



GRADO EN ADMINISTRACIÓN Y DIRECCIÓN DE EMPRESAS

TRABAJO FIN DE GRADO

# ANÁLISIS FRACTAL DE SERIES TEMPORALES DE VOLATILIDAD

Una actualización de la literatura

Autor: Barros de Lis Arteché, Pablo

Director: Portela Fernández, José

Madrid

Diciembre 2021

# Contenido

<b>Capítulo 1. - Introducción .....</b>	<b>3</b>
Motivación .....	3
Objetivos .....	4
Metodología .....	4
<b>Capítulo 2. - Estado del arte.....</b>	<b>5</b>
Definiciones contextuales .....	5
Sistema financiero.....	5
Instrumentos financieros .....	5
Mercados financieros .....	5
Mercado de valores .....	6
Índices bursátiles .....	6
Volatilidad .....	6
Índices de volatilidad .....	6
Fractalidad.....	7
Teoría Fractal de Mercado .....	8
Análisis fractal de series temporales.....	9
Cálculo del exponente de Hurst .....	9
Trabajos previos .....	11
<b>Capítulo 3. - Metodología .....</b>	<b>13</b>
Proceso de análisis .....	13
Lectura de datos .....	13
Análisis exploratorio .....	13
Cálculo del exponente de Hurst .....	14
Cálculo de intervalos de confianza .....	14
Cálculo de exponente de Hurst con ventana móvil.....	14
<b>Capítulo 4. - Resultados.....</b>	<b>15</b>
Fractalidad de los principales índices de volatilidad.....	15
S&P 500 y serie de volatilidad VIX .....	15
CSI 300, Hang Seng y serie de volatilidad china .....	19
Eurostoxx 50 y serie de volatilidad europea .....	23
Nikkei 225 y serie de volatilidad japonesa.....	25
<b>Capítulo 5. - Conclusiones .....</b>	<b>29</b>
Actualización de la literatura .....	29
Conclusiones sobre eficiencia de mercado .....	29
<b>Capítulo 6. - Bibliografía .....</b>	<b>31</b>

# Capítulo 1. - Introducción

## Motivación

Este estudio pretende corroborar, actualizar, y ampliar estudios previos llevados a cabo en el análisis fractal de series temporales de volatilidad. En este cometido, se tomará como base el trabajo realizado por G.M. Caporale et al., en el que se estudia la fractalidad de la serie de volatilidad VIX en el periodo entre 2004 y 2016 [1]. Se considera que actualizar dicho estudio con los valores de los últimos años, analizar el efecto de la pandemia, y extenderlo a otros mercados como Europa, China o Japón puede derivar en conclusiones de gran interés acerca de la eficiencia de los mercados financieros, que pueden extraerse a través de la teoría de mercado fractal.

En el entorno de los mercados financieros, es constante la búsqueda de métodos innovadores y alternativas que permitan obtener rentabilidad a partir del capital. Esto incluye analizar los mercados y sus comportamientos desde multitud de ángulos de cara a sacar alguna ventaja y, normalmente, estos análisis comienzan partiendo de la premisa de la eficiencia o ineficiencia de los mercados.

La teoría de los mercados eficientes asume que los mercados cuentan con toda la información existente para la definición de los precios. Así, un precio de mercado tiene en cuenta cualquier factor que pueda conocer un inversor, de manera que un inversor no podrá usar información externa para aprovechar ineficiencias del mercado y obtener rentabilidad.

Por otro lado, se da la teoría de los mercados ineficientes, en la que se asume que los precios no reflejan toda la información, dando lugar a “ineficiencias”. Un argumento de los defensores de esta teoría se basa en el comportamiento irracional de los inversores, estudiado en las finanzas del comportamiento, campo muy desarrollado en los últimos años por autores como Kahneman, Tversky o Thaler [2]. Si se asume que los inversores no responden con comportamientos racionales, los mercados, que se componen de inversores, tampoco podrán hacerlo, se guiarán por emociones y darán lugar a oportunidades de inversión, en los casos en los que una ineficiencia haga que el precio de un activo sea menor que su valor subyacente.

Otro ejemplo de los inversores que siguen esta teoría es el análisis técnico que, al no poder buscar ineficiencias en el mercado, se centrará en las tendencias de este, analizando las gráficas de los precios con multitud de herramientas estadísticas, como medias móviles, soportes y resistencias. La decisión de inversión quedará definida por el hallazgo en estas gráficas de tendencias alcistas o bajistas. Pese a ello, existen trabajos que exploran la posibilidad de que este método de inversión pueda coexistir con mercados eficientes [3].

Este proyecto supone una aproximación al análisis del comportamiento de un elemento muy concreto de los mercados financieros, las series temporales de volatilidad, desde un ángulo muy específico, el análisis fractal. Las series de volatilidad son un reflejo del sentimiento de mercado, y explorar su comportamiento puede permitir una mejor comprensión del mercado e incluso derivar en estrategias de inversión.

Concretamente, este estudio pretende corroborar, actualizar, y ampliar estudios previos llevados a cabo en el análisis fractal de series temporales de volatilidad. En este cometido, se tomará como base el trabajo realizado por G.M. Caporale et al., en el que se estudia la fractalidad de la serie de volatilidad VIX en el periodo entre 2004 y 2016 [1]. Se considera que actualizar dicho estudio con los valores de los últimos años, analizar el efecto de la

pandemia, y extenderlo a otros mercados como Europa, China o Japón puede derivar en conclusiones de gran interés acerca de la eficiencia de los mercados financieros, que pueden extraerse a través de la teoría de mercado fractal.

## Objetivos

El principal propósito del proyecto es, por tanto, analizar la fractalidad de ciertas series temporales. Concretamente, se pretende estudiar las series de volatilidad de principales índices bursátiles, como la del S&P 500, CSI 300, Hang Seng, Eurostoxx 50 o Nikkei 225, en conjunción con las series de sus índices subyacentes. Con ello, se pretende observar si existe un comportamiento persistente, lo cual vendrá determinado por el valor de su exponente de Hurst. En caso de encontrarse ese comportamiento persistente, se desvelarían ineficiencias en el mercado. Este análisis se llevará a cabo a través de los métodos R/S, DFA y GHE, tanto para las series en su totalidad como a través de ventanas móviles, y además conllevará un ajuste de los datos con la eliminación de los días festivos y fines de semana, que puedan distorsionar los resultados

Posteriormente al análisis de la fractalidad, se revisarán los resultados en contraste con el trabajo de G.M. Caporale et al., poniendo el foco en la verificación de los resultados obtenidos en su estudio, la comparación del mercado estadounidense con los nuevos mercados añadidos al estudio, el efecto de la pandemia, y las implicaciones en las teorías de eficiencia de mercado.

## Metodología

Para lograr los objetivos planteados, se comenzará con un estudio del estado de la cuestión, con el foco en pasados estudios, y métodos de cálculo de la fractalidad que permitan afinar los análisis a llevar a cabo. A continuación, se extraerán los datos correspondientes a las series temporales a analizar, tanto las de volatilidad como de los índices subyacentes. Tras la debida limpieza y preparación de los datos, que incluirá la eliminación de fines de semana y días festivos, y la homogeneización de vectores de fechas para cada geografía, se procederá con el análisis a través del programa Matlab. El código a emplear se elaborará partiendo de estudios anteriores, y contendrá apartados de lectura de datos, análisis exploratorio mostrando las características más relevantes de las series, cálculo del Hurst con los tres métodos mencionados, cálculo de los intervalos de confianza, y por último un cálculo de la fractalidad mediante ventanas móviles.

Tras ello, se lleva a cabo un proceso iterativo revisando los parámetros y criterios utilizados, verificando su corrección para decidir si es necesario repetir el análisis alterando alguno de ellos. Posteriormente, se pasa a realizar un análisis de los resultados obtenidos, para finalizar con la revisión de los trabajos previos y contrastación de sus resultados con los del presente proyecto, la ampliación de sus conclusiones gracias a los nuevos mercados y fechas, y la conclusión sobre las implicaciones en teorías de eficiencia de mercado.

## Capítulo 2. - Estado del arte

Este capítulo aborda las diferentes cuestiones, pasadas y presentes, que permiten comprender y contextualizar el proyecto, de manera que se enfoque en las necesidades que surgen de los últimos avances en esta temática. Inicialmente, se darán algunas definiciones que permitan comprender el contexto financiero en el que se enmarca este proyecto. Posteriormente, se pasará a introducir el marco técnico en el que se hace el análisis, esto es, la fractalidad y su aplicación al contexto financiero. Después, se apuntan distintos métodos de cálculo de fractalidad, con el foco en los métodos que aplican al presente estudio, es decir, Hurst, DFA y GHE, y finalmente se pasa a describir los trabajos previos desarrollados en este campo, especialmente el estudio de G.M. Caporale et al. [1] sobre la serie VIX tanto en su totalidad como a través de ventanas temporales, que será base para la comprobación de resultados, y cimiento sobre el que ampliar las principales conclusiones existentes acerca de la fractalidad en series de volatilidad y sus implicaciones.

### Definiciones contextuales

#### Sistema financiero

Comenzando desde la base, se define sistema financiero como el conjunto de instituciones, medios y mercados que tienen como objetivo la canalización del ahorro que se generan unidades con superávit, hacia prestatarios o unidades de gasto con déficit [4]. En él se enmarcan, por tanto, los instrumentos o activos financieros, las instituciones o intermediarios, mercados financieros donde se producen los intercambios, y autoridades monetarias y financieras encargadas de regularlo.

#### Instrumentos financieros

En este contexto, un activo o instrumento financiero es un valor emitido por una unidad económica deficitaria, y tiene como características: su grado de liquidez, definido por su facilidad de conversión en dinero; su riesgo, dependiendo de la solvencia y garantías del emisor; y su rentabilidad, en función de su capacidad de generar rendimientos y producir intereses [5].

#### Mercados financieros

El mercado financiero es el mecanismo o lugar en el que se produce el intercambio de estos activos financieros, y donde se determinan sus precios. Los mercados financieros pueden clasificarse de diversas formas, por ejemplo, según el momento de vida de sus activos, según los productos que se negocian en él, o según su nivel de organización [6]. Un ejemplo de ello sería la bolsa, mercado financiero más presente en este proyecto, que es un mercado de capitales si se considera los productos que se negocian en ella, y un mercado secundario si se considera que hay un cambio de propiedad en activos existentes.

## Mercado de valores

El mercado o bolsa de valores es un mercado financiero donde se comercia con acciones, activos que representan una parte alícuota de la propiedad de una empresa. Las ventajas de la bolsa de valores son que, al juntar una cantidad considerable de inversores, se da mayor liquidez, y así, la posibilidad de obtener mejores precios; también quedan publicados los precios de cada transacción, información importante para el inversore que no tendría en un mercado *Over The Counter*; y, por último, ofrece unas reglas que aseguran que los participantes cumplen con sus obligaciones. Todas las grandes compañías permiten el comercio de sus acciones en estos mercados [7].

## Índices bursátiles

Estas acciones pueden ser agrupadas de distintas formas en índices, de manera que el comportamiento agregado de las acciones incluidas en él, marcan el desempeño del índice. Normalmente, los índices principales en un país agrupan las compañías con mayor liquidez y capitalización bursátil, como sería el ejemplo del IBEX 35 o del S&P 500. También pueden agrupar empresas de una determinada industria, como el Nasdaq, que toma las principales empresas tecnológicas estadounidenses. Al agrupar una parte considerable del mercado, estos índices se toman como referencia, especialmente los de Estados Unidos, sobre el estado presente de los mercados.

## Volatilidad

La volatilidad se refiere a la frecuencia y la magnitud de los cambios en el precio del subyacente. Puede medirse de diferentes maneras, de las cuales la más común es la desviación estándar del precio diario durante un periodo de tiempo determinado [7]. La volatilidad en un mercado o activo es muestra, en muchas ocasiones, de la incertidumbre que existe alrededor de él. Un ejemplo claro de esto es la cotización de las criptomonedas en los últimos años, a las cuales les afecta un pleno desconocimiento sobre cuál será su nivel de implantación en el futuro, impidiendo a las inversores determinar un mismo precio, causando enorme volatilidad. A nivel de acciones e índices, se ven periodos de mayor volatilidad en momentos turbulentos como fue la llegada del Covid-19, o el estallido de la crisis financiera de 2008.

## Índices de volatilidad

Debido a la importancia que tiene la volatilidad como termómetro de mercado, se han elaborado los denominados índices de volatilidad. Aunque existen otros como el VXD para el índice Dow Jones Industrial Average, o el VXN para el Nasdaq, el más conocido a nivel mundial es el VIX, basado en el índice S&P 500. Inicialmente, este índice fue introducido por el CBOE (*Chicago Board Options Exchange*), y ha sido actualizado con el paso del tiempo. El índice, a diferencia de otros índices bursátiles, no se calcula a partir de los precios de las acciones, sino en base a las opciones, siendo estas reflejo de la expectación de volatilidad en el futuro. Como otros índices, el VIX usa reglas para establecer qué opciones entran o no, y qué peso tendrán [8]. En este proyecto, no se profundizará más en el detalle del cálculo del VIX por su complejidad y por no ser del todo relevante para el presente estudio, pero existe abundante documentación que puede consultarse para comprender mejor este índice.

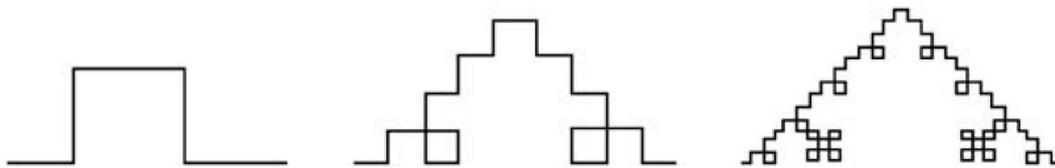
# Fractalidad

El campo de la fractalidad es desarrollado principalmente por Benoit Mandelbrot en el siglo XX, basándose en los elementos de la naturaleza y a través de la búsqueda de patrones que puedan existir en lo que era considerado caótico.

De acuerdo con Benoit Mandelbrot, un fractal es una clase especial de invariancia o simetría que relaciona un todo con sus partes: el todo puede descomponerse en partes que evocan el todo. Ejemplos de ellos se encuentran fácilmente en la naturaleza. Se dice que la costa de Gran Bretaña tiene una geometría fractal, pero también puede verse en rayos o en los distintos picos que surgen de una verdura como el romanesco, que se subdividen cada vez en picos más pequeños semejantes al mayor.

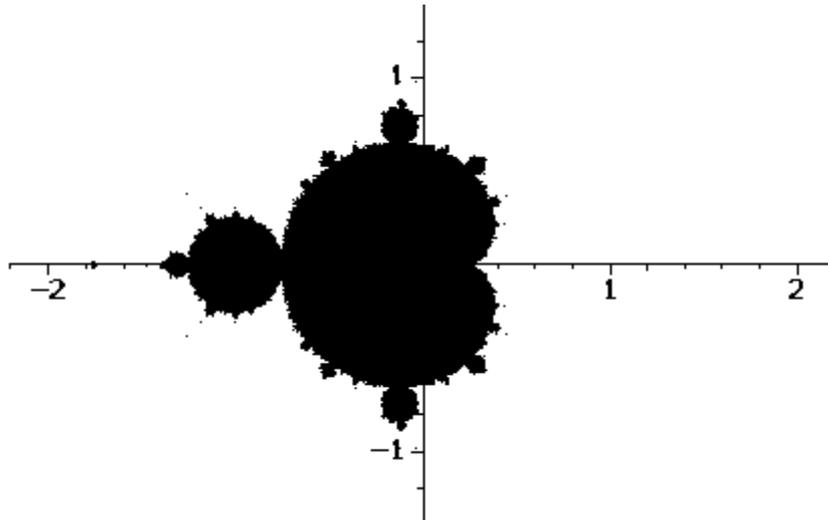
Los fractales poseen cuatro características principales que permiten su aplicación a la modelización de casos caóticos. En primer lugar, tiene la característica de la autosimilitud, como se explica en la definición, al repetir la geometría inicial en cada subdivisión menor, independientemente de la escala. La autoafinidad permite que la geometría básica dé lugar a la creación de figuras mayores al repetir el proceso de manera iterativa. La multifractalidad explica que a lo largo del propio fractal haya zonas con desarrollos suaves y otros especialmente volátiles. Por último, la dimensión fractal categoriza los fractales en función de su complejidad [9].

Estas características pueden ser observadas de forma simplificada en un ejemplo de lo que serían las primeras iteraciones en la generación de una geometría fractal, como se observa en la Figura 1.



*Figura 1. Primeras iteraciones en la generación de una geometría fractal [10]*

Existen numerosos conjuntos a los que se puede llegar siguiendo las iteraciones que dan lugar a una geometría fractal, como pueden ser el copo de nieve de Koch o el triángulo de Sierpinski, pero probablemente el conjunto que ha alcanzado mayor popularidad es el de Mandelbrot, representado en la Figura 2.



*Figura 2. Conjunto de Mandelbrot*

Desde los comienzos de su desarrollo, los fractales han tenido importantes aplicaciones en todo tipo de campos, como pueden ser la compresión de archivos [11], el estudio del cuerpo humano, como la geometría de los pulmones o del cerebro [12], la ciencia de materiales [13] y muchos otros.

## Teoría Fractal de Mercado

Previamente a la introducción de los fractales en las finanzas, los modelos de gestión de carteras tenían en común la hipótesis de que la evolución de las rentabilidades de cada activo se comportaba siguiendo una distribución normal. Pese a ello, la realidad no se ajustaba a esas hipótesis, lo cual impulsó a intentar aplicar nuevas teorías provenientes de campos como la física para buscar solución al problema.

Benoit Mandelbrot mostró inicialmente que el comportamiento mercado financiero no seguía ni mucho menos un comportamiento browniano aleatorio, y que más bien se aproximaban a un sistema de Pareto-Levy, es decir, de cola pesada. Ante ello, Mandelbrot propuso aunar el movimiento browniano y los patrones fractales con el fin de explicar los comportamientos extremos en los mercados financieros. Esta contribución, la aplicación de fractales para medir la volatilidad financiera, es considerada como una de sus mayores aportaciones [9].

Una primera consideración del mercado como sistema fractal fue dada por Ed Peters, argumentando que los distintos horizontes temporales de los inversores determinan el equilibrio. Existe toda una Teoría Fractal generada a partir de estas teorías, ampliamente marcada por dos factores como el impacto de la liquidez y los horizontes temporales.

La Hipótesis de Mercado Fractal establece que, al existir diferentes horizontes temporales entre los inversores, los desajustes a corto plazo en los precios permiten a los inversores a largo plazo entrar, aportando liquidez y estabilizando el mercado. De esta forma, siempre que existe un inversor con un horizonte mayor que el que tiene el inversor en crisis, el mercado podrá volver al equilibrio. Ajustando el riesgo a la escala de horizonte temporal, todos los inversores han de compartir el mismo nivel de riesgo, explicándose así la distribución de frecuencia similar a diferentes horizontes de inversión y la estructura autosimilar. El mercado se desestabiliza, por tanto, cuando se rompe la estructura fractal, es decir, cuando se reduce la variedad de horizontes de inversión,

reduciendo así la liquidez. De hecho, un horizonte de inversión uniforme entre los inversores hace que el mercado entre en caída libre [14].

Por tanto, horizontes temporales más cortos hacen que cobre relevancia el trading y el análisis técnico, mientras que horizontes mayores dan peso al análisis fundamental, y variaciones en la validez de la información de los inversores a largo plazo puede crear uniformidad en los horizontes de inversión hacia el corto plazo, generando desequilibrio de mercado, al haber ausencia de inversores a largo plazo que aporten liquidez [14].

## Análisis fractal de series temporales

Las series temporales financieras han sido estudiadas con el fin de hallar persistencia en ellas, lo cual indicaría que la serie no presenta un movimiento browniano ordinario, es decir, no es un ruido blanco. Al contrario, encontrar persistencia en la sería muestra que existe correlación de los datos consigo mismos a lo largo del tiempo, indicando que posee memoria. El análisis de persistencia se hace a través del exponente de Hurst. Harold Edwin Hurst fue un hidrólogo británico nacido a finales del s. XIX que trató de medir la volatilidad de las lluvias y sequías en el Nilo de cara a la construcción de una presa de tamaño óptimo, con la idea de demostrar que los flujos del río no seguían un patrón aleatorio. En este estudio nació el exponente de Hurst, que fue desarrollado más tarde por Mandelbrot. Este exponente estaba, de hecho, directamente relacionado con la dimensión fractal, y ha sido empleado ampliamente en este campo en los años posteriores.

## Cálculo del exponente de Hurst

### Método R/S

El método R/S es el más conocido para el cálculo del exponente de Hurst de una serie temporal, y fue propuesto en 1969 por Hurst y Wallis basado en el trabajo previo de Hurst [15]. El procedimiento que sigue se describe a continuación:

1. Se divide la serie temporal de rendimientos de longitud  $n$  en  $d = \frac{n}{m}$  subseries de longitud  $m$ , con  $m = 2^k < n$ .
2. Para cada subserie  $B$ , se calcula la media  $E_i$  y la desviación típica  $S_i$  para todo  $i=1, \dots, d$ .
3. Se normalizan los datos de cada bloque  $B$  restándole su media  $E_i$ , de manera que  $N_j = B_j - E_i$  para  $j = 1, \dots, m$ .
4. Se calculan las series temporales acumulativas para cada subserie, como se observa en la ecuación 1.

$$C_j = \sum_{k=1}^j N_k ; j = 1, \dots, d \quad (1)$$

5. Se calcula el rango de  $C_j$  en cada subserie:  $R_i = \max\{C_j: j = 1, \dots, m\} - \min\{C_j: j = 1, \dots, m\}$  para  $i = 1, \dots, d$ .
6. Se computa el rango  $R_i$  entre la desviación típica  $S_i$  calculada inicialmente para cada subserie:  $\frac{R_i}{S_i}$  para  $i = 1, \dots, d$ .
7. Finalmente, se calcula la media de dicho valor para todas las subseries tal que:

$$RS_m = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d \frac{R_i}{S_i} \quad (2)$$

El valor del exponente de Hurst es la pendiente de la regresión lineal del logaritmo de  $RS_m$  frente al logaritmo del tamaño de las subseries  $m$ .

En cuanto a la interpretación del exponente de Hurst, existen 3 posibilidades ante su resultado [15]:

- En primer lugar, un valor del exponente de Hurst de 0,5 indica que la serie temporal no presenta correlación, es una serie independiente. Podemos decir que la serie no presenta memoria y que se presenta un comportamiento de paseo aleatorio.
- Un valor en el rango 0,5 – 1 indicará que la serie temporal presenta autocorrelación positiva a largo plazo, indicando persistencia en la serie y, así, memoria a largo plazo. Por ejemplo, una serie temporal con comportamiento persistente y valores altos (bajos), es probable que presente otros valores altos (bajos) en el futuro y mantenerse así por un tiempo considerable.
- Por último, valores del exponente de Hurst en el rango 0 – 0,5 indica que la serie temporal presenta tendencia a fluctuar intermitentemente entre valores altos y bajos a largo plazo, indicando antipersistencia en la serie. Esto es, un valor alto tenderá a estar seguido de uno bajo y viceversa, siguiendo así la serie la tendencia a cambiar entre valores altos y bajos a largo plazo.

En este proyecto se usa el procedimiento por Rafal Weron para el cómputo del exponente de Hurst [16] basado en el análisis original de Hurst con el método R/S de su trabajo sobre la capacidad de reservas a largo plazo ya mencionado previamente [17] con algunos ajustes para muestras pequeñas.

### *Método DFA*

El método de cálculo de dependencia temporal DFA (*Detrended Fluctuation Analysis*) fue propuesto por Peng et al. en un artículo estudiando secuencias de ADN en el que se explica cómo este procedimiento reduce el input necesario por parte del investigador respecto a metodologías previas [18]. Posteriormente, Rafal Weron evalúa la precisión de distintos métodos incluyendo R/S y DFA con series temporales simuladas de distintos tamaños, descubriendo que el método DFA era el claro ganador [19]. Con ello, elaboró un código basado en las dos referencias citadas para el análisis de persistencia en series temporales mediante Matlab [20], que será el utilizado en el presente proyecto.

Como describe Weron en su publicación, el método DFA sigue los siguientes pasos:

1. En primer lugar, se divide de la serie temporal de longitud  $L$  en  $d$  subseries de longitud  $n$ .
2. A continuación, para cada subserie  $m = 1, \dots, d$ , se crea una serie temporal acumulativa  $Y$  de manera que cada valor es la suma de todos los anteriores, como se describe en la ecuación 3.

$$Y_{i,m} = \sum_{j=1}^i X_{j,m}; \quad i = 1, \dots, n \quad (3)$$

3. Se computa una línea de regresión para cada serie acumulativa mediante mínimos cuadrados, como se observa en la ecuación 4.

$$\tilde{Y}_m = a_m x + b_m \quad (4)$$

4. Se calcula la desviación típica de la subseries acumuladas eliminando la tendencia, es decir, restándole los valores de la regresión, como se representa en la ecuación 5.

$$F(m) = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_{i,m} - a_m i - b_m)^2} \quad (5)$$

5. Por último, se calcula el valor medio de los valores de desviación típica de todas las subseries, como se ve en la ecuación 6.

$$\tilde{F}(n) = \frac{1}{d} \sum_{m=1}^d F(m) \quad (6)$$

De cara a la interpretación, se representan gráficamente con escala logarítmica en ambos ejes los valores de  $\tilde{F}(n)$  en función de los tamaños de intervalo  $n$ , la pendiente indicará la naturaleza de la persistencia temporal. De forma similar a la explicación dada en el método previo, en caso de tratarse de ruido blanco, la pendiente será de 0,5. Por otro lado, para series persistentes, la pendiente será mayor que 0,5, mientras que casos antipersistentes tendrán pendiente menor que 0,5.

### Método GHE

Introducido por Barabasi et al. en 1991, es el método GHE (*Generalized Hurst Exponent*) es uno de los más comunes para calcular el exponente de Hurst. En el presente proyecto, se aplica esta generalización de la versión de Hurst, donde se usan los momentos de la distribución de incrementos de orden  $q$ . Estos reducen la sensibilidad a outliers, y distintos exponentes  $q$  irán asociados a diferentes categorizaciones de la complejidad multi-escalar de la señal. Se elige este método por ofrecer sensibilidad a cualquier tipo de dependencia en los datos al tiempo que es computacionalmente sencillo de implementar [21]. El método empleado queda definido en la ecuación 7.

$$\frac{\langle |x(t+r) - x(t)|^q \rangle}{\langle x(t)^q \rangle} \sim r^{[qH(q)]} \quad (7)$$

Se tiene, por tanto, el tamaño de la ventana temporal  $r$  que puede variar entre 1 y  $r_{max}$ , siendo normalmente elegido este valor máximo como un cuarto de la longitud de la serie. La ecuación expresa entre paréntesis angulares  $\langle \rangle$  la media de la muestra durante la ventana temporal. El GHE se calcula como una media de una lista de valores de la expresión para los distintos valores de  $r$ .

### Trabajos previos

Como se ha ido explicando a lo largo del documento, el análisis de series temporales desde el ángulo de la fractalidad lleva décadas en desarrollo y ha sido aplicado a diversos ámbitos. En el caso relevante para el proyecto, las finanzas, ha sido principalmente

aplicado a índices, siempre estando en el foco el principal índice estadounidense, el S&P 500. Una investigación de Dominique et al. en 2011 [22] ya lo analizaba mediante el exponente de Hurst hallando casos de dependencia tanto a corto como a largo plazo. Por ejemplo, cuando el mercado está dominado por inversores a largo plazo e inversores en *blue-chips* (grandes compañías consideradas con menor probabilidad de caída) o cuando el mercado está en una burbuja, se observa persistencia. Por otro lado, en mercados dominados por *contrarians* (inversores que apuestan en contra de la multitud, es decir, optimistas en un mercado bajista y pesimistas en un mercado alcista), el índice se comporta de forma antipersistente.

Otro caso relevante es el estudio de la persistencia y memoria a largo plazo de la cotización del Bitcoin [23]. Este caso es de especial importancia, ya que, acudiendo a la teoría de Mercado Fractal, se dice que un activo sin un vínculo a los ciclos económicos no tendrá horizontes de inversión a largo plazo y dominarán la liquidez y la información técnica a corto plazo. Aunque la controversia e incertidumbre frente al Bitcoin haga dudosa su categorización como “activo”, aplicando la teoría, el Bitcoin no tendría la estabilidad proporcionada por los inversores con diferentes horizontes temporales que predice el Mercado Fractal, de manera que es un caso de estudio muy particular desde el enfoque de la fractalidad. En un trabajo de Yonghong et al. de 2017 [23], se investiga la memoria a largo plazo de esta criptomoneda aplicando ventanas móviles a la serie de cotizaciones diarias del periodo entre 2010 y 2017. El enfoque de ventanas móviles permite observar la evolución de la persistencia en el mercado con el tiempo, y se utiliza con el método descrito de generalización de exponente de Hurst, es decir, GHE. Entre sus resultados principales, se observan valores de exponente de Hurst superiores a 0,5 para toda la serie temporal, desvelando la persistencia del mercado del Bitcoin.

Por último, existen estudios previos que analizan la volatilidad, que serán el foco del presente proyecto, como es el caso de G.M. Caporale et al. en 2018 [1], donde se analiza el grado de persistencia en el VIX en el periodo 2004-2016. Al igual que en el caso del índice S&P 500, se hallan periodos de persistencia y de antipersistencia. Por un lado, en periodos normales, se observa antipersistencia, mientras que periodos de crisis muestran antipersistencia. En su caso, se utiliza tanto el método R/S como uno adicional, integración fraccional. El resultado de su análisis con ventana temporal de 300 días para el cálculo del valor R/S con datos diarios de la serie VIX da el siguiente resultado:

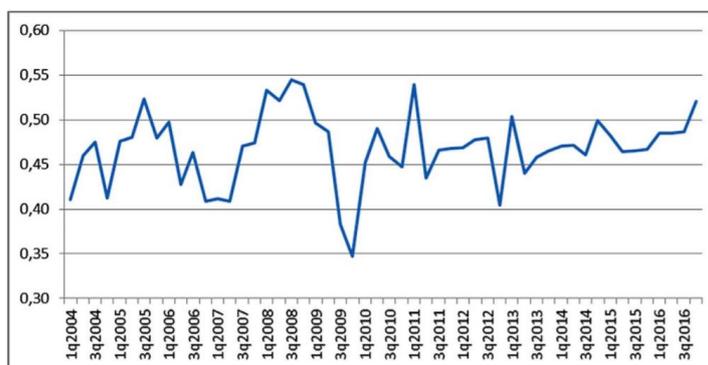


Figura 3. Análisis del R/S para la serie VIX con ventana móvil de 300 días. Fuente: Guglielmo et al. [1]

Se observa una antipersistencia no muy pronunciada pero sí prolongada para prácticamente todo el periodo temporal. Por otro lado, el valor R/S obtenido para toda la serie es de 0,41. Estos valores serán fundamentales para corroborar los resultados del presente proyecto, y más aún para completar los trabajos previos con un análisis novedoso en este campo que permita profundizar en las conclusiones históricas que se tienen actualmente.

## Capítulo 3. - Metodología

A continuación, se pasa a detallar la metodología seguida para la consecución de los objetivos del presente proyecto.

Las series temporales empleadas son las de cotización diarias de cierre de principales índices bursátiles como pueden ser el S&P 500 de Estados Unidos, el Euro Stoxx 50 con 50 de las empresas más importantes de Europa, el Nikkei japonés, el CSI 300 de China y el Hang Seng de Honk Kong. Estos se estudian juntamente con series de volatilidad de sus respectivas geografías, como son el VIX del CBOE (*Chicago Board Options Exchange*) para el mercado estadounidense, el VSTOXX para la volatilidad del Euro Stoxx 50, el Nikkei Volatility Index para Japón y el CBOE China ETF Volatility Inde para China.

Cabe recalcar que para el análisis se retiran datos tanto de fin de semana como de festivos que puedan generar la repetición de cotizaciones. Este ajuste no se incluye en todos los análisis y es de relevancia debido a que puede afectar al comportamiento fractal de la serie. Es por ello por lo que los datos son tratados de forma previa al análisis para reducirlos a la parte que se quiere estudiar únicamente.

### Proceso de análisis

El análisis se realiza con el software Matlab, uno de los softwares más extendidos en para la computación académica y científica ya que incluye funciones y paquetes que hacen rápido y fácil su uso en multitud de aplicaciones.

### Lectura de datos

En este primer paso, se toman los datos ya tratados externamente para eliminar las fechas que no se quieren considerar como se ha mencionado, es decir, festivos y fines de semana. Es una parte más manual, aunque se automatiza creando una función de Matlab que se encargue de la lectura. Se guardan en vectores separados las series de fechas, las de cotización de los índices y las de volatilidad. El vector de fechas tiene está alineado con el de la serie temporal, conteniendo las cotizaciones para los días específicos a cada índice concreto, difiriendo por tanto el vector de fechas entre los índices, tanto en contenido como en longitud.

### Análisis exploratorio

A continuación, se comienza el estudio de las series con una representación gráfica que permite empezar a entender la serie en cuestión. Mediante una función que toma la serie de fechas y la de volatilidades, se crea una representación de la gráfica de la serie, otra con sus incrementos logarítmicos, y otra con su gráfico de autocorrelación.

El gráfico de autocorrelación o correlograma es en muchos casos empleado para evaluar de forma general la persistencia de una serie. Este se construye representando la función de autocorrelación aplicada a un retardo concreto, frente a los distintos valores de retardo. Esto da una imagen bastante más completa que la información que daría la autocorrelación para un único valor de retardo. Valores altos de autocorrelación para un retardo, indican que los puntos separados en la serie temporal por ese retardo están

correlacionados, mientras que valores bajos de autocorrelación indican una baja correlación entre esos puntos [24]. Un valor de 0 sería equivalente a ruido blanco.

Con todo ello, normalmente se reconoce una serie persistente por una secuencia de valores de autocorrelación positivos. Un ejemplo de persistencia en periodos cortos de tiempo serían valores altos de autocorrelación que luego se van a 0. En cambio, valores pequeños distintos de 0 que se mantienen para retardos grandes indican que la persistencia es baja y a largo plazo.

A continuación, se elabora una tabla con algunos de los principales componentes de la serie de incrementos logarítmicos, incluyendo datos como la media, desviación típica, máximo, mínimo, asimetría, curtosis, y otros. Con esto se permite tener completo el entendimiento previo de la serie de cara a un mejor análisis de los resultados que se obtengan.

## Cálculo del exponente de Hurst

Como siguiente paso, se procede al cálculo del exponente de Hurst a través de los tres métodos desarrollados en el capítulo anterior, es decir R/S, DFA y GHE.

Para los casos de R/S y DFA, es necesario fijar el tamaño mínimo de cada una de las subseries en las que se divide la serie principal para el análisis. De cara a tener una visión más exhaustiva, el análisis se realiza alterando el valor de este tamaño mínimo para tener una visión de la sensibilidad que puede tener el resultado final a este parámetro, tomando valores de 10, 25, 50, 75 y 100.

Una vez establecidos estos valores, se computa el exponente de Hurst siguiendo los procedimientos descritos anteriormente, obteniendo como resultado una tabla comparativa.

## Cálculo de intervalos de confianza

A continuación, y para poder evaluar de forma correcta el resultado de la fase anterior, se calculan los intervalos de confianza para series del tamaño de cada serie analizada. Esto se hace a través de la simulación de 10.000 series aleatorias a las que se les aplica el cálculo del exponente de Hurst a través de cada uno de los 3 métodos. Con los resultados obtenidos, se hallan los intervalos de confianza al 5% y al 95%.

## Cálculo de exponente de Hurst con ventana móvil

Por último, para completar el análisis, se hace un estudio a través de ventanas móviles, es decir, estableciendo un tamaño de ventana o número de días, e ir recorriendo la serie analizando la fractalidad de cada subgrupo. Supone una buena forma de observar la evolución del comportamiento fractal de una serie, permitiendo asociar ciertos resultados a eventos de mercado que hayan podido acontecer, o llegar a mayor profundidad en las conclusiones. Para ello, se ha fijado un tamaño de ventana de 360 días, es decir, el equivalente a un año.

En este caso, el tamaño mínimo de subgrupo para las subdivisiones en el cálculo de R/S y DFA queda fijado en un valor típico de 10. Además, el análisis por ventana móvil implica un cálculo del intervalo de confianza adicional, para el tamaño de ventana escogido, de nuevo utilizando una simulación de 10.000 series aleatorias.

# Capítulo 4. - Resultados

A continuación, se detallan los resultados obtenidos para cada índice de volatilidad junto con su índice subyacente de valores. Estos se explican agrupados por países de manera que se ve de forma conjunta al fractalidad del índice bursátil y el de volatilidad asociado.

## Fractalidad de los principales índices de volatilidad

### S&P 500 y serie de volatilidad VIX

#### *Análisis exploratorio*

Del índice S&P 500 y su serie de volatilidad asociada, el VIX, se toman valores desde el día 3 de enero de 2011. Ambas series contienen valores hasta el día 3 de junio de 2021. Cabe remarcar de nuevo en este apartado que se han eliminado los días festivos correspondiente a cada serie. En algunos casos estos no coinciden para el índice de volatilidad y su subyacente, probablemente debido a que el primero deriva del mercado de opciones, mientras que el segundo deriva de la bolsa de valores, que no necesariamente operarán los mismos días.

En la Figura 4 se observa cómo el principal índice americano ha tenido un importante crecimiento en el periodo de estudio, prácticamente triplicando en valor, con una gran caída en 2020 relacionada al impacto e incertidumbre generada por la llegada del Covid-19. El gráfico de incrementos logarítmicos ve también de forma notable el drástico impacto de la etapa del Covid-19 y tiene un valor medio de 0,00046. Por otro lado, el correlograma muestra una autocorrelación marcada que alterna entre valores positivos y negativos, que puede ser un indicador de antipersistencia en la serie, pues tendencias crecientes y decrecientes se seguirán secuencialmente, de manera que a valores altos tenderán a seguirles valores más bajos en el tiempo y viceversa, como explica la antipersistencia.

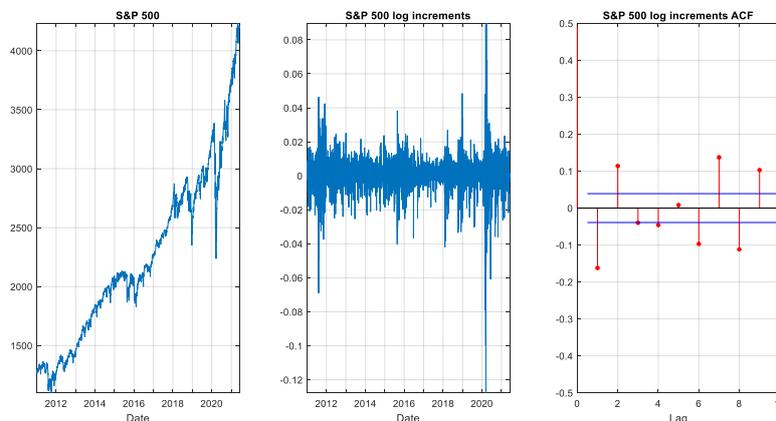


Figura 4. Análisis exploratorio de la serie S&P 500

Por otro lado, se muestra en la Figura 5 el mismo conjunto de gráficos asociados a la serie de volatilidad del S&P 500, el VIX. Se observa un llamativo pico en la serie alrededor de 2020 debido de nuevo al efecto del Covid-19 en los mercados, ya que la incertidumbre generada desembocó principalmente en una gran volatilidad producida por inversores que, con opiniones cambiantes en el corto plazo, y una marcada ausencia de información

completa para todo el mercado. En contraste con el análisis exploratorio de su subyacente, los incrementos logarítmicos alcanzan valores positivos y negativos mucho mayores, debido a variaciones intradía típicamente mayores en este índice. Su valor medio es de 0,000009, también muy centrado en 0. Por último, el correlograma indica que la correlación es negativa para un *lag* pequeño, indicando una tendencia a revertir la tendencia a muy corto plazo.

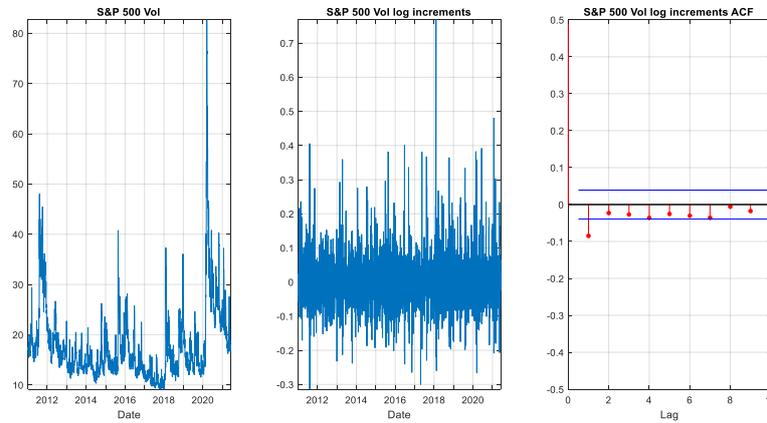


Figura 5. Análisis exploratorio del VIX

### Cálculo del exponente de Hurst

A continuación, se presenta el cálculo del exponente de Hurst para la totalidad de ambas series. En primer lugar, se calcula a través de los métodos R/S y DFA, alterando el valor de  $N_{\min}$ , es decir, el tamaño mínimo de la subserie en las que se divide la serie para el cálculo, mostrando así la sensibilidad del resultado a alteraciones en la consideración de la longitud del periodo temporal de la subserie. En la Tabla 1 se muestran los resultados, y se observa que en ambas series existe antipersistencia con ambos criterios, siendo en el S&P 500 mínima con valores cercanos a 0,5, y más acentuada en la serie de volatilidad. También se ve que es algo más fuerte al tomar el método DFA. Es decir, se espera que ambas series muestren reversión a la media en el largo plazo.

$N_{\min}$	SP& 500		VIX	
	R/S	DFA	R/S	DFA
10	0,471	0,443	0,376	0,331
25	0,469	0,436	0,360	0,309
50	0,470	0,422	0,342	0,285
75	0,486	0,433	0,319	0,264
100	0,480	0,418	0,318	0,268

Tabla 1. Valores R/S y DFA según  $N$  mínimo para S&P 500 y VIX

Completando el análisis con el criterio GHE, se observa que corrobora el resto de los métodos, aunque suaviza la antipersistencia del VIX alcanzando valores de 0,4.

	SP&500	VIX	$N_{\min}$
R/S	0,480	0,318	100
DFA	0,418	0,268	100
GHE	0,465	0,409	-

Tabla 2. Resultados exponente de Hurst R/S, DFA y GHE para S&P 500 y VIX

Por último, se realiza el cálculo de intervalos de confianza, para dar solidez a la interpretación de resultados. Se observa que los valores de antipersistencia del S&P 500 para el método R/S entran dentro de los límites, por lo que se puede considerar que no presenta realmente memoria a largo plazo, mientras que en el método DFA y en el GHE sí se rebasa el límite inferior, dando signos ligeros de antipersistencia. Por otro lado, la serie VIX muestra antipersistencia independientemente del criterio, indicando que esta serie sí presenta memoria al considerarla en su totalidad.

Se corroboran por tanto los resultados obtenidos por G.M. Caporale et al. [1] en su análisis para la serie 2004 – 2016, en la que obtuvieron valores de R/S de 0,41, también con indicando antipersistencia

		<b>R/S</b>	<b>DFA</b>	<b>GHE</b>
<b>SP&amp;500</b>	Low (95%)	0,431	0,439	0,471
	High (95%)	0,563	0,544	0,526
<b>VIX</b>	Low (95%)	0,432	0,438	0,471
	High (95%)	0,563	0,545	0,525

Tabla 3. Intervalos de confianza R/S, DFA y GHE al 95% para S&P 500 y VIX

### *Cálculo de exponente de Hurst con ventana móvil*

Por último, se completa el análisis observando la fractalidad para ventanas móviles, como se ha mencionado, mostrando la evolución de esta en el tiempo. Como se ha explicado, esta ventana tiene un tamaño de 360, es decir muestra la variación del exponente de Hurst en periodos de un año, variando en un día cada vez el comienzo del cálculo. En primer lugar, se ve en la Figura 6 la evolución del exponente de Hurst para el S&P 500, con una curva que mantiene su forma independientemente del criterio, pese a que en métodos como el R/S es más limpia y acentuada, mientras que en el GHE muestra más distorsión, pero está algo más centrada. Se observa que para la mayor parte de la década considerada se está en los límites de confianza, indicando movimientos aleatorios sin persistencia. Aún así, se denotan valores menores en el periodo 2011 – 2019, mientras que la llegada del Covid-19 alrededor de marzo de 2020 dispara los valores llegando a superar el límite superior claramente en el método DFA. Como se desarrollará en las conclusiones, aquí se ve como en momentos particulares como el Covid-19 con grandes diferencias entre la información disponible entre los inversores y clara heterogeneidad en el comportamiento de estos, la eficiencia de los mercados se ve reducida.

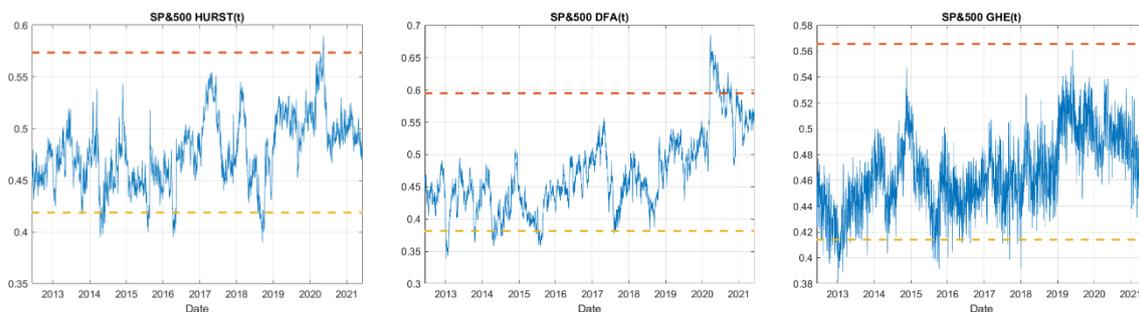
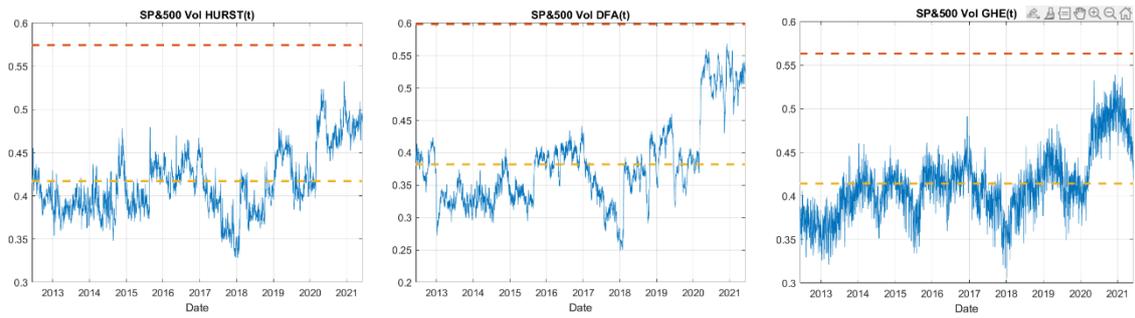


Figura 6. Análisis de ventana móvil para el S&P 500

Por otro lado, observando el análisis para la serie VIX llegamos a interesantes resultados de antipersistencia sostenida en el tiempo desde el inicio del periodo, hasta 2020



*Figura 7. Análisis de ventana móvil para el VIX*

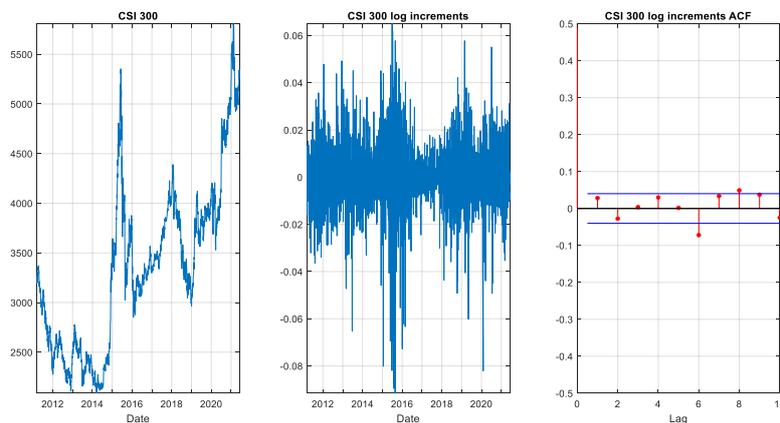
Observando los resultados de G.M. Caporale et al. para 2004 – 2016, en la que usaron ventanas de 300 días, se observa que el resultado es similar, con los valores entre 2011 y 2016 se mantienen en el rango 0,35 – 0,5. Pese a ello, y ampliando los resultados de su estudio, se observa que desde el fin de su análisis, se pasa por un valle de antipersistencia alcanzando el valor R/S de 0,25, seguido de un crecimiento prolongado hasta hoy, llegando a partir de 2020 a valores normales en torno a 0,5.

## CSI 300, Hang Seng y serie de volatilidad china

### *Análisis exploratorio*

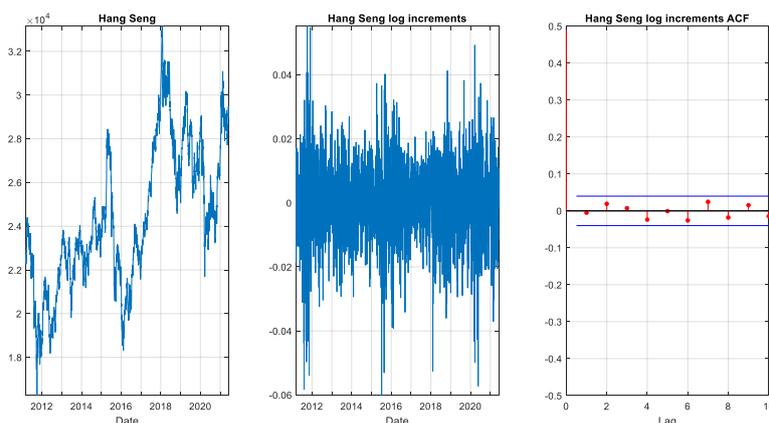
Pasando al análisis de los principales índices de China junto con su serie de volatilidad, se tienen las series del CSI 300, Hang Seng y el CBOE China ETF Volatility Index, en la franja temporal comprendida entre el 16 de marzo de 2011 y el 3 de junio de 2021, de nuevo retirando los días en que cada una de sus cotizaciones no tuvo variación por tratarse de un día festivo o fin de semana.

Comenzando con el análisis exploratorio del CSI 300, vemos unas cotizaciones crecientes en el periodo observado, con una gran caída en 2015, cuando la bolsa China sufrió su peor periodo desde 2007. El gráfico de incrementos logarítmicos tiene un valor medio de  $-0,00014$ , es decir, muy centrado en 0, que se dispersa con mucha mayor intensidad en el periodo de la caída de las cotizaciones en 2015. Por último, el correlograma muestra un único valor por debajo del límite inferior de confianza, mostrando que probablemente la serie no muestra gran persistencia.



*Figura 8. Análisis exploratorio del CSI 300*

Observando la otra serie de cotizaciones de índice analizada para esta geografía, el Hang Seng, se presenta una menor subida y caída en 2015 en las cotizaciones, por lo que el gráfico de incrementos logarítmicos no tiene una diferencia tan marcada en ese año, como lo tenía para el CSI 300. Este gráfico se centra en un valor medio de  $0,000097$ , y el correlograma, por su parte, no da signos de persistencia, con valores muy próximos a 0 con los *lags* estudiados.



*Figura 9. Análisis exploratorio del Hang Seng*

Finalizando el análisis exploratorio de las series chinas, se observa una serie de volatilidad con picos acordes con las grandes caídas de la bolsa de este país, comportamiento esperado en la volatilidad, pues los periodos de recesión disparan la incertidumbre inversora y aumenta la discordancia de visones y horizontes temporales. El gráfico de incrementos logarítmicos se centra en un valor medio de  $-0,00014$ , no tan pequeño como el de sus subyacentes, y el correlograma da posibles signos de antipersistencia a muy corto plazo.

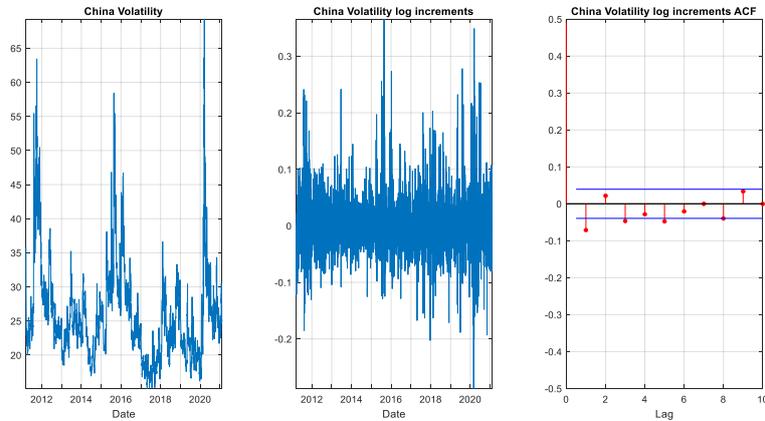


Figura 10. Análisis exploratorio de la serie de volatilidad china

### Cálculo del exponente de Hurst

Los resultados del análisis de fractalidad para el periodo completo muestran resultados similares a los obtenidos con el índice estadounidense, con los índices bursátiles más centrados en 0,5, mientras que el índice de volatilidad muestra antipersistencia. Esta similitud da muestras de consistencia en el análisis y es un buen signo de cara a las conclusiones generales a extraer.

No se ve especial sensibilidad a la alteración del tamaño de subserie  $N$ , y es notable la ligera discordancia entre el método R/S y el DFA para el Hang Seng, pues los resultados de uno y otro se posicionan a lados distintos de 0,5 indicando conclusiones opuestas. Pese a ello, se observará en la tabla de intervalos de confianza que ambos valores están dentro de sus respectivos intervalos de confianza, indicando que no se muestra persistencia ni antipersistencia.

$N_{\min}$	CSI 300		Hang Seng		China Volatility	
	R/S	DFA	R/S	DFA	R/S	DFA
10	0,524	0,541	0,522	0,491	0,412	0,362
25	0,527	0,551	0,526	0,489	0,406	0,348
50	0,537	0,564	0,534	0,488	0,406	0,339
75	0,541	0,552	0,540	0,482	0,396	0,332
100	0,563	0,589	0,536	0,473	0,395	0,311

Tabla 4. Valores R/S y DFA según  $N$  mínimo para CSI 300, Hang Seng, y volatilidad china

De nuevo, el análisis añadiendo el método GHE de Hurst normalizado corrobora los análisis previos dando resultados alineados.

	CSI 300	Hang Seng	China Volatility	$N_{\min}$
R/S	0,563	0,536	0,395	100

<b>DFA</b>	0,589	0,473	0,311	100
<b>GHE</b>	0,522	0,503	0,438	-

Tabla 5. Resultados exponente de Hurst R/S, DFA y GHE para CSI 300, Hang Seng y volatilidad china

Finalizando el análisis con los intervalos de confianza, se concluye una posible ligera persistencia para el caso del CSI 300 en el periodo estudiado, al quedar sus valores R/S y DFA ligeramente por encima del límite superior de confianza, pese a que su valor GHE, siendo este el método más completo y criterio último del proyecto, muestra un valor dentro de los límites. El Hang Seng, por su parte, muestra valores dentro de límites en todos los casos, indicando ausencia de memoria en la serie.

La serie de volatilidad queda con valores por debajo del límite inferior para los tres criterios, confirmando la percepción de antipersistencia generalizada en series de volatilidad para el periodo estudiado que se obtiene de los análisis previos. A continuación, estos resultados, se completan con el análisis de ventana móvil.

		<b>R/S</b>	<b>DFA</b>	<b>GHE</b>
<b>CSI 300</b>	Low (95%)	0,423	0,440	0,469
	High (95%)	0,571	0,545	0,526
<b>Hang Seng</b>	Low (95%)	0,425	0,435	0,470
	High (95%)	0,569	0,547	0,526
<b>China Volatility</b>	Low (95%)	0,428	0,438	0,472
	High (95%)	0,566	0,544	0,526

Tabla 6. Intervalos de confianza R/S, DFA y GHE al 95% para CSI 300, Hang Seng y volatilidad china

### Cálculo de exponente de Hurst con ventana móvil

El análisis de ventana móvil para el CSI 300 no muestra grandes alteraciones respecto a valores neutros, pues se mantiene alrededor de 0,5 especialmente en el criterio de referencia GHE. Con ello, se considera una serie aleatoria al CSI 300 en el periodo estudiado, similar al caso del S&P 500.

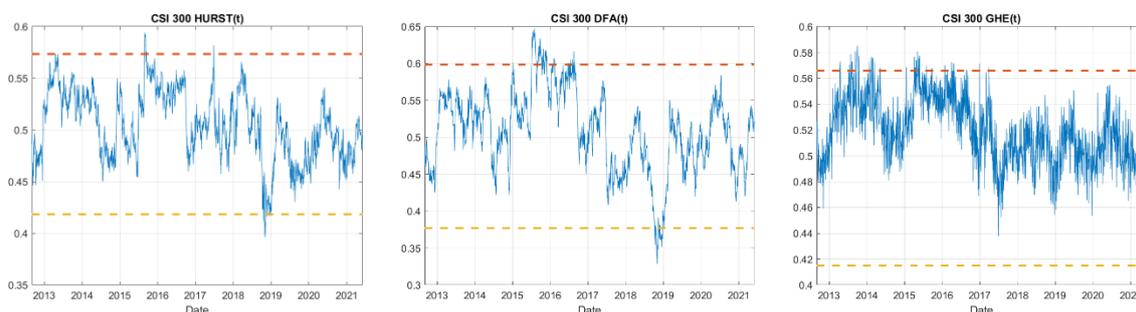


Figura 11. Análisis de ventana móvil para el CSI 300

Los resultados del Hang Seng están alineados con el otro índice chino estudiado, el CSI 300, por lo que se considera que su fractalidad va de la mano por norma general. Las gráficas de ambos índices son similares, difiriendo en la segunda mitad del criterio GHE, donde llega a aumentar la persistencia considerablemente en el Hang Seng.



Figura 12. Análisis de ventana móvil para el Hang Seng

Finalmente, para la serie de volatilidad se observan valores menores, que quedan en algunos periodos bajo el límite inferior del intervalo de confianza. La antipersistencia que se concluye para la volatilidad china, especialmente en el periodo 2017 – 2019, es menos intensa y prolongada que la observada para el índice estadounidense, probablemente debido a que los periodos de recesión devuelven la fractalidad de la volatilidad a valores de aleatoriedad alrededor de 0,5, y la bolsa china sufrió un golpe en 2015 mucho menos notable en el S&P 500.

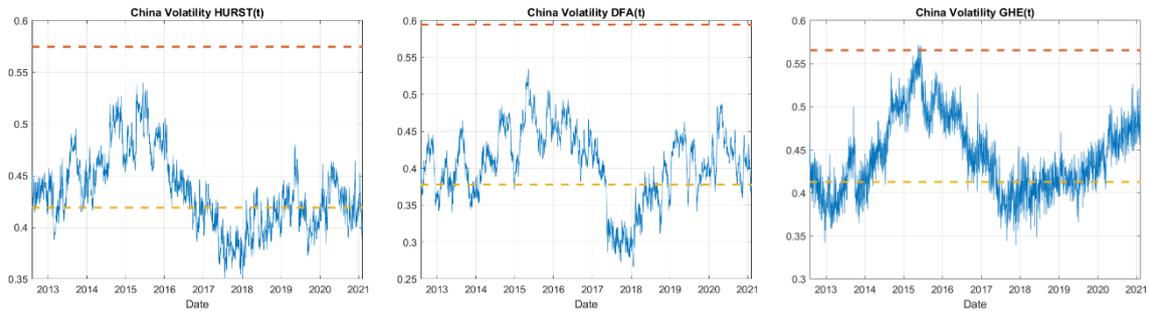


Figura 13. Análisis de ventana móvil para la serie de volatilidad de China

# Eurostoxx 50 y serie de volatilidad europea

## Análisis exploratorio

El análisis del principal índice europeo, el Eurostoxx 50, junto con su índice de volatilidad asociado, el VSTOXX, se realiza desde el 3 de enero de 2011 hasta el 3 de junio de 2021. Cabe remarcar de nuevo la eliminación de fechas de festivos y fines de semana. Se observa una cotización con gran variación en el periodo total, con etapas de caídas seguidas de subidas notables. En el gráfico de incrementos logarítmicos, centrado en un valor medio de 0,00014, sobresalen de nuevo las caídas de marzo de 2020, siendo visibles en este caso también las de 2016. Por su parte, el correlograma muestra valores sobresalientes de los límites en lags de 7 y 8, tanto por el lado superior como el inferior,, de una forma similar a lo que mostraba el S&P 500, pero menos pronunciada.

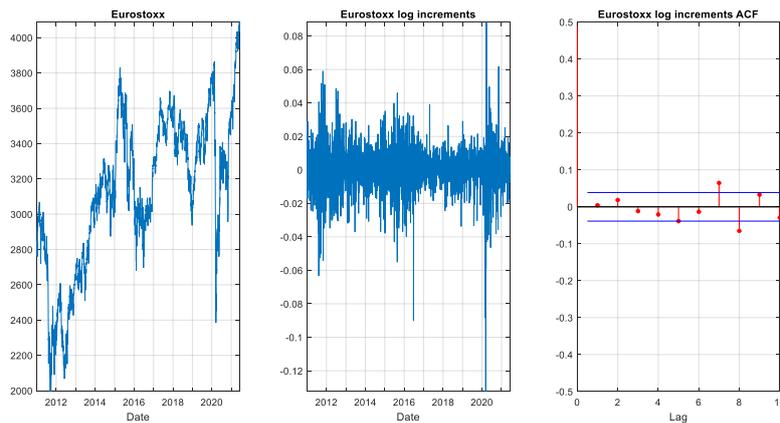


Figura 14. Análisis exploratorio del Eurostoxx 50

Por su parte, el análisis exploratorio de la volatilidad europea muestra, de forma similar a casos previos, un pico en marzo de 2020 asociado al Covid-19, valores con mayor dispersión de incrementos logarítmicos, pero a su vez más centrados con un valor medio de -0,00009, y un correlograma sin signos notables que indiquen persistencia o antipersistencia.

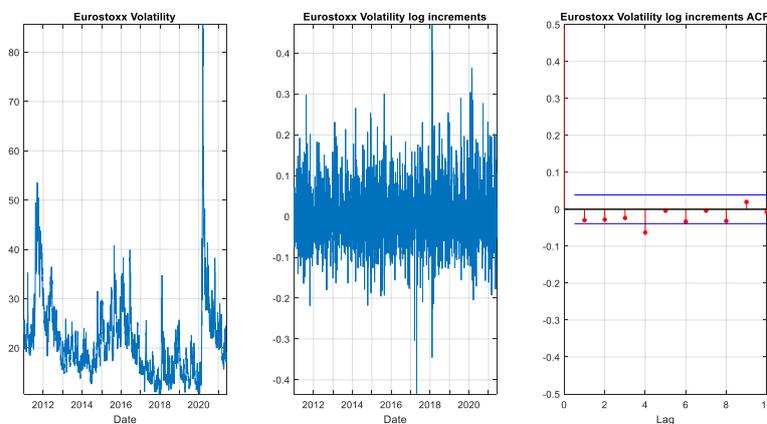


Figura 15. Análisis exploratorio de la serie de volatilidad europea

### Cálculo del exponente de Hurst

Los valores de exponente de Hurst del Eurostoxx 50 y su volatilidad de nuevo se alinean a los índices previos, con la volatilidad mostrando valores entre 0,3 y 0,4 y el subyacente más centrado en 0,5, para los criterios R/S y DFA.

<b>N<sub>min</sub></b>	<b>Eurostoxx 50</b>		<b>Eurostoxx 50 Volatility</b>	
	<b>R/S</b>	<b>DFA</b>	<b>R/S</b>	<b>DFA</b>
10	0,502	0,482	0,382	0,337
25	0,495	0,477	0,365	0,314
50	0,498	0,475	0,361	0,308
75	0,518	0,471	0,364	0,306
100	0,521	0,463	0,376	0,317

Tabla 7. Valores R/S y DFA según N mínimo para Eurostoxx 50 y volatilidad europea

Al agregar el criterio GHE, se observa que corrobora los resultados de los otros criterios, aunque su valor en el índice de volatilidad asciende respecto al R/S y al DFA, lo cual ya ocurría tanto en los casos de China como Estados Unidos. Lo que esto puede indicar, es que el procedimiento normalizador que sigue este método, y que debería aumentar su fiabilidad, indica que las series de volatilidad son algo menos antipersistentes que lo que muestran los otros dos criterios, para el periodo temporal estudiado.

	<b>Eurostoxx 50</b>	<b>Eurostoxx 50 Volatility</b>	<b>N<sub>min</sub></b>
<b>R/S</b>	0,521	0,376	100
<b>DFA</b>	0,463	0,317	100
<b>GHE</b>	0,494	0,438	-

Tabla 8. Resultados exponente de Hurst R/S, DFA y GHE para Eurostoxx 50 y volatilidad europea

De nuevo, analizando en el contexto de intervalos de confianza, se observa que el índice Eurostoxx 50 tiene un comportamiento neutro y aleatorio manteniéndose en intervalos de confianza, mientras que el de volatilidad muestra antipersistencia sobrepasando el límite inferior en todos los casos. De nuevo, este análisis de todo el periodo será complementado con el análisis de ventana móvil.

		<b>R/S</b>	<b>DFA</b>	<b>GHE</b>
<b>Eurostoxx 50</b>	Low (95%)	0,431	0,439	0,471
	High (95%)	0,564	0,544	0,525
<b>Eurostoxx 50 Volatility</b>	Low (95%)	0,422	0,438	0,471
	High (95%)	0,572	0,548	0,525

Tabla 9. Intervalos de confianza R/S, DFA y GHE al 95% para Eurostoxx 50 y volatilidad europea

### Cálculo de exponente de Hurst con ventana móvil

La gráfica de valores de exponente de Hurst para el Eurostoxx 50 con ventana móvil resulta muy similar a la obtenida para el mismo análisis sobre el S&P 500. Se tienen valores neutros en la mayor parte del periodo, con una última etapa que muestra persistencia, desde marzo de 2020.

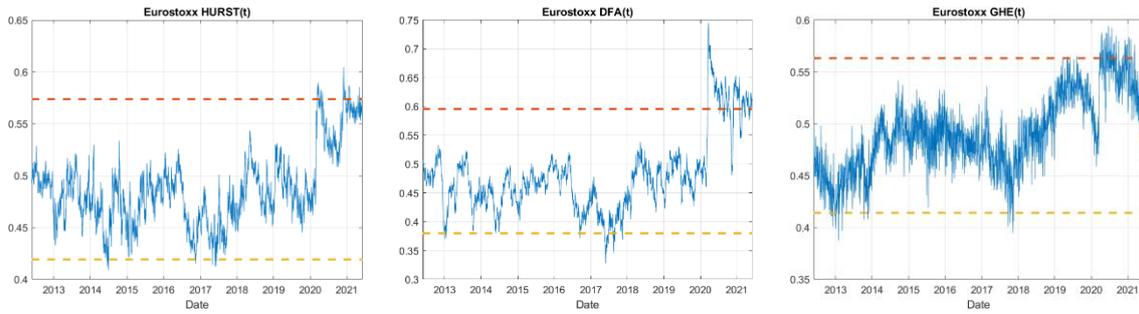


Figura 16. Análisis de ventana móvil para el Eurostoxx 50

De la misma forma, el índice de volatilidad europeo se comporta de forma similar a su respectivo estadounidense, el VIX, con antipersistencia prolongada entre 2011 y 2020 que vuelve a tender hacia 0,5 posteriormente. Al igual que en el VIX, esta antipersistencia entre 2011 y 2020 se ve reducida entre 2016 y 2018.

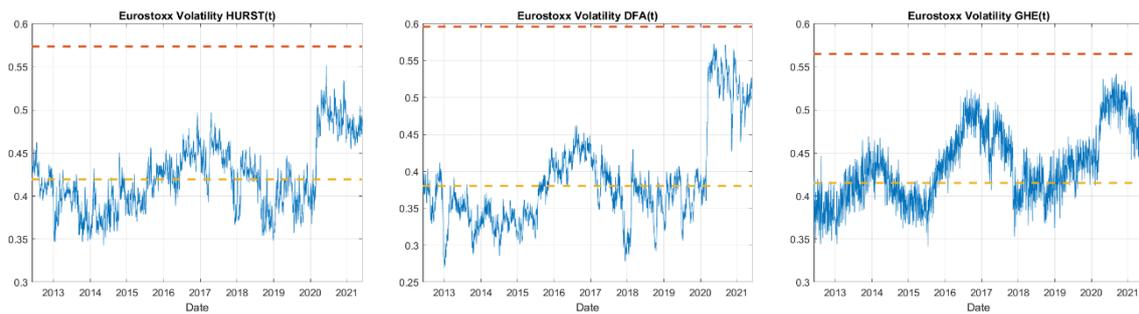


Figura 17. Análisis de ventana móvil para la serie de volatilidad del Eurostoxx 50

## Nikkei 225 y serie de volatilidad japonesa

### Análisis exploratorio

Finalmente, se analiza Japón con su principal índice, el Nikkei 225 y su serie de volatilidad asociada, entre el 7 de febrero de 2011 y el 5 de febrero de 2021, de nuevo eliminando fechas de festivos y fines de semana que puedan distorsionar el análisis.

Comenzando con el análisis exploratorio del Nikkei 225, se observa una prolongada subida a lo largo del periodo en las cotizaciones, similar a la del S&P 500. El gráfico de incrementos logarítmicos está centrado en 0,0004, y el correlograma no da grandes signos que indiquen memoria en la serie.

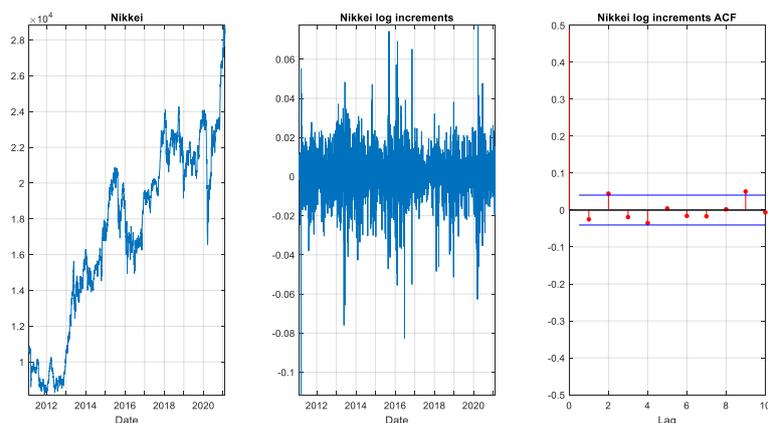


Figura 18. Análisis exploratorio del Nikkei 225

Por su parte, la gráfica del índice de volatilidad muestra diversos picos a lo largo del periodo, con uno claramente superior en 2011 en el extremo izquierdo de la gráfica, asociado al gran terremoto y tsunami acontecido en el país en esas fechas, con las implicaciones turbulentas que tienen desastres naturales como estos en los mercados financieros. Al igual que en los otros casos, se percibe otro pico asociado al Covid-19. El gráfico de incrementos logarítmicos se centra en un valor medio de 0,00009, y el correlograma muestra valores negativos en *lags* de valor 3 y 4, por debajo del límite inferior del intervalo de confianza, dando signos de posible antipersistencia.

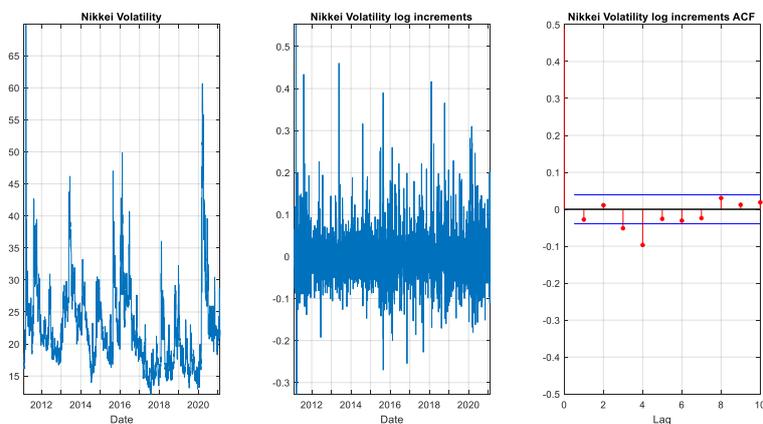


Figura 19. Análisis exploratorio de la serie de volatilidad del Nikkei 225

### Cálculo del exponente de Hurst

Los resultados de cálculo de exponente de Hurst para la serie completa terminan de confirmar los obtenidos en el resto de las series, con los métodos R/S y DFA mostrando antipersistencia para el índice de volatilidad y valores alrededor de 0,5 para el subyacente.

$N_{\min}$	Nikkei 225		Volatilidad Nikkei 225	
	R/S	DFA	R/S	DFA
10	0,517	0,495	0,416	0,368
25	0,519	0,487	0,411	0,343
50	0,518	0,475	0,398	0,299
75	0,520	0,478	0,393	0,279

100	0,522	0,481	0,394	0,264
-----	-------	-------	-------	-------

Tabla 10. Valores R/S y DFA según N mínimo para Nikkei 225 y volatilidad japonesa

De nuevo, el valor GHE va alineado con los otros criterios, y es algo superior a ellos en el caso de la volatilidad, hecho que también ocurría con anterioridad.

	Nikkei	Nikkei Volatility	N <sub>min</sub>
<b>R/S</b>	0,522	0,394	100
<b>DFA</b>	0,481	0,264	100
<b>GHE</b>	0,501	0,454	-

Tabla 11. Resultados exponente de Hurst R/S, DFA y GHE para Nikkei 225 y volatilidad japonesa

Pese a ello, vuelve a darse el hecho de que para la volatilidad todos los criterios indican antipersistencia para el periodo completo, incluido el GHE, que teniendo un valor de 0,454 sigue quedando por debajo del límite inferior del intervalo de confianza. Asimismo, el subyacente no muestra signos de persistencia ni antipersistencia.

		R/S	DFA	GHE
<b>Nikkei 225</b>	Low (95%)	0,421	0,434	0,470
	High (95%)	0,574	0,550	0,526
<b>Volatilidad Nikkei 225</b>	Low (95%)	0,425	0,436	0,471
	High (95%)	0,571	0,548	0,526

Tabla 12. Intervalos de confianza R/S, DFA y GHE al 95% para Nikkei 225 y volatilidad japonesa

### Cálculo de exponente de Hurst con ventana móvil

Finalizando el estudio con las gráficas de resultados de exponente de Hurst para ventanas móviles de 360, se vuelve a observar un índice con valores mayormente centrados en el intervalo de confianza, indicando que el Nikkei 225 no muestra memoria a largo plazo.

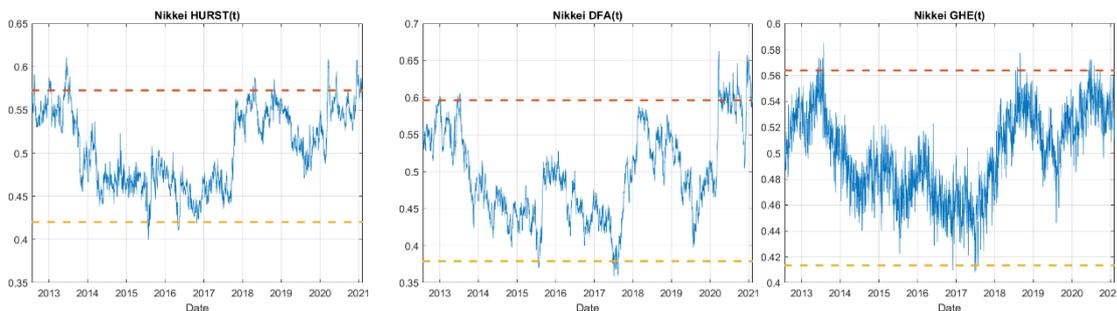
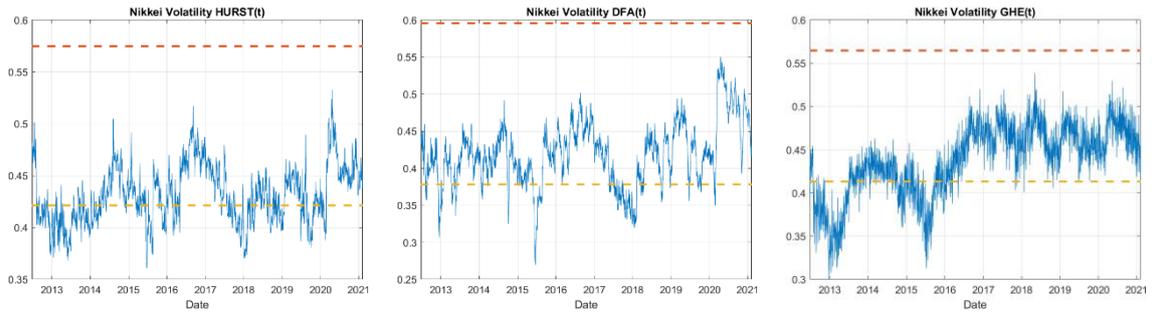


Figura 20. Análisis de ventana móvil para el Nikkei 225

Por su parte, la serie de volatilidad tiene en este caso gráficas algo menos comparables entre criterios, pues el método GHE difiere con los otros en el periodo 2017 – 2019, en el que R/S y DFA pasan por etapas antipersistentes mientras que el GHE no denota un descenso claro en los valores del exponente de Hurst.

Pese a ello, queda una similitud notable con otros índices de volatilidad, pues se pasa por un periodo antipersistente que posteriormente vuelve a valores neutros.



*Figura 21. Análisis de ventana móvil para la serie de volatilidad del Nikkei 225*

## Capítulo 5. - Conclusiones

Como se menciona a lo largo del proyecto, este trabajo tiene como finalidad la actualización de los resultados obtenidos por G.M. Caporale et al. en su análisis fractal del S&P 500 y el VIX entre 2004 y 2016, a través de la adición de nuevas fechas hasta el año presente, y mercados de otras geografías. Con ello, se pretende corroborar sus conclusiones, analizar el efecto de la pandemia y estudiar las implicaciones en la eficiencia de los mercados.

Para ello, se han estudiado los índices S&P 500, CSI 300, Hang Seng, Eurostoxx 50 y Nikkei 225 en el periodo 2011 – 2021 y a través de tres métodos de cálculo de exponente de Hurst diferentes: R/S, DFA y GHE. Esto se ha realizado tanto para las series completas como para ventanas móviles.

Los resultados obtenidos han sido consistentes para los distintos métodos, y el análisis tanto completo como de ventana móvil ha permitido comprobar tanto la visión general de persistencia de las series como el detalle de esta.

### Actualización de la literatura

Como se describe en la revisión de la literatura, Caporale halla antipersistencia en el periodo 2004 – 2016 para la serie VIX, con valores R/S entre 0,35 y 0,5 para el análisis de ventana móvil, y un valor de 0,41 para la totalidad de la serie. En el presente proyecto, se obtienen valores similares en la etapa analizada correspondiente de 2011 – 2016, corroborando sus resultados.

A partir de 2016, la serie VIX prosigue en su tendencia antipersistente, llegando a alcanzar valores notablemente bajos en 2018. Pese a ello, en 2020 la llegada del Covid-19 y su efecto de turbulencia en los mercados financieros devuelve el exponente de Hurst del VIX a valores neutros en torno a 0,5. Este comportamiento es muy similar en los índices de volatilidad europeos, chinos y japoneses, que replican la curva de forma muy llamativa, con periodos de antipersistencia prolongados seguidos por una vuelta a los valores neutros.

Por su parte, los principales índices bursátiles estudiados muestran aleatoriedad con valores de exponente de Hurst dentro de los intervalos de confianza para la mayor parte del periodo estudiado, denotando ausencia de memoria. Cabe remarcar que el efecto del Covid-19 aumenta la persistencia de índices como el S&P 500, lo cual se observa sobre todo con el método DFA.

### Conclusiones sobre eficiencia de mercado

La eficiencia de los mercados viene marcada por un comportamiento de “paseo aleatorio”, y la mejor indicación de este comportamiento en este proyecto son los valores de exponente de Hurst cercanos a 0,5. En el caso de los índices bursátiles, todos han mostrado valores que indican aleatoriedad, tanto en el periodo completo como en casi la totalidad de las gráficas de ventana móvil. Esto es lo que cabe esperar de un gran índice bursátil, pues congregan una gran cantidad de información que está mayormente disponible para los inversores, lo cual permite que la eficiencia del mercado sea casi completa.

En este aspecto, se ha comprobado que las distintas geografías y sus índices tienen un comportamiento general de eficiencia de mercado en los índices.

Por su parte, en línea con las conclusiones obtenidas por G.M. Caporale et al. en su estudio, los índices de volatilidad tienden a mostrar antipersistencia en periodos normales de mercado, implicando una reversión a la media. Pese a ello, en etapas de crisis la persistencia aumenta, conclusión que es fácilmente visible con el efecto del Covid-19 en el VIX, y que concluyen de la misma forma G.M. Caporale et al. sin tener acceso a dicho periodo temporal. Lo que esto indica, es que existe un sesgo a revertir a la media en etapas normales que se ve reducido en momentos de crisis.

Quedan por tanto corroboradas las conclusiones de G.M. Caporale et al. en su trabajo, observándose que estas siguen aplicando tras 5 años de mercado y una corta recesión, y añadiendo la extensión de estas a los principales índices de China, Japón y Europa.

## Capítulo 6. - Bibliografía

- [1] G. M. Caporalea, L. Gil-Alanab y A. Plastunc, «Is market fear persistent? A long-memory analysis,» *Finance Research Letters*, 2018.
- [2] C. M. Silva Barrios, «Behavioral finance: Principales sesgos y heurísticos,» *Universidad Pontificia Comillas*, 2018.
- [3] J. M. M. Sánchez-Ocaña, «El análisis técnico y la eficiencia del mercado,» *Universidad Pontificia Comillas*, 2014.
- [4] A. Parejo, J. Calvo, A. R. Sáiz, Luis, Cuervo y Á. A. Eduardo, *Manual del estado financiero español*, Ariel, 2016.
- [5] J. López Pascual y A. Sebastián González, *Gestión Bancaria, Factores claves en un entorno competitivo*, McGrawHill, 2008.
- [6] McGrawHill, *Finanzas e intermediarios bancarios*, McGrawHill, 2008.
- [7] M. Levinson, *Guide to financial markets*, The Economist, 2006.
- [8] F. J. T. López, «Análisis del índice de volatilidad VIX, y su relación numérica con información global de mercado.,» UCM, 2020.
- [9] I. P. Funes, «Fractales en finanzas: Una triple aplicación. Contraste de la aleatoriedad, la gestión de cisnes negros, y el Behavioral Finance,» 2016.
- [10] N. B. R. Lopes, «Fractal and multifractal analysis: A review,» 2009.
- [11] M. Joshi, A. K. Agarwal y B. Gupta, «Fractal Image Compression and Its Techniques: A Review,» *Soft Computing: Theories and Applications*, 2018.
- [12] A. D. Ieva, «The Fractal Geometry of the Brain: An Overview,» 2016.
- [13] F. M. Mwema, E. T. Akinlabi y O. P. Oladijo, «Fractal Analysis of Thin Films Surfaces: A Brief Overview,» 2019.
- [14] A. B. Joher y S. G. Montoro, «Fractales en los mercados financieros,» 2009.
- [15] M. d. l. N. L. García y J. P. R. Requena, «Different methodologies and uses of the Hurst exponent in econophysics,» *Estudios de Economía Aplicada*, vol. 37, nº 2, pp. 1-13, 2019.
- [16] R. Weron, «HURST: MATLAB function to compute the Hurst exponent using R/S Analysis,» *HSC Software M11003, Hugo Steinhaus Center, Wroclaw University of Technology*, 2011.

- [17] H. E. Hurst, «Long-term storage capacity of reservoirs,» *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, 1951.
- [18] C. K. Peng, S. V. Buldyrev, S. Havlin, M. Simons, H. E. Stanley y A. L. Goldberger, «Mosaic organization of DNA nucleotides,» *Physical Review*, vol. 49, 1994.
- [19] R. Weron, «Estimating long-range dependence: finite sample properties and confidence intervals,» *Physica A*, pp. 285-299, 2002.
- [20] R. Weron, «DFA: MATLAB function to compute the Hurst exponent using Detrended Fluctuation Analysis (DFA),» 2011.
- [21] T. D. Matteo, «Multi-scaling in finance,» *Quantitative Finance*, 2006.
- [22] R. Dominique y L. E. Rivera-Solis, «Mixed fractional Brownian motion, short and long-term Dependence and economic conditions: the case of the SP-500 Index,» 2011.
- [23] J. Yonghonga, N. He y R. Weihua, «Time-varying long-term memory in Bitcoin market,» *Finance Research Letters*, 2017.
- [24] B. D. Malamud y D. L. Turcotte, *Journal of Statistical Planning and Inference*, vol. 80, 1998.
- [25] M. Kale y F. B. Butar, «Fractal Analysis of Time Series and Distribution Properties of Hurst Exponent,» 2011.