

Respondiendo al objetivo secundario de esta investigación, establecemos las siguientes conclusiones.

1. *Python* ha demostrado ser una herramienta perfectamente válida para la investigación propuesta, por varias razones secundarias.

2. En primer lugar, todo el código empleado es de carácter público, lo cual, implica que está igualmente disponible para todo el mundo. Esta circunstancia implica un mayor acceso a la realización de estudios empíricos por el gran público, sin tener que construir formulaciones matemáticas complejas desde cero.

3. En segundo lugar, las correcciones realizadas sobre el código empleado han sido mínimas y, en todo caso, relacionadas con las variables de entrada del modelo. Concluimos que, una vez entendido el funcionamiento de estas variables, es perfectamente factible llegar a resultados aceptables.

4. En tercer lugar, durante nuestra investigación, hemos encontrado formulaciones más complejas de *Python* para obtener resultados aún más precisos y detallados. Teniendo en cuenta la naturaleza de nuestra investigación, es posible señalar que, contando con un conocimiento más profundo de *Python*, se haría posible realizar proyecciones aún más relevantes

4. Conclusiones

En este trabajo hemos realizado una aproximación tanto teórica como empírica a la construcción de los modelos financieros de predicción de tasas de interés a corto plazo. Se trata de un tema de amplia aplicación práctica en el entorno profesional que, además, goza de abundante interés y vigencia, entre otros factores.

Adicionalmente, la proliferación de nuevas herramientas en el entorno tecnológico actual, que ha dado lugar al desarrollo de novedosas técnicas de computación y programación, constituye un factor muy relevante para la comunidad científica y para el público en general. Por ello, hemos optado por realizar nuestra investigación sirviéndonos de una herramienta de uso público como *Python*, gracias a la cual, hemos tenido acceso a datos y procedimientos también de carácter público.

La investigación teórica realizada sugiere que dos de los factores más importantes para la construcción de un modelo adecuado de predicción de tasas de interés son, por un lado, la inmunización y, por otro lado, la recalibración del mismo. Ambos factores derivan de una variable fundamental: la volatilidad. Para evitar una posible incidencia negativa de estos factores, se hace imprescindible realizar una calibración idónea, entendiendo como tal la obtención de unas variables de entrada adecuadas según las circunstancias que rodeen el proceso de computación. Por esta razón, en nuestro estudio empírico, hemos realizado dos procesos de calibración diferenciados para ajustarse a las necesidades de cada modelo.

Los resultados obtenidos sugieren que, a mayor horizonte temporal, los modelos cometerán mayores errores de predicción. Sin embargo, la elección de dicho horizonte temporal ha sido adecuada para mantener un nivel de errores aceptable sin que los resultados sean irrelevantes. En la misma línea, la elección de los cuatro tipos de interés ha aportado mayor envergadura a nuestro estudio, contribuyendo de manera efectiva a la comprensión de los modelos sin que haya supuesto mayores problemas de computación.

El bajo nivel de errores obtenidos sugiere que la implementación de los modelos ha sido satisfactoria, con lo cual, hemos logrado responder al objetivo principal de nuestra investigación. Este hecho sugiere, además, que el proceso de calibración ha resultado ser adecuado. Hemos logrado comprender el funcionamiento de varios modelos de interés gracias a una investigación empírica donde ha quedado plasmado el razonamiento matemático empleado por cada uno de los modelos. Si bien lo anterior es cierto, cada modelo puede ser desarrollado con mayor profundidad y de varias maneras, con lo cual, nuestro trabajo es susceptible de ser refinado integrando procedimientos más complejos propios a cada modelo.

El modelo Hull-White ha mostrado obtener, a nivel general, mejores estimaciones que los demás modelos empleados. Esta circunstancia es consistente con la investigación teórica realizada, dado que el modelo Hull-White es el más desarrollado de los propuestos y el que tiene en cuenta mayor cantidad de variables. Con respecto a la etapa de experimentación empírica, cabe destacar que el modelo Hull-White ha sido el más difícil de calcular, debido principalmente a su proceso de calibración y al número de variables que integra. Esta última característica, en particular, supone mayores necesidades computacionales que acaban por dificultar el proceso. Los demás modelos tratados han presentado una dificultad menor y común a todos ellos.

La experiencia de construcción de los modelos utilizando *Python* ha resultado ser exitosa y prometedora. Estas características, unidas al hecho de que todos los recursos empleados son de dominio público, hacen que el estudio pormenorizado de las posibilidades que ofrecen *Python* y herramientas de programación similares sea de especial relevancia. Instamos a la realización de estudios más específicos sobre este tema que ayuden a comprender mejor las posibilidades accesibles para la comunidad científica y, especialmente, para el gran público. También echamos en falta la realización de estudios empíricos más detallados sobre la comparación entre varios lenguajes de programación, a fin de descubrir el más indicado para cada tipo de usuario. Consideramos conveniente tener más información acerca de cuál de ellos resulta más recomendable, teniendo en cuenta, especialmente, el nivel de conocimiento programático previo del usuario y la importancia relativa de la investigación.

En resumen, la investigación presentada ha logrado esclarecer el funcionamiento de los modelos de predicción de tasas de interés a corto plazo tanto en su dimensión teórica como práctica. Si bien es cierto que, actualmente, existen multitud de modelos más complejos y refinados para cada utilidad específica, los modelos escogidos forman parte de la base de la investigación científica en este campo en concreto y, por lo tanto, comprenderlos fehacientemente resulta de especial relevancia para llegar a comprender formulaciones más complejas. Además, hemos conseguido probar que los nuevos avances tecnológicos posibilitan la realización de estudios empíricos sencillos pero significativos, lo cual, permite que un mayor público pueda desarrollar una investigación científica de esta magnitud.

Bibliografía

Aas, K., Neef, L. R., Williams, L., & Raabe, D. (2018). Interest rate model comparisons for participating products under Solvency II. *Scandinavian Actuarial Journal, Apr.2018, Vol. 2018 Issue 3*, 203-224.

Baker, B. (2014). *A Computational Approach to Affine Models of the Term Structure.* American University.

Balaraman, G. (1 de 5 de 2015). *Hull White Term Structure Simulations with QuantLib Python*. Obtenido de http://gouthamanbalaraman.com/blog/hull-white-simulation-quantlib-python.html

Balaraman, G. (27 de 10 de 2015). *Short Interest Rate Model Calibration in QuantLib Python*. Obtenido de http://gouthamanbalaraman.com/blog/short-interest-rate-model-calibration-quantlib.html

Bali, T. G. (2000). Testing the Empirical Performance of Stochastic Volatility Models of the Short-Term Interest Rate. *Journal of Financial & Quantitative Analysis, Vol. 35 Issue 2*, 191-215.

Boragan Arouba, S., & Fernández-Villaverde, J. (2015). A Comparison of Programming Languages in Economics. *Journal of Economic Dynamics & Control, Vol. 58*, 265-273.

Chan, K. C., Karolyi, G. A., Longstaff, F. A., & Sanders, A. B. (1992). An Empirical Comparison of Alternative Models of the Short-Term Interest Rate. *Journal of Finance, Vol. 47 Issue 3*, 1209-1227.

Fletcher, S., & Gardner, C. (2009). *Financial Modelling In Python.* Wiley Finance.

FRED. (2018). *12-Month London Interbank Offered Rate (LIBOR), based on Euro*. Obtenido de https://fred.stlouisfed.org/series/EUR12MD156N

Gonzalez, P. (1992). Error Cuadrático Medio de Predicción para Modelos Estructurales de Series Temporales. *Estadística Española, Vol. 34, Núm. 129*, 117-135.

Gurrieri, S., Nakabayashi, M., & Wong, T. (2009). Calibration Methods of Hull-White Model.

Hilpisch, Y. (2014). *Python For Finance.* O'Reilly.

Hsin, C.-W. (1995). An Empirical Investigation of the Two-Factor Brennan-Schwartz Term Structure Model. *Review of Quantitative Finance and Accounting, v. 5, iss. 1*, 71-92.

Hull, J. (2005). *Options, Futures and Other Derivatives.*

Investing. (2018). *Rentabilidad del bono de Alemania 10 años*. Obtenido de https://es.investing.com/rates-bonds/germany-10-year-bond-yield-historical-data

Investing. (2018). *Rentabilidad del bono de España 10 años*. Obtenido de https://es.investing.com/rates-bonds/spain-10-year-bond-yield-historical-data

Investing. (2018). *Rentabilidad del bono de Estados Unidos 10 años*. Obtenido de https://es.investing.com/rates-bonds/u.s.-10-year-bond-yield-historical-data

Kanevski, M., & Timonin, V. (2010). Machine learning analysis and modeling of interest rate curves. *European Symposium on Artificial Neural Networks - Computational Intelligence and Machine Learning*.

Lee, C.-F., Chen, Y., & Lee, J. (2016). Alternative Methods to Derive Option Pricing Models: Review and Comparison. *Review of Quantitative Finance and Accounting, v. 47, iss. 2*, 417-451.

Ma Weiming, J. (2015). *Mastering Python For Finance.* Birmingham: Packt Publishing Ltd.

Ma Weiming, J. (2015). *Mastering-Python-for-Finance-source-codes*. Obtenido de https://github.com/jamesmawm/Mastering-Python-for-Finance-source-codes/tree/master/B03898_05_Codes

Mullainathan, S., & Spiess, J. (Spring 2017). Machine Learning: An Applied Econometric Approach. *Journal of Economic Perspectives, V. 31, Iss. 2*, 87-106.

Naveed Nazir, M. (2009). *Short rates and bond prices in one-factor models.* Uppsala: Uppsala University.

Nguyen, M., & Veraart, A. (2017). Spatio-temporal Ornstein–Uhlenbeck Processes: Theory, Simulation and Statistical Inference. *Scandinavian Journal of Statistics, Vol. 44*, 46 –80.

Prechelt, L. (2000). An empirical comparison of seven programming languages. *Computer, Volume: 33, Issue: 10*, 23 - 29.

Rebonato, R. (2004). Interest–rate term–structure pricing models: a review. *Proceedings of The Royal Society: A Mathematical Physical and Engineering Sciences*, 667-728.

Rendleman, R. J., & Bartter, B. J. (1979). Two-State Option Pricing. *Journal of Finance, Volume 34, Issue 5*, 1093-1110.

van den Berg, T. (2011). Calibrating the Ornstein-Uhlenbeck (Vasicek) model.

Zabolotnyuk, Y., Jones, R., & Veld, C. (2010). An Empirical Comparison of Convertible Bond Valuation Models. *Financial Management (Wiley-Blackwell) Vol. 39, Issue 2*, 675-706.

Anexos

Anexo 1

Modelo de Excel empleado para la calibración. Sólo se incluye la calibración del LIBOR. El mismo modelo ha sido replicado para obtener la calibración de las demás tasas de interés

	Datos de entrada			
	Fecha	Valor	Valor^2	Valor n-1
1	2017-04-18	-0.00143	0.0000	0.0000
2	2017-04-19	-0.00143	0.0000	0.0000
3	2017-04-20	-0.00143	0.0000	0.0000
4	2017-04-21	-0.00145	0.0000	0.0000
5	2017-04-24	-0.00145	0.0000	0.0000
6	2017-04-25	-0.00143	0.0000	0.0000
7	2017-04-26	-0.00143	0.0000	0.0000
8	2017-04-27	-0.00143	0.0000	0.0000
9	2017-04-28	-0.00143	0.0000	0.0000
10	2017-05-02	-0.00143	0.0000	0.0000
11	2017-05-03	-0.00146	0.0000	0.0000
12	2017-05-04	-0.00144	0.0000	0.0000
13	2017-05-05	-0.00140	0.0000	0.0000
14	2017-05-08	-0.00138	0.0000	0.0000
15	2017-05-09	-0.00140	0.0000	0.0000
16	2017-05-10	-0.00143	0.0000	0.0000
17	2017-05-11	-0.00143	0.0000	0.0000
18	2017-05-12	-0.00144	0.0000	0.0000
19	2017-05-15	-0.00143	0.0000	0.0000
20	2017-05-16	-0.00143	0.0000	0.0000
21	2017-05-17	-0.00144	0.0000	0.0000
V0	2017-05-18	-0.14471		

Sx	-0.02860
Sy	-0.02861
Sxx	0.00004
Sxy	0.00004
Syy	0.00004
a	0.55683
b	-0.00063
c	0.00002
lambda	0.58550
mu	-0.00143
sigma	0.00002

Desglose			
	Numerador	Denominador	Resultado
a	0.0000	0.0000	0.556825283
b	-0.01	20.00	-0.00063
c	0.00000	360.00	1.5299E-05

Anexo 2

Código de *Python* empleado para la calibración del modelo Hull-White

```
In [2]: import QuantLib as ql
        from collections import namedtuple
        import math
        import numpy as np

        today = ql.Date(18, ql.May, 2017);
        settlement= ql.Date(18, ql.May, 2018);
        ql.Settings.instance().evaluationDate = today;
        term_structure = ql.YieldTermStructureHandle(
            ql.FlatForward(settlement,0.01562,ql.Actual365Fixed())
            )
        index = ql.Euribor1Y(term_structure)
```

```
In [3]: r = [0.01557, 0.01623, 0.01632, 0.01618, 0.0164, 0.01598, 0.0162, 0.01588, 0.01576, 0.01554, 0.01592, 0.01606, 0.01653,
             0.01648, 0.01627, 0.01699, 0.01661, 0.01597, 0.01714, 0.01672, 0.01705]
        vol = np.std(r)
        vol

Out[3]: 0.0004430680501369446
```

In [5]:

```
CalibrationData = namedtuple("CalibrationData",
                             "start, length, volatility")
data = [CalibrationData(1, 1, 0.0004430680501369446),
        CalibrationData(2, 1, 0.0004430680501369446),
        CalibrationData(3, 1, 0.0004430680501369446),
        CalibrationData(4, 1, 0.0004430680501369446),
        CalibrationData(5, 1, 0.0004430680501369446),
        CalibrationData(6, 1, 0.0004430680501369446),
        CalibrationData(7, 1, 0.0004430680501369446),
        CalibrationData(8, 1, 0.0004430680501369446),
        CalibrationData(9, 1, 0.0004430680501369446),
        CalibrationData(10, 1, 0.0004430680501369446),
        CalibrationData(11, 1, 0.0004430680501369446),
        CalibrationData(12, 1, 0.0004430680501369446),
        CalibrationData(13, 1, 0.0004430680501369446),
        CalibrationData(14, 1, 0.0004430680501369446),
        CalibrationData(15, 1, 0.0004430680501369446),
        CalibrationData(16, 1, 0.0004430680501369446),
        CalibrationData(17, 1, 0.0004430680501369446),
        CalibrationData(18, 1, 0.0004430680501369446),
        CalibrationData(19, 1, 0.0004430680501369446),
        CalibrationData(20, 1, 0.0004430680501369446),
        CalibrationData(21, 1, 0.0004430680501369446)]

def create_swaption_helpers(data, index, term_structure, engine):
    swaptions = []
    fixed_leg_tenor = ql.Period(1, ql.Years)
    fixed_leg_daycounter = ql.Actual360()
    floating_leg_daycounter = ql.Actual360()
    for d in data:
        vol_handle = ql.QuoteHandle(ql.SimpleQuote(d.volatility))
        helper = ql.SwaptionHelper(ql.Period(d.start, ql.Years),
                                   ql.Period(d.length, ql.Years),
                                   vol_handle,
                                   index,
                                   fixed_leg_tenor,
                                   fixed_leg_daycounter,
                                   floating_leg_daycounter,
                                   term_structure
                                   )
        helper.setPricingEngine(engine)
        swaptions.append(helper)
    return swaptions
```

In [6]:

```
model = ql.HullWhite(term_structure);
engine = ql.JamshidianSwaptionEngine(model)
swaptions = create_swaption_helpers(data, index, term_structure, engine)

optimization_method = ql.LevenbergMarquardt(1.0e-8,1.0e-8,1.0e-8)
end_criteria = ql.EndCriteria(10000, 100, 1e-6, 1e-8, 1e-8)
model.calibrate(swaptions, optimization_method, end_criteria)

a, sigma = model.params()
print ("a = %6.5f, sigma = %6.5f" % (a, sigma))
```

```
a = 0.01935, sigma = 0.00001
```

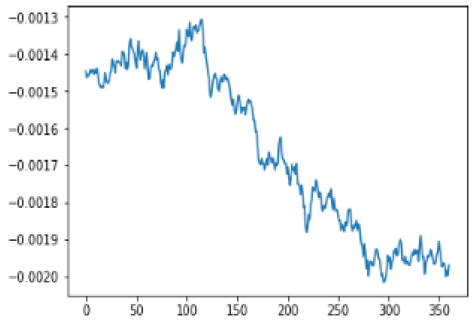
Anexo 3

Código de *Python* empleado para la estimación. Sólo se incluye la estimación del LIBOR del modelo Vasicek. El mismo proceso ha sido replicado para obtener la calibración de las demás tasas de interés.

```
In [1]: import numpy as np
        import matplotlib.pyplot as plt
```

```
In [2]: def vasicek(r0, K, theta, sigma, T=1., N=1,seed=1000):
            np.random.seed(seed)
            dt = T/float(N)
            rates = [r0]
            for i in range(N):
                dr = K*(theta-rates[-1])*dt + sigma*np.random.normal()
                rates.append(rates[-1] + dr)
            return range(N+1), rates

        if __name__ == "__main__":
            x, y = vasicek(-0.0014471, 0.58550,  -0.00143, 0.00002, 1, 360)
            plt.plot(x,y)
```



También se incluye la proyección de Hull White para el bono español

```
In [1]: import QuantLib as ql
        import matplotlib.pyplot as plt
        import numpy as np
        % matplotlib inline
```

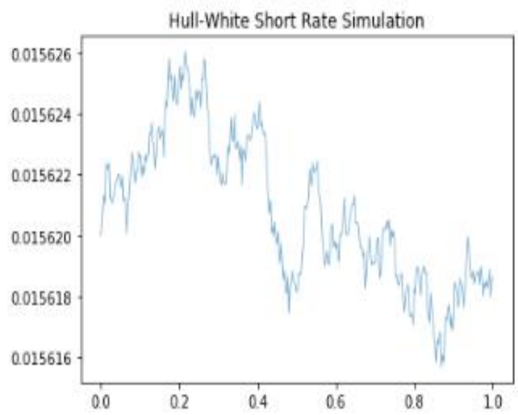
```
In [2]: sigma = 0.00001
        a = 0.01935
        timestep = 360
        length = 1 # in years
        forward_rate = 0.01562
        day_count = ql.Thirty360()
        todays_date = ql.Date(18, 5, 2018)
```

```
In [3]: ql.Settings.instance().evaluationDate = todays_date

        spot_curve = ql.FlatForward(todays_date, ql.QuoteHandle(ql.SimpleQuote(forward_rate)), day_count)
        spot_curve_handle = ql.YieldTermStructureHandle(spot_curve)
```

```
In [4]: hw_process = ql.HullWhiteProcess(spot_curve_handle, a, sigma)
        rng = ql.GaussianRandomSequenceGenerator(ql.UniformRandomSequenceGenerator(timestep, ql.UniformRandomGenerator()))
        seq = ql.GaussianPathGenerator(hw_process, length, timestep, rng, False)
```

```
In [5]: def generate_paths(num_paths, timestep):
            arr = np.zeros((num_paths, timestep+1))
            for i in range(num_paths):
                sample_path = seq.next()
                path = sample_path.value()
                time = [path.time(j) for j in range(len(path))]
                value = [path[j] for j in range(len(path))]
                arr[i, :] = np.array(value)
            return np.array(time), arr
        num_paths = 1
        time, paths = generate_paths(num_paths, timestep)
        for i in range(num_paths):
            plt.plot(time, paths[i, :], lw=0.8, alpha=0.6)
        plt.title("Hull-White Short Rate Simulation")
        plt.show()
```



Anexo 4

Modelo de Excel utilizado para la comparación numérica de resultados. Sólo se incluye la calibración del LIBOR para el modelo Vasicek. El mismo modelo ha sido replicado para obtener la calibración de las demás tasas de interés

	Resultados estimación	Tasas reales	Fecha	Tasas reales	Diferencia	Cuadrado	Suma	n	Error
1	-0.0014471	-0.00145	2017-05-18	-0.00145	0.00000	0.000000000	0.00	253	0.0000005771
2	-0.001463161	-0.00149	2017-05-19	-0.00149	0.00003	0.000000001			
3	-0.001456689	-0.00148	2017-05-22	-0.00148	0.00003	0.000000001			
4	-0.001457155	-0.00146	2017-05-23	-0.00146	0.00000	0.000000000			
5	-0.001444224	-0.00152	2017-05-24	-0.00152	0.00008	0.000000006			
6	-0.001450217	-0.00154	2017-05-25	-0.00154	0.00009	0.000000008			
7	-0.001442395	-0.00155	2017-05-26	-0.00155	0.00011	0.000000013			
8	-0.001444523	-0.00167	2017-05-30	-0.00167	0.00023	0.000000052			
9	-0.001454099	-0.00168	2017-05-31	-0.00168	0.00023	0.000000052			
10	-0.00144216	-0.00170	2017-06-01	-0.00170	0.00025	0.000000064			
11	-0.001451433	-0.00170	2017-06-02	-0.00170	0.00024	0.000000060			
12	-0.001438053	-0.00170	2017-06-05	-0.00170	0.00026	0.000000066			
13	-0.001454162	-0.00175	2017-06-06	-0.00175	0.00030	0.000000088			
14	-0.001478044	-0.00176	2017-06-07	-0.00176	0.00029	0.000000082			
15	-0.001486085	-0.00175	2017-06-08	-0.00175	0.00027	0.000000071			
16	-0.001489641	-0.00185	2017-06-09	-0.00185	0.00036	0.000000128			
17	-0.00148748	-0.00180	2017-06-12	-0.00180	0.00032	0.000000099			
18	-0.001490155	-0.00180	2017-06-13	-0.00180	0.00031	0.000000099			
19	-0.001475944	-0.00180	2017-06-14	-0.00180	0.00032	0.000000103			
20	-0.001450433	-0.00180	2017-06-15	-0.00180	0.00035	0.000000120			
21	-0.001470135	-0.00180	2017-06-16	-0.00180	0.00033	0.000000107			
22	-0.001476766	-0.00180	2017-06-19	-0.00180	0.00032	0.000000103			
23	-0.00147868	-0.00180	2017-06-20	-0.00180	0.00033	0.000000106			
24	-0.001470457	-0.00187	2017-06-21	-0.00187	0.00040	0.000000159			
25	-0.001452003	-0.00185	2017-06-22	-0.00185	0.00040	0.000000162			
26	-0.001445725	-0.00185	2017-06-23	-0.00185	0.00041	0.000000167			
27	-0.001415036	-0.00186	2017-06-26	-0.00186	0.00045	0.000000199			
28	-0.001426064	-0.00184	2017-06-27	-0.00184	0.00041	0.000000171			
29	-0.001433734	-0.00183	2017-06-28	-0.00183	0.00040	0.000000159			
30	-0.001450186	-0.00185	2017-06-29	-0.00185	0.00040	0.000000158			
31	-0.001418152	-0.00187	2017-06-30	-0.00187	0.00045	0.000000203			
32	-0.001419557	-0.00190	2017-07-03	-0.00190	0.00048	0.000000235			
33	-0.001417909	-0.00188	2017-07-04	-0.00188	0.00046	0.000000216			
34	-0.001424468	-0.00186	2017-07-05	-0.00186	0.00044	0.000000191			
35	-0.001425393	-0.00190	2017-07-06	-0.00190	0.00047	0.000000224			
36	-0.001431489	-0.00183	2017-07-07	-0.00183	0.00040	0.000000162			
37	-0.001393027	-0.00182	2017-07-10	-0.00182	0.00043	0.000000182			
38	-0.00139466	-0.00184	2017-07-11	-0.00184	0.00045	0.000000200			
39	-0.001406359	-0.00184	2017-07-12	-0.00184	0.00044	0.000000189			
40	-0.001438757	-0.00185	2017-07-13	-0.00185	0.00041	0.000000168			
41	-0.001421397	-0.00185	2017-07-14	-0.00185	0.00043	0.000000183			
42	-0.00144222	-0.00183	2017-07-17	-0.00183	0.00039	0.000000154			