Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2019

Comunidad autónoma de

Baleares

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Javier Rodrigo Hitos

Colaborador: Jesús Caballero Vallés

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Universitat de les Illes Balears
Proves d'accés a la Universitat

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II 2019

Model 1

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Es disposa de 90 minuts.

Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4. Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Podeu utilitzar calculadora de qualsevol tipus, científica, gràfica o programable, però no s'autoritzarà l'ús de les que portin informació emmagatzemada o puguin transmetre-la.

OPCIÓ A

1. Considerau la matriu següent:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 4 & x+2 & x^2 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Es demana:

a) Resoleu l'equació $|A| = 0$. ($|A|$ és el determinant de la matriu A.) (3 punts)
b) Si $x = 0$, té inversa la matriu A? Per què? (2 punts)
c) Si $x = 2$, té inversa la matriu A? Per què? En cas afirmatiu, resoleu l'equació $A \cdot Z = I$; on I és la matriu identitat 3×3. (5 punts)

2. El nombre de vehicles que ha passat cert dia pel peatge d'una autopista ve donat per la funció:

$$N(t) = \begin{cases} \left(\frac{t-3}{3}\right)^2 + 2, & \text{si } 0 \le t \le 9, \\ 10 - \left(\frac{t-15}{3}\right)^2, & \text{si } 9 < t \le 24, \end{cases}$$

on N indica el nombre de vehicles i t el temps transcorregut en hores des de les 0:00 h.

a) És contínua la funció $N(t)$? (3 punts)
b) Entre quines hores va augmentar el nombre de vehicles que passava pel peatge? En quines hores disminueix? (5 punts)
c) A quina hora va passar el major nombre de vehicles? Quin va ser aquest nombre? (2 punts)

3. Tenim un dau correcte i dues urnes amb bolles descrites a continuació:

Urna I: 1 bolla negra, 3 bolles vermelles i 6 bolles verdes.
Urna II: 2 bolles negres, 6 bolles vermelles i 2 bolles verdes.

Tiram el dau. Si surt 1 o 2, anam a l'urna I. Si surt 3, 4, 5 o 6, acudim a l'urna II. Extreim a l'atzar una bolla de l'urna corresponent.

Universitat de les Illes Balears

Proves d'accès a la Universitat

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II 2019

Model 1

a) Donau un diagrama en arbre que representi l'experiment amb totes les probabilitats. (3 punts)

b) Calculau les probabilitats següents: (4 punts)

i) $p(\{3,4,5,6\}$ i $\{$bolla vermella$\})$.

ii) $p(\{$bolla verda$\}/\{1\})$.

iii) $p(\{$bolla vermella$\}/\{5\})$.

iv) $p(\{2\}$ i $\{$bolla verda$\})$.

c) Calculau la probabilitat que la bolla extreta hagi estat vermella i que hagi estat negra. Quina és la probabilitat que la bolla extreta hagi estat verda? Quant val la suma de les tres probabilitats? Justifica la resposta. (3 punts)

4. Resoleu els apartats següents:

a) El pes dels habitants d'una ciutat té una mitjana de 67 kg i una desviació típica de 5 kg. Quina és la probabilitat que la mitjana del pes de 100 persones superi els 68.5 kg? I que sigui menor que 68 kg?. (5 punts)

b) En un hospital s'ha pres la temperatura a una mostra de 64 pacients, per a estimar la temperatura mitjana dels malalts. La mitjana de la mostra ha estat de 37,1 °C, i la desviació típica de la població, d'1,04 °C. Calcula un interval de confiança per a la mitjana poblacional amb un nivell de confiança del 99%. Interpreta el resultat en l'entorn del problema. (5 punts)

Universitat de les Illes Balears
Proves d'accés a la Universitat

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II 2019

Model 1

OPCIÓ B

1. Una empresa d'autobusos té tres línies: A, B i C. Dilluns varen sortir 5 autobusos a la línia A, 3 a la B i 4 a la C. Dimarts varen sortir 2 autobusos a la línia A, 1 a la B i 4 a la C. Dimecres varen sortir 1 autobús a la línia A, 3 a la B i 5 a la C.

a) Representau les dades en forma de matriu. (2 punts)
b) Té inversa la matriu construïda a l'apartat a)? En cas negatiu, justificau la resposta. En cas positiu, calculau la seva inversa. (4 punts)
c) Si D és la matriu construïda a l'apartat a), resoleu, si és possible, el sistema d'equacions: (4 punts)

$$D \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -33 \\ -33 \\ -33 \end{pmatrix}.$$

2. Una empresa es dedica a elaborar lots de productes que es venen als supermercats. En aquest moment estan empaquetant dos lots diferents. El lot de tipus A té 1 formatge i 2 botelles de vi, i el transport costa 0,90 €. El lot de tipus B té 3 formatges i 1 botella de vi, i costa 1,50 € transportar-lo. L'empresa disposa de 200 formatges i 100 botelles de vi, i han d'elaborar, almenys, 10 lots del tipus A i 25 del tipus B.

Quants lots de cada classe han d'elaborar perquè les despeses en transport siguin mínimes?

S'ha de plantejar el problema com un problema de programació lineal, dibuixant la regió factible de solucions i determinant i dibuixant els seus vèrtexs. (10 punts)

3. El nombre de visitants a un museu s'obté mitjançant la funció

$$V(t) = \frac{300t}{t^3 + 2}$$

on t és l'hora des de l'obertura del museu. Suposem que l'hora d'obertura del museu són les 9:00 hores del matí.

a) Quan creix i decreix el nombre de visitants del museu? (4 punts)
b) Quan rep el museu el nombre més gran de visitants? Quin és aquest nombre? (2 punts)
c) En quin valor de t es produeix un punt d'inflexió de $V(t)$? (4 punts)

4. Tenim dues urnes descrites a continuació:

Urna I: 2 bolles negres, 1 bolla vermella i 3 bolles verdes.
Urna II: 1 bolla negra, 2 bolles vermelles i 1 bolla verda.

L'experiment consisteix a extraure una bolla a l'atzar de l'urna I, introduir-la en l'urna II, remoure i extraure, finalment, una bolla a l'atzar de l'urna II.

Universitat de les Illes Balears

Proves d'accés a la Universitat

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II 2019

Model 1

a) Donau un diagrama en arbre que representi l'experiment amb les probabilitats associades.

(3 punts)

b) Calculau la probabilitat que la segona bolla extreta sigui (3 punts)
b.1) vermella. b.2) negra. b.3) verda.

c) Sabent que la segona bolla ha esta negra, quina és la probabilitat que la primera també ho fos? (2 punts)

d) Quina és la probabilitat que la primera fos vermella sent vermella la segona?

(2 punts)

Universitat de les Illes Balears

Proves d'accés a la Universitat

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II 2019

Model 1

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula 1: Taula de la distribució normal $N(0,1)$.

SOLUCIONES OPCIÓ A

Problema A.1:

1. Considerau la matriu següent:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 4 & x+2 & x^2 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Es demana:

a) Resoleu l'equació $|A| = 0$. ($|A|$ és el determinant de la matriu A.) (3 punts)
b) Si $x = 0$, té inversa la matriu A? Per què? (2 punts)
c) Si $x = 2$, té inversa la matriu A? Per què? En cas afirmatiu, resoleu l'equació $A \cdot Z = I$; on I és la matriu identitat 3×3. (5 punts)

Solución:

a) Se cumple que:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 4 & x+2 & x^2 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} =-\,3\,(x+2) - 3\,x^2 - 20 - 5\,(x+2) - x^2 + 36 = -3\,x - 6 - 3\,x^2 - 20 - 5\,x - 10 - x^2 + 36 = -4\,x^2 - 8\,x = -4\,x\,(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 0,\;\; x+2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\boldsymbol{x = 0,\; x = -2}$$

b) Si $x = 0$, como $|A| = 0$, A no tiene inversa.
c) Si $x = 2$, como $|A| \neq 0$, A tiene inversa.

La solución a $A\,Z = \mathrm{I}$ es $Z = A^{-1}$.

Se cumple que:

$|A|=-8\,(2+2)=-32$ (apartado a), con $A_{11} = -16$; $A_{12} = 12-4=8$, $A_{13} = 4+4=8$, $A_{21}=9-5=4$, $A_{22}=-3-5=-8$, $A_{23}=-1-3=-4$, $A_{31}=12+20=32$, $A_{32}=-|||14-54|||=-4-20=-24$, $A_{33}=4-12=-8$,

por lo que:

$$adj(A) = \begin{pmatrix} -16 & 8 & 8 \\ 4 & -8 & -4 \\ 32 & 24 & -8 \end{pmatrix} \text{ y}$$

$$Z = A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,(adj(A))^t = \frac{1}{-32}\begin{pmatrix} -16 & 4 & 32 \\ 8 & -8 & 24 \\ 8 & -4 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{8} & -1 \\ \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{-1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{8} & -1 \\ \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{-1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Problema A.2:

2. El nombre de vehicles que ha passat cert dia pel peatge d'una autopista ve donat per la funció:

$$N(t) = \begin{cases} \left(\frac{t-3}{3}\right)^2 + 2, & \text{si } 0 \le t \le 9, \\ 10 - \left(\frac{t-15}{3}\right)^2, & \text{si } 9 < t \le 24, \end{cases}$$

on N indica el nombre de vehicles i t el temps transcorregut en hores des de les 0:00 h.

a) És contínua la funció $N(t)$? (3 punts)

b) Entre quines hores va augmentar el nombre de vehicles que passava pel peatge? En quines hores disminueix? (5 punts)

c) A quina hora va passar el major nombre de vehicles? Quin va ser aquest nombre? (2 punts)

Solución:

a) El único punto problemático es $t = 9$, ya que en las dos ramas la función es polinómica y por tanto continua. Se cumple que:

$$\lim_{t\to 9} N(t) = \begin{cases} \lim_{t\to 9^-} N(t) = \lim_{t\to 9^-} \left(\left(\frac{t-3}{3}\right)^2 + 2\right) = \left(\frac{9-3}{3}\right)^2 + 2 = 4 + 2 = 6 \\ \lim_{t\to 9^+} \left(10 - \left(\frac{t-15}{3}\right)^2\right) = 10 - \left(\frac{9-15}{3}\right)^2 = 10 - 4 = 6 \end{cases}$$

por lo que

$$\lim_{t\to 9} N(t) = 6 = N(9)$$

Luego la función $\boldsymbol{N(t)}$ es continua en $[0, 24]$.

b) Se cumple que si $t < 9$, $N(t) = \left(\frac{t-3}{3}\right)^2 + 2 \Rightarrow N'(t) = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}} \frac{\boldsymbol{t-3}}{\mathbf{3}} = 0 \Leftrightarrow t = 3$, con:

$N'(t) = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}} \frac{\boldsymbol{t-3}}{\mathbf{3}} < 0 \Leftrightarrow t < 3$, por lo que N es estrictamente decreciente si $0 < t < 3$ y N es estrictamente creciente si $3 < t < 9$

Si $t > 9$, $N(t) = 10 - \left(\frac{t-15}{3}\right)^2 \Rightarrow N'(t) = -\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}} \frac{\boldsymbol{t-15}}{\mathbf{3}} = 0 \Leftrightarrow t = 15$, con:

$N'(\boldsymbol{t}) = -\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}} \frac{\boldsymbol{t-15}}{\mathbf{3}} < 0 \Leftrightarrow t > 15$, por lo que N es estrictamente creciente si $9 < t < 15$ y N es estrictamente decreciente si $15 < t < 24$.

Entonces, al ser N continua, tenemos que N es estrictamente decreciente si $0 < t < 3$, N es estrictamente creciente si $3 < t < 15$ y N es estrictamente decreciente si $15 < t < 24$, por lo que el número de vehículos disminuye de 0: 00 a 3: 00, aumenta de 3: 00 a 15: 00 y vuelve a disminuir de 15:00 a 24: 00.

El número de vehículos disminuye de 0: 00 a 3: 00, aumenta de 3: 00 a 15: 00 y vuelve a disminuir de 15:00 a 24: 00

c) Por el crecimiento se ve que el máximo absoluto de N está en $t = 0$ o en $t = 15$, con:

$N(0) = \left(\frac{0-3}{3}\right)^2 + 2 = 3$, $N(15) = 10 - \left(\frac{15-15}{3}\right)^2 = 10$, luego el máximo número de vehículos es 10 y se alcanza a las 15: 00.

El máximo número de vehículos es $\mathbf{10}$ y se alcanza a las $\mathbf{15:00}$.

Problema A.3:

3. Tenim un dau correcte i dues urnes amb bolles descrites a continuació:

Urna I: 1 bolla negra, 3 bolles vermelles i 6 bolles verdes.
Urna II: 2 bolles negres, 6 bolles vermelles i 2 bolles verdes.

Tiram el dau. Si surt 1 o 2, anam a l'urna I. Si surt 3, 4, 5 o 6, acudim a l'urna II. Extreim a l'atzar una bolla de l'urna corresponent.

a) Donau un diagrama en arbre que representi l'experiment amb totes les probabilitats. (3 punts)

b) Calculau les probabilitats següents: (4 punts)

i) $p(\{3,4,5,6\}$ i $\{\text{bolla vermella}\})$.
ii) $p(\{\text{bolla verda}\}/\{1\})$.
iii) $p(\{\text{bolla vermella}\}/\{5\})$.
iv) $p(\{2\}$ i $\{\text{bolla verda}\})$.

c) Calculau la probabilitat que la bolla extreta hagi estat vermella i que hagi estat negra. Quina és la probabilitat que la bolla extreta hagi estat verda? Quant val la suma de les tres probabilitats? Justifica la resposta. (3 punts)

Solución:

a)

$$
\begin{array}{lll}
 & & \nearrow Negra\ \left(\frac{1}{10}\right) \\
 & \nearrow Urna\ 1\ \left(\frac{1}{3}\right) & \rightarrow Roja\ \left(\frac{3}{10}\right) \\
 & & \searrow Verde\ \left(\frac{3}{5}\right) \\
Dado & & \\
 & & \nearrow Negra\ \left(\frac{1}{5}\right) \\
 & \searrow Urna\ 2\ \left(\frac{2}{3}\right) & \rightarrow Roja\ \left(\frac{3}{5}\right) \\
 & & \searrow Verde\ \left(\frac{1}{5}\right)
\end{array}
$$

b) i) Se cumple que:

$P(\{3,4,5,6\} \cap \{bola\ roja\}) = P(\{bola\ roja\}/\{3,4,5,6\}) \cdot P(\{3,4,5,6\}) = \frac{3}{5}\frac{2}{3} = \frac{2}{5}$

ii) Al haber salido un 1 estamos en la urna 1, por lo que $P(\{bola\ verde\}/\{1\}) = \frac{3}{5}$

iii) Al haber salido un 5 estamos en la urna 2, por lo que $P(\{bola\ roja\}/\{5\}) = \frac{3}{5}$

iv) $P(\{2\} \cap \{bola\ verde\}) = P(\{bola\ verde\}/\{2\}) \cdot P(\{2\}) = \frac{3}{5}\frac{1}{6} = \frac{1}{10}$

i) $\frac{2}{5}$; ii) $\frac{3}{5}$; iii) $\frac{3}{5}$; $iv)$ $\frac{1}{10}$

c) $P(\{bola\ roja\}) = P(\{bola\ roja\} \cap \{urna\ 1\}) + P(\{bola\ roja\} \cap \{urna\ 2\}) = P(\{bola\ roja\}/\{urna\ 1\}) \cdot P(\{urna\ 1\}) + P(\{bola\ roja\}/\{urna\ 2\}) \cdot P(\{urna\ 2\}) = \frac{3}{10}\frac{1}{3} + \frac{3}{5}\frac{2}{3} = \frac{1}{10} + \frac{2}{5} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

$$P(\{bola\ negra\}) = P(\{bola\ negra\} \cap \{urna\ 1\}) + P(\{bola\ negra\} \cap \{urna\ 2\}) = P(\{bola\ negra\}/\{urna\ 1\}) \cdot P(\{urna\ 1\}) + P(\{bola\ negra\}/\{urna\ 2\}) \cdot P(\{urna\ 2\}) = \frac{1}{10}\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\frac{2}{3} = \frac{1}{30} + \frac{2}{15} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$$

$$P(\{bola\ verde\}) = P(\{bola\ verde\} \cap \{urna\ 1\}) + P(\{bola\ verde\} \cap \{urna\ 2\}) = P(\{bola\ verde\}/\{urna\ 1\}) \cdot P(\{urna\ 1\}) + P(\{bola\ verde\}/\{urna\ 2\}) \cdot P(\{urna\ 2\}) = \frac{3}{5}\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\frac{2}{3} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

La suma de las tres probabilidades es: $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{6}{6} = 1$, como era de esperar.

$\boldsymbol{P(\{bola\ roja\}) = \frac{1}{2}; P(\{bola\ negra\}) = \frac{1}{6}; P(\{bola\ verde\}) = \frac{1}{3}}$**; La suma de las tres es 1.**

Problema A.4:

4. Resoleu els apartats següents:

a) El pes dels habitants d'una ciutat té una mitjana de 67 kg i una desviació típica de 5 kg. Quina és la probabilitat que la mitjana del pes de 100 persones superi els 68.5 kg? I que sigui menor que 68 kg?. (5 punts)

b) En un hospital s'ha pres la temperatura a una mostra de 64 pacients, per a estimar la temperatura mitjana dels malalts. La mitjana de la mostra ha estat de 37,1 °C, i la desviació típica de la població, d'1,04 °C. Calcula un interval de confiança per a la mitjana poblacional amb un nivell de confiança del 99%. Interpreta el resultat en l'entorn del problema. (5 punts)

Solución:

a) Nos dicen que $\mu = 67$, $\sigma = 5$ y $n = 100$. Se tiene que la probabilidad de que sea superior a 68.5:

$$P\left(\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} X_i > 68.5\right) = 1 - P\left(\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} X_i \le 68.5\right) = 1 - P\left(\frac{\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} X_i - 67}{\frac{5}{\sqrt{100}}} \le \frac{68.5-67}{\frac{5}{\sqrt{100}}}\right) =$$

$$= 1 - P\left(\frac{\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} X_i - 67}{\frac{5}{\sqrt{100}}} \le \frac{1.5}{\frac{1}{2}}\right) = 1 - P\left(\frac{\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} X_i - 67}{5\sqrt{100}} \le 3\right)$$

Hemos tipificado para tener una $\frac{\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} X_i - 67}{\frac{5}{\sqrt{100}}} \approx N(0,1)$. Mirando en la tabla, obtenemos:

$$P\left(\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} X_i > 68.5\right) = 1 - P\left(\frac{\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} X_i - 67}{\frac{5}{\sqrt{100}}} \le 3\right) = 1 - 0.9987 = 0.0013$$

Y que sea menor que 68. De nuevo tipificamos y buscamos en la tabla:

$$P\left(\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} X_i < 68\right) = P\left(\frac{\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} X_i - 67}{\frac{5}{\sqrt{100}}} < \frac{68-67}{\frac{5}{\sqrt{100}}}\right) =$$

$$= P\left(\frac{\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} X_i - 67}{\frac{5}{\sqrt{100}}} < 2\right)$$

Donde $\dfrac{\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} X_i - 67}{\frac{5}{\sqrt{100}}} \approx N(0,1)$. Mirando en la tabla, obtenemos:

$$P\left(\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} X_i < 68\right) = P\left(\frac{\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} X_i - 67}{\frac{5}{\sqrt{100}}} < 2\right) = 0.9772.$$

$$P\left(\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} X_i > 68.5\right) = \mathbf{0.0013};\ P\left(\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} X_i < 68\right) = \mathbf{0.9772}$$

b) Se cumple que $\mathrm{X} =$ temperatura sigue una $N(\mu, 1.04)$, por lo que:

$$Y = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu}{\frac{1.04}{\sqrt{n}}} = \frac{\frac{1}{64}\sum_{i=1}^{6} X_i - \mu}{\frac{1.04}{8}} \approx\rightleftarrows N(0,1)$$

Tenemos que:

$$P(-z \le Y \le z) = P(Y \le z) - P(Y \le -z) = P(Y \le z) - P(Y \ge z) = P(Y \le z) - \big(1 - P(Y \le z)\big) =$$
$$2\,P(Y \le z) - 1 = 0.99 \Rightarrow P(Y \le z) = \frac{1.99}{2} = 0.995$$

Mirando en la tabla, obtenemos $z = 2.575$, por lo que el intervalo es:

$$\left[37.1 - 2.575\,\frac{1.04}{8}, 37.1 + 2.575\,\frac{1.04}{8}\right] \approx [36.77, 37.43]$$

Interpretación: Con una confianza muy alta, la media de la temperatura de la población hospitalaria estará en el intervalo indicado:

$$\mathbf{(36.77, 37.43)}$$

Colaborador: Jesús Caballero Vallés
Autor: Javier Rodrigo Hitos
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

SOLUCIONES OPCIÓ B

Problema B.1:

1. Una empresa d'autobusos té tres línies: A, B i C. Dilluns varen sortir 5 autobusos a la línia A, 3 a la B i 4 a la C. Dimarts varen sortir 2 autobusos a la línia A, 1 a la B i 4 a la C. Dimecres varen sortir 1 autobús a la línia A, 3 a la B i 5 a la C.

a) Representau les dades en forma de matriu. (2 punts)

b) Té inversa la matriu construïda a l'apartat a)? En cas negatiu, justificau la resposta. En cas positiu, calculau la seva inversa. (4 punts)

c) Si D és la matriu construïda a l'apartat a), resoleu, si és possible, el sistema d'equacions: (4 punts)

$$D\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-33\\-33\\-33\end{pmatrix}.$$

Solución:

a) Ponemos como elemento i,j el número de autobuses que deben salir el día i a la línea j, por lo que la matriz es $D=\begin{pmatrix}5&3&4\\2&1&4\\1&3&5\end{pmatrix}$

b) Se cumple que $\begin{vmatrix}5&3&4\\2&1&4\\1&3&5\end{vmatrix}=25+12+24-4-60-30=-33\neq 0$, luego D tiene inversa ya que su determinante es distinto de cero.

Se cumple que $D_{11}=\begin{vmatrix}1&4\\3&5\end{vmatrix}=5-12=-7$, $D_{12}=-\begin{vmatrix}2&4\\1&5\end{vmatrix}=-10+4=-6$,

$D_{13}=\begin{vmatrix}2&1\\1&3\end{vmatrix}=6-1=5$, $D_{21}=-\begin{vmatrix}3&4\\3&5\end{vmatrix}=-15+12=-3$, $D_{22}=\begin{vmatrix}5&4\\1&5\end{vmatrix}=25-4=21$,

$D_{23}=-\begin{vmatrix}5&3\\1&3\end{vmatrix}=-15+3=-12$, $D_{31}=\begin{vmatrix}3&4\\1&4\end{vmatrix}=12-4=8$, $D_{32}=-\begin{vmatrix}5&4\\2&4\end{vmatrix}=-20+8=-12$,

$D_{33}=\begin{vmatrix}5&3\\2&1\end{vmatrix}=5-6=-1$, por lo que: $adj(D)=\begin{pmatrix}-7&-6&5\\-3&21&-12\\8&-12&-1\end{pmatrix}$ y

$$D^{-1}=\frac{1}{|D|}adj(D)^t=-\frac{1}{33}\begin{pmatrix}-7&-3&8\\-6&21&-12\\5&-12&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{7}{33}&\frac{3}{33}&-\frac{8}{33}\\\frac{6}{33}&-\frac{21}{33}&\frac{12}{33}\\-\frac{5}{33}&\frac{12}{33}&\frac{1}{33}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{D^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{7}{33}&\frac{3}{33}&-\frac{8}{33}\\\frac{6}{33}&-\frac{21}{33}&\frac{12}{33}\\-\frac{5}{33}&\frac{12}{33}&\frac{1}{33}\end{pmatrix}}$$

c) Multiplicamos por la inversa. La solución es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{33} & \frac{3}{33} & -\frac{8}{33} \\ \frac{6}{33} & -\frac{21}{33} & \frac{12}{33} \\ -\frac{5}{33} & \frac{12}{33} & \frac{1}{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -33 \\ -33 \\ -33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7-3+8 \\ -6+21-12 \\ +5-12-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{-8} \end{pmatrix}$$

Problema B.2:

2. Una empresa es dedica a elaborar lots de productes que es venen als supermercats. En aquest moment estan empaquetant dos lots diferents. El lot de tipus A té 1 formatge i 2 botelles de vi, i el transport costa 0,90 €. El lot de tipus B té 3 formatges i 1 botella de vi, i costa 1,50 € transportar-lo. L'empresa disposa de 200 formatges i 100 botelles de vi, i han d'elaborar, almenys, 10 lots del tipus A i 25 del tipus B.

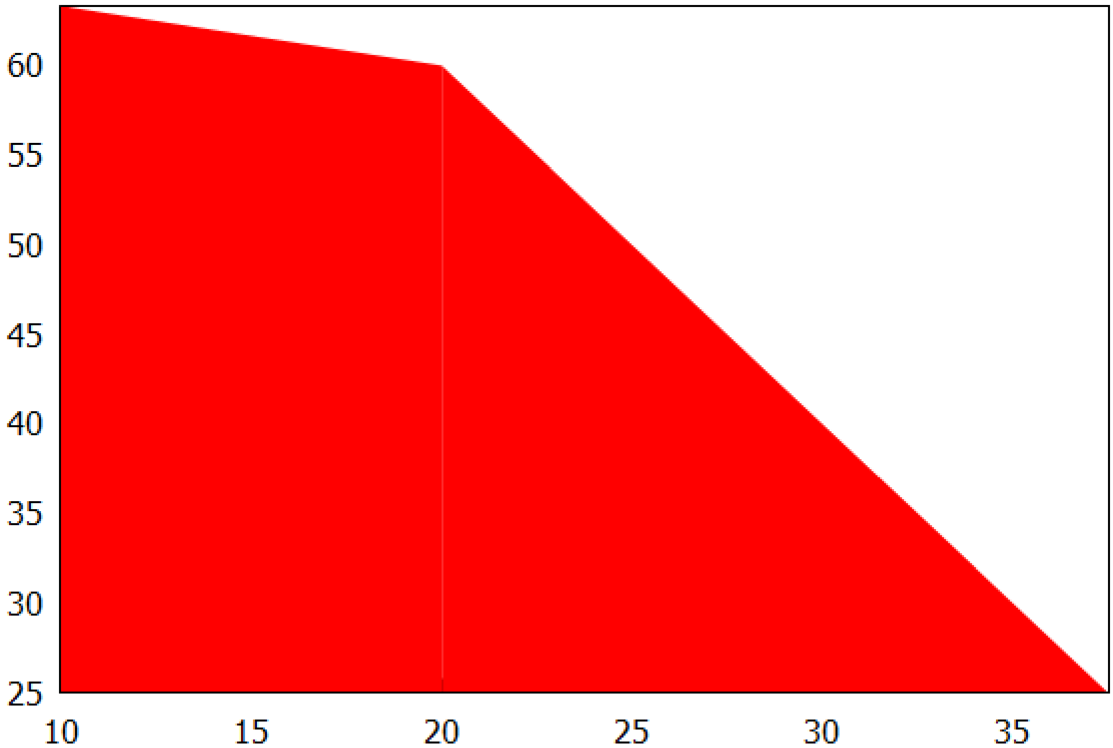
Quants lots de cada classe han d'elaborar perquè les despeses en transport siguin mínimes?

S'ha de plantejar el problema com un problema de programació lineal, dibuixant la regió factible de solucions i determinant i dibuixant els seus vèrtexs. (10 punts)

Solución:

Si fabrica x lotes del tipo A, y del tipo B, el coste es $f(x,y)=0.9\,x+1.5\,y$ y las restricciones son $x\geq 10$, $y\geq 25$, $x+3\,y\leq 200$ (número total de quesos), $2\,x+y\leq 100$ (número total de vinos), luego el problema es: $\begin{array}{l}\min 0.9\,x+1.5\,y\\ x\geq 10,\ y\geq 25,\ x+3y\leq 200,\ 2x+y\leq 100\end{array}$.

Región factible:



Como la función es lineal y el recinto un politopo, el mínimo se halla en algún vértice del recinto.

Punto de corte de $x=10$ con $y=\dfrac{200-x}{3}$: $y=\dfrac{200-10}{3}=\dfrac{190}{3}$: $\left(10,\dfrac{190}{3}\right)$.

Punto de corte de $y = \frac{200 - x}{3}$ con $y = 100 - x$:

$$\frac{200 - x}{3} = 100 - x \Leftrightarrow 200 - x = 300 - 3\,x \Leftrightarrow x = 50, y = 100 - 50 = 50: (50, 50).$$

Punto de corte de $y = 100 - x$ con $y = 25$: $100 - x = 25 \Leftrightarrow x = 75$: $(75, 25)$.

Valoramos f en los candidatos:

$$f\left(10, \frac{190}{3}\right) = 0.9 \times 10 + 1.5\frac{190}{3} = 9 + 95 = 104,$$

$$f(50, 50) = 0.9 \times 50 + 1.5 \times 50 = 45 + 75 = 120,$$

$$f(75, 25) = 0.9 \times 75 + 1.5 \times 25 = \frac{135}{2} + \frac{75}{2} = 105,$$

$$f(10, 25) = 0.9 \times 10 + 1.5 \times 25 = 9 + \frac{75}{2} = \frac{93}{2},$$

por lo que el mínimo coste es $\frac{93}{2} = 46.50$ € y tendrá que elaborar 10 lotes del tipo A y 25 del B.

Se han de elaborar **10** lotes del tipo A y **25** del tipo B. El coste mínimo es de **46.50** euros

Colaborador: Jesús Caballero Vallés
Autor: Javier Rodrigo Hitos
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Problema B.3:

3. El nombre de visitants a un museu s'obté mitjançant la funció

$$V(t) = \frac{300t}{t^3+2}$$

on t és l'hora des de l'obertura del museu. Suposem que l'hora d'obertura del museu són les 9:00 hores del matí.

a) Quan creix i decreix el nombre de visitants del museu? (4 punts)

b) Quan rep el museu el nombre més gran de visitants? Quin és aquest nombre? (2 punts)

c) En quin valor de t es produeix un punt d'inflexió de $V(t)$? (4 punts)

Solución:

a) Se cumple que $V'(t) = 300\dfrac{t^3+2-t\,3\,t^2}{\left(t^3+2\right)^2} = 600\dfrac{1-t^3}{\left(t^3+2\right)^2} = 0 \Leftrightarrow t = 1$. Tenemos que:

$V'(t) = 600\dfrac{1-t^3}{\left(t^3+2\right)^2} < 0 \Leftrightarrow 1-t^3 < 0 \Leftrightarrow t > 1$, por lo que V es estrictamente creciente si $t < 1$ y estrictamente decreciente si $t > 1$.

El número de visitantes crece durante la primera hora (hasta las 10), y luego decrece.

b) Según el apartado a) el máximo absoluto se alcanza en $t = 1$, con $V(1) = \dfrac{300}{1^3+2} = 100$.

El máximo número de visitantes, **100**, se alcanza a las **10** de la mañana: (1, 100).

c) Se cumple que:

$$V''(t) = 600\frac{-3t^2\left(t^3+2\right)^2-\left(1-t^3\right)2\left(t^3+2\right)3t^2}{\left(t^3+2\right)^4} = -1800\,t^2\frac{t^3+2+2\left(1-t^3\right)}{\left(t^3+2\right)^3} = -1800\,t^2\frac{4-t^3}{\left(t^3+2\right)^3} = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt[3]{4}$$

Con $V''(t) = -1800\,t^2\dfrac{4-t^3}{\left(t^3+2\right)^3} > 0 \Leftrightarrow 4-t^3 < 0 \Leftrightarrow t > \sqrt[3]{4}$, por lo que V cambia de convexidad en un entorno de $\sqrt[3]{4}$ y V tiene un punto de inflexión en $t = \sqrt[3]{4}$

Para $t = \sqrt[3]{4}$ la función *V(t)* tiene un **punto de inflexión**.

Problema B.4:

4. Tenim dues urnes descrites a continuació:

Urna I: 2 bolles negres, 1 bolla vermella i 3 bolles verdes.
Urna II: 1 bolla negra, 2 bolles vermelles i 1 bolla verda.

L'experiment consisteix a extraure una bolla a l'atzar de l'urna I, introduir-la en l'urna II, remoure i extraure, finalment, una bolla a l'atzar de l'urna II.

a) Donau un diagrama en arbre que representi l'experiment amb les probabilitats associades.
(3 punts)

b) Calculau la probabilitat que la segona bolla extreta sigui (3 punts)
b.1) vermella. b.2) negra. b.3) verda.

c) Sabent que la segona bolla ha esta negra, quina és la probabilitat que la primera també ho fos? (2 punts)

d) Quina és la probabilitat que la primera fos vermella sent vermella la segona?
(2 punts)

Solución:

a) Diagrama de árbol:

$$
Urna\quad 1\left\{\begin{array}{l}
Urna\quad 2\ \ negra\ \left(\dfrac{1}{3}\right)\left\{\begin{array}{l} Negra\ \left(\dfrac{2}{5}\right)\\ Roja\ \left(\dfrac{2}{5}\right)\\ Verde\ \left(\dfrac{1}{5}\right)\end{array}\right.\\
Urna\quad 2\ \ roja\ \left(\dfrac{1}{6}\right)\left\{\begin{array}{l} Negra\ \left(\dfrac{1}{5}\right)\\ Roja\ \left(\dfrac{3}{5}\right)\\ Verde\ \left(\dfrac{1}{5}\right)\end{array}\right.\\
Urna\quad 2\ \ verde\ \left(\dfrac{1}{2}\right)\left\{\begin{array}{l} Negra\ \left(\dfrac{1}{5}\right)\\ Roja\ \left(\dfrac{2}{5}\right)\\ Verde\ \left(\dfrac{2}{5}\right)\end{array}\right.
\end{array}\right.
$$

b1) Se cumple que:

$$
P(\{segunda\ roja\}) = P(\{segunda\ roja\}\cap\{primera\ negra\}) + P(\{segunda\ roja\}\cap\{primera\ roja\}) + P(\{segunda\ roja\}\cap\{primera\ verde\}) =
$$
$$
= P(\{segunda\ roja\}/\{primera\ negra\})P(\{primera\ negra\}) + P(\{segunda\ roja\}/\{primera\ roja\})P(\{primera\ roja\}) +
$$
$$
+ P(\{segunda\ roja\}/\{primera\ verde\})P(\{primera\ verde\}) = \frac{2}{5}\frac{1}{3} + \frac{3}{5}\frac{1}{6} + \frac{2}{5}\frac{1}{2} = \frac{2}{15} + \frac{1}{10} + \frac{1}{5} = \frac{13}{30}
$$

b2) Se cumple que:

$$P(\{segunda\ negra\}) = P(\{segunda\ negra\} \cap \{primera\ negra\}) + P(\{segunda\ negra\} \cap \{primera\ roja\}) + P(\{segunda\ negra\} \cap \{primera\ verde\}) =$$
$$= P(\{segunda\ negra\}/\{primera\ negra\})\, P(\{primera\ negra\}) + P(\{segunda\ negra\}/\{primera\ roja\})\, P(\{primera\ roja\}) +$$
$$+ P(\{segunda\ negra\}/\{primera\ verde\})\, P(\{primera\ verde\}) = \frac{2}{5}\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\frac{1}{6} + \frac{1}{5}\frac{1}{2} = \frac{2}{15} + \frac{1}{30} + \frac{1}{10} = \frac{4}{15}$$

b3) Se cumple que:

$$P(\{segunda\ verde\}) = P(\{segunda\ verde\} \cap \{primera\ negra\}) + P(\{segunda\ verde\} \cap \{primera\ roja\}) + P(\{segunda\ verde\} \cap \{primera\ verde\}) =$$
$$= P(\{segunda\ verde\}/\{primera\ negra\})\, P(\{primera\ negra\}) + P(\{segunda\ verde\}/\{primera\ roja\})\, P(\{primera\ roja\}) +$$
$$+ P(\{segunda\ verde\}/\{primera\ verde\})\, P(\{primera\ verde\}) = \frac{1}{5}\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\frac{1}{6} + \frac{2}{5}\frac{1}{2} = \frac{1}{15} + \frac{1}{30} + \frac{1}{5} = \frac{9}{30}$$

b1) P(segunda sea roja) = $13/30$; b2) P(segunda negra) = $4/15$; P(segunda verde) = $9/30$.

c) Se cumple que:

$$P(\{primera\ negra\}/\{segunda\ negra\}) = \frac{P(\{las 2\ negras\})}{P(\{segunda\ negra\})} =$$
$$= \frac{P(\{segunda\ negra\}/\{primera\ negra\})P(\{primera\ negra\})}{\left(\begin{array}{l} P(\{segunda\ negra\}/\{primera\ negra\})P(\{primera\ negra\}) + P(\{segunda\ negra\}/\{primera\ roja\})P(\{primera\ roja\}) + \\ P(\{segunda\ negra\}/\{primera\ verde\})P(\{primera\ verde\}) \end{array}\right)} = \frac{\frac{2}{5}\frac{1}{3}}{\frac{2}{5}\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\frac{1}{6} + \frac{1}{5}\frac{1}{2}} =$$
$$= \frac{\frac{2}{15}}{\frac{2}{15} + \frac{1}{30} + \frac{1}{10}} = \frac{\frac{2}{15}}{\frac{8}{30}} = \frac{1}{2}$$

c) P(primera negra/segunda negra) = $1/2$.

d) Se cumple que:

$$P(\{primera\ roja\}/\{segunda\ roja\}) = \frac{P(\{las 2\ rojas\})}{P(\{segunda\ roja\})} =$$
$$= \frac{P(\{segunda\ roja\}/\{primera\ roja\})P(\{primera\ roja\})}{\left(\begin{array}{l} P(\{segunda\ roja\}/\{primera\ negra\})P(\{primera\ negra\}) + P(\{segunda\ roja\}/\{primera\ roja\})P(\{primera\ roja\}) + \\ P(\{segunda\ roja\}/\{primera\ verde\})P(\{primera\ verde\}) \end{array}\right)} = \frac{\frac{3}{5}\frac{1}{6}}{\frac{2}{5}\frac{1}{3} + \frac{3}{5}\frac{1}{6} + \frac{2}{5}\frac{1}{2}} =$$
$$= \frac{\frac{1}{10}}{\frac{2}{15} + \frac{1}{10} + \frac{1}{5}} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{13}{30}} = \frac{3}{13}$$

d) P(primera roja/segunda roja) = $3/13$.

Universitat de les Illes Balears

Proves d'accés a la Universitat

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II — 2019

Model 2

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Es disposa de 90 minuts.

Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4. Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Podeu utilitzar calculadora de qualsevol tipus, científica, gràfica o programable, però no s'autoritzarà l'ús de les que portin informació emmagatzemada o puguin transmetre-la.

OPCIÓ A

1. *a*) Donades $\mathbf{A}$, una matriu quadrada invertible qualsevol, i $\mathbf{A}^{-1}$ la seva inversa; quina matriu s'ha d'obtenir en calcular $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}$ i $\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A}$? Descriviu/indicau com és aquesta matriu. (1 punt)

b) Considerau la matriu

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & x \\ 0 & x+2 \end{pmatrix}$$

i) Calculau els valors de x per als quals se satisfà que (5 punts)

$$\mathbf{A}^2 = 2\cdot\mathbf{A}.$$

ii) Per a $x=-1$, calculau $\mathbf{A}^{-1}$. Comprovau el resultat calculant $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}$. (4 punts)

2. Un article de consum va estar a la venda durant 8 anys, i el seu preu $P(t)$ (en milers d'euros) va variar amb el temps t (en anys) que portava al mercat segons la funció:

$$P(t) = \begin{cases} \frac{1}{3}t^3 + 4t^2 + 40, & 0 \le t \le 6, \\ -\frac{113}{14}t^2 + \frac{3826}{7}, & 6 < t \le 8. \end{cases}$$

a) Quin va ser el preu de sortida del producte? (1 punt)

b) És contínua la funció? És derivable? Donau els conjunts de continuïtat i derivabilitat. (4 punts)

c) Determinau els intervals de creixement i decreixement del preu del producte. (3 punts)

d) Esbrinau en quin moment es varen assolir els preus màxim i mínim i quins varen ser aquests preus. (2 punts)

3. En una màquina s'han fabricat 100 peces, de les quals 15 han presentat algun defecte.

a) Calculau la proporció de peces que no són defectuoses. (2 punts)

b) Calculau la probabilitat que, si examinam dues peces a l'atzar, ambdues resultin defectuoses. (5 punts)

c) Si provam dues peces a l'atzar i la primera és defectuosa, quina és la probabilitat que la segona no ho sigui? (3 punts)

Universitat de les Illes Balears

Proves d'accés a la Universitat

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II 2019

Model 2

4. El 70% dels alumnes de batxillerat tenen mòbil.

a) Si un centre té 1.400 alumnes de batxillerat, quants s'espera que tinguin mòbil? (1 punt)

b) Quina és la probabilitat que, en una mostra aleatòria amb repetició de 150 alumnes de batxillerat, n'hi hagi més de 100 amb telèfon mòbil? (5 punts)

c) Quina és la probabilitat que, en una mostra aleatòria amb repetició de 200 alumnes de batxillerat, n'hi hagi 140 o menys amb telèfon mòbil? (4 punts)

Universitat de les Illes Balears

Proves d'accés a la Universitat

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II 2019

Model 2

OPCIÓ B

1. Un institut té tres partides pressupostàries: llibres, material d'oficina i mobles. El pressupost per a mobles d'aquest institut és cinc vegades la suma del de llibres més el del material d'oficina. El pressupost per a llibres és el triple del de material d'oficina. La suma del pressupost per a mobles i material d'oficina és 7 vegades el pressupost de llibres.

a) Amb aquestes dades, podem saber els diners destinats a cada partida pressupostària? (7 punts)

b) Determinau les quantitats si per a llibres hi ha 2100 €. (3 punts)

2. KSE és una empresa que fabrica dos models de guants: un model normal i un model de luxe. L'empresa té disponibles 900 hores de temps al departament de producció, 300 hores al departament d'acabat i 100 hores al departament d'empaquetat. Les hores necessàries de cada departament per parell de guants i els beneficis, en €, es donen a la taula següent:

	Producció	Acabat	Empaquetat	Beneficis
Normal	1	1/2	1/8	4
De luxe	3/2	1/3	1/4	8

Quants parells de cada model han de fabricar per maximitzar el benefici? Quin és aquest benefici? (10 punts)

S'ha de plantejar el problema com un problema de programació lineal, dibuixant la regió factible de solucions i determinant i dibuixant els seus vèrtexs.

3. Dibuixau l'àrea tancada entre els gràfics de les funcions següents: $f(x) = x^3 + 1$, $g(x) = x + 1$ (4 punts). Calculau l'àrea del recinte anterior (6 punts).

4. Una empresa té dues fàbriques, en la primera són dones el 60% dels treballadors i en la segona són homes el 55% dels treballadors. Es tria a l'atzar un treballador de cada fàbrica per pertànyer al comitè d'empresa. Suposam que el fet de pertànyer a una fàbrica és independent de pertànyer a l'altra.

a) Calculau la probabilitat dels esdeveniments següents: (6 punts)

A = "Tots dos són homes".
B = "Solament un és dona".
C = "Tots dos són dones".

b) Raonau si el succés contrari de l'esdeveniment C és l'A, el B, l'$A \cap B$, l'$A \cup B$ o algun altre esdeveniment, i calculau-ne la probabilitat. (4 punts)

Universitat de les Illes Balears
Proves d'accés a la Universitat

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II 2019

Model 2

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula 2: Taula de la distribució normal $N(0,1)$.

SOLUCIONES OPCIÓ A

Problema A.1:

1. *a*) Donades **A**, una matriu quadrada invertible qualsevol, i $\mathbf{A}^{-1}$ la seva inversa; quina matriu s'ha d'obtenir en calcular $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}$ i $\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A}$? Descriviu/indicau com és aquesta matriu. (1 punt)

b) Considerau la matriu

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & x\\ 0 & x+2\end{pmatrix}$$

i) Calculau els valors de x per als quals se satisfà que (5 punts)

$$\mathbf{A}^2=2\cdot\mathbf{A}.$$

ii) Per a $x=-1$, calculau $\mathbf{A}^{-1}$. Comprovau el resultat calculant $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}$. (4 punts)

Solución:

a) La matriz identidad (1 en la diagonal principal, 0 en el resto)

b) i) Se cumple que:

$$A^2=\begin{pmatrix}2 & x\\ 0 & x+2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & x\\ 0 & x+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 2\,x+x^2+2\,x\\ 0 & x^2+4\,x+4\end{pmatrix}=2A=\begin{pmatrix}4 & 2\,x\\ 0 & 2\,x+4\end{pmatrix}\Leftrightarrow$$

$$2\,x+x^2+2\,x=2\,x,\;\; x^2+4\,x+4=2\,x+4\Leftrightarrow$$
$$x^2+2\,x=x\,(x+2)=0\Leftrightarrow x=0,\;\; x=-2.$$

Se verifica la igualdad para $\boldsymbol{x=0,\;\; x=-2}$

b) ii) Se cumple que $|A|=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=2$, por lo que $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}adj(A)^y=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

Comprobación:

$$A\,A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Problema A.2:

2. Un article de consum va estar a la venda durant 8 anys, i el seu preu $P(t)$ (en milers d'euros) va variar amb el temps t (en anys) que portava al mercat segons la funció:

$$P(t)=\begin{cases}\frac{1}{3}t^3+4t^2+40, & 0\le t\le 6,\\ -\frac{113}{14}t^2+\frac{3826}{7}, & 6<t\le 8.\end{cases}$$

a) Quin va ser el preu de sortida del producte? (1 punt)
b) És contínua la funció? És derivable? Donau els conjunts de continuïtat i derivabilitat. (4 punts)
c) Determinau els intervals de creixement i decreixement del preu del producte. (3 punts)
d) Esbrinau en quin moment es varen assolir els preus màxim i mínim i quins varen ser aquests preus. (2 punts)

Solución:

a) Es $P(0)=\frac{1}{3}0^3+4\,0^2+40=40$ miles de euros.

El precio de salida es de $40\ 000$ euros.

b) La función está definida a trozos por dos funciones polinómicas, que son siempre continuas y derivables; el único punto dudoso es el de unión de los dos trozos. Si $t<6$, P es continua (polinomio), si $t>6$, P es continua (polinomio). Se cumple que:

$$\lim_{t\to 6^-}P(t)=\lim_{t\to 6^-}\left(\frac{1}{3}t^3+4t^2+40\right)=\frac{1}{3}6^3+4\,6^2+40=256=\lim_{t\to 6^+}P(t)=\lim_{t\to 6^+}\left(-\frac{113}{14}t^2+\frac{3826}{7}\right)=-\frac{113}{14}6^2+\frac{3826}{7}$$

Por tanto, P es continua en 6 y P es continua en $[0,8]$

Si $t<6$, P es derivable (polinomio), si $t>6$, P es derivable (polinomio). Se cumple que, si $t<6$:

$P(t)=\frac{1}{3}t^3+4t^2+40\Rightarrow P'(t)=t^2+8t$. Entonces, como P es continua en 6, $P'_-(6)=6^2+8\times 6=84$.

Si $t>6$, $P(t)=-\frac{113}{14}t^2+\frac{3826}{7}\Rightarrow P'(t)=-\frac{113}{14}t$.

Entonces, como P es continua en 6, $P'_+(6)=-\frac{113}{14}\times 6\neq P'_-(6)$

Por tanto P no es derivable en 6 y P es derivable en $(0,8)-\{6\}$

c) Utilizamos el signo de la derivada primera para determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento:

Si $0\le t<6$, $P'(t)=t^2+8t$, que como t es positivo, siempre es positiva, luego la función es creciente en [0, 6)

Si $6<t\le 8$, $P'(t)=-\frac{113}{14}t$, que es siempre negativa, luego la función es decreciente en (6, 8].

d) Los valores máximos y mínimos se encuentran en los puntos en que se anula la derivada, o donde la derivada no existe, o en los extremos del intervalo de definición. Hemos visto que en [0, 8] la derivada no se anula nunca. Pero que en x = 6, la función no es derivable, y en un entorno de dicho punto pasa de ser creciente a ser decreciente, luego en (6, 256 000) hay un máximo. Sabemos que en 0 vale 40 000, siendo (0, 40 000) un mínimo relativo. Y en

$$P(t) = -\frac{113}{14}\,t^2 + \frac{3826}{7} \Rightarrow P(8) = -\frac{113}{14}\,(8)^2 + \frac{3826}{7} = 30$$

En (8, 30 000) tenemos el valor mínimo absoluto.

El valor máximo absoluto de la función en el intervalo [0, 8] se alcanza en $(6, 84)$ siendo de $84\ 000$ euros. Los valores mínimos son $(0, 40)$ y $(8, 30)$ siendo el precio mínimo absoluto de $30\ 000$ euros.

Problema A.3:

3. En una màquina s'han fabricat 100 peces, de les quals 15 han presentat algun defecte.

a) Calculau la proporció de peces que no són defectuoses. (2 punts)
b) Calculau la probabilitat que, si examinam dues peces a l'atzar, ambdues resultin defectuoses. (5 punts)
c) Si provam dues peces a l'atzar i la primera és defectuosa, quina és la probabilitat que la segona no ho sigui? (3 punts)

Solución:

a) Llamamos D a las piezas defectuosas, y nos dicen que $P(D)$ = 15/100 = 0.15.

Por el suceso contrario sabemos, por tanto, que:

$$P(\overline{D}) = 1 - P(D) = 0.85.$$

$$P(\overline{D}) = \mathbf{0.85}.$$

b) La probabilidad de que dos piezas sean defectuosas, es:

$$P(D \cap D) = P(D) \cdot P(D/D)$$

Para calcular la probabilidad de que la segunda pieza también sea defectuosa, sabemos que nos quedan un total de 99 piezas, y de ellas 14 defectuosas, luego:

$$P(D \cap D) = P(D) \cdot P(D/D) = \frac{15}{100} \cdot \frac{14}{99} = \frac{210}{9900} = \frac{7}{330} = 0.02121212\ldots \cong 0.02$$

$$P(D \cap D) = 0.02121212\ldots \cong \mathbf{0.02}$$

c) Sabemos que la primera pieza es defectuosa, y nos piden la probabilidad de que la segunda no lo sea, es decir:

$$P(\overline{D}/D)$$

Hemos sacado ya una pieza defectuosa, luego nos quedan 99 piezas, y todas ellas no defectuosas, es decir, 85, por tanto:

$$P(\overline{D}/D) = \frac{85}{99} = 0.858585\ldots \cong 0.86.$$

$$P(\overline{D}/D) = \frac{85}{99} = 0.858585\ldots \cong \mathbf{0.86}.$$

Colaborador: Jesús Caballero Vallés
Autor: Javier Rodrigo Hitos
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Problema A.4:

4. El 70% dels alumnes de batxillerat tenen mòbil.

a) Si un centre té 1.400 alumnes de batxillerat, quants s'espera que tinguin mòbil? (1 punt)

b) Quina és la probabilitat que, en una mostra aleatòria amb repetició de 150 alumnes de batxillerat, n'hi hagi més de 100 amb telèfon mòbil? (5 punts)

c) Quina és la probabilitat que, en una mostra aleatòria amb repetició de 200 alumnes de batxillerat, n'hi hagi 140 o menys amb telèfon mòbil? (4 punts)

Solución:

a) Nos dicen que el 70 % de los alumnos tienen móvil, y que hay 1 400 alumnos, luego se espera que:

$$1400\frac{70}{100} = 980$$

Se espera que tengan móvil $\mathbf{980}$ alumnos.

b) Para calcular la probabilidad de que en una muestra aleatoria con repetición de 150 haya más de 100 alumnos con móvil, usamos una distribución binomial, dónde n = 150, y p = 0.7.

$$B(n,p) = B(150, 0.7)$$

Al ser $150 \cdot 0.7 = 105 > 5$ y $150 \cdot 0.3 = 45 > 5$ aproximamos con una normal:

$$B(n,p) = B(150, 0.7) \to N(np, \sqrt{np(1-p)}) = N(105, \sqrt{150 \cdot 0.7 \cdot 0.3}) = N(105, 5.6)$$

Pasamos de la binomial a la normal y tipificamos:

$$P(x > 100) = P(x' > 100.5) = P(z > \frac{100.5 - 105}{5.6}) = P(z > -0.8) = P(z < 0.8) = 0.7881.$$

La probabilidad de que haya más de 100 alumnos con teléfono móvil es de $\mathbf{0.7881 \cong 0.79.}$

c) Para calcular la probabilidad de que en una muestra aleatoria con repetición de 200 alumnos haya 140 alumnos o menos con móvil, usamos de nuevo una distribución binomial, dónde n = 200, y p = 0.7, que pasamos a una normal:

$$B(n,p) = B(200, 0.7) \to N(np, \sqrt{np(1-p)}) = N(140, \sqrt{200 \cdot 0.7 \cdot 0.3}) = N(140, 6.48)$$

$$P(x \leq 140) = P(x' \leq 140.5) = P(z \leq \frac{140.5 - 140}{6.48}) = P(z \leq 0.08) = 0.5319.$$

La probabilidad de que haya 140 alumnos o menos con teléfono móvil en una muestra de 200 alumnos es de $\mathbf{0.5319 \cong 0.53}$.

SOLUCIONES OPCIÓ B

Problema B.1:

1. Un institut té tres partides pressupostàries: llibres, material d'oficina i mobles. El pressupost per a mobles d'aquest institut és cinc vegades la suma del de llibres més el del material d'oficina. El pressupost per a llibres és el triple del de material d'oficina. La suma del pressupost per a mobles i material d'oficina és 7 vegades el pressupost de llibres.

a) Amb aquestes dades, podem saber els diners destinats a cada partida pressupostària? (7 punts)

b) Determinau les quantitats si per a llibres hi ha 2100 €. (3 punts)

Solución:

a) Llamamos L al presupuesto para libros, Of al de material de oficina y M al de muebles. Planteamos un sistema de ecuaciones con los datos que nos dan:

$$\begin{cases} M = 5(L + Of) \\ L = 3Of \\ M + Of = 7L \end{cases} \rightarrow \begin{cases} M = 5(3Of + Of) = 20(Of) \\ L = 3Of \\ M + Of = 7(3Of) \rightarrow M = 20(Of) \end{cases}$$

Observamos que es un sistema compatible indeterminado, es decir, que tiene infinitas soluciones, luego no podemos saber que dinero se destina a cada partida presupuestaria.

b) Nos dicen que: $L = 2100$

$$\begin{cases} L = 2100 = 3Of \\ Of = 700 \\ M = 20(Of) = 20(700) = 14\,000 \end{cases}$$

Si se destinan $2\,100$ euros a **libros**, entonces se destinan 700 euros a **material de oficina** y $14\,000$ euros a **muebles**.

Problema B.2:

2. KSE és una empresa que fabrica dos models de guants: un model normal i un model de luxe. L'empresa té disponibles 900 hores de temps al departament de producció, 300 hores al departament d'acabat i 100 hores al departament d'empaquetat. Les hores necessàries de cada departament per parell de guants i els beneficis, en €, es donen a la taula següent:

	Producció	Acabat	Empaquetat	Beneficis
Normal	1	1/2	1/8	4
De luxe	3/2	1/3	1/4	8

Quants parells de cada model han de fabricar per maximitzar el benefici? Quin és aquest benefici? (10 punts)

S'ha de plantejar el problema com un problema de programació lineal, dibuixant la regió factible de solucions i determinant i dibuixant els seus vèrtexs.

Solución:

Llamamos N a una pareja de guantes del modelo normal, y L a una de lujo.

Nos dicen que:

	Producción	Acabado	Empaquetado	Beneficios
Normal (N)	1	1/2	1/8	4
De lujo (L)	3/2	1/3	1/4	8

Planteamos un problema de programación lineal. Restricciones:

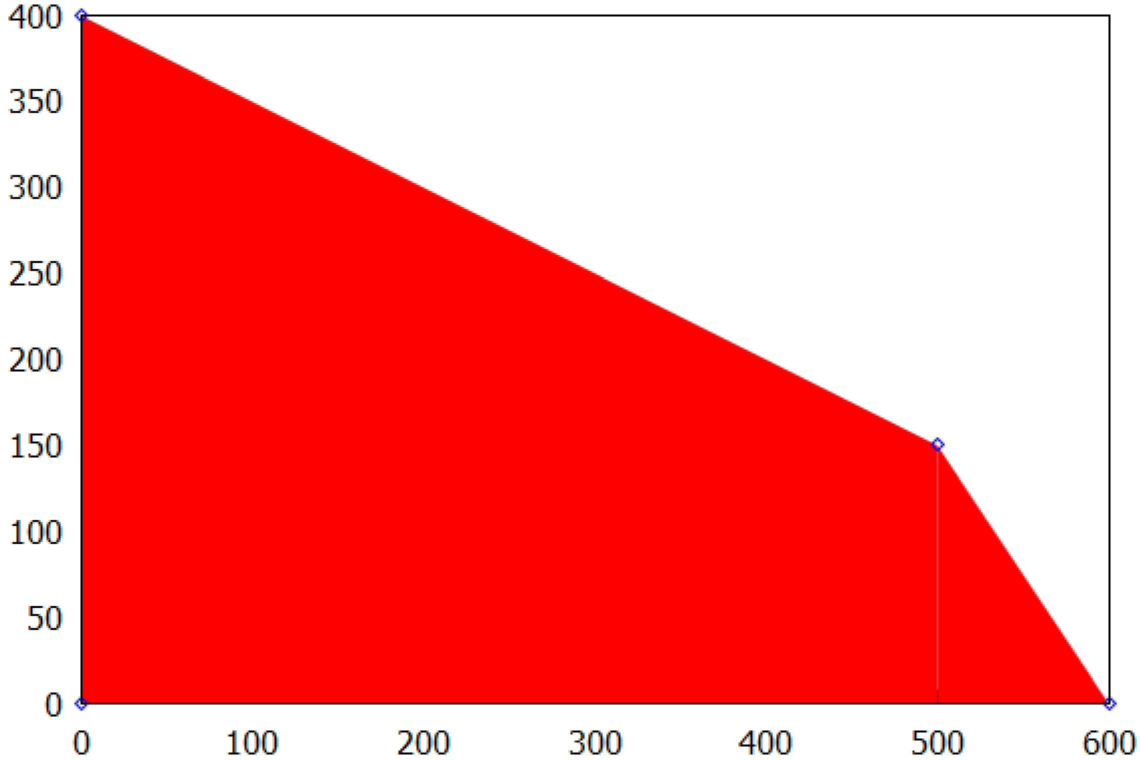
$$\begin{cases} N \geq 0;\ L \geq 0 \\ N + \dfrac{3L}{2} \leq 900 \\ \dfrac{N}{2} + \dfrac{L}{3} \leq 300 \\ \dfrac{N}{8} + \dfrac{L}{4} \leq 100 \end{cases}$$

Y la función beneficio: $B(N, L) = 4N + 8L$

Calculamos los puntos de intersección y determinamos los vértices:

$$\begin{cases} N = 0;\ L = 0 \\ N + \dfrac{3L}{2} = 900 \\ \dfrac{N}{2} + \dfrac{L}{3} = 300 \\ \dfrac{N}{8} + \dfrac{L}{4} = 100 \end{cases} \to \begin{cases} N = 0;\ L = 0 \\ 2N + 3L = 1800 \\ 3N + 2L = 1800 \\ N + 2L = 800 \end{cases} \to \begin{cases} N = 0; (0,0);\ (0,600);\ (0,900);\ (0,400) \\ L = 0;\ (900,0);\ (600,0);\ (800,0) \\ 2N + 3L = 1800;\ 3N + 2L = 1800;\ (360,360) \\ N + 2L = 800;\ (1200,-200);\ (500,150). \end{cases} \to$$

Región factible:



Los vértices son: (0, 0); (0, 400); (600, 0); (500, 150).

Calculamos la función beneficio en cada uno de ellos:

(0, 0) → $B(N,L) = 4N + 8L \to B(0,0) = 0$

(0, 400) → $B(N,L) = 4N + 8L \to B(0,400) = 3200$

(600, 0) → $B(N,L) = 4N + 8L \to B(600,0) = 2400$

(500, 150) → $B(N,L) = 4N + 8L \to B(500,150) = 2000 + 1200 = 3200$

El beneficio máximo es 3 200, que se obtiene con cualquier punto del segmento de extremos (0, 400) y (500, 150).

$$\frac{N-0}{500} = \frac{L-400}{150-400} \to -250N = 500L - 200000 \to N + 2L = 800$$

Como no se puede fabricar un número decimal de guantes de algún tipo, buscamos soluciones enteras de la recta $N + 2L = 800$:

$$N + 2L = 800 \to (0,400);\ (2,399);\ (4,398);\ \ldots;\ (500,150).$$

Observamos que de los guantes normales se debe fabricar un número par comprendido entre 0 y 500, a los que corresponde a los de lujo los valores 400, …, 150. Con todo ello se obtiene el mismo beneficio.

El beneficio máximo es **3 200**, que se obtiene con puntos de:
$(0,400);\ (2,399);\ (4,398);\ \ldots;\ (500,150).$

Problema B.3:

3. Dibuixau l'àrea tancada entre els gràfics de les funcions següents: $f(x) = x^3 + 1$, $g(x) = x + 1$ (4 punts). Calculau l'àrea del recinte anterior (6 punts).

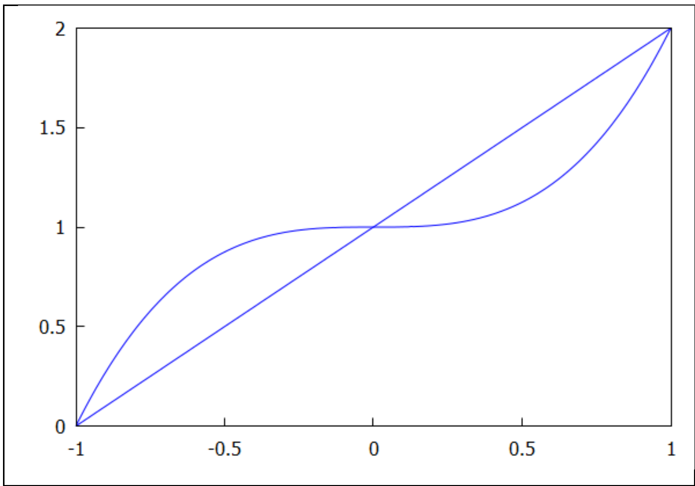
Solución:

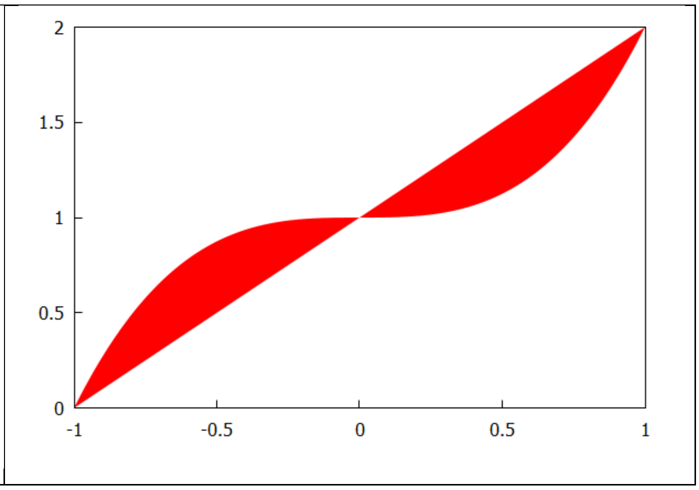
La función $f(x) = x^3 + 1$ es una función polinómica, una cúbica, de derivada $f'(x) = 3x^2$ siempre mayor o igual que cero, luego es una función siempre creciente.

La función $g(x) = x + 1$ es una recta de pendiente 1, siempre creciente.

Se cortan en tres puntos: (0, 0), (-1, 0) y (1, 0).

Dibujamos las gráficas:





El área pedida será la integral definida entre –1 y 1, las abscisas de los dos puntos de corte de ambas gráficas. Entre –1 y 0 la cúbica va por encima de la recta, y entre 0 y 1, viceversa. Pero al ser las gráficas simétricas con centro de simetría en (0, 1) también podríamos calcular el área entre 0 y 1, y multiplicar por 2.

$$Área = \int_{-1}^{0}((x^3+1)-(x+1))dx + \int_{0}^{1}((x+1)-(x^3+1))dx = \left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right]\Bigg|_{-1}^{0} + \left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right]\Bigg|_{0}^{1}$$
$$= (-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2}+\frac{1}{4}) = \frac{1}{4}+\frac{1}{4} = \frac{1}{2}u^2$$

$$\boldsymbol{Área = \frac{1}{2}u^2}$$

Problema B.4:

4. Una empresa té dues fàbriques, en la primera són dones el 60% dels treballadors i en la segona són homes el 55% dels treballadors. Es tria a l'atzar un treballador de cada fàbrica per pertànyer al comitè d'empresa. Suposam que el fet de pertànyer a una fàbrica és independent de pertànyer a l'altra.

a) Calculau la probabilitat dels esdeveniments següents: (6 punts)

A = "Tots dos són homes".
B = "Solament un és dona".
C = "Tots dos són dones".

b) Raonau si el succés contrari de l'esdeveniment C és l'A, el B, l'$A \cap B$, l'$A \cup B$ o algun altre esdeveniment, i calculau-ne la probabilitat. (4 punts)

Solución:

Llamamos M al suceso ser mujer y H al de ser hombre. Llamamos $F1$ a ser un trabajador/a de la fábrica 1, y $F2$ el serlo de la fábrica 2.

El enunciado nos dice que:

$$P(M/F1) = 0.6;\ P(H/F2) = 0.55.$$

a) Se elige un trabajador de cada fábrica. Y nos piden:

A. Ambos sean hombres: $P(A) = P(H/F1) \cdot P(H/F2)$

$H/F1$ es el suceso contrario a $M/F1$, luego $P(H/F1) = 1 - 0.6 = 0.4$

$$P(A) = P(H/F1) \cdot P(H/F2) = 0.4 \cdot 0.55 = 0.22.$$

B. El suceso solamente uno es mujer, significa que, si en la fábrica 1 se ha elegido una mujer, entonces en la 2 se ha elegido a un hombre, y que, si en la 1 se ha elegido a un hombre, entonces en la 2 se ha elegido a una mujer:

$M/F2$ es el suceso contrario a $H/F2$, luego $P(M/F2) = 1 - 0.55 = 0.45$.

$$P(B) = P(M/F1) \cdot P(H/F2) + P(H/F1) \cdot P(M/F2) = 0.6 \cdot 0.55 + 0.4 \cdot 0.45 = 0.51.$$

C. Ambos sean mujeres: $P(C) = P(M/F1) \cdot P(M/F2)$

$$P(C) = P(M/F1) \cdot P(M/F2) = 0.6 \cdot 0.45 = 0.27.$$

$$P(A) = \mathbf{0.22};\ P(B) = \mathbf{0.51};\ P(C) = \mathbf{0.27}.$$

b) Nos piden ahora el suceso contrario de C, es decir, que ambos sean mujeres. Ese suceso es que ambos sean hombres o que uno sea un hombre y el otro una mujer. Es decir, $A \cup B$. Vamos a comprobarlo:

$P(C) = P(M/F1) \cdot P(M/F2) = 0.6 \cdot 0.45 = 0.27.$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0.22 + 0.51 = 0.73 = 1 - 0.27$

En efecto, el suceso contrario de C es $\boldsymbol{A \cup B}$.