

**UNIVERSIDAD PONTIFICIA COMILLAS DE MADRID**  
**ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA (ICAI)**  
(Instituto de Investigación Tecnológica)

# **MODELO POSIBILISTA DEL MERCADO DE ENERGÍA ELÉCTRICA A MEDIO PLAZO EN UN ENTORNO LIBERALIZADO**

Tesis para la obtención del grado de Doctor

Directores: Prof. Dr. D. José Villar Collado

Prof. Dr. D. Julián Barquín Gil

Autor: Ldo. D. Fco. Alberto Campos Fernández



Madrid 2005



A Alejandra y a Adrián

“La investigación nace únicamente de una voluntad  
constante y activa por emprender lo que se puede conocer”  
Fco. A. Campos

## **Agradecimientos**

Una vez he logrado terminar esta tesis me veo obligado a dar bastantes, pero seguro que no suficientes, agradecimientos, que además son especialmente sentidos dado que ha sido una de las metas que, por vocación, más he querido alcanzar a lo largo de mi vida.

En primer lugar, mi sincero agradecimiento a toda mi familia, y en especial a mis padres Francisco y Carmen por el gran sacrificio que han realizado a lo largo de sus vidas para que pudiese completar mis estudios, sin la necesidad de ayudarles económicamente en casa. Siempre han tratado que sus hijos tuviesen aquellas otras oportunidades y condiciones que ellos, por las circunstancias de entonces, no pudieron tener. Ha sido tal el esfuerzo realizado que me atrevería a decir que pocos padres, entre los que muy posiblemente tampoco estaré yo, lo hubiesen hecho igual en su situación, que no ha sido, ni mucho menos, espléndida económicamente. Por todo ello, y por su apoyo desinteresado en mi formación, es un privilegio poder contar con unos padres como ellos.

A mi mujer Alejandra por el cariño, empuje y atención que me ha proporcionado, que además ha acompañado con el respeto hacia mi trabajo, así como a las horas adicionales que he tenido que disponer, en muchas ocasiones sacadas de las vacaciones y fines de semanas en los que podíamos haber estado juntos, y todo, a pesar de mi mal humor y en ocasiones egoísta interés por terminar las cosas. Tengo que agradecer especialmente la labor que ha tenido por cuidar de nuestro hijo Adrián en estos últimos meses, gracias a la cual he podido darle un gran empuje a la tesis. Sé que para ella este reconocimiento no le es muy merecido, porque el cuidado de su hijo no responde a condiciones, excusas ni pretextos, pero creo que es justo mencionarlo en estas líneas. Esta tesis se la dedico principalmente a ella, que es un cielo, y al regalo más bonito que me ha hecho, que es mi hijo Adrián, del cual también podría agradecer sus muy tempranos lloriqueos, que me han obligado a comenzar el trabajo en horas, que ni la alarma podía entender.

A mis directores de tesis y amigos José Villar y Julián Barquín.

A José Villar tengo que reconocerle especialmente la confianza que me ha dado a lo largo de estos últimos cinco años. En mi opinión él responde al estereotipo de profesor capaz, humilde y trabajador, con el que no se puede estar ni un segundo parado, pero con el que te sientes valorado y premiado, algo que ha sabido transmitirme a la perfección, y que por mi forma de ser, he necesitado en muchas ocasiones. Gracias José por haberme ayudado a aplicar las matemáticas, así como a mejorar mi expresión y redacción, y por haberme apoyado en los momentos más duros de la tesis, dado que, en otro caso, puedo asegurar, sin ninguna duda, que no hubiese sido capaz de llegar hasta aquí.

A Julián tengo que agradecer especialmente su gran labor de dirección. La verdad es que me ha dedicado poco tiempo, pero cuando lo ha hecho, le he sacado un gran partido. Tiene una cabeza brillante, con la que no puedes competir ni en utopía, y sus aportaciones científicas y culturales son impresionantes. Por ejemplo, él fue quien me dijo el artículo exacto que tenía que leer para construir los algoritmos propuestos en esta tesis, y sólo con un abrir y cerrar de ojos. Básicamente, no he conocido a nadie igual.

Además, ambos directores han sabido crear un ambiente propicio para el trabajo, además de para poder relacionarse con ellos como con cualquier otro amigo. Incluso, hemos estado en alguna que otra juerga juntos, demostrando que el trabajo no tiene porque ser incompatible con el aprecio y la amistad, ni mucho menos.

Al tribunal de la tesis, por los valiosos comentarios que me han proporcionado, que me han ayudado a mejorar significativamente este trabajo de investigación. Mención especial tiene Ángel Sarabia por el interés que ha tenido en cuestionar la tesis de manera constructiva antes de la defensa pública.

A Concepción Camarero por el gran esfuerzo realizado en la revisión de la redacción de la tesis, y más sabiendo que no es precisamente “del gremio”, pues lo suyo es la Geografía e Historia, así como su “Catastro del Marqués de la Ensenada”. Viendo la revisión, en la que incluso detectó algún que otro error en algún que otro subíndice, puedo pronosticar la cercanía del día en que tendrá su más que merecida cátedra.

A Endesa por haberme permitido participar en proyectos de investigación relacionados con la tesis, por sus aportaciones prácticas, y por haberme financiado esta tesis con la beca que he disfrutado a lo largo de estos seis años.

Al personal de administración (Joaquín, Pepe, Isabel, Pilar, Mariló, Carmen), y en particular a Isabel por haberme ayudado a tramitar la defensa con toda la gracia, humildad y empeño en su trabajo, que la caracteriza.

A todos los compañeros del IIT con los que he podido trabajar, que nunca han puesto excusas en resolverme dudas de manera generosa.

A Prado y Juan con los que he trabajado en los proyectos en los que he participado, y que sin su intensa y excelente labor no hubiese podido terminar esta tesis. De Juan tengo que agradecer, además, su colaboración en los procedimientos para la estimación de las distribuciones de posibilidad.

Al director Michel por su labor incuestionable por sacar a flote al instituto en los momentos menos propicios. A mis supervisores Antonio Muñoz, Javier García y Efraim Centeno que depositaron en mí su confianza en los proyectos en los que he

participado. A Antonio Muñoz tengo que agradecerle, además, su labor como tutor de mi trabajo de investigación, así como su interés por revisarlo cuanto antes para que pudiese disfrutar de mi beca de nivel dos. A Begoña Vitoriano, por haberme ayudado, junto con Andrés Ramos, en aquellos primeros momentos en los que impartía clases en el ICAI, y por la revisión del capítulo central de esta tesis. A Javier Reneses, Santiago Cerisola, Carlos Vázquez, Eugenio Sánchez y Álvaro Baillo, por el tiempo que me han prestado en resolverme dudas relacionadas con la tesis. A Eugenio Sánchez le tengo que agradecer también el haberme proporcionado los datos necesarios para la estimación de las distribuciones de posibilidad. Gracias también a Félix Fernández por la revisión del capítulo del estado del arte de los modelos de mercado.

Javier Reneses merece una alusión particular por su gran disposición, ayudándome, entre otras muchas cosas (que por no extenderme, no he detallado), a mejorar los casos de estudio de esta tesis, proporcionándome ideas para el análisis de los mismos, e incluso ofreciéndome, de manera desinteresada, los datos de entrada de los casos, que coinciden con los utilizados en su muy buena tesis doctoral. Muchas gracias Javi porque de tu generosidad deberíamos aprender todos.

Mención especial tiene también el Exilio, en donde he desarrollado prácticamente casi todo el trabajo de esta tesis, y en donde he podido disfrutar de un ambiente como en casa. Allí he tenido el privilegio de conocer grandes amigos y compañeros a los que quiero, aprecio y no olvido, y que siempre echaré en falta cuando no estén a mi lado, como: Javier Santos, Ángel Garro, Raúl García, Félix Fernández, Pablo Ruiz, Luisin Olmos, Manolo Córdoba, Javier Reneses, Pía Rodríguez, Juanjo Sánchez, Ernesto Parrilla,..., con algunos de los cuales no solamente he compartido horas de cursos y de trabajo si no también de juerga y cachondeo, que me han ayudado a hacer más llevadera la tesis y a relajarme en momentos de nerviosismo e incertidumbre en los que la tesis parecía ser una pesada losa. No olvidaré esos viernes en el Cara y Cruz con los arraseitors exiliados Santos, Ángel, Raúl, Pablo, Félix, Luisin y Manolo, y con los no-exiliados que más tarde se adhirieron Mariajosé, Cristina, Iñaki, Natalia, Juanjo, y con aquellos calimochos y brugas matadores, pipas, cacahuets,..., que nos ayudaban a comprender mejor el sentido de la vida, o al menos, eso creíamos....



## **Resumen de la tesis**

Esta tesis doctoral se enmarca dentro de cuatro disciplinas del conocimiento: la investigación operativa, la teoría de la información bajo incertidumbre, vaguedad e imprecisión, también denominada teoría de la información imperfecta, y la ingeniería eléctrica y la economía, cuando se aplican al estudio del comportamiento de las empresas generadoras en un mercado de energía eléctrica.

En concreto, la tesis propone un modelo fundamental del mercado de electricidad que tiene en cuenta la incertidumbre más relevante del mercado. Por un lado, para la representación del comportamiento de las empresas se plantea el equilibrio de Nash en cantidades de producción. Por otro lado, para la representación de la incertidumbre se emplea una medida de posibilidad. Finalmente, para la resolución del enfoque posibilista, que es más sencillo de resolver que su contrapartida probabilista, se han aplicado varios algoritmos para problemas de desigualdades variacionales.

A continuación se resume la línea de investigación seguida.

Primeramente se presenta una descripción detallada de lo que se entiende por incertidumbre, vaguedad e imprecisión en la información, y de sus técnicas de representación, comparando la teoría de la posibilidad con la teoría de la probabilidad como herramientas fundamentales para el modelado de la información imperfecta. Se describe cómo la teoría de la posibilidad es más adecuada ante la falta de información estadística, por su capacidad de modelar los distintos aspectos de la información imperfecta dentro de un mismo esquema representativo.

Seguidamente se describe la teoría de juegos posibilistas, una de las ramas importantes de la aplicación de la teoría de la posibilidad al modelado de la información imperfecta en la investigación operativa. Se clarifican los conceptos y técnicas principales para la resolución de los juegos posibilistas, y se proponen dos enfoques diferentes para la resolución de juegos en donde los jugadores no cooperan entre sí, y en donde el resultado obtenido por cada uno de ellos, que depende de las estrategias del resto, es una distribución de posibilidad. Estos dos enfoques se han denominado en esta tesis enfoques primal y dual, y suponen que los jugadores, a la hora de tomar sus estrategias, tienen aversión al riesgo de que los resultados del juego no sean los esperados.

Los enfoques primal y dual propuestos han sido utilizados para determinar el comportamiento de las empresas productoras en un mercado de electricidad en donde se considera un horizonte temporal de medio plazo, y en donde se supone que la variación de la demanda residual de cada empresa y sus costes variables de

producción son distribuciones de posibilidad. Para ello se ha considerado que las empresas actúan según dos patrones de comportamiento: 1) tratan de determinar las cantidades de producción tales que ninguna empresa, tomando las acciones de sus oponentes como dadas, desea cambiar su decisión ya que le supondría un menor beneficio (o una mayor pérdida), lo que da lugar al modelado del equilibrio de Nash-Cournot; 2) tienen aversión al riesgo cuando compiten en el mercado, en el sentido en que tratan de cubrirse frente a situaciones en las que los beneficios no son los esperados.

Además, los enfoques primal y dual pueden considerar también la situación en la que las empresas estiman una reacción estratégica de la competencia ante sus propias estrategias (equilibrio de Nash conjetural), y curvas de la demanda elásticas o completamente inelásticas. Asimismo, los modelos propuestos pueden tener en cuenta la mayor parte de las restricciones de explotación de cualquier mercado real de electricidad, que además pueden contener parámetros posibilistas, y pueden representar mercados en donde las empresas productoras firmen contratos de energía con empresas comercializadoras.

Las ecuaciones de los dos equilibrios de Nash obtenidas con la aplicación de los enfoques primal y dual, han resultado equivalentes a dos problemas de desigualdades variacionales, que han podido resolverse con algoritmos específicos de resolución. Este método de resolución ha proporcionado resultados satisfactorios tanto en lo que se refiere a la convergencia de los algoritmos utilizados, como a los tiempos de resolución. Además, ha permitido resolver problemas de tamaño real con un detallado modelado de las características técnicas de las centrales eléctricas y del horizonte temporal considerado.

En los casos de estudio analizados se ha podido comprobar que los enfoques propuestos permiten la toma de decisiones robustas en el medio plazo, dado que reducen la variabilidad de los beneficios posibles, posicionando a las empresas productoras en condiciones de mercado esperadas por ellas, y sin que ello suponga necesariamente un decrecimiento en los beneficios esperados. Este último comportamiento se debe a que los enfoques primal y dual modelan el mercado a través del planteamiento de un juego en donde existe conflicto de intereses entre las empresas (dado que el beneficio de una empresa se ve afectado por las decisiones tomadas por el resto), y por lo tanto una pérdida del beneficio esperado de una empresa puede incrementar los beneficios esperados de otras.

## ÍNDICE DE LA TESIS

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1.1 Descripción del problema</b>	<b>3</b>
<b>1.2 Planteamiento de la tesis</b>	<b>5</b>
<b>1.3 Organización de la exposición</b>	<b>7</b>
<b>1.4 Referencias</b>	<b>10</b>
<b>2. La información imperfecta y su modelado</b>	<b>11</b>
<b>2.1 Organización del capítulo</b>	<b>13</b>
<b>2.2 La información imperfecta</b>	<b>14</b>
<b>2.3 Técnicas de representación de la información imperfecta</b>	<b>16</b>
2.3.1 La medida borrosa de Sugeno	16
2.3.2 Teoría de la probabilidad	17
2.3.3 Modelos de cotas de probabilidad	20
2.3.4 Los conjuntos borrosos y la teoría de la posibilidad	21
2.3.5 La teoría de la evidencia	35
2.3.6 Los factores de certeza	39
2.3.7 Medidas de falta de especificidad o de cantidad de información inconsistente	41
2.3.8 Medidas de disonancia	43
2.3.9 Medidas de confusión	46
<b>2.4 Posibilidad y probabilidad</b>	<b>47</b>
2.4.1 Los conjuntos borrosos, la probabilidad y la posibilidad	47
2.4.2 Interpretaciones probabilistas de los conjuntos borrosos y las medidas de posibilidad	48
2.4.3 Comparación axiomática entre las medidas de probabilidad, y las medidas de posibilidad y necesidad	52
2.4.4 Transformaciones posibilidad-probabilidad	55
<b>2.5 Referencias</b>	<b>65</b>
<b>3. La teoría de juegos posibilistas: enfoques primal y dual</b>	<b>71</b>
<b>3.1 Organización del capítulo</b>	<b>73</b>
<b>3.2 La teoría de juegos clásicos</b>	<b>74</b>
3.2.1 Algunos tipos de juegos	75
3.2.2 Juegos estáticos no cooperativos con información perfecta: forma normal	78
3.2.3 Extensión de juegos estáticos no cooperativos con información perfecta: estrategias mixtas	79

3.2.4	Algunas estrategias estables	81
<b>3.3</b>	<b>La teoría de juegos posibilistas</b>	<b>87</b>
3.3.1	Las estrategias mixtas en la extensión de juegos posibilistas estáticos no cooperativos y finitos	89
<b>3.4</b>	<b>Juegos bipersonales posibilistas <i>LR</i> estáticos no cooperativos finitos: forma normal y extensión mixta</b>	<b>91</b>
3.4.1	Enfoque primal: planteamiento y resolución	93
3.4.2	Enfoque dual: planteamiento y resolución	97
<b>3.5</b>	<b>Juegos <i>K</i>-personales posibilistas <i>LR</i> estáticos no cooperativos finitos: forma normal y extensión mixta</b>	<b>102</b>
3.5.1	Enfoque primal: planteamiento y resolución	102
3.5.2	Enfoque dual: planteamiento y resolución	103
<b>3.6</b>	<b>Juegos <i>K</i>-personales posibilistas <i>LR</i> estáticos no cooperativos infinitos: forma normal</b>	<b>105</b>
3.6.1	Enfoque primal: planteamiento y formulación	105
3.6.2	Enfoque dual: planteamiento y formulación	106
3.6.3	Comentarios acerca de la resolución de los enfoques primal y dual	106
<b>3.7</b>	<b>Referencias</b>	<b>108</b>
<b>4.</b>	<b><i>Una visión general de los enfoques primal y dual en su aplicación a los mercados eléctricos</i></b>	<b>111</b>
<b>4.1</b>	<b>Organización del capítulo</b>	<b>113</b>
<b>4.2</b>	<b>Los mercados eléctricos: tipos e incertidumbres</b>	<b>114</b>
4.2.1	Los mercados de generación y sus funcionamientos	114
4.2.2	Tipos de mercados de generación según el grado de competencia	115
4.2.3	Tipos de mercados de generación según el algoritmo de casación	116
4.2.4	Tipos de análisis de los mercados de generación según el horizonte temporal considerado	117
4.2.5	Incertidumbre en los mercados de generación	118
<b>4.3</b>	<b>Enfoques clásicos de modelado de la competencia en el mercado de generación</b>	<b>123</b>
4.3.1	Precio del mercado exógeno	124
4.3.2	Equilibrio de Nash	125
4.3.3	Resumen de los enfoques de modelado	135
<b>4.4</b>	<b>Probabilidad versus posibilidad en los mercados de generación</b>	<b>137</b>
<b>4.5</b>	<b>Aplicación de la teoría de la posibilidad a los mercados de generación</b>	<b>141</b>
<b>4.6</b>	<b>Una visión general del modelo de mercado de generación considerado en esta tesis</b>	<b>144</b>

4.6.1	El horizonte, la remuneración y el tipo de algoritmo _____	144
4.6.2	Consideración de la cartera de generación _____	144
4.6.3	Modelo basado en el equilibrio en variaciones conjeturales _____	145
4.6.4	Consideración explícita de la incertidumbre mediante distribuciones de posibilidad _____	145
4.6.5	Un modelo que obtiene las distribuciones de posibilidad principales de los resultados de salida _____	146
4.6.6	Consideración del riesgo incurrido por los agentes _____	146
4.6.7	Formulación de los problemas de optimización por agente: relación con la optimización estocástica y posibilista _____	147
4.6.8	Un algoritmo de desigualdades variacionales como método de resolución _____	149
4.6.9	Clasificación en la literatura del modelo propuesto _____	150
<b>4.7</b>	<b>Referencias _____</b>	<b>152</b>
<b>5.</b>	<b><i>Enfoques primal y dual aplicados al mercado eléctrico</i> _____</b>	<b>161</b>
<b>5.1</b>	<b>Organización del capítulo _____</b>	<b>163</b>
<b>5.2</b>	<b>Equilibrio de Cournot con incertidumbre en los beneficios _____</b>	<b>164</b>
<b>5.3</b>	<b>El enfoque primal en el equilibrio de Cournot _____</b>	<b>169</b>
5.3.1	Definición y características generales del enfoque primal _____	169
5.3.2	El enfoque primal probabilista _____	170
5.3.3	El enfoque primal posibilista _____	173
5.3.4	Demanda, costes y beneficios posibilistas <i>LR</i> _____	176
5.3.5	El enfoque primal posibilista <i>LR</i> _____	180
5.3.6	Ecuaciones del equilibrio primal posibilista <i>LR</i> _____	182
5.3.7	Consideración de las restricciones de explotación de los agentes _____	187
5.3.8	Modelado del equilibrio primal <i>LR</i> utilizando desigualdades variacionales _____	188
5.3.9	Resolución de las ecuaciones primales <i>LR</i> utilizando un algoritmo para desigualdades variacionales _____	191
5.3.10	Modificación del algoritmo primal para garantizar la convergencia _____	197
5.3.11	Resolución del subproblema de desigualdades variacionales _____	204
5.3.12	Actualización del criterio de convergencia y reinicialización del algoritmo de resolución _____	210
5.3.13	Conclusiones finales acerca de la relación del algoritmo propuesto con el algoritmo de Solodov _____	213
<b>5.4</b>	<b>El enfoque dual en el equilibrio de Cournot _____</b>	<b>215</b>
5.4.1	Definición y características generales del enfoque dual _____	215
5.4.2	El enfoque dual probabilista _____	216
5.4.3	El enfoque dual posibilista _____	217
5.4.4	El enfoque dual posibilista <i>LR</i> _____	218

5.4.5	Ecuaciones del equilibrio dual posibilista <i>LR</i>	220
5.4.6	Consideración de las restricciones de explotación de los agentes	223
5.4.7	Modelado del equilibrio dual <i>LR</i> utilizando desigualdades variacionales	224
5.4.8	Resolución de las ecuaciones duales <i>LR</i> utilizando un algoritmo para desigualdades variacionales	224
<b>5.5</b>	<b>Los enfoques primal y dual en el equilibrio en variaciones conjeturales</b>	<b>226</b>
<b>5.6</b>	<b>Complementos del modelo básico posibilista</b>	<b>233</b>
5.6.1	Generalización para el caso multiperiodo	233
5.6.2	Consideración de contratos entre empresas	237
5.6.3	Consideración de restricciones de explotación posibilistas	240
<b>5.7</b>	<b>Estimación de las distribuciones de posibilidad de las pendientes de la demanda residual</b>	<b>250</b>
5.7.1	Métodos basados en la información de los expertos	251
5.7.2	Métodos basados en datos estadísticos	252
<i>Anexo 5.1</i>	<i>Demostraciones requeridas en el enfoque primal</i>	<i>260</i>
Anexo 5.1.1	Condiciones suficientes de existencia de equilibrio	260
Anexo 5.1.2	Condiciones suficientes de unicidad de equilibrio	260
Anexo 5.1.3	Convergencia del algoritmo de desigualdades variacionales	263
Anexo 5.1.4	Paso de monotonía del algoritmo de desigualdades variacionales	266
Anexo 5.1.5	Resolución del subproblema de desigualdades variacionales	267
Anexo 5.1.6	Aplicación y resolución del enfoque primal cuando se consideran curvas de demanda históricas	269
<i>Anexo 5.2</i>	<i>Demostraciones requeridas en el enfoque dual</i>	<i>275</i>
Anexo 5.2.1	Condiciones de segundo orden para el equilibrio	275
<i>Anexo 5.3</i>	<i>Demostración de la relación entre los enfoques primal y dual</i>	<i>277</i>
<b>5.8</b>	<b>Referencias</b>	<b>280</b>
<b>6.</b>	<b>Casos de estudio</b>	<b>283</b>
<b>6.1</b>	<b>Organización del capítulo</b>	<b>285</b>
<b>6.2</b>	<b>Implantación y resolución del enfoque primal</b>	<b>286</b>
<b>6.3</b>	<b>Casos ejemplos de tamaño reducido</b>	<b>288</b>
6.3.1	Casos ejemplos sencillos para el análisis del comportamiento del enfoque primal	289
6.3.2	Casos ejemplos sencillos para el análisis de la convergencia	308
<b>6.4</b>	<b>Casos ejemplos de tamaño real</b>	<b>320</b>
6.4.1	Descripción de los datos de entrada	320
6.4.2	Tamaño de los casos de estudio y tiempos de resolución	327

6.4.3	Resultados de los casos de estudio _____	328
<b>6.5</b>	<b>Referencias _____</b>	<b>344</b>
<b>7.</b>	<b><i>Conclusiones, aportaciones y líneas de futuros desarrollos</i> _____</b>	<b>345</b>
<b>7.1</b>	<b>Conclusiones _____</b>	<b>347</b>
<b>7.2</b>	<b>Aportaciones de la tesis _____</b>	<b>351</b>
<b>7.3</b>	<b>Líneas de futuros desarrollos _____</b>	<b>354</b>
<b>7.4</b>	<b>Referencias _____</b>	<b>360</b>
<b>Anexo.</b>	<b><i>Revisión bibliográfica de las técnicas de resolución de restricciones posibilistas</i> _____</b>	<b>363</b>
<b>Anexo.1</b>	<b>Organización del anexo _____</b>	<b>365</b>
<b>Anexo.2</b>	<b>Las restricciones posibilistas en un problema de decisión _____</b>	<b>367</b>
<b>Anexo.3</b>	<b>Restricciones con vaguedad: restricciones flexibles _____</b>	<b>370</b>
Anexo.3.1	El enfoque general de resolución _____	370
Anexo.3.2	El enfoque de Zimmermann _____	371
<b>Anexo.4</b>	<b>Restricciones con ambigüedad _____</b>	<b>373</b>
Anexo.4.1	El enfoque general de resolución _____	373
Anexo.4.2	El enfoque de Buckley _____	373
Anexo.4.3	El enfoque de Slowinski _____	374
Anexo.4.4	El operador “máximo posibilista” _____	375
Anexo.4.5	El enfoque de Dubois _____	376
Anexo.4.6	El enfoque propuesto por Rommelfanger _____	378
Anexo.4.7	El operador de inclusión posibilista: programación robusta _____	379
<b>Anexo.5</b>	<b>Restricciones con vaguedad y ambigüedad _____</b>	<b>380</b>
Anexo.5.1	El enfoque propuesto por Inuiguchi para un sistema de ecuaciones lineales _____	380
Anexo.5.2	El enfoque general propuesto por Inuiguchi _____	381
Anexo.5.3	El enfoque general propuesto por Fuller _____	382
<b>Anexo.6</b>	<b>Restricciones con decisiones posibilistas _____</b>	<b>384</b>
Anexo.6.1	El operador de inclusión borroso: restricciones robustas con decisiones posibilistas _____	384
Anexo.6.2	El enfoque de Tanaka para un sistema lineal con lado derecho posibilista _____	385
<b>Anexo.7</b>	<b>Clasificación de los métodos de resolución de restricciones posibilistas _____</b>	<b>387</b>
<b>Anexo.8</b>	<b>Referencias _____</b>	<b>389</b>

## ÍNDICE DE FIGURAS

<i>Figura 1. 1: Esquema de los capítulos de la tesis</i>	9
<i>Figura 2. 1: Funciones de pertenencia de un conjunto clásico y borroso</i>	21
<i>Figura 2. 2: Número borroso</i>	23
<i>Figura 2. 3: Función de pertenencia LR</i>	24
<i>Figura 2. 4: Medidas de creencia y plausibilidad</i>	37
<i>Figura 2. 5: Relaciones de inclusión de las medidas en la teoría de la evidencia</i>	38
<i>Figura 2. 6: Comparativa axiomática posibilidad-probabilidad</i>	54
<i>Figura 2. 7: Comparativa axiomática evidencia-probabilidad</i>	55
<i>Figura 2. 8: Distribución de posibilidad triangular truncada</i>	63
<i>Figura 3. 1: Orden inducido por el enfoque primal</i>	95
<i>Figura 3. 2: Orden inducido por el enfoque dual</i>	99
<i>Figura 5. 1: Formulación del equilibrio determinista</i>	164
<i>Figura 5. 2: Formulación del equilibrio con incertidumbre</i>	166
<i>Figura 5. 3: Distribución de probabilidad del equilibrio de Cournot</i>	167
<i>Figura 5. 4: Enfoque primal probabilista</i>	171
<i>Figura 5. 5: Enfoque primal posibilista</i>	174
<i>Figura 5. 6: Conjunto de curvas de la demanda posibles</i>	175
<i>Figura 5. 7: Curvas de la demanda LR de cada agente</i>	177
<i>Figura 5. 8: Curvas de costes LR de cada agente</i>	178
<i>Figura 5. 9: Determinación de <math>B_e^*</math> a maximizar en el enfoque primal LR</i>	180
<i>Figura 5. 10: Curva de la demanda a la que se enfrenta cada agente (caso lineal LR)</i>	181
<i>Figura 5. 11: Curva de costes a la que se enfrenta cada agente (caso lineal LR)</i>	182
<i>Figura 5. 12: Curva de la demanda residual a la que se enfrenta cada agente (caso lineal LR)</i>	183
<i>Figura 5. 13: Aproximación de la curva de la demanda</i>	184
<i>Figura 5. 14: Aproximación de la pendiente de la curva de la demanda</i>	185
<i>Figura 5. 15: Aproximación de la curva de costes marginales</i>	186
<i>Figura 5. 16: Solución geométrica de un problema de desigualdades variacionales</i>	190
<i>Figura 5. 17: Algoritmo de resolución del enfoque primal como problema de desigualdades variacionales</i>	196
<i>Figura 5. 18: Paso de monotonía del algoritmo primal</i>	200
<i>Figura 5. 19: Paso de monotonía del algoritmo primal (caso degenerado)</i>	203
<i>Figura 5. 20: Relación entre los costes marginales de los subproblemas</i>	205
<i>Figura 5. 21: Curva de la demanda residual con 5 tramos admisibles por precio</i>	208
<i>Figura 5. 22: Enfoque dual probabilista</i>	216

<i>Figura 5. 23: Enfoque dual posibilista</i>	218
<i>Figura 5. 24: Determinación de <math>\alpha_e^*</math> a minimizar en el enfoque dual LR</i>	219
<i>Figura 5. 25: Determinación de <math>B_e^*</math> a maximizar en el enfoque dual LR</i>	220
<i>Figura 5. 26: Curvas de la demanda residual LR de cada agente</i>	228
<i>Figura 5. 27: Ciclo turbinación-bombeo</i>	245
<i>Figura 5. 28: Representación de un sistema hidráulico</i>	246
<i>Figura 5. 29: Aproximación por el modelo bisagras de la curva de la demanda residual</i>	252
<i>Figura 5. 30: Pendientes de la demanda residual del agente en estudio</i>	254
<i>Figura 5. 31: Distribución de posibilidad continua para el caso ejemplo</i>	255
<i>Figura 5. 32: Histogramas probabilista y posibilistas para el caso ejemplo</i>	256
<i>Figura 5. 33: Aproximación válida de una distribución posibilista bimodal</i>	258
<i>Figura 5. 34: Precios <math>\lambda_{e0}</math> esperados por los generadores</i>	259
<i>Figura 5. 35: Pendientes como función del precio, escogidas para el análisis de la unicidad del equilibrio primal</i>	262
<i>Figura 5. 36: Curvas de la demanda a la que se enfrenta cada agente según el enfoque primal</i>	273
<i>Figura 5. 37: Aplicación directa del enfoque primal sobre curvas de la demanda históricas</i>	274
<i>Figura 5. 38: Relaciones entre los enfoques primal y dual</i>	277
<i>Figura 6. 1: Derivada de la función de coste en la implantación</i>	287
<i>Figura 6. 2: Posibles curvas de la demanda esperadas por los generadores y esperadas en la casación (Cournot)</i>	290
<i>Figura 6. 3: Comportamiento de la demanda satisfecha en el enfoque primal (Cournot)</i>	293
<i>Figura 6. 4: Soportes del precio del mercado con enfoques determinista y primal (Cournot)</i>	294
<i>Figura 6. 5: Comparación de las distribuciones de los precios (idénticos recursos-simétrico en riesgo)</i>	295
<i>Figura 6. 6: Comparación de las distribuciones de los beneficios (idénticos recursos-simétrico en riesgo)</i>	296
<i>Figura 6. 7: Suma de beneficios más posibles (idénticos recursos-simétrico en riesgo)</i>	297
<i>Figura 6. 8: Comportamiento de las producciones de los agentes con distinta aversión al riesgo</i>	300
<i>Figura 6. 9: Comparación de las distribuciones de los beneficios (idénticos recursos-asimétrico en riesgo)</i>	301
<i>Figura 6. 10: Posibles curvas de la demanda residual esperadas por los generadores (variaciones conjeturales-inelástico)</i>	305
<i>Figura 6. 11: Posibles curvas de la demanda esperadas por el agente 1 (convergencia)</i>	309
<i>Figura 6. 12: Posibles curvas de la demanda esperadas por el agente 2 (convergencia)</i>	310

<i>Figura 6. 13: Posibles curvas de la demanda esperadas en la casación (convergencia)</i>	311
<i>Figura 6. 14: Méritos para cada iteración con distintos vectores iniciales (convergencia)</i>	312
<i>Figura 6. 15: Umbrales de convergencia y de penalización (convergencia)</i>	314
<i>Figura 6. 16: Curvas de nivel y valores de la función vectorial <math>F</math> del problema <math>VI(X,F)</math> (convergencia)</i>	315
<i>Figura 6. 17: Hiperplanos que separan el equilibrio de cada vector de producciones <math>P^k</math> (convergencia)</i>	316
<i>Figura 6. 18: Convergencia algoritmo para el caso <math>\lambda^*</math> similar a <math>\lambda_0</math></i>	318
<i>Figura 6. 19: Umbrales de convergencia y de penalización para el caso <math>\lambda^*</math> similar a <math>\lambda_0</math> (convergencia)</i>	319
<i>Figura 6. 20: Evolución de la potencia media demandada por estación a lo largo del año (caso de tamaño real)</i>	321
<i>Figura 6. 21: Evolución de la potencia media semanal contratada por las empresas <math>E_1</math>, <math>E_2</math> y <math>E_3</math> (caso de tamaño real)</i>	323
<i>Figura 6. 22: Evolución del precio medio semanal esperado por los generadores (caso de tamaño real)</i>	324
<i>Figura 6. 23: Potencia instalada por empresa y tecnología (caso de tamaño real)</i>	325
<i>Figura 6. 24: Costes variables medios por empresa y tecnología (caso de tamaño real)</i>	326
<i>Figura 6. 25: Potencias máximas de turbinación y de bombeo por empresa (caso de tamaño real)</i>	326
<i>Figura 6. 26: Distribución de posibilidad para el precio marginal (caso de tamaño real)</i>	328
<i>Figura 6. 27: Precios marginales y esperados (caso de tamaño real)</i>	329
<i>Figura 6. 28: Diferencias precios marginales y esperados (caso de tamaño real)</i>	330
<i>Figura 6. 29: Precios marginales con contratos y esperados (caso de tamaño real)</i>	331
<i>Figura 6. 30: Diferencias precios marginales con contratos y esperados (caso de tamaño real)</i>	331
<i>Figura 6. 31: Distribuciones de posibilidad de los beneficios (caso de tamaño real)</i>	332
<i>Figura 6. 32: Distribuciones de posibilidad de los beneficios mensuales empresa <math>E1</math> (caso de tamaño real)</i>	333
<i>Figura 6. 33: Distribuciones de posibilidad de los beneficios mensuales empresa <math>E7</math> (caso de tamaño real)</i>	335
<i>Figura 6. 34: Producciones en el equilibrio primal y determinista (caso de tamaño real)</i>	336
<i>Figura 6. 35: Diferencias producciones primal y determinista (caso de tamaño real)</i>	337
<i>Figura 6. 36: Energía semanal en los equilibrios y contratada (caso de tamaño real)</i>	339
<i>Figura 6. 37: Distancias entre <math>P^k</math> y <math>Z^k</math> para cada iteración (caso de tamaño real)</i>	340

---

<i>Figura 6. 38: Restos marginales alfa convergentes para cada iteración (caso de tamaño real)</i>	341
<i>Figura 6. 39: Mérito en <math>P^k</math> para cada iteración (caso de tamaño real)</i>	342
<i>Figura 6. 40: Criterios de convergencia y parámetros de penalización (caso de tamaño real)</i>	343
<i>Figura 7. 1: Diferencias objetivos enfoques primal y dual</i>	355
<i>Figura 7. 2: Planteamiento equilibrio enfoque combinado</i>	355
<i>Figura Anexo. 1: Solución restricciones flexibles con la T-norma mínimo</i>	371

## ÍNDICE DE TABLAS

<i>Tabla 4. 1: Clasificación de los modelos de mercado</i>	136
<i>Tabla 6. 1: Parque de generación térmica (idénticos recursos)</i>	291
<i>Tabla 6. 2: Resultados enfoque determinista (idénticos recursos)</i>	291
<i>Tabla 6. 3: Resultados enfoque primal (idénticos recursos-simétrico en riesgo)</i>	292
<i>Tabla 6. 4: Resultados enfoque primal (idénticos recursos-asimétrico en riesgo)</i>	299
<i>Tabla 6. 5: Parque de generación térmica (distintos recursos)</i>	302
<i>Tabla 6. 6: Resultados enfoque determinista (distintos recursos)</i>	302
<i>Tabla 6. 7: Resultados enfoque primal (distintos recursos-simétrico en riesgo)</i>	302
<i>Tabla 6. 8: Resultados enfoque primal (distintos recursos-asimétrico en riesgo) (I)</i>	303
<i>Tabla 6. 9: Resultados enfoque primal (caso asimétrico-asimétrico en riesgo) (II)</i>	304
<i>Tabla 6. 10: Demanda inelástica en el equilibrio en variaciones conjeturales</i>	304
<i>Tabla 6. 11: Resultados enfoque determinista (idénticos recursos-inelástico)</i>	306
<i>Tabla 6. 12: Resultados enfoque primal (idénticos recursos-simétrico en riesgo-inelástico)</i>	306
<i>Tabla 6. 13: Resultados enfoque primal (idénticos recursos-asimétrico en riesgo-inelástico)</i>	307
<i>Tabla 6. 14: Resultados enfoque determinista (distintos recursos-inelástico)</i>	307
<i>Tabla 6. 15: Resultados enfoque primal (distintos recursos-simétrico en riesgo-inelástico)</i>	307
<i>Tabla 6. 16: Resultados enfoque primal (distintos recursos-asimétrico en riesgo-demanda inelástica) (I)</i>	308
<i>Tabla 6. 17: Resultados enfoque primal (distintos recursos-asimétrico en riesgo-demanda inelástica) (II)</i>	308
<i>Tabla 6. 18: Parque de generación térmica (convergencia)</i>	308
<i>Tabla 6. 19: Niveles de riesgo de los generadores (convergencia)</i>	311
<i>Tabla 6. 20: Precios de casación esperados para el caso <math>\lambda^*</math> similar a <math>\lambda_{e0}</math> (convergencia)</i>	317
<i>Tabla 6. 21: Niveles de riesgo fijados por los generadores (caso de tamaño real)</i>	322
<i>Tabla 6. 22: Valor mínimo y máximo pendientes demandas residuales ((€/MWh)/GW) (caso de tamaño real)</i>	325
<i>Tabla 6. 23: Producciones por empresa y tecnología enfoque primal (GWh)</i>	338
<i>Tabla 6. 24: Producciones por empresa y tecnología enfoque determinista (GWh)</i>	338
<i>Tabla 6. 25: Diferencias producciones por empresa y tecnología enfoque primal-determinista (GWh)</i>	338
<i>Tabla 6. 26: Precio marginal medio por nivel de carga (€/Mwh)</i>	339

*Tabla Anexo. 1: Clasificación de los enfoques de resolución de un sistema de ecuaciones posibilistas* \_\_\_\_\_ 388



# **1. Introducción**



## 1.1 Descripción del problema

En los últimos años la industria eléctrica de muchos países ha experimentado grandes cambios en su estructura, destinados a fomentar la competencia y mejorar la eficiencia empresarial y energética, abaratando los costes de la energía suministrada a los consumidores y sin que eso suponga una reducción en la calidad del servicio. Todo ello se está llevando a cabo mediante la liberalización de algunas de las actividades más relevantes del sector eléctrico, entre las que destaca la actividad de la generación de electricidad, donde en muchos países se ha implantado un mercado de compra y venta de electricidad.

En este esquema de mercado, los resultados económicos de las empresas generadoras dependen, en gran medida, de sus propias decisiones. Por tanto, en la búsqueda del máximo beneficio, los planificadores requieren de herramientas y modelos que ayuden a comprender el funcionamiento del mercado y a caracterizar el comportamiento de las empresas participantes en el mismo. En concreto, los modelos de equilibrio basados en la teoría de juegos han sido algunos de los más utilizados, al considerar, entre otros aspectos, el modelado conjunto de las empresas en sus decisiones económicas, así como el criterio racional de la maximización simultánea de los beneficios.

Por otro lado, es bien sabido que el comportamiento de las empresas en el mercado está sujeto a multitud de incertidumbres, entre las que destacan la evolución de la demanda, las estrategias de las empresas, los precios de los combustibles, la hidráulicidad, la indisponibilidad de las centrales y las propias reglas de funcionamiento del mercado. Para un correcto modelado del mercado, una empresa de generación debe considerar estas incertidumbres en los modelos de equilibrio que utiliza, siendo relevante para la obtención de resultados realistas un adecuado modelado de las mismas.

Existen distintas alternativas para representar la incertidumbre. La teoría de la probabilidad ha sido una de las herramientas más utilizadas para su representación, al proporcionar resultados satisfactorios cuando existe un conjunto de datos históricos acerca de los parámetros que son objeto de estudio. Sin embargo, este tipo de representación puede no ser la más apropiada en la toma de decisiones para la explotación de un sistema eléctrico. Esto sucede, por ejemplo, cuando se producen cambios regulatorios que restan validez a los datos históricos disponibles, o cuando las hipótesis habituales consideradas en los modelos probabilistas (independencia, normalidad,...), a menudo para hacerlos computacionalmente viables, no son aplicables a la realidad que se modela. Además, en determinadas ocasiones los parámetros de entrada de los modelos de mercado suelen ser reajustados con información lingüística proporcionada por los propios planificadores, lo que sugiere

la conveniencia de utilizar un modelo de incertidumbre que permita representar esa información subjetiva.

Los conjuntos borrosos y la teoría de la posibilidad (ver [Zadeh, 1965] y [Zadeh, 1978]) permiten no sólo el modelado de la incertidumbre, sino también de la vaguedad e imprecisión, y todo bajo un mismo marco teórico, dando lugar a un esquema de representación del conocimiento más flexible que el proporcionado por la teoría de la probabilidad, aunque menos informativo. Al poder modelar la información subjetiva de los decisores, la inferencia posibilista es más coherente con el pensamiento usual del decisor que la inferencia frecuentista. Además, esta teoría permite trabajar en ausencia de datos históricos y no son necesarias las hipótesis de independencia, normalidad, etc., asumidas usualmente en los modelos probabilistas, que además suelen ser más complejos de resolver. Como se comprueba en esta tesis, la aplicación a problemas reales de la teoría de la posibilidad puede permitir obtener modelos posibilistas menos complejos de resolver que los modelos probabilistas.

Los modelos posibilistas han sido cuestionados argumentando que, al incorporar las creencias o expectativas personales del decisor, pueden restar objetividad al análisis. Sin embargo, los modelos probabilistas no están exentos de decisiones subjetivas, como por ejemplo el establecimiento de los niveles de significación. Además, la subjetividad de los expertos, distinta de la arbitrariedad o el antojo, es un fenómeno inevitable que conviene ser tenido en cuenta para el correcto modelado del problema de decisión.

Además del problema de selección de un modelo adecuado para representar la incertidumbre (entendida en su sentido más amplio, que engloba la vaguedad y la imprecisión) otro de los puntos a tener en cuenta en los modelos de mercado con incertidumbre es el modelado de la actitud de los generadores ante el riesgo. En este sentido, en muchas ocasiones las empresas de generación en el mercado suelen estar tan interesadas en reducir su riesgo de pérdidas económicas como en aumentar su posibilidad de beneficios, por lo que pueden considerarse aversas al riesgo.

Esta tesis estudia el comportamiento de un mercado de electricidad a medio plazo modelando las principales fuentes de incertidumbre que afectan directamente a los beneficios de las empresas generadoras. En concreto, en el modelo se han utilizado distribuciones de posibilidad para representar la incertidumbre en la demanda eléctrica y en los costes de producción, y para la representación del funcionamiento del mercado se ha considerado el planteamiento del equilibrio de Nash (ver [Nash, 1950]) bajo incertidumbre cuando las empresas tienen aversión al riesgo. Para la resolución de los modelos propuestos se han utilizado técnicas de valoración del riesgo y algoritmos para problemas de desigualdades variacionales, cuya principal aportación es permitir la toma de decisiones robustas en un tiempo razonable para la operación y planificación del sistema eléctrico en el medio plazo.

## 1.2 Planteamiento de la tesis

Esta tesis tiene como objetivo principal el planteamiento, análisis y resolución de un modelo de mercado de generación de electricidad que utiliza la teoría de la posibilidad para la representación de la incertidumbre más relevante. Este modelo resulta especialmente adecuado ante la posible carencia de datos históricos o ante la posible presencia de información subjetiva que se tenga acerca de la incertidumbre a modelar.

El horizonte temporal del mercado considerado es de medio plazo, por lo que las decisiones no requieren un nivel de detalle elevado y tienen que ver fundamentalmente con la explotación de los recursos de generación del sistema eléctrico. Dado que no es necesario un elevado detalle en las decisiones a tomar, se ha considerado más adecuada la representación del comportamiento de todas las empresas en el mercado a través del planteamiento del equilibrio de Nash en cantidades (Cournot) y en cantidades conjeturales (variaciones conjeturales en cantidades).

Además, el modelo de mercado planteado considera, por un lado, que la curva de la demanda residual de cada empresa<sup>1</sup> es lineal en torno a un precio de casación esperado por la empresa. La suposición de curvas de la demanda residual lineales es adecuada en modelos de mercado con un horizonte de medio plazo y ya ha sido considerada en trabajos previos relacionados con esta tesis (ver, por ejemplo, [Reneses, 2004]). Por otro lado, se ha realizado una representación de los parques de generación de las empresas eléctricas con un detalle suficientemente aceptable y realista para una previsión a medio plazo, que considera las características técnicas principales de las centrales del sistema. Además, se ha supuesto que la curva de costes de producción de cada empresa es una función escalonada, en donde cada escalón representa el coste acumulado de los costes de generación de las centrales de generación de la empresa.

En concreto, esta tesis se ha centrado en la aplicación de la teoría de la posibilidad al modelado de la incertidumbre en la demanda residual de los generadores y en sus costes de producción. Para la representación de la incertidumbre se han utilizado distribuciones de posibilidad *LR*, muy empleadas en los modelos posibilistas por su facilidad para ser operadas. La consideración de fuentes de incertidumbre alternativas a las mencionadas también ha sido analizada, y para aquellos casos que no han sido resueltos explícitamente se han proporcionado pautas para su resolución.

---

<sup>1</sup>La demanda residual de una empresa permite determinar el precio de la electricidad para cada oferta de la empresa y resulta de sustraer de la demanda eléctrica las ofertas del resto de empresas.

Debido a la presencia de incertidumbre, el comportamiento de las empresas suele ser un comportamiento prudente frente a posibles riesgos económicos. En esta tesis se han obtenido varios equilibrios de mercado que simplifican al equilibrio planteado bajo incertidumbre, y que tienen en cuenta la actitud de las empresas frente al riesgo. Los modelos planteados están basados en la adaptación de los modelos tradicionales de valoración del riesgo (VaR) de una cartera de generación al caso del equilibrio de Nash cuando la medida de la incertidumbre es una medida de posibilidad en lugar de una medida de probabilidad.

Para poder utilizar programas comerciales de optimización y evitar un elevado coste computacional en la resolución de problemas de tamaño real, se han desarrollado varios algoritmos iterativos, que en cada iteración resuelven eficientemente varios problemas de optimización cuadrática. Los algoritmos de resolución son el resultado de adaptar algunos algoritmos de resolución para problemas de desigualdades variacionales al caso del planteamiento de equilibrios de Nash en el mercado de electricidad considerado.

### 1.3 Organización de la exposición

Esta tesis se ha estructurado como sigue:

En el capítulo 2 se describe detalladamente lo que se entiende por información imperfecta a considerar en un proceso de toma de decisiones, se muestran algunos ejemplos sencillos en el contexto del mercado eléctrico, y las técnicas principales para su representación. En concreto, se realiza un repaso general de la teoría de la probabilidad y de la posibilidad, y se muestran sus principales diferencias y relaciones.

El capítulo 3 está dedicado al estudio de los denominados juegos posibilistas, que son procesos de decisión con conflictos de intereses entre los decisores, y cuyos componentes (estrategias, pagos resultantes del juego, etc.) pueden contener incertidumbre, que se modela mediante el uso de distribuciones de posibilidad. Para su comprensión se dará previamente una breve descripción de los juegos convencionales y de su extensión posibilista, así como una revisión bibliográfica de éstos últimos. Además, en este capítulo se proponen también dos enfoques de resolución para juegos posibilistas con un conjunto finito o infinito de estrategias, enfoques que han sido denominados primal y dual, y que forman parte de las aportaciones originales de esta tesis. El enfoque de resolución para juegos infinitos introducido en este capítulo es aplicado en el capítulo 5 al caso de un mercado de generación de electricidad.

El capítulo 4 está destinado a situar los objetivos y el planteamiento de la tesis en el contexto de los mercados de generación de electricidad. Para ello se describen los diferentes tipos de mercados de generación, sus distintas fuentes de incertidumbre y sus principales enfoques de modelado. Además, se muestran las principales ventajas e inconvenientes de la aplicación de las medidas de probabilidad y de posibilidad al modelado de la incertidumbre inherente en el mercado. Se concluye con una revisión bibliográfica de los trabajos que utilizan distribuciones de posibilidad para representar la incertidumbre, así como una visión general de los modelos de mercado propuestos en esta tesis.

El capítulo 5 es la aplicación de los resultados teóricos del capítulo 3 al mercado de la electricidad descrito en el capítulo 4, y puede considerarse el capítulo central de la tesis. Se describe la aplicación de los enfoques primal y dual al caso en que las estrategias de las empresas generadoras son cantidades de potencia (equilibrio de Cournot), así como al caso en que se conjeture el comportamiento de la competencia (equilibrio en variaciones conjeturales). Para resolver los modelos de mercado obtenidos con la aplicación de ambos enfoques, se describen varios algoritmos de resolución basados en la teoría de los problemas de desigualdades variacionales, y se

presentan algunas de sus variantes cuando se consideran varios periodos temporales o cuando existen contratos de generación entre las empresas. Se describen las restricciones de explotación típicas de cualquier modelo de mercado a medio plazo, así como los parámetros de estas restricciones que son susceptibles de ser modelados mediante distribuciones de posibilidad. Como anexos del capítulo se incluyen las pruebas matemáticas requeridas para el análisis y resolución de los enfoques primal y dual, y necesarias para el estudio de las relaciones entre ambos enfoques.

El capítulo 6 ilustra con detalle el funcionamiento del enfoque primal aplicándolo a casos de estudio de tamaño reducido, y demuestra la viabilidad de su aplicación al análisis de casos de tamaño real. Se describen los datos utilizados así como las ventajas de los resultados obtenidos con el enfoque, cuando se compara con el enfoque determinista que considera el escenario con máximo grado de posibilidad.

Por último, la tesis incluye como anexo una revisión bibliográfica de los métodos de resolución de restricciones posibilistas. Este anexo describe las principales técnicas de resolución de las restricciones de explotación descritas en el capítulo 5, cuando existe información vaga e imprecisa acerca del modelado de las restricciones, o cuando alguno de sus parámetros es una distribución de posibilidad.

La siguiente figura esquematiza el contenido de los capítulos principales de la tesis. En ella se muestra la dependencia que tienen los desarrollos realizados en el capítulo 5 con los contenidos de los capítulos 3 y 4. Los anexos propios del capítulo 5 se muestran dentro de un cuadrado punteado que encierra también al propio capítulo.

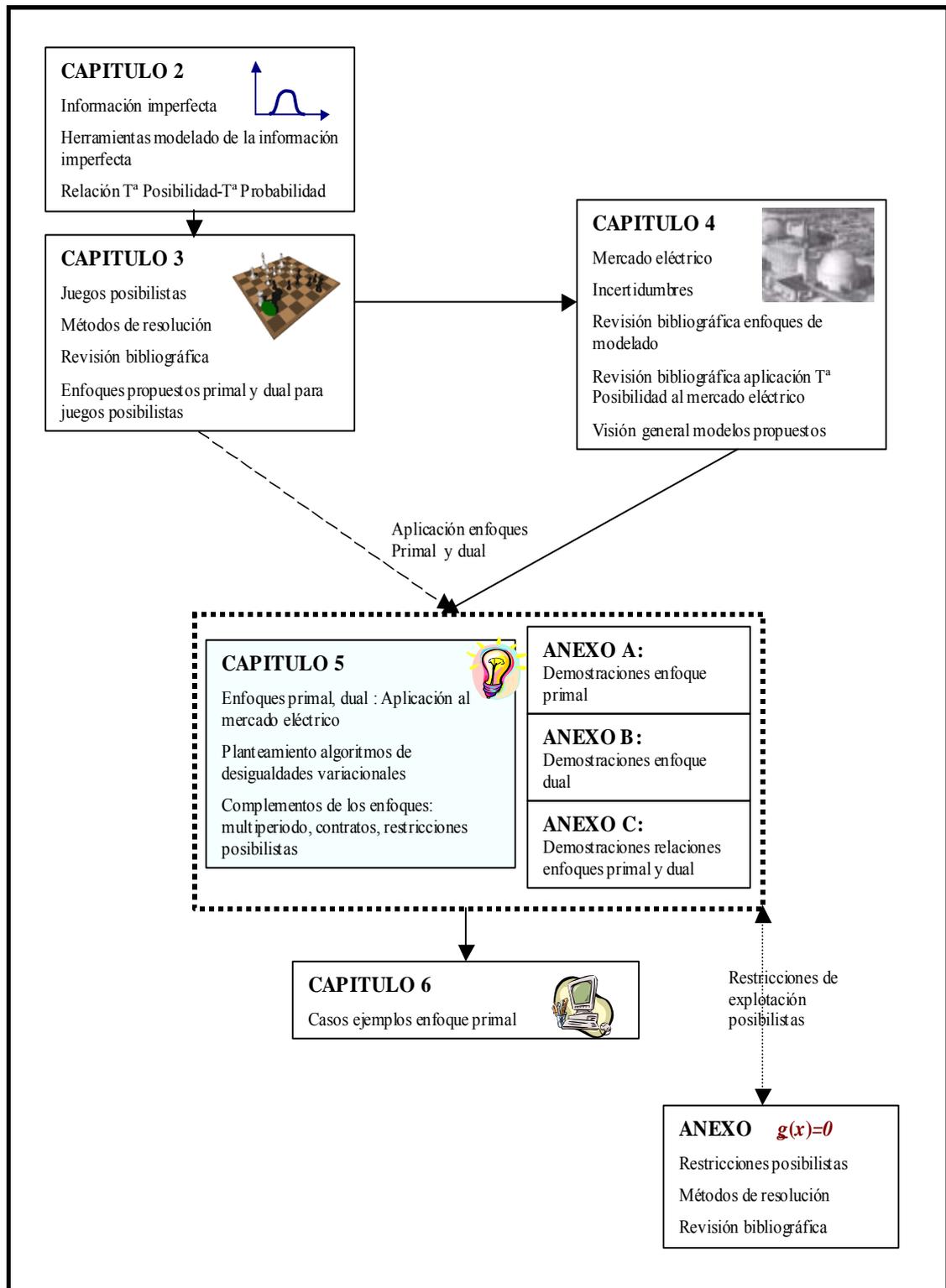


Figura 1. 1: Esquema de los capítulos de la tesis

## 1.4 Referencias

- [Nash, 1950] J. F. Nash, "Equilibrium Points in N-Person Games". *Proceedings of the National Academy of Sciences*, pp. 48-49, 1950.
- [Reneses, 2004] J. Reneses, "Análisis de la Operación de los Mercados de Generación de Energía Eléctrica a Medio Plazo," in *Organización Industrial*. Madrid: Pontificia Comillas, 2004.
- [Zadeh, 1965] L. A. Zadeh, "Fuzzy Sets". *Information and Control*, vol. 8, pp. 338-353, 1965.
- [Zadeh, 1978] L. A. Zadeh, "Fuzzy Sets as a Basis for a Theory of Possibility". *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 1, pp. 3-28, 1978.

## 2. La información imperfecta y su modelado

En la mayoría de los problemas reales de toma de decisiones, y en concreto en el problema de la operación y planificación de un sistema eléctrico, la información de que se dispone contiene en mayor o menor medida imperfecciones al no poder ser expresada de manera íntegra, exacta y cierta. Para un correcto modelado del problema parece entonces crucial aclarar con precisión los distintos tipos de imperfecciones así como las principales técnicas disponibles para su representación. Este capítulo es una introducción general a los tipos y técnicas de representación de la información imperfecta, centrándose, por su relevancia, en las técnicas probabilistas y posibilistas. Se pretende evidenciar que ambas técnicas modelan diferentes estados del conocimiento y que, por tanto, son técnicas que resultan ser complementarias en vez de competitivas.



## **2.1 Organización del capítulo**

Este capítulo se organiza en tres puntos fundamentales, e introduce las principales técnicas de representación de la información imperfecta que puede aparecer en cualquier problema de toma de decisiones. En concreto, dado el interés que tienen en esta tesis, este capítulo se centra en las herramientas derivadas de la teoría de la probabilidad y de la teoría de la posibilidad, así como en las interpretaciones de las medidas de probabilidad y posibilidad, y en las semejanzas y diferencias entre ellas.

En primer lugar se introduce el concepto de información imperfecta en un problema de toma de decisiones, y se describen y comparan sus características más destacadas, que se reducen principalmente a cuatro tipos de imperfecciones: la imprecisión, la vaguedad, la incertidumbre y también la erroneidad, aunque la influencia de este último aspecto no se considerará en el problema resuelto en esta tesis. Se muestran, además, ejemplos de estas imperfecciones en un mercado de electricidad, que es el contexto en el que se ha desarrollado esta tesis.

A continuación se repasan las principales técnicas de representación de la información imperfecta, mostrándose cuáles son más apropiadas para uno u otro tipo de imperfecciones. Se señalan algunas de las principales ventajas e inconvenientes que unas y otras presentan, y se describe más detalladamente el significado de probabilidad y posibilidad. Así mismo se indica cómo puede construirse una medida de posibilidad a partir de un conjunto borroso, y cómo puede hacerse a partir de una medida de evidencia que, como se verá en este capítulo, es un tipo de medida particularmente interesante al englobar como casos particulares a las medidas de probabilidad y de posibilidad.

Por último, se muestran los puntos comunes y antagónicos de las medidas de probabilidad y posibilidad, y se presentan las principales transformaciones matemáticas existentes entre ambas.

## 2.2 La información imperfecta

En la mayor parte de las ocasiones en las que se llevan a cabo procesos de toma de decisiones en el mundo real, la información de que se dispone es de algún modo imperfecta al no poder ser expresada de una manera precisa, cierta, completa y consistente. Así, la imperfección en la información debe ser entendida en su sentido más amplio en donde la imprecisión, la vaguedad, la incertidumbre y la erroneidad son los aspectos más significativos que la caracterizan (ver [Villar, 1997] y [Smets, 1997]).

La **imprecisión** se presenta por la ausencia de especificidad en la información. Por ejemplo, cuando se dice que “la potencia de un grupo está entre su mínimo técnico y su plena carga” se puede tener total certeza sobre la veracidad de la afirmación, pero resulta ser totalmente imprecisa y por lo tanto poco específica. Por el contrario, cuanto más precisa es una información, como cuando se afirma que “la potencia de un grupo es 101.23 Mw”, menor es la veracidad de la misma y mayor su concreción.

La presencia de parecidos parciales genera la existencia de grados de verdad parciales que dan lugar a la **vaguedad** en los conceptos. Usualmente la vaguedad aparece en afirmaciones de uso común en el lenguaje hablado, tanto en la vida cotidiana como en ambientes más técnicos o científicos (considerados generalmente más precisos). Por ejemplo, cuando se expresa que “deben parar los grupos arrancados cuya potencia esté aproximadamente entre 100 y 220 Mw” no se tiene completa certeza acerca de si un grupo que genere 95 Mw deberá o no parar, aunque sí se sabe que la pertenencia al conjunto de grupos que deben parar será mayor para un grupo que genere 98 Mw. En este ejemplo la vaguedad en la información se hace patente admitiendo diferentes grados de verdad parciales en la pertenencia de los grupos arrancados al conjunto de grupos que deben parar.

La **incertidumbre** concierne al estado de conocimiento acerca de la certeza de un suceso. Así, la certeza puede ser por ejemplo verdadera o falsa, pero el conocimiento puede no permitir decidir entre la veracidad o falsedad del suceso. Existen varias formas usualmente frecuentes de expresar la incertidumbre en el lenguaje hablado. Una muy habitual es considerar probabilidades (generalmente subjetivas), como cuando se afirma: “es probable que en la próxima hora el precio de la electricidad caiga”, o considerar posibilidades: “es posible que en la próxima hora el precio de la electricidad caiga”. En todas ellas hay diferencias semánticas importantes que dan lugar a distintas formas de entender la incertidumbre. Mientras que la primera refleja una certidumbre basada en que cuando el precio cae en una hora es frecuente que vuelva a caer en la hora siguiente, la segunda puede reflejar la inexistencia de impedimentos conocidos a que el precio caiga.

Por otro lado, no debe confundirse la incertidumbre de una información con los grados de verdad parciales. No es lo mismo decir que “el sistema eléctrico en una zona está indisponible con certidumbre 0.2” a que “el sistema eléctrico en una zona está indisponible con grado de certeza parcial 0.2”. En el primer caso, el sistema está o no indisponible en la zona, aunque es muy probable (o posible) que no lo esté ya que su grado de certidumbre es 0.2. En el segundo, se tiene la certidumbre de que la indisponibilidad parcial producirá ciertas molestias a los clientes que demandan electricidad en la zona (siendo el valor 0.2 interpretable por ejemplo como el grado de molestia), ya que el sistema está “ligeramente” indisponible (por ejemplo, por el fallo de algún transformador de la zona).

La **erroneidad** o **incoherencia** en la información se da cuando ésta es incompatible con el conocimiento disponible. Así por ejemplo, si se sabe con certeza que un grupo genera 100 *Mwh* de energía eléctrica, cualquier información que contraponga este hecho será errónea o incoherente. En concreto (ver [Smets, 1997]):

- Será **inexacta** cuando el error sea pequeño, como por ejemplo, cuando la información es que el grupo genera 101 *Mwh*.
- Será **inválida** cuando sea errónea y pueda conducir a conclusiones inaceptables, como por ejemplo cuando la información es que el grupo está en mantenimiento (información errónea si el grupo está arrancado), y esto produzca un decremento significativo en los beneficios previstos por la operación del grupo (conclusión que puede ser inaceptable para el generador dueño del grupo).
- Será **distorsionada** cuando sea inexacta e inválida.
- Será **predispuesta** cuando esté sujeta a un error sistemático y sin sentido, aspecto extremo de la erroneidad. En este caso el decisor suele descubrir el error de manera casi instantánea.

Por otro lado, cuando se combinan varias informaciones (no necesariamente conocidas a priori), éstas pueden ser contrapuestas entre sí, creándose un conflicto entre ellas que puede conducir a incoherencias en las conclusiones. La **inconsistencia** es un aspecto de la erroneidad en la información que procede de la incoherencia que resulta de varias informaciones en conflicto, como por ejemplo cuando se dice que un grupo genera constantemente 100 *Mwh* de energía eléctrica y su mínimo técnico es 110 *Mw* de potencia. Las conclusiones derivadas de las incoherencias pueden ser parcialmente aceptadas cuando las inconsistencias son eliminadas mediante pequeñas modificaciones en las informaciones en conflicto. Sin embargo, las conclusiones obtenidas pueden resultar confusas.

## 2.3 Técnicas de representación de la información imperfecta

Esta sección presenta una revisión general de las medidas que cuantifican la información imperfecta, y que han sido encontradas en la literatura revisada. En concreto, se describen las propiedades básicas de las medidas de Sugeno, de probabilidad, de cotas de probabilidad, de posibilidad, de necesidad, de evidencia, de especificidad, de disonancia y de confusión. Dado el interés en aplicar la teoría de la posibilidad al modelado de la información imperfecta en un mercado de compra y venta de electricidad, se describen más detalladamente las características particulares de las medidas de posibilidad, como aplicación de la teoría de conjuntos borrosos y como particularización de las medidas de evidencia. Para una visión más detallada de cada una de las medidas enumeradas puede consultarse [Klir, 1988] y [Smets, 1997].

Señalar que, en adelante, se agrupan los conceptos de imprecisión y vaguedad bajo el término único de imprecisión, para diferenciarlos de la incertidumbre, tal y como también hacen otros autores (véase por ejemplo [Prade, 1985] y [Buisson, 1985]).

### 2.3.1 La medida borrosa de Sugeno

En 1977 el profesor Sugeno (ver [Sugeno, 1977]) estableció los axiomas fundamentales que cualquier **medida de incertidumbre e imprecisión**, también llamadas **medidas borrosas de Sugeno** (no confundir con los conjuntos borrosos descritos en el apartado 2.3.4), debían satisfacer. Así, una medida  $g$  de incertidumbre e imprecisión es una función de conjunto definida sobre el conjunto  $\wp(\Omega)$  de todos los subconjuntos de un **espacio muestral** o **universo de discurso**  $\Omega$  (también existe una extensión  $\mathfrak{F}(\Omega)$  de  $\wp(\Omega)$  con todos los subconjuntos borrosos definidos sobre  $\Omega$ ) que satisface:

- $g: \wp(\Omega) \rightarrow [0,1]$ ,  $g(\Omega)=1$ ,  $g(\emptyset)=0$ . (2. 1)
- $\forall A_1, A_2 \in \wp(\Omega)$  con  $A_1 \subseteq A_2$  entonces  $g(A_1) \leq g(A_2)$ .

Estos axiomas imponen normalidad y monotonía para la inclusión sobre las medidas borrosas  $g$ .

Para garantizar la continuidad de la medida  $g$  en un universo de discurso  $\Omega$  infinito, es necesario la satisfacción del siguiente axioma, que establece que el límite de sucesiones monótonamente anidadas es intercambiable con la medida  $g$ :

$\forall$  sucesión  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \wp(\Omega)$  tal que  $A_i \subseteq A_j \quad \forall i < j$  se cumple:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(A_n) = g(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n) \quad (2.2)$$

Un ejemplo de medida borrosa es la medida que asigna el grado en que la demanda de electricidad pertenece a un determinado intervalo, siendo este grado tanto mayor cuanto mayor es la longitud de dicho intervalo.

Medidas borrosas de Sugeno son también las medidas de probabilidad, de posibilidad, de necesidad, de creencia y plausibilidad, que a continuación se describen.

### 2.3.2 Teoría de la probabilidad

La **teoría de la probabilidad** es una de las herramientas de modelado de la incertidumbre más antiguas en donde han dejado huella científicos de gran talla como Kolmogorov, Galileo, Fermat, Pascal, Bernoulli, Laplace, Gauss, Bayes, entre muchos otros. Se la considera la técnica de modelado de la incertidumbre con mayor uso en campos tan diversos como la investigación de operaciones, la economía, las finanzas, las comunicaciones, etc.

Las **medidas de probabilidad** son funciones de conjunto  $P: \wp(\Omega) \rightarrow [0,1]$  normalizadas sobre las partes  $\wp(\Omega)$  de un espacio muestral  $\Omega$ . La axiomática de Kolmogorov establece que estas medidas deben satisfacer los siguientes axiomas:

- $P(A) \geq 0 \quad \forall A \in \wp(\Omega)$  (2.3)
- $P(\Omega) = 1$
- (Axioma de aditividad):  $\forall$  sucesión  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \wp(\Omega)$  tal que  $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$  es:

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

A partir de estos axiomas se obtienen una serie de propiedades elementales comúnmente conocidas, algunas de las cuales son las siguientes:

1.  $P(\emptyset) = 0$ . (2.4)
2.  $P(A) = 1 - P(A^c) \quad \forall A \in \wp(\Omega)$ .
3.  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad \forall A, B \in \wp(\Omega)$ .
4.  $P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B) \quad \forall A, B \in \wp(\Omega)$  ( $P(A/B)$  probabilidad de  $A$  condicionada porque ocurre  $B$ ).
5.  $P(A) \leq P(B) \quad \forall A, B \in \wp(\Omega)$  con  $A \subseteq B$ .

Relacionada con la medida de probabilidad  $P$  se define la función de densidad de probabilidad  $p: \Omega \rightarrow [0, 1]$  tal que:

$$P(A) = \int_{x \in A} p(x) dx \quad \forall A \in \mathcal{G}(\Omega) \quad (2.5)$$

$$\int_{x \in \Omega} p(x) dx = 1, p(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega$$

siendo las anteriores, integrales de Stieltjes que son generalizaciones de las integrales de Riemann (ambos tipos de integrales quedan descritos en los libros básicos de integración).

Existen varias interpretaciones acerca del significado de la probabilidad de un suceso, cuatro de las cuales se describen a continuación.

### 2.3.2.1 Probabilidad clásica

La definición inicial de probabilidad, como sugirió el matemático Pierre Simon de Laplace (1749-1827) basándose en el **principio de razón insuficiente** (ver [Keynes, 1962]), asumía que los resultados admisibles de un suceso eran equiprobables. Así, la probabilidad de un evento se definía como el número de casos favorables del mismo entre el número de casos totales, y era especialmente indicada para ser aplicada en problemas simétricos, como los juegos de azar. Sin embargo, ante problemas no simétricos, o cuando no se sabe nada acerca de la ocurrencia de un suceso, esta interpretación es ciertamente discutible y peligrosa. Por ejemplo, cuando se ignora la disponibilidad o no de un grupo de generación (porque no se sepa si un posible fallo técnico ha sido reparado o por cualquier otro motivo), asignar una probabilidad idéntica a estar disponible como a estar indisponible puede no ser lo más adecuado.

### 2.3.2.2 Probabilidad como frecuencia relativa

La probabilidad de un suceso también puede ser interpretada como la convergencia límite de las frecuencias relativas de experimentos que evalúan la aparición del suceso entre un conjunto de sucesos admisibles. Estos experimentos deben ser independientes y repetitivos. Sin embargo, cuando por cualquier motivo no pueden ser llevados a cabo, la probabilidad se estima con la frecuencia relativa asociada a la aparición del suceso en la historia o a la aparición de sucesos similares. Por ejemplo, una manera de aproximarnos a la probabilidad de que un grupo esté indisponible es consultar el registro de indisponibilidades del grupo o el registro de indisponibilidades de grupos con características similares. Si en ese registro hay dos indisponibilidades de entre diez periodos en los que el grupo ha debido estar operativo, la frecuencia relativa  $2/10$  se parecerá a la probabilidad de la indisponibilidad del grupo. Claramente esta interpretación está estrechamente

relacionada con la noción de proporción y ha sido la interpretación más ampliamente aceptada. Sin embargo, su aplicación está sujeta a la existencia de un número de datos históricos suficientemente grande que permita dar por válidas las frecuencias relativas obtenidas.

### 2.3.2.3 Probabilidad subjetiva bayesiana

Para la escuela bayesiana, la probabilidad de que un evento ocurra es el grado personal (subjetivo, no frecuentista) de creencia de que ocurra, basado en la evidencia disponible. Esta evidencia puede presentarse en forma de frecuencia relativa de presentación de eventos pasados, o puede tratarse simplemente de una creencia meditada.

Afirmaciones del tipo "es muy probable que una empresa generadora de electricidad incremente su beneficio neto un 10% en los próximos 5 años", normales en el lenguaje común, no pueden cuantificarse formalmente, resultando ajenas a una metodología que se desenvuelva en un marco frecuentista. Una cuantificación sobre base subjetiva resulta, sin embargo, familiar y fecunda para el enfoque bayesiano. Al admitir un manejo subjetivo de la probabilidad, el decisor podrá emitir juicios de probabilidad sobre una hipótesis  $H$  y expresar por esa vía su grado de convicción al respecto, tanto antes como después de haber adquirido nueva evidencia  $E$ .

En su versión más elemental, el **teorema de Bayes o de la probabilidad inversa** permite calcular la probabilidad de la hipótesis  $H$  una vez incorporada la evidencia  $E$  de la forma siguiente:

$$P(H/E) = \frac{P(E/H) \cdot P(H)}{P(E)} \quad (2.6)$$

Así, la probabilidad a priori de una hipótesis,  $P(H)$ , se ve transformada en una probabilidad a posteriori,  $P(H/E)$ , una vez incorporada la evidencia  $E$ .

El caso considerado se circunscribe a la situación más simple, aquella en que  $P(H)$  representa un número. Sin embargo, si se consiguiera expresar nuestra convicción inicial (y nuestra incertidumbre) mediante una distribución de probabilidad, el teorema nos devuelve una nueva distribución, que no es otra cosa que la percepción probabilista original actualizada por la distribución de probabilidad a priori (ver [Berry, 1996]).

### 2.3.2.4 Probabilidad lógica o epistémica

La **teoría lógica de la probabilidad**, introducida por Keynes, Carnap y Popper (ver [Keynes, 1962], [Carnap, 1950] y [Popper, 1959]), tiene por objeto la erradicación de los componentes subjetivos de la probabilidad bayesiana, por lo que en ocasiones se la denomina **probabilidad objetiva bayesiana**.

Esta teoría asigna probabilidades lógicas  $P(H/E)$  a la hipótesis  $H$  soportada por una evidencia  $E$ , asumiendo que la hipótesis  $H$  es cierta o falsa (es decir, no considera grados de verdad parcial) y que la evidencia  $E$  es un hecho cuantificable objetivamente, y estableciendo  $P(H/E)$  según el conocimiento adquirido por la evidencia  $E$ . Un ejemplo sencillo es la evaluación de la probabilidad de la proposición hipotética  $H$  “un grupo hidráulico de un agente está indisponible” con la evidencia  $E$  de que “el 90% de los grupos hidráulicos son fiables”, asignando obviamente una probabilidad lógica  $P(H/E)$  de 0.9. En algunas ocasiones pueden considerarse además varias evidencias  $E$  para un mismo problema, que típicamente se cuantifican estimando una probabilidad bayesiana o usando el principio de razón insuficiente. Por supuesto, si la evidencia  $E$  es irrelevante para la hipótesis  $H$  no existe ninguna implicación parcial entre ellas y, por tanto, no puede ser asignada ninguna probabilidad lógica.

Este tipo de interpretación de probabilidad está sujeta a múltiples críticas (ver [Franklin, 2001]).

### 2.3.3 Modelos de cotas de probabilidad

En ocasiones, no es sencillo cuantificar la incertidumbre de manera precisa usando una única medida de probabilidad, y es necesario considerar un conjunto de medidas de probabilidad  $\Psi$  admisibles para el modelado de la incertidumbre (ver [Smith, 1961], [Smith, 1965], [Good, 1950], [Good, 1983] y [Walley, 1991])<sup>2</sup>.

En esta situación pueden entonces definirse **cotas de probabilidad** superior  $P^*$  e inferior  $P_*$  para cada evento, como sigue:

$$\begin{aligned} P^*(A) &= \text{Sup}\{P(A) / P \in \Psi\} \\ P_*(A) &= \text{Inf}\{P(A) / P \in \Psi\} \end{aligned} \quad (2.7)$$

<sup>2</sup>Por ejemplo, cuando se tienen varias funciones de densidad que ajustan un conjunto de datos estadísticos o cuando sólo se conoce que la probabilidad de cada subconjunto  $A$  en  $\mathcal{P}(\Omega)$  se encuentra en un intervalo (se puede probar que en este caso puede construirse un conjunto de medidas de cotas de probabilidad compatible con los intervalos de probabilidad disponibles, ver [Smets, 1987], [Fagin, 1991] y [Jaffray, 1992]).

Las cotas de probabilidad satisfacen  $P^*(A)=1-P_*(A)$  y pueden además ser actualizadas ante nueva información. Para ello no hay nada más que condicionar las medidas de probabilidad admisibles en  $\Psi$  por la nueva información usando el teorema de Bayes.

### 2.3.4 Los conjuntos borrosos y la teoría de la posibilidad

#### 2.3.4.1 Los conjuntos borrosos

La teoría de conjuntos borrosos, introducida por Lofti A. Zadeh en su publicación “Fuzzy Sets” (ver [Zadeh, 1965]), marcó un hito en el modelado de la información imperfecta y sirvió para incluir a la **teoría de conjuntos tradicional** como un caso particular de la **teoría de conjuntos borrosos**.

En un **conjunto clásico, ordinario** o **crisp** se asigna el grado  $\mu_A:\Omega\rightarrow\{0,1\}$  igual a 0 ó 1 para indicar la pertenencia o no de un elemento del conjunto universal  $\Omega$  a un conjunto  $A$ . Esta función es generalizada en la teoría de conjuntos borrosos, de forma que los valores asignados a los elementos se puedan encontrar en el intervalo  $[0,1]$ , es decir,  $\mu_A:\Omega\rightarrow[0,1]$ , indicando con ello un grado parcial de pertenencia de los elementos al conjunto en cuestión. La condición de pertenencia parcial implica que  $\mu_A$  no tiene porqué ser una función escalón sino que puede ser una curva (ver Figura 2. 1).

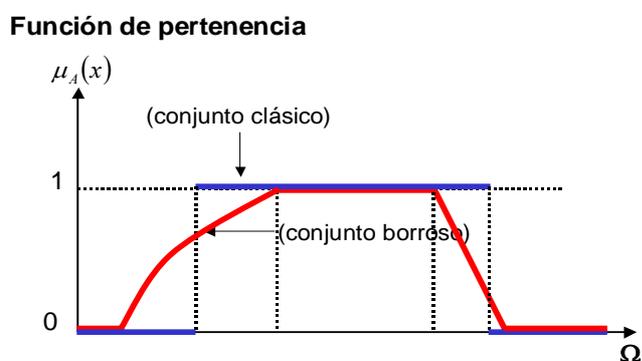


Figura 2. 1: Funciones de pertenencia de un conjunto clásico y borroso

A la función  $\mu_A:\Omega\rightarrow[0,1]$  se la denomina **función de pertenencia** o **función característica del conjunto borroso  $A$** .

En adelante, se denota a un conjunto borroso  $A$  como  $\underline{A}$  subrayando el nombre del conjunto. Los conjuntos clásicos serán, por tanto, todos aquellos que no aparezcan subrayados.

### - Conceptos básicos de los conjuntos borrosos

A continuación se muestran los conceptos básicos, comúnmente conocidos, de los conjuntos borrosos.

Un  $\alpha$ -corte de un conjunto borroso  $\underline{A}$  es el conjunto clásico  $A_\alpha$  obtenido de  $\underline{A}$  para cada  $\alpha \in [0,1]$  tal que:

$$A_\alpha = \{x \in \Omega / \mu_{\underline{A}}(x) \geq \alpha\} \quad (2.8)$$

Se puede observar que la familia de los  $\alpha$ -cortes es anidada, es decir,  $A_\alpha \subseteq A_\beta$  si  $\alpha \geq \beta$ .

Por otro lado, un  $\alpha$ -corte estricto de un conjunto borroso  $\underline{A}$  será aquel formado por todos los elementos de  $\Omega$  con grado de pertenencia a  $\underline{A}$  estrictamente mayor que  $\alpha$ .

El soporte de  $\underline{A}$  es el conjunto clásico  $]A[$  tal que:

$$]A[ = \{x \in \Omega / \mu_{\underline{A}}(x) > 0\} \quad (2.9)$$

Cuando el soporte de  $\underline{A}$  (0-corte estricto de  $\underline{A}$ ) está contenido en el conjunto de números reales positivos  $\mathcal{R}^+ = (0, +\infty)$  con  $\Omega \subseteq \mathcal{R}$  se dice que el conjunto borroso es **positivo**, y cuando está contenido en el de los números reales negativos se dice que es un **conjunto borroso negativo**.

El núcleo de  $\underline{A}$  es el conjunto clásico  $[A]$  tal que:

$$[A] = \{x \in \Omega / \mu_{\underline{A}}(x) = 1\} \quad (2.10)$$

La altura de  $\underline{A}$  es el máximo grado de pertenencia, siendo  $\underline{A}$  normal si su altura es 1. La normalización de un conjunto borroso  $\underline{A}$  siempre puede realizarse dividiendo la función de pertenencia  $\mu_{\underline{A}}$  por el máximo grado de pertenencia, lo que define un nuevo conjunto borroso denotado como  $\underline{A}^n$ , que tiene la siguiente función de pertenencia:

$$\mu_{\underline{A}^n}(x) = \frac{\mu_{\underline{A}}(x)}{\max_{x \in \Omega} \mu_{\underline{A}}(x)} \quad (2.11)$$

Un conjunto borroso es **convexo** si todos los  $\alpha$ -cortes son intervalos cerrados y anidados, esto es:

$$A_\alpha = [a_\alpha, b_\alpha]; A_\alpha \subseteq A_\beta, \alpha \geq \beta, \forall \alpha, \beta \in [0,1] \quad (2.12)$$

Un **número borroso** es un conjunto borroso normal, convexo y con función de pertenencia continua (véase Figura 2. 2).

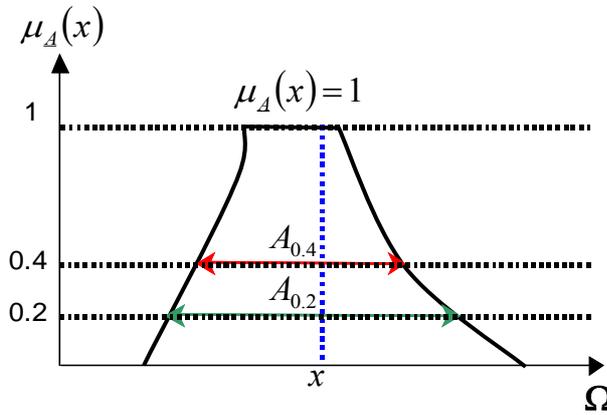


Figura 2. 2: Número borroso

Concretamente, en esta tesis se hará especial uso de los comúnmente conocidos **números borrosos LR** (esta notación viene de las siglas en inglés de *Left* y *Right*, ver [Dubois, 1980]), que pueden parametrizarse de dos formas diferentes:

- A través de los vértices  $a^1$ ,  $a^2$ ,  $a^3$  y  $a^4$  que definen el soporte y el núcleo del número (ver Figura 2. 3). En este caso, el número borroso se denota como  $\underline{A}=\{a^1, a^2, a^3, a^4\}_{LR}$  y tiene por función de pertenencia:

$$\mu_{\underline{A}}(x) = \begin{cases} L((a^2 - x)/(a^2 - a^1)), & x \leq a^2 \\ 1, & a^2 \leq x \leq a^3 \\ R((x - a^3)/(a^4 - a^3)), & a^3 \leq x \end{cases} \quad (2.13)$$

- O bien mediante los vértices del núcleo  $a^L=a^2$  y  $a^R=a^3$ , y las distancias o desviaciones  $\alpha a^L$  y  $\alpha a^R$  de éstos a los vértices del soporte  $a^1$  y  $a^4$  (es decir  $\alpha a^L = a^2 - a^1$  y  $\alpha a^R = a^4 - a^3$ , ver Figura 2. 3). El número borroso se denota, en este caso, como  $\underline{A}=(a^L, a^R, \alpha a^L, \alpha a^R)_{LR}$  y tiene por función de pertenencia la siguiente:

$$\mu_{\underline{A}}(x) = \begin{cases} L((a^L - x)/\alpha a^L), & x \leq a^L \\ 1, & a^L \leq x \leq a^R \\ R((x - a^R)/\alpha a^R), & a^R \leq x \end{cases} \quad (2.14)$$

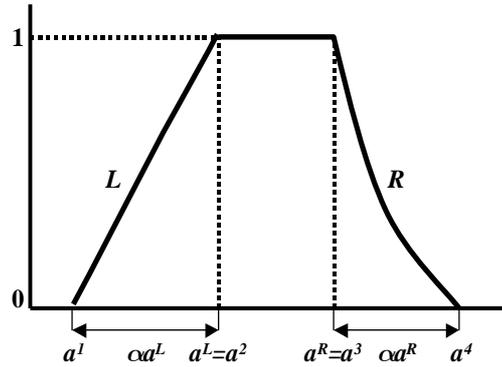


Figura 2. 3: Función de pertenencia LR

Las funciones  $L: \mathfrak{R} \rightarrow [0,1]$  y  $R: \mathfrak{R} \rightarrow [0,1]$ , denominadas en esta tesis **funciones de referencia**, son aplicaciones definidas sobre el conjunto de números reales  $\mathfrak{R} = (-\infty, +\infty)$ , continuas, diferenciables, y estrictamente decrecientes en  $(0,1)$  y tales que  $L(s)=R(s)=1$  para  $s \leq 0$  y  $L(s)=R(s)=0$  para  $s \geq 1$ .

Algunos ejemplos de funciones  $L$  y  $R$  son  $L(x) = \max(0, 1 - |x|^p)$  y  $R(x) = 1 / (1 + |x|^p)$  con  $p > 1$ . Cuando  $L(s) = R(s) = 1 - s$  para  $s \in [0,1]$ , es decir, cuando  $L$  y  $R$  son funciones lineales, entonces se obtienen los denominados **números borrosos trapezoidales**, que además son **números borrosos triangulares** si el vértice  $a^L$  es igual al vértice  $a^R$ .

Usando la parametrización  $\underline{A} = (a^L, a^R, \alpha a^L, \alpha a^R)_{LR}$  los  $\alpha$ -cortes de los números borrosos LR son los siguientes:

$$A_\alpha = [a^L - L^{-1}(\alpha) \cdot \alpha a^L, a^R + R^{-1}(\alpha) \cdot \alpha a^R] \quad \forall \alpha \in [0,1] \quad (2.15)$$

siendo las funciones inversas de  $L$  y  $R$  las siguientes:

$$L^{-1}(\alpha) = \text{Min}\{x \in \mathfrak{R} : L(x) = \alpha\}; \quad R^{-1}(\alpha) = \text{Max}\{x \in \mathfrak{R} : R(x) = \alpha\} \quad (2.16)$$

Los números borrosos LR tales que  $a^L = a^R$  y  $\alpha a^L = \alpha a^R = 0$  son **números clásicos, ordinarios** o **crisp**.

#### - Operaciones con conjuntos borrosos: negación, T-conormas y T-normas

El **complemento de un conjunto borroso**  $\underline{A}$ , denotado como  $\underline{A}^c$ , se calcula habitualmente con una función  $N: [0,1] \rightarrow [0,1]$  llamada **negación** que asigna un valor  $\mu_{\underline{A}^c}(x) = N(\mu_{\underline{A}}(x))$  a cada grado de pertenencia  $\mu_{\underline{A}}(x)$ . Este valor se interpreta como el grado de pertenencia del elemento  $x$  al conjunto borroso  $\underline{A}^c$  que representa la

negación del concepto representado por  $\underline{A}$ . Para que una función  $N$  sea considerada operador de negación debe satisfacer los dos siguientes axiomas:

- $N(0)=1$  y  $N(1)=0$  (2. 17)
- $N(x)$  no decreciente con  $x$

El operador de negación más común en la teoría de conjuntos borrosos es  $N(x)=1-x$ .

La función de pertenencia de la **unión de dos conjuntos borrosos  $\underline{A}$  y  $\underline{B}$**  se calcula con una función  $C:[0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$  llamada **conorma triangular** o  **$T$ -conorma** que asigna el grado  $\mu_{\underline{A} \cup \underline{B}}(x)=C(\mu_{\underline{A}}(x), \mu_{\underline{B}}(x))$  de pertenencia del elemento  $x$  a la unión de los conjuntos borrosos  $\underline{A}$  y  $\underline{B}$ . Para que una función  $C$  sea considerada un operador de unión borrosa o  $T$ -conorma debe satisfacer, al menos, los cuatro siguientes axiomas:

- $C(0,0)=1$ ,  $C(0,1)=C(1,0)=C(1,1)=1$ , es decir,  $C$  debe comportarse (2. 18) como la unión clásica para conjuntos ordinarios.
- $C(x,y)=C(y,x)$ , es decir,  $C$  debe cumplir la propiedad conmutativa.
- $C(x,y)$  debe ser monótona no decreciente en  $x$  e  $y$ .
- $C(x,C(y,z))=C(C(x,y),z)$ , es decir,  $C$  debe cumplir la propiedad asociativa.

La  $T$ -conorma más utilizada es  $C(x,y)=Max(x,y)$ . Otras  $T$ -conormas son la de Lukasiewicz  $C(x,y)=Min(1,x+y)$  y la probabilística o producto  $C(x,y)=x+y-x \cdot y$ .

De igual modo, la **intersección de dos conjuntos borrosos  $\underline{A}$  y  $\underline{B}$**  se calcula con una función  $T:[0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$  llamada **norma triangular** o  **$T$ -norma** que asigna el grado  $\mu_{\underline{A} \cap \underline{B}}(x)=T(\mu_{\underline{A}}(x), \mu_{\underline{B}}(x))$  de pertenencia del elemento  $x$  a la intersección de los conjuntos borrosos  $\underline{A}$  y  $\underline{B}$ . En este caso, para que una función  $T$  sea considerada un operador de intersección borrosa o  $T$ -norma debe satisfacer los cuatro siguientes axiomas:

- $T(1,1)=1$ ,  $T(0,1)=T(1,0)=T(0,0)=1$ , es decir,  $T$  debe comportarse (2. 19) como la intersección clásica para conjuntos ordinarios.
- $T(x,y)=T(y,x)$ , es decir,  $T$  debe cumplir la propiedad conmutativa.
- $T(x,y)$  debe ser monótona no decreciente en  $x$  e  $y$ .
- $T(x,T(y,z))=T(T(x,y),z)$ , es decir,  $T$  debe cumplir la propiedad asociativa.

La  $T$ -norma más utilizada es  $T(x,y)=Min(x,y)$ , aunque existen otras como la  $T$ -norma de Lukasiewicz  $T(x,y)=Max(0,x+y-1)$  y la probabilística o producto  $T(x,y)=x \cdot y$ .

Una revisión más exhaustiva de las operaciones con conjuntos borrosos se puede ver en [Villar, 1997].

### - Inclusión de conjuntos borrosos

Se dice que un **conjunto borroso  $\underline{A}$  está incluido en otro conjunto borroso  $\underline{B}$**  cuando se cumple la siguiente desigualdad para cada punto en el conjunto universal  $\Omega$ :

$$\mu_{\underline{A}}(x) \leq \mu_{\underline{B}}(x) \quad \forall x \in \Omega \quad (2.20)$$

La anterior definición implica la veracidad de la inclusión  $\underline{A} \subseteq \underline{B}$  como cierta o falsa, no admitiendo grados parciales (la desigualdad se cumple o no para todos los valores de  $x$ ). Una relajación usual que admite grados de veracidad parciales se obtiene reemplazando el predicado booleano anterior por un grado de inclusión de  $\underline{A}$  en  $\underline{B}$  denotado por  $\mu_{\underline{A} \subseteq \underline{B}}(x)$  para cada punto del conjunto universal, que puede quedar definido a partir de una  $T$ -norma  $T$  tal y como se muestra a continuación:

$$\mu_{\underline{A} \subseteq \underline{B}}(x) = \text{Sup}\{y \in [0,1] : T(\mu_{\underline{A}}(x), y) \leq \mu_{\underline{B}}(x)\} \quad (2.21)$$

En el marco de la lógica borrosa, este grado de veracidad puede también modelarse con el **grado de implicación  $\underline{A} \rightarrow \underline{B}$  o de implicación  $\underline{B}^c \rightarrow \underline{A}^c$** , obtenido cuando se emplea un **operador  $\phi$  de implicación** (ver [Villar, 1997]). En general, el grado de certeza  $\mu_{\underline{A} \subseteq \underline{B}}(x)$  para cada valor  $x$  del universo de discurso puede quedar definido por una función  $f$  de las implicaciones  $\underline{A} \rightarrow \underline{B}$  y  $\underline{B}^c \rightarrow \underline{A}^c$  (función que puede ser la media ponderada):

$$\mu_{\underline{A} \subseteq \underline{B}}(x) = f(\phi(\mu_{\underline{A}}(x), \mu_{\underline{B}}(x)), \phi(\mu_{\underline{B}^c}(x), \mu_{\underline{A}^c}(x))) \quad x \in \Omega \quad (2.22)$$

En esta situación una forma de agregar todos los valores  $x$  del universo de discurso  $\Omega$  puede dar lugar a índices de inclusión optimistas, pesimistas o indiferentes:

$$\begin{aligned} (\underline{A} \subseteq \underline{B})_{opt} &= \text{Sup}_{x \in \Omega} \mu_{\underline{A} \subseteq \underline{B}}(x) \\ (\underline{A} \subseteq \underline{B})_{pes} &= \text{Inf}_{x \in \Omega} \mu_{\underline{A} \subseteq \underline{B}}(x) \\ (\underline{A} \subseteq \underline{B})_{med} &= \int_{x \in \Omega} \frac{\mu_{\underline{A} \subseteq \underline{B}}(x)}{|\Omega|} \cdot dx \end{aligned} \quad (2.23)$$

siendo  $|\Omega|$  el cardinal del universo de discurso, tal y como a continuación se define para los conjuntos borrosos, que generalizan a los conjuntos crisp.

Otro de los **índices de inclusión**  $I(\underline{A}, \underline{B})$  de  $\underline{A}$  sobre  $\underline{B}$  es el que se define en [Dubois, 1982b] en donde se utiliza la definición de **cardinalidad de un conjunto borroso**  $\underline{A}$ , que es la suma (integral en el caso continuo) de la función de pertenencia, denotada como  $|\underline{A}|$ . El índice de inclusión se define como sigue<sup>3</sup>:

$$I(\underline{A}, \underline{B}) = \frac{|\underline{A} \cap \underline{B}|}{|\underline{B}|} \quad (2.24)$$

Por supuesto, una definición para la igualdad entre dos conjuntos borrosos puede establecerse sabiendo que la igualdad es cierta si y sólo si cada conjunto borroso está contenido en el conjunto borroso restante, y utilizando una  $T$ -norma para representar la intersección de la doble inclusión entre conjuntos.

### - El principio de extensión

Las operaciones anteriores entre conjuntos borrosos eran generalizaciones de las operaciones usuales entre conjuntos clásicos. El **principio de extensión de Zadeh** es sin embargo un procedimiento que permite extender una función  $F: \Omega_1 \times \dots \times \Omega_n \rightarrow Y$  para el caso en que sus argumentos sean conjuntos borrosos  $\underline{F}: \mathfrak{F}(\Omega_1) \times \dots \times \mathfrak{F}(\Omega_n) \rightarrow \mathfrak{F}(Y)$ , siendo  $\mathfrak{F}(\Omega_i)$  y  $\mathfrak{F}(Y)$  las familias de todos los conjuntos borrosos que pueden definirse sobre los universos  $\Omega_i$ ,  $Y \subseteq \mathcal{R}$  respectivamente (también denominadas partes borrosas de  $\Omega_i$  e  $Y$ ).

Así, el conjunto borroso imagen  $\underline{B}$  por  $\underline{F}$  de la  $n$ -upla borrosa  $(\underline{A}_1, \dots, \underline{A}_n) \in \mathfrak{F}(\Omega_1) \times \dots \times \mathfrak{F}(\Omega_n)$ , esto es  $\underline{B} = \underline{F}(\underline{A}_1, \dots, \underline{A}_n)$ , tiene la siguiente función de pertenencia:

$$\mu_{\underline{B}}(b) = \begin{cases} \text{Sup}\{T(\mu_{\underline{A}_1}(a_1), \dots, \mu_{\underline{A}_n}(a_n)) / b = F(a_1, \dots, a_n)\} & \text{si } F^{-1}(b) \neq \emptyset \\ 0 & \text{si } F^{-1}(b) = \emptyset \end{cases} \quad (2.25)$$

siendo  $T$  cualquier  $T$ -norma aplicada sobre los grados de pertenencia de los elementos  $a_i$  a los conjuntos borrosos  $\underline{A}_i$  para  $i=1, \dots, n$ , representando el grado de posibilidad conjunto de la  $n$ -upla crisp  $(a_1, \dots, a_n)$  a la  $n$ -upla borrosa  $(\underline{A}_1, \dots, \underline{A}_n)$ .

El principio de extensión puede entenderse como la expresión matemática de “existe al menos un conjunto de valores  $(a_1, \dots, a_n)$  de  $(\underline{A}_1, \dots, \underline{A}_n)$  con grado de pertenencia conjunto  $T(\mu_{\underline{A}_1}(a_1), \dots, \mu_{\underline{A}_n}(a_n))$  a  $\underline{B}$ , tal que  $b$  es función de  $(a_1, \dots, a_n)$  según  $F$ , es decir  $b = F(a_1, \dots, a_n)$ ” (ver [Villar, 1997]).

<sup>3</sup>Como puede comprobarse el grado en que un subconjunto  $A$  esta incluido en el conjunto universal  $\Omega$  coincide con la probabilidad de  $A$  si se atiende a la definición clásica de probabilidad.

La  $T$ -norma usual que suele utilizarse en el principio de extensión cuando no se tiene información adicional sobre la relación entre los conjuntos de entrada  $(\underline{A}_1, \dots, \underline{A}_n)$  es la  $T$ -norma mínimo, dado que es la menos específica (ver [Dubois, 1991]).

Nótese que todas las extensiones obtenidas de acuerdo al principio de extensión requieren resolver un problema de programación matemática para cada elemento  $b$  del universo  $Y$ , en donde la función objetivo depende del operador  $T$ -norma elegido y de las funciones de pertenencia de  $(\underline{A}_1, \dots, \underline{A}_n)$ , y las restricciones son las resultantes de la función  $F$  a extender. En numerosas ocasiones este problema resulta extremadamente difícil de resolver, y su complejidad aumenta con la cardinalidad de  $Y$ , así como con la complejidad del operador  $T$ -norma usado, de las funciones de pertenencia de  $(\underline{A}_1, \dots, \underline{A}_n)$  y de la función  $F$ .

Sin embargo, en ocasiones cuando no es posible evaluar una relación funcional entre conjuntos borrosos mediante técnicas de programación u operando directamente sus funciones de pertenencia, sí es posible hacerlo con sus  $\alpha$ -cortes. En este sentido, en [Nguyen, 1978] se demuestra que los  $\alpha$ -cortes  $B_\alpha$  del conjunto borroso de salida  $\underline{B}$  pueden hallarse con los  $\alpha$ -cortes  $(A_{1\alpha}, \dots, A_{n\alpha})$  de los conjuntos de entrada  $(\underline{A}_1, \dots, \underline{A}_n)$  siendo:

$$B_\alpha = f_F(A_{1\alpha}, \dots, A_{n\alpha}) \quad (2.26)$$

en donde  $f_F: \wp(\Omega_1) \times \dots \times \wp(\Omega_n) \rightarrow \wp(Y)$  es la función definida como  $f_F(A) = \{F(x) : x \in A\}$ , que generaliza  $F$  a subconjuntos ordinarios de  $\Omega_i$ . La única condición exigida para que (2.26) se cumpla es que el supremo definido en (2.25) sea alcanzable para cada valor de  $b$  en  $Y$ .

#### - Operaciones con números borrosos LR

El principio de extensión permite la generalización de las operaciones aritméticas de números reales a los números borrosos LR, resultando ser, para algunas de las operaciones más sencillas, **operaciones cerradas** en el conjunto de números borrosos LR (es decir, operaciones que dan como resultado números borrosos LR, ver para más detalle [Dubois, 1980]).

Así, la **suma de dos números borrosos LR**  $\underline{A} = \{a^1, a^2, a^3, a^4\}_{LR}$  y  $\underline{B} = \{b^1, b^2, b^3, b^4\}_{LR}$  es cerrada y da como resultado el siguiente número borroso LR:

$$\underline{A} + \underline{B} = \{a^1 + b^1, a^2 + b^2, a^3 + b^3, a^4 + b^4\}_{LR} \quad (2.27)$$

Esto se debe a que la suma de los  $\alpha$ -cortes de  $\underline{A}$  y  $\underline{B}$  coincide con el  $\alpha$ -corte de  $\underline{C} = \{a^1 + b^1, a^2 + b^2, a^3 + b^3, a^4 + b^4\}_{LR}$ , es decir:

$$A_\alpha + B_\alpha = C_\alpha \quad (2.28)$$

En general, para funciones  $L$  y  $R$  diferentes para  $\underline{A}$  y para  $\underline{B}$  se tiene:

$$\{a^1, a^2, a^3, a^4\}_{LR} + \{b^1, b^2, b^3, b^4\}_{LR} = \{a^2 + b^2 - 1, a^2 + b^2, a^3 + b^3, a^3 + b^3 + 1\}_{L^*R^*} \quad (2.29)$$

donde:

$$L^* = ((a^2 - a^1) \cdot L^{-1} + (b^2 - b^1) \cdot L^{-1})^{-1}, \quad R^* = ((a^4 - a^3) \cdot L^{-1} + (b^4 - b^3) \cdot L^{-1})^{-1} \quad (2.30)$$

De igual forma se puede probar que **la diferencia de dos números borrosos LR  $\underline{A}$  y  $\underline{B}$ , y la multiplicación por un número real  $x \in \mathcal{R}$**  son también cerradas, resultando:

$$\begin{aligned} \underline{A} - \underline{B} &= \{a^1 - b^4, a^2 - b^3, a^3 - b^2, a^4 - b^1\}_{LR} & (2.31) \\ x \cdot \underline{A} &= \{x \cdot a^1, x \cdot a^2, x \cdot a^3, x \cdot a^4\}_{LR} \quad \text{si } x \geq 0 \\ x \cdot \underline{A} &= \{-x \cdot a^4, -x \cdot a^3, -x \cdot a^2, -x \cdot a^1\}_{RL} \quad \text{si } x < 0 \end{aligned}$$

Sin embargo, **la multiplicación y división de dos números borrosos LR  $\underline{A}$  y  $\underline{B}$**  no son operaciones cerradas porque realizadas sobre los  $\alpha$ -cortes de  $\underline{A}$  y  $\underline{B}$  no dan como resultado  $\alpha$ -cortes de números LR. Así, por ejemplo, el  $\alpha$ -corte resultado de la multiplicación de los  $\alpha$ -cortes de dos números borrosos LR  $\underline{A}$  y  $\underline{B}$  positivos resulta ser:

$$\left[ a^2 \cdot b^2 - L^{-1}(\alpha) \cdot (a^2 \cdot (b^2 - b^1) + b^2 \cdot (a^2 - a^1)) + (L^{-1}(\alpha))^2 \cdot (b^2 - b^1) \cdot (a^2 - a^1), \right. \\ \left. a^3 \cdot b^3 + R^{-1}(\alpha) \cdot (a^3 \cdot (b^4 - b^3) + b^3 \cdot (a^4 - a^3)) + (R^{-1}(\alpha))^2 \cdot (b^4 - b^3) \cdot (a^4 - a^3) \right] \quad (2.32)$$

Que no corresponde con ningún  $\alpha$ -corte de ningún número LR. Sin embargo, para  $\alpha=0$  y  $\alpha=1$  estos  $\alpha$ -cortes coinciden con los  $\alpha$ -cortes del siguiente número borroso LR:

$$\{a^1 \cdot b^1, a^2 \cdot b^2, a^3 \cdot b^3, a^4 \cdot b^4\}_{LR} \quad (2.33)$$

Por ello, la multiplicación de los números borrosos positivos  $\underline{A}$  y  $\underline{B}$  se aproxima frecuentemente por el anterior número borroso LR. Además, de igual forma a como se hace en [Kaufmann, 1988] para números borrosos triangulares, se puede obtener la máxima divergencia de esta aproximación sin más que calcular la máxima diferencia entre los extremos del  $\alpha$ -corte aproximado y los del  $\alpha$ -corte exacto (en la práctica la máxima divergencia no suele ser un factor relevante en los resultados del problema que se pretenda resolver).

Este mismo método de aproximación puede aplicarse para calcular el producto y la división entre cualesquiera números borrosos  $LR$  positivos o negativos, obteniéndose los siguientes números borrosos aproximados:

$\underline{A}$  y  $\underline{B}$  positivos

$$\begin{aligned} \underline{A} \cdot \underline{B} &\cong \{a^1 \cdot b^1, a^2 \cdot b^2, a^3 \cdot b^3, a^4 \cdot b^4\}_{LR} \\ \underline{A} / \underline{B} &\cong \{a^1 / b^4, a^2 / b^3, a^3 / b^2, a^4 / b^1\}_{LR} \quad 0 \notin \underline{B} \end{aligned} \quad (2.34)$$

$\underline{A}$  positivo y  $\underline{B}$  negativo

$$\begin{aligned} \underline{A} \cdot \underline{B} &\cong \{a^4 \cdot b^1, a^3 \cdot b^2, a^2 \cdot b^3, a^1 \cdot b^4\}_{LR} \\ \underline{A} / \underline{B} &\cong \{a^4 / b^4, a^3 / b^3, a^2 / b^2, a^1 / b^1\}_{LR} \quad 0 \notin \underline{B} \end{aligned} \quad (2.35)$$

$\underline{A}$  negativo y  $\underline{B}$  positivo

$$\begin{aligned} \underline{A} \cdot \underline{B} &\cong \{a^1 \cdot b^4, a^2 \cdot b^3, a^3 \cdot b^2, a^4 \cdot b^1\}_{LR} \\ \underline{A} / \underline{B} &\cong \{a^1 / b^1, a^2 / b^2, a^3 / b^3, a^4 / b^4\}_{LR} \quad 0 \notin \underline{B} \end{aligned} \quad (2.36)$$

$\underline{A}$  y  $\underline{B}$  negativos

$$\begin{aligned} \underline{A} \cdot \underline{B} &\cong \{a^4 \cdot b^4, a^3 \cdot b^3, a^2 \cdot b^2, a^1 \cdot b^1\}_{LR} \\ \underline{A} / \underline{B} &\cong \{a^4 / b^1, a^3 / b^2, a^2 / b^3, a^1 / b^4\}_{LR} \quad 0 \notin \underline{B} \end{aligned} \quad (2.37)$$

#### - Comparación de conjuntos borrosos

En muchos problemas reales de toma de decisiones una de las tareas más importantes y a la vez más complejas de definir es la **comparación de conjuntos borrosos** (por ejemplo, al comparar dos costes borrosos correspondientes a dos decisiones distintas). A continuación se muestran algunos enfoques para la comparación de dos conjuntos borrosos  $\underline{A}$  y  $\underline{B}$ . Para una revisión más extensa de los mismos puede consultarse [Chang, 1994] y [Lazzari, 2003], así como el anexo de esta tesis en donde se describen distintos enfoques de comparación para resolver las restricciones de explotación de un sistema eléctrico en donde los parámetros o las decisiones pueden ser números borrosos  $LR$ . Además, tal y como se verá en el siguiente capítulo, los enfoques primal y dual propuestos en esta tesis definen dos criterios de comparación de números borrosos  $LR$  que han sido aplicados para comparar los beneficios que obtienen los generadores en un mercado de electricidad.

En [Yager, 1980] y [Yager, 1981] se ordenan los conjuntos borrosos  $\underline{A}$  y  $\underline{B}$  según la ordenación resultante de los valores reales de una función real sobre cada conjunto

borroso. Por ejemplo, dos de las funciones reales utilizadas cuando los conjuntos borrosos tienen soporte  $[0,1]$  son:

$$g_1(C) = \frac{\int_0^1 h(x) \cdot \mu_C(x) \cdot dx}{\int_0^1 \mu_C(x) \cdot dx}; \quad g_2(C) = \int_0^1 M(C_\alpha) \cdot dx \quad (2.38)$$

siendo  $h(x)$  una función que mide la importancia del valor de  $x$  en el intervalo  $[0,1]$  y  $M(C_\alpha)$  el valor medio de los elementos del  $\alpha$ -corte  $C_\alpha$ . Cuando  $h(x)=x$  la función  $g_1$  representa el denominado **centro de gravedad del conjunto borroso**.

Otro criterio para conocer en qué grado es  $A$  igual a  $B$  se puede definir a través del cálculo de la distancia entre las correspondientes funciones de pertenencia (ver [Pedrycz, 1993]). Por ejemplo, puede considerarse la familia de distancias  $L^p$  que contiene a la distancia euclídea (cuando  $p=2$ ):

$$d(A,B) = \left( \int |\mu_A(x) - \mu_B(x)|^p dx \right)^{1/p} \quad (2.39)$$

Este enfoque tiene una interpretación más clara en el ámbito de aplicación del análisis matemático más que en el de los conjuntos borrosos, ya que considera a las funciones de pertenencia como cualquier otro tipo de funciones sin importar si modelan o no un grado parcial de pertenencia a un conjunto.

### - Relaciones borrosas

El concepto de **relación borrosa** se introduce en [Zadeh, 1965] como una generalización de las relaciones clásicas. Tratan de modelar interacciones o interconexiones entre elementos de dos o más conjuntos clásicos permitiendo grados intermedios entre la total relación y la total desvinculación. Así como un conjunto clásico puede considerarse un caso particular de un conjunto borroso, la relación clásica, también denominada crisp, puede considerarse un caso particular de una relación borrosa.

Formalmente, una relación borrosa  $R$  es un conjunto borroso caracterizado por su función de pertenencia  $\mu_R(x_1, \dots, x_n)$  definida en el producto cartesiano de conjuntos universales  $\Omega_1 \times \dots \times \Omega_n$  que expresa, para cada valor de  $(x_1, \dots, x_n)$  en  $\Omega_1 \times \dots \times \Omega_n$ , el grado en que sus componentes están relacionados según  $R$ .

$$\mu_R(x_1, \dots, x_n) = \alpha \Leftrightarrow (x_1, \dots, x_n) \in R \text{ en grado } \alpha, \text{ siendo } \alpha \in [0,1] \quad (2.40)$$

Un ejemplo de relación borrosa en el contexto de esta tesis podría ser la relación entre la cantidad de demanda eléctrica y el precio de la electricidad demandado.

La **relación inversa**  $\underline{R}^{-1}$  de una relación borrosa binaria  $\underline{R}:\Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow [0,1]$  se define como la relación borrosa binaria que tiene la siguiente función de pertenencia  $\mu_{\underline{R}^{-1}}(x_1, x_2)$ :

$$\mu_{\underline{R}^{-1}}(x_1, x_2) = \mu_{\underline{R}}(x_2, x_1) \quad (2.41)$$

Dadas dos relaciones borrosas binarias  $\underline{R}:\Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow [0,1]$  y  $\underline{S}:\Omega_2 \times \Omega_3 \rightarrow [0,1]$ , se llama **composición** de  $\underline{R}$  y  $\underline{S}$ , y se denota por  $\underline{S} \circ \underline{R}$  a la relación borrosa binaria definida sobre  $\Omega_1 \times \Omega_3$  cuya función de pertenencia con la  $T$ -norma  $T$  es:

$$\mu_{\underline{S} \circ \underline{R}}(x_1, x_3) = \sup_{x_2 \in \Omega_2} T(\mu_{\underline{R}}(x_1, x_2), \mu_{\underline{S}}(x_2, x_3)) \quad (2.42)$$

Esta definición es la expresión matemática de “ $(x_1, x_3) \in \underline{S} \circ \underline{R}$  si y sólo si existe al menos un  $x_2 \in \Omega_2$  tal que  $(x_1, x_2) \in \underline{R}$  y  $(x_2, x_3) \in \underline{S}$ ”.

Se puede probar que la combinación de relaciones borrosas no es conmutativa pero sí asociativa. Además, la inversa de la composición de relaciones borrosas es la composición de las inversas, esto es:

$$(\underline{S} \circ \underline{R})^{-1} = \underline{R}^{-1} \circ \underline{S}^{-1} \quad (2.43)$$

### 2.3.4.2 La teoría de la posibilidad como aplicación de la teoría de los conjuntos borrosos

La teoría de la posibilidad es una aplicación importante de la teoría de conjuntos borrosos que fue introducida por Zadeh en 1978 (ver [Zadeh, 1978]), y que permite modelar la imprecisión y la incertidumbre en la información en un mismo marco teórico.

Cuando un conjunto borroso  $\underline{P}$  con función de pertenencia  $\mu_{\underline{P}}$  se usa para representar lo que se conoce sobre los valores de una variable  $U$ , como por ejemplo cuando los valores se expresan mediante un predicado ambiguo “ $U$  es  $\underline{P}$ ”, el grado de pertenencia a  $\underline{P}$  de cada valor  $U=u$ , o de compatibilidad de  $u$  con  $\underline{P}$ , es el grado de posibilidad de que el verdadero valor de la variable  $U$  sea  $u$ . Así, el conjunto borroso puede interpretarse como una **distribución de posibilidad**  $\pi_{\underline{P}}:\Omega \rightarrow [0,1]$  entendida como una función que establece preferencias en el conjunto de los valores de la variable  $U$ , a través del conocimiento que se tiene de lo admisible, factible, creíble, posible, etc., sobre la ocurrencia de dichos valores.

Por ejemplo, si  $\mu_P(x)$  cuantifica la pertenencia de la demanda eléctrica  $x$  al conjunto de “demandas altas” y  $\pi_P(x)$  cuantifica la posibilidad de que la demanda eléctrica sea  $x$  sabiendo que la demanda pertenece al conjunto de “demandas altas”, el principio de Zadeh postula la siguiente igualdad:

$$\mu_P(x) = \pi_P(x) \quad \forall x \geq 0 \quad (2.44)$$

Dada la coincidencia numérica entre las funciones de pertenencia y las distribuciones de posibilidad, en adelante se hablará indistintamente de conjuntos borrosos o distribuciones de posibilidad. Sin embargo, es importante distinguir que la interpretación de cada una de estas funciones es sustancialmente diferente, siendo útil expresar en algunas ocasiones la anterior igualdad como:

$$\mu(P/x) = \pi(x/P) \quad \forall x \geq 0 \quad (2.45)$$

Efectivamente, esta nueva igualdad permite aclarar la confusión entre los conceptos de función de pertenencia y de distribución de posibilidad. La primera supone conocido el valor de la demanda y obtiene el grado de pertenencia al conjunto de “demandas altas”. La segunda supone conocido que la demanda es alta y obtiene el grado de posibilidad de cada valor de la variable demanda. Por lo tanto, la coincidencia entre estas dos funciones es simplemente numérica y no conceptual.

La diferencia es análoga a la distinción entre la distribución de verosimilitud  $L(\alpha/x)$  definida en un marco probabilista, que cuantifica la verosimilitud de una hipótesis  $\alpha$  a partir de un hecho observado  $x$ , y la función de densidad de probabilidad condicionada  $p(x/\alpha)$  que cuantifica la probabilidad de la observación  $x$  dada la hipótesis  $\alpha$ . Por ejemplo,  $L(\alpha/x)$  puede ser la verosimilitud de que la demanda a precio cero valga  $\alpha$  cuando se ha observado que la demanda es  $x$ , y  $p(x/\alpha)$  la probabilidad de que la demanda sea  $x$  cuando la demanda a precio cero vale  $\alpha$ .

### 2.3.4.3 Posibilidad como preferencia

Una de las ideas más antiguas para comparar eventos consiste en la definición de una preordenación sobre los mismos que exprese comparación entre probabilidades, posibilidades, creencias, etc. Las preordenaciones para expresar probabilidades (ver [Fishburn, 1986]) han sido investigadas durante los últimos años aunque no se ha encontrado una justificación completa de la aditividad de las medidas de probabilidad inducidas ( $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$  si  $A \cap B = \emptyset$ ). En [Lewis, 1986] se define una preordenación posibilista (reformulada en [Dubois, 1986a]) basándose en preordenaciones probabilistas, que describe una relación de preferencia sobre los posibles valores de una variable desconocida (para más detalle ver [Dubois, 1993a]).

#### **2.3.4.4 Posibilidad como similitud**

Un sector importante de investigadores de la teoría de conjuntos borrosos considera que el grado de pertenencia de un elemento a un conjunto (grado de posibilidad al modelar la incertidumbre de una variable) refleja la similitud de ese elemento con un hipotético elemento prototipo cuya función de pertenencia es uno (grado de posibilidad uno). Esta relación de pertenencia parcial, utilizada de manera abierta en [Zimmermann, 1987], está claramente relacionada con distancia y no con posibilidad, y ha dado lugar a la definición y comparación de diferentes medidas de distancias sobre conjuntos borrosos (ver [Bilgic, 1997]). En [Ruspini, 1991] se ha utilizado este punto de vista para explorar nociones similares entre proposiciones (ver además [Dubois, 1993a]).

#### **2.3.4.5 Interpretación lógica o epistémica de la posibilidad**

Otra de las interpretaciones de la posibilidad es el uso de la misma como grado en que un suceso es realizable basado en la compatibilidad con la información disponible. Por ejemplo, cuando se dice que el precio del mercado es posible que sea  $x$ , significa que con todo el conocimiento que se tiene acerca del comportamiento del precio, éste puede ser  $x$ . El concepto epistémico de la posibilidad no debe confundirse con el concepto epistémico de la probabilidad dado que la evidencia disponible no tiene por qué ser un hecho cuantificable objetivamente (ver [Smets, 1997]).

#### **2.3.4.6 Interpretación física de la posibilidad**

La posibilidad física puede ser reconocida por su uso lingüístico como “posible para” significando “fácil de alcanzar”, como por ejemplo cuando se dice que es posible que una determinada central eléctrica pase en una hora de su mínimo técnico a su plena carga, significando que, técnicamente, la potencia generada por la central puede variar en sólo una hora de su potencia mínima a su potencia máxima (en este ejemplo se hablaría realmente de posibilidad técnica dado que la posibilidad física es más adecuada en ejemplos relacionados con capacidades vitales). Esta interpretación tiene que ver con la factibilidad, independientemente de nuestro conocimiento, sobre la ocurrencia de un suceso. La posibilidad física ha sido defendida por Zadeh (ver [Zadeh, 1978]) para justificar el axioma principal de no-aditividad de la medida de la posibilidad ( $\Pi(A \cup B) = \text{Max}(\Pi(A), \Pi(B))$ ; ver [Smets, 1997]).

#### **2.3.4.7 Estimación de funciones de pertenencia**

En la literatura existen distintos métodos bien establecidos para la estimación de funciones de pertenencia (ver [Dubois, 1986b], [Zimmermann, 1985] y [Zysno, 1981]), algunos de ellos descritos en detalle en el capítulo quinto de esta tesis para la estimación de las distribuciones de posibilidad de las pendientes de la demanda

residual de los generadores de un mercado eléctrico. Además, en [Dubois, 1988c] se muestran varios enfoques para la combinación de distintas estimaciones de distribuciones de posibilidad.

### 2.3.5 La teoría de la evidencia

Desde que fue introducida por Dempster y Shaffer (ver [Dempster, 1967] y [Shaffer, 1976]), dos de los objetivos principales que ha tenido la **teoría de la evidencia** concerniendo al modelado y cuantificación de la credibilidad atribuida a los eventos han sido, por un lado, establecer una representación formal de la imperfección de la información y, por otro, permitir que la información proveniente de diferentes fuentes pueda ser combinada para generar esquemas de inferencia que puedan ayudar a la toma de decisiones con algún grado de certeza.

#### 2.3.5.1 Masa de evidencia y cuerpo de evidencia

La teoría de Dempster y Shaffer considera una **función de masa o asignación básica**  $m$  que asigna un coeficiente en el intervalo  $[0,1]$  a cada subconjunto crisp de las partes  $\wp(\Omega)$  tal que:

$$\begin{aligned} - & m(\emptyset)=0 \\ - & \sum_{A \in \wp(\Omega)} m(A)=1 \end{aligned} \tag{2. 46}$$

La masa  $m(A)$  cuantifica la creencia que tienen un grupo de observadores en la ocurrencia del suceso  $A$ . Se denominan **elementos focales** a aquellos subconjuntos crisp cuya masa es positiva. Si  $F$  es el conjunto de elementos focales entonces al par  $(F,m)$  se le denomina **cuerpo de evidencia**. En caso de que se considere que el universo de discurso es continuo, entonces  $m$  es una **densidad de evidencia** y las sumas se sustituyen por integrales.

Como se puede apreciar, esta definición coincide con la realizada en la teoría de la probabilidad para la función de masa (caso discreto) y densidad (caso continuo) de probabilidad, cuando los elementos focales son conjuntos con un único elemento (conjuntos unitarios, también llamados **átomos**). En el caso de la teoría de la evidencia, no se sabe qué elemento o elementos del elemento focal aportan la información para que su asignación básica sea positiva.

Un ejemplo de función de masa se obtiene calculando las frecuencias relativas obtenidas cuando cada uno de los expertos de una compañía eléctrica eligen el intervalo de entre un total de  $k$  en el que piensan que el precio del mercado de la electricidad se encontrará mañana.

### 2.3.5.2 Creencia y plausibilidad

La **medida de creencia**  $Bel(B)$  para un suceso  $B$  es la suma de las masas de los elementos focales tales que todos sus elementos están contenidos en el suceso  $B$ . Es decir:

$$Bel(B) = \sum_{A \in \wp(\Omega) / A \subseteq B} m(A) \quad (2.47)$$

Esta medida suma todas las masas de evidencia de todos los testimonios que afirman que  $B$  ocurre seguro. En el ejemplo de los expertos, la creencia de que el precio del mercado esté en un determinado intervalo  $B$  es la suma de las frecuencias relativas asociadas a aquellos intervalos contenidos en  $B$ , es decir, tales que el precio con seguridad se encuentra en  $B$  (desde el punto de vista de los expertos).

La **medida de plausibilidad**  $Pl(B)$  para un suceso  $B$  es la suma de las masas de los elementos focales tales que alguno de sus elementos está en el suceso  $B$ , es decir:

$$Pl(B) = \sum_{A \in \wp(\Omega) / A \cap B \neq \emptyset} m(A) \quad (2.48)$$

Esta medida suma todas las masas de todos los testimonios que consideran que puede ocurrir el suceso  $B$ , pues alguno de los elementos focales contiene elementos de  $B$ . En el ejemplo de los expertos, la plausibilidad de que el precio del mercado esté en un determinado intervalo  $B$  es la suma de las frecuencias relativas asociadas a aquellos intervalos que tienen algún punto en común con  $B$ , es decir, tales que el precio puede encontrarse (o es posible que se encuentre) en  $B$ .

Para cualquier suceso  $B \in \wp(\Omega)$  las funciones de creencia y plausibilidad satisfacen:

- $Bel(B) \leq Pl(B)$
  - $Pl(B) = 1 - Bel(B^c)$
  - $Bel(B) + Bel(B^c) \leq 1$
  - $Pl(B) + Pl(B^c) \geq 1$
- (2.49)

En la Figura 2.4 se muestra una representación de las medidas de plausibilidad y necesidad de un suceso  $B$  sobre el intervalo unidad, propuesta en [Haralick, 1993].

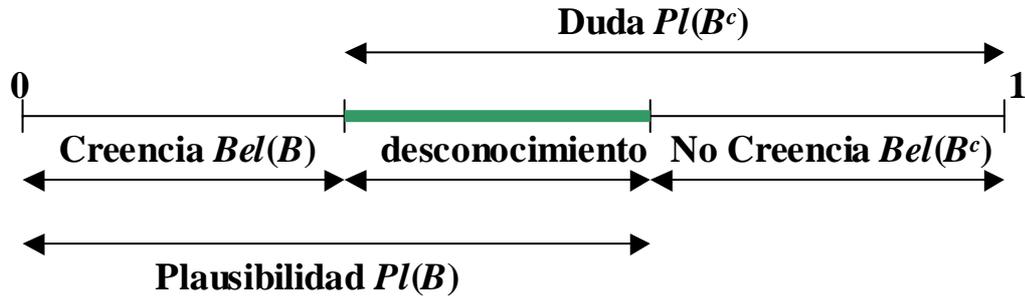


Figura 2. 4: Medidas de creencia y plausibilidad

Haralick y Shapiro comentan que al ser  $Bel(B)$  y  $Bel(B^c)$  los grados de creencia en la ocurrencia del suceso  $B$  y de su complementario  $B^c$  respectivamente, entonces  $1-Bel(B)-Bel(B^c)$  representa el grado de desconocimiento acerca de la ocurrencia de  $B$  o de  $B^c$  (por lo tanto, si  $Bel(B)+Bel(B^c)=1$  el grado de desconocimiento es cero, no existiendo evidencias que puedan avalar simultáneamente la ocurrencia de  $B$  y la de  $B^c$ ). La plausibilidad  $Pl(B)$  es entonces la suma del grado de certeza de  $B$  con el grado de desconocimiento, siendo por tanto una medida optimista de la ocurrencia del suceso  $B$ . Por el contrario, la plausibilidad  $Pl(B^c)$ , denominada también **duda del suceso  $B$** , es la suma del grado de certeza de  $B^c$  con el grado de desconocimiento, siendo una medida optimista de la no-ocurrencia del suceso  $B$ .

Cuando los elementos focales son átomos, las medidas de creencia y plausibilidad coinciden y son iguales a una medida de probabilidad. En otro caso, se puede demostrar que el intervalo  $[Bel(B), Pl(B)]$  acota el valor de la probabilidad  $P(B)$ , esto es:

$$Bel(B) \leq P(B) \leq Pl(B) \quad \forall B \in \mathcal{F}(\Omega) \tag{2. 50}$$

### 2.3.5.3 Posibilidad y necesidad

Cuando los elementos focales están anidados se dice que el **cuerpo de evidencia** es **consonante**. En este caso la medida de plausibilidad  $Pl$  se denomina **medida de posibilidad** denotándose como  $\Pi$  y satisfaciendo las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} \Pi(\emptyset) &= 0 \\ \Pi(A \cup B) &= \text{Max}(\Pi(A), \Pi(B)) \quad \forall A, B \in \mathcal{F}(\Omega) \end{aligned} \tag{2. 51}$$

Y la medida de credibilidad  $Bel$  se denomina **medida de necesidad**, y se denota por  $N$  satisfaciendo:

$$\begin{aligned} N(\emptyset) &= 0 \\ N(A \cap B) &= \text{Min}(N(A), N(B)) \quad \forall A, B \in \mathcal{F}(\Omega) \end{aligned} \tag{2. 52}$$

Obviamente se siguen verificando las mismas relaciones existentes entre las medidas de plausibilidad y creencia para las medidas de posibilidad y necesidad:

- $N(B) \leq \Pi(B)$  (2. 53)
- $\Pi(B) = 1 - N(B^c)$
- $N(B) + N(B^c) \leq 1$
- $\Pi(B) + \Pi(B^c) \geq 1$

Así como se sigue verificando el principio de que la probabilidad está acotada por la medida de necesidad y la medida de posibilidad, principio conocido como **principio de consistencia**:

$$N(B) \leq P(B) \leq \Pi(B) \quad \forall B \in \wp(B) \quad (2. 54)$$

Las relaciones de inclusión entre las diferentes medidas definidas en el esquema de la teoría de la evidencia se muestran en la Figura 2. 5.

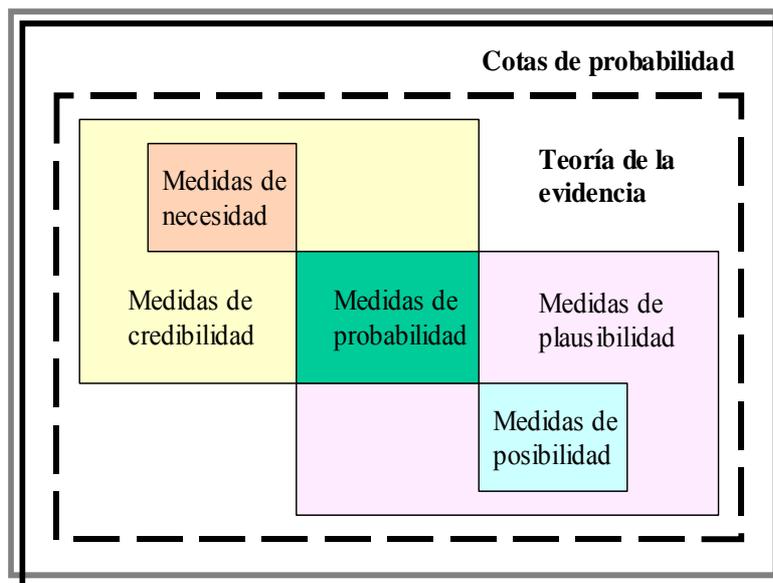


Figura 2. 5: Relaciones de inclusión de las medidas en la teoría de la evidencia

Como puede verse, las cotas de probabilidad, descritas en el apartado 2.3.3, son funciones de conjunto más generales que las medidas de credibilidad y plausibilidad (ver [Walley, 1982]), y hacen a las medidas de posibilidad y necesidad clases especiales de cotas de probabilidades.

### 2.3.5.4 La regla de combinación de Dempster

La **regla de Dempster** permite la agregación de dos cuerpos de evidencia diferentes  $(F_1, m_1)$  y  $(F_2, m_2)$  definidos sobre el mismo universo de discurso  $\Omega$  en un único cuerpo de evidencia  $(F, m)$  sobre  $\Omega$  en donde la masa de evidencia  $m$  es:

$$m(A) = \frac{\sum_{B, C \in \wp(\Omega) / B \cap C = A} m_1(B) \cdot m_2(C)}{1 - \sum_{B, C \in \wp(\Omega) / B \cap C = \emptyset} m_1(B) \cdot m_2(C)} \quad (2.55)$$

El denominador es un coeficiente de normalización. En particular, si éste es nulo, significa que existe un conflicto total entre las fuentes, y la agregación es entonces imposible. Por tanto, el uso de esta regla de combinación es válido solamente cuando las fuentes están en concordancia o al menos en algún grado (es decir, no son del todo inconsistentes). De hecho, como se prueba en [Zadeh, 1979] (ver también [Zadeh, 1984] y [Dubois, 1988c]) este operador es inestable cuando el conflicto de información es muy fuerte.

### 2.3.6 Los factores de certeza

Los **factores de certeza** fueron originariamente utilizados en el sistema experto MYCIN (ver [Shotliffe, 1976] y [Buchanan, 1984]), y han sido muy utilizados posteriormente debido a su simplicidad.

Los autores de MYCIN decidieron no utilizar las técnicas proporcionadas por la teoría de probabilidad porque (los siguientes son inconvenientes típicos de la teoría de la probabilidad):

1. Los expertos no consiguen expresar sus procesos de razonamiento en términos probabilísticos coherentes.
2. La probabilidad requiere de grandes cantidades de datos y muchas aproximaciones y suposiciones.

Así, los creadores de MYCIN desarrollaron una nueva técnica, cuya base es la **teoría lógica de la probabilidad**, en donde la probabilidad es el grado de confirmación de una hipótesis  $H$  con respecto a la observación de la evidencia  $E$ , denotada como  $C[H, E]$ . Sin embargo,  $C[H, E]$  es diferente al concepto de probabilidad condicional bayesiana, y la desconfirmación esta separada de la confirmación, es decir,  $C[H, E]$  no es necesariamente igual a  $1 - C[H^c, E]$ , siendo  $H^c$  la negación de la hipótesis  $H$ . Bajo estas consideraciones se desarrolla la técnica de factores de certeza que se basa en las siguientes dos medidas:

- $MB(H,E)$ : medida del aumento en la creencia en la hipótesis  $H$  dada la evidencia  $E$  (cuando la evidencia aumenta la credibilidad de la hipótesis).
- $MD(H,E)$ : medida en la disminución en la creencia en la hipótesis  $H$  dada la evidencia  $E$  (cuando la evidencia decremента la credibilidad de la hipótesis).

Ambas medidas son relativas y se pueden expresar en términos de la medida de probabilidad  $P$  como:

$$MB(H,E) = \begin{cases} 1 & P(H) = 1 \\ \frac{\text{Max}(P(H/E), P(H)) - P(H)}{1 - P(H)} & P(H) \neq 1 \end{cases} \quad (2.56)$$

$$MD(H,E) = \begin{cases} 1 & P(H) = 0 \\ \frac{P(H) - \text{Min}(P(H/E), P(H))}{P(H)} & P(H) \neq 0 \end{cases}$$

En el primer caso, el numerador representa cuánto aumenta nuestra creencia en  $H$ , y en el segundo cuánto disminuye nuestra creencia en  $H$ .

Para cada hipótesis  $H$  y cada nueva evidencia  $E$  sólo una de las dos funciones  $MB$ ,  $MD$  es positiva. Se define entonces el factor de certeza  $C[H,E]$  como la diferencia entre ambas funciones:

$$C[H,E] = MB(H,E) - MD(H,E) \quad (2.57)$$

De tal forma que  $C[H,E]$  pertenece siempre al intervalo  $[-1,1]$ . Puede verse que cuanto más próximo  $C[H,E]$  está de 1 mayor es la evidencia a favor de  $H$  y cuanto más próximo es de  $-1$  mayor es la evidencia en contra. Cuando está próximo a 0 no existe evidencia ni en contra ni a favor de  $H$ .

El factor de certeza para  $H$  se calcula entonces como:

$$C[H] = C[E] \cdot C[H,E] \quad (2.58)$$

en donde los factores de certeza  $C[E]$  para evidencias  $E$  cumplen:

$$\begin{aligned} C[E] &= 1 - C[E^c] \\ C[E_1 \cap E_2] &= \text{Min}(C[E_1], C[E_2]) \\ C[E_1 \cup E_2] &= \text{Max}(C[E_1], C[E_2]) \end{aligned} \quad (2.59)$$

Aunque los factores de certeza pretendían apartarse de la probabilidad, se ha demostrado que la técnica de MYCIN tiene puntos de encuentro con la teoría de la probabilidad cuando (ver [Heckerman 86]):

- La evidencia  $E$  es condicionalmente independiente de la hipótesis  $H$  y su negación  $H^c$ .
- Uno de los términos considerados en la conjunción y disyunción ( $Min$  y  $Max$ ) es subconjunto del otro.

Sin embargo, estas suposiciones no son válidas en muchas aplicaciones.

A continuación se describen algunas medidas de falta de especificidad y de discordancia entre informaciones que, aunque no han sido empleadas en esta tesis para el análisis de la información disponible en los mercados de electricidad, son necesarias para la descripción de algunas de las transformaciones entre distribuciones de probabilidad y de posibilidad (ver apartado 2.4.4). Además, estas medidas también completan las distintas técnicas de caracterización de la información imperfecta, cuando se emplean para modelar uno de sus aspectos más relevantes: la erroneidad o incoherencia.

### **2.3.7 Medidas de falta de especificidad o de cantidad de información inconsistente**

La falta de especificidad (entendida como falta de certeza) de una determinada información aumenta al recibir una nueva información inconsistente con la disponible (expresada lingüísticamente, obtenida mediante datos estadísticos o por cualquier otro método). Esto indica que las medidas que cuantifican la falta de especificidad de una información coinciden con las que cuantifican la cantidad de información inconsistente.

A continuación se muestra una manera sencilla de plantear las medidas de cantidad de información inconsistente, que se basa en el hecho de que una cantidad de información recibida puede ser medida por la diferencia entre la cantidad de incertidumbre antes y después de recibir la información (ver [Klir, 1988]).

Supóngase que se tiene un conjunto de  $n$  alternativas posibles (entendidas como  $n$  informaciones inconsistentes). Existe entonces claramente una falta de especificidad en la toma de decisiones. Esta especificidad queda totalmente resuelta cuando una

alternativa es elegida una vez que se han descartado las  $n-1$  alternativas restantes. La cantidad de no-especificidad transportada al descartar una de las alternativas puede ser valorada como la cantidad de información eliminada por la selección que es desconocida. Por lo tanto, la cantidad de información asociada con  $s$  descartes de entre las  $n$  alternativas debería ser proporcional al número de descartes  $s$ , esto es:

$$I(n^s) = s \cdot K(n) \quad (2. 60)$$

Siendo  $K(n)$  una constante, por el momento desconocida, que depende del número de alternativas  $n$ , y  $n^s$  el número total de todas los posibles descartes de  $s$  selecciones de entre las  $n$  alternativas.

Considérese ahora dos conjuntos discretos con  $n_1$  y  $n_2$  alternativas. En este caso se puede suponer que existen dos valores  $s_1$  y  $s_2$  tales que el número total de todos los posibles descartes de  $s_1$  y  $s_2$  selecciones respectivamente coincide, esto es:

$$n_1^{s_1} = n_2^{s_2} \quad (2. 61)$$

En esta situación es lógico que la cantidad de información ambigua eliminada por cada selección sea la misma y que por tanto:

$$K(n_1) \cdot s_1 = K(n_2) \cdot s_2 \quad (2. 62)$$

Las dos anteriores ecuaciones conducen a la siguiente igualdad, que es cierta para cualquier valor positivo de  $b$ :

$$\frac{K(n_1)}{K(n_2)} = \frac{\log_b n_1}{\log_b n_2} \quad (2. 63)$$

Y por lo tanto  $K(n)$  debe coincidir con  $k_0 \cdot \log_b n$  en donde  $k_0$  es una constante común para cada  $n$ . Diferentes valores de  $k_0$  y de  $b$  conllevan a diferentes unidades de escala de la información rechazada en cada selección. Cuando se elige  $k_0=1$  y  $b=2$  la información es medida en bits y se tiene:

$$I(n^s) = s \cdot \log_2 n = \log_2 n^s \quad (2. 64)$$

o lo que es lo mismo:

$$I(N) = \log_2 N \quad (2. 65)$$

en donde  $N$  denota el número total de alternativas seleccionadas, cualquiera de las formas que hayan sido seleccionadas.

Con este procedimiento Hartley (ver [Hartley, 1928]) definió la cantidad de información  $I$  en  $N$  alternativas distintas, denominada **información de Hartley**, siendo la única que cumple los siguientes axiomas:

- $I(N \cdot M) = I(N) + I(M)$  para todos  $N, M \in \mathbb{N}$ . (2. 66)
- $I(N) \leq I(N+1)$  para todo  $N \in \mathbb{N}$ .
- $I(2) = 1$ .

Donde  $\mathbb{N}$  es el conjunto de los números naturales. Tal y como se ha construido, cuanto mayor es el valor de la medida  $I$ , mayor es la falta de especificidad.

Existe una generalización de la información de Hartley dentro del marco de la teoría de la evidencia. En este caso el conjunto de alternativas es el conjunto de elementos focales de los que se conoce su asignación básica  $m$ . La **medida de falta de especificidad del cuerpo de evidencia** es entonces la media ponderada por la asignación básica  $m$  de la medida de la información de Hartley evaluada sobre el cardinal de los elementos focales, esto es:

$$V(m) = \sum_{A \in \wp(\Omega)} m(A) \cdot \log_2 |A| \tag{2. 67}$$

### 2.3.8 Medidas de disonancia

Como se dijo, uno de los aspectos de la información imperfecta es la disonancia existente en una información (entendida como desorden, incoherencia, inconsistencia, etc.). Si se quiere medir el desorden de una información, primero se tiene que dar uno o varios criterios para definir lo que entendemos por orden dado que lo que puede ser orden para un grupo de personas, muy posiblemente no lo sea para otro grupo. Y esto es precisamente lo que hizo Shannon en 1948 (ver [Shannon, 1948]) dando los criterios necesarios para medir el desorden con respecto a otro conjunto de criterios prescritos que definen un concepto de orden.

A continuación se ilustra la medida de desorden de Shannon con un ejemplo. Con el objeto de analizar la fiabilidad de una central de generación, una empresa generadora desea que la central permanezca arrancada durante un largo periodo de tiempo. Permanecer arrancado es la regla que define el orden en este caso. Sin embargo, debido a fallos imprevistos y a cambios en el comportamiento de la demanda de electricidad, la central puede parar durante cierta fracción de tiempo. Ahora bien, si se conoce la distribución, es decir, las fracciones de tiempo que permanece parada, se puede, como lo hizo Shannon, cuantificar el desorden, siendo máximo cuando la central permanece parada todo el tiempo. La medida de desorden o **entropía de**

**Shannon** corresponde justamente con la medida cuantitativa del desorden del sistema, y puede considerarse complementaria a la medida de falta de especificidad que cuantifica el conflicto existente entre informaciones.

En general las **medidas de disonancia** de una información modelada mediante una distribución de probabilidad  $P$  son funciones  $E: \Psi \rightarrow \mathfrak{R}^+$  tales que si  $E(P)=0$  entonces la **información  $P$**  se dice que es **no disonante**, y si  $E(P)=\text{Max}_{P' \in \Psi} E(P')$  se dice que es **completamente disonante**.  $\Psi$  es el conjunto de distribuciones de probabilidad.

Como probó Shannon, la única función que satisface ciertas propiedades esperadas (como la propiedad de continuidad en los argumentos de  $E$ , ver [Klir, 1988] para más detalle) es la entropía de Shannon:

$$E(P) = E(p_1, \dots, p_n) = -k_0 \cdot \sum_{i=1}^n p_i \cdot \log_b p_i \quad (2.68)$$

siendo, en este caso,  $\Psi$  el conjunto de distribuciones de probabilidad discretas, y  $P \in \Psi$  con probabilidades  $\{p_i, i=1, \dots, n\}$ . Además, la escala comúnmente escogida es igual a la propuesta por Hartley, esto es:

$$E(P) = E(p_1, \dots, p_n) = -\sum_{i=1}^n p_i \cdot \log_2 p_i \quad (2.69)$$

Otra escala conlleva a otras medidas de disonancia y a una unidad de entropía con un valor diferente, aunque se es libre de escoger, al igual que se hace con cualquier otra magnitud.

Como se puede apreciar, la entropía de Shannon es siempre positiva, dado que  $P$  es una distribución de probabilidad (el logaritmo resulta ser siempre negativo o cero). Además, si  $P$  no contiene incertidumbre (distribución de probabilidad degenerada en un valor), entonces no existe desorden y se cumple  $E(P)=0$ . Si por el contrario se considera la situación en la que todos los sucesos son equiprobables, la entropía es máxima. Por lo tanto, se gana más información al conocer el valor que toma la incertidumbre cuanto menos se sepa sobre cuál puede ser. Así, el hecho de que los posibles valores de la variable aleatoria sean equiprobables es claro que hace máxima nuestra incertidumbre.

Una de las medidas disonantes más generales es la definida dentro del marco de la teoría de la evidencia en donde  $\Psi$  es el conjunto de asignaciones básicas  $m$ . En este caso, la **entropía  $E$  de una asignación básica  $m$**  queda definida como la media ponderada por la información  $m$  de la cantidad de conflicto  $Con(m, m_A)$  entre  $m$  y la

asignación básica  $m_A$  del cuerpo de evidencia definido con cada elemento focal  $A$ . La cantidad de conflicto entre dos cuerpos de evidencia se expresa usualmente en la literatura como:

$$Con(m, m_A) = -\log_2(1-K) \quad (2.70)$$

en donde  $1-K$  es el factor empleado en la normalización de la asignación básica obtenida por la regla de Dempster, que se recuerda era:

$$1-K = 1 - \sum_{B, C \in \wp(\Omega) / B \cap C = \Phi} m(B) \cdot m_A(C) \quad (2.71)$$

Dado que la asignación básica  $m_A$  tiene un único elemento focal  $A$ , la discordancia  $E$  es:

$$E(m) = - \sum_{A \in \wp(\Omega)} m(A) \cdot \log_2 \left( 1 - \sum_{B \in \wp(\Omega) / B \cap A = \Phi} m(B) \right) \quad (2.72)$$

Además, se cumple:

$$1 - \sum_{B \in \wp(\Omega) / B \cap A = \Phi} m(B) = \sum_{B \in \wp(\Omega) / B \cap A \neq \Phi} m(B) = Pl(A) \quad (2.73)$$

Entonces, la medida de disonancia  $E$  es:

$$E(m) = - \sum_{A \in \wp(\Omega)} m(A) \cdot \log_2 Pl(A) \quad (2.74)$$

En este caso la cantidad total de información inconsistente  $T(m)$  se define como la medida de disonancia  $E(m)$  más la medida de falta de especificidad  $V(m)$ . Si  $m$  representa una distribución de probabilidad, entonces la cantidad total de información  $T(m)$  coincide con la medida de Entropía de Shannon (dado que  $V(m)=0$ ), y por tanto la generaliza, al igual que ocurre con la generalización de la medida de Hartley en el marco de la teoría de la evidencia.

Por otro lado, se puede probar que las medidas de posibilidad y necesidad no tienen disonancia. La idea es que estas medidas están basadas en elementos focales que son anidados y por lo tanto no existe conflicto en la evidencia.

### 2.3.9 Medidas de confusión

Una definición dual de la medida de disonancia puede establecerse considerando la medida dual de la plausibilidad, esto es, la medida de credibilidad. Esta definición describe a una **medida de confusión**  $C: \Psi \rightarrow \mathcal{R}^+$  como sigue:

$$C(m) = - \sum_{A \in \wp(\Omega)} m(A) \cdot \log_2 Bel(A) \quad (2.75)$$

La medida de confusión caracteriza la cantidad de subconjuntos soportados por la evidencia así como la uniformidad de la distribución de la evidencia sobre dichos subconjuntos. De tal forma que  $C(m)=0$  cuando solamente existe un elemento focal con masa  $m$  unitaria, y  $C$  es máximo cuando  $m$  es uniformemente distribuida entre los elementos focales más grandes del cuerpo de evidencia tales que ninguno de ellos está incluido en ningún otro.

La medida de confusión es mayor que la medida de disonancia, y cuando el cuerpo de evidencia tiene al menos dos elementos focales, la medida de confusión nunca es cero, en contra de lo que ocurría con la disonancia de las medidas de posibilidad y necesidad.

## 2.4 Posibilidad y probabilidad

A pesar del esfuerzo de los investigadores del conocimiento y la información por tratar de aclarar las divergencias entre la teoría de la probabilidad y la teoría de la posibilidad, el problema de la consistencia entre estas dos teorías ha sido y sigue siendo una cuestión controvertida en el modelado de la incertidumbre (ver [Dubois, 1993a] y [Zadeh, 2002]). Sin embargo, el sentido común sugiere que existen ciertos vínculos indiscutibles entre estas dos teorías. Por ejemplo, cuando se reduce la posibilidad de un evento a través de la incorporación de evidencia que no avala su ocurrencia, paralelamente se está reduciendo su probabilidad. Similarmente, al realizarse la probabilidad de ocurrencia del evento por la presencia de información estadística que avale su ocurrencia, se está incrementando su posibilidad. Además, la teoría de la evidencia de Shafer muestra claramente que la teoría de la probabilidad y la teoría de la posibilidad, a pesar de modelar diferentes estados del conocimiento, están íntimamente relacionadas pues sus medidas resultan ser casos particulares de las medidas de creencia y plausibilidad.

A continuación se presentan las principales relaciones entre la teoría de la posibilidad y la teoría de la probabilidad que se describen en detalle en [Dubois, 1993a], [Zadeh, 1995], [Dubois, 1986b] y [Dubois, 1989]. Asimismo se muestran las principales transformaciones matemáticas entre distribuciones de probabilidad y posibilidad, que permiten, con o sin ausencia de información estadística, utilizar la teoría de la posibilidad como herramienta de modelado de la incertidumbre.

### 2.4.1 Los conjuntos borrosos, la probabilidad y la posibilidad

Uno de los errores típicos que aparece en trabajos relacionados con los sistemas expertos (sistemas que tratan de simular el comportamiento de un experto) es la confusión generalizada que se tiene entre la función de pertenencia y la medida de probabilidad. Sin embargo, la función de pertenencia no es una función de conjunto como lo es la medida de probabilidad (y por supuesto la medida de posibilidad), asemejándose más a la probabilidad sobre conjuntos unitarios. A pesar de ello, la función de pertenencia de un conjunto borroso no tiene porqué sumar uno como ocurre con la función de densidad. Además, el hecho de que en algunas situaciones sea la probabilidad de la unión el máximo de las probabilidades no significa que las funciones de pertenencia se consideren probabilidades.

Otra de las confusiones comunes entre una función de pertenencia y una medida de probabilidad puede derivarse del uso que hace de ellas Gaines en [Gaines, 1978]. En este trabajo se considera un conjunto de sentencias o frases  $\alpha \in S$  y diversas formas de asignar a cada sentencia  $\alpha$  un número  $v(\alpha)$  en  $[0,1]$  que representa la veracidad de

$\alpha$ , analizando además el comportamiento de  $\nu(\alpha)$  bajo los conectores lógicos de conjunción y disyunción. Gaines muestra que existe una representación probabilista para la asignación  $\nu(\alpha)$ , de tal forma que  $\nu(\alpha)$  coincide con la probabilidad de los subconjuntos de palabras que hacen a la sentencia verdadera. Por otro lado, Gaines también prueba que existe una representación de  $\nu(\alpha)$  en términos borrosos, donde  $\alpha$  es ahora una sentencia borrosa y  $\nu(\alpha)$  es el valor de la función de pertenencia del conjunto borroso sobre los elementos que hacen la sentencia  $\alpha$  cierta. Sin embargo, la representación probabilista y posibilista de  $\nu(\alpha)$  no debe crear confusión acerca de las diferencias entre los grados de probabilidad y de pertenencia a un conjunto borroso, dado que las representaciones de Gaines deben entenderse en el marco de la teoría lógica de pesos (ver [Blockley, 1985]).

En algunas ocasiones, la controversia entre las medidas de posibilidad y probabilidad está relacionada con los conjuntos borrosos.

Así, por ejemplo, en [Cheeseman, 1988] se critica a la medida de posibilidad porque se piensa que la posibilidad de la intersección es el mínimo de las posibilidades, confundiendo la función de pertenencia con la distribución de posibilidad. Sin embargo, la medida de posibilidad no es composicional en el sentido en que solamente es la posibilidad de la unión el máximo de las posibilidades (sin asegurar nada para la intersección), y solamente es la necesidad de la intersección el mínimo de las necesidades (sin asegurar nada para la unión).

Una de las confusiones entre conjuntos borrosos y la probabilidad puede ser originada por la analogía que Kosko (ver [Kosko, 1990]) realiza entre el índice de inclusión entre conjuntos borrosos, mostrado en la ecuación (2. 24), y la medida de probabilidad condicionada bayesiana. Sin embargo, como prueba Dubois y Prade en [Dubois, 1993a], esta comparación no puede conducir a que la probabilidad sea un caso particular de la posibilidad, sino que lo es de la **medida de probabilidad sobre conjuntos borrosos** (ver [Dubois, 1993c] para una lista de referencias básicas), en donde la probabilidad y los conjuntos borrosos son ortogonales (la probabilidad sobre conjuntos borrosos se define como el producto escalar de la probabilidad y la función de pertenencia).

## **2.4.2 Interpretaciones probabilistas de los conjuntos borrosos y las medidas de posibilidad**

### **2.4.2.1 La posibilidad como una cota superior de probabilidad**

Algunos trabajos (ver [Dubois, 1988a]) interpretan una medida de posibilidad  $\Pi$  como una envolvente superior del conjunto formado por las medidas de probabilidad que satisfacen el principio de consistencia para  $\Pi$  (esto es, probabilidad  $\leq$

posibilidad). En este caso, la distribución de posibilidad de  $\Pi$  coincide punto a punto con la cota superior de probabilidad de este conjunto tal y como se definió en el apartado 2.3.3.

### 2.4.2.2 La posibilidad en la teoría de conjuntos aleatorios y en la teoría de la evidencia

El punto de vista que considera a la medida de posibilidad como cotas superiores de una familia de medidas de probabilidad ha sido también adoptado dentro de un esquema más restrictivo (en comparación con el esquema de cotas de probabilidad) en el que se enmarca la **teoría de conjuntos aleatorios** (ver [Molchanov, 2004]) y la teoría de la evidencia.

Un **conjunto aleatorio**  $\{(A_i, m_i), i=1, \dots, n\}$  (se supone discreto por simplificar) es un conjunto de subconjuntos  $A_i$  y una medida de probabilidad  $m$  tal que  $m(A_i)=m_i$ , cumpliendo  $\sum_i m_i=1$ .

Cuando se tiene un conjunto aleatorio  $\{(A_i, m_i), i=1, \dots, n\}$  se puede definir una función de pertenencia  $\mu_{\underline{F}}$  de un conjunto borroso  $\underline{F}$ , y por lo tanto una distribución de posibilidad  $\pi$  como sigue:

$$\pi(u) = \mu_{\underline{F}}(u) = \sum_{u \in A_i} m_i \quad (2.76)$$

Así  $\{(A_i, m_i), i=1, \dots, n\}$  se interpreta como un conjunto aleatorio  $F$  con realizaciones imprecisas  $A_i$ , y  $\pi(u)$  como la probabilidad de que  $u$  pertenezca al conjunto  $F$ .

Al igual que se ha trabajado con un conjunto aleatorio, se puede trabajar con un cuerpo de evidencia, donde los conjuntos  $A_i$  pueden ser considerados los elementos focales y  $m_i$  la asignación básica del cuerpo. En este caso se obtendrá una función de plausibilidad  $Pl$  en lugar de una función de pertenencia:

$$\pi(u) = Pl(\{u\}) = \sum_{\{u\} \cap A_i \neq \emptyset} m_i \quad (2.77)$$

### 2.4.2.3 La posibilidad como función de verosimilitud

Una de las interpretaciones probabilistas de la función de pertenencia de un conjunto está basada en la utilización de métodos experimentales para la construcción de una función de verosimilitud (ver [Hersh, 1976] y [Hisdal, 1991]). Dado un concepto vago  $\underline{F}$ , se le pregunta a un individuo en que grado un elemento  $u$  está o no en  $\underline{F}$  asignando un grado  $p \in [0,1]$  de pertenencia. Por ejemplo,  $\underline{F}$  puede ser el conjunto de centrales de una determinada empresa generadora cuya potencia es alta, y  $u$  la potencia generada por una central que en un instante en concreto es 200 *Mwh*. En

este caso, el generador, que tiene una medida imprecisa de la potencia real, construye una curva de error para cuantificar el error en torno a 200 Mw. Luego, afirma que en un porcentaje  $p \in [0,1]$  de los casos, la potencia de la central cae en el intervalo de potencias altas.

Esta metodología, aplicada para cada elemento  $u$ , permite construir una función de verosimilitud  $P(\underline{E}/u)$  que es, por construcción, a la vez una función de pertenencia, cumpliéndose:

$$\pi(u) = \mu_{\underline{E}}(u) = P(\underline{E}/u) = p \quad (2.78)$$

Otra forma de construir la función de pertenencia es la siguiente. Partiendo de una población de individuos y un concepto vago  $\underline{E}$ , se le pregunta a cada individuo si un elemento  $u$  puede o no ser de  $\underline{E}$ , respondiendo con las etiquetas booleanas “si” o “no”. Se obtiene entonces la función de verosimilitud  $P(\underline{E}/u)$  como la proporción  $p \in [0,1]$  de los individuos que afirman la pertenencia. Se pueden establecer entonces las mismas igualdades que en (2.78).

Otras relaciones directas entre las distribuciones de posibilidad y las funciones de verosimilitud aparecen en [Smets, 1982], [Thomas, 1979] y [Thomas, 1981].

#### 2.4.2.4 La posibilidad en la inferencia estadística

Han sido muchos los trabajos que han considerado a la teoría de los conjuntos borrosos y a la teoría de la posibilidad como parte integrante de la inferencia estadística. Entre ellos se encuentran los que consideran la función de pertenencia y la distribución de posibilidad como funciones de verosimilitud, y que se han referenciado en el anterior epígrafe.

Por otro lado, también existen trabajos que muestran que las interpretaciones de las medidas de posibilidad como cotas de probabilidad superior y como funciones de verosimilitud no son antagónicas y pueden ser reconciliadas. Por ejemplo, considerando la función de verosimilitud  $P(\underline{E}/u)$  como la proporción de individuos que responden afirmativamente a la cuestión “¿ $u$  está en  $\underline{E}$ ?”, se cumple:

$$P(\underline{E}/u) = \sum_{u \in A_i} m_i \quad (2.79)$$

Donde  $m_i$  representa la proporción de individuos que considera que  $A_i$  es el conjunto crisp (de entre  $n$  posibles) que mejor representa al concepto borroso  $\underline{E}$  (ver [Dubois, 1989]).

Otro camino para relacionar estos dos enfoques interpretativos se basa en el uso de la regla de Dempster (ver para más detalle [Dubois, 1993a]). Por otro lado, otra forma de relacionar el enfoque de cotas de probabilidad superior y la función de verosimilitud es considerar una familia de funciones de verosimilitud y definir una medida de posibilidad como la envolvente superior para esta familia (ver para más detalle [Dubois, 1997]).

El problema inverso de encontrar un cuerpo de evidencia a partir de una función de verosimilitud se estudia en [Shaffer, 1976].

#### 2.4.2.5 Interpretación probabilística de las operaciones con conjuntos borrosos

Cuando se considera a la función de pertenencia como una función de verosimilitud, las operaciones de conjuntos borrosos pueden interpretarse en un esquema probabilístico. Así, la definición de intersección entre conjuntos borrosos daría lugar al cumplimiento de la siguiente ecuación:

$$P(\underline{E} \cap \underline{G} / u) = \text{Min}(P(\underline{E} / u), P(\underline{G} / u)) \quad (2. 80)$$

Este enfoque conllevaría a afirmar que existe una total dependencia entre los conjuntos borrosos (dado que al escoger el mínimo se está indirectamente asumiendo que el suceso de mayor probabilidad depende del suceso de menor probabilidad pues no proporciona información a la probabilidad de la intersección), dando lugar a una limitación en la teoría de conjuntos borrosos. Sin embargo, teniendo en cuenta el papel de las distribuciones de posibilidad como cotas superiores de probabilidad, la igualdad anterior es una desigualdad, indicando con ello que existe una falta de conocimiento acerca de la dependencia entre los conjuntos, más que suponer una dependencia fuerte (ver [Dubois, 1997]).

En todo caso, la interpretación de las funciones de pertenencia como funciones de verosimilitud no explica todas las operaciones entre conjuntos borrosos sino sólo algunas que se encuentran por debajo del mínimo anterior y del correspondiente máximo debido a la monotonidad de la verosimilitud con la unión. Así, las medias y sumas simétricas no se pueden modelar de esta forma (ver [Dubois, 1988b]).

También existe controversia en la definición de las operaciones de los conjuntos borrosos cuando se interpretan las funciones de pertenencia a partir de conjuntos aleatorios consonantes (ver [Dubois, 1989]). Sin embargo, este esquema resulta ser más flexible que el de la verosimilitud, ya que en este caso las intersecciones y las uniones entre conjuntos borrosos corresponden con intersecciones y uniones entre conjuntos aleatorios y, además, otras operaciones como la media continúan teniendo sentido con los conjuntos aleatorios.

Finalmente, las operaciones con conjuntos borrosos pueden seguir siendo interpretadas en el esquema de cotas superiores ya mencionado. En este caso, de nuevo la regla del mínimo no puede entenderse como una hipótesis de dependencia fuerte pero sí como una regla de compromiso cuando no se conoce nada sobre la dependencia (ver [Dubois, 1992]).

#### 2.4.2.6 Los grados de posibilidad como probabilidades infinitesimales

En [Spohn, 1990] se define una medida  $k: \wp(\Omega) \rightarrow \mathbb{N}$  ( $\mathbb{N}$  es el conjunto de números naturales) que representa estados epistémicos y trata de establecer una ordenación entre palabras. Esta medida cumple  $k(A \cup B) = \min(k(A), k(B))$  y verifica  $k(\{u\}) = 0$  para algún elemento  $u$ . Expresa el grado de falta de creencia en un suceso  $A$ , siendo creciente cuanto menos plausible es el suceso. Por ello, se la ha relacionado con la medida de posibilidad, así como su medida dual  $\nu(A) = 1 - \eta^{-k(A^c)}$  con la medida de necesidad. En este trabajo se realiza además una interpretación probabilística de la medida  $k$  que establece que cuando  $k(A) = n$ , el suceso  $A$  es infinitesimalmente probable (del orden  $\varepsilon^n$ ), y por ello puede conducir a considerar a las medidas de posibilidad y necesidad como probabilidades de eventos no previsibles, por lo que esta interpretación está completamente desvinculada de las anteriores.

#### 2.4.3 Comparación axiomática entre las medidas de probabilidad, y las medidas de posibilidad y necesidad

Una comparativa axiomática entre la medida de probabilidad  $P$  y las medidas de posibilidad  $\Pi$  y de necesidad  $N$  definidas en el marco de la teoría de la evidencia cuando aplican a sucesos crisp en  $\wp(\Omega)$  se describe en los siguientes puntos:

- Al igual que la medida de probabilidad  $P$  tiene asociada una función de masa de probabilidad  $p$  (función de densidad  $f$  en el caso continuo) que evalúa la probabilidad de los conjuntos unitarios, la medida  $\Pi$  tiene la distribución de posibilidad  $\pi$ .

Densidad  $p$ , probabilidad  $P$

Distribución  $\pi$ , posibilidad  $\Pi$ ,  
necesidad  $N$

- Tal y como la suma de la función de masa de probabilidad  $p$  sobre el conjunto de elementos del universo de discurso  $\Omega$  debe ser uno, el supremo en  $\Omega$  de la distribución de posibilidad  $\pi$  debe ser también uno.

$$\sum_{x \in \Omega} p(x) = 1$$

$$\text{Sup}_{x \in \Omega} \pi(x) = 1$$

- Al igual que la probabilidad  $P(A)$  es la suma de  $p(x)$  en  $A$ , la posibilidad  $\Pi(A)$  es el supremo de  $\pi(x)$  en  $A$ .

$$P(A) = \sum_{x \in A} p(x)$$

$$\Pi(A) = \text{Sup}_{x \in A} \pi(x)$$

- Análogamente al cumplimiento de que la probabilidad de un suceso  $P(A)$  más la probabilidad del suceso complementario  $P(A^c)$  es igual a uno, se cumple que el grado de posibilidad  $\Pi(A)$  más el grado de necesidad del suceso complementario  $N(A^c)$  es la unidad.

$$P(A) + P(A^c) = 1$$

$$\Pi(A) + N(A^c) = 1$$

- Mientras que la probabilidad de la unión  $P(A \cup B)$  es la suma de las probabilidades  $P(A)$  y  $P(B)$  para sucesos  $A$  y  $B$  disjuntos, la posibilidad de la unión  $\Pi(A \cup B)$  es el máximo de las posibilidades  $\Pi(A)$  y  $\Pi(B)$  (en este caso no se requiere de la condición  $A \cap B = \emptyset$ , por lo que el axioma posibilista es menos restrictivo).

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad \text{si } A \cap B = \emptyset$$

$$\Pi(A \cup B) = \text{Max}(\Pi(A), \Pi(B))$$

- Mientras que la probabilidad de la intersección  $P(A \cap B)$  es el producto de las probabilidades  $P(A)$  y  $P(B)$  para sucesos  $A$  y  $B$  independientes, la necesidad de la unión  $N(A \cup B)$  es el mínimo de las necesidades  $N(A)$  y  $N(B)$  (en este caso no se puede establecerse una relación en términos de la medida de posibilidad  $\Pi$  ya que en general la posibilidad de la intersección no es el mínimo de las posibilidades; la condición de que  $A$  y  $B$  son independientes no es requerida en la teoría de la posibilidad, por lo que el axioma posibilista es también más flexible).

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \quad \text{si } A, B \text{ ind.}$$

$$N(A \cap B) = \text{Min}(N(A), N(B))$$

- Por último, cabe mencionar que la teoría de la probabilidad no modela adecuadamente la ignorancia total acerca de un suceso  $A$  dado que, de acuerdo al principio de razón insuficiente, asume equiprobabilidad (la equiprobabilidad es muy distinto a la ignorancia). La teoría de la posibilidad establece que la certeza del suceso se encuentra entre su grado de necesidad y su grado de posibilidad,

que cuando no se sabe nada, son cero y uno respectivamente, lo que obviamente parece más adecuado que asegurar equiprobabilidad, aunque menos informativo.

Ignorancia:  $p(x) = 1/|A| \mid x \in A$

Ignorancia:  $N(A)=0, \Pi(A)=1$

### Comparativa Axiomática Probabilidad-Posibilidad:

Probabilidad ( $A, B \in \wp(\Omega)$ )

-Distribución  $p$ , Probabilidad  $P$

$$-\sum_{x \in \Omega} p(x) = 1$$

$$-P(A) = \sum_{x \in A} p(x)$$

$$-P(A) + P(A^c) = 1$$

$$-P(A \cup B) = P(A) + P(B) \text{ si } A \cap B = \Phi$$

$$-P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \text{ si } A, B \text{ indep.}$$

Ignorancia:  $x \in A, p(x) = 1/|A|$   
Equiprobabilidad  $\neq$  Ignorancia

Posibilidad ( $A, B \in \wp(\Omega)$ )

-Distribución  $\pi$ , Posibilidad  $\Pi$

$$-\sup_{x \in \Omega} \pi(x) = 1$$

$$-\Pi(A) = \sup_{x \in A} \pi(x)$$

$$-\Pi(A) + N(A^c) = 1$$

$$-\Pi(A \cup B) = \max(\Pi(A), \Pi(B))$$

$$-N(A \cap B) = \min(N(A), N(B))$$

Ignorancia:  $N(A)=0, \Pi(A)=1$

Figura 2. 6: Comparativa axiomática posibilidad-probabilidad

Por otro lado, la propiedad de aditividad de la medida de probabilidad para cualquier conjunto de sucesos  $\{A_i\}_{i=1, \dots, n} \subseteq \wp(\Omega)$  es:

$$P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_i \cap A_j) + \dots + (-1)^{n+1} \cdot P(A_1 \cap \dots \cap A_n) \quad (2. 81)$$

que tiene su contrapartida en el marco de la teoría de la posibilidad, satisfaciéndose:

$$\begin{aligned}
 N(A_1 \cup \dots \cup A_n) &\geq \sum_{i=1}^n N(A_i) - \sum_{i < j} N(A_i \cap A_j) + \dots + (-1)^{n+1} \cdot N(A_1 \cap \dots \cap A_n) \\
 \Pi(A_1 \cap \dots \cap A_n) &\leq \sum_{i=1}^n \Pi(A_i) - \sum_{i < j} \Pi(A_i \cup A_j) + \dots + (-1)^{n+1} \cdot \Pi(A_1 \cup \dots \cup A_n)
 \end{aligned}
 \tag{2. 82}$$

También existe una comparativa axiomática similar cuando se sustituyen las medidas de necesidad  $N$  y de posibilidad  $\Pi$  por las medidas de creencia  $Cr$  y de plausibilidad  $Pl$  respectivamente, mostrada en la Figura 2. 7.

Comparativa Axiomática Probabilidad-Evidencia:	
<b>Probabilidad (<math>A, B \in \wp(\Omega)</math>)</b> -Distribución $p$ , Probabilidad $P$ - $\sum_{x \in \Omega} p(x) = 1$ - $P(A) = \sum_{x \in A} p(x)$ - $P(A) + P(A^c) = 1$ -Ignorancia: $x \in A, p(x) = 1/ A $ Equiprobabilidad $\neq$ Ignorancia	<b>Evidencia (<math>A, B \in \wp(\Omega)</math>)</b> -Distribución $m$ , Plausibilidad $Pl$ - $\sum_{B \in \wp(\Omega)} m(B) = 1$ - $Pl(A) = \sum_{B \cap A \neq \emptyset} m(B)$ - $Bel(A) = \sum_{B \subseteq A} m(B)$ - $Pl(A) + Bel(A^c) = 1$ -Ignorancia: $Bel(A) = 0, Pl(A) = 1$

Figura 2. 7: Comparativa axiomática evidencia-probabilidad

Las propiedades de subaditividad de las medidas de necesidad y de posibilidad descritas en las ecuaciones (2. 81) y (2. 82) se cumplen también para las medidas de creencia y de plausibilidad.

### 2.4.4 Transformaciones posibilidad-probabilidad

En algunas situaciones, cuando se modela la incertidumbre en un problema real, puede ser ventajoso transformar una distribución de probabilidad en una distribución de posibilidad y viceversa.

Así, por ejemplo, cuando se usa la teoría de la posibilidad en vez de la teoría de la probabilidad, una de estas ventajas, que ha resultado de utilidad en esta tesis, es la menor dificultad de resolución de los modelos posibilistas en comparación con sus contrapartidas probabilistas. Obviamente la ganancia en tiempos de cálculo es compensada por una pérdida de precisión en los resultados de salida (ver [Dubois, 1986b]).

Además, existen estados de información que la probabilidad no puede modelar y en cambio la posibilidad sí, como por ejemplo la ignorancia total, y al contrario, como ocurre cuando se modela un proceso completamente aleatorio, por lo que este tipo de transformaciones resulta ser bastante valioso.

Finalmente estas transformaciones pueden ser de gran utilidad para el modelado de la información imperfecta en problemas en donde deben ser tratadas la incertidumbre y la imprecisión de manera simultánea, permitiendo así combinar varios tipos de información ([Dubois, 1993b]).

En la literatura existen dos tendencias claras en cuanto a los requerimientos exigidos en las transformaciones probabilistas y posibilistas que además permiten clasificarlas. La primera tendencia considera una pérdida o ganancia de información y asume que los principios básicos **de consistencia** (esto es  $p(x) \leq \pi(x)$ ) y de **preservación de preferencias** (esto es  $p(x) \geq p(y) \Leftrightarrow \pi(x) \geq \pi(y)$ ) deben ser satisfechos. Una segunda tendencia se basa en el **principio de invarianza de información e incertidumbre** que establece que la información de la distribución de probabilidad ha de ser igual que la información de la distribución de posibilidad. Sin embargo, en este caso otro tipo de principios, como el de consistencia o el de preservación de preferencias, puede no satisfacerse.

A continuación se describen, brevemente, las transformaciones más importantes entre distribuciones de probabilidad y posibilidad, que han sido encontradas en la literatura.

#### **2.4.4.1 La transformación óptima**

La teoría de la evidencia considera a la medida de posibilidad como una probabilidad sobre intervalos, y a la medida de probabilidad como una probabilidad sobre puntos, y conduce a interpretar a la posibilidad como una cota superior de la probabilidad, tal y como enuncia el principio de consistencia. Además, la representación posibilista está basada en una estructura de orden en vez de una estructura aditiva como ocurre con la representación probabilista. Por lo tanto, se deduce que la transformación de probabilidad a posibilidad conlleva una pérdida de información dado que este último esquema es menos explicativo que la probabilidad. La transformación inversa añade o incorpora entonces nueva información.

Por ello, estas transformaciones, que obviamente deben satisfacer algunos requerimientos justificables, sin embargo, no preservan la cantidad de información (intuitivamente conectada con la cantidad de incertidumbre), es decir, no son meros cambios de escala.

En el paso de una distribución de probabilidad a una distribución de posibilidad, dado que es inevitable una pérdida de información, se define la denominada **transformación óptima de probabilidad a posibilidad**, que es aquella que pierde menos información, o lo que es lo mismo, aquella que proporciona una distribución más precisa y específica (**principio de máxima especificidad**), es decir, de menor área, por supuesto cumpliendo el principio de consistencia y el de preservación de preferencia. La distribución de posibilidad óptima en el caso discreto resulta ser entonces (ver [Dubois, 1993b]):

$$\pi(x_i) = \sum_{j=i}^n p_j \quad \forall i=1, \dots, n \quad (2.83)$$

en donde  $\Omega = \{x_1, \dots, x_n\}$  y  $p_i = P(x_i)$  para  $i=1, \dots, n$  son probabilidades ordenadas de manera decreciente ( $p_i \geq p_{i+1}$ ) para cada uno de los sucesos de  $\Omega$ .

La correspondiente transformación para el caso continuo supuesto que la función de densidad de probabilidad  $p$  es unimodal con moda  $x_0$ , viene dada por la suma de las colas de probabilidad  $(-\infty, x]$  y  $[f(x), +\infty)$ , cuando  $x \leq x_0$  y  $f(x) = \text{Max}\{y \geq x_0 / p(y) \geq p(x)\}$ . Por lo tanto:

$$\pi(x) = \int_{-\infty}^x p(t) \cdot dt + \int_{f(x)}^{+\infty} p(t) \cdot dt \quad (2.84)$$

Cuando  $x \geq x_0$  entonces las colas de probabilidad a sumar son  $(-\infty, h(x)]$  y  $[x, +\infty)$ , siendo  $h(x) = \text{Min}\{y \leq x_0 / p(y) \geq p(x)\}$ .

En el capítulo sexto de esta tesis se utiliza esta transformación para estimar una distribución de posibilidad para la pendiente de la demanda residual de un generador de un mercado eléctrico.

Recíprocamente, para calcular la **transformación óptima de posibilidad a probabilidad** lo que se trata es de encontrar la medida de probabilidad que gane la menor información posible de entre las que satisfacen el principio de consistencia y las relaciones de preferencias. Para ello se usa el principio de razón insuficiente que asume una probabilidad uniforme (es decir, con máxima incertidumbre, que es coherente con la ganancia de la mínima información) sobre el conjunto de  $n$   $\pi_i$ -cortes

$A_i$ , en donde  $\{\pi_i, i=1, \dots, n\}$  se obtiene mediante  $n$  sorteos de una distribución uniforme  $(0,1]$ . Reordenando los grados de posibilidad de manera decreciente ( $\pi_i \geq \pi_{i+1}$ ) la densidad de probabilidad obtenida viene dada por:

$$p(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\pi_i - \pi_{i+1}}{|A_i|} \cdot \mu_{A_i}(x), \forall x \quad (2.85)$$

en donde  $|A_i|$  es la longitud del alfa corte y  $\mu_{A_i}(x)$  la función de pertenencia del conjunto crisp  $A_i$ .

Este procedimiento fue sugerido por Yager (ver [Yager, 1982]) y propuesto por Dubois y Prade (ver [Dubois, 1982a] y [Dubois, 1983]), y por otros autores desde el punto de vista de la teoría de la evidencia (ver [Smets, 1990] y [Williams, 1982]).

La generalización para el caso continuo donde  $\Omega$  es un intervalo cerrado y cuando  $\pi$  es una distribución semicontinua, creciente, unimodal y con soporte acotado es la siguiente:

$$p(x) = \int_0^{\pi(x)} \frac{d\pi}{|A_\pi|}, \forall x \quad (2.86)$$

#### 2.4.4.2 La transformación inversa de la transformación óptima

Las transformaciones citadas anteriormente no son inversas una de la otra porque de hecho no se basan en criterios opuestos.

En [Dubois, 1993b] se obtiene la transformación de posibilidad a probabilidad que es **inversa de la transformación óptima de probabilidad a posibilidad**. En el caso discreto resulta ser:

$$p(x_i) = \pi(x_i) - \pi(x_{i+1}) \quad (2.87)$$

El problema principal de esta transformación es que no preserva las preferencias para el decisor. Además, no cumple el principio de razón insuficiente ya que la masa  $\pi_i - \pi_{i+1}$  se asigna al elemento  $x_i$  y no uniformemente en el  $\pi_i$ -corte de la distribución de posibilidad.

En el caso continuo en el que la distribución de posibilidad  $\pi$  es diferenciable, unimodal y con soporte acotado, la distribución de probabilidad resultante de esta transformación inversa coincide con:

$$p(x) = \frac{1}{\left(\frac{1}{\pi'(x)}\right) - \left(\frac{1}{\pi'(y)}\right)} \quad (2.88)$$

En donde  $[x,y]$  es el  $\pi(x)$ -corte de  $\pi$ , y  $\pi'$  es su derivada.

En [Dubois, 1986b] se obtiene una transformación de probabilidad a posibilidad **inversa de la transformación óptima de posibilidad a probabilidad**, que puede ilustrarse con el siguiente ejemplo, consistente con la intuición.

Supongamos que realizamos el experimento de tirar una moneda trucada, con una probabilidad  $p_c$  de salir cara mayor que la probabilidad  $p_x=1-p_c$  de salir cruz ( $1 \geq p_c \geq 0.5 \geq p_x \geq 0$ ). Dado que las caras es el resultado del experimento más frecuente, se puede decir que existe alguna “necesidad” de que el evento resultado del experimento sea cara, y que existe alguna “imposibilidad” de que este evento sea cruz. Una estimación natural de la necesidad de salir cara es el exceso de probabilidad  $n_c=p_c-p_x$  a favor de las caras. Partiendo del hecho de que la necesidad de un evento corresponde con la imposibilidad del evento contrario, la posibilidad de que salga cruz en este experimento es entonces  $\pi_x=1-n_c$ <sup>4</sup>. Por otro lado, debido a que el exceso de probabilidad no es a favor de las cruces podemos considerar que  $n_x=0$  y por lo tanto que  $\pi_c=1$ .

Generalizando estos resultados para un conjunto de eventos  $\{x_1, \dots, x_n\}$  con probabilidades  $\{p_1, \dots, p_n\}$  ordenadas, por simplificar, de manera decreciente ( $p_i \geq p_{i+1}$ ,  $i+1 \leq n$ ) se tiene el siguiente resultado: la necesidad del conjunto  $A_i = \{x_1, \dots, x_i\}$  de los  $i$  eventos más probables es el exceso de probabilidad de los elementos de  $A_i$  con respecto al elemento con mayor probabilidad en el complementario de  $A_i$  (es decir, con respecto a  $x_{i+1}$  para  $i+1 \leq n$ ), concluyendo que la medida de necesidad  $N$  de  $A_i$  es:

$$N(A_i) = \sum_{j=1, i} (p_j - p_{i+1}) \quad (2.89)$$

Y de forma general para cualquier subconjunto  $A$  de  $\{x_1, \dots, x_n\}$ :

$$N(A) = \max_{A_i \subseteq A} N(A_i) \quad (2.90)$$

La medida de posibilidad  $\Pi$  inducida por esta medida de necesidad será entonces:

---

<sup>4</sup>La dualidad de la posibilidad de cruz  $\pi_x$  y de la necesidad de cara  $n_c$  se refleja precisamente en la relación  $\pi_x + n_c = 1$  (o de forma análoga para  $\pi_c$  y  $n_x$  en  $\pi_c + n_x = 1$ ). De esta forma, cuanto mayor sea la necesidad de cara menor será la posibilidad de cruz. Por ejemplo, la ocurrencia del evento cara es segura ( $n_c=1$ ) si y sólo si la ocurrencia del evento cruz es imposible ( $\pi_x=0$ ).

$$\Pi(A) = 1 - N(A^c) \quad (2.91)$$

Además, se puede probar el principio de consistencia:

$$N(A) \leq P(A) = \sum_{x_j \in A} p_j \leq \Pi(A) \quad (2.92)$$

Con este resultado es fácil determinar la posibilidad de los conjuntos unitarios  $\{x_i\}$ , obteniéndose así la distribución de posibilidad que subyace:

$$\Pi(\{x_i\}) = 1 - N(\{x_i\}^c) = 1 - N(A_{i-1}) = 1 - \sum_{j=1, i-1} (p_j - p_i) = \sum_{j=1, n} \min(p_j, p_i) \quad (2.93)$$

Para el caso continuo, la distribución de posibilidad anterior se generaliza con la siguiente integral:

$$\pi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \min(p(x), p(t)) dt \quad (2.94)$$

Por su facilidad de implementación, la transformación descrita en este apartado y la que a continuación se describe, han sido utilizadas en el capítulo sexto de esta tesis para transformar a posibilidad un histograma de probabilidad para la pendiente de la demanda residual de un generador de energía eléctrica.

#### 2.4.4.3 La transformación normalizada o escalada

Asumiendo que se tiene una distribución de probabilidad discreta  $P = \{p_i, i=1, \dots, n\}$ , otra posible transformación es construir la distribución de posibilidad  $\pi = \{\pi_i, i=1, \dots, n\}$  proporcional a la medida de probabilidad, esto es:

$$\pi_i = k \cdot p_i \quad i = 1, \dots, n \quad (2.95)$$

En este caso, la condición  $\Pi(\Omega) = 1$  claramente implica que  $1/k = \max_i(p_i)$ , y por tanto la distribución de posibilidad proporcional resulta ser (ver [Dubois, 1986b]):

$$\pi_i = \frac{p_i}{\max_{j=1, \dots, n} \{p_j\}} \quad (2.96)$$

Además, al ser  $\sum_i p_i=1$  se cumple siempre  $\pi_i \geq p_i$ . Sin embargo, el principio de consistencia generalmente no se cumple para sucesos con más de un elemento (ver [Dubois, 1980] para un ejemplo).

En el caso continuo la distribución de posibilidad  $\pi=\{\pi(x), x \in \Omega\}$  resultante de la distribución de probabilidad  $P=\{p(x), x \in \Omega\}$  es:

$$\pi(x) = \frac{p(x)}{\text{Sup}_{x \in \Omega} \{p(x)\}} \quad x \in \Omega \quad (2.97)$$

La medida de posibilidad derivada de esta transformación, denominada **transformación normalizada** o **escalada**, resulta de hacer  $\Pi(A) = \text{Sup}_{x \in A} \{\pi(x)\}$  para cualquier  $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ .

#### 2.4.4.4 La transformación de la conservación de información

Geer y Klir (ver [Geer, 1991]) proponen una transformación entre distribuciones de posibilidad y probabilidad basada en la preservación de la información (y por tanto de la incertidumbre), y requieren además que la medida en una teoría, sea la transformación mediante un cambio de escala de la medida en la otra teoría. A esta transformación se la conoce como **transformación de la conservación de la información**.

Geer y Klir estudian las transformaciones de escala ordinaria al ser menos rígidas en su aplicación que las de escala de diferencia y de ratio (ver [Klir, 1989]). Entre ellas se consideran las escalas de intervalo y de intervalo-logarítmica, y se prueba que la transformación de escala de intervalo existe y es única solamente para traducciones entre probabilidad a posibilidad, pero no al contrario. Sin embargo, la transformación de escala intervalo-logarítmica existe y es única en ambas direcciones. Además, la transformación de escala de intervalo no cumple el principio de consistencia de Dubois y Prade, en contra de lo que ocurre con la transformación de escala de intervalo-logarítmica.

La forma de obtener las distribuciones de probabilidad  $P=\{p_i, i=1, \dots, n\}$  ó posibilidad  $\pi=\{\pi_i, i=1, \dots, n\}$  es, en primer lugar, relacionándolas mediante la escala elegida (de intervalo o de intervalo-logarítmica), y, en segundo lugar, obteniendo los parámetros de dicha escala imponiendo las dos siguientes condiciones:

- La normalización de las medidas de probabilidad y posibilidad ( $\sum_i p_i=1$  y  $\max_i \pi_i=1$ ).
- La invarianza de incertidumbre, que se consigue haciendo la medida de entropía de Shannon  $E(P)$  igual a la suma de la medida de falta de especificidad  $V(m)$  y de

disonancia  $E(m)$  para la asignación básica  $m$  asociada a  $\pi$  (esto es  $m_i = \pi_i - \pi_{i+1}$  para  $i=1, \dots, n$  siendo  $\pi_i \leq \pi_{i+1}$  y  $\pi_{n+1} = 0$ ), descritas en este capítulo en los apartados 2.3.7 y 2.3.8.

Sin embargo, bajo estas condiciones solamente se puede asegurar la existencia y unicidad de los parámetros que definen las escalas consideradas, como raíces de la función definida mediante la diferencia  $E(P) - V(m) - E(m)$ .

#### 2.4.4.5 La transformación de Civanlar y Trussel

En [Civanlar, 1986] se muestra otra transformación de probabilidad a posibilidad. En este trabajo se encuentra una distribución de posibilidad tal que es mínima en media cuadrática (criterio que, para minimizar el ancho de la distribución, es más adecuado que minimizar la media, ver [Czogala, 1982]). Además, se debe satisfacer el denominado **índice de consistencia entre posibilidad y probabilidad** definido por Zadeh (ver [Zadeh, 1978]), que impone que el producto escalar entre la probabilidad y la posibilidad debe ser mayor o igual que un umbral  $c$  próximo a la unidad (para que no sean ortogonales), es decir, la distribución es el resultado de resolver el siguiente problema de optimización funcional:

$$\begin{aligned} \text{Min}_{\pi} \quad & \frac{1}{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} (\pi(x))^2 \cdot dx & (2.98) \\ \text{s.a.} \quad & \int_{-\infty}^{+\infty} \pi(x) \cdot p(x) \cdot dx \geq c \\ & \pi \in \{\pi(x) / 0 \leq \pi(x) \leq 1\} \end{aligned}$$

La solución óptima de este problema de optimización funcional es la siguiente distribución de posibilidad:

$$\pi(x) = \begin{cases} \lambda \cdot p(x) & \text{si } \lambda \cdot p(x) < 1 \\ 1 & \text{si } \lambda \cdot p(x) \geq 1 \end{cases} \quad (2.99)$$

donde  $\lambda$  es el multiplicador de Lagrange del problema que, en el óptimo, debe satisfacer:

$$\lambda \cdot \int_{\lambda \cdot p(x) < 1} (p(x))^2 \cdot dx + \int_{\lambda \cdot p(x) \geq 1} p(x) \cdot dx = c \quad (2.100)$$

Para obtener el valor de  $\lambda$  se han de utilizar técnicas de búsqueda de raíces de funciones. Cuando alguna de las anteriores integrales no tenga una función primitiva sencilla, debe además utilizarse integración numérica.

La desventaja de este método es que depende en gran medida del valor del umbral  $c$ , lo que puede hacer no cumplir el principio de consistencia entre posibilidad y probabilidad definido por Dubois y Prade.

#### 2.4.4.6 La transformación de Wonneberger

Wonneberger (ver [Wonneberger, 1994]) propone una transformación entre probabilidad y posibilidad que satisface el principio de consistencia de Dubois y Prade, el principio de invarianza de información de Klir, y el principio de preservación de preferencias. Sin embargo, la transformación es sumamente complicada de construir y manejar, y está lejos de la transformación óptima en términos de especificidad.

#### 2.4.4.7 La transformación triangular truncada

En [Lasserre, 1997] se propone transformar una distribución de probabilidad en una distribución de posibilidad que es triangular truncada (ver Figura 2. 8). La ventaja fundamental de utilizar este tipo de distribuciones es que resultan más manejables que otras obtenidas mediante otro tipo de transformaciones, que usualmente derivan en distribuciones de posibilidad no lineales (como ocurre con la transformación óptima o la transformación de Wonneberger). Las distribuciones triangulares truncadas están especialmente indicadas para la representación de errores de medida en sensores.

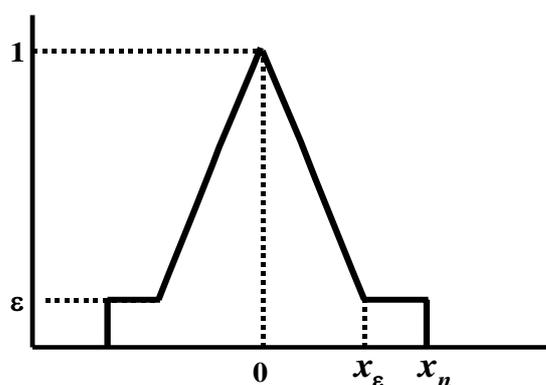


Figura 2. 8: Distribución de posibilidad triangular truncada

La distribución triangular truncada obtenida por Lasserre cumple el principio de consistencia de Dubois y Prade al ser mayor o igual que la distribución óptima. Además, es subóptima en términos de especificidad ya que es la distribución de mínima área con punto  $x_\varepsilon$  común con la distribución óptima. En este sentido si  $F$  es la distribución de probabilidad conocida y  $[-x_n, x_n]$  es el soporte prefijado de la

distribución de posibilidad, el punto  $x_\varepsilon$  que la determina completamente debe satisfacer:

$$F'(x_\varepsilon) \cdot [x_\varepsilon - 2 \cdot x_n] - [1 - F(x_\varepsilon)] + \frac{1}{2} = 0 \quad (2.101)$$

Utilizando métodos numéricos relativamente sencillos, Lasserre muestra las distribuciones triangulares truncadas correspondientes a las distribuciones de probabilidad normal (o gaussiana), exponencial, triangular y uniforme.

## 2.5 Referencias

- [Berry, 1996] D. A. Berry, *Statistics, a Bayesian Perspective*. London, 1996.
- [Bilgic, 1997] T. Bilgic and I. B. Turksen, "Measurement of Membership Functions: Theoretical and Empirical work," in *Handbook of Fuzzy Sets and Systems*, vol. 1, D. P. Dubois, H., Ed., 1997.
- [Blockley, 1985] D. I. Blockley, "Fuzziness and Probability: A discussion of Gaines' axioms". *Civ. Engng Syst.*, vol. 2, 1985.
- [Buchanan, 1984] B. G. Buchanan and E. H. Shortliffe, *Rule-Based Expert Systems: The MYCIN Experiments fo the Stanford Heuristic Programming Proyect*: Addison-Wesley, Reading, MA, 1984.
- [Buisson, 1985] J. C. Buisson, H. Farreny, and H. Prade, "The development of a Medical Expert System and the Treatment of Imprecision in the Framework of Possibility Theory". *Information sciences*, vol. 37, pp. 211-226, 1985.
- [Carnap, 1950] R. Carnap, *Logical Foundations of Probability*. Chicago: Univ. Press., 1950.
- [Chang, 1994] P. T. Chang and E. S. Lee, "Fuzzy Arithmeics and Comparison of Fuzzy Numbers," in *Fuzzy Optimization*, M. Delgado, Kacprzyk, J., Verdegay, J.L., Amparo, M.A., Ed. New York: Physica-Verlag, 1994.
- [Cheeseman, 1988] P. Cheeseman, "Probabilistic versus Fuzzy reasoning," in *Uncertainty in Artificial Intelligence*, L. y. L. J. Kanal, Ed. North-Holland, Amsterdam, 1988, pp. 85-102.
- [Civanlar, 1986] M. Civanlar and H. Trussel, "Constructing membership functions using stadistical data". *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 18, pp. 1-13, 1986.
- [Czogala, 1982] E. Czogala, S. Gottwald, and W. Pedrucz, "Contribution to Application of Energy measure of Fuzzy Sets". *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 8, pp. 205-214, 1982.
- [Dempster, 1967] A. P. Dempster, "Upper and Lower Probabilities Induced by a Multivalued Mapping". *Ann. Math. Statistics*, vol. 38, pp. 325-339, 1967.
- [Dubois, 1986a] D. Dubois, "Belief Structures, Possibility Theory and Decomposable confidence measures on finite Sets". *Computers and Artificial Intelligence (Bratislava)*, vol. 5 (5), pp. 311-318, 1986a.
- [Dubois, 1997] D. Dubois, S. Moral, and H. Prade, "A Semantic for Possibility Theory based on Likelihoods". *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 205, pp. 359-380, 1997.
- [Dubois, 1980] D. Dubois and H. Prade, *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications*. New York: Academic Press, 1980.
- [Dubois, 1982a] D. Dubois and H. Prade, "On Several Representations of an Uncertain Body of Evidence," in *Fuzzy Information and Decision Processes*, M.M. Gupta, and E. Sanchez, Eds. ed. North-Holland, Amsterdam, 1982a, pp. 167-181.

- [Dubois, 1982b] D. Dubois and H. Prade, "A Unifying View of comparison Indices in a Fuzzy Set-Theoretic Framework," in *Fuzzy Sets and Possibility Theory - Recent Developments*, R. R. Yager, Ed.: Pergamon Press, 1982b.
- [Dubois, 1983] D. Dubois and H. Prade, "Unfair Coins and Necessity Measures: Towards a possibilistic Interpretation of Histograms". *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 10, pp. 15-20, 1983.
- [Dubois, 1986b] D. Dubois and H. Prade, "Fuzzy Sets and Statistical Data". *European Journal of Operation Research*, vol. 25, pp. 345-356, 1986b.
- [Dubois, 1988a] D. Dubois and H. Prade, "Modelling Uncertainty and Inductive inference". *Acta Psychologica*, vol. 68, pp. 53-78, 1988a.
- [Dubois, 1988b] D. Dubois and H. Prade, *Possibility Theory*. New York: Plenum Press, 1988b.
- [Dubois, 1988c] D. Dubois and H. Prade, "Representation and Combination of Uncertainty with Belief Functions and Possibility Measures". *Computational Intelligence*, vol. 4, No. 3, 1988c.
- [Dubois, 1989] D. Dubois and H. Prade, "Fuzzy sets, probability and measurement". *European Journal of Operation Research*, vol. 40, pp. 135-154, 1989.
- [Dubois, 1991] D. Dubois and H. Prade, "Fuzzy Sets in Approximate Reasoning, Part 1: Inference with Possibility Distributions". *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 40, pp. 143-202, 1991.
- [Dubois, 1992] D. Dubois and H. Prade, "When Upper Probabilities are Possibility Measures". *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 49, pp. 65-74, 1992.
- [Dubois, 1993a] D. Dubois and H. Prade, "Fuzzy sets and Probability: Misunderstandings, bridges and gaps," presented at 2<sup>o</sup> IEEE International Conference on Fuzzy Systems, San Francisco, California, 1993a.
- [Dubois, 1993b] D. Dubois, H. Prade, and S. Sandri, "On possibility/probability transformations," in *Fuzzy Logic*, R. L. a. M. Roubens, Ed.: Kluwer Academic Publishers, 1993b, pp. 103-112.
- [Dubois, 1993c] D. Dubois, H. Prade, and R. R. Yager, *Readings in Fuzzy Sets and Intelligent Systems*, Dubois, D. , Prade, H. and Yager, R.R. ed. San Mateo, CA: Morgan Kauffmann, 1993c.
- [Fagin, 1991] R. Fagin and J. Halpern, "A new Approach to Updating Beliefs.," in *Uncertainty in Artificial Intelligence*, H. M. Bonissone P.P., Kanal L.N. and Lemmer J.F., Ed. North Holland, Amsterdam, 1991, pp. 347-374.
- [Fishburn, 1986] P. C. Fishburn, "The axioms of Subjective Probability". *Statistical Science*, vol. 1, pp. 335-358, 1986.
- [Franklin, 2001] J. Franklin, "Resurrecting Logical Probability". *Erkenntnis*, vol. 55, pp. 277-305, 2001.
- [Gaines, 1978] B. R. Gaines, "Fuzzy and Probability Uncertainty Logics". *Information and Control*, vol. 38, pp. 154-169, 1978.
- [Geer, 1991] J. F. Geer, "A Mathematical Analysis of Information-Preserving Transformations between Probabilistic and Possibilistic formulations of

- Uncertainty". *International Journal of General Systems*, vol. 20, pp. 143-176, 1991.
- [Good, 1950] I. J. Good, *Probability and the weighting of Evidence*: Hafner, 1950.
- [Good, 1983] I. J. Good, "Good Thinking: the foundations of probability and its Applications," Univ. Minnesota Press, Minneapolis 1983.
- [Haralick, 1993] Haralick and Shapiro, *Computer and Robot Vision*, vol. 2, 1993.
- [Hartley, 1928] R. V. L. Hartley, "Transmission of Information". *The Bell Systems Technical J.*, vol. 7, pp. 535-563, 1928.
- [Hersh, 1976] H. M. Hersh and A. Caramazza, "A Fuzzy Set Approach to modifiers and Vagueness in natural language". *J. of Exp. Psycho. General*, vol. 105, pp. 254-276, 1976.
- [Hisdal, 1991] E. Hisdal, "Naturalized Logic and Chain Sets". *Information Sciences*, vol. 57-58, pp. 31-77, 1991.
- [Jaffray, 1992] J. Y. Jaffray, "Bayesian Updating and Belief Functions". *IEEE Trans. SMC*, vol. 22, pp. 1144-1152, 1992.
- [Kaufmann, 1988] A. Kaufmann and G. M., *Fuzzy Mathematical Models in Engineering and Management Science*, 1988.
- [Keynes, 1962] J. M. Keynes, *A treatise on Probability*. New York: Harper and Row, 1962.
- [Klir, 1989] G. J. Klir, "Probability-Possibility conversion," presented at Proc. 3rd IFSA Congress, Seattle, 1989.
- [Klir, 1988] G. J. Klir and T. A. Folger, *Fuzzy Sets, Uncertainty, and Information*. New York, Binghamton, 1988.
- [Kosko, 1990] B. Kosko, "Fuzzyness vs. Probability". *International Journal of General Systems*, vol. 17, pp. 211-240, 1990.
- [Lasserre, 1997] V. Lasserre, G. Mauris, and L. Foulloy, "A simple probability-possibility transformation for measurement error representation: A truncated triangular transformation," presented at Seventh IFSA World Congress, 1997.
- [Lazzari, 2003] L. L. Lazzari and E. A. M. Machado, "Acerca de los Criterios para ordenar Numeros Borrosos," presented at Emergent Solutions for the Information and Knowledge Economy, León (Spain), 2003.
- [Lewis, 1986] D. Lewis, *Counterfactuals*, Basil Blackwell, Oxford, 1973, 2nd. ed. Worcestes, UK: Billing and Sons Ltd, 1986.
- [Molchanov, 2004] I. Molchanov, *Theory of Random Sets*: Springer, 2004.
- [Nguyen, 1978] H. T. Nguyen, "A note on the Extension Principle for Fuzzy Sets". *Journal of Math. Ana. and Appl.*, vol. 64, pp. 369-380, 1978.
- [Pedrycz, 1993] W. Pedrycz, *Fuzzy Control and Fuzzy Systems*. New York: John Wiley & Sons, 1993.
- [Popper, 1959] K. R. Popper, *The Logic of Scientific Discovery*. New York, Basic Books, 1959.
- [Prade, 1985] H. Prade, "A computational Approach to Approximate and Plausible Reasoning with Applications to Expert Systems". *IEEE Trans. on Plausible Reasoning with Applications to Expert Systems*, vol. PAMI 7, No. 3, 1985.

- [Ruspini, 1991] E. H. Ruspini, "Aproximate Reasoning: past, present, future". *Information Sciences*, vol. 57-58, pp. 297-317, 1991.
- [Shaffer, 1976] G. Shaffer, *A Mathematical Theory of Evidence*. Princeton: Princeton University Press, 1976.
- [Shannon, 1948] C. E. Shannon, "A Mathematical Theory of Communication". *Bell System Technical Journal*, vol. 27, pp. 379-423 y 623-656, 1948.
- [Shotliffe, 1976] E. H. Shotliffe, *Computer based Medical Consultation: MYCIN*. New York: American Elsevier, 1976.
- [Smets, 1982] P. Smets, "Possibilistic Inference from Statistical Data," presented at Proc. of the 2nd World Conf. on Mathematics at the Service of Ma, Las palmas, Spain, 1982.
- [Smets, 1987] P. Smets, "Upper and Lower Probabilities Functions versus Belief Functions," presented at Proc. International Symposium on Fuzzy Systems and Knowledge Engineering, Guangzhou, China, 1987.
- [Smets, 1990] P. Smets, "Constructing the Pignistic Probability Function in a Context of Uncertainty," in *Uncertainty in Artificial Intelligence 5*, M. Henrion, R. D. Shachter, L. N. Kanal, and J. F. Lemmer, Eds. North-Holland, 1990.
- [Smets, 1997] P. Smets, "Imperfect information: Imprecision - Uncertainty," in *Uncertainty Management in Information Systems. From Needs to Solutions*, A. Motro and P. Smets, Eds.: Kluwer Academic, 1997, pp. 225-254.
- [Smith, 1961] C. A. B. Smith, "Consistency in Statistical Inference and Decision". *J. Roy. Statist. Cos.*, vol. B23, pp. 1-37, 1961.
- [Smith, 1965] C. A. B. Smith, "Personal Probability and Statistical Analysis". *J. Roy. Statist. Cos.*, vol. A128, pp. 469-499, 1965.
- [Spohn, 1990] W. Spohn, "A general non-probabilistic theory of inductive reasoning," in *Uncertainty in Artificial Intelligence 4*, T. S. L. R.D. Shachter, L.N. Kanal and J.F. Lemmer, Ed. Holland, Amsterdam, 1990, pp. 149-158.
- [Sugeno, 1977] M. Sugeno, "Fuzzy Measures and Fuzzy Integrals: a survey," in *Fuzzy Automata and Decision Processes*. North Holland, Amsterdam: M.M. Gupta, G.N. Saridis and B.R. Gaines, 1977, pp. 89-102.
- [Thomas, 1979] S. F. Thomas, "A Theory of Semantics and Possible Inference with Application to Decision Analysis." Canada: University of Toronto, 1979.
- [Thomas, 1981] S. F. Thomas, "Possibilistic Uncertainty and Statistical Inference," presented at ORSA/TIMS, Houston, Texas, 1981.
- [Villar, 1997] J. Villar, "Aplicación de la teoría de conjuntos borrosos al diagnóstico de procesos industriales," in *Departamento de Electrónica y Automática*. Madrid: Tesis doctoral Universidad Pontificia de Comillas, 1997.
- [Walley, 1991] P. Walley, *Statistical Reasoning with Imprecise Probabilities*. London: Chapman and Hall, 1991.
- [Walley, 1982] P. Walley and T. Fine, "Toward a Frequentist Interpretation of Upper and Lower Probabilities". *Annals of Statistics*, vol. 10, pp. 741-761, 1982.

- [Williams, 1982] P. M. Williams, "Discussion of Shafer G: Belief Functions and Parametric Models". *J. Roy. Sta. Soc.*, vol. B44, pp. 343 et seq, 1982.
- [Wonneberger, 1994] S. Wonneberger, "Generalization of an Invertible Mapping Between Probability and Possibility". *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 64, pp. 229-240, 1994.
- [Yager, 1980] R. R. Yager, "On Choosing between Fuzzy Sets". *Kybernetes*, vol. 9, pp. 151-154, 1980.
- [Yager, 1981] R. R. Yager, "A procedure for ordering fuzzy subsets of the unit interval". *Information Science*, vol. 24, pp. 143-161, 1981.
- [Yager, 1982] R. R. Yager, "Level Sets for Membership Evaluation of Fuzzy Subsets," in *Fuzzy Sets and Possibility Theory; Recent Developments*, vol. 1, R. R. Yager, Ed.: Oxford: Pergamon Press, 1982, pp. 90-97.
- [Zadeh, 1965] L. A. Zadeh, "Fuzzy Sets". *Information and Control*, vol. 8, pp. 338-353, 1965.
- [Zadeh, 1978] L. A. Zadeh, "Fuzzy Sets as a Basis for a Theory of Possibility". *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 1, pp. 3-28, 1978.
- [Zadeh, 1979] L. A. Zadeh, "On the Validity of Dempster's rule of combination of evidence," in *Memo UCB/ERL No. 79/24*. Berkeley: University of California, 1979.
- [Zadeh, 1984] L. A. Zadeh, "A Mathematical Theory of Evidence". *AI Magazine*, vol. 3, pp. 81-83, 1984.
- [Zadeh, 1995] L. A. Zadeh, "Probability Theory and Fuzzy Logic are Complementary rather than Competitive". *Technometrics*, vol. 37, pp. 271-276, 1995.
- [Zadeh, 2002] L. A. Zadeh, "Probability theory and fuzzy logic." Berkeley, 2002.
- [Zimmermann, 1987] H. J. Zimmermann, *Fuzzy Sets, Decision Making, and Expert Systems*. Boston: Kluwer Academic, 1987.
- [Zimmermann, 1985] H. J. Zimmermann and P. Zysno, "Quantifying vagueness in decision models". *European Journal of Operation Research*, vol. 22, pp. 148-158, 1985.
- [Zysno, 1981] P. Zysno, "Modeling Membership Functions," in *Vol.1 of Quantitative Semantics*, vol. 12, B. B. Rieger, Ed. Studienverlag Borckmeyer, Bochum, 1981, pp. 350-375.



### **3. La teoría de juegos posibilistas: enfoques primal y dual**

Muchos de los procesos reales de decisión que abarcan problemas de índole económica, política, militar, etc., implican conflictos de intereses entre los decisores, dado que las ganancias recibidas por un decisor al seleccionar su decisión de manera independiente con el resto de decisores, se ven afectadas por todas las decisiones tomadas en el proceso de decisión. El objetivo fundamental de la teoría de juegos ha sido, precisamente, el modelado de estos procesos, así como la determinación del comportamiento de cada decisor o jugador.

En un juego el comportamiento de un jugador se ve afectado por la imperfección de la información disponible, siendo necesaria la consideración de un modelado adecuado de esta información imperfecta. Por un lado, este capítulo muestra una revisión de los principales enfoques de resolución de juegos en donde se utiliza la teoría de la posibilidad como herramienta de modelado de la incertidumbre e imprecisión. Por otro lado, propone dos enfoques teóricos de resolución, que se han denominado enfoques primal y dual, para juegos con estrategias finitas e infinitas. Como se verá en el capítulo quinto, los enfoques primal y dual propuestos serán aplicados a un mercado de la electricidad.



### 3.1 Organización del capítulo

El trabajo que se presenta en este capítulo es parte de la aportación original de esta tesis y en él se definen dos nuevos enfoques de resolución para algunos juegos posibilistas no cooperativos. Para ello se revisan previamente los conceptos fundamentales de la teoría de juegos clásicos, de la teoría de juegos posibilistas, y se muestra una revisión general de los principales enfoques de resolución.

La organización concreta del capítulo queda detallada como sigue.

En primer lugar, se introducen los conceptos básicos de la teoría de juegos clásicos, la notación utilizada a lo largo de este capítulo, los principales tipos de juegos, y la formulación de los juegos en estrategias puras (estrategias originales del problema) y mixtas (distribuciones de probabilidad sobre las estrategias puras). Se describen además los elementos del juego (estrategias, pagos, etc.) planteado para representar el mercado de electricidad que se analizará en el capítulo quinto.

A continuación se define lo que se entiende por juego posibilista, y se describen sus principales fuentes de información imperfecta, así como la interpretación de los juegos posibilistas en estrategias mixtas.

En los dos siguientes puntos se describe el planteamiento y la metodología de resolución de los denominados enfoques de resolución primal y dual propuestos en esta tesis para los juegos posibilistas bipersonales y  $K$ -personales (2 ó  $K$  jugadores respectivamente) con un conjunto finito de estrategias.

El planteamiento de los enfoques primal y dual para juegos infinitos se describe en el siguiente apartado, y son aplicados en el capítulo quinto al caso de un mercado eléctrico cuando las estrategias de los agentes es el conjunto de posibles potencias a generar.

Para cada tipo de juego posibilista se muestra una breve revisión bibliográfica de los enfoques fundamentales para su resolución.

## 3.2 La teoría de juegos clásicos

Desde el punto de vista económico-matemático, un **juego** es cualquier situación interactiva en la que una o más personas (jugadores) comparten el control de un grupo de variables (estrategias) y en la que cada uno debe alcanzar decisiones en relación con las actividades o posiciones del conjunto. La ganancia o éxito (que puede ser un pago o utilidad) de cada jugador depende no sólo de la acción propia, sino de la del grupo. La **teoría clásica de juegos** fue introducida por primera vez por el matemático estadounidense de origen húngaro John von Neumann<sup>5</sup> y trata de estudiar cualquier tipo de juego, ya sean juegos en los que el conjunto de estrategias de los jugadores es finito (también denominados **juegos finitos, discretos, matriciales o rectangulares**) o infinito (también denominados **juegos infinitos**, que son **continuos** cuando las estrategias se escogen en un intervalo real).

Las estrategias y las funciones de pago y de utilidad consideradas en un juego pueden definirse más específicamente como sigue.

Una **estrategia** en un juego es una regla de comportamiento o decisión completa para cada posible situación del juego en la que pueda encontrarse el jugador a lo largo del juego o, lo que es lo mismo, una alternativa preparada para cada circunstancia que pueda darse.

En ocasiones, de cara a extender el conjunto de estrategias de un juego, enriqueciendo con ello la información resultante, puede ser interesante considerar en el juego las denominadas estrategias mixtas. Una **estrategia mixta** es una distribución de probabilidad cualquiera sobre el conjunto de las estrategias, que en este caso se denominan **estrategias puras** (estrategias originales del juego). Cuando una estrategia mixta es una distribución de probabilidad degenerada, es considerada, por biyección, como la estrategia pura soportada por la distribución, por lo que el conjunto de estrategias mixtas es una extensión del conjunto de estrategias puras.



<sup>5</sup>John von Neumann nació en Budapest, Hungría, hijo de un rico banquero judío. Tuvo una educación esmerada. Se doctoró en matemáticas por la Universidad de Budapest y en químicas por la Universidad de Zurich. En 1927 empezó a trabajar en la Universidad de Berlín. En 1932 se traslada a Estados Unidos, donde trabaja en el Instituto de Estudios Avanzados de Princeton.

Es considerado por muchos como la mente más genial del siglo XX, comparable solo a la de Albert Einstein. A pesar de ser completamente desconocido para el "hombre de la calle", la trascendencia práctica de su actividad científica puede vislumbrarse con su participación activa en el Proyecto Manhattan, del que se creó la primera bomba atómica, o con su dirección en la producción y puesta a punto de los primeros ordenadores. Además, tuvo un papel muy destacado (aunque secreto y no muy bien conocido) en el diseño de la estrategia de la guerra fría como científico asesor del Consejo de Seguridad de Estados Unidos en los años cincuenta. Es el creador del campo de la teoría de juegos (en 1928 publica el primer artículo sobre este tema), en el que trabajan actualmente miles de economistas y se publican a diario cientos de páginas. En 1944, en colaboración con Oskar Morgenstein, publica *Theory of Games and Economic Behavior* (ver [Von Neumann, 1944]), libro que incluye formulaciones que han influido en muchos otros campos de la economía.

Por otro lado, un concepto no menos importante es el de **función de pago**, que es el premio recibido por cada jugador en cada situación particular del juego en donde los jugadores han establecido ya sus estrategias. La **función de utilidad** convierte los pagos en bienestar. Por ejemplo, y como se definirá en el capítulo quinto de esta tesis, si la demanda eléctrica satisfecha en un mercado es una cantidad  $D$  de unidades de energía, el bienestar o utilidad de la demanda es la integral del precio demandado, que en el caso en que la curva de la demanda sea lineal es una función cuadrática en  $D$ .

En lo que sigue se ha considerado la siguiente notación:

- $K$  es el numero de jugadores.
- El índice  $s$  representa a los jugadores.
- $X_s$  y  $X^s$  denota el conjunto de estrategias puras y mixtas respectivamente para el jugador  $J_s$ .
- $M_s$  y  $\underline{M}_s$  denota la función de pago determinista y posibilista respectivamente en estrategias puras  $X_s$  para el jugador  $J_s$ .
- $M^s$  y  $\underline{M}^s$  denota la función de pago determinista y posibilista respectivamente en estrategias mixtas  $X^s$  para el jugador  $J_s$ .
- Las estrategias  $d_s$  para el jugador  $J_s$  son estrategias puras en juegos finitos, y las estrategias  $x^s(d_s)$  son las correspondientes estrategias mixtas, que son distribuciones de probabilidad sobre las estrategias  $d_s$ . Las estrategias  $f^s(x_s)$  son estrategias mixtas en juegos infinitos en donde  $x_s$  es una estrategia pura para el juego.
- $\underline{A}_s$  es la matriz de pagos posibilistas para cada jugador  $J_s$  en un juego finito. La matriz  $\underline{A}_s$  es  $K$ -dimensional y está formada por los números borrosos  $LR$   $\underline{a}_s(d_1, \dots, d_K) = (a_s^L(d_1, \dots, d_K), a_s^R(d_1, \dots, d_K), \alpha a_s^L(d_1, \dots, d_K), \alpha a_s^R(d_1, \dots, d_K))_{LR}$  para cada combinación  $(d_1, \dots, d_K)$  de estrategias puras de los jugadores. La matriz de pagos posibilistas se denota también como  $(A_s^L, A_s^R, \alpha A_s^L, \alpha A_s^R)_{LR}$  siendo  $A_s^L$ ,  $A_s^R$ ,  $\alpha A_s^L$  y  $\alpha A_s^R$  matrices  $K$ -dimensionales formadas respectivamente por los elementos  $a_s^L(d_1, \dots, d_K)$ ,  $a_s^R(d_1, \dots, d_K)$ ,  $\alpha a_s^L(d_1, \dots, d_K)$  y  $\alpha a_s^R(d_1, \dots, d_K)$  para cada combinación  $(d_1, \dots, d_K)$  de estrategias puras de los jugadores.
- El superíndice  $T$  es el operador de transposición de vectores o matrices.
- $e^m$  es un vector columna  $m$ -dimensional cuyos elementos son todos uno.

### 3.2.1 Algunos tipos de juegos

La teoría de juegos distingue varios tipos de juegos, según el número de jugadores y las circunstancias en las que se desarrolle el juego.

Los **juegos individuales** son aquellos en los que el único interés que interviene es el del propio jugador (no existe realmente un conflicto de intereses). Los juegos individuales, aunque pueden ser complicados e interesantes, no suelen ser estudiados desde la perspectiva de la teoría de juegos, pues no hay adversario que tome decisiones estratégicas independientes que el jugador deba combatir (un ejemplo de juegos individuales son los juegos del solitario). Los **juegos bipersonales** son aquellos en donde sólo compiten dos jugadores (como el ajedrez), y en los **juegos K-personales**, más complejos que los anteriores, el número de jugadores  $K$  es mayor que dos (como en el parchís, o como usualmente ocurre en cualquier juego que represente un mercado de generación real oligopolista).

Se dice que un juego es de **suma nula** si el total de las ganancias netas al final de la partida es cero, es decir, si el total de las ganancias es igual al total de las pérdidas, no existiendo utilidad externa al sistema.

En los juegos **no cooperativos** los jugadores actúan de manera independiente en un esfuerzo por lograr maximizar su función de pago. Por el contrario, en los **juegos cooperativos** (o de transferencia de utilidad) los jugadores tratan de maximizar metas compartidas por varios jugadores, establecidas basándose en la comunicación, la formación de coaliciones y acuerdos, y en el consenso entre las coaliciones formadas.

Los **juegos estáticos** son aquellos en los que los jugadores toman una única decisión de manera simultánea, finalizando con ello el juego, y recibiendo a continuación sus ganancias o pagos que, como se ha dicho, dependen de la combinación de acciones que acaban de elegir (por ejemplo, el juego de los chinos). Los **juegos dinámicos**, por el contrario, disponen de una sucesión de acciones estratégicas que dependen de la información adquirida a lo largo del juego (como ocurre por ejemplo en el ajedrez).

Los **juegos con información perfecta** son aquellos en los que las funciones de pago y las estrategias en el juego son conocidas por todos los jugadores (como ocurre en el juego de los chinos). Por el contrario, los **juegos con información imperfecta** son aquellos en los que algún jugador no está seguro de la función de ganancia o las estrategias de otro jugador (como ocurre en el mercado eléctrico)<sup>6</sup>.

Los **juegos con información completa**<sup>6</sup> son aquellos en donde se conoce en cada situación todas las acciones tomadas por el jugador y por la competencia, y cómo

---

<sup>6</sup>En el marco de la teoría de juegos, los juegos con información perfecta e imperfecta definidos se denominan más apropiadamente como juegos con información completa e incompleta respectivamente, y al contrario. Este cambio de denominación, que es de carácter formal, se debe a la falta de correspondencia entre el concepto “información imperfecta” considerado clásicamente en la teoría de juegos, y el definido en la teoría de la información y del conocimiento (ver [Smets, 1997]).

empezó el juego. No hay azar y los movimientos se conocen por etapas (ejemplos de juegos completos son las damas, el ajedrez y las tres en raya). En los **juegos con información incompleta** el conocimiento antes aludido, o bien es incompleto, o bien es nulo, y el azar juega un papel importante en el resultado del juego (un ejemplo de juego incompleto es el denominado juego de salarios de eficiencia en donde los trabajadores de una empresa deciden un nivel de esfuerzo a realizar una vez la empresa, que no conoce por completo las estrategias de sus trabajadores, ha ofrecido un salario; se supone además que una vez los trabajadores han tomado sus decisiones, la empresa puede detectar un bajo rendimiento de un trabajador en cuyo caso es despedido; cada trabajador debe maximizar la utilidad esperada, y la empresa el beneficio esperado; para más detalle ver [Shapiro, 1984]).

Como ya se ha comentado en el apartado anterior, los **juegos finitos** (matriciales o rectangulares) e **infinitos** (que pueden ser continuos) hacen referencia al número de posibles estrategias que tienen los jugadores (así, el mercado eléctrico se puede modelar como un juego continuo en donde las estrategias son todas las posibles potencias que se pueden ofertar).

Dentro de todos los posibles tipos de juegos existentes, este capítulo se centrará en los **juegos K-personales, estáticos, no cooperativos, y con información perfecta e imperfecta**. Como se verá en el apartado 3.3, la incertidumbre en los juegos con información imperfecta se tendrá en cuenta en las funciones de pago de los jugadores, y quedará modelada mediante el uso de distribuciones de posibilidad. El motivo por el que se ha decidido estudiar este tipo de juegos posibilistas es que se ajusta muy adecuadamente a las características del mercado de energía eléctrica a medio plazo analizado en esta tesis, y que se describe en los dos siguientes capítulos. En concreto, las características del juego que representa al mercado son:

- Es un juego  $E$ -personal ( $E \geq 2$ ) al representar un mercado real oligopolista (varios generadores tienen cierto control del precio de la electricidad).
- Es un juego estático al suponerse que el mercado es convocado en una única convocatoria, suposición que suele adoptarse en la mayor parte de los modelos de mercado a medio plazo. La consideración de juegos dinámicos resulta más adecuada cuando lo que se pretende es modelar una serie de mercados convocados en el corto plazo (como los mercados intradiarios del sistema español).
- Es un juego no cooperativo al considerarse que los generadores en el mercado no forman coaliciones para controlar el precio de la electricidad. Lo contrario implicaría la presencia de estrategias desleales que podrían ser penalizadas de acuerdo a la regulación propia del sector eléctrico en estudio.

- Las estrategias del juego son las estrategias de oferta de electricidad, que en el modelo de mercado se han considerado que son cantidades de potencia, suposición también adecuada en los modelos de medio plazo.
- Las funciones de pago del juego son los beneficios obtenidos por cada empresa de generación.
- Es un juego continuo dado que las estrategias se escogen en un intervalo de potencias a generar.
- La incertidumbre<sup>7</sup> se tiene en cuenta en la pendiente de la demanda residual de cada generador (la demanda residual permite determinar el precio de la electricidad para cada oferta del generador) y en los costes unitarios de producción de sus grupos de generación, y se modela mediante distribuciones de posibilidad. Como consecuencia, los beneficios son también distribuciones de posibilidad para cada combinación de estrategias de oferta de los generadores. Por lo tanto, la incertidumbre en el juego se tiene en cuenta en las funciones de pago de los jugadores.

De cara a introducir algunos conceptos básicos de la teoría de juegos clásicos, que serán útiles cuando se analicen los juegos posibilistas estáticos y no cooperativos, a continuación se aborda la cuestión básica de cómo describir matemáticamente un juego estático no cooperativo con información perfecta, centrándonos en su representación normal y mixta. Para más detalle acerca de estas y otras representaciones pueden consultarse, entre otras, las siguientes referencias: [Blackwell, 1954], [Luce, 1957] y [Mckinsey, 1967].

### **3.2.2 Juegos estáticos no cooperativos con información perfecta: forma normal**

Considérese un juego  $G$  estático no cooperativo con información perfecta, es decir, un juego en donde el resultado del mismo es consecuencia de la elección simultánea y no cooperativa de una estrategia por jugador, y en donde las funciones de pago y las estrategias en el juego son conocidas por todos los jugadores. La **forma normal** de este tipo de juegos se denota como  $G=(X_1, \dots, X_K, M_1, \dots, M_K)$ , en donde se especifican: (1) el número de jugadores  $J_s$  en el juego ( $K$  jugadores), (2) las estrategias puras  $X_s$  que dispone cada jugador, que puede ser cualquier conjunto, discreto o continuo, y (3) la ganancia o pago  $M_s(x_1, \dots, x_K)$  de cada jugador  $J_s$  con cada posible combinación de estrategias puras  $x_s \in X_s$ :

<sup>7</sup>Por simplificar la redacción se hablará solamente de incertidumbre cuando realmente se alude a los conceptos de incertidumbre e imprecisión, que han sido descritos en el capítulo anterior.

$$M_s : X_1 \times \dots \times X_K \rightarrow \mathfrak{R} \quad (3.1)$$

$$(x_1, \dots, x_K) \rightarrow M_s(x_1, \dots, x_K) \quad s = 1, \dots, K$$

Por ejemplo, el conjunto de estrategias para un juego bipersonal ( $K=2$ ) podría ser el intervalo unitario  $X_s=[0,1]$  con  $s=1,2$ , y las funciones de pago para cada uno de los dos jugadores  $M_1(x_1,x_2)=(x_1-x_2)^2$  y  $M_2(x_1,x_2)=1-(x_1-x_2)^2$ . A los juegos en los que  $X_s=[0,1]$  se les denomina **juegos sobre el cuadrado unidad**, y son juegos infinitos en forma normal.

Un juego  $G$  estático no cooperativo con información perfecta en forma normal y en donde las estrategias son conjuntos discretos  $X_s=\{1, \dots, m(s)\}$  (juego finito, matricial o rectangular), siendo  $m(s)$  el número de estrategias del jugador  $J_s$ , se denota simplifcadamente como  $G=(X_1, \dots, X_K, A_1, \dots, A_K)$ , en donde  $A_s$  es la matriz  $K$ -dimensional cuyos elementos coinciden con la función de pago  $a_s(d_1, \dots, d_K) \in \mathfrak{R}$  del jugador  $J_s$  para cualquier combinación de estrategias puras  $d_s \in \{1, \dots, m(s)\}$  en el juego  $G$ .

Por ejemplo, para el caso bipersonal la matriz  $A_s$  es:

$$A_s = \begin{pmatrix} a_s(1,1) & \dots & a_s(1,m(2)) \\ \dots & \dots & \dots \\ a_s(m(1),1) & \dots & a_s(m(1),m(2)) \end{pmatrix} \quad s = 1,2 \quad (3.2)$$

Siendo  $a_s(d_1, d_2)$  el pago recibido por el jugador  $J_s$  cuando  $J_1$  elige la estrategia  $d_1 \in \{1, \dots, m(1)\}$  y  $J_2$  la estrategia  $d_2 \in \{1, \dots, m(2)\}$ . Un ejemplo de las matrices de pago para cada jugador cuando  $m(1)=m(2)=2$  es:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

Así, por ejemplo, cuando  $J_1$  y  $J_2$  eligen a la vez la primera de sus estrategias, el pago para  $J_1$  es 1 y para  $J_2$  es 2.

### 3.2.3 Extensión de juegos estáticos no cooperativos con información perfecta: estrategias mixtas

Centrándose en juegos finitos, las **estrategias mixtas** consisten en asignar a cada una de las estrategias puras una probabilidad, y por tanto son distribuciones de probabilidad sobre el conjunto de las estrategias originales del juego. Es importante aclarar que las estrategias mixtas son distribuciones de salida y no de entrada del juego, dado que son las estrategias de los jugadores. Dado que existe una biyección

entre el conjunto de estrategias puras y el conjunto de distribuciones de probabilidad degeneradas (para cada  $d_s \in X_s$  asignando la distribución de probabilidad degenerada en  $X_s$  tal que la probabilidad de  $d_s$  es igual a uno), las estrategias mixtas amplían el conjunto de estrategias en el juego, y por tanto el número de **soluciones estables** del juego, tal y como se definen éstas en el próximo apartado (soluciones predispuestas en el juego, por la suposición de un criterio racional en el comportamiento de los jugadores). Por ello, cuando los juegos normales no tienen solución estable en ocasiones resulta interesante utilizar estrategias mixtas.

Formalmente, la extensión  $X^s$  del conjunto discreto de estrategias puras  $X_s = \{1, \dots, m(s)\}$  de un juego matricial  $G = (X_1, \dots, X_K, A_1, \dots, A_K)$ , denominada **extensión mixta de  $X_s$** , coincide con la envoltura convexa de  $X_s$ , esto es, con el conjunto de distribuciones de probabilidad sobre  $X_s$ :

$$X^s = \left\{ x^{sT} = (x^s(1), \dots, x^s(m(s))) / \sum_{d_s=1}^{m(s)} x^s(d_s) = 1, x^s(d_s) \geq 0 \quad d_s = 1, \dots, m(s) \right\} \quad s = 1, \dots, K \quad (3.4)$$

Por ejemplo, para el caso bipersonal, el conjunto de estrategias mixtas  $X^1$  es el conjunto de distribuciones de probabilidad  $(x^1(1), \dots, x^1(m(1)))$  sobre  $X_1 = \{1, \dots, m(1)\}$ . Esto es, dada la estrategia mixta  $x^{1T} = (x^1(1), \dots, x^1(m(1)))$  el jugador  $J_1$  elige la primera estrategia con probabilidad  $x^1(1)$ , la segunda estrategia con probabilidad  $x^1(2)$ , y así sucesivamente hasta elegir la última estrategia  $m(1)$  con probabilidad  $x^1(m(1))$ .

La **función de pago extendida**  $M^s$  para cada jugador  $J_s$  dada una combinación de estrategias mixtas se define como la esperanza matemática del pago en estrategias puras, esto es, para la extensión del juego matricial  $G = (X_1, \dots, X_K, A_1, \dots, A_K)$  se tiene:

$$M^s(x^1, \dots, x^K) = \sum_{d_1=1}^{m(1)} \dots \sum_{d_K=1}^{m(K)} x^1(d_1) \dots x^K(d_K) \cdot a_s(d_1, \dots, d_K) \quad x^s \in X^s, s = 1, \dots, K \quad (3.5)$$

Así, por ejemplo, cuando las matrices de pago en estrategias puras son las mostradas en (3.3) y si  $J_1$  eligiera la estrategia mixta  $x^1 = (1/4, 3/4)$  (con probabilidad 1/4 elige la primera estrategia pura y con probabilidad 3/4 la segunda) y  $J_2$  eligiera la estrategia mixta  $x^2 = (1/8, 7/8)$ , el pago extendido para cada jugador es:

$$\begin{aligned} M^1(x^1, x^2) &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{7}{8} \cdot (-1) + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{8} \cdot 5 + \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{8} \cdot (-3) \\ M^2(x^1, x^2) &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot \frac{7}{8} \cdot 8 + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{8} \cdot (-2) + \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{8} \cdot (-3) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Para el caso de juegos infinitos donde  $X_s$  es un subconjunto de los números reales  $\Re$  (como es el caso de los juegos sobre el cuadrado unidad), la extensión mixta de  $X_s$  es

el conjunto formado por las funciones de densidad de probabilidad definidas sobre  $X_s$ :

$$X^s = \left\{ f^s : X_s \rightarrow \mathfrak{R} / \int_{X_s} f^s(x_s) dx_s = 1, f^s(x_s) \geq 0 \quad \forall x_s \in X_s \right\} \quad s = 1, \dots, K \quad (3.7)$$

Su función de pago extendida es también la esperanza matemática del pago en estrategias puras, que en el caso continuo se define con las siguientes integrales:

$$M^s(f^1, \dots, f^K) = \int_{X_1} \left( \int_{X_K} M_K(x_1, \dots, x_K) \cdot f^K(x_K) \cdot dx_K \right) \cdot f^1(x_1) \cdot dx_1 \quad f^s \in X^s, s = 1, \dots, K \quad (3.8)$$

### 3.2.4 Algunas estrategias estables

Un objetivo primordial de la teoría de juegos es establecer criterios racionales para identificar las estrategias que toman los jugadores en un juego. Estos criterios se basan en el supuesto de partida de que los jugadores son racionales y por tanto eligen sus estrategias para promover su propio bienestar. Suele ser típico considerar otros supuestos adicionales acerca del comportamiento de los jugadores en el juego (suponer que la competencia actúa en contra de los intereses de un jugador, aversión al riesgo de los jugadores, etc.), pero nunca deben oponerse al de racionalidad.

Es importante mencionar que este tipo de estrategias racionales, denominadas en esta tesis **estrategias estables**, no son estrategias óptimas de un juego, tal y como son concebidas en la teoría de la optimización, sino estrategias que, ya sea por la ejecución repetitiva del juego o por cualquier otro motivo, representan decisiones razonables a tomar en el juego.

Existen distintos tipos de estrategias estables coherentes con el supuesto de racionalidad, entre las que destacan: las **estrategias dominantes en equilibrio**, las **estrategias puras maximin** y las **estrategias de Nash en equilibrio**. Para sus definiciones se supondrá un juego estático no cooperativo con información perfecta en forma normal, aunque se pueden generalizar para otro tipo de juegos. Por ejemplo, para juegos en estrategias mixtas, basta sustituir en las definiciones las funciones de pago en estrategias puras por las consideradas en estrategias mixtas.

Una de las primeras estrategias estables planteadas en la teoría de juegos son las denominadas **estrategias dominantes en equilibrio**, que resulta ser un conjunto de  $K$  estrategias cuyo pago unilateral para cada jugador  $J_s$  al mantener fijas cualquier conjunto de estrategias para la competencia es máximo. Así,  $(x_1^*, \dots, x_K^*) \in X_1 \times \dots \times X_K$  es un equilibrio en estrategias dominantes si y solo si se cumple:

$$M_s(x_1, \dots, x_s^*, \dots, x_K) \geq M_s(x_1, \dots, x_s, \dots, x_K) \quad \forall x_s \in X_s, \forall s = 1, \dots, K \quad (3.9)$$

Es decir  $x_s^*$  estrategia del jugador  $J_s$  es dominante si eligiendo la estrategia  $x_s^*$  el jugador  $J_s$  gana más que eligiendo otra de sus estrategias, independientemente de lo que hagan el resto de jugadores.

Por ejemplo, en el siguiente juego bipersonal matricial la segunda estrategia para  $J_1$  (fijarse entonces en la matriz  $A_1$ ) domina a la primera (es decir, se cumple la desigualdad (3.9) para  $J_1$ ) dado que cualquier pago con la primera estrategia es peor que con la segunda para cualquier estrategia de  $J_2$  (pago (-1,-2) frente a (1,2) en  $A_1$ ).

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

Lo mismo ocurre con la primera estrategia de  $J_2$  (pago (1,2) frente a (1,-2) en  $A_2$ ), y por lo tanto las estrategias puras  $(x_1^*, x_2^*) = (2, 1)$  forman un equilibrio en estrategias dominantes.

En el caso en que las estrategias sean un continuo (juegos continuos) las condiciones para que  $(x_1^*, \dots, x_K^*) \in X_1 \times \dots \times X_K$  sea un equilibrio en estrategias dominantes son las condiciones necesarias y suficientes de máximo unilateral (máximo en una única estrategia) de la función de pago para cada jugador, y para cualquier estrategia del resto de jugadores, esto es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_1(x_1^*, \dots, x_K)}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial^2 M_1(x_1^*, \dots, x_K)}{\partial x_1^2} < 0 \quad \forall x_2 \in X_2, \dots, \forall x_K \in X_K \\ \dots \\ \frac{\partial M_K(x_1, \dots, x_K^*)}{\partial x_K} = 0, \quad \frac{\partial^2 M_K(x_1, \dots, x_K^*)}{\partial x_K^2} < 0 \quad \forall x_1 \in X_1, \dots, \forall x_{K-1} \in X_{K-1} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Se puede probar que, si existe este tipo de equilibrios, es único ([Nash, 1950]).

Son pocos los juegos que disponen de equilibrios en estrategias dominantes, por lo que su aplicación se centra solamente en la reducción del tamaño del juego a través de la eliminación iterativa y para cada jugador de las estrategias dominadas (en el ejemplo matricial descrito anteriormente se podría eliminar, por ejemplo, la primera estrategia para el jugador  $J_1$  dado que está dominada por la segunda).

Un enfoque conservador en la elección de la mejor estrategia es suponer lo peor y actuar en consecuencia. Este argumento conduce a las denominadas **estrategias**

**maximin**, cuando cada jugador  $J_s$  supone que el resto de jugadores actúa en su perjuicio y no por sus propios intereses. Por tanto, el comportamiento supuesto de la competencia es minimizar el pago obtenido por  $J_s$  para cada una de sus estrategias, siendo entonces una solución racional para  $J_s$  la obtenida maximizando el resultado de esa minimización. Así  $x_s^* \in X_s$  es una estrategia pura maximin para  $J_s$  si y solo si se cumple:

$$\text{Max}_{x_s \in X_s} \{ \text{Min}_s(x_s) \} = \text{Min}_s(x_s^*) = v_s \quad s = 1, \dots, K \quad (3.12)$$

siendo:

$$\text{Min}_s(x_s) = \text{Min}_{x_1 \in X_1, \dots, x_{s-1} \in X_{s-1}, x_{s+1} \in X_{s+1}, \dots, x_K \in X_K} M_s(x_1, \dots, x_s, \dots, x_K) \quad (3.13)$$

y en donde  $v_s$  se denomina **valor maximin** del juego para el jugador  $J_s$ .

Por ejemplo, la estrategia pura maximin para el jugador  $J_1$  (matriz del juego  $A_1$ ) en el siguiente juego matricial es la primera de sus estrategias dado que el mínimo pago recibido por  $J_1$  al seleccionar dicha estrategia es  $-1$ , que es mayor que el mínimo pago recibido cuando selecciona la segunda, que es  $-2$ . El valor del juego  $v_1$  es entonces  $-1$ .

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 18 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

La elección de la primera estrategia de  $J_1$  (estrategia maximin) contrapone el sentido común que sugiere la elección de la segunda estrategia, dado que podría proporcionar al jugador un pago de 18, significativamente mayor que el resto de pagos. Este hecho se debe a que las estrategias maximin son decisiones, en ocasiones, extremadamente conservadoras.

Análogamente, la primera estrategia para  $J_2$  sería una estrategia pura maximin para el jugador. El valor del juego  $v_2$  en este caso es  $-2$ .

En el caso continuo las condiciones para que  $x_s^* \in X_s$  sea una estrategia maximin para el jugador  $J_s$  son las condiciones necesarias y suficientes de máximo unilateral de la función  $\text{Min}_s$  definida en (3.12), esto es:

$$\frac{\partial \text{Min}_s(x_s^*)}{\partial x_s} = 0, \quad \frac{\partial^2 \text{Min}_s(x_s^*)}{\partial x_s^2} < 0 \quad (3.15)$$

En ocasiones, las estrategias maximin, al ser estrategias conservadoras, pueden no modelar adecuadamente el comportamiento de un sistema en donde exista conflicto

de intereses, siendo más adecuadas en juegos bipersonales de suma nula en donde lo que se lleva un jugador es lo que pierde exactamente el otro.

La solución más extendida en todos los campos de aplicación de la teoría de juegos es el **equilibrio de Nash**<sup>8</sup>, que consiste en un conjunto de  $K$  estrategias, cada una de ellas siendo la mejor para cada jugador dadas las estrategias del resto de jugadores. Matemáticamente  $(x_1^*, \dots, x_K^*) \in X_1 \times \dots \times X_K$  es un equilibrio de Nash en estrategias puras si y solo si se cumple:

$$M_s(x_1^*, \dots, x_s^*, \dots, x_K^*) \geq M_s(x_1^*, \dots, x_s, \dots, x_K^*) \quad \forall x_s \in X_s, \forall s = 1, \dots, K \quad (3.16)$$

En otras palabras, el equilibrio de Nash conduce a los jugadores a situaciones en las que ninguno de ellos tiene razón o incentivo alguno para cambiar su posición, pues se arriesga a ganar por debajo de lo que hubiese ganado en el equilibrio.

Por ejemplo, en el siguiente juego matricial con dos jugadores, la segunda estrategia para  $J_1$  es la mejor para él si  $J_2$  elige la primera estrategia (obtiene un pago de 1 en vez de -1). Sin embargo, la primera estrategia para  $J_1$  es la mejor si  $J_2$  elige la segunda (obtiene un pago de 2 en vez de -2).

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \quad (3.17)$$



<sup>8</sup>John Forges Nash Jr matemático y economista estadounidense, nació el 13 de junio de 1928 en Bluefield, Virginia Occidental. Cuando a los veinte años solicitó ser admitido como alumno en Princeton University de New Jersey, la carta de recomendación escrita por su profesor R.J. Duffin tenía sólo una línea: "Este hombre es un genio". A los 21 años escribió una tesina de menos de treinta páginas en la que expuso por primera vez su solución para juegos estratégicos no cooperativos, lo que desde entonces se llamó "el equilibrio de Nash" ([Nash, 1950]), que tuvo un inmediato reconocimiento entre todos los especialistas.

En 1959 fue hospitalizado con un diagnóstico de esquizofrenia, por lo que renunció a su cargo en el Instituto de Tecnología de Massachussets (MIT). Durante cerca de 30 años padeció esta enfermedad, aunque tuvo temporadas de aparente mejoría. En 1990 Nash experimenta una gran recuperación de su padecimiento mental que deja a los psiquiatras sin respuesta, regresa a las matemáticas y acepta un puesto de profesor en Princeton. En poco tiempo la importancia del trabajo de Nash fue reconocido con muchos honores: el premio Von Neumann, miembro de la sociedad econométrica y de las academias americana de artes y ciencias, y nacional de ciencias de Estados Unidos, terminando con el premio Nóbel de economía en 1994, compartido con John C. Harsanyi y Reinhard Selten, por sus pioneros análisis del equilibrio en la teoría de los juegos no cooperativos. Llama la atención que el premio Nóbel se lo dan básicamente por su tesis doctoral y un artículo que escribió 45 años antes. Su vida y su obra han sido tan sorprendentes, que se han escrito varios libros, algunos sobre su vida y otros sobre su obra. Recientemente se ha realizado una película ("Una mente maravillosa") que además ha sido bien acogida por la crítica.

Desde el punto de vista del jugador  $J_2$  (matriz  $A_2$ ) la segunda estrategia para  $J_2$  es la mejor para él independientemente de la estrategia que elija  $J_1$  (de hecho, la segunda estrategia de  $J_2$  domina a la primera).

Por lo tanto, para que los jugadores estén en equilibrio (es decir, para que se satisfagan las condiciones (3. 16) simultáneamente para cada jugador),  $J_1$  debe elegir la primera estrategia, mientras que  $J_2$  la segunda. En este caso, el equilibrio de Nash en estrategias puras existe, y viene dado por  $(x_1^*, x_2^*)=(1,2)$ .

En el caso continuo las condiciones para que  $(x_1^*, \dots, x_K^*) \in X_1 \times \dots \times X_K$  sea un equilibrio de Nash son las condiciones necesarias y suficientes de máximo unilateral de la función de pago para cada jugador evaluadas en el equilibrio, esto es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_1(x_1^*, \dots, x_K^*)}{\partial x_1} = 0, \frac{\partial^2 M_1(x_1^*, \dots, x_K^*)}{\partial x_1^2} < 0 \\ \dots \\ \frac{\partial M_K(x_1^*, \dots, x_K^*)}{\partial x_K} = 0, \frac{\partial^2 M_K(x_1^*, \dots, x_K^*)}{\partial x_K^2} < 0 \end{aligned} \quad (3. 18)$$

Es fácil demostrar que un equilibrio en estrategias dominantes es también un equilibrio de Nash (ver que efectivamente las condiciones que se muestran en (3. 9) son más fuertes que las que se muestran en (3. 16)). Además, el teorema del maximin (ver [Nash, 1950]) afirma que en todo juego bipersonal de suma nula en el que sea admisible jugar en estrategias mixtas además de las puras, las estrategias maximin de cada jugador coinciden siempre con un equilibrio de Nash. En este caso las estrategias maximin se denominan **estrategias óptimas** (que no deben confundirse con las estrategias óptimas de los modelos de optimización), y el valor maximin  $v_s$  coincide para todos los jugadores, denominándose **valor del juego**. Asimismo, y a partir del teorema de punto fijo de Brower, Nash demostró que en algunos juegos es posible encontrar más de un equilibrio, y en otros puede no existir ninguno (ver [Nash, 1950]).

En esta tesis se ha escogido el equilibrio de Nash como solución estratégica más adecuada para el modelado del comportamiento de las empresas participantes en un mercado de electricidad, por los siguientes dos motivos:

- Por un lado, a pesar de que el equilibrio de Nash en problemas reales puede no existir, su existencia puede asegurarse con un menor número de supuestos que los necesarios para el equilibrio en estrategias dominantes.
- Por otro lado, el uso de estrategias maximin para representar las ofertas en un mercado eléctrico oligopolista es ciertamente discutible, dado que no suele ser

habitual que las empresas actúen en perjuicio del resto olvidándose de su propio beneficio (por ejemplo, ofertando a precio cero), pues podría repercutir drásticamente en sus ganancias facilitando el control del precio por el resto de generadores, además de que reflejaría un comportamiento desleal al mercado, que podría ser cuestionado por las autoridades reguladoras competentes.

En concreto, en esta tesis se definen varios equilibrios de Nash bajo el supuesto de aversión al riesgo de los generadores en un mercado de electricidad, lo que relaja la condición de pesimismo extremo de las estrategias maximin (tal y como se verá en el siguiente capítulo, el equilibrio de Nash ha sido también muy empleado por otros autores para representar el mercado de generación).

### 3.3 La teoría de juegos posibilistas

Cuando se abordan problemas reales en donde existen conflictos de intereses entre varios jugadores, como en un mercado de generación, en ocasiones es difícil representar con precisión los elementos y parámetros involucrados en el problema. En la teoría de juegos posibilistas, la incertidumbre en la selección de una estrategia u otra, y en las funciones de pago del juego, son modeladas usando distribuciones de posibilidad. Por ello, los juegos posibilistas son juegos clásicos con información imperfecta modelada mediante distribuciones de posibilidad.

La investigación en la teoría de juegos posibilistas se remonta a la década de los setenta (ver capítulo 9 de [Dubois, 1980] para una revisión), y ha dado lugar a varios trabajos relevantes en el estudio de juegos finitos no cooperativos y con información imperfecta, que se muestran a continuación y que se describirán con un poco más de detalle en sucesivos apartados. También han sido numerosos los trabajos relacionados con los juegos cooperativos, no siendo objeto de estudio en esta tesis (para una revisión de los trabajos relacionados con juegos cooperativos posibilistas puede consultarse [Aubin, 1974], [Aubin, 1974], [Aubin, 1981] y [Nishizaki, 2001]).

Uno de los artículos pioneros que define el concepto de juego posibilista bipersonal no cooperativo con información imperfecta es [Butnariu, 1978]. En él se considera que un juego posibilista es aquel en el que, para cualquier alternativa estratégica de uno de los jugadores, existe solamente un conjunto de estrategias para el resto que son parcialmente posibles desde el punto de vista del jugador. Para poder formular coherentemente el modelo desarrollado en este trabajo, la noción de conjunto borroso, tal y como la introdujo Zadeh, es extendida usando la denominada teoría universal de conjuntos<sup>9</sup>. Otros trabajos en donde se analiza el comportamiento del juego considerando posibles conjuntos de estrategias para cada jugador son [Buckley, 1984] y [Billot, 1992].

Sin embargo, en la mayoría de los trabajos en donde se estudian juegos posibilistas no cooperativos se considera que la incertidumbre aparece en los valores de las funciones de pago de los jugadores en vez de en sus estrategias. Esta característica aparece también en el modelo de mercado analizado en esta tesis, en donde las funciones de pago son los beneficios obtenidos en el mercado. En [Nishizaki, 2001] se muestra una amplia batería de este tipo de juegos posibilistas con información imperfecta (así como en [Ponsard, 1986], [Ponsard, 1987], [Campos, 1989], [Campos, 1992] y [Nishizaki, 2001]). Nishizaki plantea varios problemas de

---

<sup>9</sup>Esta teoría permite definir el conjunto que resulta del producto cartesiano de dos conjuntos borrosos que, según la definición de Zadeh, no tiene por qué ser un conjunto borroso cuando se considera un único universo de discurso  $\Omega$ . Véase para más detalle [Cohn, 1965].

optimización para el cálculo de las estrategias maximin y óptimas en juegos bipersonales posibilistas no cooperativos de suma nula o no.

Sin embargo, ninguno de los trabajos revisados ha sido aplicado a un caso de estudio real, por lo que son trabajos más bien teóricos cuyo objetivo principal es el análisis y la definición de estrategias estables. Tampoco ha sido estudiado el caso  $K$ -personal no cooperativo en donde los conjuntos de estrategias de los jugadores son subconjuntos discretos o continuos de  $\mathcal{R}$ .

En este capítulo se definen dos enfoques para la resolución de juegos estáticos no cooperativos  $K$ -personales con información imperfecta en las funciones de pago, que se modela mediante distribuciones de posibilidad, y que son parte de las aportaciones originales de la tesis.

De cara a introducir de manera gradual los enfoques para juegos continuos, que serán aplicados al mercado eléctrico en el capítulo quinto, por un lado se describen sus planteamientos para juegos finitos y se proponen varios modelos de optimización que permiten resolverlos. No ha sido objeto de esta tesis la aplicación de los enfoques para juegos finitos al caso en que se suponga un conjunto discreto de potencias admisibles a ofertar en un mercado de electricidad.

Por otro lado, se ha planteado un método específico de resolución para el caso de representar un mercado de electricidad, dado que la gran cantidad de problemas que pueden ser representados planteando un juego continuo posibilista estático no cooperativo y  $K$ -personal, no ha permitido en este trabajo de investigación definir un procedimiento de resolución general para cualquier tipo de problema. Este capítulo muestra exclusivamente el planteamiento, definición y formulación de los enfoques propuestos para los juegos continuos mencionados, considerando más adecuada la descripción en detalle del procedimiento de resolución en el capítulo quinto, una vez hayan sido introducidas en el capítulo cuarto las características del mercado de electricidad analizado.

Otro factor importante que debe ser tenido en cuenta en los problemas competitivos es el relativo a la multiplicidad de objetivos de cada jugador. Existe gran literatura al respecto donde se definen estrategias maximin y estrategias en equilibrio a través de un criterio de resolución multiatributo como el definido mediante el concepto de optimalidad de Pareto.

En este capítulo no se han descrito procedimientos de resolución para juegos posibilistas multiobjetivos, al considerar que el análisis mono-objetivo es ya de por sí un problema suficientemente complejo. Para una revisión de los principales enfoques de resolución de los juegos multiobjetivos, incluyendo aquellos en donde los pagos se modelan mediante distribuciones de posibilidad, puede consultarse [Kruse, 1987],

en donde además se proponen estrategias estables en función de un grado de satisfacción de los objetivos. Como ocurría para el caso con un único objetivo, los juegos  $K$ -personales multiobjetivos, en donde los conjuntos de estrategias son subconjuntos continuos de  $\mathfrak{R}$ , no han sido analizados en los trabajos revisados.

### 3.3.1 Las estrategias mixtas en la extensión de juegos posibilistas estáticos no cooperativos y finitos

En todos los trabajos revisados en esta tesis se extienden los juegos estáticos no cooperativos finitos, en donde los pagos son distribuciones de posibilidad, al caso de estrategias mixtas. Este es también el enfoque adoptado a lo largo de los siguientes apartados.

Una manera natural de extender este tipo de juegos posibilistas resulta de la extensión de juegos clásicos, en donde una estrategia mixta se define como una distribución de probabilidad sobre las estrategias puras (por ejemplo, probabilidades subjetivas). Claramente esta interpretación obliga a combinar dos diferentes modelos de incertidumbre. Por un lado, el modelado probabilista para la elección de las estrategias a tomar, y por otro, el modelado posibilista de los valores de los pagos. Esta combinación de modelados requiere un análisis más profundo del problema, que no ha sido abordado en los trabajos revisados, ni en esta tesis. En este sentido, podría analizarse la aplicación de otro tipo de medidas de la incertidumbre que combinasen las medidas de probabilidad y de posibilidad, como la medida de probabilidad sobre eventos borrosos definida en [Zadeh, 1968]. En este marco, una posible función de pago en estrategias mixtas podría ser la esperanza matemática de las distribuciones de posibilidad de los pagos ([Zadeh, 1968]). Sin embargo, este enfoque podría complicar significativamente la interpretación de los resultados obtenidos.

La interpretación de las estrategias mixtas más aceptada y extendida en el campo de la teoría de juegos posibilistas, y que ha sido la adoptada en esta tesis, no coincide con la descrita en el párrafo anterior, sino con medidas de importancia o de peso sobre las estrategias puras, cuya suma sea además la unidad (pesos normalizados, que pueden ser distribuciones de posibilidad normalizadas). En este caso, la definición de las funciones de pago en estrategias mixtas para cada jugador suele ser la media ponderada por los pesos asignados a las estrategias puras<sup>10</sup>.

---

<sup>10</sup>Aunque esta función de pago no es matemáticamente diferente de la considerada cuando las estrategias son distribuciones de probabilidad, el enfoque que combina grados de probabilidad y posibilidad puede dar lugar, como ya se ha dicho, a interpretaciones confusas, dado que el problema de la consistencia entre los grados de probabilidad y de posibilidad sigue siendo una cuestión controvertida en el modelado de la incertidumbre. Por ello, en esta tesis se ha considerado más oportuno aplicar únicamente una medida para la representación de la incertidumbre en el juego.

Como puede deducirse, con cualquiera de las dos interpretaciones descritas en los dos párrafos anteriores, las funciones de pago de los jugadores son posibilistas. A continuación se describen estas funciones para cada uno de los juegos posibilistas analizados.

### 3.4 Juegos bipersonales posibilistas LR estáticos no cooperativos finitos: forma normal y extensión mixta

En esta tesis se define **juego bipersonal posibilista LR no cooperativo finito** a un juego en donde dos jugadores  $J_1$  y  $J_2$  actúan de manera independiente en la elección de una estrategia, de tal forma que el pago recibido por cada jugador es un número posibilista LR. Además, el conjunto de estrategias para cada jugador se supone que es un conjunto finito.

La **forma normal de un juego  $G$  bipersonal posibilista LR no cooperativo finito** se va a denotar como  $\underline{G}=(X_1, X_2, \underline{A}_1, \underline{A}_2)$  en donde  $X_1=\{1, \dots, m(1)\}$  y  $X_2=\{1, \dots, m(2)\}$  son el conjunto de estrategias puras de cada jugador ( $m(s)$  es el número de estrategias del jugador  $J_s$ ), y siendo  $\underline{A}_s=(\underline{a}_s(d_1, d_2))$  una matriz cuyos coeficientes  $\underline{a}_s(d_1, d_2)$  son números posibilistas LR, que representan el **pago posibilista en estrategias puras** que recibe el jugador  $J_s$  cuando  $J_1$  selecciona la estrategia  $d_1 \in X_1$  y  $J_2$  la estrategia  $d_2 \in X_2$ .

La **extensión mixta posibilista del juego  $G$**  tiene como estrategias mixtas  $x^s \in X^s$  el conjunto de pesos que pueden asignarse a  $X_s$ , y tales que su suma es la unidad. La **función de pago  $\underline{M}^s$  posibilista en estrategias mixtas  $x^s \in X^s$**  para cada jugador es la media de las distribuciones de posibilidad de los pagos en estrategias puras ponderadas por los pesos asignados a las estrategias. Matricialmente esta función de pago posibilista se describe como sigue:

$$\underline{M}^s(x^1, x^2) = x^{1T} \cdot \underline{A}_s \cdot x^2 \quad x^s \in X^s, s=1,2 \quad (3.19)$$

De acuerdo a las operaciones con números posibilistas LR, que han sido descritas en el capítulo segundo, las funciones de pago  $\underline{M}^s$  resultan ser los siguientes números posibilistas LR para cada estrategia mixta  $x^s \in X^s$ :

$$\left( x^{1T} \cdot \underline{A}_s^L \cdot x^2, x^{1T} \cdot \underline{A}_s^R \cdot x^2, x^{1T} \cdot \alpha \underline{A}_s^L \cdot x^2, x^{1T} \cdot \alpha \underline{A}_s^R \cdot x^2 \right)_{LR} \quad x^s \in X^s, s=1,2 \quad (3.20)$$

Obsérvese que los cuatro vértices de los números posibilistas LR coinciden con las funciones de pago en estrategias mixtas correspondientes a los cuatro juegos clásicos cuyas matrices de pago en estrategias puras son  $\underline{A}_s^L$ ,  $\underline{A}_s^R$ ,  $\alpha \underline{A}_s^L$  y  $\alpha \underline{A}_s^R$ , matrices que definen a la matriz posibilista  $\underline{A}_s$ .

De manera natural el **equilibrio de Nash en estrategias mixtas para el caso de pagos posibilistas** (análogamente para el caso de estrategias puras con los pagos  $\underline{A}_s$ ) se define de igual forma a como se hace en los juegos clásicos, es decir, es un par de estrategias  $(x^{1*}, x^{2*}) \in X^1 \times X^2$  que satisfacen las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} \underline{M}^1(x^{1*}, x^{2*}) &\geq \underline{M}^1(x^1, x^{2*}) \quad \forall x^1 \in X^1 \\ \underline{M}^2(x^{1*}, x^{2*}) &\geq \underline{M}^2(x^{1*}, x^2) \quad \forall x^2 \in X^2 \end{aligned} \quad (3.21)$$

Como puede observarse, las anteriores condiciones implican la comparación de dos pares de números posibilistas  $LR$ . Dado que no existe una manera única de compararlos, la resolución del equilibrio de Nash va a depender de la elección de un orden adecuado entre números posibilistas  $LR$ , teniendo cada tipo de orden una interpretación distinta. Algunos de estos órdenes ya han sido descritos en el capítulo anterior (ver apartado 2.3.4.1).

En la teoría de juegos posibilistas suele ser usual proponer un orden entre números posibilistas  $LR$  que pueda considerarse equivalente, bajo ciertos supuestos razonables, a un orden entre números reales, de forma que la resolución del equilibrio de Nash resulte de la maximización simultánea para cada jugador de una función de pago (o de utilidad) determinista.

Cuando el juego es de suma nula y los pagos son números triangulares, en [Campos, 1989] se plantean varios problemas de programación lineal posibilistas que generalizan los propuestos en la teoría de juegos clásicos (ver [Owen, 1982] para más detalle). Para la resolución de los problemas de optimización, se consideran varios métodos que permiten ordenar números triangulares, y que quedan clasificados en tres grupos claramente diferenciados: (1) aquellos que consideran una función real  $F$  definida sobre el conjunto de números triangulares; (2) los que asumen un grado prefijado a priori por el decisor para el cumplimiento de la ordenación; y (3) los que utilizan las medidas de posibilidad y necesidad definidas en la teoría de la posibilidad y establecen grados mínimos de satisfacción en la ordenación. Los problemas deterministas resultantes de aplicar los tres tipos de métodos de ordenación no son duales en el sentido convencional definido en la programación matemática, en contra de lo que ocurre en los juegos clásicos, aunque sí los generalizan al ser idénticos a los planteados cuando el ancho de los números triangulares es nulo. Con algunas diferencias, los enfoques propuestos en esta tesis combinan básicamente los métodos de ordenación (2) y (3).

Cuando el método de ordenación usado es el que considera una función real  $F$ , en [Campos, 1992] se estudia el mismo juego analizando las tres siguientes situaciones: (1) el caso en que los jugadores no conocen la función de ordenación  $F$  establecida por su oponente; (2) el caso en que sólo un jugador conoce la función  $F$ ; y (3) el caso en que las funciones son conocidas por los dos jugadores. En cada una de ellas se describe el valor del juego que además es un número posibilista. En la situación (3) la resolución del juego no equivale a resolver un problema de programación lineal como ocurre con las situaciones (1) y (2), sino a resolver un problema de programación no lineal similar al que se resuelve en [Lemke, 1965].

Más recientemente, en [Maeda, 2003] se define el equilibrio de Nash convencional que se supone equivalente a (3. 21) para juegos de suma nula cuando se usa el operador “máximo posibilista”, descrito en el anexo de esta tesis. Este operador permite ordenar los pagos posibilistas, que son números simétricos triangulares, para probar que el juego posibilista puede considerarse equivalente a un par de juegos convencionales cuyas dos matrices de pagos son las formadas por los centros de los triángulos más y menos sus anchos. Por otro lado, también se prueba que todas las soluciones de Nash admisibles coinciden con las soluciones de Nash de un conjunto de juegos de suma no nula parametrizados sobre el cuadrado unidad. Estos juegos son los formados por las matrices de pago resultantes de combinar todos los posibles valores del soporte de los pagos posibilistas para cada jugador. Por último, dado el gran número de soluciones admisibles propuestas en este artículo, se han investigado las propiedades de los valores de los juegos parametrizados relacionándolos con otros cuatro juegos definidos basándose en las medidas de posibilidad y de necesidad.

A partir de los denominados **enfoques primal y dual** propuestos en esta tesis, se van a definir dos diferentes ordenaciones entre números posibilistas  $LR$  basadas en la comparación de dos números reales que dependen de las estrategias de los jugadores. En el enfoque primal los números comparados son pagos deterministas, mientras que en el enfoque dual son grados de posibilidad. El planteamiento y resolución de los enfoques propuestos para juegos bipersonales se describen a continuación y servirán como punto de partida para la resolución de los juegos  $K$  personales, tanto para estrategias discretas como continuas.

### 3.4.1 Enfoque primal: planteamiento y resolución

En el enfoque primal se supone que cada jugador  $J_s$  tiene cierta aversión al riesgo de tener pagos significativamente pequeños, por lo que fija un umbral de posibilidad  $\alpha_{s0} \in [0,1]$ <sup>11</sup>, que le permita, para cada par de estrategias  $(x^1, x^2) \in X^1 \times X^2$ , tener en consideración un conjunto de posibles pagos poco atractivos, especificados tal que la posibilidad de tener pagos menores sea menor o igual que  $\alpha_{s0}$ . Basándose en el principio de racionalidad, el pago esperado  $z_s = z_s(x^1, x^2)$  por el jugador  $J_s$  se define entonces como el mayor de los pagos tenidos en consideración.

Matemáticamente, para cada par de estrategias  $(x^1, x^2) \in X^1 \times X^2$ , la función de pago determinista  $\mu_s^p(x^1, x^2) = z_s$  esperada por el jugador  $J_s$  que se supone equivalente a la función de pago posibilista  $\underline{M}^s(x^1, x^2) = x^{1T} \cdot \underline{A}_s \cdot x^2$  según el enfoque primal, resulta ser:

<sup>11</sup>A lo largo de esta tesis al umbral  $\alpha_{s0} \in [0,1]$  se le denomina **nivel** o **umbral de riesgo**, aunque debe tenerse en cuenta que es mayor cuando menor es la aversión al riesgo del jugador  $J_s$ . Además, no debe confundirse con el nivel de significación fijado cuando se utiliza una medida de probabilidad.

$$\mu_s^P(x^1, x^2) = \text{Sup}_{z_s \in [x^{1T} \cdot \underline{A}_s \cdot x^2]} \left\{ z_s = z_s(x^1, x^2) / \Pi(x^{1T} \cdot \underline{A}_s \cdot x^2 \leq z_s) \leq \alpha_{s0} \right\} \quad x^s \in X^s, s=1,2 \quad (3.22)$$

En donde, de acuerdo al axioma de no aditividad de una medida de posibilidad  $\Pi$  ( $\Pi(A \cup B) = \text{Max}(\Pi(A), \Pi(B))$ ), se tiene:

$$\Pi(x^{1T} \cdot \underline{A}_s \cdot x^2 \leq z_s) = \text{Sup}_{z'_s \leq z_s} \Pi(x^{1T} \cdot \underline{A}_s \cdot x^2 = z'_s) \quad (3.23)$$

Por lo que, el valor  $z_s$  es el mayor pago para el jugador  $J_s$  que satisface la condición:

$$\Pi(x^{1T} \cdot \underline{A}_s \cdot x^2 = z'_s) \leq \alpha_{s0} \quad \forall z'_s \leq z_s \quad (3.24)$$

Como ya se ha comentado, las funciones de pago en estrategias mixtas  $\underline{M}^s(x^1, x^2) = x^{1T} \cdot \underline{A}_s \cdot x^2$  son números posibilistas  $LR$ , por lo que son continuas fijadas las estrategias de los jugadores. Como  $z_s$  debe ser el mayor pago de los que cumple (3.24),  $\mu_s^P(x^1, x^2)$  coincide necesariamente con el menor pago para el jugador  $J_s$  cuya posibilidad es  $\alpha_{s0}$ , es decir, con el menor valor de  $\underline{M}^s(x^{1*}, x^{2*})$  en su  $\alpha_{s0}$ -corte. En concreto, este pago, de acuerdo a las operaciones con números posibilistas  $LR$  definidas en el capítulo segundo (ver ecuaciones (2.27) y (2.31)), resulta ser (ver también ecuación (3.20) para recordar la distribución  $\underline{M}^s(x^1, x^2)$ ):

$$\mu_s^P(x^1, x^2) = x^{1T} \cdot A_s^L \cdot x^2 - L^{-1}(\alpha_{s0}) \cdot x^{1T} \cdot \alpha A_s^L \cdot x^2 \quad x^s \in X^s, s=1,2 \quad (3.25)$$

o lo que es lo mismo:

$$\mu_s^P(x^1, x^2) = x^{1T} \cdot (A_s^L - L^{-1}(\alpha_{s0}) \cdot \alpha A_s^L) \cdot x^2 \quad x^s \in X^s, s=1,2 \quad (3.26)$$

Es decir, el pago esperado por cada jugador  $J_s$  corresponde con la extensión mixta de un juego clásico, estático, no cooperativo y finito cuya función de pago en estrategias puras es la definida por la matriz  $A_s^L - L^{-1}(\alpha_{s0}) \cdot \alpha A_s^L$ , cuyos elementos son menores que los pagos más posibles del juego posibilista.

Como puede apreciarse, la ordenación entre dos números  $LR$   $\underline{a}$  y  $\underline{b}$ , inducida con el planteamiento del enfoque primal, se traduce en la comparación de los extremos izquierdos de sus respectivos  $\alpha_{s0}$ -cortes (comparación de pagos deterministas, ver Figura 3.1). Este hecho modela una actitud de aversión al riesgo frente a la incertidumbre en los pagos, pues la ordenación es equivalente a la comparación de dos pagos más pequeños que los de máxima posibilidad (y además, con grados de posibilidad  $\alpha_{s0}$ ).

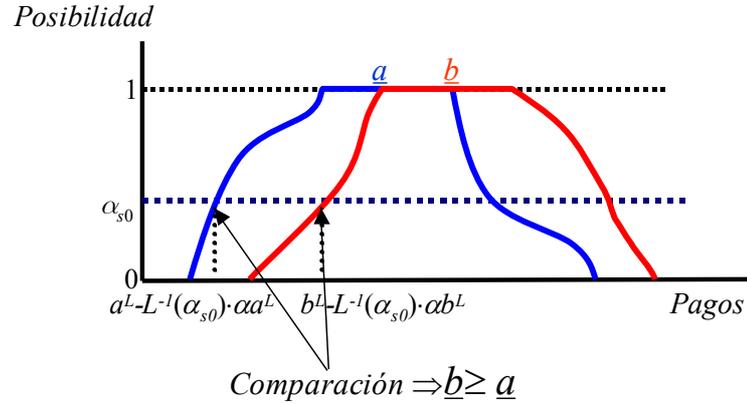


Figura 3. 1: Orden inducido por el enfoque primal

Así, la ordenación entre dos números LR  $\underline{a}=(a^L, a^R, \alpha a^L, \alpha a^R)_{LR}$  y  $\underline{b}=(b^L, b^R, \alpha b^L, \alpha b^R)_{LR}$  se realiza de acuerdo a la siguiente equivalencia:

$$\underline{a} \geq \underline{b} \Leftrightarrow a^L - L^{-1}(\alpha_{s0}) \cdot \alpha a^L \geq b^L - L^{-1}(\alpha_{s0}) \cdot \alpha b^L \quad (3. 27)$$

Una vez determinada la función de pago determinista que se supone equivalente a  $\underline{M}^s(x^1, x^2)$ , para resolver el juego basta obtener el equilibrio de Nash convencional definido con las funciones esperadas  $\mu_s^P(x^1, x^2)$ . Formalmente, las condiciones de equilibrio son equivalentes a resolver, de manera simultánea, los siguientes dos problemas de optimización:

$$\begin{aligned} & \text{Max}_{x^1} x^{1T} \cdot (A_1^L - L^{-1}(\alpha_{10}) \cdot \alpha A_1^L) \cdot x^{2*} & (3. 28) \\ & \text{s.a. } x^{1T} \cdot e^{m(1)} = 1 \\ & x^1 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{Max}_{x^2} x^{1*T} \cdot (A_2^L - L^{-1}(\alpha_{20}) \cdot \alpha A_2^L) \cdot x^2 \\ & \text{s.a. } x^{2T} \cdot e^{m(2)} = 1 \\ & x^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Tal y como se hace en [Mangasarian, 1964], pero utilizando las funciones de pago esperadas  $\mu_s^P(x^1, x^2)$ , se puede probar que  $(x^{1*}, x^{2*}) \in X^1 \times X^2$  es un equilibrio definido según (3. 28) si y solo si es una solución óptima del siguiente problema de programación cuadrática:

$$\begin{aligned}
& \underset{x^1, x^2, p^1, p^2}{Max} \quad x^{1T} \cdot (A_1^L - L^{-1}(\alpha_{10}) \cdot \alpha A_1^L) \cdot x^2 + x^{1T} \cdot (A_2^L - L^{-1}(\alpha_{20}) \cdot \alpha A_2^L) \cdot x^2 - p^1 - p^2 & (3.29) \\
& s.a. \quad (A_1^L - L^{-1}(\alpha_{10}) \cdot \alpha A_1^L) \cdot x^2 \leq p^1 \cdot e^{m(1)} \\
& \quad \quad x^{1T} \cdot (A_2^L - L^{-1}(\alpha_{20}) \cdot \alpha A_2^L) \leq p^2 \cdot e^{m(2)} \\
& \quad \quad x^{1T} \cdot e^{m(1)} = 1 \\
& \quad \quad x^{2T} \cdot e^{m(2)} = 1 \\
& \quad \quad x^1 \geq 0 \\
& \quad \quad x^2 \geq 0
\end{aligned}$$

Este problema puede ser resuelto mediante optimizadores comerciales de programación cuadrática que admitan productos entre variables cruzadas en la función objetivo, o mediante los algoritmos mostrados en [Lemke, 1964] y [Lemke, 1965].

Antes de demostrar la equivalencia, se va a comprobar que la función objetivo del problema (3.29) es siempre menor o igual que cero para cualquier solución factible.

Efectivamente, si se multiplica la primera restricción por  $x^{1T}$  y la segunda por  $x^2$  se tiene:

$$\begin{aligned}
x^{1T} \cdot (A_1^L - L^{-1}(\alpha_{10}) \cdot \alpha A_1^L) \cdot x^2 &\leq x^{1T} \cdot p^1 \cdot e^{m(1)} = p^1 & (3.30) \\
x^{1T} \cdot (A_2^L - L^{-1}(\alpha_{20}) \cdot \alpha A_2^L) \cdot x^2 &\leq p^2 \cdot e^{m(2)} \cdot x^2 = p^2
\end{aligned}$$

Por lo tanto, se cumple la condición que se quería verificar, esto es:

$$x^{1T} \cdot (A_1^L - L^{-1}(\alpha_{10}) \cdot \alpha A_1^L) \cdot x^2 - p^1 + x^{1T} \cdot (A_2^L - L^{-1}(\alpha_{20}) \cdot \alpha A_2^L) \cdot x^2 - p^2 \leq 0 \quad (3.31)$$

Si se supone ahora que  $(x^{1*}, x^{2*}) \in X^1 \times X^2$  es un equilibrio de Nash en estrategias mixtas definido según (3.28), se puede probar que  $(x^{1*}, x^{2*}) \in X^1 \times X^2$  es una solución óptima del modelo de optimización descrito en (3.29).

En efecto, al ser  $(x^{1*}, x^{2*}) \in X^1 \times X^2$  un equilibrio de Nash entonces deben satisfacerse las condiciones de **Karush-Kuhn-Tucker** (simplificadamente KKT, descritas en la mayor parte de los manuales de la teoría de la optimización) de los problemas mostrados en (3.28), esto es, deben existir  $p^{1*} \in \mathfrak{R}$ ,  $p^{2*} \in \mathfrak{R}$  tales que se cumple:

$$\begin{aligned}
 (A_1^L - L^{-1}(\alpha_{10}) \cdot \alpha A_1^L) \cdot x^{2*} - p^{1*} \cdot e^{m(1)} &= 0 \\
 x^{1*T} \cdot (A_2^L - L^{-1}(\alpha_{20}) \cdot \alpha A_2^L) - p^{2*} \cdot e^{m(2)} &= 0 \\
 x^{1*T} \cdot e^{m(1)} &= 1 \\
 x^{2*T} \cdot e^{m(2)} &= 1 \\
 x^{1*} &\geq 0 \\
 x^{2*} &\geq 0
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

Multiplicando por  $x^{1*T} \in X^1$  la primera de las ecuaciones y por  $x^{2*T} \in X^2$  la segunda se obtiene:

$$x^{1*T} \cdot (A_1^L - L^{-1}(\alpha_{10}) \cdot \alpha A_1^L) \cdot x^{2*} + x^{1*T} \cdot (A_2^L - L^{-1}(\alpha_{20}) \cdot \alpha A_2^L) \cdot x^{2*} - p^{1*} - p^{2*} = 0 \tag{3.33}$$

Como la función objetivo de (3.28) es siempre menor o igual que cero,  $(x^{1*}, x^{2*}) \in X^1 \times X^2$  debe ser necesariamente una solución óptima del problema de optimización.

Recíprocamente, si se supone que  $(x^{1*}, x^{2*}) \in X^1 \times X^2$  es una solución óptima del problema de optimización, al existir un equilibrio que cumple (3.33) (Nash demostró que cualquier juego en estrategias mixtas tiene al menos un equilibrio, ver [Nash, 1950]), por optimalidad  $(x^{1*}, x^{2*}) \in X^1 \times X^2$  debe también cumplir la ecuación (3.33). Además, al ser  $(x^{1*}, x^{2*}) \in X^1 \times X^2$  una solución factible del problema de optimización se tiene, forzosamente:

$$\begin{aligned}
 (A_1^L - L^{-1}(\alpha_{10}) \cdot \alpha A_1^L) \cdot x^{2*} - p^{1*} \cdot e^{m(1)} &= 0 \\
 x^{1*T} \cdot (A_2^L - L^{-1}(\alpha_{20}) \cdot \alpha A_2^L) - p^{2*} \cdot e^{m(2)} &= 0
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

Y por lo tanto  $(x^{1*}, x^{2*}) \in X^1 \times X^2$  es un equilibrio de Nash en estrategias mixtas, ya que cumple las condiciones de KKT de (3.28) mostradas en (3.32).

### 3.4.2 Enfoque dual: planteamiento y resolución

Cuando el jugador  $J_1$  elige una estrategia mixta  $x^1 \in X^1$  y el jugador  $J_2$  una estrategia mixta  $x^2 \in X^2$ , es posible determinar la posibilidad  $\mu_s^D(x^1, x^2)$  de que el pago que recibirá  $J_s$  sea menor o igual que un pago pequeño  $\mu_{s0} \in \mathfrak{R}$  prefijado por el jugador. Formalmente  $\mu_s^D(x^1, x^2)$  se formula como sigue:

$$\mu_s^D(x^1, x^2) = \Pi(x^{1T} \cdot A_s \cdot x^2 \leq \mu_{s0}) \quad x^s \in X^s, s=1,2 \tag{3.35}$$

En este sentido, el enfoque dual trata de encontrar la estrategia en equilibrio que minimiza simultáneamente para cada jugador el grado de posibilidad  $\mu_s^D(x^1, x^2)$ .

De acuerdo a la propiedad de no aditividad de una medida de posibilidad  $\Pi$  ( $\Pi(A \cup B) = \max(\Pi(A), \Pi(B))$ ), se tiene que el grado de posibilidad  $\mu_s^D(x^1, x^2)$  coincide con:

$$\mu_s^D(x^1, x^2) = \sup_{z'_s \leq \mu_{s0}} \Pi(x^{1T} \cdot A_s \cdot x^2 = z'_s) \quad x^s \in X^s, s=1,2 \quad (3.36)$$

Puede probarse entonces que la expresión analítica de la función de pago esperada,  $\mu_s^D(x^1, x^2)$ , que se desea minimizar resulta ser igual a:

$$\mu_s^D(x^1, x^2) = L\left(\frac{x^{1T} \cdot A_s^L \cdot x^2 - \mu_{s0}}{x^{1T} \cdot \alpha A_s^L \cdot x^2}\right) \quad x^s \in X^s, s=1,2 \quad (3.37)$$

En donde  $L$  es la función  $L: \mathfrak{R} \rightarrow [0,1]$  de la distribución del pago  $\underline{M}^s(x^1, x^2)$ . Además, tal y como se describió en el capítulo segundo, la función  $L$  es una aplicación definida sobre el conjunto de números reales  $\mathfrak{R}$ , diferenciable, y estrictamente decreciente en  $(0,1)$ , y tal que  $L(s)=1$  para  $s \leq 0$  y  $L(s)=0$  para  $s \geq 1$ .

El orden entre números posibilistas  $LR$  inducido con el planteamiento del enfoque dual resulta ser:

$$a \geq b \Leftrightarrow L\left(\frac{a^L - \mu_{s0}}{\alpha a^L}\right) \leq L\left(\frac{b^L - \mu_{s0}}{\alpha b^L}\right) \quad (3.38)$$

Al igual que en el enfoque primal, este orden también modela una actitud de aversión al riesgo frente a los pagos posibilistas de los jugadores, dado que es equivalente a comparar los grados de posibilidad de los pagos pesimistas  $\mu_{s0} \in \mathfrak{R}$  (ver Figura 3. 2).

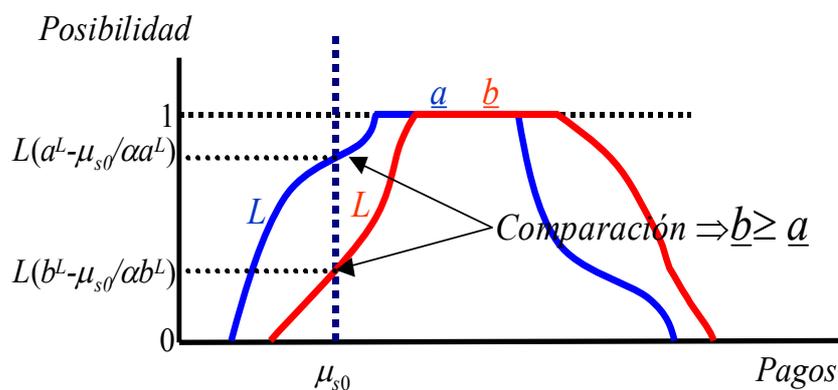


Figura 3. 2: Orden inducido por el enfoque dual

Las condiciones del equilibrio dual son equivalentes a resolver de manera simultánea los siguientes dos problemas de minimización:

$$\begin{aligned} \text{Min}_{x^1} L \left( \frac{x^{1T} \cdot A_1^L \cdot x^{2*} - \mu_{10}}{x^{1T} \cdot \alpha A_1^L \cdot x^{2*}} \right) & \quad (3.39) \\ \text{s.a. } x^{1T} \cdot e^{m(1)} = 1 & \\ x^1 \geq 0 & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Min}_{x^2} L \left( \frac{x^{1*T} \cdot A_2^L \cdot x^2 - \mu_{20}}{x^{1*T} \cdot \alpha A_2^L \cdot x^2} \right) & \\ \text{s.a. } x^{2T} \cdot e^{m(2)} = 1 & \\ x^2 \geq 0 & \end{aligned}$$

Al ser  $L$  una función decreciente, la resolución de los dos anteriores problemas de minimización puede probarse que resulta equivalente a la resolución de los siguientes dos problemas de maximización:

$$\text{Max}_{x^1} \frac{x^{1T} \cdot A_1^L \cdot x^{2*} - \mu_{10}}{x^{1T} \cdot \alpha A_1^L \cdot x^{2*}} \quad (3.40)$$

$$\text{s.a. } x^{1T} \cdot e^{m(1)} = 1 \\ x^1 \geq 0$$

$$\text{Max}_{x^2} \frac{x^{1*T} \cdot A_2^L \cdot x^2 - \mu_{20}}{x^{1*T} \cdot \alpha A_2^L \cdot x^2}$$

$$\text{s.a. } x^{2T} \cdot e^{m(2)} = 1 \\ x^2 \geq 0$$

Además, se puede probar que  $(x^{1*}, x^{2*}) \in X^1 \times X^2$  es un equilibrio de Nash en estrategias mixtas definido según (3.40), si y solo si  $(x^{1*}, x^{2*})$  es una solución óptima del siguiente problema de optimización no lineal:

$$\text{Max}_{x^1, x^2, p^1, p^2} \mu_{10} \cdot x^{1T} \cdot \alpha A_1^L \cdot x^2 + \mu_{20} \cdot x^{1T} \cdot \alpha A_2^L \cdot x^2 - (x^{1T} \cdot \alpha A_1^L \cdot x^2)^2 \cdot p^1 - (x^{1T} \cdot \alpha A_2^L \cdot x^2)^2 \cdot p^2 \quad (3.41)$$

$$\text{s.a. } \mu_{10} \cdot \alpha A_1^L \cdot x^2 \leq (x^{1T} \cdot \alpha A_1^L \cdot x^2)^2 \cdot p^1 \cdot e^{m(1)}$$

$$\mu_{20} \cdot x^{1T} \cdot \alpha A_2^L \leq (x^{1T} \cdot \alpha A_2^L \cdot x^2)^2 \cdot p^2 \cdot e^{m(2)}$$

$$x^{1T} \cdot e^{m(1)} = 1$$

$$x^{2T} \cdot e^{m(2)} = 1$$

$$x^1 \geq 0$$

$$x^2 \geq 0$$

El razonamiento para la demostración que caracteriza los equilibrios planteados según el enfoque dual es totalmente similar al seguido en el enfoque primal, por lo que se ha omitido.

Introduciendo las variables auxiliares  $r^s = x^{1T} \cdot \alpha A_s^L \cdot x^2$  y  $d^s = (r^s)^2$  el anterior modelo no lineal es equivalente al siguiente modelo de optimización, que también resulta ser no lineal:

$$\begin{aligned}
 & \underset{x^1, x^2, p^1, p^2, r^1, r^2, d^1, d^2}{Max} \quad \mu_{10} \cdot x^{1T} \cdot \alpha A_1^L \cdot x^2 + \mu_{20} \cdot x^{1T} \cdot \alpha A_2^L \cdot x^2 - d^1 \cdot p^1 - d^2 \cdot p^2 & (3.42) \\
 & s.a. \quad \mu_{10} \cdot \alpha A_1^L \cdot x^2 \leq d^1 \cdot p^1 \cdot e^{m(1)} \\
 & \quad \mu_{20} \cdot x^{1T} \cdot \alpha A_2^L \leq d^2 \cdot p^2 \cdot e^{m(2)} \\
 & \quad x^{1T} \cdot e^{m(1)} = 1 \\
 & \quad x^{2T} \cdot e^{m(2)} = 1 \\
 & \quad r^1 = x^{1T} \cdot \alpha A_1^L \cdot x^2 \\
 & \quad r^2 = x^{1T} \cdot \alpha A_2^L \cdot x^2 \\
 & \quad d^1 = (r^1)^2 \\
 & \quad d^2 = (r^2)^2 \\
 & \quad x^1, r^1, d^1 \geq 0 \\
 & \quad x^2, r^2, d^2 \geq 0
 \end{aligned}$$

Este problema puede ser resuelto mediante optimizadores comerciales de programación cuadrática que admitan productos entre variables cruzadas tanto en la función objetivo como en las restricciones.

### 3.5 Juegos $K$ -personales posibilistas $LR$ estáticos no cooperativos finitos: forma normal y extensión mixta

En esta tesis se define **juego  $K$ -personal posibilista  $LR$  no cooperativo finito** a un juego en donde  $K$  jugadores  $J_s$  ( $s=1,\dots,K$ ) actúan de manera independiente en la elección de una estrategia, y de tal forma que el pago recibido por cada uno de ellos es un número posibilista  $LR$ . Además, el conjunto de estrategias para cada jugador se supone que es un conjunto finito.

La **forma normal de un juego  $G$   $K$ -personal posibilista no cooperativo finito** se va a denotar como  $\underline{G}=(X_1,\dots,X_K,\underline{A}_1,\dots,\underline{A}_K)$  en donde  $X_s=\{1,\dots,m(s)\}$  es el conjunto de estrategias puras del jugador  $J_s$  ( $m(s)$  es el número de estrategias del jugador  $J_s$ ), y siendo  $\underline{A}_s=(a_s(d_1,\dots,d_K))$  una matriz  $K$ -dimensional cuyos coeficientes  $a_s(d_1,\dots,d_K)$  son números posibilistas  $LR$ , que representan los **pagos posibilistas en estrategias puras** que reciben los jugadores, cuando cada uno de ellos selecciona su estrategia pura  $d_s \in X_s$  ( $s=1,\dots,K$ ).

La **extensión mixta posibilista del juego  $G$**  tiene como estrategias mixtas  $x^s \in X^s$  el conjunto de pesos que pueden asignarse a  $X_s$ , y tales que su suma es la unidad. La **función de pago  $\underline{M}^s$  posibilista en estrategias mixtas  $x^s \in X^s$**  para cada jugador es la media de los pagos posibilistas en estrategias puras ponderadas por los pesos asignados a las estrategias (envoltura convexa de  $X_s$ ). En el caso  $K$ -personal esta función de pago posibilista se formula matemáticamente como sigue:

$$\underline{M}^s(x^1, \dots, x^k) = \sum_{d_1=1}^{m(1)} \dots \sum_{d_k=1}^{m(k)} x_1^{d_1} \dots x_k^{d_k} \cdot a_s(d_1, \dots, d_k) \quad x^s \in X^s, s=1, \dots, k \quad (3.43)$$

Obsérvese que, en este caso, al ser la matriz  $\underline{A}_s$  una matriz  $K$ -dimensional, las funciones de pago no pueden formularse matricialmente.

#### 3.5.1 Enfoque primal: planteamiento y resolución

Cuando el jugador  $J_s$  elige una estrategia mixta  $x^s \in X^s$  para  $s=1,\dots,K$ , el pago esperado por cada jugador desde el punto de vista del enfoque primal se define como el mayor de los pagos de entre todos los que hacen que la posibilidad de tener pagos menores sea menor o igual que un umbral o nivel de riesgo  $\alpha_{s0} \in [0,1)$  prefijado por el jugador. Esto es, la función de pago esperada por el jugador  $J_s$  se formula como:

$$\mu_s^p(x^1, \dots, x^K) = \underset{z_s \in \underline{M}^s(x^1, \dots, x^K)}{\text{Max}} \left\{ z_s = z_s(x^1, \dots, x^K) / \Pi(\underline{M}^s(x^1, \dots, x^K) \leq z_s) \leq \alpha_{s0} \right\} \quad x^s \in X^s, s=1, \dots, K \quad (3.44)$$

El equilibrio en el sentido de Nash cuando se consideran estas funciones de pago esperadas es la estrategia  $(x^{1*}, \dots, x^{K*}) \in X^1 \times \dots \times X^K$  que satisface simultáneamente las siguientes condiciones:

$$\mu_s^P(x^{1*}, \dots, x^{K*}) \geq \mu_s^P(x^{1*}, \dots, x^s, \dots, x^{K*}) \quad \forall x^s \in X^s, \forall s = 1, \dots, K \quad (3.45)$$

Como generalización del caso bipersonal, la obtención del equilibrio se traduce en la resolución del siguiente problema de optimización cuadrática:

$$\begin{aligned} & \underset{x^1, \dots, x^k, p^1, \dots, p^k}{Max} \sum_{s=1}^K [A_s^L(x^1, \dots, x^K) - L^{-1}(\alpha_s) \cdot \alpha A_s^L(x^1, \dots, x^K)] - \sum_{s=1}^K p^s & (3.46) \\ \text{s.a.} \quad & \Lambda_s^L(x^1, \dots, x^{s-1}, x^{s+1}, \dots, x^K) - L^{-1}(\alpha_s) \cdot \alpha \Lambda_s^L(x^1, \dots, x^{s-1}, x^{s+1}, \dots, x^K) \leq p^s \cdot e^{m(s)} \quad s = 1, \dots, K \\ & x^{sT} \cdot e^{m(s)} = 1 \quad s = 1, \dots, K \\ & x^s \geq 0 \quad s = 1, \dots, K \end{aligned}$$

siendo:

$$\begin{aligned} A_s^L(x^1, \dots, x^K) &= \sum_{d_1=1}^{m(1)} \dots \sum_{d_K=1}^{m(K)} x_1^{d_1} \dots x_K^{d_K} \cdot a_s^L(d_1, \dots, d_K) & (3.47) \\ \Lambda_s^L(x^1, \dots, x^{s-1}, x^{s+1}, \dots, x^K) &= \begin{pmatrix} \sum_{d_1=1}^{m(1)} \dots \sum_{d_{s-1}=1}^{m(s-1)} \sum_{d_{s+1}=1}^{m(s+1)} \dots \sum_{d_K=1}^{m(K)} x_1^{d_1} \dots x_{s-1}^{d_{s-1}} \cdot x_{s+1}^{d_{s+1}} \dots x_K^{d_K} \cdot a_s^L \left( d_1, \dots, \overset{\text{(posición } s)}{1}, \dots, d_K \right) \\ \dots \dots \\ \sum_{d_1=1}^{m(1)} \dots \sum_{d_{s-1}=1}^{m(s-1)} \sum_{d_{s+1}=1}^{m(s+1)} \dots \sum_{d_K=1}^{m(K)} x_1^{d_1} \dots x_{s-1}^{d_{s-1}} \cdot x_{s+1}^{d_{s+1}} \dots x_K^{d_K} \cdot a_s^L \left( d_1, \dots, \overset{\text{(posición } s)}{m(s)}, \dots, d_K \right) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Análogamente se definen las funciones  $\alpha A_s^L$  y  $\alpha \Lambda_s^L$  reemplazando los números reales  $a_s^L(d_1, \dots, d_K)$  por los números  $\alpha a_s^L(d_1, \dots, d_K)$ .

### 3.5.2 Enfoque dual: planteamiento y resolución

Cuando cada jugador  $J_s$  elige una estrategia mixta  $x^s \in X^s$  es posible determinar la posibilidad de que el pago que recibirá  $J_s$  sea menor o igual que un pago pequeño  $\mu_{s0} \in \mathfrak{R}$  prefijado por el jugador, esto es:

$$\mu_s^D(x^1, \dots, x^K) = \Pi \left( \underline{M}^s(x^1, \dots, x^K) \leq \mu_{s0} \right) \quad x^s \in X^s, s = 1, \dots, K \quad (3.48)$$

En esta situación el equilibrio dual es la estrategia  $(x^{1*}, \dots, x^{K*}) \in X^1 \times \dots \times X^K$  que satisface las siguientes condiciones simultáneamente:

$$\mu_s^D(x^{1*}, \dots, x^{K*}) \leq \mu_s^D(x^{1*}, \dots, x^s, \dots, x^{K*}) \quad \forall x^s \in X^s, \forall s = 1, \dots, K \quad (3.49)$$

Generalizando el caso bipersonal, la obtención del equilibrio se traduce en la resolución del siguiente problema de programación no lineal:

$$\begin{aligned} & \underset{x^1, \dots, x^K, p^1, \dots, p^K}{\text{Min}} \quad \sum_{s=1}^K [\mu_{s0} \cdot A_s^L(x^1, \dots, x^K)] - \sum_{s=1}^K [(\alpha A_s^L(x^1, \dots, x^K))^2 \cdot p^s] \\ & \text{s.a.} \quad \mu_{s0} \cdot \alpha \Lambda_s^L(x^1, \dots, x^{s-1}, x^{s+1}, \dots, x^K) \leq (\alpha \Lambda_s^L(x^1, \dots, x^{s-1}, x^{s+1}, \dots, x^K))^2 \cdot p^s \cdot e^{m(s)} \quad s=1, \dots, K \\ & \quad x^{sT} \cdot e^{m(s)} = 1 \quad s=1, \dots, K \\ & \quad x^s \geq 0 \quad s=1, \dots, K \end{aligned} \quad (3.50)$$

A continuación se describen los juegos  $K$ -personales posibilistas  $LR$  analizados en este apartado cuando las estrategias de los jugadores son un conjunto continuo de estrategias puras, en lugar de estrategias mixtas definidas sobre un conjunto discreto de estrategias puras. El análisis de este tipo de juegos posibilistas continuos responde a la voluntad de modelar un mercado de generación en donde los beneficios de los generadores son distribuciones de posibilidad  $LR$  para cada combinación de cantidades de potencia ofertadas por los agentes, que son sus estrategias de oferta. En concreto, el siguiente apartado se refiere exclusivamente al planteamiento de los enfoques primal y dual para este tipo de juegos infinitos, y no describe, por su complejidad, una metodología de resolución general que determine los equilibrios de Nash propuestos. En el capítulo quinto se mostrará un procedimiento de resolución específico para el caso de modelar un mercado de electricidad, así como el planteamiento y la interpretación de los enfoques primal y dual en el contexto de los mercados de generación.

### 3.6 Juegos $K$ -personales posibilistas $LR$ estáticos no cooperativos infinitos: forma normal

En esta tesis se define un **juego  $K$ -personal posibilista  $LR$  estático no cooperativo continuo** a un juego  $K$ -personal posibilista  $LR$  estático no cooperativo en donde el conjunto de estrategias para cada jugador es un intervalo real, que se supone cerrado y acotado  $X_s=[a_s,b_s]$ .

La **forma normal de un juego  $\underline{G}$   $K$ -personal posibilista  $LR$  estático no cooperativo continuo** se va a denotar como  $\underline{G}=(X_1,\dots,X_k,\underline{M}_1,\dots,\underline{M}_k)$  en donde  $X_s=[a_s,b_s]$  es el conjunto de estrategias puras del jugador  $J_s$  y en donde  $\underline{M}_s(x_1,\dots,x_k)$  es la función de pago del jugador  $J_s$ , que es un número posibilista  $LR$  para cada combinación de estrategias puras  $x_s \in X_s$  elegidas por los jugadores.

Aunque en esta tesis no ha resultado de interés el estudio de la **extensión mixta posibilista del juego  $\underline{G}$** , las estrategias  $X^s$  de este tipo de juegos se definen como el conjunto de funciones continuas de pesos  $F^s$  sobre  $X_s$ , cuya integral es la unidad. Las funciones de pago posibilistas  $\underline{M}^s$  en estrategias mixtas son entonces las siguientes:

$$\underline{M}^s(F^1, \dots, F^K) = \int_{X_1} \dots \int_{X_K} \underline{M}_K(x_1, \dots, x_K) dF^K(x_K) \dots dF^1(x_1) \quad F^s \in X^s, s=1, \dots, K \quad (3.51)$$

El **equilibrio de Nash en estrategias puras para juegos posibilistas infinitos** (análogamente se podría definir en estrategias mixtas sustituyendo la función de pago  $\underline{M}_s$  por  $\underline{M}^s$ ) se define de igual forma a como se hace en los juegos posibilistas finitos, es decir, es una  $K$ -upla de estrategias  $(x^{1*}, \dots, x^{K*}) \in X^1 \times \dots \times X^K$  que satisface las siguientes condiciones:

$$\underline{M}_s(x^{1*}, \dots, x^{K*}) \geq \underline{M}_s(x^{1*}, \dots, x^{(s-1)*}, x^s, x^{(s+1)*}, \dots, x^{K*}) \quad \forall x^s \in X^s, s=1, \dots, K \quad (3.52)$$

Como puede observarse, la anterior condición implica la comparación de  $2 \cdot K$  números posibilistas  $LR$ . Al igual que en los juegos finitos, los enfoques primal y dual propuestos en esta tesis definen un orden entre los números posibilistas  $LR$ , a partir de un criterio de comparación con números reales. Como se verá en los siguientes dos epígrafes, la forma de hacerlo es también muy similar a la descrita para juegos finitos.

#### 3.6.1 Enfoque primal: planteamiento y formulación

Cuando el jugador  $J_s$  elige una estrategia mixta  $x^s \in X^s$  para  $s=1, \dots, K$ , el pago esperado por cada jugador desde el punto de vista del enfoque primal se define como el mayor

de los pagos de entre todos los que hacen que la posibilidad de tener pagos menores sea menor o igual que un umbral o nivel de riesgo  $\alpha_{s0} \in [0,1)$  prefijado por el jugador. Esto es, la función de pago esperada por el jugador  $J_s$  se formula matemáticamente como:

$$\mu_s^P(x_1, \dots, x_K) = \underset{z_s \in ]\underline{M}_s(x_1, \dots, x_K)]}{\text{Max}} \{z_s = z_s(x_1, \dots, x_K) / \Pi(\underline{M}_s(x_1, \dots, x_K) \leq z_s) \leq \alpha_{s0}\} \quad x^s \in X^s, s=1, \dots, K \quad (3.53)$$

El equilibrio en el sentido de Nash, cuando se consideran las anteriores funciones de pago esperadas, es la estrategia pura  $(x_1^*, \dots, x_K^*) \in X_1 \times \dots \times X_K$  que satisface las siguientes condiciones:

$$\mu_s^P(x_1^*, \dots, x_K^*) \geq \mu_s^P(x_1^*, \dots, x_s, \dots, x_K^*) \quad \forall x_s \in X_s, \forall s=1, \dots, K \quad (3.54)$$

A diferencia de los juegos posibilistas  $K$ -personales finitos analizados en anteriores apartados, ahora las estrategias sobre las que actúa la función de pago esperada con el enfoque primal son estrategias puras y continuas en lugar de estrategias mixtas, como se considera típicamente en cualquier modelo de mercado bajo incertidumbre.

### 3.6.2 Enfoque dual: planteamiento y formulación

Cuando cada jugador  $J_s$  elige una estrategia pura  $x_s \in X_s$  es posible determinar la posibilidad de que el pago que recibirá  $J_s$  sea menor o igual que un pago mínimo  $\mu_{s0} \in \Re$  prefijado por el jugador, esto es:

$$\mu_s^D(x_1, \dots, x_K) = \Pi(\underline{M}_s(x_1, \dots, x_K) \leq \mu_{s0}) \quad x_s \in X_s, s=1, \dots, K \quad (3.55)$$

El equilibrio dual es la estrategia  $(x_1^*, \dots, x_K^*) \in X_1 \times \dots \times X_K$  que satisface las siguientes condiciones simultáneamente:

$$\mu_s^D(x_1^*, \dots, x_K^*) \leq \mu_s^D(x_1^*, \dots, x_s, \dots, x_K^*) \quad \forall x^s \in X^s, \forall s=1, \dots, K \quad (3.56)$$

### 3.6.3 Comentarios acerca de la resolución de los enfoques primal y dual

La complejidad de la resolución de las anteriores ecuaciones de equilibrio depende en gran medida del tipo de función de pago  $\mu_s$  esperada (ya sea  $\mu_s = \mu_s^P$  o  $\mu_s = \mu_s^D$ ). En concreto, la resolución depende de:

- Las propiedades analíticas (continuidad, diferenciabilidad, etc) en las variables  $(x_1, \dots, x_K)$  de la función  $\mu_s(x_1, \dots, x_K)$ . Como se verá en el capítulo quinto, tal y como

se ha planteado el modelo de mercado de electricidad en esta tesis, van a existir problemas de diferenciabilidad en un entorno de un precio esperado de la electricidad, que se supone conocido.

- El modelado de  $\mu_s$  como función de funciones más simples que, por ejemplo, sólo dependan de la estrategia  $x_s$ . En el caso del mercado eléctrico  $\mu_s$  se expresa como función de la curva de la demanda residual del agente<sup>12</sup> multiplicada por la potencia generada menos los costes de producción, que dependen solamente de la potencia generada.
- La linealidad o no en las variables  $(x_1, \dots, x_K)$  de  $\mu_s(x_1, \dots, x_K)$ . En el caso del modelo de mercado de electricidad resuelto en esta tesis, la curva de la demanda residual de cada generador es lineal a tramos y función de la producción ofertada, al igual que las curvas de costes de producción.

---

<sup>12</sup>Como se describirá a lo largo de los siguientes capítulos, la curva de la demanda residual de un generador determina el precio de la electricidad para cada oferta del generador, y resulta de sustraer de la curva de la demanda, las ofertas del resto de generadores.

### 3.7 Referencias

- [Aubin, 1974] J. P. Aubin, "Coeur et Valuer des Jeux Flous a Paiements Lateraux". *C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A*, vol. 279, pp. 891-894, 1974.
- [Aubin, 1981] J. P. Aubin, "Cooperative Fuzzy Games". *Mathematics of Operations Research*, vol. 6, pp. 1-13, 1981.
- [Billot, 1992] A. Billot, *Economic Theory of Fuzzy Equilibria*: Springer-Verlag, 1992.
- [Blackwell, 1954] D. Blackwell and M. A. Girshick, *Theory of Games and Statistical Decisions*. New York: John Wiley, 1954.
- [Buckley, 1984] J. J. Buckley, "Multiple Goal non-Cooperative Conflicts under Uncertainty: a Fuzzy Set Approach". *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 13, pp. 107-124, 1984.
- [Butnariu, 1978] D. Butnariu, "Fuzzy Games: A Description of the Concept". *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 1, pp. 181-192, 1978.
- [Campos, 1989] L. Campos, "Fuzzy linear programming models to solve fuzzy matrix games". *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 32, N.3, pp. 275-289, 1989.
- [Campos, 1992] L. Campos, A. Gonzalez, and M. A. Vila, "On the Use of the Ranking Function approach to solve Fuzzy Matrix Games in a Direct Way". *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 49, N. 2, pp. 193-203, 1992.
- [Cohn, 1965] P. M. Cohn, *Universal Algebra*. New York: Harper Row, 1965.
- [Dubois, 1980] D. Dubois and H. Prade, *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications*. New York: Academic Press, 1980.
- [Kruse, 1987] R. Kruse and K. D. Meyer, *Statistics with Vague Data*. Dordrecht: Reidel, 1987.
- [Lemke, 1965] C. E. Lemke, "Bimatrix Equilibrium Points and Mathematical Programming". *Management Science*, vol. 11, pp. 681-689, 1965.
- [Lemke, 1964] C. E. Lemke and J. T. Howson JR, "Equilibrium Points of Bimatrix Games". *SIAM Journal on Applied Mathematics*, vol. 12, pp. 413-423, 1964.
- [Luce, 1957] R. D. Luce and H. Raiffa, *Games and Decisions*. New York: John Wiley, 1957.
- [Maeda, 2003] T. Maeda, "On Characterization of Equilibrium Strategy of Two-Person Zero-Sum Games". *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 139, N. 2, pp. 283-296, 2003.
- [Mangasariam, 1964] O. L. Mangasariam and H. Stone, "Two person Nonzero-sum Games and Quadratic programming". *Journal of Math. Ana. and Appl.*, vol. 9, pp. 348-355, 1964.
- [Mckinsey, 1967] J. C. C. Mckinsey, *Introducción a la Teoría Matemática de los Juegos*. Madrid: Aguilar, 1967.

- [Nash, 1950] J. F. Nash, "Equilibrium Points in N-Person Games". *Proceedings of the National Academy of Sciences*, pp. 48-49, 1950.
- [Nishizaki, 2001] I. Nishizaki and M. Sakawa, *Fuzzy and Multiobjective Games for Conflict Resolution*, vol. 64. Studies in Fuzziness and Soft Computing: Physica Verlag, 2001.
- [Owen, 1982] G. Owen, *Game Theory*. New York: Academic Press, 1982.
- [Ponsard, 1986] C. Ponsard, "Spatial Oligopoly as Fuzzy Games," in *Fuzzy Economics and Spatial Analysis*, C. P. a. B. Fustier, Ed. Dijon, 1986, pp. 57-67.
- [Ponsard, 1987] C. Ponsard, "Nash Fuzzy equilibrium: Theory and Application to a spatial duopoly". *European Journal of Operational Research*, vol. 31, pp. 376-384, 1987.
- [Shapiro, 1984] C. Shapiro and J. Stiglitz, "Equilibrium Unemployment as a Worker Discipline Device". *American Economic Review*, vol. 74 (3), 1984.
- [Smets, 1997] P. Smets, "Imperfect information: Imprecision - Uncertainty," in *Uncertainty Management in Information Systems. From Needs to Solutions*, A. Motro and P. Smets, Eds.: Kluwer Academic, 1997, pp. 225-254.
- [Von Neumann, 1944] J. Von Neumann and O. Morgenstein, *Theory of Games and Economic Behavior*: Princeton: Princeton University Press, 1944.
- [Zadeh, 1968] L. A. Zadeh, "Probability Measures of Fuzzy Events". *J. of Math. Anal. Appl.*, vol. 23, pp. 421-427, 1968.



## **4. Una visión general de los enfoques primal y dual en su aplicación a los mercados eléctricos**

En las últimas décadas se viene produciendo en muchos países un proceso de desregularización del negocio del suministro de la electricidad, fruto de la incorporación de mercados para la generación de la electricidad. Estos mercados son el resultado de la interacción estratégica de los agentes compradores y vendedores de electricidad, y su comportamiento está condicionado a la incertidumbre en la evolución de la demanda de electricidad, de los precios de los combustibles, etc. La teoría de juegos, la teoría de la organización industrial y otros campos relacionados, han sido ampliamente utilizados para el modelado del comportamiento de estos mercados eléctricos bajo incertidumbre.

De cara a justificar el modelo de mercado bajo incertidumbre elegido en esta tesis, este capítulo presenta una revisión bibliográfica de los enfoques más recientes de modelado del mercado de generación, destacando las principales diferencias entre aquellos que representan la incertidumbre mediante la teoría de la probabilidad y los que utilizan la teoría de la posibilidad. Se identifican además las características generales del enfoque de modelado escogido en la tesis, entre las que destaca la utilización de distribuciones de posibilidad para la representación de la incertidumbre.



## **4.1 Organización del capítulo**

Primeramente, y a modo de introducción, se describe de manera general el funcionamiento de los mercados de generación de electricidad, así como los diferentes tipos de mercados eléctricos y sus principales fuentes de incertidumbre.

A continuación se presenta una revisión bibliográfica de los enfoques de modelado del mercado eléctrico, entre los que se han destacado aquellos que representan la incertidumbre mediante la teoría de la probabilidad. Se muestran además las diferencias fundamentales entre los distintos enfoques descritos.

En el siguiente apartado se describen las principales diferencias y similitudes entre la teorías de la probabilidad y de la posibilidad como herramientas de modelado de la incertidumbre en el contexto de los mercados eléctricos.

Seguidamente se muestra el estado del arte de la aplicación de la teoría de la posibilidad como técnica de representación de la incertidumbre en los mercados de electricidad.

En el último apartado se presenta una visión general del modelo de mercado considerado en esta tesis, y su ubicación en una gráfica tridimensional que clasifica los principales enfoques de modelado revisados a lo largo de este capítulo. Esta clasificación facilita la identificación de las principales aportaciones originales de esta tesis.

## 4.2 Los mercados eléctricos: tipos e incertidumbres

En los últimos años la organización de la industria eléctrica ha experimentado cambios significativos a un ritmo sin precedentes. El objetivo de estos cambios ha sido establecer nuevos esquemas regulatorios basados en los principios de libre competencia. Así, en algunos países como España, aunque las actividades asociadas al transporte y la distribución de energía eléctrica han sufrido cambios importantes, es la actividad de la generación la que más profundas reformas ha experimentado debido a la instauración de un **mercado de compra-venta de energía eléctrica**<sup>13</sup>.

En los siguientes apartados se describen las características generales del funcionamiento de los mercados de generación, así como los principales tipos de mercados y las diferentes fuentes de incertidumbre que pueden influir en sus comportamientos.

### 4.2.1 Los mercados de generación y sus funcionamientos

Los mercados eléctricos en entornos liberalizados se basan en el equilibrio de las ofertas de compra y venta de energía presentadas por los agentes participantes, obtenido mediante un **algoritmo de casación** que determina el precio de las transacciones resultantes, así como qué generadores y qué demandas deben ser despachados. El precio de estas transacciones es el denominado **precio de mercado**, que en el caso de **nudo único**, es cobrado por igual a todos los consumidores y pagado a todos los productores que hayan entrado en el mercado. Por el contrario, se pueden obtener diferentes precios por áreas geográficas o **precios nodales**, cuando existen restricciones fuertes en la red de transporte o ante una localización física de los grupos de generación significativamente dispersa. Cuando todas las ofertas casadas en el mercado se retribuyen a un precio único correspondiente a la última oferta aceptada por el algoritmo de casación, entonces el precio de mercado es denominado **precio marginal**.

Las reglas implantadas en un mercado de electricidad, que son distintas de unos países a otros, determinan el funcionamiento detallado del mercado. En las **reglas del mercado** se deben describir, entre otros, los mecanismos de presentación de ofertas, los procedimientos detallados de casación, la información que se suministra a los agentes sobre los resultados del mercado, y los métodos de revisión y modificación de las propias reglas (para el caso español, ver [OMEL, 2001]).

---

<sup>13</sup>En [Pérez Arriaga, 1997] se presenta una interesante discusión sobre los factores que han impulsado el proceso de desregularización del sector eléctrico centrándose en el caso español.

### **4.2.2 Tipos de mercados de generación según el grado de competencia**

Existe una gran cantidad de estudios teóricos y empíricos que han sido planteados para comprender el grado de competencia ejercida en los mercados de energía eléctrica, algunos de los cuales se describen en posteriores apartados. Estos trabajos han derivado en una clasificación más o menos realista de los distintos tipos de mercados de generación según el grado de competencia: mercados idealizados de competencia perfecta, mercados imperfectos, y mercados monopolistas y oligopolistas.

Los mercados de generación que funcionan en **competencia perfecta** son aquellos en los que existe un gran número de agentes vendedores y de agentes compradores, de forma que ninguno puede influir en los precios resultantes de la energía, al ser las cantidades producidas o demandadas por cada uno de ellos pequeñas en relación con el total.

Por el contrario, los mercados de generación reales presentan importantes desviaciones frente al ideal de competencia perfecta, dando lugar a los denominados **mercados de competencia imperfecta** donde las empresas individuales tienen cierto poder de mercado, es decir, cierto control sobre el precio de la energía. La competencia imperfecta y el poder de mercado son causas de ineficiencia, que se presentan, por ejemplo, cuando las empresas eléctricas alteran el resultado de un despacho económicamente eficiente, simplemente retirando alguna central que pasa a ser sustituida en el margen de la casación por otra de mayor coste, aumentando así el precio marginal final.

En un **mercado monopolista** uno de los generadores desempeña un papel determinante en el proceso de fijación del precio del mercado pues tiene capacidad para decidir su valor, aportando y controlando la cantidad total de energía que se ofrece en el mercado, convirtiéndose, así, en un “formador de precios”. El monopolista no tiene competencia cercana, puesto que existen barreras para la entrada de otros generadores en el mercado. Los consumidores se ven en general perjudicados por el establecimiento de un monopolio dado que su tendencia es el aumento de los precios y la caída de la calidad del suministro.

La situación **oligopolista** surge cuando existe un número pequeño de generadores que dominan y tienen control sobre el precio del mercado. Aunque éste es un caso muy similar al monopolio, el poder no se concentra en un solo generador, como sucede en el monopolio, sino en un grupo pequeño. Cada uno de ellos, dado que produce una cantidad significativa del total, tiene un control importante sobre el

mercado, lo que le da poder de intervenir y manipular los precios y las cantidades de energía, al igual que ocurría en el monopolio.

### **4.2.3 Tipos de mercados de generación según el algoritmo de casación**

Los mercados de energía pueden a su vez ser clasificados según el tipo de algoritmo de casación utilizado. Existen diferentes tipos de algoritmos de casación de ofertas, todos ellos clasificados y estudiados en detalle en [Vázquez, 2003].

El algoritmo más transparente es el que se conoce como **algoritmo de casación simple**, en donde cada hora del mercado es objeto de una casación independiente del resto de horas, limitando el alcance del algoritmo a las restricciones básicas de balance entre generación y demanda, y trasladando todas las restricciones técnicas de los grupos (como las rampas de los grupos térmicos) a los modelos de generación de ofertas de cada generador. Este procedimiento algorítmico puede dar lugar a una confección de ofertas infactible que produzca una casación no satisfactoria para el agente.

Puede resultar interesante, por tanto, añadir alguna característica adicional al algoritmo, que permita tratar el acoplamiento entre horas para mejorar los resultados de una casación simple. Una de las soluciones consiste en aumentar la cantidad de información del algoritmo para que pueda tener en cuenta todas las restricciones del sistema, o al menos aquellas relacionadas con la operación de los equipos generadores y con la red de transporte. Los algoritmos que consideran este tipo de consideraciones son los denominados **algoritmos de casación compleja**.

Existen otros algoritmos alternativos que preservan la transparencia de la casación simple y reducen en gran medida el riesgo de confeccionar ofertas erróneas, denominados **algoritmos de casación iterativa**. En este caso la casación consiste en un conjunto de iteraciones sucesivas en donde los agentes van revelando sus preferencias que les sirven para mejorar sus estimaciones sobre las estrategias de la competencia y, por lo tanto, sobre los resultados esperados del mercado. Sin embargo, estos métodos requieren de un gran número de repeticiones de los procesos de generación de ofertas y, por ello, de grandes esfuerzos en comunicaciones y en tiempo de procesamiento, que no siempre son viables.

Un cuarto conjunto de algoritmos es el denominado **de casación sucesiva**, en donde se consideran varias casaciones realizadas a lo largo de un conjunto de mercados programados o no con diferentes horizontes temporales, de cara a que los agentes puedan corregir posibles errores cometidos en las ofertas de los mercados de más largo plazo. Esta filosofía es la que se emplea en algunos países nórdicos como

Suecia y Noruega (ver [Christie, 1998]), así como en España en donde los denominados **mercados de energía** tienen por objeto llevar a cabo las transacciones de energía para horizontes de mayor alcance temporal<sup>14</sup>. Por el contrario, en los **mercados de servicios complementarios** se resuelven los desequilibrios que puedan surgir entre la generación y la demanda en tiempo real, corrigiendo con ello los posibles errores en las ofertas enviadas en los mercados de energía<sup>15</sup>.

#### **4.2.4 Tipos de análisis de los mercados de generación según el horizonte temporal considerado**

Los análisis de los mercados de generación abarcan varios horizontes temporales muy distintos entre sí en cuanto a las decisiones consideradas, pudiendo ser no sólo de operación sino también de planificación del sistema eléctrico. La definición de estos horizontes depende por tanto del tipo de decisiones que se pretenda estudiar y en muchos casos del propio investigador que lo esté analizando. En este sentido, en esta tesis se ha considerado una división en tres tipos de horizontes temporales; el horizonte de largo plazo (previsión de 3 años hasta 10 años), de medio plazo (previsión de 6 meses hasta 3 años) y de corto plazo (previsión semanal, diaria y horaria hasta 6 meses), que es por otro lado la partición que con mayor frecuencia aparece en los trabajos de investigación relacionados. Otras particiones son, por ejemplo, aquellas que además consideran las categorías de muy corto plazo o muy largo plazo ([Reneses, 2004]).

En el **largo plazo** las estrategias a optimizar tienen que ver con el crecimiento de la empresa generadora, conjuntamente con la supervivencia y la rentabilidad de su negocio. Así, entre las decisiones principales se encuentran las relacionadas con la expansión de la generación y el desarrollo de tecnologías alternativas que permitan a las empresas de generación seguir siendo competitivas. Dada la expansión de la globalización, también deben tenerse en cuenta los objetivos de la empresa en cuanto a mercados potenciales, así como objetivos económicos de utilidad relacionados con la compra y venta de combustible, el mantenimiento programado de los grupos, y otros de índole más macroeconómico como la rentabilidad del capital propio y los niveles de endeudamiento.

En el horizonte de **medio plazo**, las decisiones tienen que ver con la explotación de las centrales y grupos de generación, como por ejemplo la gestión hidráulica y del bombeo, y la gestión del combustible. Estas decisiones deben obtenerse de modelos

---

<sup>14</sup>Los mercados de energía son el mercado diario y los mercados intradiarios, gestionados por el Operador del Mercado (OM), en donde se negocia el 99% de la energía total y aproximadamente el 95% del coste final.

<sup>15</sup>Los mercados de servicios complementarios, gestionados por el Operador del Sistema (OS), son el mercado de reserva secundaria, el mercado de reserva terciaria y el mercado de desvíos.

que representen de manera adecuada el mercado de generación, siendo de utilidad no sólo para la operación sino también para la planificación de la generación, donde se realizan continuas previsiones sobre el funcionamiento del mercado. Estas previsiones sirven a las empresas para la planificación financiera, es decir, para la realización de previsiones económicas que abarcan todo el sector, y que permiten realizar un seguimiento más constante de su gestión en el alcance de unos objetivos económicos.

Finalmente, en el **corto plazo** se toman decisiones relacionadas con la operación en detalle de las centrales y grupos de generación, como por ejemplo la producción, los acoplamientos, arranques y paradas horarias de los grupos. Estas decisiones en tiempo real se envían como ofertas al mercado con el objeto de conseguir una casación factible con la demanda (ver [Villar, 2001] y [Centeno, 2003]).

#### **4.2.5 Incertidumbre en los mercados de generación**

Al igual que en casi todos los sectores económicos de la sociedad, el comportamiento de los sistemas eléctricos está sujeto a multitud de incertidumbres. Estas incertidumbres hacen que la planificación y la operación de la generación resulten tareas complejas que requieren de conocimientos multidisciplinares como los relacionados con el modelado de la incertidumbre, la ingeniería eléctrica, la economía y la investigación de operaciones.

Es por tanto importante identificar y entender estas fuentes de incertidumbre, especialmente aquellas de especial relevancia para los agentes participantes en el mercado, productores o consumidores (como por ejemplo la volatilidad de los precios de la electricidad). Para evitar mayores incertidumbres y efectos no deseados es además conveniente analizar cómo se ven afectadas las distintas fuentes de incertidumbre. Para cuantificar la robustez de los resultados resulta también conveniente evaluar el impacto de estas incertidumbres en la toma de decisiones.

Las incertidumbres más relevantes para la planificación y operación de la generación, ampliamente estudiadas en [Hobbs, 1995] y [Ku, 1995], pueden proceder no sólo del ámbito de los **mercados eléctricos** (variación de la demanda, estrategias, variación de los precios, etc.) y de los **recursos disponibles** (indisponibilidades de los grupos, etc.), sino también del ámbito **regulativo y macroeconómico** (decisiones políticas, tipos de interés, etc.).

##### **4.2.5.1 Incertidumbre en la demanda eléctrica**

La incertidumbre en la demanda eléctrica afecta de forma significativa a la planificación y operación de la generación, constituyendo una componente básica en la toma de decisiones. Aumenta con la longitud del horizonte temporal considerado y

está estrechamente relacionada con la incertidumbre en el precio de la electricidad, así como con el establecimiento de incentivos regulados, con el uso de tecnologías limpias, etc.

Otros aspectos de la incertidumbre en la demanda incluyen otros factores económicos (relacionados con la calidad de vida, como la inflación), demográficos (relacionados con las conductas de consumo de las generaciones venideras), geográficos (relacionados con la ubicación de los centros de consumo con relación a las subestaciones de electricidad), climatológicos, etc.

Dada la gran cantidad de factores que influyen en el comportamiento de la demanda eléctrica, y que engloban tanto aspectos cuantitativos como cualitativos, la incertidumbre en la demanda puede ser modelada utilizando muchas de las técnicas revisadas en el capítulo segundo de esta tesis, entre las que destacan las relacionadas con la teorías de la probabilidad y de la posibilidad.

#### **4.2.5.2 Incertidumbre en la hidraulicidad del sistema**

La incertidumbre en la hidraulicidad (básicamente debida a la cantidad de lluvia) resulta de gran importancia en sistemas eléctricos con una gran componente hidráulica, como los sistemas brasileño o español, y para aquellos agentes que participen en cualquier mercado con un gran número de grupos hidroeléctricos. Esto se debe a que la tecnología hidroeléctrica mantiene su funcionamiento ligado básicamente a estas aportaciones hidráulicas.

Por otro lado, las previsiones de hidraulicidad son lógicamente más precisas en el corto plazo que en el medio, por lo que influyen de manera más importante en este último tipo de horizonte temporal. En el largo plazo puede ser más razonable utilizar valores de hidraulicidades medias, ya que en este horizonte deben existir tanto años con mayores aportaciones hidráulicas como menores (ver [Reneses, 2004]).

Las previsiones acerca de la hidraulicidad suelen estar basadas en la historia hidráulica del sistema, por lo que suelen abordarse con técnicas estadísticas.

#### **4.2.5.3 Incertidumbre en la disponibilidad fortuita de los grupos térmicos**

La disponibilidad fortuita de los grupos térmicos ante la presencia de fallos técnicos (también denominados fallos inesperados) tiene un impacto importante en la producción total energética de un sistema de energía, y por ello afecta de manera significativa a los resultados finales del mercado, como por ejemplo, a los beneficios de los agentes.

La incertidumbre en la disponibilidad fortuita está correlacionada consigo misma de un periodo a otro, dado que los fallos técnicos no suelen ser reparados en un único

periodo temporal a no ser que los periodos sean de muy larga duración, lo que no suele ser usual en horizontes temporales de corto, medio e incluso, en algunos casos, de largo plazo.

El enfoque tradicional de representación de la incertidumbre en la disponibilidad de los grupos térmicos está basado en las herramientas que proporciona la teoría de la probabilidad. En concreto, suelen utilizarse distribuciones de probabilidad para el tiempo entre fallos y la duración de cada fallo de cada grupo térmico (ver [Roman-Ubeda, 1991]).

Sin embargo, dado que los fallos técnicos suelen ser eventos relativamente raros, no siempre es posible tener un conjunto de datos suficientemente grande para estimar las distribuciones de probabilidad. Este inconveniente se ve acentuado en grupos térmicos de reciente instalación. Los datos disponibles pueden considerarse a su vez inválidos cuando los grupos hayan tenido reparaciones importantes en sus instalaciones, dado que modifican sustancialmente su fiabilidad.

Por lo tanto, con estos condicionantes puede ser apropiado utilizar un modelo alternativo al probabilista para representar la incertidumbre en la disponibilidad fortuita, y que además resulte más fácil de resolver, como el que proporciona la teoría de la posibilidad. En [Campos, 2004] se describe una aplicación de la teoría de la posibilidad al modelado de esta incertidumbre, y se muestran y comparan algunos resultados finales (utilidad de la demanda, etc.) de un caso estudio de tamaño real para algunas técnicas de resolución del modelo posibilista obtenido.

#### **4.2.5.4 Incertidumbre en los precios de los combustibles**

La incertidumbre en los precios de los combustibles es otra de las componentes que influyen de manera importante en los resultados de la planificación y operación de la generación. Estos precios constituyen la mayoría de los costes de operación de las empresas generadoras e influyen de manera relevante en las decisiones de más largo plazo relacionadas con el establecimiento de tecnologías alternativas, pero también en la confección de ofertas en los mercados de corto plazo, así como en las previsiones económicas a medio plazo.

Las causas principales de la volatilidad en los precios de los combustibles tienen que ver con las características económicas o políticas de los países suministradores, con la disponibilidad de crudo (que es un recurso limitado) y, marginalmente, con el posible riesgo contaminante en su transporte. A modo de ejemplo, en la actualidad el precio del crudo registra continuas oscilaciones a medida que se van recibiendo noticias sobre la ofensiva en uno de los países exportadores más importantes, Irak.

Dado que estas causas de volatilidad afectan de igual modo a todos los agentes del mercado, cuando se considera un análisis a medio plazo la incertidumbre en los

costes de producción, a pesar de ser relevante, suele despreciarse, o a lo sumo su influencia en los resultados suele ser tenida en consideración de igual forma para todos los generadores. Este ha sido el motivo por el que en los casos de estudio de esta tesis no se ha considerado la incertidumbre en los costes de explotación de los generadores, aunque el modelo propuesto permite su consideración.

#### **4.2.5.5 Incertidumbre en las estrategias de oferta de los agentes**

Como ya se ha mencionado, en un esquema descentralizado las empresas generadoras realizan ofertas de energía y precio tratando de maximizar sus beneficios, que dependen de las ofertas realizadas por la competencia. Obviamente, desde el punto de vista de un agente las estrategias adoptadas por el resto no son conocidas, lo que incorpora incertidumbre en la toma de decisiones, contribuyendo a la gran volatilidad resultante del precio de la electricidad y, por lo tanto, a la volatilidad en los beneficios obtenidos en el mercado. Así, para la optimización de las decisiones de explotación, suele ser muy conveniente la realización de un estudio adecuado de **las decisiones estratégicas de la competencia y de su incertidumbre**.

La teoría de la probabilidad ha sido la herramienta más utilizada para representar la incertidumbre en las estrategias de oferta de los agentes participantes (por ejemplo, en [Baíllo, 2002] se estima una distribución de probabilidad con soporte acotado para **la curva de demanda residual de un generador**<sup>16</sup> y, por tanto, implícitamente para las ofertas de todos los agentes rivales). Sin embargo, las técnicas probabilistas requieren de un conjunto de datos estadísticos suficientes para estimar adecuadamente las distribuciones de probabilidad involucradas, datos que en algunos mercados actuales pueden no ser públicos.

Además, exista o no información estadística (actualmente en el mercado español las ofertas de venta y de compra son públicas con un retardo aproximado de 3 meses), las estrategias de oferta de los agentes participantes en un mercado de generación experimentan muchos cambios a lo largo del año y usualmente no son invariables durante más de un mes. Así, una gran parte de la información histórica relativa a la operación del mercado puede no ser relevante para la estimación de las distribuciones de probabilidad, lo que implica la necesidad de utilizar especulaciones subjetivas sobre estas estrategias en vez de interpretaciones puramente probabilistas. Por todo ello, las medidas de posibilidad pueden resultar más adecuadas y, en todo caso, una alternativa interesante para representar el comportamiento de las decisiones estratégicas de los generadores.

---

<sup>16</sup>La curva de la demanda residual de un agente indica la cantidad de energía que es capaz de vender (casar) para cada precio del mercado, es decir, la diferencia entre la demanda y las ofertas agregadas del resto de los agentes para cada precio del mercado. Por tanto, esta curva tiene en cuenta la información estratégica de los rivales que el agente debe tomar en consideración cuando evalúa sus propias estrategias.

#### **4.2.5.6 Incertidumbre en el ámbito político y regulatorio**

En la planificación a medio y largo plazo se analizan horizontes temporales en los que incluso pueden llegar a producirse cambios de gobiernos. Por ello, se entiende por **incertidumbre política** en la explotación de la generación aquella que está relacionada, precisamente, con los cambios de legislación planteados por nuevos gobiernos, y que influyen en el comportamiento de un sistema eléctrico. Estas alternancias políticas pueden modificar, por ejemplo, el grado de privatización de las empresas generadoras o incluso modificar sustancialmente las reglas del mercado para mitigar un comportamiento monopolista o anti-competitivo de unos agentes frente a otros.

Por otro lado, la **incertidumbre regulatoria** típicamente se refiere a los cambios de legislación que pueden producirse dentro de una misma legislatura, y que impactan, de una manera directa, al sector de la generación.

Dada la gran cantidad de condicionantes que influyen en las decisiones políticas y regulatorias, los dos anteriores tipos de incertidumbre pueden ser modelados utilizando cualquiera de las técnicas revisadas en el capítulo segundo de esta tesis.

### **4.3 Enfoques clásicos de modelado de la competencia en el mercado de generación**

La liberalización del sector eléctrico ha contribuido a la aparición de profundos cambios en la planificación y operación de la generación. La labor de la planificación y la operación, que en entornos centralizados es realizada por organismos oficiales independientes de los productores, recae ahora sobre las propias empresas productoras, que deben asumir nuevas funciones y responsabilidades que modifican sus procedimientos de toma de decisiones.

En este sentido, el modelado de la explotación de los sistemas eléctricos requiere, desde el punto de vista de la planificación, procedimientos que permitan la realización de previsiones sobre el funcionamiento del mercado para disponer de estimaciones para el precio del mercado, beneficios, riesgos, cuotas, etc., de cara a encontrar estrategias por ejemplo para la gestión de los embalses o para la planificación financiera de las empresas productoras (previsiones de ingresos por mercado, ingresos regulados, etc.). Por otro lado, desde el punto de vista de la operación, se necesitan herramientas que permitan la representación y simulación temporal de la gestión de los recursos de generación, como por ejemplo la determinación de la producción de las centrales. En todo caso, tanto en la planificación como en la operación, es necesario utilizar un modelo que represente adecuadamente el mercado de la electricidad ([Reneses, 2004]).

En este apartado se presenta una revisión bibliográfica de los modelos de mercado de energía eléctrica más relevantes<sup>17</sup>, clasificándolos dentro de dos tendencias fundamentales en función del tipo de modelado del precio que se esté considerando:

- Los modelos en donde el precio del mercado es exógeno.
- Los modelos basados en el equilibrio de Nash donde el precio del mercado es un resultado de salida.

Otras revisiones más amplias que la que aquí se presenta, aunque menos actualizadas, pueden encontrarse por ejemplo en [Kahn, 1998], [Ventosa, 2001], [García-González, 2001] y [Baíllo, 2002].

---

<sup>17</sup>En [Ramos, 1990] se presenta una amplia revisión bibliográfica de los modelos de planificación a medio plazo en entornos centralizados (no liberalizados) que han sido abordados desde la perspectiva de la simulación probabilista.

### 4.3.1 Precio del mercado exógeno

En [Gross, 1996], bajo la hipótesis de competencia perfecta, se resuelve individualmente el problema de maximización de beneficios de cada empresa cuando se considera conocido el precio del mercado. Asimismo se estudia el efecto que se obtiene en los resultados del modelo cuando, por un lado, se relaja la hipótesis de competencia perfecta entre las empresas, y por otro, se incorporan contratos financieros en las estrategias de oferta. El método de resolución es la **relajación lagrangiana** (ver [Geoffrion, 1974]), que al suponer conocido el precio de mercado solamente requiere de una única iteración.

Sin embargo, el método utilizado con mayor frecuencia cuando se supone incierto el precio del mercado es la **programación dinámica** (ver [Bellman, 1957]), que puede ser también empleada para resolver los subproblemas obtenidos por la relajación lagrangiana en cada iteración. La suposición de incertidumbre en el precio conlleva la imposibilidad del generador para poder modificarlo, es decir, el generador es, en este caso, un tomador de precio. En [Rajamaran, 2001] se utiliza la programación dinámica cuando el precio de la energía se modela mediante una cadena de Markov en donde las probabilidades de transición de un estado a otro se obtienen a través de datos estadísticos. Tanto en este trabajo como el que se muestra en [Valenzuela, 2001], se resuelve el problema de **Self Unit Commitment**<sup>18</sup> usando esta técnica de programación, salvo que en [Valenzuela, 2001] no se emplean cadenas de Markov sino distribuciones de probabilidad, y no se trata el problema de la reserva de energía. En [Neame, 2001] también se utiliza la programación dinámica cuando el generador se supone tomador de precios. Sin embargo, en este trabajo la variable a optimizar no es el programa de energía o reserva como ocurre en el problema de Self Unit Commitment, sino la estrategia de oferta en el mercado.

Al no considerar la relación entre el precio del mercado y las producciones de los agentes, todos estos enfoques resultan más adecuados para modelos que representen un mercado en competencia perfecta, donde ningún agente puede influir en la formación del precio, lo que en la práctica no suele darse en el sector eléctrico.

---

<sup>18</sup>En el problema de Unit Commitment las empresas tratan de obtener la programación horaria de mínimo coste de generación cuando se consideran las restricciones técnicas principales de los grupos de generación (disponibilidades, arranques, paradas, etc.) y se intenta cumplir la demanda en el corto plazo. Suele plantearse cuando el negocio de la generación no está liberalizado. Por el contrario, en el problema Self Unit Commitment las empresas deben tratar de maximizar su beneficio en el corto plazo para encontrar la planificación óptima de la explotación de sus propios recursos de generación cuando el negocio de la generación está fuertemente liberalizado. A diferencia de los modelos de mercado, el problema Self Unit Commitment no trata de obtener una estrategia de oferta óptima sino la operación factible a nivel de grupo de generación que satisface la demanda casada. Para más detalle ver [García-González, 2001].

### **4.3.2 Equilibrio de Nash**

Un enfoque más realista para el modelado del comportamiento del mercado de energía es aquel que considera el comportamiento de todas las empresas que compiten en el mismo, y en el que el precio es un resultado del modelo, en vez de un parámetro exógeno. Este planteamiento se basa en la obtención del **equilibrio del mercado en el sentido de Nash**, tal y como se definió éste en el capítulo anterior, es decir, en la obtención de un conjunto de estrategias (que pueden ser cantidades, precios, etc.) tales que ninguna empresa, tomando las acciones de sus oponentes como dadas, desea cambiar su decisión, ya que le supondría un menor beneficio (o una mayor pérdida).

El equilibrio de Nash da lugar a distintos tipos de equilibrios según la estrategia utilizada, entre los que se encuentran **los equilibrios de Cournot**, **los equilibrios en funciones de suministro** y **los equilibrios en variaciones conjeturales**, usualmente utilizados para representar los distintos mercados de electricidad con las características descritas en el apartado 4.2. Las características fundamentales de estos tres tipos de equilibrios, que se describen con más detalle en los tres siguientes epígrafes, son las siguientes (ver [Day, 2002]):

#### **Equilibrio de Cournot:**

- Las estrategias son de cantidad, siendo éstas las potencias a producir por cada generador. Aunque las decisiones reales son las curvas de oferta a enviar a los diferentes mercados, es una simplificación usualmente aceptada en los estudios a medio plazo.
- Tiene un buen comportamiento en horizontes de medio plazo incluso cuando en el corto plazo se compite con curvas de oferta (ver [Younes, 1999]).
- Suele dar lugar a modelos con estructura de problema complementario ([Cottle, 1992]).
- Es muy utilizado por su simplicidad y facilidad de cálculo, siendo adecuado para sistemas de gran tamaño.
- Predice que las fusiones entre empresas no son económicamente rentables (ver [Farrel, 1990]), cuando esto puede no ser siempre cierto.
- Los resultados que proporciona son especialmente sensibles a la elasticidad y forma de la curva de la demanda, lo que suele dar lugar a precios más altos que los reales.

**Equilibrio en funciones de suministro:**

- Las estrategias son las curvas de oferta (que son funciones que relacionan cantidad y precio) y por tanto son decisiones más realistas que en el caso de Cournot.
- Es normalmente más apropiado para modelos de mercado de corto plazo.
- Originalmente fue desarrollado para tener en cuenta la incertidumbre de la demanda eléctrica.
- No suele ser único y es difícil de calcular (existen trabajos en los que se demuestra que puede no existir, ver [Berry, 1999]) por lo que suele aplicarse a sistemas muy simples.
- El equilibrio de Cournot proporciona una cota superior de los precios de la energía que resultan de los diferentes equilibrios en funciones de suministro (ver [Klemperer, 1989] y [Green, 1992]).
- Los problemas de optimización de las empresas suelen ser no convexos, y pueden encontrarse óptimos locales.

**Equilibrio en variaciones conjeturales:**

- Las estrategias pueden ser tanto de cantidad como funciones de oferta, pero en este equilibrio se modela la reacción que tienen las empresas ante las acciones de la competencia y viceversa. Por ello, las estrategias consideradas son más realistas que en el caso de Cournot, y adecuadas cuando se convocan sucesivos mercados en el corto plazo. Para cada generador el modelado de la reacción se realiza a través de la estimación, previa a la resolución del modelo, de la variación de las estrategias de la competencia con respecto de las estrategias del generador.
- El parámetro que modela la respuesta de los rivales ante las estrategias de un generador, también denominado **parámetro conjetural** o **variación conjetural**, permite analizar el poder del mercado del generador, siendo complicada su estimación, especialmente ante la carencia de datos o ausencia de datos creíbles. Precisamente por ello, en esta tesis se ha considerado que este parámetro es una distribución de posibilidad.
- Distintos valores del parámetro conjetural dan lugar a distintos modelos de equilibrio, entre los que se encuentra el modelo de Cournot, que se presenta cuando el parámetro conjetural vale cero y las estrategias son de cantidad.

#### **4.3.2.1 Equilibrio de Cournot.**

El enfoque más extendido en la literatura para calcular el equilibrio de Nash considera que las empresas eléctricas compiten con estrategias de cantidad, como en el modelo de **equilibrio de Cournot** (ver [Cournot, 1838])<sup>19</sup>.

En [Hashimoto, 1985] se obtiene el equilibrio de Cournot para un problema de transporte y asignación de un producto (no necesariamente energía eléctrica) entre varios centros de producción y varios centros de consumo, lo que se denomina **problema de equilibrio de Cournot espacial**, al existir varios precios de mercado (uno por cada zona de producción). En este enfoque se utiliza un modelo de optimización cuadrática para resolver el equilibrio de Cournot del mercado oligopolista (varios centros de consumo), generalizando los modelos de optimización cuadrática presentados en [Takayama, 1971] que resuelven la situación de competencia perfecta y monopolista.

Uno de los primeros trabajos de aplicación en donde se resuelve un equilibrio de Cournot aplicado al mercado de electricidad californiano a través de la utilización de métodos iterativos es [Borenstein, 1999] (aunque ya en [Borenstein, 1995] se obtiene el equilibrio de Cournot para mercados eléctricos mediante el análisis del poder de mercado). En cada iteración una empresa supone fijo el comportamiento de la competencia, obteniendo la cantidad que maximiza su beneficio frente a una curva de demanda residual (como se verá, en esta tesis la incertidumbre de la pendiente de esta curva ha sido modelada mediante una distribución de posibilidad). El proceso termina cuando ninguna empresa modifica sus decisiones al no poder incrementar su beneficio (iteración en la que, en caso de existir, se alcanzaría un equilibrio en el sentido de Cournot).

En [Scott, 1996] se aborda por primera vez el problema de coordinación hidrotérmica en un contexto de competencia imperfecta. En este modelo se utiliza la **programación dinámica dual estocástica** (ver [Pereira, 2000]) en donde en cada etapa se formula el equilibrio de Cournot obtenido mediante la maximización de los beneficios de cada agente, y teniendo en consideración los futuros ingresos de las reservas acuíferas. Se ha aplicado con éxito a un duopolio que pretende representar la industria neocelandesa teniendo en consideración también los contratos de futuros. Sin embargo, el caso de estudio es de reducido tamaño debido a lo costosa que resulta su resolución.

Algunos modelos de equilibrio suelen formularse como un **problema de desigualdades variacionales**<sup>20</sup> (como se ha hecho en esta tesis) que se pueden

---

<sup>19</sup>En [Tirole, 1988], además de presentar los conceptos más familiares de la teoría de juegos y de la organización industrial, se describe el modelo de Cournot dentro de la teoría económica, que es el modelo clásico por excelencia del equilibrio de Nash.

resolver normalmente mediante optimizadores comerciales o algoritmos particulares de resolución<sup>21</sup>, aunque estas técnicas de resolución no suelen ser muy adecuadas cuando se resuelven problemas de tamaño real, como los problemas resueltos en este trabajo de investigación.

En [Jing-Yuan, 1999], por ejemplo, se utiliza el modelo de Cournot para resolver el problema de la inversión y de la operación a muy largo plazo en un entorno liberalizado. El problema de la maximización simultánea de beneficio de todos los agentes se expresa mediante un problema de desigualdad variacional.

El enfoque de desigualdades variacionales se ha usado en [Daxhelet, 2001] para diseñar una variedad de mercados con la consideración de la red de transporte. Cuando se supone que no existe competencia en los servicios de la red, la solución que se obtiene es indeterminada, existiendo multiplicidad de equilibrios. El problema de equilibrio se formula en este trabajo como un problema con una estructura muy similar a la de un problema de desigualdades variacionales, mientras que en [Wei, 1999] la estructura del problema coincide. Los resultados obtenidos en ambos casos son similares.

Un enfoque tan potente como el de desigualdades variacionales se fundamenta en el planteamiento del equilibrio como un **problema con estructura complementaria mixta (MCP)** (ver [Cottle, 1992]). Esta metodología permite analizar un mercado de tamaño real en donde se consideran muchas unidades de generación e incluso la red de transporte.

Así, en [Hobbs, 2001], bajo la suposición de que existe un mercado con contratos bilaterales<sup>22</sup> en donde se asigna la capacidad de transmisión, se resuelven con éxito los problemas planteados en [Wei, 1999] y [Daxhelet, 2001] pero con un enfoque basado en el problema complementario mixto.

En [Ventosa, 2000] se obtiene el equilibrio de mercado mediante la utilización del problema complementario. Para ello, se plantean las condiciones de optimalidad para cada empresa con sus restricciones asociadas, dando lugar a un **problema complementario mixto**. Este problema puede ser resuelto numéricamente con

---

<sup>20</sup>Históricamente, los problemas de desigualdades variacionales fueron introducidos por Hartman y Stampacchia en [Hartman, 1966]. Consisten en encontrar un vector  $x$  en un conjunto  $X$  usualmente convexo y cerrado tal que  $F(x)^T(y-x) \geq 0$  para todo  $y$  en  $X$ , siendo  $F$  una función vectorial en  $X$  y  $T$  el operador de trasposición de vectores y matrices. En el capítulo quinto se muestra una descripción más detallada de este tipo de problemas así como de su relación con los equilibrios propuestos.

<sup>21</sup>Algunos optimizadores comerciales para la resolución de este tipo de problemas son PATH (ver [Ferris, 1998]) y MILES (ver [Rutherford, 1997]). También suelen utilizarse algoritmos basados en la generalización del método de Newton (ver [Ferris, 1997]).

<sup>22</sup>El contrato bilateral es aquel que genera obligaciones para el generador y el consumidor, y en el que el generador se obliga a la entrega de una determinada cantidad de energía, y el consumidor al pago de su precio.

diferentes programas comerciales<sup>21</sup> que, sin embargo, al ser aplicados a problemas reales de gran tamaño dan lugar a tiempos de cálculo elevados. Por ello, en este trabajo se propone una solución inicial, mediante la resolución de un modelo de optimización, que aumenta la eficiencia en la resolución del problema complementario mixto. El modelo de optimización combina el modelado de la explotación tradicional (no liberalizada) con la introducción de las denominadas **restricciones de equilibrio** (ver [Ramos, 1998] y [Ventosa, 1999]). Además, este modelo es semejante a los **problemas de programación matemática con restricciones de equilibrio (MPEC)** que indirectamente se han utilizado en [Hogan, 1997] y que de manera directa se plantean en [Hobbs, 2000].

En [Barquín, 2004] se resuelve el equilibrio de Cournot planteando un problema de optimización cuadrática equivalente, al igual que se hacía en [Hashimoto, 1985], que puede considerarse su trabajo precursor. En este problema de optimización se consideran como restricciones las características técnicas de los grupos de generación y la ecuación de equilibrio entre la generación y la demanda, y como función objetivo, la suma, para cada empresa, de las denominadas **funciones de coste efectivas** menos la **función de utilidad de la demanda** (las primeras dependen del coste variable y de la producción de las empresas, además de la influencia de la pendiente de la curva de la demanda residual, que se ha supuesto lineal; la segunda es la integral del precio como función de la demanda). Este modelo se describe más detalladamente en próximos apartados, dado que ha servido como punto de partida de esta tesis para obtener un modelo más completo que considera la incertidumbre en la demanda residual y en los costes de producción, incertidumbre que ha sido modelada mediante distribuciones de posibilidad.

Uno de los trabajos encontrados que calcula el equilibrio de Cournot considerando incertidumbre en alguno de sus parámetros es el que se presenta en [Wen, 2001]. En este artículo se presupone cierta información incompleta relativa a los costes de producción de las empresas rivales, que se han considerado cuadráticos. Esta falta de información ha sido solventada de tres maneras distintas: mediante una única estimación de los costes; a través de la realización de varias estimaciones, cada una de ellas con una determinada probabilidad de ocurrencia (modelo discreto de probabilidad); y con la consideración de que la estimación del coste de producción de las empresas rivales es una variable aleatoria normal (modelo continuo de probabilidad). La obtención del equilibrio de Cournot no se realiza a través de un problema de optimización, sino que se plantean las ecuaciones de equilibrio y se resuelven para cada uno de los tres tipos de representación. Caben realizar dos comentarios en relación con la completitud y rigurosidad del modelo propuesto en [Wen, 2001]. Por un lado, no se describe la manera en que se han estimado las distribuciones de probabilidad, y no se considera incertidumbre en otros parámetros más relevantes que los relacionados con los costes de explotación, como los relativos

a la curva de la demanda residual. Por otro, no se valora la existencia ni la unicidad del equilibrio cuando se considera aleatoriedad en los costes de producción.

En [Murto, 2003] se calcula el equilibrio de Cournot con incertidumbre en la demanda eléctrica y en el largo plazo. Por un lado, las estrategias de las empresas son la inversión en capacidad térmica, y la producción ofertada de tecnología nuclear, hidráulica y térmica. Por otro lado, la tasa de crecimiento de la demanda en un horizonte temporal de diez años con 5 periodos y dos niveles de carga (punta y base) se ha supuesto estocástica, siendo modelada con un árbol de escenarios. Para la obtención del equilibrio de Cournot, se han propuesto dos metodologías de resolución. La primera es la que corresponde con la resolución directa usando programas como MILES (ver [Rutherford, 1993]), para dar solución al problema complementario resultante del planteamiento de las condiciones necesarias de equilibrio de Cournot. La segunda, menos directa, consiste en la aplicación del algoritmo de Jacobi no lineal (que ha sido utilizado en [Harker, 1984]) para resolver el problema variacional equivalente al problema de equilibrio. Sin embargo, la convergencia del algoritmo de Jacobi está estrechamente ligada a la inicialización del algoritmo en un entorno próximo al equilibrio, además de a la suposición de que la matriz Jacobiana del problema variacional sea diagonal dominante (ver [Harker, 1990]). El modelo obtenido ha sido aplicado al mercado finlandés, concluyendo que las decisiones de inversión en comparación con una situación centralizada son muy limitadas.

#### **4.3.2.2 Equilibrio en funciones de suministro (SFE)**

El modelo de equilibrio de Cournot no considera los precios de las ofertas como variable estratégica de las empresas en un mercado eléctrico, utilizando los precios que la demanda está dispuesta a pagar para el cálculo del precio del mercado. En la práctica esta característica da lugar a precios de la energía más altos que los obtenidos en los mercados reales. En este sentido, un enfoque más correcto para la obtención del equilibrio del mercado consiste en considerar como variable estratégica de las empresas, en lugar de una cantidad o un precio, una función que relaciona ambas cantidades, denominada **función de suministro**.

[Klemperer, 1989] puede considerarse uno de los primeros trabajos en la obtención del equilibrio de mercado mediante las curvas de oferta de las empresas. Según se demuestra en este artículo, existe un conjunto de posibles soluciones (equilibrios) del modelo de mercado, entre las que se encuentra la más competitiva, donde los competidores se comprometen con la estrategia de precio igual al coste marginal. Además, en este artículo se supone que la demanda es una variable aleatoria con soporte conocido. Esta consideración permite reducir el número de equilibrios a un conjunto de trayectorias conexas que integran un sistema de ecuaciones diferenciales en la región correspondiente a las posibles realizaciones de la curva de la demanda. Cada uno de los equilibrios obtenidos al fijar una realización de la demanda proviene

de una única función de suministro. Si en particular se considera que la demanda tiene un soporte acotado, algunas de las trayectorias son equivalentes a los resultados del modelo de equilibrio de Cournot. Además, en el artículo se presentan condiciones de unicidad de los equilibrios en funciones de suministro (por ejemplo, es necesario que la demanda sea lineal con soporte no acotado, y que las curvas de coste marginal sean lineales e idénticas para todos los agentes).

En [Bolle, 1992] también se aplica la metodología anterior a un mercado eléctrico, que según se afirma en el artículo es el único tipo de mercado importante donde existe competencia basada en funciones de suministro. El modelo de mercado eléctrico tiene en cuenta no sólo a los generadores y consumidores (domésticos o empresariales) de la energía, sino además a una compañía de distribución y transporte de la electricidad (TDC). En este trabajo se describen los desarrollos teóricos bajo tres tipos de hipótesis diferentes que pueden realizarse sobre el funcionamiento del mercado, y que resultan en tres juegos distintos donde solamente los generadores tienen comportamiento estratégico. En los dos primeros, los consumidores deben pagar un precio fijo calculado por la TDC antes y después de la presentación de ofertas. En el tercer juego, los consumidores deben pagar el precio que resulte del mercado. En todos estos juegos el objetivo es calcular el **equilibrio del mercado simétrico**, es decir, el equilibrio donde el beneficio máximo de los jugadores coincide (un equilibrio simétrico se plantea y se describe en [Campos, 2005a]). También se valora el efecto de variar el número de jugadores. Además, para los dos primeros juegos se supone que la demanda es una variable aleatoria continua en un intervalo prefijado, lo que convierte al modelo de mercado en un modelo con incertidumbre. Esta consideración resulta en un **problema variacional** de maximización del beneficio que puede ser resuelto con la ecuación de Euler<sup>23</sup>.

En [Green, 1992] se utiliza también el modelo basado en funciones de suministro para estudiar el mercado diario de la electricidad en Inglaterra y Gales. El modelo se plantea como un duopolio en donde las empresas presentan una función de suministro suave, en vez de una curva escalonada de ofertas obtenida como agregación de las presentadas por grupo de generación. Parte de la demanda estimada del sistema queda cubierta por las ofertas base (a precio prácticamente nulo) presentadas por el equipo nuclear. La curva de la demanda restante se considera extremadamente inelástica.

Otro trabajo que utiliza funciones de suministro para el análisis del mercado de Inglaterra y Gales se puede ver en [Von der Fehr, 1993], donde se utilizan funciones

---

<sup>23</sup>En un problema variacional se pretende optimizar una función objetivo integral cuyas decisiones son funciones. Algunos problemas variacionales pueden resolverse con la denominada ecuación de Euler que permite definir una condición necesaria de extremo para el problema. Para una descripción más detallada de los problemas variacionales y de sus soluciones se puede consultar [Hadley, 1971].

de probabilidad asociadas al precio de la oferta de cada grupo de generación. El equilibrio se obtiene mediante la utilización de estrategias de tipo mixto, tal y como se definieron éstas en el capítulo anterior.

En [Hobbs, 2000] se propone un modelo para calcular el equilibrio en funciones de suministro cuando se tienen en cuenta las restricciones de la red de transporte y los precios nodales. Las condiciones de optimalidad del **problema de flujo óptimo**<sup>24</sup>, que tiene que resolver el operador del sistema con las funciones de suministro ofertadas por los agentes, tienen una estructura MCP y, al ser introducidas en los problemas de optimización de los agentes, resultan en un conjunto de problemas de programación matemática con restricciones de equilibrio (MPEC). Este enfoque permite valorar la existencia y unicidad del equilibrio y el uso de algoritmos iterativos para problemas MPEC de gran tamaño.

En [Baldick, 2001] se presenta una revisión general de los enfoques basados en funciones de suministro para un mercado oligopolista en donde algunas empresas actúan como líderes (empresas que conocen como afecta su comportamiento al resto de empresas) y otras como seguidoras (cuyo comportamiento depende de las empresas líderes), también denominado **mercado oligopolista asimétrico**. Los autores muestran la gran complejidad de las ecuaciones diferenciales que modelan el equilibrio en esta situación, y cuando la curva de la demanda es lineal (no se realiza ninguna suposición acerca de las funciones de coste marginal). También se discute el oligopolio simétrico cuando las funciones de coste marginal son lineales, cuestionando el equilibrio obtenido en [Green, 1992] que resulta en precios excesivamente elevados. Se muestra, además, un procedimiento iterativo para calcular el equilibrio cuando, entre otros factores, se tienen en cuenta las restricciones de capacidad y los límites en los precios de oferta. Este procedimiento asume que las funciones de suministro ofertadas son invariantes a lo largo del horizonte temporal.

Para más detalle acerca de los modelos en funciones de suministro puede consultarse [Baíllo, 2002], en donde se propone una clasificación de los anteriores trabajos en función del tipo de coste marginal y del tipo de curva de la demanda consideradas (ya sean lineales, cuadráticas, probabilistas, etc.).

#### **4.3.2.3 Equilibrio en variaciones conjeturales (CVE)**

Los dos tipos de modelos de equilibrio descritos en los anteriores apartados asumen que las empresas rivales de una generadora no reaccionan ante las decisiones tomadas por la misma, y por tanto desestiman el hecho de que los mercados de

---

<sup>24</sup>El problema de flujo óptimo de potencia se centra en la operación de corto plazo en un sistema de potencia, y trata de minimizar el coste de operación cumpliéndose las restricciones de la red representadas por el balance de la potencia reactiva y activa.

energía están basados en una serie de interacciones repetitivas entre los participantes a través de convocatorias sucesivas de sesiones de compra y venta de energía. Sin embargo, el **modelo de equilibrio en variaciones conjeturales**, basado en los trabajos de Bowley (ver [Bowley, 1924]) y Frish (ver [Frish, 1933]), considera que la mejor oferta para una empresa generadora tiene que tener en cuenta que las ofertas realizadas por las empresas rivales reaccionarán en función de sus propias ofertas. Esta conjetura o hipótesis sobre la dependencia entre las estrategias tomadas por las empresas en un mercado de energía ha permitido la definición de lo que la literatura denomina **equilibrio de mercado generalizado de Nash** (ver [Stoft, 1997]), que además resulta en un nuevo tipo de juegos estratégicos<sup>25</sup>.

En [Day, 2002] se presenta una descripción detallada de los tipos de modelos que representan el equilibrio de mercado en función de las clases de estrategias que interaccionan entre las empresas. Además de la descripción de los modelos de equilibrio de Cournot, de función de suministro, y de variación conjetural, se presentan y comparan, entre otros, el **modelo de Stackelberg**<sup>26</sup>, y de **función de suministro conjetural**<sup>27</sup>. En concreto, este artículo es uno de los primeros trabajos en considerar el modelo de función de suministro conjetural para simular el mercado de energía, teniendo en cuenta la red en corriente continua. La conjetura utilizada es la variación de la producción de los competidores respecto del precio de mercado, al considerar que cada empresa trata de estimar la curva de oferta agregada de la competencia. Este modelo considera cuatro tipos de condiciones que lo convierten en un problema con estructura MCP, al igual que ocurría en [Ventosa, 2000], y que es lineal en el caso de que se fije la pendiente de la función de suministro conjetural, y no lineal si lo que se fija es el corte con el eje de precios. Estas condiciones son las siguientes: las que permiten la maximización del beneficio neto de cada empresa, basadas en la conjetura considerada; las que ayudan a alcanzar un nivel de servicio adecuado en la red de transmisión; las que maximizan el beneficio por los intercambios energéticos entre diferentes nodos de la red de transmisión; y por último, las que aseguran la satisfacción íntegra de la demanda y la consistencia de la variación conjetural. Además, se aplica al sistema eléctrico de Inglaterra y Gales, ilustrando las ventajas e inconvenientes con respecto al modelo de Cournot.

En [García-Alcalde, 2002] se supone que cada compañía toma sus decisiones basadas en su percepción del estado del mercado, que se expresa en términos de la

---

<sup>25</sup>Aunque se ha considerado más oportuno clasificar el artículo [Jing-Yuan, 1999] como un trabajo relacionado con el equilibrio de Cournot debido a que las estrategias tomadas por los agentes son de cantidad, sin embargo, la dependencia del conjunto de las estrategias por las acciones de los competidores, conduce a un equilibrio de Cournot generalizado según se define en [Harker, 1991].

<sup>26</sup>El modelo de Stackelberg (ver [Stackelberg, 1934]) considera una situación asimétrica del juego, donde las decisiones de una empresa líder tienen en cuenta la reacción de las empresas seguidoras (no líderes), pero las empresas seguidoras no reconocen como afectan sus reacciones a la empresa líder. El modelo de Stackelberg es adecuado para modelar mercados oligopolistas asimétricos.

<sup>27</sup>El modelo de función de suministro conjetural representa el conocimiento de las empresas generadoras relativo a cómo el suministro total de las empresas rivales reacciona ante el precio.

**elasticidad de la curva de demanda residual** estimada por la compañía<sup>28</sup>. Cuando considera que la elasticidad de la curva de la demanda residual es alta (respectivamente baja), la compañía percibe que su habilidad para afectar al precio del mercado satisfaciendo la demanda se reduce (respectivamente aumenta). En este artículo, al igual que en el anterior, el equilibrio de mercado se modela mediante el mencionado problema MCP. Además, se presenta un caso de estudio aplicado al mercado eléctrico español que, por un lado, proporciona resultados razonables, y por otro, muestra que el comportamiento de las empresas que compiten en el mercado eléctrico español difiere del comportamiento obtenido por el modelo de Cournot.

En [Song, 2003] la conjetura asumida por cada agente es la variación de la producción de la competencia respecto de su producción. Con esta suposición se prueba que no es necesario conocer los costes de producción de la competencia para calcular el equilibrio. Además, cuando se asume que: 1) las funciones de coste de cada agente son funciones cuadráticas; 2) se puede estimar la variación conjetural; y 3) la función de la demanda es lineal, se demuestra que el cálculo del equilibrio es equivalente a la resolución de un sistema de ecuaciones lineales. Por otro lado, este enfoque es equivalente a la situación de un mercado monopolista, con competencia perfecta, y a la solución de Stackelberg y Cournot, en función del valor que se haya estimado para la variación conjetural (así, por ejemplo, la conjetura de Cournot aparece cuando vale 0, y la situación de competencia perfecta cuando vale -1). Los resultados computacionales, sin embargo, se refieren sólo a la resolución para una única hora.

En [Reneses, 2004] se resuelve el equilibrio en variaciones conjeturales a medio plazo generalizando los resultados mostrados en [Reneses, 2001] y [Barquín, 2004] para el equilibrio de Cournot. La conjetura utilizada en este trabajo es la variación del precio con respecto a la producción de cada generador. Dado que el planteamiento del equilibrio conduce a un sistema de ecuaciones que resulta difícil de resolver (aparece, para cada periodo, la derivada de la función de coste de cada empresa, que depende del coste marginal obtenido en periodos anteriores), en este trabajo se plantea un problema de optimización cuadrático con restricciones lineales que permite, de manera equivalente, obtener el equilibrio en variaciones conjeturales. Este enfoque incorpora, además, la consideración de incertidumbre en el análisis de la operación a medio plazo, y utiliza un árbol de escenarios para obtener una única decisión en el corto plazo que es robusta en el medio plazo. En posteriores apartados y en el capítulo cinco de esta tesis se describirán las principales diferencias entre el enfoque estocástico que propone Reneses y el posibilista que en esta tesis se plantea.

---

<sup>28</sup>La elasticidad de la curva de la demanda residual es el cociente entre la variación porcentual de la producción causada por un cambio porcentual en el precio del mercado. Por lo tanto, la elasticidad de la demanda es en general distinta a su pendiente, aunque en esta tesis ambos conceptos se utilizan sin distinción cuando la curva de la demanda es inelástica, debido a que en este caso ambos conceptos son iguales. Así mismo, en la tesis el caso de curvas elásticas se refiere a la situación en la que la curva tiene pendiente finita.

Algunas de estas diferencias se justifican con los comentarios que se muestran en el apartado 4.4.

### 4.3.3 Resumen de los enfoques de modelado

La siguiente tabla pretende clasificar los trabajos más representativos revisados en esta sección, de acuerdo a las siguientes características: tipo de formación del precio, consideración o no de la incertidumbre y de la red de transporte, y tipo de metodología de resolución utilizada. Esta clasificación se fundamenta y a la vez actualiza la descrita en [Baíllo, 2002], en donde se consideran también otro tipo de características que no se han considerado relevantes para esta tesis.

REFERENCIAS	FORMACIÓN DE PRECIO	INCERTIDUMBRE EN EL MERCADO	RESTRICCIONES DE RED	MÉTODO DE SOLUCIÓN
[Gross, 1996]	Exógeno	No	No	Relajación lagrangiana
[Rajamaran, 2001]	Exógeno	Cadenas de Markov: Precio	No	Programación dinámica
[Valenzuela, 2001]	Exógeno	Distribuciones de probabilidad: Precio	No	Programación dinámica
[Hashimoto, 1985]	Cournot espacial	No	No	Programación matemática
[Borenstein, 1999]	Cournot	No	Sí	Iterativo y Heurístico
[Scott, 1996]	Cournot	No	No	Programación dinámica dual
[Daxhelet, 2001]	Cournot	No	Sí	Desigualdades Variacionales
[Hobbs, 2001]	Cournot	No	Sí	Problema Complementario Mixto
[Ventosa, 2000]	Cournot	No	No	Problema Complementario Mixto
[Barquín, 2004]	Cournot	No	No	Programación matemática
[Wen, 2001]	Cournot	Distribuciones de probabilidad: Costes de producción	No	Sistemas lineales
[Murto, 2003]	Cournot	Distribuciones de probabilidad: Demanda	No	Problema Complementario Mixto y Desigualdades Variacionales
[Klemperer, 1989]	SFE	Distribuciones de probabilidad:	No	Programación matemática

	demanda			
[Green, 1992]	SFE	Distribuciones de probabilidad: demanda	Sí	Integración numérica
[Baldick, 2001]	SFE	No	No	Iterativo y Heurístico
[Hobbs, 2000]	SFE	No	Sí	Problema Complementario Mixto
[Day, 2002]	CVE	No	Sí	Problema Complementario Mixto
[García-Alcalde, 2002]	CVE	No	Sí	Problema Complementario Mixto
[Song, 2003]	CVE	No	No	Sistema lineal
[Reneses, 2004]	CVE	Distribuciones de probabilidad	No	Programación matemática

*Tabla 4. 1: Clasificación de los modelos de mercado*

## **4.4 Probabilidad versus posibilidad en los mercados de generación**

Como se ha podido apreciar en el apartado anterior, las herramientas que se utilizan con mayor frecuencia para representar la incertidumbre en los mercados de generación están basadas en la teoría de la probabilidad. En este apartado se van a mostrar algunas ventajas importantes que la teoría de la posibilidad puede proporcionar frente a la teoría de la probabilidad en el modelado de la incertidumbre.

En primer lugar, es común en un enfoque probabilístico ajustar una función de densidad de probabilidad para modelar la incertidumbre de una variable a partir de un conjunto de datos históricos disponibles (por ejemplo, basándose en el principio de máxima verosimilitud) y aceptar el ajuste cuando se satisfacen ciertos contrastes estadísticos (como el test de la Chi-cuadrado, el de Kolmogorov-Smirnov, etc.). Sin embargo, suele ser habitual, y sobre todo cuando el número de datos no es elevado, que más de una función de densidad de probabilidad (como por ejemplo, la normal, logarítmica-normal, triangular, etc.) satisfaga las condiciones impuestas por los contrastes, reduciendo el rigor del enfoque probabilista<sup>29</sup>.

En segundo lugar, en algunas situaciones no se dispone de un conjunto suficiente de datos históricos válidos para la estimación de una función de densidad adecuada para los parámetros que contienen incertidumbre. Algunos de los motivos que pueden dar lugar a esta carencia de datos válidos son, por ejemplo:

- Las posibles modificaciones en las reglas del mercado, que pueden cambiar de manera significativa el comportamiento del mercado, restando validez a los datos históricos disponibles. Por ejemplo, el real decreto de ley 6/2000 establece que a fecha de enero del 2003 todos los consumidores pueden contratar su electricidad con la empresa comercializadora a un precio pactado. Dada la fecha de efecto, los agentes pueden no disponer de un conjunto suficiente de datos para estimar el número de consumidores que de un año para otro pasan a adquirir libremente su energía con la comercializadora.

---

<sup>29</sup>Para un ejemplo interesante el lector puede consultar [Oberuggenberger, 2002], en donde se muestra la alta sensibilidad de los resultados de un problema de resistencia estructural con respecto a las distribuciones de probabilidad aceptadas, sugiriendo el uso de la distribución de posibilidad para reducir esta sensibilidad. En concreto, se muestra que la elección de una distribución de probabilidad entre las admisibles para el modelado de la incertidumbre del coeficiente de fricción determina sustancialmente el valor de la probabilidad de deformación. El artículo propone utilizar una distribución de posibilidad que resulta de la estimación que un experto realice del rango de valores entre los que se sitúa el coeficiente de fricción para cada grado de posibilidad.

- La confidencialidad de los resultados del mercado, que está sujeta a regulación y que en ocasiones no permite disponer de un conjunto de datos para el horizonte que se precisa en los estudios de medio y largo plazo.
- La imposibilidad física de acceder a los datos, por ejemplo, por no disponer de sistemas de información adecuados, o por su propia confidencialidad para determinados usuarios.

En tercer lugar, con el objetivo de simplificar los modelos probabilistas para hacerlos computacionalmente viables, es habitual asumir ciertas hipótesis que a menudo están lejos de cumplirse en la realidad del problema tratado. Por ejemplo, es habitual suponer que las distribuciones de probabilidad de determinados parámetros son normales o gaussianas, o que muchas de las relaciones entre las mismas son relaciones de independencia. Estas suposiciones restan rigor al enfoque probabilista, y sugieren la utilización de otros enfoques alternativos, como el enfoque posibilista, que, aunque menos informativos, impongan también menos requisitos que luego tengan que ser rechazados<sup>30</sup>.

En cuarto lugar, cabe señalar que los modelos posibilistas están especialmente indicados para modelar y tratar aquellos eventos que, pudiendo ser posibles para los planificadores, no son probables desde el punto de vista de la matemática probabilista (por ejemplo, que la demanda en el mercado decrezca más del 10%, como podría suceder con los cambios regulatorios relacionados con los contratos eléctricos, que se han mencionado anteriormente).

En quinto lugar, la lenta aparición de los modelos de mercado probabilistas se debe, en gran medida, a que son generalmente difíciles de resolver (ya sea por medio de simulación probabilista, de optimización estocástica, o de otras metodologías), y en ocasiones requieren procesos de ayuda a la optimización (como por ejemplo los de descomposición). En la práctica, el aumento del tamaño de los modelos probabilistas se debe fundamentalmente a la necesidad de considerar árboles de escenarios con gran número de ramificaciones en horizontes temporales que además tienen un nivel de detalle elevado.

Por último, el modelado posibilista de la información está también indicado para representar la información lingüística proporcionada por los planificadores (en el caso de la explotación eléctrica) acerca del comportamiento futuro de los parámetros.

---

<sup>30</sup>Cabe mencionar que en algunos de los trabajos realizados en [Cucala, 2003], se ha comprobado que en determinados problemas de planificación de tareas en tiempo real los resultados obtenidos al aplicar la teoría de la posibilidad al modelado de la incertidumbre, no difieren significativamente de los conseguidos con la aplicación de la teoría de la probabilidad, pero con un menor coste computacional.

En la práctica esta característica resulta de gran utilidad ya que muchos de los valores de los parámetros son reajustados mediante este tipo de información subjetiva (por ejemplo, los reajustes sobre los resultados de un modelo estadístico de predicción) y, especialmente, en los casos en los que no existe un soporte numérico que justifique el uso de información estadística.

En contraste con las ventajas hasta ahora reseñadas, a continuación se describen algunos de los inconvenientes del uso de las medidas de posibilidad como herramientas de modelado de la incertidumbre en el mercado de generación.

Primeramente cabe mencionar que al igual que en ocasiones ocurre con las distribuciones de probabilidad (subjetiva o no), una distribución de posibilidad también resulta difícil de estimar, ya que en muchos casos tiene en cuenta la percepción de varios expertos sobre la posibilidad de un evento. Este carácter personal (subjetivo) y plural (no único) de esta distribución es fuente de críticas en la literatura (ver [French, 1984], [French, 1987] y [Cheeseman, 1988]). En este sentido, en el próximo capítulo de esta tesis se proponen varios métodos para la estimación de una distribución de posibilidad para la pendiente de la demanda residual de un generador. Los métodos propuestos pueden considerar o no información subjetiva proporcionada por los planificadores, pero en el caso de no considerarla, debe disponerse de un conjunto de datos de pendientes históricas (aunque no sean abundantes ya que, en otro caso, podría resultar más conveniente utilizar un modelo estocástico). En concreto, la distribución de posibilidad se puede obtener a partir de las transformaciones entre distribuciones de probabilidad y de posibilidad, que han sido descritas en el segundo capítulo de esta tesis. En el próximo capítulo se muestran algunas de las distribuciones de posibilidad obtenidas para un conjunto de datos de pendientes reales del mercado eléctrico español.

Por otro lado, y como ya se mencionó en el segundo capítulo de esta tesis, una de las aplicaciones más frecuentes del principio de extensión en temas relacionados con la investigación operativa, la economía y la ingeniería, es la extensión del álgebra ordinaria al álgebra borrosa, que permite calcular distribuciones de posibilidad relevantes para el decisor. En este sentido, un segundo inconveniente que puede achacarse a las herramientas de la teoría de la posibilidad es que la aplicación del principio de extensión para el cálculo de distribuciones de posibilidad de salida es, en general, compleja y su simplificación requiere de parametrizaciones adecuadas de las distribuciones de posibilidad de entrada, como las distribuciones de tipo *LR* utilizadas en esta tesis, y que han sido descritas en el capítulo segundo. Sin embargo, estas distribuciones son suficientemente generales al englobar como casos particulares a muchas distribuciones unimodales.

Finalmente, la revisión de la optimización posibilista ha puesto de manifiesto que, aunque en los problemas reales no suelen ser necesarios los procesos de resolución requeridos en los modelos estocásticos, que incrementan los tiempos de ejecución

(como en los problemas de Unit Commitment, ver por ejemplo [Yan, 1997]), sin embargo, es frecuente recurrir a otro tipo de procedimientos no menos complejos. Algunos de estos procedimientos son, por ejemplo, el cálculo de  $\alpha$ -cortes o la optimización previa de determinados problemas de programación determinista. Como se verá en el capítulo siguiente, en esta tesis se proponen varias técnicas de resolución (basadas en el uso de varios algoritmos para problemas de desigualdades variacionales) y se suponen ciertas hipótesis en el modelado (como el uso de distribuciones de posibilidad *LR*), que permiten esquivar algunos de estos inconvenientes, resultando en tiempos de cálculo aceptables para la operación y planificación de la generación. En el siguiente capítulo se comparan los requerimientos necesarios para resolver los enfoques primal y dual propuestos en esta tesis utilizando medidas de posibilidad y de probabilidad. Como se verá, los requerimientos son significativamente menores en el modelo posibilista que en el modelo estocástico equivalente.

Desde un punto de vista conciliador, puede concluirse que, a pesar de que la teoría de la probabilidad y de la posibilidad puedan parecer teorías competitivas, pueden también ser complementarias al modelar diferentes estados del conocimiento (para más detalle, ver [Zadeh, 1995]). De hecho, con objeto de considerar un modelo de incertidumbre más completo que sea capaz de aprovechar la información histórica disponible, existe una colección de trabajos donde la probabilidad y los conjuntos borrosos son usados de manera conjunta en los problemas de decisión (ver [Kacprzyk, 1988]). Estos trabajos están recibiendo cada vez una mayor atención en las ciencias de modelado de la información imperfecta, ya que suponen un paso importante hacia la combinación de incertidumbre proveniente de caminos heterogéneos, por ejemplo, cuando se consideran datos estadísticos e informaciones subjetivas conjuntamente. En esta tesis no se han aplicado este tipo de trabajos para el análisis del comportamiento de un mercado de generación, considerando a las teorías de la probabilidad y de la posibilidad como alternativas razonables, bajo distintos supuestos, para representar la incertidumbre en el mercado.

## **4.5 Aplicación de la teoría de la posibilidad a los mercados de generación**

A lo largo de la última década, la aplicación de la teoría de la posibilidad ha recibido una gran atención en varias áreas de trabajo relacionadas con los sistemas eléctricos, como son la operación, la planificación o el control (para una revisión exhaustiva ver [Momoh, 1995], [Hiyama, 1999] y [Tomsovic, 2000]). En gran parte de los problemas abordados se han aplicado técnicas de decisión para reducir costes, pérdidas del sistema, etc., destacando, entre otras, las aplicadas a los siguientes problemas:

- Unit Commitment ([Su, 1991], [Yan, 1997], [Padhy, 2000] y [Mantawy, 2002]).
- Despacho económico ([Huang, 1997], [Ferrero, 1997] y [Vlaisavljevic, 1999]).
- Planificación de la distribución ([Matos, 1993], [Ching, 1995], [Ponce de Leão, 1995a], [Ponce de Leão, 1995b], [Canz, 1996] y [Ponce de Leão, 1997]).
- Planificación de la expansión ([David, 1989] y [Tomsovic, 1993]).
- Planificación del mantenimiento ([Miranda, 1990] y [Lin, 1992]).
- Flujo óptimo de potencia ([Miranda, 1992] y [Abdul-Rahman, 1993]).

Sin embargo, el único trabajo encontrado en la literatura relacionado con el uso de las distribuciones de posibilidad para el modelado de la incertidumbre en un mercado eléctrico es [Yang, 2002]. En este trabajo se muestra un enfoque basado en la teoría de la posibilidad para la optimización de las estrategias de oferta de un agente en un mercado eléctrico. Las estrategias optimizadas son funciones de suministro lineales, cuyos parámetros son distribuciones de posibilidad gaussianas. Utilizando un algoritmo para la simulación de una distribución de posibilidad<sup>31</sup> y otro para la construcción de estrategias de oferta óptimas, se maximiza la esperanza del beneficio posibilista (valor esperado tal y como se define en [Liu, 2002]) como función de los parámetros inciertos de las estrategias del resto. Por tanto, al no considerar la maximización simultánea del beneficio de cada generador, este enfoque no plantea la resolución de un equilibrio en funciones de suministro. Por otro lado, solamente trata el problema de optimización para el caso de un periodo temporal, no existiendo restricciones entre periodos, necesarias, por ejemplo, para el correcto modelado de los recursos hidráulicos de una empresa de generación.

Dado el interés mostrado por la comunidad científica en la operación y planificación bajo incertidumbre de un sistema eléctrico, que ha dado lugar a muchos de los

---

<sup>31</sup>En la literatura existen diferentes mecanismos de simulación de distribuciones de posibilidad (ver por ejemplo [Dohnal, 1983], [Chanas, 1988] y [Fishwick, 1991]), que no han sido descritos en esta tesis al no haber sido empleados en el análisis del mercado de generación. En [Abebe, 2000] se muestra una comparación de un método de simulación posibilista por  $\alpha$ -cortes, y el conocido método de simulación probabilista de Monte Carlo.

trabajos descritos en este capítulo, el trabajo que esta tesis ha abordado pretende responder, entre otros motivos, a la falta de enfoques basados en el equilibrio de Nash cuando la incertidumbre en un mercado de generación se modela mediante distribuciones de posibilidad.

Fruto del trabajo realizado se ha publicado [Campos, 2005a], donde se utilizan los enfoques primal y dual, descritos en el capítulo tercero, y una combinación de los mismos, para proponer un modelo de equilibrio de Cournot determinista que se supone equivalente al propuesto cuando se considera incertidumbre en la pendiente de la demanda de electricidad, y cuando se modela esta incertidumbre mediante distribuciones de posibilidad. El modelo planteado en [Campos, 2005a] puede considerarse una particularización del modelo propuesto en esta tesis, por los siguientes motivos:

- El enfoque supone que todos los generadores tienen igual aversión al riesgo.
- El enfoque está orientado al análisis de la sensibilidad de los resultados del mercado respecto de un punto del eje de precios igual a cero.
- Solamente se analiza el equilibrio de Cournot, pero no se aborda el equilibrio en variaciones conjeturales.
- La incertidumbre solamente se tiene en cuenta en la curva de la demanda y no en los costes de producción.

Bajo estos supuestos, en [Campos, 2005a] se propone una metodología de resolución para los enfoques primal, dual y combinado, que está basada en el planteamiento de problemas de optimización equivalentes a las ecuaciones de los equilibrios resultantes de aplicar los enfoques. Para el caso del enfoque primal el problema de optimización es cuadrático, mientras que para el enfoque dual es fraccional-cuadrático (la función objetivo es una fracción de funciones cuadráticas), y para el combinado es un problema bi-objetivo cuadrático y fraccional cuadrático.

Para resolver el problema multicriterio del enfoque combinado se propone un algoritmo iterativo que encuentra en cada iteración una solución que satisface una región cuadrática factible (región definida por restricciones, algunas de las cuales pueden ser cuadráticas), que ha sido linealizada. No se ha utilizado en la resolución la teoría de problemas de desigualdades variacionales, que sí se emplea en esta tesis por la mayor complejidad del problema resuelto. Precisamente esto ha hecho que en esta tesis solamente se analice en detalle el comportamiento del enfoque primal, dejando para futuros desarrollos la aplicación y el análisis de los resultados del enfoque dual, así como el estudio del enfoque combinado (para más detalle ver capítulo séptimo).

Finalmente, en [Campos, 2005a] el planteamiento de modelos de optimización equivalentes ha permitido de una manera sencilla la comparación de la robustez del

equilibrio obtenido con el enfoque combinado, con respecto del equilibrio propuesto en [Barquín, 2004]. En este sentido, se ha podido demostrar que el equilibrio propuesto en [Campos, 2005a] puede considerarse más robusto que el equilibrio determinista de Barquín. Este mismo análisis se describe en el capítulo sexto para el modelo de mercado analizado en esta tesis, concluyendo de la misma forma que en [Campos, 2005a].

## **4.6 Una visión general del modelo de mercado de generación considerado en esta tesis**

En este apartado se muestra una visión general del modelo elegido en esta tesis. El modelo en su versión determinista coincide con el descrito en [Barquín, 2004] y [Reneses, 2004], pero ha sido generalizado al caso en donde la incertidumbre en el mercado se modela mediante la teoría de la posibilidad.

### **4.6.1 El horizonte, la remuneración y el tipo de algoritmo**

El horizonte temporal del modelo de mercado propuesto es de medio plazo. La remuneración considerada es la correspondiente al precio marginal en un único nodo, lo que puede resultar en la práctica algo restrictivo. Sin embargo, tal y como se comenta en [Reneses, 2004] este enfoque permite extensiones de cara a considerar distintos precios nodales por zonas (ver líneas de continuación de esta tesis, descritas en el capítulo séptimo).

El precio marginal se calcula mediante el planteamiento del equilibrio de Nash que, como se verá, tiene en cuenta acoplamientos temporales y un nivel de detalle de la cartera de generación suficiente para los estudios a medio plazo. El mecanismo de casación puede considerarse de casación compleja, dado que en el planteamiento de los equilibrios se tienen en cuenta gran parte de las restricciones del sistema, aunque no se considera la red de transporte.

### **4.6.2 Consideración de la cartera de generación**

Para proporcionar decisiones de explotación óptimas lo más realistas posibles, el modelo propuesto en esta tesis tiene en cuenta las características técnicas más importantes de las unidades de generación de los agentes, ya sean térmicas convencionales, nucleares, hidráulicas o de bombeo. Entre estas características, destacan los límites técnicos impuestos por la potencia generada, los costes variables, y las que describen la evolución de las reservas hidráulicas (con las aportaciones hidráulicas).

El modelo resultante, que se describe formalmente en el siguiente capítulo, también considera la posición de las empresas productoras en el mercado, como por ejemplo a través de la consideración de contratos entre las empresas generadoras y comercializadoras.

### **4.6.3 Modelo basado en el equilibrio en variaciones conjeturales**

El modelo propuesto trata de encontrar el equilibrio de Nash tomando como variable de decisión la potencia que va a producir cada empresa, en lugar de las estrategias de oferta reales, que son las curvas de oferta que se envían a los diferentes mercados. Esta simplificación suele emplearse en los estudios de medio plazo al no requerirse un elevado nivel de detalle de las características de la cartera de generación. Concretamente, el objetivo del modelo es la obtención del equilibrio en variaciones conjeturales en donde cada generador supone que la competencia reacciona ante su producción ofertada, conjetura traducida en la cuantificación de la variación del precio respecto de la producción de cada generador, es decir, en la cuantificación de la pendiente de su curva de la demanda residual.

Este tipo de equilibrio generaliza el equilibrio de Cournot, incluyéndolo como un caso particular cuando la reacción de la competencia es inexistente. Para introducir gradualmente los principales desarrollos de esta tesis, la descripción del equilibrio de Cournot en el capítulo quinto precederá a la del equilibrio en variaciones conjeturales.

### **4.6.4 Consideración explícita de la incertidumbre mediante distribuciones de posibilidad**

Tal y como se ha mencionado, en ocasiones las distribuciones de posibilidad resultan ser más adecuadas que las distribuciones de probabilidad para representar la incertidumbre. En este sentido, una de las aportaciones originales de esta tesis es el modelado de la incertidumbre en el equilibrio de Nash aplicado al mercado de generación, mediante distribuciones de posibilidad en lugar de distribuciones de probabilidad. En esta tesis se han supuesto distribuciones de posibilidad continuas de tipo *LR*, que pueden ser operadas más fácilmente que otro tipo de distribuciones de posibilidad continuas.

Como se comprobará en el siguiente capítulo, el planteamiento de las ecuaciones de equilibrio resultantes de aplicar los enfoques primal y dual cuando se utiliza una medida de probabilidad requiere de la suposición de distribuciones normales e independientes, lo que en la práctica puede no ser siempre conveniente o admisible. Además, aunque esta tesis no ha tenido por objetivo prioritario el análisis detallado de los enfoques estocásticos, no se ha encontrado una metodología de resolución adecuada para las ecuaciones de equilibrio obtenidas.

#### 4.6.5 Un modelo que obtiene las distribuciones de posibilidad principales de los resultados de salida

El modelado posibilista de la incertidumbre para el análisis de la operación y planificación a medio plazo de los mercados de generación enriquece de manera significativa los resultados proporcionados por el modelo de mercado. En concreto, el uso del principio de extensión basado en los axiomas de la teoría de la posibilidad permite, entre otros, el cálculo de las distribuciones de posibilidad del beneficio de cada agente, de los costes de producción de la competencia, y del precio marginal resultado del mercado (ver [Campos, 2005a] para un ejemplo de este último tipo de distribución).

Estas distribuciones de posibilidad pueden mostrar una aproximación razonable de la volatilidad de los resultados fundamentales del mercado a medio plazo y, por tanto, pueden ayudar a la toma de futuras decisiones en el corto, medio o largo plazo, al conocerse el riesgo que se puede tener en el medio plazo.

Los enfoques de resolución propuestos no pretenden calcular la distribución de posibilidad para las potencias ofertadas, que son las estrategias de los generadores, sino encontrar una decisión de explotación numérica, al igual que habitualmente se hace cuando la incertidumbre se representa mediante distribuciones de probabilidad. Esta simplificación permite una mejora computacional en la resolución, así como una interpretación más sencilla de las potencias ofertadas en el mercado (ver capítulo quinto para más detalle).

#### 4.6.6 Consideración del riesgo incurrido por los agentes

La metodología de resolución de la incertidumbre en el problema de equilibrio de mercado se basa en el concepto Valor en Riesgo (VaR) (ver [Jorion, 1997]) que es un método para cuantificar la exposición al riesgo de mercado, normalmente utilizado en técnicas estadísticas tradicionales, pero que ahora se redefine usando distribuciones de posibilidad. El VaR posibilista es un instrumento útil y fácil de entender, y acota la máxima variación de las pérdidas que una empresa puede experimentar en un determinado horizonte de tiempo y con cierto nivel de confianza. En el contexto del mercado eléctrico a medio plazo el VaR cuantifica el riesgo del mercado de generación expresado como un límite de la volatilidad de las pérdidas que un agente puede tener en el medio plazo.

Por ejemplo, un agente  $e$  podría establecer que el VaR mensual de su cartera de generación es de  $B_e$  unidades monetarias con un nivel  $\alpha_e$  de confianza. En otras palabras, basándose en el conocimiento acerca de la situación actual del mercado,  $\alpha_e$

podría ser la posibilidad máxima de que el beneficio sea igual o menor a  $B_e$  unidades monetarias. Una interpretación alternativa surge en el marco de la teoría de la evidencia, en donde la posibilidad se puede considerar como una cota superior de la probabilidad. Así, basándose en la evidencia que un agente tiene acerca de que su beneficio sea igual o menor a  $B_e$  unidades monetarias, la posibilidad  $\alpha_e$  sería el número de días máximo de cada 100 días de operación del mercado en el que su evidencia es cierta.

El equilibrio primal se plantea entonces, para cada agente, como la maximización del beneficio  $B_e$  cuando el nivel de confianza  $\alpha_e$  del generador es un dato de entrada (denotado como  $\alpha_{e0}$ ). Cuando el equilibrio resulta de la minimización del nivel de confianza  $\alpha_e$  de que el beneficio pueda ser igual o menor a una cantidad prefijada  $B_e$ , que en este caso es un dato de entrada (denotado como  $B_{e0}$ ), se tiene el equilibrio dual (en el siguiente capítulo se muestran varios dibujos explicativos de estas condiciones cuando las medidas son de probabilidad y de posibilidad).

#### 4.6.7 Formulación de los problemas de optimización por agente: relación con la optimización estocástica y posibilista

La formulación concreta del problema de optimización de cada agente desde el punto de vista del enfoque primal se basa en el planteamiento del **criterio  $\alpha$ -fractil o criterio de Kataoka** (ver [Kataoka, 1967] para su utilización en un modelo de optimización estocástica) pero cuando: 1) la medida de incertidumbre es la medida de posibilidad en lugar de la medida de probabilidad; 2) se pretende determinar el mayor nivel que puede alcanzar la función de beneficio en una situación desfavorable con a lo sumo un grado de posibilidad  $\alpha_{e0} \in [0,1]$  fijado por cada agente<sup>32</sup>; y 3) se plantea el equilibrio de Nash, que tiene en cuenta simultáneamente los problemas de optimización de todos los agentes (lo que forma también parte de las aportaciones originales de esta tesis). La formulación de cada problema de optimización es:

$$\begin{aligned} & \underset{P_e, B_e}{Max} B_e && (4.1) \\ & s.a. \quad \Pi(\underline{B}_e(D, P_e, \underline{\omega}_e) \leq B_e) \leq \alpha_{e0} \\ & \quad P \in X \end{aligned}$$

siendo  $\underline{\omega}_e$  el conjunto de parámetros posibilistas tenidos en consideración por cada agente,  $\underline{B}_e(D, P_e, \underline{\omega}_e)$  la distribución de posibilidad del beneficio a maximizar,  $P^T = (P_I, \dots, P_E)$  las potencias de todos los generadores (el superíndice <sup>T</sup> es el operador

<sup>32</sup>El subíndice  $e$  se refiere a cada agente del mercado, y el subíndice 0 refleja que el parámetro es un dato de entrada.

de trasposición de matrices y vectores),  $D$  la demanda satisfecha, y  $X$  la región factible delimitada por las restricciones de explotación.

Por el contrario, la formulación del problema de optimización de cada agente desde el punto de vista del enfoque dual se basa en el **planteamiento del criterio de mínimo riesgo** o **criterio de nivel de aspiración** (ver [Charnes, 1963] para su utilización en un modelo de optimización estocástica) cuando se pretende minimizar la posibilidad de que el beneficio sea menor o igual que un nivel mínimo de satisfacción  $B_{e0}$  prefijado por cada agente y, utilizando, como en el enfoque primal, la medida de posibilidad en el planteamiento del equilibrio de Nash. La formulación de cada problema de optimización es ahora:

$$\begin{aligned} \underset{P_e}{\text{Min}} \quad & \Pi(B_e(D, P_e, \omega_e) \leq B_{e0}) \\ \text{s.a.} \quad & P \in X \end{aligned} \quad (4.2)$$

Los enfoques primal y dual sirven como base para generar otros enfoques de resolución más complejos, que han sido denominados en [Campos, 2005a] **enfoques combinados**, y que resultan de la combinación de los criterios  $\alpha$ -fractil y de mínimo riesgo<sup>33</sup>. La formulación del problema de optimización de cada agente desde el punto de vista de los enfoques combinados es la de un problema bicriterio cuyos objetivos son los formulados en (4. 1) y (4. 2). El planteamiento multiobjetivo también se sugiere en [Stancu-Minasian, 1984] para el caso en que se resuelve un problema de optimización estocástica, en lugar de cuando se trata de encontrar un equilibrio de Nash.

En [Inuiguchi, 1992] y [Inuiguchi, 1993] se utilizan los criterios  $\alpha$ -fractil y de mínimo riesgo (éste último denominado en estos trabajos **criterio de modalidades**) de manera directa para resolver un modelo de optimización en donde la función objetivo es un número posibilista. Tal y como describe Inuiguchi, el criterio de modalidades para el caso lineal  $LR$  es equivalente a resolver un problema de optimización fraccional, es decir, un problema en que la función objetivo es un cociente de funciones. En [Campos, 2005a] se utiliza el criterio de modalidades para plantear el equilibrio de Cournot según el enfoque dual, y cuando se considera que la pendiente de la demanda de la electricidad es una distribución de posibilidad  $LR$ . La función de beneficio de cada agente una vez aplicado el enfoque dual resulta ser también fraccional, al igual que el modelo de optimización que resuelve las ecuaciones del equilibrio.

<sup>33</sup>En el capítulo quinto se muestran las relaciones existentes entre los enfoques primal y dual, que permiten entender más fácilmente el funcionamiento de los enfoques combinados, cuyo análisis se propone como futura línea de investigación de la tesis.

Centrándose en el caso de un problema de selección de inversiones, en [Inuiguchi, 1995] se muestra una comparación de los criterios fractil y de modalidades cuando la medida de incertidumbre es una medida de posibilidad y cuando es una medida de probabilidad. Se prueba que el problema posibilista es más sencillo de resolver que el problema estocástico, y que el problema posibilista con funciones de pertenencia cuadráticas (más complejas que las distribuciones triangulares y trapezoidales) es equivalente al problema estocástico considerando una distribución normal multivariante. En [Inuiguchi, 2000] se demuestra que si las variables posibilistas son independientes<sup>34</sup>, el problema posibilista es equivalente al problema estocástico en donde los coeficientes de correlación entre las variables aleatorias normales son desconocidos.

Fruto del trabajo realizado en esta tesis, en [Campos, 2005b] se demuestran en detalle las equivalencias entre los criterios  $\alpha$ -fractil y de mínimo riesgo con los modelos de optimización lineal y fraccional lineal propuestos en los trabajos de Inuiguchi, así como se describen las relaciones entre ambos criterios. Además, en el criterio de mínimo riesgo se propone una metodología para la determinación de los umbrales máximo y mínimo del nivel mínimo de satisfacción  $B_{e0}$  de la función objetivo posibilista. También se analiza la robustez de las soluciones obtenidas y se muestra un caso ejemplo descriptivo de este análisis. Sin embargo, este trabajo, al igual que los trabajos de Inuiguchi, se centra en la resolución de un problema de optimización con objetivo posibilista, en lugar de en la resolución del equilibrio de Nash posibilista.

#### **4.6.8 Un algoritmo de desigualdades variacionales como método de resolución**

Algunos de los métodos más utilizados en la literatura para la resolución de las ecuaciones de equilibrio (resultantes de derivar respecto de las potencias, las funciones de utilidad de cada generador) están basados en el planteamiento de un problema de desigualdades variacionales (estos problemas ya fueron mencionados en el apartado 4.3 y serán descritos más en detalle en el próximo capítulo). En comparación con aquellos enfoques que directamente resuelven las ecuaciones de equilibrio mediante un modelo de optimización equivalente (como el descrito en [Barquín, 2004] y [Reneses, 2004]), el enfoque basado en el problema de desigualdades variacionales generalmente resuelve problemas cuyos supuestos son menos restrictivos. Por ello, en esta tesis esta metodología ha resultado especialmente adecuada cuando se resuelven los enfoques primal y dual.

---

<sup>34</sup>En el sentido en que la distribución de posibilidad multivalorada puede descomponerse en función de las distribuciones marginales con una T-norma (ver para más detalle [Dubois, 1982]).

Concretamente, como se verá en el siguiente capítulo, los problemas de desigualdades variacionales surgidos han podido ser resueltos mediante un algoritmo iterativo cuya convergencia ha sido probada en esta tesis tanto formalmente como experimentalmente (ver [Harker, 1990] para una descripción general de los algoritmos para problemas de desigualdades variacionales). En cada iteración, el algoritmo propuesto resuelve un problema de desigualdades variacionales más sencillo que el original mediante un modelo de optimización cuadrático equivalente, similar al descrito en [Barquín, 2004] para el análisis determinista.

Este enfoque basado en la resolución iterativa de problemas de optimización cuadrática ha permitido resolver en esta tesis problemas de equilibrio de gran tamaño con la utilización de programas de libre distribución como GAMS (ver [Brooke, 1998]) que permiten una formulación del modelo cuadrático más cómoda. Optimizadores como Cplex (ver [Cplex, 1997]) pueden entonces ejecutarse desde estos lenguajes de modelado para obtener las soluciones numéricas, así como para obtener las variables duales que proporcionan información de interés tanto para el funcionamiento del algoritmo propuesto, como para la operación a corto plazo. La información proporcionada por las variables duales no ha sido analizada en esta tesis dado que ha sido una de las aportaciones originales de [Reneses, 2004].

#### **4.6.9 Clasificación en la literatura del modelo propuesto**

Utilizando el mismo tipo de gráfica tridimensional que las mostradas en [Ventosa, 2000] y [Baíllo, 2002], se ilustra en la Figura 4. 1 el hueco que esta tesis pretende rellenar en el abanico de modelos de mercado que han sido revisados en el apartado 4.3 y que resultan más relevantes para esta tesis. Para su clasificación se ha considerado la metodología de resolución utilizada, el tipo de modelado del mercado, y las fuentes de incertidumbre consideradas.



## 4.7 Referencias

- [Abdul-Rahman, 1993] K. H. Abdul-Rahman and S. M. Shahidehpour, "Application of Fuzzy Sets to Optimal and Reactive Power Planning with Security Constraints," presented at Proc. of PICA, Arizona, 1993.
- [Abebe, 2000] A. J. Abebe, V. Guinot, and D. P. Solomatine, "Fuzzy alpha-cut vs. Monte Carlo techniques in assessing uncertainty in model parameters," presented at International Conference on Hydroinformatics, Iowa City, USA, 2000.
- [Baíllo, 2002] A. Baíllo, "A Methodology to Develop Optimal Schedules and Offering Strategies for a Generation Company Operating in a Short-Term Electricity Market," in *Organización Industrial: Pontificia Comillas de Madrid*, 2002.
- [Baldick, 2001] R. Baldick and W. W. Hogan, "Capacity Constrained Supply Function Equilibrium: Generalizations, Application and Limitations," presented at Program on Workable Energy Regulation (POWER) PWP-078, University of California Energy Institute, Berkeley, California, 2001.
- [Barquín, 2004] J. Barquín, E. Centeno, and J. R. Guillén, "Medium-term generation programming in competitive environments: A new optimization approach for market equilibrium computing". *IEEE Proceedings on Generation Transmission and Distribution*, vol. 151, No. 1, pp. 119-126, 2004.
- [Bellman, 1957] R. Bellman, *Dynamic Programming*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1957.
- [Berry, 1999] C. A. Berry, B. F. Hobbs, W. A. Meroney, and R. P. O'Neill, "Analysing Strategic Bidding Behaviour in Transmission Capacity in a Deregulated Electricity Industry". *Util. Policy*, vol. 8, No. 3, pp. 139-158, 1999.
- [Bolle, 1992] F. Bolle, "Supply Function Equilibria and the Danger of Tacit Collusion. The Case of Spot Markets for Electricity". *Energy Economics*, pp. 94-102, 1992.
- [Borenstein, 1999] S. Borenstein and J. Bushnell, "An empirical analysis of the potential for market power in California's electricity industry". *Journal of industrial Economics*, vol. 47, 1999.
- [Borenstein, 1995] S. Borenstein, J. Bushnell, E. Kahn, and S. Stoft, "Market Power in California Electricity Markets". *Utilities Policy*, vol. 5, pp. 219-236, 1995.
- [Bowley, 1924] A. L. Bowley, "The Mathematical GroundWork of Economics". *Oxford: Oxford University Press*, 1924.
- [Brooke, 1998] A. Brooke, D. Kendrick, A. Meeraus, and R. Raman, *GAMS: A User's Guide*. Washington, D.C.: GAMS development Corporation, 1998.

- [Campos, 2004] F. A. Campos and J. Villar, "Medium-Term Electricity Generation with Fuzzy Availability," presented at Second international conference on Soft Methods in Probability and Statistics (SMPS), Oviedo (Asturias), 2004.
- [Campos, 2005a] F. A. Campos, J. Villar, and J. Barquin, "Application of Possibility Theory to Robust Cournot Equilibrium in Electricity Market". *Probability In The Engineering And Informational Sciences*, vol. 19, pp. 519-531, 2005a.
- [Campos, 2005b] F. A. Campos, J. Villar, and M. Jiménez, "Robust Solutions using Fuzzy Chance Constraints". *Accepted in Engineering Optimization*, 2005b.
- [Canz, 1996] T. Canz, "On the Application of Fuzzy Linear Programming in Energy System Planning," European Workshop on Fuzzy Decision Analysis for Management Planning and Optimization, Dortmund 1996.
- [Centeno, 2003] E. Centeno, B. Vitoriano, F. A. Campos, A. Muñoz, J. Villar, and E. F. Sánchez-Úbeda, "A goal programming model for rescheduling of generation power in deregulated markets". *Annals of Operations Research*, vol. 120, pp. pp 45 - 57, 2003.
- [Chanas, 1988] S. Chanas and M. Nowakowski, "Single Value Simulation of Fuzzy Variable". *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 25, pp. 43-57, 1988.
- [Charnes, 1963] A. Charnes and W. W. Cooper, "Deterministic Equivalents for optimizing and Satisficing under Chance Constrains". *Operation Research*, vol. 11, No. 1, pp. 18-39, 1963.
- [Cheeseman, 1988] P. Cheeseman, "Probabilistic versus Fuzzy reasoning," in *Uncertainty in Artificial Intellegence*, L. y. L. J. Kanal, Ed. North-Holland, Amsterdam, 1988, pp. 85-102.
- [Ching, 1995] H.-C. Ching, "Optimal shunt capacitor allocation by fuzzy dynamic programming". *Electric Power Systems Research*, vol. 35, pp. 133-139, 1995.
- [Christie, 1998] R. D. Christie and I. Wangenteen, "The Energy Market in Norway and Sweden: The Spot and Future Markets". *IEEE Power Engineering Review*, 1998.
- [Cottle, 1992] R. W. Cottle, "The Linear Complementary Problem". *Academic Press, Boston*, 1992.
- [Cournot, 1838] A. A. Cournot, "Researches into Mathematical Principles of the Theory of Wealth". *New York: Kelley*, 1838.
- [Cplex, 1997] Cplex, *Using The Cplex Callable Library*. Incline Village, N.V.: ILOG, Inc, 1997.
- [Cucala, 2003] P. Cucala, "Aplicación de la Teoría de la Posibilidad al Análisis de Planificabilidad de Sistemas de Tiempo Real," in *Instituto de Investigación Tecnológica*. Madrid: Pontificia Comillas de Madrid, 2003.
- [David, 1989] A. K. David and R. D. Zhao, "An Expert System with Fuzzy Sets for Optimal Planning". *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 3, No. 3, 1989.

- [Daxhelet, 2001] O. Daxhelet and Y. Smeers, "Variational Inequality Models of Restructured Electricity Systems," in *Complementary: Applications, Algorithms and Extensions*, M. C. Ferris, O. L. Mangasarian, and J. S. Pang, Eds.: Kluwer Academic Publishers, 2001.
- [Day, 2002] C. Day and B. Hobbs, "Oligopolistic Competition in Power Networks: A conjectured Supply Function Approach". *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 17, No. 3, pp. 597-607, 2002.
- [Dohnal, 1983] M. Dohnal, "Fuzzy Simulation of Industrial Problems". *Computers in Industry*, vol. 4, pp. 347-352, 1983.
- [Dubois, 1982] D. Dubois and H. Prade, "A class of Fuzzy Measures based on Triangular Norms: A General Framework for the Combination of Uncertainty Information". *International Journal of General Systems*, vol. 8, pp. 43-61, 1982.
- [Farrel, 1990] J. Farrel and C. Shapiro, "Horizontal Mergers: An equilibrium analysis". *Amer. Econ. Rev.*, vol. 80, No. 1., pp. 107-126, 1990.
- [Ferrero, 1997] R. W. Ferrero and S. M. Shahidehpour, "Short-term power purchases considering uncertain". *IEE Proc.-Gener. Transm. Distrib.*, vol. 144 No. 5, pp. 423-428, 1997.
- [Ferris, 1998] M. C. Ferris and T. C. Munson, "Complementarity Problems in GAMS and the Path Solver," in *Mathematical Programming Technical Report 98-12, Computer Sciences Department*. Wisconsin-Madison, 1998.
- [Ferris, 1997] M. C. Ferris and J. S. Pang, "Engineering and Economic Applications of Complementarity Problems". *SIAM Rev.*, vol. 39, No. 4, pp. 669-713, 1997.
- [Fishwick, 1991] P. A. Fishwick, "Fuzzy Simulation: Specifying and Identifying qualitative models". *International Journal of General Systems*, vol. 19, pp. 295-316, 1991.
- [French, 1984] S. French, "Fuzzy Decision Analysis: come Criticisms," in *Fuzzy Sets and Decision Analysis, TIMS Studies in the Management Sciences*, L. A. Z. H. J. Zimmermann, B.R. Gaines, Ed., 1984, pp. 29-44.
- [French, 1987] S. French, "Fuzzy Sets: the Unanswered Questions," Report of the Statistical Laboratory, Dept. of Mathematics, University of Manchester 1987.
- [Frish, 1933] R. Frish, "Monopole-Polypole-La Notion de Force dans L'Economie". *Til Harald Westerdgaard*, pp. 241-259, 1933.
- [García-Alcalde, 2002] A. García-Alcalde, M. Ventosa, M. Rivier, A. Ramos, and G. Relación, "Fitting Electricity Market Models. A Conjectural Variations Approach". *14th Power Systems Computation Conference*, 2002.
- [García-González, 2001] J. García-González, "Optimización de la Explotación en el Corto plazo y Elaboración de Ofertas en un Sistema Eléctrico Liberalizado. Naturaleza del Problema y Métodos de Solución," in *Electrotecnia y Sistemas*: Pontificia de Comillas de Madrid, 2001.
- [Geoffrion, 1974] A. M. Geoffrion, "Lagrangean Relaxation for Integer Programming". *Mathematical Programming Study*, vol. 2, pp. 82-114, 1974.

- [Green, 1992] R. Green and D. M. Newbery, "Competition in the British Electricity Spot Market". *Journal of Political Economy*, vol. 100, No.5, pp. 929-953, 1992.
- [Gross, 1996] G. Gross and D. J. Finlay, "Optimal Strategies in Competitive Electricity Markets". *12th PSCC Conference*, vol. 815-823, 1996.
- [Hadley, 1971] G. Hadley and M. C. Kemp, *Variational Methods in Economics*: Elsevier, 1971.
- [Harker, 1984] P. T. Harker, "A Variational Inequality Approach for the Determination of Oligopolistic Market Equilibrium". *Mathematical Programming*, vol. 30, pp. 105-111, 1984.
- [Harker, 1991] P. T. Harker, "Generalized Nash games and quasi-variational inequalities". *Euro. J. Oper. Res.*, vol. 54, pp. 81-94, 1991.
- [Harker, 1990] P. T. Harker and J. S. Pang, "Finite-Dimensional Variational Inequality and Nonlinear Complementary Problems: A Survey of Theory, Algorithms and Applications". *Mathematical Programming*, vol. 48, pp. 161-220, 1990.
- [Hartman, 1966] P. Hartman and G. Stampacchia, "On some Nonlinear Elliptic Differentiable Functional Equations". *Acta Math.*, vol. 115, pp. 271-310, 1966.
- [Hashimoto, 1985] H. Hashimoto, "A Spatial Nash Equilibrium Model," presented at 31st American Regional Science Association Meeting, Denver, Colorado, USA, 1985.
- [Hiyama, 1999] T. Hiyama and K. Tomsovic, "Current Status of Fuzzy System Applications in Power Systems," presented at Proceedings of the IEEE SMC99, Tokyo, Japan, 1999.
- [Hobbs, 1995] B. F. Hobbs, "Optimization methods for electric utility resource planning". *European Journal of Operation Research*, vol. 83, pp. 1-20, 1995.
- [Hobbs, 2001] B. F. Hobbs, "Linear Complementary Models of Nash-Cournot Competition in Bilateral and POOLCO Power Markets". *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 16, pp. 194-202, 2001.
- [Hobbs, 2000] B. F. Hobbs, C. B. Metzler, and J. S. Pang, "Calculating Equilibria in Imperfectly Competitive Power Markets: An MPEC Approach". *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 15, No. 2, pp. 638-645, 2000.
- [Hogan, 1997] W. W. Hogan, "A market power model with strategic interaction in electricity networks". *Technical report, Center for Business and Government, John F. Kennedy School of Government, Harvard University*, 1997.
- [Huang, 1997] C.-M. Huang, H. Yang, and C.-L. Huang, "Bi-Objective Power Dispatch Using Fuzzy Satisfaction-Maximizing Decision Approach". *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 12, No. 4, pp. 1715-1721, 1997.
- [Inuiguchi, 1992] M. Inuiguchi, H. Ichihashi, and Y. Kume, "Relationships between Modality Constrained Programming Problems and Various Fuzzy Mathematical Programming Problems". *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 49, No. 3, pp. 243-259, 1992.

- [Inuiguchi, 1993] M. Inuiguchi, H. Ichihashi, and Y. Kume, "Modality Constrained Programming Problems: A Unified Approach to Fuzzy Mathematical Programming Problems in the Setting of Possibility Theory". *Information Sciences*, vol. 67, pp. 93-126, 1993.
- [Inuiguchi, 2000] M. Inuiguchi and J. Ramik, "Possibilistic Linear Programming: A Brief Review of Fuzzy Mathematical Programming and a Comparison with Stochastic Programming in Portfolio Selection Problem". *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 111, pp. 3-28, 2000.
- [Inuiguchi, 1995] M. Inuiguchi and M. Sakawa, "A possibilistic linear program is equivalent to a stochastic linear program in a special case". *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 76, pp. 309-318, 1995.
- [Jing-Yuan, 1999] W. Jing-Yuan and Y. Smeers, "Spatial Oligopolistic Electricity Models with Cournot Generators and Regulated Transmission Prices". *Operations Research*, vol. 47, No 1, pp. 102-112, 1999.
- [Jorion, 1997] P. Jorion, *Value at Risk*. Mc Graw Hill, 1997.
- [Kacprzyk, 1988] J. Kacprzyk and M. Fedrizzi, "Combining Fuzzy Imprecision with Probabilistic Uncertainty in Decision-Making," in *Economics and Mathematical Systems*, vol. 310, J. Kacprzyk, Fedrizzi, M., Ed. Berlin: Springer-Verlag, 1988.
- [Kahn, 1998] E. Kahn, "Numerical techniques for analyzing market power in electricity". *The Electricity Journal*, pp. 34-43, 1998.
- [Kataoka, 1967] S. Kataoka, "Stochastic Programming, maximum probability model". *Hitosubasi Journal of Arts Sci.*, vol. 8, pp. 51-59, 1967.
- [Klemperer, 1989] P. D. Klemperer and M. A. Meyer, "Supply Function Equilibria in Oligopoly under Uncertainty". *Econometrica*, vol. 57, pp. 1243-1277, 1989.
- [Ku, 1995] A. Ku, "Modelling Uncertainty in Electricity Capacity Planning," in *London Business School*. London: University of London, 1995.
- [Lin, 1992] C. E. Lin, C. J. Huang, and C. L. Huang, "An Optimal Generator Maintenance Approach using Fuzzy Dynamic Programming," presented at IEEE/PES Summer Meeting, Paper 92SM401-OPWRS, Seattle, 1992.
- [Liu, 2002] B. Liu, *Theory and Practice of Uncertain Programming*. Heidelberg: Physica-Verlag, 2002.
- [Mantawy, 2002] A. H. Mantawy and Y. L. Abdel-Magid, "A new fuzzy unit commitment model and solution". *14th PSCC*, vol. Seccion 05, Paper 3, pp. 1-5, 2002.
- [Matos, 1993] M. A. Matos and M. T. Ponce de Leão, "Electric Distribution Systems Planning with Fuzzy Loads," presented at IFORS 93, Lisboa, 1993.
- [Miranda, 1990] V. Miranda, M. Matos, and J. T. Saraiva, "Fuzzy Load Flow New Algorithms Incorporating Uncertain Generation and Load Representation," presented at Proc. of 10th PSCC, Graz, 1990.
- [Miranda, 1992] V. Miranda and J. T. Saraiva, "Fuzzy Modeling of Power System Optimal Power Flow". *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 7, No. 2, 1992.

- [Momoh, 1995] J. Momoh, X. M. Ma, and K. Tomsovic, "Overview and Literature Survey of Fuzzy Set Theory in Power Systems". *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 10, No. 3, pp. 1676-1690, 1995.
- [Murto, 2003] P. Murto, "On investment, Uncertainty, and Strategic Interaction with Applications in Energy Markets." Helsinki: Helsinki University of Technology, 2003.
- [Neame, 2001] P. J. Neame, A. B. Philpott, and G. Pritchard, "Offer Stack Optimization in Electricity Pool Markets," in *Department of Engineering Science*. New Zealand: University of Auckland, 2001.
- [Oberguggenberger, 2002] O. Oberguggenberger and W. Fellin, "From Probability to Fuzzy Sets: The Struggle for Meaning in Geotechnical Risk Assessment," presented at Proceedings of Probabilistics in GeoTechnics: Technical and Economic Risk Estimation, Graz, Austria, Verlag Glückauf Essen, 2002.
- [OMEL, 2001] OMEL, "Reglas de Funcionamiento del Mercado de Producción de Energía Eléctrica," [http://www.omel.es/es/pdfs/reglas\\_mercado.pdf](http://www.omel.es/es/pdfs/reglas_mercado.pdf), 2001.
- [Padhy, 2000] N. P. Padhy, "Unit commitment using hybrid models: a comparative study for dynamic programming, expert system, fuzzy system and genetic algorithms". *Electrical Power and Energy Systems*, vol. 23, pp. 827-836, 2000.
- [Pereira, 2000] M. Pereira, "Coordinación Hidrotérmica de Largo Plazo en Sistemas Electricos de Libre Acceso," Curso Tutorial, IEEE, Venezuela, Caracas, 2000.
- [Pérez Arriaga, 1997] J. I. Pérez Arriaga, "La reestructuración del sector eléctrico". *Anales de Mecánica y Electricidad*, vol. LXXIV Fascículo IV, pp. 8-15, 1997.
- [Ponce de Leão, 1995a] M. T. Ponce de Leão, "Electric Distribution System Planning with Fuzzy Loads". *International Transactions in Operational Research*, vol. 2. No 1., pp. 389-395, 1995a.
- [Ponce de Leão, 1995b] M. T. Ponce de Leão and M. A. Matos, "Fuzzy Modelling of Independent Producers for Multicriteria Electric Distribution Planning," presented at IEEE/KTH Stockholm Power Conference, Stockholm, Sweden, 1995b.
- [Ponce de Leão, 1997] M. T. Ponce de Leão and M. A. Matos, "Distribution Planning with Fuzzy Loads and Independent Generation". *Conference CIRED*, pp. 1-5, 1997.
- [Rajamaran, 2001] R. Rajamaran, L. Kirsh, F. L. Alvarado, and C. Clark, "Optimal Self-Commitment under Uncertain Energy and Reserve Prices," in *The Next Generation of Electric Power Unit Commitment Models, International Series in Operations Research & Management Science*, M. H. R. B. F. Hobbs, R. P. O'Neill and H. P. Chao, Ed. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2001, pp. 93-116.
- [Ramos, 1990] A. Ramos, "Modelos de Explotación a Medio Plazo de la generación Eléctrica. Aplicaciones para el Sistema Español." *Tesis*, 1990.

- [Ramos, 1998] A. Ramos, M. Ventosa, and M. Rivier, "Modeling competition in electric energy markets by equilibrium constraints". *Utilities Policy*, vol. 7, pp. 233-242, 1998.
- [Reneses, 2004] J. Reneses, "Análisis de la Operación de los Mercados de Generación de Energía Eléctrica a Medio Plazo," in *Organización Industrial*. Madrid: Pontificia Comillas, 2004.
- [Reneses, 2001] J. Reneses, E. Centeno, and J. Barquín, "Computation and decomposition of marginal costs for a GENCO in a constrained competitive Cournot equilibrium". *IEEE Power Tech. Conference*, vol. 1, 2001.
- [Roman-Ubeda, 1991] J. Roman-Ubeda, "Reliability Assessment of Composite Power Systems containing mixed Hydro and Thermal Generation," in *Department of Electrical Engineering and Electronics*. Manchester: University of Manchester in the Institute of Science and Technology, 1991.
- [Rutherford, 1993] T. Rutherford, "MILES: A Mixed Inequality and Non-Linear Equation Solver". *GAMS-The solver Manual*. Washington DC: GAMS Development Corporation, 1993.
- [Rutherford, 1997] T. F. Rutherford, *MILES: A mixed inequality and nonlinear equation solver: GAMS The Solver Manuals*, 1997.
- [Scott, 1996] T. J. Scott and E. G. Read, "Modelling Hydro Reservoir Operation in a Deregulated Electricity Market". *International Transactions in Operational Research*, vol. 3, pp. 243-253, 1996.
- [Song, 2003] Y. Song, Y. Ni, F. S. Wen, Z. Hou, and F. F. Wu, "Conjectural Variation Based Bidding Strategy in Spot Markets: Fundamentals and Comparison with Classical Game Theoretical Bidding Strategies". *Electric Power Systems Research*, vol. 67, pp. 45-51, 2003.
- [Stackelberg, 1934] H. Stackelberg, "Markform and Gleingewicht". *Julius Springer*, 1934.
- [Stancu-Minasian, 1984] I. M. Stancu-Minasian, *Stochastic Programming with Multiple Objective Functions*. Romania: D. Reidel Publishing Company, 1984.
- [Stoft, 1997] S. Stoft, "Transmission rights and wrongs". *Elect. J.*, vol. 10, No.8, pp. 91-95, 1997.
- [Su, 1991] C. C. Su and Y. Y. Hsu, "Fuzzy Dynamic Programming: An Application to Unit Commitment". *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 6, No. 3, 1991.
- [Takayama, 1971] T. Takayama and J. J. Judge, *Spatial and Temporal Price Allocation Models*. Amsterdam: North Holland Publishing Co., 1971.
- [Tirole, 1988] J. Tirole, *The Theory of Industrial Organization*, The MIT Press. 1990. pp. 479. ed. Cambridge (USA), 1988.
- [Tomsovic, 2000] K. Tomsovic and M. Y. Chow, "Fuzzy Set Applications to Power Systems," in *IEEE Power Engineering Society Tutorial, IEEE PES TP-140-0, Chapters 1 and 3*, K. Tomsovic and M. Y. Chow, Eds., 2000.

- [Tomsovic, 1993] K. Tomsovic, G. Skugge, D. Sjelygren, and J. Bulbenko, "Seasonal Planning for Best Fuel Mix under Multiple Objectives using Fuzzy Mathematics," presented at Proceedings of ESAP, Belbourne, 1993.
- [Valenzuela, 2001] J. Valenzuela and M. Mazumdar, "Unit Commitment based on Hourly Spot Prices in the Electric Power Industry". 2001.
- [Vázquez, 2003] C. Vázquez, "Modelos de Casación de Ofertas en Mercados Eléctricos," in *Departamento de Electrotécnica y Sistemas*. Madrid: Universidad Pontificia Comillas, 2003.
- [Ventosa, 2000] M. Ventosa, "Modelado de la explotación de la generación en mercados eléctricos liberalizados mediante el problema complementario," in *Electrotecnia y Sistemas*: Pontificia Comillas de Madrid, 2000.
- [Ventosa, 1999] M. Ventosa, A. Ramos, and M. Rivier, "Modeling Profit Maximization in Deregulated Power Markets by Equilibrium Constraints," presented at 13th Power Systems Computation Conference (PSCC'99), Trondheim, Norway, 1999.
- [Ventosa, 2001] M. Ventosa, M. Rivier, and A. Ramos, "Revisión de las tendencias de modelado de la explotación de la generación en mercados de generación eléctrica". *7as Jornadas Hispano-Lusas de Ingeniería Eléctrica*, vol. 3, pp. 97-102, 2001.
- [Villar, 2001] J. Villar, E. F. Sánchez-Úbeda, A. Mateo, M. Casado, F. A. Campos, J. Mate, E. Centeno, S. Rubio, J. J. Marcos, and R. González, "SGO: Management information system for strategic bidding in electrical markets," presented at IEEE Power Tech. Conference, Porto, Portugal, 2001.
- [Vlaisavljevic, 1999] D. Vlaisavljevic, M. B. Djukanovic, D. J. Sobajic, and B. S. Babic, "Fuzzy Linear Programming Based Optimal Power System Rescheduling Including Preventive Redispatch". *IEEE transactions on Power Systems*, vol. 14 (2), pp. 525-531, 1999.
- [Von der Fehr, 1993] N. Von der Fehr and D. Harbord, "Spot Market Competition in the UK Electricity Industry". *The Economic Journal*, vol. 103, pp. 531-546, 1993.
- [Wei, 1999] J. Y. Wei and Y. Smeers, "Spatial Oligopolistic Electricity Models with Cournot Players and Regulators Transmission Prices". *Operations Research*, vol. 47, pp. 102-112, 1999.
- [Wen, 2001] F. S. Wen and A. K. David, "Oligopoly Electricity Market Production under Incomplete Information". *IEEE Power Engineering Review*, pp. 58-61, 2001.
- [Yan, 1997] H. Yan, "A Fuzzy Optimization-Based Method for Integrated Power System Scheduling and Inter-Utility Power Transaction with Uncertainties". *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 12, No.2, pp. 756-763, 1997.
- [Yang, 2002] L. Yang, F. Wen, F. F. Wu, Y. Ni, and Q. Jiaju, "Development of Bidding Strategies in Electricity Markets and Possible Remedies," presented at IEEE-PES/CSEE International Conference on Power Systems, Kunming, China, 2002.

- [Younes, 1999] Z. Younes and M. Ilic, "Generation Strategies for Gaming Transmission Constraints: Will the Deregulated Electric Power be an Oligopoly ?" *Decision Support Syst.*, vol. 24, No. 3-4, pp. 207-222, 1999.
- [Zadeh, 1995] L. A. Zadeh, "Probability Theory and Fuzzy Logic are Complementary rather than Competitive". *Technometrics*, vol. 37, pp. 271-276, 1995.

## 5. Enfoques primal y dual aplicados al mercado eléctrico

En este capítulo se proponen dos metodologías para la resolución de un modelo de mercado de electricidad bajo incertidumbre, basadas en las herramientas que proporciona la teoría de juegos posibilistas, descritas y analizadas en el capítulo tercero de esta tesis, así como en las que ofrece la teoría de desigualdades variacionales.

El modelo de mercado resuelto considera básicamente las mismas suposiciones y simplificaciones que el descrito en [Barquín, 2004], pero ha sido completado considerando incertidumbre en alguno de sus parámetros de entrada, como por ejemplo en los relacionados con las curvas de la demanda residual y de los costes de producción de los generadores. La incertidumbre se ha modelado mediante distribuciones de posibilidad de tipo  $LR$ , descritas en el capítulo segundo.

En concreto, las dos metodologías de resolución del modelo posibilista consisten en el planteamiento de dos modelos de mercado deterministas más sencillos, mediante la aplicación de los que se han denominado en el capítulo tercero enfoques primal y dual. Los modelos deterministas se han resuelto finalmente a través de varios algoritmos para problemas de desigualdades variacionales.



## 5.1 Organización del capítulo

En este capítulo se describe, en primer lugar, el modelo básico del mercado eléctrico bajo incertidumbre considerado en esta tesis, en donde se ha planteado un equilibrio de mercado cuando los agentes ofertan cantidades de potencia en lugar de curvas de oferta (equilibrio de Cournot), y en donde las curvas de la demanda residual y de los costes de producción son desconocidas.

Teniendo en cuenta el riesgo incurrido por los agentes en el mercado ante la incertidumbre, en los dos siguientes puntos se aplican los enfoques primal y dual propuestos en el capítulo tercero al modelo de equilibrio de mercado bajo incertidumbre. Como resultado de su aplicación se obtienen dos modelos de mercado deterministas cuyas ecuaciones de equilibrio, cuando se utiliza una medida de probabilidad para representar la incertidumbre, son significativamente más difíciles de obtener y de resolver que en el caso de utilizar distribuciones de posibilidad *LR*, incluso asumiendo en el modelado estocástico hipótesis poco realistas. Por ello, a continuación se propone una metodología de resolución para cada una de las ecuaciones obtenidas con el enfoque posibilista, que está basada en la ejecución de varios algoritmos para problemas de desigualdades variacionales.

Seguidamente se describe la extensión de los enfoques primal y dual al caso en que se modele un equilibrio de mercado en donde cada agente supone o conjetura que las ofertas de la competencia reaccionan ante sus propias ofertas (equilibrio en variaciones conjeturales), y cuando las ofertas son, al igual que en el equilibrio de Cournot, cantidades de potencia.

A continuación se completa el modelo posibilista del mercado analizado con la consideración de varios periodos temporales, la introducción de contratos entre empresas y la consideración de restricciones de explotación posibilistas. Se describen las modificaciones en las metodologías de resolución propuestas, que surgen ante estos nuevos complementos.

En el siguiente apartado se describen varias metodologías para la estimación de distribuciones de posibilidad de las curvas de la demanda residual de los generadores, que se han considerado desconocidas en el modelo de mercado. Las metodologías pueden utilizar información estadística, en el caso en que se disponga de la misma.

Finalmente, en los anexos se detallan las demostraciones matemáticas requeridas a lo largo de este capítulo, entre las que se encuentran la demostración de que la resolución del enfoque primal permite resolver el enfoque dual, y viceversa.

## 5.2 Equilibrio de Cournot con incertidumbre en los beneficios

La hipótesis básica del modelo de Cournot para la explotación de la generación a medio plazo en un entorno de competencia es que las estrategias de oferta de las empresas son las **cantidades de potencia a generar** en el mercado, que no dependen del precio marginal (por el momento se supone un único periodo temporal en donde la potencia es constante, por lo que se puede hablar indistintamente de potencia o energía). La formulación del equilibrio de Cournot consiste entonces en la maximización, en el sentido de Nash, del beneficio obtenido por cada agente. Este beneficio es función de las producciones de todos los generadores y está sujeto al cumplimiento de las restricciones que modelan la explotación de las centrales y grupos de generación para la obtención de una operación factible y adaptada a las características particulares de cada agente.

Si no se consideran otro tipo de ingresos y costes derivados de la gestión de la cartera de generación (como son los ingresos por contratos que comprometen una cantidad de energía a un precio, que se considerarán en el apartado 5.6.2), **el beneficio de un agente se obtiene como el precio del mercado multiplicado por la producción ofertada menos los costes de producción**. El **precio del mercado resulta de la curva de la demanda de electricidad**, que es la ligadura o nexo de unión de los problemas de maximización de los agentes, e impide la optimización independiente para cada agente de su propio problema de explotación. La formulación del equilibrio se muestra en la Figura 5. 1 de una manera similar a como se hace en [Ventosa, 2000].

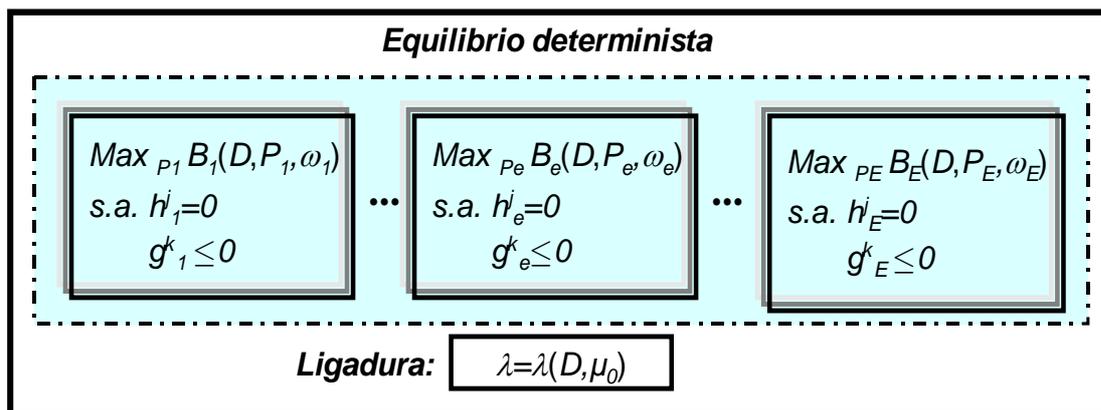


Figura 5. 1: Formulación del equilibrio determinista

En esta figura:

- $E$  es el número de empresas generadoras de electricidad en el mercado, también denominadas en esta tesis agentes del mercado, productores, empresas eléctricas, etc.
- La variable  $P_e$  es la producción total de cada agente  $e$ , que depende del modelado de sus centrales y grupos de generación (modelado de los embalses, de la potencia térmica, etc).
- La variable  $\lambda$  es el precio del mercado, que depende de la curva de la demanda  $\lambda = \lambda(D, \mu_0)$ , siendo  $D$  la suma de las cantidades producidas por cada agente, esto es  $D = \sum_e P_e$ , y siendo  $\mu_0$  el vector de parámetros de la curva de la demanda (pendientes, demanda a precio cero, etc). En el equilibrio de Cournot la curva de la demanda no puede ser inelástica, es decir, la demanda a satisfacer no puede ser independiente del precio del mercado  $\lambda$ , dado que en caso contrario  $\lambda$  quedaría indeterminado.
- La función  $B_e(D, P_e, \omega_e)$  representa el beneficio de cada agente  $e$  definido como el precio del mercado  $\lambda$  por la producción  $P_e$  menos los costes de producción  $C_e(P_e, c_e)$ , esto es,  $B_e(D, P_e, \omega_e) = \lambda(D, \mu_0) \cdot P_e - C_e(P_e, c_e)$ , siendo  $c_e$  el vector de parámetros de las curvas de costes de producción (costes variables de cada grupo de generación, etc), y  $\omega_e = (\mu_0, c_e)^T$  el vector conjunto formado por los vectores  $\mu_0$  y  $c_e$  (el superíndice T es el operador de trasposición de vectores o matrices).
- Las funciones  $h_e^j$  y  $g_e^k$  definen las restricciones de igualdad y desigualdad que modelan la explotación de la generación de cada agente, que dependen de las características técnicas de las centrales y grupos de generación (balance hidráulico, potencias máximas, etc), y también de algunas estrategias de mercado (producciones mínimas por grupo de generación, cuotas mínimas por generador, etc).

Como se ha mencionado en el capítulo anterior, en los mercados de electricidad la curva de la demanda de electricidad y los precios de los combustibles no son conocidos con precisión, por lo que el beneficio  $B_e(D, P_e, \omega_e)$  de cada generador es desconocido (en adelante, cualquier función cuyos parámetros sean inciertos tiene subrayado el identificador del vector de parámetros; si por simplicidad no se mostrasen, entonces la propia función aparece subrayada).

En contra de lo que ocurre en una situación idealizada en donde todos los agentes disponen de la misma información sobre el comportamiento de la demanda y de los costes de producción, cuando existe incertidumbre pueden considerarse distintas distribuciones esperadas por agente para los parámetros involucrados en el modelo. Así, el beneficio  $B_e(D, P_e, \underline{\omega}_e)$  esperado por el agente  $e$  resulta ser:

$$B_e(D, P_e, \underline{\omega}_e) = \lambda(D, \underline{\mu}_{e0}) \cdot P_e - C_e(P_e, \underline{c}_e) \quad e = 1, \dots, E \quad (5.1)$$

Siendo:

- $\underline{\mu}_{e0}$  el vector de parámetros de la curva de la demanda que espera el generador  $e$ .
- $\underline{c}_e$  el vector de parámetros de la curva de costes de producción que espera el generador  $e$ .
- $\underline{\omega}_e = (\underline{\mu}_{e0}, \underline{c}_e)^T$  el vector de parámetros conjunto formado por los vectores  $\underline{\mu}_{e0}$  y  $\underline{c}_e$ .

En esta situación, el equilibrio bajo incertidumbre se representa en la Figura 5. 2, en donde, de acuerdo a la anterior ecuación, la ligadura debida al precio de mercado se ha integrado en la formulación del beneficio. Además, por el momento se ha supuesto que las restricciones de explotación no están sujetas a incertidumbre (en el apartado 5.6.3 se estudia el caso de restricciones de explotación bajo incertidumbre, cuando la incertidumbre se modela mediante distribuciones de posibilidad).

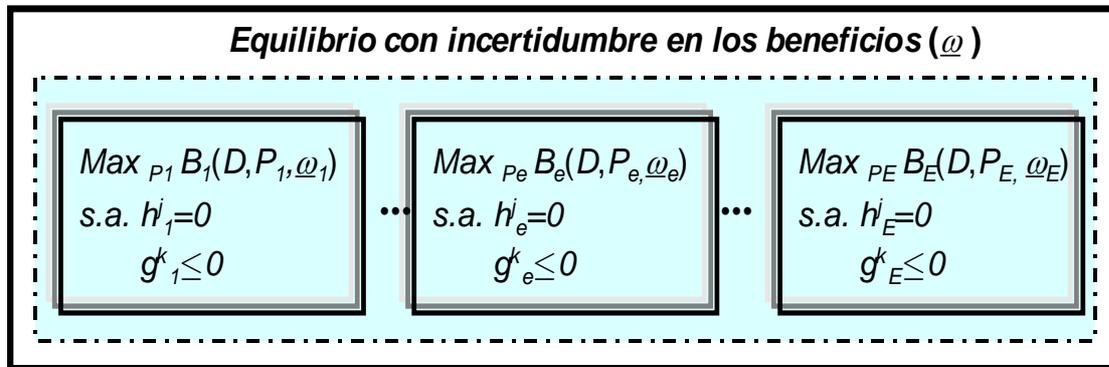


Figura 5. 2: Formulación del equilibrio con incertidumbre

La solución formal al modelo con incertidumbre mostrado en la Figura 5. 2 cuando se utiliza una medida de probabilidad para la representación de la incertidumbre consiste en encontrar la distribución de probabilidad de las potencias ( $P_1^*, \dots, P_E^*$ ) del equilibrio de Cournot  $P^*$ . Esta distribución puede ser calculada mediante **simulación probabilista**, optimizando el modelo de mercado para cada escenario de  $\underline{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_E)^T$ . En el caso en que el conjunto factible determinado por las restricciones de explotación sea un poliedro, y cuando el equilibrio para cada escenario se encuentre en los vértices del poliedro, la distribución de probabilidad para  $P^*$  es una distribución discreta sobre los vértices (ver Figura 5. 3).

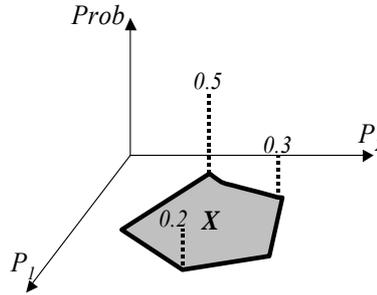


Figura 5. 3: Distribución de probabilidad del equilibrio de Cournot

Algo similar ocurre en el caso de utilizar una medida de posibilidad como modelo de incertidumbre, salvo que ahora el cálculo de la distribución de posibilidad discreta  $\pi$  para el equilibrio de Cournot  $P^*$  se realiza mediante el **principio de extensión** (ver capítulo segundo). En concreto, la distribución  $\pi(P^*)$  se obtiene a partir de la siguiente ecuación, que requiere, al igual que en el caso estocástico, de la resolución del modelo de mercado para cada escenario de  $\omega$ :

$$\pi(P^*) = \underset{\omega_{ers} = (\mu_{e0r}, c_{es})^T: P^* = \text{Arg} \left\{ \begin{array}{l} \text{Max}_{P_e} B_e(D, P_e, \omega_{ers}) \\ \text{s.a. } h_e^j = 0 \\ g_e^k \leq 0 \end{array} \right\}}{\text{Sup}} T(\pi_{\mu_{e0}}(\mu_{e0r}), \pi_{c_e}(c_{es})) \quad (5.2)$$

en donde el subíndice  $r$  del escenario  $\omega_{ers} = (\mu_{e0r}, c_{es})^T$  del parámetro posibilista  $\omega_e = (\underline{\mu}_{e0}, \underline{c}_e)^T$  se refiere a escenarios de la curva de la demanda, y el subíndice  $s$  a los de la curva de costes de producción, y en donde  $\text{Arg}\{\}$  es la función argumento, y  $\pi_{\mu_{e0}}$  y  $\pi_{c_e}$  las distribuciones de posibilidad de los parámetros  $\underline{\mu}_{e0}$  y  $\underline{c}_e$  respectivamente. Además  $T$  es una  $T$ -norma (en [Dubois, 1991] y en [Cucala, 2003] se muestra un análisis para guiar la selección de la  $T$ -norma más conveniente).

Sin embargo, existen dos inconvenientes importantes por los que el cálculo de la distribución de las potencias en el equilibrio  $P^*$  puede no resultar de interés:

- Por un lado, la distribución para  $P^*$  exige un gran número de optimizaciones del modelo, dificultando la obtención de la distribución en un tiempo razonable para la operación y la planificación de la generación. Este inconveniente se ve agravado cuando se tratan de resolver problemas reales de gran tamaño como los resueltos en el capítulo sexto.
- Por otro lado, cada agente necesita típicamente obtener decisiones numéricas que le ayuden a interpretar más fácilmente los resultados obtenidos, aunque este tipo de soluciones sean menos informativas que la solución formal resultado de aplicar la simulación probabilista o el principio de extensión.

Por todo ello, los enfoques de resolución propuestos en esta tesis pretenden encontrar una decisión de explotación numérica mediante la simplificación del modelo presentado en la Figura 5. 2, a través del planteamiento de un modelo de equilibrio determinista. Además, se va a considerar como medida de incertidumbre una **medida de posibilidad**.

Este enfoque basado en el planteamiento de modelos deterministas suele también utilizarse habitualmente cuando la incertidumbre se representa mediante distribuciones de probabilidad, como por ejemplo cuando se plantea un modelo determinista que maximiza el beneficio esperado al considerar un árbol de escenarios para  $\omega$  (ver por ejemplo [Reneses, 2004]).

En los dos siguientes apartados se describen dos enfoques para obtener dos modelos deterministas de equilibrio de Cournot que simplifican el modelo de equilibrio bajo incertidumbre representado en la Figura 5. 2. Estos enfoques son los introducidos en el capítulo tercero para resolver juegos  $K$ -personales posibilistas no cooperativos, y se han denominado enfoques **primal** y **dual**.

Como se verá, la aplicación de ambos enfoques al mercado de la electricidad requiere de la suposición de que **los agentes sean aversos al riesgo**, y cuando se considera una medida de posibilidad para representar la incertidumbre, da lugar a unas ecuaciones de equilibrio más fáciles de resolver que cuando se usa una medida de probabilidad.

### 5.3 El enfoque primal en el equilibrio de Cournot

Este apartado aplica el enfoque primal descrito en el capítulo tercero al modelo de equilibrio de Cournot bajo incertidumbre representado en la Figura 5. 2. Primeramente, se describe el planteamiento del enfoque cuando se considera una medida de incertidumbre genérica (descritas en el capítulo segundo), para luego analizar su aplicación cuando se consideran medidas de probabilidad y de posibilidad.

En lo que sigue se va a suponer que las distribuciones de los parámetros  $\underline{\mu}_{e0}$  y  $\underline{c}_e$  son continuas, por lo que la distribución del beneficio  $\underline{B}_e$  es también continua, una vez fijadas las decisiones de explotación.

#### 5.3.1 Definición y características generales del enfoque primal

En el **enfoque primal** el procedimiento propuesto para plantear un modelo de equilibrio de Cournot determinista que simplifique la complejidad del modelo de equilibrio bajo incertidumbre, se basa en suponer que cada agente, a la hora de optimizar sus estrategias, fija un umbral  $\alpha_{e0} \in [0,1)$  y maximiza el mayor beneficio determinista  $B_e^*$  tal que la certeza  $\Psi^{35}$  de tener beneficios menores sea menor o igual que  $\alpha_{e0}$ .

Por lo tanto, fijadas las potencias  $P_{-e}$  del resto de generadores ( $P_{-e} = \sum_{e' \neq e} P_{e'}$ , y por tanto  $D = P_{-e} + P_e$ ), el problema de maximización del agente  $e$  resulta ser:

$$\begin{aligned} & \underset{P_e, B_e^*}{\text{Max}} \left\{ B_e^* = \underset{B_e}{\text{Max}} B_e \right\} & (5.3) \\ & \text{s.a. } \Psi(B_e(D, P_e, \omega_e) \leq B_e) \leq \alpha_{e0} \\ & \quad h_j^e = 0 \\ & \quad g_k^e \leq 0 \end{aligned}$$

Obsérvese que cuanto mayor es el umbral  $\alpha_{e0}$  menor es la aversión al riesgo del generador (dado que más grande puede hacerse el beneficio  $B_e^*$ ). El caso  $\alpha_{e0} = 1$  conlleva a una situación absurda, dado que la restricción  $\Psi(B_e \leq B_e) \leq \alpha_{e0}$  siempre se satisface para cualquier valor de  $B_e$ , y por tanto  $B_e^*$  no está acotado.

<sup>35</sup>Se ha supuesto que la medida  $\Psi$  es idéntica por agente, aunque se podrían considerar medidas de incertidumbre distintas por generador.

Como es sabido, las **ecuaciones de Cournot que representan la casación en un mercado de medio plazo con remuneración a precio marginal** se formulan, de manera general, como sigue (ver referencias básicas del capítulo anterior):

$$\begin{aligned}\lambda &= \mu_e(P_1, \dots, P_E) \cdot P_e + CM_e(P_e, c_e) \quad e=1, \dots, E \\ \lambda &= \lambda(D, \mu_0) \\ D &= \underline{1}^T P\end{aligned}\tag{5.4}$$

en donde  $\mu_e(P_1, \dots, P_E)$  son las pendientes de las curvas de la demanda residual esperadas por los generadores, que en general dependen de las producciones de todos los agentes, y que en el equilibrio de Cournot coinciden con las pendientes de las curvas esperadas de la demanda. La función  $CM_e(P_e, c_e)$  es el coste marginal de cada agente, que es la derivada del coste de producción  $C_e(P_e, c_e)$  esperado, y  $\lambda(D, \mu_0)$  es una realización particular de un conjunto de curvas de demanda  $\lambda(D, \underline{\mu}_0)$  posibles en la casación, siendo  $\mu_0$  un vector de parámetros que define una realización particular del vector de parámetros incierto  $\underline{\mu}_0$  (que pueden ser pendientes, la ordenada en el origen, etc). Además  $\underline{1}$  y  $P$  son vectores  $E$ -dimensionales, el primero de los cuales tiene todos sus componentes iguales a 1 ( $\underline{1}^T = (1, \dots, 1)$ ), y el segundo tiene las producciones  $P_e$  de los agentes ( $P^T = (P_1, \dots, P_E)$ ), y por tanto  $\underline{1}^T P = \sum_e P_e$ , que es la condición que impone que la demanda  $D$  sea la suma de las producciones ofertadas por todos los agentes.

De cara a obtener las ecuaciones del equilibrio de Cournot según el enfoque primal, deben por tanto determinarse las pendientes  $\mu_e(P_1, \dots, P_E)$  de las curvas de la demanda residual y el coste marginal  $CM_e(P_e, c_e)$  que esperan los generadores de acuerdo al enfoque. En concreto, si el beneficio  $B_e^* = B_e(D, P_e, \omega_e^*)$  a maximizar se define a partir de las curvas de la demanda  $\lambda(D, \mu_{e0}^*)$  y de costes  $C_e(P_e, c_e^*)$ , esto es, si  $B_e^* = \lambda(D, \mu_{e0}^*) \cdot P_e - C_e(P_e, c_e^*)$  y  $\omega_e^* = (\mu_{e0}^*, c_e^*)^T$ , la pendiente  $\mu_e(P_1, \dots, P_E)$  resulta ser la derivada de la curva de la demanda  $\lambda(D, \mu_{e0}^*)$ , mientras que  $CM_e(P_e, c_e)$  es la derivada del coste de producción  $C_e(P_e, c_e^*)$ , ambas derivadas respecto de la potencia  $P_e$  del generador  $e$  (el resto de potencias  $P_{-e}$  permanecen fijas).

### 5.3.2 El enfoque primal probabilista

Para cualquier medida  $\Psi$  de certeza, la certeza  $\Psi$  de que los beneficios  $\underline{B}_e$  sean iguales a  $B_e$  ó iguales a beneficios menores coincide con la certeza  $\Psi$  de la unión de los sucesos ( $\underline{B}_e = B'_e$ ) para  $B'_e \leq B_e$ , esto es:

$$\Psi(\underline{B}_e \leq B_e) = \Psi\left(\bigcup_{B'_e \leq B_e} (\underline{B}_e = B'_e)\right)\tag{5.5}$$

Cuando la medida  $\Psi$  es una medida de probabilidad  $\Pr$ , la certeza de esta unión es la suma de probabilidades (por el axioma de aditividad que establece  $\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B)$  para subconjuntos  $A$  y  $B$  disjuntos), y por lo tanto las restricciones de probabilidad  $\Pr(\underline{B}_e \leq B_e) \leq \alpha_{e0}$  del enfoque primal son equivalentes a las siguientes, en donde  $f_{\underline{B}_e}$  es la función de densidad del beneficio  $\underline{B}_e$ :

$$\int_{B'_e \leq B_e} f_{\underline{B}_e}(B'_e) \leq \alpha_{e0} \tag{5.6}$$

Es decir,  $\Pr(\underline{B}_e \leq B_e) \leq \alpha_{e0}$  es equivalente a imponer que la función de distribución de probabilidad evaluada sobre  $B_e$  sea menor o igual que el nivel de riesgo  $\alpha_{e0}$ . Por tanto, dado que  $\underline{B}_e$  es continua<sup>36</sup>, maximizar el mayor beneficio  $B_e^*$  sujeto a la restricción probabilista es equivalente a maximizar el percentil  $B_e^*$  de grado  $100 \cdot \alpha_{e0}$  de la distribución del beneficio  $\underline{B}_e$  (ver Figura 5.4).

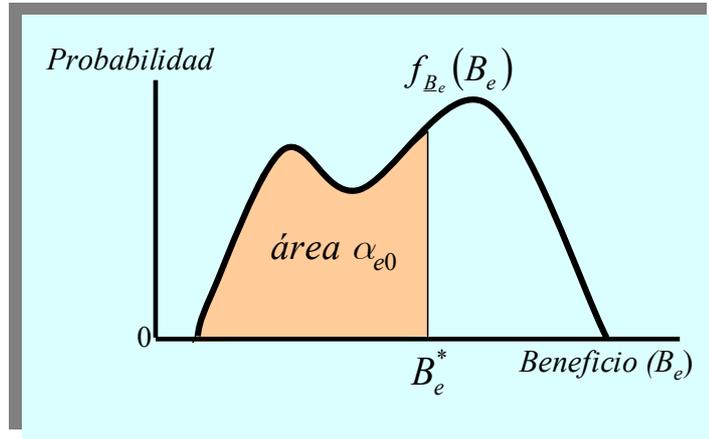


Figura 5.4: Enfoque primal probabilista

En este caso, los parámetros  $\omega_e^* = (\mu_{e0}^*, c_e^*)^T$  de las curvas  $\lambda(D, \mu_{e0}^*)$  y  $C_e(P_e, c_e^*)$  que definen el percentil  $B_e^*$  son tales que, para cada decisión  $P_e$  y manteniendo fijas las del resto de agentes  $P_{-e}$  en el  $100 \cdot \alpha_{e0}$  de los escenarios de  $\underline{\mu}_{e0}$  y de  $\underline{c}_e$ , los beneficios del agente son menores que con  $\mu_{e0}^*$  y  $c_e^*$ . Por lo tanto, en el  $100 \cdot (1 - \alpha_{e0})$  de los escenarios los beneficios serán mayores que con  $\mu_{e0}^*$  y  $c_e^*$ .

La distribución de probabilidad  $\Pr(\underline{B}_e \leq B_e)$  del beneficio, que en (5.6) se ha expresado como la integral de la función  $f_{\underline{B}_e}$  de densidad del beneficio  $\underline{B}_e$ , puede calcularse también sumando todas las probabilidades de los escenarios

<sup>36</sup>Aunque podría también analizarse el caso en el que la distribución de probabilidad para cada decisión de explotación no fuese continua. En este caso el procedimiento para determinar el beneficio  $B_e^*$  sería similar al caso continuo, salvo que la probabilidad de beneficios menores o iguales que  $B_e^*$  podría ser estrictamente menor que  $\alpha_{e0}$ .

$\omega_{ers}=(\underline{\mu}_{e0r}, \underline{c}_{es})^T$  de  $\underline{\omega}_e=(\underline{\mu}_{e0}, \underline{c}_e)^T$  que dan lugar a beneficios menores o iguales que  $B_e$ , esto es:

$$\Pi(B_e \leq B_e) = \int_{\omega_{ers}: B_e(D, P_e, \omega_{ers}) \leq B_e} f_{\underline{\mu}_{e0}, \underline{c}_e}(\underline{\mu}_{e0r}, \underline{c}_{es}) \quad (5.7)$$

siendo  $f_{\underline{\mu}_{e0}, \underline{c}_e}$  la función de densidad conjunta de los parámetros estocásticos  $\underline{\mu}_{e0}$  y  $\underline{c}_e$ .

Cuando se considera cualquier tipo de distribuciones de probabilidad en las variables aleatorias en  $\underline{\omega}_e$ , la distribución de probabilidad del beneficio  $B_e$ , y por tanto el percentil  $B_e^*$ , resultan difíciles de calcular. Una de las simplificaciones típicas que permite resolver este inconveniente es la suposición de variables aleatorias normales e independientes. En este caso, puede probarse que el beneficio  $B_e$  es una distribución normal cuya esperanza  $E[\cdot]$  y varianza  $V[\cdot]$  son las siguientes:

$$\begin{aligned} E[B_e(D, P, \underline{\omega}_e)] &= E[\lambda(D, \underline{\mu}_{e0})] \cdot P_e - E[C_e(P_e, \underline{c}_e)] \\ V[B_e(D, P, \underline{\omega}_e)] &= V[\lambda(D, \underline{\mu}_{e0})] \cdot (P_e)^2 + V[C_e(P_e, \underline{c}_e)] \end{aligned} \quad (5.8)$$

El percentil a optimizar resulta ser entonces:

$$B_e^* = E[B_e(D, P, \underline{\omega}_e)] - k(\alpha_{e0}) \cdot \sqrt{V[B_e(D, P, \underline{\omega}_e)]} \quad (5.9)$$

siendo  $k(\alpha_{e0})$  el valor tal que la probabilidad de que una variable aleatoria normal de media cero y varianza uno (normal estándar) sea menor o igual que  $k(\alpha_{e0})$ , es igual a  $100 \cdot \alpha_{e0}$  (el valor  $k(\alpha_{e0})$  puede obtenerse de las tablas de la normal estándar, mostradas en la mayoría de los libros básicos de probabilidad).

A pesar de las suposiciones de normalidad e independencia, en esta tesis no se ha encontrado un procedimiento que permita determinar el vector  $\omega_e^*$  resultante de aplicar el enfoque primal con una medida de probabilidad, debido a que la expresión del percentil  $B_e^*$  y de su derivada respecto de la potencia  $P_e$ , incluso en el caso de suponer linealidad en cada posible curva de la demanda y de costes<sup>37</sup> (como se considerará en el enfoque posibilista), es significativamente compleja (aparece la derivada de una raíz cuadrada que da como resultado una función cociente compleja).

A lo largo de los siguientes epígrafes se mostrará cómo la utilización de distribuciones de posibilidad *LR* para representar la incertidumbre y la suposición de linealidad en las curvas de la demanda y de los costes, resultan en una expresión del

<sup>37</sup>En este caso la esperanza del beneficio es el beneficio con los parámetros esperados.

beneficio  $B_e^*$  más sencilla, que va a permitir obtener las ecuaciones del equilibrio de Cournot según el enfoque primal.

### 5.3.3 El enfoque primal posibilista

Cuando la medida  $\Psi$  es una medida de posibilidad  $\Pi$ , las integrales que aparecen en el enfoque estocástico se convierten en supremos por el axioma de no aditividad de  $\Pi$  (que establece  $\Pi(A \cup B) = \text{Max}(\Pi(A), \Pi(B))$ , ver capítulo segundo). En esta situación las restricciones de posibilidad  $\Pi(\underline{B}_e \leq B_e) \leq \alpha_{e0}$  del enfoque primal son equivalentes a las siguientes (ver Figura 5. 5 para una representación del grado de posibilidad  $\Pi(\underline{B}_e \leq B_e)$ ):

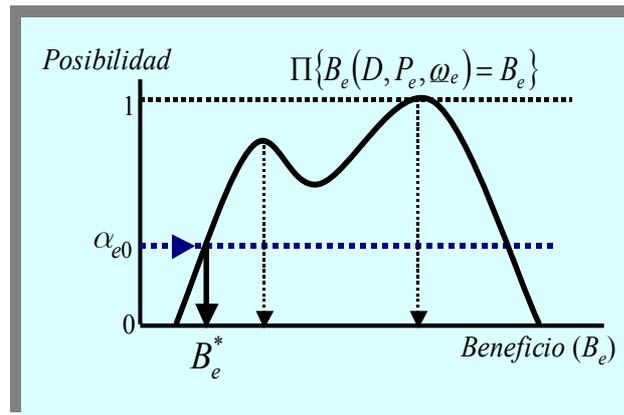
$$\text{Sup}_{B'_e \leq B_e} \Pi(B_e = B'_e) \leq \alpha_{e0} \tag{5.10}$$

Al ser la distribución  $\underline{B}_e$  continua,  $B_e^*$  es el beneficio con grado de posibilidad  $\alpha_{e0}$  tal que no existe otro beneficio menor con grado de posibilidad mayor que  $\alpha_{e0}$  (ver Figura 5. 5), por lo que  $B_e^*$  se obtiene como resultado de considerar las dos siguientes condiciones:

$$B_e^* = \text{Arg} \left\{ \text{Sup}_{B'_e \leq B_e} \Pi(B_e = B'_e) \leq \alpha_{e0} \right\} \tag{5.11}$$

$$\Pi(B_e = B_e^*) = \alpha_{e0}$$

**Distribución de posibilidad**



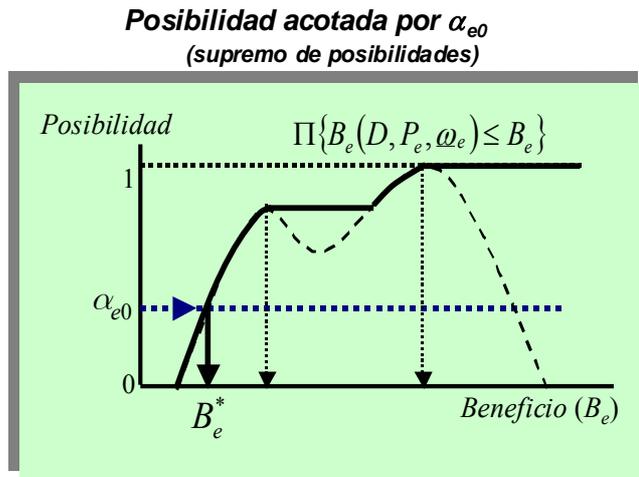
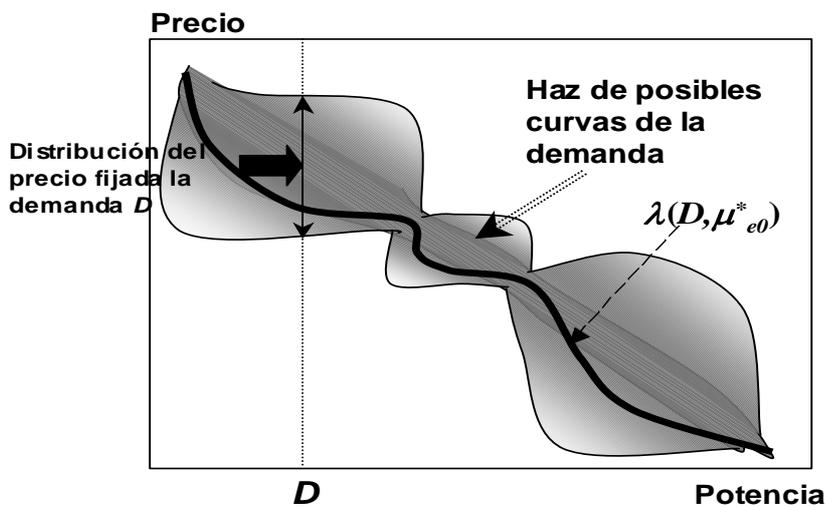


Figura 5. 5: Enfoque primal posibilista

Bajo estas condiciones, puede construirse un algoritmo que determina las curvas de la demanda  $\lambda(D, \mu^*_{e0})$  y de los costes  $C_e(P_e, c^*_e)$  que definen el beneficio  $B^*_e$ , cuando se consideran cualesquiera conjuntos de curvas de la demanda y de costes posibles (en el Anexo 5.1.6 se describe el algoritmo cuando el conjunto de curvas de la demanda posibles se estima a partir de información estadística). A modo de ejemplo, en la Figura 5. 6 se muestran un par de conjuntos de curvas de la demanda posibles, en donde con un color más oscuro se han representado curvas con grados de posibilidad más altos. En el primer gráfico no se supone ninguna condición acerca de la disposición de las curvas, mientras que en el segundo todas las curvas pasan por dos puntos de casación esperados. En la figura se representa también la curva de la demanda  $\lambda(D, \mu^*_{e0})$  que resultaría de la aplicación del algoritmo. Puede observarse que  $\lambda(D, \mu^*_{e0})$  separa curvas que proporcionan precios altos de curvas que proporcionan precios bajos.



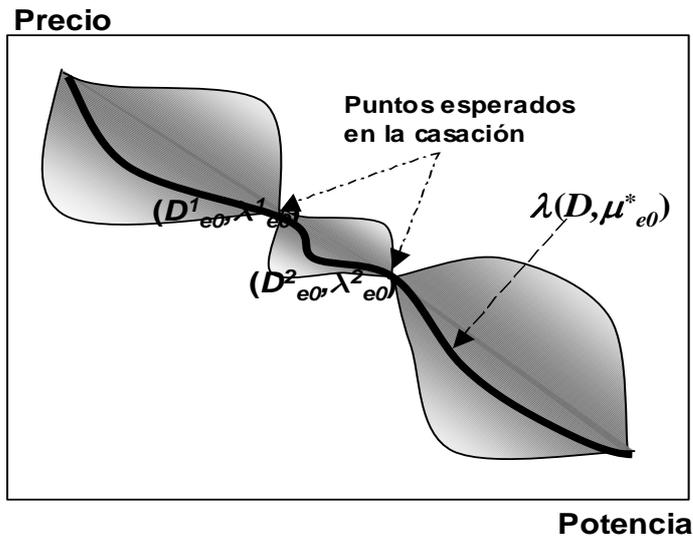


Figura 5. 6: Conjunto de curvas de la demanda posibles

Una vez determinadas las curvas  $\lambda(D, \mu^*_{e0})$  y  $C_e(P_e, c^*_e)$ , en esta tesis se han propuesto varios algoritmos para el cálculo del equilibrio primal (en caso de existir). Las únicas condiciones requeridas por los algoritmos para su convergencia (que puede ser local como ocurre en el enfoque dual) es que en el equilibrio las curvas  $\lambda(D, \mu^*_{e0})$  y  $C_e(P_e, c^*_e)$  sean cóncava y convexa respectivamente, respecto de la producción  $P_e$ . Sin embargo, los tiempos para la operación y planificación de la explotación pueden verse comprometidos con muchas de las curvas admisibles, o incluso por la complejidad del algoritmo que las calcula (como ya se ha dicho, descrito en el Anexo 5.1.6). Además, el cálculo de las distribuciones de posibilidad de las salidas del modelo de equilibrio puede también dilatar los tiempos de operación y planificación (ver primer gráfico de la Figura 5. 6 para un ejemplo de la distribución de posibilidad del precio demandado). Por estos motivos, en adelante se suponen las siguientes condiciones, que mejoran la viabilidad en los cálculos mencionados:

- Las curvas de la demanda posibles son lineales y pasan todas ellas por un punto esperado de casación  $(D_{e0}, \lambda_{e0})$  (por lo tanto se supone un conjunto de curvas similar al representado en la Figura 5. 6, salvo que ahora todas las curvas pasan por un único punto  $(D_{e0}, \lambda_{e0})$ ; además las curvas son lineales).
- Las curvas de costes posibles son lineales (se podrán considerar además varios grupos de generación por empresa).
- Las pendientes  $\mu_{e0}$  de las curvas de la demanda y los costes variables  $c_e$  de las curvas de costes de producción son distribuciones de posibilidad LR.

La condición de linealidad de las curvas para cada escenario ya ha sido considerada en otros trabajos relacionados, como por ejemplo en [Hashimoto, 1985], [Wen, 2001], [Song, 2003] y [Barquín, 2004] (y también en el análisis de la expansión de la generación, ver [Murphy, 2002]), al considerarla adecuada para un análisis a medio plazo. Por otro lado, la condición de que todas las curvas pasan por un punto de casación esperado es adecuada si lo que se pretende es analizar el comportamiento del mercado en un entorno esperado de la casación, y también suele suponerse en la mayor parte de los trabajos que proponen modelos de mercado a medio plazo. Además de estas dos condiciones, la suposición de distribuciones de posibilidad *LR* para representar la incertidumbre permite calcular muy fácilmente, entre otras, la distribución de posibilidad del beneficio  $\Pi(\underline{B}_e = B_e)$ , que en general es compleja dado que se tiene que aplicar directamente el principio de extensión, que se traduce en la siguiente operación<sup>38</sup>:

$$\Pi(\underline{B}_e = B_e) = \underset{\omega_{ers}: B_e = B_e(D, P_e, \omega_{ers})}{Sup} T(\pi\mu_{e0}(\mu_{e0r}), \pi c_e(c_{es})) \quad (5.12)$$

Sin embargo, es importante hacer notar que aunque a lo largo de este capítulo se van a suponer las tres anteriores condiciones, los algoritmos propuestos en esta tesis permiten calcular equilibrios cuando las curvas de la demanda y de los costes son conocidas, y cóncavas y convexas respectivamente, lo que puede considerarse una de las aportaciones originales de esta tesis para el caso en que no se considere incertidumbre en las entradas del modelo de equilibrio. No obstante, esta contribución excluye lógicamente las conclusiones relacionadas con el análisis de las distribuciones de posibilidad de las salidas, que se describen a continuación.

### 5.3.4 Demanda, costes y beneficios posibilistas *LR*

En adelante se va a suponer que **la curva de la demanda  $\lambda(D, \underline{\mu}_{e0})$  esperada por cada generador es una curva lineal que varía en torno a un punto hipotético de casación  $(D_{e0}, \lambda_{e0})$ , por el efecto provocado de considerar que la pendiente  $\underline{\mu}_{e0}$  es un número posibilista de tipo *LR* con funciones de referencia  $L_e$  y  $R_e$  (ver Figura 5.7), esto es:**

$$\begin{aligned} \underline{\mu}_{e0} &= \{\mu_{e0}^1, \mu_{e0}^2, \mu_{e0}^3, \mu_{e0}^4\}_{LR} \\ \lambda(D, \underline{\mu}_{e0}) &= \lambda_{e0} + \underline{\mu}_{e0} \cdot (D_{e0} - D) \end{aligned} \quad (5.13)$$

<sup>38</sup>Se recuerda que en el caso de distribuciones de probabilidad la *T*-norma se sustituía por una función de densidad conjunta (ver ecuación (5.7)).

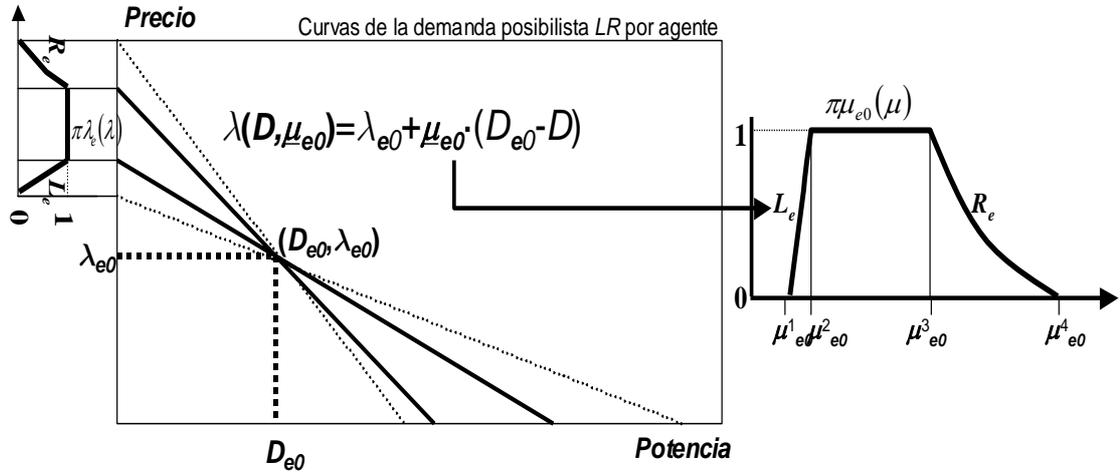


Figura 5. 7: Curvas de la demanda LR de cada agente

En adelante se considera que además se cumple:

$$\mu_{e0}^1 < \mu_{e0}^2 \leq \mu_{e0}^3 < \mu_{e0}^4 \quad (5.14)$$

La consideración de distribuciones de posibilidad no degeneradas para la pendiente de la curva de la demanda, que tolera grados de posibilidad menores que uno, es razonable en cualquier modelo de Cournot bajo incertidumbre, dado que gran parte de la variabilidad del precio se debe a la forma de la curva de la demanda ([Day, 2002]).

Aplicando entonces el principio de extensión (ver ecuación (2.31)) para calcular la distribución de posibilidad de los precios demandados  $\underline{\lambda}_e = \lambda(D, \underline{\mu}_{e0})$ , se obtiene una distribución de tipo LR que depende del signo de la diferencia  $D_{e0} - D$  (dado que  $D_{e0} - D$  multiplica a la distribución  $\underline{\mu}_{e0}$  y puede tener cualquier signo). En concreto, los vértices de la distribución para cada demanda  $D$  son:

$$\underline{\lambda}_e = \{\lambda_e^1, \lambda_e^2, \lambda_e^3, \lambda_e^4\}_{LR} \quad (5.15)$$

$$\lambda_e^i = \begin{cases} \lambda(D, \mu_{e0}^i) & \text{si } D \leq D_{e0} \\ \lambda(D, \mu_{e0}^{4-i+1}) & \text{si } D \geq D_{e0} \end{cases} \quad i = 1, \dots, 4$$

Las funciones de referencia  $L_e$  y  $R_e$ , que en la distribución de  $\underline{\mu}_{e0}$  determinaban los grados de posibilidad para las pendientes  $[\mu_{e0}^1, \mu_{e0}^2]$  y  $[\mu_{e0}^3, \mu_{e0}^4]$  respectivamente, ahora determinan los grados para los precios  $[\lambda_e^1, \lambda_e^2]$  y  $[\lambda_e^3, \lambda_e^4]$ , cuando la demanda  $D$  es menor o igual que la esperada  $D_{e0}$ , y los grados para  $[\lambda_e^3, \lambda_e^4]$  y  $[\lambda_e^1, \lambda_e^2]$ , cuando

ocurre lo contrario (en este último caso la función de referencia  $L_e$  es una función de tipo “Right” mientras que  $R_e$  es una función de tipo “Left”, ver capítulo segundo).

Por otro lado, dado que los costes de producción de cada agente son la suma de los costes de producción de sus grupos de generación (algunos de los cuales pueden ser centrales), denotados con subíndice  $g$ , las variables reales de decisión son las potencias  $P_g$  de cada grupo, en lugar de la producción total  $P_e$  de la empresa (las potencias  $P_g$  a su vez se obtienen por medio de restricciones de explotación como función de otras variables de decisión, como son los niveles de reservas en el caso de los grupos hidráulicos, ver apartado 5.6.3). Se denota entonces  $P_e \equiv \{P_g, g \in e\}$ .

En adelante se supone que los **costes de producción de cada grupo son lineales**, y que **los costes variables  $\underline{c}_g$  son números LR** ( $\underline{c}_e \equiv \{\underline{c}_g, g \in e\}$ ) **con funciones de referencia  $L_e$  y  $R_e$** <sup>39</sup>. Por lo tanto, la curva de costes de producción es lineal a trozos (ver Figura 5. 8 en donde se han supuesto tres grupos de generación tales que  $\underline{c}_{g1} \leq \underline{c}_{g2} \leq \underline{c}_{g3}$ ) y se formula como sigue:

$$\underline{c}_g = \{c_g^1, c_g^2, c_g^3, c_g^4\}_{LR} \tag{5. 16}$$

$$C_e(P_e, \underline{c}_e) = \sum_{g \in e} \underline{c}_g \cdot P_g$$

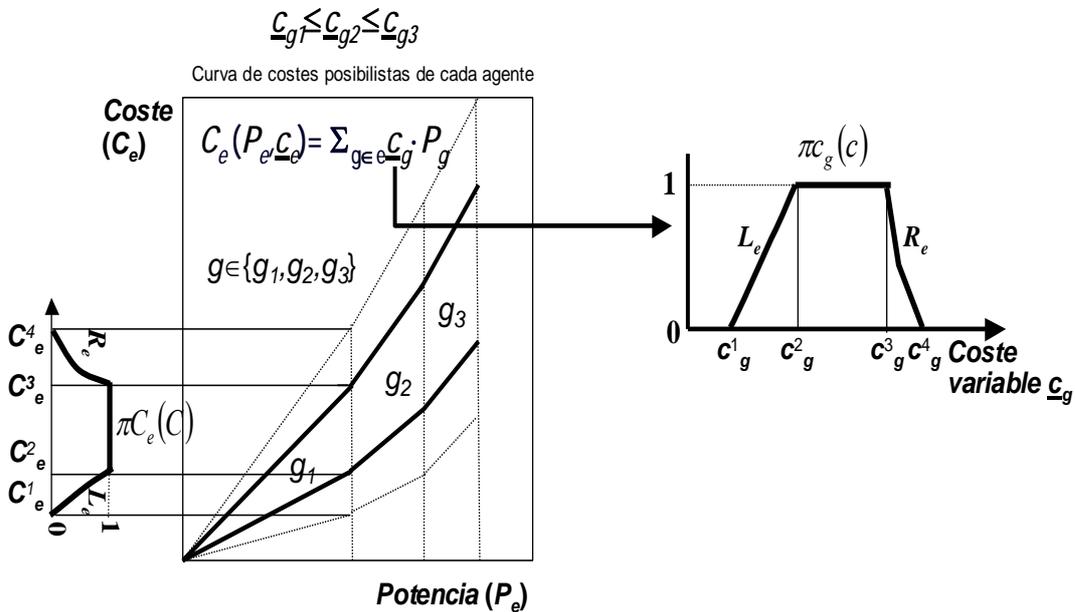


Figura 5. 8: Curvas de costes LR de cada agente

<sup>39</sup>Se ha supuesto que las funciones de referencia de los costes variables de los grupos coinciden con las utilizadas en las pendientes de las curvas de la demanda, lo que simplifica la interpretación y formulación de los costes y de los beneficios posibilistas LR.

Aplicando el principio de extensión (ver ecuaciones (2. 27) y (2. 31)) para determinar la distribución de posibilidad de la función de coste  $\underline{C}_e = C_e(P_e, \underline{c}_e)$  se obtiene una distribución de tipo *LR* con las funciones de referencia  $L_e$  y  $R_e$ , cuyos vértices son:

$$\begin{aligned} \underline{C}_e &= \{C_e^1, C_e^2, C_e^3, C_e^4\}_{LR} \\ C_e^i &= C_e(P_e, c_e^i) = \sum_{g \in e} c_g^i \cdot P_g \quad i = 1, \dots, 4 \end{aligned} \quad (5. 17)$$

En este caso, ni los vértices ni las funciones de referencia de la distribución del coste dependen del valor de ninguna variable de decisión pues la potencia  $P_g$  que multiplica a la distribución  $\underline{c}_g$  es siempre mayor o igual que cero.

Volviendo a aplicar el principio de extensión, la distribución de posibilidad para los beneficios  $\underline{B}_e = \lambda_e \cdot P_e - \underline{C}_e$  es también de tipo *LR*, con las funciones de referencia  $L_{Be}$  y  $R_{Be}$  y los vértices  $\{B_e^1, B_e^2, B_e^3, B_e^4\}_{LR}$  resultantes de aplicar la ecuación (2. 29)<sup>40</sup> y de considerar las distribuciones descritas en (5. 15) y (5. 17). En concreto, el resultado de la aplicación cuando las funciones de referencia  $L_e$  y  $R_e$  coinciden (lo que no implica que las distribuciones de posibilidad de  $\underline{\mu}_{e0}$  y  $\underline{c}_e$  sean simétricas), conlleva a que las funciones de referencia  $L_{Be}$  y  $R_{Be}$  coinciden con  $L_e$  y  $R_e$  respectivamente, y a que los vértices de la distribución del beneficio  $\underline{B}_e$  son los siguientes:

$$\begin{aligned} \underline{B}_e &= \{B_e^1, B_e^2, B_e^3, B_e^4\}_{LR} \\ B_e^i &= \begin{cases} \lambda(D, \mu_{e0}^i) \cdot P_e - C_e(P_e, c_e^{4-i+1}) & \text{si } D \leq D_{e0} \\ \lambda(D, \mu_{e0}^{4-i+1}) \cdot P_e - C_e(P_e, c_e^{4-i+1}) & \text{si } D \geq D_{e0} \end{cases} \quad i = 1, \dots, 4 \end{aligned} \quad (5. 18)$$

Obsérvese que el vértice  $B_e^i$  se obtiene considerando el coste variable  $c_e^{4-i+1}$  en lugar del coste  $c_e^i$  pues el coste de producción  $\underline{C}_e$  aparece restando en la definición del beneficio. Además, dado que la distribución de posibilidad de la demanda depende del signo de la diferencia  $D_{e0} - D$ , los vértices de la distribución del beneficio también dependen de este mismo signo.

Tal y como se verá en el siguiente epígrafe, para la determinación del vector  $\omega_e^*$  no es necesario suponer la condición  $L_e = R_e$ , dado que el beneficio  $B_e^*$  puede expresarse independientemente de las funciones de referencia  $L_{Be}$  y  $R_{Be}$  (aunque la expresión más usual puede ser la mostrada en (5. 19)).

<sup>40</sup>Esta ecuación define la suma de distribuciones de posibilidad cuyas funciones de referencia no tienen porqué coincidir, tal y como ocurre con las funciones de referencia de las distribuciones de los ingresos netos y de los costes totales de producción.

### 5.3.5 El enfoque primal posibilista LR

Tal y como se ha probado la distribución de posibilidad del beneficio  $B_e(D, P_e, \omega_e)$  es de tipo LR para cada conjunto de decisiones de explotación. En esta situación el cálculo del beneficio  $B_e^* = B_e(D, P_e, \omega_e^*)$  a maximizar en el enfoque primal, y de las curvas de la demanda  $\lambda(D, \mu_{e0}^*)$  y de coste  $C_e(P_e, c_e^*)$  que definen  $B_e^*$ , se simplifica notablemente. Así, el beneficio  $B_e^*$ , que debe satisfacer las condiciones mostradas en (5.11), coincide con el **menor beneficio en el  $\alpha_{e0}$ -corte de la distribución  $B_e$** , esto es con:

$$B_e^* = B_e^2 - L_{B_e}^{-1}(\alpha_{e0}) \cdot (B_e^2 - B_e^1) \quad (5.19)$$

La existencia de  $B_e^*$  está garantizada, dado que el  $\alpha_{e0}$ -corte de cualquier distribución LR cuyas funciones de referencia son estrictamente decrecientes en  $[0,1]$  es siempre un intervalo cerrado (ver Figura 5.9).

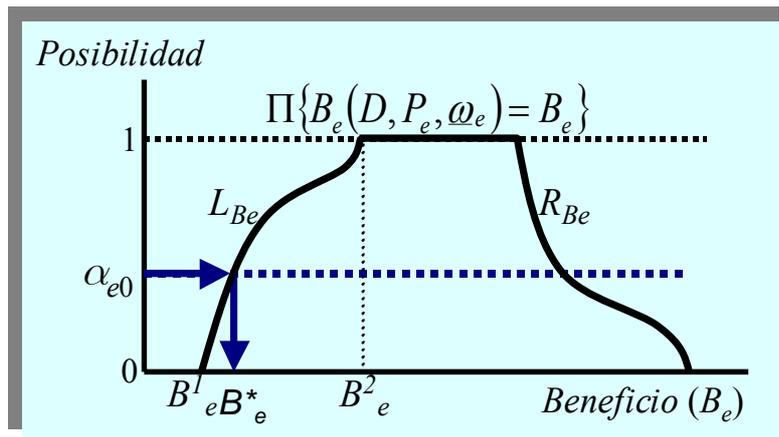


Figura 5.9: Determinación de  $B_e^*$  a maximizar en el enfoque primal LR

Alternativamente, para determinar el  $\alpha_{e0}$ -corte de la distribución del beneficio  $B_e$ , puede utilizarse el álgebra de intervalos con los  $\alpha_{e0}$ -cortes de las distribuciones de la pendiente  $\mu_{e0}$  y de los costes variables  $c_e$ . El beneficio  $B_e^* = B_e(D, P_e, \omega_e^*)$  se expresa en este caso en función de los extremos izquierdos de los  $\alpha_{e0}$ -cortes, siendo:

$$\begin{aligned} \omega_e^* &= (\mu_{e0}^*, c_e^*)^T \quad (5.20) \\ \mu_{e0}^*(D, \alpha_{e0}) &= \begin{cases} \mu_{e0}^2 - L_e^{-1}(\alpha_{e0}) \cdot (\mu_{e0}^2 - \mu_{e0}^1) & \text{si } D \leq D_{e0} \\ \mu_{e0}^3 + R_e^{-1}(\alpha_{e0}) \cdot (\mu_{e0}^4 - \mu_{e0}^3) & \text{si } D \geq D_{e0} \end{cases} \\ c_e^*(\alpha_{e0}) &= c_e^3 + R_e^{-1}(\alpha_{e0}) \cdot (c_e^4 - c_e^3) \equiv \{c_g^3 + R_e^{-1}(\alpha_{e0}) \cdot (c_g^4 - c_g^3), g \in e\} \end{aligned}$$

Como puede verse la pendiente de la demanda  $\mu_{e0}^*$  es función del signo de la diferencia  $D_{e0}-D$  y del nivel de riesgo  $\alpha_{e0}$ , mientras que los costes variables  $c_e^*$  dependen exclusivamente del nivel de riesgo  $\alpha_{e0}$ .

En lo que sigue se va a denotar por  $\mu1_{e0}(\alpha_{e0})$  y  $\mu2_{e0}(\alpha_{e0})$  a las pendientes de la demanda  $\mu^2_{e0}-L^{-1}_e(\alpha_{e0})\cdot(\mu^2_{e0}-\mu^1_{e0})$  y  $\mu^3_{e0}+R^{-1}_e(\alpha_{e0})\cdot(\mu^4_{e0}-\mu^3_{e0})$  respectivamente. La pendiente de la curva de la demanda  $\lambda(D, \mu^*_e)$  para cada valor de  $D$  resulta ser entonces:

$$\mu^*_e(D, \alpha_{e0}) = \begin{cases} \mu1_{e0}(\alpha_{e0}) & \text{si } D \leq D_{e0} \\ \mu2_{e0}(\alpha_{e0}) & \text{si } D \geq D_{e0} \end{cases} \quad (5.21)$$

Por tanto, al ser  $\mu1_{e0}(\alpha_{e0}) \neq \mu2_{e0}(\alpha_{e0})$ , la curva de la demanda esperada  $\lambda(D, \mu^*_e)$  es lineal en dos tramos, y dado que  $\mu1_{e0}(\alpha_{e0}) < \mu2_{e0}(\alpha_{e0})$ , además, es estrictamente cóncava (ver Figura 5. 10).

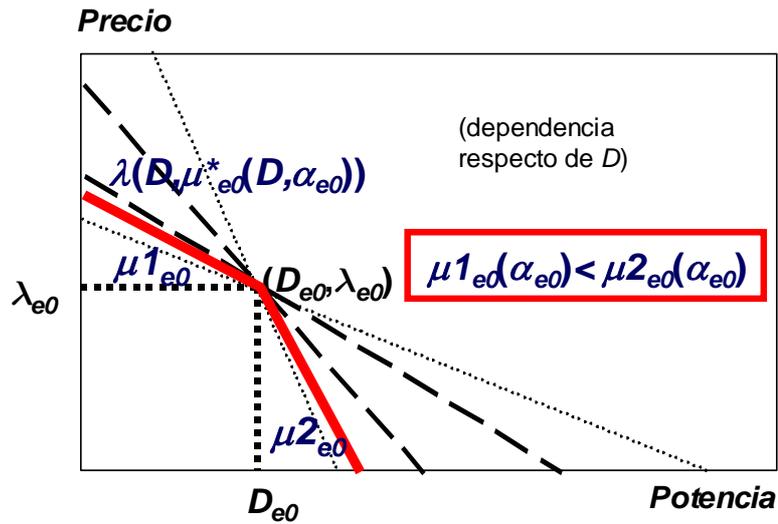


Figura 5. 10: Curva de la demanda a la que se enfrenta cada agente (caso lineal LR)

La propiedad de concavidad de la curva  $\lambda(D, \mu^*_e)$  hace que la resolución del problema de explotación de cada agente de lugar a precios de la electricidad a la baja en comparación con los proporcionados con otro tipo de curvas de la demanda  $\lambda(D, \mu^*_e)$  posibles (existen, sin embargo, un conjunto de curvas con una concavidad más pronunciada, por lo que los precios de mercado pueden ser aún menores).

Se denota ahora por  $c_g^*(\alpha_{e0})$  a los costes variables  $c^3_g+R^{-1}_e(\alpha_{e0})\cdot(c^4_g-c^3_g)$  por grupo utilizados en la definición de  $B_e^*$ , por lo que:

$$c_e^*(\alpha_{e0}) \equiv \{c_g^*(\alpha_{e0}), g \in e\} \tag{5.22}$$

Dado que  $c_g^4 \geq c_g^*(\alpha_{e0}) \geq c_g^3$ , la curva de costes esperada es una estimación al alza de la curva de costes posibles (ver Figura 5. 11, en donde se ha supuesto que los grupos están ordenados de menor a mayor coste  $c_g^*(\alpha_{e0})$ ). Por ello, en lo que sigue a la curva  $C_e(P_e, c_e^*(\alpha_{e0}))$  se la denominará **coste de producción  $\alpha_{e0}$ -pesimista**.

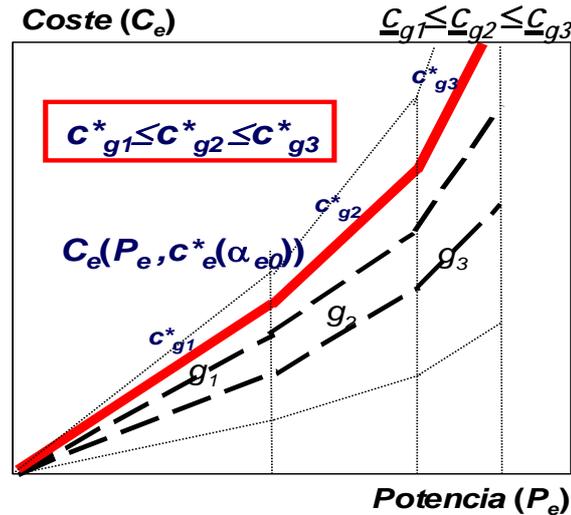


Figura 5. 11: Curva de costes a la que se enfrenta cada agente (caso lineal LR)

La obtención de curvas de la demanda que proporcionan precios de la electricidad reducidos, y de curvas de costes de producción con costes variables sobrevalorados, son resultados lógicos del enfoque primal al considerar que los agentes en el mercado tienen aversión al riesgo.

### 5.3.6 Ecuaciones del equilibrio primal posibilista LR

De cara a obtener las ecuaciones del equilibrio primal posibilista LR, a continuación se van a determinar las pendientes  $\mu_e(P_1, \dots, P_E)$  de las curvas de la demanda residual y el coste marginal  $CM_e(P_e, c_e)$ , que esperan los generadores de acuerdo al enfoque primal.

Como se ha probado, en el enfoque primal la curva de la demanda esperada por generador resulta ser:

$$\lambda(D, \mu_{e0}^*(D, \alpha_{e0})) = \begin{cases} \lambda(D, \mu_{1e0}(\alpha_{e0})) & \text{si } D \leq D_{e0} \\ \lambda(D, \mu_{2e0}(\alpha_{e0})) & \text{si } D \geq D_{e0} \end{cases} \tag{5.23}$$

Como se sabe, en el equilibrio de Cournot la demanda residual  $\lambda(P_e + P_{-e}, \mu_{e0}^*)$ , que se define para cada nivel de producción del resto de agentes  $P_{-e} = \sum_{e' \neq e} P_{e'}$ , es la curva resultante de desplazar  $P_{-e}$  unidades de potencia la curva de la demanda  $\lambda(D, \mu_{e0}^*)$  (ver Figura 5. 12).

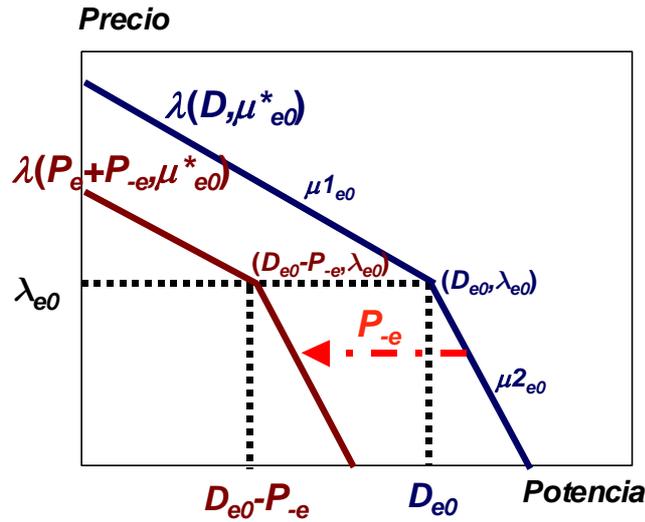


Figura 5. 12: Curva de la demanda residual a la que se enfrenta cada agente (caso lineal LR)

Por lo tanto, la pendiente de la demanda residual es independiente del nivel  $P_{-e}$  elegido, pero no lo es respecto del signo de la diferencia  $D - D_{e0}$ . En concreto, se tiene:

$$\mu_e(P_1, \dots, P_E) = \mu_{e0}^*(D, \alpha_{e0}) = \begin{cases} \mu1_{e0}(\alpha_{e0}) & \text{si } D \leq D_{e0} \\ \mu2_{e0}(\alpha_{e0}) & \text{si } D \geq D_{e0} \end{cases} \quad \left( D = \sum_{e=1}^E P_e \right) \quad (5. 24)$$

Una expresión equivalente de la pendiente de la demanda residual se obtiene en función de la diferencia entre precios  $\lambda - \lambda_{e0}$ , siendo  $\lambda$  el precio marginal del sistema, esto es:

$$\mu_e(P_1, \dots, P_E) = \mu_{e0}^*(\lambda, \alpha_{e0}) = \begin{cases} \mu1_{e0}(\alpha_{e0}) & \text{si } \lambda \geq \lambda_{e0} \\ \mu2_{e0}(\alpha_{e0}) & \text{si } \lambda \leq \lambda_{e0} \end{cases} \quad (\lambda = \lambda(D, \mu_0)) \quad (5. 25)$$

A lo largo de este capítulo, y por abuso de notación, no se va a hacer distinción alguna entre las pendientes  $\mu_{e0}^*$  de la demanda residual como función del precio  $\lambda$  o como función de la demanda  $D$ , aunque obviamente son funciones distintas.

Como se verá más adelante el decrecimiento de la pendiente  $\mu_{e0}^*$  respecto del precio marginal  $\lambda$  (o lo que es lo mismo, el crecimiento de  $\mu_{e0}^*$  respecto de la demanda satisfecha  $D$ ) es una condición suficiente para que el equilibrio primal sea un máximo de las funciones de beneficio, además de que, como se verá, mejora la eficiencia en la convergencia del algoritmo que resuelve las ecuaciones del equilibrio. Asimismo, es un resultado razonable dado que **modela el ejercicio del poder de mercado de los generadores cuando el precio marginal es más pequeño que el precio esperado**. Por el contrario, **cuando el precio marginal es mayor que el esperado, modela una menor capacidad del generador** por incrementar aun más los precios del mercado.

Es importante mencionar que la derivada de la curva de la demanda residual respecto de la potencia no existe cuando la demanda  $D$  coincide con la demanda esperada  $D_{e0}$  debido a que la curva  $\lambda(D, \mu_{e0}^*)$  tiene una singularidad en  $D_{e0}$ . Para evitar estos problemas de diferenciabilidad, y los surgidos cuando se comprueben las condiciones de segundo orden (ver ecuación (5. 28)), se puede aproximar la curva de la demanda  $\lambda(D, \mu_{e0}^*)$  por una curva  $\lambda(D, \mu_{e0}^*, \theta)$  que es dos veces diferenciable en un entorno de la demanda  $D_{e0}$ . El parámetro  $\theta$  es el parámetro de control de la aproximación (ver Figura 5. 13).

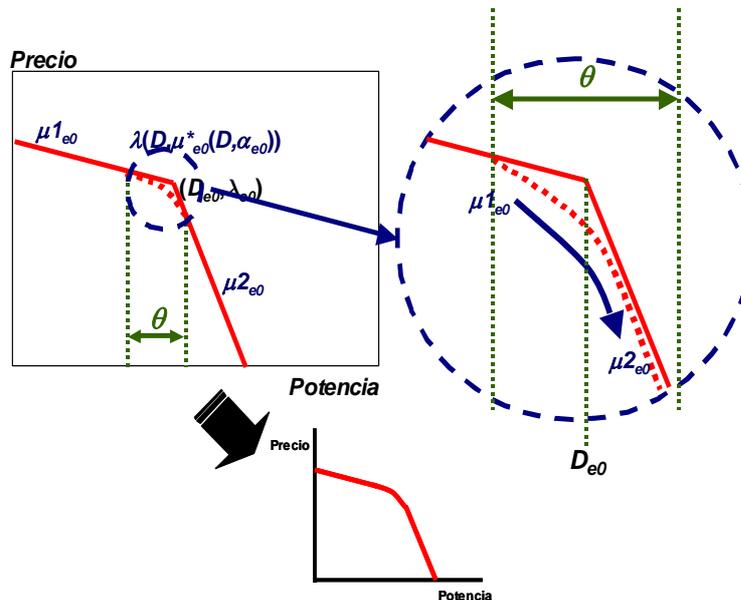


Figura 5. 13: Aproximación de la curva de la demanda

La aproximación propuesta se define tal que la pendiente  $\mu_{e0}^*$  es siempre menor o igual que  $\mu_{2e0}(\alpha_{e0})$  y mayor o igual que  $\mu_{1e0}(\alpha_{e0})$  para cualquier valor de la demanda, y siendo  $\mu_{e0}^*$  una función diferenciable y positiva (ver Figura 5. 14).

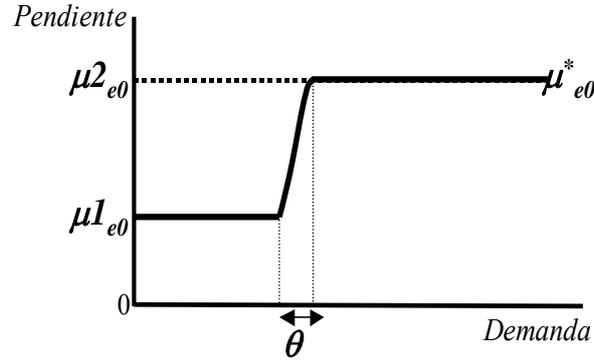


Figura 5. 14: Aproximación de la pendiente de la curva de la demanda

Por otro lado, en el enfoque primal la curva de costes esperada por generador es la curva de costes de producción  $\alpha_{e0}$ -pesimista, que resultaba ser:

$$C_e(P_e, c_e^*(\alpha_{e0})) = \sum_{g \in e} c_g^*(\alpha_{e0}) \cdot P_g \tag{5. 26}$$

siendo por tanto la curva de costes marginales  $CM_e(P_e, c_e)$  la derivada del coste de producción  $\alpha_{e0}$ -pesimista. En adelante a esta curva se la va a denotar como  $CM_e^*(P_e, \alpha_{e0})$  y se la denominará **coste marginal de producción  $\alpha_{e0}$ -pesimista**.

Problemas de diferenciabilidad similares a los descritos con la curva de la demanda, surgen con la derivada de la curva de costes de producción  $\alpha_{e0}$ -pesimista. El coste marginal es una función que no es continua (y por tanto, no es diferenciable) al ser la curva de costes lineal a tramos. Para evitar estos problemas de diferenciabilidad (y los surgidos en el análisis de las condiciones de segundo orden), la curva de costes marginales se va a aproximar por una curva diferenciable  $CM_e^*(P_e, \alpha_{e0}, \theta)$  (también se podría aproximar la curva de costes de producción por una curva dos veces diferenciable) en un entorno de sus puntos de discontinuidad. En la Figura 5. 15 se muestra una aproximación de la curva de costes marginales de un generador cuando se considera que la aproximación tiene puntos de inflexión en los puntos de discontinuidad. Por simplicidad, el parámetro de control de la aproximación coincide, además, con el parámetro  $\theta$  de la aproximación de la curva de la demanda.

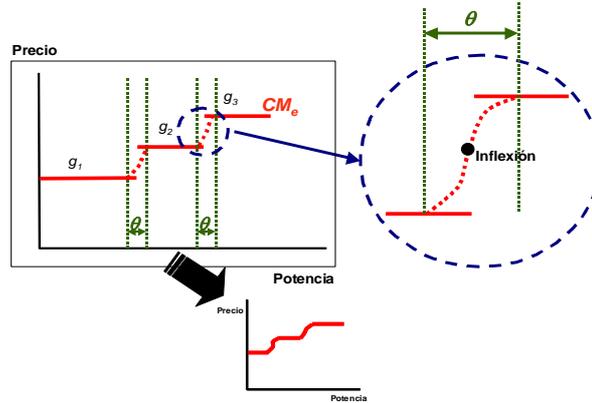


Figura 5. 15: Aproximación de la curva de costes marginales

Las **ecuaciones del equilibrio primal LR** son entonces las siguientes:

$$\begin{aligned} \lambda &= \mu_{e0}^*(\lambda, \alpha_{e0}, \theta) \cdot P_e + CM_e^*(P_e, \alpha_{e0}, \theta) \quad e=1, \dots, E \\ \lambda &= \lambda(D, \mu_0) \\ D &= \mathbf{1}^T P \end{aligned} \quad (5.27)$$

En estas ecuaciones las incógnitas son las producciones  $P_e$  de los agentes y la demanda  $D$  del sistema, que es la suma de las producciones  $P_e$ .

La condición de segundo orden para garantizar que las pendientes  $\mu_{e0}^*$  y los costes marginales  $CM_e^*$  resultan de la maximización de la función de beneficio  $B_e^*$ , se satisface dado que se cumple:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 B_e^*}{\partial P_e^2} &= \\ & -2 \cdot \mu_{e0}^*(D, \alpha_{e0}, \theta) - \frac{\partial \mu_{e0}^*(D, \alpha_{e0}, \theta)}{\partial P_e} \cdot P_e - \frac{\partial^2 C_e(P_e, c_e^*(\alpha_{e0}), \theta)}{\partial P_e^2} = \\ & -2 \cdot \mu_{e0}^*(D, \alpha_{e0}, \theta) - \frac{\partial \mu_{e0}^*(D, \alpha_{e0}, \theta)}{\partial D} \cdot \frac{\partial D}{\partial P_e} \cdot P_e - \frac{\partial^2 C_e(P_e, c_e^*(\alpha_{e0}), \theta)}{\partial P_e^2} = \\ & -2 \cdot \mu_{e0}^*(D, \alpha_{e0}, \theta) - \frac{\partial \mu_{e0}^*(D, \alpha_{e0}, \theta)}{\partial D} \cdot P_e - \frac{\partial^2 C_e(P_e, c_e^*(\alpha_{e0}), \theta)}{\partial P_e^2} < 0 \end{aligned} \quad (5.28)$$

La desigualdad anterior es cierta por la suposición de que el coste marginal  $CM_e^*(P_e, \alpha_{e0}, \theta)$  y la pendiente  $\mu_{e0}^*(D, \alpha_{e0}, \theta)$  son funciones crecientes y diferenciables en  $P_e$  y  $D$  respectivamente.

Cabe observar que el equilibrio  $P^*(\theta)^T=(P^*_1(\theta),\dots,P^*_E(\theta))$  definido por el sistema (5.27) y su comportamiento asintótico cuando el parámetro de control  $\theta$  tiende a cero (para que las aproximaciones sean exactas), define una solución  $P^{*T}=(P^*_1,\dots,P^*_E)$  para el caso en que la curva de la demanda y las curvas de costes de producción no sean diferenciables, siendo:

$$P^* = \lim_{\theta \rightarrow 0} P^*(\theta) \tag{5.29}$$

El problema del calculo de  $P^*$  (en el caso de existir) no ha sido abordado en esta tesis, considerando que una buena aproximación de  $P^*$  consiste en el cálculo de un equilibrio  $P^*(\theta)$  cuando  $\theta$  permanece fijo y es suficientemente pequeño. Por ello, en adelante se elimina de la formulación la dependencia que tiene la curva de la demanda y la función de coste marginal con respecto al parámetro de control  $\theta$ .

### 5.3.7 Consideración de las restricciones de explotación de los agentes

La teoría de la optimización señala que las **condiciones de optimalidad**, denominadas de **Karush-Kuhn-Tucker (KKT)** cuando se consideran las restricciones de explotación  $h^j_e=0$  y  $g^k_e \leq 0$  de cada generador y se trata de maximizar la función de beneficio  $B^*_e$  son las siguientes:

$$\left. \begin{array}{l} \nabla_{P_e} B^*_e + \sum_{j=1}^{m_e} \eta^j_e \cdot \nabla_{P_e} h^j_e + \sum_{k=1}^{n_e} \kappa^k_e \cdot \nabla_{P_e} g^k_e = 0 \\ \left. \begin{array}{l} h^j_e = 0 \quad j = 1, \dots, m_e \\ g^k_e \leq 0 \quad k = 1, \dots, n_e \\ \kappa^k_e \cdot g^k_e = 0 \quad k = 1, \dots, n_e \\ \kappa_e \leq 0 \end{array} \right\} e = 1, \dots, E \end{array} \right\} \tag{5.30}$$

Siendo  $m_e$  y  $n_e$  el número de restricciones de igualdad  $h^j_e=0$  y de desigualdad  $g^k_e \leq 0$  respectivamente, y siendo  $\eta_e=(\eta^j_e)$  y  $\kappa_e=(\kappa^k_e)$  los multiplicadores de Lagrange asociados a cada tipo de restricción.

En estas condiciones de optimalidad, dado que las restricciones de explotación  $g^k_e$  son de desigualdad del tipo  $\leq$  y dado que se trata de maximizar una función de beneficio, los multiplicadores  $\kappa^k_e$  asociados son negativos o nulos, mientras que los multiplicadores para las restricciones de igualdad pueden tener cualquier signo. Las restricciones  $\kappa_e \cdot g^k_e=0$  se denominan **condiciones de complementariedad de**

**holguras** que imponen la condición lógica de que cuando una restricción de desigualdad no está activa ( $g_e^k < 0$ ) la variable dual  $\kappa_e$  debe valer cero, y al contrario.

Por lo tanto, las ecuaciones del equilibrio primal cuando se consideran todas las restricciones de explotación de los generadores (ver 5.6.3) son las siguientes (obsérvese que se ha multiplicado por  $-1$  las  $E$  primeras ecuaciones de (5. 30)):

$$\left\{ \begin{array}{l} CM_e^*(P_e, \alpha_{e0}) + \mu_{e0}^* (\lambda_{\underline{1}}^T P, \mu_0, \alpha_{e0}) \cdot P_e - \lambda_{\underline{1}}^T P, \mu_0 - \sum_{j=1}^{m_e} n_e^j \cdot \frac{\partial h_e^j(P_e)}{\partial P_e} - \sum_{k=1}^{n_e} \kappa_e^k \cdot \frac{\partial g_e^k(P_e)}{\partial P_e} = 0 \\ h_e^j(P_e) = 0 \quad j = 1, \dots, m_e \\ g_e^k(P_e) \leq 0 \quad k = 1, \dots, n_e \\ \kappa_e^k \cdot g_e^k(P_e) = 0 \quad k = 1, \dots, n_e \\ \kappa_e \leq 0 \end{array} \right\} \quad e = 1, \dots, E \quad (5. 31)$$

En [Campos, 2005a] se propone una metodología de resolución de las anteriores ecuaciones para el caso particular en que los agentes son igualmente aversos al riesgo, y cuando  $D_{e0} = 0$  para cualquier agente  $e$ . La metodología está basada en el planteamiento de un problema de optimización cuadrático equivalente, que es similar al descrito en [Barquín, 2004].

En los siguientes apartados se propone un algoritmo que en cada iteración resuelve un problema de optimización cuadrático, que es también similar al descrito por Barquín, para resolver las ecuaciones de (5. 31). Este algoritmo no requiere que los agentes sean igualmente aversos al riesgos, ni que  $D_{e0}$  sea igual a 0.

### 5.3.8 Modelado del equilibrio primal LR utilizando desigualdades variacionales

El sistema (5. 31) no puede resolverse fácilmente debido a que las condiciones de complementariedad de holgura y el término  $\mu_{e0}^* \cdot P_e$  lo convierten en un sistema no lineal. Además, en el caso multiperiodo<sup>41</sup> la pendiente  $\mu_{e0}^*$  depende de las pendientes de periodos anteriores, impidiendo la resolución del sistema a través de la optimización independiente para cada periodo del modelo de [Barquín, 2004] y para cada una de las dos pendientes admisibles de  $\mu_{e0}^*$  (ver, para más detalle, el apartado 5.6.1).

<sup>41</sup>Situación en la que se consideran varios periodos temporales en los que se convocan mercados de generación.

Sin embargo, la teoría que relaciona los problemas de desigualdades variacionales y las condiciones de KKT va a permitir resolver este sistema de ecuaciones. Para ello se introducen a continuación algunos conceptos y resultados básicos de los problemas de desigualdades variacionales.

Un **problema de desigualdades variacionales** con región factible  $X \subseteq \mathfrak{R}^E$  no vacía y función  $F$  de  $\mathfrak{R}^E$  en  $\mathfrak{R}^E$ , denotado como **problema VI(X,F)**, trata de encontrar un vector  $P^{*T}=(P^*_1, \dots, P^*_E)$  en  $X$  tal que:

$$F(P^*)^T(P-P^*) \geq 0 \quad \forall P \in X \quad (5.32)$$

Obsérvese que, geométricamente, el problema de desigualdades variacionales consiste en la localización de un vector  $F(P^*)$  en  $X$  tal que forme un ángulo agudo con todos los vectores factibles que parten de  $P^* \in X$ . Se puede formalizar esta observación introduciendo el concepto de **cono normal de X en P\***.

El **cono normal C(P\*,X) de X en P\* ∈ X** es el conjunto formado por todos los vectores  $D \in X$  que forman un ángulo no agudo con todos los vectores que parten de  $P^* \in X$ . Matemáticamente  $C(P^*, X)$  resulta ser:

$$C(P^*, X) = \{D \in X : (P - P^*)^T D \leq 0, \forall P \in X\} \quad (5.33)$$

Cada vector en  $C(P^*, X)$  es denominado **vector normal al conjunto X en P\***.

Por lo tanto,  $P^*$  resuelve  $VI(X,F)$  si y solo si  $-F(P^*)$  es un vector normal a  $X$  en  $P^*$ , es decir, si y solo si  $-F(P^*) \in C(P^*, X)$  (ver Figura 5.16 para el caso en que  $X$  es un poliedro y cuando  $P^*$  está en uno de sus vértices; obsérvese que en esta situación  $C(P^*, X)$  se determina con los dos vectores que parten de  $P^*$  y que son perpendiculares a las aristas continuas a  $P^*$ ).

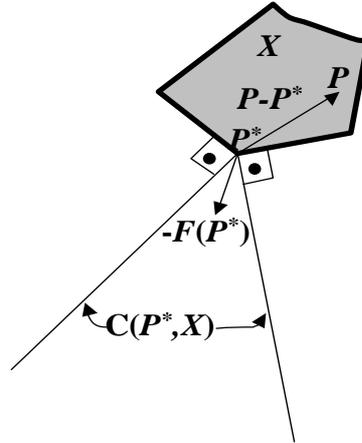


Figura 5. 16: Solución geométrica de un problema de desigualdades variacionales

Sea entonces, para el problema que se pretende resolver en esta tesis, la función  $F: \mathcal{R}^E \rightarrow \mathcal{R}^E$  definida como:

$$F = (F_1, \dots, F_E) \quad (5.34)$$

$$F_e(P) = CM_e^*(P_e, \alpha_{e0}) + \mu_{e0}^* \left( \lambda(\mathbf{1}^T P, \mu_0), \alpha_{e0} \right) \cdot P_e - \lambda(\mathbf{1}^T P, \mu_0) \quad e = 1, \dots, E$$

Si las funciones  $g_e^k$  son convexas y las funciones  $h_e^j$  afines (lo que es cierto dado que  $g_e^k$  y  $h_e^j$  son lineales, como se comenta en el apartado 5.6.3) se puede probar que el sistema (5.31) es equivalente a la resolución del problema de desigualdades variacionales  $VI(X, F)$  en donde el conjunto  $X$  es el conjunto de restricciones de explotación de todos los agentes (ver [Facchinei, 2003]), es decir:

$$X = \{P : h_e^j(P_e) = 0, g_e^k(P_e) \leq 0, j = 1, \dots, m_e, k = 1, \dots, n_e, e = 1, \dots, E\} \quad (5.35)$$

Esta equivalencia permite utilizar la **teoría de existencia y unicidad de soluciones de los problemas de desigualdades variacionales**, resumida en el apartado 3 de [Harker, 1990], para analizar las condiciones de existencia y unicidad del equilibrio primal. En este sentido, por un lado, en el Anexo 5.1.1 se demuestra la existencia de solución de las ecuaciones de equilibrio mostradas en (5.31). Por otro lado, en el Anexo 5.1.2 se muestra un caso ejemplo en que la función  $F$ , que ha sido definida en este apartado, no satisface las condiciones suficientes que garantizan la unicidad del equilibrio primal, lo que significa que el equilibrio puede no ser único.

### 5.3.9 Resolución de las ecuaciones primales LR utilizando un algoritmo para desigualdades variacionales

Una vez se ha analizado la existencia y unicidad del equilibrio primal, el siguiente paso consiste en encontrar el equilibrio, que es una solución al problema  $VI(X, F)$  descrito en el apartado anterior.

Un enfoque general para resolver un problema de desigualdades variacionales  $VI(X, F)$  consiste en crear una secuencia  $\{Z^k\} \subseteq X$  tal que la solución  $Z^k$  resuelva un problema de desigualdades variacionales  $VI(X, F^k)$ , es decir:

$$F^k(Z^k)^T (P - Z^k) \geq 0 \quad \forall P \in X \quad (5.36)$$

donde  $F^k$  es una aproximación de  $F$ , y en donde se espera una menor complejidad en la resolución del problema  $VI(X, F^k)$  que en la del problema original  $VI(X, F)$ . Por ello, a  $VI(X, F^k)$  se le suele denominar subproblema de desigualdades variacionales.

Cuando la **aproximación** es **lineal** la función  $F^k(P)$  suele responder a la siguiente forma:

$$F^k(P) = F(P^k) + S(P^k) \cdot (P - P^k) \quad P \in X \quad (5.37)$$

siendo  $S(P^k)$  una matriz de tamaño  $E \times E$  y siendo  $\{P^k\}$  una determinada secuencia generada en la región  $X$  a la vez que  $\{Z^k\}$ .

Diferentes elecciones de la matriz  $S(P^k)$  dan lugar a diferentes algoritmos con propiedades distintas. Así, por ejemplo, cuando  $S(P^k)$  es la matriz Jacobiana de  $F$  en  $P^k$  se obtiene el **algoritmo de Newton para problemas de desigualdades variacionales**, con convergencia cuadrática en el caso en que la matriz Jacobiana de  $F$  sea lipschitziana y continua (ver para más detalle [Harker, 1990]).

Una **generalización de los algoritmos de aproximación lineal** se muestra en [Solodov, 2001] en donde la función  $F^k(P)$  responde al siguiente modelo:

$$F^k(P) = F(P^k) + S_k(P^k, P) \quad P \in X \quad (5.38)$$

siendo  $S_k: \mathbb{R}^E \times \mathbb{R}^E \rightarrow \mathbb{R}^E$  una función con unas propiedades especiales en cuanto a su acotación (ver para más detalle [Solodov, 2001]).

A continuación se describe la función  $F^k$  considerada en esta tesis, que responde al modelo de Solodov, y que permite resolver cada subproblema  $VI(X, F^k)$  mediante un

modelo de optimización cuadrático similar al mostrado en [Barquín, 2004], que además tiene solución óptima dado que su función de coste es convexa.

La función  $F^k$  considerada en esta tesis se define de igual forma que la función  $F$  mostrada en (5. 34) salvo que la pendiente  $\mu_{e0}^*$  es ahora independiente del precio y salvo que  $F^k$  incorpora un término  $rM_e$  que es lineal en la producción  $P_e$ . En concreto,  $F^k$  se define como sigue:

$$\begin{aligned} F^K(P) &= CM(P) + A(P^k, P) - rM(P^k, P, \alpha) & (5. 39) \\ F^K &= (F_1^k, \dots, F_E^k), CM = (CM_1, \dots, CM_E) \\ A &= (A_1, \dots, A_E), rM = (rM_1, \dots, rM_E) \end{aligned}$$

siendo:

$$\begin{aligned} F_e^k(P) &= CM_e(P_e) + A_e(P^k, P) - rM_e(P_e^k, P_e, \alpha) & (5. 40) \\ CM_e(P_e) &= CM_e^*(P_e, \alpha_{e0}) \\ A_e(P^k, P) &= \mu_{e0}^* \left( \lambda \left( \mathbb{1}^T P^k, \mu_0 \right), \alpha_{e0} \right) \cdot P_e - \lambda \left( \mathbb{1}^T P, \mu_0 \right) \\ rM_e(P_e^k, P_e, \alpha) &= \alpha \cdot (P_e^k - P_e) \end{aligned}$$

y en donde  $\{P^{kT} = (P_1^k, \dots, P_E^k)\} \subseteq X$  es la secuencia generada por el algoritmo con punto inicial  $P^l$  seleccionado arbitrariamente en  $X$  y  $\alpha > 0$ <sup>42</sup> es un parámetro positivo tal que:

$$\alpha \geq \frac{K}{\varepsilon} + \theta \quad (5. 41)$$

siendo  $\varepsilon > 0$  una tolerancia para la norma de la diferencia de los vectores  $P$  y  $P^k$ ,  $\theta > 0$  un parámetro positivo cualquiera, y siendo <sup>43</sup>:

$$K = \text{Max}_{e=1, \dots, E} \{ \mu_{2e0}(\alpha_{e0}) - \mu_{1e0}(\alpha_{e0}) \} \cdot \text{Max}_{e=1, \dots, E} \{ pc_e \} \cdot \sqrt{E} \quad (5. 42)$$

En adelante la norma  $\|\bullet\|$  utilizada es la norma usual, es decir  $\|P\|^2 = P^T P$ .

<sup>42</sup>No confundir  $\alpha$  con los niveles de riesgo  $\alpha_{e0}$  fijados por los generadores en el enfoque primal, ni con el grado de posibilidad  $\alpha$  que típicamente se utiliza para denotar a un  $\alpha$ -corte de una distribución de posibilidad. Además, dado que  $\alpha$  multiplica a la diferencia entre potencias  $P_e^k - P_e$ , tiene las mismas unidades que la pendiente de la demanda residual.

<sup>43</sup>Obsérvese que el valor del parámetro  $K$  es estrictamente positivo dado que las distribuciones de posibilidad de las pendientes de la demanda residual son no degeneradas (ver ecuación (5. 14)).

El algoritmo propuesto en esta tesis es parecido al descrito en [Solodov, 2001] y las condiciones generales para su convergencia son también muy similares (ver apartado 5.3.13 para una descripción de las diferencias fundamentales). Así pues, para garantizar la convergencia se requiere, en cada iteración, el cumplimiento de la siguiente condición (ver [Solodov, 2001]):

$$F(Z^k)^T (P^* - Z^k) \leq 0 \quad (5.43)$$

siendo  $Z^k \in X$  la solución del subproblema  $VI(X, F^k)$  y siendo  $P^*$  el equilibrio primal.

Por simplificar la descripción del algoritmo propuesto en este apartado se supondrá que la condición formulada en (5.43) se satisface para cualquier solución  $Z^k$  del subproblema  $VI(X, F^k)$ . En el apartado 5.3.10 se introducirá una modificación del algoritmo para generar una sucesión  $\{Z^k\}$  que satisface la condición mencionada, y que es una de las aportaciones originales de la tesis.

Por otro lado, como se demuestra en el Anexo 5.1.3, para la función  $F$  definida en este apartado la sucesión  $\{Z^k\}$  además satisface:

$$F(Z^k)^T (P^k - Z^k) > 0 \quad (5.44)$$

en donde  $P^k \in X$  es el conjunto de producciones que define el subproblema  $VI(X, F^k)$ .

De esta forma el hiperplano  $H(Z^k)$  definido como:

$$H(Z^k) = \{P \in \mathfrak{R}^E : F(Z^k)^T (P - Z^k) = 0\} \quad (5.45)$$

separa el punto  $P^k \in X$  del equilibrio primal  $P^*$  (ver ecuaciones (5.43) y (5.44)). Por lo tanto, moviendo  $P^k$  en la dirección del hiperplano  $H(Z^k)$  decrece la distancia a la solución  $P^*$ .

El siguiente lema permite definir una serie de puntos  $\underline{P}^k(\beta_k)$  ( $\beta_k \in (0,2)$ ) en la dirección del hiperplano  $H(Z^k)$ , que resultan estar más cerca de  $P^*$  que el punto  $P^k$ . Se muestra, además, la relación existente entre las distancias de  $\underline{P}^k(\beta_k)$  a  $P^*$  y de  $P^k$  a  $P^*$ .

**Lema (ver [Solodov, 2001]).** Sean  $P \in \mathfrak{R}^E$  y  $Z \in X$  cualesquiera dos puntos que satisfacen:

$$F(Z)^T (P - Z) > 0 \quad (5.46)$$

y sea, para  $\beta \in (0,2)$  el siguiente vector de producciones<sup>44</sup>:

$$\underline{P}(\beta) = P - \beta \cdot \frac{F(Z)^T (P - Z)}{\|F(Z)\|^2} \cdot F(Z) \tag{5.47}$$

Entonces, para cualquier solución  $P^*$  de  $VI(X,F)$ , se cumple:

$$\|\underline{P}(\beta) - P^*\| \leq \|P - P^*\| - \beta \cdot (2 - \beta) \cdot \left( \frac{F(Z)^T (P - Z)}{\|F(Z)\|} \right)^2 \tag{5.48}$$

El algoritmo consta por lo tanto de los siguientes pasos.

Paso 0. Inicialización.

Hacer  $k=1$ . Elegir  $\varepsilon > 0$ ,  $\theta > 0$  cualesquiera y  $P^k$  un punto arbitrario en  $X$ . Sea  $\alpha$  tal que:

$$\alpha \geq \frac{K}{\varepsilon} + \theta \tag{5.49}$$

Paso 1. Resolución del subproblema  $VI(X, F^k)$ .

Encontrar  $Z^k \in X$  tal que:

$$F^k(Z^k)^T (P - Z^k) \geq 0 \quad \forall P \in X \tag{5.50}$$

Paso 2. Comprobación de la optimalidad.

Si  $\|P^k - Z^k\| < \varepsilon$  entonces parar,  $Z^k$  resuelve el problema  $VI(X,F)$ .

Paso 3. Búsqueda lineal.

Elegir  $\beta_k \in (0,2)$  y hacer:

$$\underline{P}^k(\beta_k) = P^k - \beta_k \cdot \frac{F(Z^k)^T (P^k - Z^k)}{\|F(Z^k)\|^2} \cdot F(Z^k) \tag{5.51}$$

Hacer  $P^{k+1} = Pr_X(\underline{P}^k(\beta_k))$ , siendo  $Pr_X()$  la proyección sobre el conjunto factible  $X$ ,  $k=k+1$  e ir al paso 1.

<sup>44</sup>Vector por tanto determinista, aunque aparezca subrayado.

Para la comprensión del algoritmo propuesto caben realizar los siguientes comentarios:

- **Comentarios relacionados con el subproblema  $VI(X, F^k)$ .** Como se verá en el apartado 5.3.11, en el paso 1, al fijar en cada iteración la demanda  $\underline{1}^T P$  en el valor  $\underline{1}^T P^k$ , el producto  $\mu^*_{e0}(\underline{1}^T P, \alpha_{e0}) \cdot P_e$  se linealiza permitiendo que el subproblema  $VI(X, F^k)$  pueda ser resuelto fácilmente mediante un modelo de optimización cuadrático similar al descrito en [Barquín, 2004].
- **Comentarios relacionados con la convergencia del algoritmo.** En el paso 2, cuando se requiere la condición  $\|Z^k - P^k\| < \varepsilon$  lo que se pretende es asegurar la convergencia de la sucesión  $\{\|Z^k - P^k\|\}$  a 0, o lo que es lo mismo, de la sucesión  $\{F^k\}$  a  $F$ , para que en el paso al límite de (5. 50), y por la continuidad de  $F^k$ , se tenga:

$$F(P^*)^T (P - P^*) \geq 0 \quad \forall P \in X \quad (5. 52)$$

$$P^* = \lim_{k \rightarrow \infty} P^k = \lim_{k \rightarrow \infty} Z^k$$

y por lo tanto, si las sucesiones  $\{Z^k\}$  y  $\{P^k\}$  convergen, deben de hacerlo necesariamente a una solución  $P^*$  de  $VI(X, F)$ .

Para demostrar formalmente la convergencia de la sucesión  $\{\|Z^k - P^k\|\}$  a 0 y de las sucesiones  $\{Z^k\}$  y  $\{P^k\}$ , resulta necesario que la sucesión  $\{Z^k\}$  generada por el algoritmo satisfaga la condición mostrada en (5. 43). En el siguiente apartado se describe una modificación del algoritmo propuesto para el caso en que pueda no cumplirse esta condición. Supuesto que se cumple, en el Anexo 5.1.3 se prueba la convergencia de la sucesión  $\{\|Z^k - P^k\|\}$  a 0, y se asegura la convergencia de las sucesiones  $\{Z^k\}$  y  $\{P^k\}$ .

- **Comentarios relacionados con la búsqueda lineal.** Por último, el paso 3 tiene por objeto mover el punto  $P^k$  en la dirección del hiperplano  $H(Z^k)$ . Como ya se ha comentado, este movimiento permite decrecer la distancia de  $P^k$  a la solución  $P^*$  del problema  $VI(X, F)$ , dado que  $H(Z^k)$  separa el punto  $P^k$  de  $P^*$ . Cuando  $\beta_k = 1$  el punto  $\underline{P}^k$  resultante del movimiento es la proyección de  $P^k$  en el hiperplano  $H(Z^k)$ , mientras que una elección de  $\beta_k$  en el intervalo (1,2) o en (0,1) corresponde, respectivamente, con lo que se denomina **supra-relajación** de la búsqueda lineal, (el punto  $\underline{P}^k$  traspasa el hiperplano  $H(Z^k)$ ) e **infra-relajación** ( $\underline{P}^k$  no traspasa  $H(Z^k)$ , ver Figura 5. 17).

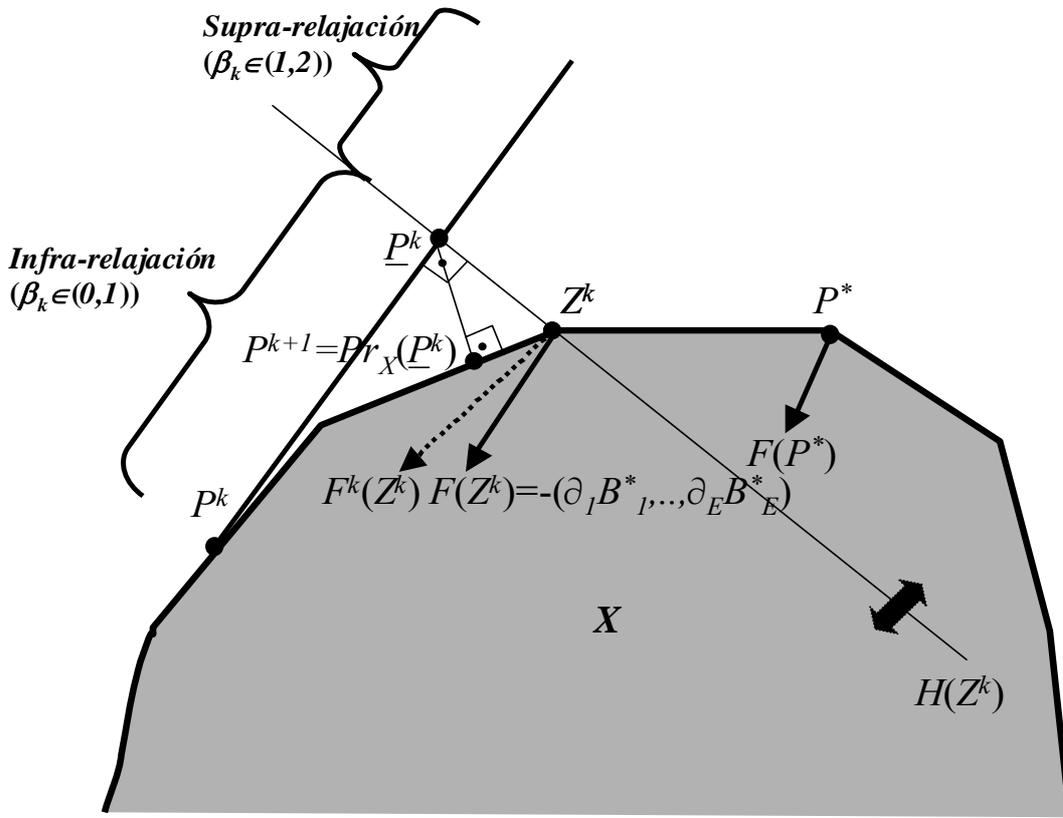


Figura 5. 17: Algoritmo de resolución del enfoque primal como problema de desigualdades variacionales

Las producciones  $\underline{P}^k(\beta_k)$  calculadas en el paso 3 están bien definidas dado que la evaluación de la función  $F$  en  $Z^k$  nunca puede ser cero. En caso contrario, y por la siguiente desigualdad, que ha sido probada en el Anexo 5.1.3, se tendría  $P^k=Z^k$ , lo que no puede ocurrir dado que el algoritmo habría terminado en el paso anterior.

$$F(Z^k)^T (P^k - Z^k) \geq \theta \cdot \|P^k - Z^k\|^2 \tag{5. 53}$$

De igual forma, no puede ocurrir que  $P^k$  esté en el hiperplano  $H(Z^k)$ , pues en caso contrario, esto es, si  $F(Z^k)$  es perpendicular al vector  $P^k - Z^k$  (producto escalar  $F(Z^k)^T (P^k - Z^k) = 0$ ), vuelve a ocurrir  $P^k = Z^k$ .

- **Comentarios relacionados con la proyección requerida en el paso de búsqueda lineal.** La proyección sobre el conjunto factible  $X$  del paso de búsqueda lineal tiene el propósito de generar una sucesión de producciones  $P^k$  contenida en el conjunto factible  $X$ . Esta condición de factibilidad es necesaria para la correcta definición de cualquiera de los subproblemas propuestos.

La proyección  $Pr_X$  sobre  $X$  de un vector  $\underline{P}^k(\beta_k)$  se calcula mediante el siguiente modelo de optimización cuadrático, que minimiza la distancia entre  $\underline{P}^k(\beta_k)$  y la región  $X$ :

$$\underset{P \in X}{\text{Min}} \left( \underline{P}^k(\beta_k) - P \right)^T \left( \underline{P}^k(\beta_k) - P \right) \quad (5.54)$$

siendo la proyección  $Pr_X(\underline{P}^k(\beta_k))$  la solución óptima del problema de minimización.

- **El método de optimización del gradiente proyectado y el algoritmo propuesto.** No debe confundirse el método del gradiente proyectado para optimizar una función  $f: \mathfrak{R}^E \rightarrow \mathfrak{R}$  en una región  $X$  con el algoritmo propuesto para resolver las ecuaciones mostradas en (5.31). En el método de optimización la función  $F: \mathfrak{R}^E \rightarrow \mathfrak{R}^E$  que determina la dirección de minimización coincide con el gradiente de la función  $f$ , mientras que la función  $F$  utilizada en el algoritmo propuesto tiene por componente  $F_e$  la derivada con signo cambiado del beneficio  $B_e^*$  de cada agente respecto de la potencia  $P_e$ , y por lo tanto  $F$  no tiene por qué coincidir con el gradiente de una función real  $f$ . Tal y como se comenta en [Harker, 1990], en el caso en que  $F$  sea el gradiente de alguna función real  $f$ , el problema de desigualdades variacionales puede formularse como un problema de optimización en donde se minimiza  $f$  en la región  $X$  y, por tanto, en este caso **los modelos de optimización son equivalentes a los problemas de desigualdades variacionales.**

### 5.3.10 Modificación del algoritmo primal para garantizar la convergencia

Una de las condiciones que formalmente aseguran la convergencia y monotonía de la sucesión  $\{\|Z^k - P^k\|\}$  a 0, y que ha sido asumida en el apartado anterior, es la siguiente:

$$F(Z^k)^T (P^* - Z^k) \leq 0 \quad (5.55)$$

Tal y como también ocurre con muchos de los problemas reales resueltos con el algoritmo de Solodov (ver [Solodov, 2001]), a partir de los casos ejecutados a lo largo de la tesis, se ha podido comprobar que la convergencia del algoritmo puede asegurarse incluso en casos en los que pueda no cumplirse esta condición, que es solamente suficiente para la convergencia (de hecho, no se han encontrado casos de estudio en los que la sucesión  $\{\|Z^k - P^k\|\}$  no sea convergente a 0). Además, tal y como se detalla a continuación, la condición requerida se satisface en muchos de los casos

que puedan presentarse debido a las propiedades del problema de desigualdades variacionales del enfoque primal.

Primeramente, cabe observar que, dado que  $P^*$  es la solución del problema original  $VI(X,F)$  (y por tanto  $F(P^*)^T(Z^k - P^*) \geq 0$ ), la condición (5. 55) se satisface siempre que la función  $F$  sea monótona en  $Z^k$  y  $P^*$ , es decir, siempre que se cumpla:

$$(F(Z^k) - F(P^*))^T(Z^k - P^*) \geq 0 \quad (5. 56)$$

Esta condición suficiente para (5. 55), que se denomina **condición de monotonía en  $Z^k$  y  $P^*$** , es bastante difícil de analizar en problemas que no son monótonos en toda la región  $X$ , como el problema abordado en esta tesis (en el Anexo 5.1.2 se muestra un caso particular en que se demuestra este hecho), dado que el punto de equilibrio  $P^*$  es desconocido. A pesar de ello, a continuación se analizan bajo qué condiciones la desigualdad (5. 56) puede no cumplirse.

El lado izquierdo de la desigualdad (5. 56) resulta ser:

$$\begin{aligned} & \left[ \lambda(1^T P^*, \mu_0) - \lambda(1^T Z^k, \mu_0) \right] \cdot [1^T Z^k - 1^T P^*] \\ & \sum_{e=1}^E [CM_e^*(Z_e^k, \alpha_{e0}) - CM_e^*(P_e^*, \alpha_{e0})] \cdot [Z_e^k - P_e^*] + \\ & \sum_{e=1}^E [\mu_{e0}^* (\lambda(1^T Z^k, \mu_0), \alpha_{e0}) \cdot Z_e^k - \mu_{e0}^* (\lambda(1^T P^*, \mu_0), \alpha_{e0}) \cdot P_e^*] \cdot [Z_e^k - P_e^*] \end{aligned} \quad (5. 57)$$

Dado que la curva de la demanda es decreciente y dado que la curva de costes marginales es creciente, los dos primeros sumandos de la anterior ecuación son siempre positivos. Tal y como se ha podido comprobar en los casos analizados en esta tesis, la consideración de demandas muy decrecientes, como suele suponerse en horizontes de medio plazo, y de costes marginales crecientes, hacen que (5. 56) se satisfaga siempre, incluso cuando el tercer sumando de (5. 57) pueda ser negativo, algo que, por otro lado, no suele tampoco darse al ser la pendiente  $\mu_{e0}^*$  una función creciente con la demanda.

Sin embargo, en situaciones muy particulares la compensación entre sumandos de distinto signo, mencionada en el párrafo anterior, puede no ser suficiente para satisfacer (5. 56). Teóricamente esto ocurre cuando algún agente  $e$  tiene en la iteración  $k$  una capacidad de modificar el precio mayor que en el equilibrio y sin embargo su potencia generada es menor, esto es, cuando se cumple la siguiente desigualdad para algún índice  $e$ :

$$[\mu_{e0}^* (\lambda(1^T Z^k, \mu_0), \alpha_{e0}) \cdot Z_e^k - \mu_{e0}^* (\lambda(1^T P^*, \mu_0), \alpha_{e0}) \cdot P_e^*] \cdot [Z_e^k - P_e^*] < 0 \quad (5. 58)$$

En la práctica esta condición (que es necesaria pero no suficiente para que no se satisfaga (5. 56)) se cumple cuando  $Z^k$  está en un entorno próximo del punto de equilibrio  $P^*$  y cuando los precios esperados  $\lambda_{e0}$  son similares al precio del mercado  $\lambda^*$ , dado que en este tipo de casos la variación de costes marginales y la influencia de la monotonía de la curva de la demanda son pequeñas, mientras que las diferencias entre las pendientes en  $Z^k$  y  $P^*$  pueden ser grandes.

Aunque en la situación descrita en el párrafo anterior, haya o no convergencia, la solución  $Z^k$  es una buena aproximación del punto de equilibrio  $P^*$ , en este apartado se va a proponer un paso adicional del algoritmo para garantizar su convergencia en el caso en que (5. 55) pueda no satisfacerse.

Supongamos que en una determinada iteración  $k$  no se cumple la condición mostrada en (5. 55), esto es:

$$F(Z^k)^T (P^* - Z^k) > 0 \quad (5. 59)$$

En este caso el hiperplano  $H(Z^k)$  no separa  $P^k$  del equilibrio  $P^*$ . Supóngase que por ello la solución  $P^{k+1}$  propuesta por el algoritmo no está más cerca del equilibrio  $P^*$  de lo que lo estaba  $P^k$ , o lo que es lo mismo, que  $P^{k+1}$  es peor solución del problema original  $VI(X,F)$  que  $P^k$ .

Dado que  $P^*$  es una solución de  $VI(X,F)$  si y solo si se cumple  $P^* = Pr_X(P^* - F(P^*))$  (ver [Facchinei, 2003]) una posible función  $M(P)$  que permite comparar la bondad de  $P^{k+1}$  con la de  $P^k$  como soluciones de  $VI(X,F)$ , y que se denomina en la literatura **función de mérito**, es:

$$M(P) = \|P - Pr_X(P - F(P))\| \quad (5. 60)$$

siendo por tanto la función de mérito  $M(P)$  decreciente conforme crece la bondad de  $P$  como solución de  $VI(X,F)$ .

Utilizando la función  $M(P)$  descrita, (5. 59) implica que en la iteración  $k$  se tiene:

$$M(P^{k+1}) \geq M(P^k) \quad (5. 61)$$

Como  $\|P^k - Z^k\| \geq \varepsilon$  (pues en caso contrario se hubiese convergido en la iteración  $k$ ), por el Anexo 5.1.3 se tiene:

$$F(Z^k)^T (P^k - Z^k) > 0 \quad (5. 62)$$

Esta condición, junto con la mostrada en (5. 59), implican que los vectores  $P^k$  y  $P^*$  están a un mismo lado del hiperplano  $H(Z^k)$  que pasa por  $Z^k$  y cuyo vector normal es  $F(Z^k)$ , tal y como muestra la Figura 5. 18.

Sea entonces  $Q^{k\theta^*} = P^k + \theta^* \cdot (Z^k - P^k)$  para cierto  $\theta^* \in (-\infty, 1)$  tal que cumple:

$$\begin{aligned} F(Z^k)^T (P^* - Q^{k\theta^*}) &\leq 0 \\ F(Z^k)^T (P^k - Q^{k\theta^*}) &> 0 \end{aligned} \tag{5. 63}$$

Tal y como muestra la Figura 5. 18 el vector  $Q^{k\theta^*}$ , que se encuentra en el segmento  $E$ -dimensional que pasa por  $P^k$  y  $Z^k$ , existe siempre pues el hiperplano  $H_{\theta^*}(Z^k)$  que pasa por el punto  $Q^{k\theta^*}$  y cuyo vector normal es  $F(Z^k)$  debe necesariamente cortar al segmento  $[P^k, P^*]$ .

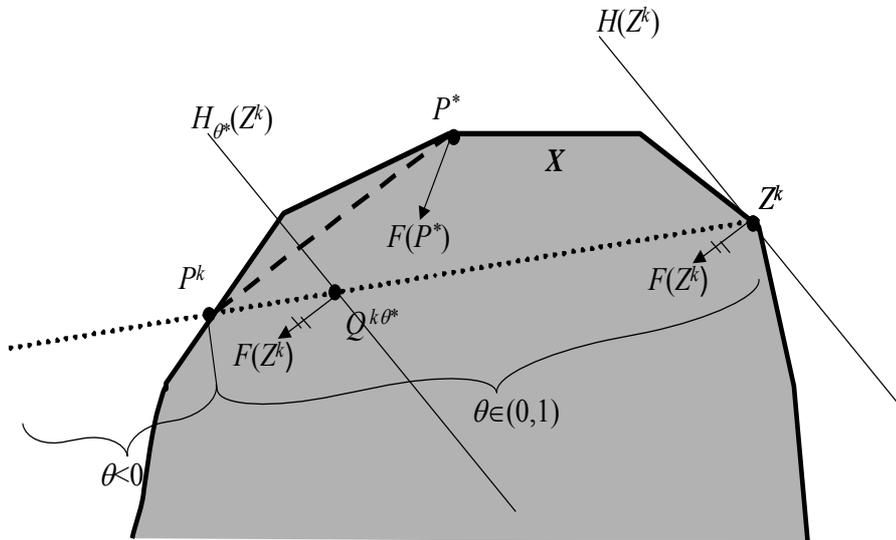


Figura 5. 18: Paso de monotonía del algoritmo primal

En el Anexo 5.1.4, y de una forma similar a la demostración del lema de Solodov, se prueba que el siguiente vector  $\underline{P}^{k\theta^*}(\rho_k)$  está más cerca de  $P^*$  que el punto  $P^k$ . Por lo tanto la proyección  $P^{k+1, \theta^*}(\rho_k)$  de  $\underline{P}^{k\theta^*}(\rho_k)$  sobre el conjunto factible  $X$  sirve como vector de producciones  $P^{k+1}$  con el que la función de mérito decrece en la iteración  $k+1$  del algoritmo.

$$\underline{P}^{k\theta^*}(\rho_k) = P^k - \rho_k \cdot \frac{F(Z^k)^T (P^k - Q^{k\theta^*})}{\|F(Z^k)\|^2} \cdot F(Z^k) \quad \rho_k \in (0, 2) \tag{5. 64}$$

A continuación se describe una metodología para encontrar el valor  $\theta^* \in (-\infty, 1)$  que satisface la condición (5. 63).

Primeramente cabe observar que no pueden existir a la vez dos valores  $\theta_1^* \in (0, 1)$  y  $\theta_2^* \in (-\infty, 0)$  que cumplan la condición (5. 63), ya que en caso contrario el hiperplano  $H_{\theta^*}(Z^k)$  debería estar contenido en el segmento  $[P^k, Z^k]$ , con lo que (5. 62) no se cumpliría.

Seguidamente se debe determinar el intervalo en el que se encuentra  $\theta^*$ , ya sea  $(0, 1)$  ó  $(-\infty, 0)$ . Dado que en un entorno de  $\theta=0$  el hiperplano  $H_{\theta}(Z^k)$  debe necesariamente cortar al segmento  $[P^k, P^*]$ , un método para determinar el intervalo en el que se encuentra  $\theta^*$  consiste en comparar la función de mérito para  $P^{k+1, \theta^*1}(\rho_k)$  y para  $P^{k+1, \theta^*2}(\rho_k)$ , siendo  $\theta_1^* \in (0, 1)$  y  $\theta_2^* \in (-\infty, 0)$  dos valores próximos a 0. Si  $M(P^{k+1, \theta^*1}(\rho_k))$  es menor que  $M(P^{k+1, \theta^*2}(\rho_k))$  entonces el intervalo de búsqueda de  $\theta^*$  es  $(0, 1)$ , y en caso contrario es  $(-\infty, 0)$ . Una vez determinado el intervalo en el que está contenido  $\theta^*$  ya se tiene un valor admisible de  $\theta^*$  con el que la función de mérito decrece en la iteración  $k+1$  (ya sea  $\theta_1^*$  ó  $\theta_2^*$ ).

El algoritmo modificado para la búsqueda de una sucesión  $\{P^k\}$  que converge al equilibrio primal  $P^*$  consta entonces de los siguientes pasos.

Paso 0. Inicialización.

Hacer  $k=1$ . Elegir  $\varepsilon > 0$ ,  $\theta > 0$  cualesquiera y  $P^k$  un punto arbitrario en  $X$ . Sea  $\alpha$  tal que:

$$\alpha \geq \frac{K}{\varepsilon} + \theta \tag{5. 65}$$

Paso 1. Resolución del subproblema  $VI(X, F^k)$ .

Encontrar  $Z^k \in X$  tal que:

$$F^k(Z^k)^T (P - Z^k) \geq 0 \quad \forall P \in X \tag{5. 66}$$

Paso 2. Comprobación de la optimalidad.

Si  $\|P^k - Z^k\| < \varepsilon$  entonces parar,  $Z^k$  resuelve el problema  $VI(X, F)$ .

Paso 3. Búsqueda lineal.

Elegir  $\beta_k \in (0, 2)$  y hacer:

$$\underline{P}^k(\beta_k) = P^k - \beta_k \cdot \frac{F(Z^k)^T (P^k - Z^k)}{\|F(Z^k)\|^2} \cdot F(Z^k) \quad (5.67)$$

Hacer  $P^{k+1} = Pr_X(\underline{P}^k(\beta_k))$ .

Paso 4. Comprobación de la monotonía.

Si  $M(P^k) > M(P^{k+1})$  hacer  $k=k+1$  e ir al paso 1.

Paso 5. Búsqueda de monotonía.

Elegir  $\theta_1^* \in (0,1)$  y  $\theta_2^* \in (-\infty,0)$  próximos a 0. Sea entonces:

$$\underline{P}^{k\theta^*}(\rho_{k\theta^*}) = P^k - \rho_{k\theta^*} \cdot \frac{F(Z^k)^T (P^k - Q^{k\theta^*})}{\|F(Z^k)\|^2} \cdot F(Z^k) \quad \rho_{k\theta^*} \in (0,2) \quad \theta^* \in \{\theta_1^*, \theta_2^*\} \quad (5.68)$$

Hacer  $P^{k+1, \theta^*} = Pr_X(\underline{P}^{k\theta^*}(\rho_{k\theta^*}))$  para  $\theta^* \in \{\theta_1^*, \theta_2^*\}$ .

Sea  $\theta^* \in \{\theta_1^*, \theta_2^*\}$  talque:

$$M(P^{k+1, \theta^*}) = \text{Min}\{M(P^{k+1, \theta_1^*}) M(P^{k+1, \theta_2^*})\} \quad (5.69)$$

Hacer  $P^{k+1} = P^{k+1, \theta^*}$  hacer  $k=k+1$  e ir al paso 1.

Además, se pueden incluir en el algoritmo dos mejoras adicionales relacionadas con la rapidez de su convergencia y con su completitud, que a continuación se detallan:

1. Aunque, una vez determinado el intervalo en el que está contenido  $\theta^*$  ya se tiene un valor admisible de  $\theta^*$  con el que la función de mérito decrece en la iteración  $k+1$  (paso 5 del algoritmo), para que la convergencia sea más rápida se puede calcular el vector de producciones  $P^{k+1, \theta^*}(\rho_k)$  que proporciona un menor valor de la función de mérito (mayor bondad como solución de  $VI(X,F)$ ) cuando  $\theta^*$  varía en todo su intervalo de definición, por ejemplo, procediendo por bipartición en dicho intervalo.
2. La única situación que por simplificar la descripción del algoritmo no ha sido analizada en este apartado, es la que resulta de  $\theta^*=0$ , es decir, la que aparece cuando el vector  $F(Z^k)$  es perpendicular al segmento  $[P^k, P^*] \subseteq X$  (ver Figura 5.19).

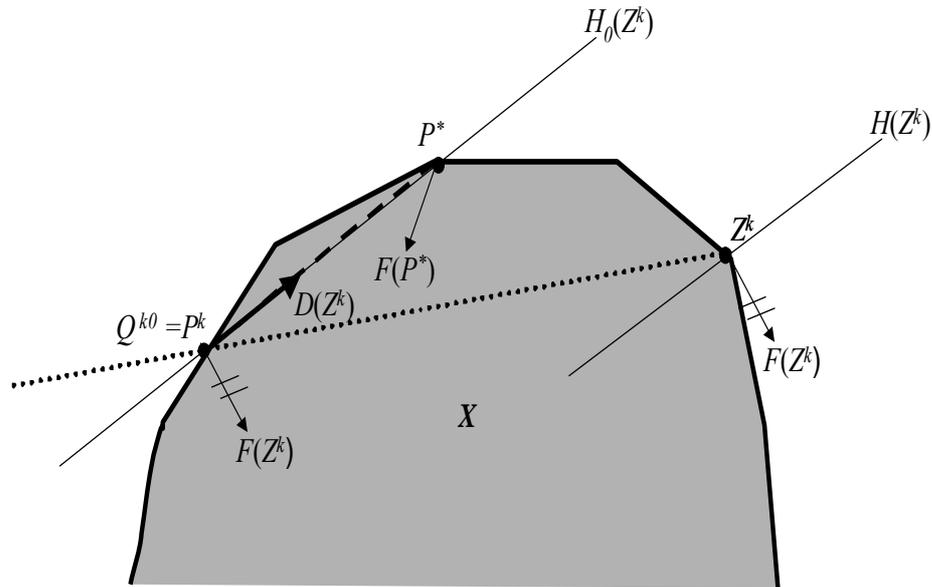


Figura 5. 19: Paso de monotonicidad del algoritmo primal (caso degenerado)

En contra de lo que la Figura 5. 19 pueda intuitivamente sugerir, la maximización de la distancia entre un punto  $P$  factible y  $P^k$  en la dirección  $D(Z^k)$  del hiperplano  $H_0(Z^k)$  (que es perpendicular a  $F(Z^k)$ ), no resulta ser la opción más conveniente para determinar el equilibrio  $P^*$ , por dos motivos:

- En dos dimensiones existe una única dirección  $D(Z^k)$  perpendicular a  $F(Z^k)$ , pero cuando el número de dimensiones es mayor que dos el número de vectores perpendiculares a  $F(Z^k)$  es mayor que uno, por lo que el criterio de maximización no está unívocamente definido.
- Cuando el subproblema de desigualdades variacionales no es equivalente a un problema de optimización en las variables de producción<sup>45</sup>, el vector  $P^k$  puede no pertenecer a una de las aristas del poliedro y el vector  $Z^k$  puede no pertenecer a un punto extremo del conjunto factible  $X$  (ver análisis de convergencia de los casos de estudio sencillos del siguiente capítulo). En esta situación existen entonces vectores factibles en las direcciones  $D(Z^k)$  y  $-D(Z^k)$ , por lo que el criterio de maximización de la distancia entre un punto  $P$  factible y  $P^k$  en la dirección  $D(Z^k)$  puede ser contraproducente en la búsqueda del equilibrio  $P^*$ .

<sup>45</sup>Como ocurre en esta tesis (ver siguiente apartado) dado que se necesita incorporar en el modelo de optimización algunas dimensiones más, de cara a modelar la demanda satisfecha y las restricciones de explotación que se describen en el apartado 5.6.3.

Por ello, la opción más conveniente consiste en proyectar un vector  $\underline{P}^{k\sigma^*}$  en la dirección  $Z^k - \sigma^* \cdot F(Z^k)$  para  $\sigma^* \geq 0$ , de una forma similar a cuando  $\theta^*$  era distinto de 0 y se proyectaba  $\underline{P}^{k\theta^*}$ .

### 5.3.11 Resolución del subproblema de desigualdades variacionales

En este apartado se describe la metodología de resolución propuesta para encontrar una solución al subproblema  $VI(F^k, X)$  que ha sido planteado en el apartado 5.3.9, y que esta basada en el **planteamiento de un problema de optimización cuadrático equivalente al subproblema**.

Como ya se ha mostrado, la función  $F^k = (F^k_1, \dots, F^k_E)$  del subproblema es:

$$F_e^k(P) = CM_e^*(P_e, \alpha_{e0}) + \mu_{e0}^* (\lambda(1^T P^k), \alpha_{e0}) \cdot P_e - \lambda(1^T P, \mu_0) - \alpha \cdot (P_e^k - P_e) \quad (5.70)$$

Por lo que las condiciones KKT del subproblema son las siguientes ([Harker, 1990]):

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} CM_e^*(P_e, \alpha_{e0}) + \mu_{e0}^* (\lambda(1^T P^k), \alpha_{e0}) \cdot P_e - \lambda(1^T P, \mu_0) \\ -\alpha \cdot (P_e^k - P_e) - \sum_{j=1}^{m_e} \eta_e^j \cdot \frac{\partial h_e^j(P_e)}{\partial P_e} - \sum_{k=1}^{n_e} \kappa_e^k \cdot \frac{\partial g_e^k(P_e)}{\partial P_e} \end{array} \right\} = 0 \\ \left. \begin{array}{l} h_e^j(P_e) = 0 \quad j = 1, \dots, m_e \\ g_e^k(P_e) \leq 0 \quad k = 1, \dots, n_e \\ \kappa_e^k \cdot g_e^k(P_e) = 0 \quad k = 1, \dots, n_e \\ \kappa_e \leq 0 \end{array} \right\} e = 1, \dots, E \end{array} \right. \quad (5.71)$$

Se define entonces:

- El **coste marginal ampliado  $\alpha_{e0}$ -pesimista  $CMa_e^*(P_e, P^k, \alpha_{e0})$**  para cada empresa como el coste marginal  $\alpha_{e0}$ -pesimista más el término lineal  $\mu_{e0}^* (\lambda(1^T P^k), \alpha_{e0}) \cdot P_e$ :

$$CMa_e^*(P_e, P^k, \alpha_{e0}) = CM_e^*(P_e, \alpha_{e0}) + \mu_{e0}^* (\lambda(1^T P^k), \alpha_{e0}) \cdot P_e \quad (5.72)$$

- El **resto marginal  $\alpha$ -convergente  $rM_e(P_e^k, P_e, \alpha)$**  como el término lineal  $\alpha \cdot (P_e^k - P_e)$ :

$$rM_e(P_e^k, P_e, \alpha) = \alpha \cdot (P_e^k - P_e) \quad (5.73)$$

Como puede verse, dado que el coste marginal  $\alpha_{e0}$ -pesimista y  $\mu_{e0}^*(\lambda(1^T P^k, \mu_0), \alpha_{e0}) \cdot P_e$  son funciones crecientes en  $P_e$ , el coste marginal ampliado  $\alpha_{e0}$ -pesimista es también una función creciente. Además, al ser el resto marginal  $\alpha$ -convergente decreciente en  $P_e$ , la resta del coste marginal ampliado  $\alpha_{e0}$ -pesimista con el resto marginal  $\alpha$ -convergente (esto es,  $CMa_e^* - rM_e$ ) también es una función creciente en  $P_e$ . La Figura 5. 20 muestra una relación entre las gráficas de estas funciones cuando, por simplicidad, se consideran costes marginales continuos y convexos.

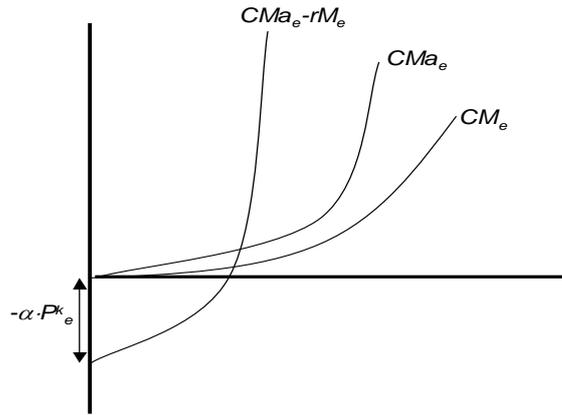


Figura 5. 20: Relación entre los costes marginales de los subproblemas

Las ecuaciones mostradas en (5. 71) pueden entonces resolverse con el siguiente problema de programación cuadrática:

$$\begin{aligned}
 & \text{Min}_{P,D} \sum_{e=1}^E (Ca_e^*(P_e, P^k, \alpha_{e0}) - r_e(P_e^k, P_e, \alpha)) - U(D, \mu_0) & (5. 74) \\
 & \text{s.a.} \quad \left. \begin{array}{l} h_e^j(P_e) = 0 \quad j = 1, \dots, m_e \\ g_e^k(P_e) \leq 0 \quad k = 1, \dots, n_e \end{array} \right\} e = 1, \dots, E \\
 & D = \mathbf{1}^T P
 \end{aligned}$$

siendo:

- El **coste ampliado  $\alpha_{e0}$ -pesimista  $Ca_e^*(P_e, P^k, \alpha_{e0})$**  la función:

$$Ca_e^*(P_e, P^k, \alpha_{e0}) = C_e^*(P_e, \alpha_{e0}) + \mu_{e0}^*(\lambda(\mathbf{1}^T P^k, \mu_0), \alpha_{e0}) \cdot \frac{P_e^2}{2} \quad (5. 75)$$

Tal y como puede observarse la derivada del coste ampliado  $\alpha_{e0}$ -pesimista coincide con el coste marginal ampliado  $\alpha_{e0}$ -pesimista. Por ello, y dado que el

coste marginal ampliado es una función creciente, el coste ampliado es una función convexa.

- El resto  $\alpha$ -convergente  $r_e(P_e^k, P_e, \alpha)$  la función:

$$r_e(P_e^k, P_e, \alpha) = \alpha \cdot \left( P_e^k \cdot P_e - \frac{P_e^2}{2} \right) \quad (5.76)$$

En este caso la derivada del resto  $\alpha$ -convergente coincide con el resto marginal  $\alpha$ -convergente, que al ser una función decreciente hace que la función  $Ca_e^*(P_e, P_e^k, \alpha_{e0}) - r_e(P_e^k, P_e, \alpha)$  sea convexa.

- La **utilidad de la demanda**  $U(D, \mu_0)$  tal y como se define en [Barquín, 2004], es decir, la integral del precio demandado  $\lambda(D, \mu_0)$ :

$$U(D, \mu_0) = \int_0^D \lambda(r, \mu_0) \cdot dr \quad (5.77)$$

Como el precio demandado  $\lambda(D, \mu_0)$  es una función decreciente con la demanda, su integral  $U(D, \mu_0)$  es una función cóncava.

Cuando la curva de la demanda es lineal con la pendiente  $\mu_0$ , es decir,  $\lambda(D, \mu_0) = \lambda_0 + \mu_0 \cdot (D_0 - D)$ , la utilidad de la demanda es:

$$U(D, \mu_0) = \lambda_0 \cdot D + \mu_0 \cdot \left( D \cdot D_0 - \frac{D^2}{2} \right) \quad (5.78)$$

En el Anexo 5.1.5 se demuestra la equivalencia entre las ecuaciones mostradas en (5.71) y el modelo de minimización cuadrático de (5.74), que puede también formularse como:

$$\begin{aligned} \text{Min}_{P, D} \quad & \sum_{e=1}^E Ca_e^*(P_e, P_e^k, \alpha_{e0}) + \frac{\alpha}{2} \cdot \|P - P^k\|^2 - U(D, \mu_0) & (5.79) \\ \text{s.a.} \quad & \left. \begin{array}{l} h_e^j(P_e) = 0 \quad j = 1, \dots, m_e \\ g_e^k(P_e) \leq 0 \quad k = 1, \dots, n_e \end{array} \right\} e = 1, \dots, E \\ & D = \underline{1}^T P \end{aligned}$$

Esta nueva formulación es equivalente a la mostrada en (5.74) debido a que la diferencia entre sus funciones objetivo es una constante, pues se tiene:

$$\sum_{e=1}^E C\alpha_e^*(P_e, P^k, \alpha_{e0}) + \frac{\alpha}{2} \cdot \|P - P^k\|^2 - U(D, \mu_0) = \quad (5.80)$$

$$\sum_{e=1}^E (C\alpha_e^*(P_e, P^k, \alpha_{e0}) - r_e(P_e, P^k, \alpha_{e0})) - U(D, \mu_0) + \alpha \cdot \sum_{e=1}^E \frac{(P_e^k)^2}{2}$$

Tal y como más claramente puede verse en (5.79), el parámetro  $\alpha$  de la función objetivo del subproblema penaliza la distancia entre la solución del subproblema  $Z^k$  y la producción  $P^k$  fijada en la iteración  $k$ . Como se comentará en el apartado 5.3.12, este parámetro de penalización condiciona significativamente la rapidez en la convergencia del algoritmo, por lo que en dicho apartado se describe un procedimiento que trata de acelerar la convergencia.

### 5.3.11.1 Relación del modelo de optimización propuesto en [Barquín, 2004] con el modelo propuesto en esta tesis para resolver los subproblemas

La principal diferencia del modelo de minimización propuesto en [Barquín, 2004] con el modelo considerado en (5.74) es que en la formulación del primero no aparece el resto  $\alpha$ -convergente, debido a que para resolver las ecuaciones del equilibrio de Barquín no es necesario proponer un algoritmo de desigualdades variacionales. Esta ventaja metodológica se debe a que la pendiente de la demanda residual  $\mu_e(P_I, \dots, P_E)$  que aparece en las ecuaciones de equilibrio de Barquín es constante para cada generador, y por lo tanto independiente de los niveles de producción de todos los generadores<sup>46</sup>. Por ello, estas ecuaciones desestiman el hecho de que la pendiente  $\mu_e(P_I, \dots, P_E)$  depende del precio de la electricidad  $\lambda$ , al medir el grado en el que un agente es capaz de modificarlo. Esta dependencia se ve por el contrario reflejada en las ecuaciones del equilibrio primal.

En el capítulo séptimo de [García-González, 2001] y para 168 escenarios de curvas de la demanda residual de un generador del mercado eléctrico español, se puede comprobar cómo, efectivamente, se tienen distintas pendientes residuales para distintos precios del mercado. A diferencia del análisis para el corto plazo realizado por García-González, y que por tanto requiere un mayor detalle en el modelado de la pendiente de la demanda residual, la aplicación del enfoque primal resulta solamente en dos pendientes admisibles ( $\mu 1_{e0}$  y  $\mu 2_{e0}$ ), aunque la generalización de la metodología de resolución al caso de un conjunto finito de pendientes es inmediata (ver Anexo 5.1.6 y la Figura 5.21), dado que la única suposición fuerte para la convergencia del algoritmo es que la pendiente sea creciente con la demanda satisfecha (esta condición resultaba necesaria para demostrar las condiciones de

<sup>46</sup>En el modelo estocástico de [Reneses, 2004] la pendiente  $\mu_e(P_I, \dots, P_E)$  también es constante para cada escenario del mercado, por lo que las ecuaciones del equilibrio pueden también resolverse mediante un modelo de optimización cuadrático.

segundo orden de la función de beneficio considerada en el problema de explotación de cada generador, ver apartado 5.3.6, y para que el problema de desigualdades variacionales tuviese buenas propiedades en cuanto a su monotonía, ver apartado 5.3.10).

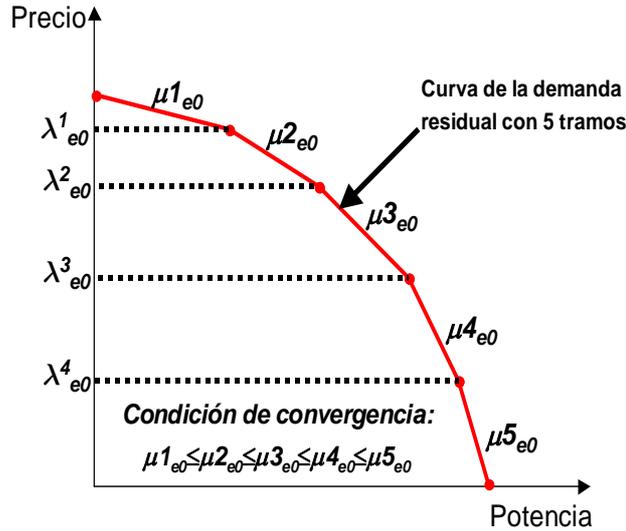


Figura 5. 21: Curva de la demanda residual con 5 tramos admisibles por precio

Por otro lado, conviene mencionar que el algoritmo propuesto en esta tesis permite además determinar el equilibrio de Cournot cuando la pendiente de la demanda residual  $\mu_e$  de cada agente  $e$  es función creciente de su cantidad  $P_e$  ofertada, siendo entonces las ecuaciones de equilibrio las siguientes:

$$\begin{aligned} \lambda &= \mu_e(P_e) \cdot P_e + CM_e(P_e, c_e) \quad e=1, \dots, E \\ \lambda &= \lambda(D, \mu_0) \\ D &= \mathbf{1}^T P \end{aligned} \quad (5. 81)$$

La suposición de que la pendiente  $\mu_e$  crece con la producción  $P_e$  es razonable dado que la capacidad que tiene un generador de modificar el precio del mercado aumenta conforme crece su cuota de mercado. Además, puede comprobarse que el problema de desigualdades variacionales que resulta equivalente a las ecuaciones de equilibrio es monótono en toda la región  $X$ , algo que no ocurre cuando la pendiente  $\mu_e$  depende del precio del mercado  $\lambda$ , por lo que los pasos de comprobación y búsqueda de la monotonía no son necesarios en este caso.

### 5.3.11.2 Características del modelo de optimización para resolver el subproblema

A continuación se describen algunas de las ventajas de utilizar el modelo de minimización formulado en (5. 74) para resolver el subproblema de desigualdades variacionales  $VI(F^k, X)$ :

- Una de las ventajas más importantes es que pueden utilizarse optimizadores como CPLEX ([Cplex, 1997]) para resolver de manera eficiente, incluso cuando se tratan problemas de gran tamaño, el modelo de minimización.
- Por otro lado, tal y como puede verse en el Anexo 5.1.5, una vez resuelto el modelo de minimización, el precio de mercado con la solución  $Z^k$  del subproblema puede obtenerse directamente, dado que coincide con la variable dual de la ecuación de balance  $D = \sum_e P_e$ . Optimizadores como CPLEX permiten obtener fácilmente el valor de los multiplicadores de cada restricción una vez se ha resuelto el modelo de optimización.
- Para la evaluación de  $F$  en  $Z^k$  requerida en los pasos de comprobación de monotonía y de búsqueda lineal del algoritmo propuesto, es necesario el cálculo del coste marginal en  $Z^k$ , que puede obtenerse también con las variables duales de las restricciones de explotación, utilizando la siguiente ecuación:

$$CM_e^*(Z_e^k, P^k, \alpha_{e0}) = -\mu_{e0}^*(\mathbb{1}^T P^k, \alpha_{e0}) \cdot Z_e^k + \lambda + \alpha \cdot (P_e^k - Z_e^k) + \sum_{j=1}^{m_e} \eta_e^j \cdot \frac{\partial h_e^j(Z_e^k)}{\partial P_e} + \sum_{p=1}^{n_e} \kappa_e^p \cdot \frac{\partial g_e^p(Z_e^k)}{\partial P_e} \quad (5. 82)$$

- De manera similar a como se prueba en [Reneses, 2004] cuando no existe término  $\alpha$ -convergente, puede demostrarse que el cálculo del coste marginal de una empresa, definido en la ecuación (5. 82), se simplifica notablemente, debido a que es igual al ingreso marginal de la empresa más el resto marginal  $\alpha$ -convergente y más la variable dual  $\pi_{g^*}$  de la restricción de potencia máxima del grupo  $g^*$  que tenga mayor coste y esté generando, variable dual que es negativa o nula. Con todo ello se tiene:

$$CM_e^*(Z_e^k, P^k, \alpha_{e0}) = -\mu_{e0}^*(\mathbb{1}^T P^k, \alpha_{e0}) \cdot Z_e^k + \lambda + \alpha \cdot (P_e^k - Z_e^k) + \pi_{g^*} \quad (5. 83)$$

En [Reneses, 2004] se describe también cómo se pueden incluir, en el modelado del coste marginal, las variables duales relacionadas con otro tipo de restricciones distintas a las que modelan las características técnicas de los grupos

de generación, como son por ejemplo las restricciones estratégicas de los agentes.

### 5.3.12 Actualización del criterio de convergencia y reinicialización del algoritmo de resolución

Tal y como ya se ha mencionado, el parámetro  $\alpha$  que penaliza la diferencia entre la solución del subproblema  $Z^k$  y la producción  $P^k$  fijada en cada iteración condiciona de manera significativa la rapidez en la convergencia del algoritmo propuesto. Así por ejemplo, un parámetro  $\alpha$  excesivamente grande cuando la solución del subproblema está lejos del punto de equilibrio podría hacer que las diferencias entre las soluciones de los subproblemas resueltos en iteraciones posteriores no reflejasen las distancias reales con respecto al equilibrio. Es importante mencionar que, a pesar de este inconveniente, la convergencia está garantizada, aunque para ello el algoritmo requiera de la ejecución de un número elevado de iteraciones.

Tal y como se sugiere en [Fiacco, 1968] para el caso de minimizar una función de costes en donde se penalizan varias restricciones de igualdad, para disminuir el número de iteraciones hasta la convergencia se propone considerar una secuencia de tolerancias  $\varepsilon^k > 0$  para la distancia entre las producciones  $P^k$  fijadas en cada iteración y las producciones  $Z^k$  que resuelven cada subproblema. Esta secuencia se genera escogiendo un valor inicial  $\varepsilon^1 > 0$  suficientemente grande para evitar penalizaciones fuertes, y decreciendo la tolerancia en la iteración  $k+1$  cuando se haya satisfecho la tolerancia en  $\varepsilon^k$ , por lo que  $\{\varepsilon^k\}$  es una secuencia decreciente (aunque no necesariamente estrictamente decreciente) definida como:

$$\varepsilon^{k+1} = \begin{cases} \varepsilon^k & \|P^k - Z^k\| \geq \varepsilon^k \\ \sigma \cdot \varepsilon^k & \|P^k - Z^k\| < \varepsilon^k \end{cases} \quad \sigma \in (0,1) \quad (5.84)$$

Los correspondientes parámetros de penalización  $\alpha^k$  asociados a  $\varepsilon^k$  de acuerdo a (5.41) deben formar entonces una secuencia de valores crecientes.

El procedimiento de **actualización del criterio de convergencia** descrito puede realizarse sin ningún problema en el algoritmo propuesto, dado que se ha probado que la convergencia se tiene para cualquier tolerancia  $\varepsilon > 0$  entre la distancia de  $P^k$  a  $Z^k$ .

Un procedimiento adicional al de actualización del criterio de convergencia, que con los casos de estudio analizados en esta tesis se ha comprobado que es eficiente para la disminución del número de iteraciones, consiste en la **reinicialización del algoritmo de desigualdades** variacionales (ver [Fiacco, 1968]). En concreto, en este

procedimiento se escoge como tolerancia  $\varepsilon^{k+1}$  una tolerancia similar a la inicial  $\varepsilon^1$  cuando, por ejemplo:

- La distancia entre  $P^k$  y  $Z^k$  en la iteración  $k$  no haya decrecido suficientemente.
- El número de iteraciones requeridas para la convergencia en  $\varepsilon^k$  sea mayor que un número máximo de iteraciones  $n_m$ .

Típicamente suele escogerse como tolerancia  $\varepsilon^l$  un porcentaje  $\gamma \in (0,1]$  del valor  $\varepsilon^l$  de la reinicialización anterior, dado que en cada reinicialización el algoritmo propone una solución que está más cerca del punto de equilibrio  $P^*$ .

Cabe observar que en las iteraciones  $k+1$  de reinicialización, la distancia entre las producciones  $P^{k+1}$  fijadas en la iteración y las producciones  $Z^{k+1}$  que resuelven el subproblema puede crecer respecto de la iteración  $k$ , dado que el parámetro  $\alpha^{k+1}$  de penalización de la distancia es menor que el fijado en la iteración  $k$ . Este hecho puede confundirse con la presencia de no monotonía de la función  $F$  en  $Z^{k+1}$  y  $P^*$ , por lo que la comprobación de la monotonía sólo debe realizarse en iteraciones distintas a las de reinicialización.

La reinicialización puede también efectuarse sobre el vector  $P^{k+1}$  a la vez que se hace sobre la tolerancia  $\varepsilon^{k+1}$ . La técnica de reinicialización de  $P^{k+1}$  se denomina, para el problema resuelto en [Fiacco, 1968], **técnica de continuación**, pero no ha sido empleada en los casos de estudio de esta tesis.

Con todo ello, el algoritmo propuesto en el enfoque primal cuando se utiliza una función de mérito para verificar la convergencia y monotonía, y cuando se utilizan los procedimientos de actualización de tolerancias y de reinicialización por número  $n_m$  máximo de iteraciones entre reinicializaciones, resulta ser:

Paso 0. Inicialización.

Hacer  $k=1$ . Elegir  $\varepsilon > 0$ ,  $\theta > 0$ ,  $\varepsilon^k > 0$ ,  $n=1$ ,  $n_m$  natural,  $\sigma \in (0,1)$ ,  $\gamma \in (0,1]$  cualesquiera y  $P^k$  un punto arbitrario en  $X$ .

Paso 1. Resolución del subproblema  $VI(X, F^k)$ .

Sea  $\alpha^k$  tal que:

$$\alpha^k = \frac{K}{\varepsilon^k} + \theta \tag{5. 85}$$

Hacer  $\alpha = \alpha^k$  y encontrar  $Z^k \in X$  tal que:

$$F^k(Z^k)^T (P - Z^k) \geq 0 \quad \forall P \in X \quad (5.86)$$

Paso 2. Comprobación de la optimalidad.

Si  $M(P^k) < \varepsilon$  entonces parar,  $P^k$  resuelve el problema  $VI(X, F)$ .

Paso 3. Búsqueda lineal.

Elegir  $\beta_k \in (0, 2)$  y hacer:

$$\underline{P}^k(\beta_k) = P^k - \beta_k \cdot \frac{F(Z^k)^T (P^k - Z^k)}{\|F(Z^k)\|^2} \cdot F(Z^k) \quad (5.87)$$

Hacer  $P^{k+1} = Pr_X(\underline{P}^k(\beta_k))$ .

Paso 4. Actualización de tolerancias y comprobación de reinicialización.

Si  $\|P^k - Z^k\| < \varepsilon^k$  entonces hacer  $\varepsilon^{k+1} = \sigma \cdot \varepsilon^k$ ,  $n=1$  (actualización de tolerancia).

Si  $\|P^k - Z^k\| \geq \varepsilon^k$  y  $n > n_m$  entonces hacer  $\varepsilon^{k+1} = \gamma \cdot \varepsilon^k$ ,  $n=1$  (reinicialización).

Si  $\|P^k - Z^k\| \geq \varepsilon^k$  y  $n \leq n_m$  entonces hacer  $\varepsilon^{k+1} = \varepsilon^k$ ,  $n=n+1$ .

Paso 5. Comprobación de la monotonía.

Si  $(M(P^k) > M(P^{k+1}))$  ó  $\varepsilon^{k+1} > \varepsilon^k$  hacer  $k=k+1$  e ir al paso 1.

Paso 6. Búsqueda de monotonía.

Elegir  $\theta^*_1 \in (0, 1)$  y  $\theta^*_2 \in (-\infty, 0)$  próximos a 0. Sea entonces:

$$\underline{P}^{k\theta^*}(\rho_{k\theta^*}) = P^k - \rho_{k\theta^*} \cdot \frac{F(Z^k)^T (P^k - Q^{k\theta^*})}{\|F(Z^k)\|^2} \cdot F(Z^k) \quad \rho_{k\theta^*} \in (0, 2) \quad \theta^* \in \{\theta^*_1, \theta^*_2\} \quad (5.88)$$

Hacer  $P^{k+1, \theta^*} = Pr_X(\underline{P}^{k\theta^*}(\rho_{k\theta^*}))$  para  $\theta^* \in \{\theta^*_1, \theta^*_2\}$ .

Sea  $\theta^* \in \{\theta^*_1, \theta^*_2\}$  talque:

$$M(P^{k+1, \theta^*}) = \text{Min} \left\{ M(P^{k+1, \theta^*_1}), M(P^{k+1, \theta^*_2}) \right\} \quad (5.89)$$

Hacer  $P^{k+1} = P^{k+1, \theta^*}$  hacer  $k=k+1$  e ir al paso 1.

### 5.3.13 Conclusiones finales acerca de la relación del algoritmo propuesto con el algoritmo de Solodov

Tal y como ya se ha comentado, el algoritmo propuesto en esta tesis es similar al algoritmo de Solodov, pero se ha adaptado a las características del mercado analizado y para mejorar los tiempos de ejecución. En concreto, sus principales diferencias son:

- El algoritmo de Solodov aplicado directamente a los problemas de desigualdades variacionales planteados en esta tesis requiere, en cada iteración, de la evaluación, para todos los agentes, del coste marginal para distintos niveles de potencia. Dado que el coste marginal en un periodo depende de las decisiones tomadas en periodos anteriores, su cálculo supone la resolución de un modelo de minimización de costes de explotación que incluya una restricción que fije las decisiones de potencia en los distintos niveles de potencia a evaluar. La variable dual de la restricción incluida es el coste marginal que se pretende calcular. Para evitar resolver varios modelos de minimización de costes, comprometiendo con ello los tiempos para la planificación y operación de la generación, el algoritmo propuesto en esta tesis ha sido planteado de la siguiente manera:
  - El subproblema de desigualdades variacionales que se resuelve en cada iteración en el algoritmo de Solodov ha sido reformulado en esta tesis de tal forma que no aparece el coste marginal evaluado sobre el nivel de potencia fijado en la iteración anterior. Además, el subproblema se resuelve mediante un problema de optimización cuadrática similar al descrito en [Barquín, 2004], lo que permite resolver modelos de mercado de tamaño real.
  - En el paso en que se proyectan las decisiones sobre el conjunto factible, el algoritmo propuesto en esta tesis solamente necesita evaluar el coste marginal para la solución del subproblema. Además, para el cálculo del coste marginal no es necesario resolver un modelo de minimización de costes, sino utilizar la información dual del modelo de optimización cuadrático, lo que también mejora los tiempos de ejecución.
- Para garantizar que en cada iteración la solución obtenida está más cerca del equilibrio que en la iteración anterior, es necesario que el hiperplano  $H(Z^k)$  separe el vector de potencias  $P^k$  del vector de potencias del equilibrio  $P^*$ . Para satisfacer esta condición en cada iteración del algoritmo propuesto en esta tesis, por un lado, se ha incluido en la función objetivo de cada subproblema un término de regularización de la convergencia, que se ha denominado resto  $\alpha$ -convergente. Por otro lado, es necesario que la función que define el problema de desigualdades variacionales sea monótona en  $Z^k$  y en el equilibrio  $P^*$ , lo que

puede no ser siempre cierto. Por ello, se ha incluido en el algoritmo un paso adicional que permite garantizar la monotonía, y que es lo suficientemente general como para poder ser utilizado en un problema de equilibrio similar al resuelto en esta tesis.

- Existen otro tipo de condiciones necesarias para garantizar la convergencia de la sucesión construida por el algoritmo de Solodov, algunas de las cuales no se satisfacen en el modelo de mercado de esta tesis (relacionadas con la acotación de la función que define cada subproblema). Sin embargo, para la convergencia de los algoritmos planteados en esta tesis estas suposiciones adicionales no son necesarias, aunque se precisa que el conjunto de decisiones factibles sea un conjunto compacto, lo que es cierto dado que el conjunto de potencias a producir es cerrado y acotado.

## 5.4 El enfoque dual en el equilibrio de Cournot

En este apartado se describe la aplicación del enfoque dual al modelo de equilibrio de Cournot definido en ambiente de incertidumbre. Como se comprobará, muchos de los resultados obtenidos en el enfoque primal pueden extrapolarse fácilmente al enfoque dual, por lo que se ha optado por simplificar su descripción<sup>47</sup>.

### 5.4.1 Definición y características generales del enfoque dual

En el **enfoque dual** se supone que cada agente en el mercado y a la hora de optimizar sus estrategias fija un beneficio mínimo  $B_{e0}$  y minimiza la certeza  $\Psi$  de tener beneficios menores que  $B_{e0}$ . Desde el punto de vista del agente este comportamiento tiene el objetivo de alcanzar necesariamente un beneficio  $B_{e0}$  cubriéndose frente al riesgo de tener beneficios menores (en [Campos, 2005b] se muestra un procedimiento para la estimación del beneficio mínimo  $B_{e0}$ ).

Por lo tanto, fijadas las potencias  $P_{-e}$  del resto de generadores, el problema de explotación del agente  $e$  resulta ser:

$$\begin{aligned} \underset{P_e}{\text{Min}} \Psi(B_e(D, P_{-e}, \underline{\omega}_e) \leq B_{e0}) & \quad (5.90) \\ \text{s.a. } h_j^e &= 0 \\ g_k^e &\leq 0 \end{aligned}$$

Tal y como se ha podido ver, el enfoque dual plantea un problema de optimización por agente algo diferente al modelado en un esquema convencional, dado que el objetivo de los agentes es la minimización de una función de utilidad  $\alpha_e^*(D, P_{-e}, B_{e0}) = \Psi(\underline{B}_e(D, P_{-e}, \underline{\omega}_e) \leq B_{e0})$ , en lugar de la maximización de beneficios  $B_e^*$ . El suceso contrastado “que el beneficio sea menor o igual que  $B_{e0}$ ” está justificado económicamente, por lo que este procedimiento es coherente con la suposición de que los agentes están interesados en optimizar una función de utilidad tomando decisiones que siempre persiguen objetivos que los complacen.

Más concretamente el grado de certeza  $\alpha_e^*$  es, para cada decisión  $P_e$  y manteniendo fijas las del resto de agentes  $P_{-e}$ , la certeza  $\Psi$  del subconjunto  $S_e(D, P_{-e}, B_{e0})$  de escenarios de  $\underline{\mu}_{e0}$  y de  $\underline{c}_e$  que conducen a beneficios menores o iguales que  $B_{e0}$ .

<sup>47</sup>En el Anexo 5.3 se demuestra la relación fundamental existente entre los enfoques primal y dual, que permite resolver uno de los enfoques a partir de la resolución del enfoque restante.

### 5.4.2 El enfoque dual probabilista

El planteamiento del enfoque dual con una medida de probabilidad conlleva a la minimización del área definida por los beneficios menores o iguales que  $B_{e0}$  (ver Figura 5. 22).

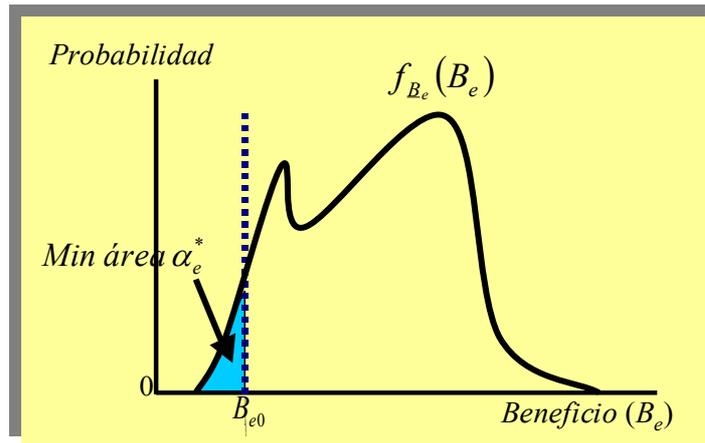


Figura 5. 22: Enfoque dual probabilista

Tal y como se comentó en el enfoque primal, cuando se considera cualquier tipo de distribuciones de probabilidad en las variables aleatorias en  $\omega_e$ , la distribución de probabilidad del beneficio  $B_e$ , y por lo tanto el grado de probabilidad  $\alpha_e^*$ , resultan difíciles de calcular. La consideración de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas a una normal simplifica notablemente el modelado de la distribución de probabilidad del beneficio, y conlleva al siguiente problema de minimización por agente, que es equivalente al mostrado en (5. 90) (ver [Stancu-Minasian, 1984]):

$$\begin{aligned} \text{Min}_{k_e^*, P_e} k_e^* & \quad (5. 91) \\ \text{s.a. } B_{e0} &= E[B_e(D, P_e, \omega_e)] - k_e^* \cdot \sqrt{V[B_e(D, P_e, \omega_e)]} \\ h_j^e &= 0 \\ g_k^e &\leq 0 \end{aligned}$$

En donde  $k_e^*$  se interpreta como el percentil de beneficio estandarizado de grado  $\alpha_e^*$ , y  $B_{e0}$  el correspondiente percentil no estandarizado.

En este nuevo problema de minimización, el beneficio mínimo  $B_{e0}$  se expresa en función de las variables de explotación. En este sentido, de cara a plantear las

ecuaciones del equilibrio de Cournot, el enfoque dual tiene por objeto determinar las pendientes de la demanda residual  $\mu_e$  y los costes marginales de producción  $CM_e$  que se obtienen de considerar al beneficio  $B_{e0}$  como función de las producciones de los generadores. Estas funciones coinciden, respectivamente, con la derivada respecto de la potencia  $P_e$  de las curvas de la demanda  $\lambda(D, \mu_{e0}^*)$  y de costes  $C_e(P_e, c_e^*)$  que hacen  $B_{e0}$  igual a  $\lambda(D, \mu_{e0}^*) \cdot P_e - C_e(P_e, c_e^*)$ , y al ser  $B_{e0}$  un umbral de beneficio mínimo, son estimaciones coherentes con la suposición de aversión al riesgo.

En concreto, cuando se utiliza una medida de probabilidad para representar la incertidumbre, no se ha encontrado un procedimiento para la determinación del vector  $\omega_e^* = (\mu_{e0}^*, c_e^*)^T$  debido a que la expresión de  $B_{e0}$  como función de las variables de decisión es significativamente compleja. Estos inconvenientes se resuelven utilizando una medida de posibilidad para representar la incertidumbre.

### 5.4.3 El enfoque dual posibilista

Cuando la medida de certeza  $\Psi$  es una medida de posibilidad  $\Pi$ , el enfoque dual es equivalente a la minimización de la posibilidad  $\Pi$  de que los beneficios sean menores o iguales que  $B_{e0}$ , o equivalentemente, a la maximización de la necesidad  $N$  de que los beneficios sean mayores, dado que se cumple:

$$\Pi(\underline{B}_e \leq B_{e0}) = 1 - N(\underline{B}_e > B_{e0}) \quad (5.92)$$

Además, la posibilidad  $\Pi$  de que los beneficios  $\underline{B}_e$  sean menores o iguales que  $B_{e0}$  coincide con la posibilidad  $\Pi$  de la unión de sucesos  $\{\underline{B}_e = B_e\}$  para  $B_e \leq B_{e0}$ , esto es:

$$\Pi(\underline{B}_e \leq B_{e0}) = \Pi\left(\bigcup_{B_e \leq B_{e0}} (\underline{B}_e = B_e)\right) \quad (5.93)$$

El axioma de no aditividad de la medida de posibilidad ( $\Pi(A \cup B) = \text{Max}(\Pi(A), \Pi(B))$ ) conduce a la minimización del siguiente supremo:

$$\underset{P_e}{\text{Min}} \underset{B_e \leq B_{e0}}{\text{Sup}} \Pi(\underline{B}_e = B_e) \quad (5.94)$$

Por lo que la posibilidad  $\alpha_e^* = \Pi(\underline{B}_e \leq B_{e0})$  es el máximo grado de posibilidad del conjunto de grados de ocurrencia de beneficios menores o iguales que  $B_{e0}$  (ver Figura 5. 23).

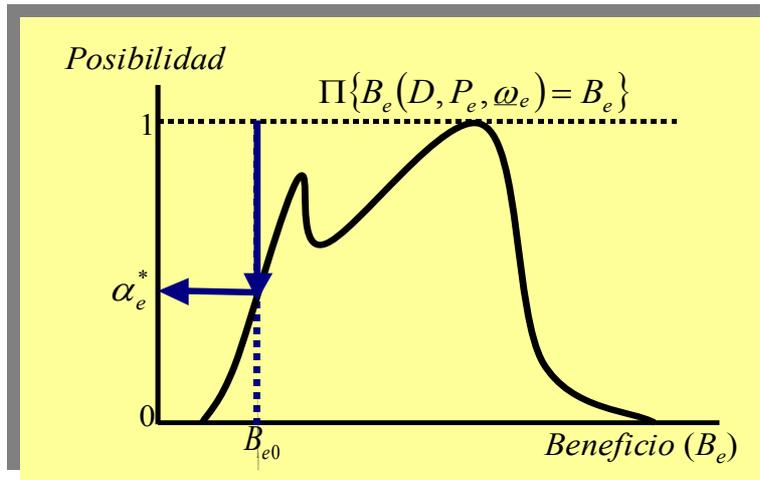


Figura 5. 23: Enfoque dual posibilista

Al igual que en el enfoque primal, puede construirse un algoritmo para la determinación del vector  $\omega_e^*$  esperado según el enfoque dual, que considere cualquier tipo de distribución de posibilidad en los parámetros  $\underline{\mu}_{e0}$  y  $\underline{c}_e$ , y un conjunto de curvas de demanda históricas y de posibles costes. Sin embargo, el algoritmo puede dar lugar a tiempos de ejecución elevados, especialmente cuando se resuelven problemas de tamaño real.

Estos problemas computacionales pueden solucionarse con las mismas simplificaciones consideradas en el apartado 5.3.4, en donde se suponía que el vector posibilista  $\underline{\omega}$  tenía por componentes números posibilistas  $LR$ , y que las posibles curvas de la demanda y de costes eran lineales, lo que implicaba que la distribución del beneficio  $\underline{B}_e$  también era  $LR$ .

#### 5.4.4 El enfoque dual posibilista $LR$

Cuando la distribución de posibilidad del beneficio es  $LR$  para cada conjunto de decisiones de explotación, el cálculo de  $\alpha_e^*$  se reduce significativamente. En este caso, el valor  $\alpha_e^*$  a minimizar resulta ser (ver Figura 5. 24 para el caso en que  $B_e^1 < B_{e0} < B_e^2$ ):

$$\alpha_e^* = \Pi(\underline{B}_e \leq B_{e0}) = L_{B_e} \left( \frac{B_e^2 - B_{e0}}{B_e^2 - B_e^1} \right) \quad (5. 95)$$

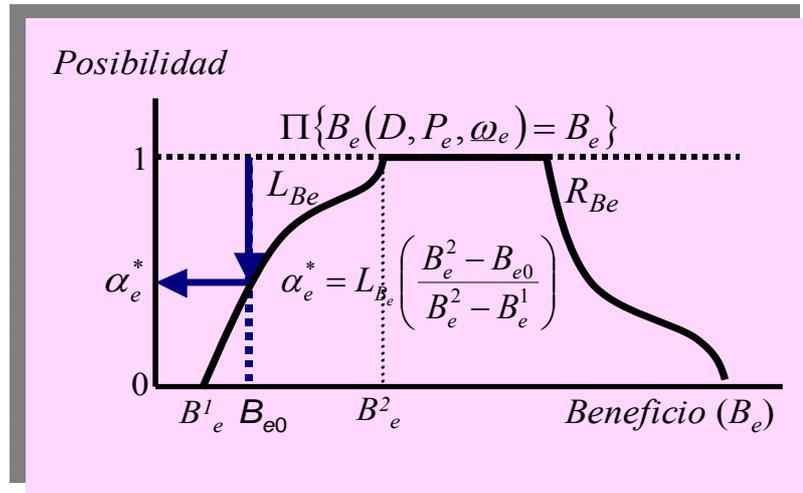


Figura 5. 24: Determinación de  $\alpha_e^*$  a minimizar en el enfoque dual LR

Se puede comprobar cómo al ser la producción  $P_e$  en un mercado real oligopolista siempre positiva y al satisfacer  $\underline{\mu}_{e0}$  la condición mostrada en (5. 14), el nivel de beneficio  $B_e^1$  nunca coincide con  $B_e^2$  (de hecho  $B_e^2 - B_e^1 > 0$ ), por lo que la función  $\alpha_e^*$  está bien definida y es continua (dado que las curvas de la demanda y de los costes son funciones continuas).

El problema de minimización del grado de posibilidad  $\alpha_e^*$  es equivalente, en este caso, al siguiente, en donde  $B_{e0}$  se expresa en función de las decisiones de explotación (ver Figura 5. 25):

$$\begin{aligned}
 & \underset{P_e, \alpha_e^* \in [0,1]}{\text{Min}} \alpha_e^* & (5. 96) \\
 & \text{s.a. } B_{e0} = B_e^2 - L_{B_e}^{-1}(\alpha_e^*) \cdot (B_e^2 - B_e^1) \\
 & \quad h_j^e = 0 \\
 & \quad g_k^e \leq 0
 \end{aligned}$$

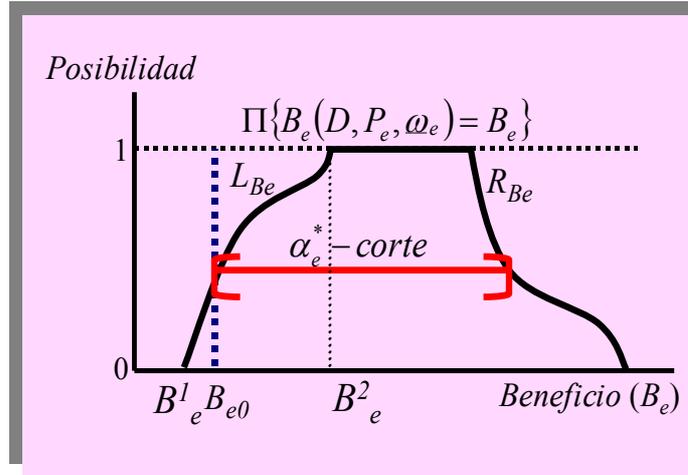


Figura 5.25: Determinación de  $B_e^*$  a maximizar en el enfoque dual LR

Utilizando el álgebra de intervalos sobre los  $\alpha_e^*$ -cortes de las distribuciones de posibilidad en  $\omega_e$ , puede comprobarse que el beneficio  $B_{e0}$  puede expresarse alternativamente como sigue:

$$B_e^* = \lambda(D, \mu_{e0}^*(D, \alpha_e^*)) \cdot P_e - C_e(P_e, c_e(\alpha_e^*)) \quad (5.97)$$

siendo:

$$\begin{aligned} \lambda(D, \mu_{e0}^*(D, \alpha_e^*)) &= \lambda(D, \mu_{e0}^*(D, 1)) - LR_e^{-1}(\alpha_e^*) \cdot (\lambda(D, \mu_{e0}^*(D, 1)) - \lambda(D, \mu_{e0}^*(D, 0))) \\ C_e(P_e, c_e(\alpha_e^*)) &= C_e(P_e, c_e^3) + R_e^{-1}(\alpha_e^*) \cdot (C_e(P_e, c_e^4) - C_e(P_e, c_e^3)) \end{aligned} \quad (5.98)$$

y en donde  $B_e^*$  es el beneficio  $B_{e0}$  como función de las decisiones de explotación,  $LR_e$  es la función de referencia  $L_e$  ó  $R_e$  de la distribución de los precios demandados dependiendo de si la demanda  $D$  es  $\leq$  o  $\geq$  que  $D_{e0}$  respectivamente, y  $C_e(P_e, c_e(\alpha_e^*))$  es el coste de producción  $\alpha_e^*$ -pesimista.

#### 5.4.5 Ecuaciones del equilibrio dual posibilista LR

Para cada generador  $e$ , la pendiente  $\mu_e(P_1, \dots, P_E)$  de la demanda residual que aparece en las ecuaciones del equilibrio de Cournot (ver apartado 5.3.1), resulta en el enfoque dual de derivar la curva esperada de la demanda  $\lambda(D, \mu_{e0}^*(D, \alpha_e^*))$  respecto de la potencia  $P_e$ . Puede comprobarse que en el equilibrio  $\mu_e(P_1, \dots, P_E)$  resulta ser:

$$\mu_e(P_1, \dots, P_E) = \mu_{e0}^*(D, \alpha_e^*(D, P_e, \alpha_{e0})) \quad \left( D = \sum_{e=1}^E P_e \right) \quad (5.99)$$

en donde:

$$\begin{aligned}\mu_{e0}^*(D, \alpha_e^*) &= \mu_{e0}^*(D, 1) - LR_e^{-1}(\alpha_e^*) \cdot (\mu_{e0}^*(D, 1) - \mu_{e0}^*(D, 0)) \\ \alpha_e^* &= \alpha_e^*(D, P_e, B_{e0}) = L_{B_e} \left( \frac{B_e^2 - B_{e0}}{B_e^2 - B_e^1} \right)\end{aligned}\quad (5. 100)$$

Por otro lado, el coste marginal  $CM_e$  es, según el enfoque dual, la derivada respecto de la potencia  $P_e$  del coste  $\alpha_e^*$ -pesimista, resultando ser en el equilibrio:

$$CM_e(D, P_e, c_e) = CM_e^*(P_e, \alpha_e^*(D, P_e, B_{e0})) \quad (5. 101)$$

en donde se ha denotado:

$$CM_e^*(P_e, \alpha_e^*) = \frac{\partial C_e(P_e, c_e^3)}{\partial P_e} + R_e^{-1}(\alpha_e^*) \cdot \left( \frac{\partial C_e(P_e, c_e^4)}{\partial P_e} - \frac{\partial C_e(P_e, c_e^3)}{\partial P_e} \right) \quad (5. 102)$$

que es el denominado coste marginal  $\alpha_e^*$ -pesimista.

La dependencia del coste marginal de producción  $CM_e$  respecto de la demanda  $D$  entra en conflicto con la suposición típica de que el coste de producción de un generador depende exclusivamente de la potencia  $P_e$ . Sin embargo, las funciones de coste marginal obtenidas son el resultado lógico de considerar incertidumbre en los costes variables de los grupos de generación, y de suponer aversión al riesgo de tener ingresos netos pequeños, que dependen de la demanda  $D$ .

Al igual que ocurría en el enfoque primal, para que las anteriores derivadas existan cuando la demanda  $D$  coincide con la demanda esperada  $D_{e0}$ , deben realizarse las mismas aproximaciones que en el enfoque primal para las curvas de la demanda  $\lambda(D, \mu_{e0}^*)$  y de los costes marginales de producción  $\alpha_e^*$ -pesimista, aproximaciones que se denotan como  $\lambda(D, \mu_{e0}^*, \theta)$  y  $CM_e^*(P_e, \alpha_e^*, \theta)$  respectivamente, en donde  $\theta$  era el parámetro de control de las mencionadas aproximaciones (ver apartado 5.3.6).

Las **ecuaciones del equilibrio dual LR** son entonces las siguientes:

$$\begin{aligned}\lambda &= \mu_{e0}^*(D, \alpha_e^*(D, P_e, B_{e0}), \theta) \cdot P_e + CM_e^*(P_e, \alpha_e^*(D, P_e, B_{e0}), \theta) \quad e=1, \dots, E \\ \lambda &= \lambda(D, \mu_0) \\ D &= \mathbf{1}^T P\end{aligned}\quad (5. 103)$$

Como puede verse, la única diferencia entre las ecuaciones del equilibrio dual (ver (5. 103)) y las ecuaciones primales (ver (5. 27)), que aparece también en ecuaciones posteriores, es que el nivel de riesgo  $\alpha_{e0} \in [0, 1)$  deja de ser un dato de entrada en el

enfoque dual para convertirse en una función  $\alpha_e^* \in [0,1)$  que depende de la demanda  $D$  y de la producción  $P_e$ .

Por un lado, esta diferencia es la causante de que las condiciones de segundo orden sean más complejas de probar que las del equilibrio primal (ver Anexo 5.2.1 para la demostración). Por otro lado, complica la identificación del signo de la derivada de  $\alpha_e^*$  con respecto de la potencia  $P_e$ , dado que:

- La función  $\mu_{e0}^*$  puede no ser siempre monótona creciente en  $P_e$ :

$$\frac{\partial \mu_{e0}^*(D, \alpha_e^*, \theta)}{\partial P_e} < 0 \quad (5.104)$$

- El coste marginal  $\alpha_e^*$ -pesimista puede no ser siempre monótono creciente en  $P_e$ :

$$\frac{\partial CM_e^*(P_e, \alpha_e^*, \theta)}{\partial P_e^2} < 0 \quad (5.105)$$

Por ello, no se puede demostrar la concavidad de la función de beneficio  $B_e^*$  (equivalentemente la convexidad de la función  $\alpha_e^*$ ) en toda la región factible  $X$  (en el Anexo 5.2.1 se muestra la dependencia de la derivada segunda de  $B_e^*$  con respecto de la de  $\alpha_e^*$ ), lo que hace que no pueda asegurarse la convergencia global de un algoritmo de desigualdades variacionales similar al descrito en el enfoque primal.

Sin embargo, dado que en el equilibrio las derivadas de  $\mu_{e0}^*$  y de  $CM_e^*$  respecto de la potencia  $P_e$  son positivas (ver Anexo 5.2.1), por continuidad de las derivadas (que también puede suponerse si las aproximaciones  $\lambda(D, \mu_{e0}^*, \theta)$  y  $CM_e^*(P_e, \alpha_e^*, \theta)$  son de clase uno<sup>48</sup>) puede encontrarse un entorno  $E(P^*)$  del punto de equilibrio  $P^*$  en el que  $\mu_{e0}^*$  y  $CM_e^*$  son monótonas crecientes en  $P_e$ , y por lo tanto en el que  $B_e^*$  es estrictamente cóncava, lo que asegura la convergencia local del algoritmo en  $E(P^*)$ . La determinación del entorno  $E(P^*)$  requiere un análisis detallado de la región de concavidad de la función de beneficio  $B_e^*$ , análisis que queda fuera de los objetivos de esta tesis.

Al igual que con el enfoque primal, el problema del cálculo del límite  $P^*$  cuando  $\theta$  tiende a cero de la sucesión  $\{P^*(\theta)\}$  de equilibrios obtenidos resolviendo (5.103) para cada valor de  $\theta$ , no ha sido abordado en esta tesis (en caso de que  $P^*$  exista), considerando que una buena aproximación de  $P^*$  consiste en el cálculo de un equilibrio  $P^*(\theta)$  cuando  $\theta$  permanece fijo y es suficientemente pequeño. Por ello, en adelante se elimina la dependencia respecto de  $\theta$  de todas las funciones involucradas.

<sup>48</sup>Una función de clase  $k$  tiene por derivada  $k$ -ésima una función continua.

### 5.4.6 Consideración de las restricciones de explotación de los agentes

Las ecuaciones KKT que modelan la casación de ofertas considerando las restricciones de explotación de los agentes son las siguientes:

$$\left. \begin{array}{l} CM_e^*(P_e, \alpha_e^*) + \mu_{e0}^* (\lambda(\Gamma^T P, \mu_0), \alpha_e^*) \cdot P_e - \lambda(\Gamma^T P, \mu_0) - \sum_{j=1}^{m_e} \eta_e^j \cdot \frac{\partial h_e^j(P_e)}{\partial P_e} - \sum_{k=1}^{n_e} \kappa_e^k \cdot \frac{\partial g_e^k(P_e)}{\partial P_e} = 0 \\ h_e^j(P_e) = 0 \quad j=1, \dots, m_e \\ g_e^k(P_e) \leq 0 \quad k=1, \dots, n_e \\ \kappa_e^k \cdot g_e^k(P_e) = 0 \quad k=1, \dots, n_e \\ \kappa_e^k \leq 0 \end{array} \right\} e=1, \dots, E \quad (5.106)$$

Fruto del trabajo realizado en esta tesis, cuando se considera  $D_{e0}=0$  para cualquier agente  $e$  y se modela únicamente el grado de aversión  $\alpha_e^*$  de un generador  $e$ , en [Campos, 2005a] se propone una metodología de resolución de las anteriores ecuaciones de equilibrio que está basada en el planteamiento de un modelo de optimización fraccional-cuadrático<sup>49</sup> equivalente y que es eficiente en la resolución de un caso de tamaño real del mercado eléctrico. El modelo permite determinar los beneficios mínimos  $B_{e0}$  que estima el generador  $e$  que fijará la competencia cuando se supone que los beneficios  $B_{e0}$  deben ser igualmente alcanzables con los recursos disponibles de cada generador, suposición que se modela con las siguientes condiciones adicionales, que se denominan **condiciones de simetría**<sup>50</sup>:

$$\alpha_e^*(D, P_e, B_{e0}) = \alpha_{e'}^*(D, P_{e'}, B_{e0}) \quad e=1, \dots, E, e \neq e' \quad (5.107)$$

En los dos siguientes epígrafes se describe un algoritmo que encuentra el equilibrio dual propuesto en este apartado, y además resuelve el problema planteado en [Campos, 2005a] para cualquier valor de  $D_{e0}$ . En este último caso deben sustituirse en el algoritmo las funciones  $\alpha_e^*$  por  $\alpha_{e'}^*$ , y las  $E-1$  variables de beneficio mínimo  $B_{e0}$  para  $e \neq e'$  pueden obtenerse a partir de las condiciones de simetría, una vez se haya producido la convergencia.

<sup>49</sup>Modelo de optimización cuya función objetivo es una fracción entre funciones cuadráticas.

<sup>50</sup>El calificativo de simetría también es utilizado en [Bolle, 1992] cuando la función objetivo es igual al beneficio de cada agente.

### 5.4.7 Modelado del equilibrio dual LR utilizando desigualdades variacionales

De manera similar al enfoque primal, la resolución de las ecuaciones duales mostradas en (5. 106) es equivalente a la obtención de una solución del problema de desigualdades variacionales  $VI(X,F)$  en donde la función  $F:\mathfrak{R}^E \rightarrow \mathfrak{R}^E$  tiene por componente  $e$ -ésima la siguiente función:

$$F = (F_1, \dots, F_E) \quad (5. 108)$$

$$F_e(P) = CM_e^*(P_e, \alpha_e^*(\mathbb{1}^T P, P_e, B_{e0})) + \mu_{e0}^* \left( \lambda(\mathbb{1}^T P, \mu_0), \alpha_e^*(\mathbb{1}^T P, P_e, B_{e0}) \right) \cdot P_e - \lambda(\mathbb{1}^T P, \mu_0)$$

y en donde  $X$  es el conjunto de restricciones de explotación de todos los agentes.

Demostradas las propiedades de convexidad y compacidad de la región  $X$  (ver Anexo 5.1.1), la única condición para que exista una solución de las ecuaciones duales es que la función  $F$  sea una función continua, lo que es cierto dado que el coste marginal  $\alpha_e^*$ -pesimista y la pendiente  $\mu_{e0}^*(D, \alpha_e^*)$  son combinaciones de funciones continuas. Sin embargo, no se ha podido demostrar la unicidad del equilibrio.

### 5.4.8 Resolución de las ecuaciones duales LR utilizando un algoritmo para desigualdades variacionales

Para encontrar una solución a las ecuaciones del equilibrio dual se propone utilizar el algoritmo descrito en el apartado 5.3.9 cuando la función  $F^k$  es:

$$F^k(P) = CM(P^k, P) + A(P^k, P) - rM(P^k, P) \quad (5. 109)$$

$$F^k = (F_1^k, \dots, F_E^k), CM = (CM_1, \dots, CM_E)$$

$$A = (A_1, \dots, A_E), rM = (rM_1, \dots, rM_E)$$

siendo en este caso:

$$F_e^k(P) = CM_e(P^k, P) + A_e(P^k, P) - rM_e(P^k, P_e, \alpha) \quad (5. 110)$$

$$CM_e(P^k, P_e) = CM_e^*(P_e, \alpha_e^*(\mathbb{1}^T P^k, P_e, B_{e0}))$$

$$A_e(P^k, P) = \mu_{e0}^* \left( \lambda(\mathbb{1}^T P^k, \mu_0), \alpha_e^*(\mathbb{1}^T P^k, P_e, B_{e0}) \right) \cdot P_e - \lambda(\mathbb{1}^T P, \mu_0)$$

$$rM_e(P_e^k, P_e, \alpha) = \alpha \cdot (P_e^k - P_e)$$

y en donde  $\{P^{kT} = (P_1^k, \dots, P_E^k)\} \subseteq X$  es la secuencia generada por el algoritmo con punto inicial  $P^l$  seleccionado en la región  $E(P^*)$  y  $\alpha > 0$  es un parámetro positivo tal que:

$$\alpha \geq \frac{K}{\varepsilon} + \theta \quad (5.111)$$

siendo  $\varepsilon > 0$  el parámetro de convergencia del algoritmo,  $\theta > 0$  un parámetro positivo cualquiera, y siendo:

$$K = \left( \text{Max}_{e=1,\dots,E} \{ \mu_{e0}^4 - \mu_{e0}^1 \} \cdot \text{Max}_{e=1,\dots,E} \{ pc_e \} + \text{Max}_{e=1,\dots,E} \left\{ \text{Max}_{g \in e} \{ c_g^4 - c_g^1 \} \right\} \right) \cdot \sqrt{E} \quad (5.112)$$

Con un razonamiento por reducción al absurdo similar al seguido en el Anexo 5.1.3, se puede demostrar la convergencia del algoritmo dual en el entorno  $E(P^*)$ . Para resolver el subproblema  $VI(F^k, X)$  definido en cada iteración del algoritmo es necesario optimizar un modelo de programación cuadrática parecido al descrito en 5.3.11.

## 5.5 Los enfoques primal y dual en el equilibrio en variaciones conjeturales

En los apartados anteriores se han descrito dos metodologías para el cálculo del equilibrio en estrategias de cantidad suponiendo, fundamentalmente, las siguientes hipótesis:

- Las curvas de la demanda esperadas por cada generador son lineales en torno a un punto hipotético de casación  $(D_{e0}, \lambda_{e0})$ .
- Las pendientes  $\underline{\mu}_{e0}$  de las curvas de la demanda esperadas son distribuciones de posibilidad  $LR$ .
- La producción ofertada por la competencia  $P_{-e}$  no reacciona ante  $P_e$ , esto es,  $P_{-e}(P_e)=0$ , lo que corresponde con el equilibrio de Cournot.

La conjetura que realiza cada agente acerca de la curva de la demanda esperada generaliza la suposición tradicional en la que cada agente espera una misma curva de la demanda. Por ello, en esta tesis el equilibrio de Cournot propuesto puede denominarse **equilibrio de Cournot con conjeturas en las demandas esperadas por los generadores**.

Por otro lado, en el equilibrio de Cournot propuesto, al igual que en otros obtenidos en la literatura, el precio marginal es altamente sensible con la forma de la curva de la demanda, lo que típicamente deriva en precios más altos que los precios reales (ver [Day, 2002]). Para evitar este comportamiento, y también para representar más adecuadamente las estrategias de los agentes en su interacción con el mercado, suele considerarse que **cada agente supone una reacción estratégica de la competencia ante sus ofertas**. Un tipo de modelo de equilibrio que considera esta suposición se conoce como **modelo de equilibrio conjetural** (ver apartado 4.3.2.3 para una lista de referencias básicas), que generaliza al modelo de equilibrio de Cournot.

En los modelos basados en conjeturas variacionales existen varias alternativas que permiten tener en consideración la reacción de los competidores ante las ofertas de los generadores. Una de estas alternativas representa la reacción con la variación de la producción ofertada por la competencia  $P_{-e}$  ante cambios en  $P_e$ <sup>51</sup>. Suponiendo linealidad en la relación  $P_{-e}(P_e)$ , el parámetro de entrada que representa la reacción de la competencia es:

---

<sup>51</sup>Para una descripción clarificadora de esta y otras representaciones, así como de las relaciones entre las mismas, véase el apartado 3.3 de [Reneses, 2004].

$$\chi_e = \frac{\partial P_e(P_e)}{P_e} \quad (5.113)$$

Sin embargo, esta representación, al igual que muchas otras, no permite plantear el equilibrio cuando se consideran curvas de la demanda completamente inelásticas, dado que la pendiente de la demanda residual  $\mu_e(P_1, \dots, P_E)$  que aparece en sus ecuaciones es función de la pendiente  $\mu_0$  de la curva de la demanda, que en el caso inelástico es infinita (en [Reneses, 2004] se muestran las relaciones existentes entre  $\mu_e$  y  $\mu_0$ ).

Por ello, en esta tesis esta reacción se ha modelado directamente con **la variación del precio  $\lambda$  resultante del mercado con respecto de la producción  $P_e$  del agente**, es decir, considerando como parámetro de entrada la pendiente de la demanda residual esperada por cada generador. Esta representación permite considerar curvas de demanda inelásticas así como las hipótesis de competencia perfecta (que se tiene cuando  $\mu_e=0$ ) y el equilibrio de Cournot propuesto (cuando  $\mu_e$  es igual a la pendiente  $\mu_{e0}$  de la curva de la demanda esperada por cada generador), así como cualquiera de las situaciones intermedias (ver [Reneses, 2004] para más detalle). Así, la variación conjetural<sup>52</sup> que se supone en esta tesis es:

$$\mu_{e0} = -\frac{\partial \lambda}{P_e} \quad (5.114)$$

El parámetro  $\mu_{e0}$  aparece en esta ecuación con signo negativo para reflejar el hecho de que en el equilibrio, cuando se incrementa unilateralmente la producción de un agente, el precio marginal  $\lambda$  es menor.

En esta tesis se ha supuesto además que el valor absoluto  $\mu_{e0}$  de la pendiente de la curva de la demanda residual de cada generador es una distribución de posibilidad  $\mu_{e0}$  positiva de tipo *LR*. En el apartado 5.7 se muestra una metodología para la estimación de esta distribución, teniendo en cuenta la información histórica que se tenga disponible.

En la Figura 5. 26 se muestran las curvas de la demanda residual tenidas en consideración en el modelo propuesto, que coinciden en el precio  $\lambda_{e0}$  esperado por generador.

<sup>52</sup>Se ha utilizado la misma notación que para la pendiente de la demanda en el equilibrio de Cournot, dado que coincide con la pendiente de la demanda residual.

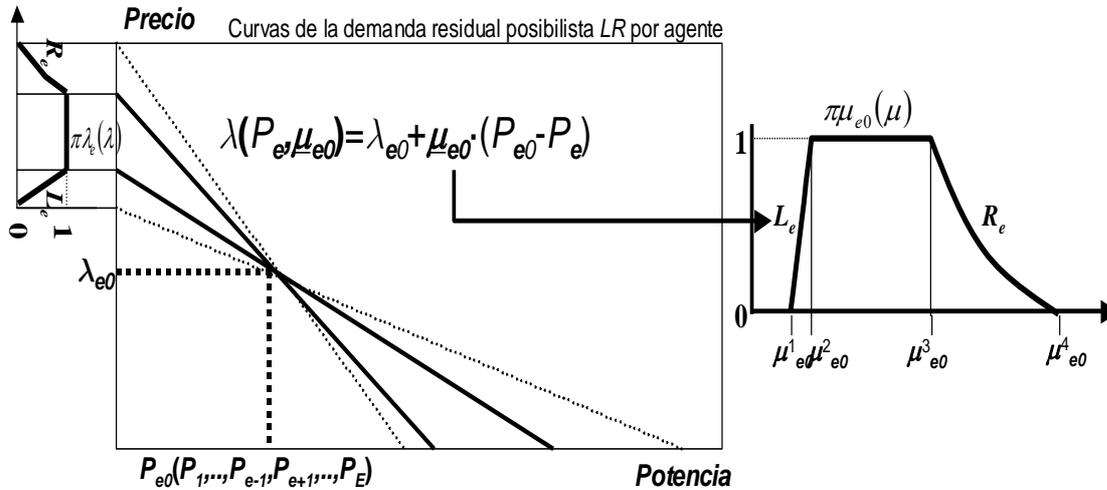


Figura 5. 26: Curvas de la demanda residual LR de cada agente

Dado que la curva de la demanda residual de cada generador depende de las ofertas del resto de generadores, la producción  $P_{e0}$  cuyo precio de mercado es el esperado  $\lambda_{e0}$  es un resultado del modelo propuesto.

Las ecuaciones del equilibrio primal que se obtienen son, entonces, las siguientes<sup>53</sup>:

$$\begin{aligned} \lambda &= CM_e^*(P_e, \alpha_{e0}) + \mu_{e0}^*(\lambda, \alpha_{e0}) \cdot P_e \quad e=1, \dots, E \\ \lambda &= \lambda(D, \mu_0) \\ D &= \mathbf{1}^T P \end{aligned} \tag{5. 115}$$

siendo la pendiente de la demanda residual  $\mu_{e0}^*$  función del precio  $\lambda$ :

$$\mu_{e0}^*(\lambda, \alpha_{e0}) = \begin{cases} \mu 1(\alpha_{e0}) & \text{si } \lambda > \lambda_{e0} \\ \mu 2(\alpha_{e0}) & \text{si } \lambda < \lambda_{e0} \end{cases} \tag{5. 116}$$

Las ecuaciones de equilibrio anteriores pueden resolverse mediante el algoritmo de desigualdades variacionales propuesto en el apartado 5.3.9.

<sup>53</sup>Las condiciones de segundo orden se satisfacen de manera similar al caso del equilibrio primal en Cournot. Además, por simplicidad no se muestra explícitamente la aproximación por funciones diferenciables de las pendientes de la demanda residual y de las funciones de coste marginal, ni se muestran las restricciones de explotación. En lo que sigue tampoco se muestran los comentarios, las ecuaciones y las metodologías de resolución relacionadas con el equilibrio dual, principalmente porque la aplicación de los enfoques propuestos solamente se ha realizado en esta tesis para el enfoque primal.

Además, tal y como se ha comentado anteriormente, la conjetura variacional considerada en esta tesis permite considerar en las ecuaciones del equilibrio una curva de la demanda inelástica, resultando en las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \lambda &= CM_e^*(P_e, \alpha_{e0}) + \mu_{e0}^*(\lambda, \alpha_{e0}) \cdot P_e \quad e=1, \dots, E \\ \mathbb{1}^T P &= D^0 \end{aligned} \quad (5.117)$$

siendo  $D^0$  un valor esperado de la demanda, que tiene necesariamente que satisfacerse.

Estas nuevas ecuaciones constan de  $E+1$  restricciones con  $E+1$  incógnitas (el precio  $\lambda$  y las producciones  $P_e$  de cada agente) por lo que están bien definidas.

Dado que la función  $F$  que define el problema  $VI(X, F)$  en el caso de demanda inelástica no puede describirse solamente como función de las producciones  $P_e$  de cada agente (dado que el precio  $\lambda$  no depende de la demanda  $D$ ) es necesario modificar ligeramente el planteamiento y la metodología de resolución propuesta en el apartado 5.3 para resolver las ecuaciones del equilibrio primal.

Sea ahora la función  $F: \mathfrak{R}^{E+1} \rightarrow \mathfrak{R}^{E+1}$  definida como:

$$\begin{aligned} F &= (F_1, \dots, F_E, F_\lambda) \\ F_e(P, \lambda) &= CM_e^*(P_e, \alpha_{e0}) + \mu_{e0}^*(\lambda, \alpha_{e0}) \cdot P_e - \lambda \quad e=1, \dots, E \\ F_\lambda(P, \lambda) &= 0 \end{aligned} \quad (5.118)$$

y sea el conjunto  $X$  formado por las restricciones de explotación de todos los agentes y la ecuación de la satisfacción de la demanda inelástica, es decir:

$$X = \left\{ P : \mathbb{1}^T P = D^0, h_e^j(P_e) = 0, g_e^k(P_e) \leq 0, j = 1, \dots, m_e, k = 1, \dots, n_e, e = 1, \dots, E \right\} \quad (5.119)$$

Entonces la resolución de las ecuaciones (5.117) cuando se consideran las restricciones de explotación de los agentes es equivalente a resolver el problema de desigualdades variacionales  $VI(X, F)$  (ver [Facchinei, 2003]).

Por otro lado, la función  $F^k$  que define cada subproblema a resolver en el algoritmo para el caso inelástico es:

$$\begin{aligned} F^k(P, \lambda) &= CM(P, \lambda) + A(P^k, P, \lambda) - rM(P^k, P, \lambda, \alpha) \\ F^k &= (F_1^k, \dots, F_E^k, F_\lambda^k); CM = (CM_1, \dots, CM_E, CM_\lambda) \\ A &= (A_1, \dots, A_E, A_\lambda); rM = (rM_1, \dots, rM_E, rM_\lambda) \end{aligned} \quad (5.120)$$

siendo:

$$\begin{aligned}
 F_e^k(P, \lambda) &= CM_e(P_e) + A_e(P^k, P, \lambda) - rM_e(P_e^k, P_e, \alpha) & (5.121) \\
 CM_e(P_e) &= CM_e^*(P_e, \alpha_{e0}) \\
 A_e(P^k, P, \lambda) &= \mu_{e0}^*(\lambda(P^k), \alpha_{e0}) \cdot P_e - \lambda \\
 rM_e(P_e^k, P_e, \alpha) &= \alpha \cdot (P_e^k - P_e) \\
 F_\lambda^k(P, \lambda) &= CM_\lambda(P, \lambda) = A_\lambda(P, \lambda) = rM_\lambda(P, \lambda) = 0
 \end{aligned}$$

y en donde  $\{\lambda(P^k)\}$  es la secuencia de precios relativos a la sucesión  $\{P^{kT} = (P^k_1, \dots, P^k_E)\} \subseteq X$  (de manera similar se define  $\{\lambda(Z^k)\}$ ) generada por el algoritmo con punto inicial  $P^1$  seleccionado arbitrariamente en  $X$  y  $\alpha > 0$  es un parámetro positivo tal que:

$$\alpha \geq \frac{K}{\varepsilon} + \theta \quad (5.122)$$

siendo  $\varepsilon > 0$  el parámetro de convergencia del algoritmo,  $\theta > 0$  un parámetro positivo cualquiera, y:

$$K = \max_{e=1, \dots, E} \{\mu_{2e0}(\alpha_{e0}) - \mu_{1e0}(\alpha_{e0})\} \cdot \max_{e=1, \dots, E} \{pc_e\} \cdot \sqrt{E} \quad (5.123)$$

De una forma similar a la mostrada en el Anexo 5.1.3 se puede demostrar la convergencia de las sucesiones  $\{Z^k\}$  y  $\{P^k\}$  y de la sucesión  $\{\|Z^k - P^k\|\}$  a cero, lo que implica que las sucesiones  $\{Z^k\}$  y  $\{P^k\}$  tienden al punto de equilibrio  $P^*$ .

Por otro lado, para resolver el subproblema de desigualdades variacionales  $VI(X, F^k)$  se puede utilizar el problema de optimización descrito en el apartado 5.3.11. Sin embargo, en el caso de demanda inelástica, la utilidad de la demanda se define en este problema como nula, dado que en este caso la demanda está dispuesta a comprar energía a cualquier precio.

La variable dual de la restricción de balance del subproblema sigue siendo el precio de mercado que resuelve las ecuaciones de KKT equivalentes a  $VI(X, F^k)$ , precio que se denota como  $\lambda(Z^k, P^k)$  dado que depende de la producción  $P^k$  fijada en el subproblema y obviamente de la solución  $Z^k$  del subproblema.

Como en el paso de búsqueda lineal no resulta sencillo determinar los precios  $\lambda(P^k)$  y  $\lambda(Z^k)$  (dado que son los resultantes de resolver (5.117) fijando los vectores de producción  $P^k$  y  $Z^k$  respectivamente) una aproximación razonable de estos precios, y que ha dado resultados satisfactorios en los casos de estudio analizados en el siguiente capítulo, es el precio  $\lambda(Z^k, P^k)$  obtenido con la resolución de cada

subproblema. Además, problemas similares a los descritos en los apartados 5.3.10 y 5.3.12 para el equilibrio de Cournot aparecen también en el caso del equilibrio en variaciones conjeturales, pudiéndose resolver de una manera similar a la mostrada en dichos apartados.

Dado que la función  $F$  tiene por componente  $E+1$ -ésima la función nula, el algoritmo puede describirse de una manera más sencilla con la función  $G: \mathfrak{R}^{E+1} \rightarrow \mathfrak{R}^E$  que coincide con la función  $F$  en sus  $E$  primeros componentes, esto es:

$$G = (G_1, \dots, G_E) \tag{5.124}$$

$$G_e(P, \lambda) = CM_e^*(P_e, \alpha_{e0}) + \mu_{e0}^*(\lambda, \alpha_{e0}) \cdot P_e - \lambda \quad e = 1, \dots, E$$

y con la función  $G^k: \mathfrak{R}^{E+1} \rightarrow \mathfrak{R}^E$  del subproblema que coincide en sus  $E$  primeros componentes con la función  $F^k$ , en cuyo caso el algoritmo es el siguiente:

Paso 0. Inicialización.

Hacer  $k=1$ . Elegir  $\varepsilon > 0$ ,  $\theta > 0$ ,  $\varepsilon^k > 0$ ,  $n=1$ ,  $n_m$  natural,  $\sigma \in (0,1)$ ,  $\gamma \in (0,1]$  cualesquiera y  $P^k$  un punto arbitrario en  $X$ .

Paso 1. Resolución del subproblema  $VI(X, G^k)$ .

Sea  $\alpha^k$  tal que:

$$\alpha^k = \frac{K}{\varepsilon^k} + \theta \tag{5.125}$$

Hacer  $\alpha = \alpha^k$  y encontrar  $Z^k \in X$  tal que:

$$G^k(Z^k, \lambda)^T (P - Z^k) \geq 0 \quad \forall P \in X \tag{5.126}$$

Paso 2. Comprobación de la optimalidad.

Si  $M(P^k) < \varepsilon$  entonces parar,  $P^k$  resuelve el problema  $VI(X, F)$ .

Paso 3. Búsqueda lineal.

Elegir  $\beta_k \in (0,2)$  y hacer:

$$\underline{P}^k(\beta_k) = P^k - \beta_k \cdot \frac{G(Z^k, \lambda(Z^k, P^k))^T (P^k - Z^k)}{\|G(Z^k, \lambda(Z^k, P^k))\|^2} \cdot G(Z^k, \lambda(Z^k, P^k)) \tag{5.127}$$

Hacer  $P^{k+1} = Pr_X(\underline{P}^k(\beta_k))$ ,  $\lambda(P^{k+1}) = \lambda(Z^k, P^k)$ .

Paso 4. Actualización de tolerancias y comprobación de reinicialización.

Si  $\|P^k - Z^k\| < \varepsilon^k$  entonces hacer  $\varepsilon^{k+1} = \sigma \cdot \varepsilon^k$ ,  $n=1$  (actualización de tolerancia).

Si  $\|P^k - Z^k\| \geq \varepsilon^k$  y  $n > n_m$  entonces hacer  $\varepsilon^{k+1} = \gamma \cdot \varepsilon^k$ ,  $n=1$  (reinicialización).

Si  $\|P^k - Z^k\| \geq \varepsilon^k$  y  $n \leq n_m$  entonces hacer  $\varepsilon^{k+1} = \varepsilon^k$ ,  $n=n+1$ .

Paso 5. Comprobación de la monotonía.

Si  $(M(P^k) > M(P^{k+1}))$  ó  $\varepsilon^{k+1} > \varepsilon^k$  hacer  $k=k+1$  e ir al paso 1.

Paso 6. Búsqueda de monotonía.

Elegir  $\theta_1^* \in (0,1)$  y  $\theta_2^* \in (-\infty,0)$  próximos a 0. Sea entonces:

$$P^{k\theta^*}(\rho_{k\theta^*}) = P^k - \rho_{k\theta^*} \cdot \frac{G(Z^k, \lambda(Z^k, P^k))^T (P^k - Q^{k\theta^*})}{\|G(Z^k, \lambda(Z^k, P^k))\|^2} \cdot G(Z^k, \lambda(Z^k, P^k)) \quad (5.128)$$

$$\rho_{k\theta^*} \in (0,2) \quad \theta^* \in \{\theta_1^*, \theta_2^*\}$$

Hacer  $P^{k+1, \theta^*} = Pr_{\lambda}(P^{k\theta^*}(\rho_{k\theta^*}))$  para  $\theta^* \in \{\theta_1^*, \theta_2^*\}$ .

Sea  $\theta^* \in \{\theta_1^*, \theta_2^*\}$  talque:

$$M(P^{k+1, \theta^*}) = \text{Min}\{M(P^{k+1, \theta_1^*}) M(P^{k+1, \theta_2^*})\} \quad (5.129)$$

Hacer  $P^{k+1} = P^{k+1, \theta^*}$  hacer  $k=k+1$  e ir al paso 1.

## 5.6 Complementos del modelo básico posibilista

En este apartado se describen algunos complementos del modelo posibilista del mercado de generación analizado hasta el momento, así como sus correspondientes metodologías de resolución. Los complementos tenidos en cuenta son:

- La consideración de varios periodos temporales y el acoplamiento entre los mismos.
- La introducción de contratos entre empresas.
- La consideración de restricciones de explotación posibilistas.

Este apartado expone el planteamiento de cada uno de estos complementos así como la descripción de su metodología de resolución exclusivamente para el caso de demanda elástica, aunque el planteamiento y resolución para el caso del equilibrio en variaciones conjeturales con demanda inelástica son similares al caso elástico. Por otro lado, para los casos multiperiodo y con contratos entre empresas no se consideran en las ecuaciones del equilibrio ni las restricciones de explotación ni las aproximaciones descritas en 5.3.6. Además, en el caso con contratos se ha considerado una formulación monopериодо.

### 5.6.1 Generalización para el caso multiperiodo

La situación analizada hasta el momento considera en el cálculo de los equilibrios propuestos un único periodo temporal. En este apartado se van a dar las pautas para extender las metodologías propuestas al caso en que se consideren distintos periodos temporales, que pueden tener distinta duración.

Debido a que en los modelos de medio plazo no es necesario un elevado nivel de detalle en los resultados, usualmente suele considerarse una **discretización del tiempo no ordenada**, que resulta de agrupar horas de características similares que no tienen porqué ser consecutivas. El criterio de agrupación más extendido es el que da lugar a distintos **niveles de carga** de la demanda, siendo cada uno de ellos un determinado **periodo, subperiodo y bloque** (simplificadamente *psb*), que especifica una determinada hora o conjunto de horas (bloque) de un determinado día o conjunto de días (subperiodo) en un determinado mes o semana, o conjunto de meses o semanas (periodo) (ver [Reneses, 2004]).

Con esta discretización del horizonte temporal, se ha supuesto que en cada *psb* las potencias a generar, la potencia demandada, y cualquier otra variable o parámetro por *psb*, son constantes. Por lo tanto, los resultados y variables de decisión

expresados en términos de energía para cada  $psb$ , son los resultantes de multiplicar los correspondientes resultados y variables de decisión en términos de potencia por las **duraciones  $l_{psb}$  de los niveles de carga**, que son el número de horas contenidas en cada  $psb$ .

Es fácil comprobar que en el caso multiperiodo el beneficio a maximizar por el generador  $e$  en el enfoque primal es:

$$B_e(D, P_e, \omega_e^*) = \sum_{p=1}^P \sum_{s=1}^S \sum_{b=1}^B B_{epsb}(D_{psb}, P_{epsb}, \omega_{epsb}^*) \quad (5.130)$$

en donde:

- $P, S, B$  es el número de periodos, subperiodos y bloques respectivamente.
- $B_{epsb}(D_{psb}, P_{epsb}, \omega_{epsb}^*)$  es el beneficio de cada agente en cada  $psb$  obtenido con el enfoque primal. Siendo, para cada  $psb$ ,  $D_{psb}$  la demanda total satisfecha,  $P_{epsb}$  la potencia a producir y  $\omega_{epsb}^*$  el vector que contiene la pendiente de la demanda residual esperada por el generador, que dependía del precio de mercado  $\lambda_{psb}$ , y que contiene a los costes de producción sobrevalorados de cada grupo de generación del agente.
- La demanda  $D$ , la producción  $P_e$  y  $\omega_e^*$  son vectores con todos los componentes por  $psb$  de las variables  $D_{psb}$ ,  $P_{epsb}$  y  $\omega_{epsb}^*$  descritas en el punto anterior, esto es:

$$\begin{aligned} P_e &= (P_{epsb}; p=1, \dots, P, s=1, \dots, S, b=1, \dots, B)^T \\ D &= (D_{psb}; p=1, \dots, P, s=1, \dots, S, b=1, \dots, B)^T \\ \omega_e^* &= (\omega_{epsb}^*; p=1, \dots, P, s=1, \dots, S, b=1, \dots, B)^T \end{aligned} \quad (5.131)$$

De una forma similar al caso monopetodo se pueden obtener las ecuaciones de equilibrio para el caso multipetodo, que son las siguientes:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{psb} &= \mu_{epsb}^*(\lambda_{psb}, \alpha_{e0}) \cdot P_{epsb} + CM_{epsb}^*(P_{epsb}, \alpha_{e0}) \quad e=1, \dots, E \\ \lambda_{psb} &= \lambda_{psb}(D_{psb}, \mu_{psb0}) \\ D_{psb} &= \sum_{e=1}^E P_{epsb} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} p=1, \dots, P \\ s=1, \dots, S \\ b=1, \dots, B \end{array} \quad (5.132)$$

siendo,  $\lambda_{psb}(D_{psb}, \mu_{psb0})$  la curva de la demanda esperada en la casación,  $\mu_{epsb}^*(\lambda_{psb}, \alpha_{e0})$  la pendiente de la demanda esperada de acuerdo al enfoque primal, y  $CM_{epsb}^*(P_{epsb}, \alpha_{e0})$  la curva de costes marginales  $\alpha_{e0}$ -pesimista, para cada  $psb$ .

Obsérvese que en el caso multiperiodo se ha supuesto que el generador no fija un nivel de riesgo  $\alpha_{e0}$  para cada nivel de carga, sino que trata de reducir el riesgo de pérdidas totales resultantes de sumar todas las perdidas incurridas en todos los niveles de carga.

Por otro lado, dado que para cada nivel de carga la pendiente  $\mu_{epsb0}^*$  depende del precio marginal  $\lambda_{psb}$ , cuando se consideran restricciones que ligan precios entre niveles de carga (como las descritas en el apartado 5.6.3.5),  $\mu_{epsb0}^*$  es función de las pendientes de niveles de carga del resto de periodos, lo que hace que las ecuaciones del equilibrio no puedan resolverse eficientemente a través de varias optimizaciones del modelo de optimización propuesto en [Barquín, 2004]<sup>54</sup>. A continuación se describe un algoritmo que, se ha comprobado con los casos de estudio analizados, permite resolver eficientemente las ecuaciones del equilibrio. El algoritmo es similar al del caso monopetodo, salvo que deben tenerse en cuenta los siguientes puntos:

- La función  $F$  en el algoritmo se define en el caso multipetodo como:

$$\begin{aligned}
 F &= (F_1, \dots, F_E) & (5.133) \\
 F_e &= (F_{epsb}; p=1, \dots, P, s=1, \dots, S, b=1, \dots, B), \\
 F_{epsb}(P_{psb}) &= CM_e^*(P_{epsb}, \alpha_{e0}) + \mu_{epsb0}^* \left( \lambda \left( \mathbb{1}^T P_{psb}, \mu_{psb0} \right), \alpha_{e0} \right) \cdot P_{epsb} - \lambda \left( \mathbb{1}^T P_{psb}, \mu_{psb0} \right) \\
 P_{psb} &= (P_{epsb}; e=1, \dots, E)^T
 \end{aligned}$$

- La función  $F^k$  es:

<sup>54</sup>En el caso sin restricciones interpetodo, el número de optimizaciones a realizar se reduce significativamente, dado que solamente deben evaluarse las posibles pendientes  $\{\mu_{epsb0}^* \in \{\mu_{epsb0}^1 \text{ ó } \mu_{epsb0}^2\}, e, p, s, b\}$  desacopladas por niveles de carga. El equilibrio resultaría en este caso de aquella optimización en la que el conjunto de pendientes fijadas  $\{\mu_{epsb0}^*, e, p, s, b\}$  coincidiese con el conjunto de pendientes  $\{\mu_{epsb0}^*(\lambda_{psb}), e, p, s, b\}$  evaluadas con los precios marginales  $\{\lambda_{psb}, p, s, b\}$  resultantes de la optimización.

$$\begin{aligned}
F^K(P) &= CM(P) + A(P^k, P) - rM(P^k, P, \alpha) & (5.134) \\
F^K &= (F_1^k, \dots, F_E^k); CM = (CM_1, \dots, CM_E) \\
A &= (A_1, \dots, A_E); rM = (rM_1, \dots, rM_E); \\
F_e^k &= (F_{epsb}^k; p=1, \dots, P, s=1, \dots, S, b=1, \dots, B); \\
CM_e &= (CM_{epsb}; p=1, \dots, P, s=1, \dots, S, b=1, \dots, B); \\
A_e &= (A_{epsb}; p=1, \dots, P, s=1, \dots, S, b=1, \dots, B); \\
rM_e &= (rM_{epsb}; p=1, \dots, P, s=1, \dots, S, b=1, \dots, B) \\
P &= (P_1, \dots, P_E)^T; P^k = (P_1^k, \dots, P_E^k)^T \\
P_e &= (P_{epsb}; p=1, \dots, P, s=1, \dots, S, b=1, \dots, B)^T \\
P_e^k &= (P_{epsb}^k; p=1, \dots, P, s=1, \dots, S, b=1, \dots, B)^T
\end{aligned}$$

siendo:

$$\begin{aligned}
F_{epsb}^k(P) &= CM_{epsb}(P_{epsb}) + A_{epsb}(P_{psb}^k, P_{psb}) - rM_{epsb}(P_{epsb}^k, P_{epsb}, \alpha_{psb}) & (5.135) \\
CM_{epsb}(P_{epsb}) &= CM_{epsb}^*(P_{epsb}, \alpha_{e0}) \\
A_{epsb}(P_{psb}^k, P_{psb}) &= \mu_{epsb0}^* \left( \lambda \left( \mathbf{1}^T P_{psb}^k, \mu_{psb0} \right), \alpha_{e0} \right) \cdot P_{epsb} - \lambda \left( \mathbf{1}^T P_{psb}, \mu_{psb0} \right) \\
rM_{epsb}(P_{epsb}^k, P_{epsb}, \alpha_{psb}) &= \alpha_{psb} \cdot (P_{epsb}^k - P_{epsb}) \\
P_{psb} &= (P_{epsb}; e=1, \dots, E)^T \\
P_{psb}^k &= (P_{epsb}^k; e=1, \dots, E)^T
\end{aligned}$$

y en donde  $\{P^{kT} = (P_1^k, \dots, P_E^k)\} \subseteq X$  es la secuencia generada por el algoritmo con punto inicial  $P^l$  seleccionado arbitrariamente en  $X$  y  $\alpha_{psb} > 0$  son parámetros positivos tales que satisfacen:

$$\alpha_{psb} \geq \frac{K_{psb}}{\varepsilon_{psb}} + \theta_{psb} \quad (5.136)$$

siendo  $\varepsilon_{psb} > 0$  parámetros de convergencia de las distancias por  $psb$  entre  $P_{psb}^k$  y las soluciones de los subproblemas  $Z_{psb}^k$ ,  $\theta_{psb} > 0$  parámetros positivos cualesquiera, y:

$$K_{psb} = \text{Max}_{e=1, \dots, E} \{ \mu_{2_{epsb0}}(\alpha_{e0}) - \mu_{1_{epsb0}}(\alpha_{e0}) \} \cdot \text{Max}_{e=1, \dots, E} \{ pc_{epsb} \} \cdot \sqrt{E} \quad (5.137)$$

en donde  $pc_{epsb}$  es la potencia máxima de cada empresa en cada  $psb$  (que típicamente coincide para todos los niveles de carga).

Tal y como puede observarse en (5. 136) los parámetros de penalización  $\alpha_{psb}$  de las distancias por  $psb$  entre  $P_{psb}^k$  y  $Z_{psb}^k$  se especifican por nivel de carga, de cara a penalizar más las distancias obtenidas en niveles de carga tales que  $Z_{psb}^k$  esté próximo al punto de equilibrio  $P_{psb}^*$ , y menos cuando  $Z_{psb}^k$  se encuentre alejado, para no hacer que la convergencia pueda ser excesivamente lenta.

- La función objetivo del problema cuadrático que resuelve, en cada iteración, el subproblema de desigualdades variacionales  $VI(F, X^k)$  debe tener en cuenta la suma en todos los niveles de carga de los costes ampliados y las funciones de utilidad, esto es, la función objetivo a minimizar es:

$$\sum_{p=1}^P \sum_{s=1}^S \sum_{b=1}^B \sum_{e=1}^E (Ca_{epsb}^*(P_{epsb}, P_{psb}^k, \alpha_{e0}) - r_{epsb}(P_{epsb}^k, P_{epsb}, \alpha_{psb})) - \sum_{p=1}^P \sum_{s=1}^S \sum_{b=1}^B U(D_{psb}, \mu_{psb0}) \quad (5. 138)$$

siendo  $D=(D_{psb}; p=1, \dots, P, s=1, \dots, S; b=1, \dots, B)^T$ , y en donde las funciones de coste ampliado, de resto convergente y de la utilidad de la demanda se definen como en el caso monoperiodo, aunque multiplicadas por las duraciones de los bloques.

### 5.6.2 Consideración de contratos entre empresas

Existen básicamente dos tipos de contratos que pueden suscribir las empresas de generación:

- **Los contratos físicos bilaterales**, que son contratos por los que una empresa de generación se compromete a vender a un cliente una cantidad de energía  $Pb_e$  a un precio  $\lambda b_e$ .
- **Los contratos financieros por diferencias**, en los que una empresa de generación se compromete a vender una cantidad de energía  $Pd_e$  a una empresa que la compra (generalmente una empresa comercializadora) acordando un precio  $\lambda d_e$  tal que:
  - Si el precio de mercado  $\lambda$  está por encima del precio acordado  $\lambda d_e$ , la empresa generadora pagará la diferencia a la empresa compradora.
  - Si el precio de mercado  $\lambda$  está por debajo del precio acordado  $\lambda d_e$ , será la empresa compradora la que pague la diferencia a la empresa generadora.

Considerando los dos tipos de contratos mencionados, el problema de maximización de cada empresa para el caso en que la pendiente de la demanda residual y los costes variables de los grupos son conocidos es:

$$\begin{aligned} \text{Max}_{P_e} \quad & \lambda_e \cdot (P_e - Pb_e) - C_e(P_e, c_e) + \lambda b_e \cdot Pb_e + (\lambda d_e - \lambda_e) \cdot Pd_e \\ & \lambda_e = \lambda(P_e + P_{-e}, \mu_{e0}) \end{aligned} \quad (5.139)$$

en donde  $\lambda(P_e + P_{-e}, \mu_{e0})$  es la demanda residual de cada agente,  $Pb_e$  es la potencia contratada en los contratos bilaterales, que aparece restando a la potencia total  $P_e$  porque  $Pb_e$  es una potencia que no se comercializa en el mercado, pero que debe ser producida, y en donde  $Pd_e$  es la potencia por contratos por diferencias que también está incluida en la potencia total  $P_e$  generada.

Reordenando y simplificando términos, el problema de maximización resulta ser (el término  $\lambda b_e \cdot Pb_e + \lambda d_e \cdot Pd_e$  se elimina dado que es constante en la función objetivo):

$$\begin{aligned} \text{Max}_{P_e} \quad & \lambda_e \cdot (P_e - Pb_e - Pd_e) - C_e(P_e, c_e) \\ & \lambda_e = \lambda(P_e + P_{-e}, \mu_{e0}) \end{aligned} \quad (5.140)$$

Dado que la potencia demandada  $D$  no incluye las potencias  $Pb_e$  debidas a contratos bilaterales, la ecuación de balance que debe incluirse en el modelo es:

$$\sum_{e=1}^E P_e = D + \sum_{e=1}^E Pb_e \quad (5.141)$$

y por tanto las ecuaciones del equilibrio para el caso determinista son:

$$\begin{aligned} \lambda(D, \mu_0) &= \mu_{e0} \cdot (P_e - Pb_e - Pc_e) + CM_e(P_e) \quad e = 1, \dots, E \\ \sum_{e=1}^E P_e &= D + \sum_{e=1}^E Pb_e \end{aligned} \quad (5.142)$$

siendo  $\lambda(D, \mu_0)$  la demanda esperada en la casación.

Cuando se supone que la pendiente de la curva de la demanda residual de cada agente y los costes variables de producción de los grupos de generación son distribuciones de posibilidad  $LR$ , se puede comprobar que las ecuaciones del equilibrio primal son:

$$\begin{aligned} \lambda &= \mu_{e0}^*(\lambda, \alpha_{e0}) \cdot (P_e - Pb_e - Pd_e) + CM_e^*(P_e, \alpha_{e0}) \quad e = 1, \dots, E \\ \lambda &= \lambda(D, \mu_0) \\ \sum_{e=1}^E P_e &= D + \sum_{e=1}^E Pb_e \end{aligned} \quad (5.143)$$

En esta tesis se supone que las **empresas están largas**, es decir, que **tienen menos energía contratada que la que pueden comercial en el mercado** (análogamente se define la situación en la que las empresas están cortas). Esta suposición es necesaria para que la pendiente  $\mu_{e0}^*$  y el coste marginal  $\alpha_{e0}$ -pesimista resulten de la maximización de la función de beneficio  $B_e^*$  de cada generador  $e$ , dado que debe satisfacerse:

$$\frac{\partial^2 B_e^*}{\partial P_e^2} = -2 \cdot \mu_{e0}^*(D, \alpha_{e0}) - \frac{\partial \mu_{e0}^*(D, \alpha_{e0})}{\partial P_e} \cdot (P_e - Pb_e - Pc_e) - CM_e^*(P_e, \alpha_{e0}) < 0 \quad (5.144)$$

La suposición de que las empresas están largas (que hace que se cumplan  $P_e - Pb_e - Pc_e \geq 0$ ) es realista, dado que en la práctica las empresas generadoras no suelen comercializar por contratos más energía que la que pueden generar<sup>55</sup>. Además, cualquier modelo de equilibrio que considere contratos, y que no suponga que la pendiente de la demanda residual es constante con la producción, debe considerar esta suposición para que la solución propuesta resulte de la maximización de las funciones de beneficio.

El algoritmo de desigualdades variacionales que resuelve las ecuaciones del equilibrio primal cuando se consideran contratos entre empresas es similar al propuesto en el caso sin contratos, salvo que ahora deben tenerse en cuenta las siguientes consideraciones:

- La función  $F$  se define como:

$$F = (F_1, \dots, F_E) \quad (5.145)$$

$$F_e(P) = CM_e^*(P_e, \alpha_{e0}) + \mu_{e0}^*(\lambda(\mathbf{1}^T P, \mu_0), \alpha_{e0}) \cdot (P_e - Pb_e - Pd_e) - \lambda(\mathbf{1}^T P, \mu_0)$$

- La función  $F^k$  es:

$$F^k(P) = CM(P) + A(P^k, P) - rM(P^k, P, \alpha) \quad (5.146)$$

$$F^k = (F_1^k, \dots, F_E^k); CM = (CM_1, \dots, CM_E)$$

$$A = (A_1, \dots, A_E); rM = (rM_1, \dots, rM_E);$$

$$P = (P_1, \dots, P_E)^T; P^k = (P_1^k, \dots, P_E^k)^T$$

siendo:

<sup>55</sup>Aunque podrían hacerlo, dado que la energía comprometida puede comprarse en el mercado. Por ello, a una empresa que esté corta le interesa que los precios caigan, por lo que suelen ofertar por debajo de su coste marginal.

$$\begin{aligned}
F_e^k(P) &= CM_e(P_e) + A_e(P^k, P) - rM_e(P_e^k, P_e, \alpha) \\
CM_e(P_e) &= CM_e^*(P_e, \alpha_{e0}) \\
A_e(P^k, P) &= \mu_{e0}^* \left( \lambda \left( \mathbb{1}^T P^k, \mu_0 \right), \alpha_{e0} \right) \cdot (P_e - Pb_e - Pd_e) - \lambda \left( \mathbb{1}^T P, \mu_0 \right) \\
rM_e(P_e^k, P_e, \alpha) &= \alpha \cdot (P_e^k - P_e)
\end{aligned} \tag{5.147}$$

y en donde  $\{P^{kT} = (P^k_1, \dots, P^k_E)\} \subseteq X$  es la secuencia generada por el algoritmo con punto inicial  $P^1$  seleccionado arbitrariamente en  $X$  y  $\alpha > 0$  es un parámetro positivo tal que:

$$\alpha \geq \frac{K}{\varepsilon} + \theta \tag{5.148}$$

siendo  $\varepsilon > 0$  el parámetro de convergencia del algoritmo,  $\theta > 0$  un parámetro positivo cualquiera, y siendo:

$$K = \text{Max}_{e=1, \dots, E} \{ \mu_{2e0}(\alpha_{e0}) - \mu_{1e0}(\alpha_{e0}) \} \cdot \text{Max}_{e=1, \dots, E} \{ pc_e \} \cdot \sqrt{E} \tag{5.149}$$

- La función objetivo del problema cuadrático que resuelve en cada iteración el subproblema de desigualdades variacionales  $VI(F, X^k)$  es, en este caso:

$$\begin{aligned}
\text{Min}_{P, D} \quad & \sum_{e=1}^E (Ca_e^*(P_e, P^k, \alpha_{e0}) - r_e(P_e^k, P_e, \alpha)) - U(D, \mu_0) \\
\text{s.a.} \quad & D + \sum_{e=1}^E Pb_e = \sum_{e=1}^E P_e
\end{aligned} \tag{5.150}$$

en donde el coste ampliado  $\alpha_{e0}$ -pesimista de la función objetivo es:

$$Ca_e^*(P_e, P^k, \alpha_{e0}) = C_e^*(P_e, \alpha_{e0}) + \mu_{e0}^* \left( \lambda \left( \mathbb{1}^T P^k, \mu_0 \right), \alpha_{e0} \right) \cdot \frac{(P_e - Pb_e - Pd_e)^2}{2} \tag{5.151}$$

### 5.6.3 Consideración de restricciones de explotación posibilistas

Los objetivos de este apartado son principalmente tres:

- La descripción general de las **restricciones técnicas y estratégicas** más relevantes tenidas en consideración en el modelo de mercado propuesto, que han sido denotadas a lo largo de este capítulo como  $h_e^j$  y  $g_e^k$ , y que son similares en cuanto a formulación e hipótesis a las analizadas en muchos de los trabajos

relacionados con esta tesis. En [Reneses, 2004] se puede ver la formulación en detalle de las restricciones consideradas, que se suponen son todas ellas **lineales**.

- La especificación de aquellos parámetros de las restricciones de explotación cuya incertidumbre se modele mediante distribuciones de posibilidad, lo que convierte a las restricciones de explotación en **restricciones de explotación posibilistas**. Este tipo de restricciones no invalida decisiones que, pudiendo ser factibles para la operación y planificación de la generación, no queden recogidas con un modelo determinista.
- La descripción general del **enfoque de resolución** propuesto **para las restricciones de explotación posibilistas**. La selección de una metodología concreta de resolución de restricciones de explotación posibilistas y el análisis de los resultados con su aplicación, quedan fuera del alcance de esta tesis.

Dado que muchas de las restricciones de explotación dependen de más de un nivel de carga, en este apartado se utiliza en la formulación una representación multiperiodo.

### 5.6.3.1 Disponibilidad térmica posibilista

Es sabido que la potencia de un grupo térmico de generación está limitada por la potencia máxima de generación del grupo, que es conocida como **plena carga de generación** ( $pc_{gpsb}$ ). La plena carga de generación puede verse modificada para cada nivel de carga por **mantenimientos programados** o por **indisponibilidades fortuitas** de los grupos de generación.

Los mantenimientos se refieren, generalmente, a paradas para la revisión de los grupos de generación, por lo que típicamente son conocidos con antelación. Sin embargo, las indisponibilidades se refieren a paradas no previstas, usualmente debidas a fallos técnicos en sus instalaciones. Cuando tanto los mantenimientos ( $m_{gpsb} \in [0,1]$ ) como las indisponibilidades ( $q_{gpsb} \in [0,1]$ ) se modelan con los porcentajes de tiempo en que el grupo permanece parado en cada  $psb$ , la potencia térmica  $P_{gpsb}$  queda limitada de acuerdo a la siguiente ecuación:

$$P_{gpsb} \leq pc_{gpsb} \cdot (1 - m_{gpsb}) \cdot (1 - q_{gpsb}) \quad \forall g, p, s, b \quad (5.152)$$

Como se comentó en el capítulo cuarto, una de las fuentes de incertidumbre relevantes en el mercado es la indisponibilidad fortuita de los grupos térmicos (dado que los mantenimientos son más previsibles), pues pueden ser causa de cortes en el suministro de la electricidad y de inestabilidades en el sistema eléctrico. La indisponibilidad fortuita puede producir, por tanto, no sólo pérdidas económicas para las empresas eléctricas sino graves trastornos sociales.

La teoría de la probabilidad suele ser la herramienta más común en el modelado de la incertidumbre en las indisponibilidades<sup>56</sup>. Sin embargo, existen varios motivos por los que puede no disponerse de una colección suficiente de datos estadísticos que permita modelar esta incertidumbre mediante distribuciones de probabilidad:

- Para los grupos de reciente instalación no se dispone de datos históricos de fallos por indisponibilidades.
- Para los grupos antiguos se requiere de una historia técnica amplia del grupo, lo que no suele tenerse dado que las indisponibilidades suelen ser eventos raros que a lo sumo se presentan una o dos veces al año.

En esta tesis se propone modelar la incertidumbre de los grupos térmicos mediante distribuciones de posibilidad. En este sentido, y fruto del trabajo realizado, en [Campos, 2004] se modela esta incertidumbre mediante distribuciones de posibilidad *LR*, y se muestra un análisis comparativo de la aplicación de las principales técnicas de resolución de restricciones posibilistas de disponibilidad térmica.

### 5.6.3.2 Restricciones ambiguas de cuota

Una de las restricciones que suele incorporarse en los modelos de medio plazo para posicionar el margen económico de cada empresa de generación, es la que obliga a cada empresa a satisfacer una cuota de mercado mínima considerando todo el horizonte del mercado. Para cada agente, esta restricción se modela exigiendo un porcentaje mínimo  $Q_e$  de demanda satisfecha en todo el horizonte con los grupos de generación del agente, esto es, imponiendo la siguiente restricción:

$$\sum_{p=1}^P \sum_{s=1}^S \sum_{b=1}^B P_{epsb} \cdot l_{psb} \geq Q_e \cdot \sum_{p=1}^P \sum_{s=1}^S \sum_{b=1}^B D_{psb} \cdot l_{psb} \quad \forall e \quad (5.153)$$

Esta condición puede incluso exigirse por  $psb$ , y modelarse con las siguientes restricciones, en donde  $Q_{epsb}$  es el porcentaje mínimo de demanda satisfecha por nivel de carga:

$$P_{epsb} \geq Q_{epsb} \cdot D_{psb} \quad \forall e, p, s, b \quad (5.154)$$

Los parámetros  $Q_e$  y  $Q_{epsb}$  que aparecen en las restricciones de cuota, típicamente se estiman a partir de datos históricos de cuotas de mercados ya convocados. Sin

<sup>56</sup>Típicamente conociendo la distribución de probabilidad del tiempo entre fallos y de la duración del fallo, o bien para los estudios de corto plazo estimando la probabilidad horaria de fallos y utilizando por ejemplo distribuciones de probabilidad Bernoulli para modelar la indisponibilidad ([Roman-Ubeda, 1991]).

embargo, en la práctica las previsiones estadísticas acerca de estos parámetros pueden reajustarse mediante información lingüística proporcionada por los propios planificadores como, por ejemplo, cuando se dice que la cuota es realmente más pequeña o más grande. Esta información subjetiva además está sujeta a cambios en la regulación del sector. Por todo ello, en esta tesis se propone modelar la incertidumbre en los parámetros  $Q_e$  y  $Q_{epsb}$  mediante distribuciones de posibilidad.

### 5.6.3.3 Definición de producciones acumuladas

En las restricciones de explotación consideradas en esta tesis se ha definido la variable producción acumulada  $Pa_{gp}$  por periodo y grupo de generación, que se utiliza en las restricciones del siguiente epígrafe. Para ello se deben añadir al modelo las siguientes restricciones:

$$Pa_{gp} = Pa_{g,p-1} + \sum_{b=1}^B \sum_{s=1}^S P_{gpsb} \cdot l_{psb} \quad \forall g, p \quad (5.155)$$

En donde las producciones  $Pa_{gp}$  son variables de decisión para  $p > 0$ , siendo  $Pa_{g0}$  la producción generada en el periodo anterior al de inicio de la planificación, y por tanto  $Pa_{g0}$  es un dato de entrada.

Para cada nivel de carga, tanto estas restricciones como las que imponen el balance entre generación y demanda son deterministas, dado que sólo contienen variables de decisión y datos conocidos.

### 5.6.3.4 Niveles máximos y mínimos a lo largo de un periodo y de todo el horizonte

Puede considerarse una producción mínima  $Zmin_{gp}$  de un grupo térmico a lo largo de un periodo, condición que se satisface con las siguientes restricciones:

$$\sum_{s=1}^S \sum_{b=1}^B P_{gpsb} \cdot l_{psb} \geq Zmin_{gp} \quad \forall g, p \quad (5.156)$$

Estas restricciones obligan a que determinados grupos permanezcan produciendo para evitar problemas de inestabilidad en la red de transporte producidos por la existencia de zonas geográficas energéticamente menos asistidas que otras. En este sentido suelen conocerse los grupos que por restricciones de red han de producir una cantidad de energía adicional, pero no la limitación exacta  $Zmin_{gp}$  por encima de la cual han de producir, lo que sugiere que  $Zmin_{gp}$  pueda considerarse un parámetro posibilista.

Pueden considerarse también niveles mínimos  $Nmin_g$  y máximos  $Nmax_g$  de producción de los grupos de generación a lo largo de todo el horizonte temporal, lo que conlleva a considerar las siguientes restricciones:

$$Nmin_g \leq Pa_{gp} \leq Nmax_g \quad \forall g \quad (5.157)$$

Estas restricciones suelen incorporarse por motivos regulatorios, como los que promueven unos consumos mínimos de carbón nacional. Por las mismas razones que para  $Zmin_{gp}$  los niveles mínimos y máximos  $Nmin_g$  y  $Nmax_g$  pueden ser parámetros posibilistas.

### 5.6.3.5 Restricciones relacionadas con los sistemas hidráulicos

Para representar los sistemas hidráulicos formados por varios grupos de generación hidráulica, se ha supuesto:

- La topología del sistema hidráulico es tal que cualquier grupo de generación hidráulica puede tener varios grupos hidráulicos aguas arriba, pero no puede ceder agua a varios grupos hidráulicos a la vez.  $V(g)$  denota el conjunto de grupos aguas arriba del grupo  $g$  (ver Figura 5. 28).
- Cada grupo hidráulico está formado por dos embalses situados a diferentes alturas (ver Figura 5. 27). En el embalse superior se produce energía  $P_{gpsb}$  mediante la turbinación de agua que será acumulada en el embalse inferior (el grupo se dice que está en **modo turbinación**). Por el contrario, en el embalse inferior se consume energía  $Pb_{gpsb}$  al subir o bombear una cantidad de agua hacia el embalse superior (en esta situación se dice que el grupo está en **modo bombeo**)<sup>57</sup>. Al ciclo resultante de realizar el movimiento de agua desde un embalse a otro, se le denomina **ciclo turbinación-bombeo**. Es importante mencionar que la energía consumida al realizar el bombeo de agua es siempre superior a la energía producida por su posterior turbinación y, por tanto, el coeficiente  $\rho_g$  que relaciona estas dos cantidades de producción-consumo de energía, que se denomina **coeficiente de rendimiento del ciclo turbinación-bombeo**, es siempre menor que uno (en torno al 70%).

<sup>57</sup>Normalmente el bombeo se realiza en horas donde el precio del mercado es bajo, para poder tener disponible una mayor cantidad de agua que pueda ser turbinada en horas donde el precio de mercado es alto. Además, en el corto plazo el consumo de energía al realizar el bombeo (respectivamente la generación de energía por la turbinación) de agua, siempre se traduce en ofertas de compra (respectivamente venta) presentadas por la unidad hidráulica.

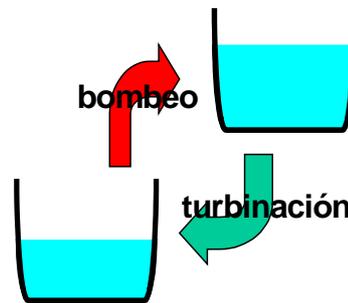


Figura 5. 27: Ciclo turbinación-bombeo

- Se modela en detalle el embalse superior del grupo hidráulico, que es el embalse que almacena energía producible. El modelado se realiza considerando como variables de decisión las **reservas** de dicho embalse. Para respetar el tránsito físico de agua de un periodo a otro, las reservas  $r_{gp}$  vienen dadas por periodo en lugar de por niveles de carga, dado que este último detalle temporal no está ordenado de manera cronológica. También se consideran como variables de decisión la **cantidad bombeada**  $pb_{gpsb}$  desde el embalse inferior, y los **vertidos**  $ve_{gp}$  a los grupos hidráulicos de niveles inferiores, que modelan la cantidad de agua no turbinada que se vierte aguas abajo debido al exceso de agua almacenada en el embalse superior.
- **Se consideran aportaciones**  $A_{gp}$  de energía al embalse superior, que corresponden típicamente con las lluvias caídas en cada periodo.
- **No se admiten trasvases** de unos grupos a otros.

Con todo ello, la representación del sistema hidráulico es la que se muestra en la Figura 5. 28.

Grupos aguas arriba  $V(g3)=\{g1,g2\}$

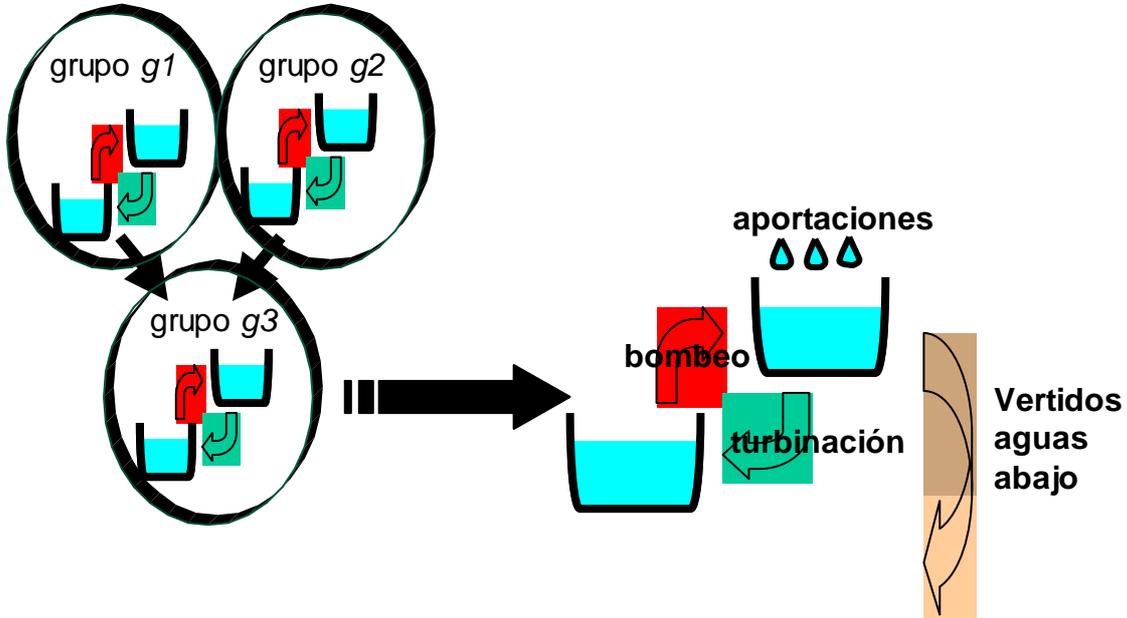


Figura 5. 28: Representación de un sistema hidráulico

La restricción fundamental de los grupos hidráulicos es la que establece que la variación del nivel de reservas entre periodos es igual a los entrantes de agua en el grupo hidráulico (entrantes que engloban las aportaciones, el bombeo propio, las producciones y los vertidos de grupos aguas arriba) menos los salientes (salientes que engloban las producciones y vertidos del grupo aguas abajo):

$$\left. \begin{aligned}
 r_{gp} - r_{g,p-1} = & \\
 A_{gp} + \sum_{s=1}^S \sum_{b=1}^B \{ (Pb_{gpsb} \cdot \rho_g) \cdot l_{psb} \} + & \\
 \sum_{g' \in V_g} \sum_{s=1}^S \sum_{b=1}^B \{ (P_{gpsb} - Pb_{gpsb} \cdot \rho_g) \cdot l_{psb} \} + ve_{g'p} - & \\
 \sum_{s=1}^S \sum_{b=1}^B \{ P_{gpsb} \cdot l_{psb} \} - ve_{gp} &
 \end{aligned} \right\} \forall g, p \tag{5. 158}$$

Además, la producción del grupo (turbinación) se modela como función lineal creciente con el nivel de reservas, esto es:

$$P_{gpsb} \leq U_g + V_g \cdot r_{gpsb} \quad \forall g, p, s, b \tag{5. 159}$$

Esta función refleja el hecho de que cuanto mayor es el nivel de reservas del embalse, mayor es la energía potencial del agua almacenada. Además, también generaliza la consideración de una potencia máxima fija, sin más que hacer que el coeficiente  $V_g$  valga cero.

El bombeo debe respetar una potencia máxima  $Pbmax_{gpsb}$  de bombeo, esto es:

$$Pb_{gpsb} \leq Pbmax_{gpsb} \quad \forall g, p, s, b \quad (5.160)$$

Como los grupos hidráulicos son bastante fiables no se ha considerado en el modelado de la potencia máxima el coeficiente de indisponibilidad  $q_{gpsb} \in [0,1]$  tenido en cuenta en los grupos térmicos.

Finalmente, las reservas deben respetar unos niveles mínimos  $rmin_{gp}$  y máximos  $rmax_{gp}$ , esto es:

$$rmin_{gp} \leq r_{gp} \leq rmax_{gp} \quad \forall g, p \quad (5.161)$$

En relación con el modelado de la incertidumbre de los parámetros de entrada del sistema hidráulico, caben realizar los siguientes comentarios:

- Las reservas máximas y mínimas  $rmax_{gp}$  y  $rmin_{gp}$  suelen conocerse con precisión dado que típicamente corresponden con la capacidad máxima admisible en el embalse y con la mínima por regadíos u otros motivos medioambientales.
- La potencia máxima del bombeo  $Pbmax_{gpsb}$ , de la turbinación fija  $U_g$ , y el coeficiente  $\rho_g$  de turbinación-bombeo, al ser características técnicas del grupo hidráulico suelen ser también conocidos con precisión.
- La variación  $V_g$  de la potencia hidráulica con respecto a la reserva puede considerarse un parámetro desconocido al no disponerse en la práctica de información objetiva acerca de su comportamiento.
- Los pronósticos acerca de las aportaciones  $A_{gp}$  suelen estar basados en datos relacionados con la hidraulicidad del sistema, que suelen ser abundantes y públicos, obteniéndose pronósticos bastante fiables. Por lo tanto, la incertidumbre  $A_{gp}$  debería ser modelada mediante distribuciones de probabilidad.

### 5.6.3.6 Metodología general de resolución de restricciones posibilistas

Tal y como se ha comentado al inicio de este apartado la selección de una metodología concreta de resolución de las restricciones de explotación posibilistas y el análisis de sus resultados en la aplicación a un caso estudio real, exceden los

objetivos de esta tesis. Sin embargo, en el anexo “**Revisión bibliográfica de las técnicas de resolución de restricciones posibilistas**” incluido al final de esta tesis se describen detalladamente las principales técnicas de resolución de restricciones posibilistas, que están basadas en los diferentes criterios para comparar los números posibilistas del lado derecho e izquierdo de las restricciones.

Así, por ejemplo, uno de los criterios comparativos más utilizados exigen diferentes grados de posibilidad y necesidad de que una restricción posibilista  $f(x;\underline{a}) \geq g(x;\underline{b})$  se satisfaga de manera estricta o no, esto es, consideran ciertas las siguientes equivalencias, en donde  $\alpha \in [0,1]$  es el grado de certeza de la factibilidad de las restricciones:

$$\begin{aligned} f(x;\underline{a}) \geq f(x;\underline{b}) &\Leftrightarrow N(f(x;\underline{a}) > f(x;\underline{b})) \geq \alpha & (5.162) \\ f(x;\underline{a}) \geq f(x;\underline{b}) &\Leftrightarrow \Pi(f(x;\underline{a}) > f(x;\underline{b})) \geq \alpha \\ f(x;\underline{a}) \geq f(x;\underline{b}) &\Leftrightarrow N(f(x;\underline{a}) \geq f(x;\underline{b})) \geq \alpha \\ f(x;\underline{a}) \geq f(x;\underline{b}) &\Leftrightarrow \Pi(f(x;\underline{a}) \geq f(x;\underline{b})) \geq \alpha \end{aligned}$$

Utilizando estos criterios comparativos, y cuando los parámetros posibilistas  $\underline{a}$  y  $\underline{b}$  son distribuciones de posibilidad  $LR$  y las funciones  $f$  y  $g$  son restricciones lineales (como ocurre con las restricciones de explotación), es posible plantear una o varias restricciones deterministas que se suponen equivalentes a las restricciones posibilistas, lo que suele también ocurrir cuando se utiliza otro tipo de criterio comparativo.

Las restricciones deterministas obtenidas típicamente consideran diferentes escenarios para  $\underline{a}$  y  $\underline{b}$  que se concretan en función de la medida de incertidumbre utilizada (ya sea de necesidad ó de posibilidad), del tipo de restricción que evalúa la medida (ya sea  $>$  ó  $\geq$ ) y del grado de certeza  $\alpha \in [0,1]$ . Estas dependencias influyen lógicamente en la factibilidad del modelo determinista resultante, y flexibilizan las restricciones de explotación consideradas en un modelo de mercado determinista.

Por tanto, la consideración de restricciones de explotación posibilistas implica:

- Un aumento del número de restricciones deterministas consideradas en el modelo del mercado.
- Un análisis de las restricciones posibilistas muy similar al realizado en el caso determinista. Este análisis debe diferenciar restricciones que acoplen o no diferentes niveles de carga, tal y como se comenta y se realiza detalladamente en [Reneses, 2004].

Por otro lado, el planificador puede estar interesado en determinar la decisión de explotación que maximiza el grado de certeza  $\alpha$  en el que las restricciones posibilistas se satisfacen. En esta situación, el grado máximo  $\alpha^*$  se interpreta como la certeza con la que la operación y planificación de la generación son tanto técnicamente como estratégicamente realizables. En [Dubois, 1987] se muestra un procedimiento para la optimización del grado de certeza  $\alpha$ .

## 5.7 Estimación de las distribuciones de posibilidad de las pendientes de la demanda residual

Uno de los parámetros más influyentes en los resultados de un modelo de mercado es la pendiente  $\mu_{e0}$  de la demanda residual de un generador, dado que modela la capacidad de cada agente de modificar el precio del mercado, que además está sujeta a incertidumbre. Dado que en esta tesis se ha modelado su incertidumbre mediante una distribución de posibilidad  $LR$ , a continuación se proponen varias metodologías posibles para la estimación de la distribución, así como varios métodos coherentes con dichas metodologías para la determinación del precio de casación  $\lambda_{e0}$  esperado por generador, que es un dato de entrada de los enfoques propuestos.

Los métodos para la estimación de la distribución de posibilidad  $LR$  de la pendiente  $\mu_{e0}$  pueden clasificarse dentro de dos tipos distintos:

- **Métodos basados en la información de los expertos**, que utilizan el conocimiento de los expertos en la planificación y operación del sistema eléctrico para estimar las distribuciones requeridas. Suelen ser los métodos más utilizados cuando no existe información estadística.
- **Métodos basados en datos estadísticos**, que tienen en consideración la información histórica que se tenga disponible, que puede haber sido corregida por los expertos. Entre estos métodos destacan los **métodos que transforman una distribución de probabilidad en una de posibilidad**, a partir de las transformaciones existentes en la literatura y que han sido descritas en el capítulo segundo. Estos métodos suelen ser convenientes cuando se dispone de la distribución de probabilidad o cuando puede ser estimada fácilmente. Asimismo, dado que una distribución de probabilidad es más informativa que una distribución de posibilidad (ver capítulo segundo), la transformación resulta especialmente conveniente cuando el modelo posibilista es significativamente más sencillo de resolver (ver apartado 3.5 de [Dubois, 1986]), como ocurre con el modelo de equilibrio de mercado propuesto en esta tesis<sup>58</sup>.

Otros métodos de estimación de distribuciones de posibilidad se muestran en [Bilgic, 1997].

---

<sup>58</sup>Con otro tipo de modelos de equilibrio, podría ser conveniente transformar la distribución de posibilidad a probabilidad a medida que se vaya disponiendo de más datos objetivos sobre la operación real del mercado.

### 5.7.1 Métodos basados en la información de los expertos

Uno de los métodos más conocidos basados en la experiencia de los expertos es el que se describe en [Dubois, 1986] y se propone en [Cucala, 2003] para el análisis de la planificabilidad borrosa de sistemas de tiempo real. Este método considera un conjunto de  $K$  expertos cada uno de los cuales propone  $E$  intervalos  $\{[a_{ek}, b_{ek}], e=1, \dots, E\}$  tal que  $[a_{ek}, b_{ek}]$  es el intervalo en el que el experto  $k$  espera se encuentre la pendiente  $\mu_{e0}$  del generador  $e$ .

Tal y como se describió en el capítulo segundo, la teoría de Dempster Shaffer permite estimar, en este caso, la distribución de posibilidad cuando se considera a  $[a_{ek}, b_{ek}]$  como una valoración imprecisa de la pendiente  $\mu_{e0}$ , y cuando los intervalos  $[a_{ek}, b_{ek}]$  son anidados. Si para cada  $e=1, \dots, E$  el conjunto  $\{m_{ek}, k=1, \dots, K\}$  es una asignación básica de probabilidad, es decir, si  $\sum_k m_{ek}=1$ , y si  $m_{ek}$  mide la certeza en la ocurrencia de la salida imprecisa  $[a_{ek}, b_{ek}]$ , entonces la distribución de posibilidad para  $\mu_{e0}$  es la siguiente:

$$\pi_{\mu_{e0}}(\mu) = \Pi(\underline{\mu}_{e0} = \mu) = \sum_{k: \mu \in [a_{ek}, b_{ek}]} m_{ek} \quad e=1, \dots, E \quad (5.163)$$

La certeza  $m_{ek}$  puede ser igual para cualquier experto  $k$  o puede estar basada en el grado de experiencia y conocimiento de cada uno de ellos, en el número de intervalos  $[a_{ek'}, b_{ek'}]$  que contienen a  $[a_{ek}, b_{ek}]$  (dado que cuanto mayor es ese número mayor parece ser la certeza  $m_{ek}$ ) o en cualquier otro criterio racional.

Tal y como se ha mencionado, para poder obtener la distribución de posibilidad para la pendiente es necesario que los  $K$  intervalos  $\{[a_{ek}, b_{ek}], k=1, \dots, K\}$  sean anidados, lo que generalmente no tiene porqué cumplirse. Una condición menos exigente y más realista para poder obtener la distribución de posibilidad requiere que todos los intervalos  $\{[a_{ek}, b_{ek}], k=1, \dots, K\}$  se corten en al menos un punto, esto es:

$$\bigcap_{k=1}^K [a_{ek}, b_{ek}] = [a_e, b_e] \quad e=1, \dots, E \quad (5.164)$$

En esta situación se puede definir una sucesión de intervalos anidados  $\{I_{ei}: I_{e,i+1} \subseteq I_{ei}, i=1, \dots, n_e\}$  que contienen al intervalo intersección  $[a_e, b_e]$  y contenidos en la unión de los intervalos  $[a_{ek}, b_{ek}]$ . Cada intervalo  $[a_{ek}, b_{ek}]$  se identifica entonces, de manera única, con el intervalo  $I_{em(k)}$  más pequeño que lo contiene, obteniéndose una subsucesión de intervalos  $I_{em(k)}$  anidada, que permite calcular la distribución de posibilidad deseada. En este caso la asignación básica  $m_{ek}$  puede definirse a partir del número de intervalos  $I_{em(k)}$  que contienen a  $[a_{ek}, b_{ek}]$ .

### 5.7.2 Métodos basados en datos estadísticos

La metodología propuesta basada en datos estadísticos para la estimación de distribuciones de posibilidad para la pendiente de la demanda residual de cada generador en cada nivel de carga, consta de las siguientes tareas:

- **Cálculo de las curvas de la demanda residual horarias.** Actualmente, en el sistema español las curvas de la demanda residual, resultantes de los diferentes mercados de corto plazo, pueden calcularse, para cada hora, restando a la curva de la demanda las ofertas agregadas del resto de participantes, ofertas de venta y de compra que junto a los precios de mercado, se hacen públicas con un retardo aproximado de 3 meses.
- **Generación de pendientes de la demanda residual horarias.** Dado que cada una de las curvas de la demanda residual son, al igual que las curvas de la demanda y de las ofertas, funciones escalón, es necesario aplicar un procedimiento para la generación de pendientes de las curvas. Este procedimiento consiste en el cálculo, con los precios de mercado que hayan sido publicados, de las pendientes de las curvas aproximadas por funciones continuas (ver Figura 5. 29), aproximación que no repercute de manera significativa en los resultados de un análisis a medio plazo dado que las curvas reales presentan muchas discontinuidades en un entorno de la casación (por lo que los precios obtenidos con y sin la aproximación deberían ser muy similares). En este sentido, uno de los modelos de aproximación más interesantes es el modelo **bisagras** (ver [Sánchez Úbeda, 1999] y [García-González, 2001]), que aproxima cada curva escalonada de la demanda residual por una función continua definida a tramos (ver Figura 5. 29).

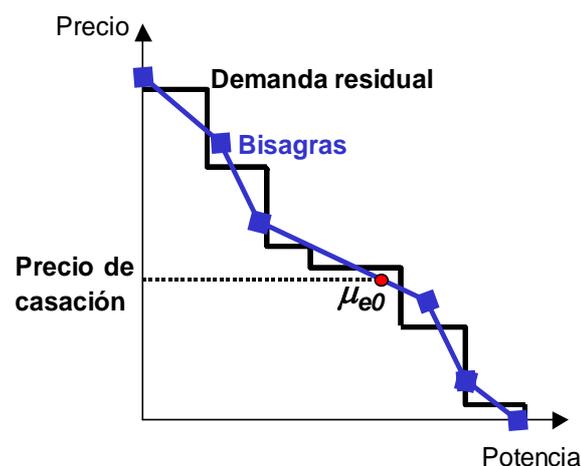


Figura 5. 29: Aproximación por el modelo bisagras de la curva de la demanda residual

Las principales ventajas del modelo bisagras son su eficiencia computacional, su precisión y su flexibilidad, dado que el modelo no fija de antemano el número de tramos de la aproximación, si no que es fruto del propio algoritmo de ajuste.

- **Las pendientes de la demanda residual horarias deben agruparse por niveles de carga.** Utilizando la pertenencia de las diferentes horas a los distintos niveles de carga (que se recuerda son conjuntos de horas con demandas similares), las pendientes horarias de la demanda residual deben agruparse por niveles de carga.
- **Generación de las distribuciones de posibilidad de las pendientes de la demanda residual por niveles de carga.** Una vez obtenidos los datos para la pendiente de la demanda residual por nivel de carga y agente, una distribución de posibilidad se obtiene mediante la transformación a posibilidad de una distribución de probabilidad previamente ajustada (ver capítulo segundo para una descripción de las transformaciones disponibles en la literatura). Las transformaciones de probabilidad a posibilidad pueden aplicarse tanto para distribuciones continuas como para histogramas, y las correspondientes distribuciones de posibilidad obtenidas son respectivamente distribuciones de posibilidad continuas o **histogramas posibilistas** (así denominados en esta tesis cuando la transformación se aplica sobre histogramas probabilistas).

A continuación se muestra un caso ejemplo de esta metodología en donde se han utilizado los datos de las curvas de la demanda y de las ofertas correspondientes al año 2003 del mercado eléctrico español. Los tres primeros pasos de la metodología ya han sido realizados en [López Hernández, 2005] empleando el modelo bisagras para la generación de datos de las pendientes de las curvas de la demanda residual.

En la Figura 5. 30 se muestran las pendientes horarias consideradas en el caso ejemplo (por confidencialidad no se muestra el agente ni el nivel de carga escogido). El número total de datos considerados es 30.

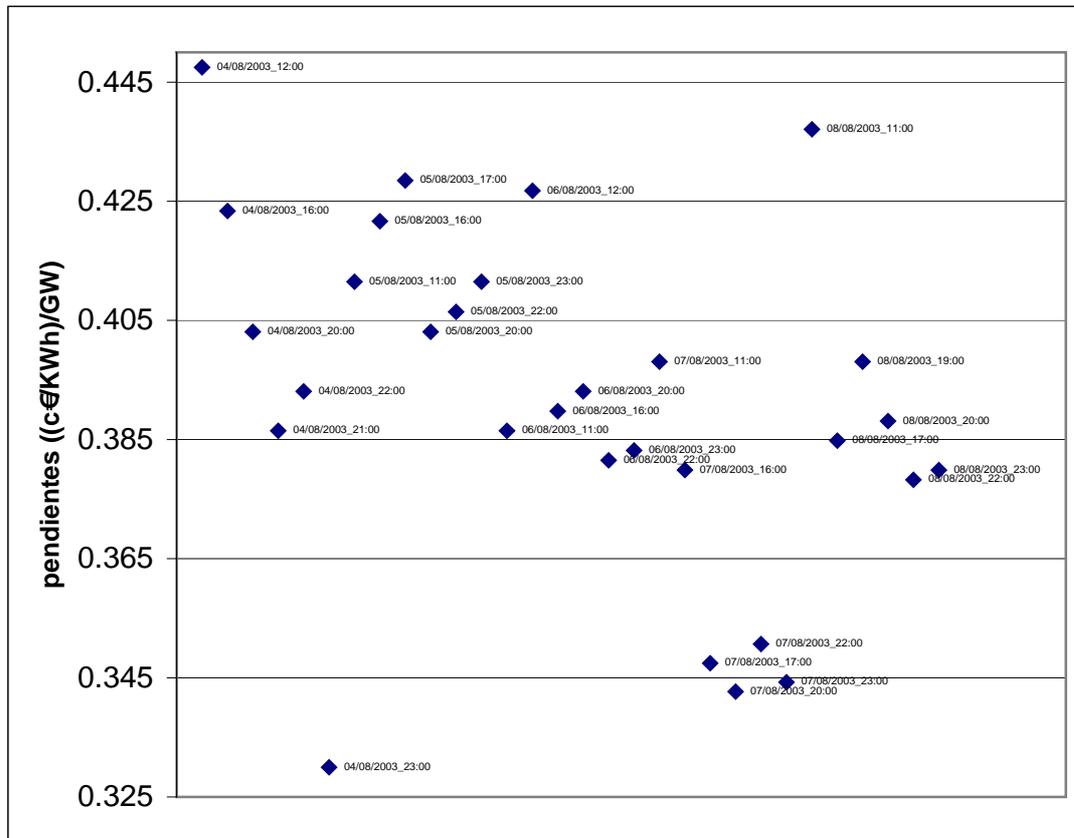


Figura 5. 30: Pendientes de la demanda residual del agente en estudio

Las transformaciones de distribuciones de probabilidad a posibilidad aplicadas en el caso ejemplo son las siguientes (ver capítulo segundo):

- La transformación óptima, para el caso en que se transforme una distribución de probabilidad normal.
- Las transformaciones normalizada e inversa, para el caso en que se transforme un histograma de probabilidad. Para el cálculo de los histogramas se ha considerado un total de 7 intervalos equiespaciados desde la pendiente mínima a la máxima del generador en estudio (suele ser conveniente que el número de intervalos no exceda la tercera parte del número de datos).

En cualquiera de los dos casos (histogramas o distribuciones continuas), las distribuciones de posibilidad obtenidas deben aproximarse por una distribución de posibilidad *LR* (que es continua), ya sea con el modelo bisagras, realizando un ajuste por mínimos cuadrados, o con cualquier otro método.

En la Figura 5. 31 se muestra el ajuste por una función de densidad normal de los datos de las pendientes de la demanda residual, así como la distribución de posibilidad obtenida con la transformación óptima, que tiene una forma similar a la de una distribución de posibilidad *LR*. También se muestra el histograma de probabilidad.

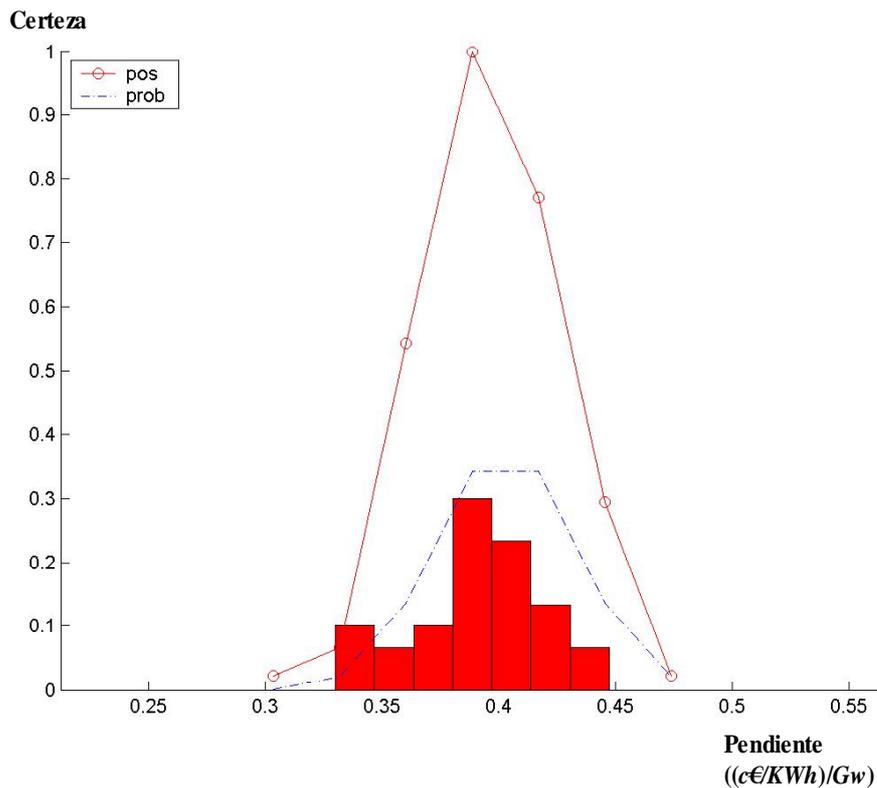


Figura 5. 31: Distribución de posibilidad continua para el caso ejemplo

En la Figura 5. 32 se muestran los histogramas de probabilidad y de posibilidad con las transformaciones normalizada e inversa, así como los intervalos en los que ambas transformaciones asignan el mismo grado de posibilidad. Con una línea continua también se muestra una aproximación de los histogramas por una distribución de posibilidad *LR*. Cabe observar que la forma de los histogramas posibilistas es muy similar a la de los histogramas probabilistas, aunque los grados de posibilidad de cada intervalo del histograma no tienen por qué sumar uno. Además, debe existir al menos un intervalo con grado de posibilidad igual a uno.

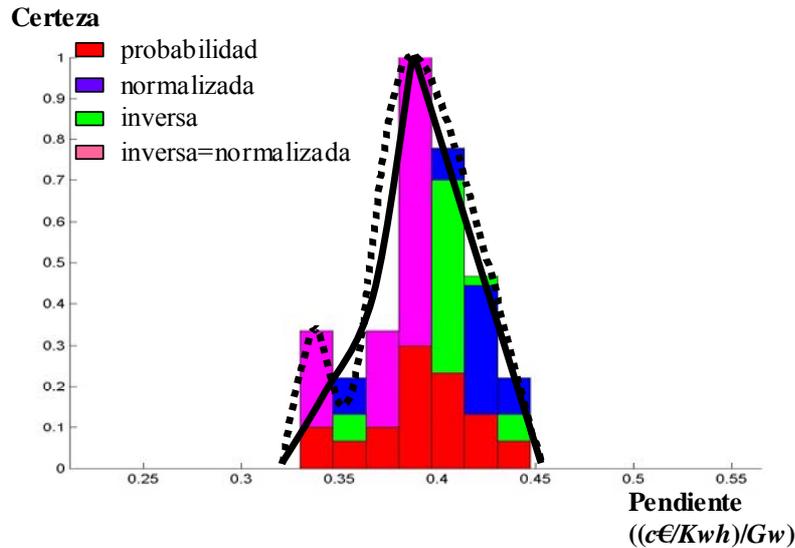


Figura 5. 32: Histogramas probabilista y posibilistas para el caso ejemplo

En el cálculo del grado de posibilidad de cada intervalo del histograma, la transformación normalizada solamente tiene en cuenta el grado de probabilidad del intervalo, siendo el grado de posibilidad proporcional al de probabilidad. Por el contrario, la transformación inversa asigna un grado de posibilidad proporcional al grado acumulado de probabilidades inferiores o iguales a la probabilidad del intervalo. Por ello, la transformación normaliza se ve más influencia por la presencia de “outliers”, y no cumple el principio de consistencia para el caso de conjuntos formados por valores contenidos en más de un intervalo del histograma (ver capítulo segundo).

La existencia de intervalos con grados de posibilidad pequeños, entre intervalos con grados de posibilidad grandes (ver segundo intervalo de la Figura 5. 32), puede invalidar el ajuste del histograma posibilista mediante una distribución de tipo *LR*, pudiendo ser más conveniente una aproximación por una distribución no convexa (ver línea discontinua de la Figura 5. 32 para el caso de transformar el histograma probabilista obtenido con la transformación inversa). En el siguiente apartado se muestra un procedimiento para extender los enfoques primal y dual al caso de distribuciones de posibilidad no convexas, entre las que se encuentran las distribuciones multimodales.

### 5.7.2.1 Consideración de distribuciones de posibilidad no convexas

A lo largo de este capítulo se ha supuesto que cada nivel de carga considerado está formado por un conjunto de horas en las que las demandas satisfechas son similares. Sin embargo, cuando se tiene una discretización temporal preestablecida, la

agrupación horaria de la información estadística disponible en sus niveles de carga puede conducir a la existencia de niveles con horas muy distintas, lo que podría derivar en distribuciones de posibilidad no convexas, como por ejemplo las distribuciones multimodales, caracterizadas por tener como núcleo la unión de intervalos disjuntos<sup>59</sup>.

En este sentido, y sin necesidad de definir una nueva desagregación temporal en niveles de carga con horas similares, un análisis del comportamiento de los enfoques propuestos cuando las distribuciones de posibilidad son multimodales contribuye notablemente a dar una mayor generalidad a los enfoques y a proporcionar una mejor aproximación de la realidad.

En esta tesis este estudio se ha llevado a cabo reduciendo el planteamiento de los enfoques con distribuciones multimodales al caso con distribuciones unimodales, que ya ha sido analizado a lo largo de los anteriores apartados. Análogamente se podría analizar el caso en el que la distribución es otro tipo de distribución no convexa, como por ejemplo cuando se tienen varios máximos en la distribución con diferentes grados de posibilidad.

Considérese el caso en que al menos una distribución de posibilidad de la pendiente de la demanda residual tiene dos modas. Supóngase que la distribución de posibilidad puede aproximarse por la unión de dos distribuciones de posibilidad  $LR$  (ver funciones de referencia  $L_{e1}R_{e1}$  y  $L_{e2}R_{e2}$  dibujadas con líneas discontinuas en la Figura 5. 33). En este caso, es sencillo demostrar que el beneficio  $B_e^*$  a maximizar en los enfoques coinciden con los obtenidos cuando se considera la distribución de posibilidad que con mínima área es convexa (ver distribución con línea continua de la Figura 5. 33), y que puede aproximarse también por una distribución de posibilidad  $LR$ . A esta distribución de posibilidad  $LR$  se la denomina en esta tesis **aproximación válida**.

---

<sup>59</sup>Este tipo de distribuciones no convexas también pueden aparecer cuando el conocimiento de un experto, basado en la experiencia, la perspicacia y/o la información estadística disponible, sugiere que el verdadero valor de la variable en estudio se encuentra con una mayor certidumbre en dos intervalos disjuntos de posibilidad.

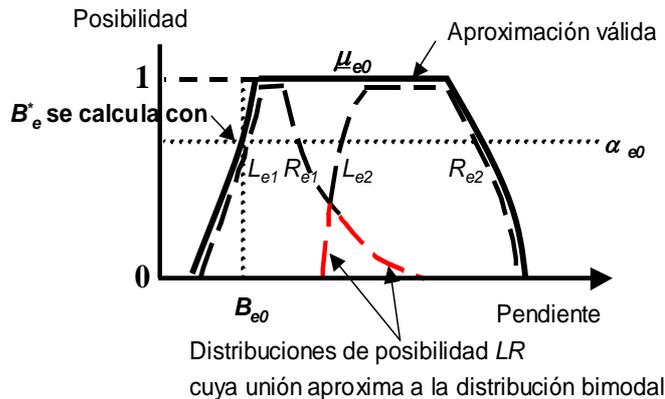


Figura 5. 33: Aproximación válida de una distribución posibilista bimodal

La demostración de la equivalencia descrita en el párrafo anterior se fundamenta en el hecho de que  $B_e^*$  se determina siempre considerando los grados de posibilidad obtenidos con la función de referencia  $L_e$  ó  $R_e$  (depende del signo de la diferencia entre precios  $\lambda - \lambda_{e0}$ ) de la distribución o distribuciones de posibilidad LR situadas más a la izquierda del eje de pendientes. Por ello,  $B_e^*$  es independiente del resto de funciones de referencia y por lo tanto independiente de la forma que tenga la distribución entre los dos soportes de las dos distribuciones de posibilidad LR (en la Figura 5. 33 el beneficio  $B_e^*$  se determina con los grados de posibilidad obtenidos con la función de referencia  $L_{e1}$  al suponerse que  $\lambda - \lambda_{e0}$  es positivo).

En [Cucala, 2003] se define el concepto de distribución de posibilidad convexa válida para el análisis de planificabilidad de sistemas de tiempo real, que también proporciona los mismos resultados que cuando se utilizan distribuciones de posibilidad no convexas.

### 5.7.2.2 Estimación de los precios de mercado esperados por los generadores

Otro de los parámetros de entrada de los enfoques propuestos que puede ser estimado a partir de datos históricos es el precio de casación  $\lambda_{e0}$  esperado por cada generador. Existen varias alternativas de estimación, dos de las cuales se describen a continuación:

1. Cuando se supone que todos los precios  $\lambda_{e0}$  por agente son idénticos ( $\lambda_{e0} = \lambda_0$ ), una posible metodología de estimación del precio  $\lambda_0$  se basaría en el cálculo del valor de cualquier medida estadística de tendencia central, como la media, sobre los precios históricos de mercado para cada nivel de carga.
2. Una metodología acorde con la descrita para el cálculo de la distribución de posibilidad de la pendiente  $\mu_{e0}$  consiste en:

- Generar el conjunto de precios de mercado resultantes de evaluar los datos de potencia  $P_e$  casadas por agente, en la aproximación de las curvas de la demanda residual, realizada con el modelo bisagras.

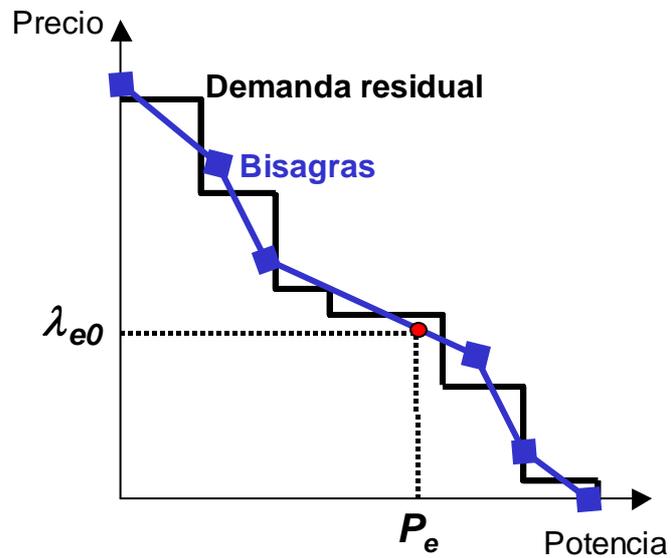


Figura 5. 34: Precios  $\lambda_{e0}$  esperados por los generadores

- Una vez obtenidos los datos de los precios  $\lambda_{e0}$  por nivel de carga, puede utilizarse, igual que antes, cualquier medida estadística de tendencia central para estimar el precio  $\lambda_{e0}$  representativo por nivel de carga.

## Anexo 5.1 Demostraciones requeridas en el enfoque primal

### Anexo 5.1.1 Condiciones suficientes de existencia de equilibrio

Uno de los resultados de la teoría de problemas de desigualdades variacionales establece como condiciones suficientes para la existencia del equilibrio que  $X$  sea compacto y convexo, y que la función  $F$  sea continua en  $X$ .

La condición de convexidad de la región factible se satisface dado que  $X$  es un poliedro. Por otro lado, la compacidad de  $X$  se cumple dado que  $X$  es un conjunto cerrado (por ser un poliedro) y acotado por la región:

$$S = \{P : 0 \leq P_e \leq pc_e, e = 1, \dots, E\} \quad (5.165)$$

donde el parámetro  $pc_e$  es la suma de las potencias máximas  $pc_g$  de cada grupo de generación  $g$  del agente  $e$ , esto es:

$$pc_e = \sum_{g \in e} pc_g \quad (5.166)$$

La condición de continuidad de la función  $F$  se cumple dado que la pendiente  $\mu_{e0}^*(D, \alpha_{e0})$  y el coste marginal  $CM_e^*(P_e, \alpha_{e0})$  son, por las aproximaciones realizadas en el apartado 5.3.6, funciones continuas.

### Anexo 5.1.2 Condiciones suficientes de unicidad de equilibrio

La unicidad del equilibrio primal se verifica si el conjunto factible  $X$  es cerrado y convexo, y si  $F$  es una función continua y fuertemente monótona.

La **condición de monotonía fuerte** de  $F$  exige la existencia de un parámetro  $\alpha > 0$  tal que para cualquier  $P$  y  $P'$  en  $X$  con  $P \neq P'$  se cumpla:

$$(F(P) - F(P'))^T (P - P') \geq \alpha \cdot \|P - P'\|^2 \quad (5.167)$$

siendo  $\|\bullet\|$  la norma usual, es decir,  $\|P\|^2 = P^T P$ .

Una condición necesaria para que una función  $F$  sea fuertemente monótona es que  **$F$  sea una función monótona**, es decir, que para cualquier  $P$  y  $P'$  en  $X$  se cumpla:

$$(F(P) - F(P'))^T (P - P') \geq 0 \quad (5.168)$$

El producto escalar  $(F(P) - F(P'))^T (P - P')$  es:

$$\sum_{e=1}^E \left\{ \begin{array}{l} \left[ \left( CM_e^*(P_e, \alpha_{e0}) + \mu_{e0}^* (\lambda(\underline{1}^T P, \mu_0), \alpha_{e0}) \cdot P_e - \lambda(\underline{1}^T P, \mu_0) \right) - \right. \\ \left. \left[ \left( CM_e^*(P'_e, \alpha_{e0}) + \mu_{e0}^* (\lambda(\underline{1}^T P', \mu_0), \alpha_{e0}) \cdot P'_e - \lambda(\underline{1}^T P', \mu_0) \right) \right] \right] \\ \cdot [P_e - P'_e] \end{array} \right\} \quad (5.169)$$

que es equivalente a:

$$\begin{aligned} & \left[ \lambda(\underline{1}^T P', \mu_0) - \lambda(\underline{1}^T P, \mu_0) \right] \cdot [\underline{1}^T P - \underline{1}^T P'] \\ & \sum_{e=1}^E \left[ CM_e^*(P_e, \alpha_{e0}) - CM_e^*(P'_e, \alpha_{e0}) \right] \cdot [P_e - P'_e] + \\ & \sum_{e=1}^E \left[ \mu_{e0}^* (\lambda(\underline{1}^T P, \mu_0), \alpha_{e0}) \cdot P_e - \mu_{e0}^* (\lambda(\underline{1}^T P', \mu_0), \alpha_{e0}) \cdot P'_e \right] \cdot [P_e - P'_e] \end{aligned} \quad (5.170)$$

Por un lado, el primero de los tres sumandos de (5.170) es siempre mayor o igual que cero pues la curva de la demanda  $\lambda(\underline{1}^T P, \mu_0)$  es decreciente, esto es:

$$\left[ \lambda(\underline{1}^T P', \mu_0) - \lambda(\underline{1}^T P, \mu_0) \right] \cdot [\underline{1}^T P - \underline{1}^T P'] \geq 0 \quad (5.171)$$

Lo mismo ocurre con el segundo de los términos dado que cada uno de los costes marginales son monótonos, es decir, se cumple:

$$\sum_{e=1}^E \left[ CM_e^*(P_e, \alpha_{e0}) - CM_e^*(P'_e, \alpha_{e0}) \right] \cdot [P_e - P'_e] \geq 0 \quad (5.172)$$

Sin embargo, como se verá a continuación con un ejemplo sencillo, existen situaciones en las que el tercero de los sumandos involucrados puede no ser positivo.

Considérese un mercado utópico con dos agentes ( $E=2$ ) sin restricciones de explotación y tal que cada agente tiene un grupo de generación. Supóngase que los costes variables de los dos grupos son idénticos (por lo tanto, la restricción (5.172) es de igualdad) y que la curva de la demanda es lineal y pasa por el punto  $(D_0, \lambda_0)$  con pendiente  $\mu_0$  igual a 1, es decir,  $\lambda(\underline{1}^T P, \mu_0) = \lambda_0 + (D_0 - \underline{1}^T P)$ . Entonces (5.170) resulta ser:

$$\begin{aligned}
 & (P_1 + P_2 - P'_1 - P'_2)^2 + \tag{5.173} \\
 & [\mu_{10}^*(\lambda(P_1 + P_2, \mu_0), \alpha_{10}) \cdot P_1 - \mu_{10}^*(\lambda(P'_1 + P'_2, \mu_0), \alpha_{10}) \cdot P'_1] \cdot [P_1 - P'_1] + \\
 & [\mu_{20}^*(\lambda(P_1 + P_2, \mu_0), \alpha_{20}) \cdot P_2 - \mu_{20}^*(\lambda(P'_1 + P'_2, \mu_0), \alpha_{20}) \cdot P'_2] \cdot [P_2 - P'_2]
 \end{aligned}$$

Sean ahora las siguientes producciones y pendientes de la demanda residual:

$$\begin{aligned}
 & P_1 = 3, P_2 = 3 \tag{5.174} \\
 & P'_1 = 6, P'_2 = 1 \\
 & \left. \begin{aligned} \mu_{1e_0}(\alpha_{e_0}) &= 0.01 \\ \mu_{2e_0}(\alpha_{e_0}) &= 1 \end{aligned} \right\} e = 1,2
 \end{aligned}$$

Supongamos que se escogen los precios esperados  $\lambda_{e0}$  como en la Figura 5. 35 (obsérvese que se tiene la siguiente relación entre demandas  $P_1 + P_2 < P'_1 + P'_2$ , por lo que la relación entre los correspondientes precios demandados es en sentido contrario, es decir,  $\lambda > \lambda'$ ).

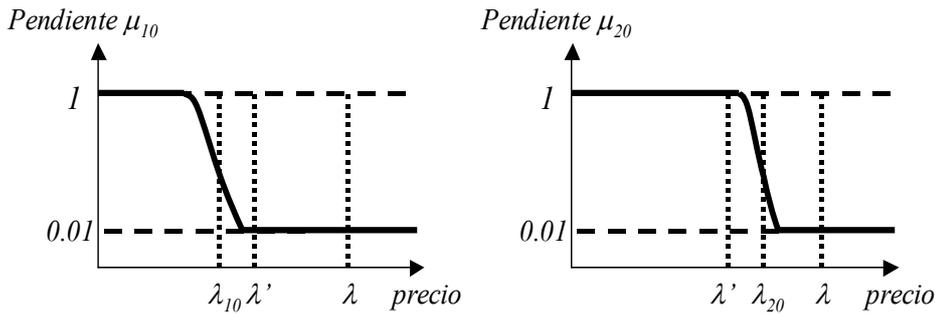


Figura 5. 35: Pendientes como función del precio, escogidas para el análisis de la unicidad del equilibrio primal

Entonces, se puede comprobar que se tiene:

$$\begin{aligned}
 & \mu_{10}^*(\lambda(P_1 + P_2, \mu_0), \alpha_{10}) = \mu_{10}^*(\lambda(P'_1 + P'_2, \mu_0), \alpha_{10}) = 0.01 \tag{5.175} \\
 & \mu_{20}^*(\lambda(P_1 + P_2, \mu_0), \alpha_{20}) = 0.01 \\
 & \mu_{20}^*(\lambda(P'_1 + P'_2, \mu_0), \alpha_{20}) = 1
 \end{aligned}$$

por lo que (5. 173) es negativo dado que se cumple:

$$\begin{aligned}
 & (P_1 - P_1' + P_2 - P_2')^2 + \tag{5.176} \\
 & [\mu_{10}^*(\lambda(P_1 + P_2, \mu_0), \alpha_{10}) \cdot P_1 - \mu_{10}^*(\lambda(P_1' + P_2', \mu_0), \alpha_{10}) \cdot P_1'] \cdot [P_1 - P_1'] + \\
 & [\mu_{20}^*(\lambda(P_1 + P_2, \mu_0), \alpha_{20}) \cdot P_2 - \mu_{20}^*(\lambda(P_1' + P_2', \mu_0), \alpha_{20}) \cdot P_2'] \cdot [P_2 - P_2'] = \\
 & 1 + [0.01 \cdot 3 - 0.01 \cdot 6] \cdot [3 - 6] + [0.01 \cdot 3 - 1 \cdot 1] \cdot [3 - 1] = \\
 & 1 - [0.03] \cdot [-3] + [-0.97] \cdot [2] < 0
 \end{aligned}$$

Así, la función  $F$  no siempre es monótona en  $X$  y por ello no siempre se satisfacen las condiciones suficientes de unicidad del equilibrio primal.

### Anexo 5.1.3 Convergencia del algoritmo de desigualdades variacionales

A continuación se demuestra que el algoritmo propuesto en el apartado 5.3.9 define una sucesión  $\{P^k\}$  convergente a una solución  $P^*$  del problema de desigualdades variacionales  $VI(X, F)$  descrito en el apartado 5.3.8. Para ello basta comprobar que se cumple:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|P^k - Z^k\| = 0 \tag{5.177}$$

Además de que  $\{P^k\}$  es una sucesión convergente.

Razonemos por reducción al absurdo.

Supongamos que existe  $\varepsilon > 0$  y  $k(\varepsilon)$  en los números naturales tal que para cualquier  $k \geq k(\varepsilon)$  se tiene (en adelante se supone que  $k \geq k(\varepsilon)$ , aunque no quede expuesto explícitamente):

$$\|P^k - Z^k\| \geq \varepsilon \tag{5.178}$$

Primeramente se va a demostrar que en cada iteración se satisfacen las condiciones del **lema de Solodov** (ver apartado 5.3.9), es decir, que se cumple  $F(Z^k)^T (P^k - Z^k) > 0$ .

Dado que  $Z^k$  resuelve el subproblema  $VI(X, F^k)$  y  $P^k \in X$  se tiene:

$$\begin{aligned}
 F^k(Z^k)^T (P^k - Z^k) &= (CM(Z^k) + A(P^k, Z^k) - rM(P^k, Z^k, \alpha))^T (P^k - Z^k) = \tag{5.179} \\
 (F(Z^k) + A(P^k, Z^k) - A(Z^k, Z^k) - rM(P^k, Z^k, \alpha))^T (P^k - Z^k) &\geq 0
 \end{aligned}$$

por lo que reordenando términos:

$$F(Z^k)^T (P^k - Z^k) \geq (A(Z^k, Z^k) - A(P^k, Z^k) + rM(P^k, Z^k, \alpha))^T (P^k - Z^k) \tag{5.180}$$

Además, el lado derecho de la anterior desigualdad resulta ser:

$$\begin{aligned} & (A(Z^k, Z^k) - A(P^k, Z^k) + rM(P^k, Z^k, \alpha))^T (P^k - Z^k) = \\ & \sum_{e=1}^E (\mu_{e0}^* (\lambda(\mathbf{1}^T Z^k, \mu_0), \alpha_{e0}) - \mu_{e0}^* (\lambda(\mathbf{1}^T P^k, \mu_0), \alpha_{e0})) \cdot Z_e^k \cdot (P_e^k - Z_e^k) + \alpha \cdot \|P^k - Z^k\|^2 \end{aligned} \quad (5.181)$$

El primero de sus sumandos puede asimismo acotarse:

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{e=1}^E (\mu_{e0}^* (\lambda(\mathbf{1}^T Z^k, \mu_0), \alpha_{e0}) - \mu_{e0}^* (\lambda(\mathbf{1}^T P^k, \mu_0), \alpha_{e0})) \cdot Z_e^k \cdot (P_e^k - Z_e^k) \right| \leq \\ & \sum_{e=1}^E |\mu_{e0}^* (\lambda(\mathbf{1}^T Z^k, \mu_0), \alpha_{e0}) - \mu_{e0}^* (\lambda(\mathbf{1}^T P^k, \mu_0), \alpha_{e0})| \cdot Z_e^k \cdot |P_e^k - Z_e^k| \leq \\ & \text{Max}_{e=1, \dots, E} \{ \mu_{2e0}(\alpha_{e0}) - \mu_{1e0}(\alpha_{e0}) \} \cdot \sum_{e=1}^E Z_e^k \cdot |P_e^k - Z_e^k| \leq \\ & \text{Max}_{e=1, \dots, E} \{ \mu_{2e0}(\alpha_{e0}) - \mu_{1e0}(\alpha_{e0}) \} \cdot \text{Max}_{e=1, \dots, E} \{ pc_e \} \cdot \sum_{e=1}^E |P_e^k - Z_e^k| = \\ & \text{Max}_{e=1, \dots, E} \{ \mu_{2e0}(\alpha_{e0}) - \mu_{1e0}(\alpha_{e0}) \} \cdot \text{Max}_{e=1, \dots, E} \{ pc_e \} \cdot \|P^k - Z^k\|_1 \end{aligned} \quad (5.182)$$

Por otro lado, se satisface la siguiente relación entre normas:

$$\begin{aligned} \|P\|_1^2 &= \left( \sum_{e=1}^E |P_e| \right)^2 = \sum_{e=1}^E |P_e|^2 + \sum_{\substack{e, e'=1 \\ e < e'}}^E (2 \cdot |P_e| \cdot |P_{e'}|) \leq \sum_{e=1}^E |P_e|^2 + \sum_{\substack{e, e'=1 \\ e < e'}}^E (|P_e|^2 + |P_{e'}|^2) = \\ & \sum_{e=1}^E |P_e|^2 + (E-1) \cdot \sum_{e=1}^E |P_e|^2 = E \cdot \sum_{e=1}^E |P_e|^2 = E \cdot \|P\|^2 \end{aligned} \quad (5.183)$$

siendo la norma  $L_p$  ( $1 \leq p < \infty$ )<sup>60</sup>:

$$\|P\|_p = \left( \sum_{e=1}^E |P_e|^p \right)^{1/p} \quad (5.184)$$

Utilizando entonces (5.180), (5.181) y la acotación (5.182) se tiene:

<sup>60</sup>Como ya se dijo se ha notado a la norma usual  $\|\bullet\|_2$  simplemente con  $\|\bullet\|$ .

$$\begin{aligned}
 F(Z^k)^T(P^k - Z^k) &\geq & (5.185) \\
 (A(Z^k, Z^k) - A(P^k, Z^k) + rM(P^k, Z^k, \alpha))^T(P^k - Z^k) &= \\
 \sum_{e=1}^E (\mu_{e0}^*(\lambda(\mathbb{1}^T Z^k, \mu_0), \alpha_{e0}) - \mu_{e0}^*(\lambda(\mathbb{1}^T P^k, \mu_0), \alpha_{e0})) \cdot Z_e^k \cdot (P_e^k - Z_e^k) + \alpha \cdot \|P^k - Z^k\|^2 &\geq \\
 - \text{Max}_{e=1, \dots, E} \{ \mu_{2e0}(\alpha_{e0}) - \mu_{1e0}(\alpha_{e0}) \} \cdot \text{Max}_{e=1, \dots, E} \{ p_{c_e} \} \cdot \|P^k - Z^k\| + \alpha \cdot \|P^k - Z^k\|^2 &\geq \\
 - \text{Max}_{e=1, \dots, E} \{ \mu_{2e0}(\alpha_{e0}) - \mu_{1e0}(\alpha_{e0}) \} \cdot \text{Max}_{e=1, \dots, E} \{ p_{c_e} \} \cdot \sqrt{E} \cdot \|P^k - Z^k\| + \alpha \cdot \|P^k - Z^k\|^2 &= \\
 - K \cdot \|P^k - Z^k\| + \alpha \cdot \|P^k - Z^k\|^2 \geq \theta \cdot \|P^k - Z^k\|^2 &
 \end{aligned}$$

La última desigualdad de la anterior ecuación se debe al hecho de que  $\alpha$  cumple la condición mostrada en (5.41) y a que  $\|Z^k - P^k\| \geq \varepsilon > 0$ , pues:

$$\begin{aligned}
 -K + (\alpha - \theta) \cdot \|P^k - Z^k\| &\geq -K + \frac{K}{\varepsilon} \cdot \|P^k - Z^k\| \geq 0 & (5.186) \\
 \Rightarrow -K \cdot \|P^k - Z^k\| + (\alpha - \theta) \cdot \|P^k - Z^k\|^2 &\geq 0
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, como  $\theta \|Z^k - P^k\| \geq \theta \cdot \varepsilon > 0$  entonces se cumple  $F(Z^k)^T(P^k - Z^k) > 0$ , pudiéndose aplicar el lema de Solodov.

Dado que  $\|P^{k+1} - P^*\| \leq \|P^k(\beta_k) - P^*\|$  pues  $P^{k+1}$  está en  $X$  al ser la proyección en  $X$  de  $P^k(\beta_k)$ , aplicando el lema y la desigualdad (5.185) se tiene:

$$\begin{aligned}
 \|P^{k+1} - P^*\| &\leq \|P^k(\beta_k) - P^*\| \leq \|P^k - P^*\| - \beta_k \cdot (2 - \beta_k) \cdot \left( \frac{F(Z^k)^T(P^k - Z^k)}{\|F(Z^k)\|} \right)^2 & (5.187) \\
 \|P^k - P^*\| - \beta_k \cdot (2 - \beta_k) \cdot \left( \frac{\theta \cdot \|P^k - Z^k\|^2}{\|F(Z^k)\|} \right)^2 &
 \end{aligned}$$

Luego la sucesión  $\{\|P^k - P^*\|\}$  es decreciente, y al ser acotada inferiormente es convergente. Además, tomando límites en  $k$  en la anterior desigualdad (se recuerda que la desigualdad se satisface para  $k \geq k(\varepsilon)$ ) se tiene que cumplir, necesariamente:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\theta \cdot \|P^k - Z^k\|^2}{\|F(Z^k)\|} = 0 \tag{5.188}$$

Como  $F$  es continua en un conjunto  $X$  compacto, entonces  $F$  está acotada, es decir, existe  $M > 0$  tal que  $\|F(P)\| \leq M$ , por lo que:

$$\frac{\theta \cdot \|P^k - Z^k\|^2}{\|F(Z^k)\|} \geq \left(\frac{\theta}{M}\right) \cdot \|P^k - Z^k\|^2 \geq 0 \quad (5.189)$$

Tomando límites en  $k$  se cumple por (5.188):

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|P^k - Z^k\| = 0 \quad (5.190)$$

Lo que es una contradicción con (5.178).

Además se ha probado que para cualquier  $\varepsilon > 0$  y cualquier  $k$  tal que  $\|Z^k - P^k\| \geq \varepsilon$  se tiene  $\|P^{k+1} - P^*\| \leq \|P^k - P^*\|$ , o lo que es lo mismo, que  $\{\|P^k - P^*\|\}$  es decreciente y por lo tanto convergente, luego  $\{P^k\}$  es también convergente.

#### Anexo 5.1.4 Paso de monotonía del algoritmo de desigualdades variacionales

En el apartado 5.3.10 se necesita demostrar que el siguiente vector  $\underline{P}^{k\theta^*}(\rho_k)$  está más cerca de  $P^*$  que el punto  $P^k$ :

$$\underline{P}^{k\theta^*}(\rho_k) = P^k - \rho_k \cdot \frac{F(Z^k)^T (P^k - Q^{k\theta^*})}{\|F(Z^k)\|^2} \cdot F(Z^k) \quad \rho_k \in (0,2) \quad (5.191)$$

siendo  $P^*$  el equilibrio primal,  $P^k$  las producciones fijadas en la iteración  $k$ ,  $Z^k$  la solución del subproblema  $VI(X, F^k)$  y  $Q^{k\theta^*}$  un vector que cumple para cierto  $\theta^* \in (-\infty, 1)$ :

$$\begin{aligned} F(Z^k)^T (P^* - Q^{k\theta^*}) &\leq 0 \\ F(Z^k)^T (P^k - Q^{k\theta^*}) &> 0 \end{aligned} \quad (5.192)$$

Efectivamente, para cualquier solución  $P^*$  de  $VI(X, F)$  se cumple:

$$\begin{aligned} \|\underline{P}^{k\theta^*}(\rho_k) - P^*\|^2 &= \\ \|P^k - P^*\|^2 + \rho_k^2 \cdot \left( \frac{F(Z^k)^T (P^k - Q^{k\theta^*})}{\|F(Z^k)\|^2} \right)^2 \cdot F(Z^k)^T F(Z^k) - 2 \cdot \rho_k \cdot \frac{F(Z^k)^T (P^k - Q^{k\theta^*})}{\|F(Z^k)\|^2} \cdot F(Z^k)^T (P^k - P^*) &= \\ \|P^k - P^*\|^2 + \rho_k^2 \cdot \left( \frac{F(Z^k)^T (P^k - Q^{k\theta^*})}{\|F(Z^k)\|} \right)^2 - 2 \cdot \rho_k \cdot \frac{F(Z^k)^T (P^k - Q^{k\theta^*})}{\|F(Z^k)\|^2} \cdot F(Z^k)^T (P^k - P^*) \end{aligned} \quad (5.193)$$

Por la primera desigualdad de (5. 192) se tiene además:

$$\begin{aligned} F(Z^k)^T(P^k - P^*) &= F(Z^k)^T(P^k - Q^{k\theta^*} + Q^{k\theta^*} - P^*) = \\ F(Z^k)^T(P^k - Q^{k\theta^*}) + F(Z^k)^T(Q^{k\theta^*} - P^*) &\geq F(Z^k)^T(P^k - Q^{k\theta^*}) \end{aligned} \quad (5. 194)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \|\underline{P}^{k\theta^*}(\rho_k) - P^*\|^2 &\leq \\ \|P^k - P^*\|^2 + \rho_k^2 \cdot \left( \frac{F(Z^k)^T(P^k - Q^{k\theta^*})}{\|F(Z^k)\|} \right)^2 - 2 \cdot \rho_k \cdot \left( \frac{F(Z^k)^T(P^k - Q^{k\theta^*})}{\|F(Z^k)\|} \right)^2 = \\ \|P^k - P^*\|^2 - \rho_k \cdot (2 - \rho_k) \cdot \left( \frac{F(Z^k)^T(P^k - Q^{k\theta^*})}{\|F(Z^k)\|} \right)^2 \end{aligned} \quad (5. 195)$$

Por lo tanto, efectivamente el vector  $\underline{P}^{k\theta^*}(\rho_k)$  está más cerca de  $P^*$  que el punto  $P^k$ .

### Anexo 5.1.5 Resolución del subproblema de desigualdades variacionales

En este anexo se prueba que en efecto las ecuaciones descritas en (5. 71) son equivalentes a la resolución del modelo de minimización de (5. 74).

Las condiciones necesarias de KKT del modelo de optimización coinciden con el cálculo de un punto de silla para su lagrangiano, siendo éste:

$$\begin{aligned} \ell(P, D, \lambda, \eta, \kappa) &= \\ \sum_{e=1}^E (C\alpha_e^*(P_e, P^k, \alpha_{e0}) - r_e(P_e^k, P_e, \alpha)) - U(D, \mu_0) \\ - \lambda \cdot \left( \sum_{e=1}^E P_e - D \right) - \sum_{e=1}^E \sum_{j=1}^{m_e} \eta_e^j \cdot h_e^j(P_e) - \sum_{e=1}^E \sum_{k'=1}^{n_e} \kappa_j^{k'} \cdot g_j^{k'}(P_e) \end{aligned} \quad (5. 196)$$

en donde  $\lambda$  es el multiplicador asociado a la ecuación de balance entre generación y demanda, y en donde  $\eta = (\eta_e^j)$  y  $\kappa = (\kappa_e^k)$  son los multiplicadores de Lagrange asociados a cada tipo de restricción de explotación.

Las condiciones KKT son entonces:

$$\left. \begin{aligned}
 & \left\{ \begin{aligned}
 & CM_e^*(P_e, P^k, \alpha_{e0}) + \mu_{e0}^* (\lambda(1^T P^k, \mu_0), \alpha_{e0}) \cdot P_e - \alpha \cdot (P_e^k - P_e) \\
 & - \lambda - \sum_{j=1}^{m_e} \eta_e^j \cdot \frac{\partial h_e^j(P_e)}{\partial P_e} - \sum_{k'=1}^{n_e} \kappa_e^{k'} \cdot \frac{\partial g_e^{k'}(P_e)}{\partial P_e}
 \end{aligned} \right\} = 0 \\
 & h_e^j(P_e) = 0 \quad j = 1, \dots, m_e \\
 & g_e^{k'}(P_e) \leq 0 \quad k' = 1, \dots, n_e \\
 & \kappa_e^{k'} \cdot g_e^{k'}(P_e) = 0 \quad k' = 1, \dots, n_e \\
 & \kappa_e^{k'} \leq 0 \quad k' = 1, \dots, n_e \\
 & \lambda(D, \mu_0) - \lambda = 0 \\
 & \sum_{e=1}^E P_e - D = 0
 \end{aligned} \right\} e = 1, \dots, E \quad (5.197)$$

y coinciden con las ecuaciones mostradas en (5. 71).

A continuación se prueba que una solución del problema de optimización es un mínimo global. Para ello basta comprobar que la matriz Hessiana H del lagrangiano, formada por las derivadas segundas respecto de  $P$  y  $D$  (dado que las restricciones de explotación son lineales), es definida positiva.

La matriz H resulta ser:

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 Ca_1^*}{\partial P_1^2} - \frac{\partial^2 r_1}{\partial P_1^2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & \dots & \frac{\partial^2 Ca_E^*}{\partial P_E^2} - \frac{\partial^2 r_E}{\partial P_E^2} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -\frac{\partial^2 U}{\partial D^2} \end{bmatrix} \quad (5.198)$$

Tal y como se definieron las funciones  $Ca_e^*(P_e, P^k, \alpha_{e0})$ ,  $r_e(P_e^k, P_e, \alpha)$  y  $U(D, \mu_0)$  esta matriz se reduce a la siguiente:

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 C_1^*}{\partial P_1^2} + (\mu_{10}^* + \alpha) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & \dots & \frac{\partial^2 C_E^*}{\partial P_E^2} + (\mu_{E0}^* + \alpha) & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -\frac{\partial \lambda}{\partial D} \end{bmatrix} \quad (5.199)$$

Dado que el coste marginal  $CM_e^*$  es diferenciable y monótono creciente, los  $E$  primeros términos de la diagonal principal de la matriz son siempre positivos, esto es:

$$\frac{\partial^2 C_e^*}{\partial P_e^2} + (\mu_{e0}^* + \alpha) > 0 \quad \forall e=1, \dots, E \quad (5.200)$$

Por otro lado, dado que la curva de la demanda es decreciente, el término restante de la diagonal principal, que coincide con el opuesto de la derivada de la curva de la demanda, es positivo (e igual a  $\mu_0$  en el caso de que la curva de la demanda sea lineal).

En el caso inelástico que, como describe el apartado 5.5, aparece cuando se plantea el equilibrio en variaciones conjeturales, la utilidad de la demanda es idénticamente nula por lo que la matriz  $H$  es de tamaño  $E \times E$ , conteniendo solamente los  $E$  primeros términos de la diagonal principal, que son positivos.

### Anexo 5.1.6 Aplicación y resolución del enfoque primal cuando se consideran curvas de demanda históricas

A lo largo de este capítulo se ha supuesto en el planteamiento del equilibrio primal que las posibles curvas de la demanda esperadas por los generadores son lineales y pasan todas ellas por un precio  $\lambda_{e0}$  esperado por generador (se supone la conjetura de Cournot, aunque análogamente se estudiaría el equilibrio en variaciones conjeturales). Sin embargo, el enfoque propuesto en esta tesis permite resolver el caso en el que se considera un conjunto arbitrario de curvas históricas de la demanda con distintos grados de posibilidad<sup>61</sup>, a través de la aplicación de la siguiente

<sup>61</sup>Análogamente para curvas de demanda residual históricas, en el caso en que se plantee el equilibrio en variaciones conjeturales.

metodología. En el primer paso de la metodología se describe un procedimiento para la asignación de los grados de posibilidad de las curvas.

### **Paso 1. Agrupación por niveles de carga de las curvas de la demanda horarias, y asignación de grados de posibilidad para cada curva**

En este paso se requiere agrupar, primeramente, las curvas horarias de la demanda en los distintos niveles de carga que definen la estructura temporal del modelo de mercado (ver apartado 5.6.1 para una definición de nivel de carga). A continuación, para la aplicación del algoritmo que se describe en el paso 2, se deben asignar grados de posibilidad a las curvas de la demanda. En los siguientes dos puntos se muestran dos posibles métodos para la asignación de posibilidades.

- Un primer método se basa en la agrupación en “clusters” de las curvas de la demanda, de tal forma que curvas con características similares se agrupen en un mismo “cluster” y curvas heterogéneas se agrupen en “clusters” distintos (ver [García-González, 2001] para una posible metodología). Una vez obtenidos los “clusters” puede asignarse un grado de probabilidad a cada uno de ellos, con la proporción, por ejemplo, de curvas contenidas en el “cluster” (este tipo de asignación de grados de probabilidad coincide con la realizada sobre cada intervalo de un histograma de probabilidad). Los grados de probabilidad para cada “cluster” se transforman entonces en grados de posibilidad mediante las transformaciones disponibles (ver capítulo segundo). El grado de posibilidad de cada curva se puede definir entonces como el grado de posibilidad del “cluster” que contiene a la curva.
- Otra metodología alternativa a la descrita en el punto anterior asigna a cada curva de la demanda el grado de posibilidad de su pendiente, determinado con la metodología descrita en el apartado 5.7. A diferencia del procedimiento propuesto en el punto anterior, esta metodología no trata a cada curva de la demanda como una realización particular de las posibles curvas, sino que identifica cada curva de manera única con su pendiente en el precio marginal.

### **Paso 2. Aplicación del enfoque primal para determinar las curvas de la demanda y de costes esperadas por los generadores**

Cuando se consideran los grados de posibilidad asignados en el paso anterior sobre las curvas de la demanda y cuando los costes variables de los grupos de generación son cualesquiera distribuciones de posibilidad, el cálculo de las curvas de la demanda  $\lambda(D, \mu_{e0}^*)$  y de los costes  $C_e(P_e, c_e^*)$  que esperan los generadores<sup>62</sup>, puede realizarse

<sup>62</sup>Bajo los supuestos considerados a lo largo de este capítulo, las curvas de la demanda esperadas por los generadores son lineales en dos tramos y cóncavas, y las curvas de costes son funciones de costes sobrevalorados, lineales a tramos y convexas.

mediante el siguiente algoritmo iterativo para cada conjunto de decisiones de explotación<sup>63</sup>:

- **Paso 2.1.** (En este paso se eliminan aquellos escenarios que hacen que  $\Pi(\underline{B}_e \leq B_e)$  sea mayor estrictamente que  $\alpha_{e0}$ ). Eliminar aquellos escenarios  $\omega_{ers}$  con  $T(\pi\mu_{e0}(\mu_{e0r}), \pi c_e(c_{es})) = \alpha_{e0}$  tal que para algún escenario  $\omega'_{ers} = (\mu'_{e0r}, c'_{es})$  se cumpla:

$$B_e(D, P_e, \omega'_{ers}) \leq B_e(D, P_e, \omega_{ers}) \quad \text{y} \quad T(\pi\mu_{e0}(\mu'_{e0r}), \pi c_e(c'_{es})) > \alpha_{e0} \quad (5.201)$$

Para efectuar este paso es conveniente calcular previamente el beneficio  $B_e = B_e(D, P_e, \omega_{ers})$  para cada escenario  $\omega_{ers} = (\mu_{e0r}, c_{es})$  tal que:

$$T(\pi\mu_{e0}(\mu_{e0r}), \pi c_e(c_{es})) \geq \alpha_{e0} \quad (5.202)$$

- **Paso 2.2.** De entre los restantes  $\omega_{ers}$  que hacen  $T(\pi\mu_{e0}(\mu_{e0r}), \pi c_e(c_{es})) = \alpha_{e0}$  escoger aquel escenario  $\omega^*_{ers}$  con mayor beneficio  $B_e(D, P_e, \omega_{ers})$ .

Para aclarar el funcionamiento de este algoritmo se va a suponer que los costes de producción de los generadores son conocidos. En este caso se trata de determinar en cada iteración, fijadas las decisiones de explotación de todos los generadores, cuál es el escenario de la curva de la demanda que proporciona un mayor precio de la electricidad, y por tanto un mayor beneficio, dentro de los que tienen posibilidad  $\alpha_{e0}$ . El escenario debe elegirse, además, tal que no exista otro que proporcione un menor beneficio y que tenga un grado de posibilidad mayor que  $\alpha_{e0}$  (para que  $\Pi(\underline{B}_e \leq B^*_e)$  no sea mayor que  $\alpha_{e0}$ ).

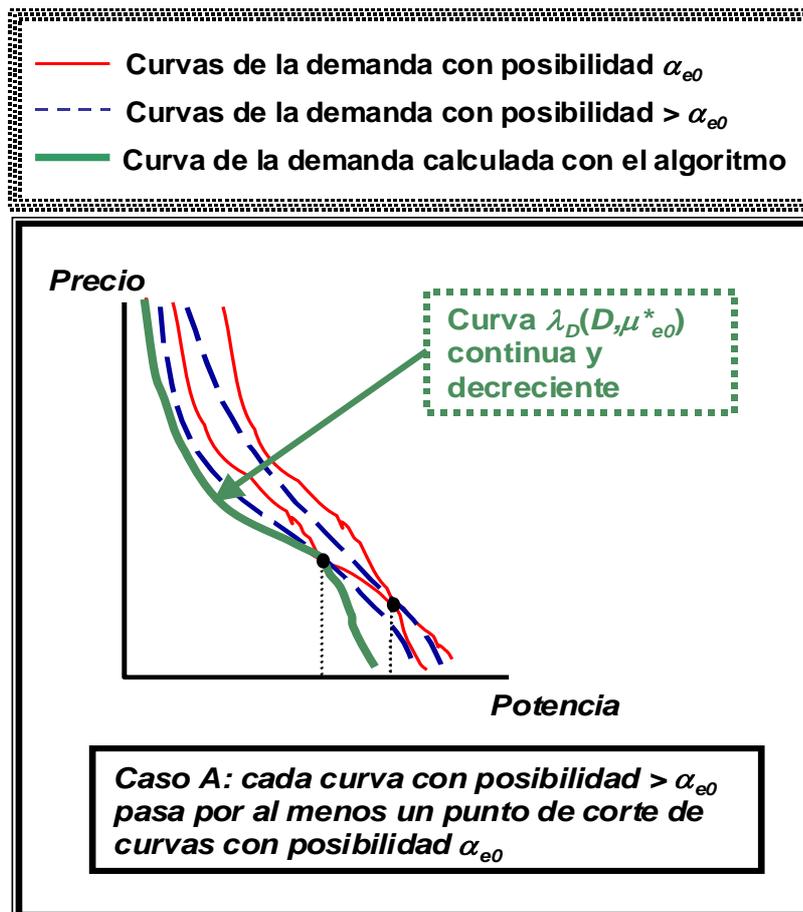
A continuación se muestra la gran variedad de formas que puede tener la curva de la demanda  $\lambda(D, \mu^*_{e0})$  obtenida, incluso en el caso de considerar pocos escenarios.

En cada una de las siguientes dos gráficas (Figura 5. 36) se representan cinco escenarios de curvas de la demanda, que se han supuesto por simplicidad continuas (aunque de igual forma se estudiaría el caso de curvas de la demanda reales, que son curvas escalonadas). En concreto, se han considerado tres escenarios de curvas de la demanda con posibilidad  $\alpha_{e0}$  y dos con posibilidad mayor que  $\alpha_{e0}$ . En la primera gráfica se ha supuesto que cada curva con posibilidad mayor que  $\alpha_{e0}$  pasa por al menos un punto de corte de curvas con posibilidad igual a  $\alpha_{e0}$ , mientras que en la segunda la condición de corte entre curvas no tiene porqué satisfacerse. También, para los dos casos descritos se han representado las dos curvas de la demanda

<sup>63</sup>El algoritmo se ha planteado para el caso posibilista, aunque podría también plantearse para el caso estocástico, pero la complejidad del algoritmo en este último caso sería aún mayor.

$\lambda(D, \mu_{e0}^*)$  calculadas mediante el algoritmo, que resultan de la unión de los puntos (potencia, precio) que satisfacen las siguientes tres condiciones:

- Cada punto (potencia, precio) pertenece a alguno de los escenarios de las curvas de la demanda.
- Fijada la potencia de cada punto, el precio debe ser máximo.
- No existe otro punto (potencia, precio') de un escenario, con grado de posibilidad mayor que  $\alpha_{e0}$  y tal que precio' sea menor que precio.



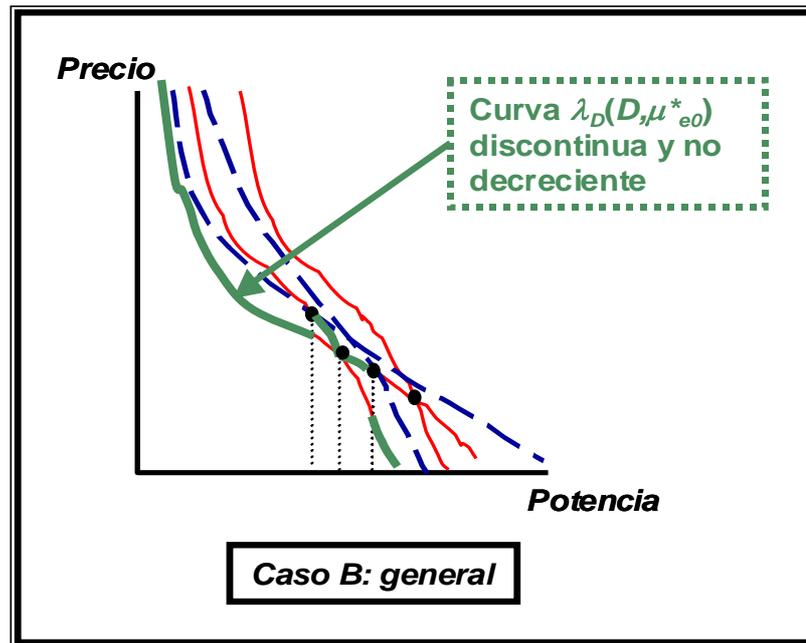


Figura 5. 36: Curvas de la demanda a la que se enfrenta cada agente según el enfoque primal

Como puede verse, en el primer caso  $\lambda(D, \mu^*_{e0})$  resulta ser una función continua y decreciente, mientras que en el segundo se obtiene una curva  $\lambda(D, \mu^*_{e0})$  que no es continua ni decreciente.

La obtención de curvas de la demanda  $\lambda(D, \mu^*_{e0})$  no decrecientes no invalida el enfoque primal, pues las curvas obtenidas no tienen porqué corresponder con curvas de la demanda reales, sino que son el resultado lógico de considerar diferentes escenarios para los diferentes niveles de potencia. Esto mismo ocurre cuando se considera un árbol de escenarios de probabilidad para representar la incertidumbre, dado que un árbol de escenarios no representa un escenario real del mercado.

Es importante subrayar que en este paso, cuando los costes son desconocidos, se requiere aplicar el algoritmo para cada conjunto de potencias  $P_e$  generadas por cada agente, lo que obviamente no resulta viable en la práctica<sup>64</sup>. Una simplificación puede resultar de la aplicación del algoritmo para un conjunto finito de potencias  $\{P^l_e, \dots, P^{me}_e\}$ , que por ejemplo puedan seleccionarse en un entorno de una potencia esperada en la casación.

**Paso 3. Aproximación de la curva de la demanda esperada por una curva lineal en varios tramos, continua, decreciente y tal que su pendiente es decreciente con el precio del mercado**

<sup>64</sup>Aunque si los costes fuesen conocidos el algoritmo se aplicaría mucho más fácilmente, tal y como se ha descrito con las anteriores dos figuras.

Esta aproximación resulta conveniente no sólo para determinar la pendiente de la demanda residual que se fija en cada iteración del algoritmo propuesto en esta tesis, sino también para aumentar su eficiencia computacional (ver apartados 5.3.9 y 5.3.10). La aproximación puede obtenerse con el modelo bisagras imponiendo la condición de decrecimiento de la pendiente  $\mu_{e0}^*$  con respecto del precio de mercado  $\lambda$ .

En la Figura 5. 37 se muestra gráficamente la metodología descrita en este apartado cuando las curvas de la demanda son escalonadas.

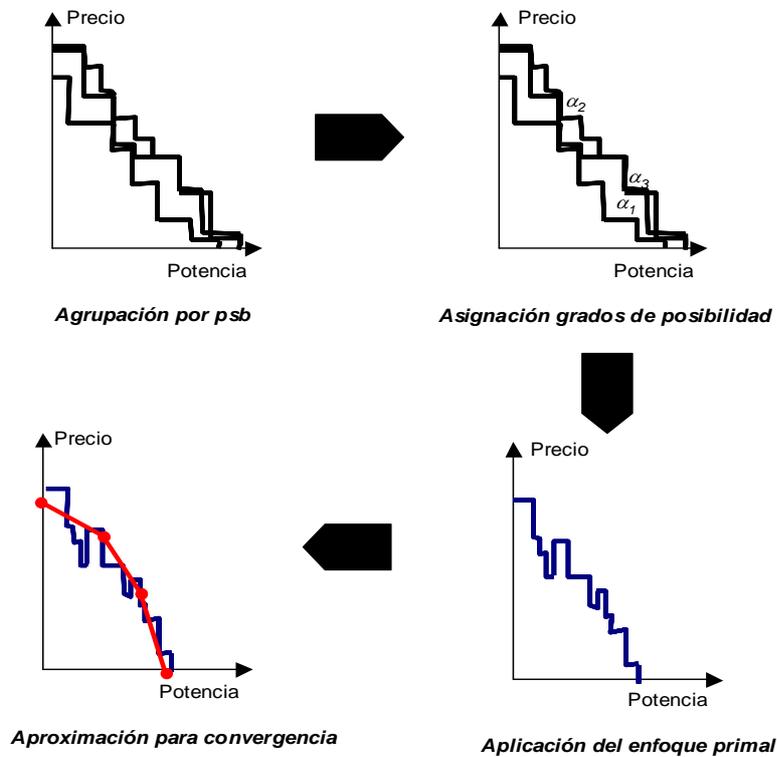


Figura 5. 37: Aplicación directa del enfoque primal sobre curvas de la demanda históricas

## Anexo 5.2 Demostraciones requeridas en el enfoque dual

### Anexo 5.2.1 Condiciones de segundo orden para el equilibrio

Para demostrar que el equilibrio dual es un máximo de la función de beneficio  $B_e^*$  (análogamente se podría comprobar que se trata de un mínimo de  $\alpha_e^*$ ) es necesario calcular la segunda derivada de  $B_e^*$  en el equilibrio, lo que resulta ser:

$$\frac{\partial^2 B_e^*}{\partial P_e^2} = -2 \cdot \mu_{e0}^*(D, \alpha_e^*, \theta) - \frac{\partial \mu_{e0}^*(D, \alpha_e^*, \theta)}{\partial P_e} \cdot P_e - \frac{\partial CM_e^*(P_e, \alpha_e^*, \theta)}{\partial P_e^2} \quad (5.203)$$

en donde se ha utilizado el hecho de que en el equilibrio la derivada de  $\alpha_e^*$  respecto de la potencia  $P_e$  es igual a cero.

Se cumple entonces la condición de segundo orden pues se tiene:

$$\frac{\partial^2 B_e^*}{\partial P_e^2} < 0 \quad (5.204)$$

La desigualdad estricta se debe a que en el equilibrio se cumplen las siguientes dos condiciones:

- La pendiente  $\mu_{e0}^*(D, \alpha_e^*, \theta)$  es siempre positiva y monótona creciente en  $P_e$  (y en  $D$ ), dado que se satisface:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu_{e0}^*(D, \alpha_e^*, \theta)}{\partial P_e} &= \frac{\partial \mu_{e0}^*(D, \alpha_e^*, \theta)}{\partial D} \cdot \frac{\partial D}{\partial P_e} + \frac{\partial \mu_{e0}^*(D, \alpha_e^*, \theta)}{\partial \alpha_e^*} \cdot \frac{\partial \alpha_e^*}{\partial P_e} = \\ \frac{\partial \mu_{e0}^*(D, \alpha_e^*, \theta)}{\partial D} &= \frac{\partial \mu_{e0}^*(D, 1, \theta)}{\partial D} - \frac{\partial LR_e^{-1}(\alpha_e^*)}{\partial D} \cdot (\mu_{e0}^*(D, 1, \theta) - \mu_{e0}^*(D, 0, \theta)) - \\ LR_e^{-1}(\alpha_e^*) \cdot \left( \frac{\partial \mu_{e0}^*(D, 1, \theta)}{\partial D} - \frac{\partial \mu_{e0}^*(D, 0, \theta)}{\partial D} \right) &= \\ \frac{\partial \mu_{e0}^*(D, 1, \theta)}{\partial D} - LR_e^{-1}(\alpha_e^*) \cdot \left( \frac{\partial \mu_{e0}^*(D, 1, \theta)}{\partial D} - \frac{\partial \mu_{e0}^*(D, 0, \theta)}{\partial D} \right) &\geq 0 \end{aligned} \quad (5.205)$$

en donde se ha utilizado el hecho de que en el equilibrio se tiene:

$$\frac{\partial LR_e^{-1}(\alpha_e^*)}{\partial D} = \frac{\partial LR_e^{-1}(\alpha_e^*)}{\partial P_e} \cdot \frac{\partial P_e}{\partial D} = 0 \quad (5.206)$$

y el hecho de que  $LR_e^{-1}(\alpha_e^*) \in (0,1]$ , y de que las pendientes  $\mu_{e0}^*(D,1,\theta)$  y  $\mu_{e0}^*(D,0,\theta)$  son monótonas crecientes con la demanda.

- El coste marginal  $\alpha_e^*$ -pesimista es positivo y monótono creciente en  $P_e$ , dado que se satisface:

$$\frac{\partial CM_e^*(P_e, \alpha_e^*, \theta)}{\partial P_e} = \frac{\partial^2 C_e(P_e, c_e^3, \theta)}{\partial P_e^2} + R_e^{-1}(\alpha_e^*) \cdot \left( \frac{\partial^2 C_e(P_e, c_e^4, \theta)}{\partial P_e^2} - \frac{\partial^2 C_e(P_e, c_e^3, \theta)}{\partial P_e^2} \right) \geq 0 \quad (5.207)$$

en donde se ha utilizado el hecho de que la derivada segunda del tercer vértice del coste de producción respecto de  $P_e$  es, además de mayor o igual que cero, menor o igual que la derivada segunda del cuarto vértice (pues  $c_e^4 \geq c_e^3$ ).

### Anexo 5.3 Demostración de la relación entre los enfoques primal y dual

Una de las relaciones inmediatas que pueden deducirse del planteamiento de los enfoques primal y dual es la correspondencia entre los datos de entrada necesarios en uno de los enfoques y el tipo de función objetivo a optimizar en el enfoque restante. En el planteamiento del enfoque primal se necesitan especificar los niveles de riesgo  $\alpha_{e0}$  de cada agente para optimizar el beneficio  $B_e^*$  tal que beneficios peores se den con a lo sumo  $\alpha_{e0}$  grados de posibilidad. Recíprocamente, en el enfoque dual los datos de partida son los beneficios umbrales  $B_{e0}$  y la función objetivo a optimizar son los niveles de riesgo  $\alpha_e^*$ .

Sin embargo, la relación fundamental existente entre los enfoques primal y dual es la siguiente (ver Figura 5. 38):

1. Si se resuelve el enfoque primal fijando un conjunto de niveles de riesgo  $\{\alpha_{e0}\}$ , el equilibrio obtenido, denotado como  $P^{*P}$ , es también un equilibrio desde el punto de vista del enfoque dual cuando se fija como conjunto de beneficios  $\{B_{e0}\}$ , el conjunto de beneficios óptimos  $\{B_e^*\}^P$  resultantes de la resolución del enfoque primal.
2. Recíprocamente, si se resuelve el enfoque dual fijando un conjunto de beneficios  $\{B_{e0}\}$ , el equilibrio obtenido, denotado en este caso como  $P^{*D}$ , es también un equilibrio desde el punto de vista del enfoque primal cuando se fija como conjunto de niveles de riesgos  $\{\alpha_{e0}\}$ , el formado por los niveles de riesgo óptimos  $\{\alpha_e^*\}^D$  resultantes de la resolución del enfoque dual.

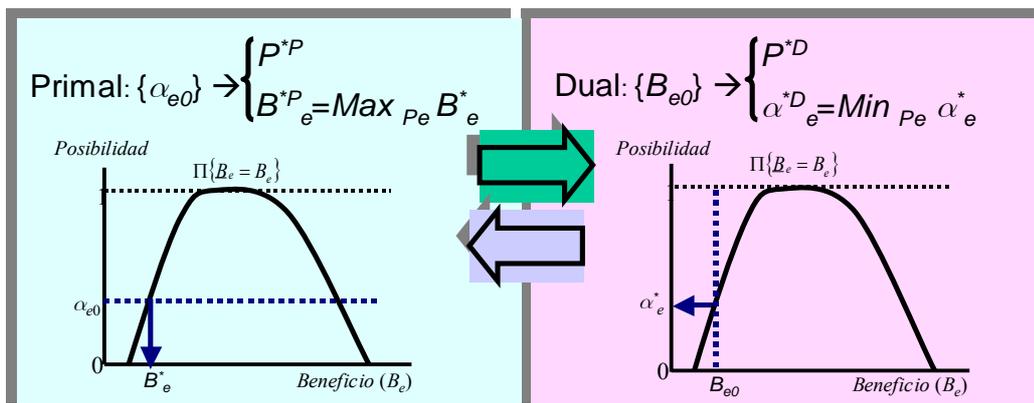


Figura 5. 38: Relaciones entre los enfoques primal y dual

Para demostrar el primer punto del apartado (análogamente para el segundo) vamos a razonar por reducción al absurdo. En [Caballero, 2002] puede verse una demostración análoga a la que aquí se muestra pero cuando se resuelve un modelo de optimización estocástica en lugar del equilibrio de Cournot posibilista.

Supóngase que  $P^{*P}$  no es solución del enfoque dual cuando se fijan como umbrales  $\{B_{e0}\}$  los beneficios óptimos  $\{B_e^*\}^P$  resultantes de la optimización del enfoque primal.

Al ser  $P^{*P}$  el equilibrio primal entonces se cumplen, para cualquier conjunto de potencias  $P$ , las siguientes desigualdades:

$$B_e(D^*, P_e^*, \omega_e^*) \geq B_e(D^* - P_e^* + P_e, P_e, \omega_e^*) \quad e=1, \dots, E \quad (5.208)$$

Además, tal y como se mencionó cuando se describió el planteamiento del enfoque primal, el beneficio óptimo  $B_e^* = B_e(D^*, P_e^*, \omega_e^*)$  es el menor beneficio en el  $\alpha_{e0}$ -corte de la distribución del beneficio  $\underline{B}_e$ , esto es:

$$\Pi(B_e(D^*, P_e^*, \omega_e) = B_e^*) = \alpha_{e0} \quad e=1, \dots, E \quad (5.209)$$

Como por hipótesis  $P^{*P}$  no es el equilibrio dual cuando se fijan como umbrales  $\{B_{e0}\}$  los beneficios óptimos  $\{B_e^*\}^P$ , debe existir un nivel de potencia  $P_{e'}$  para un determinado agente  $e'$  tal que el grado  $\alpha_{e'}$  evaluado con  $P^{*P}$  es mayor que con  $(P_1^*, \dots, P_{e'}^*, \dots, P_E^*)$  (téngase en cuenta que en el enfoque dual se minimiza  $\alpha_{e'}$ ), esto es:

$$\alpha_{e'}(D^*, P_{e'}^*, B_{e'}^*) > \alpha_{e'}(D^* - P_{e'}^* + P_{e'}, P_{e'}, B_{e'}^*) \quad (5.210)$$

Además, por definición de  $\alpha_{e'} = \alpha_{e'}(D^*, P_{e'}^*, B_{e'}^*)$  se cumple:

$$\Pi(B_{e'}(D^*, P_{e'}^*, \omega_{e'}) = B_{e'}^*) = \alpha_{e'}(D^*, P_{e'}^*, B_{e'}^*) \quad (5.211)$$

Por las tres últimas ecuaciones se tiene entonces:

$$\alpha_{e'0} > \alpha_{e'}(D^* - P_{e'}^* + P_{e'}, P_{e'}, B_{e'}^*) \quad (5.212)$$

Como la distribución del beneficio  $\underline{B}_{e'}$  es de tipo  $LR$  y por lo tanto continua, debe de existir un valor  $B_{e'} \leq B_{e'}^2$ , tal que se cumple:

$$\alpha_{e'0} = \alpha_{e'}(D^* - P_{e'}^* + P_{e'}, P_{e'}, B_{e'}) \quad (5.213)$$

Además, al ser  $\underline{B}_{e'}$  creciente en  $[B_{e'}^1, B_{e'}^2]$  se tiene  $B_{e'} > B_{e'}^*$ . Luego se ha encontrado una solución  $(P_1^*, \dots, P_{e'}^*, \dots, P_E^*)$  con beneficios óptimos  $\{B_1^*, \dots, B_{e'}^*, \dots, B_E^*\}$  y grados de

posibilidad  $\{\alpha_{10}, \dots, \alpha_{E0}\}$  tal que  $B_e > B_e^*$ , lo que es una contradicción con el hecho de que  $P^{*P}$  es el equilibrio primal.

## 5.8 Referencias

- [Barquín, 2004] J. Barquín, E. Centeno, and J. R. Guillén, "Medium-term generation programming in competitive environments: A new optimization approach for market equilibrium computing". *IEE Proceedings on Generation Transmission and Distribution*, vol. 151, No. 1, pp. 119-126, 2004.
- [Bilgic, 1997] T. Bilgic and I. B. Turksen, "Measurement of Membership Functions: Theoretical and Empirical work," in *Handbook of Fuzzy Sets and Systems*, vol. 1, D. P. Dubois, H., Ed., 1997.
- [Bolle, 1992] F. Bolle, "Supply Function Equilibria and the Danger of Tacit Collusion. The Case of Spot Markets for Electricity". *Energy Economics*, pp. 94-102, 1992.
- [Caballero, 2002] R. Caballero, E. Cerdá, M. M. Muñoz, and L. Rey, "Analysis and Comparisons of some Solution Concepts for Stochastic Programming". *TOP*, vol. 10, No. 1, pp. 101-123, 2002.
- [Campos, 2004] F. A. Campos and J. Villar, "Medium-Term Electricity Generation with Fuzzy Availability," presented at Second international conference on Soft Methods in Probability and Statistics (SMPS), Oviedo (Asturias), 2004.
- [Campos, 2005a] F. A. Campos, J. Villar, and J. Barquin, "Application of Possibility Theory to Robust Cournot Equilibrium in Electricity Market". *Probability In The Engineering And Informational Sciences*, vol. 19, pp. 519-531, 2005a.
- [Campos, 2005b] F. A. Campos, J. Villar, and M. Jiménez, "Robust Solutions using Fuzzy Chance Constraints". *Accepted in Engineering Optimization*, 2005b.
- [Cplex, 1997] Cplex, *Using The Cplex Callable Library*. Incline Village, N.V.: ILOG, Inc, 1997.
- [Cucala, 2003] P. Cucala, "Aplicación de la Teoría de la Posibilidad al Análisis de Planificabilidad de Sistemas de Tiempo Real," *Instituto de Investigación Tecnológica*. Madrid: Pontificia Comillas de Madrid, 2003.
- [Day, 2002] C. Day and B. Hobbs, "Oligopolistic Competition in Power Networks: A conjectured Supply Function Approach". *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 17, No. 3, pp. 597-607, 2002.
- [Dubois, 1987] D. Dubois, "Linear Programming with Fuzzy Data". *Analysis with Fuzzy Information*, vol. 3, pp. 241-263, 1987.
- [Dubois, 1986] D. Dubois and H. Prade, "Fuzzy Sets and Statistical Data". *European Journal of Operation Research*, vol. 25, pp. 345-356, 1986.
- [Dubois, 1991] D. Dubois and H. Prade, "Fuzzy Sets in Approximate Reasoning, Part 1: Inference with Possibility Distributions". *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 40,, pp. 143-202, 1991.

- [Facchinei, 2003] F. Facchinei and J. S. Pang, *Finite-Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems*. New York: Springer, 2003.
- [Fiacco, 1968] A. V. Fiacco and G. P. McCormick, *Nonlinear Programming: Secuencial Unconstrained Minimization Techniques*. New York: Wiley, Reprinted by SIAM publications (1990), 1968.
- [García-González, 2001] J. García-González, "Optimización de la Explotación en el Corto plazo y Elaboración de Ofertas en un Sistema Eléctrico Liberalizado. Naturaleza del Problema y Métodos de Solución," *Electrotecnia y Sistemas*. Madrid: Universidad Pontificia de Comillas, 2001.
- [Harker, 1990] P. T. Harker and J. S. Pang, "Finite-Dimensional Variational Inequality and Nonlinear Complementary Problems: A Survey of Theory, Algorithms and Applications". *Mathematical Programming*, vol. 48, pp. 161-220, 1990.
- [Hashimoto, 1985] H. Hashimoto, "A Spatial Nash Equilibrium Model," presented at 31st American Regional Science Association Meeting, Denver, Colorado, USA, 1985.
- [López Hernández, 2005] J. F. López Hernández, "Predicción a Medio Plazo de las Pendientes de las Curvas de Demanda Residual de un Agente," *Instituto de Investigación Tecnológica*. Madrid: Universidad Pontificia Comillas, 2005.
- [Murphy, 2002] F. H. Murphy and Y. Smeers, "Generation Capacity Expansion in Imperfectly Competitive Restructured Electricity Markets," presented at Center for Operations Research and Econometrics (CORE)-Discussion Paper 2002/69-, Université Catholique de Louvain, Belgium, 2002.
- [Reneses, 2004] J. Reneses, "Análisis de la Operación de los Mercados de Generación de Energía Eléctrica a Medio Plazo," *Organización Industrial*. Madrid: Universidad Pontificia Comillas, 2004.
- [Roman-Ubeda, 1991] J. Roman-Ubeda, "Reliability Assessment of Composite Power Systems containing mixed Hydro and Thermal Generation," *Department of Electrical Engineering and Electronics*. Manchester: University of Manchester in the Institute of Science and Technology, 1991.
- [Sánchez Úbeda, 1999] E. F. Sánchez Úbeda, "Modelos para el Análisis de Datos: Contribuciones al Aprendizaje a partir de Ejemplos," in *Departamento de Electrónica y Sistemas*. Madrid: Universidad Pontificia Comillas, 1999.
- [Solodov, 2001] M. V. Solodov, "A Class of Globally Convergent Algorithms for Pseudomonotone Variational Inequalities," in *Complementarity: Applications, Algorithms and Extensions*, O. L. M. a. J.-S. P. M. C. Ferris, Ed.: Kluwer Academic Publishers, 2001.
- [Song, 2003] Y. Song, Y. Ni, F. S. Wen, Z. Hou, and F. F. Wu, "Conjectural Variation Based Bidding Strategy in Spot Markets: Fundamentals and Comparison with Classical Game Theoretical Bidding Strategies". *Electric Power Systems Research*, vol. 67, pp. 45-51, 2003.

- [Stancu-Minasian, 1984] L. M. Stancu-Minasian, *Stochastic Programming with Multiple Objective Functions*. Dordrecht, 1984.
- [Ventosa, 2000] M. Ventosa, "Modelado de la explotación de la generación en mercados eléctricos liberalizados mediante el problema complementario," *Electrotecnia y Sistemas*: Pontificia Comillas de Madrid, 2000.
- [Wen, 2001] F. S. Wen and A. K. David, "Oligopoly Electricity Market Production under Incomplete Information". *IEEE Power Engineering Review*, pp. 58-61, 2001

## **6. Casos de estudio**

En este capítulo se analiza el comportamiento del enfoque primal descrito en el capítulo anterior mediante su aplicación a varios ejemplos de tamaño reducido y a otros de tamaño real. Con los primeros casos se ilustra en detalle el funcionamiento del modelo de mercado propuesto. Con los casos de tamaño real se comprueba que la metodología de resolución propuesta permite resolver problemas de gran tamaño con resultados satisfactorios. Entre otros estudios, se comparan los resultados obtenidos utilizando el enfoque primal con los conseguidos con el enfoque determinista propuesto en [Barquín, 2004].



## 6.1 Organización del capítulo

Este capítulo se organiza en tres apartados y describe la aplicación del enfoque primal a casos de estudio de tamaño reducido y de tamaño real.

La organización del capítulo es la siguiente.

En primer lugar se comentan algunos aspectos relevantes relacionados con la implantación y resolución del enfoque primal, que han sido necesarios para el alcance de los objetivos perseguidos en este capítulo.

Seguidamente se presentan varios ejemplos sencillos para ilustrar y comprender el funcionamiento del enfoque primal. Se describen los datos considerados, y se comparan los resultados obtenidos con los conseguidos mediante el enfoque determinista descrito en [Barquín, 2004]. Además, se analiza la convergencia del algoritmo de desigualdades variacionales propuesto en esta tesis para resolver las ecuaciones del equilibrio primal.

Finalmente, en el siguiente apartado se presentan dos casos de estudio de tamaño real, que se diferencian por la consideración o no de contratos de generación entre las empresas eléctricas. Se describen los datos de entrada para cada uno de ellos, se muestra el tamaño de los problemas resueltos, y se comparan los tiempos de resolución y los resultados fundamentales (precios marginales, producciones, etc.) del enfoque posibilista, con los obtenidos a través del enfoque determinista.

## 6.2 Implantación y resolución del enfoque primal

A continuación se comentan algunas de las características de cómo se ha llevado a cabo la implantación y resolución del enfoque primal.

- El algoritmo de desigualdades variacionales propuesto en el capítulo anterior para resolver las ecuaciones del equilibrio primal ha sido programado íntegramente en lenguaje GAMS (ver [Brooke, 1998]), adecuado para el modelado de problemas de optimización. La versión de GAMS utilizada ha sido la 21.7.
- El subproblema de desigualdades variacionales y el problema de la proyección, que se tienen que resolver en cada iteración del algoritmo y que resultan ser problemas de optimización con funciones objetivo cuadráticas, han sido resueltos mediante el optimizador CPLEX 9.0.2 (ver [Cplex, 1997]), que es ejecutado desde GAMS. Esta versión del optimizador permite resolver eficientemente modelos de optimización cuadrática, incluso cuando se tratan problemas de gran tamaño. Además, en la resolución del subproblema se ha comprobado que se obtienen resultados más precisos que los obtenidos utilizando metodologías que aproximan linealmente las funciones cuadráticas involucradas<sup>65</sup>. Asimismo, los tiempos de ejecución son significativamente menores que con las mencionadas aproximaciones.
- No se ha aproximado la curva de costes marginales  $\alpha_{e0}$ -pesimista por una curva diferenciable, al ser extremadamente compleja su implantación. En su lugar, y tal y como también se hace en [Reneses, 2004], la curva de costes marginales se ha modelado como una curva lineal a tramos en donde cada tramo corresponde con el coste variable del grupo arrancado en el tramo (ver Figura 6. 1). Con esta representación el coste marginal en los puntos de discontinuidad  $Z_e^k$  de la solución  $Z^k$  del subproblema  $VI(X, F^k)$ , resulta ser:

$$CM_e^*(Z_e^k, P^k, \alpha_{e0}) = -\mu_{e0}^*(\mathbf{1}^T P^k, \alpha_{e0}) \cdot Z_e^k + \lambda + \alpha \cdot (P_e^k - Z_e^k) \quad (6. 1)$$

Por tanto, el coste marginal incluye el término con las variables duales de las restricciones de explotación (comparar con la ecuación (5. 82)), que incrementa o decrementa (según signo) el valor del coste marginal por la derecha o por la izquierda de  $Z_e^k$  respectivamente, para que se satisfagan las condiciones KKT del subproblema (ver Figura 6. 1). Dado que las variables duales no son

<sup>65</sup>Una de las metodologías que utiliza una linealización externa de las funciones cuadráticas ha sido descrita y utilizada en [Reneses, 2004].

parámetros conocidos sino resultados de la resolución del subproblema, en el planteamiento del enfoque debe considerarse a la función de coste marginal como una función multivalorada en los puntos de discontinuidad. En este sentido, los resultados teóricos acerca de los problemas de desigualdades variacionales que han sido utilizados en el capítulo anterior (existencia, unicidad, etc.), pueden extenderse al caso en que la función  $F$  del problema de desigualdades variacionales  $VI(X,F)$  sea multivalorada (ver apartado sexto de [Harker, 1990]).

Dado que en la implantación  $F$  contiene el término con las variables duales de las restricciones, su evaluación en el punto de equilibrio  $P^*$  e igualación a cero coincide con las condiciones KKT de  $VI(X,F)$ , por lo que  $F=0$  es una condición de parada del algoritmo (en el caso de que no se hubiesen incluido las variables duales, solamente se satisfecería la condición  $F(P^*)^T(P-P^*) \geq 0$  para cualquier  $P$  en la región factible  $X$ ).

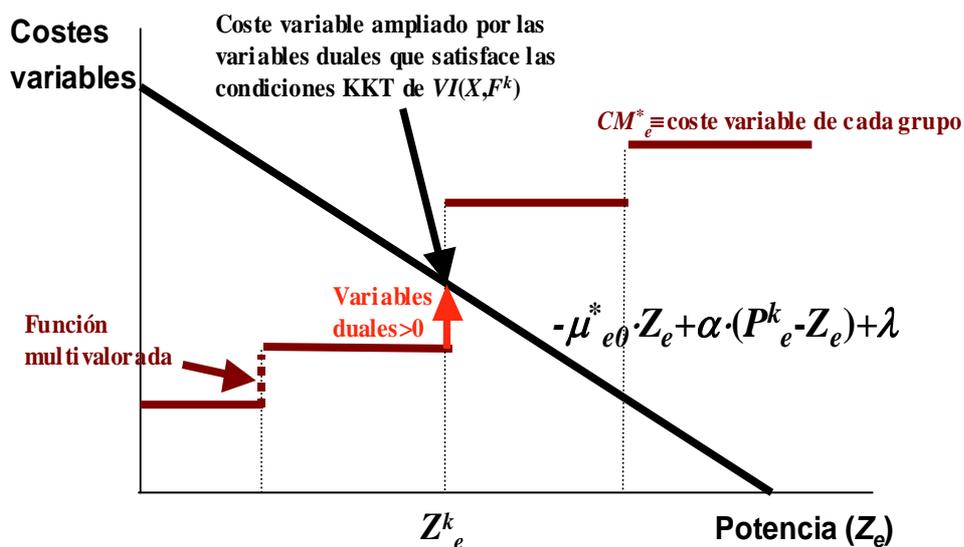


Figura 6. 1: Derivada de la función de coste en la implantación

- El ordenador empleado en la ejecución de los casos de estudio es un Pentium 4 a 1.8 GHz y con 512 MB de memoria RAM.

### 6.3 Casos ejemplos de tamaño reducido

Para poder analizar fácilmente el enfoque primal, se han diseñado varios casos de estudio sencillos que reducen significativamente el tamaño y la complejidad del problema resuelto, y que tienen las siguientes características:

- Existen 2 empresas generadoras dueñas de 2 grupos térmicos de generación cada una.
- El horizonte del caso de estudio es de 2 periodos temporales.
- La única restricción técnica incluida en el modelo es la de potencia máxima por grupo térmico, lo que hace que la región factible  $X$  sea un cubo en  $\mathfrak{R}^2$  cuyas aristas son los límites máximos de producción por empresa. En esta situación, y al no requerirse en el problema de proyección la desagregación de la explotación a nivel de grupo de generación, resulta muy sencillo proyectar sobre la región factible  $X$  cualquier vector  $P$  de producciones, dado que basta con comprobar si satisface los límites máximos de producción. En el caso de que se satisfagan, la proyección  $Pr_X(P)$  coincide con la producción  $P$  a proyectar, mientras que si para algún agente  $e$  la producción  $P_e$  no satisface su límite máximo de producción (suma de los límites máximos de producción de los grupos del agente), la proyección de  $P_e$  coincide con la propia limitación. En todo caso, la proyección  $Pr_X(P)$  que cumple las condiciones impuestas en  $X$ , debe ser menor o igual que la producción  $P$ , esto es:

$$Pr_X(P) \leq P \quad \forall P \quad (6.2)$$

- Solamente se considera incertidumbre en las pendientes de las curvas de la demanda esperadas por los agentes y esperada en la casación, y no en los costes variables de producción.

Los análisis realizados se refieren tanto al comportamiento del enfoque primal en su representación del mercado, como a la convergencia de su algoritmo de resolución.

En concreto, en el primer tipo de análisis se comparan los resultados obtenidos con los del enfoque determinista que considera la pendiente de la demanda con grado máximo de posibilidad (posibilidad uno). Para facilitar la comprensión del análisis, se consideran varios casos ejemplos que ilustran el estudio de menor a mayor complejidad.

Para comprobar experimentalmente la convergencia del algoritmo primal implantado, en el segundo tipo de análisis se ha elegido un conjunto de datos de entrada suficientemente heterogéneo.

### 6.3.1 Casos ejemplos sencillos para el análisis del comportamiento del enfoque primal

Como ya se ha comentado, en este análisis se van a comparar los resultados de varios casos ejemplos sencillos del enfoque primal con los del enfoque determinista. Dado que en el segundo tipo de análisis se realiza un estudio detallado de la convergencia del algoritmo primal, no se mostrarán en el primer tipo de análisis los resultados relacionados con la convergencia de los casos. Además, en todos los casos se considera que los agentes esperan los mismos precios de mercado ( $\lambda_{e0} = \lambda_{e1}$ ) y los mismos escenarios de pendientes de las curvas de la demanda ( $\underline{\mu}_{e0} = \underline{\mu}_{e1}$ ), que en el equilibrio de Cournot coinciden además con los de la curva de la demanda residual. Los precios de mercado  $\lambda_{e0}$  y las pendientes  $\underline{\mu}_{e0}$  coinciden, a su vez, con los de las curvas de la demanda esperada en la casación ( $\lambda_{e0} = \lambda_0$ ,  $\underline{\mu}_{e0} = \underline{\mu}_0$ ). Otros análisis aún más complejos pueden realizarse suponiendo distintos precios y pendientes posibilistas, pero en estos casos muchas de las sensibilidades apreciadas en este apartado resultan más difíciles de reconocer<sup>66</sup>.

#### 6.3.1.1 Equilibrio de Cournot

Supóngase que los agentes ofertan de acuerdo a la conjetura de Cournot, es decir, que las ofertas son de cantidad y no tienen en cuenta la reacción estratégica que manifiestan los competidores ante las mismas. Con este tipo de estrategias las posibles curvas de la demanda esperadas por los generadores deben suponerse elásticas, ya que en caso contrario las pendientes de las curvas no estarían acotadas y por lo tanto las ecuaciones de equilibrio no podrían plantearse. En la Figura 6. 2 se muestran las curvas escogidas en este ejemplo para cada periodo (Per1 y Per2).

---

<sup>66</sup>Por un lado, cuando los precios esperados son distintos, una vez resuelto el enfoque primal, un generador podría tener mayor pendiente de la demanda residual que la supuesta en el enfoque determinista, mientras que el generador restante podría tener una pendiente menor, algo que no ocurre con los casos analizados (todas las pendientes o son mayores que en el enfoque determinista o son menores). Por otro lado, cuando las pendientes posibilistas son distintas, generadores con mismos niveles de riesgos podrían tener distintas pendientes esperadas según el enfoque primal, y generadores con distintos niveles de riesgos podrían tener idénticas pendientes, algo que tampoco ocurre con los casos analizados.

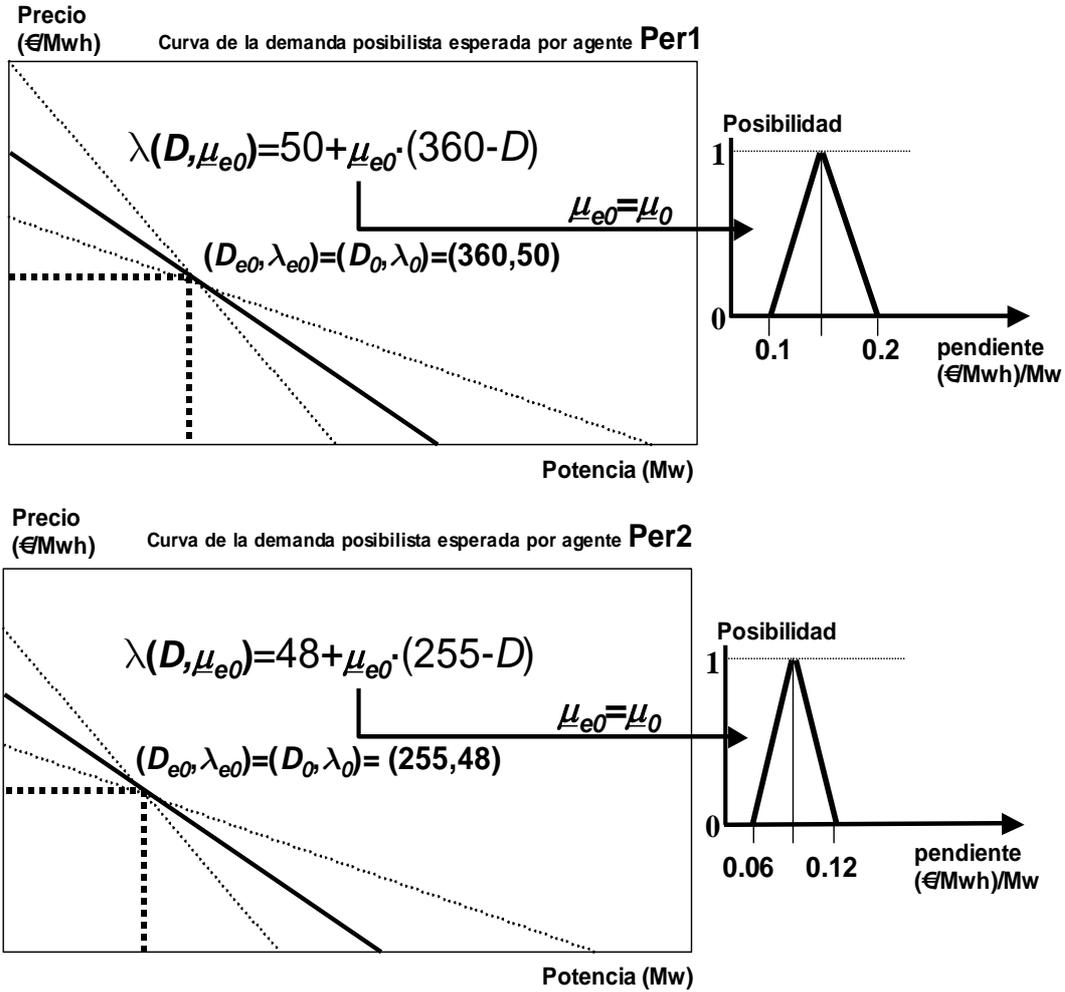


Figura 6. 2: Posibles curvas de la demanda esperadas por los generadores y esperadas en la casación (Cournot)

**Recursos de generación idénticos**

En el primer caso se ha considerado que los agentes tienen los mismos recursos de generación. En la Tabla 6. 1 se ha reflejado la pertenencia de cada grupo  $g_{ij}$  a cada empresa  $E_i$ , así como los valores escogidos para las potencias máximas de los grupos y sus costes variables.

AGENTES ( $e$ )	GRUPOS ( $g$ )	$pc_g$ ( $Mw$ )	$c_g$ ( $€/Mwh$ )
$E_1$	$g_{11}$	275	32
	$g_{12}$	325	34
$E_2$	$g_{21}$	275	32
	$g_{22}$	325	34

Tabla 6. 1: Parque de generación térmica (idénticos recursos)

En la Tabla 6. 2 se muestran, para cada periodo, el equilibrio de mercado, los beneficios de los agentes, la demanda satisfecha y los precios del mercado, que resultan del enfoque determinista. Dado que en la resolución de este enfoque se ha escogido la curva de la demanda esperada en la casación con grado máximo de posibilidad, los precios y beneficios obtenidos son también los de mayor grado de posibilidad. Las distribuciones de posibilidad de los precios y de los beneficios, que son triangulares al igual que las de las pendientes de la demanda, se muestran más adelante comparándolas con las del enfoque primal.

RESULTADOS/PERIODOS	Per1	Per2
Equilibrio ( $P^*_1, P^*_2$ ) ( $Mw$ )	(160,160)	(144.26,144.26)
Beneficios ( $B^*_1, B^*_2$ ) ( $€$ )	(3840,3840)	(1872.9,1872.9)
Demanda satisfecha ( $D^*$ ) ( $Mw$ )	320	288.52
Precio del mercado ( $\lambda^*$ ) ( $€/Mwh$ )	56	44.9

Tabla 6. 2: Resultados enfoque determinista (idénticos recursos)

Como era de prever, dado que los recursos son idénticos, los resultados son los mismos para cada uno de los agentes en estudio.

Enfoque primal con mismos grados de aversión al riesgo

En la Tabla 6. 3 se muestran los resultados del enfoque primal cuando se supone que el nivel  $\alpha_{e0}$  escogido por los agentes es 0.5 grados de posibilidad (se recuerda que cuanto mayor es  $\alpha_{e0}$  menor es la aversión al riesgo), y cuando se escoge la misma curva de la demanda esperada en la casación que en el enfoque determinista (por lo que la curva de la demanda esperada por cada generador no coincide con la utilizada en la casación).

RESULTADOS/PERIODOS	Per1	Per2
Equilibrio ( $P^*_1, P^*_2$ ) (Mw)	(169.42, 169.42)	(136.72, 136.72)
Beneficios ( $B^*_1, B^*_2$ ) (€)	(3587.3, 3587.3)	(1960.6, 1960.6)
Demanda satisfecha ( $D^*$ ) (Mw)	338.83	273.43
Precio del mercado ( $\lambda^*$ ) (€/Mwh)	53.1	46.3

Tabla 6. 3: Resultados enfoque primal (idénticos recursos-simétrico en riesgo)

Tal y como puede verse, al igual que ocurría en el enfoque determinista, los resultados son idénticos para los dos agentes. Sin embargo, la producción en el periodo 1 es mayor que en el enfoque determinista (169.42 frente a 160 Mw). Esto se debe a que, al ser la demanda satisfecha (338.83 Mw) inferior a la demanda esperada ( $D_0=360$  Mw)<sup>67</sup>, las pendientes de las demandas residuales de cada generador según el enfoque primal son menores que en el caso determinista (en concreto 0.125 frente a 0.15 (€/Mwh)/Mw), y por tanto también es menor la capacidad de modificar el precio, lo que hace que las producciones sean mayores y el precio de la electricidad menor (53.1 frente a 56 €/Mwh).

En el periodo 2 ocurre precisamente lo contrario dado que en este caso la demanda satisfecha en el enfoque primal es más grande que la demanda  $D_0$  esperada ( $273.43 > D_0=255$  Mw), por lo que los dos agentes tienen una mayor capacidad de modificar el precio.

En la Figura 6. 3 se muestran las curvas de la demanda esperadas según los enfoques primal y determinista, y se representa el comportamiento descrito en los dos párrafos anteriores.

<sup>67</sup>Todas las comparaciones que se realicen en los casos de estudio entre la demanda satisfecha  $D^*$  y la esperada  $D_{e0}$ , pueden interpretarse en términos del precio del mercado  $\lambda^*$  y el precio esperado  $\lambda_{e0}$ , por la siguiente condición:  $D^* \leq D_{e0} \Leftrightarrow \lambda^* \geq \lambda_{e0}$ .

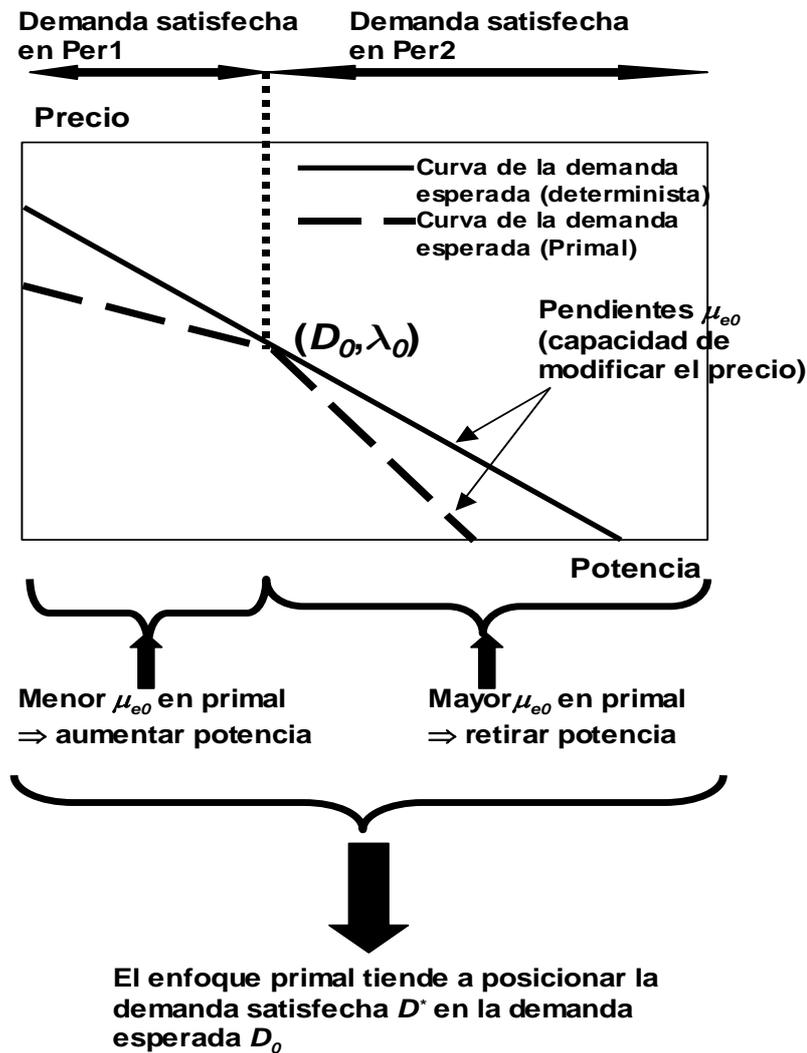


Figura 6. 3: Comportamiento de la demanda satisfecha en el enfoque primal (Cournot)

Al crecer en el enfoque primal la producción cuando la demanda es menor que  $D_0$  y decrecer cuando es mayor, la demanda satisfecha  $D^*$  tiende a la demanda esperada  $D_0$ , y por tanto los precios de casación al precio esperado  $\lambda_0$  (ver Figura 6. 3). Este es el motivo por el que la longitud del soporte de la distribución de posibilidad  $\hat{\lambda}^*$  del precio del mercado va a resultar ser menor con el enfoque primal que con el determinista (ver Figura 6. 4).

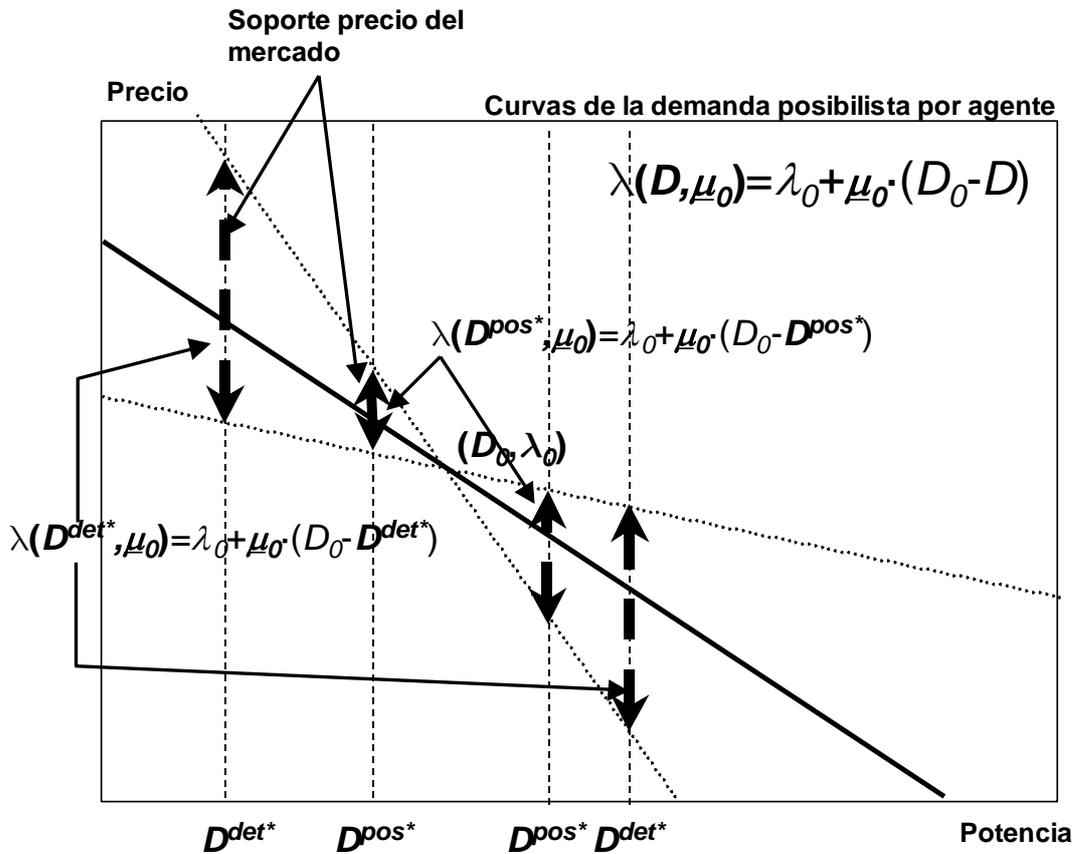


Figura 6. 4: Soportes del precio del mercado con enfoques determinista y primal (Cournot)

Obsérvese que la distribución de posibilidad  $\underline{\lambda}^*$  es el resultado de evaluar el equilibrio en la curva de la demanda posibilista esperada en la casación, dado que, una vez enviadas las ofertas de cantidad al operador del mercado, puede ocurrir que la curva de la demanda empleada por el operador en la casación sea distinta a la supuesta en la resolución (que como ya se dijo era la de mayor grado de posibilidad). Por tanto, la distribución se calcula con la siguiente operación:

$$\underline{\lambda}^* = (\lambda_0 + \underline{\mu}_0 \cdot (D_0 - (P_1^* + P_2^*))) \tag{6.3}$$

Para distintos grados de aversión al riesgo fijados para los dos agentes, la Figura 6. 5 muestra los soportes de las distribuciones de posibilidad del precio correspondientes a los enfoques primal y determinista. Los centros de los soportes son los precios más posibles, dado que las distribuciones son triangulares simétricas.

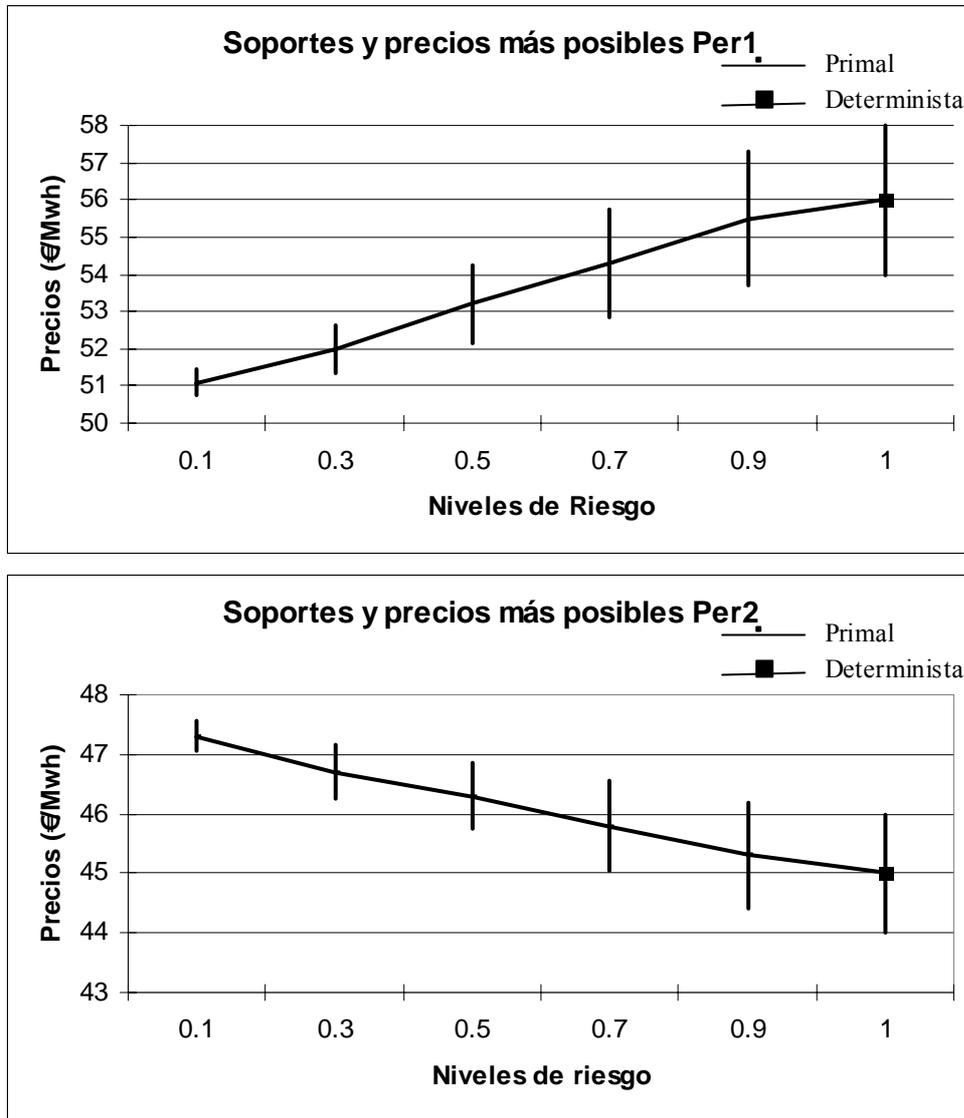


Figura 6. 5: Comparación de las distribuciones de los precios (idénticos recursos-simétrico en riesgo)

Tal y como puede verse en el periodo 1, cuanto mayor es la aversión al riesgo de los generadores, menor es la longitud del soporte de la distribución del precio, a costa de disminuir el precio más posible. En el periodo 2 también la longitud del soporte es menor conforme aumenta la aversión al riesgo, pero en este caso, además, el precio más posible crece.

Estos mismos efectos se obtienen también con el análisis de las distribuciones  $B_e^*$  de los beneficios de los generadores, que da lugar a las aportaciones prácticas más relevantes de esta tesis.

En la Figura 6. 6 se muestra, con una representación igual a la utilizada para el precio, la distribución  $B_e^*$  de los beneficios, que se obtiene multiplicando la distribución del precio por la potencia del equilibrio menos los costes de producción, esto es:

$$B_e^* = \lambda^* \cdot P_e^* - C_e(P_e^*) \quad e = 1,2 \quad (6.4)$$

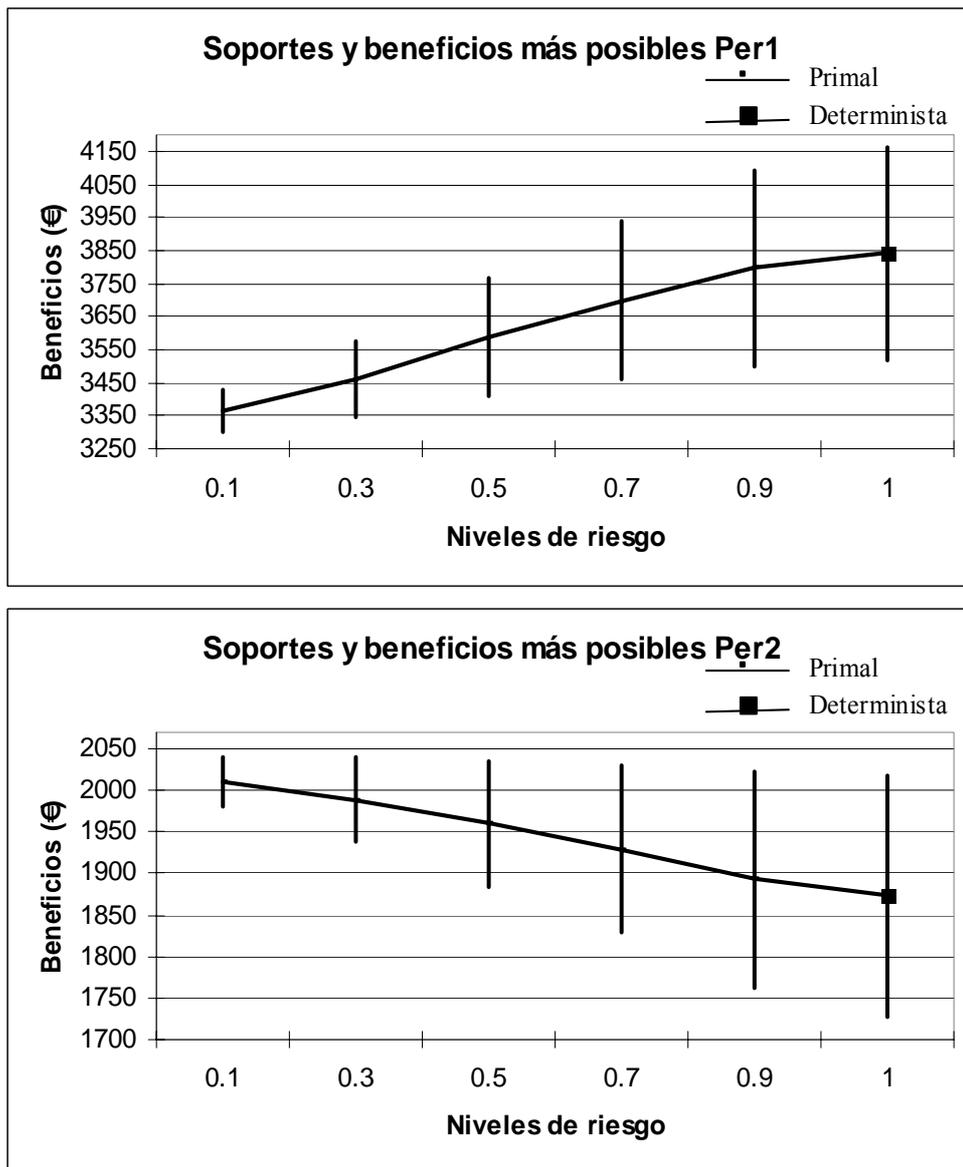


Figura 6. 6: Comparación de las distribuciones de los beneficios (idénticos recursos-simétrico en riesgo)

Para los dos periodos considerados se observa que el enfoque primal propone una estrategia en equilibrio que puede considerarse robusta, en el sentido en que reduce la longitud del soporte de los beneficios posibles. Sin embargo, dado que la reducción media de los beneficios más posibles del periodo 1 es mayor que el aumento medio del periodo 2, la suma total por periodos de los beneficios más posibles es menor con el enfoque primal que con el determinista, tal y como muestra la Figura 6. 7 para los distintos niveles de riesgo considerados.

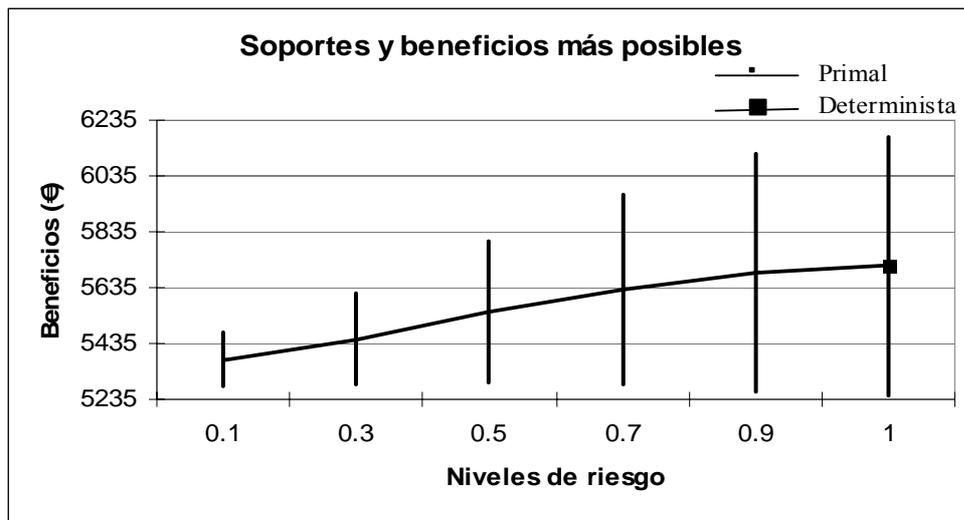


Figura 6. 7: Suma de beneficios más posibles (idénticos recursos-simétrico en riesgo)

Caben además realizar los siguientes comentarios:

- Si en los dos periodos la demanda  $D^*$  obtenida con el enfoque primal hubiese sido menor que la demanda  $D_0$  esperada, se hubiese producido en ambos periodos un decrecimiento de los beneficios más posibles similar al mostrado en el Figura 6. 6 para el primer periodo. Por ello, en este caso la disminución de las longitudes de los soportes de las distribuciones de los beneficios que se hubiese obtenido con la aplicación del enfoque primal, hubiese sido a costa de un decrecimiento más significativo en los beneficios totales más posibles que el mostrado en la Figura 6. 7. No obstante, la demanda satisfecha  $D^*$  sería significativamente mayor que en el enfoque determinista y tendría que pagar mucho menos por su electricidad.
- Por el contrario, si la demanda  $D^*$  hubiese sido mayor que  $D_0$  en ambos periodos, se hubiese producido un aumento en los beneficios totales más posibles, además de una disminución en las longitudes de los soportes de las distribuciones, aunque la demanda satisfecha  $D^*$  sería significativamente menor que la satisfecha con el enfoque determinista y tendría también mayores precios de la electricidad.

Por tanto, cada una de las situaciones que pueden presentarse dependen en gran medida de las estimaciones, para cada periodo, del valor de la demanda  $D_0$  esperada por los generadores<sup>68</sup>. En este sentido, cabe observar que el caso en que las demandas esperadas  $D_0$  son, a lo largo de muchos periodos, menores que las satisfechas con el enfoque primal, corresponde con estimaciones de  $D_0$  incoherentes con el supuesto de aversión al riesgo. Esto se debe a que esta situación contradice la suposición razonable de que cuanto mayor es la aversión al riesgo de un generador, lo que ocurre en el enfoque primal comparado con el determinista, mayor deben ser las demandas  $D_0$  esperadas (correlación directa entre los grados de aversión al riesgo y las demandas  $D_0$  esperadas). Por el contrario, esta suposición no se ve comprometida cuando las demandas  $D_0$  esperadas son mayores que las satisfechas con el enfoque primal, debido a que la indiferencia ante el riesgo del enfoque determinista no implica necesariamente que las demandas  $D_0$  tengan que ser pequeñas.

En definitiva, siendo coherentes con el supuesto descrito, las demandas  $D_0$  esperadas deberían ser, a lo largo de muchos periodos, mayores que las satisfechas con el enfoque primal, lo que corresponde con una reducción en la variabilidad total de los beneficios posibles, a costa de un decrecimiento en los beneficios totales más posibles, lo que es razonable dado que cubrirse frente al riesgo siempre requiere un sacrificio económico.

Por otro lado, para la reducción de la sensibilidad de los resultados del mercado con respecto de la demanda  $D_0$  esperada, podría considerarse un conjunto de demandas  $\{D_0^i\}_i$ . Tal y como se comentó en el capítulo anterior, si las pendientes de la curva de la demanda entre los valores  $D_0^i$  crecen conforme decrece el precio de la electricidad (curva cóncava), este problema puede resolverse también con la aplicación de los algoritmos propuestos en esta tesis, aunque el cálculo de las distribuciones de posibilidad de los precios y de los beneficios puede complicarse.

A continuación se muestran los resultados obtenidos con el enfoque primal cuando se consideran distintos niveles de riesgo en los generadores y mismos recursos de generación, y en análisis posteriores se estudia la situación en la que los recursos son diferentes. Por no extender los análisis realizados, que conducen a conclusiones similares a las hasta ahora deducidas, solamente se detallan los resultados más relevantes que diferencian unos análisis de otros. Por ejemplo, no se representan muchas de las distribuciones de posibilidad de los precios y de los beneficios al comprobarse que las longitudes de los soportes de las distribuciones con el enfoque primal son menores que con el enfoque determinista.

---

<sup>68</sup>La estimación podría basarse en el uso de medidas estadísticas aplicadas a datos históricos de demanda, al igual que se propuso en el capítulo anterior para la estimación de los precios de mercado  $\lambda_{e0}$  esperados.

El enfoque primal con distintos grados de aversión al riesgo

Supongamos que:

- El generador 1 mantiene el nivel  $\alpha_{e0}$  igual a un grado de posibilidad de 0.5.
- El generador 2 fija un nivel  $\alpha_{e0}$  igual a a un grado de posibilidad de 0.8 (el generador 2 es entonces menos averso al riesgo).

RESULTADOS/PERIODOS	Per1	Per2
Equilibrio ( $P^*_1, P^*_2$ ) (Mw)	(175.87,157.40)	(132.64,145.29)
Beneficios ( $B^*_1, B^*_2$ ) (€)	(3870.8,3464.3)	(1848.5,2024.8)
Demanda ( $D^*$ ) (Mw)	333.26	277.92
Precio del mercado ( $\lambda^*$ ) (€/Mwh)	54	45.9

Tabla 6. 4: Resultados enfoque primal (idénticos recursos-asimétrico en riesgo)

En este caso se deducen las siguientes conclusiones (ver Tabla 6. 4):

- Se tienen distintas producciones por generador al tener cada uno de ellos distinta aversión al riesgo.
- El generador 1, que tiene una mayor aversión al riesgo, aumenta su producción en el periodo 1 respecto al caso con igual aversión al riesgo, mientras que la decremента en el periodo 2 (en el periodo 1 los agentes aversos al riesgo tienen siempre una menor capacidad de modificar el precio del mercado, mientras que en el periodo 2 ocurre lo contrario). El generador 2 hace justo lo contrario, siendo además su producción en ambos periodos parecida a la del enfoque determinista (ver Figura 6. 8).

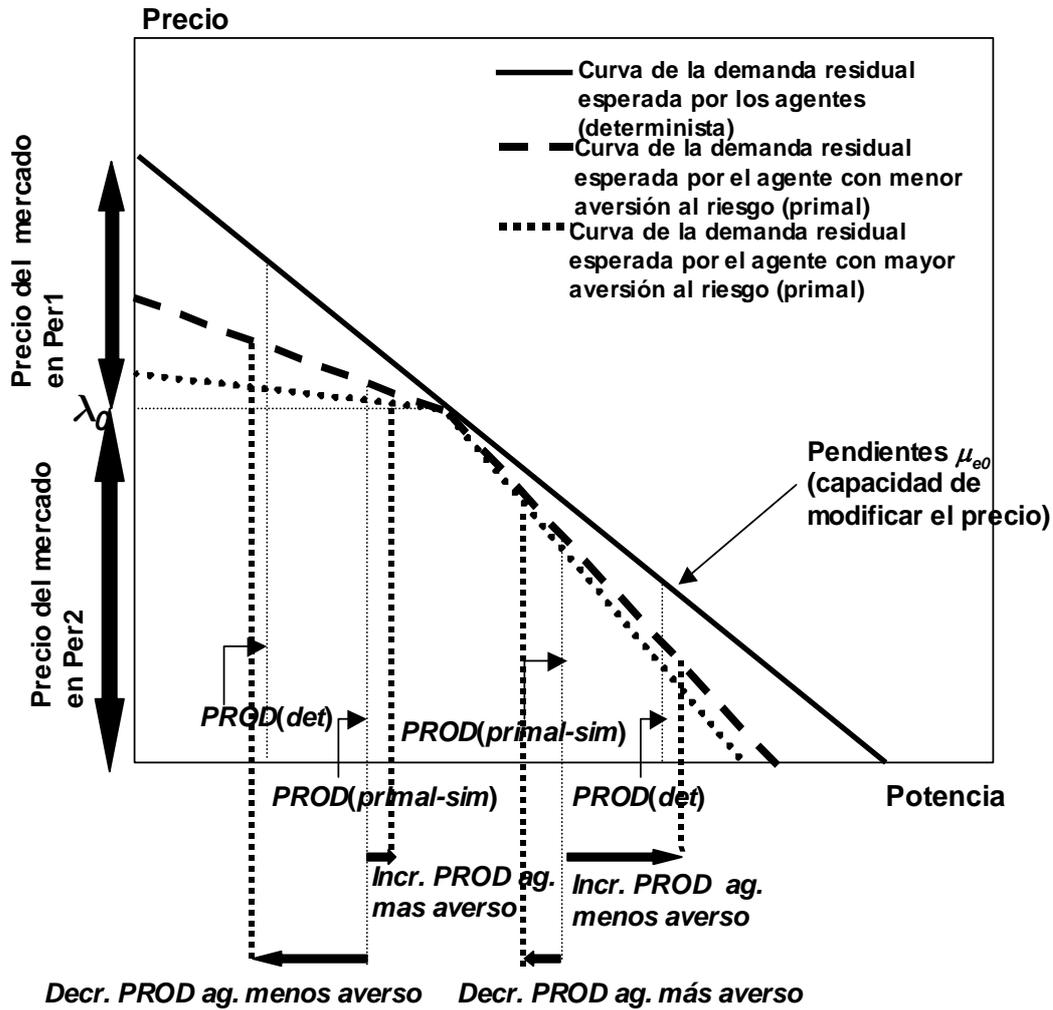


Figura 6. 8: Comportamiento de las producciones de los agentes con distinta aversión al riesgo

A modo de ejemplo, en la Figura 6. 9 se muestra, para el periodo 1, la distribución de posibilidad del beneficio obtenida con el enfoque primal cuando los dos generadores fijan un nivel  $\alpha_{e0}$  igual a 0.5 (caso simétrico), cuando tienen distinta aversión al riesgo, y la obtenida con el enfoque determinista.

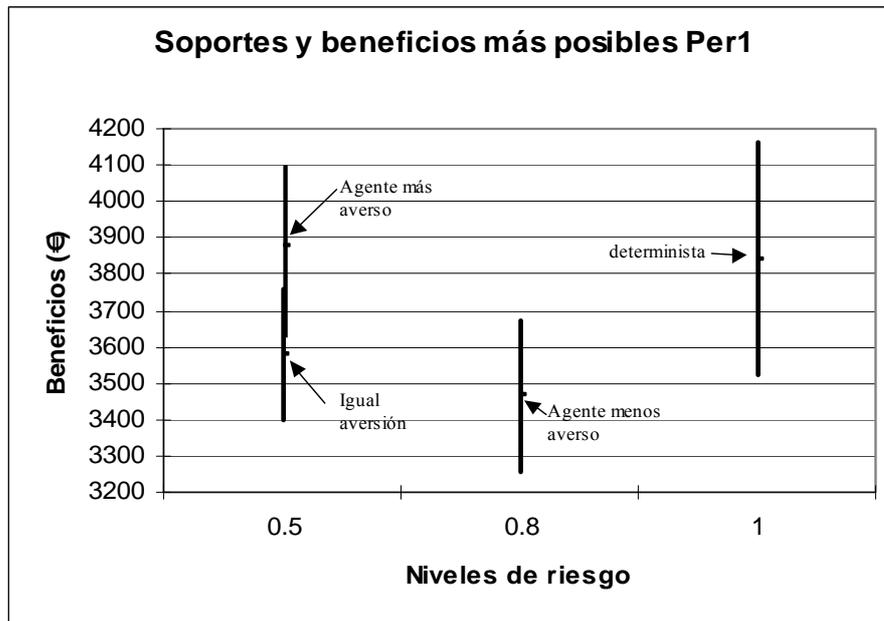


Figura 6. 9: Comparación de las distribuciones de los beneficios (idénticos recursos-asimétrico en riesgo)

Como puede verse, la consideración de distintos grados de aversión al riesgo aumenta las longitudes de los soportes de las distribuciones de los beneficios con respecto del caso simétrico, aunque siguen siendo menores que con el enfoque determinista. Además, la longitud del soporte para el agente menos averso al riesgo es mayor que la del agente más averso, y sus beneficios más posibles acotan (superiormente e inferiormente) a los obtenidos con los enfoques determinista y primal con idéntica aversión al riesgo. Asimismo, el beneficio más posible del agente más averso es mayor que el del agente menos averso, debido a que en el periodo 1 al ser los precios de la electricidad mayores que los esperados, el agente más averso acierta al incrementar su generación (los costes variables no afectan demasiado al ser significativamente menores que los precios de mercado). En el periodo 2 es el agente menos averso al riesgo el que tiene mayor beneficio más posible. Además, en este periodo los beneficios más posibles del enfoque asimétrico siguen acotando los obtenidos con el enfoque determinista y primal con idénticos grados de aversión al riesgo.

**Distintos recursos de explotación**

Supóngase ahora el caso en que el generador 2 tiene un mayor coste de producción que el generador 1, según muestra la Tabla 6. 5.

AGENTES ( $e$ )	GRUPOS ( $g$ )	$pc_g$ (Mw)	$c_g$ (€/Mwh)
$E_1$	$g_{11}$	275	32
	$g_{12}$	325	37
$E_2$	$g_{21}$	275	34
	$g_{22}$	325	39

Tabla 6. 5: Parque de generación térmica (distintos recursos)

Los resultados del enfoque determinista para este caso son los mostrados en la Tabla 6. 6.

RESULTADOS/PERIODOS	Per1	Per2
Equilibrio ( $P^*_1, P^*_2$ ) (Mw)	(164.44, 151.11)	(151.67, 129.44)
Beneficios ( $B^*_1, B^*_2$ ) (€)	(4056.2, 3425.1)	(2070.2, 1508)
Demanda ( $D^*$ ) (Mw)	315.55	281.11
Precio del mercado ( $\lambda^*$ ) (€/Mwh)	56.6	45.6

Tabla 6. 6: Resultados enfoque determinista (distintos recursos)

En contra de lo que ocurría en el caso con idénticos recursos, cuando se consideran costes de producción distintos por generador, sus producciones son también diferentes. El generador con menor coste de producción (generador 1) produce, lógicamente, una mayor cantidad de energía que el generador restante (generador 2).

#### El enfoque primal con mismos grados de aversión al riesgo

Supongamos que los generadores fijan un nivel  $\alpha_{e0}$  igual a 0.5 grados de posibilidad, pero con distintos recursos de generación.

RESULTADOS/PERIODOS	Per1	Per2
Equilibrio ( $P^*_1, P^*_2$ ) (Mw)	(174.97, 159.15)	(142.64, 123.94)
Beneficios ( $B^*_1, B^*_2$ ) (€)	(3828.6, 3164.1)	(2133.5, 1605.9)
Demanda ( $D^*$ ) (Mw)	334.12	266.58
Precio del mercado ( $\lambda^*$ ) (€/Mwh)	53.8	46.9

Tabla 6. 7: Resultados enfoque primal (distintos recursos-simétrico en riesgo)

En este caso se deducen las siguientes conclusiones (ver Tabla 6. 7):

- Al igual que en el caso con idénticos recursos, las producciones son mayores en el primer periodo respecto a las del caso determinista, mientras que son menores

en el segundo periodo. Sin embargo, los beneficios más posibles se comportan en sentido inverso, tal y como también ocurría en el caso con idénticos recursos.

- Además, el generador con menor coste de producción (generador 1) incrementa su producción y mejora su beneficio más posible en ambos periodos respecto al caso con idénticos recursos, mientras que al generador restante le ocurre lo contrario.

El enfoque primal con distintos grados de aversión al riesgo

Supongamos que:

- El generador 1, que tiene un menor coste de producción, mantiene fijado el nivel  $\alpha_{e0}$  en 0.5 grados de posibilidad.
- El generador 2 fija un nivel  $\alpha_{e0}$  igual a 0.8 grados de posibilidad (el generador 2 es entonces menos averso al riesgo).

RESULTADOS/PERIODOS	Per1	Per2
Equilibrio ( $P^*_1, P^*_2$ ) (Mw)	(181.28, 147.63)	(139, 131.59)
Beneficios ( $B^*_1, B^*_2$ ) (€)	(4108.4, 3050.4)	(2028.9, 1657.5)
Demanda ( $D^*$ ) (Mw)	328.91	270.59
Precio del mercado ( $\lambda^*$ ) (€/Mwh)	54.6	46.5

Tabla 6. 8: Resultados enfoque primal (distintos recursos-asimétrico en riesgo) (I)

Algunas de las conclusiones derivadas del análisis comparativo de este caso con los hasta ahora estudiados, que son ahora significativamente más complejas de deducir, son las siguientes (ver Tabla 6. 8):

- En el periodo 1 las diferencias observadas en las producciones de los generadores del caso con igual aversión al riesgo son ahora mayores. Esto se debe a que al tener en este periodo el generador 1 una mayor aversión al riesgo y además un menor coste de explotación, aumenta su producción, mientras que el generador 2 la disminuye por lo contrario (además, al igual que en el caso con idénticos recursos, la producción del generador 2 es similar a la del enfoque determinista, ver Figura 6. 8). Los beneficios más posibles se comportan como en la Figura 6. 9 a pesar de que ahora los enfoques primal con igual aversión y determinista contemplan beneficios diferentes por generador, por la suposición de distintos recursos de generación.
- En el periodo 2, el generador 1, al tener una mayor aversión al riesgo, reduce la producción respecto al caso con igual aversión al riesgo, mientras que el

generador 2 la aumenta. En este caso, además, las variaciones en las producciones son menores que en el caso con idénticos recursos, dado que, por ejemplo, para el generador 2 (análogamente para el generador 1) la condición de costes de explotación mayores contrapone el aumento de la producción por una menor capacidad de modificar el precio (a pesar de ello, la producción del generador 2 se sitúa por encima de la producción del enfoque determinista, al igual que en el caso con idénticos recursos, que ha sido representado en la Figura 6. 8). Las conclusiones del análisis de los beneficios más posibles para este caso siguen siendo similares a las del caso con idénticos recursos.

Las mismas conclusiones que las descritas en los dos puntos anteriores, pero intercambiadas por periodos, se tienen cuando el generador de mayor coste es el que tiene una mayor aversión al riesgo. En la Tabla 6. 9 se muestran los resultados obtenidos cuando el nivel  $\alpha_{e0}$  del generador 1 se fija en 0.8 grados de posibilidad y el del generador 2 en 0.5 grados de posibilidad. Además, en el periodo 1 se deduce que una mayor generación no tiene porqué implicar mayores beneficios, algo que sí ocurría en el caso con idénticos recursos.

RESULTADOS/PERIODOS	Per1	Per2
Equilibrio ( $P_1^*, P_2^*$ ) (Mw)	(162.40, 165.99)	(151.49, 119.71)
Beneficios ( $B_1^*, B_2^*$ ) (€)	(3693.2, 3442.8)	(2202.9, 1501.3)
Demanda ( $D^*$ ) (Mw)	328.39	271.20
Precio del mercado ( $\lambda^*$ ) (€/Mwh)	54.7	46.5

Tabla 6. 9: Resultados enfoque primal (caso asimétrico-asimétrico en riesgo) (II)

### 6.3.1.2 Equilibrio en variaciones conjeturales. Demanda inelástica

De una manera similar al análisis del equilibrio de Cournot, a continuación se describe el análisis del equilibrio en variaciones conjeturales cuando la curva de la demanda esperada en la casación es inelástica. Este análisis muestra que los resultados observados en el equilibrio de Cournot siguen siendo válidos para el caso de considerar demanda inelástica.

En concreto, la demanda inelástica  $D_0$  a satisfacer por periodo se muestra en la Tabla 6. 10.

PERIODOS	$D_0$ (Mw)
Per1	360
Per2	255

Tabla 6. 10: Demanda inelástica en el equilibrio en variaciones conjeturales

Por lo tanto, en todos los casos de estudio considerados en este epígrafe la demanda satisfecha es siempre 360 Mw en el primer periodo y 255 Mw en el segundo.

Las posibles curvas esperadas de la demanda residual por cada generador coinciden para cada uno de ellos y se muestran en la Figura 6. 10 por periodos.

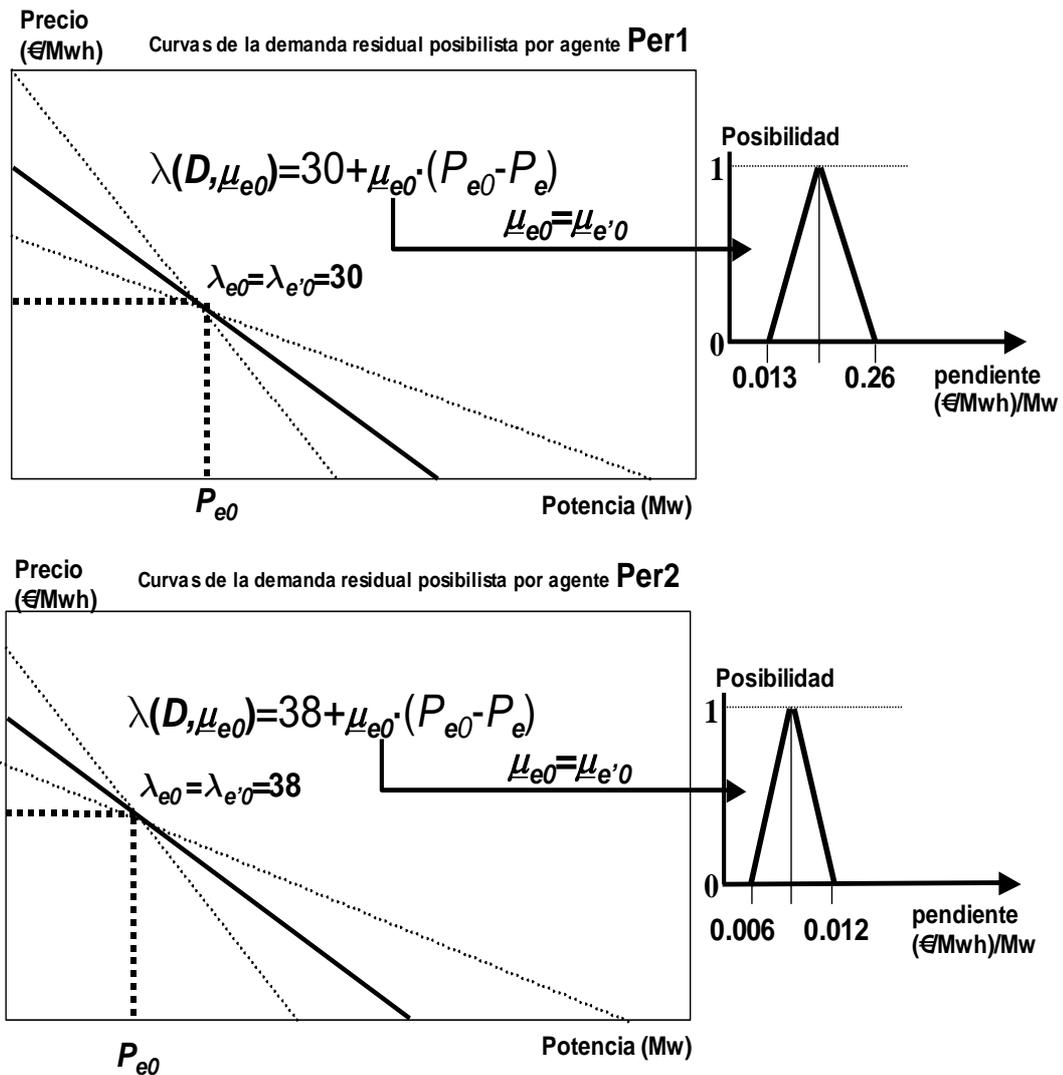


Figura 6. 10: Posibles curvas de la demanda residual esperadas por los generadores (variaciones conjeturales-inelástico)

**Casos simétricos en los recursos de generación**

Los resultados del enfoque determinista son idénticos para cada uno de los agentes en estudio y se muestran en la Tabla 6. 11.

RESULTADOS/PERIODOS	Per1	Per2
Equilibrio ( $P^*_1, P^*_2$ ) (Mw)	(180,180)	(127.5,127.5)
Beneficios ( $B^*_1, B^*_2$ ) (€)	(648,648)	(146,146)
Precio del mercado ( $\lambda^*$ ) (€/Mwh)	35.6	33.1

Tabla 6. 11: Resultados enfoque determinista (idénticos recursos-inelástico)

### Enfoque primal con los mismos grados de aversión al riesgo

En la Tabla 6. 12 se muestran los resultados del enfoque primal cuando el nivel  $\alpha_{e0}$  escogido para cada agente es igual a 0.5 grados de posibilidad.

RESULTADOS/PERIODOS	Per1	Per2
Equilibrio ( $P^*_1, P^*_2$ ) (Mw)	(180,180)	(127.5,127.5)
Beneficios ( $B^*_1, B^*_2$ ) (€)	(540,540)	(170.6,170.6)
Precio del mercado ( $\lambda^*$ ) (€/Mwh)	35	33.3

Tabla 6. 12: Resultados enfoque primal (idénticos recursos-simétrico en riesgo-inelástico)

Tal y como puede verse el equilibrio primal coincide con el del enfoque determinista, debido a que en el caso simétrico solamente existe un conjunto de producciones iguales por agente que sumen la demanda inelástica. Sin embargo, los precios obtenidos son diferentes, dado que la pendiente de la demanda residual es distinta en cada enfoque. De hecho, en el primer periodo, donde el precio de mercado es mayor que el precio esperado y, por tanto, de acuerdo al enfoque primal, donde los agentes tienen menos poder de mercado, tanto el precio como los beneficios son menores. En el segundo periodo ocurre lo contrario dado que ahora el precio de mercado es menor que el esperado.

Puede observarse también que los precios de mercado del enfoque primal son más parecidos a los precios esperados que los del enfoque determinista, debido a que los soportes de las distribuciones de posibilidad de los precios con el enfoque primal han resultado ser menores que con el enfoque determinista. Además, los soportes de las distribuciones de los beneficios también han resultado ser menores con el enfoque primal.

Conviene mencionar que las distribuciones de posibilidad de los precios y de los beneficios en el equilibrio en variaciones conjeturales se calculan de manera distinta al caso del equilibrio de Cournot, dado que la incertidumbre se tiene en cuenta directamente en la pendiente de la demanda residual y no en la pendiente de la demanda esperada en la casación (que en el equilibrio en variaciones conjeturales, además, puede ser inelástica). En concreto, las distribuciones de posibilidad se calculan como sigue:

$$\left. \begin{aligned} \underline{\lambda}_e^* &= (\lambda_{e0} + \mu_{e0} \cdot (P_{e0} - P_e^*)) \\ \underline{B}_e^* &= \underline{\lambda}_e^* \cdot P_e^* - C_e(P_e^*) \end{aligned} \right\} e = 1,2 \quad (6.5)$$

siendo  $P_{e0}$  la potencia cuyo precio en la curva de la demanda residual del agente  $e$  (curva que se obtiene una vez haya sido resuelto el enfoque) coincide con el precio esperado  $\lambda_{e0}$ .

A continuación se muestran los resultados de los casos analizados, que permiten concluir lo mismo que en el enfoque de Cournot, salvo que las variaciones en las producciones de cada generador están ahora fuertemente ligadas por la ecuación de balance de la generación y la demanda inelástica. En concreto, un aumento en la producción de un agente produce una reducción igual en la producción del agente restante.

Enfoque primal con distintos grados de aversión al riesgo ( $\alpha_{10}=0.5, \alpha_{20}=0.8$ )

RESULTADOS/PERIODOS	Per1	Per2
Equilibrio ( $P_1^*, P_2^*$ ) (Mw)	(185.83, 174.16)	(125.30, 129.69)
Beneficios ( $B_1^*, B_2^*$ ) (€)	(589.1, 55.26)	(160, 165.7)
Precio del mercado ( $\lambda^*$ ) (€/Mwh)	35.1	33.2

Tabla 6. 13: Resultados enfoque primal (idénticos recursos-asimétrico en riesgo-inelástico)

**Distintos recursos de generación** (mismos recursos que en Cournot)

RESULTADOS/PERIODOS	Per1	Per2
Equilibrio ( $P_1^*, P_2^*$ ) (Mw)	(230, 130)	(238.61, 16.38)
Beneficios ( $B_1^*, B_2^*$ ) (€)	(1058, 338)	(512.4, 2.4)
Precio del mercado ( $\lambda^*$ ) (€/Mwh)	36.6	34.1

Tabla 6. 14: Resultados enfoque determinista (distintos recursos-inelástico)

Enfoque primal con mismos grados de aversión al riesgo ( $\alpha_{e0}=0.5$ )

RESULTADOS/PERIODOS	Per1	Per2
Equilibrio ( $P_1^*, P_2^*$ ) (Mw)	(236.36, 123.63)	(231.12, 23.87)
Beneficios ( $B_1^*, B_2^*$ ) (€)	(945.4, 247.2)	(540.5, 8)
Precio del mercado ( $\lambda^*$ ) (€/Mwh)	36	34.3

Tabla 6. 15: Resultados enfoque primal (distintos recursos-simétrico en riesgo-inelástico)

Enfoque primal con distintos grados de aversión al riesgo ( $\alpha_{10}=0.5, \alpha_{20}=0.8$ ) y ( $\alpha_{10}=0.8, \alpha_{20}=0.5$ )

RESULTADOS/PERIODOS	Per1	Per2
Equilibrio ( $P^*_1, P^*_2$ ) (Mw)	(241.07, 118.92)	(230.66, 24.33)
Beneficios ( $B^*_1, B^*_2$ ) (€)	(992.9, 251.9)	(536.9, 7.9)
Precio del mercado ( $\lambda^*$ ) (€/Mwh)	36.1	34.3

Tabla 6. 16: Resultados enfoque primal (distintos recursos-asimétrico en riesgo-demanda inelástica) (I)

RESULTADOS/PERIODOS	Per1	Per2
Equilibrio ( $P^*_1, P^*_2$ ) (Mw)	(226.9, 133.09)	(234.61, 20.38)
Beneficios ( $B^*_1, B^*_2$ ) (€)	(959.1, 296.3)	(523.9, 4.7)
Precio del mercado ( $\lambda^*$ ) (€/Mwh)	36.2	34.2

Tabla 6. 17: Resultados enfoque primal (distintos recursos-asimétrico en riesgo-demanda inelástica) (II)

### 6.3.2 Casos ejemplos sencillos para el análisis de la convergencia

Este apartado ilustra detalladamente la convergencia del algoritmo propuesto en esta tesis, a través de dos casos de estudios sencillos. En los casos analizados se ha considerado que la demanda es elástica y que se oferta de acuerdo a la conjetura de Cournot, pero se ha podido comprobar que la convergencia del algoritmo también se verifica cuando se modela el equilibrio en variaciones conjeturales y cuando se considera cualquier tipo de curva de la demanda, ya sea elástica o inelástica.

Los datos del parque de generación térmica considerados se muestran en la Tabla 6. 18.

AGENTES ( $e$ )	GRUPOS ( $g$ )	$pc_g$ (Mw)	$c_g$ (€/Mwh)
$E_1$	$g_{11}$	275	37
	$g_{12}$	325	35
$E_2$	$g_{21}$	180	48
	$g_{22}$	220	47

Tabla 6. 18: Parque de generación térmica (convergencia)

En la Figura 6. 11 se muestran las curvas de la demanda esperadas por el agente 1 para los dos periodos considerados (Per1 y Per2).

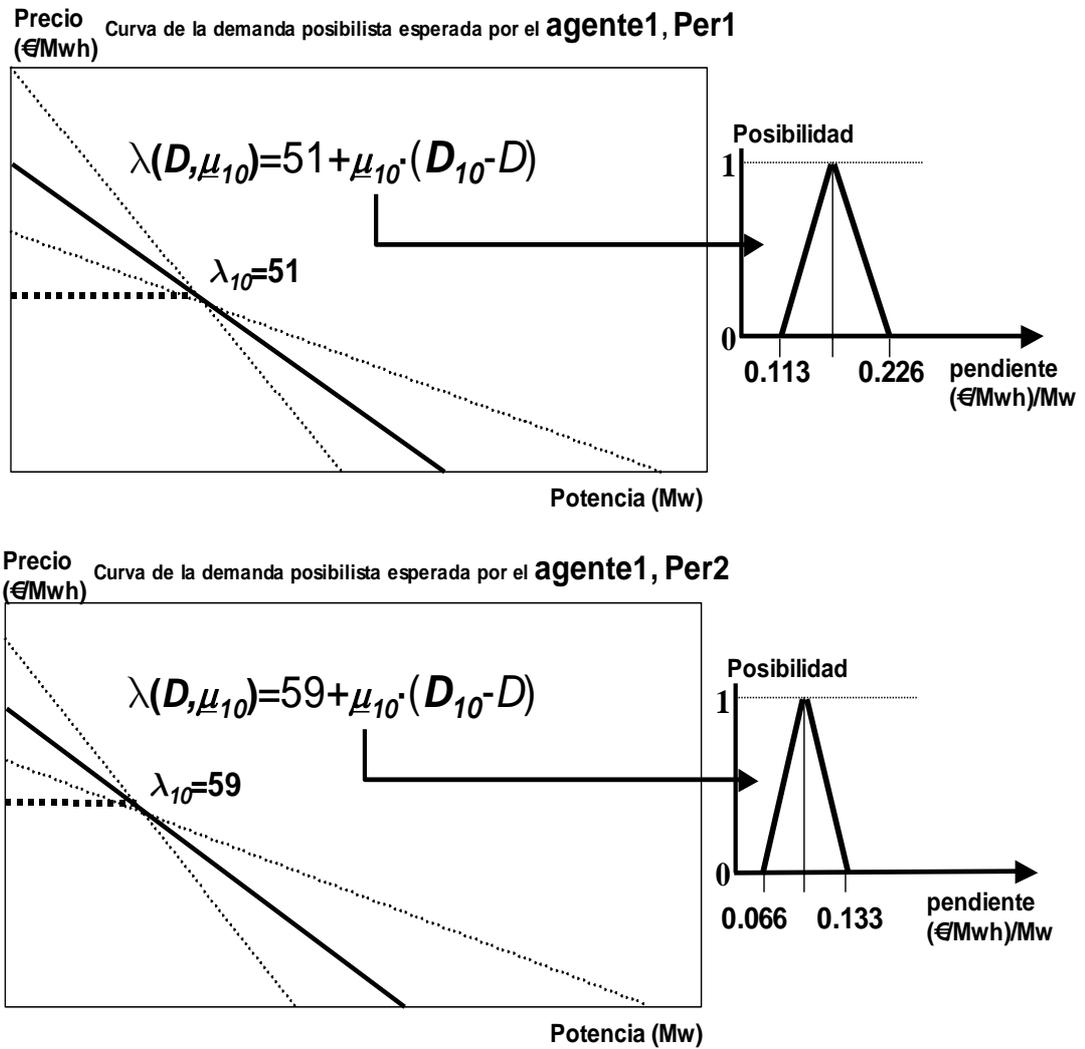


Figura 6. 11: Posibles curvas de la demanda esperadas por el agente 1 (convergencia)

En la Figura 6. 12 se muestran las curvas esperadas por el agente 2.

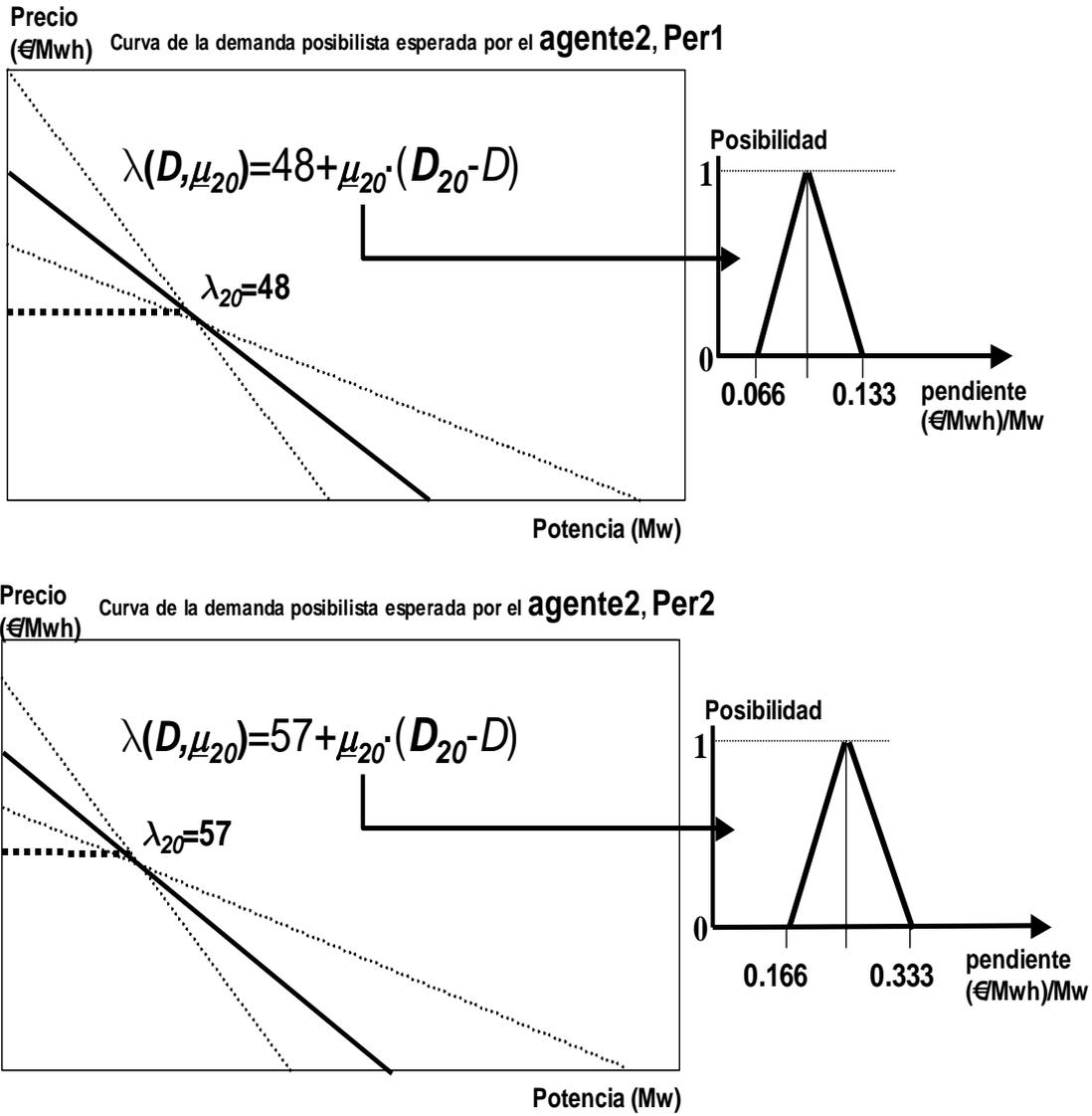


Figura 6. 12: Posibles curvas de la demanda esperadas por el agente 2 (convergencia)

Y finalmente, en la Figura 6. 13 se muestran las curvas de la demanda esperadas en la casación.

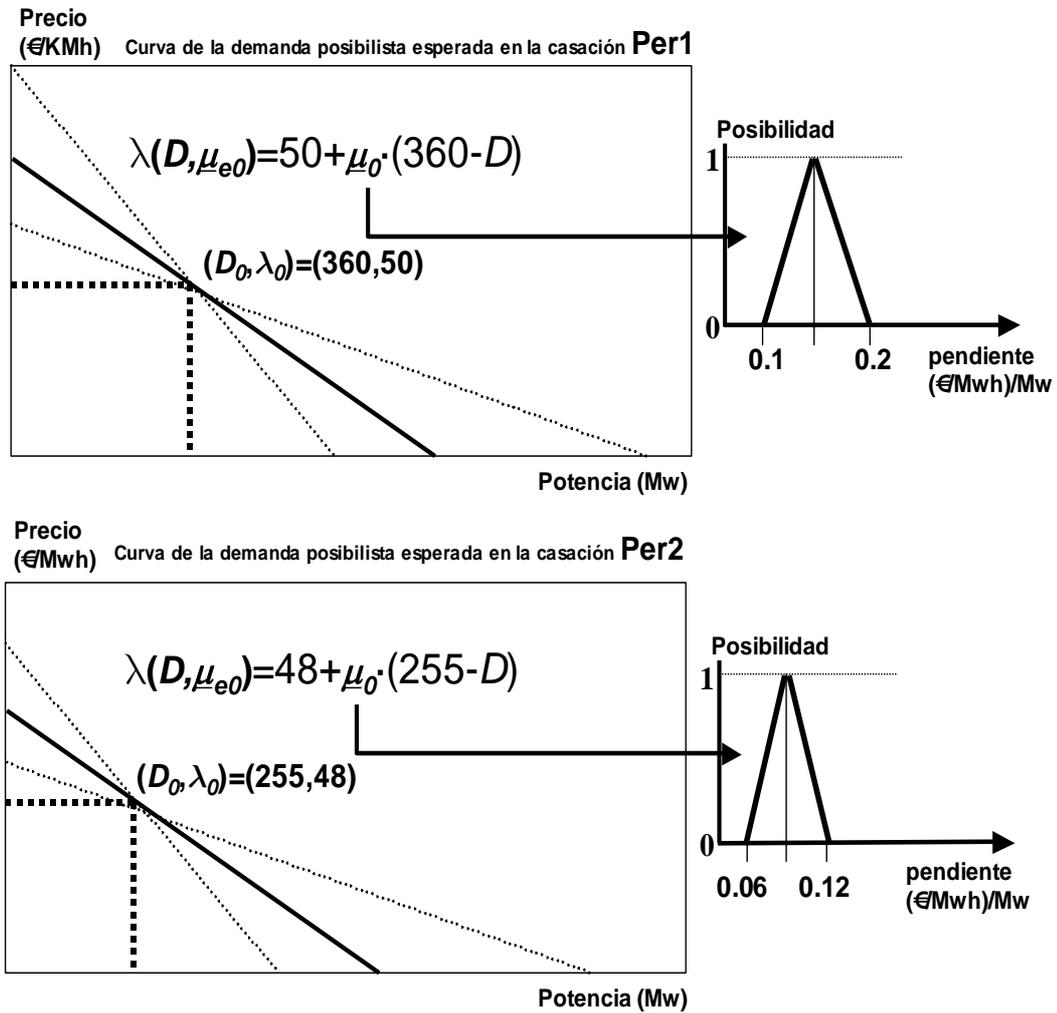


Figura 6. 13: Posibles curvas de la demanda esperadas en la casación (convergencia)

Por otro lado, en la Tabla 6. 19 se muestra el nivel  $\alpha_{e0}$  fijado por cada generador  $e$  en el enfoque primal.

AGENTES ( $e$ )	$E_1$	$E_2$
$\alpha_{e0}$	0.5	0.7

Tabla 6. 19: Niveles de riesgo de los generadores (convergencia)

En este caso el criterio de convergencia del algoritmo es el que considera como iteración de parada  $k$  aquella tal que  $M(P^k)$  es menor que una tolerancia  $\varepsilon > 0$ , siendo  $P^k$  la producción fijada en el subproblema  $VI(X, F^k)$ , y siendo la función  $M(P)$  la norma de la diferencia  $P - Pr_\lambda(P - F(P))$ . Tal y como se comentó en el capítulo anterior, la función  $M(P)$  determina el mérito que tiene cualquier conjunto de producciones

$P=(P_1, \dots, P_E)^T$  como solución del problema original  $VI(X,F)$ , de forma que cuanto menor es  $M(P)$ , mejor es  $P$  como solución de  $VI(X,F)$ .

En la Figura 6. 14 se muestra el valor de la función de mérito  $M(P^k)$  para todas las iteraciones del algoritmo. Para comprobar la convergencia global se han considerado tres vectores  $P^1$  iniciales distintos. Los dos primeros vectores corresponden con las producciones máximas ( $P_c$ ) de los generadores y con las producciones nulas. El tercer vector es el obtenido resolviendo el modelo descrito en [Barquín, 2004] cuando se consideran las pendientes de las curvas de la demanda más posibles.

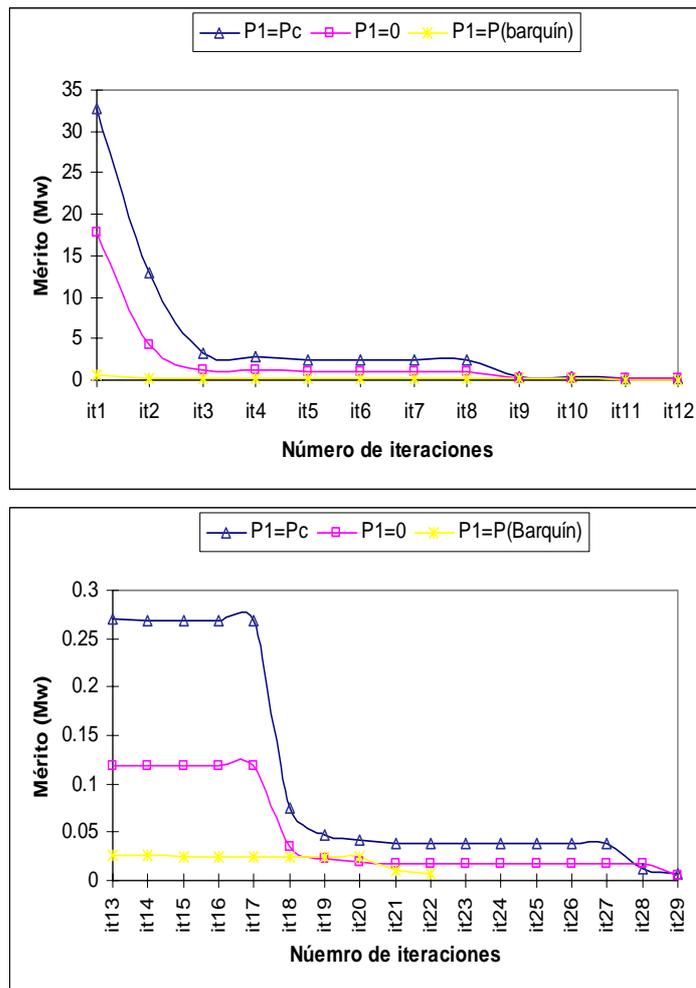


Figura 6. 14: Méritos para cada iteración con distintos vectores iniciales (convergencia)

Tal y como puede verse, la convergencia es más rápida cuando se elige como punto inicial del algoritmo el vector de producciones resultante del modelo de Barquín, dado que, como se verá en la Figura 6. 16, esta más cerca del equilibrio primal que los vectores iniciales con las producciones extremas ( $P^1=P_c$  y  $P^1=0$ ). Además, por

este mismo motivo, la convergencia es más rápida para el caso en que el vector inicial  $P^l$  es el de producciones nulas, que para el caso en que  $P^l = Pc$ .

En la figura anterior se observa también que entre las iteraciones 5 y 8 la función de mérito no decrece suficientemente. Esto se debe al mal condicionamiento del problema por el efecto de la sobrevaloración del parámetro de penalización  $\alpha^k$  de la distancia entre la solución del subproblema  $Z^k$  y la producción  $P^k$  fijada en cada iteración. Tal y como se comentó en el capítulo anterior, una forma de resolver este inconveniente consiste en actualizar el criterio de convergencia y reinicializar el algoritmo a partir de la solución obtenida hasta el momento. Para este caso de estudio, es precisamente en la iteración 8 donde se reinicializa el algoritmo primal, aunque no es hasta la iteración 9 cuando decrece significativamente la función de mérito, dado que el vector  $P^8$  se obtiene con la solución del subproblema  $Z^7$ , donde el parámetro de penalización aún no había sido reinicializado.

Formalmente la condición de monotonía de la sucesión de méritos de las producciones  $P^k$  debe satisfacerse siempre para aquellas iteraciones  $k$  tales que la sucesión de parámetros de penalización  $\alpha^k$  sea creciente y suficientemente grande (se recuerda que  $\alpha^k$  tenía que ser del orden del inverso del umbral de convergencia  $\varepsilon^k$ ). Por ello, en las iteraciones próximas a las de reinicialización, en las que el valor de dichos parámetros disminuye, pueden producirse incrementos en las funciones de mérito. Precisamente esto ocurre en el caso de estudio de tamaño real (ver Figura 6.39), pero no así en este caso donde la sucesión de méritos ha resultado ser siempre decreciente.

En la Figura 6.15 se muestran los umbrales  $\varepsilon^k$  para las doce primeras iteraciones del algoritmo y para el primer periodo, así como los parámetros de penalización  $\alpha^k$ , cuando el vector inicial es  $Pc$ . Dado que el comportamiento de la convergencia es muy similar en cada uno de los periodos de estudio, los parámetros de penalización son también muy similares en ambos periodos, a diferencia del caso de estudio de tamaño real.

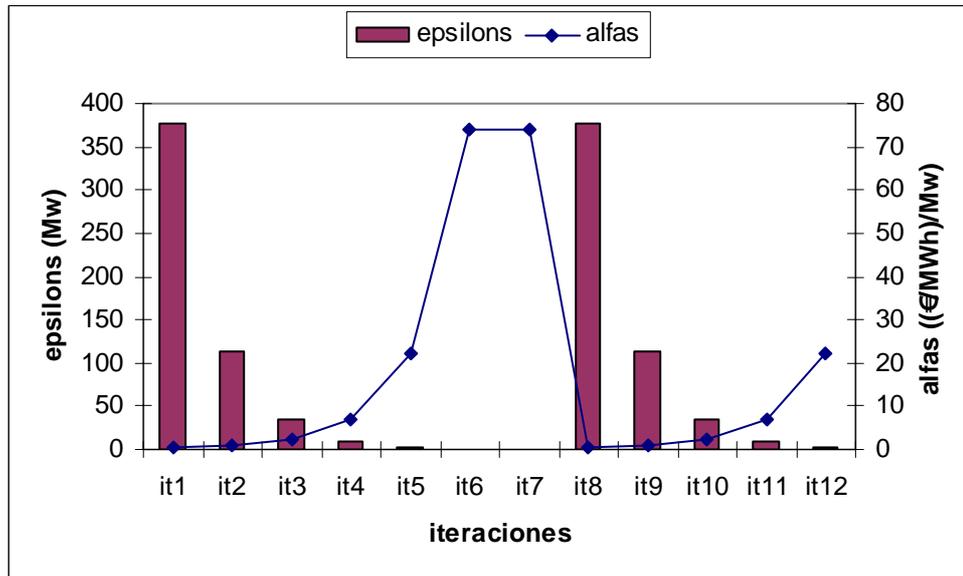


Figura 6. 15: Umbrales de convergencia y de penalización (convergencia)

Tal y como puede verse, el número máximo de iteraciones hasta la convergencia en  $\varepsilon^k$  es dos, dado que son dos las iteraciones en las que los parámetros de penalización se mantienen constantes (iteraciones 6 y 7). La reinicialización del criterio de convergencia se realiza prácticamente con el mismo valor  $\varepsilon^l$  considerado en la primera iteración, dado que las alturas de las columnas de los umbrales de convergencia de las iteraciones 1 y 8 son muy similares.

En la Figura 6. 16 se representan los vectores  $F=(F_1, F_2)$  correspondientes al primer periodo obtenidos evaluando cada punto  $P$  del cubo de potencias que pueden generar los agentes. Dado que el equilibrio no satura la restricción de potencia máxima, cuanto menor es el módulo del vector  $F$  mayor es la cercanía al equilibrio primal del conjunto de producciones del que parte  $F^{69}$ . Además, por simplificar aun más la localización del punto de equilibrio, se muestran también las curvas de nivel de las funciones  $F_1$  y  $F_2$ , de tal forma que el punto de corte de las curvas de nivel cero coincide con el equilibrio primal.

<sup>69</sup>En el caso en que se saturase la restricción de potencia máxima el equilibrio se encontraría en alguno de los dos lados del cuadrado de potencias  $P_1=P_{c1}$  ó  $P_2=P_{c2}$ , y formalmente el vector  $F$  no tendría porqué ser nulo (aunque por la aproximación del coste marginal de producción  $\alpha_{e0}$ -pesimista, que ha sido descrita en el primer apartado, siempre debe anularse el vector  $F$ ).

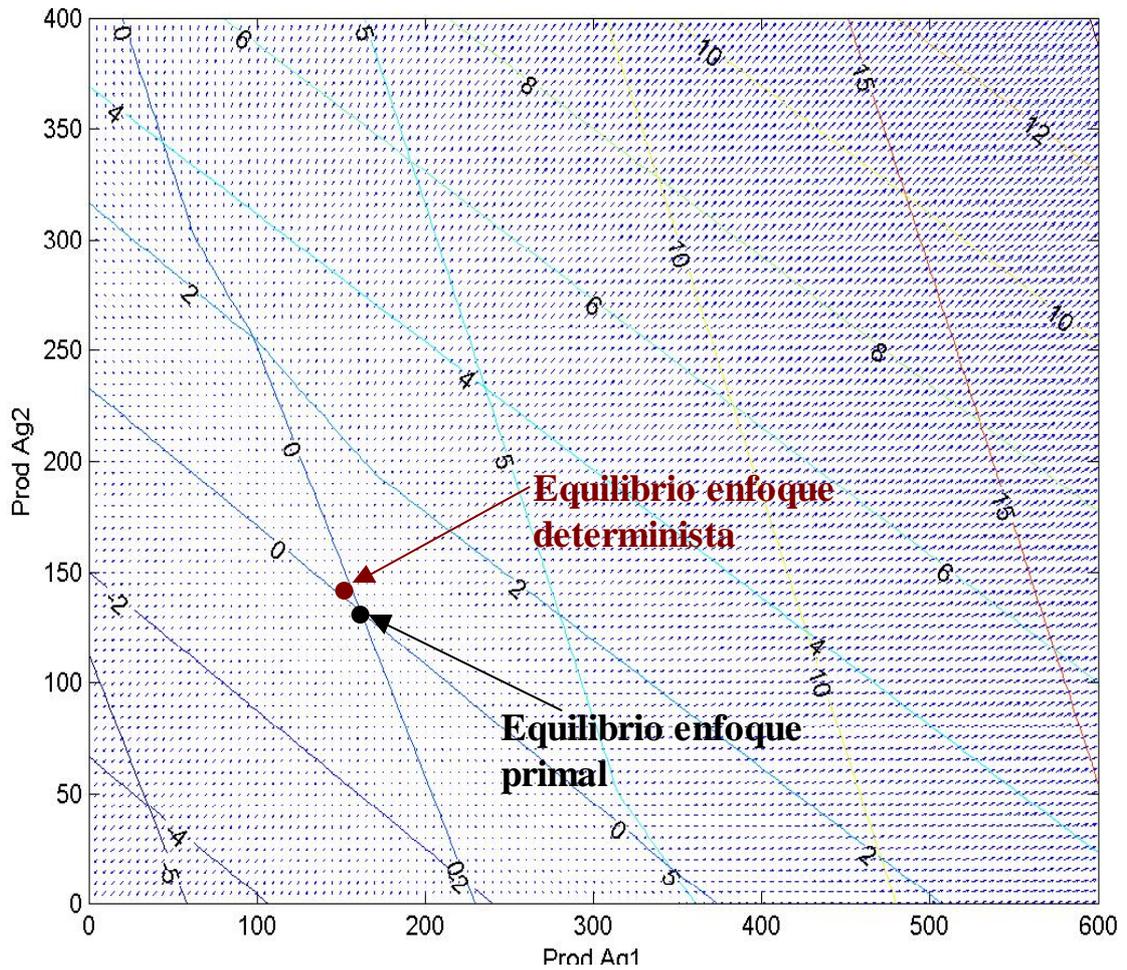


Figura 6. 16: Curvas de nivel y valores de la función vectorial  $F$  del problema  $VI(X,F)$  (convergencia)

Junto con las curvas de nivel mostradas en la anterior figura, en la Figura 6. 17 se muestran las producciones  $P^k$  fijadas en cada iteración  $k$  del algoritmo ( $k \leq 9$ ) y las soluciones  $Z^k$  de cada subproblema  $VI(X,F^k)$ . Con una recta se muestra el hiperplano que pasa por  $Z^k$  y que separa el equilibrio primal  $P^*$  del punto  $P^k$  fijado en cada iteración. Obsérvese que el vector  $P^1$  de arranque del algoritmo es el vector de producciones máximas ( $P^1 = P_C$ ).

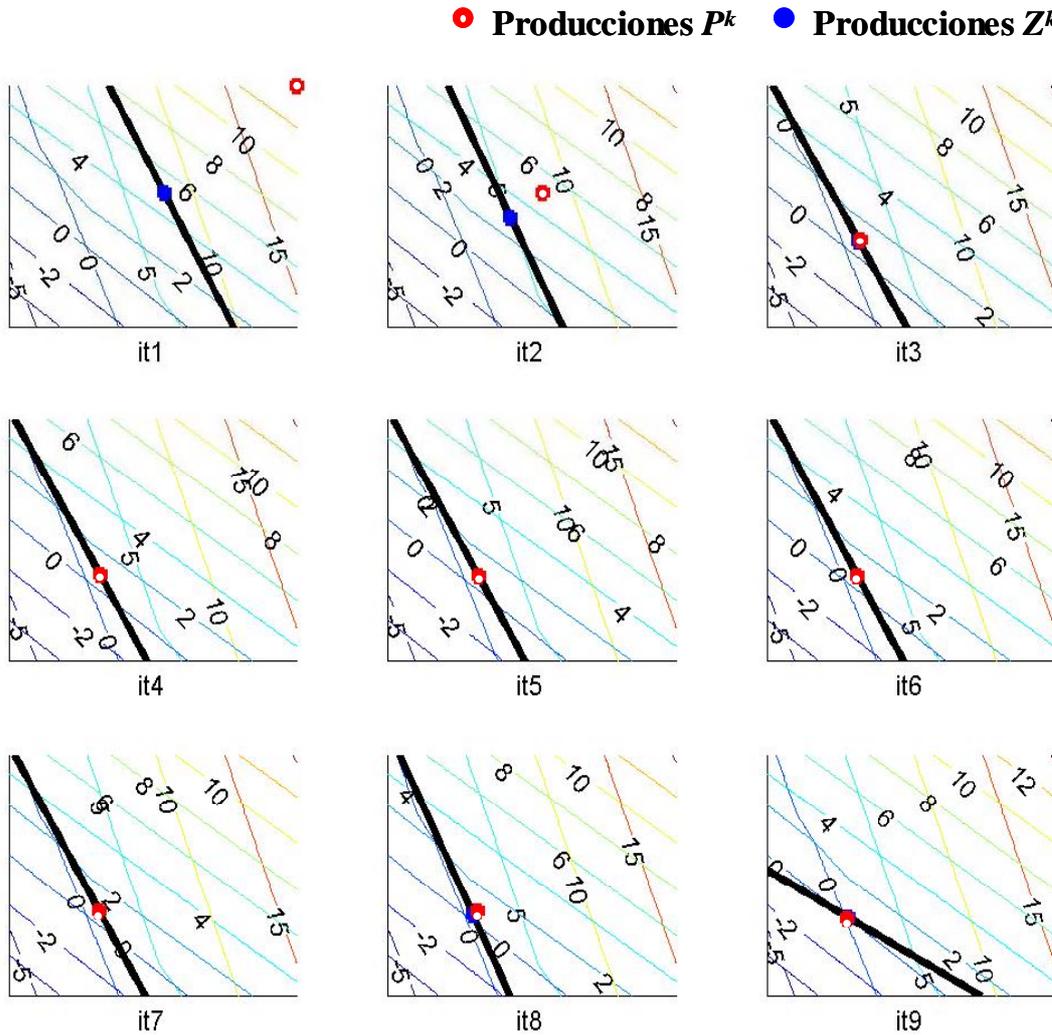


Figura 6. 17: Hiperplanos que separan el equilibrio de cada vector de producciones  $P^k$  (convergencia)

Tal y como se comentó, la diferencia entre las producciones  $P^k$  y el equilibrio primal son muy similares entre las iteraciones 5 y 8, por el efecto de la sobrevaloración del parámetro de penalización  $\alpha^k$  de la distancia entre  $Z^k$  y  $P^k$ . La diferencia entre la producción  $P^9$  y el equilibrio primal  $P^*$  en la iteración 9 ya es prácticamente inapreciable.

A continuación se analiza la convergencia para un caso de estudio en el que alguno de los precios esperados por los generadores  $\lambda_{e0}$  es similar al precio del mercado  $\lambda^*$ . En esta situación, tal y como se comentó en el capítulo anterior, la sucesión  $\{Z^k\}$  formada por las soluciones de los subproblemas  $VI(X, F^k)$  puede no satisfacer la

condición de monotonía respecto del equilibrio primal  $P^*$ , lo que puede derivar en una sucesión  $\{M(P^k)\}$  de méritos de las producciones  $P^k$ , que no es decreciente ni convergente a cero en un entorno del equilibrio.

Sin embargo, el análisis de este caso de estudio tan particular, así como los realizados con otros de características similares, muestra que la convergencia de la sucesión  $\{M(P^k)\}$  está garantizada. Así se ha comprobado que la sucesión  $\{M(P^k)\}$  es decreciente en las iteraciones en donde el criterio de convergencia  $\varepsilon^k$  es suficientemente pequeño (penalización  $\alpha^k$  suficientemente grande, como se requería en el algoritmo), y puede no serlo en las primeras iteraciones a partir de una iteración de reinicialización (lo que como se comentó era lógico). Además, se ha comprobado que la convergencia es algo más lenta en comparación con el caso en el que los precios  $\lambda_{e0}$  no son similares al precio  $\lambda^*$ .

Supongamos que el precio esperado  $\lambda_{e0}$  es el mismo para cada agente, y coincide con el que se muestra en la Tabla 6. 20.

<i>PERIODOS</i>	$\lambda_{e0}$ (€/Mwh)
Per1	62
Per2	56

Tabla 6. 20: Precios de casación esperados para el caso  $\lambda^*$  similar a  $\lambda_{e0}$  (convergencia)

En esta situación se puede comprobar que los precios de mercado  $\lambda^*$  son 62.1 €/Mwh para el periodo 1 y 56 €/Mwh para el periodo 2, próximos a los precios esperados  $\lambda_{e0}$ . A pesar de esta cercanía, la sucesión  $\{M(P^k)\}$  ha resultado ser convergente a cero, tal y como muestra la Figura 6. 18 para los mismos puntos iniciales que en el primer caso analizado.

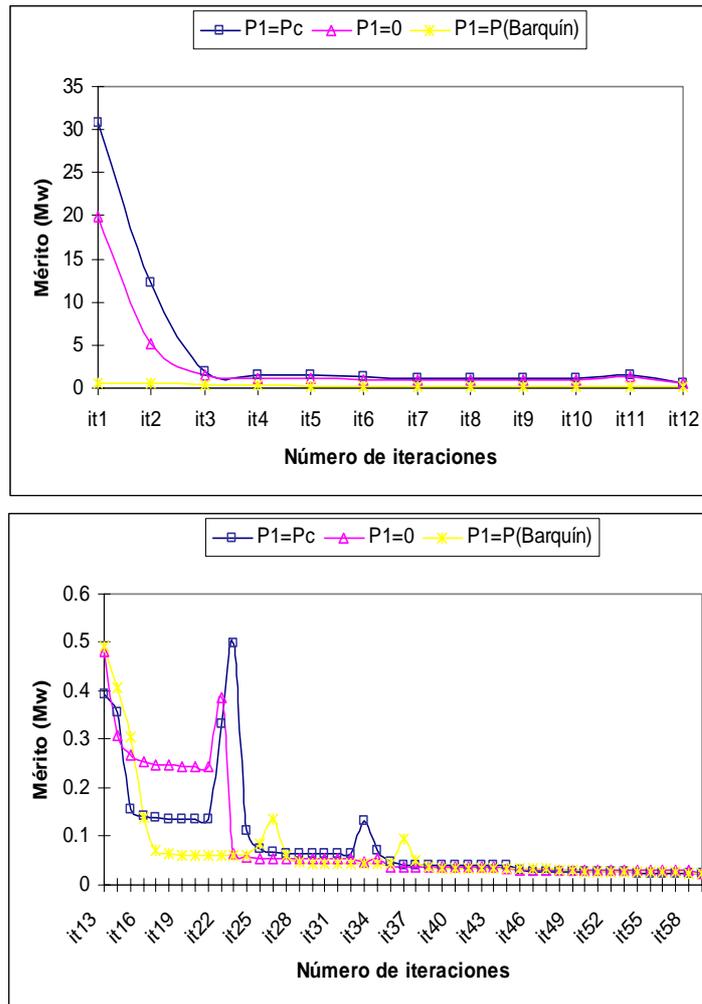


Figura 6. 18: Convergencia algoritmo para el caso  $\lambda^*$  similar a  $\lambda_0$

Tal y como puede verse, la convergencia del algoritmo en este caso es algo mas lenta debido fundamentalmente a sus características particulares, además de que en un entorno del punto de equilibrio (es decir cuando  $M(P^k)$  está próximo al valor cero) el módulo del vector  $F(Z^k)$ , que es la dirección de búsqueda del equilibrio, es pequeño. Por otro lado, se puede ver que el mérito en la iteración de convergencia es muy parecido para cualquiera de las tres distintas inicializaciones.

Los criterios de convergencia  $\varepsilon^k$  y los parámetros de penalización  $\alpha^k$  utilizados desde las iteraciones 13 hasta la 29 son los mostrados en la Figura 6. 19, cuando el vector inicial es  $Pc$ .

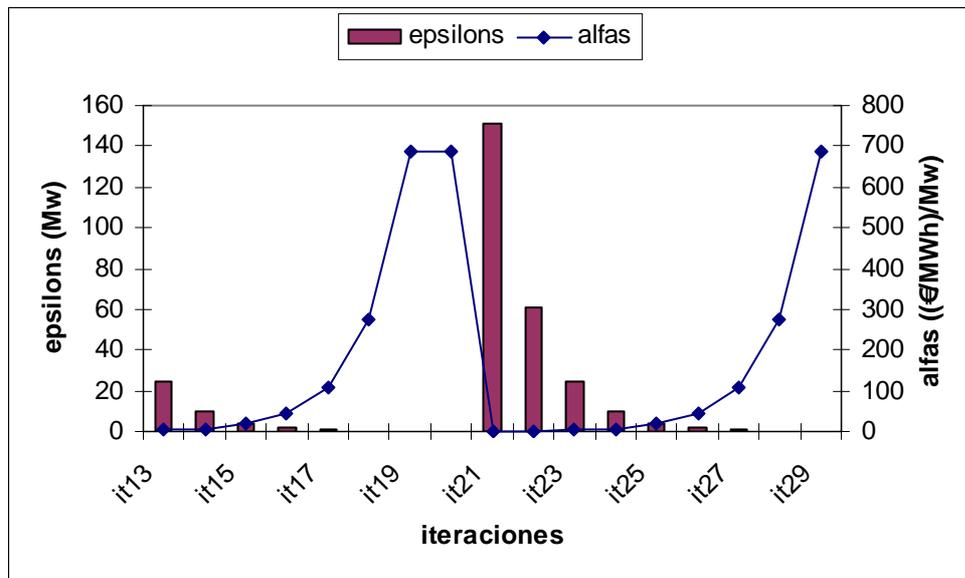


Figura 6. 19: Umbrales de convergencia y de penalización para el caso  $\lambda^*$  similar a  $\lambda_0$  (convergencia)

Relacionando la Figura 6. 18 y la Figura 6. 19 se puede ver que la sucesión  $\{M(P^k)\}$  no es decreciente en las iteraciones próximas a las de reinicialización y que por el contrario sí lo es en las iteraciones con criterios de convergencia  $\varepsilon^k$  pequeños.

## 6.4 Casos ejemplos de tamaño real

A continuación se presentan dos casos ejemplos que tienen por objeto comprobar la validez del enfoque primal para resolver un modelo de mercado de tamaño real. Otro de los objetivos es verificar que las conclusiones principales obtenidas con el análisis de los casos de tamaño reducido siguen siendo válidas en los casos de tamaño real. Las características fundamentales que diferencian los casos de tamaño real de los casos sencillos son las siguientes:

- Existen 7 empresas generadoras (en lugar de 2).
- Se considera un sistema hidrotérmico (parque hidráulico y térmico) en donde se han respetado la mayor parte de las restricciones de explotación descritas en el capítulo anterior, algunas de las cuales relacionaban variables de decisión de periodos consecutivos (como las del parque hidráulico).
- El horizonte del caso de estudio es de 1 año y se tienen en cuenta las duraciones de los niveles de carga.
- Se ha supuesto que los agentes ofertan de acuerdo a la conjetura variacional, es decir, que las ofertas son de cantidad y tienen en cuenta la reacción estratégica que manifiestan los competidores ante las mismas. Esta reacción se ha modelado con el valor de la pendiente de la demanda residual esperada por los generadores, que se ha supuesto desconocida. La incertidumbre en la pendiente se ha representado mediante una distribución de posibilidad triangular simétrica.
- Se consideran contratos entre las empresas generadoras y comercializadoras de la electricidad.
- La curva de la demanda esperada en la casación es inelástica.

A continuación se describen más detalladamente los datos de entrada utilizados.

### 6.4.1 Descripción de los datos de entrada

Los datos considerados coinciden con los utilizados en el caso determinista descrito en [Reneses, 2004], lo que ha facilitado su comparación. Tal y como también comenta Reneses, dado que las empresas de generación mantienen la confidencialidad de algunos de sus parámetros estratégicos (costes reales de los grupos, características de los recursos hidráulicos, etc.), pues si se hicieran públicos se estaría proporcionando cierta ventaja estratégica al resto de generadores, todos los datos utilizados están basados en el sistema español, pero han sido elegidos como aproximación de los datos reales siguiendo criterios razonables para los objetivos académicos perseguidos en esta tesis. Además, dada la cantidad de información necesaria en un caso de tamaño real, se muestran solamente aquellos datos de entrada

más significativos, condensados, cuando se ha considerado necesario, para facilitar la comprensión y el análisis de los resultados obtenidos.

### 6.4.1.1 Alcance y estructura temporal

Para las ejecuciones de los enfoques propuestos se considera un alcance temporal de un año, dividido en 53 periodos semanales. En cada periodo se han considerado 3 subperiodos, correspondientes al número de días laborables y festivos, y al número de sábados no festivos. Finalmente, en cada uno de los subperiodos se han considerado 4 bloques de carga, correspondientes a las horas de mayor demanda, bloques denominados superpunta y punta, a las horas de menor demanda, bloque denominado llano, y al resto de horas, bloque denominado valle.

### 6.4.1.2 Curva de la demanda esperada en la casación

Se ha considerado además que la demanda esperada en la casación es inelástica, lo que suele suponerse en modelos del mercado eléctrico español con horizontes temporales de medio plazo. En la Figura 6. 20 se muestra la evolución de las demandas inelásticas  $D_0$  medias por subperiodos y bloques, y correspondientes a las cuatro estaciones climáticas.

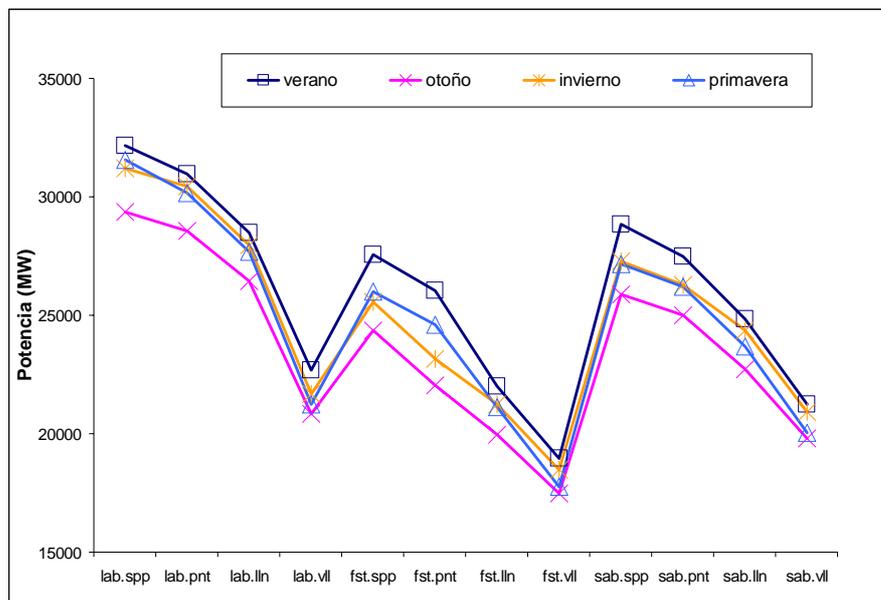


Figura 6. 20: Evolución de la potencia media demandada por estación a lo largo del año (caso de tamaño real)

Como puede apreciarse el perfil de carga de la demanda  $D_0$  es un perfil típico del sistema español por dos motivos. En primer lugar, porque los periodos de menor demanda corresponden con las estaciones de temperaturas intermedias (primavera y

otoño), y los periodos de mayor demanda con las estaciones de verano e invierno (en [Reneses, 2004] también se muestra esta característica a partir de la evolución de las demanda media a lo largo de las 53 semanas del año). En segundo lugar, porque la demanda es mayor en bloques laborables, algo menor en los sábados no festivos, y significativamente menor en los bloques festivos.

### 6.4.1.3 Agentes participantes en el mercado

Se han considerado 7 agentes participantes en el mercado ( $E_i, i=1, \dots, 7$ ). Los niveles  $\alpha_{e0}$  escogidos para cada uno de ellos en el enfoque primal han sido seleccionados arbitrariamente siguiendo el siguiente criterio razonable<sup>70</sup>: cuanto mayor es la cantidad de recursos de generación disponibles por el agente, mayor es su aversión al riesgo, es decir, mayor es su interés por eliminar el riesgo de pérdidas. En la Tabla 6. 21 se muestran los niveles  $\alpha_{e0}$  escogidos (cuanto mayor es el nivel  $\alpha_{e0}$  de un generador menor es su aversión al riesgo), que están referidos al beneficio total obtenido a lo largo del año, por lo que son independientes de la estructura temporal escogida.

AGENTES ( $e$ )	$E_1$	$E_2$	$E_3$	$E_4$	$E_5$	$E_6$	$E_7$
$\alpha_{e0}$	0.3	0.4	0.5	0.5	0.7	0.7	0.7

Tabla 6. 21: Niveles de riesgo fijados por los generadores (caso de tamaño real)

En este apartado se va a analizar también el efecto que tienen los contratos realizados por las empresas eléctricas en el equilibrio primal. En la Figura 6. 21 se muestra la potencia media contratada para cada una de las 53 semanas del año y para las tres primeras empresas.

<sup>70</sup>Este criterio se basa en la suposición de que los generadores con mayor poder de mercado son los que disponen de un mayor riesgo debido a que sus grupos de generación son precisamente los que marcan el precio marginal, mientras que el resto de generadores son tomadores de precio.

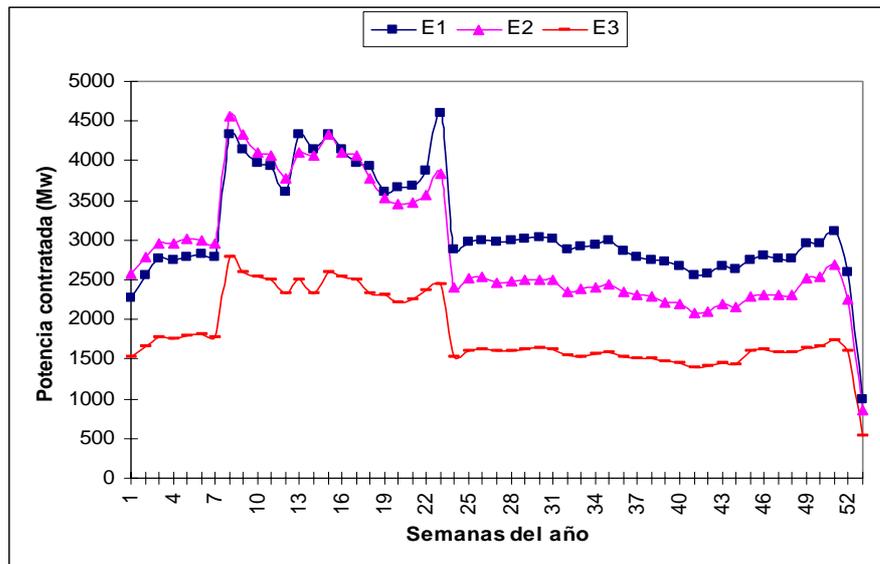


Figura 6. 21: Evolución de la potencia media semanal contratada por las empresas  $E_1$ ,  $E_2$  y  $E_3$  (caso de tamaño real)

Tal y como puede verse, el perfil de potencia media contratada es un perfil con un nivel de contratación algo mayor entre las semanas 8 y 23.

Los precios esperados por los generadores se han supuesto iguales en cada nivel de carga, para cada uno de los 7 agentes. Los valores medios para las 53 semanas del año se muestran en la Figura 6. 22, para el caso en que se consideran contratos o no entre las empresas generadoras y las comercializadoras.

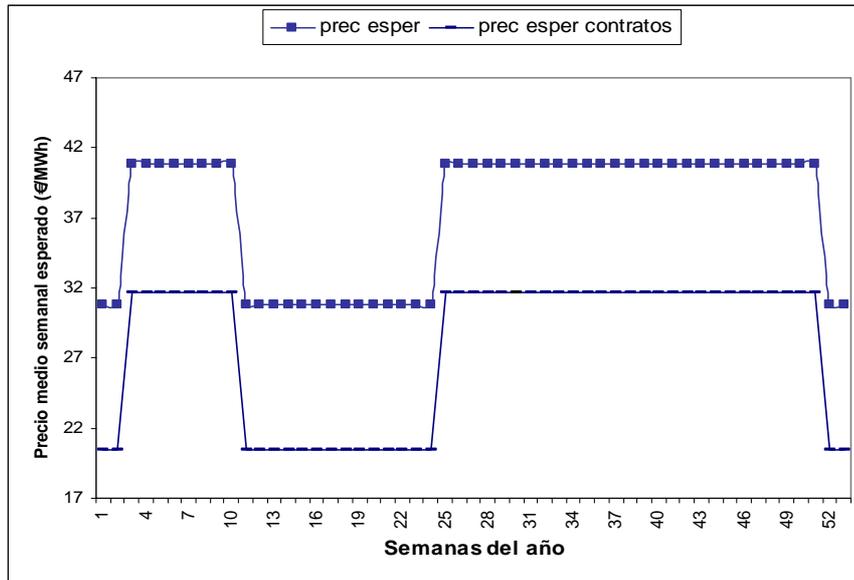


Figura 6. 22: Evolución del precio medio semanal esperado por los generadores (caso de tamaño real)

Como puede observarse, los perfiles de precios esperados se han elegido, por simplicidad, planos para cada estación climática, y tales que son iguales y más altos para las estaciones de verano e invierno, e iguales y más bajos para las estaciones de primavera y otoño, lo que aproxima a un perfil de precios típico del mercado español<sup>71</sup>. Como se describe en [Reneses, 2004], este mismo efecto se observa también en el perfil de demanda semanal a satisfacer, debido a que el planteamiento del equilibrio conlleva a aumentar el precio en horas en donde la demanda es alta y disminuirlo cuando es baja (dado que el equilibrio modela también el poder de mercado). Además, en la Figura 6. 22 puede verse que los precios de mercado esperados con contratos son más pequeños que los precios sin contratos, lo que es razonable, dado que en el equilibrio sin contratos tanto la capacidad de los agentes de modificar el precio, como la volatilidad del mismo, son menores, a costa de un decrecimiento en los precios esperados (esto se confirma a su vez en los resultados proporcionados por el modelo, que se describen más adelante).

La distribución de posibilidad  $\underline{\mu}_{e0} = \{\mu^1_{e0}, \mu^2_{e0}, \mu^3_{e0}\}$  ( $e=1, \dots, 7$ ) de la conjetura realizada sobre el valor de la pendiente de la demanda residual para cada nivel de carga, se ha supuesto triangular y simétrica ( $\mu^2_{e0} - \mu^1_{e0} = \mu^3_{e0} - \mu^2_{e0}$ ). Para facilitar la comparación de los resultados obtenidos con el enfoque determinista se ha considerado que la conjetura utilizada en [Reneses, 2004] tiene grado de posibilidad uno. En la Tabla 6. 22 se muestran los valores mínimos y máximos de las conjeturas que definen los

<sup>71</sup>En el capítulo cinco se ha descrito un procedimiento más preciso para la estimación de los precios esperados, basado en el uso de estadísticos sobre los precios históricos.

vértices de las distribuciones de posibilidad, cuando se consideran todos los niveles de carga.

AGENTES ( $e$ )	$E_1$	$E_2$	$E_3$	$E_4$	$E_5$	$E_6$	$E_7$
(Min, Máx) valor de $\mu^1_{e0}$	(1.6,3.3)	(1.6,3.3)	(1.3,2)	(0.6,1.3)	(0.6,1.3)	(0.6,1.3)	(0.3,0.3)
(Min, Máx) valor de $\mu^2_{e0}$	(2.5,5)	(2.5,5)	(2,3)	(1,2)	(1,2)	(1,2)	(0.5,0.5)
(Min, Máx) valor de $\mu^3_{e0}$	(3.3,6.6)	(3.3,6.6)	(2.6,4)	(1.3,2.6)	(1.3,2.6)	(1.3,2.6)	(0.6,0.6)

Tabla 6. 22: Valor mínimo y máximo pendientes demandas residuales ((€/MWh)/GW) (caso de tamaño real)

#### 6.4.1.4 Datos del parque de generación

La composición del parque de generación consta de 80 grupos térmicos y de 25 grupos hidráulicos de generación.

De los 80 grupos térmicos, 38 son de carbón, 17 son de fuel, 9 son nucleares y 16 de ciclo combinado. En la Figura 6. 23 se muestran, para cada agente y cada tecnología, la suma de las potencias instaladas de los grupos de generación.

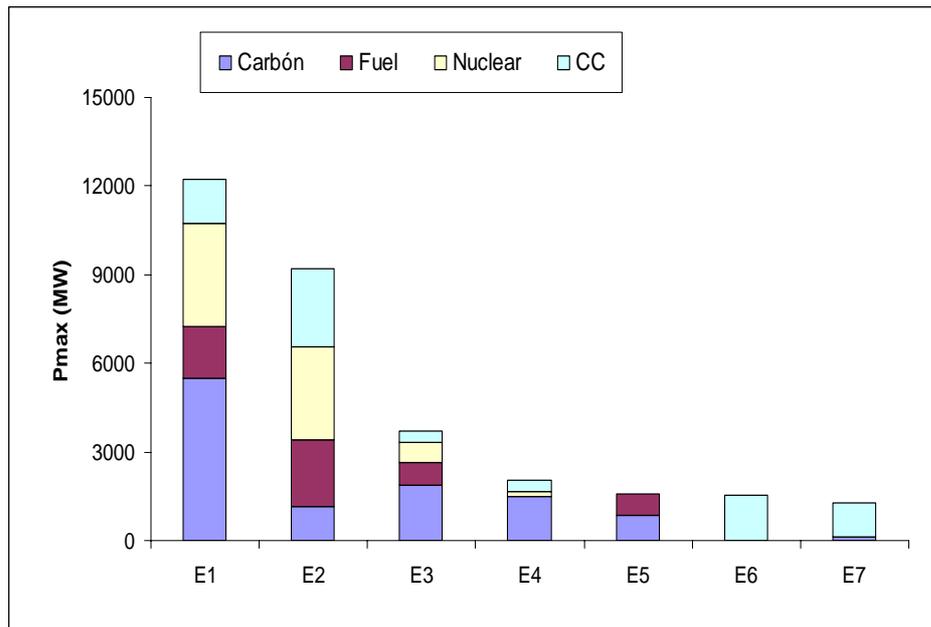


Figura 6. 23: Potencia instalada por empresa y tecnología (caso de tamaño real)

Por otro lado, en la Figura 6. 24 se muestra el coste variable medio de generación por tecnología y para cada empresa.

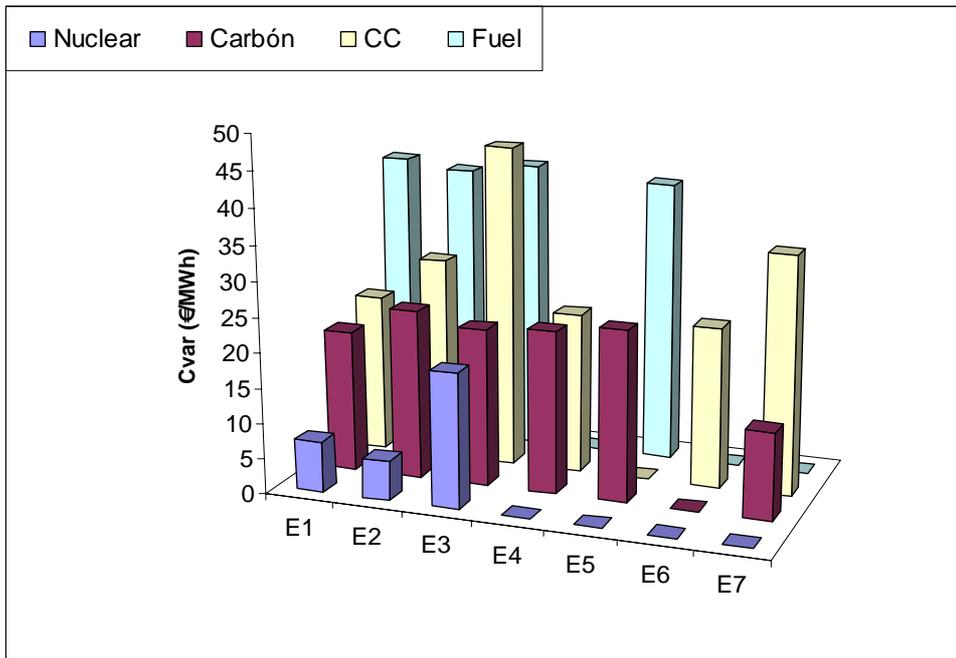


Figura 6. 24: Costes variables medios por empresa y tecnología (caso de tamaño real)

Respecto a los datos de los 25 grupos hidráulicos considerados, en la Figura 6. 25 se muestra la potencia total de turbinación y de bombeo para cada empresa.

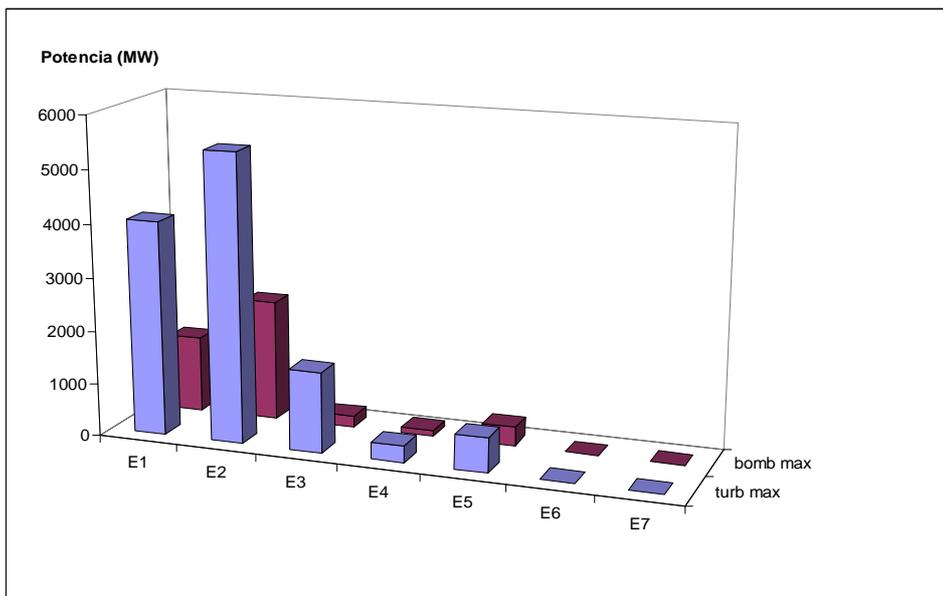


Figura 6. 25: Potencias máximas de turbinación y de bombeo por empresa (caso de tamaño real)

Tal y como puede comprobarse, las dos empresas con mayor capacidad de generación hidroeléctrica son las empresas  $E_1$  y  $E_2$ .

La representación gráfica del resto de datos (reservas máximas, mínimas, iniciales, etc.) que corresponden con características más específicas del sistema hidráulico implementado, no ha sido expuesta por simplicidad en este apartado. Para más detalle acerca de la descripción del sistema hidráulico y de sus datos particulares puede consultarse [Reneses, 2004].

#### 6.4.2 Tamaño de los casos de estudio y tiempos de resolución

Para cada subproblema  $VI(X, F^k)$  resuelto en cada iteración del algoritmo propuesto mediante un modelo de optimización cuadrático, el número de variables y de restricciones es similar al del caso de estudio analizado en [Reneses, 2004]. Sin embargo, en este caso no deben considerarse las variables y restricciones adicionales que permiten resolver el enfoque determinista de Reneses mediante programación lineal (52.984 variables y 10.077 restricciones no consideradas), dado que el enfoque de resolución propuesto en esta tesis utiliza el optimizador CPLEX 9.0.2 para resolver directamente cada problema de optimización cuadrático. Así, el número total de variables consideradas en el caso de estudio es de 132.962 y el de restricciones es de 130.946 aproximadamente. Se ha comprobado que el enfoque de resolución propuesto permite incluso resolver subproblemas  $VI(X, F^k)$  de un tamaño muy superior al considerado en este apartado.

Por otro lado, otro de los problemas a resolver en cada iteración y que incrementa el tiempo de ejecución del algoritmo es el problema de la proyección. Las restricciones consideradas en este problema coinciden con las de cada subproblema  $VI(X, F^k)$  por lo que el número de variables y restricciones es idéntico al de los subproblemas.

Tal y como se verá en el apartado 6.4.3.4 el número de iteraciones que han sido necesarias para resolver las ecuaciones de equilibrio primales ha resultado ser 54 y el tiempo de ejecución 4h y 35' (se refiere al caso sin contratos dado que en el caso con contratos se obtienen resultados parecidos). En este umbral de tiempo no se han incluido los tiempos de ejecución necesarios para calcular el mérito  $M(P^k)$  obtenido en cada iteración, dado que incrementan el tiempo total de ejecución (obsérvese que el cálculo del mérito  $M(P^k)$  requiere resolver en cada iteración otro problema de optimización cuadrática, además de un problema de minimización de costes para determinar el coste marginal en  $P^k$ ). En su lugar se ha preferido comprobar la bondad del equilibrio a través de la convergencia a cero de la sucesión de restos marginales  $\alpha$ -convergentes. No obstante, se ha comprobado que el mérito en la última iteración resulta ser prácticamente cero, lo que demuestra la bondad de la solución obtenida.

El tiempo de resolución del enfoque primal (4h y 35') es significativamente mayor que en el caso determinista, que es de 4'30'', lo que suele ser habitual cuando se comparan enfoques que consideran incertidumbre con los que no la consideran. Así por ejemplo, el tiempo de ejecución cuando se linealizan las funciones cuadráticas del enfoque estocástico de [Reneses, 2004], resultaba ser de 4h y 20', también significativamente superior al enfoque determinista, que con la linealización era de 15'30''.

A pesar de estas diferencias entre tiempos de resolución, la experiencia adquirida por el doctorando en proyectos de investigación relacionados con la tesis permite confirmar que el tiempo de ejecución del algoritmo puede considerarse aceptable para la planificación real de la generación. Por otro lado, las diferencias entre los tiempos decrecen sin cesar conforme aumentan las prestaciones de los ordenadores actuales y de los softwares utilizados.

### 6.4.3 Resultados de los casos de estudio

A continuación se describen los resultados de los casos de estudio, comparándolos con los obtenidos con el enfoque determinista. Como se podrá comprobar las conclusiones relacionadas con las distribuciones de posibilidad, que fueron deducidas del análisis de los casos de estudio sencillos, siguen siendo válidas en los casos de tamaño real.

#### 6.4.3.1 Resultados relacionados con los precios marginales

En la Figura 6. 26 se muestra, a modo de ejemplo, la distribución de posibilidad del precio de mercado según las curvas de la demanda residual del agente  $E_1$  para cada uno de los dos tipos de equilibrio y para el nivel de carga laborable-punta correspondiente a la primera semana de enero.

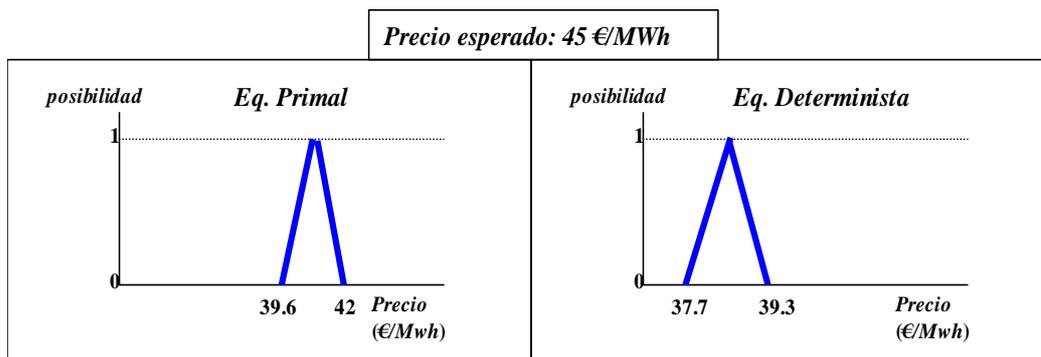


Figura 6. 26: Distribución de posibilidad para el precio marginal (caso de tamaño real)

Tal y como también ocurría en los casos sencillos, la distribución de posibilidad del precio con el equilibrio primal tiene una menor longitud del soporte que la del equilibrio determinista, además de tener un mayor precio más posible (esto también ocurrirá con la distribución de posibilidad del beneficio del generador, tal y como se verá en el siguiente epígrafe). Esto hace que el precio de mercado primal (que es 40.3 €/Mwh) sea más parecido al precio esperado  $\lambda_{e0}$  (45 €/Mwh) que el del enfoque determinista (que es 36.5 €/Mwh), lo que se cumple también a lo largo del año.

En la Figura 6. 27 se muestran los precios medios de mercado para cada una de las 53 semanas del año, que han sido obtenidos con el enfoque primal y con el determinista, así como los correspondientes precios esperados por los generadores.

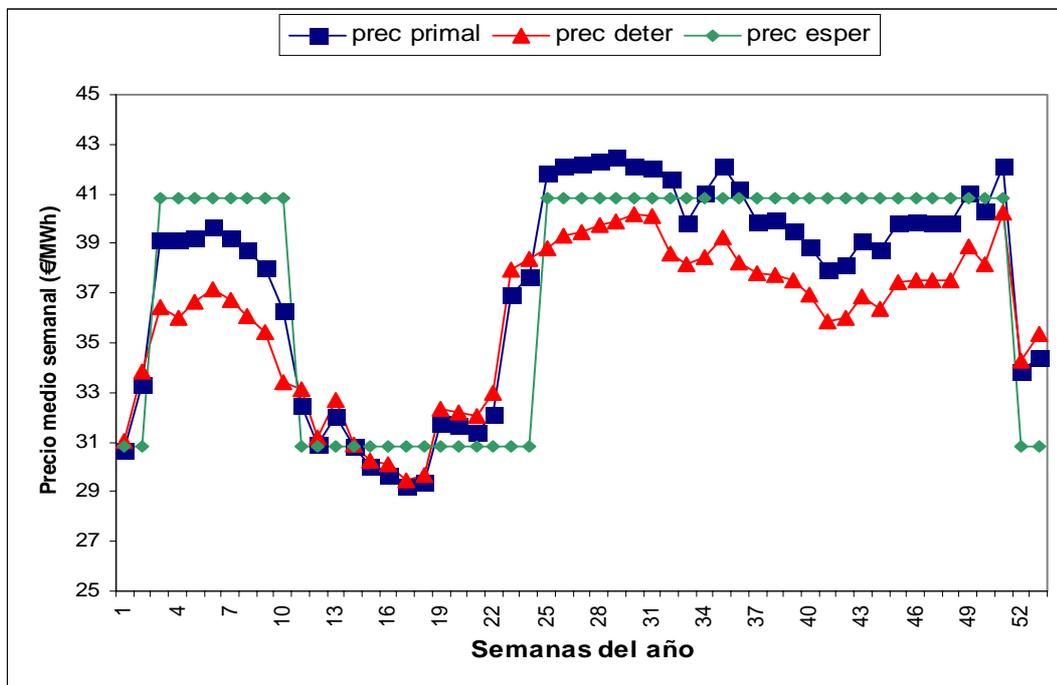


Figura 6. 27: Precios marginales y esperados (caso de tamaño real)

Tal y como puede verse, el perfil de precios obtenidos con el enfoque primal sigue siendo un perfil típico del mercado español con precios altos para las estaciones con temperaturas más extremas y bajos para las estaciones con temperaturas intermedias.

Para cada una de las semanas, en la Figura 6. 28 se muestran las diferencias entre los precios obtenidos con el enfoque primal y los precios esperados, y las correspondientes diferencias con los precios del enfoque determinista.

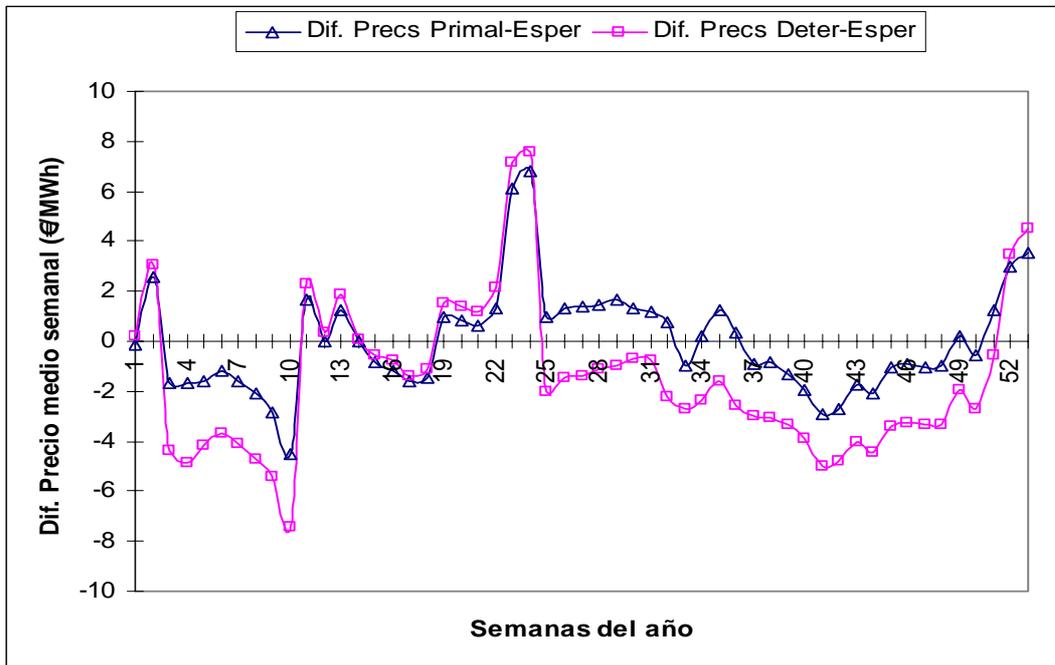


Figura 6. 28: Diferencias precios marginales y esperados (caso de tamaño real)

Puede apreciarse que las diferencias entre los precios primales y los esperados son menores que las diferencias obtenidas con los precios deterministas (en concreto 1.6 frente a 2.8 €/Mwh de diferencia media entre precios).

Además, los precios de mercado del enfoque primal se encuentran entre los precios esperados y los de mercado del enfoque determinista (ver Figura 6. 27), salvo para las semanas de la 25 a la 32, en donde son mayores. Esto se debe a que los precios deterministas en estas semanas son parecidos a los precios esperados, por lo que en el equilibrio (simultaneidad de máximos beneficios) el enfoque primal tiende a posicionar los precios primales por encima de los esperados, aunque no alejándolos demasiado, para que las longitudes de los soportes de los beneficios posibles no aumenten en exceso (ver ecuaciones (2. 31) y (6. 5)).

En la Figura 6. 29 se muestran los precios de mercado cuando se consideran contratos entre las empresas, y en la Figura 6. 30 sus diferencias con respecto de los precios esperados.

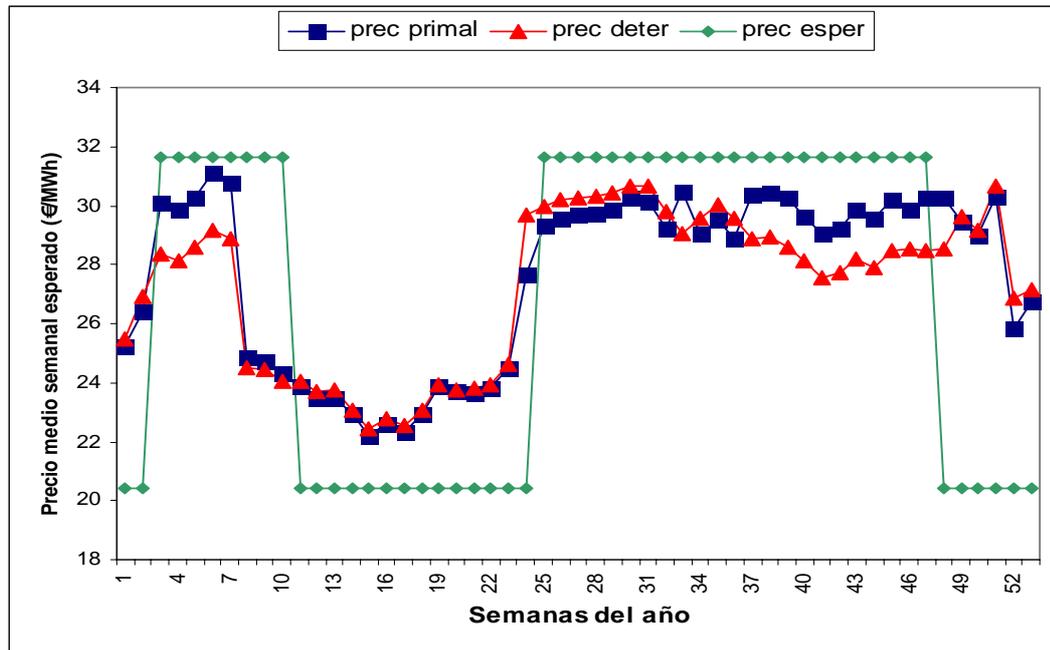


Figura 6. 29: Precios marginales con contratos y esperados (caso de tamaño real)

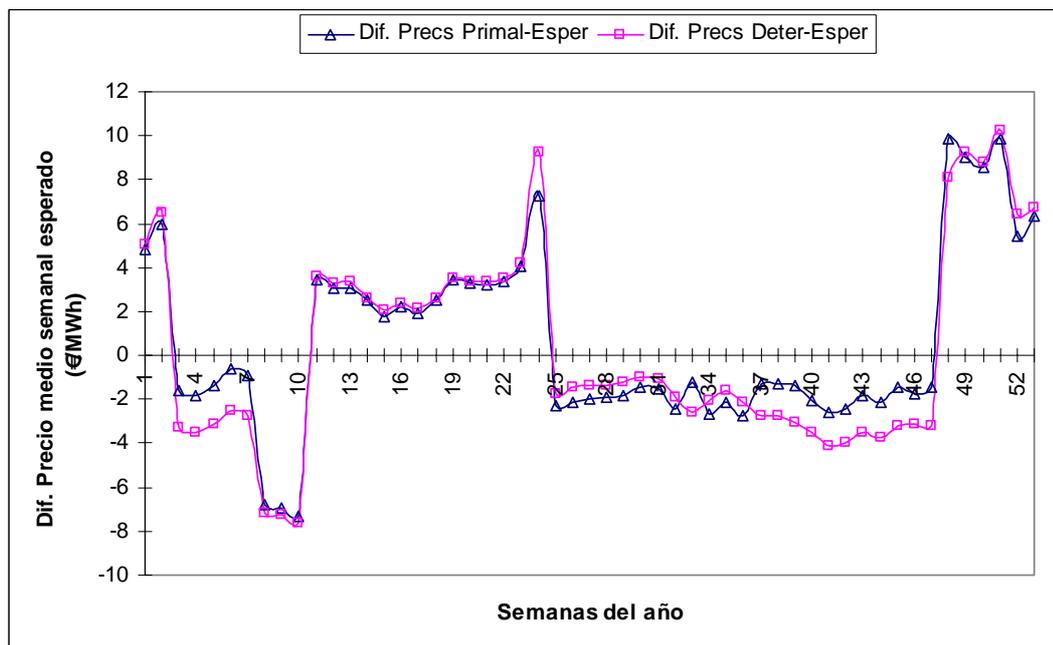


Figura 6. 30: Diferencias precios marginales con contratos y esperados (caso de tamaño real)

Como puede verse, los precios de mercado del enfoque primal siguen siendo más parecidos a los precios esperados que los del enfoque determinista (la dispersión

media respecto del precio esperado en el enfoque primal es de 3.3 €/Mwh mientras que en el determinista es de 3.9 €/Mwh). Sin embargo, en este caso se observa, por un lado, que los precios resultan inferiores a los precios del caso en el que no existían contratos firmados, y por otro lado, que la disminución de la dispersión de los precios con respecto a los precios esperados no es muy significativa. Estos dos efectos se deben a que las empresas en el equilibrio con contratos tienen un menor poder de mercado que en el equilibrio sin contratos, dado que tienen menores recursos de comercialización en el mercado. Además, si las empresas ejercitasen todo su poder de mercado, los precios podrían elevarse tanto que harían perder a las empresas los ingresos comprometidos en los contratos por diferencias (se recuerda que en este tipo de contratos, si el precio de mercado crecía por encima del precio acordado, la empresa generadora debía pagar la diferencia a la empresa comercializadora).

#### 6.4.3.2 Resultados relacionados con los beneficios

Los mismos resultados observados en las distribuciones de posibilidad de los precios de mercado se obtienen para las distribuciones de posibilidad de los beneficios.

A modo de ejemplo, en la Figura 6. 31 se muestran las distribuciones de posibilidad de los beneficios para las empresas  $E_1$  y  $E_2$  con el equilibrio primal y con el determinista, y para el nivel de carga laborable-punta correspondiente a la primera semana del mes de enero.

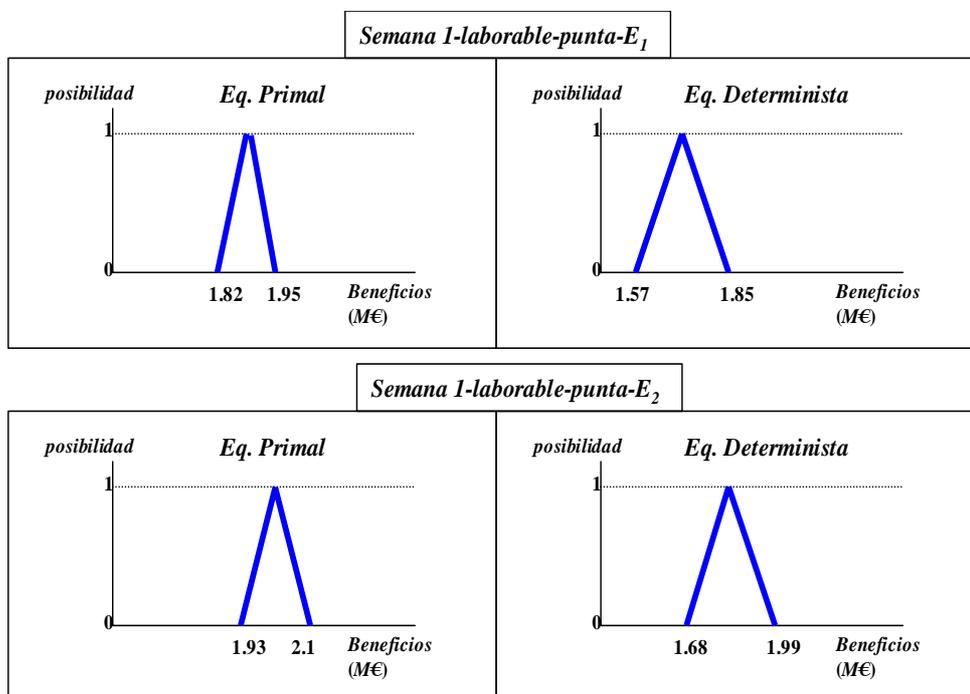


Figura 6. 31: Distribuciones de posibilidad de los beneficios (caso de tamaño real)

Los soportes para cada mes de las distribuciones de posibilidad de los beneficios de la empresa  $E_1$ , obtenidas restando a los ingresos por mercado los costes de explotación, se muestran en la Figura 6. 32. Los centros de los soportes corresponden con los beneficios más posibles.

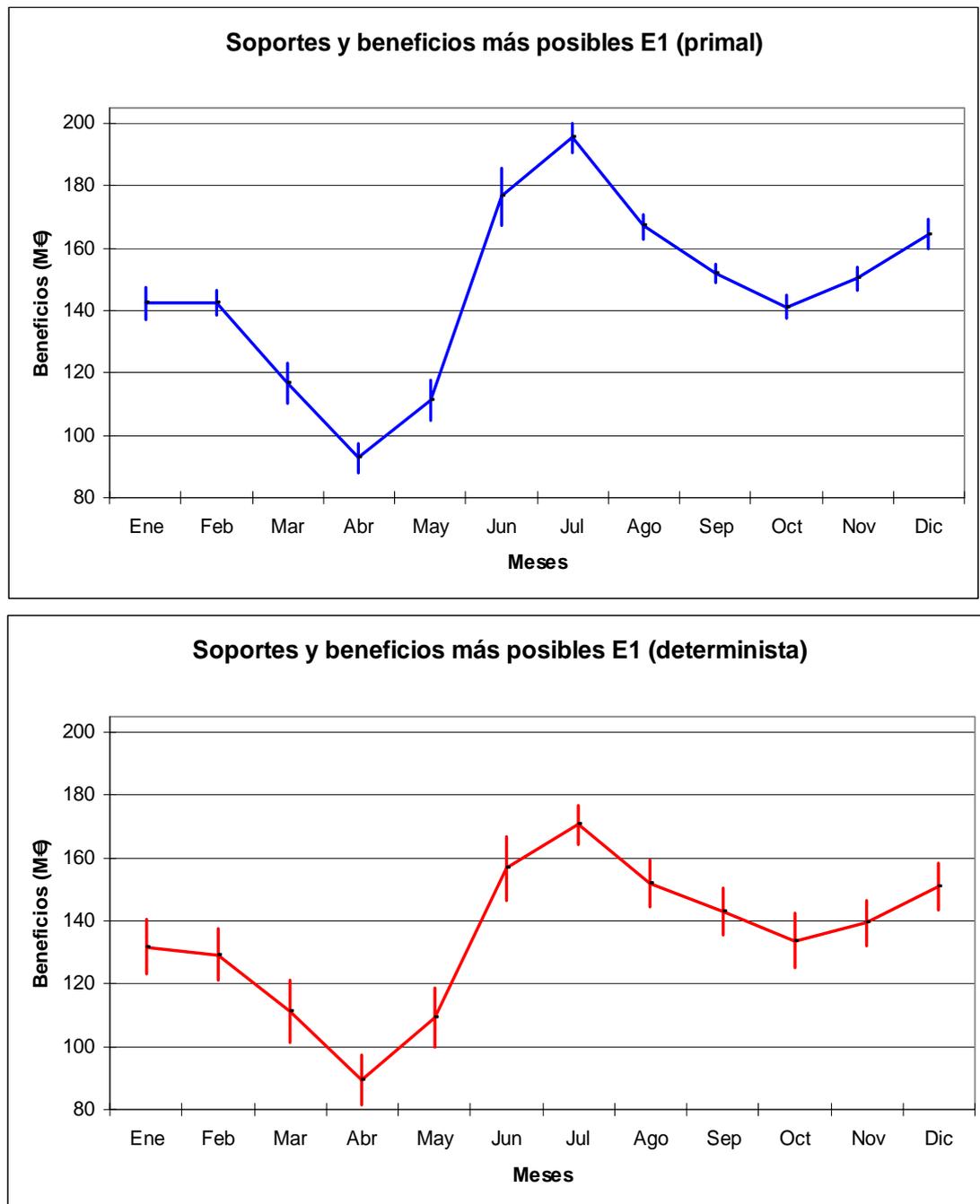
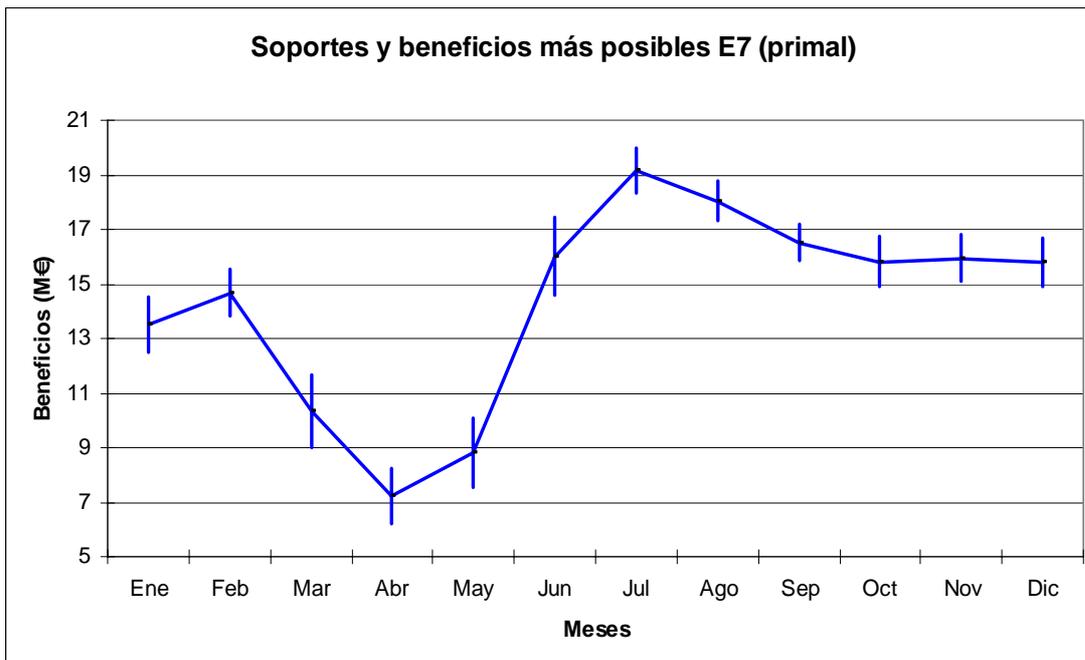


Figura 6. 32: Distribuciones de posibilidad de los beneficios mensuales empresa E1 (caso de tamaño real)

Se puede comprobar que para todas las distribuciones de posibilidad, las longitudes de sus soportes son menores con el equilibrio primal que con el determinista. En concreto, la suma de las longitudes de los soportes para cada mes de las distribuciones con el equilibrio primal es de 118.76 M€, mientras que con el determinista es de 396.07 M€. Esta reducción en la variabilidad de los beneficios es aún mayor en los meses de verano e invierno, debido a que al ser los precios esperados altos en estos meses, los generadores pueden ejercer un mayor poder de mercado, lo que incluso les permite aumentar sus beneficios más posibles. Sin embargo, al igual que pasaba en los casos de estudios sencillos, este último efecto puede no presentarse en el resto de meses (como ocurre en algunos niveles de carga de los meses de abril y mayo), cuando los precios esperados son pequeños. En la Figura 6. 33 se muestra cómo los beneficios más posibles para la última empresa considerada, que tiene un menor poder de mercado que la primera, y para los meses de abril y mayo, disminuyen con la aplicación del enfoque primal, aunque las longitudes de los soportes de las distribuciones siguen siendo menores que con el enfoque determinista.



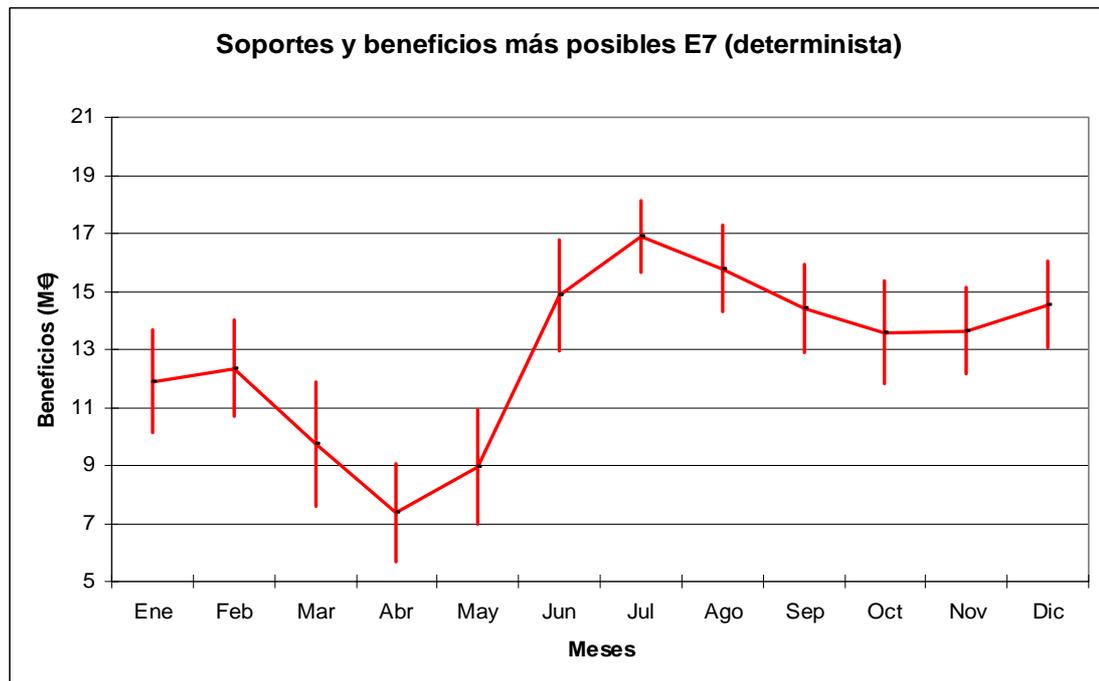


Figura 6. 33: Distribuciones de posibilidad de los beneficios mensuales empresa E7 (caso de tamaño real)

No obstante, el hecho de que los beneficios más posibles crezcan en general con la aplicación del enfoque primal puede deberse a la consideración de un perfil de precios esperados por los generadores demasiado optimista (alto) para la suposición de aversión al riesgo. Por otro lado, la consideración de precios esperados idénticos para todos los generadores, que conlleva a que en los meses de verano e invierno todos tengan mayor poder de mercado que con el enfoque determinista, implica un aumento de los beneficios más posibles en estos meses para la mayor parte de las empresas generadoras, debido al incremento de los precios de la electricidad que tienen que pagar los consumidores (en este caso lo que ganan los generadores, lo pierden los consumidores). La consideración de precios esperados distintos por generador, lo que puede modelar mejor la realidad, conllevaría a comportamientos más complejos en los beneficios más posibles, respecto a los beneficios del enfoque determinista.

Resultados similares a los mostrados para las distribuciones de posibilidad de los beneficios de las empresas consideradas en este epígrafe se satisfacen también para el resto de empresas. Precisamente estos resultados son una de las aportaciones prácticas del enfoque primal propuesto en esta tesis, tal y como se concluirá en el siguiente capítulo.

### 6.4.3.3 Resultados relacionados con las producciones

En la Figura 6. 34 se muestran, para la empresa  $E_1$ , las producciones totales en cada una de las 53 semanas correspondientes al equilibrio primal y al determinista.

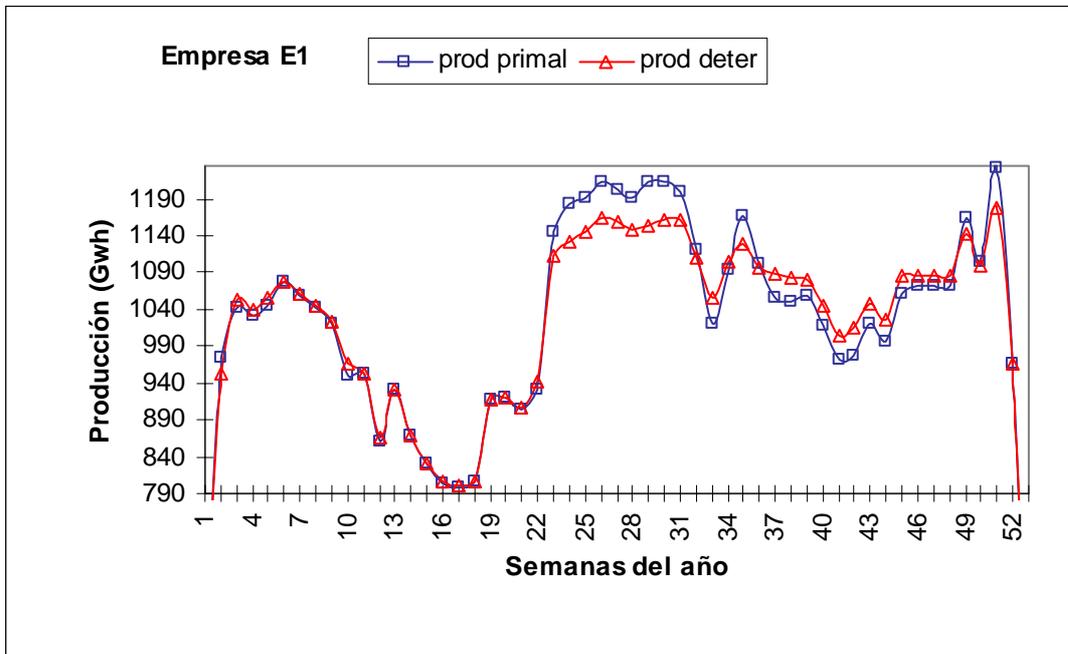


Figura 6. 34: Producciones en el equilibrio primal y determinista (caso de tamaño real)

En la Figura 6. 35 se muestran las diferencias entre las producciones primales y deterministas.

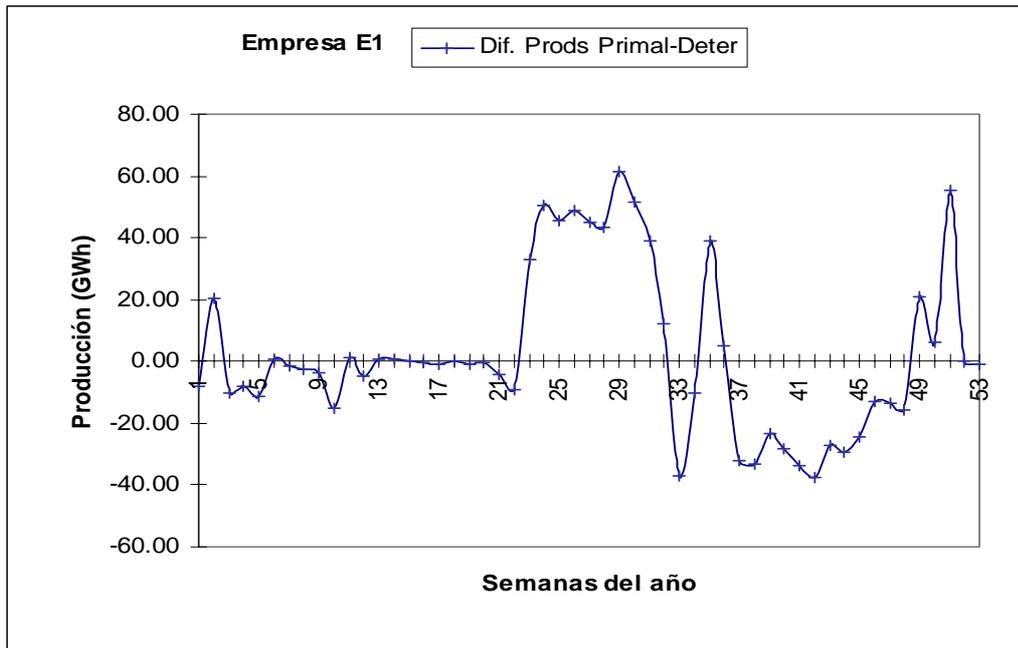


Figura 6. 35: Diferencias producciones primal y determinista (caso de tamaño real)

Obsérvese que, en contra de lo que suele ocurrir en el resto de semanas, entre las semanas 23 y 32 las producciones de la empresa  $E_1$  según el enfoque primal son mayores que con el enfoque determinista. Esto se debe a que en estas semanas el mercado resulta ser más competitivo con el enfoque primal, al tener los generadores un menor poder de mercado (dado que los precios primales son mayores que los esperados, mientras que los deterministas son menores, ver Figura 6. 27). El aumento de competencia hace que generadores con gran poder de mercado, como el generador  $E_1$ , tiendan a aumentar su producción respecto del enfoque determinista, mientras que generadores pequeños tiendan a decrementarla, debido a que debe satisfacerse siempre la demanda inelástica. No obstante, las diferencias en términos relativos entre las producciones con ambos enfoques son poco significativas (no superan el 2% de variación), y lo mismo ocurre con el resto de empresas consideradas.

En las dos siguientes tablas (Tabla 6. 23 y Tabla 6. 24) se muestran las producciones anuales agregadas por tecnología para cada una de las siete empresas consideradas, y obtenidas con los enfoques primal y determinista. En la Tabla 6. 25 se muestran las diferencias entre dichas producciones.

	$E_1$	$E_2$	$E_3$	$E_4$	$E_5$	$E_6$	$E_7$
Nuclear	<b>30303</b>	<b>27760</b>	<b>6178</b>	<b>1358</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>
Carbón	<b>14434</b>	<b>3149</b>	<b>14811</b>	<b>12987</b>	<b>7512</b>	<b>0</b>	<b>1024</b>
Fuel-Gas	<b>0</b>	<b>2720</b>	<b>3155</b>	<b>3195</b>	<b>1086</b>	<b>13033</b>	<b>8858</b>
Hidráulica	<b>8287</b>	<b>14457</b>	<b>3451</b>	<b>617</b>	<b>743</b>	<b>0</b>	<b>0</b>
Bombeo	<b>919</b>	<b>1375</b>	<b>269</b>	<b>160</b>	<b>476</b>	<b>0</b>	<b>0</b>

Tabla 6. 23: Producciones por empresa y tecnología enfoque primal (GWh)

	$E_1$	$E_2$	$E_3$	$E_4$	$E_5$	$E_6$	$E_7$
Nuclear	<b>30303</b>	<b>27761</b>	<b>6178</b>	<b>1358</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>
Carbón	<b>14247</b>	<b>3221</b>	<b>14827</b>	<b>12999</b>	<b>7518</b>	<b>0</b>	<b>1024</b>
Fuel-Gas	<b>0</b>	<b>2771</b>	<b>3135</b>	<b>3194</b>	<b>1027</b>	<b>13052</b>	<b>8910</b>
Hidráulica	<b>8287</b>	<b>14457</b>	<b>3451</b>	<b>617</b>	<b>743</b>	<b>0</b>	<b>0</b>
Bombeo	<b>965</b>	<b>1384</b>	<b>227</b>	<b>132</b>	<b>418</b>	<b>0</b>	<b>0</b>

Tabla 6. 24: Producciones por empresa y tecnología enfoque determinista (GWh)

	$E_1$	$E_2$	$E_3$	$E_4$	$E_5$	$E_6$	$E_7$
Nuclear	<b>-1</b>	<b>-2</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>
Carbón	<b>187</b>	<b>-72</b>	<b>-16</b>	<b>-16</b>	<b>-5</b>	<b>0</b>	<b>-1</b>
Fuel-Gas	<b>0</b>	<b>-51</b>	<b>19</b>	<b>1</b>	<b>59</b>	<b>-19</b>	<b>-53</b>
Hidráulica	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>
Bombeo	<b>-46</b>	<b>-8</b>	<b>42</b>	<b>28</b>	<b>58</b>	<b>0</b>	<b>0</b>

Tabla 6. 25: Diferencias producciones por empresa y tecnología enfoque primal-determinista (GWh)

Cabe observar que el aumento de la producción entre las semanas 23 y 32 de la empresa  $E_1$  se debe a un mayor consumo de carbón, mientras que el resto de empresas reducen la producción con esta tecnología, y las empresas  $E_2$ ,  $E_6$  y  $E_7$  reducen la de fuel-gas. Sin embargo, la reducción de la producción para satisfacer la demanda inelástica, requerida entre las semanas 23 y 32 por el aumento de la generación térmica de la empresa  $E_1$ , resulta de una menor producción con fuel-gas de la empresa  $E_5$ , que es una tecnología cara (en concreto, la producción se reduce en 331 GWh, aunque la producción anual resulta ser finalmente mayor con el enfoque primal, tal y como muestra la Tabla 6. 25).

Las tecnologías nuclear e hidráulica no sufren apenas variaciones en ambos enfoques al ser tecnologías más baratas, mientras que el bombeo decrece para las dos empresas más grandes y crece para las más pequeñas, siendo el bombeo neto mayor con el enfoque primal que con el determinista. La cantidad neta bombeada responde a la forma que tiene el precio marginal en cada nivel de carga, siendo mayor cuanto más pronunciado es el perfil de precios. Esto se debe a que se bombea más en niveles de

carga donde el precio marginal es más barato, para tener disponible una mayor cantidad de agua en niveles de carga donde es más caro. En la Tabla 6. 26 se muestra el perfil de precios marginales por nivel de carga para los enfoques primal y determinista, en donde se observa un perfil más pronunciado con el enfoque primal (comparar precios superpunta, punta y llano con precios valle).

	lab				sab				fst			
	spp	pnt	lln	vll	spp	pnt	lln	vll	spp	pnt	lln	vll
Primal	5.48	4.44	3.96	2.53	4.25	4.08	3.92	2.79	3.92	3.56	3.24	2.57
Determinista	5.08	4.06	3.81	2.60	3.90	3.73	3.80	3.03	3.69	3.30	3.12	2.63

Tabla 6. 26: Precio marginal medio por nivel de carga (€/Mwh)

El decrecimiento del bombeo para las empresas  $E_1$  y  $E_7$  se debe a que en el enfoque primal estos generadores tienen, a lo largo de muchos meses del año, más poder de mercado que en el determinista, por lo que para incrementar los precios marginales no se requiere del bombeo de una mayor cantidad de agua. Además, deben satisfacerse las condiciones de equilibrio que implican, por el contrario, que el resto de empresas deben aumentar su bombeo.

En la Figura 6. 36 y para el agente  $E_1$ , se muestra la producción obtenida con los enfoques primal y determinista cuando se consideran contratos, junto con la producción comprometida en los contratos a lo largo de las semanas.

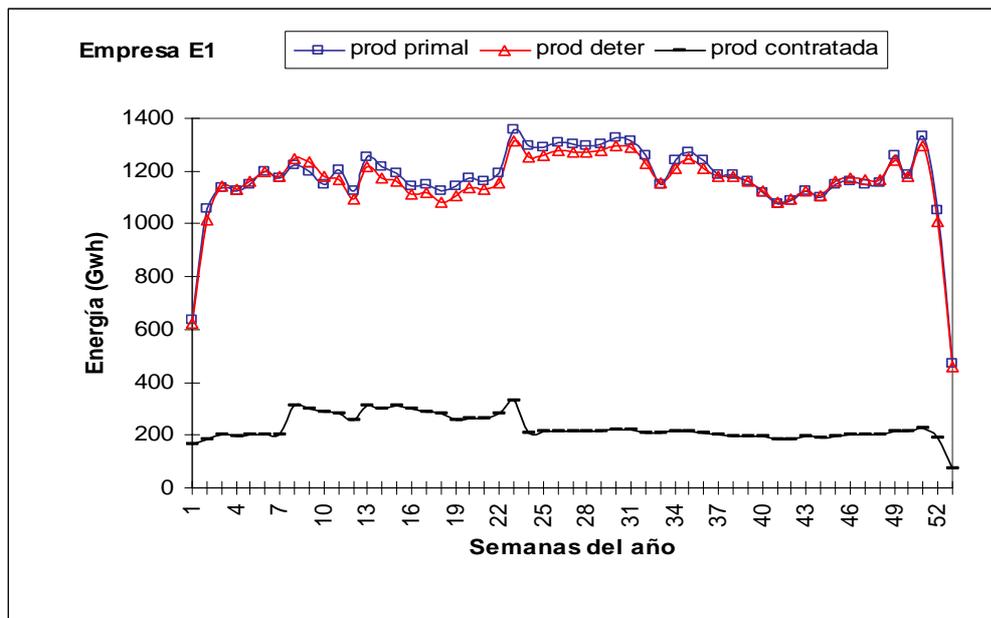


Figura 6. 36: Energía semanal en los equilibrios y contratada (caso de tamaño real)

Tal y como se comentó en el capítulo anterior una de las suposiciones razonables que se requerían para asegurar la convergencia del algoritmo primal era que las empresas no debían estar cortas, esto es, que debían tener contratada menos energía que la producida. Como puede verse en la figura, la empresa  $E_1$  no está corta dado que la producción contratada es siempre menor que la comercializada en el mercado. Este mismo resultado se satisface también para el resto de empresas consideradas.

Una de las conclusiones que pueden derivarse del análisis de los precios de mercado y de las producciones de los enfoques primal y determinista, es que a pesar de que las diferencias entre los precios son relevantes, no lo son las diferencias entre las producciones. Esto se debe principalmente a la alta sensibilidad de los precios ante pequeños cambios en las producciones cuando la demanda es inelástica. Además, dado que las producciones no se ven muy afectadas, los costes de explotación tampoco. En concreto, la diferencia de los costes obtenidos con ambos enfoques es de sólo 4 M€ a lo largo de todo el año y con todas las empresas, siendo los costes típicamente menores con el enfoque primal.

#### 6.4.3.4 Resultados relacionados con la convergencia

En la Figura 6. 37 se muestra, para cada iteración, el valor de la distancia entre las producciones  $P^k$  fijadas y las producciones  $Z^k$  resultantes de resolver cada subproblema, cuando se escoge como vector inicial del algoritmo el equilibrio determinista, y cuando se considera el caso sin contratos entre empresas (resultados similares se obtienen también para el caso con contratos).

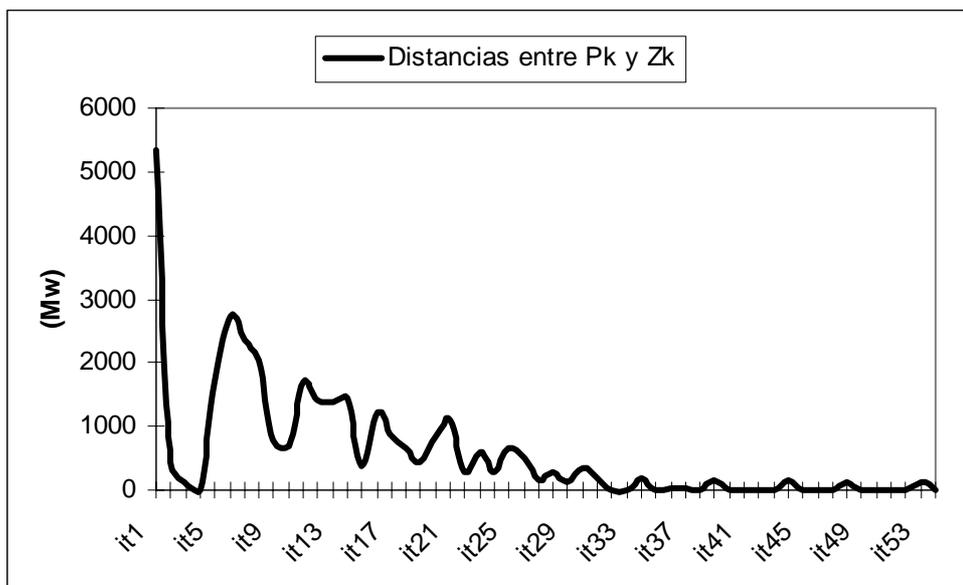


Figura 6. 37: Distancias entre  $P^k$  y  $Z^k$  para cada iteración (caso de tamaño real)

Tal y como puede verse, la sucesión de distancias  $\{\|P^k - Z^k\|\}$  no es estrictamente decreciente, por el efecto que tienen las distintas reinicializaciones realizadas sobre las penalizaciones  $\alpha^k$  de las distancias  $\|P^k - Z^k\|$ . Sin embargo, se observa que la sucesión de distancias  $\{\|P^k - Z^k\|\}$  es convergente a cero, y que las reinicializaciones, cuyo efecto corresponde con los picos de la serie dibujada, tienen una menor repercusión sobre la sucesión  $\{\|P^k - Z^k\|\}$  cuanto mayor es el número de iteraciones. Además se observa un decrecimiento significativo en la distancia  $\|P^k - Z^k\|$  producido en la iteración 4 (en concreto, la distancia en esta iteración es 7.24 Mw), que no implica la satisfacción de la condición de convergencia, dado que el resto marginal  $\alpha^k$ -convergente debe estar a la vez próximo a cero.

En la Figura 6. 38 se muestra la sucesión de restos marginales  $\alpha^k$ -convergentes (agregados por nivel de carga).

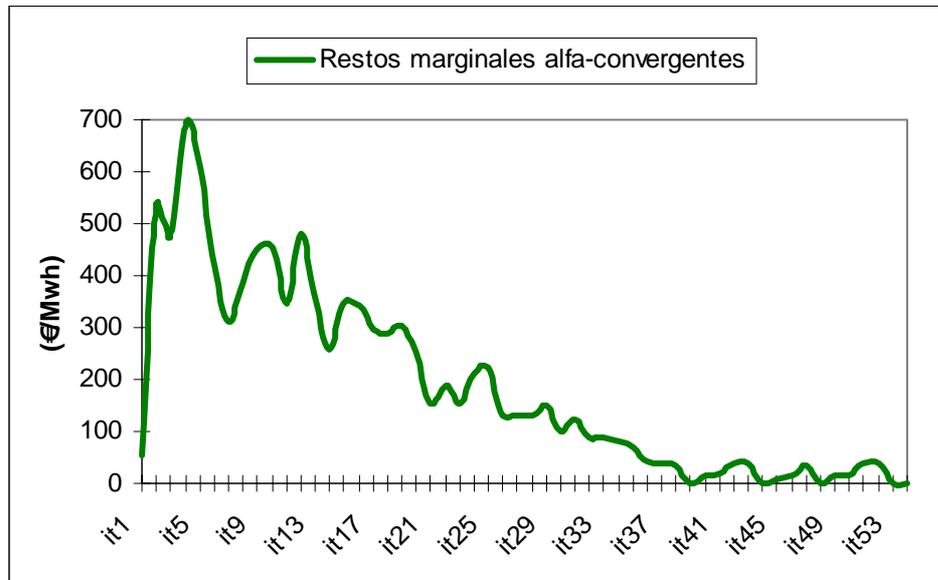


Figura 6. 38: Restos marginales alfa convergentes para cada iteración (caso de tamaño real)

En esta figura se observa que el resto marginal  $\alpha^k$ -convergente es elevado (698 €/MWh), por lo que el algoritmo no ha convergido en la iteración 4. Además, por el mismo motivo que con la sucesión de distancias  $\{\|P^k - Z^k\|\}$ , la sucesión de restos marginales  $\alpha^k$ -convergentes no es decreciente, aunque si es convergente a cero, asegurando que el conjunto de producciones obtenidas en la última iteración del algoritmo corresponde con el equilibrio primal. De hecho, la función de mérito evaluada en  $P^k$  para la última iteración resulta ser prácticamente cero.

Por otro lado, el hecho de que el resto  $\alpha^l$ -convergente sea pequeño no implica una mejor satisfacción de las ecuaciones de equilibrio debido a que, al ser  $P^l$  y  $Z^l$  vectores muy distintos (ver Figura 6. 37), las pendientes de la demanda residual con  $P^l$  y  $Z^l$  son diferentes. Esto también se puede comprobar viendo que el mérito en las primeras iteraciones no es pequeño.

En la Figura 6. 39 se muestra la sucesión de méritos  $M(P^k)$  obtenida. Tal y como se comentó, los tiempos de cálculo de los méritos no han sido incluidos en el tiempo total de ejecución del algoritmo.

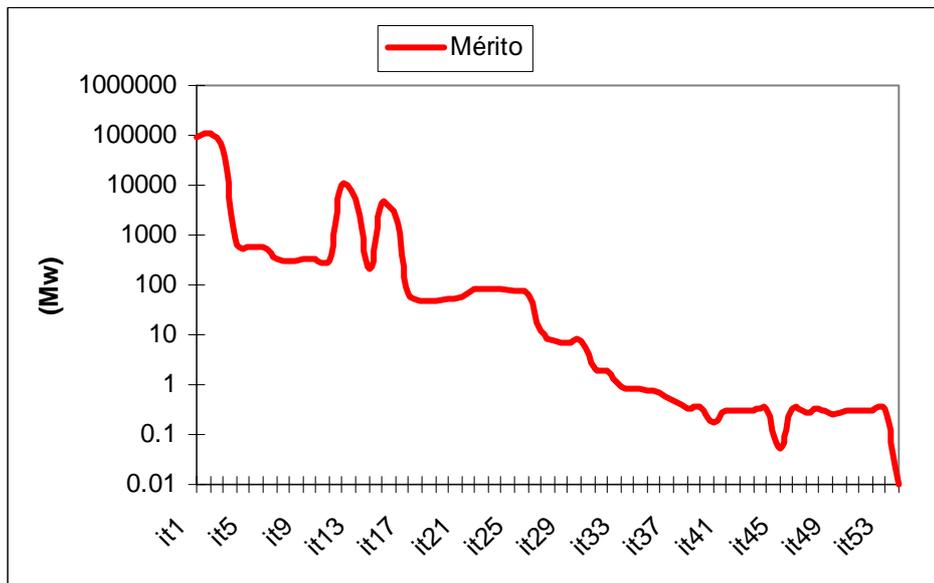


Figura 6. 39: Mérito en  $P^k$  para cada iteración (caso de tamaño real)

Como se comentó en los casos sencillos, la sucesión de méritos no tiene porque ser decreciente en iteraciones próximas a las de reinicialización del algoritmo, aunque sí convergente a cero.

Por otro lado, en la Figura 6. 40 se muestran los umbrales de convergencia  $\varepsilon^k$  y los parámetros de penalización  $\alpha^k$  asociados para el nivel de carga laborable-superpunta correspondiente a la primera semana del año, obtenidos hasta la iteración 16 (dado que al producirse en la iteración 15 la convergencia en el nivel de carga elegido, en adelante los criterios y parámetros son idénticos).

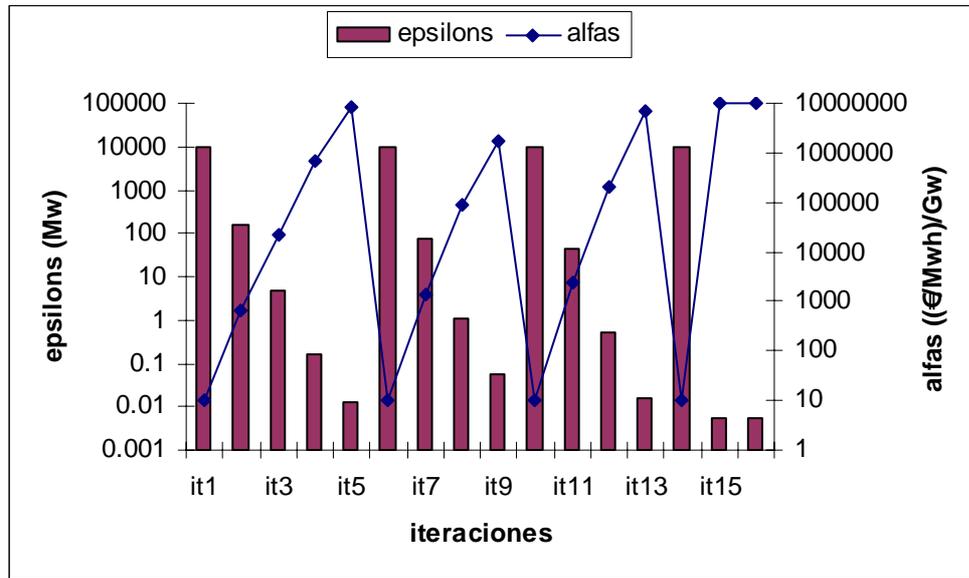


Figura 6. 40: Criterios de convergencia y parámetros de penalización (caso de tamaño real)

Como puede verse, las reinicializaciones se efectúan en las iteraciones 1, 6, 10 y 14, dado que corresponden con valores grandes en los umbrales de convergencia  $\epsilon^k$  y pequeños en los parámetros de penalización  $\alpha^k$ . Además, en la iteración 15 se produce la convergencia del algoritmo para el nivel de carga considerado, dado que los umbrales de convergencia  $\epsilon^k$  son pequeños y los parámetros de penalización  $\alpha^k$  suficientemente grandes. En este sentido, se ha comprobado que las penalizaciones  $\alpha^k$  establecidas por niveles de carga, expresadas en  $Mw$ , no deben incrementarse por encima de, aproximadamente, seis veces la penalización por demanda no suministrada, dado que en caso contrario pueden desescalar los modelos de optimización resueltos, y por tanto pueden producirse problemas numéricos en la resolución.

Por lo tanto, se puede concluir que los resultados teóricos fundamentales relacionados con la convergencia del algoritmo propuesto en esta tesis, que fueron descritos y formalmente probados en el capítulo anterior, se reproducen fielmente en los casos de estudio de tamaño real analizados en este apartado.

## 6.5 Referencias

- [Barquín, 2004] J. Barquín, E. Centeno, and J. R. Guillén, "Medium-term generation programming in competitive environments: A new optimization approach for market equilibrium computing". *IEE Proceedings on Generation Transmission and Distribution*, vol. 151, No. 1, pp. 119-126, 2004.
- [Brooke, 1998] A. Brooke, D. Kendrick, A. Meeraus, and R. Raman, *GAMS: A User's Guide*. Washington, D.C.: GAMS development Corporation, 1998.
- [Cplex, 1997] Cplex, *Using The Cplex Callable Library*. Incline Village, N.V.: ILOG, Inc, 1997.
- [Harker, 1990] P. T. Harker and J. S. Pang, "Finite-Dimensional Variational Inequality and Nonlinear Complementary Problems: A Survey of Theory, Algorithms and Applications". *Mathematical Programming*, vol. 48, pp. 161-220, 1990.
- [Reneses, 2004] J. Reneses, "Análisis de la Operación de los Mercados de Generación de Energía Eléctrica a Medio Plazo," in *Organización Industrial*. Madrid: Pontificia Comillas, 2004.

## **7. Conclusiones, aportaciones y líneas de futuros desarrollos**

En este último capítulo se describen las conclusiones más relevantes deducidas del trabajo de investigación realizado, se presentan las principales aportaciones al campo de la investigación operativa y al de la ingeniería eléctrica, y por último se describen algunas líneas de futuros desarrollos fruto del trabajo realizado en esta tesis.



## 7.1 Conclusiones

Algunas de las conclusiones más relevantes de esta tesis se refieren **a la complejidad del modelo de mercado posibilista propuesto y a la viabilidad computacional del método de resolución ante problemas de gran tamaño**, comparándolas con las del enfoque estocástico. En este sentido caben destacar las siguientes conclusiones, que resaltan las ventajas de utilizar medidas de posibilidad en lugar de medidas de probabilidad para la representación de la incertidumbre en el mercado analizado:

- Algunas de las hipótesis habituales para simplificar el planteamiento de las ecuaciones de equilibrio de mercado cuando se utilizan medidas de probabilidad para representar la incertidumbre, son la consideración de variables aleatorias gaussianas (normales) y la suposición de independencia mutua entre ellas. Sin embargo, en el caso de utilizar distribuciones de posibilidad solamente ha sido necesario suponer **distribuciones LR** ([Dubois, 1980]), tan generales como las funciones gaussianas. La relación existente entre las variables posibilistas no tiene porque ser conocida.
- Por otro lado, se ha constatado que, aun suponiendo las hipótesis de normalidad y de independencia, las ecuaciones de equilibrio no pueden obtenerse fácilmente cuando se utilizan medidas de probabilidad, en contra de lo que ocurre cuando la medida es de posibilidad. Asimismo, se ha comprobado que las ecuaciones obtenidas con la aplicación de medidas de posibilidad pueden resolverse con un **algoritmo para problemas de desigualdades variacionales**.
- Además, los casos de estudio analizados demuestran que la metodología de resolución permite resolver eficientemente problemas de gran tamaño. En concreto, se ha aplicado esta metodología a varios casos de tamaño real para representar el mercado español con un horizonte de un año. Se ha comprobado que la técnica de resolución utilizada es **computacionalmente eficiente**, facilita la obtención de **soluciones en un tiempo aceptable** para la planificación y operación en el medio plazo, y **no requiere de técnicas de descomposición** usualmente utilizadas en los modelos estocásticos.

Otras conclusiones relacionadas con el **análisis y la validación de los resultados obtenidos con la aplicación del enfoque primal propuesto** a los casos de estudio analizados en esta tesis, son las siguientes:

- Se ha adecuado el concepto de **equilibrio robusto frente a la incertidumbre** al caso del mercado eléctrico a medio plazo cuando se acota la posibilidad de beneficios pequeños. En concreto, en esta tesis se ha comprobado que un

equilibrio robusto en el medio plazo se puede definir como un conjunto de decisiones de explotación que forman un equilibrio de Nash y tales que reducen la variabilidad de los beneficios posibles.

- Se han comparado los resultados obtenidos utilizando el enfoque primal con los conseguidos mediante el enfoque determinista, que resuelve el modelo de mercado maximizando los beneficios de los agentes contra el escenario con mayor grado de posibilidad. Se ha comprobado que la solución propuesta en esta tesis es **más robusta que la obtenida con el enfoque determinista** en el sentido descrito en el punto anterior.
- Se ha verificado que para el cálculo de equilibrios robustos, los enfoques propuestos **no necesitan la modificación subjetiva de los grados de certeza de un árbol de escenarios de la incertidumbre**, típicamente ineludible en los modelos estocásticos presentes en la literatura, que asignan grados de probabilidad más altos a escenarios desfavorables y más pequeños a los más favorables (ver, por ejemplo, [Reneses, 2004]). Los enfoques propuestos en esta tesis requieren, por el contrario, estimar de algún modo una distribución de posibilidad continua para los parámetros que contienen incertidumbre.
- Se ha comprobado que **los beneficios más posibles** de un equilibrio robusto, **no tienen por qué ser necesariamente inferiores a los obtenidos cuando se resuelve el equilibrio de Nash frente al escenario de entrada con mayor posibilidad**, algo que sí ocurre cuando se maximiza la función de beneficio de un generador, suponiendo fijas las decisiones del resto (ver [Campos, 2005b]). Esta diferencia en los planteamientos se debe a que un equilibrio de Nash compromete las funciones de beneficio de todos los generadores (de hecho, el equilibrio es un punto de silla de las funciones de beneficio) por lo que no resulta de la maximización de una única función de beneficio (aunque en algunas ocasiones su resolución sí pueda ser equivalente a resolver un modelo de optimización, ver [Barquín, 2004] y [Campos, 2005a]).
- Se ha comprobado que el comportamiento de los equilibrios definidos tiende a **posicionar a las empresas en condiciones esperadas por las mismas**, tanto cuando se ven afectadas por beneficios reducidos, como cuando no. Este comportamiento es coherente con el hecho de que las empresas se suponen aversas al riesgo, dado que lo que resulta menos arriesgado es siempre lo esperado. Además, se ha observado que el posicionamiento descrito tiende a ser menos preciso cuando se consideran contratos entre empresas generadoras con gran poder de mercado y empresas comercializadoras, dado que las empresas generadoras tienen en este caso una menor capacidad de modificar el precio del mercado, y por tanto de modificar sus beneficios posibles, al tener una menor disponibilidad de recursos. Además, con la firma de contratos por diferencias las

empresas no se ven incentivadas en incrementar el precio del mercado, dado que pueden perder sus ingresos comprometidos en los contratos.

- Por otro lado, se ha deducido que **el posicionamiento de las empresas**, que ha sido descrito en el punto anterior, **no tiene porque implicar necesariamente un aumento de la producción ofertada con respecto del caso con indiferencia al riesgo** (enfoque determinista). Este efecto podía haber contradicho, previo al análisis de los casos de estudio, la suposición de aversión al riesgo de los generadores, dado que un comportamiento precavido frente a una pérdida significativa de los beneficios, podría parecer correspondido con un incremento de la producción (por la suposición de un menor poder de mercado). De hecho, se ha comprobado con los casos de estudio que la producción con el enfoque primal cuando la demanda es inelástica no es muy diferente de la correspondiente al enfoque determinista, y por lo tanto tampoco los costes de explotación, aunque las diferencias en los precios sí puedan ser relevantes (por la sensibilidad del precio cuando la demanda es inelástica).

Por último, se resumen algunas **conclusiones relativas al planteamiento de los problemas de equilibrio como problemas de desigualdades variacionales, y del algoritmo desarrollado y propuesto en esta tesis**:

- Una de las ventajas de la teoría acerca de los problemas de desigualdades variacionales es que **dispone de condiciones de existencia y unicidad de solución relativamente fáciles de verificar**. Por ello, el planteamiento de problemas variacionales equivalentes a modelos de equilibrio puede ser muy conveniente para determinar, de una manera sencilla, si los equilibrios existen y son únicos. En este sentido, en esta tesis se ha demostrado la existencia de los equilibrios propuestos, pero no se ha conseguido demostrar su unicidad (posiblemente porque no sean únicos).
- Por otro lado, en los equilibrios resueltos en los casos de estudio de esta tesis, mediante la aplicación de algoritmos para problemas variacionales, se ha obtenido una curva de la demanda residual por generador que tiene dos tramos lineales diferenciados a través de un precio esperado, y las pendientes de la curva son decrecientes con el precio del mercado. Sin embargo, es importante resaltar que **la resolución mediante los algoritmos propuestos es independiente del tipo de curva elegida siempre que las pendientes sean crecientes con la producción**, como por ejemplo cuando las pendientes son cualesquiera funciones decrecientes con el precio (por ejemplo, cuando cada curva de la demanda residual es una poligonal cóncava). Bajo estos supuestos, se ha incluido **un paso adicional en los algoritmos que garantiza siempre la convergencia, aunque sea de forma local**. Sin embargo, también es importante hacer notar que el algoritmo solamente es eficiente cuando las curvas consideradas no alteran

sustancialmente las condiciones de monotonía del problema variacional. En otro caso, la ejecución reiterativa del paso añadido podría comprometer los tiempos de planificación y operación.

Por lo tanto, la aplicación de la metodología de resolución propuesta permite concluir que los algoritmos propuestos son una potente herramienta, tanto desde el punto de vista teórico del análisis del mismo en cuanto a la existencia y unicidad de sus soluciones, como desde el punto de vista práctico de la resolución numérica del problema.

## 7.2 Aportaciones de la tesis

Las aportaciones fundamentales de esta tesis se enmarcan dentro de las técnicas de resolución de juegos posibilistas y de problemas de desigualdades variacionales, y dentro del ámbito de aplicación de estas técnicas a la resolución de equilibrios de mercado de electricidad bajo incertidumbre.

- **Aportaciones referentes a la teoría de juegos posibilistas**

Una de las aportaciones de esta tesis ha sido **el planteamiento de los enfoques primal y dual a juegos no cooperativos con pagos posibilistas**, es decir, a los procesos de decisión en los que existen un conjunto de jugadores (o decisores) que no cooperan en la maximización de sus funciones de pago (o funciones objetivo), y en donde, para cada jugador y cada combinación de estrategias (o variables de decisión), la función de pago es una distribución de posibilidad.

En concreto, se han **analizado juegos bipersonales y  $K$  personales no cooperativos con pagos posibilistas en estrategias mixtas**, y se han proporcionado **dos modelos de optimización equivalentes a los equilibrios que se obtienen de aplicar los criterios primal y dual** en la resolución de estos juegos. Los modelos de optimización pueden resolverse con cualquier programa comercial de optimización cuadrática (que admita productos entre variables cruzadas).

Además, se **han planteado los enfoques primal y dual para el caso de juegos  $K$  personales no cooperativos con pagos posibilistas en estrategias continuas**, y se han **aplicado al mercado de la electricidad** analizado en esta tesis, que tiene como estrategias el conjunto de potencias a producir, y como funciones de pago posibilistas, los beneficios obtenidos por los agentes en el mercado, cuando se considera la incertidumbre en la pendiente de la curva de la demanda residual de cada generador y en los precios de los combustibles.

- **Aportaciones referentes a los algoritmos de desigualdades variacionales**

En esta tesis se han propuesto **varios algoritmos para el cálculo de los equilibrios de mercado que se obtienen de aplicar los enfoques primal y dual al modelo de mercado posibilista**. Dado que las ecuaciones de equilibrio han resultado equivalentes al planteamiento de un problema de desigualdades variacionales, los algoritmos propuestos son específicos para este tipo de problemas, y en concreto similares al descrito en [Solodov, 2001], pero **adaptado a las características del mercado analizado y para mejorar los tiempos de ejecución**. Las principales mejoras incorporadas en los algoritmos con respecto al de Solodov son básicamente las siguientes:

- En cada iteración, los algoritmos propuestos no requieren la evaluación del coste marginal para distintas decisiones de explotación, lo que reduce significativamente los tiempos de ejecución al no tenerse que resolver varios modelos de minimización de costes.
- El algoritmo de Solodov no incluye un paso adicional para garantizar la convergencia en caso de que el problema de desigualdades variacionales no sea monótono. En este sentido, el paso incluido en los algoritmos propuestos es lo suficientemente general como para poder resolver cualquier otro modelo de equilibrio similar al resuelto en esta tesis.
- **Aportaciones referentes al modelado del mercado de la electricidad**

Una de las aportaciones originales y fundamentales de esta tesis es el **planteamiento de un modelo de mercado** que representa adecuadamente el comportamiento de los agentes mediante la formulación explícita del **equilibrio de Nash** y la consideración de **distribuciones de posibilidad** para la representación de la incertidumbre inherente en el mercado. Precisamente, una de las mayores dificultades encontradas ha sido la escasez de trabajos relacionados, limitando los resultados básicos sobre los que apoyarse. En este sentido, en la tesis se ha definido el concepto de **equilibrio de Nash que representa un mercado de electricidad bajo incertidumbre**, cuando las estrategias son las cantidades a producir por los generadores (**equilibrio de Cournot**). En la definición se ha contemplado la posibilidad de que cada agente realice una conjetura sobre la percepción de la reacción de la competencia con la producción ofertada por el agente (**equilibrio en variaciones conjeturales**).

El modelo de mercado propuesto en esta tesis puede **considerar las principales fuentes de incertidumbre** del mercado, como aquellas relacionadas con el comportamiento de la curva de la demanda residual, pero también de los precios de los combustibles o de las indisponibilidades de los grupos de generación. Sin embargo, el modelo está dirigido fundamentalmente a contemplar las dos primeras fuentes de incertidumbres (demanda residual y costes de combustibles), que de manera más directa influyen en los beneficios obtenidos por los generadores.

Además, el modelo supone que **los agentes tienen aversión al riesgo**, lo que representa mejor la realidad del mercado. En este sentido, se han propuesto dos enfoques de resolución, que se han denominado **primal y dual**, que permiten considerar distintos grados de aversión al riesgo por agente, y que minimizan la variabilidad económica derivada de una mala estimación de la curva de la demanda residual de los agentes o de los costes variables de producción, y por lo tanto los enfoques obtienen **decisiones de producción robustas**.

Asimismo, no se ha realizado suposición alguna en los modelos obtenidos con la aplicación de los enfoques primal y dual, que no permita representar un mercado en donde **la curva de la demanda de electricidad es elástica o inelástica**. Además, los modelos de equilibrio pueden **considerar la mayor parte de las peculiaridades de los mercados eléctricos actuales**, entre las que destacan, por un lado, la consideración de **contratos de energía entre empresas productoras y comercializadoras**, y por otro lado, la consideración de las **restricciones típicas de explotación** de cualquier mercado de electricidad. En la tesis se propone también un procedimiento general para tener en cuenta otras fuentes de incertidumbre alternativas, que está basado en la consideración de **restricciones de explotación posibilistas** (es decir, restricciones en donde al menos uno de sus parámetros es una distribución de posibilidad), y que conlleva a un análisis similar al realizado en un esquema convencional en donde no se considera incertidumbre. Fruto de este procedimiento, en [Campos, 2004] se muestran varias metodologías de resolución de las restricciones posibilistas cuando se considera la incertidumbre en las indisponibilidades fortuitas de los grupos de generación térmicos, y se modela esta incertidumbre mediante distribuciones de posibilidad *LR*.

Finalmente, dado que para el cálculo de decisiones robustas se requiere estimar una **distribución de posibilidad continua, adecuada para la pendiente de la demanda residual de cada agente**, se ha propuesto un procedimiento novedoso para su estimación. Este procedimiento aplica el **modelo bisagras** (ver [García-González, 2001]) para aproximar los escalones que aparecen en las curvas de la demanda residual reales de cualquier mercado de electricidad, y utiliza varias de las transformaciones de distribuciones de probabilidad a distribuciones de posibilidad presentes en la literatura, para estimar el grado de posibilidad de cada pendiente de la demanda residual.

### 7.3 Líneas de futuros desarrollos

En este apartado se proponen algunas líneas de continuación del trabajo de investigación realizado en esta tesis doctoral.

- **Aplicación del enfoque dual y resolución de enfoques combinados primal-dual**

Una de las líneas de continuación que surge, de manera natural, del trabajo realizado en esta tesis es **la aplicación del algoritmo propuesto para resolver las ecuaciones de equilibrio resultantes del enfoque dual**. La resolución de estas ecuaciones permitiría obtener resultados interesantes para la operación y planificación de un mercado de electricidad a medio plazo. Por ejemplo, se podría determinar la relación entre la aversión al riesgo y los beneficios mínimos que cada generador de la competencia fijaría en el enfoque dual.

La línea de continuación descrita constaría de tres pasos principales para su desarrollo. En primer lugar, se deberían analizar más detalladamente las condiciones de monotonía del problema de desigualdades variacionales del enfoque dual. En segundo lugar se trataría de especificar en detalle la región de convergencia del algoritmo. Finalmente, se debería aplicar el algoritmo a un caso ejemplo realista para comprobar su viabilidad computacional y para analizar los resultados obtenidos.

Otra de las líneas de continuación es **el planteamiento de enfoques que combinen los criterios primal y dual para proponer un “equilibrio de compromiso” entre los equilibrios primal y dual**. Estos enfoques responderían al problema en que los agentes fijan tanto niveles de riesgo máximo  $\alpha_{e0}$  como beneficios mínimos  $B_{e0}$ , situación que puede derivar en la contraposición de los equilibrios primal y dual.

En la Figura 7. 1 se muestra una situación en la que los equilibrios primal y dual son contrapuestos. En ella, se muestran las distribuciones  $\underline{B}_e^P$  y  $\underline{B}_e^D$  de posibilidad del beneficio de un generador para el equilibrio primal  $P^{*P}$  y dual  $P^{*D}$  respectivamente. Como puede verse, el beneficio  $B_e^*$ , maximizado en el enfoque primal, evaluado con el equilibrio dual  $P^{*D}$  es menor que el beneficio óptimo  $B_e^*$  obtenido con el equilibrio primal  $P^{*P}$ , es decir,  $B_e^{*D} < B_e^{*P}$ . Recíprocamente, la posibilidad  $\alpha_e^*$ , minimizada en el enfoque dual, evaluada con el equilibrio primal  $P^{*P}$  es mayor que la posibilidad óptima obtenida con el equilibrio dual  $P^{*D}$ , es decir,  $\alpha_e^{*P} > \alpha_e^{*D}$ .

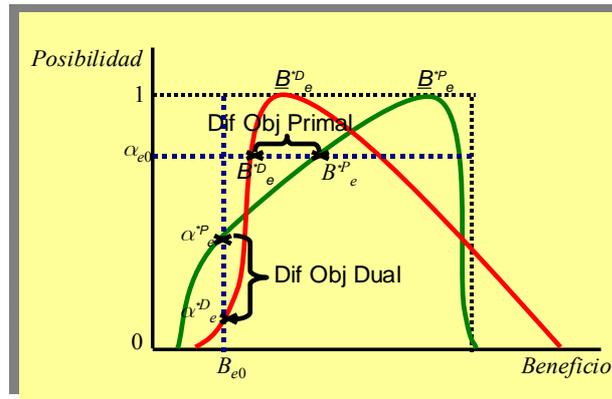


Figura 7. 1: Diferencias objetivos enfoques primal y dual

En la situación mostrada en la figura, un equilibrio de compromiso entre los equilibrios primal y dual puede ser un equilibrio más adecuado cuando los agentes fijan tanto niveles de riesgo máximo  $\alpha_{e0}$  como beneficios mínimos  $B_{e0}$ .

El equilibrio de compromiso resulta del planteamiento de un **enfoque combinado** de los enfoques primal y dual, consistente en la maximización en el sentido de Nash del beneficio  $B_e$  tal que la posibilidad  $\Pi$  de tener beneficios menores es menor o igual que  $\alpha_{e0}$ , y de la necesidad  $N$  de tener beneficios mayores que  $B_{e0}$ , lo que da lugar al problema de equilibrio representado en la Figura 7. 2.

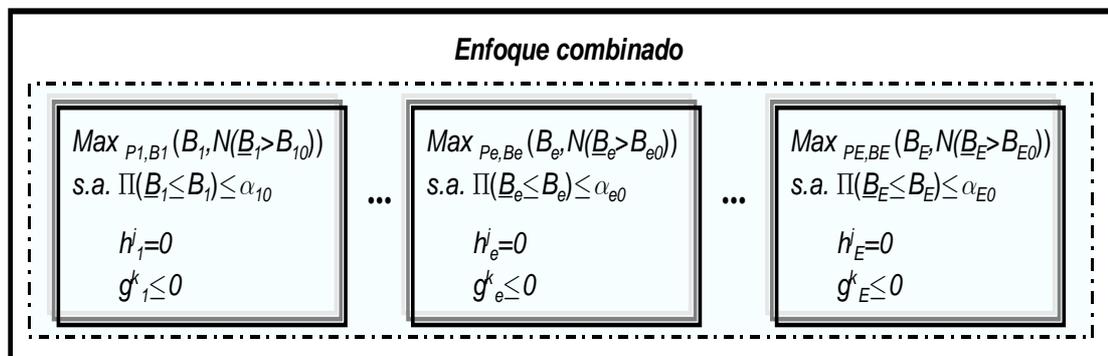


Figura 7. 2: Planteamiento equilibrio enfoque combinado

Otros enfoques combinados podrían plantearse cuando uno o varios agentes fijan varios niveles de riesgo máximo  $\alpha_{e0}$  y/o varios beneficios mínimos  $B_{e0}$ .

Las dos líneas de continuación descritas en este apartado ya han sido exploradas de forma preliminar en [Campos, 2005a], cuando todos los generadores son igualmente aversos al riesgo, suposición algo restrictiva en la práctica. En el caso del enfoque

dual, esta suposición permite obtener un problema de optimización fraccional-cuadrático (la función objetivo es el cociente de funciones cuadráticas) equivalente a las ecuaciones del equilibrio dual. En el caso del enfoque combinado, y cuando el operador de combinación de los objetivos primal y dual es el operador mínimo, se obtiene un problema de optimización cuya función objetivo es el mínimo entre una función cuadrática y una función fraccional-cuadrática. Ambos problemas de optimización pueden ser resueltos mediante un algoritmo iterativo que encuentra en cada iteración una solución que satisface una región cuadrática factible (región definida por restricciones, algunas de las cuales pueden ser cuadráticas), que ha sido linealizada.

- **Análisis de las distribuciones de posibilidad de salida cuando se consideran otras fuentes de incertidumbre**

Esta tesis plantea un equilibrio de mercado a medio plazo que tiene en cuenta la incertidumbre más relevante en el mercado (demanda residual y costes), aunque se ha analizado más en detalle el caso en que las curvas de la demanda residual son posibilistas y lineales, y pasan todas ellas por un mismo precio de casación esperado (lo que es razonable en un entorno de la casación). Estas suposiciones han permitido simplificar, fundamentalmente, el cálculo de las curvas de la demanda residual esperadas por generador, el cálculo de las distribuciones de posibilidad de los precios y de los beneficios, así como han facilitado la comparación de dichas distribuciones.

Una línea de continuación que surge de manera natural del trabajo realizado consiste en **el análisis de las distribuciones de posibilidad obtenidas cuando se consideran otras fuentes de incertidumbre** (costes, disponibilidad de los grupos, etc.) valorando la correlación existente entre ellas<sup>72</sup>. Este mismo análisis podría también realizarse cuando se dispone de un conjunto de escenarios reales de curvas de la demanda residual (en el capítulo quinto se propone un procedimiento que permite encontrar, en este caso, la curva de la demanda residual esperada).

- **Determinación de la distribución de posibilidad de las potencias de generación**

Tradicionalmente, los modelos de mercado a medio plazo obtienen el conjunto de potencias a generar con cada grupo de generación del sistema. Sin embargo, la presencia de errores en la operación de estas decisiones y de incertidumbre en el mercado, puede complicar la ya de por sí difícil tarea de la operación de los parques

---

<sup>72</sup>En el planteamiento de los equilibrios propuestos se ha supuesto que la correlación entre la demanda residual y los costes es desconocida, aunque podría no serlo. En este sentido, en [Ramot, 2001] y [Carlsson, 2004] se describen dos enfoques teóricos para la definición de la correlación entre distribuciones de posibilidad. En [Yang, 2002] se describe una valoración de la correlación existente entre la pendiente de oferta de un agente y su ordenada en el origen.

de generación. Para evitar esto, otra línea de continuación abierta, y que puede proporcionar resultados interesantes en el marco de la teoría de juegos posibilistas, sería el planteamiento, análisis y aplicación al mercado eléctrico de los enfoques primal y dual propuestos en esta tesis cuando se supone que **las decisiones son distribuciones de posibilidad**. En este sentido podría considerarse, por ejemplo, que la potencia de generación de cada grupo del sistema está restringida al conjunto referencial de distribuciones de posibilidad triangulares y simétricas, en donde el ancho de la distribución puede ser un parámetro de entrada o una variable de decisión del modelo. Cuando el ancho de estas distribuciones es nulo, el enfoque a desarrollar debería coincidir con el enfoque propuesto en esta tesis, siendo por tanto su generalización.

En [Oliveira, 2004], por ejemplo, se considera que las decisiones de inyección de potencia son distribuciones de posibilidad en un sistema eléctrico donde se representa la red de transporte y se minimiza la utilidad del sistema. Para la obtención de las distribuciones de inyección de potencia, se han resuelto iterativamente varios problemas de optimización paramétrica (según se describe en [Saraiva, 1994]).

Relacionado con la consideración de decisiones posibilistas, en el anexo de esta tesis se muestra una revisión de los enfoques de resolución de restricciones posibilistas cuando se supone que las decisiones a tomar son distribuciones de posibilidad.

- **Aplicación de las medidas de posibilidad para el modelado de la incertidumbre en la red eléctrica**

Como se mencionó en el capítulo cuarto, el mercado de energía analizado en esta tesis considera un único precio de la electricidad para una única área geográfica cuya red de transporte esté suficientemente mallada, es decir, un área en donde el sistema de transporte no tiene limitaciones técnicas importantes, como típicamente se supone que ocurre en el mercado español cuando el análisis es a medio plazo.

Sin embargo, puede ocurrir que el dominio geográfico considerado en el modelo de mercado tenga una red de transporte poco mallada, o que se modele un mercado internacional de electricidad con baja interconexión (como el que actualmente se está gradualmente implantando entre España y Portugal), en cuyo caso pueden ser necesario considerar precios de la electricidad distintos para cada zona geográfica (distintos precios nodales). En este sentido ya se han publicado trabajos que extienden la versión determinista del modelo posibilista propuesto en esta tesis para el caso de varias áreas. Por ejemplo, en [Barquín, 2003] se supone un mecanismo de casación de la capacidad de transporte inter-área (en concreto se consideran dos países con baja interconexión) basado en la técnica **market splitting**, que asigna la capacidad de transporte, en caso necesario, de acuerdo a las ofertas de energía

enviadas por los generadores de una y otra área. El mecanismo considera que el área con menor precio de la electricidad vende energía al área de mayor precio hasta que se produzca la saturación de la interconexión entre ambas áreas (lo que suele ocurrir cuanto la capacidad de interconexión es pequeña), o se consoliden los mismos precios.

En este sentido, sería interesante **considerar en el modelo de mercado analizado en esta tesis varios precios nodales por área**, así como la red de transporte, ya sea inter-área o intra-área (en este último caso, cuando el área tiene un sistema de transporte poco mallado). Además, se puede plantear la **utilización de distribuciones de posibilidad para modelar la incertidumbre en la red de transporte** considerada. Por ejemplo, en la situación en que la incertidumbre se suponga en la red de transmisión intra-área, puede considerarse que los parámetros relacionados con la curva de la demanda de cada nodo de la red son distribuciones de posibilidad (ver [Oliveira, 2004] para una metodología enfocada al sistema portugués).

- **Utilización de variables enteras en el equilibrio de mercado bajo incertidumbre**

Una de las líneas de continuación, que también ha sido sugerida en [Reneses, 2004], es la **consideración de variables enteras en el modelo de mercado**, para tener en cuenta, entre otros, los acoplamientos de los grupos de generación, y sus arranques y sus paradas.

La consideración de variables enteras en el modelado complica significativamente la resolución del equilibrio (en caso de existir) dado que las funciones de beneficio de cada generador dejan de ser convexas (en el capítulo 4 de [García-González, 2001] se puede ver una curva de ingreso no convexa resultante de considerar curvas reales de demandas residuales, que son funciones escalón, cuyo modelado requiere utilizar variables binarias), con lo que se dificulta de manera relevante la obtención y resolución de las ecuaciones de los equilibrios primal y dual.

A pesar de este inconveniente, podría evaluarse la posibilidad de encontrar una metodología de resolución basada en la optimización de problemas de programación (entera, continua, mixta, etc.), que resultase equivalente a la maximización, en el sentido de Nash, de los beneficios de los generadores.

En el caso de haber probado esta equivalencia (algo que a priori no parece fácil), se tendrían entonces que analizar las ventajas e inconvenientes de utilizar las diferentes técnicas de optimización de problemas de programación (por ejemplo, para la programación entera, el algoritmo de ramas y cotas, la relajación lagrangiana, o cualquier otra) en la resolución de los problemas enteros a resolver. En este sentido,

en [Cerisola, 2004] se muestra un enfoque de aceleración de la convergencia de la relajación lagrangiana en la aplicación al problema de la coordinación hidrotérmica en un sistema eléctrico.

- **Integración de otros criterios como los medioambientales**

Otra línea de continuación es la **búsqueda de soluciones de compromiso que involucren, no sólo criterios económicos** (como en el caso de los enfoques combinados), sino otro tipo de criterios más responsables, como por ejemplo los **medioambientales**, cada vez más tenidos en consideración por reguladores y productores, aunque éstos últimos, por el momento, solamente en sus previsiones de más largo plazo.

Suponiendo que los parámetros que influyen en estos nuevos criterios se consideran inciertos, como por ejemplo los relacionados con la regulación de los recursos no renovables, deben adaptarse los enfoques propuestos o proponerse enfoques alternativos, al caso en que cada agente del mercado tiene en consideración varios objetivos. En el caso de modelar la incertidumbre mediante distribuciones de posibilidad, los objetivos son posibilistas, y cuando se modela un equilibrio de Nash, es necesario aplicar las técnicas que proporciona **la teoría de juegos posibilistas multiatributos**, descrita ampliamente en [Nishizaki, 2001].

## 7.4 Referencias

- [Barquín, 2004] J. Barquín, E. Centeno, and J. R. Guillén, "Medium-term generation programming in competitive environments: A new optimization approach for market equilibrium computing". *IEE Proceedings on Generation Transmission and Distribution*, vol. 151, No. 1, pp. 119-126, 2004.
- [Barquín, 2003] J. Barquín and M. Vázquez, "Cournot Equilibrium Computation on Electricity Networks," presented at 2nd International Conference on Liberalization and Modernization of Power Systems: Congestion Managements Problems, Irkutsk, Rusia, 2003.
- [Campos, 2004] F. A. Campos and J. Villar, "Medium-Term Electricity Generation with Fuzzy Availability," presented at Second international conference on Soft Methods in Probability and Statistics (SMPS), Oviedo (Asturias), 2004.
- [Campos, 2005a] F. A. Campos, J. Villar, and J. Barquín, "Application of Possibility Theory to Robust Cournot Equilibrium in Electricity Market". *Probability In The Engineering And Informational Sciences*, vol. 19, pp. 519-531, 2005a.
- [Campos, 2005b] F. A. Campos, J. Villar, and M. Jiménez, "Robust Solutions using Fuzzy Chance Constraints". *Accepted in Engineering Optimization*, 2005b.
- [Carlsson, 2004] C. H. Carlsson and R. Fuller, "Expected Value, Variance, Covariance, and Correlation of Possibility Distributions," presented at EMCSR 2004 Cybernetic and Systems, Viena, April 13-16, 2004.
- [Cerisola, 2004] S. Cerisola, "Benders Decomposition for Mixed Integer Problems," in *Instituto de Investigación Tecnológica*. Madrid: Universidad Pontificia Comillas, 2004.
- [Dubois, 1980] D. Dubois and H. Prade, *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications*. New York: Academic Press, 1980.
- [García-González, 2001] J. García-González, "Optimización de la Explotación en el Corto plazo y Elaboración de Ofertas en un Sistema Eléctrico Liberalizado. Naturaleza del Problema y Métodos de Solución," in *Electrotecnia y Sistemas*: Pontificia de Comillas de Madrid, 2001.
- [Nishizaki, 2001] I. Nishizaki and M. Sakawa, *Fuzzy and Multiobjective Games for Conflict Resolution*, vol. 64. Studies in Fuzziness and Soft Computing: Physica Verlag, 2001.
- [Oliveira, 2004] P. M. Oliveira and M. T. Ponce de Leao, "Impact of Uncertainty and Elastic Response of Demand in Short Term Marginal Prices," presented at 8th International Conference on Probabilistic Methods Applied to Power Systems (PMAPS), Ames. Iowa. USA, 2004.

- [Ramot, 2001] D. Ramot, R. Milo, M. Friedman, and A. Kandel, "On Fuzzy Correlations". *IEEE Trans On systems, Man and Cybernetics (Part B)*, vol. 31 (3), pp. 381-390, 2001.
- [Reneses, 2004] J. Reneses, "Análisis de la Operación de los Mercados de Generación de Energía Eléctrica a Medio Plazo," in *Organización Industrial*. Madrid: Pontificia Comillas, 2004.
- [Saraiva, 1994] J. T. Saraiva, V. Miranda, and L. M. V. G. Pinto, "Impact on some Planning Decisions from a Fuzzy Modelling of Power Systems". *IEEE TPWS*, vol. 9, No. 2., pp. 819-825, 1994.
- [Solodov, 2001] M. V. Solodov, "A Class of Globally Convergent Algorithms for Pseudomonotone Variational Inequalities," in *Complementarity: Applications, Algorithms and Extensions*, O. L. M. a. J.-S. P. M. C. Ferris, Ed.: Kluwer Academic Publishers, 2001.
- [Yang, 2002] L. Yang, F. Wen, F. F. Wu, Y. Ni, and Q. Jiaju, "Development of Bidding Strategies in Electricity Markets and Possible Remedies," presented at IEEE-PES/CSEE International Conference on Power Systems, Kunming, China, 2002.



## **Anexo. Revisión bibliográfica de las técnicas de resolución de restricciones posibilistas**

En muchos de los problemas de toma de decisiones existen restricciones sobre las decisiones a tomar. En gran parte de estos problemas la formulación de estas restricciones es vaga o está sujeta a incertidumbre, ya sea debida a la presencia de información subjetiva, a la carencia de información fiable o a la presencia de parámetros desconocidos. Bajo estas circunstancias, ¿cuáles son los criterios que permiten determinar la viabilidad de las decisiones a tomar?. En este anexo, se muestra una revisión bibliográfica de los criterios de caracterización de decisiones factibles en problemas de decisión con una o varias restricciones inciertas sobre las decisiones, y cuando la incertidumbre se modela usando la teoría de la posibilidad.



## **Anexo.1 Organización del anexo**

Este anexo es una revisión de los trabajos que plantean y proponen soluciones a las denominadas **restricciones (o ecuaciones) posibilistas**, que son restricciones con incertidumbre sobre las decisiones de un problema de decisión, y cuando la incertidumbre se modela mediante la teoría de la posibilidad.

Este anexo se organiza en los siguientes seis puntos principales.

En primer lugar, se introducen los conceptos básicos, los principales tipos y la formulación general de los sistemas de ecuaciones posibilistas. Además se define la notación que se utiliza a lo largo de este anexo.

En los cuatro siguientes puntos se describen los diferentes enfoques adoptados en la literatura para la resolución de los **sistemas de ecuaciones posibilistas** (conjunto de ecuaciones posibilistas), comenzando por aquellos que abordan formulaciones más sencillas, como por ejemplo, cuando las decisiones de los sistemas son variables deterministas, hasta los más complejos, donde dichas decisiones son variables posibilistas (es decir, cuando cada variable es una distribución de posibilidad). Para cada uno de ellos se describen sus características particulares según se suponga linealidad o no en las restricciones del sistema.

Finalmente, con el objetivo de mostrar una visión general de las características de los enfoques de resolución, se muestra una tabla clasificatoria de los mismos, atendiendo a los distintos tipos de sistemas posibilistas que resuelven, y a la metodología de resolución concreta que utilizan.

El objetivo concreto de este anexo en relación con los propósitos de esta tesis es el siguiente:

- Dar una visión general de las distintas metodologías para la determinación de una explotación factible de los recursos de generación de los agentes en un mercado de electricidad, cuando existe información lingüística acerca del modelado de las restricciones de explotación o cuando alguno de los parámetros de estas restricciones, como por ejemplo el parámetro de disponibilidad de los recursos, es una distribución de posibilidad.

Como se ha comentado en el capítulo quinto, no ha sido objeto de esta tesis la búsqueda de una metodología de resolución concreta que resulte adecuada al caso de restricciones de explotación en un mercado de generación. Sin embargo, fruto del trabajo realizado en esta tesis, en [Campos, 2004] se presenta una aplicación de algunos de los enfoques de resolución de restricciones posibilistas que a

continuación se describen, al caso en que el parámetro que modela la disponibilidad de los grupos de generación térmica es una distribución de posibilidad *LR*.

## Anexo.2 Las restricciones posibilistas en un problema de decisión

Los principales elementos que forman parte de una restricción sobre las diferentes alternativas en un problema de toma de decisiones son:

- (1) El conjunto de alternativas.
- (2) El tipo de relación de la restricción, ya sea de igualdad o desigualdad.
- (3) El conjunto de coeficientes (parámetros) de las restricciones.

En el enfoque convencional, estos elementos son conocidos con exactitud y tratados empleando las herramientas tradicionales proporcionadas por el álgebra, la geometría y los campos relacionados. Sin embargo, una de las dificultades cuando se modela un problema real es el hecho de que las restricciones pueden no ser conocidas con precisión. Así, por ejemplo, una restricción puede ser especificada a través de información lingüística: “queremos que la potencia total de una central eléctrica esté, aproximadamente, entre los niveles de potencias  $p_1$  y  $p_2$ ”, introduciendo implícitamente la actitud que tienen los decisores frente al sistema a modelar. En estas situaciones en las que los factores humanos cobran una especial relevancia, es donde el uso de la teoría de la posibilidad como herramienta de modelado de la incertidumbre comienza a cobrar interés entre los investigadores operativos.

Han sido muchos los trabajos elaborados desde que Bellman y Zadeh (ver [Bellman, 1970]) introdujeran formalmente el concepto de restricción posibilista, como parte integrante de las restricciones de un problema de optimización. Una clasificación de este tipo de restricciones que puede realizarse fruto de los trabajos revisados es la siguiente:

- **Restricciones con vaguedad o restricciones flexibles.** Estas restricciones suelen resultar de la presencia de información lingüística (vaga) relativa a las relaciones de igualdad o de desigualdad convencionales, y responden al hecho de que las restricciones pueden ser satisfechas de manera aproximada. En este tipo de restricciones solamente se consideran posibilistas las relaciones de igualdad y desigualdad.
- **Restricciones con ambigüedad o con parámetros posibilistas.** En estas restricciones los coeficientes son parámetros posibilistas, ya sea por la carencia de datos históricos para su estimación, por la validez de los datos, por su estimación subjetiva, o por cualquier otro motivo.
- **Restricciones con vaguedad y ambigüedad,** que engloban los dos anteriores tipos.

- **Restricciones con decisiones posibilistas.** Son las restricciones posibilistas más completas en cuanto a la incertidumbre que consideran, dado que pueden contener a la vez vaguedad y ambigüedad, y más complejas en cuanto a su resolución. Consideran **decisiones posibilistas**, es decir, decisiones que pueden pertenecer a una colección de subconjuntos de distribuciones de posibilidad, como por ejemplo, la colección de las distribuciones de posibilidad *LR*. La consideración de decisiones posibilistas responde al hecho de que en ocasiones puede resultar compleja la puesta en práctica de las decisiones convencionales (o decisiones deterministas). Por ejemplo, puede no resultar fácil para un agente de un mercado de electricidad poner en operación sus ofertas casadas en el mercado, dado que los controladores de potencia de sus grupos de generación pueden no ser totalmente precisos. Por tanto, las decisiones posibilistas generalizan el concepto tradicional de decisión convencional, donde la alternativa a tomar siempre ha de tomarse o no tomarse, no permitiendo grados parciales en los que las decisiones puedan ser también válidas.

En todos los tipos de restricciones posibilistas consideradas, las decisiones obtenidas se denominan comúnmente decisiones **cuasi-factibles** o **factibles graduadas**, racionalmente aceptadas por el decisor debido, posiblemente, a otro gran número de factores que no han podido ser recogidos en el modelo.

Como se comentará en este anexo, la aplicación directa del principio de extensión para resolver cualquier tipo de restricción posibilista suele derivar en tiempos de ejecución significativamente grandes. Por ello, para la resolución de las restricciones posibilistas, suele requerirse de un enfoque sencillo de comparación de los lados derechos e izquierdos de las restricciones. Este capítulo presenta precisamente una revisión bibliográfica de los distintos enfoques de comparación de los lados de las restricciones.

Para concretar la formulación matemática utilizada en el capítulo, en lo que sigue se ha considerado la siguiente notación:

- El superíndice  $T$  es el transpuesto de una matriz o de un vector.
- $X = X_1 \times \dots \times X_n$  es la colección de alternativas deterministas del problema.
- $x^T = (x_1, \dots, x_n)$  el vector de decisiones deterministas.
- $\underline{X} = \underline{X}_1 \times \dots \times \underline{X}_n$  es la colección de alternativas posibilistas del problema.
- $\underline{x}^T = (\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n)$  el vector de decisiones posibilistas.
- $g_i$  son las restricciones para  $i=1, \dots, m$ .
- Las relaciones borrosas “ $\leq$ ”, “ $\geq$ ” y “ $=$ ” son respectivamente las versiones borrosificadas de las restricciones convencionales  $\leq$ ,  $\geq$ , y  $=$ , y tienen la interpretación lingüística “menor que aproximadamente”, “mayor que aproximadamente”, y “aproximadamente igual a” respectivamente.

- La matriz de parámetros posibilistas que configuran las restricciones  $g_i$  se denota por  $\underline{A}=(A_{ij})$ , y su vector de filas por  $\underline{a}^T_i=(a_{i1},\dots,a_{in})$ , para  $i=1,\dots,m, j=1,\dots,n$ .
- El lado derecho de las restricciones (**vector de requerimientos posibilistas**) se denota por  $\underline{b}^T=(b_1,\dots,b_m)$ .

Además, en general:

- La distribución de posibilidad de un vector  $k$ -dimensional  $\underline{u}^T=(u_1,\dots,u_k)$  de parámetros posibilistas  $\underline{u}_h$  se denota por  $\mu_{\underline{u}}(u)=(\mu_{u_1}(u_1),\dots, \mu_{u_k}(u_k))^T$ .
- Un vector  $k$ -dimensional  $\underline{u}^T=(u_1,\dots,u_k)$  de parámetros posibilistas LR  $\underline{u}_h=(u^L_h, u^R_h, \alpha u^L_h, \alpha u^R_h)_{LR}$ <sup>73</sup> se denota por  $\underline{u}=(u^L, u^R, \alpha u^L, \alpha u^R)_{LR}$ , siendo  $u^L=(u^L_1,\dots,u^L_k)^T$ ,  $u^R=(u^R_1,\dots,u^R_k)^T$ ,  $\alpha u^L=(\alpha u^L_1,\dots,\alpha u^L_k)^T$  y  $\alpha u^R=(\alpha u^R_1,\dots,\alpha u^R_k)^T$ .
- El caso típico en el que las restricciones son funciones lineales, sus coeficientes son parámetros posibilistas LR, y las decisiones son positivas (es decir,  $X$  coincide con  $\mathfrak{R}^+$ ), se denomina, abreviadamente, como **caso lineal LR** (el modelo posibilista del mercado analizado en esta tesis asume estas mismas simplificaciones).

Con esta notación, la formulación general de un sistema de ecuaciones posibilistas resulta ser la siguiente:

$$g_i(x; a_i) (" \leq ", " \geq ", " = ") b_i \quad i=1,\dots,m \quad (\text{Anexo. 1})$$

$$x \in X$$

Dado que cualquier restricción de tipo  $\leq$  puede ser formulada como restricción  $\geq$  y al contrario (sin más que multiplicar por  $-1$ ), sin pérdida de generalidad en esta revisión se han considerado formulaciones muy similares a las planteadas en los trabajos revisados.

Una revisión bibliográfica de las restricciones posibilistas menos actualizada que la que este capítulo muestra, pero que incluye en detalle las distintas metodologías de resolución de objetivos posibilistas en un problema de optimización, puede verse en [Slowinski, 1986]. En [Lai, 1992], [Delgado, 1994] y [Lai, 1994] también se muestra una supervisión de las mismas.

<sup>73</sup>Por respeto a la notación original de la mayor parte de los trabajos revisados, en este capítulo se ha considerado la parametrización  $(u^L, u^R, \alpha u^L, \alpha u^R)_{LR}$  en lugar de la parametrización  $\{u^1, u^2, u^3, u^4\}_{LR}$  de las distribuciones de posibilidad LR (ver capítulo segundo).

### Anexo.3 Restricciones con vaguedad: restricciones flexibles

Un sistema de ecuaciones con restricciones flexibles se formula como sigue:

$$\begin{aligned} g_i(x; a_i) & \text{"}\leq\text{"}, \text{"}\geq\text{"}, \text{"}=\text{"} b_i \quad i=1, \dots, m \\ x & \in X \end{aligned} \quad (\text{Anexo. 2})$$

Por lo tanto, un sistema flexible es un sistema en el que las decisiones y los coeficientes de las restricciones son deterministas, pero en donde las relaciones de las restricciones son borrosas.

#### Anexo.3.1 El enfoque general de resolución

Uno de los primeros trabajos que desarrolla una teoría general de toma de decisiones cuando las restricciones se especifican mediante declaraciones lingüísticas (subjetivas) es el que se muestra en [Bellman, 1970]. La característica más importante es que considera cada restricción  $R_i$  ( $i=1, \dots, m$ ) como un conjunto borroso  $\underline{R}_i$  sobre el conjunto de los números reales. Así, por ejemplo, la restricción  $R_i$  especificada como " $r_i = g_i(x)$  debe ser aproximadamente  $b_i$ " se modela por un conjunto borroso cuya función de pertenencia puede ser:

$$\mu_{\underline{R}_i}(r_i) = \left(1 + (r_i - b_i)^2\right)^{-1} \quad i=1, \dots, m \quad (\text{Anexo. 3})$$

Esta función de pertenencia puede interpretarse como una penalización subjetiva (definida por el decisor) de los valores  $r_i$  que estén suficientemente alejados de  $b_i$ , para  $i=1, \dots, m$ .

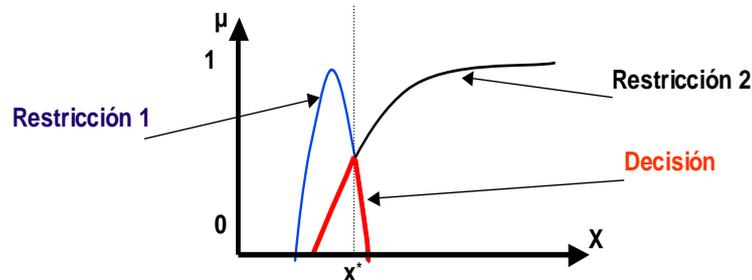
El conjunto borroso  $\underline{D}$  de decisiones  $D$  factibles resulta de la intersección de los  $m$  conjuntos borrosos anteriores evaluados en  $r_i = g_i(x)$  ( $i=1, \dots, m$ ), y tiene por función de pertenencia:

$$\mu_{\underline{D}}(x) = T(\mu_{\underline{R}_1}(g_1(x)), \dots, \mu_{\underline{R}_m}(g_m(x))) \quad x \in X \quad (\text{Anexo. 4})$$

siendo  $T$  cualquier  $T$ -norma.

La definición del conjunto borroso  $\underline{D}$  como la intersección de las restricciones mediante la  $T$ -norma, refleja la percepción del cumplimiento simultáneo, y corresponde con una agregación lógica conjuntiva. La  $T$ -norma puede ser el mínimo de las funciones de pertenencia (ver Figura Anexo. 1), el producto, o cualquier otra tipo de  $T$ -norma, como la de Lukasiewicz. La elección de un tipo de  $T$ -norma

depende del propio decisor (ver [Zimmermann, 1976]) o del grado de especificidad exigido en el resultado (ver [Klir, 1995]).



Figura

Figura Anexo. 1: Solución restricciones flexibles con la T-norma mínimo

Una vez decidida la T-norma a usar, puede resultar conveniente determinar aquella decisión  $x^*$  que hace máximo el grado de pertenencia al conjunto borroso  $\underline{D}$  de decisiones (ver Figura Anexo. 1). Esta decisión puede obtenerse mediante el siguiente problema de optimización determinista:

$$\begin{aligned} & \underset{x \in X}{\text{Max}} \lambda && \text{(Anexo. 5)} \\ \text{s.a. } & \lambda = T(\mu_{R_1}(g_1(x)), \dots, \mu_{R_m}(g_m(x))) \\ & \lambda \in [0,1] \end{aligned}$$

El valor óptimo de  $\lambda$  coincide con el grado máximo de cumplimiento de las restricciones posibilistas.

### Anexo.3.2 El enfoque de Zimmermann

Zimmermann (ver [Zimmermann, 1976] y [Zimmermann, 1978]) supone linealidad en las restricciones posibilistas, por lo que el sistema que estudia es:

$$\begin{aligned} & a_i^T \cdot x \leq b_i \quad i = 1, \dots, m \\ & x \in X \end{aligned} \quad \text{(Anexo. 6)}$$

Bajo estas hipótesis, el enfoque de Zimmermann resuelve el sistema anterior cuando las funciones de pertenencia de las restricciones son lineales, y definidas como sigue:

$$\mu_{B_i}(r_i) = \begin{cases} 1, & r_i \leq b_i \\ 1 - \frac{r_i - b_i}{d_i}, & b_i < r_i \leq b_i + d_i \\ 0, & r_i \geq b_i + d_i \end{cases} \quad (Anexo. 7) \quad i = 1, \dots, m$$

El decisor es el encargado de prefijar los rangos  $(b_i, b_i + d_i]$  que especifican el conjunto de valores de factibilidad admisibles en un cierto grado para las decisiones del problema.

Es inmediato probar que el problema formulado en (Anexo. 5) con las suposiciones de linealidad y cuando se usa la  $T$ -norma mínimo es equivalente al siguiente problema de optimización lineal:

$$\begin{aligned} & \underset{x \in X}{Max} \lambda && (Anexo. 8) \\ & s.a. \quad \lambda \leq 1 - \frac{a_i^T \cdot x - b_i}{d_i} && i = 1, \dots, m \\ & \quad \lambda \in [0, 1] \end{aligned}$$

## Anexo.4 Restricciones con ambigüedad

Un sistema con restricciones con ambigüedad está formado por un conjunto de ecuaciones cuyos coeficientes son números posibilistas, cuyas variables de decisión son deterministas, y cuyas relaciones de desigualdad o igualdad son crisp. La formulación general de estos sistemas es la siguiente:

$$\begin{aligned} g_i(x; \underline{a}_i) (\leq, \geq, =) \underline{b}_i \quad i=1, \dots, m \\ x \in X \end{aligned} \quad (\text{Anexo. 9})$$

### Anexo.4.1 El enfoque general de resolución

El enfoque general de resolución de un sistema de restricciones con ambigüedad trata de determinar la distribución de posibilidad  $\mu_D(x)$  de cada decisión factible  $x \in X$  de acuerdo al principio de extensión, que conduce a resolver el siguiente modelo de optimización:

$$\mu_D(x) = \sup_{g_i(x; \underline{a}_i) (\leq, \geq, =) \underline{b}_i \quad i=1, \dots, m} T(\mu_{\underline{a}_1}(a_1), \dots, \mu_{\underline{a}_m}(a_m), \mu_{\underline{b}_1}(b_1), \dots, \mu_{\underline{b}_m}(b_m)) \quad (\text{Anexo. 10})$$

Sin embargo, para problemas de gran tamaño este enfoque requiere la resolución del sistema para todos los posibles valores de los parámetros de las restricciones, algo que en la práctica es inviable computacionalmente.

### Anexo.4.2 El enfoque de Buckley

Buckley (ver [Buckley, 1989]) estudia los sistemas de ecuaciones con ambigüedad formulados de manera estándar, que tienen las siguientes características:

- Todas las restricciones son de desigualdad con lado derecho  $\underline{b}_i$  positivo (es decir, su soporte está contenido en los números reales positivos,  $]\underline{b}_i[ \subseteq \mathcal{R}^+$ ).
- Los números posibilistas en  $\underline{a}$  y  $\underline{b}$  son trapezoidales, y todos ellos son positivos, negativos o aproximadamente cero (en este último caso los núcleos de los números contienen al cero).
- Cada alternativa  $x$  es positiva ( $X = \mathcal{R}^+$ ):

Así, la formulación estándar del un sistema de ecuaciones con ambigüedad es:

$$\begin{aligned} \underline{a}_i^T \cdot x (\leq, \geq) \underline{b}_i \quad i=1, \dots, m \\ x \in X \end{aligned} \quad (\text{Anexo. 11})$$

De acuerdo al principio de extensión, en este trabajo se construye la distribución de posibilidad  $\mu_{R_i}(x)$  de que una decisión  $x \in X$  satisfaga la  $i$ -ésima restricción, resultando ser:

$$\mu_{R_i}(x) = \text{Sup}_{a_i' : x(\leq, \geq) b_i} T(\mu_{a_i}(a_i), \mu_{b_i}(b_i)) \quad i=1, \dots, m \quad (\text{Anexo. 12})$$

Buckley define entonces la posibilidad  $\mu_{\underline{D}}(x)$  de que  $x \in X$  satisfaga todas las restricciones, es decir, de que sea una solución factible, tal y como sigue:

$$\mu_{\underline{D}}(x) = T(\mu_{R_1}(x), \dots, \mu_{R_m}(x)) \quad x \geq 0 \quad (\text{Anexo. 13})$$

También prueba que esta definición coincide con la que proporciona el enfoque general de resolución para la mayoría de los valores de  $x \in X$ , y muestra que la solución que hace  $\mu_{\underline{D}}(x) = \alpha$  se obtiene resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones convencional:

$$x^T \cdot d_i^\alpha (\leq, \geq) e_i^\alpha \quad i=1, \dots, m \quad (\text{Anexo. 14})$$

siendo los vectores  $d_i^\alpha$  y  $e_i^\alpha$  tales que  $d_{ij}^\alpha = a_{ijL}^\alpha$  y  $e_i^\alpha = b_{iU}^\alpha$ , cuando la  $i$ -ésima restricción es del tipo  $\leq$ , y  $d_{ij}^\alpha = a_{ijU}^\alpha$ ,  $e_i^\alpha = b_{iL}^\alpha$ , cuando es del tipo  $\geq$ , en donde  $[a_{ijL}^\alpha, a_{ijU}^\alpha]$  y  $[b_{iL}^\alpha, b_{iU}^\alpha]$  son los  $\alpha$ -cortes de los números posibilistas  $\underline{a}_{ij}$  y  $\underline{b}_i$  respectivamente.

### Anexo.4.3 El enfoque de Slowinski

Slowinski (ver [Slowinski, 1986]), al igual que Buckley, se centra en los sistemas formulados de manera estándar, y considera dos índices para el cumplimiento de las restricciones posibilistas.

El primero de los índices coincide con el índice de Buckley  $\mu_{R_i}(x)$  que cuantifica la posibilidad de que una decisión  $x \in X$  satisfaga la  $i$ -ésima restricción. Para encontrar una **solución  $h$ -factible** (factible en grado  $h$ ) impone que  $\mu_{R_i}(x)$  sea mayor o igual que un grado de posibilidad  $h \in [0, 1]$ , lo que en el caso lineal  $LR$  con restricciones de desigualdad del tipo  $\geq$ , resulta equivalente a resolver las siguientes restricciones deterministas:

$$\mu_{R_i}(x) \geq h \Leftrightarrow x^T \cdot a_i^R + x^T \cdot \alpha a_i^R \cdot R^{-1}(h) \geq b_i^L - \alpha b_i^L \cdot L^{-1}(h) \quad h \in [0, 1] \quad (\text{Anexo. 15})$$

Sin embargo, este índice de factibilidad resulta ser sumamente optimista, dado que para su definición se recurre al principio de extensión que considera siempre el

escenario más favorable de entre los que tienen posibilidad mayor o igual que  $h \in [0,1]$ . Por ello, Slowinski define un segundo índice de factibilidad  $\delta_{R_i}(x)$  más restrictivo que el anterior, que conduce a resolver, junto a las anteriores restricciones deterministas, las siguientes:

$$\delta_{R_i}(x) \geq v \Leftrightarrow x^T \cdot a_i^R + x^T \cdot \alpha \alpha_i^R \cdot R^{-1}(v) \geq b_i^R + \alpha b_i^R \cdot R^{-1}(v) \quad v \in [0,1] \quad (\text{Anexo. 16})$$

Como se puede apreciar, cuando  $v=h \in [0,1]$ , la ecuación anterior es más fuerte que la mostrada en (Anexo. 15) por lo que efectivamente  $\delta_{R_i}(x)$  es más restrictivo que  $\mu_{R_i}(x)$ .

#### Anexo.4.4 El operador “máximo posibilista”

De cara a resolver un sistema de ecuaciones de desigualdad con ambigüedad, en [Dubois, 1980], [Tanaka, 1984b] y [Ramik, 1985] se sugiere utilizar el operador máximo entre dos números posibilistas (**máximo posibilista**). Estos autores consideraron que para que un número posibilista sea mayor o igual que otro, el máximo entre ellos debe coincidir con el primero de los números. Conocida entonces la distribución de posibilidad del lado izquierdo y derecho de las restricciones de desigualdad del sistema (por ejemplo restricciones del tipo  $\geq$ ) se considera cierta la siguiente equivalencia:

$$g_i(x; a_i) \geq \underline{b}_i \Leftrightarrow \text{Max}(g_i(x; a_i), \underline{b}_i) = g_i(x; \underline{a}_i) \quad x \geq 0 \quad (\text{Anexo. 17})$$

Se puede comprobar entonces que, de acuerdo al principio de extensión, la anterior equivalencia se cumple si las restricciones de desigualdad la verifican los extremos de los  $h$ -cortes de las distribuciones involucradas para cualquier  $h \in [0,1]$ . En concreto, en el caso lineal  $LR$ , cuando se cumplan las siguientes restricciones deterministas:

$$\left. \begin{array}{l} x^T \cdot a_i^R + x^T \cdot \alpha \alpha_i^R \cdot R^{-1}(h) \geq b_i^R + \alpha b_i^R \cdot R^{-1}(h) \\ x^T \cdot a_i^L - x^T \cdot \alpha \alpha_i^L \cdot L^{-1}(h) \geq b_i^L - \alpha b_i^L \cdot L^{-1}(h) \end{array} \right\} \quad \forall h \in [0,1], x \geq 0 \quad (\text{Anexo. 18})$$

Si los soportes de los números posibilistas  $LR$  son acotados<sup>74</sup>, entonces el conjunto infinito de restricciones (dos para cada  $h \in [0,1]$ ) se reduce a las siguientes cuatro restricciones lineales deterministas, que resultan de considerar los valores extremos de  $h$ , esto es  $h \in \{0,1\}$ :

<sup>74</sup>A lo largo de la tesis se ha supuesto que los soportes de los números  $LR$  considerados son acotados, aunque pudieran no serlo.

$$\left\{ \begin{array}{l} x^T \cdot a_i^R \geq b_i^R; a_i^L \cdot x \geq b_i^L \\ x^T \cdot a_i^R + x^T \cdot \alpha a_i^R \geq b_i^R + \alpha b_i^R \\ x^T \cdot a_i^L - x^T \cdot \alpha a_i^L \geq b_i^L - \alpha b_i^L \end{array} \right\} x \geq 0 \quad (\text{Anexo. 19})$$

Dado que en algunos problemas prácticos estas nuevas restricciones suelen ser condiciones fuertes para la factibilidad de las soluciones, en [Tanaka, 1984b] se relajan exigiendo factibilidad solamente para cualquier valor de  $h$  en el intervalo  $[k, 1]$ , fijado un valor de  $k$  en  $[0, 1]$ .

Análogamente a como ocurría cuando  $h \in [0, 1]$ , si los números posibilistas tienen soporte acotado, el conjunto infinito de restricciones (dos para cada  $h \in [k, 1]$ ) se reduce a las siguientes cuatro restricciones resultantes de considerar  $h \in \{k, 1\}$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} x^T \cdot a_i^R \geq b_i^R; x^T \cdot a_i^L \geq b_i^L \\ x^T \cdot a_i^R + x^T \cdot \alpha a_i^R \cdot R^{-1}(k) \geq b_i^R + \alpha b_i^R \cdot R^{-1}(k) \\ x^T \cdot a_i^L - x^T \cdot \alpha a_i^L \cdot L^{-1}(k) \geq b_i^L - \alpha b_i^L \cdot L^{-1}(k) \end{array} \right\} x \geq 0 \quad (\text{Anexo. 20})$$

Por otro lado, el uso del operador máximo posibilista al caso de restricciones posibilistas de igualdad exige que las distribuciones del lado derecho e izquierdo coincidan punto a punto, lo que es una condición extremadamente fuerte, entre otros motivos porque las distribuciones de posibilidad usualmente se obtienen de forma aproximada (ver [Dubois, 1987]).

#### Anexo.4.5 El enfoque de Dubois

Suponiendo conocidas las distribuciones de posibilidad de los lados derecho e izquierdo de las restricciones, Dubois (ver [Dubois, 1987]) propone una técnica de resolución de restricciones con ambigüedad basada en las medidas de necesidad y posibilidad definidas en la teoría de la posibilidad.

Para el caso de restricciones de igualdad  $\underline{R}_i$  calcula la posibilidad  $\mu_{\underline{R}_i}(x)$  de que una decisión  $x \in X$  cumpla la restricción de igualdad  $\underline{R}_i$ . Dubois denomina a esta distribución **índice de factibilidad débil**, que demuestra que coincide con:

$$\mu_{\underline{R}_i}(x) = \Pi_{g_i(x; a_i)}(b_i) = \Pi_{b_i}(g_i(x; a_i)) = \sup_r T(\mu_{g_i(x; a_i)}(r), \mu_{b_i}(r)) \quad x \in X, i = 1, \dots, m \quad (\text{Anexo. 21})$$

Para este mismo tipo de restricciones de igualdad, Dubois calcula también la necesidad  $\nu_{\underline{R}_i \subseteq}(x)$  de que el lado izquierdo de la restricción esté contenido en el derecho, y la distribución de necesidad  $\nu_{\underline{R}_i \supseteq}(x)$  de justamente lo contrario. A estas

distribuciones las denomina **índices de factibilidad fuerte**, y para su definición utiliza la medida dual de necesidad  $N(F)=1-\Pi(F^c)$  con una  $T$ -conorma  $C$ :

$$\left. \begin{cases} v_{R_i \subseteq}(x) = N_{g_i(x; a_i)}(b_i) = \text{Inf}_r C(1 - \mu_{g_i(x; a_i)}(r), \mu_{b_i}(r)) \\ v_{R_i \supseteq}(x) = N_{b_i}(g_i(x; a_i)) = \text{Inf}_r C(\mu_{g_i(x; a_i)}(r), 1 - \mu_{b_i}(r)) \end{cases} \right\} x \in X, i = 1, \dots, m \quad (\text{Anexo. 22})$$

En el caso lineal  $LR$ , Dubois demuestra que para que los índices anteriores sean mayores o iguales que cierto  $h \in [0, 1]$ , las soluciones  $h$ -factibles deben satisfacer las siguientes restricciones lineales deterministas:

$$\left. \begin{cases} \mu_{R_i =}(x) \geq h \Leftrightarrow \begin{cases} x^T \cdot a_i^L - x^T \cdot \alpha_i^L \cdot L^{-1}(h) \leq b_i^R + \alpha b_i^R \cdot R^{-1}(h) \\ b_i^L - \alpha b_i^L \cdot L^{-1}(h) \leq x^T \cdot a_i^R + x^T \cdot \alpha_i^R \cdot R^{-1}(h) \end{cases} \\ v_{R_i \subseteq}(x) \geq h \Leftrightarrow \begin{cases} x^T \cdot a_i^R + x^T \cdot \alpha_i^R \cdot R^{-1}(1-h) \leq b_i^R + \alpha b_i^R \cdot R^{-1}(h) \\ b_i^L - \alpha b_i^L \cdot L^{-1}(h) \leq x^T \cdot a_i^L - x^T \cdot \alpha_i^L \cdot L^{-1}(1-h) \end{cases} \\ v_{R_i \supseteq}(x) \geq h \Leftrightarrow \begin{cases} x^T \cdot a_i^L - x^T \cdot \alpha_i^L \cdot L^{-1}(h) \leq b_i^L - \alpha b_i^L \cdot L^{-1}(1-h) \\ b_i^R + \alpha b_i^R \cdot R^{-1}(1-h) \leq x^T \cdot a_i^R + x^T \cdot \alpha_i^R \cdot R^{-1}(h) \end{cases} \end{cases} \right\} x \geq 0, i = 1, \dots, m \quad (\text{Anexo. 23})$$

En el caso de restricciones de desigualdad  $R_i$ , por ejemplo para las del tipo  $\geq$ , son cuatro en vez de tres las distribuciones que Dubois define. Por un lado, la distribución de posibilidad  $\mu_{R_i \geq}(x)$  de que una decisión  $x \in X$  cumpla la restricción. Por otro, la distribución de posibilidad  $\mu_{R_i >}(x)$  de que se cumpla la restricción de manera estricta. Y por último, las correspondientes distribuciones de necesidad  $v_{R_i \geq}(x)$  y  $v_{R_i >}(x)$ , siendo entonces:

$$\left. \begin{cases} \mu_{R_i \geq}(x) = \Pi_{g_i(x; a_i)}([b_i, +\infty)) \\ \mu_{R_i >}(x) = \Pi_{g_i(x; a_i)}((b_i, +\infty)) \\ v_{R_i \geq}(x) = N_{g_i(x; a_i)}([b_i, +\infty)) \\ v_{R_i >}(x) = N_{g_i(x; a_i)}((b_i, +\infty)) \end{cases} \right\} x \in X, i = 1, \dots, m \quad (\text{Anexo. 24})$$

Por orden de aparición, Dubois denominó a las distribuciones de posibilidad y necesidad  $\mu_{R_i \geq}$ ,  $\mu_{R_i >}$ ,  $v_{R_i \geq}$  y  $v_{R_i >}$ , **índices de factibilidad muy débil, de factibilidad medio débil, de factibilidad medio fuerte y de factibilidad muy fuerte** respectivamente (de manera análoga se obtendrían las correspondientes para desigualdades del tipo  $\leq$ ).

Dubois probó que las soluciones  $h$ -factibles se obtienen, en este caso, resolviendo las siguientes restricciones lineales deterministas:

$$\left[ \begin{array}{l} \mu_{R_i \geq}(x) \geq h \Leftrightarrow x^T \cdot a_i^R + x^T \cdot \alpha a_i^R \cdot R^{-1}(1-h) \geq b_i^L - \alpha b_i^L \cdot L^{-1}(h) \\ \mu_{R_i >}(x) \geq h \Leftrightarrow x^T \cdot a_i^R + x^T \cdot \alpha a_i^R \cdot R^{-1}(h) \geq b_i^R + \alpha b_i^R \cdot R^{-1}(1-h) \\ \nu_{R_i \geq}(x) \geq h \Leftrightarrow x^T \cdot a_i^L - x^T \cdot \alpha a_i^L \cdot L^{-1}(1-h) \geq b_i^L - \alpha b_i^L \cdot L^{-1}(h) \\ \nu_{R_i >}(x) \geq h \Leftrightarrow x^T \cdot a_i^L - x^T \cdot \alpha a_i^L \cdot L^{-1}(h) \geq b_i^R + \alpha b_i^R \cdot R^{-1}(h) \end{array} \right] \quad x \geq 0, i = 1, \dots, m \quad (\text{A. 1})$$

Por lo tanto, para encontrar una solución  $x \in X$  que haga máxima la certeza de cumplimiento de cada restricción  $R_i$  usando un índice  $\kappa_{c_i}$  de entre los definidos anteriormente  $\{\mu_{R_i=}, \nu_{R_i \leq}, \nu_{R_i \geq}, \mu_{R_i >}, \nu_{R_i >}, \nu_{R_i >}\}$ , debe resolverse el siguiente problema de optimización determinista:

$$\begin{array}{ll} \text{Max}_{x \in X} & h \\ \text{s.a.} & \kappa_{c_i}(x) \geq h \quad i = 1, \dots, m \end{array} \quad (\text{A. 2})$$

En el caso lineal  $LR$  cada restricción del anterior problema de optimización no es lineal. Por ello, Dubois construye un algoritmo de resolución en el que en cada iteración fija un valor de  $h$  y resuelve el sistema lineal resultante. La manera en que se va fijando  $h$  para ser maximizado es similar al procedimiento para encontrar una raíz de una función real con el método de Bolzano, sin embargo, en vez de comprobar el signo de la función real sobre cada extremo del intervalo en el que se encuentra la raíz, lo que se comprueba es la factibilidad del sistema al fijar  $h$  (este procedimiento ha sido empleado en [Campos, 2005] para resolver el enfoque dual y un enfoque combinado primal-dual, suponiendo que los generadores de un mercado de electricidad tienen idéntica aversión al riesgo).

#### Anexo.4.6 El enfoque propuesto por Rommelfanger

Rommelfanger (ver [Rommelfanger, 1988]) considera que el cumplimiento de las restricciones posibilistas  $g_i(x; \underline{a}_i) \geq \underline{b}_i$  ( $i=1, \dots, m$ ) es equivalente a la satisfacción de las restricciones cuando se utilizan los extremos izquierdos de un  $\alpha$ -corte de los lados derecho e izquierdo de las restricciones. Esta condición resulta ser una condición más débil que la obtenida con el uso del operador máximo posibilista, y en el caso lineal  $LR$  es equivalente a resolver las siguientes restricciones ( $i=1, \dots, m$ ):

$$x^T \cdot a_i^L - x^T \cdot \alpha a_i^L \cdot L^{-1}(\alpha) \geq b_i^L - \alpha b_i^L \cdot L^{-1}(\alpha) \quad x \geq 0 \quad (\text{A. 3})$$

Además, Rommelfanger sugiere evaluar la cantidad  $x^T \cdot a_i^L$  con la siguiente función de pertenencia:

$$\theta_{b_i}(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y > b_i^L \\ \mu_{b_i}(y) & \text{si } y \leq b_i^L \end{cases} \quad (\text{A. 4})$$

Los valores  $\theta_{b_i}(x^T \cdot a_i^L)$  se interpretan como la valoración que el decisor hace de que la cantidad  $x^T \cdot a_i^L$  sea mayor que la disponibilidad representada por el término independiente  $b_i$ , y por lo tanto, las evaluaciones  $\theta_{b_i}(x^T \cdot a_i^L)$  deben de ser maximizadas. Esta interpretación de factibilidad coincide con la considerada por Zimmermann en el caso de restricciones flexibles, y tiene la ventaja de que un posible defecto en  $x^T \cdot a_i^L$  en relación con  $b_i^L$  influye directamente en el proceso de decisión.

#### Anexo.4.7 El operador de inclusión posibilista: programación robusta

Un sistema con restricciones con ambigüedad donde las relaciones entre los lados derecho e izquierdo son de inclusión se denomina **sistema con restricciones robustas**, y se formula como sigue (ver [Dubois, 1980], [Negota, 1976] y [Negota, 1981]):

$$\begin{aligned} g_i(x; a_i) &\subseteq b_i \quad i=1, \dots, m \\ x &\in X \end{aligned} \quad (\text{Anexo. 5})$$

Cada restricción se interpreta como una condición para que la región de ocurrencia del lado derecho  $g_i(x; a_i)$  esté contenida en la región de satisfacción  $b_i$ , usualmente definida por el decisor. De acuerdo a la definición de inclusión entre conjuntos posibilistas (ver capítulo segundo), y suponiendo conocida la distribución de posibilidad del lado izquierdo y derecho de las restricciones, la condición de inclusión se cumple si la verifican los  $h$ -cortes de las distribuciones involucradas para todo  $h \in [0, 1]$ . En concreto, en el caso lineal  $LR$  las restricciones de inclusión posibilistas se consideran equivalentes a las siguientes restricciones deterministas definidas para cada  $h \in [0, 1]$ :

$$\left. \begin{cases} x^T \cdot a_i^R + x^T \cdot \alpha_i^R \cdot R^{-1}(h) \leq b_i^R + \alpha_i^R \cdot R^{-1}(h) \\ x^T \cdot a_i^L - x^T \cdot \alpha_i^L \cdot L^{-1}(h) \geq b_i^L - \alpha_i^L \cdot L^{-1}(h) \end{cases} \right\} \forall h \in [0, 1], x \geq 0 \quad (\text{Anexo. 6})$$

Al igual que ocurría en el caso del operador máximo posibilista, este conjunto infinito de restricciones puede simplificarse suponiendo que los números posibilistas  $LR$  tienen soporte acotado. Además, la condición de factibilidad obtenida puede a su vez relajarse exigiendo el cumplimiento de las restricciones deterministas solamente para cualquier valor  $h \in [k, 1]$ , cierto  $k \in [0, 1]$  prefijado.

## Anexo.5 Restricciones con vaguedad y ambigüedad

Los sistemas con restricciones con vaguedad y ambigüedad son los sistemas en donde las relaciones de comparación “ $\leq$ ”, “ $\geq$ ” y “ $=$ ” son posibilistas y los coeficientes de las restricciones son números posibilistas, pero en donde las decisiones a tomar son deterministas. La formulación general de estos sistemas posibilistas es la siguiente:

$$\begin{aligned} g_i(x; \underline{a}_i) & \text{ "}\leq\text{" , "}\geq\text{" , "}\text{"} \underline{b}_i \quad i=1, \dots, m \\ x & \in X \end{aligned} \quad (\text{Anexo. 25})$$

### Anexo.5.1 El enfoque propuesto por Inuiguchi para un sistema de ecuaciones lineales

En [Inuiguchi, 1987], [Inuiguchi, 1989] y [Inuiguchi, 1990] se estudia el caso lineal *LR* de los sistemas de ecuaciones con vaguedad y ambigüedad, en donde el lado derecho de las restricciones es un número crisp. Por lo tanto, la formulación del sistema cuando las restricciones de desigualdad son del tipo “ $\geq$ ” es la siguiente:

$$\begin{aligned} \underline{a}_i^T \cdot x & \geq b_i \quad i=1, \dots, m \\ x & \in X \end{aligned} \quad (\text{Anexo. 26})$$

Como se describe en el enfoque general de resolución de un problema con restricciones flexibles, la distribución de posibilidad  $\mu_D(r_1, \dots, r_m)$  de que los lados izquierdos de las restricciones satisfagan las metas borrosas  $\underline{R}_i \equiv \text{“}\geq\text{”} b_i$  para  $i=1, \dots, m$  se obtiene aplicando el principio de extensión con una *T*-norma sobre las funciones de pertenencia de dichas metas, esto es:

$$\mu_D(r_1, \dots, r_m) = T(\mu_{\underline{R}_1}(r_1), \dots, \mu_{\underline{R}_m}(r_m)) \quad (\text{Anexo. 7})$$

Sin embargo, a diferencia de la programación flexible, en el caso de restricciones con vaguedad y ambigüedad, los lados izquierdos de las restricciones son números posibilistas *LR* cuya distribución de posibilidad conjunta  $\mu_{\Delta x}(y_1, \dots, y_m)$  puede también calcularse aplicando el principio de extensión, siendo ésta la siguiente:

$$\mu_{\Delta x}(y_1, \dots, y_m) = T(\mu_{\underline{a}_1^T \cdot x}(y_1), \dots, \mu_{\underline{a}_m^T \cdot x}(y_m)) \quad (\text{Anexo. 8})$$

Inuiguchi prueba entonces que la resolución del sistema posibilista es equivalente a maximizar las distribuciones de posibilidad y necesidad resultantes de combinar las

dos distribuciones de posibilidad  $\mu_D$  y  $\mu_{\Delta x}$  anteriores. Concretamente, las distribuciones de posibilidad y necesidad a optimizar son las siguientes:

$$\begin{aligned} \Pi_{\Delta x}(D) &= \sup_{y_1, \dots, y_m, r_1, \dots, r_m} T(\mu_{\Delta x}(y_1, \dots, y_m), \mu_D(r_1, \dots, r_m)) \\ N_{\Delta x}(D) &= \inf_{y_1, \dots, y_m, r_1, \dots, r_m} C(1 - \mu_{\Delta x}(y_1, \dots, y_m), \mu_D(r_1, \dots, r_m)) \end{aligned} \quad (\text{Anexo. 27})$$

siendo  $C$  cualquier  $T$ -conorma.

En [Inuiguchi, 1989] se demuestra que los dos anteriores problemas de maximización pueden formularse como problemas de programación no lineal que pueden ser resueltos mediante un algoritmo que utiliza el método simplex de manera repetitiva. En [Inuiguchi, 1990] se propone también un procedimiento para maximizar la suma de las anteriores medidas de posibilidad y necesidad.

### Anexo.5.2 El enfoque general propuesto por Inuiguchi

En [Inuiguchi, 1992] y [Inuiguchi, 1993] se propone una metodología para resolver un sistema de ecuaciones con vaguedad y ambigüedad cuando el término independiente de las restricciones puede ser un número posibilista. Para derivar las ecuaciones deterministas que se consideran equivalentes a las restricciones posibilistas, Inuiguchi se basa en las seis extensiones borrosas propuestas en [Dubois, 1983] de una relación binaria clásica. A continuación se muestra un ejemplo del procedimiento propuesto por Inuiguchi cuando la restricción analizada es de desigualdad y del tipo “ $\geq$ ”.

La función de pertenencia de la relación borrosa propuesta en [Dubois, 1983] para resolver la  $i$ -ésima desigualdad “ $\geq$ ” es:

$$\mu_{\geq^i}(g_i(x; a_i), b_i) = \sup_{x, y} \{ \min(\mu_{g_i(x; a_i)}(x), \mu_{b_i}(y), \theta_{\geq^i}(x, y)) \} \quad (\text{Anexo. 28})$$

siendo  $\mu_{\geq^i}$  una representación borrosa del grado en que la variable  $x$  domina a la variable  $y$ , que usualmente es función de la diferencia  $x-y$ , esto es:

$$\theta_{\geq^i}(x, y) = v(x - y) \quad (\text{Anexo. 29})$$

Exigiendo un nivel de aspiración mínimo  $h \in [0, 1]$  para el cumplimiento de la  $i$ -ésima restricción posibilista, ha de tenerse en cuenta la siguiente equivalencia:

$$g_i(x; a_i) \geq^i b_i \Leftrightarrow \mu_{\geq^i}(g_i(x; a_i), b_i) \geq h \quad (\text{Anexo. 30})$$

Esta equivalencia aplicada al caso en que  $g_i$  es una restricción lineal  $LR$  resulta en la siguiente ecuación determinista:

$$x^T \cdot a_i^R + x^T \cdot \alpha \alpha_i^R \cdot R^{-1}(h) \geq b_i^L - \alpha b_i^L \cdot L^{-1}(h) + v^{-1}(h) \quad (\text{Anexo. 31})$$

### Anexo.5.3 El enfoque general propuesto por Fuller

En [Fuller, 1993] se resuelve el mismo sistema posibilista resuelto por Inuguchi con su enfoque general, pero utilizando la denominada **regla de inferencia composicional con varias relaciones** o **esquema de razonamiento borroso múltiple** (ver [Zadeh, 1973]), que tiene la siguiente formulación general:

$$\text{Relación 1: } x \text{ e } y \text{ cumplen la relación } \underline{R}_1 \quad (\text{Anexo. 32})$$

.....

$$\text{Relación } m: \text{ } x \text{ e } y \text{ cumplen la relación } \underline{R}_m$$

-----

$$\text{Consecuencia: } x \text{ e } y \text{ tienen la propiedad } \underline{Q}$$

donde  $x$  e  $y$  son cualesquiera variables,  $\underline{Q}$  es un conjunto borroso, y  $\underline{R}_i$  para  $i=1, \dots, m$  son relaciones borrosas, tal y como se definieron en el segundo capítulo.

En el caso de un sistema posibilista con vaguedad y ambigüedad, el esquema múltiple tiene por relaciones las restricciones del problema, y por consecuencia el conjunto borroso resultante de satisfacer simultáneamente todas las relaciones. El sistema posibilista se representa entonces como sigue:

$$\text{Relación 1: } \underline{I}_1(g_1(x; \underline{a}_1), \underline{b}_1) \quad (\text{Anexo. 33})$$

.....

$$\text{Relación } m: \underline{I}_m(g_m(x; \underline{a}_m), \underline{b}_m)$$

-----

$$\text{Consecuencia: } \text{Min}(x) = T(\underline{I}_1(g_1(x; \underline{a}_1), \underline{b}_1), \dots, \underline{I}_m(g_m(x; \underline{a}_m), \underline{b}_m))$$

Siendo  $T$  cualquier  $T$ -norma, y siendo  $\underline{I}_i$  cualquier **operador de implicación borroso** que represente la relación  $\underline{R}_i \in \{“\leq”, “\geq”, “=”\}$  (ver [Villar, 1997]).

Tal y como se puede ver en [Fuller, 1993] este enfoque resulta claramente atractivo por los siguientes motivos:

- Generaliza el caso crisp en el que las restricciones son deterministas.

- Generaliza el enfoque de Buckley (ver epígrafe Anexo.4.2) cuando el criterio de comparación entre números posibilistas se define de acuerdo al operador máximo posibilista.
- Generaliza el enfoque de Zimmermann (ver epígrafe Anexo.3.2) cuando las funciones de pertenencia asociadas son:

$$\mu_{g_i \leq b_i}(r_i) = \begin{cases} 1 & r_i \leq b_i \\ 1 - (r_i - b_i) / d_i & b_i \leq r_i \leq b_i + d_i \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (\text{Anexo. 34})$$

En donde se recuerda que  $d_i$  son los valores prefijados por el decisor que delimitan la factibilidad admisible de las soluciones en un cierto grado.

## Anexo.6 Restricciones con decisiones posibilistas

La formulación de un **sistema de ecuaciones con decisiones posibilistas** es la siguiente:

$$\begin{aligned} g_i(x; a_i) & \text{"<=" , ">=" , "="} b_i \quad i=1, \dots, m \\ x & \in \underline{X} \end{aligned} \quad (\text{Anexo. 35})$$

donde ahora, a diferencia de los anteriores apartados,  $\underline{x}=(x_1, \dots, x_n)$  es un vector de decisiones posibilistas en el producto cartesiano  $\underline{X}=\underline{X}_1 \times \dots \times \underline{X}_n$ , siendo  $\underline{X}_i$  una familia de distribuciones de posibilidad para  $i=1, \dots, n$  (por ejemplo, la familia de los números posibilistas *LR*).

A continuación se describen los métodos que se han encontrado en la literatura para resolver este tipo de sistemas de ecuaciones posibilistas. Ninguno de ellos resuelve sistemas cuyas relaciones de desigualdad e igualdad son flexibles.

### Anexo.6.1 El operador de inclusión borroso: restricciones robustas con decisiones posibilistas

En los **sistemas robustos con decisiones posibilistas** (ver [Dubois, 1980]) el problema consiste en encontrar una decisión posibilista  $\underline{x} \in \underline{X}$  que satisfaga el siguiente sistema robusto (denominado de esta forma al utilizarse relaciones de inclusión entre conjuntos posibilistas):

$$\begin{aligned} g_i(x; a_i) & \subseteq b_i \quad i=1, \dots, m \\ x & \in \underline{X} \end{aligned} \quad (\text{Anexo. 9})$$

La interpretación usual de este tipo de sistemas es la búsqueda de decisiones posibilistas  $\underline{x} \in \underline{X}$  (podríamos estar interesados en  $\underline{x} \in \underline{X}$  con mínimo soporte) tal que  $b_i$  pueda ser obtenida a partir de  $g_i$  usando  $\underline{x}$  y  $a_i$ .

Dubois supone conocida la distribución de posibilidad del lado izquierdo del sistema anterior, y propone un procedimiento de resolución muy similar al que se describió en la programación robusta con decisiones deterministas.

En el caso lineal *LR* la distribución del lado izquierdo puede aproximarse utilizando la aproximación para la multiplicación extendida de números posibilistas *LR*, aproximación que ha sido descrita en el capítulo segundo.

**Anexo.6.2 El enfoque de Tanaka para un sistema lineal con lado derecho posibilista**

Para reflejar la incertidumbre que pueda existir en el lado derecho de las restricciones de un sistema de ecuaciones con ambigüedad, habitualmente suele considerarse que las decisiones del mismo son variables posibilistas. La formulación del sistema de ecuaciones con vaguedad y ambigüedad resulta ser entonces la siguiente:

$$g_i(x; a_i) (\leq, \geq, =) b_i \quad i=1, \dots, m$$

$$x \in X$$

(Anexo. 36)

En [Tanaka, 1984b] este sistema se resuelve utilizando el operador máximo posibilista de igual forma a como ya se hizo en la programación con ambigüedad (ver apartado Anexo.4.4). Sin embargo, ahora las decisiones juegan el papel de los coeficientes posibilistas de la programación con ambigüedad. Para el caso lineal LR, la aplicación del procedimiento resulta en las siguientes ecuaciones deterministas:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_i^T \cdot x^R \geq b_i^R; a_i \cdot x^L \geq b_i^L \\ a_i^T \cdot x^R + R^{-1}(k) \cdot a_i^T \cdot \alpha x^R \geq b_i^R + \alpha b_i^R \cdot R^{-1}(k) \\ a_i^T \cdot x^L - L^{-1}(k) \cdot a_i^T \cdot \alpha x^L \geq b_i^L - \alpha b_i^L \cdot L^{-1}(k) \end{array} \right\} \quad \forall i=1, \dots, m$$

(Anexo. 37)

En [Tanaka, 1984a] el sistema con vaguedad y ambigüedad para el caso lineal LR es reordenado adecuadamente para reformularlo de la siguiente forma:

$$y_i(x) = e_i + f_i^t \cdot x \geq 0 \quad i=1, \dots, m$$

(Anexo. 38)

Con el objeto de encontrar aquellas decisiones  $x \in X$  que satisfagan las restricciones anteriores, Tanaka considera que un número posibilista  $y_i(x)$  es mayor o igual que cero si su distribución de posibilidad en el cero es pequeña, y siempre que el soporte esté incluido en el conjunto  $\mathcal{R}^+$  de los números reales positivos. Este criterio conlleva a la resolución del siguiente problema multiobjetivo de programación determinista:

$$\underset{x^L, x^R, \alpha^L, \alpha^R}{Min} \quad (\mu_{y_1(x)}(0), \dots, \mu_{y_m(x)}(0))$$

$$s.a. \quad y_i^L(x) \geq 0 \quad i=1, \dots, m$$

(Anexo. 39)

Siendo  $y_i(x) = (y_i^L(x), y_i^R(x), \alpha y_i^L(x), \alpha y_i^R(x))_{LR}$  la distribución de posibilidad LR para  $y_i(x)$ ,  $i=1, \dots, m$ .

Exigiendo un nivel mínimo  $1-h_i \in [0,1]$  en cada función objetivo del problema anterior ( $i=1, \dots, m$ ), se tienen que satisfacer las siguientes restricciones deterministas:

$$\left. \begin{array}{l} \mu_{y_i(\underline{x})}(0) \leq 1-h_i \\ y_i^L(\underline{x}) \geq 0 \end{array} \right\} \quad \forall i=1, \dots, m \quad (\text{Anexo. 40})$$

Si en concreto lo que se quiere es encontrar aquella decisión  $\underline{x} \in \underline{X}$  con mínima incertidumbre (entendida ésta como la longitud del soporte del número posibilista) se tiene que resolver el siguiente problema de optimización determinista:

$$\begin{array}{l} \underset{x^L, x^R, \alpha x^L, \alpha x^R}{\text{Min}} \quad (M_L^T \cdot \alpha x^L + M_R^T \cdot \alpha x^R) \\ \text{s.a.} \quad \left. \begin{array}{l} \mu_{y_i(\underline{x})}(0) \leq 1-h_i \\ y_i^L(\underline{x}) \geq 0 \end{array} \right\} \quad i=1, \dots, m \end{array} \quad (\text{Anexo. 41})$$

siendo  $M_L$  y  $M_R$  vectores de penalización del ancho izquierdo  $\alpha x^L$  y derecho  $\alpha x^R$  de la decisión  $\underline{x} = (x^L, x^R, \alpha x^L, \alpha x^R)_{LR} \in \underline{X}$ , respectivamente.

## Anexo.7 Clasificación de los métodos de resolución de restricciones posibilistas

En la siguiente tabla se muestra un resumen de las técnicas fundamentales de resolución descritas en los anteriores apartados, señalando, para cada una de ellas, el tipo de programación que utiliza, el tipo de modelo que resuelve, las fuentes de incertidumbre, así como el método de resolución.

TIPO DE PROGRAMACIÓN	REFERENCIAS	INCERTIDUMBRE Y TIPO DE MODELO	MÉTODO DE RESOLUCIÓN
Programación Flexible	[Bellman, 1970]	Operadores de comparación inciertos	Intersección de restricciones y función objetivo borrosas. Algoritmo del Punto Fijo
	[Zimmermann, 1978]		Penalización de infactibilidades
Programación con ambigüedad	[Buckley, 1989] [Slowinski, 1986]	Formulación estándar. Incertidumbre en las restricciones	Aplicación del Principio de Extensión
	[Dubois, 1980] [Tanaka, 1984b] [Ramik, 1985]	Incertidumbre en restricciones	Criterio de comparación: Máximo posibilista
	[Dubois, 87]		Índices de factibilidad basados en las medidas de necesidad y posibilidad
	[Rommerfanger, 1988]		Utilización del método de penalización de Zimmermann
	[Dubois, 80] [Negota, 76, 81]	Incertidumbre en restricciones con operador de inclusión	Utilización del operador de inclusión borroso (programación robusta)
Programación con vaguedad y ambigüedad	[Inuiguchi, 87, 89, 90]	Incertidumbre en las restricciones lineales con requerimientos deterministas	Aplicación del enfoque de Bellman y del Principio de Extensión
	[Inuiguchi, 92, 93, 00]	Caso general	Aplicación de relaciones borrosas
	[Fuller, 1993]		Aplicación del esquema de razonamiento borroso múltiple
Programación con decisiones posibilistas	[Dubois, 1980]	Incertidumbre en las restricciones con operador de inclusión	Utilización del operador de inclusión borroso (programación robusta)

	[Tanaka, 1984a]		Desplazamiento de la distribución de los requerimientos en la dirección de factibilidad
--	-----------------	--	---

*Tabla Anexo. 1: Clasificación de los enfoques de resolución de un sistema de ecuaciones posibilistas*

## Anexo.8 Referencias

- [Bellman, 1970] R. Bellman and L. A. Zadeh, "Decision-making in a fuzzy environment". *Management Science*, vol. 17, pp. 141-164, 1970.
- [Buckley, 1989] J. J. Buckley, "Solving possibilistic programming problems". *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 31, pp. 329-341, 1989.
- [Campos, 2004] F. A. Campos and J. Villar, "Medium-Term Electricity Generation with Fuzzy Availability," presented at Second international conference on Soft Methods in Probability and Statistics (SMPS), Oviedo (Asturias), 2004.
- [Campos, 2005] F. A. Campos, J. Villar, and J. Barquin, "Application of Possibility Theory to Robust Cournot Equilibrium in Electricity Market". *Probability In The Engineering And Informational Sciences*, vol. 19, pp. 519-531, 2005.
- [Delgado, 1994] M. Delgado, J. Kacprzyk, J. L. Verdegay, and M. A. Vila, *Fuzzy Optimización: Recent Advances*. New York: Physica-Verlag, 1994.
- [Dubois, 1980] D. Dubois, "Systems of Linear Fuzzy Constraints". *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 3, pp. 37-48, 1980.
- [Dubois, 1987] D. Dubois, "Linear Programming with Fuzzy Data". *Analysis with Fuzzy Information*, vol. 3, pp. 241-263, 1987.
- [Dubois, 1983] D. Dubois and H. Prade, "Ranking Fuzzy Numbers in the Setting of Possibility Theory". *Information Sciences*, vol. 30, pp. 183-224, 1983.
- [Fuller, 1993] R. Fuller and H. J. Zimmermann, "Fuzzy Reasoning for Solving Fuzzy Mathematical Problems". *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 60, pp. 121-133, 1993.
- [Inuiguchi, 1990] M. Inuiguchi and H. Ichihashi, "Relative Modalities and their use in Possibilistic Linear Programming". *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 35, pp. 303-323, 1990.
- [Inuiguchi, 1992] M. Inuiguchi, H. Ichihashi, and Y. Kume, "Relationships between Modality Constrained Programming Problems and Various Fuzzy Mathematical Programming Problems". *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 49, No. 3, pp. 243-259, 1992.
- [Inuiguchi, 1993] M. Inuiguchi, H. Ichihashi, and Y. Kume, "Modality Constrained Programming Problems: A Unified Approach to Fuzzy Mathematical Programming Problems in the Setting of Possibility Theory". *Information Sciences*, vol. 67, pp. 93-126, 1993.
- [Inuiguchi, 1987] M. Inuiguchi, H. Ichihashi, and H. Tanaka, "A formulation of linear programming problem with fuzzy coefficients based on the concept of relative modalities," presented at Preprints of Second IFSA Congress, Tokyo (july 20-25), 1987.

- [Inuiguchi, 1989] M. Inuiguchi, H. Ichihashi, and H. Tanaka, "Possibilistic linear programming with measurable multiattribute value functions". *Orsa Journal on Computing*, vol. 1, pp. 146-158, 1989.
- [Klir, 1995] G. J. Klir and B. Yuan, *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic. Theory and applications*: Prentice Hall, 1995.
- [Lai, 1992] Y. J. Lai and C. L. Hwang, "Fuzzy Mathematical Programming: Methods and Applications," in *Economic and Mathematical Systems*, vol. 394. New York: Springer-Verlag, 1992.
- [Lai, 1994] Y. J. Lai and C. L. Hwang, "Fuzzy Multiple Objective Decision Making: Methods and Applications," in *Economic and Mathematical Systems*, vol. 404. New York: Springer-Verlag, 1994.
- [Negoita, 1981] C. V. Negoita, "The current interest in Fuzzy Optimization". *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 6, pp. 261-269, 1981.
- [Negoita, 1976] C. V. Negoita and M. Sularia, "On fuzzy Mathematical Programming and Tolerances in Planning". *ECECSR Journal*, vol. 1, pp. 3-14, 1976.
- [Ramik, 1985] J. Ramik and J. Rimanek, "Inequality relation between fuzzy numbers and its use in fuzzy optimization". *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 16, pp. 123-138, 1985.
- [Rommelfanger, 1988] H. Rommelfanger, *Entscheiden bei Unschärfe. Fuzzy Decision Support-Systeme*. Berlin Heidelberg: Springer Verlag, 1988.
- [Slowinski, 1986] R. Slowinski, "A Multicriteria fuzzy linear programming method for water supply system development planning". *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 19, pp. 217-237, 1986.
- [Tanaka, 1984a] H. Tanaka and K. Asai, "Fuzzy Solutions in Fuzzy Linear Programming Problems". *IEEE Trans. on SMC*, vol. 14, pp. 325-328, 1984a.
- [Tanaka, 1984b] H. Tanaka, H. Ichihashi, and K. Asai, "A formulation of fuzzy linear programming problem based on comparison of fuzzy numbers". *Control and Cybernetics*, vol. 13, pp. 185-194, 1984b.
- [Villar, 1997] J. Villar, "Aplicación de la teoría de conjuntos borrosos al diagnóstico de procesos industriales," in *Departamento de Electrónica y Automática*. Madrid: Tesis doctoral Universidad Pontificia de Comillas, 1997.
- [Zadeh, 1973] L. A. Zadeh, "Outline of a new Approach to the Analisis of Complex Systems and Decision Processes". *IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics*, vol. SMC-3, No. 1., pp. 28-44, 1973.
- [Zimmermann, 1976] H. J. Zimmermann, "Description and Optimization of Fuzzy Systems". *International Journal of General Systems*, vol. 2, 1976.
- [Zimmermann, 1978] H. J. Zimmermann, "Fuzzy Programming and Linear Programming with several Objective Function". *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 1, pp. 45-55, 1978.