Investigación

Estudio del equilibrio mínimo en un modelo circular de competición política

Study of the minimum equilibrium in a circular model of political competition

Javier Rodrigo, Mariló López y Sagrario Lantarón

Revista de Investigación

Volumen IX, Número 1, pp. 027–040, ISSN 2174-0410
Recepción: 1 Nov'18; Aceptación: 15 Feb'19

1 de abril de 2019

Resumen

En este artículo se plantea un juego de competición política entre dos partidos, definido en un espacio de políticas unidimensional, como es la circunferencia unidad.

Se estudian las posiciones de equilibrio de Nash en el juego planteado, para lo que se dan unas condiciones necesarias o suficientes de existencia de dichas posiciones de equilibrio. Primeramente, se trabaja con unos equilibrios restringidos analizándose cuáles de ellos dan lugar a equilibrios de Nash. El hecho de que puedan existir posiciones de equilibrio de Nash desventajosas para uno de los partidos, suscita la definición de un nuevo tipo de equilibrio, llamado equilibrio mínimo, caracterizándose las posiciones de equilibrio mínimo en el juego planteado.

Palabras Clave: Teoría de juegos, Modelos de competición política, Equilibrio de Nash, Equilibrio mínimo.

Abstract

This paper develops a political competition game between two parties. The aim of the game is for each party to attract the greatest possible weight of a weighted set of voters located on the unit circumference.

The Nash equilibrium is studied in the proposed game. Firstly, restricted equilibria are employed, and an analysis of which of them will give rise to Nash equilibria carried out. The study of Nash equilibrium raises the definition of a new type of equilibrium: minimum equilibrium. To conclude, necessary and sufficient conditions for the existence of minimum equilibrium positions are given.

Keywords: Game Theory, Political competition models, Nash Equilibrium, Minimum equilibrium.

1. Introducción

Existe un gran número de estudios sobre juegos de competición entre dos jugadores, definidos en un espacio de estrategias unidimensional. La mayoría de estos juegos utilizan como arena de juego toda la recta real o un segmento de la misma [Anderson 1988, Ahn et al. 2001, Saporiti, 2008].

Ejemplos aplicados de este tipo de juegos son los juegos de competición política [Rodrigo, 2016], en los que las posturas políticas de una población de votantes se pueden modelar mediante puntos de un segmento cuyo centro representaría la postura más moderada y los extremos las más radicales tanto a la derecha como a la izquierda de esa postura central. Los jugadores son partidos políticos que se posicionan en dicho espacio según su ideología. Sin embargo, es posible interpretar dos realidades:

- Por un lado, las posiciones más radicales tienen en el fondo una base común de pensamiento, pero están separadas por matices ideológicos. Posturas tan radicales como los nazis y los estalinistas, los primeros ubicados en la extrema derecha y los segundos en la extrema izquierda, tienen unas líneas de actuación comunes basadas en ciertos métodos violentos y purgas de la población. Por ello, identificar los dos extremos del segmento para generar una circunferencia puede ser considerado un punto de partida adecuado para definir un espacio político.
- Por otro lado, hay que constatar que la aproximación anterior no sería válida si no se considera que las distintas ideologías, a medida que se radicalizan, tienen una menor tolerancia hacia otras posturas políticas. Así, es imposible que un tipo de votante cercano a la extrema derecha encuentre puntos en común con un tipo de votante de extrema izquierda.

Matemáticamente la primera realidad se puede modelar considerando un espacio de trabajo que sea una circunferencia. Se tomará centrada en el origen de coordenadas y de radio unidad. Se supondrá que ese punto medio del segmento, postura central moderada, ocupa el polo Este de dicha circunferencia. De esta manera las distintas posturas políticas preferidas por los votantes, pueden ser representadas como puntos de la circunferencia situados por encima de este polo Este en sentido anti horario (ideologías más de derechas) o por debajo de él, en sentido horario (posturas más izquierdistas).

De esta forma, en este artículo se presenta un juego de competición unidimensional entre dos partidos, definido en la circunferencia unidad, donde representaremos cada punto de la misma por el ángulo θ que forma con el eje X, con $\theta \in [-\pi, \pi[$. En el juego, cada uno de los partidos debe situarse adecuadamente para conseguir captar el mayor peso posible de un conjunto ponderado de puntos, localizados en la circunferencia y que representan a los votantes de una determinada población en un proceso electoral. Para modelar la segunda realidad comentada anteriormente, se asigna a los votantes unos intervalos de tolerancia en los que deben situarse los partidos para poder captarlos. Estos intervalos centrados en los votantes representan el nivel de flexibilidad ideológica de los mismos. Supondremos que el nivel (radio) de tolerancia será menor (por tanto, será menor el radio de los intervalos), para votantes de extrema izquierda (ángulos negativos cercanos a $-\pi$) o de extrema derecha (ángulos positivos cercanos a π).

La elección de una circunferencia como espacio de competición supone una cierta novedad en este tipo de trabajos. Existen algunos precedentes como el trabajo de Hangartner and Gill (2010), donde se analiza cómo se pueden aplicar los datos circulares a la ciencia política. Véase también Hawkins y Lombard (2015).

La búsqueda de posiciones de equilibrio en los juegos de competición, es un problema de interés y ampliamente estudiado en la literatura [Govindan and Wilson 2012, Abellanas et al. 2010, Abellanas et al. 2011, Ansolabehere and Snyder 2000, Kramer 1973]. Uno de los equilibrios más analizado es el equilibrio de Nash, presentado por primera vez en la disertación [Nash, 1951].

En el presente trabajo se aborda el estudio del equilibrio de Nash en el juego planteado para lo que se establecen resultados teóricos que dan condiciones necesarias o suficientes para la existencia de posiciones de equilibrio y se desarrollan ejemplos.

Como se advierte en los ejemplos incluidos en el trabajo, la búsqueda de posiciones de equilibrio de Nash en el juego planteado lleva a casos donde se pueden encontrar diversas posiciones de equilibrio. Puede ocurrir que, pese a que todas ellas son posiciones de estabilidad, exista alguna que le resulte más ventajosa a alguno de los partidos porque minimice la ganancia del otro. Esta situación motiva la definición de un nuevo equilibrio, denominado equilibrio mínimo que se estudia en el trabajo.

El artículo se estructura de la siguiente manera: en la sección 2 se hace la formalización matemática del modelo que representa al juego; en la sección 3 se examinan las posiciones de equilibrio de Nash bajo un punto de vista teórico; la aplicación práctica de los resultados teóricos se presenta en la sección 4; en la sección 5 se presenta un nuevo concepto de equilibrio dándose condiciones para su existencia. Finalmente se establecen las conclusiones del artículo, dándose una interpretación política a los resultados obtenidos que puede ser útil en la toma de decisiones para la competición electoral.

2. El modelo

Como se estableció en la introducción, en el juego los dos partidos llamados p y q se localizan en la circunferencia unidad C para atraer el mayor peso posible de un conjunto de puntos (votantes) localizados en C y representados por su ángulo θ_i: $H=\{\theta_1, ..., \theta_n\}$, con pesos (ponderaciones) $w(\theta_1)$, …, $w(\theta_n)$ cumpliendo que $w(\theta_1)+...+w(\theta_n)=n$.

Se supone que cada votante tiene un intervalo de tolerancia $[\theta_i-\varphi_i, \theta_i+\varphi_i]$ en el que deben situarse los partidos para ganarlo y que los partidos p y q se localizan en posiciones con ángulos respectivos θ, θ'

Entonces p ganará el peso de los votantes θ_i tales que:

$\theta \in [\theta_i-\varphi_i, \theta_i+\varphi_i]$ y $d(\theta,\theta_i)<d(\theta',\theta_i)$, mientras que q ganará el peso de los votantes θ_i tales que $\theta' \in [\theta_i-\varphi_i, \theta_i+\varphi_i]$ y $d(\theta',\theta_i)<d(\theta,\theta_i)$, repartiéndose la mitad del peso de aquellos θ_i tales que $\theta,\theta' \in [\theta_i-\varphi_i, \theta_i+\varphi_i]$ y $d(\theta',\theta_i)=d(\theta,\theta_i)$.

Formalizando el modelo, si se define:

$$\chi_i^1(\theta,\theta')=\begin{cases} w(\theta_i)\,\text{si}\,\theta\in[\theta_i-\varphi_i,\theta_i+\varphi_i],\, d(\theta,\theta_i)<d(\theta',\theta_i) \\ 0\,\text{si}\,\theta\notin[\theta_i-\varphi_i,\theta_i+\varphi_i]\,\text{ó}\, d(\theta,\theta_i)>d(\theta',\theta_i) \\ \dfrac{w(\theta_i)}{2}\,\text{si}\,\theta\in[\theta_i-\varphi_i,\theta_i+\varphi_i],\, d(\theta,\theta_i)=d(\theta',\theta_i) \end{cases},$$

$$\chi_i^2(\theta,\theta')=\begin{cases} w(\theta_i)\,\text{si}\,\theta'\in[\theta_i-\varphi_i,\theta_i+\varphi_i],\, d(\theta',\theta_i)<d(\theta,\theta_i) \\ 0\,\text{si}\,\theta'\notin[\theta_i-\varphi_i,\theta_i+\varphi_i]\,\text{ó}\, d(\theta',\theta_i)>d(\theta,\theta_i) \\ \dfrac{w(\theta_i)}{2}\,\text{si}\,\theta'\in[\theta_i-\varphi_i,\theta_i+\varphi_i],\, d(\theta',\theta_i)=d(\theta,\theta_i) \end{cases}$$

Las ganancias de los partidos p y q posicionados en θ, θ' son respectivamente:

$$\Pi^1(\theta,\theta')=\sum_{i=1}^{n}\chi_i^1(\theta,\theta'),\ \Pi^2(\theta,\theta')=\sum_{i=1}^{n}\chi_i^2(\theta,\theta')$$

Observaciones:

1) El juego no es en general de suma n porque pueden existir ángulos θ_i de forma que θ y θ' no pertenecen a $[\theta_i-\varphi_i,\theta_i+\varphi_i]$, por lo que $w(\theta_i)$ no es ganancia de ninguno de los dos jugadores. Por tanto, no se pueden aplicar las condiciones de von Neumann para asegurar la existencia de equilibrio de Nash.

2) Se puede interpretar este modelo como una versión con ganancias discretas del juego de Downs (ver Roemer, 2001).

3. Estudio del equilibrio

Se desarrolla un procedimiento para encontrar posiciones de equilibrio de Nash en el juego planteado, si éstas existen. La estrategia se basa en la búsqueda de equilibrios locales para intentar elevarlos después a equilibrios de Nash.

Para introducir esos equilibrios locales se establecen las siguientes notaciones, definiciones y proposiciones previas (para facilitar la lectura del trabajo se han omitido las demostraciones de las proposiciones, se encuentran disponibles a través de los autores para cualquier lector interesado):

Definición 1: Se llama C_j, $j=1,\ldots,t$ a las regiones en que los intervalos de tolerancia de extremos $\theta_i-\varphi_i,\theta_i+\varphi_i, i=1,\ldots,n$ parten a C, numeradas de menor a mayor ángulo y M_j, $j=1,\ldots,t$, al peso del $\{\theta_i/[\theta_i-\varphi_i,\theta_i+\varphi_i]\supset C_j\}$.

Definición 2: Sea $\theta' \in C_i$, $\theta'' \in C_j$ con $1 \leq j \leq i \leq t$, decimos que (θ', θ'') es un $C_i C_j$-equilibrio si (θ', θ'') es un equilibrio de Nash para el juego restringido a C_i, C_j (es decir, suponiendo que el primer jugador sólo se puede situar en C_i y el segundo en C_j).

Proposición 1: Si (θ', θ'') es una posición de equilibrio de Nash con $\theta' \in C_i$, $\theta'' \in C_j$, entonces (θ', θ'') es un $C_i C_j$-equilibrio.

Definición 3: Sean dos arcos C_i, C_j como los de la definición 1, se llama

$M'_i(C_j)$ al peso de $\{\theta_k / [\theta_k - \varphi_k, \theta_k + \varphi_k] \supset C_i, [\theta_k - \varphi_k, \theta_k + \varphi_k] \cap C_j = \phi\}$,

$M'_j(C_i)$ al peso de $\{\theta_k / [\theta_k - \varphi_k, \theta_k + \varphi_k] \supset C_j, [\theta_k - \varphi_k, \theta_k + \varphi_k] \cap C_i = \phi\}$

M'_{ij} al peso de $A_{ij} := \{\theta_k / [\theta_k - \varphi_k, \theta_k + \varphi_k] \cap C_i \neq \phi, [\theta_k - \varphi_k, \theta_k + \varphi_k] \cap C_j \neq \phi\}$

donde el peso de un conjunto es la suma de los pesos de los elementos del mismo, entendiéndose que $w(\phi) = 0$.

Observaciones:

1) $M'_i(C_j)$ es la ganancia segura del primer partido, $M'_j(C_i)$ es la ganancia segura del segundo partido y M'_{ij} es el peso de los votantes por los que deben luchar los dos partidos.

2) El juego restringido a C_i, C_j es un juego de suma constante, siendo esta suma:

$M'_i(C_j) + M'_j(C_i) + M'_{ij}$.

3) Si $i \neq j$, entonces $M'_i(C_j) > 0$ o $M'_j(C_i) > 0$

3.1. Estudio del equilibrio local

3.1.1 Jugadores situados en la misma región

Se establece una condición necesaria en las ganancias para la existencia de $C_i C_j$-equilibrio en el caso $i = j$.

Proposición 2: Si (θ', θ'') es una posición de $C_i C_i$-equilibrio, entonces $\Pi^k(\theta', \theta'') = \frac{M_i}{2}$ para $k = 1, 2$

Se establece ahora una proposición que da las posiciones de C_iC_j -equilibrio en el caso $i = j$. Para ello es necesaria la siguiente definición:

Definición 4: Si $\theta_{i_1},...,\theta_{i_k} \in H$ cumplen que:

$\lfloor \theta_{i_1} - \varphi_{i_1}, \theta_{i_1} + \varphi_{i_1} \rfloor \cap ... \cap \lfloor \theta_{i_k} - \varphi_{i_k}, \theta_{i_1} + \varphi_{i_k} \rfloor = C_i$, se llama I_α a la intersección de los intervalos de menor longitud que contienen a los subconjuntos de $\{\theta_{i_1},...,\theta_{i_k}\}$ de peso mayor que α.

Proposición 3: Si $I_{\frac{M_i}{2}} \cap C_i \neq \phi$, (θ', θ'') es una posición de C_iC_i -equilibrio si y sólo si:

$\theta', \theta'' \in I_{\frac{M_i}{2}} \cap C_i$.

Observaciones:

1) Si $I_{\frac{M_i}{2}} \cap C_i \neq \phi$, las posiciones de C_iC_i -equilibrio son posiciones en una región central de C_i que aseguran una ganancia de $\dfrac{M_i}{2}$ a cada jugador.

2) Si $I_{\frac{M_i}{2}} \cap C_i = \phi$ y γ es el extremo de C_i más cercano a $I_{\frac{M_i}{2}}$, (γ, γ) es la única posición de C_iC_i -equilibrio si $\gamma \in C_i$ y no existen posiciones de C_iC_i -equilibrio si $\gamma \notin C_i$

3.1.2 Jugadores situados en distintas regiones

Se establece una proposición que da las posiciones de C_iC_j -equilibrio en el caso en que $i > j$.

Se necesita una definición previa:

Definición 5: Supongamos que $j < i < t$ y sea A la componente conexa de $C - (C_i \cup C_j)$ que no contiene a π (si existe). Llamamos α a la frontera común de A, C_i y β a la frontera común de A, C_j. En caso de que $C - (C_i \cup C_j)$ sea conexo, se cumplirá que $\overline{C_i} \cap \overline{C_j} = \{\theta\}$ y definiremos $\alpha = \beta = \theta$

Proposición 4: Se realizan las siguientes suposiciones:

$j < i$,

$$\{\theta \in A_{ij} / [\theta - d(\theta, C_j), \theta + d(\theta, C_j)] \cap C_i \neq \phi\} \neq \phi,$$

$$\{\theta \in A_{ij} / [\theta - d(\theta, C_i), \theta + d(\theta, C_i)] \cap C_j \neq \phi\} \neq \phi,$$

$\theta_{i_1}, \ldots, \theta_{i_k}$ son los puntos de A_{ij} tales que $[\theta_{i_d} - d(\theta_{i_d}, C_j), \theta_{i_d} + d(\theta_{i_d}, C_j)] \cap C_i \neq \phi$ y que $\theta_{i_{k+1}}, \ldots, \theta_{i_t}$ son los puntos de A_{ij} tales que $[\theta_{i_d} - d(\theta_{i_d}, C_i), \theta_{i_d} + d(\theta_{i_d}, C_i)] \cap C_j \neq \phi$ Entonces, si no hay ningún punto de A_{ij} que esté a la misma distancia de C_i que de C_j ó si $\alpha \notin C_i$ ó $\beta \notin C_j$, las posiciones de C_iC_j -equilibrio son los (θ', θ'') tales que:

$$\theta' \in \bigcap_{s=1}^{k} [\theta_{i_s} - d(\theta_{i_s}, C_j), \theta_{i_s} + d(\theta_{i_s}, C_j)] \cap C_i, \ \theta'' \in \bigcap_{s=k+1}^{t} [\theta_{i_s} - d(\theta_{i_s}, C_i), \theta_{i_s} + d(\theta_{i_s}, C_i)] \cap C_j$$

Teniendo que estar θ' en el interior de su intersección si $\beta \in C_j$ y el segundo jugador elige la posición β y θ'' en el interior de su intersección si $\alpha \in C_i$ y el primer jugador elige la posición α.

Observación: según la proposición 4, las posiciones de C_iC_j -equilibrio son aquéllas en las que cada partido está en la zona de máxima intersección de intervalos centrados en los votantes y de radio la distancia del votante a la región C_k en la que se encuentra el otro partido.

3.2. Estudio del equilibrio de Nash

Este apartado se ocupa de la búsqueda de equilibrios de Nash a partir de los equilibrios locales estudiados en el apartado anterior. Para ver cuáles de los equilibrios locales pueden dar lugar a uno de Nash son útiles las siguientes proposiciones.

Proposición 5: En el juego planteado, no existe ninguna posición de equilibrio de Nash (θ', θ'') en la que ni θ' ni θ'' pertenecen a ningún intervalo de tolerancia que interseque con R, donde R es la región de C en la que se alcanza $M := \max\{M_1, \ldots, M_t\}$.

Proposición 6: Si en C_k se alcanza M y $I_{\frac{M_k}{2}} \cap C_k \neq \phi$, entonces en las posiciones de equilibrio de Nash (θ', θ'') del juego planteado, se ha de cumplir que $\theta' \in C_j$, $\theta'' \in C_i$ con $M_i, M_j \geq \frac{M}{2}$.

Observación: en las condiciones de la proposición 6, los C_iC_j -equilibrios (θ', θ'') en los que, por ejemplo, $\Pi^1(\theta', \theta'') < \frac{M}{2}$ no dan lugar a equilibrios de Nash.

4. Aplicación práctica de las proposiciones: ejemplo

Se ponen en práctica los resultados presentados en las secciones anteriores para determinar las posiciones de equilibrio en un caso particular.

Se consideran seis puntos en C con los siguientes ángulos, ponderaciones y radios de tolerancia (Tabla 1):

Tabla1: Datos de los puntos considerados para el ejemplo

Ángulo	Peso	Nivel de tolerancia
$\theta_4 = 0.3927$	2	0.4488
$\theta_5 = 0.7854$	0.5	0.34907
$\theta_6 = 2.7489$	0.5	0.31416
$\theta_1 = -2.8798$	0.5	0.24166
$\theta_2 = -1.5708$	0.5	0.2618
$\theta_3 = -0.2618$	2	0.34907

La tabla 2 contiene la partición de C correspondiente a los datos, las ganancias que se pueden obtener en cada C_i y los puntos de H cuyos intervalos de tolerancia contienen a cada C_i.

Tabla 2: Partición inducida por los datos del ejemplo

Intervalos de la partición	Ganancias	Puntos
$C_1 = [-3.12146, -2.63724]$	$M_1 = 0.5$	θ_1
$C_2 = (-2.63724, -1.8326)$	$M_2 = 0$	
$C_3 = [-1.8326, -1.309]$	$M_3 = 0.5$	θ_2
$C_4 = (-1.309, -0.61087)$	$M_4 = 0$	
$C_5 = [-0.61087, -0.0561)$	$M_5 = 2$	θ_3

$C_6 = [-0.0561, 0.08727]$	$M_6 = 4$	θ_3, θ_4
$C_7 = (0.08727, 0.43633)$	$M_7 = 2$	θ_4
$C_8 = [0.43633, 0.8415]$	$M_8 = 2.5$	θ_4, θ_5
$C_9 = (0.8415, 1.13447]$	$M_9 = 0.5$	θ_5
$C_{10} = (1.13447, 2.43474)$	$M_{10} = 0$	
$C_{11} = [2.43474, 3.06306]$	$M_{11} = 0.5$	θ_6

M es 4 que se alcanza en C_6, luego por la proposición 5 los C_iC_j -equilibrios tales que *i, j* no pertenezcan a {5,…,8} no darán lugar a equilibrios de Nash.

Como $\frac{M}{2} = 2$, por la proposición 6 los C_iC_j -equilibrios tales que $M_i < 2$ ó $M_j < 2$ no darán lugar a equilibrios de Nash y se descartan.

Se hallan primero los C_iC_j -equilibrios para los valores de *i, j* no descartados, que serán $i,\ j \in \{5, ..., 8\}$ (Tabla 3):

Tabla 3: Posiciones de equilibrio local

Posiciones de C_iC_j -equilibrio	Ganancia 1er jugador	Ganancia 2º jugador
C_5C_5: (θ_3, θ_3)	1	1
C_6C_5: (θ', θ'') con $\theta' \in C_6$, $\theta'' \in [-0.4675, -0.0561)$	2	2
C_7C_5: (θ', θ'') con $\theta' \in C_7$, $\theta'' \in C_5$	2	2
C_8C_5: (θ', θ'') con $\theta' \in C_8$, $\theta'' \in C_5$	2.5	2
C_6C_6: (θ', θ'') con $\theta', \theta'' \in C_6$	2	2

$C_7C_6:(\theta',\theta'')$ con $\theta'\in C_6$, $\theta''\in C_7$	2	2
$C_8C_6:(\theta',\theta'')$ con $\theta'\in[0{,}43633{,}0.6981)$, $\theta''\in C_6$	2.5	2
$C_7C_7:(\theta_4,\theta_4)$	1	1
$C_8C_7:(\theta',\theta'')$ con $\theta'\in C_8$, $\theta''\in(-0.43633, 0.43633)$	0.5	2
$C_8C_8:(\theta,\theta)$ con $\theta=0.43633$	1.25	1.25

Se determina ahora cuáles de estos C_iC_j -equilibrios dan lugar a equilibrios de Nash. Aplicando la observación de la proposición 6, se descartan los C_iC_j -equilibrios en los que las ganancias de alguno de los jugadores sea menor que $\frac{M}{2}=2$. Se analizan los demás casos, estudiando si un movimiento de alguno de los dos partidos a otro intervalo de la partición, mejora su ganancia (Tabla 4):

Tabla 4: Posiciones de equilibrio de Nash

C_iC_j -equilibrios	Equilibrio de Nash	Posición de equilibrio
C_6C_5	No	
C_7C_5	No	
C_8C_5	Sí	(θ',θ'') con $\theta'\in[0.43633, 0.77267]$, $\theta''\in[-0.4675, -0.0561)$
C_6C_6	No	
C_7C_6	No	
C_8C_6	Sí	$\theta'\in[0.43633, 0.6981)$ $\theta''\in C_6$

5. Equilibrios mínimos

Las posiciones de equilibrio de Nash del ejemplo anterior no son ventajosas para el segundo jugador, ya que obtiene peor ganancia que el primero. Se cumple además que en las dos situaciones de equilibrio se obtienen las mismas ganancias: 2.5 y 2. Este resultado no es genérico habiendo casos en los que existen posiciones de equilibrio de distintas ganancias alguna de las cuales puede no ser perjudicial para ningún jugador. Véase el siguiente ejemplo:

5.1. Ejemplo

Se consideran cuatro puntos en C con los siguientes ángulos, ponderaciones y radios de tolerancia (Tabla 5):

Tabla 5: Datos del ejemplo

Ángulo	Peso	Nivel de tolerancia
$\theta_1 = -\frac{\pi}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{\pi}{8}$
$\theta_2 = \frac{3\pi}{8}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{\pi}{4}$
$\theta_3 = \frac{\pi}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{\pi}{8}$
$\theta_4 = \frac{5\pi}{8}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{\pi}{4}$

Una posición de equilibrio de Nash es con los dos jugadores en la posición de θ_3, ya que la ganancia de cada uno sería $\frac{4}{3}$ y ninguno podría mejorar la ganancia moviéndose. Otra posición de equilibrio sería con el primer jugador en la posición de θ_1 y el segundo jugador en la posición de θ_3, con ganancias respectivas de $\frac{4}{3}, \frac{8}{3}$, ya que el segundo jugador no puede captar a θ_1 y mejorar su ganancia ya que perdería los puntos restantes y el primer jugador no puede mejorar su ganancia de $\frac{4}{3}$.

5.2. Equilibrio mínimo

Aunque en las dos posiciones de equilibrio de Nash del ejemplo anterior, el primer jugador tiene la misma ganancia ($\frac{4}{3}$), para él es más ventajosa la primera posición de equilibrio de Nash, ya que en ella minimiza la ganancia del otro jugador y llega a un empate. Esto motiva la siguiente definición de equilibrio:

Definición 6: Sean θ', $\theta'' \in C$, decimos que (θ', θ'') es un equilibrio mínimo si:

$$\Pi^2(\theta_1, \theta'') \geq \Pi^2(\theta', \theta'') \text{ para todo } \theta_1 \in C,\ \Pi^1(\theta', \theta_2) \geq \Pi^1(\theta', \theta'') \text{ para todo } \theta_2 \in C$$

Observación: Si el juego es de suma constante, la definición de equilibrio mínimo es equivalente a la de equilibrio de Nash.

La siguiente proposición establece una condición necesaria y suficiente para la existencia de equilibrio mínimo en el juego planteado:

Proposición 7: (θ', θ'') es un equilibrio mínimo si y sólo si $\theta', \theta'' \in I_{\frac{M_i}{2}} \cap C_i$ para algún valor de *i*.

Observaciones

1) Las posiciones de equilibrio mínimo son posiciones de C_iC_i-equilibrio por la proposición 3.

2) De las dos posiciones de equilibrio de Nash halladas en el ejemplo 2, sólo la primera de ellas es de equilibrio mínimo.

6. Conclusiones

En este artículo se ha estudiado un juego de competición política unidimensional entre dos partidos cuya novedad es que se ha planteado en la circunferencia unidad.

Se han hallado las posiciones de equilibrio de Nash. Para ello se ha partido de unos equilibrios locales analizándose cuáles de ellos dan lugar a equilibrios de Nash. Los resultados obtenidos han motivado la definición de un nuevo tipo de equilibrio: equilibrio mínimo, dándose condiciones necesarias y suficientes para la existencia de este nuevo equilibrio en el juego planteado.

Un modelo circular como el planteado en el presente trabajo se adapta de manera natural a distintas áreas científicas. Aplicarlo a problemas de competición política resulta novedoso.

Además, el concepto de equilibrio mínimo introducido, se puede interpretar desde un punto de vista político: serían posiciones en las que un partido se debe situar para minimizar el impacto de otro partido emergente. Tal es el caso de partidos de carácter progresista surgidos recientemente en algunos países que están apoderándose de votos de partidos tradicionales de mayor arraigo. En estos casos, el partido tradicional puede buscar una posición de equilibrio mínimo para entorpecer, lo más posible, las acciones de los partidos emergentes. El equilibrio mínimo se adapta así a escenarios políticos más actuales, en contraposición al equilibrio de Nash que refleja mejor la competición política en un modelo claramente bipartidista.

Referencias

[1] ABELLANAS, M., LÓPEZ, M.D., RODRIGO, J. *Searching for equilibrium positions in a game of political competition with restrictions*, pp. 892-896, European Journal of Operational Research, vol. 201, No. 3, 2010.

[2] ABELLANAS, M., LÓPEZ, M.D., RODRIGO, J., LILLO, I. *Weak Equilibrium in a Spatial Model*, pp. 449-459, International Journal of Game Theory, vol. 40, No. 3, 2011.

[3] AHN, H.K., CHENG, S.W., CHEONG, O., GOLIN, M., VAN OOSTRUM, R. *Competitive facility location along a highway*, pp. 237-246, Lecture Notes in Computer Science book series, vol. 2108, 2001.

[4] ANDERSON, S. P. *Equilibrium Existence in the Linear Model of Spatial Competition*, pp. 479-491, Economica New Series, vol. 55, No. 220, Australia, 1988.

[5] ANSOLABEHERE, S., SNYDER, J. *Valence politics and equilibrium in spatial election models*, pp. 327–336, Public Choice, vol. 103, 2000

[6] GOVINDAN S., WILSON R. *Axiomatic Equilibrium Selection for Generic Two-Player Games*, pp. 1639–1699, Econometrica, vol. 80, No. 4, 2012.

[7] HANGARTNER, D., GILL, J. *Circular Data in Political Science and How to Handle It*, pp. 316-336, Political Analysis, vol. 18, No. 3, UK, 2010.

[8] HAWKINS, D.M., LOMBARD, F. *Segmentation of circular data*, Journal of Applied Statistics, pp. 88-97, vol. 42, No. 1, 2015

[9] KRAMER, G.H. *On a class of equilibrium conditions for majority rule*, pp. 285-297, Econometrica, vol. 42, 1973.

[10] NASH, J. *Non-Cooperative Games*, pp.286-295, The Annals of Mathematics, vol. 54, USA, 1951.

[11] RODRIGO, J. *Matemáticas y competición política,* pp.93-105, Pensamiento Matemático, vol. VI, No. 1, España, 2016

[12] ROEMER, J. *Political Competition,* Harvard: Harvard University Press, 2001

[13] SAPORITI, A. *Existence and Uniqueness of Nash Equilibrium in Electoral Competition Games: The Hybrid Case*, pp. 827–857, Journal of Public Economic Theory, vol. 10, No. 5, 2008.

Sobre los autores:

Nombre: Javier Rodrigo Hitos
Correo Electrónico: jrodrigo@upcomillas.es
Institución: Universidad Pontificia Comillas, España.

Nombre: Mariló López González
Correo Electrónico: marilo.lopez@upm.es
Institución: Universidad Politécnica de Madrid, España.

Nombre: Sagrario Lantarón Sánchez
Correo Electrónico: sagrario.lantaron@upm.es
Institución: Universidad Politécnica de Madrid, España.

Agradecimientos:

This work has been partially supported by FEDER and the State Research Agency (AEI) of the Spanish Ministry of Economy and Competition under grant TIN2016-76843-C4-2-R (AEI/FEDER, UE).