Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales (ICADE)

TEORIA DE JUEGOS EN ESTRATEGIA EMPRESARIAL

Autor: Elvira Bausili Llamas

Director: Gonzalo Gómez Bengoechea

MADRID | Junio 2023

Agradecimientos

La elección de este Trabajo de Fin de Grado me parece de especial interés por dos motivos, principalmente. Por una parte, y considerando el fin de mis estudios universitarios, la utilización de modelos matemáticos para la optimización de la estrategia empresarial supone la combinación idónea de todos los conocimientos y herramientas que he adquirido a lo largo de mis dos carreras: Ingeniería Industrial (con especialización en Organización Industrial, ICAI) y Administración y Dirección de Empresas (ICADE). Asimismo, y mirando al futuro más inminente, observo mi próxima entrada en el mundo laboral en el sector de la consultoría estratégica. Esta temática de TFG me ofrece la oportunidad de estructurar un pensamiento crítico, analítico y resolutivo; orientado a la búsqueda de eficiencia en la empresa, que puede resultarme de gran utilidad como consultora.

Me gustaría agradecer el apoyo recibido del profesor Gonzalo Gómez Bengoechea (Universidad Pontificia de Comillas) desde los inicios de este proyecto con la recopilación de la base de datos, y al profesor Esteban Pettruzzello (University of Miami) por la gran calidad docente recibida en sus clases de la asignatura de Game Theory, gracias a la cual he podido sentar las bases adecuadas para la elaboración de este trabajo.

Índice de contenidos

Índice de tablas

Índice de figuras

Capítulo 1. DEFINICIÓN DEL TRABAJO

1.1 CONTEXTUALIZACIÓN

En el ámbito empresarial, existen multitud de situaciones de interacción entre distintos stakeholders en las que estos deben tomar decisiones estratégicas y posicionarse de acuerdo con sus propios objetivos para maximizar su rendimiento. En este aspecto, puede plantearse la existencia de alguna herramienta que permita mecanizar el proceso de toma de decisiones con el fin de optimizar los resultados para todas las partes interesadas, logrando así una mayor eficiencia económica.

La teoría de juegos, en esencia, estudia cómo y por qué tomamos decisiones; basando la formulación de estrategias en predicciones de las acciones futuras del adversario. Es una rama de las matemáticas que se ocupa del análisis de estrategias para afrontar situaciones competitivas en las que el resultado de la decisión de una persona depende en gran medida de las acciones de otros participantes. [1]

Esta interdependencia estratégica se produce en una situación social cuando lo que es mejor que haga alguien depende de lo que haga otra persona o agente implicado. Por ejemplo, en el caso de un penalti de fútbol, el delantero lanzará el balón orientado a la derecha o a la izquierda de la portería en función de dónde se crea que portero irá a pararlo. La teoría de juegos se ha aplicado en diversos contextos de economía, política, biología y estrategias de guerra.

En el ámbito empresarial, el director de una empresa basa sus decisiones de gestión y estrategia en varios factores, como sus predicciones de los movimientos de un competidor y las respuestas previstas a esos movimientos. Si estas previsiones son exactas, la teoría de juegos proporciona un marco matemático para analizar el curso de acción con más probabilidades de producir los resultados deseados [2] (Emporia State University, 2021).

La teoría de juegos ayuda a cada participante a desarrollar su estrategia óptima para, por ejemplo, fijar el precio de los productos, determinar cuándo lanzar un producto o decidir cuánto producir. Puede ayudar a una empresa a prever de antemano lo que harán sus rivales y muestra cuál sería la estrategia más eficiente incluso si un competidor sorprendiera al mercado con un movimiento inesperado.

De acuerdo con McKinsey, 2009: "En tiempos de incertidumbre, la teoría de juegos debería pasar a primer plano como herramienta estratégica, ya que ofrece perspectivas sobre cómo podrían actuar los jugadores en diversas circunstancias, así como otro tipo de información valiosa para la toma de decisiones." [3]

1.2 PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN. JUSTIFICACIÓN

Tomando en consideración la contextualización de la temática del presente Trabajo de Fin de Grado, se abordará la siguiente cuestión: ¿cómo puede la teoría de juegos ser de utilidad en la toma de decisiones estratégicas en el mundo empresarial? Para dar respuesta a esta cuestión, se profundizará en el marco teórico actual de la estrategia empresarial y de la teoría de juegos, con el fin de comprender posibles puntos en común, diferencias y cómo puede esta última aplicarse de forma eficiente para la toma de decisiones empresariales.

Una vez comprendido el fundamento teórico, se expondrán tres casos de aplicación directa de la teoría de juegos en distintos contextos de estrategia empresarial de acuerdo con la bibliografía, siendo este el nexo entre la base teórica descriptiva de estrategia en teoría de juegos y el enfoque práctico de modelización del juego de lanzamiento de penaltis.

Posteriormente, y como ya mencionábamos, llevaremos a cabo nuestro propio análisis empírico, haciendo uso de la teoría de juegos en un caso real de lanzamiento de penaltis, un caso muy representativo de interacción simultánea con interdependencia estratégica. Se desarrollarán todas las fases del proceso de modelización, desde la recopilación de la base de datos hasta el análisis de los resultados; y las conclusiones extraídas de este estudio serán utilizadas para llevar a cabo una modelización de la situación económica de duopolio desde la perspectiva de la optimización de la estrategia para la empresa.

La conexión entre la teoría de juegos y estrategia empresarial ha existido durante más de 50 años, planteándose como herramienta de gestión. En entornos académicos, la teoría de juegos se centra en derivar lógicamente predicciones de comportamiento racionales y probables para todos los jugadores, buscando una situación de equilibrio fundamentado en una serie de supuestos.

Sin embargo, el mundo real es más desordenado y contiene un elevado número de variables externas y factores de azar difíciles de captar, por lo que la teoría de juegos pierde aplicabilidad. En concreto, existe una mayor divergencia al tratar de utilizar el enfoque de teoría de juegos en problemas empresariales prácticos que evolucionan dinámicamente, ya que las empresas que utilizan este enfoque a menudo no consiguen encontrar el equilibrio adecuado entre la simplificación de un problema para su modelización y ser capaces de conservar la complejidad suficiente para hacerlo relevante. [3]

En este trabajo, trataremos de lograr este equilibrio entre la simplificación necesaria para la aplicabilidad de la teoría tratando de no desechar información valiosa que pueda ser determinante en el desarrollo de la situación en el entorno real.

1.3 OBJETIVOS

Como se explicaba con anterioridad, la finalidad específica del presente Proyecto de Fin de Grado consiste en demostrar la utilidad de la teoría de juegos como herramienta para maximizar la eficiencia en la toma de decisiones estratégicas en el ámbito empresarial. Con este propósito, se establecen ciertos objetivos más definidos detallados a continuación:

- **Objetivo 1. Profundizar en el entendimiento teórico actual de la teoría de juegos y su aplicabilidad en estrategia empresarial según la bibliografía**

Para comenzar nuestro Trabajo de Fin de Grado, será necesario investigar y analizar el conocimiento existente en la actualidad sobre teoría de juegos, estrategia y la relación entre ellos; con el fin de sentar las bases teóricas esenciales para poder desarrollar las siguientes secciones de este trabajo, de enfoque más práctico. Este objetivo quedará recogido en el

- **Objetivo 2. Explorar casos de aplicación de la teoría de juegos en contextos concretos de toma de decisiones empresariales**

Este segundo objetivo pretende mostrar tres situaciones concretas en las que se desarrolla la estrategia de la compañía haciendo uso de la lógica subyacente en la teoría de juegos mediante la modelización de las circunstancias de acuerdo con la bibliografía existente. Los tres casos serán elegidos con el propósito de abarcar una mayor variedad de tipologías de juego, y poder así deducir una mayor diversidad de conclusiones que poder aplicar al mundo de la empresa.

- **Objetivo 3. Aplicar teoría de juegos en un experimento real: modelización del lanzamiento de penaltis**

Esta parte del proyecto se centrará en el desarrollo de un análisis empírico de aplicación de la teoría de juegos de principio a fin. Para ello, se partirá de la recopilación de la base datos de lanzamiento de penaltis (realizada por mí misma como proyecto del departamento de la Research Community de ICADE), de la que se extraerán las primeras estadísticas descriptivas que permitan exponer una visión de conjunto de la información. A continuación, se tratará de modelizar la interacción de los lanzamientos de penaltis según la teoría de juegos, estableciendo sus distintos componentes y la matriz de recompensas. Finalmente, se procederá a la resolución del juego, la obtención de las conclusiones más relevantes y se llevará a cabo la misma metodología de este estudio experimental aplicaa en la situación económica de un duopolio.

1.4 METODOLOGÍA

Este trabajo consta de una parte esencialmente teórica, basada en la recopilación de conocimientos de teoría de juegos y estrategia empresarial hallados en la bibliografía (Objetivo 1). No obstante, la aportación diferencial será la aplicación práctica, focalizada en ejemplificaciones del uso de teoría de juegos en el ámbito de estrategia empresarial (Objetivo 2) y en el análisis empírico del uso de teoría de juegos en el caso de lanzamiento de penaltis (Objetivo 3). De este caso de estudio real se extraerán ciertas conclusiones que serán posteriormente contrastadas en la optimización de la estrategia en una situación de duopolio real.

Una vez definido el problema a resolver y los objetivos concretos en los que se centrará este proyecto, procederemos a distribuir las tareas correspondientes en el intervalo de tiempo asignado a este Trabajo de Fin de Grado mediante el diagrama de Gantt expuesto a continuación:

Tarea asignada	Fecha de inicio	Fecha de finalización	Estado	05.09.2022	19.09.2022	03.10.2022	17.10.2022	31.10.2022	14.11.2022	28.11.2022	Exámenes finales, Navidad, inicio nuevo trabajo	06.03.2023	20.03.2023	03.04.2023	17.04.2023	01.05.2023	15.05.2023	29.05.2023	12.06.2023
TRABAJO FIN DE GRADO	05.09.2022	13.02.2023	Abierto																
Objetivo 0. Definición y contextualización	05.09.2022	28.11.2022	Cerrado																
Enfoque del trabajo. Reuniones previas	05.09.2022	03.10.2022	Cerrado																
Entrega Propuesta desarrollo TFG	03.10.2022	14.11.2022	Cerrado																
Capítulo 1. Definición del trabajo	31.10.2022	28.11.2022	Cerrado																
Objetivo 1. Estado de la cuestión	31.10.2022	12.12.2022	Cerrado																
Capítulo 2.1 Marco teórico	31.10.2022	28.11.2022	Cerrado																
Capítulo 2.2 Teoría de Juegos en Estrategia Empresarial	14.11.2022	12.12.2022	Cerrado																
Objetivo 2. Aplicaciones de Teoría de Juegos en Estrategia Empresarial	28.11.2022	20.03.2023	Cerrado																
Capítulo 3.1.1 Caso I	28.11.2022	20.03.2023	Cerrado																
Capítulo 3.1.2 Caso II	06.03.2023	03.04.2023	Cerrado																
Capítulo 3.1.3 Caso III	06.03.2023	03.04.2023	Cerrado																
Objetivo 3. Análisis empírico. Teoría de Juegos en lanzamiento de penaltis	31.10.2022	29.05.2022	Abierto																
Capítulo 3.2.1 Aplicación de Teoría de Juegos	28.11.2022	20.03.2023	Cerrado																
Capítulo 3.2.2 Estadísticos descriptivos	31.10.2022	12.12.2022	Cerrado																
Capítulo 3.2.3 Elaboración del modelo	06.03.2023	03.04.2023	Cerrado																
Capítulo 3.2.4 Conclusiones del análisis empírico	17.04.2023	15.05.2023	Abierto																
Capítulo 3.2.5 Comparativa con el caso de duopolio	15.05.2023	29.05.2023	Abierto																
Conclusiones del TFG y trabajos futuros	15.05.2023	05.06.2023	Abierto																
Adopción de últimas correcciones y feedback	15.05.2023	05.06.2023	Abierto																
Presentación. TFG	*(fecha exacta a concretar)*		Abierto																

Tabla 1 – Diagrama de Gantt

La distribución de trabajo a lo largo del cuatrimestre es bastante equitativa, siguiendo con lo indicado en la planificación representada en la Tabla 1. Inicialmente, se ha llevado a cabo un análisis inicial de los datos de lanzamientos de penaltis para entender la esencia de este juego concreto y poder así orientar el resto del TFG. Paralelamente, se ha profundizado en el contenido teórico y la aplicación de teoría de juegos en casos específicos del ámbito empresarial (Capítulos 2 y 3.1 de la *Tabla 1*) con el propósito de obtener las herramientas y el enfoque apropiado para hallar las conclusiones más relevantes del análisis empírico (Capítulo 3.2).

Capítulo 2. ESTADO DE LA CUESTIÓN

2.1 MARCO TEÓRICO

La **teoría de juegos** es una rama de las matemáticas y de la economía que estudia la elección de la conducta óptima de un individuo cuando los costes y los beneficios de cada opción no están fijados de antemano, sino que dependen de las elecciones de otros participantes; lo que significa que existe **interdependencia estratégica** [4]. Es un marco teórico que trata de analizar cómo las elecciones de los agentes económicos que interaccionan en una situación concreta producen resultados con respecto a las preferencias de dichos agentes, sin que estos puedan predecir dicho desenlace previamente y con el fin de determinar las decisiones óptimas de los jugadores en el entorno estratégico.

Se considera que la teoría de juegos es aplicable a cualquier situación con dos o más jugadores en la que se conocen los beneficios o las consecuencias cuantificables en función de la **utilidad** percibida como resultado de la elección. Esta teoría ayuda a los jugadores a determinar los resultados más probables teniendo en cuenta las acciones y elecciones de los demás que afectarán al resultado. [5]

La utilidad es la unidad de medida utilizada para ordenar las preferencias de los agentes que intervienen en el juego, Se refiere a una clasificación, en una escala determinada, del bienestar subjetivo o del cambio en el bienestar subjetivo que un agente obtiene de un objeto o un acontecimiento.[6] La utilidad percibida por cada jugador se refleja en una recompensa o "*payoff*", un valor numérico indicativo del nivel de preferencia, utilizado para determinar el orden de prioridades de cada agente de forma cuantitativa y poder comparar los resultados de las decisiones entre estos. Las recompensas dependerán de la combinación de estrategias seleccionadas por ambos agentes.

2.1.1 Elementos e hipótesis de partida

Los componentes esenciales de un juego son: los jugadores, la estrategia, el conjunto de información accesible y el supuesto de racionalidad.

Los **jugadores** son los agentes individuales que toman las decisiones de actuación en el desarrollo del juego de acuerdo a su propia estrategia. La **estrategia** se define como el plan de acción que los jugadores llevarán a cabo en cada punto del juego (nodo de decisión), dependiendo de la información de cada momento sobre las circunstancias y considerando todos los escenarios posibles. De esta manera, el jugador realiza la misma jugada en todos los nodos para un mismo conjunto de información dado, lo que supone fijar las decisiones a tomar en cada nodo de antemano y según cada caso de información recibida sobre la actuación del oponente.

El **conjunto de información accesible** a los jugadores ("*information set*") hace referencia a todo el conocimiento sobre el desarrollo del juego que es "*common knowledge*", saber común a todos los participantes. Este conjunto de información incluye todo lo que ha sucedido en el juego hasta el momento: las elecciones estratégicas de cada jugador en cada punto de toma de decisión (nodo), las ganancias obtenidas como resultado de cada decisión y las posibilidades de elecciones y recompensas a futuro en el juego. No obstante, los jugadores pueden no tener visibilidad de la totalidad de esta información sobre el juego. Por ese motivo, se realiza una distinción entre los juegos en los que los agentes tienen información perfecta y los juegos de información imperfecta.

Los juegos de información perfecta ("*perfect information games*") son más sencillos, en los que cada jugador tiene conocimiento de las reglas del juego y de todo lo que ha ocurrido en el juego hasta cada punto de toma de decisión según la estrategia, como en el ajedrez. Por el contrario, en los "*games of imperfect information*", cada jugador puede tener que tomar su decisión sin conocer la elección de su oponente o su orden de preferencia en función de sus recompensas. [6]

El **supuesto de racionalidad** asume, por una parte, que los jugadores actúan de manera racional; lo que supone la toma de decisiones según su interés personal y para maximizar la utilidad percibida. Asimismo, la hipótesis de racionalidad incluye el hecho de que los jugadores son conscientes de que los otros jugadores también actúan de manera racional, esto es, velando por su propio interés (maximizando sus niveles de utilidad individuales). [7]

Sin embargo, como se explica en el siguiente apartado (tipologías de juegos), también existen los juegos cooperativos, en los que los jugadores actuarían de forma colaborativa para maximizar la utilidad conjunta de ambos y no la individual.

2.1.2 Formas de representación

En teoría de juegos, existen dos maneras principales de representación de un juego, con las que se pretende mostrar los elementos tratados en el epígrafe anterior de manera simplificada.

Por una parte, en la **representación de forma extensiva**, la información se describe explícitamente, definiendo quién decide qué y cuándo, qué sabe cada jugador cuando toma una decisión, qué movimientos tiene a su disposición y a dónde conduce cada movimiento, etc. Para ello se utilizan árboles de decisión ("*decision trees*") y conjuntos de información *("information sets")*, así como información más básica como los jugadores y las ganancias.

Un **árbol de decisión** es una forma de representación esquemática de la secuencia de decisiones que forman parte de un juego, así como las consecuencias que derivan de las mismas. Un árbol de decisión se lee de arriba abajo (también puede representarse de izquierda a derecha). Cada uno de los puntos se denomina nodo de decisión, y representa un punto del juego en el que uno de los jugadores (o ambos) tiene que tomar una decisión. De un nodo de decisión sale una serie de ramas, cada una de las cuales representa una acción diferente a disposición del decisor (*Figura 3*). Elegir una rama equivale a elegir una acción, y los pagos o ganancias de cada jugador se hallan como resultado en los nodos terminales del juego.

Este conjunto de nodos y ramas dirigidas se conectan de forma que: i) existe un nodo inicial para el que no hay ninguna rama entrante, y del cual serán sucesores el resto de nodos, ii) cada nodo excepto el inicial tiene un único antecesor inmediato, iii) para dos nodos cualesquiera, existe un único camino que los conecta. [8]

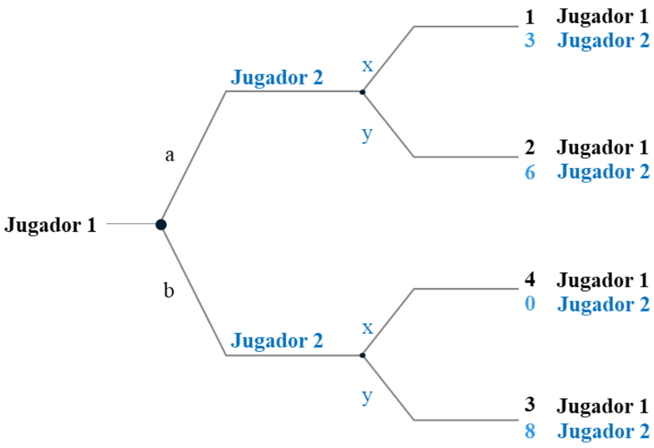
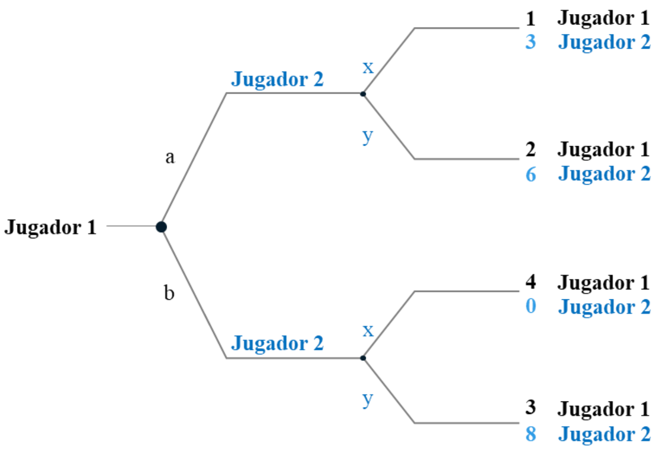


Figura 1. Ejemplo de juego genérico en forma extensiva: Árbol de decisión - Elaboración propia en base a J. E. Harrington Jr. (2015)

Paralelamente, la **representación en la forma normal** (o estratégica), resume la información mediante la conexión de las posibles estrategias disponibles a cada jugador con la ganancia que le correspondería. La forma estratégica consta del mismo un conjunto de jugadores, las estrategias para cada jugador y un resultado para cada vector de estrategias, que suele venir dado por el vector de utilidades (ganancias o pagos) que obtienen los jugadores para ese resultado, expresado en forma de matriz. La representación en forma estratégica ignora los aspectos dinámicos del juego, como el orden de los movimientos de los jugadores, las jugadas fortuitas y la estructura informativa del juego. [9]



		Jugador 2			
	Matriz de ganancias	x		y	
Jugador 1	a	1	3	2	6
	b	4	0	3	8

Figura 2. Ejemplo de juego en forma extensiva y normal - Elaboración propia en base a J. E. Harrington Jr. (2015)

2.1.3 Tipología de juegos

Podemos encontrar las principales categorías de juegos expuestas a continuación:

- **Juegos simétricos y asimétricos**

Un juego es simétrico si todos los agentes tienen el mismo conjunto de estrategias, y las recompensas por jugar una estrategia en particular dependen solo de las estrategias que empleen los otros jugadores y no de quién las juegue. [10] Esto implica que las identidades de los jugadores pueden cambiarse sin que cambien los *payoffs* de las estrategias. No obstante, los juegos asimétricos son los más comunes, y cabe destacar que puede haber juegos asimétricos con estrategias idénticas para cada jugador.

- **Juegos repetidos**

Los juegos repetidos tienen lugar en situaciones en las que las interacciones se repiten de forma idéntica a lo largo del tiempo, en forma de etapas del juego. En tales situaciones, un jugador puede condicionar su comportamiento en cada momento de la partida en función del comportamiento anterior observado en los demás jugadores. El juego se desarrolla en etapas, para cada periodo de tiempo discreto $t = 0, 1, 2, \ldots T;$ y, al final de cada periodo, todos los jugadores observan las acciones realizadas. El juego se repite finitamente si $T < \infty$ y se repite de forma infinita o indefinida en caso contrario. [11]

- **Juegos cooperativos y no cooperativos**

Por lo general, en teoría de juegos cada jugador trata de maximizar su nivel de utilidad individual (juegos no cooperativos), pero existen ocasiones en las que los agentes actúan de forma conjunta para maximizar la ganancia global. Estos son los denominados juegos cooperativos, en los que dos o más participantes aúnan sus esfuerzos en la consecución de un fin común. Solo en los juegos repetidos de forma indefinida puede aparecer la cooperación como una estrategia de equilibrio óptima.

La diferencia esencial entre ambos reside en la filosofía de elección de estrategias, ya que en los no cooperativos cada jugador elige su estrategia óptima independientemente de lo que hagan los demás, y en los cooperativos predomina la elección de estrategias de manera conjunta. Por tanto, al no tratarse de una competición entre jugadores individuales, se gana o pierde como grupo, ya que predominan los objetivos colectivos sobre las metas individuales.

- **Juegos de suma cero o distinta de cero**

Los juegos de suma cero son aquellos en los que cuando un jugador gana cierto nivel de utilidad, el adversario pierde exactamente la misma cantidad.

- **Juegos de información perfecta o imperfecta**

En los juegos con información perfecta o completa, el conocimiento sobre el juego es de saber común para los jugadores. Cada jugador sabe quién participa, cuáles son sus opciones y cómo evalúa los resultados, teniendo este conjunto de información ("*information set*") para cada momento en el transcurso del juego.

En un juego con información imperfecta o incompleta, algunos conjuntos de información (como los representados en el árbol de decisión, Figura 3) contienen más de un nodo de decisión, lo que significa que un jugador no siempre está seguro de lo que ha ocurrido cuando llega el momento de tomar una decisión. Un juego con información privada es un tipo de juego con información imperfecta en el que algunos de los jugadores tienen cierta información sobre su estrategia o el juego de la que el otro carece. [12]

- **Juegos de señalización y *cheap talk***

En los juegos de señalización, existe cierta información privada que uno de los jugadores posee (emisor de las señales) y el otro no (receptor). Esta información privada es indicativa del "tipo" del jugador, para la cual el receptor solo tiene una idea aproximada de la probabilidad de que su oponente sea de un tipo u otro. Los juegos de señalización implican la existencia de unas **creencias a priori** sobre el "tipo" del oponente (como base, establecidas por un agente externo o "naturaleza") que el receptor actualiza en función de las señales recibidas por la acción del emisor. Este conjunto de **creencias** del receptor sobre el tipo del jugador emisor **posteriores** a la recepción de la señal tienen que ser **consistentes** con los intereses del emisor y la regla de Bayes.

La dinámica de este tipo de juegos consiste en que el emisor elige una acción que puede **enviar cierta señal** al receptor sobre la información oculta, el cual observa dicha acción, **actualiza sus creencias** sobre el tipo de su adversario y **responde** con otra acción.

Las señales tienen un coste para el emisor (afectan a su *payoff*), pero el ***cheap talk*** es gratuito. En los juegos de señalización donde hay *cheap talk* se emiten estos "mensajes baratos", entendidos de esta forma porque las acciones del emisor que envían una señal no le suponen ningún coste ni afectan a su ganancia, y por ello pueden no ser ciertas e inducir a error al oponente. No obstante, si los intereses del emisor y receptor están suficientemente alineados se puede obtener información valiosa del *cheap talk*. En ámbito del deporte, a menudo observamos estas técnicas de *cheap talk*, como en los **instantes previos al lanzamiento de un penalti**, cuando un delantero hace amago de lanzar en una dirección, pero luego chuta en la opuesta.

- **Juegos secuenciales y simultáneos**

En teoría de juegos, existen dos tipos de interacción entre los jugadores: simultánea o secuencial. En la interacción simultánea, ambos agentes seleccionan la estrategia al mismo tiempo, mientras que en la secuencial un jugador elige después de otro (por lo que es capaz de observar su elección). Sin embargo, en ambos tipos de interacción se supone que los jugadores conocen las alternativas estratégicas que posee el adversario si existe información perfecta.

En el epígrafe siguiente (*2.1.4 Equilibrio en teoría de juegos*) se analizará en profundidad la diferencia entre los tipos de juegos secuenciales y simultáneos y aquellos con información perfecta e imperfecta, con el fin de detallar sus principales características y exponer los tipos de equilibrio que de ellos se derivan.

2.1.4 Equilibrio en teoría de juegos

Cuando se dice que un sistema físico está en equilibrio, significa que se encuentra en un estado estable, en el que todas las fuerzas causales internas al sistema se equilibran entre sí y lo dejan "en reposo" hasta que (y a menos que) se vea perturbado por la intervención de alguna fuerza exógena. En economía, se aplica el mismo concepto, entendiendo los sistemas económicos como redes de relaciones mutuamente restrictivas (a menudo causales, como los sistemas físicos), y los equilibrios de dichos sistemas son entonces sus estados internamente estables. No obstante, cabe señalar que algunas personas interpretan la teoría de juegos como una teoría explicativa del razonamiento estratégico. Para ellos, la solución de un juego debe ser un resultado que un agente racional predeciría utilizando únicamente los mecanismos del cálculo racional. [6]

- **Equilibrio de Nash**

El **Equilibrio de Nash** (en referencia a John Nash, matemático galardonado con el Nobel que en "*Equilibrium Points in n-Person Games*" (1950) amplió y generalizó el trabajo de Von Neumann y Morgenstern) se aplica a conjuntos completos de estrategias. Solo se alcanzaría dicho NE en el caso de que, dadas las estrategias de todos los demás jugadores del juego, ningún jugador pueda mejorar su ganancia cambiando su estrategia.

El planteamiento del equilibrio de Nash mantiene la idea de que los jugadores son racionales, pero requiere de un nuevo supuesto que exige que las creencias de cada jugador sobre las estrategias de los demás sean correctas. Esto implica que la estrategia que el jugador 1 supone que utilizará el jugador 2 es exactamente la que el jugador 2 utiliza en realidad. De esta forma, la definición de equilibrio de Nash consta de dos componentes: i) los **jugadores** son **racionales** (la estrategia de cada jugador maximiza su ganancia dadas sus creencias sobre las estrategias utilizadas por los otros jugadores), ii) las **creencias** son **exactas**, se asume que lo que las suposiciones de cada jugador sobre las estrategias utilizadas por los demás jugadores son ciertas. [7]

Por lo tanto, un perfil estratégico es un equilibrio de Nash si la estrategia de cada jugador **maximiza su recompensa**, es la **mejor respuesta** de un jugador **a la mejor respuesta** de los oponentes. En un juego en el que no se está actuando según un equilibrio de Nash, algún jugador que observará que su estrategia no es la mejor disponible, y tendrá un incentivo para cambiar su estrategia con el fin de mejorar sus ganancias. Por el contrario, si los jugadores se comportan de acuerdo con un equilibrio de Nash, estarán satisfechos con sus acciones después de cada ronda de interacciones y **no habrá incentivos para desviarse** de su estrategia. De esta forma, se espera que el comportamiento generado por un equilibrio de Nash **persista** en el tiempo, por lo que se entiende que el sistema económico es **estable**.

- **Formas de equilibrio según las características del juego**

En función del **nivel de información accesible** en el juego y la **dinámica de interacción** entre los jugadores a lo largo del tiempo (toma de decisiones de los jugadores de forma secuencial o simultánea), se pueden diferenciar distintos tipos de equilibrios, según se muestra en la *Tabla 2.* Aparte del Equilibrio de Nash ya mencionado, las principales situaciones de equilibrio son las siguientes:

- El **Equilibrio de Estrategia Dominante** (*Dominant Strategy Equilibrium*, DSE) tiene lugar cuando existe una estrategia que ofrece máximas ganancias independientemente de la acción elegida por el otro jugador.
- El **Equilibrio de Dominancia Iterada** (*Iterated Dominance Equilibrium*, IDE) consiste en descartar las estrategias dominadas (que en ningún caso ofrecen máximo *payoff*) y hallar la estrategia dominante del juego reducido.
- El **Equilibrio Perfecto de Nash en un Subjuego** (*Subgame Perfect Nash Equilibrium*, SPNE) es el resultado de realizar el proceso de inducción hacia atrás (*backward induction*). En primer lugar, nos situamos en la etapa final del juego, estimamos la estrategia que tendría lugar en equilibrio de Nash. Retrocedemos por el camino que llevaría hasta este resultado hasta alcanzar la situación de inicio del juego. El SPNE es el perfil de estrategia que asigna la acción que maximiza la ganancia de cada jugador en cada nodo de decisión.
- El **Equilibrio Bayesiano de Nash** (*Bayesian Nash Equilibrium*, BNE) es el perfil de estrategia que tiene lugar cuando existe información privada que condiciona el "tipo" del jugador. Prescribe un comportamiento óptimo para cada jugador en función de su tipo y dada la estrategia del adversario. EL BNE es el NE del juego reformulado,

en el que cada jugador tiene una estrategia diferente acorde a su tipo (condicionado a la información privada que posee).

- El **Equilibrio Perfecto Bayes-Nash** (*Perfect Bayes-Nash Equilibrium*, PBNE) para un juego de señalización (información incompleta) implica una **racionalidad secuencial**, ya que la estrategia de un jugador es la acción óptima en cada punto del juego acorde sus creencias sobre el tipo del adversario y cómo éste actuará. El PBNE está compuesto por: i) la estrategia óptima para cada tipo de jugador emisor de la señal (independientemente de la respuesta) y ii) la estrategia del jugador receptor de la señal, que es el comportamiento óptimo del receptor dada la acción del emisor y las **creencias posteriores** sobre el tipo de emisor de acuerdo a las señales recibidas. Como se mencionaba anteriormente, dichas creencias posteriores deben ser consistentes con la estrategia óptima del emisor.

Por otra parte, cabe resaltar la diferencia entre **estrategias puras y estrategias mixtas** en teoría de juegos. En una estrategia pura, los jugadores adoptan una estrategia que proporciona los mejores resultados, es la que proporciona el máximo beneficio o el mejor resultado a los jugadores, considerándose la mejor estrategia para cada jugador del juego.

Por otro lado, en una **estrategia mixta**, los jugadores adoptan diferentes estrategias para obtener el resultado posible. Los jugadores aleatorizan el conjunto de acciones disponibles de acuerdo con una distribución de probabilidades, combinando y mezclando diferentes estrategias. En otras palabras, el conjunto de estrategias mixtas abarca todas las formas sobre las que se pueden aleatorizar las estrategias puras del jugador, incluyendo también las estrategias puras. Cada jugador evalúa un determinado perfil de estrategia mixta utilizando las ganancias esperadas asociadas. [7] En la sección 3.2 de este trabajo se profundizará en este concepto mediante la modelización del lanzamiento de penaltis en estrategias mixtas.

	JUEGOS SIMULTÁNEOS	**JUEGOS SECUENCIALES**
INFORMACIÓN PERFECTA	**Situaciones de equilibrio:** • Equilibrio de estrategia dominante (*Dominant Strategy Equilibrium*, DSE) • Equilibrio de dominancia iterada (*Iterated Dominance Equilibrium*, IDE) • Equilibrio de Nash (NE) **Ejemplos de aplicaciones económicas:** - Competencia de precios con productos idénticos e igualación de precios y con productos diferenciados - Programas corporativos que incentivan la denuncia de irregularidades (para evitar situaciones de oligopolio) - Efectos de red en los sistemas operativos tecnológicos (*tipping*) - Situación de saturación al solicitar prácticas laborales o al conducir hasta una ciudad (*congestion*) - Monitorización de empresas y auditoría para asegurar regularización fiscal (*outguessing games*) **Ideas principales:** 1. La racionalidad individual puede llevar a resultados colectivamente más desfavorables 2. Las estrategias de equilibrio estables implican que ningún jugador quiera desviarse unilateralmente de ellas 3. Las restricciones (como las políticas públicas) pueden cambiar los pagos e influir en los equilibrios 4. El equilibrio en estrategias mixtas (juegos simultáneos o secuenciales) implica actuar con distintas estrategias en función de la probabilidad de que tenga lugar cada acontecimiento. Para todo juego finito de estrategias mixtas existe algún NE	**Situaciones de equilibrio:** • Equilibrio de Nash en un subjuego perfecto (*Subgame Perfect Nash Equilibrium*, SPNE) **Ejemplos de aplicaciones económicas:** - Acuerdos de entrada de nuevas empresas a un mercado, inversiones irreversibles y observables como compromiso creíble de reacción de la empresa ya establecida - Expansión de la capacidad e introducción de variedades en los productos como elementos disuasorios de entrada - Fijación de precios, viabilidad y estabilidad de acuerdos colusorios sobre precios y tarifas - Juegos de tanteo, como en la solicitud de patentes (*preemption games*) y guerras de desgaste, como en reorganizaciónes de industria (*attrition games*) - Negociaciones con un horizonte indefinido, cooperación **Ideas principales:** 1. Pensar en el futuro y razonar hacia el pasado (*backward induction*) 2. En juegos secuenciales, si la reacción óptima a un cambio de estrategia de un rival es actuar en la dirección opuesta, existe *first-mover advantage;* si lo óptimo es actuar en la misma dirección, existe *second-mover advantage* 3. Las situaciones que implican amenazas no creíbles son malas predicciones de equilibrio. Sin embargo, cuando existe un compromiso creíble (que conlleva cierto coste y es observable e irreversible), se pueden aumentar los beneficios 4. Las interacciones futuras repetidas indefinidamente pueden hacer factible la cooperación para lograr mejores resultados si los jugadores se preocupan lo suficiente por el futuro
INFORMACIÓN INCOMPLETA	**Situaciones de equilibrio:** • Concepto de equilibrio: Equilibrio Bayesiano de Nash (*Bayesian Nash Equilibrium*, BNE) **Ejemplos de aplicaciones económicas:** - Subastas a primer y segundo precio (*First price* y *second price auctions*), subastas donde "todos pagan" (*All-pay*) y de valor común (*common value auctions)* - Transacciones con información privada entre el comprador y vendedor **Ideas principales:** 1. En muchas situaciones los jugadores tienen información privada sobre sus *payoffs*, por lo que son jugadores de distintos "tipos" a los ojos de los demás 2. Diferentes acciones pueden ser óptimas (en equilibrio) para los diferentes "tipos" posibles que puede ser un jugador 3. La información privada puede causar ineficiencias económicas (al impedir que se produzcan operaciones rentables en equilibrio)	**Situaciones de equilibrio:** • Equilibrio Perfecto Bayes-Nash (*Perfect Bayes-Nash Equilibrium*, PBNE) **Ejemplos de aplicaciones económicas:** - Emisión de señales indicativas de valía en el mercado laboral con títulos de Ed. Superior y rendimiento en prácticas ("*signaling"*) - Selección adversa en mercados con información privada; revelación estratégica de calidad (sector coches de segunda mano) **Ideas principales:** 1. La acción de un jugador puede transmitir información si el coste de la estrategia elegida varía suficientemente con su tipo. 2. La información privada puede llevar a una selección adversa (los vendedores/productos que permanecen en el mercado son los menos deseables) y al colapso total o parcial del mercado 3. Las instituciones del mercado (leyes, instituciones) pueden reducir los efectos negativos del flujo de información asimétrica 4. El "*cheap talk"* para emitir señales de la intencionalidad del jugador y es de utilidad si los intereses de emisor y receptor están suficientemente alineados

Tabla 2 – Juegos según la información disponible y orden de interacción -Elaboración propia a partir de J. E. Harrington Jr. (2015)

2.2 TEORÍA DE JUEGOS EN ESTRATEGIA EMPRESARIAL

La teoría de juegos debería pasar a primer plano como herramienta estratégica en tiempos de incertidumbre, ya que ofrece perspectivas sobre cómo podrían actuar los jugadores en diversas circunstancias y proporciona información valiosa para la toma de decisiones.

De hecho, la teoría de juegos como herramienta de gestión se ha utilizado desde hace más de 50 años. Según C. Shapiro en su artículo en el RAND Journal of Economics (1989):

"La teoría de juegos se ha convertido en la metodología predominante para analizar la estrategia empresarial. Gran parte del trabajo de la nueva Organización Industrial consiste en especificar un juego entre empresas competidoras y resolverlo en forma extensiva utilizando el concepto de solución no cooperativa del equilibrio de Nash o uno de sus refinamientos (...) En este momento, la teoría de juegos ofrece la única forma coherente de analizar lógicamente el comportamiento estratégico." [12]

La teoría de juegos tuvo su inicio en 1944, cuando el matemático John von Newmann y el economista Oscar Morgensten publicaron su libro "*Theory of Games and Economic Behavior*", en el que distinguieron dos tipos de juegos: los basados en reglas ("*rule-based games*") y los juegos libres ("*freewheeling games*").

Para los **juegos basados en reglas**, la teoría de juegos ofrece el principio de que a toda acción corresponde una reacción, y para analizar cómo reaccionarán los demás jugadores a tu jugada, hay que prever todas las reacciones (incluida la propia) a sus acciones con la mayor antelación posible. Es necesario mirar hacia adelante en el juego y luego razonar hacia atrás (técnica de "*backward induction*") para averiguar qué acciones de hoy te llevarán a donde quieres llegar.

Para los **juegos libres**, la teoría de juegos ofrece el principio de que no se puede sacar del juego más de lo que se aporta. En ámbito de la empresa, ¿qué aporta un jugador o stakeholder concreto al juego? Para encontrar la respuesta, hay que ver el valor creado cuando todos participan en el juego y, a continuación, sacar a ese jugador y ver cuánto valor pueden crear los jugadores restantes. La diferencia es el "valor añadido" del jugador eliminado. En las interacciones no estructuradas o libres, no se puede quitar más que el valor añadido. [13]

En ambos principios subyace un cambio de perspectiva. Hasta el momento, se contemplaban los juegos de forma egocéntrica, es decir, centrados en la propia posición. La principal idea de la teoría de juegos es la importancia de centrarse en lo que hacen los demás (alocentrismo). Para realizar el proceso de inducción hacia atrás es necesario ponerse en la piel de los demás jugadores y comprender su posición en cada momento; y para evaluar tu valor añadido no se debe cuestionar qué pueden aportarte los demás, sino qué les puedes aportar tú.

De acuerdo con el artículo de la Harvard Business Review (1995):

"*Los directivos pueden beneficiarse de estas ideas de la teoría de juegos para diseñar un juego adecuado para sus empresas, ya que las recompensas de cambiar un juego pueden ser mucho mayores que las de mantener el statu quo. Por ejemplo, Nintendo tuvo un éxito brillante al cambiar el negocio de los videojuegos tomando el control del software. El éxito posterior de Sega exigió volver a cambiar el juego. El New York Post de Rupert Murdoch cambió el juego de la prensa sensacionalista al encontrar una forma convincente de demostrar el reparto de una guerra de precios sin necesidad de lanzarla (…) La estrategia empresarial de éxito consiste en moldear activamente el juego que se juega, no sólo en jugar el juego que se encuentra.*" [13]

Un dirigente empresarial basa sus decisiones de gestión y su estrategia en varios factores, entre ellos su predicción de los movimientos de un competidor y las respuestas previstas a esos movimientos. Si las previsiones son exactas, la teoría de juegos proporciona un marco matemático para analizar el curso de acción con más probabilidades de producir los resultados deseados. Esta preparación ayuda a los directivos a tomar decisiones con conocimiento de causa, desde la fijación de precios y el lanzamiento de productos hasta la selección del mercado objetivo y las campañas de marketing.

No obstante, en la toma de decisiones empresariales generalmente existe algo más que una simple relación binaria entre las acciones de dos competidores. Suele haber un gran número competidores en cada sector, y cada paso dado por un competidor puede provocar una cadena de reacciones y acontecimientos en el futuro. Cuando aumenta el número de variables, resulta difícil predecir con exactitud los resultados a largo plazo. El éxito de una estrategia de crecimiento empresarial depende a menudo de una combinación única de estabilidad, innovación y disrupción.

Sin embargo, para capturar el impacto futuro de la innovación y la disrupción en una empresa son necesarias evaluaciones de riesgo y análisis de costes y beneficios en función del efecto de ciertas variables impredecibles. [14] Por este motivo, muchos directivos desconfían de la teoría de juegos categorizándola como más teórica que práctica, ya que la teoría de juegos pierde algo de tracción cuando se enfrenta a problemas empresariales prácticos y en evolución dinámica.

El mundo real es más desordenado que el entorno académico, y las empresas que utilizan este enfoque a menudo no consiguen encontrar el equilibrio adecuado entre simplificar un problema para hacerlo manejable y conservar la complejidad suficiente para hacerlo relevante. Es necesario un enfoque dinámico de la teoría de juegos en función ese aspecto imponderable, trazando probabilidades de resultados para diversos escenarios. Según el artículo de McKinsey & Company (2009):

"A menudo, cuando los responsables de la toma de decisiones empresariales recurren a esta disciplina la utilizan mal para dar una respuesta única y demasiado precisa a problemas complejos (...) y reciben una única propuesta de solución sin comprender claramente los supuestos que han intervenido en su formulación." [15]

Para afrontar esta problemática, en este mismo artículo, se explica el modelo que ha desarrollado. En lugar de predecir un único resultado, con todos los factores equilibrados, el modelo genera primero un conjunto reducido de opciones estratégicas que pueden ajustarse para tener en cuenta los cambios en diversos supuestos o escenarios, permitiendo a los jugadores ajustar sus acciones después de cada uno de ellos; y encuentra el mejor camino para distintas combinaciones de factores. En un segundo paso, el modelo encuentra la "mejor opción robusta", considerando su potencial alcista y sus riesgos a la baja en todos los escenarios, hipótesis y sensibilidades probables a medida que transcurre el tiempo. Este planteamiento difiere de los intentos de buscar el equilibrio en un mundo artificialmente simplificado:

"La teoría de juegos tradicional ofrece las mejores respuestas y equilibrios, que podrían ser completamente diferentes para cada escenario, y a continuación, intenta predecir el escenario más probable. Con este enfoque tradicional no se puede analizar la incertidumbre, sólo se ofrece a la dirección una serie de "instantáneas", no una recomendación basada en el panorama general. Nuestro modelo, en cambio, examina cómo pueden cambiar los supuestos y las acciones y analiza las posibles ganancias y pérdidas de cada actor en un mundo dinámico." [15]

La teoría de juegos se ha extendido a muchas otras disciplinas empresariales. Desde estrategias óptimas para campañas de marketing hasta decisiones para librar guerras, tácticas ideales para subastas y estilos de votación, la teoría de juegos proporciona un marco hipotético que permite modelizar situaciones de interacción reales con el fin de maximizar las ganancias de los jugadores implicados.

Capítulo 3. DESARROLLO DEL PROYECTO

3.1 APLICACIONES EN ESTRATEGIA EMPRESARIAL

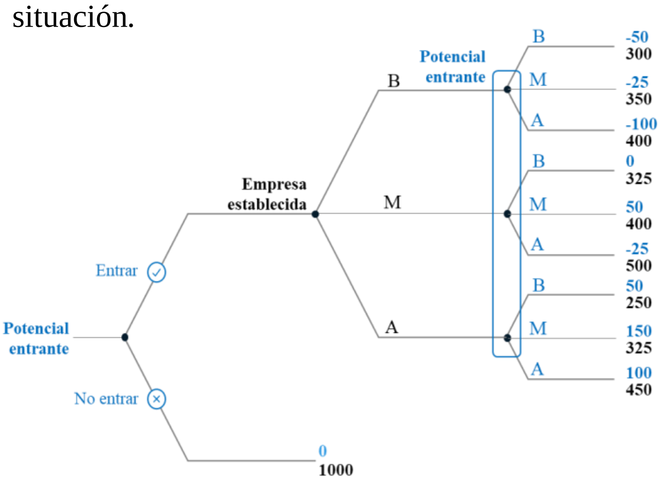
Una vez comprendido el fundamento teórico, se expondrán tres casos de aplicación directa de la teoría de juegos en distintos contextos de estrategia empresarial de acuerdo con la bibliografía, siendo este el nexo entre la base teórica descriptiva de estrategia en teoría de juegos y el enfoque práctico de modelización del juego de lanzamiento de penaltis

En este apartado, mostraremos ejemplos de casos de aplicación de la teoría juegos para la toma de decisiones empresariales en distintos ámbitos. Se desarrollará un juego secuencial con información imperfecta en el ejemplo de la entrada de un nuevo competidor a un mercado (*Caso I*), un juego simultáneo con información completa y posibilidad de cooperación en el ejemplo del establecimiento de impuestos sobre la importación de dos países (*Caso II*) y el ejemplo de fijación de precios de un producto por parte de una empresa de acuerdo al tipo de sus clientes como diseño de mecanismos (“*mechanism design”*) con información completa e incompleta (*Caso III*).

3.1.1 CASO I – AMENAZA DE ENTRADA: DUOPOLIO

Este ejemplo modela la situación de la entrada de una nueva empresa a un mercado monopolístico, y las posibles reacciones de la empresa establecida para defender su favorable posición desarrollado por el profesor J. E. Harrington Jr. (2015) en Wharton School (University of Pennsylvania).[7] Como posibles maniobras disuasorias de la empresa establecida para impedir la entrada del nuevo competidor iniciando una situación de duopolio, se considerará la amenaza con una política de precios agresiva y el compromiso con una inversión económica para mejorar los factores productivos y poder producir a un coste inferior que aporte credibilidad a la amenaza de ajuste de precio.

En un mercado monopolístico, el reto para la empresa establecida es impedir la entrada de competidores. En situación de monopolio, supongamos que la empresa establecida esperaría obtener un beneficio de 1.000 (todas las unidades en M€). En este mercado hay un único competidor potencial que puede elegir entre entrar o no al mercado, lo que llevaría a una situación de duopolio, indeseable para la empresa establecida. Simplificaremos la situación considerando que cada empresa puede elegir fijar su precio en tres niveles: bajo, moderado o alto. El árbol de decisión y la matriz de ganancias reflejados en la *Figura 3* describen esta situación.



	Matriz de ganancias	Empresa establecida: Bajo		Moderado		Alto	
Potencial entrante	Entrar/Bajo	-50	300	0	325	50	250
	Entrar/Moderado	-25	350	50	400	150	325
	Entrar/Alto	-100	400	-25	500	100	450
	No entrar/Bajo	0	1000	0	1000	0	1000
	No entrar/Moderado	0	1000	0	1000	0	1000
	No entrar/Alto	0	1000	0	1000	0	1000

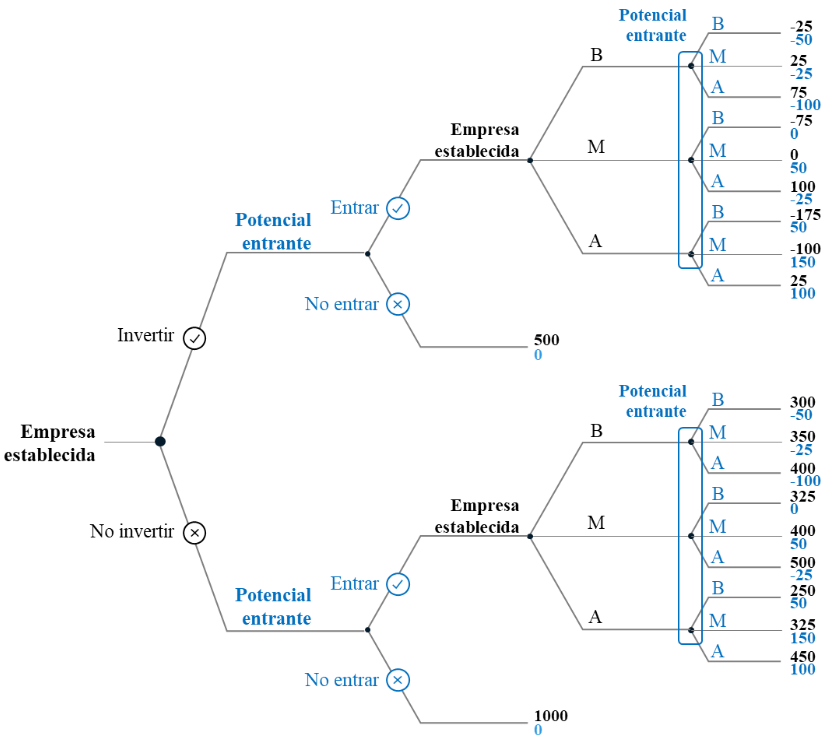
Figura 3. Representación inicial Caso I - Elaboración propia en base a J. E. Harrington Jr. (2015)

El participante potencial mueve primero, decidiendo si entra en el mercado (lo cual le supondría un coste de entrada de 350). Si elige no entrar, entonces la empresa establecida obtiene un beneficio de monopolio de 1.000 y el entrante potencial gana cero. Si, por el contrario, opta por entrar, las dos empresas deciden simultáneamente los precios, obteniendo distintas ganancias en cada caso.

Para analizar cómo se comportarán las empresas, se utiliza el método de inducción hacia atrás (*backward induction*). Se parte del NE de la resolución del subjuego que considera la entrada del competidor (lo que implica que ambas empresas eligen un precio moderado), y se sustituye ese subjuego por los pagos de equilibrio de Nash (400 para la empresa establecida y 50 para el participante potencial). Se llega a un juego en el que el entrante potencial decide si entra (ganancia de 50) o no (ganancia de 0). El equilibrio de Nash es entrar. Por tanto, el único SPNE es (Entrar / Precio moderado, Precio moderado) para el entrante y la empresa establecida, respectivamente.

La entrada del competidor potencial implica una reducción del beneficio de la empresa establecida de 600, por lo que tratará de disuadir al entrante mediante la amenaza de responder a la entrada con precios agresivamente bajos, lo que haría que la entrada no fuera rentable. Aunque la entrada se ve disuadida por la amenaza de precios bajos, el problema es que esta amenaza no es creíble porque las ganancias de la empresa establecida no son óptimas para éste, y, por lo tanto, no debería ser creída por el potencial entrante. Si se produjera la entrada, la empresa establecida querría fijar un precio moderado, no un precio bajo. Teniendo esto en cuenta, ¿cómo podría la empresa establecida convencer a la nueva de que fijaría un precio bajo?

Supongamos que existe una nueva tecnología de producción que, aunque conlleva un coste inicial de 500, sirve para reducir considerablemente el coste de producción de cada unidad. Si la empresa establecida adoptara esta nueva tecnología, en el caso de que la empresa potencial entrara realmente en el mercado, la política de precios agresiva sería ahora una amenaza creíble. Puede contemplarse el nuevo escenario en la *Figura 4*.



	Matriz de ganancias	Potencial entrante: Bajo		Moderado		Alto	
Empresa establecida	Entrar/Bajo	-25	-50	25	-25	75	-100
	Entrar/Moderado	-75	0	0	50	100	-25
	Entrar/Alto	-175	50	-100	150	25	100

	Matriz de ganancias	Potencial entrante: Bajo		Moderado		Alto	
Empresa establecida	Entrar/Bajo	300	-50	350	-25	400	-100
	Entrar/Moderado	325	0	400	50	500	-25
	Entrar/Alto	250	50	325	150	450	100

Figura 4. Representación intermedia Caso I - Elaboración propia en base a J. E. Harrington Jr. (2015)

La rama baja del árbol corresponde al juego inicial (*Figura 3*), en el que se ha determinado previamente que el NE es (Precio moderado, Entrar / Precio moderado) con las ganancias de (400, 50) para la empresa establecida y el competidor, respectivamente. En la rama superior se muestra el escenario en el que la empresa establecida realiza la inversión en mejora de factores productivos para poder ser coherente con su amenaza de bajar los precios.

El beneficio bruto de la nueva empresa es el mismo que antes, ya que no se ve afectado directamente por el coste de producción de la empresa establecida. Sin embargo, aunque a largo plazo el beneficio bruto de la empresa establecida sería uniformemente superior (ya que la empresa establecida produciría a un coste inferior), en este escenario inicial se requiere una inversión que disminuiría sus beneficios respecto a dichas ganancias superiores al escenario sin inversión en 500, obteniendo las ganancias que aparecen en la *Figura 4*.

En esta situación, resolveríamos el juego igualmente mediante *backward induction*, resumiendo el subjuego con inversión y entrada del competidor en su SPNE (Precio bajo, Precio moderado) con las correspondientes ganancias: 25 para la empresa establecida y -25 para el nuevo entrante. Comparando estos *payoffs* con los que tendrían lugar si el competidor decide no entrar (500 para la establecida y 0 para el entrante), podemos concluir que la rama izquierda del árbol (en la que la empresa establecida invierte) se resume en su SPNE: cualquier precio para la empresa establecida y no entrar para el competidor.

Para terminar, y volviendo a la decisión de la empresa establecida, ésta puede esperar obtener un beneficio de 400 si no invierte, ya que se produciría la entrada y ambas empresas fijarían el precio a un nivel moderado, pero un beneficio de 500 si invierte, ya que se disuade la entrada del competidor potencial.

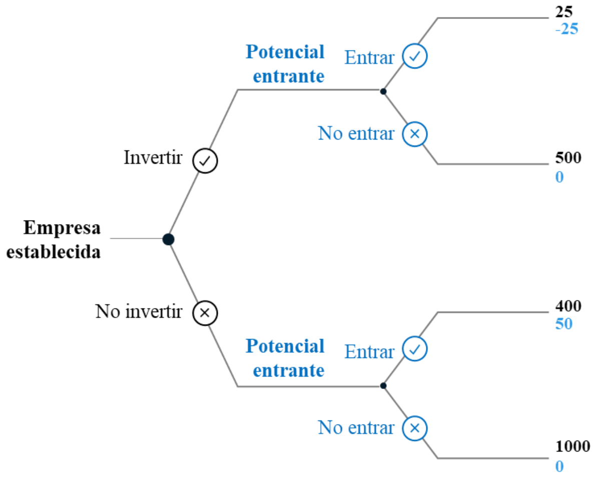


Figura 5. Representación final Caso I - Elaboración propia en base a J. E. Harrington Jr. (2015)

En resumen, el SPNE único es el representado en la *Figura 5*. La empresa establecida invierte. Si el competidor potencial entra en el mercado, la empresa establecida fija un precio bajo. En cuanto a la estrategia del competidor potencial, si la empresa establecida invirtiera, el competidor potencial no entraría. Si la empresa establecida no invirtiera, entonces el entrante potencial entraría y seguiría fijando un precio moderado.

3.1.2 CASO II – COOPERACIÓN ARANCELARIA

Este ejemplo trata la situación de la fijación de tasas arancelarias óptimas entre dos países desarrollado por el profesor E. Pettruzzello (2022) en University of Miami.

Dos grandes países, A y B, son socios comerciales. Tienen que decidir los niveles óptimos de aranceles de importación de manera simultánea. Las ganancias del país A son:

$$\Pi_A = 18 + 6 \cdot t_A - 6 \cdot t_B - t_A \cdot t_B - t^2_A$$

donde t_A es el nivel arancelario del país A y t_B es el nivel arancelario del país B.

Maximizando las ganancias comerciales del país A se puede ver que la función de mejor respuesta de A al nivel arancelario elegido por el país B es:

$$t_A = 3 - 0.5 \cdot t_B$$

El problema del país B es simétrico, por lo que sus ganancias comerciales y su función de mejor respuesta son:

$$\Pi_B = 18+6 \cdot t_B - 6 \cdot t_A - t_B \cdot t_A - t_B$$
$$t_B = 3 - 0.5 \cdot t_A$$

Ante esta situación, analizaremos las siguientes cuestiones:

i) Los aranceles cero maximizan la suma de las ganancias del comercio en esta situación. ¿Se trata de un equilibrio de Nash? Si no es así, ¿cuáles son los niveles arancelarios de equilibrio de Nash?

Si $t_A = 0$, entonces mediante la función de mejor respuesta del país B es:

$$t_B = 3 - 0.5 \cdot 0 = 3$$

Como el resultado es 3 y no 0, ($t_A = 0$, $t_B = 0$) no puede ser el Equilibrio de Nash.

Para hallar el NE, debemos considerar que éste es la mejor respuesta ante la mejor respuesta del otro jugador, por lo que incluimos la función de mejor respuesta del país B en la función de mejor respuesta del país A:

$$t_A = 3 - 0.5 \cdot t_B = 3 - 0.5 \cdot (3 - 0.5 \cdot t_A) = 1.5 + 0.25 \cdot t_A$$

Resolviendo esta ecuación se obtiene que $t_A = 2$, y sustituyendo con este valor en la función de mejor respuesta de B obtenemos que $t_B = 2$. El Equilibrio de Nash es ($t_A = 2$, $t_B = 2$), y la ganancia de cada país sería de:

$$\Pi_A = \Pi_B = 18 + 6 \cdot 2 - 6 \cdot 2 - 2 \cdot 2 - 2^2 = 10 = \Pi_{NE}$$

ii) Supongamos que este juego se repite durante diez períodos. ¿Cuál es la trayectoria de equilibrio asociada al SPNE de este juego secuencial?

El NE es el mismo en todos los períodos ($t_A = 2$, $t_B = 2$), y es la única alternativa viable porque cualquier otra estrategia llevaría a uno de los jugadores a desviarse para mejorar sus ganancias.

iii) Supongamos que este juego se repite indefinidamente y que ambos países tienen el mismo factor de descuento $\delta = 0{,}5$. Averigüe si las estrategias grim-trigger pueden mantener la cooperación en el nivel de arancel cero.

La cooperación supone una elección conjunta que permite conseguir una ganancia superior a la que se conseguiría eligiendo la estrategia de forma individual. Como se ha observado en el primer apartado, la ganancia del Equilibrio de Nash para cada país (10) es inferior a la ganancia cuando ambas tarifas son 0, que implica cooperación de ambos jugadores:

$$\Pi_A = \Pi_B = 18 + 6 \cdot 0 - 6 \cdot 0 - 0 \cdot 0 - 0^2 = 18 = \Pi_{COOP}$$

La cooperación requiere el compromiso de ambos países para fijar tasas de importación nulas en todos los períodos, pero existe la posibilidad de que uno de los dos países se desvíe de esta cooperación en algún punto para maximizar sus ganancias individuales, contando con la cooperación del otro país $t_{COOP} = 0$:

$$t_{DESV} = 3 - 0.5 \cdot 0 = 3$$

$$\Pi_{DESV} = 18 + 6 \cdot t_{DESV} - 6 \cdot 0 - t_{DESV} \cdot 0 - t^2_{DESV} = 27$$

$$\Pi_{COOP/DESV} = 18 + 6 \cdot 0 - 6 \cdot t_{DESV} - 0 \cdot t_{DESV} - 0^2 = 0$$

Resolviendo esta ecuación se obtiene que la situación de desviación ($t_{COOP} = 2$, $t_{DESV} = 3$), con ganancias de $\Pi_{COOP} = 0$ y $\Pi_{DESV} = 27$.

El factor de descuento δ es indicativo de la importancia que dan los jugadores a las ganancias futuras, por lo que dependiendo de éste y de las penalizaciones asignadas a las desviaciones será posible mantener la cooperación en el equilibrio o no. Partiendo de la expresión del valor presente de las ganancias futuras:

$$u_1 \cdot \delta u_2 + \delta_2 u_3 + \delta_3 u_4 + \ldots + \delta^{T-1} u_T$$

$$u_1 + u_2 \cdot \frac{1}{1-\delta} + u_3 \cdot \frac{\delta_2}{1-\delta_2} + u_3 \cdot \frac{\delta_2}{1-\delta_2} + \cdots + u_T \cdot \frac{\delta_{T-1}}{1-\delta_{T-1}}$$

Por lo tanto, la cooperación tendrá lugar si el valor presente de las ganancias futuras resultado de cooperar es mayor que el valor presente de las ganancias considerando la desviación y la consiguiente penalización por el desvío (Valor presente de los *payoffs* en cooperación > Valor presente *payoffs* en desviación). En este caso, al tratarse de una penalización de *grim-trigger*, el castigo supone la vuelta a la estrategia del NE para el resto de períodos después de la desviación.

De esta forma, la cooperación implica que ambos países fijan $t_{COOP} = 0$ y tienen la misma ganancia de $\Pi_{COOP} = 18$, mientras que en caso de desvío, el país que decide dejar de cooperar fija $t_{DESV} = 3$ para obtener las ganancias de $\Pi_{DESV} = 27$ durante el período de desvío, y las ganancias correspondientes al NE el resto de períodos $\Pi_{NE} = 10$ (por ser *grim-trigger*):

$$\text{Valor presente } payoffs \text{ en cooperación:} \quad \Pi_{COOP} \cdot \frac{1}{1-\delta} = 18 \cdot \frac{1}{1-0.5} = 36$$

$$\text{Valor presente } payoffs \text{ en desviación:} \quad \Pi_{DESV} + \Pi_{NE} \cdot \frac{\delta}{1-\delta} = 27 + 10 \cdot \frac{0.5}{1-0.5} = 37$$

Como se puede observar, la estrategia de *grim-trigger* como penalización por la desviación de la cooperación es insuficiente con un factor de descuento $\delta = 0.5$, por lo que el jugador se desviaría y la cooperación no sería una estrategia de equilibrio. Para hallar el factor de descuento mínimo que asegure la cooperación se impondría la condición:

$$\Pi_{COOP} \cdot \frac{1}{1-\delta} > \Pi_{DESV} + \Pi_{NE} \cdot \frac{\delta}{1-\delta} \rightarrow 18 \cdot \frac{1}{1-\delta} > 27 + 10 \cdot \frac{\delta}{1-\delta}$$

Resolviendo la inecuación, se obtiene que solo con factores de descuento comprendidos en el intervalo $0.53 < \delta < 1$ se aseguraría la cooperación con la estrategia *grim-trigger*.

3.1.3 CASO III – OPTIMIZACIÓN DE BENEFICIOS

Este ejemplo modela la situación del lanzamiento de productos a distintos precios para satisfacer las necesidades de distintas tipologías de consumidor, desarrollado por el profesor E. Pettruzzello (2022) en University of Miami.

Una empresa comercializa dos versiones de un producto electrónico: en estado nuevo y seminuevo. Los estudios de mercado muestran que hay dos tipos principales de clientes, los de gama alta y los que se preocupan por el precio. El precio máximo dispuesto a pagar por cada tipo de cliente para cada una de las dos versiones del producto electrónico es el mostrado en la *Figura 6*

		Tipo de producto	
	Matriz de ganancias	Nuevo	Seminuevo
Tipo de cliente	Gama alta	650$	300$
	Preocupado por precio	350$	250$

Figura 6. Representación de la matriz de ganancias Caso III - Elaboración propia en base a J. E. Harrington Jr. (2015)

Las dos versiones del producto electrónico son producidas por una única empresa. Por simplicidad se asumirá que el coste marginal de producción es cero, cada tipo de cliente compra 1 producto o ninguno; y solo existe un único cliente de cada tipo. La empresa quiere maximizar los beneficios y puede fijar los precios de los productos, los consumidores deciden lo que quieren comprar (si es que quieren comprar algo) maximizando el excedente del consumidor (disposición a pagar menos el precio).

i) Supongamos que la empresa puede identificar el tipo de cliente (información perfecta) y hacerle ofertas diferentes. ¿Qué debería hacer la empresa? ¿Cuáles son los beneficios?

Considerando que la empresa puede establecer distintos precios de acuerdo con el máximo que cada tipo de cliente está dispuesto a pagar, establecería el precio más alto posible para cada tipología de cliente, de forma que:

$$P_{\text{NEW / HIGH END}} = \$650 \text{ , } P_{\text{NEW / PRICE CONSC}} = \$350$$

De esta forma, contando con que ambos tipos de cliente adquieren una unidad de producto porque el precio se ajusta a su máximo, se obtendrían unos beneficios de:

$$\Pi_{\text{PERF INFO}} = 1 \cdot \$650 + 1 \cdot \$350 = \$1000$$

ii) Supongamos que la empresa no puede identificar directamente a los clientes (información incompleta). ¿Qué debe hacer la empresa? ¿Cuáles son los beneficios?

De acuerdo con el principio de revelación, la empresa vendería tantos productos como tipos de compradores existan, 2 en este caso (gama alta - *high end* y centrados en el precio – *price conscious*). De esta manera, la empresa vendería el producto de mayor rentabilidad (nuevo - *new*) al cliente que le ofrezca mayor precio (gama alta) para no distorsionar sus máximos, y el producto de menor valor para la empresa (seminuevo – *pre-owned*) con una reducción en el precio para detectar a los clientes preocupados por el precio.

$$P_{\text{PRE OWNED}} = \$250$$

Para determinar el precio de los clientes de gama alta, se debe asegurar que el excedente del consumidor *consumer surplus* que obtendrían comprando el producto nuevo es, como mínimo, igual al que tendrían por comprar el producto de segunda mano al precio ya mencionado de $250.

$\text{Exced consumidor}_{\text{HIGH END/ PRE OWNED}} = P_{\text{MAX/ PRE OWNED}} - P_{\text{PRE OWNED}} = \$300 - \$250 = \$50$

$\text{Exced consumidor}_{\text{HIGH END/ NEW}} = \$50 = P_{\text{MAX/ NEW}} - P_{\text{NEW}} = \$650 - P_{\text{NEW}}$

De esta ecuación obtenemos que el precio máximo que la empresa puede cargar por el producto nuevo asegurando que los clientes de gama alta lo comprarán es de:

$$P_{\text{NEW}} = \$600$$

De esta forma, la empresa obtendría unos beneficios totales resultado de la venta de un producto de cada tipo al precio establecido:

$$\Pi_{\text{INCOMPLETE INFO}} = 1 \cdot \$600 + 1 \cdot \$250 = \$850$$

iii) Explique las dos causas de la diferencia de beneficios entre el caso de información perfecta e incompleta

La diferencia entre $\Pi_{\text{PERF INFO}} = \$1000$ y $\Pi_{\text{INCOMPLETE INFO}} = \$850$ se justifica por dos motivos.

- Por una parte, existe un coste de obtención de la información que no se posee en el caso de información incompleta (esto es, identificar de qué tipo es cada cliente) de $50, procedentes de la imposición del excedente del consumidor mínimo para identificar a los clientes de gama alta.
- Además, existe una pérdida de eficiencia de $100 por haber cobrado los productos seminuevos al precio fijado por los clientes preocupados por el precio ($250) en vez del precio que se cobraría a los de gama alta por el mismo producto ($350).

3.2 TEORÍA DE JUEGOS EN LANZAMIENTOS DE PENALTIS

Hay dos formas de ver la relación entre economía y deporte. La primera es aquella en la que la economía se utiliza "al servicio" de la industria deportiva para analizar la rentabilidad de los clubes, la demanda de asistencia, el equilibrio competitivo, etc. Sin embargo, en este apartado trataremos de determinar qué puede hacer el deporte por la economía. Este planteamiento sigue la idea de que "*si las piedras que caen de las torres y las manzanas de los árboles son útiles para la física, los datos de las competiciones deportivas pueden ser* *útiles para la economía*" (Palacios-Huerta, 2014). [16] La razón de tal utilidad es que la naturaleza rara vez crea una situación que permita una visión clara de diferentes fenómenos debido a la complejidad del mundo real. Sin embargo, los datos deportivos permiten superar tales obstáculos al proporcionar un excelente laboratorio para estudiar el comportamiento humano en entornos competitivos reales. Así lo reafirma el Premio Nobel Daniel Kahneman (2008): "*Estudiar el deporte es una gran idea, porque la gente toma muchas decisiones que le importan enormemente en condiciones estándar. De hecho, es uno de los mejores lugares para hacerlo*". [16]

El juego del lanzamiento de penaltis, en el que se enfrentan un portero y un lanzador de fútbol, se ha convertido en un ejemplo importante en la literatura de la teoría de juegos para analizar los equilibrios de Nash en **estrategias mixtas**. Esto se debe a que el lanzamiento de penaltis nos permite obtener una gran cantidad de datos que son fácilmente disponibles, el objetivo de los agentes que compiten es sencillo (marcar o parar goles según las normas del deporte) y los datos son muy claros. Además, los participantes son profesionales con experiencia y lo que tienen en juego suele ser importante (esto es, tienen los incentivos correctos). [17]

En el transcurso del último mundial Qatar 2022, hemos podido comprobar de primera mano la importancia de tener una estrategia sólida en la ronda de penaltis. En el caso de nuestra selección española, el momento decisivo tuvo lugar en el partido contra Marruecos, por quien fuimos vencidos en los penaltis tras haber demostrado una clara superioridad en la posesión y en el ataque a lo largo de todo el partido. ¿Es injusto que un equipo que ha jugado mejor al fútbol durante 90 minutos sea eliminado de un mundial por un factor altamente fortuito como es desempate en penaltis? Tal vez, pero así es el fútbol.

A posteriori, lo único que podemos hacer es centrar nuestros esfuerzos en hallar la estrategia óptima para maximizar las ganancias de nuestro juego la próxima vez, y para ello, la teoría de juegos puede ser un gran aliado.

3.2.1 APLICACIÓN DE TEORÍA DE JUEGOS

La literatura sobre teoría de juegos que conocemos acerca de los lanzamientos de penaltis analiza esta situación como un **juego de información completa**, es decir, como un juego en el que los dos jugadores conocen las características del otro y, por tanto, conocen los pagos esperados que recibirán en los distintos perfiles de estrategia del juego. [18] Es una suposición con lógica, ya que los porteros y delanteros en una liga de fútbol profesional suelen ser jugadores muy conocidos y sus características principales son reconocidas por sus oponentes.

No obstante, **no** todos los penaltis de fútbol se lanzan en situaciones en las que sea **razonable suponer que se dispone de información completa**. En muchos casos, especialmente en partidos de aficionados y en partidos entre equipos que pertenecen a ligas diferentes, es posible que los jugadores no se conozcan y, por lo tanto, no estén seguros de características importantes que pueden influir en el resultado del partido. Además, a pesar de poder conocer las características que definen el tipo del jugador, este puede decidir lanzar de manera diferente (como cuando un jugador diestro lanza con la izquierda y viceversa).

El modelo básico de la teoría de juegos para la interacción en el lanzamiento de penaltis sigue la lógica de "***matching pennies***". Cuando las alternativas son igual de poderosas, la solución es que ambos jugadores elijan cada lado con la misma probabilidad. Si dividimos la portería en dos secciones (izquierda y derecha), esto significa que el delantero lanza a la izquierda la mitad de las veces y a la derecha la otra mitad; de la misma forma que el portero se tira a la izquierda la mitad de las veces y a la derecha la otra mitad. Se trata de estrategias óptimas porque ninguna de las partes puede aprovecharse en estas circunstancias, no hay desviación beneficiosa. [19]

Todas las demás estrategias no son óptimas, porque si el delantero chutara a la izquierda el 100% de las veces, sería muy fácil para el portero detener el tiro (lanzarse a la izquierda el 100% de las veces), ya que la previsibilidad del delantero permite al portero aprovecharse de él. Lo mismo ocurre si el delantero apunta a la izquierda el 99% de las veces, o el 98% de las veces, y así sucesivamente: el portero seguiría queriendo lanzarse siempre a la izquierda, y el delantero no rendiría tan bien como podría haciéndolo de forma menos predecible.

Sin embargo, existe un sesgo de comportamiento sospechado, pero hasta ahora no demostrado: el **efecto de la presión psicológica en situaciones competitivas**. Recordemos que, junto a Vernon Smith, el Premio Nobel de Economía 2002 también fue concedido a un psicólogo (Daniel Kahneman, autor del bestseller "Thinking, Fast and Slow"), precisamente por este tipo de descubrimientos. Resulta que una tanda de penaltis no es una lotería 50% - 50%, sino más bien una lotería 60% - 40% por el efecto causado por **el orden de los lanzamientos:** el equipo que comienza la tanda tiende a ir por delante, y esto "presiona" al segundo equipo, que tiende a ir por detrás tirando para empatar. Esta diferencia "no cognitiva" genera diferencias en el rendimiento de los profesionales que explican la diferencia del 60-40).[17] En el modelo que se desarrollará a continuación tendremos la oportunidad de comprobar si existe dicho efecto de presión psicológica en la muestra de penaltis capturada.

Otro aspecto a considerar son los estudios de Tversky y Kahneman (1979), que defienden la existencia de **anomalías cognitivas en los individuos, separándoles fuertemente de la racionalidad implícita en la teoría de la utilidad esperada**. Un ejemplo de ello es su teoría de aversión al riesgo, fundamentada en los estudios experimentales que demostraban que los individuos son aversos al riesgo cuando se trata de situaciones en el ámbito de las ganancias, pero son buscadores de riesgos cuando están en el ámbito de las pérdidas. Este efecto no solo influye sobre el tema de la utilidad esperada "*sino sobre prácticamente todos los modelos de elección basados sobre otras teorías normativas*" (Kahneman, 1979). [20]

En esta línea, las estadísticas futbolísticas muestran que es más fácil tirar para ganar que para no perder. Los jugadores solo convierten en gol el 62% de los penaltis cuando necesitan marcar para no perder inmediatamente la tanda. En cambio, los penaltis decisivos para ganar se transforman con éxito el 92% de las veces. [21]

En el análisis empírico elaborado por P.A. Chiappori, S. Levitt, y T. Groseclose (2002), se utilizó un conjunto de datos de 459 penaltis (todos los penaltis lanzados en la primera división francesa durante un periodo de dos años y en la primera división italiana durante un periodo de tres años). Para cada lanzamiento, se monitorizaron las identidades del lanzador y el portero, la acción realizada por ambos (es decir, derecha, izquierda o centro), qué pie utilizó el lanzador, e información sobre la situación del partido (como el marcador actual, el minuto de juego y si eran el equipo local). En esta base de datos se incluyó un total de 162 delanteros y 88 porteros, y se dividió la portería en 3 secciones sobre las que tomar la decisión (izquierda, centro y derecha).

Se asumió simultaneidad de movimientos entre portero y lanzador, y se utilizó un enfoque de estrategias mixtas y estadística para confirmar las hipótesis iniciales con un nivel de significación (alfa) del 10%: i) Para un lanzador determinado, la probabilidad de marcar es la misma cuando tira a la derecha, al centro o a la izquierda y ii) Para los porteros que se enfrentan a un mismo lanzador, la probabilidad de marcar es la misma si el portero salta a la derecha o a la izquierda. [22] En nuestro experimento, trataremos de determinar si el equilibrio de Nash va en línea con estas hipótesis.

3.2.2 DEFINICIÓN DE VARIABLES

Para la elaboración de este proyecto, se ha llevado a cabo una recopilación de datos de lanzamiento de penaltis en encuentros semanales desde el 24 de enero al 25 de mayo de 2022. Los lanzamientos han sido realizados por 9 jugadores y 4 porteros diferentes, todos ellos pertenecientes al equipo de Unión Deportiva San Sebastián de los Reyes

Se ha obtenido una base de datos de un total de 1274 penaltis. Los lanzamientos han sido realizados en un entorno real (del que se han recopilado 571 penaltis) y uno de simulación (703 penaltis). Para el objeto de este estudio, se utilizarán los datos de lanzamientos correspondientes al entorno real, en el que los jugadores han sido categorizados según las siguientes **variables endógenas:**

- Lanzador *(Kicker)*. Variable explicativa cualitativa referente a la identidad de cada lanzador de penaltis. Se ha codificado en una variable cuantitativa en la que a cada jugador le corresponde un valor numérico del 1 al 9
- Portero *(Goalkeeper)*. Variable explicativa cualitativa referente a la identidad del portero que se dispone a enfrentarse al penalti. Al igual que en el caso anterior, se ha

adaptado en una variable cuantitativa discreta en la que a cada portero se le asigna un número del 1 al 4.

- Pareja (*Pair*). Se ha categorizado cada combinación de lanzador + portero que han jugado juntos asignándoles un valor numérico, con el fin de explorar la posibilidad de la existencia de patrones en la elección de estrategias en función del contrincante al que se enfrenta cada jugador. Es una variable explicativa, cualitativa adaptada como cuantitativa discreta, con 19 parejas diferentes.
- Nivel (*ExpertiseKicker, ExpertiseGoalkeeper*). Variable explicativa ordinal que hace referencia al nivel de habilidades del jugador por su juego habitual (expertise), puntuando en una escala del 1 (nivel experto) al 3 (menos dotado) tanto para los lanzadores (*Expertise Lanzador*) como para los porteros (*Expertise Portero*). El nivel de los lanzadores se ha determinado en base a una autoevaluación, mientras que el de los porteros se corresponde con el portero titular (nivel 1), portero suplente (nivel 2) y tercer portero (nivel 3).
- Edad (*AgeKicker, AgeGoalkeeper)*. Variable explicativa, cuantitativa discreta que determina los años de vida del jugador y que por ello está estrechamente relacionada al nivel de forma física que posee.
- Pie del lanzamiento (*KickersFoot*). Únicamente aplicable a los lanzadores de penaltis (no a los porteros). Es una variable explicativa, cualitativa y dicotómica, a la que se le ha asignado el valor 1 para los lanzamientos con el pie derecho y 0 para los del izquierdo.
- Elección (*KickerChoice, GoalkeeperChoice*). Para la codificación del destino del lanzamiento realizado por el delantero y del lugar elegido por el portero para pararlo, se ha realizado una división ficticia de la portería en 9 secciones diferentes según lo representado en la Figura 7:

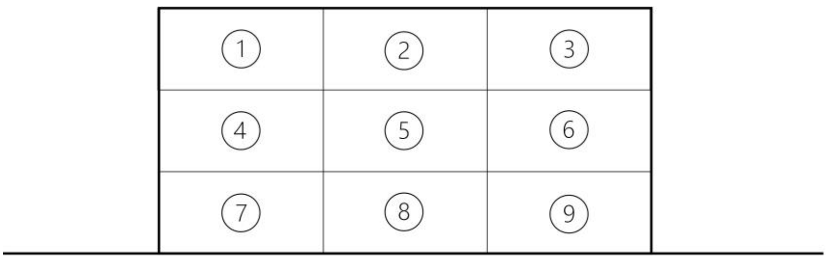


Figura 7. Codificación de las secciones de la portería

Asimismo, en la base de datos se contemplan dos variables externas ajenas al propio lanzamiento, pero que podrían influir en el resultado del penalti:

- Resultado previo (*PreviousResult*). Variable explicativa cualitativa que indica el desenlace del último partido jugado antes de la correspondiente sesión de lanzamiento de penaltis. Este factor se ha adaptado como variable explicativa cuantitativa asignando el valor 0 para derrota, 1 para victoria y 2 en caso de empate.
- Entrenador (*NewManager*). El equipo experimentó un cambio en el entrenador durante los meses que duró la recopilación de datos en las distintas sesiones, por lo que se decidió incluir esta variable explicativa cualitativa adaptada como dicotómica para expresar si el penalti tiene lugar durante el período en el que el equipo estaba con su entrenador habitual (valor 0) o con el nuevo entrenador (valor 1).

En nuestro análisis, existen dos **variables endógenas** a explicar, cada una correspondiente a las estrategias seleccionadas por el lanzador y el portero, respectivamente:

- Resultado (*Outcome*). Variable endógena dicotómica que muestra si el resultado del penalti ha sido favorable (gol, 1) o no (0).
- Parada (*GoalkeeperSaves*). Variable endógena dicotómica que hace referencia si el portero ha parado el lanzamiento (1) o no (0). Esta variable no es complementaria de la anterior, dado que un penalti puede fallar porque un tiro vaya directamente fuera del área de la portería. Siempre que el valor de la variable *GoalkeeperSaves* sea 1, el de la variable *Outcome* será 0, pero esta condición no se cumple necesariamente en el caso opuesto (no siempre que la variable *Outcome* sea 0 será porque la variable *GoalkeeperSaves* sea 1, ya que el tiro puede ir fuera).

3.2.3 ESTADÍSTICOS DESCRIPTIVOS

Con el propósito de detectar una posible multicolinealidad entre las variables previamente explicadas, se ha llevado a cabo el estudio de la matriz de correlación con el programa de análisis estadístico Gretl. Dicha matriz proporciona los coeficientes de correlación entre las variables independientes dos a dos, de manera que cuanto mayor es el coeficiente correspondiente a la pareja de variables, más relacionadas se encuentran entre sí. Si tomase el valor 1, significaría que entre esas variables existe una multicolinealidad perfecta (sus valores se modifican en la misma medida al alterar el resto de las variables del sistema).

En la Imagen siguiente se puede comprobar que las variables elegidas (sin incluir el número de jugador *Kicker* y portero *Goalkeeper* al reflejarse la combinación de ambos en *Pair*) están poco relacionadas en general, salvo las parejas con la edad del lanzador (por la forma de establecerlas de antemano) y las edades de los jugadores con su expertise (lo cual tiene sentido, ya que los jugadores pierden forma física a medida que aumenta su edad). Como era de esperar, las variables Outcome y GoalkeeperSaves también se relacionan de forma inversa, ya que cuando el portero para el tiro (*GoalkeeperSaves* toma el valor 1), el resultado para *Outcome* es 0.

Por otra parte, en esta base de datos de lanzamiento de penaltis no se puede considerar el orden de lanzamiento de los equipos para comprobar el posible efecto de la presión psicológica (ya que no se trata de un partido y no hay equipos, es un enfrentamiento entre el delantero y portero de manera individual). Si consideramos la variable *PreviousResult* como la métrica indicativa de la presión psicológica a la que se puede ver sometido el jugador (el resultado del partido anterior puede afectar a su rendimiento), no podemos afitmar que exista una gran relación con el resultado del penalti (valor 0.1 en la matriz de correlación); así que no podemos corroborar la existencia de este fenómeno de forma empírica.

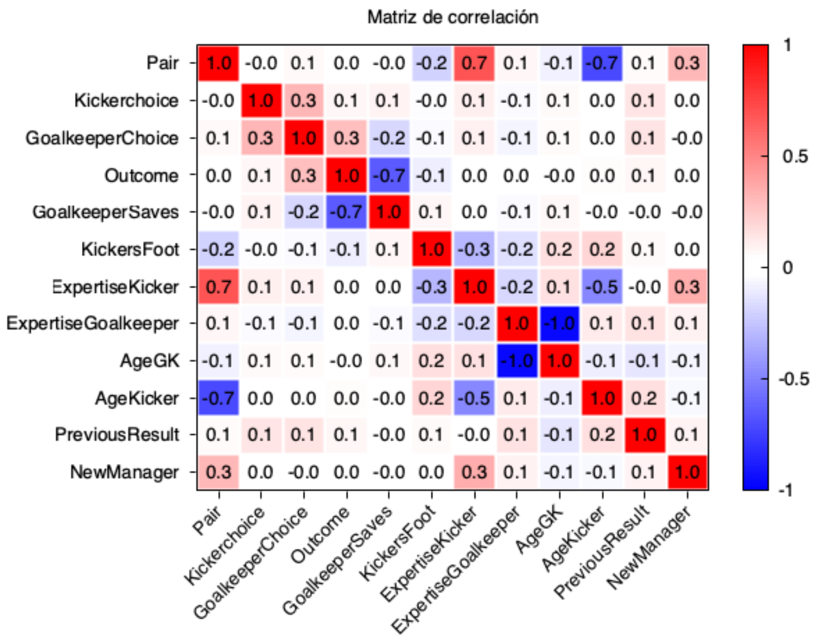


Figura 8. Matriz de correlación de variables en el lanzamiento de penaltis

Un resumen de las principales características de la base de datos puede consultarse en las Tabla 3 y 4. En la Tabla 3 se puede observar un breve análisis de los resultados en forma porcentual del total de lanzamientos, obteniendo 2 resultados: gol (probabilidad de un 56%) y fallo (44%), que a su vez puede deberse a la parada del portero (58%) o tiro fuera de la portería (42%). A su vez, en la Tabla 4 podemos observar un análisis de la probabilidad de gol para cada lanzador y portero, mostrando también su expertise y el número de penaltis en los que han participado.

Resultado	
Gol	56.4%
Fallo	43.6%
Parada	57.7%
No Parada (fuera)	42.3%

Tabla 3 – Resultados globales

Lanzador	Expertise	Nº penaltis	% de gol
1	1	241	53.5%
2	1	214	60.3%
3	1	185	54.6%
4	2	347	55.0%
5	3	113	44.2%
6	3	110	57.3%
7	2	24	91.7%
8	2	20	80.0%
9	2	20	90.0%
Total penaltis y goles		*1274*	*719*
Portero	**Expertise**	**Nº penaltis**	**% de paradas**
1	1	445	29.2%
2	2	483	23.8%
3	3	282	24.5%
4	1	64	9.4%
Total penaltis y paradas		*1274*	*320*

Tabla 4 – Análisis estadístico inicial

3.2.4 ELABORACIÓN DEL MODELO

La aplicación de Teoría de Juegos en el contexto de lanzamiento de penaltis tiene como objetivo determinar la estrategia óptima de elección de la posición de la portería a la que: i) orientar el lanzamiento para el delantero y ii) en la que posicionarse para la parada para el portero; con el fin de maximizar la recompensa para cada uno de ellos, definida como la probabilidad de marcar para el lanzador y la probabilidad de parar el tiro para el portero. Asimismo, se evaluará la posible existencia de un Equilibrio de Nash y se extraerán conclusiones para su aplicación en casos de Estrategia Empresarial.

Se llevará la modelización de este juego con estrategias mixtas, con el objetivo de calcular la **probabilidad óptima de lanzamiento en cada una de las secciones** de la portería para cada jugador con el fin de para maximizar sus ganancias. Para el cálculo de la matriz de ganancias de este juego, se han tomado como recompensas los valores correspondientes a las ocasiones en las que se ha marcado el penalti y las ocasiones en las que se ha parado para el lanzador y el portero, respectivamente. Dicha matriz se muestra en la *Tabla 5*, que incluye las ocasiones de éxito para cada uno de los tipos de jugador observadas en la muestra de

1274 lanzamientos según las elecciones de ambos respecto a la sección de la portería en la que centrarse.

		Prob. Parada	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	Q_6	Q_7	Q_8	Q_9
Prob. lanzam.		Matriz ganancias	**Portero**								
			1	2	3	4	5	6	7	8	9
P_1	**Delantero**	1	*0, 4*	*3. 0*	*0, 0*	*2, 0*	*8, 0*	*0, 0*	*10, 0*	*2, 0*	*15, 0*
P_2		2	*0, 0*	*2, 10*	*0, 0*	*0, 0*	*3, 0*	*0, 0*	*20, 1*	*0, 0*	*8, 0*
P_3		3	*0, 0*	*1, 0*	*4, 6*	*1, 0*	*8, 0*	*5, 0*	*9, 0*	*2, 0*	*7, 0*
P_4		4	*0, 0*	*3, 0*	*0, 0*	*15, 18*	*27, 0*	*1, 0*	*18, 3*	*10, 0*	*33, 0*
P_5		5	*0, 0*	*0, 0*	*0, 0*	*0, 0*	*15, 122*	*2, 0*	*45, 1*	*3, 0*	*41, 0*
P_6		6	*0, 0*	*2, 0*	*0, 0*	*1, 0*	*13, 0*	*9, 25*	*25, 3*	*9, 0*	*5, 3*
P_7		7	*0, 0*	*2, 0*	*0, 0*	*0, 0*	*26, 1*	*0, 0*	*39, 30*	*16, 0*	*65, 0*
P_8		8	*0, 0*	*0, 0*	*0, 0*	*1, 0*	*1, 0*	*0, 0*	*14, 1*	*6, 52*	*30, 0*
P_9		9	*0, 0*	*1, 0*	*0, 0*	*0, 0*	*18, 0*	*0, 0*	*77, 0*	*10, 0*	*26, 40*

Tabla 5 – Matriz de ganancias y probabilidades iniciales en el lanzamiento de penaltis

3.2.5 RESOLUCIÓN Y CONCLUSIONES DEL ANÁLISIS EMPÍRICO

Una vez planteadas las bases del juego, se procederá a su resolución mediante el procedimiento de **eliminación iterativa de las estrategias estrictamente dominadas**, siendo estas las que nunca serían elegidas por el jugador al haber otra siempre más favorable para todas las posibles estrategias del adversario. Como se mencionaba anteriormente, el objetivo será la obtención del Equilibrio de Nash de estrategias mixtas mediante el cálculo de probabilidades que optimizan la elección de cada sección de la portería para cada jugador. Las secciones 2, 5 y 8 de la portería corresponden a las estrategias estrictamente dominadas para el delantero (siempre hay una sección con un resultado más favorable en todos los casos), y la estrategia 2 sería estrictamente dominada en caso del portero; reduciendo el juego a resolver como se muestra en la *Tabla 6*:

		Prob. Parada	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	Q_6	Q_7	Q_8	Q_9
Prob. lanzam.		Matriz ganancias	**Portero**								
			1	2	3	4	5	6	7	8	9
P_1	**Delantero**	1	*0, 4*	*3. 0*	*0, 0*	*2, 0*	*8, 0*	*0, 0*	*10, 0*	*2, 0*	*15, 0*
P_2		2	*0, 0*	*2, 10*	*0, 0*	*0, 0*	*3, 0*	*0, 0*	*20, 1*	*0, 0*	*8, 0*
P_3		3	*0, 0*	*1, 0*	*4, 6*	*1, 0*	*8, 0*	*5, 0*	*9, 0*	*2, 0*	*7, 0*
P_4		4	*0, 0*	*3, 0*	*0, 0*	*15, 18*	*27, 0*	*1, 0*	*18, 3*	*10, 0*	*33, 0*
P_5		5	*0, 0*	*0, 0*	*0, 0*	*0, 0*	*15, 122*	*2, 0*	*45, 1*	*3, 0*	*41, 0*
P_6		6	*0, 0*	*2, 0*	*0, 0*	*1, 0*	*13, 0*	*9, 25*	*25, 3*	*9, 0*	*5, 3*
P_7		7	*0, 0*	*2, 0*	*0, 0*	*0, 0*	*26, 1*	*0, 0*	*39, 30*	*16, 0*	*65, 0*
P_8		8	*0, 0*	*0, 0*	*0, 0*	*1, 0*	*1, 0*	*0, 0*	*14, 1*	*6, 52*	*30, 0*
P_9		9	*0, 0*	*1, 0*	*0, 0*	*0, 0*	*18, 0*	*0, 0*	*77, 0*	*10, 0*	*26, 40*

Tabla 6 –Modelización del juego del lanzamiento de penaltis - Juego reducido

Para resolver el juego, se hallarán las probabilidades de las estrategias del adversario para las cuales al jugador le resultará indiferente la elección de una sección de la portería u otra, siendo P_x la probabilidad de que el delantero escoja la sección "x" y Q_x la probabilidad de que el portero escoja la sección "x". Se desarrollará un sistema de 7 ecuaciones y 7 incógnitas partiendo de una modificación del juego reducido excluyendo únicamente las estrategias 2 y 8 tanto para el portero como el delantero para poder obtener una matriz cuadrada que permita la obtención de un resultado un resultado numérico más allá de la solución trivial.

De esta forma, tendríamos un sistema de 7 ecuaciones con 7 incógnitas para las secciones 1, 3, 4, 5, 7 y 9 de la portería para ambos jugadores, con la condición de que $P_1 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 + P_7 + P_9 = 1$, al igual que $Q_1 + Q_3 + Q_4 + Q_5 + Q_6 + Q_7 + Q_9 = 1$.

Procederemos a desarrollar las ecuaciones para el delantero, igualando las ganancias de todas las secciones para que la elección sea indiferente y siendo Q la probabilidad de que el portero elija cada sección de la portería:

$$\begin{aligned}\textit{Sección } 1 = \textit{Sección } 3\text{:}\quad & 0\cdot Q_1 + 0\cdot Q_3 + 2\cdot Q_4 + 8\cdot Q_5 + 0\cdot Q_6 + 10\cdot Q_7 + 15\cdot Q_9 = \\ & = 0\cdot Q_1 + 4\cdot Q_3 + 1\cdot Q_4 + 8\cdot Q_5 + 5\cdot Q_6 + 9\cdot Q_7 + 7\cdot Q_9\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\textit{Sección } 3 = \textit{Sección } 4\text{:}\quad & 0\cdot Q_1 + 4\cdot Q_3 + 1\cdot Q_4 + 8\cdot Q_5 + 5\cdot Q_6 + 9\cdot Q_7 + 7\cdot Q_9 = \\ & = 0\cdot Q_1 + 0\cdot Q_3 + 15\cdot Q_4 + 27\cdot Q_5 + 1\cdot Q_6 + 18\cdot Q_7 + 33\cdot Q_9\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\textit{Sección } 4 = \textit{Sección } 5\text{:}\quad & 0\cdot Q_1 + 0\cdot Q_3 + 15\cdot Q_4 + 27\cdot Q_5 + 1\cdot Q_6 + 18\cdot Q_7 + 33\cdot Q_9 = \\ & = 0\cdot Q_1 + 0\cdot Q_3 + 0\cdot Q_4 + 15\cdot Q_5 + 2\cdot Q_6 + 45\cdot Q_7 + 41\cdot Q_9\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\textit{Sección } 5 = \textit{Sección } 6\text{:}\quad & 0\cdot Q_1 + 0\cdot Q_3 + 0\cdot Q_4 + 15\cdot Q_5 + 2\cdot Q_6 + 45\cdot Q_7 + 41\cdot Q_9 = \\ & = 0\cdot Q_1 + 0\cdot Q_3 + 1\cdot Q_4 + 13\cdot Q_5 + 9\cdot Q_6 + 25\cdot Q_7 + 5\cdot Q_9\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\textit{Sección } 6 = \textit{Sección } 7\text{:}\quad & 0\cdot Q_1 + 0\cdot Q_3 + 1\cdot Q_4 + 13\cdot Q_5 + 9\cdot Q_6 + 25\cdot Q_7 + 5\cdot Q_9 = \\ & = 0\cdot Q_1 + 0\cdot Q_3 + 0\cdot Q_4 + 26\cdot Q_5 + 0\cdot Q_6 + 39\cdot Q_7 + 65\cdot Q_9\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\textit{Sección } 7 = \textit{Sección } 9\text{:}\quad & 0\cdot Q_1 + 0\cdot Q_3 + 0\cdot Q_4 + 26\cdot Q_5 + 0\cdot Q_6 + 39\cdot Q_7 + 65\cdot Q_9 = \\ & = 0\cdot Q_1 + 0\cdot Q_3 + 0\cdot Q_4 + 18\cdot Q_5 + 0\cdot Q_6 + 77\cdot Q_7 + 26\cdot Q_9\end{aligned}$$

$$\textit{Condición de probabilidad}\text{:}\quad Q_1 + Q_3 + Q_4 + Q_5 + Q_6 + Q_7 + Q_9 = 1$$

Resolviendo dicho sistema, se obtienen las siguientes probabilidades de elección del portero para cada sección de la portería, que aseguran indiferencia de estrategia para el lanzador:

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & -8 \\ 0 & 4 & -14 & -19 & 4 & -9 & -26 \\ 0 & 0 & 15 & 12 & -1 & -27 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -7 & 20 & 36 \\ 0 & 0 & 1 & -13 & 9 & -14 & -60 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & -38 & 39 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Q1 \\ Q3 \\ Q4 \\ Q5 \\ Q6 \\ Q7 \\ Q9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} Q1 \\ Q3 \\ Q4 \\ Q5 \\ Q6 \\ Q7 \\ Q9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44\% \\ 29\% \\ 10\% \\ 1\% \\ 7\% \\ 4\% \\ 4\% \end{pmatrix}$$

A continuación, se llevará a cabo la construcción de ecuaciones para el portero según la misma metodología, siendo P la probabilidad de elección de cada sección de la portería por parte del delantero:

$$Sección\ 1 = Sección\ 3: \quad 4 \cdot P_1 + 0 \cdot P_3 + 0 \cdot P_4 + 0 \cdot P_5 + 0 \cdot P_6 + 0 \cdot P_7 + 0 \cdot P_9 = \\ = 0 \cdot P_1 + 6 \cdot P_3 + 0 \cdot P_4 + 0 \cdot P_5 + 0 \cdot P_6 + 0 \cdot P_7 + 0 \cdot P_9$$

$$Sección\ 3 = Sección\ 4: \quad 0 \cdot P_1 + 6 \cdot P_3 + 0 \cdot P_4 + 0 \cdot P_5 + 0 \cdot P_6 + 0 \cdot P_7 + 0 \cdot P_9 = \\ = 0 \cdot P_1 + 0 \cdot P_3 + 18 \cdot P_4 + 0 \cdot P_5 + 0 \cdot P_6 + 0 \cdot P_7 + 0 \cdot P_9$$

$$Sección\ 4 = Sección\ 5: \quad 0 \cdot P_1 + 0 \cdot P_3 + 18 \cdot P_4 + 0 \cdot P_5 + 0 \cdot P_6 + 0 \cdot P_7 + 0 \cdot P_9 = \\ = 0 \cdot P_1 + 0 \cdot P_3 + 0 \cdot P_4 + 122 \cdot P_5 + 0 \cdot P_6 + 1 \cdot P_7 + 0 \cdot P_9$$

$$Sección\ 5 = Sección\ 6: \quad 0 \cdot P_1 + 0 \cdot P_3 + 0 \cdot P_4 + 122 \cdot P_5 + 0 \cdot P_6 + 1 \cdot P_7 + 0 \cdot P_9 = \\ = 0 \cdot P_1 + 0 \cdot P_3 + 0 \cdot P_4 + 0 \cdot P_5 + 25 \cdot P_6 + 0 \cdot P_7 + 0 \cdot P_9$$

$$Sección\ 6 = Sección\ 7: \quad 0 \cdot P_1 + 0 \cdot P_3 + 0 \cdot P_4 + 0 \cdot P_5 + 25 \cdot P_6 + 0 \cdot P_7 + 0 \cdot P_9 = \\ = 0 \cdot P_1 + 0 \cdot P_3 + 3 \cdot P_4 + 1 \cdot P_5 + 3 \cdot P_6 + 30 \cdot P_7 + 0 \cdot P_9$$

$$Sección\ 7 = Sección\ 9: \quad 0 \cdot P_1 + 0 \cdot P_3 + 3 \cdot P_4 + 1 \cdot P_5 + 3 \cdot P_6 + 30 \cdot P_7 + 0 \cdot P_9 = \\ = 0 \cdot P_1 + 0 \cdot P_3 + 0 \cdot P_4 + 0 \cdot P_5 + 3 \cdot P_6 + 0 \cdot P_7 + 40 \cdot P_9$$

$$Condición\ de\ probabilidad: \quad P_1 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 + P_7 + P_9 = 1$$

Resolvemos el sistema mediante una calculadora de ecuaciones en formato matricial, para hallar las probabilidades de elección de la sección de la portería por parte del delantero que aseguran indiferencia de elección de sección para para el portero:

$$\begin{pmatrix} 4 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -18 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & -122 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 122 & -25 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 22 & -30 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 30 & -40 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P1 \\ P3 \\ P4 \\ P5 \\ P6 \\ P7 \\ P9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} P1 \\ P3 \\ P4 \\ P5 \\ P6 \\ P7 \\ P9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44\% \\ 29\% \\ 10\% \\ 1\% \\ 7\% \\ 4\% \\ 4\% \end{pmatrix}$$

De esta forma, podemos concluir que el equilibrio de Nash en estrategias mixtas para el lanzamiento de penaltis de acuerdo con la muestra observada es el expresado a continuación, conteniendo en el primer paréntesis las probabilidades de que el delantero lance en cada posición de la portería (de 1 a 9 según la Figura 7) y en el segundo paréntesis la probabilidad de que el portero defienda cada sección de la portería, respectivamente:

NE: ((44%, 0, 29%, 10%, 1%, 7%, 4%, 0, 4%), (44%, 0, 29%, 10%, 1%, 7%, 4%, 0, 4%))

Este resultado implica que para que tenga lugar el equilibrio de Nash para el delantero (lo que implica indiferencia en la elección de la sección de la portería a lanzar), el portero debe posicionarse en la sección 1 de la portería con un 44% de probabilidad, en la sección 2 con un 0% de probabilidad, en la 3 con un 10% de probabilidad; y así sucesivamente. Lo mismo ocurre con el NE para el portero, requiriendo la distribución de probabilidades mostrada en el segundo paréntesis de la solución para que el lanzamiento del delantero asegure indiferencia entre las opciones del portero.

Si quisiéramos determinar la **estrategia (no de equilibrio) que maximiza las ganancias del lanzador y portero**, podríamos realizar un ejercicio de optimización sobre la matriz de ganancias expresada en probabilidad de éxito. Se entiende éxito como marcar gol para lanzador y parar el lanzamiento para portero, y se han hallado las probabilidades de éxito para ambos considerando el total lanzamientos como 1039, que excluiría los tiros fuera de portería (ya que no se contemplan en el planteamiento del ejercicio al no estar representados en una sección de la portería y no afectar a la toma de decisión del portero, por lo que no implica interacción entre los jugadores). En la Tabla 7 se muestra el juego reducido con ganancias en forma de probabilidad.

Prob. lanzam.		Prob. Parada	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	Q_6	Q_7	Q_8	Q_9
		Matriz ganancias	**Portero**								
			1	2	3	4	**5**	6	**7**	8	**9**
P_1	**Delantero**	1	*0.0% , 0.4%*	*0.3% , 0.0%*	*0.0% , 0.0%*	*0.2% , 0.0%*	*0.8% , 0.0%*	*0.0% , 0.0%*	*1.0% , 0.0%*	*0.2% , 0.0%*	*1.4% , 0.0%*
P_2		2	*0.0% , 0.0%*	*0.2% , 1.0%*	*0.0% , 0.0%*	*0.0% , 0.0%*	*0.3% , 0.0%*	*0.0% , 0.0%*	*1.9% , 0.1%*	*0.0% , 0.0%*	*0.8% , 0.0%*
P_3		3	*0.0% , 0.0%*	*0.1% , 0.0%*	*0.4% , 0.6%*	*0.1% , 0.0%*	*0.8% , 0.0%*	*0.5% , 0.0%*	*0.9% , 0.0%*	*0.2% , 0.0%*	*0.7% , 0.0%*
P_4		4	*0.0% , 0.0%*	*0.3% , 0.0%*	*0.0% , 0.0%*	*1.4% , 1.7%*	*2.6% , 0.0%*	*0.1% , 0.0%*	*1.7% , 0.3%*	*1.0% , 0.0%*	*3.2% , 0.0%*
P_5		5	*0.0% , 0.0%*	*0.0% , 0.0%*	*0.0% , 0.0%*	*0.0% , 0.0%*	*1.4% , 11.7%*	*0.2% , 0.0%*	*4.3% , 0.1%*	*0.3% , 0.0%*	*3.9% , 0.0%*
P_6		6	*0.0% , 0.0%*	*0.2% , 0.0%*	*0.0% , 0.0%*	*0.1% , 0.0%*	*1.3% , 0.0%*	*0.9% , 2.4%*	*2.4% , 0.3%*	*0.9% , 0.0%*	*0.5% , 0.3%*
P_7		7	*0.0% , 0.0%*	*0.2% , 0.0%*	*0.0% , 0.0%*	*0.0% , 0.0%*	*2.5% , 0.1%*	*0.0% , 0.0%*	*3.8% , 2.9%*	*1.5% , 0.0%*	*6.3% , 0.0%*
P_8		8	*0.0% , 0.0%*	*0.0% , 0.0%*	*0.0% , 0.0%*	*0.1% , 0.0%*	*0.1% , 0.0%*	*0.0% , 0.0%*	*1.3% , 0.1%*	*0.6% , 5.0%*	*2.9% , 0.0%*
P_9		9	*0.0% , 0.0%*	*0.1% , 0.0%*	*0.0% , 0.0%*	*0.0% , 0.0%*	*1.7% , 0.0%*	*0.0% , 0.0%*	*7.4% , 0.0%*	*1.0% , 0.0%*	*2.5% , 3.8%*

Tabla 7 – Juego reducido del lanzamiento de penaltis – Probabilidades de éxito

Si recordamos la distribución de las secciones en la portería (Figura 7), la eliminación de estrategias estrictamente dominadas muestra claramente que la **decisión óptima para el delantero es un lanzamiento a los extremos de la portería**, evitando siempre la zona central (secciones 2, 5 y 8). Asimismo, se observa que las probabilidades de éxito en la zona central de los laterales de la portería (secciones 4 y 6) proporciona mejores resultados que los extremos superiores (sección 1 en el lado izquierdo y 3 en el derecho) en la mayoría de los casos. No obstante, no se obtiene una conclusión clara en la elección entre la sección media y baja para los laterales de la portería.

En el caso del portero, la optimización de la estrategia resulta más compleja debido a que las probabilidades de éxito superiores a 0% se encuentran principalmente en la diagonal de la matriz, lo que dificulta la extrapolación de la mejor decisión independientemente a la elección del delantero. Esto significa que la **elección óptima del portero irá estrechamente ligada a la elección del lanzador**, motivo por el cual los porteros tienden a esperar a observar la orientación del tiro antes de tomar su posición, a pesar de considerarse un juego simultáneo.

En vista de las probabilidades de éxito, la propuesta de orientación de la posición del portero sería la sección 5, que es la que presenta mayor posibilidad de parada (un 11.7% en caso de que sea la elección del lanzador). Considerando la anterior recomendación para el delantero de evitar la sección central de la portería, una recomendación adicional para el portero serían las secciones 7 y 9, que son las únicas que logran un ligero porcentaje de parada aun en caso de que el delantero no elija orientar el tiro a esas secciones.

La propuesta de orientación del lanzamiento para optimizar las probabilidades de éxito para el delantero y el portero se muestra en la Figura 9.

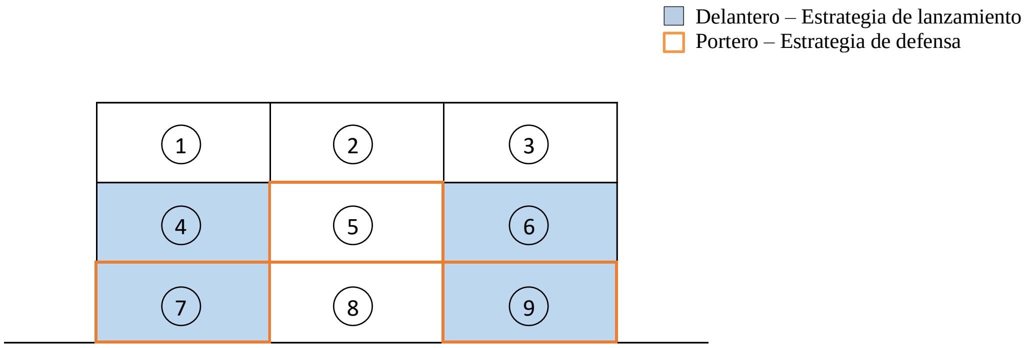


Figura 9. Propuesta de estrategia óptima para el lanzamiento de penaltis

3.2.6 COMPARATIVA DEL EXPERIMENTO CON EL CASO DE DUOPOLIO

Entre los modelos clásicos de estructuras de mercado (competencia pura, monopolio, oligopolio y competencia monopolística), el duopolio es una forma de mercado oligopolístico en el que sólo hay dos participantes: productores o vendedores. Cada productor, antes de tomar decisiones sobre precios y cantidades, debe tener en cuenta no sólo la estrategia actual del competidor, sino también sus futuras estrategias de respuesta. La importancia de la interacción de los participantes en el mercado es el principal factor que distingue al mercado oligopolístico de otras estructuras de mercado de competencia no perfecta, porque las acciones de cualquier participante en el mercado (la elección de los precios y las cantidades que se van a producir) afectan directamente al equilibrio del mercado e, indirectamente, a los resultados de todos los competidores. [23]

Los modelos de oligopolio más famosos se diseñaron en el siglo XIX, con el estudio de A. Cournot (1838) "Investigaciones sobre los principios matemáticos de la teoría de la riqueza", aplicando modelos matemáticos para analizar la demanda del mercado y los costes de producción y establecer condiciones de maximización de los beneficios para distintos tipos de estructuras de mercado; así como la presentación del modelo clásico de duopolio de Cournot. J. Bertrand (1833) presentó el modelo de competencia de precios en un mercado duopolístico, y H. Von Stackelberg, siguió con el enfoque de Cournot diseñando el modelo de liderazgo cuantitativo en 1934. Hoy en día, es habitual presentar la teoría de juegos como la herramienta más eficaz para la investigación de mercados oligopolísticos [23]

En el *Caso I – Amenaza de Entrada: Duopolio* de la sección 3.1.1 de este trabajo, se ha llevado a cabo la modelización teórica de la situación de amenaza de entrada de nueva empresa a un mercado monopolístico, y las posibles maniobras disuasorias de la empresa establecida para impedir la entrada del nuevo competidor iniciando una situación de duopolio. En este ejemplo, los equilibrios estimados eran únicos (enfoque de estrategias puras), aunque podría suceder que un juego similar de modelado de una situación de duopolio tuviera varios equilibrios de Nash o incluso ninguno. En tales casos, debe aplicarse el enfoque de estrategias mixtas, tal y como se ha tratado en el apartado *3.2 Teoría de Juegos en Lanzamiento de Penaltis.*

Una estrategia mixta asigna cada uno de los posibles conjuntos de información del jugador a una distribución de probabilidad sobre la acción. A continuación, se desarrollará el caso ejemplo de duopolio en estrategias mixtas según el estudio de R. Ginevičius, A. Krivka (2008) en "Application of Game Theory for Duopoly Market Analysis", Journal of Business Economics and Management siguiendo la metodología llevada a cabo en el apartado de modelización de lanzamiento de penaltis.

En un mercado con dos empresas, una mediana (m) y otra grande (g), estas interactúan en un juego de entrada en el mercado con las estrategias posibles y ganancias mostradas en la Tabla 8. Se parte de la premisa de que la empresa mediana no puede entrar en ambos mercados (carece de fondos suficientes), mientras que la grande puede entrar sólo en el primer mercado o en ambos. El primer mercado, por ejemplo, podría ser un mercado mayorista de petróleo, y el segundo, un mercado minorista de gasolina.

			Empresa grande	
	Matriz de ganancias		Entrar al 1er mercado ***Q***	Entrar a ambos mercados ***(1 - Q)***
Empresa mediana	Entrar al 1er mercado	***P***	- 100, 400	400, 300
	No entrar	***1 - P***	0, 600	0, 1000

Tabla 8 – Matriz de ganancias juego de duopolio en estrategias mixtas - Elaboración propia en base a R. Ginevičius (2008)

Los jugadores no tienen estrategias dominantes, no existe un equilibrio de Nash de estrategias puras en el modelo. Si ambas empresas entran en el primer mercado, la empresa grande supera fácilmente a la mediana; en el caso de que la mediana se quede fuera, la grande prefiere entrar en ambos mercados. Por lo tanto, para la empresa mediana es más beneficioso entrar en el primer mercado porque la grande sería derrotada en dicho mercado (su ganancia es positiva debido únicamente al beneficio del segundo mercado), lo que lleva al resultado de ambas empresas en el primer mercado.

Para encontrar el equilibrio, se aplican estrategias mixtas. De la misma forma que en la modelización del juego de penaltis, se asignarán probabilidades para las opciones de estrategias para cada jugador. Denotemos la probabilidad de que la empresa mediana entre en el primer mercado por P, y la probabilidad de que la grande entre sólo en el primer mercado por Q, y asumiendo la condición de probabilidad para las estrategias de ambos jugadores.

La probabilidad que asegura indiferencia para las opciones de la empresa mediana puede calcularse igualando los beneficios esperados de la empresa mediana que elige su acción mientras que estos beneficios dependen de la probabilidad de las acciones de la empresa grande: $-100 \cdot Q + 400 \cdot (1 - Q) = 0 \cdot Q + 0 \cdot (1 - Q) \cdot Q = 0{,}8$.

Otra forma para hallar dicha probabilidad es mediante la maximización del beneficio esperado de la empresa mediana:

$$\pi m = P \cdot (-100 \cdot Q + 400 \cdot (1 - Q)) + (1 - P) \cdot (0 \cdot Q + 0 \cdot (1 - Q)) = P \cdot (400 - 500 \cdot Q)$$

La maximización de πm (P) da el resultado de Q = 0,8, que es la probabilidad de que la empresa grande entre sólo en el primer mercado que hace a la empresa mediana sea indiferente a la hora de elegir entre sus opciones: es el Equilibrio de Nash.

Por lo tanto, si la probabilidad $Q > 0.8$, el beneficio esperado de la empresa mediana por entrar en el primer mercado sería menor que por quedarse fuera, por lo que la empresa tendría la estrategia pura dominante de quedarse fuera.

De la misma forma, las probabilidades P para el Equilibrio de Nash de la empresa grande se calculan de forma similar:

$400 \cdot P + 600 \cdot (1 - P) = 300 \cdot P + 1000 \cdot (1 - P) \cdot P = 0.8$

La empresa mediana entraría en el primer mercado con una probabilidad P = 0,8, que hace a la empresa grande sea indiferente a la hora de elegir entre sus opciones. De esta forma, el Equilibrio de Nash es el siguiente

NE: ((80%, 20%), (80%, 20%))

En el equilibrio de estrategias mixtas la empresa mediana elegiría entrar en el primer mercado con la probabilidad P = 80% y no entrar con un 20% (primer paréntesis del NE mostrado); y la grande elegiría entrar sólo en el primer mercado con la probabilidad Q = 80% (y en ambos al 20%). Cualquiera de los posibles perfiles estratégicos podría ser el equilibrio, pero el más esperado es que la empresa mediana entre en el primer mercado y que la grande solo entre en el primer mercado (con una probabilidad de $0.8 \cdot 0.8 = 0.64$).

Observamos que la metodología llevada a cabo en el ejemplo del duopolio es paralela a la desarrollada en el caso de lanzamiento de penaltis por el enfoque de resolución de estrategias mixtas: asignación de probabilidades para las distintas alternativas estratégicas de cada jugador, eliminación de estrategias estrictamente dominadas (no existen en el ejemplo mostrado de duopolio), e igualación de las ganancias a obtener por cada una de las opciones con las probabilidades correspondientes para hallar las probabilidades de indiferencia en la elección como Equilibrio de Nash. El caso de duopolio se presenta con una resolución más sencilla por tratarse de un ejemplo no empírico, y por la complejidad añadida de las 9 alternativas estratégicas por dividir la portería en 9 secciones en el lanzamiento de penaltis.

Capítulo 4. CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

En este Trabajo de Fin de Grado se ha abordado la temática de toma de decisiones estratégicas mediante el enfoque proporcionado por la teoría de juegos. Para ello, se ha profundizado en el marco teórico actual de la estrategia empresarial y de la teoría de juegos, tras lo cual se han presentado tres casos de aplicación práctica del uso de teoría de juegos en contextos concretos de estrategia empresarial (*Amenaza de Entrada: Duopolio, Cooperación Arancelaria y Optimización de Beneficios*), siendo este el nexo entre la base teórica descriptiva de estrategia en teoría de juegos y el enfoque práctico de modelización del juego de lanzamiento de penaltis.

Así, se ha desarrollado un análisis empírico propio, haciendo uso de la teoría de juegos en un caso real de lanzamiento de penaltis. Se han llevado a cabo todas las fases del proceso de modelización (desde la recopilación de la base de datos hasta el análisis de los resultados) y se ha calculado el Equilibrio de Nash en estrategias mixtas para ambos jugadores. Asimismo, se ha presentado una propuesta de estrategia de maximización de probabilidades de éxito para el delantero y para el portero.

Finalmente, se ha extrapolado la metodología seguida en la modelización de lanzamiento de penaltis en estrategias mixtas a una variación del caso de duopolio presentado anteriormente, mostrando la estrategia del Equilibrio de Nash para las dos empresas participantes desde la perspectiva de optimización de ganancias.

Como trabajos futuros, sería interesante profundizar en una modelización más exhaustiva del lanzamiento de penaltis, considerando distintas variaciones y comparativas agrupando los lanzamientos en función de variables con cierto grado de influencia: pie del lanzamiento, resultado del partido anterior, edad y expertise del jugador, etc. Asimismo, sería interesante recrear la situación del duopolio económico con una mayor profundidad y la elaboración de la matriz de ganancias con datos reales tal y como se ha desarrollado en el análisis empírico.

Capítulo 5. BIBLIOGRAFÍA

[1] V. Cruz (11 diciembre 2016), "What is game theory? Definition and meaning", Market Business News. Recuperado en diciembre 2022 de https://marketbusinessnews.com/financial-glossary/game-theory-definition-meaning/

[2] Emporia State University (15 noviembre 2021), "Why Game Theory Is Important for Business Leaders". Recuperado en diciembre 2022 de https://online.emporia.edu/degrees/business/mba/general/why-game-theory-is-important-for-business-leaders/

[3] H. Lindstädt y J. Müller (1 diciembre 2009), "Making game theory work for managers", McKinsey & Company. Recuperado en diciembre 2022 de https://www.mckinsey.com/capabilities/strategy-and-corporate-finance/our-insights/making-game-theory-work-for-managers

[4] A. Sevilla Arias, CFA (30 de diciembre 2016), "Teoría de juegos", Economipedia. Recuperado en diciembre 2022 de https://economipedia.com/definiciones/teoria-de-juegos.html

[5] O. Guy-Evans (26 de mayo 2022), "Game Theory", Simply Psychology. Recuperado en diciembre 2022 de www.simplypsychology.org/game-theory.html

[6] D. Ross (otoño 2021), "Game Theory", The Stanford Encyclopedia of Philosophy. Recuperado en marzo 2023 de: https://plato.stanford.edu/archives/fall2021/entries/game-theory/

[7] J. E. Harrington Jr. (2015), "Games, Strategies, and Decision Making" (2nd Edition), The Wharton School University of Pennsylvania, Worth Publishers

[8] Massachusetts Institute of Technology, (otoño 2012), "Economic Applications of Game Theory", MIT OpenCourseWare. Recuperado en marzo 2023 de: https://ocw.mit.edu/courses/14-12-economic-applications-of-game-theory-fall-2012/b90ef0b930888cc7a1828d5eaf91f5c9_MIT14_12F12_chapter3.pdf

[9] M. Maschler, E. Solan, S. Zamir (2013), "Strategic-form games in Game Theory" (pp. 75-143), Cambridge University Press. Recuperado en marzo 2023 de: doi:10.1017/CBO9780511794216.005

[10] S. Cheng, D. Reeves, Y. Vorobeychik, M. Wellman (2004), "Notes on Equilibria in Symmetric Games", 6th International Workshop on Game Theoretic and Decision Theoretic Agents. Recuperado en marzo 2023 de: https://ink.library.smu.edu.sg/sis_research/1213

[11] B. Slantchev (marzo 2004), "Game Theory: Repeated Games", Department of Political Science, University of California San Diego. Recuperado en marzo 2023 de: http://users.auth.gr/~kehagiat/Research/GameTheory/02Courses/Course3/07-repeated-games.pdf

[12] C. Shapiro (primavera 1989), "The Theory of Business Strategy", The RAND Journal of Economics (Vol. 20, n.1). Recuperado en marzo 2023 de: https://doi.org/10.2307/2555656

[13] A. Brandenburger, B. Nalebuff (julio 1995), "The Right Game. Use Game Theory to Shape Strategy", Harvard Business Review. Recuperado en marzo 2023 de:http://www.elmayorportaldegerencia.com/Documentos/Estrategia/[PD]%20Documentos%20-%20The%20right%20game.pdf

[14] Emporia State University (noviembre 2021), "Why Game Theory Is Important for Business Leaders". Recuperado en marzo 2023 de: https://online.emporia.edu/degrees/business/mba/general/why-game-theory-is-important-for-business-leaders/

[15] H. Lindstädt, J. Müller (diciembre 2009), "Making game theory work for managers", McKinsey & Company. Recuperado en marzo 2023 de: https://www.mckinsey.com/capabilities/strategy-and-corporate-finance/our-insights/making-game-theory-work-for-managers

[16] M. Bar-Eli, A. Krumer, E. Morgulev (diciembre 2020), "Ask not what economics can do for sports - Ask what sports can do for economics". Recuperado en mayo 2023 de: https://doi.org/10.1016/j.socec.2020.101597

[17] I. Conde-Ruiz (julio 2014), "Introducción del libro "Beautiful Game Theory: How Soccer Can Help Economics" por Ignacio Palacios-Huerta". Recuperado en marzo 2023 de: https://nadaesgratis.es/lecturas-2/sobre-como-el-futbol-puede-ayudar-a-la-ciencia-economica

[18] G. Coloma (s.f.), “The penalty-kick game under incomplete information”, CEMA University. Recuperado en marzo 2023 de: http://www.econ.ucla.edu/riley/Coloma.pdf

[19] W. Spaniel (junio 2018), “The Game Theory of Soccer Penalty Kicks”, University of Pittsburg. Recuperado en marzo 2023 de: https://williamspaniel.com/2014/06/12/the-game-theory-of-soccer-penalty-kicks/

[20] R. Pascale, G. Pascale (2007), “Toma De Decisiones Económicas: El Aporte Cognitivo En La Ruta De Simon, Allais Y Tversky Y Kahneman”. Recuperado en mayo 2023 de: https://www.redalyc.org/pdf/4595/459545424004.pdf

[21] R. King, N. Silver (2014), “A Chart For Predicting Penalty-Shootout Odds in Real Time”. Recuperado en mayo 2023 de: https://fivethirtyeight.com/features/a-chart-for-predicting-penalty-shootout-odds-in-real-time/

[22] P. A. Chiappori, S. Levitt, y T. Groseclose (2002), "Testing Mixed-Strategy Equilibria When Players Are Heterogeneous: The Case of Penalty Kicks in Soccer." American Economic Review. Recuperado en mayo 2023 de: http://pricetheory.uchicago.edu/levitt/Papers/ChiapporiGrosecloseLevitt2002.pdf

[23] R. Ginevičius, A. Krivka (2008), “Application of Game Theory for Duopoly Market Analysis”, Journal of Business Economics and Management, Vilnius Gediminas Technical University. Recuperado en mayo 2023 de: https://www.tandfonline.com/doi/epdf/10.3846/1611-1699.2008.9.207-217?needAccess=true&role=button