
Aplicaciones en sistemas de energía eléctrica

Santiago Cerisola¹ y Andrés Ramos² y Álvaro Baíllo³

¹ Escuela Técnica Superior de Ingeniería - ICAI
Santiago.Cerisola@iit.icae.upco.es

² Escuela Técnica Superior de Ingeniería - ICAI Andres.Ramos@iit.icae.upco.es

³ Escuela Técnica Superior de Ingeniería - ICAI
Alvaro.Baillio@iit.icae.upco.es

1. Introducción

Los sistemas de energía eléctrica siempre han sido un campo habitual de aplicaciones de optimización en general (véanse los artículos [5, 8, 12, 20] o el libro [17]) y, en particular, de optimización estocástica [7]. Después de la desregulación que está ocurriendo en numerosos sistemas eléctricos surgen de nuevo oportunidades de modelado resueltas mediante optimización estocástica.

En este capítulo se van a presentar varios ejemplos característicos de planificación y operación de sistemas de energía eléctrica para cuya resolución se utilizan frecuentemente técnicas de descomposición. Existen numerosas referencias de aplicaciones específicas, pero la presentación que se realiza en este capítulo está orientada a mostrar los problemas de una forma didáctica eliminando o simplificando algunas de las complejidades que pueden encontrarse cuando se modelan sistemas eléctricos reales específicos. Las dos primeras aplicaciones, planificación de la expansión de la generación y programación semanal, son clásicas en la literatura de sistemas eléctricos. La tercera, generación de ofertas, corresponde a un modelo específico de programación semanal para mercados eléctricos.

Por otra parte, la introducción de la incertidumbre en el modelado de los problemas de optimización, incrementa el tamaño de los mismos así como la dificultad de su resolución. En este capítulo, se sugieren estrategias de descomposición de los problemas propuestos para abordar su resolución numérica.

2. Planificación de la expansión de la generación

Un modelo de planificación de la expansión de la generación o modelo de inversión tiene por objetivo determinar la composición óptima de las nuevas

inversiones de generación (denominada *política óptima*) para satisfacer la demanda de electricidad con el mínimo coste total de inversión en las nuevas instalaciones más el coste de operación de todo el sistema. Otras funciones objetivo alternativas o complementarias pueden ser: medidas de fiabilidad del sistema, emisiones contaminantes, requisitos financieros [15, 19], etc. que pueden ser combinadas bajo técnicas de decisión multicriterio. Las nuevas inversiones pueden estar originadas por varios factores: la retirada de equipos al alcanzar su vida útil, el crecimiento de la demanda de electricidad, la aparición de nuevas tecnologías competitivas que reemplazan a las actuales, la evolución de los costes de combustibles que influyen en los costes de operación de los equipos actuales, etc. La influencia de la demanda se produce no sólo por la energía total solicitada sino también por la potencia máxima asociada. El modelo de planificación que se presenta aquí se orienta a entornos regulatorios tradicionales, aunque ya están surgiendo modelos de expansión de la generación para entornos desregulados [13].

Un modelo de planificación de expansión de la generación minimiza los costes totales (fijos y variables) de expansión del equipo generador para un alcance de varios años t^4 , $t = 1, \dots, T$. Un alcance razonable puede ser de 5 a 15 años. Se trata de un modelo de planificación dinámica, donde se considera explícitamente la cronología de las decisiones de inversión a lo largo del tiempo. Las decisiones principales que se toman con ayuda de este modelo son la potencia a instalar de cada tipo de generación o generador en cada año del alcance del modelo.

La demanda de electricidad tiene un comportamiento estacionario cuyo valor varía a lo largo del tiempo. El modelado habitual en problemas de planificación utiliza la curva denominada duración-carga o monótona de carga. La monótona de demanda de un año t se representa dividida en periodos p , $p = 1, \dots, P$. Sea D_{tp}^s la demanda de potencia de cada periodo p para cada escenario s^5 , $s = 1, \dots, S$, siendo $Prob^s$ la probabilidad del escenario y sea Dur_{tp} la duración de dicho periodo. La demanda se supone constante en dicho periodo. Esto hace que el problema de optimización sea lineal.

Por simplicidad, sólo se considera generación térmica. El sistema de generación se caracteriza mediante un coste fijo, un coste variable y una tasa de disponibilidad, que indica la proporción del tiempo en que el grupo se encuentra disponible. Sea F_{ti} el coste fijo anualizado de inversión de cada generador candidato i , $i = 1, \dots, I$, a ser instalado, depende del año de instalación t ; V_{pi}^s el coste variable de producción del generador en cada periodo y escenario y A_i la tasa de disponibilidad de cada grupo. El coste anualizado de inversión se calcula como el coste total de inversión del equipo repartido a lo largo de su

⁴Se utiliza el índice t para la unidad temporal más relevante en este problema, típicamente el año.

⁵Los escenarios pueden contemplar entre otros parámetros (como se verá en la siguiente sección) las variaciones de la demanda o de los costes de combustibles a lo largo del tiempo.

vida económica teniendo en cuenta la tasa de descuento del dinero. Utilizando este coste anualizado se simplifica el tratamiento de los efectos finales del modelo. Las tecnologías o grupos a instalar dependen de los costes fijos y variables de cada uno de ellos, de los costes de los combustibles y de las estrategias de abastecimiento energético del país. Los costes variables incluyen los costes de combustible más los costes variables de operación y mantenimiento.

Las variables del problema serán la potencia a instalar de cada generador en cada año del alcance del modelo x_{ti} (son variables enteras) y la potencia de operación de cada generador en cada periodo y escenario p_{tpi}^s . Obsérvese que la potencia a instalar no depende del escenario, mientras que las potencias de operación dependen del escenario. La potencia acumulada instalada al comienzo del alcance del modelo se considera conocida y_{0i} .

Habitualmente se tienen en cuenta estas restricciones en las decisiones de expansión: potencia instalada inicial conocida, máxima (y/o mínima) potencia instalable, inversión máxima (y/o mínima), número máximo (y/o mínimo) de generadores instalables en cada año. Además, también se consideran entre otras estas restricciones de operación: el balance generación demanda en cada año.

2.1. Formulación determinista

Se considera un sistema generador puramente térmico. En la formulación del problema se consideran los siguientes conjuntos de índices, parámetros, variables y ecuaciones.

<i>Conjuntos</i>	
T	Conjunto de años
P	Conjunto de periodos
I	Conjunto de grupos térmicos
S	Conjunto de escenarios

<i>Índices</i>	
t	Índice de años
p	Índice de periodos
i	Índice de grupos térmicos
s	Índice de escenarios

<i>Parámetros</i>		
D_{tp}^s	Demanda de potencia en el periodo p del año t	[MW]
Dur_{tp}	Duración en el periodo p del año t	[h]
F_{ti}	Coste fijo anualizado del grupo i en el año t	[€/MWaño]
V_{pi}^s	Coste variable del grupo i en el periodo p para el escenario s	[€/MWh]
A_i	Tasa de disponibilidad del grupo i	[p.u.]
$Prob^s$	Probabilidad del escenario s	[p.u.]
R_t	Coefficiente de margen de reserva en el año t	[p.u.]
\bar{M}_t	Presupuesto máximo anual en el año t	[€]
\underline{X}_{ti}	Potencia mínima a invertir en el año t para el grupo i	[MW]
<i>Variables</i>		
x_{ti}	Potencia a instalar del grupo i en el año t (variable entera)	[MW]
y_{ti}	Potencia acumulada instalada del grupo i en el año t	[MW]
p_{tpi}^s	Potencia producida por el grupo i en el periodo p del año t para el escenario s	[MW]

Para facilitar la comprensión del modelo vamos a ver en primer lugar un escenario determinista cualquiera. Es decir, s' es un escenario conocido de demanda, por ejemplo el de demanda media o cualquier otro. En este caso, la función objetivo será minimizar la suma de costes fijos de inversión más costes variables de operación para dicho escenario para el alcance del modelo.

$$\min_{x_{ti}, y_{ti}, p_{tpi}^{s'}} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^I \left(F_{ti} y_{ti} + \sum_{p=1}^P V_{pi}^{s'} Dur_{tp} p_{tpi}^{s'} \right) \quad (1)$$

siendo y_{ti} la potencia acumulada instalada cuyo cálculo se formula como

$$y_{ti} = \sum_{t' \leq t} x_{t'i} \quad \forall t, i \quad (2)$$

o bien expresándolo con ecuaciones de continuidad para cada año y tecnología

$$y_{ti} = y_{t-1 i} + x_{ti} \quad \forall t, i \quad (3)$$

siendo la potencia instalada al comienzo del alcance del modelo y_{0i} conocida.

Las decisiones de instalación de los generadores son enteras. Luego el problema de optimización es lineal entero mixto.

Las restricciones que condicionan este problema las podemos separar en dos grupos. Uno, las *restricciones de inversión* que sólo afectan a las variables

de inversión. Dos, las *restricciones de operación*, que representan la operación del sistema.

Restricciones de inversión

Entre las primeras conviene mencionar, por ejemplo, una limitación en la potencia mínima a invertir en cada año del alcance del modelo \underline{X}_{ti} y un presupuesto máximo anual disponible \overline{M}_t .

$$x_{ti} \geq \underline{X}_{ti} \quad \forall t, i \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^I F_{ti} x_{ti} \leq \overline{M}_t \quad \forall t \quad (5)$$

Éstas ecuaciones deben incluir también, aunque no está puesta en ellas, la retirada de potencia de generadores al final de su vida útil.

También se puede incluir una restricción que indique que la potencia instalada total en cada año debe ser superior a la demanda máxima más un cierto margen de reserva

$$\sum_{i=1}^I (y_{0i} + y_{ti}) \geq R_t \max_p (d_{tp}^{s'}) \quad \forall t \quad (6)$$

siendo R_t un coeficiente de margen de reserva anual.

Restricciones de operación

Entre las restricciones de operación están la cobertura de la demanda y la que relaciona la potencia instalada en cada año con la potencia de operación utilizable para satisfacer la demanda.

La restricción de cobertura de la demanda se formula para cada periodo p de cada año t

$$\sum_{i=1}^I p_{tpi}^{s'} = D_{tp}^{s'} \quad \forall t, p \quad (7)$$

Se supone que se dispone de potencia de operación suficiente para cubrir la demanda en cualquier periodo y año. Para ello se asume que siempre existe un generador con potencia suficiente y coste de operación muy elevado (denominado potencia no suministrada) al que se puede recurrir. De esta manera el modelo es de *recurso completo*, es decir, cualquier decisión de inversión es factible desde el punto de vista de la operación del sistema.

La potencia de operación en cualquier periodo de un año debe ser inferior a la potencia instalada acumulada en ese año reducida por su disponibilidad A_i

$$p_{tpi}^{s'} \leq A_i (y_{0i} + y_{ti}) \quad \forall t, p, i \quad (8)$$

Esta ecuación liga las decisiones de inversión con las de operación.

Además de estas restricciones principales están el conjunto detallado de condiciones de funcionamiento de los grupos entre límites, entre otras.

2.2. Formulación estocástica

Entre los parámetros que pueden considerarse estocásticos en un modelo de expansión de la generación podemos citar: los costes fijos y variables de las tecnologías, la demanda, la fecha de disponibilidad de las nuevas tecnologías, incluso la vida útil de los equipos y por consiguiente su fecha de retirada, ver [10, 11, 14]. Los dos más importantes suelen ser la demanda y los costes variables de los generadores. La evolución de la demanda está influenciada por diferentes factores como son: la actividad industrial, el crecimiento económico, las políticas de ahorro energético o las tarifas. Los costes variables están influidos principalmente por la evolución de los costes de los combustibles. Existe otro tipo de incertidumbre que resulta más difícilmente representable en modelos de optimización estocástica como es la incertidumbre regulatoria pero que puede afectar las decisiones de inversión en sistemas desregulados.

En la formulación de este problema estocástico se suponen los escenarios independientes entre sí. Las decisiones de inversión deben ser únicas para el conjunto de escenarios, luego es un problema de *planificación bietapa* siendo las decisiones de inversión las de la primera etapa y las de operación las de la segunda.

La función objetivo recoge los costes de inversión más los costes esperados de operación del conjunto de todos los escenarios

$$\min_{x_{ti}, y_{ti}, p_{tpi}^s} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^I \left(F_{ti} y_{ti} + \sum_{s=1}^S \sum_{p=1}^P Prob^s V_{pi}^s Dur_{tp} p_{tpi}^s \right) \quad (9)$$

Las ecuaciones que afectan únicamente a las decisiones de inversión permanecen idénticas.

$$x_{ti} \geq \underline{X}_{ti} \quad \forall t, i \quad (10)$$

$$\sum_{i=1}^I F_{ti} x_{ti} \leq \overline{M}_t \quad \forall t \quad (11)$$

$$y_{ti} = y_{t-1i} + x_{ti} \quad \forall t, i \quad (12)$$

$$\sum_{i=1}^I (y_{0i} + y_{ti}) \geq R_t \max_p (D_{tp}^{s'}) \quad \forall t \quad (13)$$

mientras que las ecuaciones de operación ahora se repiten para cada escenario

$$\sum_{i=1}^I p_{tpi}^s = D_{tp}^s \quad \forall s, t, p \quad (14)$$

$$p_{tpi}^s \leq A_i (y_{0i} + y_{ti}) \quad \forall s, t, p, i \quad (15)$$

Este problema de expansión de la generación es de *recurso fijo* puesto que los coeficientes de las variables de inversión y de operación en las restricciones no dependen del escenario.

Descomposición de Benders

Aparte de la formulación directa del problema de optimización anterior cuando las dimensiones lo requieren se puede utilizar el método de *descomposición de Benders* [3, 4, 16]. El lector interesado puede encontrar la descripción del método de descomposición de Benders en el capítulo de este libro titulado *Modelado de algoritmos de descomposición con GAMS*. En este método el problema maestro o problema de inversión envía propuestas de inversión al subproblema o problema de operación y éste devuelve las variables duales de las restricciones donde éstas aparecen. El problema maestro es un problema lineal entero mixto mientras que el subproblema es lineal. El subproblema resulta separable por escenarios y años⁶ y resoluble independientemente.

El problema maestro se formula como

$$\begin{aligned} \min_{x_{ti}, y_{ti}, p_{tpi}^s} \quad & \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^I F_{ti} y_{ti} + \sum_{s=1}^S \sum_{t=1}^T \text{Prob}^s \theta^{st}(x) \\ x_{ti} \geq \underline{X}_{ti} \quad & \forall t, i \\ \sum_{i=1}^I F_{ti} x_{ti} \leq \overline{M}_t \quad & \forall t \\ y_{ti} = y_{t-1 i} + x_{ti} \quad & \forall t, i \\ \sum_{i=1}^I (y_{0i} + y_{ti}) \geq R_t \max_p (D_{tp}^{s'}) \quad & \forall t \end{aligned} \quad (16)$$

y el subproblema para cada escenario s y año t

$$\begin{aligned} \theta^{st}(x) = \min_{p_{tpi}^s} \quad & \sum_{p=1}^P \sum_{i=1}^I V_{pi}^s \text{Dur}_{tp} p_{tpi}^s \\ \sum_{i=1}^I p_{tpi}^s &= D_{tp}^s \quad \forall p \\ p_{tpi}^s &\leq A_i (y_{0i} + y_{ti}^j) \quad \forall p, i \end{aligned} \quad (17)$$

siendo $\theta^{st}(x)$ la función de recurso del subproblema para el escenario s y y_{ti}^j la propuesta de decisión de inversión acumulada para la iteración j .

⁶Según la formulación matemática presentada el problema también resulta separable por periodo. Sin embargo, en formulaciones más realistas existen restricciones de acoplamiento entre periodos que aquí, por ser poco detallada no se han presentado.

2.3. Caso ejemplo

Veamos a continuación un caso de estudio muy sencillo escrito en GAMS con las ecuaciones presentadas en las formulaciones determinista y estocástica anteriores. Sus resultados se utilizan de forma pedagógica para mostrar la validez de la solución estocástica frente a las deterministas. El alcance del modelo es de 1 año dividido en 3 periodos. El sistema de generación está compuesto de 4 generadores y se consideran 3 escenarios de demanda con probabilidades 0.2, 0.5 y 0.3.

```

$title Planificación óptima de la expansión de la generación

SETS
  J periodos / per-1 * per-3 /
  I generadores / gen-1 * gen-4 /
  S escenarios de demanda / s-1 * s-3 /

PARAMETERS
  F(i) coste fijo de inversión [euro]
  / gen-1 10
    gen-2 7
    gen-3 16
    gen-4 6 /

  PROB(s) probabilidad de cada escenario [p.u.]
  / s-1 0.2
    s-2 0.5
    s-3 0.3 /

  DEM(j) demanda para un escenario [MW]

TABLE V(i,j) coste variable de operación [euro por MW]

      per-1 per-2 per-3
gen-1  40   24   4
gen-2  45   27  4.5
gen-3  32  19.2  3.2
gen-4  55   33  5.5

TABLE DEMS(s,j) demanda estocástica [MW]

      per-1 per-2 per-3
s-1    3    3    2
s-2    5    3    2
s-3    7    3    2

SCALARS
  POTMIN potencia mínima a instalar [MW] / 12 /
  PRSPTO límite presupuestario [euro] / 120 /

VARIABLES
  X(i) potencia a instalar [MW]
  Y(j,i) potencia en operación [MW]
  YS(s,j,i) potencia en operación estocástica [MW]
  COSTE coste total

POSITIVE VARIABLES X, Y, YS

EQUATIONS
  COST coste total [euro]
  COSTS coste total estocástico [euro]
  PRESUP limitación presupuestaria [euro]

```

```

INSMIN potencia mínima instalada [MW]
BALPOT potencia en operación menor que instalada [MW]
BALPOTS potencia en operación menor que instalada estocástica [MW]
BALDEM balance de demanda [MW]
BALDEMS balance de demanda estocástico [MW] ;

COST .. COSTE =E= SUM(i, F(i) * X(i))
          + SUM((j,i), V(i,j) * Y(j,i)) ;
COSTS .. COSTE =E= SUM(i, F(i) * X(i))
          + SUM((s,j,i), PROB(s) * V(i,j) * YS(s,j,i)) ;

PRESUP .. SUM(i, F(i) * X(i)) =L= PRSPTO ;

INSMIN .. SUM(i, X(i)) =G= POTMIN ;

BALPOT(j,i) .. Y(j,i) =L= X(i) ;
BALPOTS(s,j,i) .. YS(s,j,i) =L= X(i) ;

BALDEM(j) .. SUM(i, Y(j,i)) =G= DEM(j) ;
BALDEMS(s,j) .. SUM(i, YS(s,j,i)) =G= DEMS(s,j) ;

MODEL DETERM / COST, INSMIN, PRESUP, BALPOT, BALDEM / ;
MODEL ESTOCA / COSTS, INSMIN, PRESUP, BALPOTS, BALDEMS / ;

* este bucle resuelve cada escenario determinista por separado

LOOP (s,
  DEM(j) = DEMS(s,j) ;
  SOLVE DETERM MINIMIZING COSTE USING LP ;
) ;

* ahora se resuelve el escenario de demanda media

DEM(j) = SUM(s, PROB(s) * DEMS(s,j)) ;
SOLVE DETERM MINIMIZING COSTE USING LP ;

* ahora se resuelve el problema estocástico

SOLVE ESTOCA MINIMIZING COSTE USING LP ;

```

El problema se resuelve en primer lugar de forma determinista para cada escenario de demanda por separado. Los resultados aparecen en las tres primeras columnas de la siguiente tabla. A continuación se resuelve el problema para el valor medio ponderado de la demanda (siguiente columna) y finalmente el problema estocástico (en la última columna). Obsérvese que en este ejemplo sencillo no hay coincidencia entre la solución de ningún escenario y la del problema estocástico.

	Escenario Determinista 1	Escenario Determinista 2	Escenario Determinista 3	Escenario Medio	Problema Estocástico
Generador 1	.	0.33	3.67	0.67	0.67
Generador 2	2
Generador 3	3	4.67	3.33	4.53	4.33
Generador 4	9	7	5	6.8	5
Coste total	262	346.67	437.33	355.73	362.47

La función objetivo del problema estocástico es el coste fijo de las decisiones de la primera etapa más el valor esperado de la operación asociada a las decisiones de la segunda etapa (362.47 en el ejemplo). A continuación se calculan algunos parámetros característicos que ayudan a valorar la utilidad del problema estocástico frente a soluciones de escenarios deterministas. El *valor de la solución estocástica* (value of stochastic solution VSS) es la diferencia entre la función objetivo del problema estocástico y la del problema determinista para el valor medio de los parámetros (362.47-355.73=6.73). Se denomina *valor esperado con información perfecta* (expected value with perfect information EVWPI) a la suma ponderada para cada escenario de la función objetivo total sabiendo que dicho escenario va a ocurrir con certeza (356.93 para el ejemplo). Es decir, el valor esperado si se revela la incertidumbre antes de tomar las decisiones de la primera etapa. Este valor siempre será menor o igual, en un problema de minimización, que la función objetivo del problema estocástico. Para cada escenario, la solución del problema estocástico es siempre peor o igual que la solución con información perfecta (la función es 280, 349.33 y 439.33 respectivamente). Se denomina *valor esperado de la información perfecta* (expected value of perfect information EVPI) o *arrepentimiento* a la diferencia entre ambas (280-262=18, 349.33-346.67=2.66, 439.33-437.33=2).

2.4. Caso español

Vamos a estimar a continuación las dimensiones del problema estocástico presentado previamente para un sistema eléctrico de tamaño como el español. Supongamos un alcance del estudio de 10 años, $T = 10$. Cada año la monótona de carga considera periodos de punta, llano y valle en laborable y festivo para cada mes, siendo un total de 72 periodos en cada año, $P = 72$. Suponemos 10 escenarios de demanda, $S = 10$, y un sistema de generación con 80 grupos térmicos, $I = 80$.

Las restricciones de la primera etapa (potencia mínima a invertir en cada año y cada generador, presupuesto máximo anual disponible, margen de potencia instalada con respecto a la demanda, más las restricciones de cálculo de la potencia instalada acumulada) suman un total de $TI + T + TI + T = 2(TI + T) = 1620$. Las restricciones que acoplan decisiones de la primera y segunda etapa son $STPI = 576000$. Las restricciones de operación de la segunda etapa son $STP = 7200$.

Las decisiones de inversión de la primera etapa son $2TI = 1600$ variables enteras mientras que las de la segunda etapa son $STPI = 576000$ variables continuas.

Este tamaño está muy al límite o excede las capacidades actuales de los optimizadores lineales enteros mixtos, luego se necesitaría recurrir a métodos de descomposición para la resolución del problema de planificación de la expansión del sistema eléctrico peninsular español.

3. Programación semanal

El problema de la programación semanal (*unit commitment*) consiste en determinar el conjunto de grupos de generación que se deben conectar y sus niveles de operación para minimizar el coste total de operación sujeto a la satisfacción de la demanda y de una cierta reserva de generación. Para la resolución de este problema, tradicionalmente se han utilizado técnicas de optimización ordinal así como técnicas basadas en programación dinámica. Recientemente, debido a la evolución de los optimizadores para problemas lineales enteros mixtos, este problema es formulado y resuelto como un problema lineal entero mixto de gran tamaño. Sin embargo, esta mejora posibilita la exigencia de modelos de programación semanal más complejos que incluyan incertidumbre en los parámetros modelados. Por otra parte, los nuevos entornos regulatorios modifican el planteamiento de los problemas de programación semanal como problemas de minimización de costes. Ahora se plantea como un problema de determinación de la oferta óptima formulando un problema de maximización del beneficio obtenido.

Estas nuevas características de los problemas de programación semanal complican el modelado tradicional de los mismos así como su resolución algorítmica. En esta sección se presenta el modelado tradicional de un problema de programación semanal y el planteamiento de la Relajación Lagrangiana como método de resolución. Posteriormente se describe un problema estocástico en el que la estocasticidad en la demanda se introduce mediante un árbol de escenarios. La siguiente sección de este capítulo está dedicada a los problemas de programación semanal en mercados eléctricos.

3.1. Formulación determinista

Se considera un sistema generador puramente térmico. En la formulación del problema se consideran los siguientes conjuntos de índices, parámetros, variables y ecuaciones.

<i>Conjuntos</i>	
T	Conjunto de periodos
I	Conjunto de grupos térmicos

<i>Índices</i>	
t	Índice de periodos
h	Índice auxiliar de periodos
i	Índice de grupos térmicos

<i>Parámetros</i>		
D_t	Demanda del periodo t	[MW]
R_t	Coficiente de margen de reserva térmica del periodo t	[p.u.]
Dur_t	Duración del periodo t	[h]
P_i^{max}	Potencia máxima del grupo i	[MW]
P_i^{min}	Potencia mínima del grupo i	[MW]
L_i^{up}	Límite rampa subida del grupo i	[MW/h]
L_i^{down}	Límite rampa bajada del grupo i	[MW/h]
F_i	Coste fijo del grupo i	[€/h]
V_i	Coste variable de combustible del grupo i	[€/MWh]
C_i^{up}	Coste de arranque del grupo i	[€]
C_i^{down}	Coste de parada del grupo i	[€]
τ_i	Tiempo mínimo de parada del grupo i	[h]
κ_i	Tiempo mínimo de acoplamiento del grupo i	[h]

<i>Variables</i>		
p_{ti}	Potencia producida por el grupo i en el periodo t	[MW]
u_{ti}	Acoplamiento del grupo i en el periodo t	{0,1}
s_{ti}^{up}	Arranque del grupo i en el periodo t	[0,1]
s_{ti}^{down}	Parada del grupo i en el periodo t	[0,1]

El problema de programación semanal debe satisfacer la demanda de potencia en cada uno de los periodos⁷ del alcance temporal

$$\sum_{i=1}^I p_{ti} = D_t \quad \forall t \quad (18)$$

imponiendo un margen de reserva que es modelado como

$$\sum_{i=1}^I (P_i^{max} u_{ti} - p_{ti}) \geq R_t D_t \quad \forall t \quad (19)$$

Para cada grupo térmico, los valores de potencia producida están acotados entre su mínimo técnico y su máxima capacidad disponible

$$P_{ti}^{min} u_{ti} \leq p_{ti} \leq P_{ti}^{max} u_{ti} \quad \forall t, i \quad (20)$$

Los cambios en la potencia producida por los grupos térmicos vienen limitados por las ecuaciones de rampa⁸

⁷Obsérvese que se utiliza el índice t para la unidad temporal más relevante en este problema, típicamente una hora.

⁸La ecuación siguiente aparece simplificada y supone que las duraciones de los periodos son iguales. La ecuación de rampa se debería aplicar únicamente a la potencia producida por encima del mínimo técnico, aunque en la ecuación 21 por simplicidad se aplica a la potencia producida total.

$$L_i^{down} Dur_t \leq p_{ti} - p_{t-1 i} \leq L_i^{up} Dur_t \quad \forall t, i \quad (21)$$

Las decisiones de arranque y parada de los grupos son gestionadas mediante el siguiente grupo de ecuaciones

$$u_{ti} - u_{t-1 i} = s_{ti}^{up} - s_{ti}^{down} \quad \forall t, i \quad (22)$$

Algunos modelos de programación semanal más avanzados incluyen requerimientos de tiempo mínimo para unidades que han sido acopladas o desacopladas. En caso de que hayan sido acopladas, se exige un tiempo mínimo de acoplamiento y por el contrario, en caso de que hayan sido desacopladas, debe transcurrir un cierto número de horas hasta que puedan ser acopladas de nuevo. Estas restricciones de tiempo mínimo de parada son modeladas mediante el siguiente conjunto de ecuaciones

$$u_{t+h_t i} \leq 1 + u_{ti} - u_{t-1 i} \quad \forall t, h_t, i \quad (23)$$

donde el conjunto de periodos desplazados, controlados por el índice h_t , puede ser restringido para valores de $h_t \geq 1$ tales que

$$\tau_i \leq \sum_{l=0}^{h_t-1} Dur_{t+l} \quad (24)$$

De modo similar, las restricciones de mínimo tiempo de funcionamiento son modeladas como

$$u_{t+h_t i} \geq u_{ti} - u_{t-1 i} \quad \forall t, h_t, i \quad (25)$$

limitando, en este caso, el conjunto de periodos desplazados a aquellos $h_t \geq 1$ tales que

$$\kappa_i \leq \sum_{l=0}^{h_t-1} Dur_{t+l} \quad (26)$$

Dado el anterior conjunto de restricciones, el problema de programación semanal minimiza el coste total de explotación que viene dado como

$$\sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^I \{Dur_t F_i u_{ti} + Dur_t V_i p_{ti} + C_i^{up} s_{ti}^{up} + C_i^{down} s_{ti}^{down}\} \quad (27)$$

El problema de programación semanal, formulado anteriormente, puede ser resuelto mediante técnicas de programación entera mixta como las técnicas de ramificación y acotamiento (*branch and bound*) o técnicas de ramificación y corte (*branch and cut*). En la literatura, también es común encontrar el problema de la programación semanal resuelto mediante la técnica de la Relajación Lagrangiana. Esta técnica es revisada en la siguiente sección, particularizada para el problema de programación semanal anteriormente descrito.

Relajación Lagrangiana

La Relajación Lagrangiana explota la estructura matricial de un problema de optimización en el que un conjunto de ecuaciones complican la resolución del mismo. Para el problema de la programación semanal, este conjunto de restricciones son las ecuaciones de balance de potencia para cada uno de los periodos del alcance temporal (tradicionalmente una semana).

La Relajación Lagrangiana maximiza la función dual obtenida al minimizar la función objetivo dada por el *lagrangiano* sobre el conjunto de restricciones que definen el problema de optimización.

Considérese el problema de programación semanal descrito en la sección anterior. Por simplicidad en la exposición supongamos también que no se incluyen las restricciones asociadas a la reserva de potencia ni las restricciones de mínimo tiempo de acoplamiento o parada. En este caso, el lagrangiano es formulado como

$$L(p_{ti}, u_{ti}, s_{ti}^{up}, s_{ti}^{down}, \lambda_t) = \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^I \{Dur_t F_i u_{ti} + Dur_t V_i p_{ti} + C_i^{up} s_{ti}^{up} + C_i^{down} s_{ti}^{down}\} + \sum_{t=1}^T \lambda_t (\sum_{i=1}^I p_{ti} - D_t) \quad (28)$$

siendo $\lambda = \lambda_t$, $t = 1, \dots, T$ el conjunto de multiplicadores de Lagrange. Esta expresión, una vez reordenados los términos, se plantea como

$$L(p_{ti}, u_{ti}, s_{ti}^{up}, s_{ti}^{down}, \lambda_t) = \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^I \{Dur_t F_i u_{ti} + (Dur_t V_i + \lambda_t) p_{ti} + C_i^{up} s_{ti}^{up} + C_i^{down} s_{ti}^{down}\} - \sum_{t=1}^T \lambda_t D_t \quad (29)$$

La función dual $\omega(\lambda)$ se obtiene al evaluar el lagrangiano para un valor específico λ del multiplicador sobre el conjunto de restricciones que definen el problema salvo la ecuación de complicación.

$$\omega(\lambda) = \min_{p_{ti}, u_{ti}, s_{ti}^{up}, s_{ti}^{down}} L(p_{ti}, u_{ti}, s_{ti}^{up}, s_{ti}^{down}, \lambda_t) \quad (30)$$

$$\begin{aligned} P_{ti}^{min} u_{ti} &\leq p_{ti} \leq P_{ti}^{max} u_{ti} && \forall t, i \\ L_i^{down} Dur_t &\leq p_{ti} - p_{t-1 i} \leq L_i^{up} Dur_t && \forall t, i \\ u_{ti} - u_{t-1 i} &= s_{ti}^{up} - s_{ti}^{down} && \forall t, i \end{aligned}$$

El anterior problema de optimización, llamado *subproblema de Lagrange*, es separable en I problemas de optimización, uno por cada grupo térmico considerado, dados como

$$\min_{p_{ti}, u_{ti}, s_{ti}^{up}, s_{ti}^{down}} \sum_{t=1}^T \{Dur_t F_i u_{ti} + (Dur_t V_i + \lambda_t) p_{ti} + C_i^{up} s_{ti}^{up} + C_i^{down} s_{ti}^{down}\} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} P_{ti}^{min} u_{ti} &\leq p_{ti} \leq P_{ti}^{max} u_{ti} && \forall t \\ L_i^{down} Dur_t &\leq p_{ti} - p_{t-1 i} \leq L_i^{up} Dur_t && \forall t \\ u_{ti} - u_{t-1 i} &= s_{ti}^{up} - s_{ti}^{down} && \forall t \end{aligned}$$

Existen numerosas técnicas en la literatura orientadas a obtener el máximo de la función dual. Se destacan las técnicas basadas en el subgradiente así como aquellas de aproximación exterior. No es el objetivo de este capítulo presentar una revisión extensa de estos métodos. El lector interesado puede encontrar la descripción del método de aproximación exterior de la función dual en el capítulo de este libro titulado *Modelado de algoritmos de descomposición con GAMS*.

El modelado presentado del problema de programación semanal no incorpora estocasticidad en ninguno de los parámetros del problema. En la siguiente sección se presenta un modelado estocástico del problema de la programación semanal en el cual la estocasticidad ha sido introducida en el parámetro de la demanda a través de una distribución de probabilidad discreta dada como un árbol de escenarios.

3.2. Formulación estocástica

Consideremos el problema de programación semanal en el que la variable de demanda es introducida como un parámetro aleatorio. Se considera que la distribución de dicho parámetro tiene soporte finito (*distribución discreta*) y viene dada a través de un árbol de escenarios. En la figura 1 se muestra un ejemplo de un árbol de cuatro escenarios para un caso realista en el que se considera una ramificación del árbol de escenarios en la hora 25 y otra en la hora 49.

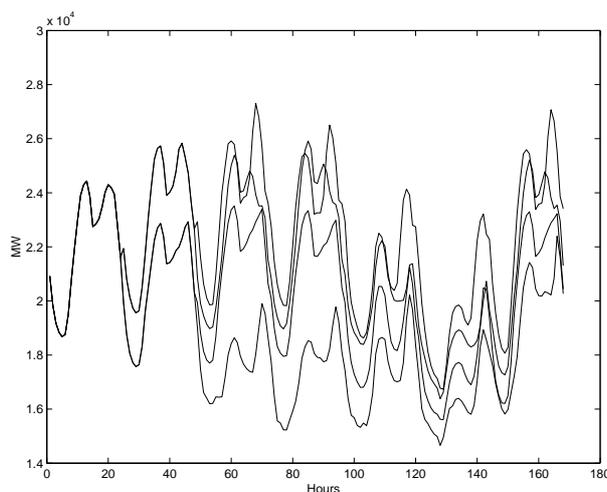


Figura 1. Árbol de 4 escenarios

Cuando se introducen parámetros aleatorios en un problema de optimización, normalmente se formula y resuelve el *problema determinista equiv-*

alente. Este problema introduce copias de las variables para cada uno de los posibles escenarios que la realización del parámetro estocástico produce. Esto aumenta drásticamente el tamaño del problema complicando, por tanto, su resolución. Esta representación del problema equivalente puede formularse de modo *compacto* o mediante la introducción de *restricciones de no anticipatividad*. En el primero de los casos, sólo se generan variables para las ramas diferentes del árbol del escenarios. Para el ejemplo de la figura, se genera una copia para cada una de las variables de las primeras 24 horas, dos copias para cada una de las variables de las segundas 24 horas y cuatro copias para el resto de las variables. Por el contrario, una formulación no compacta genera una copia para cada uno de los escenarios⁹ posibles. Las restricciones de no anticipatividad se introducen para igualar los valores de aquellas variables que comparten parte común del árbol.

Para mostrar el modelado de un problema de optimización introduciendo restricciones de no anticipatividad se utiliza el problema de programación semanal anteriormente presentado. El conjunto de índices y parámetros es prácticamente el mismo que en el caso determinista y el conjunto de variables incorpora el superíndice escenario.

Conjuntos

T	Conjunto de periodos
I	Conjunto de grupos térmicos
S	Conjunto de escenarios

Índices

t	Índice de periodos
h	Índice auxiliar de periodos
i	Índice de grupos térmicos
s	Índice de escenarios

⁹En optimización estocástica un escenario se define como cualquiera de los caminos que van desde el periodo inicial al final (de la raíz a las hojas).

Parámetros

D_t^s	Demanda del periodo t en escenario s	[MW]
R_t^s	Reserva térmica del periodo t en escenario s	[MW]
Dur_t	Duración del periodo t	[h]
P_i^{max}	Potencia máxima del grupo i	[MW]
P_i^{min}	Potencia mínima del grupo i	[MW]
L_i^{up}	Límite rampa subida del grupo i	[MW/h]
L_i^{down}	Límite rampa bajada del grupo i	[MW/h]
F_i	Coste fijo del grupo i	[€/h]
V_i	Coste variable de combustible del grupo i	[€/MWh]
C_i^{up}	Coste de arranque del grupo i	[€]
C_i^{down}	Coste de parada del grupo i	[€]
τ_i	Tiempo mínimo de parada del grupo i	[h]
κ_i	Tiempo mínimo de acoplamiento del grupo i	[h]
$Prob^s$	Probabilidad del escenario s	[p.u.]

Variables para cada escenario s

p_{ti}^s	Potencia producida por el grupo i en el periodo t	[MW]
u_{ti}^s	Acoplamiento del grupo i en el periodo t	{0,1}
$s_{ti}^{up s}$	Arranque del grupo i en el periodo t	[0,1]
$s_{ti}^{down s}$	Parada del grupo i en el periodo t	[0,1]

El conjunto de restricciones del problema estocástico de programación semanal coincide con el del planteamiento determinista. Debe tenerse en cuenta que cada ecuación es duplicada tantas veces como número de escenarios tiene el problema. Juntamente con estas restricciones, las de no anticipatividad son modeladas como

$$\begin{aligned}
 p_{ti}^s &= p_{ti}^{s'} & si \quad s, s' \in N(t) \\
 u_{ti}^s &= u_{ti}^{s'} & si \quad s, s' \in N(t) \\
 s_{ti}^{up s} &= s_{ti}^{up s'} & si \quad s, s' \in N(t) \\
 s_{ti}^{down s} &= s_{ti}^{down s'} & si \quad s, s' \in N(t)
 \end{aligned} \tag{32}$$

donde $N(t)$ representa los diferentes conjuntos de escenarios que comparten la misma parte del árbol para el periodo t . En las ecuaciones anteriores es conveniente considerar s como el escenario de índice menor que pertenece a $N(t)$ y $s < s'$ de modo que el número de restricciones generadas sea el menor posible.

La función objetivo minimiza el coste esperado de explotación y es formulada como

$$\sum_{s=1}^S Prob^s \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^I \{Dur_t F_i u_{ti} + Dur_t V_i p_{ti} + C_i^{up} s_{ti}^{up} + C_i^{down} s_{ti}^{down}\} \tag{33}$$

Para la resolución del problema con restricciones de no anticipatividad una alternativa muy popular en la literatura consiste en la relajación de estas restricciones, obteniendo para cada escenario un problema de programación semanal (modificando ligeramente su función objetivo). Esta idea, conocida como descomposición por escenarios (*scenario decomposition*), es presentada brevemente en la próxima sección.

Descomposición por escenarios del problema estocástico

Considérese el problema anteriormente planteado y sean λ_{ti}^s , μ_{ti}^s , $\gamma_{ti}^{up s}$, $\gamma_{ti}^{down s}$ las variables duales de las restricciones de no anticipatividad presentadas en la sección anterior. La formulación del lagrangiano para este problema tiene la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^S Prob^s \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^I \{ & Dur_t F_i u_{ti}^s + Dur_t V_i p_{ti}^s + C_i^{up} s_{ti}^{up s} + C_i^{down} s_{ti}^{down s} \} \\ & + \lambda_{ti}^s (p_{ti}^s - p_{ti}^{s'}) \\ & + \mu_{ti}^s (u_{ti}^s - u_{ti}^{s'}) \\ & + \gamma_{ti}^{up s} (s_{ti}^{up s} - s_{ti}^{up s'}) \\ & + \gamma_{ti}^{down s} (s_{ti}^{down s} - s_{ti}^{down s'}) \end{aligned} \quad (34)$$

La reordenación de los términos de la función objetivo anterior obtiene una expresión del lagrangiano similar a la función objetivo del problema estocástico de programación semanal. La diferencia aparece en la modificación de los coeficientes que acompañan a las variables de decisión. Esta modificación queda reflejada en la siguiente expresión, donde la notación ha sido simplificada para facilitar su comprensión¹⁰

$$\sum_{s=1}^S Prob^s \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^I \{ (Dur_t F_i + \bar{\mu}_{ti}^s) u_{ti}^s + (Dur_t V_i + \bar{\lambda}_{ti}^s) p_{ti}^s + (C_i^{up} + \bar{\gamma}_{ti}^{up s}) s_{ti}^{up s} + (C_i^{down} + \bar{\gamma}_{ti}^{down s}) s_{ti}^{down s} \} \quad (35)$$

El problema de minimización del lagrangiano sobre el conjunto de restricciones del problema estocástico semanal, es claramente separable en S problemas independientes, una vez que se han relajado las restricciones de no anticipatividad. Cada uno de estos problemas puede ser formulado como

$$\begin{aligned} \min_{p_{ti}^s, u_{ti}^s, s_{ti}^{up s}, s_{ti}^{down s}} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^I \{ & (Dur_t F_i + \bar{\mu}_{ti}^s) u_{ti}^s + (Dur_t V_i + \bar{\lambda}_{ti}^s) p_{ti}^s + \\ & (C_i^{up} + \bar{\gamma}_{ti}^{up s}) s_{ti}^{up s} + (C_i^{down} + \bar{\gamma}_{ti}^{down s}) s_{ti}^{down s} \} \\ & \sum_{i=1}^I p_{ti}^s = D_t^s \quad \forall t \\ & P_{ti}^{min} u_{ti}^s \leq p_{ti}^s \leq P_{ti}^{max} u_{ti}^s \quad \forall t \\ & L_i^{down} Dur_t \leq p_{ti}^s - p_{t-1}^s \leq L_i^{up} Dur_t \quad \forall t \\ & u_{ti} - u_{t-1} = s_{ti}^{up s} - s_{ti}^{down s} \quad \forall t \end{aligned} \quad (36)$$

¹⁰Los coeficientes $\bar{\mu}$, $\bar{\lambda}$, $\bar{\gamma}$, $\bar{\gamma}$ reflejan las manipulaciones realizadas para simplificar la expresión de la función objetivo del subproblema lagrangiano.

con lo que se obtiene un problema similar al problema de programación semanal. Para cada valor del multiplicador propuesto, la resolución del anterior problema proporciona el valor de la función dual. Tal como se ha comentado anteriormente, esta función dual es maximizada utilizando técnicas de optimización basadas en el subgradiente o técnicas de aproximación exterior. Para la posterior búsqueda de una solución factible (i.e., una que satisfaga las condiciones de no anticipatividad relajadas), es necesario el uso de heurísticos basados en el conocimiento del problema. Recientemente, se han utilizado técnicas basadas en ramificación y acotamiento para tal fin [18].

4. Programación semanal en mercados eléctricos

La diferencia principal en un mercado eléctrico de cara a la planificación semanal reside en que las empresas de generación son responsables de su propia producción total. La demanda de potencia, que en los modelos tradicionales aparece como un parámetro, debe ser introducida como una variable de decisión que un problema de maximización del beneficio debe optimizar. El beneficio obtenido $B(p)$ viene dado por el nivel de ingresos, que depende del precio de mercado π , y por el coste de generación de la producción total determinada $c(p)$.

$$B(p) = \pi p - c(p) \quad (37)$$

En un entorno de mercado, el precio viene determinado como función de la demanda. Para una empresa estratégica (no tomadora de precio), la parte de demanda que es capaz de cubrir viene dada por la curva de demanda residual¹¹, $p = R(\pi)$, de modo que la función objetivo aparece como una función no lineal de la cantidad de potencia producida.

$$B(p) = R^{-1}(p)p - c(p) \quad (38)$$

La función de demanda residual es una función escalonada que puede ser aproximada como una función poligonal. Por otra parte, la función de ingresos es en general una función no cóncava [9] que puede ser modelada como una función poligonal (figura 2). Para ello se utiliza un conjunto de variables binarias que representa la cantidad producida como suma de las cantidades asociadas a los tramos individuales. El precio, dado por la función de demanda residual así como la función de ingresos siguen el mismo patrón. Este modelado de la producción, precio y curva de ingresos, utilizando dicho conjunto de variables binarias es presentado en la siguiente sección.

¹¹La función de demanda residual se define como el resultado de substraer de la función de demanda agregada la producción del resto de las empresas.

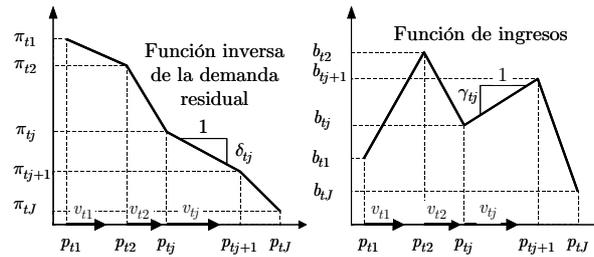


Figura 2. Representación poligonal de la curva de demanda residual y de la curva de ingresos

En caso de que supongamos conocida la curva de demanda residual, el problema de determinación de la cantidad de producción óptima es un problema determinista similar al problema de programación semanal. Por el contrario, en caso de que esta curva de demanda residual no sea conocida, su estimación a través de una distribución de probabilidad discreta conduce a la formulación de un problema de optimización que lleva a la determinación, en cada periodo, de una curva de producción dependiente del precio. Esta curva es exactamente la curva óptima de oferta en el mercado. Estas dos situaciones, la situación determinista y la situación estocástica, son descritas en las siguientes secciones.

4.1. Situación determinista: determinación de la producción óptima

Supongamos un conjunto de periodos dado por el conjunto T y una curva conocida de demanda residual para cada periodo, $t \in T$. El siguiente conjunto de índices, parámetros y variables extienden la formulación determinista del problema de la programación semanal para el caso de maximización del beneficio.

<i>Conjuntos</i>	
J	Conjunto de tramos para representar la curva de demanda residual

<i>Índices</i>	
j	Índice de tramos

<i>Parámetros</i>		
$\bar{\delta}_{tj}$	Pendiente del tramo j de la curva de demanda residual en el periodo t	[€/MW]
δ_{tj}	Pendiente del tramo j de la curva de beneficio en el periodo t	[€/MW]
π_{tj}	Precio asociado al tramo j de la curva de demanda residual en el periodo t	[€/MWh]
\bar{p}_{tj}	Cantidad asociada al tramo j de la curva de demanda residual en el periodo t	[MW]
\bar{b}_{tj}	Beneficio asociado al tramo j de la curva de beneficio en el periodo t	[€]
<i>Variables</i>		
v_{tj}	Variable binaria asociada al tramo j en el periodo t	{0,1}
p_{tj}	Producción total asociada al tramo j en el periodo t	[MW]
π_t	Precio en el periodo t	[€]
b_t	Beneficio en el periodo t	[€]

El problema de maximización del beneficio para un conjunto T de periodos considera una función objetivo que viene dada como

$$\text{máx} \sum_{t=1}^T b_t - c(p_t) \quad (39)$$

considerando que el beneficio está modelado como

$$b_t = \bar{b}_{t0} + \sum_{j=1}^{J-1} \gamma_{tj} p_{tj} \quad (40)$$

y que la producción viene dada como

$$p_t = p_{t0} + \sum_{j=1}^{J-1} p_{tj} \quad (41)$$

Las producciones totales asociadas a cada uno de los tramos j está acotada de modo natural por

$$(\bar{p}_{tj} - \bar{p}_{tj-1})v_{t+1} \leq p_{tj} \leq (\bar{p}_{tj} - \bar{p}_{tj-1})v_{tj} \quad (42)$$

imponiendo una condición de monotonía al conjunto de variables representativas de los tramos que puede ser modelada como

$$v_{tj} \geq v_{tj+1} \quad j = 1, \dots, J-1 \quad (43)$$

En esta formulación, la ecuación de balance de potencia en cada periodo impone que la suma de las producciones de los grupos sea la producción total.

La introducción de la variable de producción total reemplaza el parámetro D_t del modelo tradicional de programación semanal (o programación multiperiodo en un caso general).

$$\sum_{i=1}^I p_{ti} = p_t \quad \forall t \quad (44)$$

El resto de restricciones del problema de maximización, como las restricciones de potencia máxima y mínima, ecuaciones de rampa y ecuaciones de gestión de arranques y paradas son aquéllas del problema de programación semanal (presentadas en la sección 3 de este capítulo) son introducidas en el problema de maximización del beneficio.

4.2. Situación estocástica: determinación de la curva de oferta

En caso de que la curva de demanda residual sea desconocida, o exista una cierta incertidumbre en torno a su realización, el modelado determinista de la sección anterior no es suficientemente válido. La empresa generadora debe tener en cuenta este abanico de posibilidades y su decisión de generación se transforma en una curva de producción dependiente del precio resultante en el mercado. En cada periodo, la decisión de producción de una empresa no se limita a un valor fijo de cantidad producida. Por cada realización de la curva de demanda residual (que ahora se considera como una variable aleatoria), existe una variable de decisión (producción en dicho periodo) que determina un precio óptimo para dicha decisión de producción. Este conjunto de parejas de cantidades y precios constituye la curva de oferta, (figura 3).

Al introducir estocasticidad en la representación de la curva de demanda residual, se deben tener en cuenta dos características de modelado. Por una parte, la función objetivo pasa a ser considerada como la maximización del beneficio esperado. El modo de interpretar la incertidumbre así como la manera de modelar la función objetivo se comentará más adelante. Por otra parte, la curva de oferta debe ser una función monótona creciente, y se debe introducir específicamente en el modelo de maximización tal cualidad.

En los problemas de generación en mercado eléctricos, es posible identificar *días tipo* en función de la forma de las funciones de demanda residual de las 24 horas del día [2]. Esto es, al identificar que la curva de demanda residual para una hora particular t se comporta según un determinado patrón, la colección de demandas residuales para el resto de las horas se comporta de modo similar al patrón de día en que se encuentra incluida esa hora t . Esto lleva a considerar una representación de la incertidumbre identificando escenarios compuestos por *días tipo*.

En las figuras 4 y 5 está representada la interpretación del modelado de la incertidumbre. Un escenario o situación determinista consiste en un conjunto de funciones de demanda residual desde el primero de los periodos hasta el último. Por el contrario, en una situación estocástica son considerados una

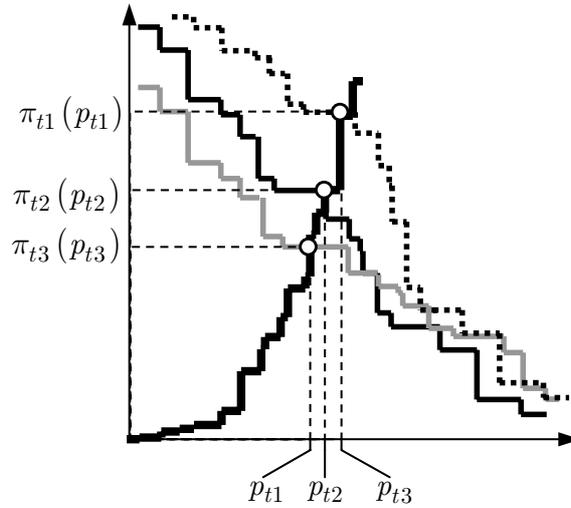


Figura 3. Demanda residual estocástica y curva de oferta para una hora particular

colección de escenarios que no comparten parte común en ningún momento. Debe observarse el diferente tratamiento de la incertidumbre en este problema con respecto al tratamiento de la incertidumbre dada en modo de árbol de escenarios, más adecuada para otros modelos. Esta diferencia es trasladada al modelado utilizando el subíndice k para representar cada una de las realizaciones de la incertidumbre asociada a la demanda residual (en lugar de utilizar el subíndice s).

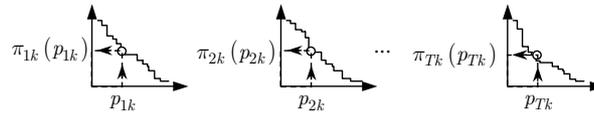


Figura 4. 1 escenario de curvas de demanda residual

Dada esta representación, consideremos el siguiente conjunto de índices, parámetros y variables que es posteriormente utilizado para la representación estocástica del problema de maximización.

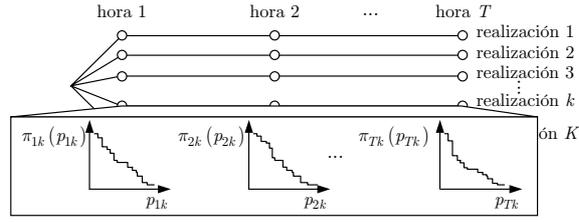


Figura 5. K escenarios de curvas de demanda residual

Conjuntos

T	Conjunto de periodos
I	Conjunto de grupos térmicos
J	Conjunto de tramos para representar la curva de demanda residual
K	Conjunto de escenarios

Índices

t	Índice de periodos
i	Índice de grupos térmicos
j	Índice de tramos
k	Índice de escenarios

Parámetros deterministas

Dur_t	Duración del periodo t	[h]
P_i^{max}	Potencia máxima del grupo i	[MW]
P_i^{min}	Potencia mínima del grupo i	[MW]
L_i^{up}	Límite rampa subida del grupo i	[MW/h]
L_i^{down}	Límite rampa bajada del grupo i	[MW/h]
F_i	Coste fijo del grupo i	[€/h]
V_i	Coste variable de combustible del grupo i	[€/MWh]
C_i^{up}	Coste de arranque del grupo i	[€]
C_i^{down}	Coste de parada del grupo i	[€]

<i>Parámetros estocásticos</i>		
$\bar{\delta}_{tj}^k$	Pendiente del tramo j de la curva de demanda residual en el periodo t y escenario k	[€/MW]
δ_{tj}^k	Pendiente del tramo j de la curva de beneficio en el periodo t y escenario k	[€/MW]
π_{tj}^k	Precio asociado al tramo j de la curva de demanda residual en el periodo t y escenario k	[€]
\bar{p}_{tj}^k	Cantidad asociada al tramo j de la curva de demanda residual en el periodo t y escenario k	[MW]
\bar{b}_{tj}^k	Beneficio asociado al tramo j de la curva de beneficio en el periodo t y escenario k	[€]
$Prob^k$	Probabilidad del escenario k	
<i>Variables</i>		
v_{tj}^k	Variable binaria asociada al tramo j en el periodo t y escenario k	{0,1}
p_t^k	Producción total en el periodo t y escenario k	[MW]
p_{tj}^k	Producción total asociada al tramo j en el periodo t y escenario k	[MW]
p_{ti}^k	Potencia producida por el grupo i en el periodo t y escenario k	[MW]
π_t^k	Precio en el periodo t y escenario k	[€]
b_t^k	Beneficio en el periodo t y escenario k	[€]
u_{ti}^k	Acoplamiento del grupo i en el periodo t y escenario k	{0,1}
$s_{ti}^{up\ k}$	Arranque del grupo i en el periodo t y escenario k	[0,1]
$s_{ti}^{down\ k}$	Parada del grupo i en el periodo t y escenario k	[0,1]
$x_t^{kk'}$	Variable binaria asociada a la monotonía de la oferta en el periodo t y escenarios k y k'	{0,1}

La ecuación de balance de potencia es pues modelada como

$$\sum_{i=1}^I p_{ti}^k = p_t^k \quad \forall t, k \quad (45)$$

siendo modelada la cantidad total p_t^k producida en un periodo t para una realización k de la incertidumbre como

$$p_t^k = \bar{p}_{t0}^k + \sum_{j=1}^{J-1} p_{tj}^k \quad (46)$$

La curva de ingresos es modelada a tramos de igual modo que en la situación determinista

$$b_t^k = \bar{b}_{t0}^k + \sum_{j=1}^{J-1} \gamma_{tj}^k p_{tj}^k \quad (47)$$

extendiendo las cotas de las variables de la producción por tramo t a la situación estocástica

$$(\bar{p}_{tj}^k - \bar{p}_{tj-1}^k)v_{t+1}^k \leq p_{tj}^k \leq (\bar{p}_{tj}^k - \bar{p}_{tj-1}^k)v_{tj}^k \quad (48)$$

e imponiendo la condición de monotonía del conjunto de variables binarias representativas de los tramos, que ahora en la situación estocástica depende del escenario k

$$v_{tj}^k \geq v_{tj+1}^k \quad j = 1, \dots, J-1 \quad (49)$$

Dada la representación de la incertidumbre considerada, las restricciones de potencia máxima y mínima, las restricciones de rampa y las restricciones de gestión de arranques y paradas son introducidas de modo independiente para cada escenario k .

$$P_{ti}^{min} u_{ti}^k \leq p_{ti}^k \leq P_{ti}^{max} u_{ti}^k \quad \forall t, k \quad (50)$$

$$L_i^{down} Dur_t \leq p_{ti}^k - p_{t-1}^k \leq L_i^{up} Dur_t \quad \forall t, k \quad (51)$$

$$u_{ti}^k - u_{t-1}^k = s_{ti}^{up} - s_{ti}^{down} \quad \forall t, k \quad (52)$$

El conjunto de restricciones anterior forman el bloque principal de ecuaciones del modelo de determinación de la producción óptima bajo incertidumbre (curva de oferta). La curva de oferta debe ser monótona creciente y por ello el siguiente conjunto de ecuaciones es introducido en el modelo con tal propósito.

El precio obtenido al considerar la producción óptima p_t^k de un periodo t y una realización k de la incertidumbre dada por la demanda residual, es modelada mediante tramos utilizando la siguiente representación.

$$\pi_t^k = \bar{\pi}_{t0}^k + \sum_{j=1}^{J-1} \delta_{tj}^k p_{tj}^k \quad (53)$$

Con esta formulación, debe imponerse la condición de que el conjunto de parejas (p_t^k, π_t^k) , $k \in K$, formen una curva monótona creciente. Esta condición, que puede ser modelada mediante una restricción no lineal, admite la siguiente formulación lineal entera mixta, mediante la introducción de un conjunto auxiliar de variables binarias [1]

$$p_t^k - p_t^{k'} \geq -x_t^{kk'} M^p \quad \forall t, k, k' \quad k' > k \quad (54)$$

$$\pi_t^k - \pi_t^{k'} \geq -x_t^{kk'} M^\pi \quad \forall t, k, k' \quad k' > k \quad (55)$$

$$p_t^k - p_t^{k'} \geq -(1 - x_t^{kk'}) M^p \quad \forall t, k, k' \quad k' > k \quad (56)$$

$$\pi_t^k - \pi_t^{k'} \geq -(1 - x_t^{kk'})M^\pi \quad \forall t, k, k' \quad k' > k \quad (57)$$

Una vez determinado el conjunto de restricciones que dan forma a la curva de oferta y determinan el sistema generador, resta introducir la función objetivo que el problema estocástico de maximización del beneficio considera. Para el problema presentado, se considera la función objetivo que maximiza el beneficio esperado, modelada como

$$\text{máx} \sum_{t=1}^T \sum_{k=1}^K \text{Prob}^k [b_t^k - c(p_t^k)] \quad (58)$$

Este conjunto de restricciones modela la toma de decisión de un problema de programación multiperiodo cuando se considera incertidumbre en la curva de demanda residual. El conjunto final de decisión es una curva de oferta para cada uno de los periodos considerados en el alcance temporal. Este problema ha sido modelado como un problema de programación entera mixta de gran tamaño, pudiendo ser resuelto por optimizadores comerciales para tamaños intermedios del mismo. Por simplicidad en la exposición ha sido considerado un parque generador compuesto únicamente por grupos térmicos, si bien la formulación anterior es extensible a sistemas generadores más complejos que incluyan grupos hidráulicos así como contratos de medio y largo plazo y opciones de compra [2].

Esta sección finaliza con una breve indicación sobre la posibilidad de descomponer el problema anteriormente propuesto. Entre las posibilidades de descomposición del problema anterior figuran la Relajación Lagrangiana (mediante la relajación de la ecuación de balance de potencia) o descomposición bietapa en un problema maestro que genera la oferta y un subproblema que determina la factibilidad de la oferta propuesta dado un sistema generador existente.

Descomposición bietapa del problema estocástico

El modelado anterior presenta dos bloques bien diferenciados de restricciones. Aquéllas dirigidas a la construcción de la curva de oferta y las representativas del sistema generador. Entre el primer conjunto de restricciones figuran aquéllas de representación a tramos de la variable de producción total por periodo, de la variable de ingresos y de la variable precio. También figuran aquellas restricciones de monotonía de las variables binarias de representación de los tramos y monotonía de la curva de oferta. Un segundo grupo de ecuaciones son aquéllas que, dada una producción p_t^k por periodo t y escenario k , determinan el conjunto de grupos y niveles de operación para satisfacer ese requerimiento de potencia. Esta diferenciación entre los dos tipos de restricciones da lugar a la descomposición del problema en un problema maestro que determina y propone una curva de oferta para cada periodo t y un subproblema que evalúa la factibilidad del conjunto de soluciones propuestas.

De este modo, se considera un problema maestro dado como

$$\begin{aligned}
& \text{máx} \sum_{t=1}^T \sum_{k=1}^K \text{Prob}^k(b_t^k) + \theta(p_t^k) \\
& p_t^k = \bar{p}_{t0}^k + \sum_{j=1}^{J-1} p_{tj}^k \\
& b_t^k = \bar{b}_{t0}^k + \sum_{j=1}^{J-1} \gamma_{tj}^k p_{tj}^k \\
& \pi_t^k = \bar{\pi}_{t0}^k + \sum_{j=1}^{J-1} \delta_{tj}^k p_{tj}^k \\
& (\bar{p}_{tj}^k - \bar{p}_{tj-1}^k) v_{t+1}^k \leq p_{tj}^k \leq (\bar{p}_{tj}^k - \bar{p}_{tj-1}^k) v_{tj}^k \\
& v_{tj}^k \geq v_{tj+1}^k \quad j = 1, \dots, J-1 \\
& p_t^k - p_t^{k'} \geq -x_t^{kk'} M^p \quad \forall t, k, k' \quad k' > k \\
& \pi_t^k - \pi_t^{k'} \geq -x_t^{kk'} M^\pi \quad \forall t, k, k' \quad k' > k \\
& p_t^k - p_t^{k'} \geq -(1 - x_t^{kk'}) M^p \quad \forall t, k, k' \quad k' > k \\
& \pi_t^k - \pi_t^{k'} \geq -(1 - x_t^{kk'}) M^\pi \quad \forall t, k, k' \quad k' > k
\end{aligned} \tag{59}$$

y un subproblema que evalúa el coste de esa decisión

$$\begin{aligned}
\theta(p_t^k) &= \text{máx} - \sum_{k=1}^K \text{Prob}^k c(\sum_{i=1}^I p_{ti}^k) \\
& \sum_{i=1}^I p_{ti}^k = p_t^k \quad \forall t, k \\
& P_{ti}^{min} u_{ti}^k \leq p_{ti}^k \leq P_{ti}^{max} u_{ti}^k \quad \forall t, k \\
& L_i^{down} Dur_t \leq p_{ti}^k - p_{t-1}^k \leq L_i^{up} Dur_t \quad \forall t, k \\
& u_{ti}^k - u_{t-1}^k = s_{ti}^{up} - s_{ti}^{down} \quad \forall t, k
\end{aligned} \tag{60}$$

La función de coste, $c(p)$, sintetiza de modo general la suma de los costes asociados a cada grupo: coste variable de combustible, coste de acoplamiento y coste de arranque. Es inmediato observar que el problema anterior es separable en K subproblemas independientes, uno por cada escenario de demanda residual considerado para representar la incertidumbre, dados como

$$\begin{aligned}
\theta(p_t^k) &= \text{máx} - \text{Prob}^k c(\sum_{i=1}^I p_{ti}^k) \\
& \sum_{i=1}^I p_{ti}^k = p_t^k \quad \forall t \\
& P_{ti}^{min} u_{ti}^k \leq p_{ti}^k \leq P_{ti}^{max} u_{ti}^k \quad \forall t \\
& L_i^{down} Dur_t \leq p_{ti}^k - p_{t-1}^k \leq L_i^{up} Dur_t \quad \forall t \\
& u_{ti}^k - u_{t-1}^k = s_{ti}^{up} - s_{ti}^{down} \quad \forall t
\end{aligned} \tag{61}$$

debido a que todas las restricciones que ligan los escenarios han sido incorporadas en el problema maestro.

Esta descomposición en dos etapas es característica de los algoritmos de descomposición de Benders. La diferencia esencial radica en que en este caso en el carácter entero de alguna de las variables que aparecen en el subproblema (o en los subproblemas). Bajo ciertas hipótesis de modelado es posible relajar esta condición de integralidad impuesta sobre las variables de acoplamiento de los grupos térmicos. Otra posibilidad consiste en la generalización de los algoritmos de descomposición de dos etapas (para problemas lineales) a algoritmos enteros mixtos. Se están realizando avances en este campo, como puede observarse en [6].

Referencias

1. A. Baíllo *et al.* "Strategic Unit Commitment for Generation in Deregulated Electricity Markets". *The Next Generation of Electric Power Unit Commitment Models*. International Series in Operations Research and Management Science, B. F. Hobbs, M. H. Rothkopf, R. P. O'Neill and H.-P. Chao, Eds., 1st ed., Kluwer Academic Publishers, Boston, 2001, pp. 227-248.
2. A. Baíllo, "A methodology to develop optimal schedules and offering strategies for a generation company operating in a short-term electricity market," Ph.D. Thesis, Department of Industrial Organization, Universidad Pontificia Comillas, Madrid, 2002.
3. J. A. Bloom "Solving an electricity generation capacity expansion planning problem by generalized Benders' decomposition". *Operations Research*, 31:84-100, 1983.
4. A. B. Borison, P. A. Morris, and S. S. Oren. "A state-of-the-world decomposition approach to dynamics and uncertainty in electric utility generation expansion planning". *Operations Research*, 32:1052-1068, 1984.
5. Carpentier, J., Merlin, A. "Optimization methods in planning and operation". *International Journal of Electrical Power and Energy Systems*, vol.4, no.1, Jan. 1982. p. 11-18.
6. S. Cerisola, "Benders decomposition for mixed integer problems: application to a medium term hydrothermal coordination model," Ph.D. Thesis, Instituto de Investigación Tecnológica, Universidad Pontificia Comillas, Madrid, 2002.
7. G. Dantzig and G. Infanger. "Approaches to stochastic programming with application to electric power systems". In K. Frauendorfer, H. Glavitsch, and R. Bacher, editors, *Optimization in Planning and Operation of Electric Power Systems*, pages 125-138. Physica-Verlag, Heidelberg, 1993.
8. Delson, J.K.; Shahidehpour, S.M. "Linear programming applications to power system economics, planning and operations". *IEEE Transactions on Power Systems*, vol.7, no.3, Aug. 1992. p. 1155-63.
9. J. García-González, J. Barquín and J. Román. "Building supply functions under uncertainty for a day-ahead electricity market". *6th International Conference on Probabilistic Methods Applied to Power Systems, Funchal, Madeira (Portugal)*, September 25-28, 2000.
10. D. T. Gardner and J. S. Rogers. "Planning electric power systems under demand uncertainty with different technology lead times". *Management Science*, 45:1289-1306, 1999.
11. Gorenstin, B.G., Campodonico, N.M., Costa, J.P., Pereira, M.V.F. "Power system expansion planning under uncertainty". *IEEE Transactions on Power Systems*, vol.8, no.1, Feb. 1993. p. 129-36.
12. Irving, M.R., Yong-Hua Song "Optimisation techniques for electrical power systems. 1. Mathematical optimisation methods" *Power Engineering Journal*, vol.14, no.5, Oct. 2000. p. 245-54.
13. Kagiannas, A. G., Askounis, D. Th., Psarras, J. "Power generation planning: a survey from monopoly to competition". *International Journal of Electrical Power and Energy Systems*, Jul 2004, Vol. 26 Issue 6, p413, 9p
14. F.V. Louveaux and Y. Smeers. "Optimal investments for electricity generation: A stochastic model and a test-problem". In *Numerical techniques for stochastic optimization*, Springer Ser. Comput. Math. 10, 445-453, 1988.

15. Majumdar, S.; Chattopadhyay, D.; "A model for integrated analysis of generation capacity expansion and financial planning" *IEEE Transactions on Power Systems* vol.14, no.2, May 1999. p. 466 - 471.
16. Marin, A. Salmeron, J. "Electric capacity expansion under uncertain demand: decomposition approaches" *IEEE Transactions on Power Systems* vol.13, no.2, May 1998. p. 333 - 339.
17. J. A. Momoh *Electric Power System Applications of Optimization* Marcel Dekker Inc. New York. 2001.
18. M. P. Nowak, "Stochastic Lagrangian Relaxation in Power Scheduling of a Hydro-Thermal System under Uncertainty," Ph.D. Thesis, Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II, Humboldt-Universität zu Berlin, Berlin, 1999.
19. H.D. Sherali, A.L. Soyster, F.H. Murphy, and S. Sen. "Allocation of capital costs in electric utility capacity expansion planning under uncertainty". *Management Science* 30:1-19, 1984.
20. Yong-Hua Song, Irving, M.R. "Optimisation techniques for electrical power systems. II. Heuristic optimisation methods". *Power Engineering Journal*, vol.15, no.3, June 2001. p. 151-60.