Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales

OPTIMIZACIÓN DE CARTERAS MEDIANTE EL EMPLEO DE ALGORITMOS

Autor: Elena Canosa Avversari
Director: Alejandro Rodríguez Gallego

MADRID | Junio 2023

RESUMEN:

El universo de la inversión financiera está experimentando una fuerte transformación debido al incipiente desarrollo de la Inteligencia Artificial, el *Machine Learning* y el *Deep Learning,* los cuales están permitiendo la implementación de modelos de optimización multiobjetivo mediante el uso de algoritmos avanzados, que resultan realmente útiles para los inversores en su labor de resolver el problema de optimización de carteras. Este estudio analiza el progresivo desarrollo de técnicas que marcan las pautas para encontrar la cartera óptima, comenzando por las más tradicionales, como el Teorema de Markowitz, la Simulación de Monte Carlo y el Modelo de Black-Litterman, fundamentales para construir las bases de la teoría de inversión muy valiosas. El estudio prosigue con modelos más avanzados que emplean Algoritmos Metaheurísticos Genéticos, algoritmos de *Simulated Annealing*, *Quantum Computing*, *Deep Reinforcement Learning,* y otras técnicas innovadoras. El estudio se profundiza llevando a la práctica dos de las técnicas, una tradicional y otra moderna, para posteriormente realizar una comparativa entre las dos carteras óptimas obtenidas.

Palabras clave: Optimización de carteras, gestión de carteras, gestión activa, gestión pasiva, replicación de índices, cartera óptima, Teorema de Markowitz, Simulación de Monte-Carlo, Modelo Black-Litterman, Algoritmos metaheurísticos de optimización, Algoritmos Genéticos, *Quantum Computing, Deep Reinforcement Learning.*

ABSTRACT:

The financial investment universe is undergoing a strong transformation due to the emerging application of Artificial Intelligence, Machine Learning and Deep Learning in the field. This is enabling the implementation of multi-objective optimization models by using advanced algorithms, which are extremely useful for an investment manager when it comes to solving the portfolio optimization problem. The following study analyses the progressive development of techniques that set the guidelines to find the optimal portfolio, starting with the most traditional ones such as the Modern Portfolio Theory from Markowitz, Monte-Carlo Simulation and the Black-Litterman Model, which are essential to build the foundations of the investment theory. The study proceeds with the most advanced models that employ Genetic Algorithms, Simulated Annealing Algorithms, Quantum Computing, Deep Reinforcement Learning, and other innovative techniques. The study is deepened through the implementation of two of the techniques, a traditional one and a modern one, to subsequently conduct a comparison between the two optimal portfolios obtained.

ÍNDICE

ÍNDICE DE FIGURAS

1. INTRODUCCIÓN A LA INVERSIÓN Y GESTIÓN DE FONDOS

1.1. Motivación del trabajo

La gestión de carteras de inversión es una de las cuestiones más complejas del mundo financiero por la gran variedad de activos financieros existentes en los diferentes mercados. Los inversores juegan un papel muy importante en la inversión financiera, pues son los encargados de distribuir los recursos existentes entre los diferentes productos financieros siguiendo diferentes estrategias de inversión con el objetivo de diseñar una cartera óptima, que consiste en aquella capaz de asignar los pesos adecuados a cada activo de manera que se maximice la rentabilidad global, al mismo tiempo que se minimiza el riesgo de las inversiones que la constituyen. Puesto que el nivel de aversión al riego y el apetito de rentabilidad varían según las necesidades de cada individuo, no existe una única cartera perfecta aplicable en todos los escenarios, sino que cada inversor refina su propia cartera optima de manera que esta se adecue a sus necesidades y objetivos específicos.

El primer modelo que trató de dar respuesta al problema de optimización de carteras fue el *Modern Porfolio Theory*, expuesto por Harry Markowitz en el año 1952 (Markowitz, 1952). El teorema se fundamentaba en la optimización de los elementos contrapuestos de media y varianza mediante un problema de programación cuadrática multiobjetivo, que aporta la solución óptima que define los pesos a asignar a cada activo para, o bien maximizar el retorno obtenido para un nivel de riesgo predeterminado cuantificado mediante la varianza, o bien minimizar el riesgo para una rentabilidad preestablecida. Este modelo era una primera aproximación, pero quedaba muy lejos del mundo real por la gran dimensión del problema de optimización de carteras y porque no era aplicable en el horizonte a largo plazo. Ahora bien, el Teorema de Markowitz supuso un gran punto de inflexión que revolucionó las dinámicas del mundo financiero, pues incitó a otros investigadores a perfeccionar sus modelos matemáticos y a diseñar otros más complejos que corrigiesen las desviaciones del *Modern Porfolio Theory*. Los modelos innovadores introducidos con posterioridad al modelo de Markowitz para abordar el problema de selección óptima de carteras han seguido enfrentándose a serios retos por la complejidad del mundo real. Los primeros métodos consistían en modelos matemáticos que trataban de introducir simplificaciones para reducir la complejidad del problema y facilitar la tarea de un inversor. Sin embargo, estos teoremas resultaban útiles únicamente en escenarios sencillos en los que las restricciones del mercado eran limitadas.

Más tarde, surgieron nuevos enfoques para resolver el problema de optimización que permitían abordar cuestiones más complejas, pues permitían incluir un mayor número de activos y de restricciones, garantizando la obtención de mejores resultados que con los modelos clásicos. Entre estas nuevas alternativas, cabe destacar los métodos heurísticos, que consisten en técnicas científicas que tratan de encontrar soluciones de manera aproximada a un problema en el que es difícil hallar una solución óptima mediante reglas generales. Por otro lado, también entran en juego los algoritmos, que definen conjuntos de instrucciones detalladas y precisas para derivar en una solución única y bien definida al problema en cuestión (Zanjirdar, 2020).

Para comprender el funcionamiento de los mercados financieros y la toma de decisiones de un inversor a la hora de equilibrar el riesgo y la recompensa esperada de una cartera, es crucial comprender el concepto de diversificación y sus beneficios, además del concepto de optimización previamente explicado. La diversificación consiste en evitar la exposición a un solo activo mediante la distribución de las inversiones en varias clases de activos que presentan características diferentes, como el tipo de activo financiero, el sector de pertenencia, su ubicación geográfica o la correlación que presenta con el ciclo económico, con el objetivo de mitigar la exposición al riesgo de la cartera. Por lo tanto, al aumentar la exposición a numerosos activos de diversas cualidades, es posible reducir el impacto de los posibles altibajos que puedan tener los componentes de una cartera de inversiones, de manera que se reduzca su volatilidad total sin afectar negativamente a la rentabilidad[1].

A la hora de diversificar, es importante distinguir los diferentes valores financieros que pueden formar parte de una cartera y el riesgo, rentabilidad y liquidez intrínsecos a cada activo. Todos ellos pueden representar tanto una parte alícuota de la propiedad de una activo, una obligación de deuda o un derivado de otro producto financiero.

Los mercados financieros más significativos, tanto organizados como OTC (*Over The Counter*), son los mercados de Renta Fija y los de Renta Variable, aunque también cabe destacar los mercados de futuros, opciones, divisas, derivados y los fondos cotizados en bolsa (ETF).

En primer lugar, el mercado de renta fija es aquel en el que se transaccionan (se desembolsan, listan, cotizan y amortizan) títulos valores de instrumentos de deuda en múltiples formatos y condiciones de emisión, los cuales representan un crédito

[1] La fuente es Fidelity Investments: https://www.fidelity.com/learning-center/investment-products/mutual-funds/diversification

concedido por un inversor a un gobierno u empresa a cambio de recibir unos intereses generalmente periódicos y la devolución del principal en su vencimiento.

Por otra parte, los instrumentos financieros negociados en el mercado de renta variable son las acciones, las cuales representan porciones de propiedad (con sus derechos políticos y económicos) de aquellas empresas cotizadas en bolsa y que permiten al inversor beneficiarse de los dividendos que estas generan, así como de su revalorización. A pesar de que el mercado de renta fija resulta menos atractivo por inferior posibilidad de retorno que el de renta variable, el tamaño del conjunto de los mercados mundiales de renta fija resulta ser tres veces mayor que el conjunto de los mercados de renta variable en cuanto a número de emisiones y capitalización bursátil, pues el mercado global de renta fija en circulación asciende a 130 billones de dólares, mientras que el mercado global de renta variable tiene un valor de unos 42 billones de dólares, según los datos publicados en un informe de Barclays Global Markets (Coupe, 2022).

El trabajo de un inversor no finaliza una vez ha construido la cartera, dado que también debe tomar decisiones cruciales a la hora de gestionarla para crear la máxima riqueza posible y alcanzar sus objetivos financieros. Para ello, existen dos clases de estrategias fundamentales que puede seguir un inversor cuando gestiona sus inversiones: La gestión activa y la gestión pasiva.

Por un lado, la gestión pasiva es aquella que trata de replicar el comportamiento de un sector específico del mercado o el de un índice de referencia mediante la inversión en una cartera de valores diversificada que refleje fielmente el sector o el índice en cuestión. Algunos de los vehículos más representativos que ponen en práctica esta filosofía de inversión son los fondos de inversión indexados y los fondos cotizados en bolsa (ETFs), los cuales siguen la rentabilidad del índice de referencia objetivo. El racional de un inversor que lleva a cabo una inversión pasiva es que los mercados son perfectamente eficientes y su objetivo es obtener una rentabilidad similar a la del *benchmark.*

El primer economista en introducir el concepto de mercado eficiente fue Eugene Fama, quien alega que los precios de los activos financieros reflejan fielmente su valor porque incorporan toda la información disponible en el mercado y se actualizan constantemente para evitar que haya una desviación entre el precio del activo y su valor real. Además, Fama introdujo un marco de eficiencia del mercado en el que distinguía tres niveles dependiendo de la información disponible reflejada en los precios de los activos: Eficiencia débil, eficiencia semi-fuerte y eficiencia fuerte (Fama, 1963).

Por el contrario, la gestión activa considera que el mercado no es perfectamente eficiente y por lo tanto presenta oportunidades beneficiosas para el inversor, abriendo la posibilidad de vencer al mercado o a un índice de referencia mediante la obtención de rendimientos anormales superiores a los la del *benchmark.* Para ello, los inversores analizan la información disponible, y en ocasiones privilegiada, con el objetivo de detectar aquellos activos cuyos precios no reflejan su valor real y aprovechar dichas oportunidades hasta que devuelven la eficiencia al mercado. Esta segunda estrategia requiere de un análisis profundo para anticiparse al mercado y seleccionar aquellos productos financieros individuales o fondos gestionados activamente con un valor percibido superior al que indica el mercado o con potencial de crecimiento. Para ello, los inversores activos utilizan diversos métodos como el análisis fundamental, el análisis técnico o estrategias de sincronización del mercado para comprar y vender valores en función de las tendencias del mercado a corto y largo plazo (González et al., 2019).

Cada una de las estrategias descritas presenta tanto ventajas como inconvenientes, pues los inversores pasivos pueden perderse el potencial de unos rendimientos mayores que podrían lograr mediante la inversión activa, pero al mismo tiempo están expuestos a menor riesgo y sus costes de transacción son menores. Dicho esto, la elección entre una gestión de carteras activa o pasiva depende del nivel de aversión al riesgo, el nivel de implicación del inversor y su estilo de inversión.

1.2. Objetivos

El principal objetivo de este trabajo consiste en realizar un estudio del arte acerca de las técnicas existentes que tratan de resolver el problema de la gestión y optimización de carteras, comenzando por las tradicionales y prosiguiendo con los respectivos avances que trataban de cubrir las limitaciones de los anteriores hasta llegar a las técnicas más incipientes que emplean algoritmos heurísticos, computación cuántica u otros métodos innovadores.

Para lograr dicho objetivo general, se abordarán también los siguientes objetivos específicos:

1. Describir los conceptos básicos relativos a la inversión y la gestión de carteras, incluyendo formulaciones matemáticas para aquellos que se consideren convenientes.
2. Analizar las dificultades ante las que se enfrentan los inversores y como estas se traducen en restricciones matemáticas que generan un problema matemático complejo.

3. Realizar una comparativa entre dos técnicas de optimización de carteras seleccionadas (una sencilla y otra más avanzada), identificando para cada una sus fortalezas y debilidades, así como sus limitaciones.

1.3. Metodología

Para alcanzar los objetivos mencionados anteriormente, se ha llevado a cabo una revisión de literatura existente, tomando como fuentes de información bases de datos académicas como Scopus, Web Of Science y Google Scholar, informes empresariales y libros publicados por asociaciones globales de profesionales de inversión como el CFA Institute. La búsqueda de esta información ha estado guiada por palabras clave tales como "gestión de carteras", "optimización de carteras", "*porfolio constraints*", "*index tracking*", "algoritmos metaheurísticos", "*Quantum Computing*" o "*Deep Learning*", dependiendo del objetivo específico que se quería abordar en cada momento. De la misma manera, el análisis y síntesis de esta literatura ha sido realizado intentando dar respuesta a dichos objetivos.

Además, para alcanzar el objetivo específico 3, se ha exportado de Bloomberg una base de datos con las cotizaciones de los últimos 23 años de los siguientes activos financieros:

1. *Sxxp Index*
2. *I02508EU Index*
3. *CRB CMDT Index*
4. *GOLDLNPM Index*

Posteriormente se han programado en Python los códigos correspondientes a cada técnica seleccionada (el Teorema Markowitz, correspondiente a la técnica tradicional y un Algoritmo Genético correspondiente a la técnica avanzada).

1.4. Estructura del trabajo

A partir de aquí, este trabajo se estructura de la siguiente manera. El capítulo 2 se centra en la descripción del marco teórico de la gestión de carteras, en donde se ilustran las diferentes medidas del riesgo y rendimiento de una cartera, las principales complicaciones y restricciones ante las que se puede enfrentar un inversor y otros elementos clave en el campo de la inversión (objetivos específicos 1 y 2). En el capítulo 3, se lleva a cabo un proceso de investigación de las diferentes técnicas desarrolladas para dar respuesta al problema de optimización de careras (objetivo principal). Más tarde, en el capítulo 4 se realiza un ejercicio de optimización de carteras a partir de una técnica tradicional (Modelo de Markowitz) y de un algoritmo avanzado (Algoritmo Genético) para posteriormente realizar una comparativa entre ambos modelos (objetivo específico 3). Por último, en el capítulo 4 se extraen conclusiones.

2. MARCO TEÓRICO

La gestión y la optimización de carteras son tareas de alta complejidad por la cantidad de factores y complicaciones que los inversores deben sortear para poder gestionar y optimizar con éxito sus carteras, alcanzando sus objetivos financieros específicos al mismo tiempo que minimizan el riesgo. Algunos de estos obstáculos consisten en costes operativos que implican una disminución de los rendimientos de las inversiones, restricciones del volumen de los valores que constituyen la cartera, obligaciones impuestas por la normativa reglamentaria de inversión, etc. Independientemente de cuál sea su naturaleza, todos ellos son factores importantes en las inversiones y deben ser cuantificados en los modelos de optimización de carteras para que sus resultados sean lo más precisos posibles, lo cual aumenta a la dimensión y complejidad de los modelos matemáticos. Para comprender el marco completo de la tarea de gestión de carteras, es necesario desarrollar una serie de conceptos básicos. Por un lado, se procederá a exponer las diferentes medidas que puede emplear un inversor para medir el riesgo y la rentabilidad de su cartera y posteriormente se van a abordar otros conceptos clave imprescindibles en el día a día de un inversor, como la replicación de índices y el reequilibrio de los pesos asignados a los componentes de las carteras. Además, se van a explicar las principales restricciones más comunes a tener en cuenta por los inversores, las cuales dificultan su trabajo e incitan al empleo de modelos matemáticos capaces de resolver problemas de optimización mejor que un humano.

2.1. Medidas del riesgo de una cartera

Antes de introducir las diferentes medidas del riesgo de una cartera, es imprescindible entender el concepto de riesgo en el ámbito de las inversiones financieras como el grado de incertidumbre del rendimiento futuro generado por los activos que componen la cartera (Reilly y Brown, 2002). La labor de medir y gestionar el riesgo es un componente primordial en el trabajo de un inversor y para ello existen diversas técnicas que deben utilizarse en conjunto para obtener una imagen más completa del perfil de riesgo de una cartera. A continuación se desarrollan las principales métricas de riesgo:

- ***Desviación típica y varianza***

En primer lugar, las medidas del riesgo de una inversión ampliamente reconocidas son la varianza y la desviación típica de los retornos esperados. Son medidas estadísticas muy similares que reflejan la dispersión asociada a los rendimientos esperados de las inversiones, también entendida como la volatilidad de las inversiones. De esta manera, cuanto mayor sea la dispersión asociada a los rendimientos esperados, mayor será la incertidumbre de los rendimientos futuros. Otra manera de analizar dicha dispersión en los resultados consiste en calcular el rango de los rendimientos observados, desde el más bajo al más alto, de forma que aquella inversión con un gran rango de rendimientos esperados presentará mayor incertidumbre respecto a la rentabilidad esperada y, por ende, mayor riesgo (Reilly y Brown, 2002).

Para calcular la volatilidad total de una cartera, es necesario calcular primero las volatilidades individuales de cada activo para posteriormente ponderarlas según su peso asignado. A continuación, se va a mostrar la fórmula matemática de la varianza de un activo y la varianza de una cartera compuesta por dos activos por simplificar. Ahora bien, esta fórmula podría extenderse siguiendo el mismo criterio si se desea incluir más activos en la cartera.

Varianza de un activo:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{1=1}^{n}(r_i - \bar{r})^2}{N}$$

Donde:

r_i es la rentabilidad obtenida por el activo en un momento de tiempo i;

$\bar{r}$ es la media de las rentabilidades obtenidas;

N es el número de observaciones

Varianza de una cartera:

$$\sigma_p^2 = w_1^2 \cdot \sigma_1^2 + w_2^2 \cdot \sigma_2^2 + 2 \cdot \rho_{1,2} \cdot w_1 \cdot w_2 \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2$$

Donde:

w_1 es el peso del primer activo en la cartera;

w_2 es el peso del segundo activo en la cartera;

σ_1^2 es la varianza del primer activo;

σ_2^2 es la varianza del segundo activo;

$\rho_{1,2}$ es la correlación entre los dos activos

Por otro lado, el cálculo de la desviación típica es muy similar al de la varianza ya que ambas miden lo mismo. La desviación típica se calcula como la raíz de la varianza para poder trabajar con las unidades de medida originales.

Desviación típica de un activo:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{1=1}^{n}(\mathrm{r}_i - \bar{r})^2}{N}}$$

Desviación típica de una cartera:

$$\sigma_p = \sqrt{w_1^2 \cdot \sigma_1^2 + w_2^2 \cdot \sigma_2^2 + 2 \cdot \rho_{1,2} \cdot w_1 \cdot w_2 \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2}$$

Algunos inversores son partidarios de enfocar el análisis únicamente en aquellas rentabilidades inferiores a las expectativas, pues son las que realmente alarman. Para cuantificar las desviaciones que se encuentran por debajo de la media se emplea la medida estadística de la semivarianza.

- ***Value at Risk (VaR)***

El VaR es una medida del riesgo de una cartera que muestra la pérdida máxima que puede incurrir la inversión en un horizonte de tiempo definido y con un intervalo de confianza determinado bajo condiciones normales de mercado. Esta definición puede ser aplicada también para posiciones en corto en las que el inversor se beneficia cunado los precios disminuyen. En este caso el VaR representa el beneficio potencial de un activo en un periodo determinado al nivel de confianza establecido (Zanjirdar, 2020).

Según la manera de enfocar el concepto de VaR, se han desarrollado diferentes maneras de calcularlo. La manera matemática de representar el VaR es la siguiente:

$$Pr\ \{P_0 - P_1 \geq VaR\} \leq \alpha$$

Donde:

P_0 representa el valor inicial de la cartera;

P_1 representa el valor final de la cartera;

α representa el nivel de error estadístico (siendo 1 – α el nivel de confianza)

Por ejemplo, si el VaR de una cartera es de 20.000€ con un nivel de confianza del 90%, significa que existe una probabilidad del 90% de que la cartera no pierda más de 20.000€

en el periodo y umbral establecido (Li, 2016).

- ***Conditional Value at Risk (CVaR)***

El CVaR una extensión de la medida de riesgo VaR que calcula la pérdida esperada de una cartera en el escenario más pesimista con el objetivo de considerar únicamente las fluctuaciones indeseables. Esta medida trata de cubrir las deficiencias del VaR yendo más allá, pues el CVaR no solo tiene en cuenta la magnitud de las perdidas, sino que también considera las probabilidades de ocurrencia (Hellmich y Kassberger, 2011).

En relación con el ejemplo anterior en el que el VaR era de 20.000€ con un margen de confianza del 90%, si el CVaR es de 30.000€ significa que, si la cartera incurre en pérdidas por encima del umbral del VaR, es probable que la pérdida media sea de 30.000€.

2.2. Medidas del rendimiento de una cartera

Evaluar el rendimiento de una cartera es imprescindible en la gestión de carteras, teniendo en cuenta no solo el retorno obtenido, sino que también hay que valorar el riesgo asumido para adquirir dicho retorno. Para ello existe una variedad de medidas que emplean los inversores:

- ***Retorno***

La medida más básica del rendimiento de una cartera es el retorno simple, que refleja el incremento porcentual del valor de la cartera en un periodo determinado. Asimismo, el retorno logarítmico resulta muy útil para normalizar los precios de los activos, lo cual posibilita la generación de un escenario comparable entre los diferentes comportamientos de los activos (Levisauskaite, 2010).

Retorno Simple:

$$r_p = \frac{(P_1 - P_0)}{P_1}$$

Retorno Logarítmico:

$$r_p = log\frac{P_1}{P_0}$$

Donde:

P_0 representa el valor inicial de la cartera;

P_1 representa el valor final de la cartera

- ***Sharpe Ratio***

Refleja el exceso de retorno obtenido por encima del retorno de la tasa libre de riesgo en relación con la desviación típica en un periodo de tiempo (Sharpe, 1994). Es decir, el Sharpe Ratio indica la unidad de rentabilidad generada por cada unidad adicional de riesgo de manera que cuanto mayor sea el Sharpe Ratio, mejor es el rendimiento generado ajustado al riesgo.

$$Sharpe\ ratio\ = \frac{(r_p - r_f)}{\sigma_p}$$

Donde:

r_p indica el retorno medio de la cartera;

r_f representa el retorno medio generado por la tasa libre de riesgo;

σ_p representa la desviación típica de la cartera

- ***Sortino Ratio***

EL *Sortino Ratio* es una variación del *Sharpe Ratio* que emplea únicamente la volatilidad a la baja como medida de riesgo en vez de computar la volatilidad global de la cartera, como sucede en el *Sharpe Ratio*. De esta forma, los inversores obtienen una visión más precisa del rendimiento ajustado al riesgo de una cartera, pues lo que le preocupa realmente es el riesgo negativo y no la volatilizad al alza, que resulta beneficiosa en sus inversiones (Sortino y Price, 1994).

Para el cálculo del *Sortino Ratio* será necesaria una diferenciación entre la desviación típica a la baja, la cual mide la dispersión de los rendimientos que caen por debajo de un umbral de rendimiento mínimo predefinido; y la desviación típica al alza que, por el contrario, mide las desviaciones de aquellos rendimientos que superan el umbral mínimo (Kenton, 2020).

$$Sortino\ ratio\ = \frac{(r_p - r_f)}{\sigma_p}$$

2.3. Elementos clave de la gestión de carteras

- ***Reequilibrio de la cartera existente***

Cuando un inversor construye una cartera, establece una combinación de activos, como por ejemplo una asignación del 60% a renta fija y un 40% a renta variable, de acuerdo con su nivel de aversión al riesgo, apetitivo de rentabilidad y otros objetivos específicos. Sin embargo, a medida que pasa el tiempo, los movimientos de los mercados modifican el precio de los valores y desajustan la combinación original, pudiendo incrementar la exposición de los valores con más riesgo, lo cual aumenta el riesgo total de la cartera por encima de lo que el inversor puede llegar a tolerar.

En este caso, cabe la posibilidad de reequilibrar la cartera de manera periódica para devolverla a la combinación inicial de sus activos mediante la venta de aquellos que han aumentado significativamente su precio y la inversión en aquellos otros que se han visto más desfavorecidos porque su precio no ha crecido. De esta forma, el reequilibrio no solo permite al inversor mantener la cartera en línea con el perfil original de riesgo y rentabilidad, sino que también posibilita la obtención de ganancias y aumenta la oportunidad de crecimiento de los activos con alto potencial (Hayes, 2023).

- ***Eficiencia fiscal***

Otro aspecto importante a tener en cuenta por un inversor en la gestión de carteras es tratar de asignar los activos de manera que se minimicen los impuestos en el largo plazo y así poder maximizar el retorno obtenido. Para ello, debe prestar atención a las normas relativas a los impuestos sobre las ganancias de capital a corto plazo y debe diferenciar cuales son los valores que están exentos de impuestos, lo cual significa que los dividendos que generan no están sujetos a impuestos. Asimismo, es importante analizar cómo se utilizan las diferentes cuentas de jubilación, el periodo durante el que se mantienen los valores y cuáles son los que se mantienen (Hayes, 2023).

- ***Replicación de índices***

Una de las prácticas más comunes en la gestión pasiva son los fondos indexados mencionados anteriormente, que replican la rentabilidad de un índice de referencia preestablecido. El primer fondo indexado de renta variable fue creado por el banco Wells Fargo en el año 1971 (Bernstein, 1992) y fue una de las primeras derivaciones del *Modern Portfolio Theory*, pues la idea fundamental sobre la que se sustenta un fondo indexado es que el mercado es eficiente y por ello conviene replicarlo.

Antes de profundizar en la técnica de seguimiento de índices, es necesario remarcar que la composición de un índice no es perfectamente estable, pues los valores se añaden y eliminan en función de unos criterios y normas que establecen qué valores pueden incluirse y qué valores deben eliminarse del índice. Por un lado, uno de los factores que determina la elegibilidad de un valor para ser incluido en un índice es que se negocie un mínimo de acciones al día, siendo esta en torno a 1 millón de acciones al día. Además, es necesario que el valor alcance una capitalización mínima, normalmente de 1.000 millones de dólares.

Los gestores de índices deben llevar a cabo periódicamente reajustes para asegurarse que todos los valores que configuran los índices cumplen con las normas preestablecidas y que la ponderación de cada valor refleja con exactitud la capitalización bursátil real de cada compañía. Para ello, el gestor debe reequilibrar los pesos de los valores y, en el caso de que un valor deje de cumplir los requisitos de inclusión en el índice, será susceptible de ser eliminado en el próximo reajuste. Existen otros casos excepcionales en los que un valor puede ser excluido de un índice, como en situaciones de quiebra empresarial o que la empresa es adquirida o fusionada con otra. Todas estas modificaciones tienen un impacto directo en el rendimiento del índice e indirecto en el rendimiento de las acciones individuales que lo componen.

Existen diferentes maneras de replicar índices en función del grado de perfección en la replicación. La más sencilla es la réplica perfecta de un índice, que consiste en invertir en todos los activos del índice tratando de asignar los mismos pesos para que el resultado sea prácticamente el mismo, aunque también cabe la posibilidad de invertir en una selección de los activos que componen el índice e incluso se pueden emplear derivados sobre los activos de manera que los resultados se vean amplificados. Sin embargo, puesto que un índice no deja de ser una abstracción matemática, la réplica perfecta de un índice puede no ser posible en la práctica. Para que fuera posible que un fondo indexado refleje con exactitud los movimientos del índice, sería necesario que el fondo se reajustara de inmediato ante las adiciones y supresiones de valores en el índice y que los dividendos se reinvirtieran en el índice al cierre. Sin embargo, lo que sucede en la práctica es que los dividendos los recibe el fondo y se reinvierten unos días más tarde. De esta forma, lo que termina sucediendo es que la composición del fondo diverge de la del índice, imposibilitando una replicación perfecta. La diferencia entre la rentabilidad obtenida por el fondo y la rentabilidad obtenida por el índice se mide con el error de seguimiento y es responsabilidad del inversor tratar de minimizar el nivel de error de seguimiento mediante el reequilibrio de la cartera, al mismo tiempo que minimiza los costes de transacción derivados de dicho reequilibrio (Olsson, 2005).

Indexación mejorada

La indexación mejorada es una clase de estrategia híbrida entre la gestión activa y pasiva cuyo objetivo es seguir de forma eficiente un índice bursátil de referencia, al mismo tiempo que la cartera alcanza una rentabilidad superior a la del índice subyacente. Además, esta estrategia trata también de minimizar el error de seguimiento y minimizar los costes de transacción. Para ello, el inversor debe seleccionar un número limitado de activos del índice que espera que tenga resultados mejores que el *benchmark* (Xu et al., 2018).

Por un lado, la indexación mejorada se asemeja a la gestión activa porque da la posibilidad de desviarse del índice de referencia, lo cual permite aumentar la rentabilidad al mismo tiempo que genera un riesgo adicional atribuido al riesgo de la gestión. Por otro lado, esta estrategia comparte cualidades de la gestión pasiva como las bajas comisiones por la escasa rotación de las carteras, por lo que los gestores de los índices mejorados no suelen desviarse de los índices bursátiles.

Esta estrategia ha dado pie a la construcción de numerosos modelos de indexación mejorada, pues conlleva una serie de restricciones de cardinalidad y rotación fácilmente modelables mediante algoritmos de optimización de carteras.

- ***Rentabilidad absoluta***

Por lo general, las estrategias de gestión activa que llevan a cabo los fondos de inversión tienen como objetivo obtener rentabilidades superiores al mercado, categorizándose como gestiones exitosas cuando superan a un *benchmark* de referencia establecido, ya sea un índice bursátil, sector o el mercado global. Sin embargo, existe una estrategia activa alternativa de rentabilidad absoluta diseñada para generar rendimientos positivos durante un periodo determinado, independientemente del comportamiento del mercado, al mismo tiempo que minimiza el riesgo (Valle et al., 2014).

Profundizando en el concepto de rentabilidad absoluta en el campo de la inversión, es una medida de la rentabilidad generada por una cartera en términos absolutos durante un periodo de tiempo específico, a diferencia de la rentabilidad relativa, que se expresa en comparación a a un índice de referencia. Esta medida refleja en términos porcentuales la revalorización o depreciación de un activo o cartera.

El primer fondo que puso en práctica la rentabilidad absoluta fue creado en 1949 en Nueva York bajo el nombre “A.W. Jones & Co.” (Hayes, 2021). Desde entonces, se ha convertido en una de las prácticas de inversión con mayor crecimiento del fundo. Hoy en día, los inversores que construyen carteras siguiendo la estrategia de inversión de rentabilidad absoluta emplean técnicas que difieren de las tradicionales. Algunas de estas estrategias son:

- Tomar posiciones a largo y a corto con el objetivo de beneficiarse tanto en las subidas como en las bajadas de los mercados.
- Invertir en compañías que están sufriendo cambios drásticos como fusiones y adquisiciones con el objetivo de beneficiarse de los movimientos de precios resultantes, pues en estas situaciones existe una tendencia a la devaluación del precio de la compañía adquirente, mientras que el precio de la adquirida tiende al alza.
- Llevar a cabo un análisis exhaustivo de la situación macroeconómica global para tomar de posiciones en diversas clases de activos en función de las expectativas a futuro acerca de los tipos de interés, tipos de cambio de divisas y la inflación.
- Invertir en futuros de materias primas, de tipos de cambio de divisas o de otra clase de activos
- Practicar arbitraje de activos de renta fija, que consiste en aprovecharse de las ineficiencias de los precios de bonos u otros valores mediante la compra y venta simultánea de el mismo activo en diferentes mercados, obteniendo beneficios por la diferencia de precios.

- ***Carteras neutrales al mercado***

La inversión neutra con respecto al mercado engloba todas las estrategias de inversión destinadas a neutralizar la volatilidad del mercado mediante la adopción de posiciones largas y cortas en valores relacionados de manera que se compensen sus movimientos y se obtenga rentabilidad tanto de las subidas como de las bajadas de precios. Para ello, es necesario buscar pares de valores no correlacionados de manera que sus comportamientos difieran en situaciones de mercado similares. El resultado de las estrategias de mercado neutral es una relación riesgo-rentabilidad más atractiva que la de una estrategia básica a largo plazo pues, aunque los rendimientos obtenidos con ambas estrategias resultan similares, el riesgo incurrido por la inversión neutra con respecto al mercado es mucho menor que la de la estrategia a largo plazo.

Para poder poner en práctica esta estrategia es imprescindible una serie de condiciones que pocos inversores cumplen. Por un lado, es necesario un despliegue tecnológico importante para poder desarrollar los modelos predictivos mediante algoritmos y métodos cuantitativos que permiten descubrir las discrepancias en los precios de los valores basándose en datos históricos, analizar las correlaciones entre diferentes pares de valores, identificar las exposiciones cortas y largas en cada uno, etc. Asimismo, solo los inversores pertenecientes a grandes instituciones pueden tomar posiciones a corto, mientras que numerosos inversores de menor tamaño como los fondos de inversión no tienen permitido practicar la inversión de mercado neutral (Nicholas, 2000).

2.4. Complicaciones/Restricciones en la gestión de carteras

- ***Costes de transacción***

Los costes de transacción hacen referencia a las comisiones y gastos asociados a la compra y venta de activos, las comisiones de canje, los costes de custodia y los impuestos, que pueden llegar a reducir significativamente los rendimientos de una inversión, en especial para aquellos inversores que llevan a cabo una gestión activa y operan con frecuencia. Algunos de los costes son proporcionales al monto de las transacciones que se calculan como un porcentaje sobre el volumen transaccionado, como los impuestos sobre las transacciones financieras, el spread y las comisiones variables. Asimismo, existen costes de transacción fijos preestablecidos por los intermediarios, como las tarifas fijas por la custodia de activos.

La mayoría de las teorías de gestión de carteras parten de la base de que no existen costes de transacción, dando lugar a modelos teóricos pobres y alejados de la realidad. Sin embargo, existen evidencias de que el control de los costes de transacción vinculados a la compraventa de activos en los modelos de gestión de carteras termina mejorando los rendimientos obtenidos (Olsson, 2005).

- ***Prima de liquidez***

Para comprender en qué consiste la prima de liquidez y la manera en la que afecta a las tomas de decisiones a la hora de invertir, es necesario entender primero el término de liquidez. La liquidez se refiera a la capacidad que tiene un activo de ser convertido en dinero efectivo en el corto plazo sin que su precio se vea alterado significativamente, es decir, la facilidad con la que puede comprarse o venderse en el mercado (Sevilla Arias, 2020).

Algunos activos como los bienes inmuebles o los fondos de capital riesgo son ejemplos de activos poco líquidos, los cuales pueden dificultar la gestión y optimización de una cartera que los contenga. Por este motivo, un inversor que incluye esta clase de activos ilíquidos en sus carteras debe ser recompensado por el mayor riesgo que asume y, esa recompensa recibe el nombre de prima de liquidez, que se refiere a la rentabilidad adicional que exigen los inversores por invertir en activos menos líquidos.

Cabe mencionar que existen costes de transacción no lineales asociados a la liquidez de un activo que varían en función del volumen negociado. Para las transacciones de menor volumen, el coste incurrido es el diferencial de oferta y demanda o *bid-ask spread*, mientras que para aquellas de mayor volumen también tiene lugar un impacto en el precio. Cuando un inversor toma una posición larga de un volumen considerable de un activo poco líquido, puede tener lugar un aumento drástico de su precio pues, debido a la escasa oferta del activo, los vendedores tienen el poder para aumentar el precio hasta alcanzar el equilibrio entre oferta y demanda. En el caso de un inversor que desea vender un gran volumen de un activo poco líquido, ocurrirá lo contrario. Debido a la escasa demanda del activo, su precio disminuirá fuertemente hasta encontrar un precio al que haya inversores dispuestos a comprar (Alonso, 2011).

- ***Tamaño mínimo del lote***

Algunos activos, como las inversiones inmobiliarias o alternativas, pueden tener restricciones de volumen que establecen un tamaño mínimo a invertir de cada activo que constituye la cartera, lo cual entorpece el trabajo de un inversor a la hora de construir una cartera diversificada. Esta limitación aumenta la exposición a los activos en cuestión, lo cual aumenta el riesgo de las inversiones y dificultar que los inversores alcancen sus objetivos financieros.

- ***Restricciones de cardinalidad***

El número de activos que pueden incluirse en una cartera también puede ser limitado, lo cual viene determinado por las restricciones de cardinalidad. El racional de estas limitaciones es que, por un lado, el inversor no puede comprar todo lo que desee sino lo que está disponible en el mercado y, por otro lado, no puede dividir su cartera en infinitos activos para maximizar la diversificación porque se vuelve ineficiente.

Al igual que las limitaciones de tamaño mínimo de lote, estas restricciones suponen un reto para los inversores que desean construir una cartera diversificada que incluya múltiples activos (Olsson, 2005).

- ***Restricciones floor y ceiling***

Las restricciones *floor* y *ceiling* consisten en límites impuestos a la asignación de activos a una clase específica de activos en una cartera. Las limitaciones *floor* establecen un mínimo para evitar costes de administración excesivos en el caso de participaciones muy pequeñas con un impacto insignificante en el rendimiento de la cartera, mientras que los límites *ceiling* establecen máximos alcanzables para evitar la exposición excesiva a algún componente de la cartera. En muchas ocasiones estas limitaciones vienen determinadas legalmente, generalmente rondando el rango entre el 1% y 3% para la restricción *floor* y un *ceiling* alrededor del 10% (Busseti, 2006).

Este tipo de limitaciones entorpecen la tarea de diversificación, presentando un impacto negativo sustancial en el rendimiento total de la cartera. Por un lado, las limitaciones *floor* obligan a exponerse a todos los activos incluyendo aquellos que tienen rentabilidades bajas. Por otro lado, las restricciones *ceiling* imposibilita la exposición óptima que consiste en una cratera formada únicamente por los activos de mayores rentabilidades y de nuevo forzará una exposición a activos de menor rentabilidad. Se puede observar el efecto de las restricciones *floor* y *ceiling* en la Figura 1.

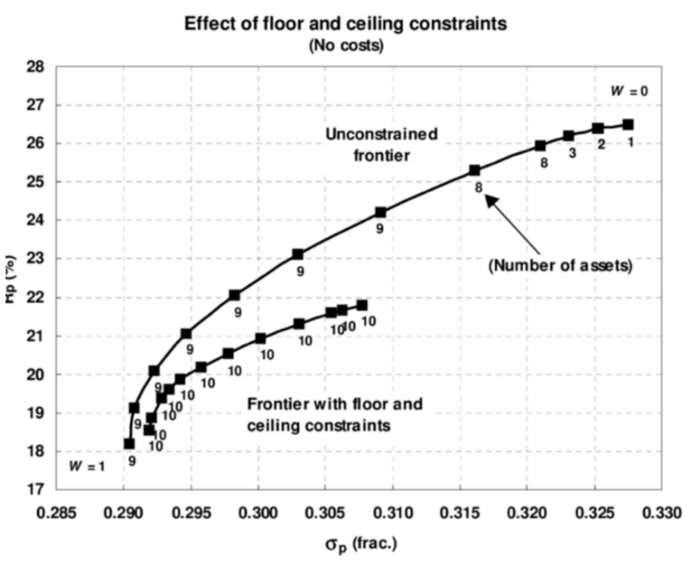

Figura 1. Efecto de las restricciones de *floor* y *ceiling*. Busseti (2000)

- ***Restricciones reglamentarias***

Las leyes fiscales y las normas de inversión impuestas son otros de los factores imprescindibles a tener en cuenta en la gestión y optimización de las carteras de inversión. Estas restricciones pueden limitar las opciones donde invertir y como por lo general su principal objetivo es proteger al inversor y limitar el riesgo, terminan condicionando la rentabilidad esperada de una cartera. Por ejemplo, el marco regulatorio puede delimitar el ratio de activos de renta fija y renta variable, la cantidad a invertir en un sector determinado o el número de inversiones en mercados internacionales.

- ***Restricciones de duración***

Existe la posibilidad de establecer un mínimo tiempo obligatorio de permanencia de un activo invertido en la cartera, de manera que no se permita la realización de venta en el corto plazo. Estas inversiones a largo plazo ofrecen la posibilidad de maximizar el retorno en el largo plazo, pero en contrapartida, presentan más riesgo por la posibilidad de que su valor fluctué sin poder hacer nada al respecto. Un claro ejemplo de inversión a largo plazo son los fondos indexados.

3. ESTUDIO DEL ARTE

La gestión y optimización de carteras es una tarea de gran complejidad por la combinación de conocimientos que requiere el gestor, tanto macroeconómicos, analíticos, matemáticos y financieros, así como por la cantidad de restricciones a tener en cuenta mencionadas anteriormente (costes de transacción, imposiciones fiscales, limitaciones de tamaño del lote, restricciones de cardinalidad, granularidad, exposición máxima, etc.). Para mayor complicación, existe una amplia gama de activos financieros donde se pueden asignar los recursos como los activos de renta fija, activos de renta variable, derivados, materias primas y divisas.

Con el objetivo de facilitar el trabajo de un inversor, a lo largo de la historia de la inversión se han desarrollado diversos teoremas que trataban de dar respuesta al problema de optimización de carteras, ofreciendo herramientas matemáticas para equilibrar el perfil global de riesgo y rentabilidad teniendo en cuenta todos los factores mencionados. A continuación, se van a desarrollar los modelos más relevantes que han florecido partiendo del original y más rudimentario Teorema de Markowitz, para proseguir con las sucesivas técnicas que se formularon con el objetivo de cubrir las debilidades del primer teorema mediante planteamientos matemáticos más precisos. De esta forma, se llegará a analizar las técnicas sofisticadas desarrolladas recientemente como los algoritmos metaheurísticos, que incluyen los algoritmos genéticos, algoritmos de reconocido simulado, *Ant Colony Algorithms*, etc.

3.1. Modelo de Markowitz

El modelo de Markowitz, también conocido como *Modern Porfolio Theory*, fue desarrollado por Harry Markowitz en el año 1952 (Markowitz, 1952) como fruto de su preocupación por crear una cartera de inversiones eficiente y, desde entonces, se ha convertido en uno de los modelos más utilizados. Markowitz fue también el introductor del concepto de diversificación de carteras como herramienta para minimizar el riesgo asumido por un inversor manteniendo el mismo retorno (Zanjirdar, 2020).

El *Modern Porfolio Theory* se trata de un modelo matemático que trata de construir una cartera eficiente, entendida como aquella que minimiza el riesgo para una rentabilidad dada. Para ello, analiza un conjunto de activos financieros calculando para cada uno su rentabilidad esperada entendida como el nivel de ganancia o pérdida prevista de la inversión, así como el riesgo que conlleva, medido mediante la variabilidad de los rendimientos. A continuación, el modelo calcula la correlación entre los diferentes activos de la cartera, con el objetivo de seleccionar aquellas combinaciones de activos poco correlacionados, de modo que el riesgo global de la cartera se vea reducido.

A partir de los datos resultantes, el modelo es capaz de definir una frontera eficiente definida por una curva que representa las diferentes combinaciones de rentabilidad y riesgo que el inversor debería estar dispuesto asumir. A continuación, para poder llegar a la cartera óptima es necesario tener en cuenta también las curvas de indiferencia del inversor, las cuales son una función de la tasa de rendimiento y la varianza esperada que proporcionan la misma utilidad esperada. Las curvas de indiferencia tienen forma creciente y convexa pues, como es lógico, los inversores esperarán mayor rentabilidad a mayor riesgo (Hernández, 2022). Una vez plasmadas la frontera eficiente y las curvas de indiferencia, la elección óptima de cartera óptima es el punto de tangencia entre la frontera eficiente y una de las curvas de indiferencia, tal y como se puede observar en la Figura 2.

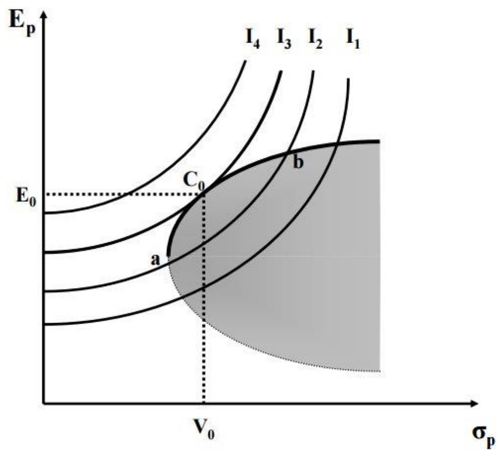

Figura 2. Frontera eficiente y curvas de utilidad. Hernández (2022)

El modelo de programación lineal de Markowitz expresado matemáticamente es el siguiente:

$$Min\ z = \ \sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i \times w_j \times \sigma_i \times \sigma_j \times \rho_{i,j}$$

$$St: E(r_p) = \ \sum_{i=1}^{n} w_i \times r_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i \ = 1$$

$$w_i > 0\ (i = 1, 2, \dots, n)$$

Esta misma formulación puede simplificarse expresándose de manera matricial de la siguiente forma:

$$\sigma_p = \overrightarrow{w_\iota} \times [\sigma_{i,j}] \times \overrightarrow{w_\iota}^T$$

$$R_p = \overrightarrow{w_\iota} \times \overrightarrow{R_\iota}$$

Donde:

σ_p^2 representa la varianza de la cartera;

$E(r_p)$ representa el retorno esperado de la cartera;

r_i representa el retorno esperado de cada activo;

w_i representa el peso de cada activo

3.2. Modelo Black-Litterman

En el año 1992, Fisher Black y Robert Litterman desarrollaron el Modelo Black-Litterman (Black y Litterman, 1992), con el objetivo de cubrir algunas de las deficiencias del Modelo de Markowitz. La propuesta de Black-Litterman refuta la suposición de Markowitz de que todos los inversores poseen opiniones homogéneas, pues los inversores no solo fundamentan sus decisiones en los rendimientos históricos de los activos financieros, sino que también se guían por las expectativas sobre los rendimientos futuros, que resultan ser heterogéneas según la visión de cada inversor. Los autores consideraban que era necesario incluir en el modelo de manera implícita las opiniones de los inversores acerca de los rendimientos esperados y sus creencias sobre el mercado para obtener resultados más consistentes que los de la Teoría de carteras moderna. Por esta razón, Black y Litterman decidieron modificar el Modelo de Markowitz para incorporar dichos componentes subjetivos del inversor, construyendo un modelo más sofisticado que permitía una optimización de carteras más personalizada. Eso sí, al igual que en el Teorema de Markowitz, este modelo mantiene la hipótesis de que el mercado es eficiente y que los datos históricos de los valores de la cartera pueden emplearse para estimar sus rendimientos esperados, lo cual no es del todo cierto, pues dichos datos pueden estar sesgados o incluir errores.

El Modelo Black-Litterman proporciona un enfoque bayesiano que genera una estimación mixta de los rendimientos esperados mediante la combinación de las estimaciones subjetivas del inversor, con un nivel de confianza determinado, junto con el vector de equilibrio del mercado. Para ello, lleva a cabo un proceso de optimización inversa por el que las opiniones del inversor se emplean como *input* para derivar las ponderaciones implícitas del mercado que generarían los rendimientos esperados del inversor. En este paso, para garantizar que los elementos subjetivos se incorporan adecuadamente, se incorpora un parámetro que mide el nivel de confianza del inversor acerca de sus opiniones. Finalmente, se emplean los nuevos rendimientos esperados para derivar la asignación óptima de la cartera (Idzorek, 2019).

La formulación del modelo de Black-Litterman define un nuevo vector de rentabilidad combinado (E[R]) a partir del punto de partida neutral del mercado determinado por el vector de rentabilidad implícita de equilibrio. A continuación, se designa con una N al número de activos y con una K al número de expectativas.

$$E[R] = [(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1}[(\tau\Sigma)^{-1}\Pi + P'\Omega^{-1}Q]$$

Donde:

$E[R]$ es el nuevo (posterior) vector de rentabilidad combinado (vector de N x 1 columnas);

τ es un escalar;

Σ es la matriz de covarianza de los rendimientos en exceso (matriz N x N);

P es una matriz que identifica los activos implicados en las expectativas (matriz K x N);

Ω es una matriz de covarianza diagonal de términos de error de las opiniones expresadas que representa la incertidumbre en cada opinión (matriz K x K);

Π es el vector de rentabilidad de equilibrio implícito (vector de columnas N x 1); y Q es el vector de opiniones (vector de columnas K x 1).

Una vez especificados todos los datos de entrada de la fórmula de Black-Litterman, se lleva a cabo un proceso de combinación de las dos fuentes de información (distribución previa al equilibrio y distribución de las expectativas), tal y como se representa a continuación en la Figura 3 donde se resume todo el procedimiento.

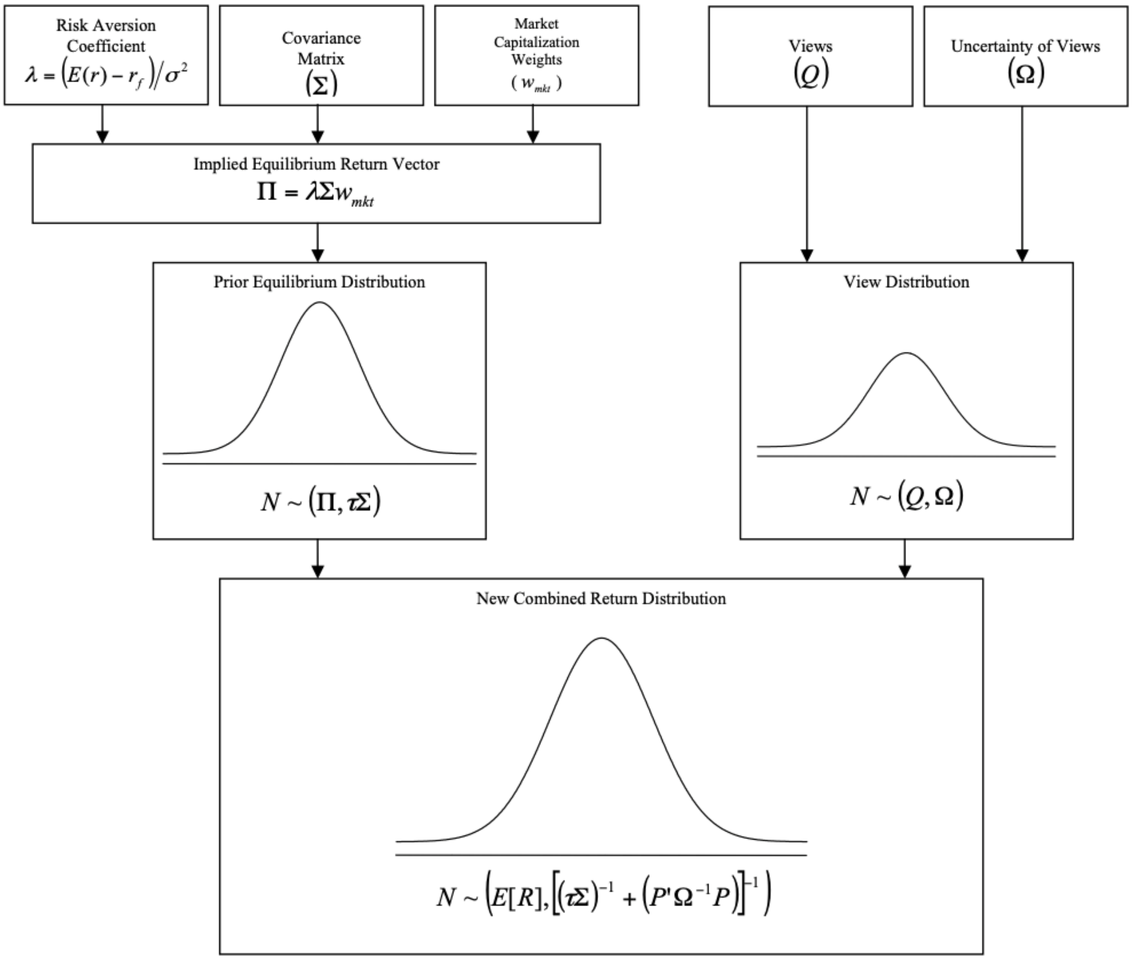

Figura 3. Obtención del nuevo vector de rentabilidad combinado. Idzorek (2019)

3.3. Simulación de Monte Carlo

La técnica computacional denominada Simulación de Monte Carlo fue desarrollada en la década de los años 40 y desde entonces ha sido adoptada en numerosos campos. En el ámbito financiero, resulta de gran utilidad para realizar estimaciones de ventas y costes futuros, cubrirse de los cambios de divisas y, sobre todo, complementar la tarea de optimización de carteras. Consiste en un procedimiento matemático que permite simular diferentes escenarios en base a diferentes condiciones del mercado y variables aleatorias. De esta forma, permite al inversor analizar cómo se comportaría su cartera en función de factores como la inflación, los tipos de interés, acontecimientos políticos, etc., y en base a las estimaciones obtenidas puede desarrollar sus estrategias de inversión detectando las asignaciones óptimas que maximizan la rentabilidad total de la cartera, al mismo tiempo que se minimiza el riesgo.

La simulación comienza mediante el desarrollo de una distribución de probabilidad de los rendimientos y riesgo esperados de cada activo de la cartera. A continuación, se generan escenarios que representan el resultado potencial de la cartera tomando muestras aleatorias de la distribución de probabilidad de cada activo. Para cada escenario aleatorio obtenido, el modelo calcula la rentabilidad y riesgo esperados resultantes, de forma que el inversor puede comprender mejor los riesgos y oportunidades asociados a las estrategias alternativas de inversión e identificar la cartera que considera optima de acuerdo con sus objetivos y nivel de aversión al riesgo (Cong y Oosterlee, 2016).

El resultado final es la distribución de los posibles retornos generados en los diferentes escenarios, tal y como la que se representa en la siguiente Figura 4. Como en toda distribución, se puede observar un escenario medio (línea verde) y un escenario mediano (línea amarilla). Asimismo, la distribución presenta un intervalo de confianza delimitado por las dos líneas azules que definen los retornos más probables. Por ejemplo, si el nivel de confianza de la distribución resultante es del 95%, existe una probabilidad del 2,5% de obtener un retorno por encima de la línea superior azul, del mismo modo que existe un 2,5% de probabilidad de obtener un retorno por debajo de la línea inferior azul.

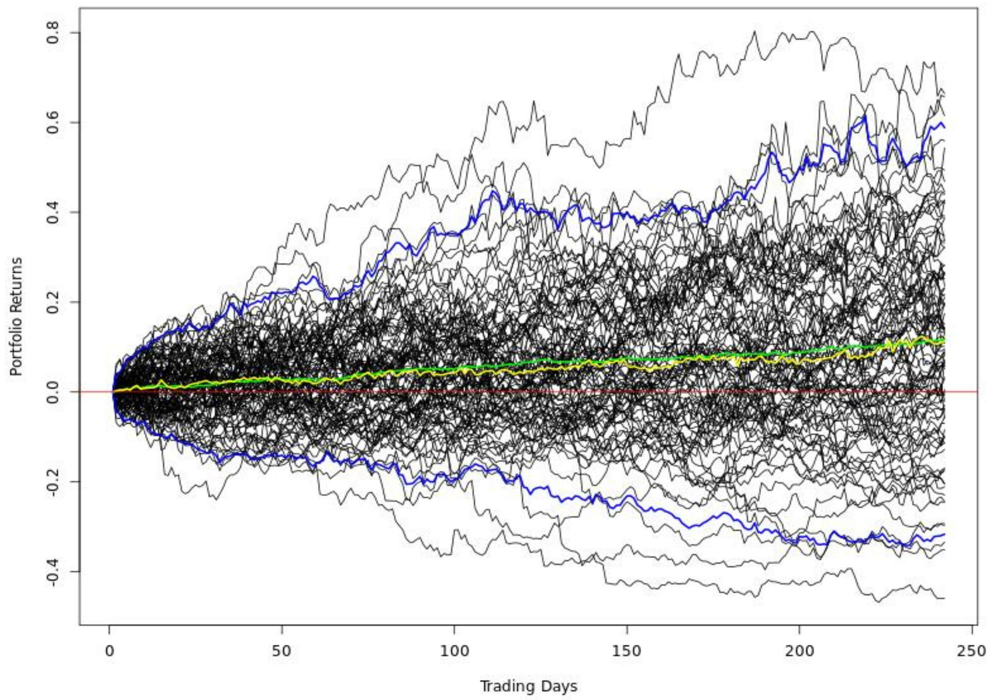

Figura 4. Escenarios de rentabilidad de una cartera*. Portfolio Simulator – estimate the expected risk and return of your investments*[2] (2017)

[2] La fuente es letYourMoneyGrow. https://letyourmoneygrow.com/2017/04/12/portfolio-simulator-estimate-expected-risk-return-investments/

Al igual que sucede con los modelos anteriores, la simulación de Monte Carlo presenta limitaciones que la alejan del mundo real. Por un lado, depende en gran medida de la calidad de los datos de entrada, por lo que puede ser que no capte todas las complejidades del mercado. Además, la simulación requiere de un sistema informático con cierta potencia computacional para poder ser ejecutada.

3.4. Algoritmos Metaheúristicos

El problema de optimización de carteras es un problema de optimización cuadrático que resulta de una gran complejidad por el elevado número de variables y restricciones complejas, sin poder definirse una fórmula matemática clara y consistente que sea aplicable en todos los casos. Los modelos de optimización tradicionales se quedan cortos en la tarea porque omiten algunas restricciones y variables relevantes, por lo que numerosos inversores han procedido al empleo de los algoritmos metaheurísticos para resolver el problema de optimización difíciles o imposibles de resolver mediante métodos tradicionales.

Los algoritmos describen un proceso a seguir mediante una serie de pasos organizados con el objetivo de resolver un problema específico. Los algoritmos metaheurísticos consisten en procedimientos de búsqueda diseñados para hallar una solución apta a un problema de optimización complejo, por lo que son realmente útiles en el ámbito de optimización de carteras. En este caso, la solución a encontrar por los algoritmos son las ponderaciones óptimas de cada activo de la cartera y la función objetivo a optimizar es el rendimiento esperado de la cartera. Los algoritmos metaheurísticos se particularizan por la evaluación iterativa de soluciones candidatas que se presentan en forma de vectores de números reales, cadenas binarias o permutaciones de números enteros, para posteriormente refinar la solución siguiendo unos criterios. A diferencia de otros algoritmos, los metaheurísticos son capaces de proporcionar buenas soluciones en un corto periodo de tiempo y con recursos razonables (Srinivasan, 2021).

A continuación, se van a desarrollar los algoritmos metaheurísticos más comunes en la optimización de carteras. Algunos de ellos pertenecen a la categoría de algoritmos bioinspirados, lo cual significa que están inspirados en la naturaleza, como el *Ant Colony Algorithm* que se basa en la estructura de las colonias de hormigas (Dorigo, 1992), el *Artificial Bee Colony Algorithm* que replica el comportamiento de los enjambres de abejas al buscar miel (Kennedy y Eberhart, 1995) o los Algoritmos Genéticos que se fundamentan en el principio de selección natural de Darwin (Holland, 1975).

- ***Algoritmos Genéticos***

Un algoritmo genético es una clase algoritmo metaheurístico de búsqueda probabilística inteligente que fue desarrollado por John Holland en la década de los 70 (Holland, 1975). Se trata de una abstracción de la evolución biológica en la naturaleza basada en el principio de selección natural de la Teoría de Darwin, el cual defiende que los individuos más fuertes y que mejor se adaptan a su entorno son los que tienen más posibilidades de sobrevivir, mientras que los débiles tienden a desaparecer. Este principio implica que, en sucesivas generaciones, los genes de los individuos más aptos se propagan constantemente a un número mayor de individuos, por lo que la evolución de las especies hace que cada vez estén mejor adaptadas a su entorno.

En la tarea de optimización de carteras mediante algoritmos genéticos se simula este proceso evolutivo tomando una población inicial de carteras alternativas y aplicando una serie de operadores genéticos de manera iterativa. Cada elemento inicial está codificado por un conjunto de cromosomas que representa una posible combinación de activos que configuran una cartera. Al principio, cada combinación de la población es evaluada por una función para definir cómo de apta es para posteriormente seleccionar aquellas conminaciones con aptitudes de calidad. Las combinaciones calificadas como aptas son reproducidas mediante el intercambio de partes de su información genética, cruzando dichos genes con los de otras combinaciones también categorizadas como positivas para dar lugar a una nueva versión mejorada que posee características procedentes de ambos progenitores. Este procedimiento de evaluación-selección-reproducción se repite sucesivamente hasta converger en la solución satisfactoria, que representaría la cartera óptima (Chang et al., 2000).

En comparación con otros algoritmos, los algoritmos genéticos presentan una serie de limitaciones. En primer lugar, en casos de alta complejidad en los que hay numerosos elementos y variables, la función puede tardar mucho tiempo en correr y consumir una gran cantidad de procesamiento y de recursos. Por esta razón, se considera que los algoritmos genéticos no gozan de una buena escalabilidad con la complejidad. Además, puede darse el caso de que el algoritmo no alcance una solución óptima porque haya ocurrido una convergencia prematura en un óptimo local, en la que el resultado no es del todo satisfactorio.

- ***Algoritmos de Búsqueda Tabu***

La Búsqueda Tabú es un método de optimización matemático creado por Fred W. Glover en los años 80 (Glover, 1989) con el objetivo de resolver problemas de optimización combinatoria, en especial la tarea de reequilibrar una cartera para mantener un porcentaje mínimo de cada categoría de activos. Consiste en una clase de técnica de búsqueda local por vecindades que incorpora estructuras de memoria para aumentar su rendimiento.

El algoritmo metaheurístico de búsqueda Tabu genera una única solución inicial, a partir de la cual crea otras posibles soluciones localizadas en las vecindades de la primera solución, las cuales no tienen porqué ser viables. Entre los resultados obtenidos, el algoritmo es capaz de escoger la solución más adecuada gracias al empleo de una función que mide como de cerca esta una solución determinada a la solución óptima dependiendo de lo bien que cumple con las restricciones del problema. La solución evaluada puede ser aceptada o rechazada. En el primer caso, se convierte en la nueva solución de partida y se repite el mismo procedimiento hasta alcanzar la solución óptima.

Se dice que el algoritmo se basa en estructuras de memoria porque genera una lista que prohíbe ciertos movimientos llamada lista de "movimientos Tabu" para evitar que se vuelvan a valorar soluciones visitadas anteriormente. A medida que el algoritmo corre, la lista se va actualizando de manera que un movimiento recientemente añadido a la lista se elimina después de que haya tenido lugar una serie de iteraciones. Ahora bien, existen ocasiones en las que se permite retomar movimientos Tabu si conducen a una mejor solución factible (Chang et al., 2000).

- ***Simulated Annealing Algorithm***

El *Simulated Annealing* un algoritmo metaheurístico de optimización inventado por Scott Kirkpatrick, C. Daniel Gelatt y Mario P. Vecchi en 1983, basándose en una variante del Método de Monte Carlo. El método simula el proceso de recocido en la metalurgia, que consiste en el calentamiento y posterior enfriamiento lento de metales para cambiar sus propiedades físicas (Kirkpatrick et al., 1983).

De manera similar al algoritmo de búsqueda Tabu, el algoritmo *Simulated Annealing* consiste una serie de iteraciones en las que se genera aleatoriamente una solución inicial candidata a un problema de optimización, se evalúa su calidad a partir de una función y se acepta o rechaza la solución candidata. Sin embargo, a diferencia de la búsqueda Tabu, el *Simulated Annealing* incorpora un parámetro estadístico denominado "temperatura", que mide la probabilidad de aceptar un movimiento hacia una solución determinada. La temperatura disminuye gradualmente con el tiempo según un "programa de enfriamiento", que establece la temperatura de partida y el ritmo al que debe disminuir, lo que reduce la probabilidad de aceptar soluciones peores y permite que el algoritmo converja a una solución mejor. Dicho programa de enfriamiento puede definirse de varias maneras, siendo la más común una caída exponencial a lo largo del tiempo, aunque también puede establecerse una reducción lineal o logarítmica. En la siguiente figura 5 se puede apreciar con claridad el decaimiento exponencial de un programa de enfriamiento tomado como ejemplo. El eje x del gráfico representa el número de iteraciones y el eje y la temperatura.

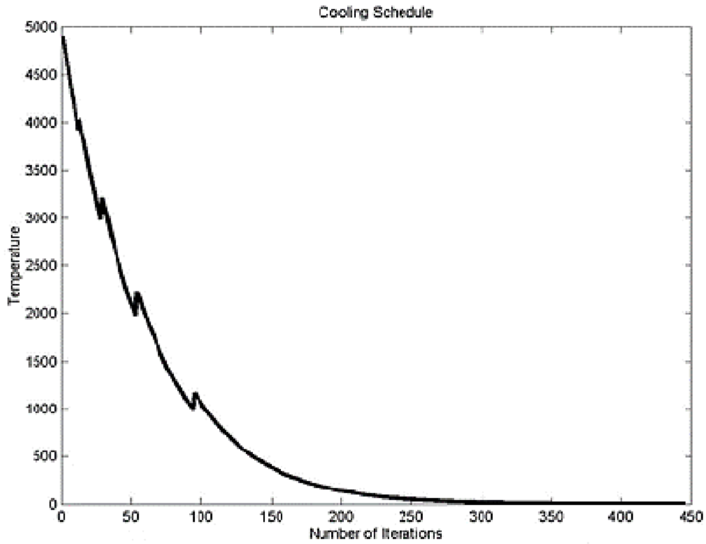

Figura 5. Programa de enfriamiento. Darrah (2006)

En la optimización de carteras, el algoritmo de templado simulado puede utilizarse para hallar las ponderaciones óptimas de un determinado conjunto de activos, o para seleccionar un conjunto de activos que maximicen el rendimiento esperado minimizando el riesgo, lo cual se conoce como asignación de activos. Por lo tanto, las soluciones candidatas corresponden con conjuntos de ponderaciones que representan la asignación de capital a cada activo de la cartera y el criterio de evaluación gira entorno a la rentabilidad esperada, el riesgo de la cartera y otras restricciones que se pueden imponer (costes de transacción, restricciones de liquidez, restricciones de cardinalidad, etc.) (Srinivasan, 2021).

El *Simulated Annealing* es especialmente útil en casos en los que hay muchos óptimos locales y es difícil encontrar el óptimo global pues, a diferencia de otros algoritmos metaheurísticos mencionados anteriormente, este algoritmo tiene una gran capacidad para escapar de los óptimos locales. Además, puede tener en cuenta funciones objetivo no lineales, comunes en el mundo financiero. En cuanto a sus inconvenientes, suele acarrear un mayor coste computacional y necesita de un mayor tiempo para converger en una solución por el gran número de iteraciones que realiza.

- ***Ant Colony Algorithm***

El *Ant Colony Algorithm* fue uno de los primeros algoritmos pertenecientes a la familia de los métodos de inteligencia de enjambres, una rama de la inteligencia artificial que imita el comportamiento de sistemas biológicos. El algoritmo inicial fue desarrollado por Marco Dorigo en 1992 con el objetivo de encontrar el camino óptimo en un grafo y con el paso del tiempo han surgido variaciones para resolver diversos problemas de optimización (Dorigo, 1992).

El algoritmo simula el comportamiento de las colonias de hormigas a la hora de buscar el camino óptimo que une el nido y la fuente de alimento. Al comienzo, las hormigas se desplazan de manera aleatoria hasta que encuentran su alimento y regresan a la colonia. En este proceso, desprenden feromonas dejando rastro del recorrido realizado para que las próximas hormigas puedan seguir el rastro. Con el paso del tiempo, las trazas de feromonas van desapareciendo de manera que los caminos más atractivos son los más cortos, pues es donde resulta haber mayor concentración de feromonas. Sin embargo, las feromonas desprendidas por aquellas hormigas que han tomado caminos más largos se habrán evaporado parcialmente, perdiendo densidad y haciendo que esos caminos sean menos atractivos. El algoritmo continúa iterando el proceso hasta que todas las hormigas se han reconducido al camino más corto, el cual se corresponde con la solución óptima (Zanjirdar, 2020).

En la siguiente figura 6 se resume de manera esquemática el funcionamiento de algoritmo. En el paso #1, la primera hormiga es capaz de encontrar el alimento regresa al nido para comunicarlo al resto. En el paso #2, las hormigas se desplazan de manera aleatoria hasta encontrar el alimento. Finalmente, en el paso #3 las hormigas encuentran el camino óptimo, el cual posee la mayor concentración de feromonas.

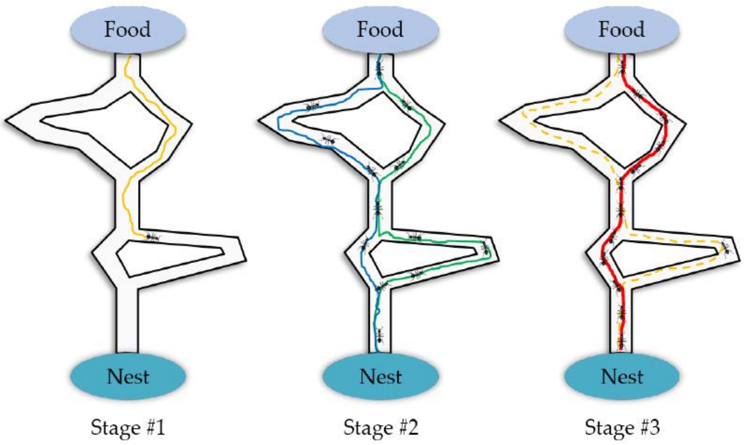

Figura 6. Ant Colony Optimisation Framework. Wan et al. (2023)

Este algoritmo ha demostrado ser eficaz en la tarea de optimización de carteras. Las posibles soluciones de carteras de inversión se corresponden con los caminos alternativos que van tomando las hormigas, mientras que la cartera óptima se asocia al camino final que terminan tomando todas las hormigas.

- ***Particle Swarm Optimisation***

Una de las técnicas metaheurísticas de optimización más recientes es el *Particle Swarm Optimisation*, perteneciente a la familia de algoritmos de inteligencia de enjambres y desarrollada por James Kennedy y Russ Eberhart en el año 1995 en los Estados Unidos. Es una técnica inspirada en la conducta social de los bancos de peces, los rebaños de animales y las bandadas de pájaros que se fundamenta en la teoría de que las opiniones de los individuos están influenciadas por la creencia global que comparten los miembros de una sociedad, pudiendo cada uno modificar su opinión individual por los cambios en las opiniones de los individuos cercanos (Kennedy y Eberhart, 1995).

La tesis de la técnica *Particle Swarm Optimisation* afirma que el conjunto de soluciones potenciales está en movimiento por el espacio de búsqueda para encontrar la solución óptima. El procedimiento comienza definiendo una población inicial aleatoria constituida por soluciones potenciales que reciben el nombre de partículas, las cuales tienen una posición el espacio multidimensional de soluciones del problema y se desplazan a una velocidad determinada. La capacidad de resolver el problema de optimización de cada partícula es evaluada por la función objetivo, que suele ser una combinación de la suma ponderada de las rentabilidades esperadas de los valores que componen la cartera y la varianza de dichas rentabilidades (Zanjirdar, 2020). A continuación, las partículas actualizan sus posiciones y velocidades en cada iteración en base a la mejor posición que ha tenido cada una y la posición que ha tenido la partícula más apta de la población. De esta manera, el movimiento de cada partícula hacia las mejores partículas en ruta está influido por su propia experiencia y la experiencia de las partículas vecinas.

El procedimiento se somete a numerosas iteraciones hasta que se cumple una condición predeterminada, como un número máximo de iteraciones o un umbral de aptitud alcanzado, momento en el cual se espera haber convergido en el punto óptimo del espacio (Golmakani y Fazel, 2011).

- ***Artificial Bee colony Algorithm***

El *Artificial Bee colony Algorithm* es un algoritmo metaheurístico introducido por Karaboga en el año 2005 con el objetivo de optimizar problemas numéricos. Es una clase de algoritmo de inteligencia de enjambres que se basa en el comportamiento cooperativo de las colonias de abejas y su “inteligencia de enjambre” a la hora de buscar miel (Karaboga, 2005). Traducido al ámbito de optimización de carteras, las fuentes de alimento analizadas por el algoritmo representan las alternativas asignaciones de activos en una cartera y se consideran óptimas aquellas que mejor cumplen los objetivos espáticos de rentabilidad, riesgo y posibles restricciones establecidas.

Esta técnica de optimización distingue tres clases de abejas: Las abejas obreras, asociadas a la obtención de alimentos específicos y a la comunicación de la información relativa a dichos alimentos a las abejas observadoras; las abejas observadoras, que supervisan la obtención de alimentos específicos y seleccionan aquellos de mejor calidad; y las abejas exploradoras que buscan nuevas fuentes de alimento explorando nuevas alternativas en el espacio de búsqueda. Durante el proceso de búsqueda del óptimo, las abejas obreras pueden modificar la fuente de alimento basándose en sus conocimientos actuales, las abejas observadoras pueden cambiar la fuente de alimento seleccionada en función de su calidad basada en la información compartida por las abejas obreras. Asimismo, las abejas exploradoras pueden descubrir nuevas soluciones alternativas mediante la búsqueda aleatoria. De esta manera, el *Artificial Bee Colony Algorithm* va encontrando nuevas soluciones que superan a las anteriores hasta que alcanza la solución óptima (Zanjirdar, 2020).

3.5. Quantum Computing

Los métodos heurísticos descritos en el capítulo anterior ofrecen mejores soluciones al problema de optimización de carteras que los métodos clásicos como el Teorema de Markowitz. Sin embargo, estos métodos pueden presentar complicaciones en el momento en el que se analiza un volumen alto de activos, pudiendo requerir mucho tiempo, estancarse en óptimos locales o incluso puede ser que no sean capaces de encontrar una solución. El *Quantum Computing* es una solución alternativa para resolver problemas computacionales complicados que no pueden ser resueltos por otras técnicas (Marzec, 2013).

El *Quantum Computing* se trata de un nuevo paradigma computacional que se distingue principalmente de las técnicas computacionales clásicas en que su unidad mínima de información son los “qubits”, en vez de los “bits”. Una de las primeras veces en las que se empleó el *Quantum Computing* fue en 1995 por dos investigadores de IBM. Estos pusieron en práctica la teletransportación cuántica, que consiste en la transferencia de un estado de un bit cuántico (qubit) de un lugar a otro sin que haya movimiento físico.

Desde este momento, el *Quantum Computing* ha avanzado velozmente y ha sido incorporada por numerosas empresas dedicadas al desarrollo de hardware y software. Ahora bien, es una herramienta computacional que aún se encuentra en fase de desarrollo y presenta un gran potencial para revolucionar diferentes campos, entre ellos la gestión de carteras, abriendo nuevas oportunidades de inversión.

El algoritmo de *Quantum Computing* idóneo para procesos de optimización es el algoritmo de recocido cuántico, el cual ha demostrado ser exponencialmente más rápido que el algoritmo metaheurístico *Simulated Annealing* clásico (Sotelo, 2021). La técnica de recocido cuántico comienza en un estado simple y va evolucionando hasta el estado objetivo (llamado estado fundamental del hamiltoniano), que es la composición óptima de la cartera que minimiza la función objetivo que trata de maximizar la rentabilidad y minimizar el riesgo esperado de la cartera (Grant et al., 2021)

Dicho esto, el *Quantum Computing* es una alternativa con un gran futuro por delante en la optimización de carteras, pues es capaz de procesar estrategias de inversión complejas con numerosas restricciones y datos complejos a mayor velocidad. Además, permite a los inversores optimizar sus carteras en tiempo real y responder rápidamente a los cambios del mercado.

3.6. Deep Reinforcement Learning

El *Deep Reinforcement Learning* se trata de una clase de *Machine Learning* fruto de la combinación entre el *Reinforcement Learning* y el *Deep Learning*. Se considera una herramienta con un gran potencial para analizar los datos complejos con patrones no lineales patrones generados en los mercados financieros y, en consecuencia, resulta ser un método muy oportuno para resolver el problema de gestión de carteras por el gran número de activos existentes, los diferentes grados de correlación entre cada par de activos, las dinámicas condiciones del mercado y su incertidumbre. También resulta de gran utilidad en otros campos como la robótica, el procesamiento de lenguaje natural, el transporte y la sanidad (Jiang y Liang, 2017).

Por un lado, el *Deep Learning* consiste en un método de aprendizaje por el que el agente interactúa con el medio partiendo de escasa información y va refinando progresivamente su estrategia mediante el método de prueba y error por el que recibe información en forma de recompensas o penalizaciones por cada acción. Este procedimiento requiere de escasos recursos y tecnologías, por lo que resulta altamente eficiente a la hora de solventar problemas complejos y no lineales. Por otro lado, el *Deep Learning* es una variante de aprendizaje automático que emplea redes neuronales para generar unas salidas a partir de unos datos de entrada complejos y de gran dimensión, como por ejemplo imágenes. Esta técnica de aprendizaje ha sido revolucionaria en los campos del procesamiento del lenguaje natural y la visión artificial (*computer vision*).

Cabe mencionar diversos puntos fuertes del *Deep Reinforcement Learning*. En primer lugar, es un método con una naturaleza procedente de la inteligencia artificial en su totalidad, lo cual evita toda estrategia humana basada en las expectativas de los precios futuros y permite que el modelo sea auto-mejorable. Otro punto a favor del *Deep Reinforcement Learning*, a diferencia del *Reinforcement Learning* tradicional, es que aproxima la función u estrategia mediante la aplicación de redes neuronales, lo cual aporta una gran flexibilidad al posibilitar el diseño de una estructura de red neuronal específica y evita caer en la "maldición de la dimensionalidad", permitiendo la gestión de carteras a gran escala.

En cuanto a la aplicación del *Deep Reinforcement Learning* en el problema de optimización de carteras, se han desarrollado diferentes métodos con diferentes enfoques. Entre ellos destacan:

- ***Deep Q-Network (DQN)***

Es una clase de red neuronal que aprende una función óptima de acción-valor mediante la actualización iterativa de una tabla Q basada en la retroalimentación del entorno. La red neuronal parte de datos financieros históricos que simulan el estado actual del mercado y asigna un valor Q para cada acción, el cual representa el rendimiento esperado a largo plazo de la cartera en el caso de incluir dicha acción. Una vez entrenado el algoritmo, se actualizan las ponderaciones asignadas a cada activo seleccionando aquellos activos con el valor Q más alto para cada estado actual del mercado, de manera que se maximice la rentabilidad esperada de la cartera a lo largo del tiempo (Gao et al., 2020).

- ***Policy gradient methods***

Son métodos que, mediante una red neuronal, aprenden una política capaz de reflejar los datos del mercado en una estrategia de construcción de carteras en la que se maximizan los rendimientos. Para ello, la política se retroalimenta con información sobre la rentabilidad y riesgo de la cartera y se actualiza para mejorar su rendimiento mediante el descenso del gradiente. El descenso del gradiente es un algoritmo de optimización que ajusta iterativamente los parámetros de un modelo en la dirección del gradiente negativo de la función de pérdida, es decir, la dirección que maximiza el rendimiento esperado (Jiang y Liang, 2017).

4. COMPARATIVA ENTRE MODELOS

A continuación, se va a realizar una comparativa entre dos de los modelos explicados anteriormente. Se contrapondrán los resultados obtenidos con una técnica tradicional (Modelo de Markowitz) con los resultados generados por una técnica reciente (Algoritmo Genético), con el objetivo de demostrar cuantitativamente la evolución acaecida en el campo de la inversión y en la gestión de carteras gracias al desarrollo de los algoritmos.

4.1. Descripción del universo de inversión

Se ha seleccionado una base de datos que consta de series temporales de una selección de índices bursátiles que representan diversas clases de activos financieros para favorecer la diversificación de la cartera. Dicho universo de inversión consta de acciones, renta fija, futuros, y *commodities*. Los valores que toman son las cotizaciones de dichos índices en sucesivos instantes de tiempo.

- ***Fuente de datos***

Todos los datos de los índices han sido descargados de Bloomberg y posteriormente almacenados en un archivo XSLX generado en Excel.

- ***Marco temporal***

Rango de 23 años con periodicidad mensual, comenzando en el día 31/03/2000 y terminando en el día 31/03/2023.

- ***Variables***

    - *sxxp Index*: Representa al STOXX Europe 600, que consiste en un índice bursátil de valores que recaba las 600 empresas europeas con mayor capitalización bursátil. Este índice cubre alrededor del 90% de la capitalización bursátil del *free float* del mercado compuesto por 17 países europeos (Reino Unido, Francia, Suiza, Alemania, Austria, Bélgica, Dinamarca, Finlandia, Irlanda, Italia, Luxemburgo, Países Bajos, Noruega, Polonia, Portugal, España y Suecia.

    - *I02508EU Index*: El Bloomberg Pan-European Aggregate 10+ Years Total Return Unhedged EUR es un índice *benchmark* que representa el comportamiento de los bonos europeos con vencimiento de 10 años. Puesto que el riesgo de los activos de renta fija aumenta cuanto más lejana sea su fecha vencimiento (riesgo por duración), se ha seleccionado un índice de bonos a 10 años para que aporte un cierto nivel de riesgo a la cartera.

- *CRB CMDT Index*: Índice que ofrece una representación dinámica de las tendencias generales de los precios de las materias primas mediante la representación de los precios de los futuros de un conjunto de 19 materias primas (aluminio, cacao, café, cobre, maíz, algodón, petróleo crudo, oro, gasóleo de calefacción, Lean Hogs, ganado vivo, gas natural, níquel, zumo de naranja, plata, soja, azúcar, gas sin plomo y trigo).

- *GOLDLNPM Index*: Índice que realiza un seguimiento del precio del oro, el activo refugio por excelencia. Resulta ser un componente decisivo para diversificar una cartera, pues presenta una correlación baja con el mercado y suele comportarte positivamente en épocas de crisis.

En la siguiente Figura 5 se muestra la evolución temporal de los cuatro índices elegidos, donde se puede apreciar que la cotización del oro ha superado al resto de activos con creces, experimentando fuertes revaluaciones en los periodos de crisis como en la crisis financiera del 2008 y en la pandemia del Covid-19 de 2020. Por el contrario, en índice que representa renta variable es claramente el que peor se ha comportado, quedando por debajo del resto en todo el marco temporal.

Figura 7. Evolución histórica de los componentes de la cartera. Fuente de elaboración propia

4.2. Técnica A: Modelo de Markowitz

La *Modern Porfolio Theory* de Markowitz trata de encontrar los pesos ideales de una cartera que, o bien maximicen la rentabilidad esperada para un cierto nivel de riesgo, o bien minimicen el riesgo para una rentabilidad determinada. Una manera de resolver este problema de optimización que abarque ambos objetivos es maximizar el *Sharpe Ratio*, el cual representa la rentabilidad ajustada al riesgo.

En este caso se ha empleado la librería *SciPy*, una herramienta diseñada para resolver problemas de minimización y que puede ser empleada en problemas de maximización multiplicando la función objetivo (*Sharpe Ratio*) por -1 (Pichka, 2018). Al correr el programa de optimización se ha incluido una restricción de volumen que fuerce a que todos los activos tengan cierto peso, impidiendo que alguno tenga peso 0%.

Una vez ejecutado el programa, la cartera óptima resultante es aquella definida por la siguiente combinación de activos:

- `sxxp Index: 0.24%`
- `I02508EU Index: 45.21%`
- `CRB CMDT Index: 31.8%`
- `GOLDLNPM Index: 22.75%`

Asimismo, las métricas de esta cartera son las siguientes:

- `Rentabilidad: 4.90%`
- `Volatilidad: 6.98%`
- `Sharpe Ratio: 0.70`

Por último, es conveniente representar gráficamente la frontera eficiente para visualizar el *trade-off* entre la rentabilidad y el riesgo en nuestro escenario de inversión. La siguiente figura 6 es un gráfico que representa todas las carteras alternativas, donde el eje x representa su rentabilidad y el eje y su desviación típica o riesgo. La línea discontinua rosa simboliza todas las carteras con menor volatilidad para cada nivel de rentabilidad, es decir, la cartera eficiente. Por último, el punto azul marca la cartera óptima definida por el Teorema de Markowitz.

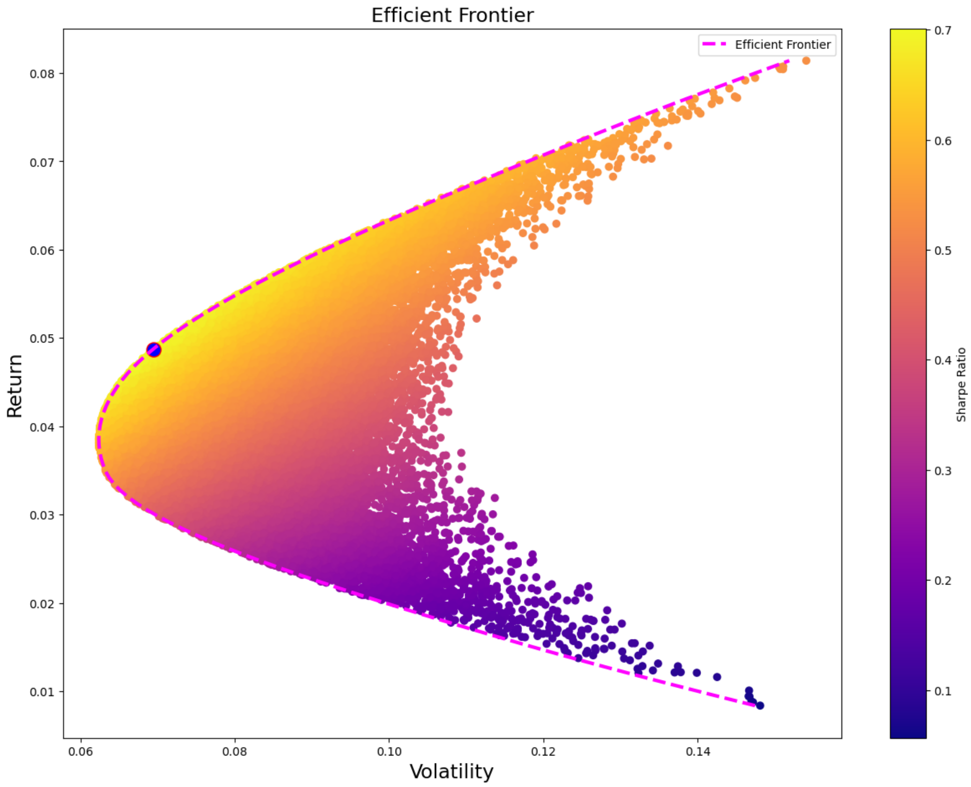

Figura 8. Frontera eficiente. Fuente de elaboración propia

4.3. Técnica B: Algoritmo Genético

Un algoritmo genético presenta un racional completamente diferente al Modelo de Markowitz, pues no es un modelo de optimización sencillo que trata de maximizar la rentabilidad para un nivel de riesgo ni de minimizar el riesgo para un nivel de rentabilidad preestablecido, sino que se trata de un algoritmo metaheurístico inspirado en la naturaleza que se fundamenta en el principio de selección natural de Darwin y que realiza múltiples iteraciones (Holland, 1975). Por este motivo, el programa es exponencialmente más complejo que el modelo anterior en cuanto longitud del código, cantidad de memoria y tiempo de resolución.

El procedimiento comienza definiendo una serie de funciones que posteriormente se emplean como subfunciones dentro del algoritmo genético. La dinámica del algoritmo comienza con una función que define la población inicial y las "aptitudes" de cada individuo. A continuación, entra en juego una nueva función encargada de seleccionar los padres entre toda la población y posteriormente se realizan cruces entre ellos para dar lugar a nuevos individuos. Estos nuevos individuos son generados mediante una función de mutación, responsable de ir convergiendo hacia el resultado óptimo. Este procedimiento se repite numerosas veces, de manera que los hijos resultantes se convierten en los padres de nuevas generaciones hasta que se completa un total de 1000 iteraciones. En este momento, el algoritmo genético procede a calcular las "aptitudes" de la población final y se selecciona aquel individuo con mejor resultado.

Dicho esto, siguiendo las indicaciones del algoritmo genético entrenado, los pesos asignados a cada activo que derivan en la cartera óptima son los siguientes:

- `sxxp Index: 0.00%`
- `I02508EU Index: 45.26%`
- `CRB CMDT Index: 31.09%`
- `GOLDLNPM Index: 23.65%`

Las métricas de la cartera resultante son las siguientes:

- `Rentabilidad: 5.59%`
- `Volatilidad: 6.97%`
- `Sharpe Ratio: 0.80`

4.4. Comparativa de las técnicas

Como era de esperar, la cartera óptima obtenida mediante la técnica más moderna resulta más rentable que la cartera definida mediante la técnica tradicional (4.90% vs. 5.59% de rentabilidad). Además, si analizamos la rentabilidad ajustada al riesgo (Sharpe Ratio) podemos observar que también es mejor el de la cartera generada por la técnica avanzada (0.70 vs. 0.80).

Dado que los algoritmos genéticos son procedimientos metaheurísticos de muy reciente creación, incorporan numerosas ventajas que el Modelo de Markowitz carece y que son posibles gracias a los nuevos avances tecnológicos. Las principales ventajas de los algoritmos genéticos son las siguientes (Lin y Gen, 2007):

- Mientras que el *Modern Porfolio Theory* asume una relación lineal entre los rendimientos de los activos y sus covarianzas y parte de un escenario con pocos activos, lo cual no es del todo realista, los algoritmos genéticos asumen relaciones no lineales y son capaces de abarcar grandes cantidades de datos, lo cual permite construir carteras más sólidas y adaptables al mundo real.
- Los algoritmos genéticos son capaces de lidiar con un número considerable de restricciones complejas de manera más efectiva que los métodos tradicionales,

pues dichas restricciones se pueden incluir fácilmente en el código del algoritmo. Sin embargo, el Modelo de Markowitz no es un enfoque multiobjetivo, por lo que es incapaz de incorporar restricciones y solo se puede centrar en el único objetivo de alcanzar el mejor equilibrio entre rentabilidad y riesgo.

- Al analizar una amplia población de soluciones alternativas, existe una probabilidad mayor de que los algoritmos genéticos encuentren la solución óptima, pues los teoremas tradicionales emplean enfoques de búsqueda focalizados en espacios preestablecidos que pueden derivar fácilmente en óptimos locales.

4.5. Resultados

A continuación, se va a interpretar los resultados obtenidos en cada modelo y la explicación que hay detrás. En la siguiente figura 7 se recoge de manera resumida los resultados obtenidos por cada técnica:

	Modelo de Markowitz	***Algoritmo Genético***
Pesos asignados a cada activo	*sxxp Index*: 0.24% *I02508EU Index*: 45.21% *CRB CMDT Index:* 31.80% *GOLDLNPM Index*: 22.75%	*sxxp Index*: 0.00% *I02508EU Index: 45.26%* *CRB CMDT Index: 31.09%* *GOLDLNPM Index: 23.65%*
Rentabilidad	4.90%	5.59%
Volatilidad	6.98%	6.97%
Sharpe Ratio	0.70	0.80

Figura 9. Tabla comparativa de resultados. Fuente de elaboración propia

Los pesos asignados a cada activo obtenidos por ambos modelos convergen a resultados muy similares. Prácticamente la mitad de la cartera está constituida por el índice que representa la renta fija con vencimiento a 10 años (I02508EU Index), lo cual es totalmente lógico pues la renta fija es uno de los activos financieros que han presentado menor volatilidad a lo largo de las últimas décadas y uno de los principales objetivos consiste en minimizar el riesgo global de la cartera.

A continuación, los modelos asignan entre un 31% y 32% al índice que replica un conjunto de materias primas (*CRB CMDT Index),* una opción que resulta atractiva a la hora de disminuir la volatilidad global de una cartera y favorecer la diversificación por la escasa correlación que tienen con el comportamiento del mercado. Además, se asigna entre un 23% y 24% al índice del oro (*GOLDLNPM Index),* lo cual es una decisión razonable, pues el marco temporal de los datos engloba varios periodos de crisis económica y el oro es por excelencia el activo refugio ante las recesiones. Dicho esto, el porcentaje restante asignado al índice que replica la renta variable (*sxxp Index)* es prácticamente inexistente, pues las acciones son los activos financieros con mayor riesgo y si abarcaran un gran peso se vería perjudicado el Sharpe Ratio.

5. CONCLUSIONES

A lo largo de este trabajo se ha llevado a cabo una exhaustiva revisión de las diferentes técnicas desarrolladas con el objetivo de resolver el problema de optimización de carteras, desde el clásico Teorema de Markowitz hasta los enfoques más avanzados como los algoritmos metaheurísticos, la computación cuántica y el *Deep Reinforcement Learning*. No cabe duda de que la evolución de estas técnicas ha permitido superar algunas limitaciones de enfoques anteriores y ha brindado oportunidades para una mejor personalización y adaptabilidad de las carteras, facilitando enormemente el trabajo de los profesionales en el área de inversiones. Sin embargo, a pesar de que los modelos matemáticos tradicionales se han quedado un tanto atrasados, no dejan de proporcionar una base teórica acerca de la gestión de carteras muy valiosa.

El *Modern Portfolio Theory* de Markowitz sentó las bases de las diferentes teorías de inversión, marcando el punto de partida para futuras investigaciones en el campo. Fue el responsable de la creación del concepto de cartera eficiente y de la concienciación de la importancia de la diversificación. Sin embargo, presenta limitaciones como la suposición de relaciones lineales entre los activos y la imposibilidad de incluir restricciones en el modelo. La posterior adopción de los algoritmos metaheurísticos, como los Algoritmos Genéticos, ha representado un avance significativo en la búsqueda de soluciones óptimas para las carteras de inversión. Estos algoritmos han demostrado su capacidad para manejar restricciones complejas, explorar un amplio espacio de soluciones y generar carteras robustas y estables. Además, su flexibilidad y adaptabilidad les permiten incorporar factores adicionales, como costes de transacción, restricciones de liquidez y de volumen, lo que contribuye a una mayor personalización de las carteras.

Las técnicas más recientes que aún están en sus primeras etapas de desarrollo y que resultan prometedoras son el *Quantum Computing* y *Deep Reinforcement Learning*. Ambas muestran un gran potencial para abordar problemas de optimización combinatoria de una manera dinámica y más eficiente que otros algoritmos, lo que podría conducir en el futuro a soluciones más rápidas, precisas y adaptadas a las condiciones del mercado.

Finalmente, mediante la programación de la técnica de Markowitz y un Algoritmo Genético ha quedado demostrado cuantitativamente que la técnica más avanzada resulta ser más eficaz a la hora de encontrar una cartera óptima, pues que proporciona una rentabilidad y *Sharpe Ratio* superiores a la cartera propuesta por el modelo tradicional. Ahora bien, es importante tener presente que los dos análisis son válidos y no son excluyentes, y por lo que es recomendable correr los dos modelos para ser analizados en paralelo. Aunque sea más rudimentario, el modelo de Markowitz aporta una información útil y diferencial al inversor, una visión lateral de dónde hay "tierra más firme", guiándole hacia su punto idóneo de equilibrio entre riesgo y retorno.

6. APÉNDICES (Códigos)

```
import numpy as np # linear algebra
import pandas as pd # data processing, CSV file I/O (e.g. pd.read_csv)
import matplotlib.pyplot as plt
import plotly_express as px
import pandas_datareader as web
from scipy import optimize
from datetime import datetime as dt, timedelta as td

data = pd.read_excel('Portfolio_data_diverse_securities.xlsx')
stocks = ['sxxp Index','I02508EU Index','CRB CMDT Index','GOLDLNPM
Index']
end = ("2000-03-31")
start = ("2023-03-31")

data.head()


df = data.set_index('Date')
table=df
table.head()


px.line(df * 100 / df.iloc[0])


ret_port = df.pct_change()
px.line(ret_port)


np.random.seed(1)
# Weight each security
weights = np.random.random((4,1))
# normalize it, so that some is one
weights /= np.sum(weights)
print(f'Normalized Weights : {weights.flatten()}')

# We generally do log return instead of return
log_ret = np.log(df / df.shift(1))
log_ret

# Expected return (weighted sum of mean returns). Mult by 12 as we
always do annual calculation and year has 12 months
exp_ret = log_ret.mean().dot(weights)*12
print(f'\nExpected return of the portfolio is : {exp_ret[0]}')

# Exp Volatility (Risk)
exp_vol = np.sqrt(weights.T.dot(12*log_ret.cov().dot(weights)))
```

```
print(f'\nVolatility of the portfolio: {exp_vol[0][0]}')

# Sharpe ratio
sr = exp_ret / exp_vol
print(f'\nSharpe ratio of the portfolio: {sr[0][0]}')
```

MONTE CARLO SIMULATION

```
# number of simulation
n = 50_000
# n = 10

port_weights = np.zeros(shape=(n,len(df.columns)))
port_volatility = np.zeros(n)
port_sr = np.zeros(n)
port_return = np.zeros(n)

num_securities = len(df.columns)
# num_securities
for i in range(n):
    # Weight each security
    weights = np.random.random(4)
    # normalize it, so that some is one
    weights /= np.sum(weights)
    port_weights[i,:] = weights
    #     print(f'Normalized Weights : {weights.flatten()}')

    # Expected return (weighted sum of mean returns). Mult by 12 as we
always do annual calculation and year has 12 months
    exp_ret = log_ret.mean().dot(weights)*12
    port_return[i] = exp_ret
#     print(f'\nExpected return is : {exp_ret[0]}')

    # Exp Volatility (Risk)
    exp_vol = np.sqrt(weights.T.dot(12*log_ret.cov().dot(weights)))
    port_volatility[i] = exp_vol
#     print(f'\nVolatility : {exp_vol[0][0]}')

    # Sharpe ratio
    sr = exp_ret / exp_vol
    port_sr[i] = sr
#     print(f'\nSharpe ratio : {sr[0][0]}')


for weight, stock in zip(port_weights[ind],stocks):
    print(f'{round(weight * 100, 2)} % of {stock} should be bought.')

# best portfolio return
print(f'\nMarkowitz optimal portfolio return is : {round(max_sr_ret *
100, 2)}% with volatility \
{max_sr_vol}')
```

SCIPY TO GET THE MAX OF SHARPE RATIO

```python
from scipy import optimize

log_mean = log_ret.mean() * 12
cov = log_ret.cov() * 12

# Some helper functions
def get_ret_vol_sr(weights):
    weights = np.array(weights)
    ret = log_mean.dot(weights)
    vol = np.sqrt(weights.T.dot(cov.dot(weights)))
    sr = ret / vol
    return np.array([ret, vol, sr])

# Negate Sharpe ratio as we need to max it but Scipy minimize the
given function
def neg_sr(weights):
    return get_ret_vol_sr(weights)[-1] * -1

# check sum of weights
def check_sum(weights):
    return np.sum(weights) - 1

# Constraints for the optimization problem
cons = {'type':'eq','fun':check_sum}
# bounds on weights
bounds = ((0,1),(0,1),(0,1),(0,1))
# initial guess for optimization to start with
init_guess = [.25 for _ in range(4)]


# Call minimizer
opt_results = optimize.minimize(neg_sr, init_guess, constraints=cons,
bounds=bounds, method='SLSQP')


optimal_weights = opt_results.x
# optimal_weights
for st, i in zip(stocks,optimal_weights):
    print(f'Stock {st} has weight {np.round(i*100,2)} %')



mc_weights = port_weights[ind]
for st, i in zip(stocks,mc_weights):
    print(f'Stock {st} has weight {np.round(i*100,2)} %')



# Comparing two results we see that we get very close results
(optimal_weights - mc_weights)



get_ret_vol_sr(optimal_weights), get_ret_vol_sr(mc_weights)

print('For a given portfolio we have: (Using SciPy optimizer)\n \n')
for i, j in enumerate('Return Volatility SharpeRatio'.split()):
    print(f'{j} is : {get_ret_vol_sr(optimal_weights)[i]}\n')
```

```
print('For a given portfolio we have: (Using Monte Carlo)\n \n')
for i, j in enumerate('Return Volatility SharpeRatio'.split()):
    print(f'{j} is : {get_ret_vol_sr(mc_weights)[i]}\n')


# Plot efficient frontier

frontier_y = np.linspace(port_return.min(), port_return.max(), 100)
frontier_vol = []

def minimize_vol(weights):
    return get_ret_vol_sr(weights)[1]

for possible_ret in frontier_y:
    cons = ({'type':'eq','fun':check_sum},
            {'type':'eq','fun':lambda w:get_ret_vol_sr(w)[0] -
possible_ret})
    result = optimize.minimize(minimize_vol, init_guess,
method='SLSQP', constraints=cons, bounds=bounds)
    frontier_vol.append(result['fun'])



plt.figure(figsize=(15,11))
plt.scatter(port_volatility,port_return,c=port_sr, cmap='plasma')
plt.colorbar(label='Sharpe Ratio')
plt.xlabel('Volatility', fontsize=17)
plt.ylabel('Return', fontsize=17)
plt.title('Efficient Frontier', fontsize=17)
plt.scatter(max_sr_vol, max_sr_ret, c='blue', s=150, edgecolors='red',
marker='o')

plt.plot(frontier_vol, frontier_y, c='magenta', ls='--', lw=3,
label='Efficient Frontier')
plt.legend();
```

GENETIC ALGORITHM

```
import numpy as np
import pandas as pd
import random


# Define fitness function
def fitness(individual, returns):
    portfolio_return = np.dot(returns, individual)
    portfolio_volatility = np.sqrt(np.dot(individual.T,
np.dot(np.cov(returns.T) * 12, individual)))
    sharpe_ratio = portfolio_return / portfolio_volatility
    return sharpe_ratio.mean()

# Define function to generate initial population
def generate_population(n_pop, n_assets):
    population = []
    for _ in range(n_pop):
```

```
        weights = np.random.rand(n_assets - 1)
        weights = np.append(weights, 1 - np.sum(weights))
        population.append(weights)
    return population

# Define function to select parents for crossover
def select_parents(population, fitness_values):
    fitness_values_norm = fitness_values - np.min(fitness_values)  #
Make fitness values non-negative
    fitness_values_norm /= np.sum(fitness_values_norm)
    parent1_idx = np.random.choice(range(len(population)),
p=fitness_values_norm)
    parent2_idx = np.random.choice(range(len(population)),
p=fitness_values_norm)
    return parent1_idx, parent2_idx

# Define function to perform crossover
def crossover(parent1, parent2):
    n = len(parent1)
    c = np.random.randint(0, n)
    child = np.concatenate((parent1[:c], parent2[c:]))
    child /= np.sum(child)
    return child

# Define function to perform mutation
def mutation(individual, mutation_rate):
    for i in range(len(individual)):
        if np.random.rand() < mutation_rate:
            individual[i] = np.random.rand()
    individual /= np.sum(individual)
    return individual

# Define main function to run genetic algorithm
def genetic_algorithm(returns, n_pop, n_generations,
mutation_rate=0.01):
    n_assets = returns.shape[1]
    # Generate initial population
    population = generate_population(n_pop, n_assets)
    for gen in range(n_generations):
        # Calculate fitness of each individual
        fitness_values = np.array([fitness(individual, returns) for
individual in population])
        # Select parents
        parents = np.zeros((n_pop, n_assets))
        for i in range(n_pop):
            parent1_idx, parent2_idx = select_parents(population,
fitness_values)
            parent1 = population[parent1_idx]
            parent2 = population[parent2_idx]
            # Perform crossover
            child = crossover(parent1, parent2)
            # Perform mutation
            child = mutation(child, mutation_rate)
            parents[i] = child
        population = parents
    # Calculate fitness of final population
```

```
    fitness_values = np.array([fitness(individual, returns) for
individual in population])
    # Select best individual
    best_individual_idx = np.argmax(fitness_values)
    best_individual = population[best_individual_idx]
    return best_individual


# Load data from Excel file
df = pd.read_excel('Portfolio_data_diverse_securities.xlsx',
index_col=0)
returns = df.iloc[:, 1:].pct_change().dropna()

# Set parameters
n_pop = 1000
n_generations = 1000

# Run genetic algorithm
best_individual = genetic_algorithm(returns.values, n_pop,
n_generations)


# Calculate portfolio metrics
best_weights = best_individual / np.sum(best_individual)
returns_df = pd.DataFrame(returns, columns=df.columns[1:])
portfolio_return = np.dot(returns_df.mean(), best_weights) * 12
portfolio_volatility = np.sqrt(np.dot(best_weights.T,
np.dot(returns_df.cov() * 12, best_weights)))
portfolio_sharpe_ratio = portfolio_return / portfolio_volatility

# Print results
print("Best portfolio weights:", best_weights)
print("Portfolio return:", portfolio_return)
print("Portfolio volatility:", portfolio_volatility)
print("Portfolio Sharpe ratio:", portfolio_sharpe_ratio)
```

7. BIBLIOGRAFÍA

Alonso, D. (2011). Costos de transacción asociados a la liquidez en la Bolsa de Valores de Colombia. *Cuaderno de administración vol.24 no.42 Bogotá.* http://www.scielo.org.co/pdf/cadm/v24n42/v24n42a02.pdf

Bernstein, P.L. 1992. *Capital Ideas: The Improbable Origins of Modern Wall Street*. New York: Free Press

Black, F. y Litterman, R. (1992). *Global portfolio optimization*. Financial Analysts Journal, 48(5), p. 16.

Busetti, F. (2006). Heuristic approaches to realistic portfolio optimisation. *WIT Transactions on Modelling and Simulation, Vol 43.* https://10.2495/CF060351

Chang, T., Meade, N., Beasley, J. E., & Sharaiha, Y. M. (2000). *Heuristics for cardinality constrained portfolio optimisation*. Elsevier BV. https://doi.org/10.1016/s0305-0548(99)00074-x

Cong, F., y Oosterlee, C. W. (2016). Multi-period mean–variance portfolio optimization based on monte-carlo simulation. *Journal of Economic Dynamics & Control, 64*, 23-38. https://10.1016/j.jedc.2016.01.001

Coupe, M. (2022). *Fixed income traders grow savvier with data, tech and electronic trading*. Barclays. https://www.cib.barclays/our-insights/3-point-perspective/fixed-income-traders-grow-savvier-with-data-tech-and-electronic-trading.html

Darrah, M. (2006). *Multiple UAV task allocation for an electronic warfare mission comparing genetic algorithms and simulated annealing*. American Institute of Aeronautics and Astronautics. https://doi.org/10.2514/6.2006-6456

Dorigo, M. (1992). *Optimization, Learning and Natural Algorithms*. Politecnico di Milano.

Fama, E. F. (1963). Mandelbrot and the Stable Paretian Hypothesis. *The Journal of Business*, 36(4), 420–429. http://www.jstor.org/stable/2350971

Fidelity (s.f.). *Why diversification matters*. https://www.fidelity.com/learning-center/investment-products/mutual-funds/diversification

Gao, Z., Gao, Y., Hu, Y., Jiang, Z. y Su, J. (2020). Application of Deep Q-Network in Portfolio Management. *5th IEEE International Conference on Big Data Analytics*

(ICBDA), pp. 268-275. doi: 10.1109/ICBDA49040.2020.9101333.

Glover, F. (1989). Tabu Search Part I. *ORSA Journal on Computing, 190-206.*

Golmakani, H. R., y Fazel, M. (2011). Constrained portfolio selection using particle swarm optimization. *Expert Systems with Applications*. https://10.1016/j.eswa.2011.01.020

González, L., González, C. y Álvarez, M. (2019). *Optimización del riesgo en carteras de inversión*. E.T.S.I. Industriales (UPM). https://oa.upm.es/54151/1/TFG_LUIS_ANTONIO_GONZALEZ_MARTINEZ.pdf

Grant, E., Humble, T. S., y Stump, B. (2021). Benchmarking quantum annealing controls with portfolio optimization. *Physical Review Applied, 15(1).* https://10.1103/PhysRevApplied.15.014012

Hayes, A. (2021). *Absolute Return: Definition, Example, Vs. Relative Return.* Investopedia. https://www.investopedia.com/terms/a/absolutereturn.asp

Hayes, A. (2023). *Portfolio Management: Definition, Types, and Strategies*. Investopedia. https://www.investopedia.com/terms/p/portfoliomanagement.asp

Hellmich, M. y Kassberger, S. (2011). *Efficient and robust portfolio optimization in the multivariate Generalized Hyperbolic framework*, Quantitative Finance, 11:10, 1503-1516.

Hernández, L. Á. (2022). *¿Qué es y cómo funciona el modelo de Markowitz? | Teoría de la cartera y frontera eficiente*. Rankia. https://www.rankia.com/blog/bolsa-desde-cero/3479118-que-como-funciona-modelo-markowitz-teoria-cartera-frontera-eficiente

Holland, H. (1975). *Adaptation in Natural and Artificial Systems*. University of Michigan Press, Ann Arbor.

Idzorek, T. M. (2019). A step-by-step guide to the black-litterman model incorporating user-specified confidence levels. SSRN. https://doi.org/10.2139/ssrn.3479867

Jiang, Z., y Liang, J. (2017). Cryptocurrency portfolio management with deep reinforcement learning. https://arxiv.org/pdf/1808.09940.pdf

Karaboga, D. (2005). *An Idea Based On Honey Bee Swarm for Numerical Optimization*. Erciyes University.

Kennedy, J. y Eberhart, R. (1995). *Particle swarm optimization*. ICNN'95-international conference on neural networks, volumen 4.

Kenton, W. (2020). *Sortino Ratio: Definition, Formula, Calculation, and Example.* Investopedia. https://www.investopedia.com/terms/s/sortinoratio.asp

Kirkpatrick, S., Gelatt, C. D., Vecchi, M. P. (1983). *Optimization by Simulated Annealing.*

Levisauskaite, K. (2010). *Investment analysis and portfolio management.* https://www.bcci.bg/projects/latvia/pdf/8_IAPM_final.pdf

Li, W. (2016). *Value at risk (VaR) and its calculations: An overview.*

Lin, C., y Gen, M. (2007). Multiobjective resource allocation problem by multistage decision-based hybrid genetic algorithm. *Applied Mathematics and Computation*, 187(2), 574-583. https://10.1016/j.amc.2006.08.170

Markowitz, H. (1952). Portfolio Selection. Journal of Finance, 7, 77-91.

Marzec, M. (2013). Portfolio optimization: Applications in quantum computing. *SSRN Electronic Journal*, https://10.2139/ssrn.2278729

Nicholas, J. G. (2000). *Market neutral investing.* Princeton, NJ: Bloomberg Press. http://dl.fxf1.com/files/books/english/Article%20-%20Market-Neutral%20Investing%20-%20Long-Short%20Hedge%20Fund%20Strategies_%20Joseph%20G%20Nicholas_%202000.pdf

Olsson, R. (2005). *Portfolio management under transaction costs: Model development and Swedish evidence*. http://urn.kb.se/resolve?urn=urn:nbn:se:umu:diva-632

Pichka, E. (2018). *Portfolio Optimization with Python: using SciPy Optimize & Monte Carlo Method. Data Driven Investor.* https://medium.datadriveninvestor.com/portfolio-optimization-with-python-using-scipy-optimize-monte-carlo-method-a5b4e89e0548

Portfolio Simulator – estimate the expected risk and return of your investments. (2017). letYourMoneyGrow. https://letyourmoneygrow.com/2017/04/12/portfolio-simulator-estimate-expected-risk-return-investments/

Reilly, F. y Brown, K. (2002). *Investment Analysis and Portfolio Management.*

Sevilla Arias, A. (2020). *Liquidez*. Economipedia. https://economipedia.com/definiciones/liquidez.html

Sharpe, W. (1994). *The sharpe ratio.* The Journal of Management. https://doi.org/10.3905/jpm.1994.409501

Sortino, F., y Price, L. (1994). Performance measurement in a downside risk framework. *The Journal of Investing.* https://10.3905/joi.3.3.59

Sotelo, R. (2021). (Dec 06, 2021). Applications of quantum computing to optimization. Paper presented at the 1-5. https://ieeexplore.ieee.org/stamp/stamp.jsp?tp=&arnumber=9703081

Srinivasan, B. (2021). *Metaheuristics in optimization: Algorithmic perspective*. North Carolina State University, https://www.informs.org/Publications/OR-MS-Tomorrow/Metaheuristics-in-Optimization-Algorithmic-Perspective

Valle, C. A., Meade, N., y Beasley, J. E. (2014). Absolute return portfolios. *Omega (Oxford), 45, 20-41*. https://10.1016/j.omega.2013.12.003

Wan, Y., Zhong, Y., Ma, A., & Zhang, L. (2023). An accurate UAV 3-D path planning method for disaster emergency response based on an improved multiobjective swarm intelligence algorithm. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 53(4), 1-14. https://10.1109/TCYB.2022.3170580

Xu, F., Wang, M., Dai, YH. et al. A sparse enhanced indexation model with chance and cardinality constraints. *J Glob Optim* 70, 5–25 (2018). https://doi.org/10.1007/s10898-017-0513-1

Zanjirdar, M. (2020). *Overview of portfolio optimization models.*