MATEMÁTICAS II

Selectividad 2019

Comunidad autónoma de

Baleares

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Javier Rodrigo Hitos

https://www.ebaumatematicas.com

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Universitat de les Illes Balears

Proves d'accés a la Universitat

Matemàtiques II 2019

Model 1

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Es disposa de 90 minuts.

Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4. Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Podeu utilitzar calculadora de qualsevol tipus, científica, gràfica o programable, però no s'autoritzarà l'ús de les que portin informació emmagatzemada o puguin transmetre-la.

OPCIÓ A

1. a) Discutiu per a quins valors de a el sistema següent és compatible:

$$\left.\begin{array}{rcrcrl}(a+2)x & + & (a-1)y & - & z = & 1,\\ ax & - & y & + & z = & -1,\\ 11x & + & ay & - & z = & a.\end{array}\right\}$$

(7 punts)

b) Resoleu-lo en el cas en què $a=0$. (3 punts)

2. Les funcions $f(x)=x^4+ax^2+bx$ i $g(x)=x-cx^2$ passen pel punt $(1,0)$. Determinau els coeficients a, b i c perquè tinguin la mateixa recta tangent en aquest punt i calculau-la. (10 punts)

3. Determinau la posició relativa del pla $x+y+z=1$ amb la recta d'equacions $x-1=y-1=\frac{z-1}{-2}$. (4 punts) Calculau la projecció ortogonal de la recta sobre el pla. (6 punts)

4. Les alçades X dels estudiants de 18 anys dels instituts de Palma es modelen segons una llei normal de mitjana $\mu=1.78$ m i desviació típica $\sigma=0.65$ m. Es demana:

a) Percentatge d'estudiants de 18 anys dels instituts de Palma que fan més d'1.90 m. (4 punts)

b) Agafam una mostra de 100 estudiants de 18 anys dels instituts de Palma i en volem seleccionar els 30 més alts. Quina és l'alçada mínima que ha de fer un estudiant de 18 anys dels instituts de Palma per ser seleccionat? (6 punts)

Universitat de les Illes Balears
Proves d'accés a la Universitat

Matemàtiques II 2019

Model 1

OPCIÓ B

1. Considerem la matriu i els vectors següents:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} y \\ 2y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 6-2y \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Calculau x i y perquè es verifiqui:

$$\mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{d}.$$

(10 punts)

2. Considerem la regió delimitada per la funció $f(x) = x^2 - x^4$ i l'eix d'abscisses o eix OX. Feu un esbós de la regió demanada (6 punts) i calculau l'àrea de la regió. (4 punts)

3. Considerem la recta $\frac{x-1}{2} = y + 1 = -z + 1$ i el pla $x - y = 0$. Calculau l'àrea del triangle format pel punt de tall entre la recta i el pla, el punt $(1, -1, 1)$ de la recta i la projecció ortogonal d'aquest punt sobre el pla. (10 punts)

4. En una comunitat de 500 estudiants de segon de batxillerat, 200 estudien l'opció científica tecnològica. N'hi ha 150 que practiquen futbol i 100 que practiquen bàsquet (entenem que no n'hi ha cap que practiqui futbol i bàsquet a la vegada). Dels que practiquen bàsquet, 70 estudien l'opció científica tecnològica, i hi ha 150 estudiants que no practiquen esport ni fan l'opció científica tecnològica. Es demana:

a) Probabilitat que un estudiant estudiï l'opció científica tecnològica i no practiqui esport. (3 punts)

b) Sabent que un estudiant practica futbol, quina és la probabilitat que estudiï l'opció científica tecnològica? (3 punts)

c) Són independents els esdeveniments "practicar futbol" i "estudiar l'opció científica tecnològica". Raonau la resposta. (4 punts)

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Universitat de les Illes Balears
Proves d'accés a la Universitat

Matemàtiques II 2019

Model 1

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal $N(0,1)$.

OPCIÓ A

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Problema A.1:

1. *a*) Discutiu per a quins valors de a el sistema següent és compatible:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} (a+2)x & + & (a-1)y & - & z & = & 1, \\ ax & - & y & + & z & = & -1, \\ 11x & + & ay & - & z & = & a. \end{array}\right\}$$

(7 punts)

b) Resoleu-lo en el cas en què $a = 0$. (3 punts)

Solución:

Escribimos la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a+2 & a-1 & -1 & 1 \\ a & -1 & 1 & -1 \\ 11 & a & -1 & a \end{array}\right)$$

Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes:

$$|A| = \begin{vmatrix} a+2 & a-1 & -1 \\ a & -1 & 1 \\ 11 & a & -1 \end{vmatrix} = a+2-a^2+11(a-1)-(11+a(a+2)-a(a-1))$$
$$= -a^2+9a-20$$

El determinante de A vale cero si a = 4 o a = 5. En esos casos el rango de A es 2. En caso contrario es 3, luego el sistema es compatible determinado. Si a = 4 o a = 5 el rango de la matriz ampliada es 3, luego el sistema es incompatible.

Si $a \neq 4$ o $a \neq 5$ es sistema es compatible y determinado.

Si a = 0 entonces, ya sabemos que es compatible determinado. Resolvemos por el Método de Gauss:

$$\begin{cases} 2x-y-z=1 \\ -y+z=-1 \\ 11x-z=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x-y-z=1 \\ y=z+1 \\ 11x=z \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2\dfrac{z}{11}-(z+1)-z=1 \rightarrow 2z-11z-11-11z=-20z-11=11 \\ y=z+1 \\ 11x=z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z=\dfrac{-11}{10} \\ y=\dfrac{-1}{10} \\ x=\dfrac{-1}{10} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{x=\frac{-1}{10};\ y=\frac{-1}{10};\ z=\frac{-11}{10}}$$

Problema A.2:

2. Les funcions $f(x) = x^4 + ax^2 + bx$ i $g(x) = x - cx^2$ passen pel punt $(1, 0)$. Determinau els coeficients a, b i c perquè tinguin la mateixa recta tangent en aquest punt i calculau-la.
(10 punts)

Solución:

Nos dicen que la funciones pasan por el punto (1, 0):

$$f(x) = x^4 + ax^2 + bx \to f(1) = 0 = 1 + a + b$$
$$g(x) = x - cx^2 \to g(1) = 0 = 1 - c$$

Calculamos la recta tangente de cada una de las funciones en ese punto.

$$f'(x) = 4x^3 + 2ax \quad + b \to f'(1) = 4 + 2a \ + \ b$$
$$g'(x) = 1 - 2cx \to g'(1) = 1 - 2c$$

Imponemos que sea la misma recta tangente, igualando las pendientes:

$f'(1) = 4 + 2a \ + \ b = g'(1) = 1 - 2c \to 2a + b + 2c = -3.$

Tenemos el sistema:

$$\begin{cases} 0 = 1 + a + b \\ 0 = 1 - c \to c = 1 \\ 2a + b + 2c = -3 \end{cases} \to \begin{cases} a + b = -1 \\ 0 = 1 - c \to c = 1 \\ 2a + b + 2(1) = -3 \to 2a + b = -5 \end{cases} \to \begin{cases} a = -4 \\ c = 1 \\ b = 3 \end{cases}$$

La recta tangente pasa por (1, 0) y tiene de pendiente: $1 - 2c = \ -1;\ 4 + 2(-4) + \ 3 = -1.$

Es una recta que pasa por (1, 0) de pendiente horizontal: -1: $y = -(x - 1) = -x + 1$.

Los parámetros valen: $\boldsymbol{a = -4};\ \boldsymbol{b = 3};\ \boldsymbol{c = 1}$. Recta tangente: $\boldsymbol{y = -x + 1}$

Problema A.3:

3. Determinau la posició relativa del pla $x + y + z = 1$ amb la recta d'equacions $x - 1 = y - 1 = \frac{z-1}{-2}$. (4 punts) Calculau la projecció ortogonal de la recta sobre el pla. (6 punts)

Solución:

El vector de dirección de la recta dada es: (1, 1, –2), y pasa por el punto (1, 1, 1).

El plano tiene como vector ortogonal (1, 1, 1).

Hacemos el producto escalar de ambos vectores: (1, 1, –2) (1, 1, 1) = 1 + 1 – 2 = 0. Son perpendiculares. Luego la recta es paralela (o está contenida) al plano. Miramos si el punto de la recta está en el plano:

1 + 1 + 1 = 3 $\neq$ 1. No verifica la ecuación del plano, luego la recta es paralela al plano.

La recta es **paralela** al plano.

Al ser la recta paralela al plano, para determinar la proyección ortogonal, podemos determinar la proyección de un punto de la recta (1, 1, 1) que tomamos como punto de la nueva recta, y como vector de dirección el de la recta dada.

El punto, proyección ortogonal de (1, 1, 1), viene dado por la intersección del plano dado con la recta cuyo vector de dirección el normal al plano, y que pasa por el punto:

$$\begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = 1 + \alpha \\ z = 1 + \alpha \end{cases} \to x + y + z = 1 \to (1+\alpha) + (1+\alpha) + (1+\alpha) = 1 = 3 + 3\alpha \to \alpha = \frac{-2}{3} \to 1 - \alpha = \frac{1}{3}$$

El punto es: $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

Y la recta proyección ortogonal:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = \frac{1}{3} + \alpha} \\ \boldsymbol{y = \frac{1}{3} + \alpha} \\ \boldsymbol{z = \frac{1}{3} - 2\alpha} \end{cases} \boldsymbol{\equiv x - \frac{1}{3} = y - \frac{1}{3} = \frac{z - \frac{1}{3}}{-2}}$$

Problema A.4:

4. Les alçades X dels estudiants de 18 anys dels instituts de Palma es modelen segons una llei normal de mitjana $\mu = 1.78$ m i desviació típica $\sigma = 0.65$ m. Es demana:

a) Percentatge d'estudiants de 18 anys dels instituts de Palma que fan més d'1.90 m. (4 punts)

b) Agafam una mostra de 100 estudiants de 18 anys dels instituts de Palma i en volem seleccionar els 30 més alts. Quina és l'alçada mínima que ha de fer un estudiant de 18 anys dels instituts de Palma per ser seleccionat? (6 punts)

Solución:

Nos dicen que la media es 1.78 y que la desviación típica es 0.65.

a) La variable sigue una distribución normal $N(\mu, \sigma) = N(1.78, 0.65)$. Tenemos que:

$P(x > 1.90) = P(z > \frac{1.9-1.78}{0.65}) = (P > 0.1846) = 1 - P(x < 0.1846) = 1 - 0.5733 = 0.4266.$

$$\boldsymbol{P(x > 1.90) = 0.4266}$$

b) Queremos seleccionar los 30 más altos de una muestra de 100 estudiantes. Calculamos la altura mínima con la que deba ser seleccionado.

$$P(x > a) = \frac{30}{100} = 0.3 = P(z > \frac{a - 1.78}{0.65}) \to P(z < \frac{a - 1.78}{0.65}) = 1 - 0.3 = 0.7$$

Buscamos en las tablas:

$$\frac{a - 1.78}{0.65} = 0.52 \to a = 1.78 + (0.52) \cdot (0.65) = 2.118$$

Los estudiantes deben ser altísimos, de más de dos metros: **2.118 m**

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

OPCIÓ B

Problema B.1:

1. Considerem la matriu i els vectors següents:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} y \\ 2y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 6-2y \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Calculau x i y perquè es verifiqui:

$$\mathbf{b} - \mathbf{A}\cdot\mathbf{c} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{d}.$$

(10 punts)

Solución:

Nos piden que se verifique que:

$$b - Ac = Ad \to \begin{pmatrix} 2 \\ 3/2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6-2y \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 2 \\ 3/2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} xy + y^2 \\ 2y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - xy - 2y^2 \\ 3/2 - 2y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x - 2xy - 2y \\ -2y \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{cases} 2 - xy - 2y^2 = 6x - 2xy - 2y \\ 3/2 - 2y^2 = -2y \end{cases} \to \begin{cases} 2 + xy + 2y - 2y^2 - 6x = 0 \\ 4y^2 - 2y - 3 = 0 \to y = \frac{-1}{2}, \frac{3}{2} \end{cases}$$

Sustituimos los valores de y en la primera ecuación:

Si $y = \frac{-1}{2}$

$$2 + xy + 2y - 2y^2 - 6x = 0 \to 2 + x\left(\frac{-1}{2}\right) + 2\left(\frac{-1}{2}\right) - 2\left(\frac{-1}{2}\right)^2 - 6x = 0 \to x = \frac{1}{13}$$

Si $y = \frac{3}{2}$

$$2 + xy + 2y - 2y^2 - 6x = 0 \to 2 + x\left(\frac{3}{2}\right) + 2\left(\frac{3}{2}\right) - 2\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 6x = 2 + x\left(\frac{3}{2}\right) + 3 - \frac{9}{2} - 6x = \frac{1}{2} - \frac{9x}{2}$$
$$= 0 \to x = \frac{1}{9}$$

$$Si\ \boldsymbol{y} = \frac{-\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\ entonces\ \boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{13}};\ Si\ \boldsymbol{y} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\ entonces\ \boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{9}}.$$

Problema B.2:

2. Considerem la regió delimitada per la funció $f(x) = x^2 - x^4$ i l'eix d'abscisses o eix OX. Feu un esbós de la regió demanada (6 punts) i calculau l'àrea de la regió. (4 punts)

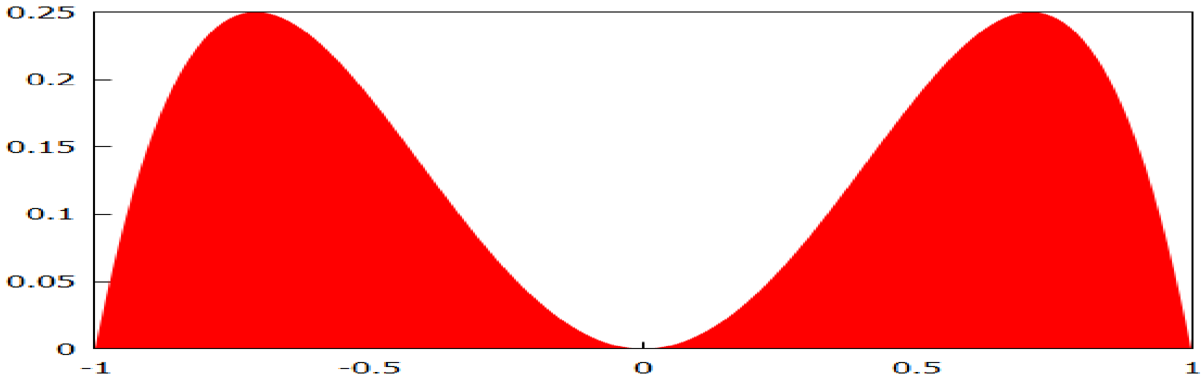
Solución:

La función dada es una función polinómica de cuarto grado, simétrica con eje de simetría el eje de ordenadas.

Corta al eje de abscisas en $x = 0$, raíz doble, y en $x = 1$ y $x = -1$.

Cuando x tiende a infinito la función tiende a menos infinito.

Con esto, ya podemos esbozar la gráfica:



El área pedida será la integral definida entre –1 y 1, los dos puntos de corte con el eje de abscisas. Pero al ser la gráfica simétrica podemos calcular la integral entre 0 y 1 y multiplicar por 2.

$$Área = \int_{-1}^{1} (x^2 - x^4)dx = 2\int_{0}^{1} (x^2 - x^4)dx = 2\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]\Bigg|_0^1 = 2((\frac{1}{3} - \frac{1}{5}) - 0) = \frac{4}{15}u^2$$

$$Área = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{15}}\boldsymbol{u^2}$$

Problema B.3:

3. Considerem la recta $\frac{x-1}{2} = y+1 = -z+1$ i el pla $x-y=0$. Calculau l'àrea del triangle format pel punt de tall entre la recta i el pla, el punt $(1,-1,1)$ de la recta i la projecció ortogonal d'aquest punt sobre el pla. (10 punts)

Solución:

La ecuación paramétrica de la recta es:

$$\begin{cases} x = 1 + 2\alpha \\ y = -1 + \alpha \\ z = 1 - \alpha \end{cases}$$

Sustituimos en el plano:

$$x - y = 0 \to 1 + 2\alpha - (-1 + \alpha) = 0 = 2 + \alpha \to \alpha = -2 \to (-3, -3, 3)$$

El punto de intersección es: $(-3, -3, 3)$

Buscamos la proyección ortogonal del punto (1, −1, 1) sobre el plano $x - y = 0$. Para ello buscamos la recta ortogonal al plano que pasa por el punto, por lo que su vector de dirección es: (1, −1, 0), y su ecuación:

$$\begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = -1 - \alpha \\ z = 1 \end{cases}$$

Y hallamos la intersección entre esta recta y en plano:

$$x - y = 0 \to 1 + \alpha - (-1 - \alpha) = 0 = 2 + 2\alpha \to \alpha = -1 \to (0, 0, 1)$$

Los tres vértices del triángulo son: $P(-3, -3, 3)$; $Q(0, 0, 1)$; $R(1, -1, 1)$.

Calculamos los vectores: $\overline{PQ}(-3, -3, 2)\ y\ \overline{RQ}(1, -1, 0)$.

El área pedida es:

$$Área = \frac{1}{2}|\overline{QP}x\overline{QR}| = \frac{1}{2}\left\| \begin{matrix} i & j & k \\ -3 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2}|2i + 2j + 6k| = |i + j + 3k| = \sqrt{1 + 1 + 9} = \sqrt{11}$$

$$Área = \sqrt{\mathbf{11}}\, u^2$$

Problema B.4:

4. En una comunitat de 500 estudiants de segon de batxillerat, 200 estudien l'opció científica tecnològica. N'hi ha 150 que practiquen futbol i 100 que practiquen bàsquet (entenem que no n'hi ha cap que practiqui futbol i bàsquet a la vegada). Dels que practiquen bàsquet, 70 estudien l'opció científica tecnològica, i hi ha 150 estudiants que no practiquen esport ni fan l'opció científica tecnològica. Es demana:

a) Probabilitat que un estudiant estudiï l'opció científica tecnològica i no practiqui esport. (3 punts)

b) Sabent que un estudiant practica futbol, quina és la probabilitat que estudiï l'opció científica tecnològica? (3 punts)

c) Són independents els esdeveniments "practicar futbol" i "estudiar l'opció científica tecnològica". Raonau la resposta. (4 punts)

Solución:

Llamamos C a estudiar la opción científica y tecnológica, F a practicar el futbol, B a practicar baloncesto y $\bar{D}$ a no practicar ningún deporte.

Los datos que nos da el enunciado los llevamos a una tabla de contingencia:

	Científica y tecnológica (C)	$\bar{C}$	Total
Futbol (F)			150
Baloncesto (B)	70		100
No hacen deporte($\bar{D}$)		150	
Total	200		500

Completamos la tabla:

	Científica y tecnológica (C)	$\bar{C}$	Total
Futbol (F)	***30***	***120***	150
Baloncesto (B)	70	***30***	100
No hacen deporte($\bar{D}$)	***100***	150	***250***
Total	200	***300***	500

a) Nos piden:

$$\boldsymbol{P(C \cap \bar{D})} = 100/500 = \mathbf{1/5} = \mathbf{0.2}.$$

b) $P(C/F) = \frac{P(C\cap F)}{P(F)} = \frac{30}{150} = \frac{1}{5}$. $\boldsymbol{P(C/F) = \frac{1}{5} = 0.2}$.

c) Para que los sucesos sean independientes se debe verificar que $P(C) \cdot P(F) = P(C \cap F)$

$$P(C) \cdot P(F) = \frac{200}{500} \cdot \frac{150}{500} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 10} = \frac{3}{25}$$

$$P(C \cap F) = \frac{30}{500} = \frac{3}{50} \neq \frac{3}{25}$$

Los sucesos son **dependientes**.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Universitat de les Illes Balears
Proves d'accés a la Universitat

Matemàtiques II 2019

Model 2

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Es disposa de 90 minuts.

Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4. Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Podeu utilitzar calculadora de qualsevol tipus, científica, gràfica o programable, però no s'autoritzarà l'ús de les que portin informació emmagatzemada o puguin transmetre-la.

OPCIÓ A

1. *a*) Discutiu per a quins valors de m el sistema següent és compatible:

$$\left.\begin{array}{rcrcrl} 4x & + & 3y & + & 2z = & 0, \\ 2x & + & y & - & z = & m, \\ 6x & + & 6y & + & m^2 z = & -9. \end{array}\right\}$$

(7 punts)

b) Resoleu-lo en el cas en què sigui compatible indeterminat. (3 punts)

2. Calculau els màxims i mínims relatius de la funció $f(x) = x^3 - 3x - 2$ (3 punts), els intervals de creixement i decreixement (3 punts) i feu un esbós de la seva gràfica per x entre -3 i 3. (4 punts)

3. Determinau un pla que, passant per l'origen de coordenades, sigui paral·lel a la recta d'equacions

$$\left.\begin{array}{rl} x + y = & 1, \\ y + z = & 2, \end{array}\right\}$$

i també paral·lel a la recta que passa pels punts de coordenades $(1, 1, 0)$ i $(0, 1, 1)$. (10 punts)

4. El pes dels adults de 40 anys d'una certa comunitat es modela amb una distribució normal de mitjana $\mu = 85$ kg i desviació típica $\sigma = 15$ kg. Ens demanen:

a) Quin percentatge de la població té sobrepès? Entenem que una persona adulta de 40 anys té sobrepès si pesa més de 100 kg. (4 punts)

b) Consideram el col·lectiu dels individus més prims de la comunitat. Si ens diuen que aquest col·lectiu representa el 40% de tots els individus de la comunitat, quin és el pes màxim d'un individu del col·lectiu? (6 punts)

Universitat de les Illes Balears
Proves d'accés a la Universitat

Matemàtiques II 2019

Model 2

OPCIÓ B

1. Considerem la matriu i els vectors següents:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\\1&0\end{pmatrix},\quad \mathbf{b}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\quad \mathbf{c}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\quad \mathbf{d}=\begin{pmatrix}z\\z\\z\end{pmatrix}.$$

Trobau x, y i z perquè se satisfaci:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{b}-2\mathbf{c}=\mathbf{d}.$$

(10 punts)

2. Considerem la regió delimitada per la funció $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$, l'eix d'abscisses o eix OX i les rectes verticals $x=-1$ i $x=1$. Feu un esbós de la regió demanada (6 punts) i calculau l'àrea de la regió. (4 punts)

3. Considerem els punts $A(0,0,0)$, $B(1,1,0)$ i $C(0,1,1)$. Calculau l'àrea del triangle que formen els punts A, B i C (5 punts) i determinau l'angle que formen els vectors $\mathbf{AB}$ i $\mathbf{AC}$. (5 punts)

4. S'ha fet un estudi sobre la por de volar i el nivell d'estrès en una certa comunitat. Ens diuen que el 60% dels individus no tenen por de volar, el 50% té un nivell baix d'estrès, el 25%, un nivell mitjà, i el 5% té un nivell alt d'estrès i por de volar. Sabent, a més a més, que el 5% dels individus té un nivell mitjà d'estrès i no té por de volar, es demana:

a) Probabilitat que un individu de la comunitat tingui un nivell d'estrès mitjà i por de volar. (3 punts)

b) Sabent que un individu té por de volar, quina és la probabilitat que tingui un nivell baix d'estrès? (3 punts)

c) Són independents els esdeveniments "nivell d'estrès baix" i "por de volar"? Raonau la resposta. (4 punts)

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Universitat de les Illes Balears

Proves d'accés a la Universitat

Matemàtiques II 2019

Model 2

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal $N(0,1)$.

OPCIÓ A

Problema A.1:

1. *a*) Discutiu per a quins valors de m el sistema següent és compatible:

$$\left.\begin{array}{rcrcrl} 4x & + & 3y & + & 2z = & 0, \\ 2x & + & y & - & z = & m, \\ 6x & + & 6y & + & m^2 z = & -9. \end{array}\right\}$$

(7 punts)

b) Resoleu-lo en el cas en què sigui compatible indeterminat. (3 punts)

Solución:

a) Para discutir el sistema calculamos el rango de la matriz de los coeficientes y el rango de la matriz ampliada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & m \\ 6 & 6 & m^2 & -9 \end{array}\right)$$

El rango de la matriz de los coeficientes es siempre mayor o igual a 2, pues hay menores de orden 2 distintos de cero: $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2$. Calculamos el determinante y lo igualamos a cero:

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 6 & 6 & m^2 \end{vmatrix} = 4m^2 + 24 - 18 - (12 - 24 + 6m^2) = -2m^2 + 18 = 0 \to m = \pm 3.$$

Si $m \neq \pm 3$ el rango de la matriz de los coeficientes y el rango de la matriz ampliada es 3, por lo que el sistema es compatible determinado.

Si $m = -3$, entonces:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \\ 6 & 6 & 9 & -9 \end{array}\right) \to \begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ 6 & 6 & -9 \end{vmatrix} = 90 \neq 0$$

El rango de la matriz de los coeficientes es 2, y el rango de la matriz ampliada es 3, por lo que el sistema es incompatible.

Si $m = +3$, entonces:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 6 & 6 & 9 & -9 \end{array}\right) \to \begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 6 & 6 & -9 \end{vmatrix} = 0$$

El rango de la matriz de los coeficientes es 2, y el rango de la matriz ampliada es también 2, por lo que el sistema es compatible indeterminado.

Si $m \neq \pm 3$, sistema compatible determinado. Si $m = -3$, sistema incompatible. Si $m = +3$, sistema compatible indeterminado.

b) Resolvemos el sistema en este último caso:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}4 & 3 & 2 & 0\\ 2 & 1 & -1 & 3\\ 6 & 6 & 9 & -9\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}4 & 3 & 2 & 0\\ 2 & 1 & -1 & 3\\ 2 & 2 & 3 & -3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}4 & 3 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 4 & -6\\ 0 & -1 & -4 & 6\end{array}\right)$$

Usamos el método de Gauss. Dividimos por 3 la tercera fila. Restamos a la segunda la tercera. Restamos a la primera la segunda multiplicada por 2. La tercera fila es igual a la segunda, luego:

$$\begin{cases}4x+3y+2z=0\\ y+4z=-6\end{cases}\to\begin{cases}4x+3(-4z-6)+2z=4x-12z-18+2z=0\\ y=-4z-6\end{cases}$$

$$\to\begin{cases}x=\dfrac{10}{4}z+\dfrac{18}{4}=\dfrac{5}{2}z+\dfrac{9}{2}\\ y=-4z-6\\ z=z\end{cases}$$

$$\begin{cases}\boldsymbol{x=\dfrac{5}{2}z+\dfrac{9}{2}}\\ \boldsymbol{y=-4z-6}\\ \boldsymbol{z=z}\end{cases}$$

Tiene infinitas soluciones

Problema A.2:

2. Calculau els màxims i mínims relatius de la funció $f(x) = x^3 - 3x - 2$ (3 punts), els intervals de creixement i decreixement (3 punts) i feu un esbós de la seva gràfica per x entre -3 i 3. (4 punts)

Solución:

Para determinar los extremos relativos utilizamos la primera derivada de la función:

$$f(x) = x^3 - 3x - 2 \to f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \to x = \pm 1$$

La derivada se anula en $x = \pm 1$. Para determinar si son máximos o mínimos utilizamos la derivada segunda:

$$f'(x) = 3x^2 - 3 \to f''(x) = 6x \to f''(1) = 6(1) = 6 > 0 \to f''(-1) = 6(-1) = -6 < 0$$

Si la derivada segunda es positiva el punto es un mínimo relativo, y si es negativa un máximo.

$$f(x) = x^3 - 3x - 2 \to f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) - 2 = 0 \to f(1) = (1)^3 - 3(1) - 2 = -4$$

La función tiene un **máximo** relativo en el punto $\mathbf{(-1, 0)}$ y un **mínimo** relativo en $\mathbf{(1, -4)}$.

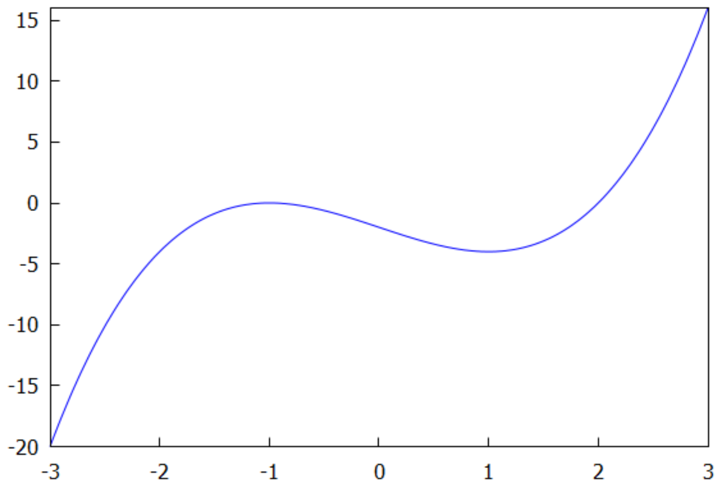
Si la derivada primera es positiva la función es creciente, y si negativa, decreciente: $f'(x) = 3x^2 - 3$. Para $x < -1$, la derivada primera es positiva, luego la función es creciente. Para $-1 < x < 1$, la derivada primera es negativa, luego la función es decreciente. Para $x > 1$ la derivada primera vuelve a ser positiva, luego la función es creciente.

La función es **creciente** en $\mathbf{(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)}$ y **decreciente** en $\mathbf{(-1, 1)}$.

Para hacer el esbozo de la gráfica, buscamos los puntos de intersección con los ejes coordenados: Para $x = 0$, $y = -2$. Para $x = -1$, $y = 0$. Por Ruffini eliminamos esta raíz -1, resolvemos la ecuación de segundo grado y las nuevas raíces son 2 y -1. Por tanto, en $(-1, 0)$ hay una raíz doble. Los otros puntos de corte son: $(2, 0)$ y $(0, -2)$.

Para $x = 3$, $f(x) = x^3 - 3x - 2 \to f(3) = (3)^3 - 3(3) - 2 = 27 - 9 - 2 = 16 \to (3, 16)$

Para $x = -3$ $f(x) = x^3 - 3x - 2 \to f(-3) = (-3)^3 - 3(-3) - 2 = -27 + 9 - 2 = -20 \to (-3, -20)$



CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema A.3:

3. Determinau un pla que, passant per l'origen de coordenades, sigui paral·lel a la recta d'equacions

$$\left.\begin{array}{r} x+y= \ 1, \\ y+z= \ 2, \end{array}\right\}$$

i també paral·lel a la recta que passa pels punts de coordenades $(1,1,0)$ i $(0,1,1)$. (10 punts)

Solución:

Para que el plano sea paralelo a una recta, el vector de dirección de la recta es un vector de orientación del plano.

La recta:

$$\begin{cases} x+y=1 \\ y+z=2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=1-y \\ \quad y=y \\ z=2-y \end{cases}$$

Tiene de vector de dirección: (–1, 1, –1).

La recta que pasa por los puntos (1, 1, 0) y (0, 1, 1) tiene de vector de dirección:

(1, 1, 0) – (0, 1, 1) = (1, 0, –1).

Además, nos dicen que el plano pasa por el origen de coordenadas.

Por tanto, su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -x\ -2y\ -\ z = x+2y+z=0$$

Ecuación del plano: $\boldsymbol{x+2y+z=0}$

Problema A.4:

4. El pes dels adults de 40 anys d'una certa comunitat es modela amb una distribució normal de mitjana $\mu = 85$ kg i desviació típica $\sigma = 15$ kg. Ens demanen:

a) Quin percentatge de la població té sobrepès? Entenem que una persona adulta de 40 anys té sobrepès si pesa més de 100 kg. (4 punts)

b) Consideram el col·lectiu dels individus més prims de la comunitat. Si ens diuen que aquest col·lectiu representa el 40% de tots els individus de la comunitat, quin és el pes màxim d'un individu del col·lectiu? (6 punts)

Solución:

Nos dicen que la media es 85 y que la desviación típica es 15.

a) La variable sigue una distribución normal $N(\mu, \sigma) = N(85, 15)$.

Nos piden calcular el porcentaje de la población que tiene sobrepeso, y nos dicen que lo tienen si pesa más de 100 kg. Tenemos que:

$P(x > 100) = P(z > \frac{100-85}{15}) = (P > 1) = 1 - P(x < 1) = 1 - 0.8413 = \ 0.1587.$

Aproximadamente el **16** % de la población tiene sobrepeso.

b) Queremos seleccionar el 40 %.

$$P(x < a) = \frac{40}{100} = 0.4 = \ P(z < \frac{a-85}{15})$$

Buscamos en las tablas. Pero el valor 0.4 no aparece, por lo que sabemos que es negativo. Buscamos el valor 0.6, y por la simetría de la curva normal sabemos que:

$$P(z < \frac{a-85}{15}) = \frac{0.25 + 0.26}{2} = 0.255$$

$$-\frac{a-85}{15} = 0.255 \rightarrow a = 85 - (0.255) \cdot (15) = 81.175$$

El peso máximo es de **81.175** kg.

OPCIÓ B

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema B.1:

1. Considerem la matriu i els vectors segïients:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\\1&0\end{pmatrix},\quad \mathbf{b}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\quad \mathbf{c}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\quad \mathbf{d}=\begin{pmatrix}z\\z\\z\end{pmatrix}.$$

Trobau x, y i z perquè se satisfaci:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{b}-2\mathbf{c}=\mathbf{d}.$$

(10 punts)

Solución:

Queremos resolver la ecuación:

$$A\cdot b-2c=d\rightarrow\begin{pmatrix}2&1\\1&2\\1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}z\\z\\z\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}2x+y\\x+2y\\x\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}z\\z\\z\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}2x+y-2\\x+2y-2\\x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}z\\z\\z\end{pmatrix}$$

Tenemos el sistema:

$$\begin{cases}2x+y-2=z\\x+2y-2=z\\x=z\end{cases}\rightarrow\begin{cases}2x+y-2=x\\x+2y-2=x\\x=z\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x+y=2\\2y=2\\x=z\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x+1=2\\y=1\\x=z\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x=1\\y=1\\z=1\end{cases}$$

$$\boldsymbol{x=1;\ y=1; z=1.}$$

Problema B.2:

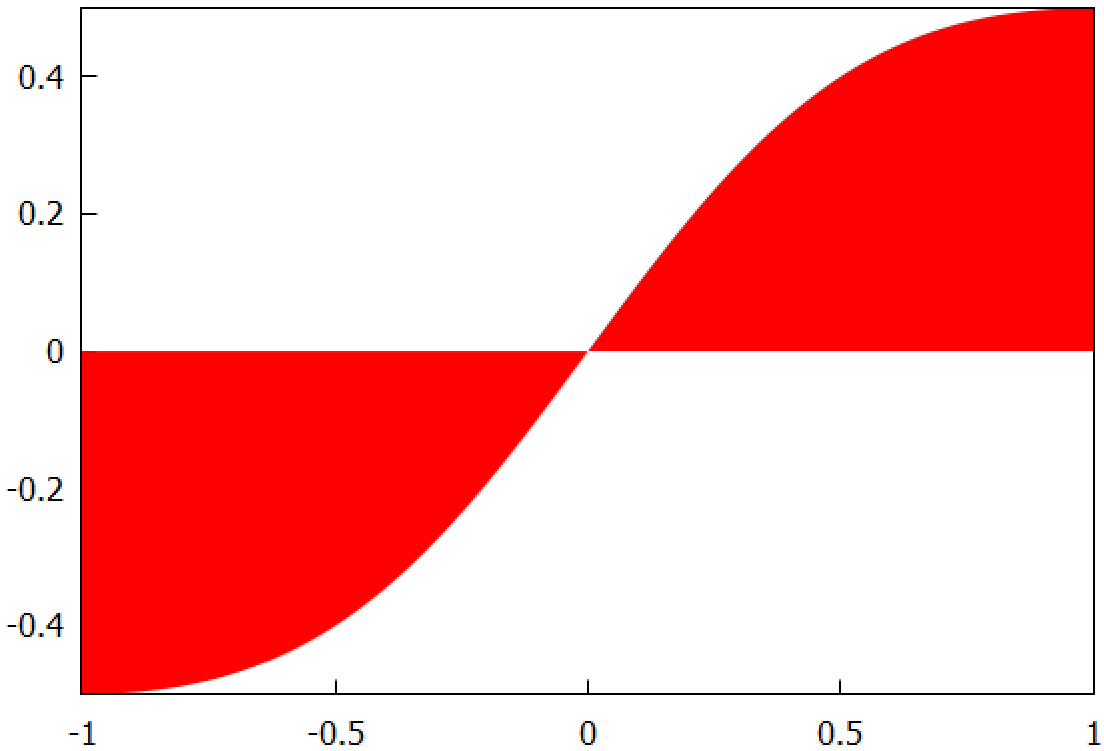
2. Considerem la regió delimitada per la funció $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$, l'eix d'abscisses o eix OX i les rectes verticals $x = -1$ i $x = 1$. Feu un esbós de la regió demanada (6 punts) i calculau l'àrea de la regió. (4 punts)

Solución:

Hallamos los puntos de intersección entre la función y las rectas dadas:

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2} \to f(-1) = \frac{-1}{1+(-1)^2} = \frac{-1}{2} \to f(1) = \frac{1}{1+(1)^2} = \frac{1}{2} \to (-1, \frac{-1}{2});\ (1, \frac{1}{2}).$$

Para esbozar la gráfica de la función observamos que corta a los ejes en un único punto, el origen de coordenadas: (0, 0). La función tiene simetría impar. Y en el intervalo (-1, 1) es siempre creciente.



El área pedida será la integral definida entre –1 y 1. Pero al ser la gráfica simétrica podemos calcular la integral entre 0 y 1 y multiplicar por 2.

$$Área = \int_{-1}^{1} \left(\frac{x}{1+x^2}\right) dx = 2\int_{0}^{1} \left(\frac{x}{1+x^2}\right) dx = \int_{0}^{1} \left(\frac{2x}{1+x^2}\right) dx = [ln(1+x^2)]\Big|_0^1$$

$$= ln(2) - ln(1) = ln(2)u^2 \cong 0.7u^2$$

$$Área = \boldsymbol{ln(2)u^2 \cong 0.7u^2}$$

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema B.3:

3. Considerem els punts $A(0,0,0)$, $B(1,1,0)$ i $C(0,1,1)$. Calculau l'àrea del triangle que formen els punts A, B i C (5 punts) i determinau l'angle que formen els vectors $\mathbf{AB}$ i $\mathbf{AC}$. (5 punts)

Solución:

Los tres vértices del triángulo son: $A(0,0,0); B(1,1,0); C(0,1,1)$.

Calculamos los vectores: $\overline{BA}(1,1,0)\ y\ \overline{CA}(0,1,1)$.

El área pedida es:

$$Área = \frac{1}{2}|\overline{BA}xCA| = \frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}\right\| = \frac{1}{2}|i-j+k| = \frac{1}{2}\sqrt{1+1+1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$Área = \frac{\sqrt{3}}{2}\ u^2$$

Calculamos el ángulo que forman los vectores: $\overline{AB}(-1,-1,0)$ y $\overline{AC}(0,-1,-1)$.

Sabemos que el coseno del ángulo que forman es igual al producto escalar dividido por los módulos:

$$cos\alpha = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{|\overline{AB}|\cdot|\overline{AC}|} = \frac{(-1,-1,0)\cdot(0,-1,-1)}{\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+(0)^2}\cdot\sqrt{(0)^2+(-1)^2+(-1)^2}} = \frac{0+1+0}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

Por tanto, sabemos que forman un ángulo de $\frac{\pi}{3}$ *radianes o de* $\mathbf{60°}$.

Forman un ángulo de $\frac{\pi}{3}$ *radianes o de* $\mathbf{60°}$.

Problema B.4:

4. S'ha fet un estudi sobre la por de volar i el nivell d'estrès en una certa comunitat. Ens diuen que el 60% dels individus no tenen por de volar, el 50% té un nivell baix d'estrès, el 25%, un nivell mitjà, i el 5% té un nivell alt d'estrès i por de volar. Sabent, a més a més, que el 5% dels individus té un nivell mitjà d'estrès i no té por de volar, es demana:

a) Probabilitat que un individu de la comunitat tingui un nivell d'estrès mitjà i por de volar. (3 punts)
b) Sabent que un individu té por de volar, quina és la probabilitat que tingui un nivell baix d'estrès? (3 punts)
c) Són independents els esdeveniments "nivell d'estrès baix" i "por de volar"? Raonau la resposta. (4 punts)

Solución:

Llevamos los porcentajes del enunciado a una tabla de contingencia:

Miedo a volar	Nivel bajo de estrés (B)	Nivel medio (M)	Nivel alto (A)	Total
Si			5	
No		5		60
Total	50	25		100

Utilizando las propiedades de una tabla, rellenamos lo que falta:

Miedo a volar	Nivel bajo de estrés (B)	Nivel medio (M)	Nivel alto (A)	Total
Si	***15***	***20***	5	***40***
No	***35***	5	***20***	60
Total	50	25	***25***	100

a) La probabilidad de que tenga un nivel medio y miedo a volar vemos en la tabla que es 20/100.

$$P(M \cap Si) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5} = 0.2.$$

b) La probabilidad de que tenga un nivel bajo de estrés condicionada a que tenga miedo a volar es:

$$P(B/Si) = \frac{P(B \cap Si)}{P(Si)} = \frac{15}{40} = \frac{3}{8} = 0.375.$$

c) Si dos sucesos son independientes la probabilidad de la intersección es igual al producto de probabilidades.

$$P(B \cap Si) = \frac{15}{100} = \frac{3}{20}$$

$$P(B) \cdot P(Si) = \frac{50}{100} \cdot \frac{40}{100} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{5} \neq \frac{3}{20}.$$

a) $\boldsymbol{P(M \cap Si) = 0.2.}$ b) $\boldsymbol{P(B/Si) = 0.375.}$ c) Los sucesos son **dependientes**.