COMILLAS
UNIVERSIDAD PONTIFICIA

Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales
ICADE

Aportaciones del enfoque general de la valoración de opciones financieras basado en probabilidades neutrales al riesgo o medidas de martingala a la valoración financiera.

Autor: Jonas Beck
Directora: Susana Carabias Lopez

MADRID | Mayo 2024

RESUMEN

Este Trabajo Fin de Grado examina las contribuciones de la valoración neutral al riesgo o medidas de martingala a la valoración de opciones y otros activos. Las probabilidades neutrales al riesgo desempeñan un papel crucial en la simplificación de la interpretación y aplicación de diversos modelos financieros. Proporcionan un marco teórico unificado que facilita las demostraciones, permitiendo una comprensión coherente tanto de los modelos de tiempo discreto, como el modelo binomial, como de los modelos de tiempo continuo, como el modelo Black-Scholes. En los modelos de tiempo discreto, la verificación de la existencia de probabilidades neutrales al riesgo no es una tarea complicada. Sin embargo, en los modelos de tiempo continuo, el problema es técnicamente más difícil. Además, la valoración neutral al riesgo ayuda en la valoración de una amplia gama de activos financieros. Resulta especialmente útil en mercados completos, pero también tiene una importante aportación a la valoración en mercados incompletos.

Palabras clave: valoración neutral al riesgo, probabilidades neutrales al riesgo, medidas de martingala, derivados, opciones financieras, valoración de opciones, modelo Black-Scholes, modelo binomial

ABSTRACT

This Final Thesis examines the contributions of risk-neutral valuation or martingale measures to the valuation of options and other assets. Risk-neutral probabilities play a crucial role in simplifying the interpretation and application of various financial models. They provide a unified theoretical framework that facilitates demonstrations, allowing a consistent understanding of both discrete-time models, such as the binomial model, and continuous-time models, such as the Black-Scholes model. In discrete-time models, verification of the existence of risk-neutral probabilities is not a complicated task. However, in continuous-time models, the problem is technically more difficult. In addition, risk-neutral valuation helps in the valuation of a wide range of financial assets. It is particularly useful in complete markets, but also has an important contribution to make to valuation in incomplete markets.

Keywords: risk-neutral valuation, risk-neutral probabilities, martingale measures, derivatives, financial options, option pricing, Black-Scholes model, binomial model

Índice

ÍNDICE DE ABREVIACIONES

AOA	Ausencia de Oportunidades de Arbitraje
BS	Black-Scholes
CBOE	Chicago Board Options Exchange
CDO	Collateralized Debt Obligations
CDS	Credit Default Swaps
FDE	Factor de Descuento Estocástico
MME	Medida Martingala Equivalente
NYSE	New York Stock Exchange
OTC	Over-the-counter
PNR	Probabilidades Neutrales al Riesgo
UM	Unidades Monetarias
VNR	Valoración Neutral al Riesgo

ÍNDICE DE GRÁFICAS

ÍNDICE DE TABLAS

1 INTRODUCCIÓN

1.1 Objetivo

Según la leyenda, Tales de Mileto fue el primero en utilizar el concepto de opciones para beneficiarse de su predicción de una gran cosecha de aceitunas. Tales negoció con los propietarios de prensas de aceitunas y se aseguró el derecho a alquilarlas a un precio fijo, luego las subarrendó a un precio más alto, obteniendo así un beneficio. Tales había ejecutado la primera opción Call conocida. Aunque no disponía de ningún modelo matemático para la valoración de esta opción, se basó en su intuición.

Durante mucho tiempo, los mercados de opciones existían, pero sus precios no tenían respaldo teórico hasta que Black y Scholes presentaron su famoso modelo de valoración de opciones en 1973. Sin embargo, su modelo y otros posteriores, como el de Cox, Ross y Rubinstein de 1979, aparecían como modelos diferentes. Aquí es donde entra en juego el concepto de probabilidades neutrales al riesgo (PNR), o medidas de martingala, que demostraron que, en realidad, son casos particulares de un modelo universal conocido como la valoración neutral al riesgo.

El principal objetivo de este trabajo es examinar y analizar las aportaciones del enfoque general de la valoración de opciones financieras basado en PNR o medidas de martingala. Pretendemos ofrecer una comprensión profunda de este enfoque matemático y su aplicación en la valoración financiera, explicando su importancia y fundamento teórico de manera accesible.

1.2 Justificación del tema

La valoración de opciones financieras es crucial en el ámbito financiero debido a su impacto en la toma de decisiones de inversión y gestión de riesgos. El enfoque de valoración neutral al riesgo (VNR) ha surgido como un marco teórico eficaz para abordar esta problemática. La noción de valoración de opciones financieras ha sido objeto de fascinación e investigación tanto para académicos como para profesionales. Las opciones, con su flexibilidad y utilidad estratégica, son instrumentos esenciales para gestionar el riesgo y optimizar las carteras de inversión.

En el núcleo del enfoque de la valoración de opciones financieras se encuentra el concepto de PNR. Este concepto plantea un mundo hipotético en el que los inversores son indiferentes al riesgo, lo que simplifica el proceso de valoración de activos financieros. Al construir una medida de probabilidad en la que el rendimiento esperado de un activo es igual al tipo de interés sin riesgo, la valoración de las opciones se vuelve manejable, facilitando la derivación de fórmulas analíticas como el modelo binomial o el modelo Black-Scholes.

Quizá la mayor aportación de la VNR es que todos los modelos anteriores estaban diseñados a un tipo específico de activo, ya fuera una acción, un bono o una opción financiera. La VNR, en cambio, nos ofrece un modelo general que puede aplicarse a todos los activos financieros, lo que con razón se puede considerar como un nuevo paradigma para la valoración financiera.

Al estudiar la bibliografía existente, resulta difícil comprender e interpretar adecuadamente el enfoque de la VNR, sobre todo en lo que respecta a su aportación al mundo real. Algunos autores incluso presentan interpretaciones incorrectas o confusas, ya que existe poca bibliografía con explicaciones claras que no requieran gran formación previa del lector.

1.3 Estructura y metodología

La estructura de este trabajo ha sido minuciosamente diseñada para posibilitar un análisis sistemático y detallado del complejo tema abordado. Se trata de un trabajo que se adentra en el ámbito teórico y literario, ofreciendo así una sólida base para la comprensión profunda de los principales conceptos inherentes al modelo que se estudia. En su enfoque metodológico, se privilegia el método deductivo, el cual es característico y ampliamente utilizado en la modelización matemática aplicada a los mercados financieros.

En cuanto a las fuentes utilizadas, se da preferencia a la literatura académica, incluidos libros especializados y artículos académicos sobre matemáticas financieras. Esta selección de fuentes no sólo respalda los argumentos teóricos presentados, sino que también enriquece el trabajo al ofrecer una visión concisa pero completa del campo investigado. De este modo, se garantiza la solidez y pertinencia de los fundamentos teóricos en los que se basa la investigación.

El trabajo inicia con la valoración de las opciones financieras. Comienza con una presentación de los conceptos básicos y los tipos de opciones, seguida de un examen de los métodos utilizados para valorarlas. Cabe destacar el capítulo sobre los resultados universalizables de la valoración de opciones, que demuestra específicamente que determinadas relaciones son siempre válidas en todos los modelos. El capítulo concluye con un análisis del modelo de VNR, que sirve de marco teórico universal para la valoración de opciones. Tras explicar los teoremas básicos de valoración de activos que han surgido del enfoque de VNR, se explica el concepto de martingala y por qué es la base fundamental de la VNR. El capítulo concluye con la formalización matemática desde el modelo clásico de Arrow-Debreu y, por último, su aplicación a la valoración de opciones financieras.

Al presentar estos principios básicos, el trabajo sienta las bases para un estudio más profundo de los modelos de valoración en tiempo discreto, centrándose en el modelo binomial. Se explica el modelo general y su adaptación a la VNR.

En el capítulo siguiente, se presenta el enfoque del modelo Black-Scholes para tiempo continuo. En primer lugar, se explican los supuestos básicos y la dinámica de los precios de los activos en este modelo, que resulta menos intuitivo para quien no esté familiarizado con la modelización de procesos estocásticos. A continuación, se formulan la ecuación de Black-Scholes y las fórmulas generales de la valoración las opciones financieras. El capítulo concluye con la aplicación de la VNR en tiempo continuo, demostrando primero el enfoque generalizado y luego la aplicación concreta al modelo Black-Scholes.

El último capítulo está dedicado a las aportaciones a la VNR, destacando algunas aplicaciones muy importantes como la no-existencia de PNR en mercados con oportunidades de arbitraje o la relación entre una PNR única y la completitud del mercado. Además, muestra aplicación de la VNR a otros activos financieros, como las opciones reales. Por último, se explica su aplicación a mercados incompletos y se muestran las limitaciones de este enfoque.

2 LA VALORACIÓN DE OPCIONES FINANCIERAS

2.1 Concepto de la opción

Una opción financiera es un instrumento derivado que otorga al comprador el derecho, pero no la obligación, de comprar o vender una determinada cantidad de un activo fijo dentro de un determinado plazo a un precio de ejercicio. Los contratos de opciones se negocian de forma individual Over-the-Counter (OTC) o normalizada a través de mercados organizados. Los más grandes, como la Chicago Board Options Exchange (CBOE), que es el mercado más grande para opciones del mundo (Hull, 2012) o la New York Stock Exchange (NYSE), ofrecen la ventaja de liquidez, bajos costes de transacción y seguridad en la negociación de opciones gracias a la normalización de los activos subyacentes, los tamaños de los contratos y las fechas de vencimiento (Petters & Dong, 2016). La utilización de una opción se denomina ejercicio de la opción *(ingl. exercise)*. El precio garantizado por la opción se denomina precio de ejercicio *(ingl. strike price)*. El activo especificado se denomina activo subyacente (*ingl. underlying)* de la opción. La fecha especificada se denomina fecha de vencimiento *(ingl. maturity)* de la opción.

2.1.1 Principios básicos y tipos de opciones

A diferencia de los contratos de futuros y forwards, las opciones conllevan derechos, pero no obligaciones, es decir, el titular tiene la opción de cumplir el contrato o dejarlo expirar sin más obligaciones. Esta distinción garantiza que las opciones siempre tengan un valor positivo antes de su vencimiento (Joshi, 2010). La prima de un contrato de opciones es el importe que el comprador debe pagar y el vendedor o emisor *(ingl. writer)* recibe si ambas partes formalizan el contrato. Las opciones brindan a los inversores la oportunidad de especular con la evolución de los precios, cubrirse frente a los riesgos, obtener rendimientos o aplicar estrategias comerciales complejas.

Una opción de compra se denomina opción Call, mientras que una opción de venta se denomina opción Put. El momento en que puede ejercerse la opción depende de diversas normas. La forma más sencilla es la opción europea, que sólo puede ejercerse en una fecha futura determinada. En cambio, una opción americana puede ejercerse cualquier día antes del vencimiento. Es importante señalar que una opción americana siempre vale al menos lo mismo que una opción europea y, por lo general, más, ya que conlleva al menos los mismos o la mayoría de los veces incluso más derechos que una opción europea (Joshi, 2010).

Este trabajo se centrará en las opciones europeas en todo momento, ya que los modelos más importantes se diseñaron originalmente para las opciones europeas, ahorra mucha complejidad y permite centrarse en la valoración neutral al riesgo (VNR). Por este motivo, todos los gráficos, comentarios y conclusiones que se exponen a continuación sólo son aplicables a las opciones europeas. No obstante, la mayoría de los modelos considerados en el siguiente trabajo pueden utilizarse también para las opciones americanas, aunque a menudo son necesarias ciertas modificaciones o ampliaciones. Además muchas de las características de una opción americana suelen derivarse de su homóloga europea (Hull, 2012).

La notación estándar de las variables o símbolos matemáticos de una posición de opción se definen en la literatura de la siguiente manera:

- t variable del tiempo
- T momento de vencimiento de la opción
- S_t precio al contado *(ingl. spot price)* del subyacente en el momento t
- K precio de ejercicio
- C_t valor de una opción Call en el momento t
- P_t valor de una opción Put en el momento t

Si se denota $C(S,t)$ el valor de una opción Call europea y $P(S,t)$ de una opción Put europea en el momento $t; t \in [0,T]$, los pagos que se generan en el momento $t = 0$ es un flujo de caja (coste) de $-C_0$ para el comprador de $C(S,t)$ (una posición larga en la opción) y un ingreso de C_0 para el vendedor de esta Call (una posición corta en la opción). Lo mismo es cierto para la Put $P(S,t)$ con flujos de $-P_0$ y P_0 respectivamente (Petters & Dong, 2016).

Al vencimiento T, el valor de la opción Call europea $C(S,t)$ es:

$$C(S,T) = max\{S(T) - K, 0\} = \begin{cases} 0 & \text{si } S(T) \leq K \\ S(T) - K & \text{si } S(T) > K \end{cases} \qquad [2.1]$$

De forma similar, el valor de la opción Put europea $P(S,t)$ al vencimiento T es:

$$P(S,T) = max\{K - S(T), 0\} = \begin{cases} K - S(T) & \text{si } S(T) < K \\ 0 & \text{si } S(T) \geq K \end{cases} \qquad [2.2]$$

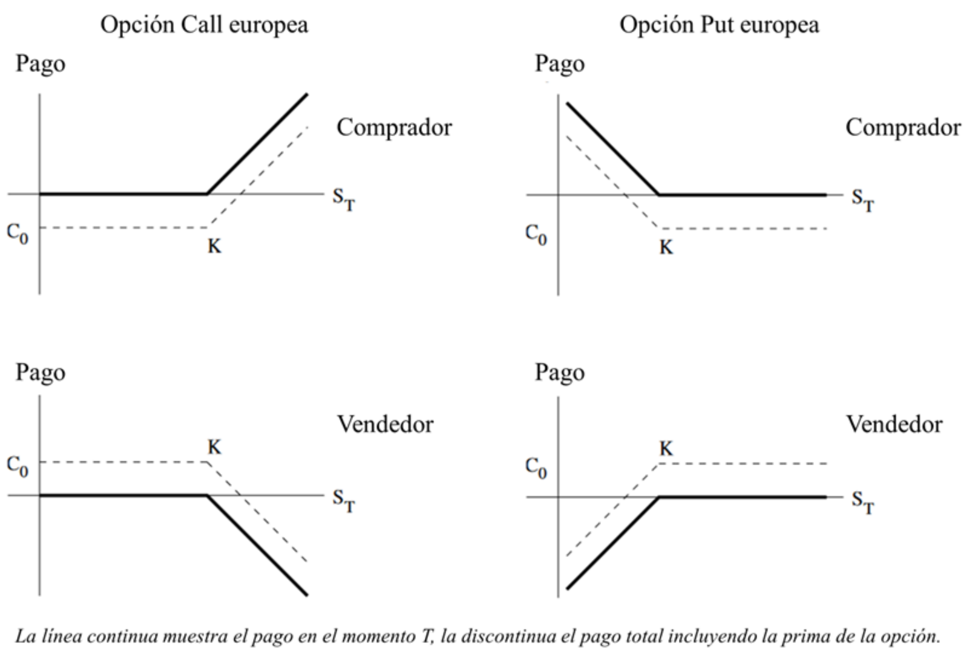
Así, los flujos de caja en el momento $t = T$ para una posición larga en $C(S,T)$ son dado por $max\{S_T - K; 0\}$ y para una posición corta en $C(S,T)$ son dado por $-max\{S_T - K; 0\}$. Lo mismo es cierto para la opción Put. Para mayor claridad, los pagos se resumen en la Tabla 1.

Tabla 1: Pagos de una posición en opciones, elaboración propia

Tipo de posición		$t = 0$	$t = T$
Call	larga	$-C_0$	$max\{S_T - K; 0\}$
	corta	C_0	$-max\{S_T - K; 0\}$
Put	larga	$-P_0$	$max\{K - S_T; 0\}$
	corta	P_0	$-max\{K - S_T; 0\}$

A continuación, se muestra en la Figura 2.1 las funciones de pago de opciones Put y Call en función del precio del subyacente, ilustrando la estructura asimétrica.

Figura 2.1: Funciones de pago de opciones Put y Call, elaboración propia



En función de la relación entre el precio de ejercicio K y el precio al contado S_t del subyacente, es decir, en función de su rentabilidad diferenciamos tres estados de la opción:

I. Cuando en una opción Call $S_t > K$ y en una opción Put $K > S_t$ o simplificado si el derecho se encuentra en un estado en el que se ejercería y generaría un beneficio se habla de una opción *in-the-money (ITM).*

II. Cuando $S_t = K$ se considera que la opción esta *at-the-money (ATM)*. Dado que una opción rara vez está exactamente *at-the-money*, excepto unas veces cuando se emite, a menudo se considera que una opción está *at-the-money* si el precio del activo subyacente está cerca del precio de ejercicio *(at-the-money = near-the-money / close to the money)*.

III. Cuando en una opción Call $S_t < K$ y en una opción Put $K > S_t$ o simplificado si el derecho se encuentra en un estado en el que no se ejercería se habla de una opción *out-of-the-money (OTM)*.

2.1.2 Factores que afectan al precio de una opción

Existen seis factores que determinan el precio de una opción de una acción (Hull, 2012):

- El precio al contado de la acción, S_0
- El precio de ejercicio, K
- El plazo, T
- La volatilidad del precio de la acción, σ
- Tipo de interés sin riesgo, r
- El dividendo esperado durante el plazo de la opción

La relación entre el precio al contado, el precio de ejercicio y el valor de la opción es bastante intuitiva, como claramente con un aumento del precio de la acción el valor de la opción Call aumenta también y viceversa en opciones Put. Si aumenta el precio de ejercicio, es menos probable que se ejecute una opción Call por lo que su precio baja, el movimiento contrario se aplica a las opciones Put. Esto se aplica tanto a las opciones europeas como a las americanas.

Es intuitivo que el valor de una opción americana aumenta con el vencimiento, a medida que se amplía la ventana temporal para una ejecución beneficiosa. Aunque esta correlación puede observarse a menudo en las opciones europeas, no siempre es así. Hull (2012) pone el ejemplo de dos opciones Call europeas sobre una acción: una con fecha de vencimiento en 1 mes, la otra con fecha de vencimiento en 2 meses. En su caso, dentro de 6 semanas se pagará un dividendo muy alto, lo que provocará la caída del precio de la acción, provocando que la opción con vencimiento corto podría valer más que la opción con vencimiento largo.

Con un aumento de la volatilidad, como medida de la incertidumbre sobre los futuros movimientos del precio de la acción, los valores de las opciones Call como Put aumentan debido a que la mayor probabilidad de que se produzcan grandes variaciones del precio significaría que el riesgo del vendedor de la opción aumentaría.

El efecto de un cambio en el tipo de interés sin riesgo en el precio de una opción es menos claro. *Ceteris paribus,* cuando los tipos de interés aumentan el valor actual de los pagos futuros que recibirá el comprador de la opción disminuye, lo que provoca un aumento del valor de una Call y una disminución del valor de una Put. Es importante destacar que suponemos que los tipos de interés cambian mientras que el resto de variables permanecen invariables. En la práctica, la subida (bajada) de los tipos de interés tiende a provocar la bajada (subida) del precio de las acciones. El efecto combinado de una subida de los tipos de interés y la caída asociada de los precios de las acciones puede provocar la caída del valor de una opción Call y el aumento del valor de una opción Put y viceversa.

Finalmente, el efecto de dividendos es muy claro ya que disminuyen el precio de la acción a la fecha ex-dividendo. Entonces cuando ese día está dentro del plazo de la opción, el valor de una Call disminuye y de una Put aumenta. Sin embargo, también hay opciones que anticipan y neutralizan el pago de un dividendo.

Concluyendo, vemos que la valoración de opciones es una tarea compleja debido a la interacción de múltiples factores, cada uno con efectos que pueden ser difíciles de predecir individualmente. Aunque podemos identificar la dirección en la que un cambio en cualquier factor afectará el valor de la opción, no podemos determinar valores exactos. Además, es importante reconocer que en la práctica rara vez se cumplen las condiciones de c*eteris paribus*, lo que complica aún más la evaluación de las opciones. Esta falta de condiciones constantes significa que los cambios en un factor pueden provocar cambios secundarios en otros factores, lo que dificulta la predicción precisa del valor de la prima de la opción.

Por lo tanto, para abordar esta complejidad, se requieren metodologías más avanzadas y sofisticadas para la valoración de opciones. Estas metodologías pueden incluir modelos matemáticos (con solución analítica) y computacionales que tienen en cuenta una amplia gama de factores y escenarios posibles.

2.2 Metodología de la valoración de opciones financieras

2.2.1 Principios fundamentales de la valoración de opciones

El problema fundamental de la valoración de opciones consiste en modelizar qué valor asignar a la prima de la opción en un momento determinado (por ejemplo, el momento $t = 0$). Es evidente que un agente obtendría un beneficio sin riesgo si no pagase una prima por la opción que le da la posibilidad de ejercer la opción favorablemente en la fecha de vencimiento sin ninguna obligación. Este tipo de la posibilidad de un beneficio sin riesgo y sin una inversión inicial se denomina oportunidad de arbitraje.

El supuesto esencial de la valoración financiera es que el modelo de mercado no permite estas oportunidades de arbitraje, ya que impedirían el equilibrio del mercado. En la práctica pueden aparecer oportunidades de arbitraje porque los precios pueden estar desequilibrados, pero la existencia de *arbitrajistas* en los mercados reales implica que los mercados ajustan rápidamente los precios para corregir los desequilibrios y eliminar así las oportunidades de arbitraje (Elliott & Kopp, 1999).

El supuesto básico de la *Ausencia de Oportunidades de Arbitraje* (*AOA)* entonces nos da tres argumentos diferentes de valorar activos financieros:

i.) mediante una cartera replicante que da derechos a los mismos flujos de pago que el activo a valorar, por lo que debe tener el mismo precio inicial bajo el supuesto de AOA.
ii.) mediante una cartera sin riesgo. Ella debe obtener un rendimiento igual al tipo de interés sin riesgo para garantizar la AOA.
iii.) mediante una cartera con pagos finales nulos. Esto implica que su valor inicial debe ser nulo también, bajo el supuesto de AOA.

Lo fundamentalmente esencial aquí es que todos estos argumentos son *equivalentes.* Por lo tanto, *todos* nos dan un proceso correcto para la valoración de activos financieros.

Los métodos de valoración de opciones consisten en modelizar la evolución del valor del activo subyacente mediante un *proceso estocástico* y calcular a partir de este supuesto la prima de la opción por alguno de los tres argumentos anteriores. Existen varias formas de modelizar el precio del activo subyacente con procesos estocásticos. En algunas ocasiones, se suele modelizarlos en tiempo continuo, con ecuaciones diferenciales. En otras, en tiempo discreto, por ejemplo, con árboles binomiales, ambos con el objetivo encontrar soluciones analíticas. Además, es posible una solución no analítica mediante simulaciones futuras.

El modelo analítico más renombrado en tiempo continuo es el de Black y Scholes (1973), mientras que para el tiempo discreto destaca el modelo binomial de Cox et al. (1979). Estos dos modelos serán examinados en detalle en el presente trabajo.

El método de simulación habitual es la simulación Monte Carlo. Este método de valoración por una simulación Monte Carlo consiste en simular numerosos movimientos aleatorios del precio del valor subyacente para determinar el valor de ejercicio de la opción para cada trayectoria. A continuación, estos valores se promedian y se descuentan a la fecha actual para obtener el valor total de la opción. Este método permite tener en cuenta diversas fuentes de incertidumbre y características complejas en la valoración de la opción que dificultarían la valoración mediante un simple cálculo basado en Black-Scholes o binomial (Joshi, 2010). Se utiliza, por ejemplo, para las opciones asiáticas. Sin embargo, por regla general, los métodos de Monte Carlo son demasiado lentos para ser competitivos y, por tanto, rara vez se utilizan en la práctica (Haug, 2007).

2.2.2 Evolución histórica de los métodos de la valoración de opciones

Comienza con una leyenda sobre Tales de Mileto, quien utilizó el concepto de opciones para beneficiarse de su predicción sobre una gran cosecha de aceitunas. Tales negoció con los dueños de prensas de aceitunas, asegurándose el derecho de alquilarlas a un precio fijado para posteriormente subarrendarlas a un precio mayor, obteniendo así beneficios. Thales había ejecutado la primera opción Call conocida (Aristote & Rackham, 1990). Claramente no tenía un modelo matemático para la valoración de esta opción, la basaba en su conocimiento del mercado y su propia intuición.

La historia de la negociación organizada de opciones tiene hitos importantes. En el siglo XVII, el mercado floreció en Ámsterdam, donde se negociaban opciones de compra y venta, denominadas *opsies* (Fernández Pérez, 2001). A finales del siglo XVIII, la negociación de opciones comenzó en Nueva York, inicialmente de forma privada y más tarde prohibida debido a los frecuentes incumplimientos de los contratos. Desde 1973, existe un mercado organizado de derivados financieros en Chicago, que ha demostrado ser extremadamente exitoso.

Hasta el final del siglo XIX, nadie sabía realmente cómo valorar opciones financieras, y los precios en los mercados parecían completamente arbitrarios, basados en la experiencia y la intuición de los actores. Louis Bachelier (1900) fue el primero en publicar un modelo de valoración financiera, introduciendo el concepto de movimiento browniano para modelar el comportamiento del precio de activos financieros. Bachelier propuso que el precio de acciones sigue un camino aleatorio con una tendencia subyacente (deriva) y popularizó el uso del concepto de volatilidad para medir el impacto de la información sobre los precios (Merton et al., 1994). Aunque su trabajo no tuvo un gran impacto inmediato, más tarde influyó en la teoría de procesos estocásticos y finanzas, gracias a Benoît Mandelbrot, quien lo rescató en la década de 1960.

Robert Wiener formalizó el concepto de movimiento browniano y Kiyosi Itô desarrolló el cálculo diferencial para procesos brownianos, permitiendo un análisis más detallado del comportamiento de los precios a lo largo del tiempo. Sin embargo, Paul Samuelson, Premio Nobel de Economía en 1970, señaló una deficiencia en el modelo de Bachelier y propuso el movimiento browniano geométrico, que evita precios negativos y permite una modelización más precisa (Merton, 1998).

Stephen A. Ross contribuyó al desarrollo del paradigma actual al demostrar matemáticamente el papel del arbitraje en la formación de precios, mostrando que el mercado no permite oportunidades de arbitraje.

El hito más importante fue la fórmula de valoración de opciones de Black-Scholes (BS), desarrollada por Fischer Black y Myron Scholes (1973), supusieron que el subyacente sigue un proceso denominado movimiento browniano geométrico y utilizaron el argumento ii.) para identificar una manera de cubrir opciones para gestionar el riesgo y valorarlas simultáneamente. Esto implicaba que el valor de una opción está determinado por su volatilidad y riesgo, en lugar de por su rentabilidad. La fórmula BS revolucionó la valoración de derivados y permitió medir el riesgo de activos derivados, facilitando la negociación y valoración precisa de opciones en mercados organizados. Scholes recibió el Premio Nobel por este trabajo en 1997, mientras que Black falleció en 1995. Su fórmula es uno de los desarrollos más citados en la historia de las finanzas (Crespo Espert, 2004). Después, destacan los trabajos de Cox y Ross (1976), quienes usaban otros procesos estocásticos lo que lleva en 1979 al desarrollo del modelo Cox-Ross-Rubinstein, un modelo bastante intuitivo de valoración de opciones en tiempo discreto utilizando un modelo binomial basado en el argumento iii.) de una cartera con pagos finales nulos (Cox et al., 1979).

2.2.3 Resultados universalizables de la valoración de opciones

Cuando se valoran opciones, ya sea de tipo Call o Put, los métodos hacen una suposición sobre la dinámica subyacente del activo subyacente. Por ejemplo, si el subyacente es una acción, su precio debe modelizarse mediante un determinado proceso estocástico. Sin embargo, algunos resultados relacionados con la valoración de opciones son independientes de la dinámica de la variable subyacente y, por tanto, son válidos universalmente.

2.2.3.1 Límites superiores e inferiores de los precios de opciones europeas

Bajo la suposición de la Ausencia de Oportunidades de Arbitraje (AOA) existen límites superiores e inferiores de los precios de opciones europeas que no dependen de ninguno de las variables mencionado en 2.1.2, excepto que el tipo de interés sea mayor que cero $r > 0$. Entonces, como una opción Call europea C da el derecho de comprar una acción a un precio determinado, su precio nunca puede ser mayor que el de la acción, lo que en consecuencia es el límite superior del precio de una opción:

$$C \leqslant S_0 \tag{2.3}$$

En vencimiento una Put europea P no puede valer más que K, por lo que su valor en t_0 debe ser el valor de K en t_0:

$$P \leqslant Ke^{-rT} \tag{2.4}$$

En este caso, los precios se descuentan según la ley compuesta en función del tanto instantáneo, lo que, por un lado, simplifica muchos cálculos y, por otro, aumenta la precisión de los modelos.

Para obtener el límite inferior de una opción europea, hay que considerar dos carteras, una cartera A, que consiste en una opción Call europea y un bono cupón cero que da un pago de K en el momento T, y una cartera B, que consiste en una acción. En T, la cartera A vale $max(S_T, K)$ y la cartera B siempre vale S_T, por lo que la cartera A siempre vale lo mismo o más que la cartera B. Por la AOA, esta relación también tiene que cumplir en t_0 por lo que

$$C \geqslant S_0 - Ke^{-rT}$$

Como el valor de una opción no puede ser negativa, $C \geqslant 0$ y por eso el límite inferior de una opción Call europea C en una acción que no paga dividendos vine dado por:

$$C \geqslant max(S_0 - Ke^{-rT}, 0) \qquad [2.5]$$

De forma análoga, el límite inferior de una opción Put europea P es:

$$P \geqslant max(Ke^{-rT} - S_0, 0) \qquad [2.6]$$

2.2.3.2 La paridad Put-Call

Además, existen unas relaciones entre opciones Call y Put que son independientes de la dinámica de la evolución del precio del activo subyacente y, por tanto, suelen ser válidos siempre. Uno de los más importantes es la paridad Put-Call. En ella se establece que debe existir una cierta relación entre el valor de la prima de una opción Call y una opción Put sobre el mismo valor subyacente, siempre que esta última no pague dividendos y tenga el mismo precio de ejercicio (Carabias López, 2016).

La paridad Put-Call se determina replicando una cartera formada por una posición larga en una opción Call y una posición corta en una opción Put, donde ambas opciones se definen sobre el mismo subyacente y con el mismo precio de ejercicio.

Formamos una cartera A compuesta por una opción Call y un bono cupón cero que prevé un pago de K en el momento T, y una cartera B compuesta por una opción Put y una acción. Seguimos suponiendo que las acciones no pagan dividendos y que las opciones Call y Put tienen el mismo precio de ejercicio K y el mismo plazo de vencimiento T. El bono cupón cero de la cartera A tendrá un valor de K en el momento T. La situación en T se resume en la Tabla 2.

Tabla 2: Valores de Cartera A y B en el momento T, elaboración propia

		$S_T > K$	$K > S_T$
Cartera A	Opción Call	$S_T - K$	0
	Bono zero-cupón	K	K
	Total	S_T	K
Cartera B	Opción Put	0	$K - S_T$
	Acción	S_T	S_T
	Total	S_T	K

Cuando $S_T > K$ ambas carteras valen S_T en T, si $K > S_T$ valen K. Por eso, se puede decir que ambas valen $max(S_T, K)$ en T. Por eso se puede concluir por argumentos de AOA que ambas carteras deben tener el mismo valor en t_0, siendo:

$$C_0 + Ke^{-rT} = P_0 + S_0 \qquad [2.7]$$

donde Ke^{-rT} es el valor del bono cupón cero y S_0 el valor de la acción, ambos en t_0. Esta relación se conoce como la *Paridad Put-Call*, que muchas veces también se expresa de esta forma:

$$C_0 - P_0 = S_0 - Ke^{-rT} \qquad [2.8]$$

Esta paridad Put-Call sólo es válida para las opciones europeas. Sin embargo, es posible derivar algunos resultados para los precios de las opciones americanas. Por eso Hull (2012) demuestra que para una opción americana que no paga dividendos la siguiente inecuación es cierta:

$$S_0 - K \leqslant C_0 - P_0 \leqslant S_0 - Ke^{-rT} \qquad [2.9]$$

Entonces vemos que existen resultados en la valoración de opciones que no dependen del proceso estocástico, por son pocos y no so exhaustivas. Este es el momento de introducir la VNR. Ella nos permite un planteamiento unificado de la valoración y nos hace la vida, sobre todo en tiempo continuo, mucho más fácil. Veamos en los siguientes apartados estas aportaciones sumamente útiles de la VNR.

2.3 El modelo de valoración neutral al riesgo como modelo teórico universal

2.3.1 Concepto de la valoración neutral al riesgo

La idea de la VNR es que, en determinadas condiciones, el valor de un derivado en el mundo real, en el que los usuarios no se comportan de forma neutral al riesgo, debe ser idéntico al valor del mismo derivado en un mundo hipotético neutral al riesgo (Wilmott, 2014).

En matemáticas financieras, el valor de un activo con riesgo siempre se puede obtener descontando los flujos de caja esperados del activo a lo largo de su vida a un tipo de descuento ajustado al riesgo:

$$\text{Valor del activo } = \sum_{t=0}^{T} \frac{E(CF_t)}{(1+i)^t} = \frac{\mathrm{E}(\mathrm{CF}_1)}{(1+i)} + \frac{\mathrm{E}(\mathrm{CF}_2)}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{\mathrm{E}(\mathrm{CF}_n)}{(1+)^n} \qquad [2.10]$$

donde el activo tiene una vida de n años, $\mathrm{E}(\mathrm{CF}_t)$ es el flujo de caja esperado en el periodo t y i es un tipo de descuento que refleja el riesgo de los flujos de caja. aquí, el numerador es el flujo de caja esperado, sin ningún ajuste por riesgo, mientras que el tipo de descuento soporta la carga de los ajustes por riesgo.

Alternativamente, podemos sustituir los flujos de caja esperados por los flujos de caja garantizados que habríamos aceptado como alternativa, llamados *equivalentes ciertos (ingl. certainty equivalents)* y descontarlos al tipo sin riesgo:

$$\text{Valor del activo} = \sum_{t=0}^{T} \frac{CE(CF_t)}{(1+r_f)^t} = \frac{\mathrm{CE}(\mathrm{CF}_1)}{\left(1+r_f\right)} + \frac{\mathrm{CE}(\mathrm{CF}_2)}{\left(1+r_f\right)^2} + \cdots + \frac{\mathrm{CE}(\mathrm{CF}_n)}{\left(1+r_f\right)^n} \qquad [2.11]$$

donde $CE(CF_t)$ es el equivalente cierto de $\mathrm{E}(\mathrm{CF}_t)$ y r_f es el tipo sin riesgo. En este caso, los inputs más importantes son los equivalentes ciertos, que ya están ajustados al riesgo. Entonces, el tipo de descuento es el tipo sin riesgo. Con ambos métodos, el valor actual de los flujos de caja será el valor ajustado al riesgo del activo (Roggi et al., 2012).

Aplicándolo a la valoración de derivados, esto significa que el precio de cualquier derivado sea igual al valor esperado de sus pagos futuros descontados (Gisiger, 2010). Como hemos visto, para determinar el valor actual de un activo en un mundo *no neutral al riesgo*, es necesario descontar los flujos de caja futuros con un tipo de interés que difiere del tipo de interés sin riesgo porque incluye una *prima de riesgo*. Esto es problemático porque la prima de riesgo correcta, de la que depende el precio justo, suele ser difícil de determinar en la práctica (Föllmer & Schied, 2004). Justamente aquí entra la VNR, ya que, en un mundo neutral al riesgo, cualquier flujo de caja futuro se descuenta por el tipo de interés sin riesgo. Esto es posible porque el valor esperado del beneficio no se determina con las probabilidades estadísticas (reales) de ocurrencia, sino con probabilidades modificadas, denominadas neutrales al riesgo (o martingala) porque la esperanza matemática coincide con el equivalente cierto. (Zimmermann, 1998, p. 27). Lo que es muy importante es que no se trata de probabilidades en sentido estadístico, sino que se denominan así porque verifican la definición matemática de probabilidad (Zimmermann, 1998, p. 49).

2.3.2 Teoremas fundamentales de valoración de activos

Los dos teoremas fundamentales de valoración de activos son conceptos clave en la teoría financiera moderna y en la valoración de derivados. Estos teoremas, desarrollados inicialmente por Harrison y Kreps (1979) y posteriormente ampliados por Harrison y Pliska (1981) y Delbaen y Schachermayer (1994) proporcionan una base matemática para comprender el funcionamiento de la valoración en los mercados financieros y son elementales para el concepto de la VNR de activos o derivados.

I. El primer teorema establece la relación entre la AOA y la existencia de PNR. Un modelo que permite una oportunidad de arbitraje en su propia especificación es fundamentalmente inadecuado, y evidentemente no es un modelo sensato para la valoración de derivados. El primer teorema fundamental de valoración de activos dice que un mercado está libre de arbitraje si, y solo si, existe al menos una probabilidad neutral al riesgo. Este teorema es fundamental porque garantiza la consistencia del modelo financiero y permite la valoración de derivados y otros productos financieros, basada en argumentos de no arbitraje.

II. El segundo teorema se centra en la relación entre la unicidad de la probabilidad neutral al riesgo y la completitud del mercado. Un mercado se considera completo cuando se puede encontrar una cobertura completa para cualquier derivado o producto financiero. En un mercado completo, es posible replicar o cubrir cualquier activo financiero o derivado utilizando una combinación de otros activos. El segundo teorema fundamental de valoración de activo establece que un mercado sin arbitraje es completo si, y solo si, la medida de probabilidad martingala correspondiente es única. Harrison y Pliska (1983) explicaron esta condición en relación con la valoración neutral del riesgo y la teoría martingala. En un mercado completo, cualquier valor derivado, por complejo o exótico que sea, tiene un precio único libre de arbitraje. En condiciones muy generales, puede demostrarse que un modelo de precios de valores es completo si, y sólo si, el modelo admite exactamente una probabilidad neutral al riesgo, cuando en mercados incompletos existen varias probabilidades. La completitud permite utilizar la valoración neutral del riesgo para la valoración de derivados (Jarrow & Protter, 2007).

La veracidad de estos dos teoremas para modelos en tiempo discreto va a ser demostrado en los apartados 5.1.1 y 5.1.2 de este trabajo.

Ahora es el momento de introducir la *expresión básica para la valoración de activos*, que puede formularse del siguiente modo:

$$P_{it} = \mathrm{E}_t\left[M_{t+1}X_{i,t+1}\right] \qquad [2.12]$$

Aquí, P_{it} es el precio del activo i en el momento t *(hoy)*, E_t es el operador de expectativas condicionales que tiene en cuenta la información de hoy, $X_{i,t+1}$ es el pago aleatorio del activo i en el momento $t+1$ *(mañana)* y M_{t+1} es un factor de descuento estocástico (FDE).

Los dos teoremas fundamentales permiten obtener un equivalente cierto para el activo, si cumple la AOA podemos calcular el equivalente cierto del activo y por tanto su valor. Más concreto, el FDE es una variable aleatoria siempre positiva y generaliza la noción familiar del factor de descuento a un mundo de incertidumbre. Si no hay incertidumbre o estamos en un mundo neutral al riesgo, el FDE es simplemente una constante que convierte los beneficios esperados de mañana en el valor de hoy (Campbell, 2000).

2.3.3 Enfoque de las probabilidades neutrales al riesgo como medidas de martingala

Las PNR también se conocen como medidas de martingala. Como hemos visto antes, la VNR es un principio fundamental de la valoración de derivados. En este enfoque, los precios se interpretan como valores esperados, pero no bajo la probabilidad "real" o "verdadera", sino bajo una probabilidad "artificial" conocida como probabilidad neutral al riesgo o *medida martingala equivalente (MME)* (Cvitanić & Zapatero, 2004). Las martingalas capturan la propiedad de un "juego justo", sin tendencia inherente (deriva) a aumentar o disminuir.

Una martingala se define como un proceso estocástico $X = X(t)_{t\geq 0}$ (por ejemplo, la evolución de un activo financiero en el tiempo) que para cada momento t verifique:

$$E_s[X(t)] = X(s), s \leq t$$

Bajo la condición de que la esperanza es finita: $\mathrm{E}[|X(t)|] < \infty$ (Musiela & Rutkowski, 1998).

Esta ecuación se puede entender de tal manera que la predicción óptima para el valor futuro $X(t)$ del proceso X es su valor actual $X(s)$. En otras palabras, muy simplificadas, si no tengo ni idea de lo que ocurrirá mañana, la mejor estimación del valor futuro es el valor de hoy.

Bajo las medidas de probabilidad sin riesgo, los procesos de precios descontados *siempre* siguen una martingala. Supongamos que S_t representa el precio de una acción en el momento t. En un entorno neutral al riesgo, el precio de la acción descontado por la tasa libre de riesgo se convierte en una martingala bajo la medida neutral al riesgo Q. Si $D_t = S_t * e^{-rt}$ es el precio de la acción descontado, bajo la medida neutral al riesgo Q el precio de la acción descontado se convierte en una martingala:

$$E_Q(D_{t+1}) = D_t = S_t * e^{-rt}$$

2.3.4 Formalización matemática desde el modelo de Arrow-Debreu

En general, la idea básica de la VNR se remonta al trabajo de Arrow (1953) sobre derechos contingentes en mercados incompletos y al trabajo en el modelo de equilibrio general de Arrow y Debreu (1954). La probabilidad neutral al riesgo es el precio de mercado de un valor Arrow-Debreu asociado a sucesos arriesgados. Además, bajo la probabilidad neutral al riesgo, la rentabilidad esperada de todos los activos en el modelo debería ser la misma (Sundaram, 1997).

Para una presentación general de la VNR supongamos que existen precios de estados positivos $\psi_1, s = 1,2, \dots, S$. En economía financiera, un valor Arrow-Debreu, es un contrato que acuerda pagar una unidad de un *numerario (*por ejemplo, una moneda) si se produce un estado concreto en un momento determinado del futuro y paga cero numerario en todos los demás estados. Entonces los precios de los activos Arrow-Debreu permiten obtener el precio cualquier valor $d = \langle d^1, d^2, \dots, d^5 \rangle$ por:

$$P = \sum_{s=1}^{S} d^s \psi_s$$

Si se normaliza estos precios de estado para que sumen 1, si dejamos ser $\psi_0 = \sum_{s=1}^{S} \psi_s$ y dejamos ser $q_s = \psi_s / \psi_0$, podemos escribir la fórmula de valoración así:

$$P = \psi_0 \sum_{s=1}^{S} q_s d^s \qquad [2.13]$$

Estos valores $q_s, s = 1,2, \dots, S$ son probabilidades artificiales ya que siempre son positivos y suman 1. Más fácil, usando estas probabilidades podemos escribir la ecuación así:

$$P = \psi_0 \widehat{\mathrm{E}}(d) \qquad [2.14]$$

donde $\widehat{\mathrm{E}}$ denota la esperanza con respecto a las probabilidades artificiales q_s. Dado que $\psi_0 = \sum_{s=1}^{S} \psi_s$ vemos que ψ_0 es el precio del valor $\langle 1,1,,1 \rangle$ que paga 1 en cada estado, simplemente un activo sin riesgo. Por definición, su precio es $1/R$ donde R es el tipo sin de riesgo Así, podemos escribir la fórmula de valoración así:

$$P = \frac{1}{R} \widehat{\mathrm{E}}(d) \qquad [2.15]$$

Esta ecuación establece que el precio de un valor es igual al valor esperado descontado de su resultado bajo las probabilidades artificiales. Esto es, como hemos dicho antes, la idea básica de la VNR, ya que es exactamente la misma fórmula que usuraríamos si q_s fuera una probabilidad real. Nombramos q_s entonces probabilidad neutral al riesgo. Esto es fundamental, porque si existen n precios de estado y al menos n valores independientes con precios conocidos, y hay ninguna posibilidad de arbitraje, entonces las PNR pueden encontrarse directamente resolviendo el sistema de ecuaciones para los n desconocidos q_s.

$$P_i = \frac{1}{R}\sum_{s=1}^{S} q_s d_i^s, \qquad i = 1,2,,n$$

$$= \sum_{s=1}^{S} q_s \frac{d_i^s}{R}, \qquad i = 1,2,,n$$

Este marco teórico será la base de todos los desarrollos de este trabajo, para el tiempo discreto como para el tiempo continuo.

2.3.5 Aplicación a la valoración de opciones financieras

La primera idea de una probabilidad neutral al riesgo se desarrolló Merton (1970) en su documento de trabajo donde describió el concepto de lo que más tarde se denominó VNR (Bodie, 2020). Otros trabajos en este ámbito proceden de Ross (1978), y de la teoría de la valoración por argumentos de no arbitraje de Ross (1976). En el contexto de la aplicación de la VNR a la valoración de opciones destacan los trabajos fundamentales de Harrison y Kreps (1979) y Harrison y Pliska (1981) cuyos proporcionaron la base conceptual para este aproximación (Sundaresan, 2000). La representación en tiempo discreto fue presentada por primera vez y aplicada empíricamente por Grossman y Shiller (1981). Hansen y Richard (1987) desarrollan el enfoque en tiempo discreto y hacen hincapié en la distinción entre expectativas condicionales e incondicionales. Se pueden encontrar tratados de libros de texto en Ingersoll (1987) y Duffie (1993). Cochrane (2001) resume toda la teoría de los precios de los activos dentro de este marco.

Todos modelos para la valoración de opciones se pueden derivar utilizando el principio de la VNR. Uno de ellos es el modelo BS, sin embargo, el modelo original no usa la VNR. En el modelo BS, la evolución del activo subyacente a lo largo del tiempo se representa como un movimiento browniano geométrico, es decir, su logaritmo es un proceso de Wiener con deriva. La VNR significa entonces que el precio justo de una opción sobre el activo subyacente es independiente de esta deriva. Un modelo en tiempo discreto que pruebe la valoración neutral del riesgo de los derivados es el modelo binomial de Cox, Ross y Rubinstein se supone en cada paso temporal que sólo hay dos evoluciones posibles para el subyacente. Las probabilidades de los dos casos se seleccionan de forma que el valor esperado de los precios futuros descontados sea igual al precio actual en cada momento (Bingham & Kiesel, 2004). Ambos modelos van a ser tratados en este trabajo.

En términos económicos, la validez de la VNR puede justificarse por el hecho de que, suponiendo un mercado de capitales completo, es posible construir una cobertura dinámica completa para el derivado que se va a valorar, lo que elimina completamente el riesgo. Si en este caso el precio justo de un derivado dependiera de las primas de riesgo, podrían construirse oportunidades de arbitraje, ya que se podría cobrar las primas sin exponerse al riesgo. En otras palabras, la VNR de los derivados es posible debido a la perfecta correlación entre el rendimiento del activo subyacente y el valor del derivado a lo largo del tiempo (Baxter & Rennie, 1996).

3 VALORACIÓN DE OPCIONES EN TIEMPO DISCRETO

Como introducción en la valoración de opciones, se trabajará primero en tiempo discreto, ya que esto permite simplificar considerablemente la realidad. En tiempo discreto se pueden estimar mejor los factores que determinan la prima de una opción.

Cuando hablamos de un modelo en tiempo discreto, estamos indicando que se trata de un modelo dinámico, ya que supone que las variables evolucionan con el tiempo. Sin embargo, lo que realmente caracteriza a un modelo discreto es que considera t como un conjunto de números reales enteros, es decir, el tiempo se considera una variable discreta. Entre dos puntos consecutivos en el tiempo, se supone que las variables del modelo no cambian. Esto significa que no hay ningún valor intermedio entre S_t y S_{t+1} (Carabias López, 2016).

El planteamiento matemático genérico de un proceso estocástico en tiempo discreto se puede encontrar en el Anexo I.

3.1 Modelo binomial de un periodo

Un método muy utilizado en la valoración de opciones es crear un *árbol binomial* que represente las distintas trayectorias posibles del precio de las acciones a lo largo de la vida de la opción. El modelo binomial fue propuesto por primera vez por William Sharpe (1978) y formalizado por Cox, Ross y Rubinstein (1979). La idea básica de este modelo numérico, también conocido como *Modelo Cox-Ross-Rubinstein*, es que el precio de un activo subyacente S_0 sigue un proceso binomial multiplicativo en periodos discretos (Cox et al., 1979).

Es importante señalar que el modelo binomial se basa en una serie de supuestos, que suelen denominarse hipótesis de mercados perfectos:

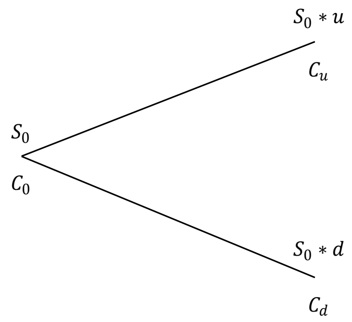
- El tipo de interés sin riesgo *r* es constante. Supondremos, como muchos autores, que se compone continuamente.
- Individuos pueden pedir prestado o prestar lo que deseen al tipo de interés *r* en cada periodo.
- No hay impuestos, costes de transacción ni requisitos de margen.
- Es posible tomar posiciones cortas en cualquier título y disponer de la totalidad de los beneficios.

Por tanto, el modelo binomial supone que el precio S_0 puede subir por el factor *u (ingl. "up")* con la probabilidad p o bajar por el factor d *(ingl. "down")* con la probabilidad $1-p$ en el intervalo de tiempo Δt. Después del primer periodo $(1 \cdot \Delta t)$ existen por tanto dos precios posibles $S_0 \cdot u$ y $S_0 \cdot d$, siempre bajo la condición de $d < u$. La variación del precio en porcentaje de S_0 al alza es $u - 1$, la variación del precio a la baja es $1 - d$.

En este modelo, para que se cumpla el supuesto de AOA, la relación entre la rentabilidad del subyacente y el tipo de interés sin riesgo ha de ser: $d < e^r < u$. En otras palabras, la rentabilidad del activo sin riesgo se sitúa entre las dos posibles rentabilidades generadas por el activo con riesgo. Si esto no se verifica, se abrirían oportunidades de arbitraje al tomar una posición larga en el activo más rentable y corta en el menos rentable.

Adicionalmente, se considera una opción cuyo pago final para el escenario u, donde el precio sea $S_0 \cdot u$, es C_u, mientras que el pago al precio $S_0 \cdot d$ es C_d. Todo ello se muestra en la Figura 3.1.

Figura 3.1: Árbol binomial de un período, elaboración propia



Al crear un árbol binomial para la evolución del precio de las acciones, *u* y *d* suelen estimarse a partir de la volatilidad del precio de las acciones. Cox et al. (1979), suponen en su artículo, siendo la volatilidad σ del precio de la acción es definida por $\sigma\sqrt{\Delta t}$ para pequeños Δt, los siguientes valores para *u* y *d:*

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$$
$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \qquad [3.1]$$

bajo la condición de que se ignoran términos en Δt^2 y potencias superiores de Δt. El desarrollo matemático de la obtención de los valores para *u* y *d* se puede encontrar en el Anexo II.

3.1.1 Argumentos de valoración por una cartera replicante

Como ya sabemos un argumento de la valoración es que, si dos activos dan derecho a los mismos capitales, deben tener el mismo precio, lo que hemos denominado argumento i.). Esto es así porque si no tuvieran el mismo precio, sería fácil construir una oportunidad de arbitraje, tomando una posición corta en el activo de mayor precio y larga en el activo de menor precio.

Para formar esta cartera, suponemos un mercado estático, en el que se negocian un activo sin riesgo, cuyo precio sea $A_t; t = 0{,}1$,, un activo con riesgo, cuyo precio sea $S_t; t = 0{,}1$, y una opción Call, cuyo precio sea $C_t; t = 0{,}1$, de este mismo activo con riesgo con precio de ejercicio K. El modelo funciona tanto con una opción Call como Put, para simplificar, aquí se utiliza una opción Call, la aplicación para una opción Put sea análoga.

Se supone que se conoce el precio S_0 en el momento $t = 0$, mientras el valor S_1 en el momento final $t = 1$ es una variable aleatoria que sigue el modelo binomial. El precio del activo sin riesgo varía de la forma $A_1 = A_0 * e^{rT}$. El precio de la opción Call en el momento $t = 0$ es la prima de dicha opción y queda definida por C_0, mientras su valor en el momento $t = 1$ está dado por los pagos que se genera a su vencimiento $C_1 = max\{\mathrm{S}_1 - K, 0\}$.

Se asume un mercado donde los agentes en el momento $t = 0$ pueden comprar x activos con riesgo, y activos sin riesgo y z opciones Call, bajo la suposición que x, y, z pueden tomar cualquier valor real, donde un numero positivo indica una posición larga en este activo y viceversa para un numero negativo. Entonces el valor inicial de una cartera (x, y, z) se representa por $V_0(x, y, z)$ y el valor final de forma análoga $V_1(x, y, z)$ y que ambos quedan definidos por:

$$V_0(x, y, z) = x * S_0 + y * A_0 + z * C_0$$
$$V_1(x, y, z) = x * S_1 + y * A_1 + z * C_1$$

Entonces, se puede crear una cartera de activos sin y con riesgo $x = x_r$; $y = y_r; z = 0$ que replica la opción Call, que verifique:

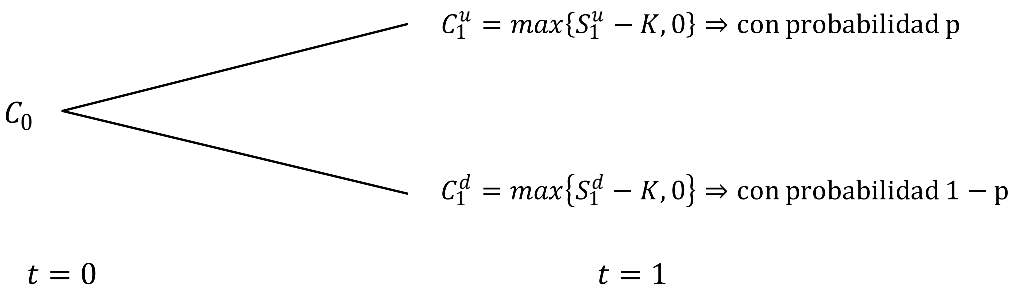
$$C_1 = x_R * S_1 + y_R * A_1$$

Por la AOA el valor de la prima tiene que ser el valor de dicha cartera replicante:

$$C_0 = x_R * S_0 + y_R * A_0 \qquad [3.2]$$

Si ahora aplicamos el modelo binomial, sabemos que el activo con riesgo únicamente contempla dos escenarios, uno de mercado al alza y otro a la baja. Entonces vemos un modelo binomial de un periodo donde una opción Call con vencimiento en $t = T = 1$ también presentará dos posibilidades de pago a vencimiento, como se ve en la Figura 3.2.

Figura 3.2: Posibles pagos de una opción Call a vencimiento, elaboración propia



Eso implica que:

$$\begin{cases} x_R S_1^u + y_R A_1 = C_1^u \\ x_R S_1^d + y_R A_1 = C_1^d \end{cases} \tag{3.3}$$

Con un poco de algebra desarrollamos la ecuación [3.3] y los siguientes valores:

$$x_R = \frac{C_1^u - C_1^d}{S_0(u-d)}$$
$$y_R = \frac{uC_1^d - dC_1^u}{(u-d)A_0 e^r} \tag{3.4}$$

De la ecuación [3.2] se sabe que $C_0 = x_R * S_0 + y_R * A_0$ y por eso el valor de la prima de la opción Call C_0 es:

$$C_0 = x_R S_0 + y_R A_0 = \frac{C_1^u - C_1^d}{S_0(u-d)} S_0 + \frac{uC_1^d - dC_1^u}{(u-d)A_0 e^r} A_0 =$$

$$C_0 = \left(\frac{e^r - d}{u - d} C_1^u + \frac{u - e^r}{u - d} C_1^d \right) e^{-r} \tag{3.5}$$

De forma análoga se puede valorar la opción Put.

3.1.2 *Interpretación como valoración neutral al riesgo*

Como hemos visto antes, la VNR es un principio fundamental de la valoración de derivados. En este enfoque, los precios se interpretan como valores esperados, pero no bajo la probabilidad "real" o "verdadera", sino bajo una probabilidad "artificial" conocida. Estas PNR se denominan q y $1 - q$, en consonancia con lo que hemos denominado probabilidades reales p y $1 - p$.

Recordamos que una martingala viene dada por un proceso X, siempre que sigue:

$$E_s[X(t)] = X(s), s \leq t$$

Si aplicamos eso a nuestro modelo binomial de un periodo una medida martingala será dada por las probabilidades q y $1 - q$ de movimientos al alza y a la baja, tal que el precio descontado de las acciones con $\mathrm{T} = 1$ sea una martingala:

$$S_0 = \bar{S_0} = E^*[\bar{S}_1] = \mathrm{q} * S_0 u\, e^{-rT} + (1 - \mathrm{q}) * S_0 d\, e^{-rT} \qquad [3.6]$$

Aquí, $E^* = E^*{}_0$ denota la expectativa (incondicional, en tiempo $\mathrm{t} = 0$) bajo las probabilidades q y $1 - q$. Resolviendo [3.6] para q obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathrm{q} &= \frac{e^r - d}{u - d} \\ 1 - q &= \frac{u - e^r}{u - d} \end{aligned} \qquad [3.7]$$

Según Cvitanić & Zapatero (2004), un mundo neutral al riesgo es un mundo en el que no hay compensación por mantener activos de riesgo, es decir, en el que la rentabilidad esperada de los activos de riesgo es igual al tipo de interés sin riesgo r. Por eso, valor esperado del precio S_T de una acción en el momento T es el precio inicial S_0 multiplicado por el tipo de interés sin riesgo:

$$\hat{E}(S_T) = S_0 e^{rT} \qquad [3.8]$$

Como en el punto anterior terminamos concluyendo que el valor de la prima de la opción Call en el modelo binomial y utilizando los valores para q y $1 - q$ obtenemos la fórmula de valoración para la opción Call:

$$C_0 = \left(\frac{e^r - d}{u - d} C_1 u + \frac{u - e^r}{u - d} C_1 d\right) e^{-r} \overset{\mathrm{q} = \frac{e^r - d}{u - d}; 1 - q = \frac{u - e^r}{u - d}}{\Longrightarrow}$$

$$C_0 = [\mathrm{q} * C_1 u + (1 - \mathrm{q}) * C_1 d] e^{-r} \qquad [3.9]$$

Se ve que llevan al mismo resultado, la aproximación en un mundo neutral al riesgo y la aproximación por una cartera replicante. Se puede argumentar, que la VNR facilita el desarrollo del modelo, sobre todo en un modelo de varios periodos.

3.2 Valoración con un modelo binomial de varios periodos

El modelo binomial de varios periodos fue formulado la primera vez por Cox, Ross (1979). El articulo original no usaba la VNR, ya que fue implementada más tarde a la matemática financiera. No obstante, su aproximación se basa igualmente el argumento de no arbitraje. Sin embargo, la VNR facilita los planteamientos y el paso de un modelo con un periodo a un modelo general de varios periodos es muy sencillo si se utiliza las probabilidades sin riesgo. Por eso, no vamos a demonstrar la aproximación del modelo CRR tal y como se llevó a cabo en el original, sino usamos las PNR que son:

$$\mathrm{q} = \frac{e^r - d}{u - d}$$
$$1 - q = \frac{u - e^r}{u - d}$$

Cuya estimación a partir de una serie de datos, acordándonos a los valores de u y d de la ecuación [3.1] sería:

$$\mathrm{q} = \frac{e^{r\Delta t} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}$$
$$(1 - \mathrm{q}) = \frac{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{r\Delta t}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}} \qquad [3.10]$$

Como en el caso anterior, el precio de la acción, denominado ahora *S*, puede subir o bajar, con las respectivas probabilidades q y $1 - \mathrm{q}$.

Con argumento de la neutralidad del riesgo se ha demostrado que el precio G_0 de un pago estocástico, valorado en dólares en el tiempo *T* es igual al valor esperado bajo la medida de probabilidad neutral al riesgo, denotada por del pago $G(0) = E^*[e^{-rT}G]$. En particular, supongamos que el pago es $G = g(S(T))$ donde g es una función no negativa que representa la dependencia del pago sobre el precio de la acción $S(T)$ al vencimiento *T* (Cvitanić & Zapatero, 2004).

Si solo hay un paso entro 0 y *T* el precio de la opción viene dado por:

$$G(0) = e^{-rT}[\mathrm{q} * g(S(0)u) + (1 - \mathrm{q}) * g(S(0)d)] \qquad [3.11]$$

Supongamos que se utiliza un árbol con n pasos temporales para valorar una opción Call europea con precio de ejercicio K y vida T. Cada paso tiene una longitud T/n. Si se han producido j movimientos al alza y $n-j$ movimientos a la baja en el árbol, el precio final de la acción es $S_0 u^j d^{n-j}$. El beneficio de una opción Call europea es entonces:

$$max\left(S_0 u^j d^{n-j} - K, 0\right)$$

A partir de las propiedades de la distribución binomial, la probabilidad de que se produzcan exactamente j movimientos al alza y $n-j$ movimientos a la baja, con la probabilidad neutral al riesgo q, es:

$$\frac{n!}{(n-j)!\,j!} q^j (1-q)^{n-j}$$

Por eso, el beneficio de una opción Call europea es entonces:

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{(n-j)!\,j!} q^j (1-q)^{n-j} max\left(S_0 u^j d^{n-j} - K, 0\right)$$

Como estamos en el constructo den un mundo neutral al riesgo, podemos descontar ese valor al tipo de interés sin riesgo r y obtenemos el precio de la opción Call europea:

$$C_0 = e^{-rT} \sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{(n-j)!\,j!} q^j (1-q)^{n-j} max\left(S_0 u^j d^{n-j} - K, 0\right) \qquad [3.12]$$

De forma análoga, como para una opción europea Put (Haug, 2007):

$$P_0 = e^{-rT} \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{n!}{j!\,(n-j)!}\right) q^j (1-q)^{n-j} max\left[K - S_0 u^j d^{n-j}, 0\right] \qquad [3.13]$$

Se ve, que la valoración con un modelo binomial de varios niveles es bastante simple de aplicar incluso en niveles relativamente altos de n. Cuando se utilizan árboles binomiales en la práctica, la vida de la opción generalmente se divide en 30 o más pasos temporales. Con 30 pasos temporales, hay 31 precios de acciones terminales y 2^{30}, o alrededor de 1 mil millones, posibles trayectorias de precios de acciones se consideran implícitamente (Hull, 2012).

Veremos que a medida que los pasos aumentan (y por eso Δt sea más pequeño), el modelo binomial para opciones europeas converge al modelo BS. Un desarrollo matemático de esta convergencia se puede encontrar en el Anexo III.

3.3 El modelo trinomial

Además de un modelo binomial simple (con uno o múltiples nodos temporales), existen otros modelos que fijan el precio de las opciones en tiempo discreto.

Una extensión conceptualmente similar del modelo binomial es el modelo trinomial, que contiene tres estados posibles para la citación del valor subyacente en lugar de dos. Fue desarrollado por Boyle (1986). El precio del subyacente puede seguir ahora tres caminos en cada nodo: Al alza u, a la baja d y una trayectoria estable o media m así que:

$$u = e^{\sigma\sqrt{2\Delta t}}$$
$$d = e^{-\sigma\sqrt{2\Delta t}} = \frac{1}{u}$$
$$m = 1$$

y las probabilidades de subir y bajar respectivamente son:

$$p_u = \left(\frac{e^{r\Delta t/2} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t/2}}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t/2}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t/2}}}\right)^2$$
$$p_d = \left(\frac{e^{\sigma\sqrt{\Delta t/2}} - e^{r\Delta t/2}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t/2}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t/2}}}\right)^2$$

Porque las probabilidades deben sumar uno, la probabilidad de que el precio del activo no varíe es:

$$p_m = 1 - p_u - p_d$$

Una vez calculado el árbol de precios, el precio de la opción en cada nodo se determina esencialmente como en el modelo binomial trabajando hacia atrás desde los nodos finales hasta el nodo actual t_0 (Haug, 2007).

Se supone que el modelo trinomial proporciona resultados más precisos que el modelo binomial cuando se modelan menos pasos temporales y, por lo tanto, se utiliza cuando la velocidad de cálculo o los recursos pueden ser un problema. En el caso de las opciones vainilla, los resultados convergen rápidamente a medida que aumenta el número de pasos, por lo que se favorece el modelo binomial debido a su implementación más sencilla (Josheski & Apostolov, 2020).

Es importante señalar que el modelo trinomial también es un caso particular de la VNR, pero en este caso la modelización de la evolución de los precios del activo subyacente y del activo sin riesgo no genera un modelo completo, por lo que la PNR no sería única (Xiaoping et al., 2014). Esta relación se plantea matemáticamente en los capítulos 5.1.1 y 5.1.2.

4 VALORACIÓN DE OPCIONES EN TIEMPO CONTINUO

Ya presentado el modelo binomial en tiempo discreto, pasamos a tiempo continuo. En éste se presentará el modelo Black-Scholes. Un modelo en tiempo continuo se trata también de un modelo dinámico que, como dijimos anteriormente, asume que las variables evolucionan a lo largo del tiempo. Por otro lado, este modelo toma la variable t como un conjunto de números reales, es decir, el tiempo se considera una variable continua. Entre dos puntos del tiempo tomados al azar existe una cantidad infinita de otros puntos en el tiempo. Entre dos puntos siempre hay otro. Muchas veces estos modelos continuos son límites de modelos en tiempo discreto, en los cuales la duración de cada periodo $\Delta t = t_{k+1} - t_k$ converge a cero.

Cuando se trabaja en tiempo continuo, el camino de una variable x vendrá representado por una función $x(t)$, siendo t una variable real. Sin embargo, lo más frecuente es que la evolución de las variables se represente mediante una ecuación diferencial ordinaria que relaciona la variable independiente de esta función t, la variable dependiente x, y sus derivadas sucesivas hasta un cierto orden, que denominamos orden de la ecuación diferencial. Para especificar completamente la trayectoria, es necesario añadir a la ecuación diferencial una serie de condiciones iniciales (o condiciones de contorno) en igual número que el orden de la ecuación diferencial (Carabias López, 2016).

Según Carabias López (2016) existen variadas las razones para utilizar ecuaciones diferenciales que son, entre otros:

- Puede ser más sencillo especificar la ecuación diferencial que la propia trayectoria.
- El cálculo asociado a un modelo puede ser más fácil cuando se trabaja con las ecuaciones diferenciales que cuando se trabaja con la trayectoria.
- Pueden aparecer al resolver problemas, por ejemplo, en la optimización dinámica.
- Pueden facilitar la interpretación de variables o parámetros.

Para ver un ejemplo la ecuación diferencial más simple que se da en los modelos financieros en tiempo continuo y que representa la evolución del precio de un activo sin riesgo en un modelo con un tipo de interés constante, véase el Anexo IV. Allí se plantea la dinámica utilizada por Black y Scholes (1973) en su modelo para modelizar la evolución del activo sin riesgo.

4.1 Planteamiento del modelo Black-Scholes

4.1.1 Supuestos básicos sobre el modelo Black-Scholes

Para formular la conocida ecuación BS, primero es necesario definir la modelización matemática básica en la que se basa el modelo BS. En el capítulo siguiente se explica brevemente el lema de Itô, de importancia fundamental para el la formulación del modelo BS. A continuación, se desarrolla el modelo BS. La base es exigir AOA sobre un mercado en el que se supone:

- No hay impuestos ni costes de transacción.
- Ni el subyacente ni el activo sin riesgo pagan dividendos ni cupones.
- Se permiten posiciones tanto largas como cortas en cualquier activo financiero.
- Existe divisibilidad y liquidez perfecta en todos los activos del mercado.
- Existe un activo sin riesgo (bono) B que evoluciona en el tiempo siguiendo la siguiente ecuación diferencial:

  $$dB = Br\,dt$$

  Para un desarrollo detallado ver Anexo IV.
- Existe un activo con riesgo (subyacente) S que evoluciona en el tiempo siguiendo la siguiente ecuación diferencial estocástica:

  $$dS = \mu S\,dt + \sigma S\,dW$$

  donde W es un movimiento browniano geométrico. Es un caso particular de los llamados procesos de difusión:

$$dX(t) = \mu\big(t, X(t)\big)dt + \sigma\big(t, X(t)\big)dW(t)\,; con\ X(0) = x \qquad [4.1]$$

Esta expresión se denomina *ecuación diferencial estocástica*, para el proceso X , que se denomina *proceso de difusión*.

Llamamos μ a la *deriva* (*ingl. drift*) y σ a la función de la volatilidad. En el caso del modelo BS, se usa un proceso browniano geométrico, por lo que la interpretación de las dos variables μ y σ será la siguiente:

$$\begin{aligned} \mu\big(t, X(t_k)\big) &= \mu S_t \\ \sigma\big(t, X(t_k)\big) &= \sigma S_t \end{aligned} \qquad [4.2]$$

Entonces, $\mu > 0$ representa procesos estocásticos que tienden a subir, mientras que $\mu < 0$ representa procesos estocásticos que tienden a bajar.

Si el término dW no estuviera presente, sería una ecuación diferencial ordinaria. Esto es fundamental, como en seguida se modeliza precios de los valores siguiendo esta *ecuación diferencial estocástica*, donde el movimiento browniano representará la incertidumbre sobre el precio futuro. En el límite, cuando t llega a cero, integramos y obtenemos:

$$X(t) = x + \int_0^t \mu(u, X(u))du + \int_0^t \sigma(u, X(u))dW(u)$$

La explicación detallada de este proceso estocástico se puede ver en el Anexo V.

4.1.2 Argumentación del modelo de Black-Scholes

La idea clave para derivar la fórmula BS es la misma que se utiliza en el modelo binomial. En cada momento, se forma una cartera con partes de un activo con riesgo S y un activo sin riesgo B, de modo que esta cartera corresponda exactamente a las características de rendimiento (actual) del instrumento derivado. Así ese valor de la cartera debe corresponder al valor del valor derivado, el argumento i.) de antes. En el modelo binomial, esta igualación se realiza periódicamente, por lo que el valor en un momento dado se relaciona con los valores en el momento siguiente. En tiempo continuo, la correspondencia se realiza en cada momento, relacionando el valor en un momento dado con las tasas de variación en ese momento.

Otra forma de derivar la ecuación BS es directamente por una cartera sin riesgo, el argumento ii.), que fue el planteamiento en el artículo original de Black y Scholes (1973). Recordamos que una cartera sin riesgo debe tener el mismo rendimiento que el activo sin riesgo, para cumplir con el argumento de la AOA. Formamos esa cartera sin riesgo por una posición larga (también funciona con una posición corta) en el derivado y una posición corta en la acción de la cantidad $\frac{\partial f}{\partial t}$. El valor de esa cartera Π es entonces:

$$\Pi = f - S\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial S} \qquad [4.3]$$

Hemos destacado que la cartera no tiene riesgo. Para que no existan oportunidades de arbitraje, entonces, la cartera genera exactamente la rentabilidad que el activo sin riesgo en periodos cortos de tiempo, es decir:

$$\mathrm{d}\Pi = r\Pi\, dt \qquad [4.4]$$

4.2 Formalización del modelo de Black-Scholes

4.2.1 El lema de Itô

Una herramienta indispensable formular del modelo BS es el lema de Itô', porque es la base del cálculo diferencial con procesos de difusión. Es una herramienta básica del análisis estocástico que describe la derivada de procesos estocásticos. Permite calcular la derivada de una función de un proceso estocástico, formando la expansión en series de Taylor de la función hasta sus segundas derivadas y reteniendo los términos hasta el primer orden en el incremento de tiempo y el segundo orden en el incremento del proceso de Wiener.

Antes de dar una aproximación general, en primer lugar, se va a derivar el lema de Itô' a partir del proceso de difusión del apartado anterior usando:

$$dX(t) = \mu\big(t, X(t)\big)dt + \sigma\big(t, X(t)\big)dW(t)$$

Sea $f(t,x)$ una función que tiene una derivada continua con respecto a t y dos derivadas continuas con respecto a x. Entonces $f(t, X(t)$ satisface:

$$df(t, X(t)) = \left[f_t + \frac{1}{2}\sigma^2 f_{xx}\right](t, X(t))dt + f_x(t, X(t))dX(t)$$

Aquí, el término extra implica la segunda derivada f_{xx}.Sustituyendo por $dX(t)$ y quitando en la notación su dependencia de $t, X(t)$, se obtiene el lema de Itô:

$$df = \left[f_t + \mu f_x + \frac{1}{2}\sigma^2 f_{xx}\right]dt + \sigma f_x dW \qquad [4.5]$$

En la aplicación en la valoración de opciones, $X(t)$describe un proceso de precio de una acción, y la función $f(t,x)$ un precio de una opción sobre la acción. Así el lema de Itô nos proporciona una relación entre ambos.

Utilizando las siguientes dependencias informales $dt \cdot dt = 0$, $dt \cdot dW = 0$ y $dW \cdot dW = dt$ donde la última igualdad se debe al hecho de que una suma de pequeños cambios al cuadrado en W a lo largo de un intervalo $[0,t]$ es aproximadamente t. Se puede escribir el lema de Itô de la siguiente forma más intuitiva:

$$df = f_t dt + f_x dX + \frac{1}{2} f_{xx} dX \cdot dX \qquad [4.6]$$

Para una demostración más general del lema de Itô usamos una ecuación estocástica diferencial X_t:

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t \tag{4.7}$$

donde W_t es un proceso de Wiener y $\mu_t\ y\ \sigma_t$ son funciones deterministas del tiempo t. Además, usamos una función escalar $f(t,x)$ que es dos veces diferenciable y series de Taylor. Las series de Taylor son aproximaciones polinómicas de funciones alrededor de un punto dado, calculadas utilizando las derivadas de la función en ese punto (Caballero Fernández et al., 1994). Quedan definidas como:

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

O escrito de forma más compacta:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \tag{4.8}$$

Donde $f^{(n)}(a)$ es la n-ésima derivada de f en el punto a.

Entonces, usando las series de Taylor sabemos que la extensión de ecuación estocástica diferencial X_t queda como:

$$\begin{aligned} df = {} & \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}dt^2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x}(\mu_t dt + \sigma_t dW_t) \\ & + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mu_t^2 (dt)^2 + 2\mu_t\sigma_t dt\, dW_t + \sigma_t^2 (dW_t)^2) + \cdots \end{aligned} \tag{4.9}$$

Si $dt \to 0$, los términos dt^2y $dt\, dW_t$ tienden a cero más rápido que dW^2, lo que es $O(dt)$. Entonces, si ponemos dt^2 y $dt\, dW_t$ a cero y sustituimos dt para dW^2 recogiendo los términos dt y dW , obtenemos el lema de Itô en su forma genérica:

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu_t \frac{\partial f}{\partial x} + \sigma_t^2 \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)dt + \sigma_t \frac{\partial f}{\partial x} dW_t \tag{4.10}$$

4.2.2 Obtención de una solución analítica al modelo Black-Scholes

Una idea clave del modelo BS es que se puede cubrir perfectamente la opción comprando y vendiendo el activo subyacente y el activo sin riesgo de forma que se "elimine el riesgo". Esto implica que existe un precio único para la opción.

Se va a plantear la solución de Black y Scholes (1973), que obtuvieron para el modelo que formularon. Usaron el argumento ii.), una cartera sin riesgo, trabajaron con el lema de Itô [4.10] y lo aplicaron a la obtención del precio de un derivado, cuyo precio fluctúa de forma aleatoria junto con el precio de una acción S y el proceso de Wiener dW:

$$\mathrm{d}f = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S}\mu S + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)\mathrm{d}t + \frac{\partial f}{\partial S}\sigma S \mathrm{dW} \qquad [4.11]$$

Aquí μ es la rentabilidad esperada de la acción y $\sigma > 0$ su volatilidad. El proceso de Wiener W influye entonces el precio de la acción S por el factor σS y el valor del derivado por el factor de $\frac{\partial f}{\partial S}\sigma S$.

Recordamos la cartera sin riesgo, que consiste en una posición larga en el derivado y una posición corta en la acción de la cantidad $\frac{\partial f}{\partial t}$. El valor de esa cartera Π era:

$$\Pi = f - S\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial S} \qquad [4.12]$$

El cambio en el valor de la cartera P en periodos cortos de tiempo dP puede escribirse como:

$$\mathrm{d}\Pi = \mathrm{df} - \mathrm{d}S\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial S} = \left(\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\right)\mathrm{d}t \qquad [4.13]$$

Además, sabemos que la cartera sin riesgo debe generar exactamente la rentabilidad sin riesgo en periodos cortos de tiempo:

$$\mathrm{d}\Pi = r\Pi\, dt$$

La ecuación de BS se obtiene sustituyendo en la ecuación anterior:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S}rS + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 = rf \qquad [4.14]$$

Esto es la ecuación Black-Scholes. Se observa que el precio del derivado no depende ni de las variaciones aleatorias del precio de la acción del proceso de Wiener ni de la rentabilidad esperada de la acción. Esto es una de las características fundamentales del modelo BS.

Otra forma de derivar la ecuación BS es por una cartera replicante, el argumento i.). Usamos otra vez el lema de Itô

$$\mathrm{d}f=\left(\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial S}\mu S+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)\mathrm{d}t+\frac{\partial f}{\partial S}\sigma S\mathrm{dW}$$

Entonces se construye una cartera con S y B que replica el comportamiento del derivado a valorar. Esto significa en concreto, que en todo momento t se selecciona una cantidad x_t de la acción y una cantidad y_t del bono, formado una cartera con un valor de $G(t)=x_t S(t)+y_l B(t)$; elegido los valores de x_ty $y_t$de forma que $G(t)$ replica el valor del derivado $f(S,t)$.

El beneficio instantáneo de esta cartera debido a la evolución de los precios de los títulos esta descrito por una ecuación diferencial:

$$\mathrm{d}G=x_t\mathrm{d}S+y_t\mathrm{d}B \qquad [4.15]$$

Ampliando:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}G&=x_t\mathrm{d}S+y_t\mathrm{d}B\\&=x_t\{\mu S\mathrm{d}t+\sigma S\mathrm{dW}\}+y_t rB\,\mathrm{d}t\\&=(x_t\mu S+y_t rB)\mathrm{d}t+x_t\sigma S\,\mathrm{dW}\end{aligned} \qquad [4.16]$$

La idea de la replicación indica que la ganancia cartera $G(t)$ se comporte igual que la ganancia de del derivado $f(S,t)$, igualamos los coeficientes de dt y dW en [4.16] y los del lema de Itô [4.11]. Primero igualamos dW, definiendo:

$$x_t=\frac{\partial f}{\partial S} \qquad [4.17]$$

Sabemos que $G=\mathrm{x}_t S+y_t B$ y $G=f$, por lo que se deriva:

$$y_t=\frac{1}{B}\left[f(S,t)-S\frac{\partial f}{\partial S}\right]$$

Sustituyendo esto en la ecuación [4.16] obtenemos:

$$dG=\left(\frac{\partial f}{\partial S}\mu S+\frac{1}{B}\left[f(S,t)-S\frac{\partial f}{\partial S}\right]rB\right)\mathrm{d}t+\frac{\partial f}{\partial S}\sigma S\,\mathrm{dW}$$

Igualamos el coeficiente de $\mathrm{d}t$ en el lema de Itô [4.11]:

$$\frac{\partial f}{\partial S}\mu S+\frac{1}{B}\left[f(S,t)-S\frac{\partial f}{\partial S}\right]rB=\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial S}\mu S+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 \qquad [4.18]$$

Finalmente obtenemos entonces la ecuación Black-Scholes (1973):

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial S}rS+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2=rf \qquad [4.19]$$

Para obtener entonces soluciones concretas para opciones Call o Put hay que solucionar esta ecuación estocástica diferencial, que efectivamente tiene múltiples soluciones, correspondientes a todas las diferentes derivadas que pueden definirse con S como variable subyacente.

La derivada concreta que se obtiene al resolver la ecuación depende de las condiciones de contorno que se utilicen. Éstas especifican los valores de la derivada en los límites de los posibles valores de S y t, lo que son el caso de una opción Call europea (Chan et al., 2019):

$$\begin{aligned}&C(0,t)=0\\&C(S,t)\to S-K\text{ ; si }S\to\infty\\&C(S,T)=max\{S-K,0\}\end{aligned} \qquad [4.20]$$

La solución utilizando [4.20] es la fórmula BS para opciones Call $f(S,t)=C(S,t)$ que es definida así:

$$C(t,S)=S\Phi(d_1)-e^{-r(T-t)}\Phi(d_2), \qquad [4.21]$$

Φ es la función de distribución acumulativa de la distribución normal estándar:

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-t^2/2}dt$$

Los correspondientes valores de d_1 y d_2 son:

$$\begin{aligned}d_1&=\frac{\ln(S/K)+(t+\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\\d_2&=\frac{\ln(S/K)+(t-\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}=d_1-\sigma\sqrt{T-t}\end{aligned} \qquad [4.22]$$

Como hemos visto existen varias formas de obtener esta solución. Una es tomar un límite en la aproximación del árbol binomial al modelo BS, como se en el Anexo III. También simplemente se puede comprobar que $C(t,S)$ satisface la ecuación diferencial BS [4.14].

El precio para una opción Put europea se obtiene finalmente por la Paridad Put-Call así que:

$$C(t,S) + Ke^{-r(T-t)} = P(t,S) + S$$

Aplicando eso a la ecuación para la Call europea [4.21] obtenemos la fórmula BS para la Put europea:

$$P(t,S) = Ke^{-r(T-t)}\Phi(-d_2) - S\Phi(-d_1) \qquad [4.23]$$

Aquí los valores de d_1 y d_2 también vienen dado por [4.22], efectivamente son los mismo como para la Call europea.

4.3 La valoración neutral al riesgo de opciones en tiempo continuo

4.3.1 El enfoque generalizado de la valoración neutral al riesgo en tiempo continuo con tipos de intereses no estocásticos

Cvitanić & Zapatero (2004), por un lado, muestran que se puede calcular directamente la esperanza $E^*_{t,s}\left[e^{-r(T-t)}\{S(T)-K\}^+\right]$, usando las PNR. Por otro lado, Duffie (2001) destaca que la VNR también puede aplicarse a modelos en tiempo continuo, aunque la mayor complejidad técnica de tales modelos dificulta su aplicación a las operaciones reales. Usamos las asunciones del modelo BS.

Definimos los activos básicos, un activo con y uno sin riesgo (un bono y una acción), cuyos precios evalúan un nuestro modelo a partir de su valor inicial $B_0 = 0$ y S_0 de las siguientes formas:

$$dB = rBdt \qquad [4.24]$$

$$dS = \mu(S_t,t)dt + \sigma(S_t,t) \qquad [4.25]$$

donde μ es la deriva instantánea del proceso, σ es su varianza instantánea y W es un proceso de Wiener (es decir, un movimiento browniano estándar).

Ahora veamos un proceso descontado, denominado S^*, que se obtiene, descontando el crecimiento de los precios estocásticos al tipo de interés sin riesgo, es decir, dividiendo el precio estocástico por el precio a corto plazo:

$$S^* = \frac{S}{B} \qquad [4.26]$$

Utilizando el lema de Itô junto con [4.24] y [4.25] podemos derivar la deriva instantánea μ^* y la función de volatilidad σ del proceso S^*:

$$dS^* = \mu^* \, dt + \sigma \, dW \qquad [4.27]$$

Es importante señalar que descontando el proceso por un tipo de interés no estocástico no se cambia la función de volatilidad σ, como muestran Musiela y Rutkowski (1998).

Según la probabilidad neutral al riesgo, el proceso de precio descontado S^* debe ser una martingala. Esto significa que el cambio esperado en su valor en todos los puntos debe ser cero, lo que sólo puede ser el caso si su deriva instantánea es igual a cero. Por lo tanto, la primera condición que debe cumplir la estructura de probabilidad neutral al riesgo es que S^* tenga una deriva nula bajo esta estructura. Sin embargo, también hay una segunda condición que debe cumplir: también debe ser equivalente a la estructura original (es decir, el mismo conjunto de trayectorias de precios debe tener probabilidad positiva en ambas estructuras). La clave para lograr ambos objetivos reside en un resultado conocido como *Teorema de Girsanov*. Este establece las condiciones en las que la deriva de un proceso de Itô dado puede modificarse de forma casi arbitraria mediante la redistribución del proceso en una estructura de probabilidad equivalente. Expondremos el contenido del teorema a nivel general y, a continuación, explicaremos cómo puede aplicarse para convertir el proceso de precios descontados S^* en uno con deriva cero. Supongamos que se nos da un proceso estocástico de Itô Ycon deriva μ y varianza σ^2:

$$dY = \mu(Y_t, t) \, dt + \sigma(Y_t, t) \, dW \qquad [4.28]$$

Ahora queremos cambiar la deriva de este proceso Y a η.

1. En primer lugar, definimos un nuevo proceso de Wiener $\widehat{W}$ utilizando el antiguo proceso de Wiener W, y las cantidades $\mu, \sigma,$ y η.
2. A continuación, redefinimos el proceso Y utilizando el nuevo proceso de Wiener $\widehat{W}$.

La forma en que $\widehat{W}$ se define en el primer paso garantiza que cuando el proceso Y se rediseñe en el segundo paso se consiga el cambio necesario en la deriva. Así primero definimos λ como la solución de:

$$\mu - \eta = \sigma\lambda \qquad [4.29]$$

Después definimos $\widehat{W}$ como:

$$d\widehat{W} = \lambda\, dt + dW \qquad [4.30]$$

Bajo ciertas condiciones técnicas, el Teorema de Girsanov establece existe una estructura de probabilidad equivalente a la estructura original tal que $\widehat{W}$ es un proceso de Wiener bajo la nueva estructura.

Entonces el proceso $\hat{Y}$ es:

$$d\hat{Y} = \eta\, dt + \sigma\, d\widehat{W}. \qquad [4.31]$$

Vemos que $\hat{Y}$ por definición tiene la deriva η. Con un poco de algebra se puede demostrar que ese proceso $\hat{Y}$ efectivamente es idéntico a Y, definido antes en [4.28]:

$$\begin{aligned} d\hat{Y} &= \eta\, dt + \sigma\, d\widehat{W} \\ &= \eta\, dt + \sigma[\lambda\, dt + dW] \\ &= [\eta + \sigma\lambda]dt + \sigma dW \\ &= [\eta + (\mu - \eta)]dt + \sigma dW \\ &= \mu\, dt + \sigma\, dW \\ &= dY \end{aligned} \qquad [4.32]$$

Así pues, el proceso Y se ha definido como un proceso con la deriva η. Además, el Teorema de Girsanov garantiza que la nueva estructura de probabilidad es equivalente a la estructura original, como por ejemplo la varianza σ^2 no ha cambiado.

Recodamos que el proceso de precio [4.27] descontado es:

$$dS^* = \mu^*\, dt + \sigma\, dW$$

Para encontrar una probabilidad neutral al riesgo, tenemos que encontrar una estructura de probabilidad equivalente en la que S^* tenga una deriva nula.

Esto puede lograrse dejando $\eta = 0$ en todo lo anterior. Entonces, si $\eta = 0$ en [4.29], λ es:

$$\mu^* = \lambda\sigma \qquad [4.33]$$

Si ahora definimos $\widehat{W}$ por $d\widehat{W} = \lambda dt + dW$, el teorema de Girsanov garantiza que existe una estructura de probabilidad equivalente bajo la cual es $\widehat{W}$ un proceso de Wiener. Además, el proceso Z puede reescribirse utilizando $\widehat{W}$ como un proceso con deriva cero:

$$dS^* = \sigma d\widehat{W} \qquad [4.34]$$

Puesto que la nueva estructura de probabilidad es equivalente a la estructura original, y puesto que S^* es una martingala bajo la nueva estructura, hemos identificado la probabilidad neutral al riesgo.

4.3.2 La valoración neutral al riesgo en el modelo Black-Scholes

Para explicar mejor el apartado anterior, de carácter muy técnico, en este apartado se explica la VNR aplicándola al modelo BS. Como hemos destacado antes, el modelo BS involucra dos valores, una acción cuyo precio S_t evoluciona a partir de su valor inicial S_0 según la trayectoria:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW_t \quad [4.35]$$

Además, existe un bono, cuyo precio B_t, con $B_0 = 0$, evalúa así:

$$dB = rB\ dt \quad [4.36]$$

Como hemos visto antes, el modelo tiene como objetivo la valoración de una opción Call europea sobre una acción, cuyo valor en T es:

$$max\{S_T - K, 0\}. \quad [4.37]$$

Black y Scholes (1973) demuestran que esta opción puede replicarse y, por lo tanto, que su precio puede obtenerse mediante la idea de arbitraje. Su valor libre de arbitraje para la opción Call europea queda definida como:

$$C = SN(d_1) - e^{-rT} KN(d_2) \quad [4.38]$$

donde $N(\cdot)$ es la distribución normal normalizada cumulativa y $d_1\ y\ d_2$ quedan definidos como:

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad [4.39]$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} \quad [4.40]$$

A continuación, mostraremos cómo este valor libre de arbitraje también puede obtenerse utilizando el método de la VNR. Para ello, primero definimos el proceso del precio descontado, verificamos que se cumplen las condiciones del *Teorema de Girsanov* e identificamos el proceso del precio descontado bajo la medida martingala equivalente.

Dejamos ser $S^* = S/B$ un precio de la acción descontado dentro del modelo BS. Usando el lema de Itô junto con las ecuaciones [4.35] [4.36] obtenemos:

$$dS^* = (\mu^* - r)S^*\ dt + \sigma S^*\ dW \quad [4.41]$$

Aplicamos el teorema de Girsanov, y entonces la deriva de [4.41] es $(\mu^* - r)S^*$, mientras que su varianza es $\sigma^2\ {S^*}^2$. El objetivo ahora es conseguir una deriva nula, por lo tanto, definimos λ como:

$$(\sigma S^*)\lambda = (\mu^* - r)S^* \qquad [4.42]$$

así que $\lambda = (\mu^* - r)/\sigma$. Además, dejamos $\widehat{W}$ ser definido por $d\widehat{W} = \lambda dt + dW$.

Por el Teorema de Girsanov, existe una estructura de probabilidad equivalente tal que $\widehat{W}$ es un proceso de Wiener en la nueva estructura. Además, el proceso de precio descontado puede representarse utilizando $\widehat{W}$ como un proceso de deriva cero:

$$dZ = \sigma Z\ d\widehat{W} \qquad [4.43]$$

De forma equivalente, aplicando el lema de Itô, lo podemos expresar como:

$${S^*}_t = {S^*}_0 \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma \widehat{W}_t\right\} \qquad [4.44]$$

Entonces, para valorar la opción Call, usando la VNR, hay que usar la esperanza bajo la probabilidad neutral al riesgo del pago descontado de la opción. Sabemos que ${S^*}_T = e^{-rT}{S^*}_T$ y por eso los pagos descontados de la opción Call son:

$$e^{-rT} \cdot max\{S_T - K, 0\} = max\{{S^*}_T - e^{-rT}K, 0\} \qquad [4.45]$$

Por lo tanto, necesitamos tomar la esperanza bajo la probabilidad neutral al riesgo. Para ello, recordemos que $\left(\widehat{W}_t\right)$ es un movimiento browniano estándar bajo la probabilidad neutral al riesgo $\widehat{W}_T \sim N(0, T)$.

Sustituyendo [4.44] ahora en [4.45] obtenemos

$$max\left\{{S^*}_0 \exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma \widehat{W}_T\right\} - e^{-rT}K, 0\right\} \qquad [4.46]$$

donde $\widehat{W}_T \sim N(0, T)$.

Sea $f(\cdot)$ la densidad de W_T. Dado que $W_T \sim N(0, T)$ tenemos:

$$f(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \exp\left\{-\frac{w^2}{2T}\right\} \qquad [4.47]$$

Así, la esperanza a de [4.46] viene dada por:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} max\left\{S^*{}_0 \exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma w\right\} - e^{-rT}K, 0\right\}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi T}}\right)\exp\left\{-\frac{w^2}{2T}\right\}dw \qquad [4.48]$$

Se definide una constante a así que:

$$a = \frac{1}{\sigma}\left\{-\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(\frac{1}{2}\sigma^2 - r\right)T\right\} \qquad [4.49]$$

Ahora, porque sabemos que $S_0 = S^*{}_0$, se comprueba fácilmente que:

$$S^*{}_0 \exp\left\{\frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma w\right\} \geq e^{-rT}K \text{ ; si, y solo si } w \geq a \qquad [4.50]$$

Usando esto, el integral de [4.48] puede ser escrito así:

$$\int_a^{\infty} S^*{}_0 \exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma w\right\} f(w)dw - \int_a^{\infty} e^{-rT}Kf(w)dw \qquad [4.51]$$

Consideremos el primer término [4.51]; sustituyendo la forma de $f(\cdot)$ de [4.47] en esta ecuación y reordenando los términos, el primer término puede escribirse como:

$$S^*{}_0 \int_a^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi T}}\right)\exp\left\{\frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma w - \frac{w^2}{2T}\right\}dw \qquad [4.52]$$

Porque $\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma w - \frac{w^2}{2T}\right) = -\frac{1}{2}(w - \sigma T)^2$ podemos desarrollar [4.52] más:

$$S^*{}_0 \int_a^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi T}}\right)\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{w - \sigma T}{\sqrt{T}}\right)^2\right\}dw \qquad [4.53]$$

El término bajo la integral es la densidad de una distribución normal con media σT y varianza T. Por lo tanto, la integral en si misma es el área bajo esta distribución entre a y ∞. Una transformación estándar muestra que esta área puede representarse utilizando una distribución normal estándar como $N(-d_1^*)$ donde $d_1^* = (a - \sigma\, T)/\sqrt{T}$ Así, [4.53] se reduce a:

$$S^*{}_0 N(-d_1^*) \text{; donde } d_1^* = \frac{a - \sigma T}{\sqrt{T}} \qquad [4.54]$$

Sustituyendo a por [4.49], y utilizando el hecho de que $S_0 = S^*{}_0$, se puede ver que [4.54] es simplemente el primer término de la fórmula BS, es decir, $S \cdot N(d_1)$.

Un desarrollo análogo, muestra que el segundo término de [4.51] es igual al segundo término de la fórmula BS $e^{-rT}KN(d_2)$. Esto demuestra que, que la esperanza del pago de la opción Call bajo la medida neutral al riesgo es simplemente la fórmula BS [4.38].

5 APORTACIONES DE LA VALORACIÓN NEUTRAL AL RIESGO

5.1 Aportaciones a la valoración de opciones financieras

La VNR sirve como base para cualquier tipo de opciones, sean de forma europea, americana, asiática, exóticas, sobre divisas o materias primas, sobre divisas o tipos de interés (Hull, 2012).

En general, como ya hemos visto, los modelos de valoración de derivados suelen comenzar con una especificación del modo en que los precios de los activos subyacentes del modelo (precios de acciones, bonos, etc.) evolucionan con el tiempo. A continuación, el objetivo es identificar el precio de un valor derivado en el modelo, tomando como dado el comportamiento de los procesos de precios primitivos. Aquí, la teoría de VNR nos hace la vida mucho más facial, ya que mejora el trabajo con estos modelos

Por ejemplo, Cox et al. (1979) demostraron en su trabajo que se puede valorar un derivado por el argumento iii.), la creación de una cartera con pagos finales nulos. Este procedimiento es correcto desde el punto de vista económico, ya que garantiza precios sin arbitraje. La VNR *no* es imprescindible para la valoración de derivados. Sin embargo, no usarla tiene la grave desventaja de que los modelos entonces suelen ser menos intuitivos. Hemos visto que, por ejemplo, en el modelo binomial de varios periodos, el uso de PNR facilita mucho su desarrollo matemático. Además, en esos modelos la verificación de la existencia de una única PNR no es una tarea complicada, como veamos en el apartado siguiente.

La VNR por eso tiene varias aportaciones. Una de las contribuciones más destacadas es su capacidad para proporcionar una interpretación única para distintos modelos financieros. Esto significa que independientemente del modelo utilizado para la evolución del precio del subyacente, la noción de neutralidad al riesgo ofrece un marco coherente y consistente para comprender el proceso de valoración y gestionar el riesgo asociado (Sundaram, 1997). Cuando todos los modelos anteriores estaban diseñados a un único tipo específico de activo, el enfoque de la VNR representa un nuevo paradigma al tratarse de un modelo general para la valoración de todos los activos. Tiene la capacidad de extender la valoración a otros activos más allá de los derivados financieros.

Además, la VNR facilita las demostraciones de los resultados financieros. Al adoptar un enfoque basado en la teoría de la martingala, se simplifican los análisis matemáticos y se proporciona una base sólida para fundamentar los resultados y teoremas financieros, lo que hace que la validación de los modelos y sus resultados sea más accesible y comprensible.

La implementación de modelos financieros también se ve beneficiada por la VNR. Se establece un marco teórico general que guía la implementación práctica de los modelos en entornos financieros reales. Esto simplifica el proceso de implementación y reduce la complejidad asociada con la traducción de modelos teóricos en aplicaciones prácticas. Esto permite tener la misma estructura en el modelo binomial y en el trinomial (en tiempo discreto).

Finalmente, la VNR facilita la valoración en mercados incompletos. En entornos donde no todos los activos están disponibles para el comercio, la VNR ofrece un enfoque flexible que permite valorar los activos disponibles y gestionar el riesgo de manera efectiva, incluso en condiciones de incertidumbre y limitaciones de mercado (Kaido & White, 2009).

5.1.1 Arbitraje y la no existencia de probabilidades neutrales al riesgo

Aparte de la valoración de derivados, una segunda finalidad valiosa de las PNR es identificar la incoherencia en la especificación del modelo; como ya hemos mencionado muchas veces, un modelo no permite el arbitraje si y sólo si admite al menos una probabilidad neutral al riesgo. En el modelo binomial, la verdad de esta afirmación es trivial. La AOA requiere $d < e^r < u$. Para entender mejor esa implicación, ahora vemos un ejemplo sencillo de un modelo que no admite ninguna probabilidad neutral al riesgo, y, por lo tanto, permite arbitraje.

Consideramos un modelo binomial con *dos* activos con riesgo y un bono. Aquí S_1 y S_2 son los pecios iniciales de los activos con riesgo, y sus posibles valores después de un periodo vienen dados por: $u_i S_i$ y $d_i S_i$; $i = 1{,}2$. Por último, supongamos que los precios de los activos están correlacionados, de modo que sólo hay dos conjuntos posibles de precios después de un período: $(e^r B, u_1 S_1, u_2 S_2)$ y $(e^r B, d_1 S_1, d_2 S_2)$.

Para que p sea una probabilidad neutra al riesgo en este contexto, el rendimiento esperado de ambos activos de riesgo bajo p debe ser igual a e^r, es decir, debemos tener $pu_1 + (1-p)d_1 = e^r$ así como $pu_2 + (1-p)d_2 = e^r$. Por lo tanto, p debe satisfacer

$$p = \frac{e^r - d_1}{u_1 - d_1} = \frac{e^r - d_2}{u_2 - d_2}. \qquad [5.1]$$

Sin embargo, es posible elegir r, u_i y d_i , de modo que las fracciones de [5.1] sean desiguales. Evidentemente, en este caso no puede existir una probabilidad neutral al riesgo.

Para demonstrar que el mercado admite una oportunidad de arbitraje si y sólo si las dos fracciones de [5.1] son desiguales, consideremos una cartera que invierte $a\ Unidades\ Monetarias\ (UM)$ en el bono y $b\ UM$ y $c\ UM$, respectivamente, en los dos activos con riesgo. El coste actual de esta cartera es:

$$a + b + c \qquad [5.2]$$

Sus posibles valores a vencimiento son:

$$\begin{cases} ar + bu_1 + cu_2 & \text{si } (u_1, u_2) \text{ ocurre} \\ ar + bd_1 + cd_2 & \text{si } (d_1, d_2) \text{ ocurre} \end{cases} \qquad [5.3]$$

Para que esta cartera genere una oportunidad de arbitraje, debe existir un valor de (a, b, c) tal que [5.5] sea estrictamente negativo y los dos valores de [5.6] sean cero. Tal solución existe cuando, y sólo cuando las dos fracciones de [5.1] son desiguales. Esto puede observarse poniendo a cero las dos cantidades en [5.6] a cero, utilizándolas para resolver $a\ y\ b$ en términos de c, y luego sustituyendo estas soluciones en [5.5]. Por lo tanto, las condiciones de este modelo que conducen a la inexistencia de una probabilidad neutral al riesgo son también idénticas a las condiciones que conducen a la existencia de una oportunidad de arbitraje.

5.1.2 Probabilidades neutrales al riesgo y completitud

Ya se ha mencionado muchas veces que un mercado es completo si y sólo si el modelo admite una probabilidad neutral al riesgo única. Una vez más, la validez de esta afirmación en el modelo binomial es fácil de ver. Para entender este argumento mejor, ahora presentamos un ejemplo sencillo de una modelo que admite más de una probabilidad neutral al riesgo, y, por tanto, no es completo.

Consideremos un modelo trinomial en el que hay tres valores posibles para el precio del activo $\tilde{S}$ después de un período:

$$\tilde{S} = \begin{cases} uS, & \text{con probabilidad } q_u \\ mS, & \text{con probabilidad } q_m \\ dS, & \text{con probabilidad } q_d \end{cases} \qquad [5.4]$$

donde $u < m < d$ y $q_i > 0$ para $i = u, m, d$. Supongamos también que un bono tiene la rentabilidad e^r. Para que el vector (p_u, p_m, p_d) sea una probabilidad neutral al riesgo en este modelo, debe satisfacer $p_i > 0$ for $i = u, m, d$, así como también:

$$p_u u + p_d d + p_m m = e^r \ ; \qquad [5.5]$$
$$p_u + p_m + p_d = 1$$

Aquí esto nos da dos ecuaciones en tres incógnitas, por lo que existe un número infinito de soluciones que satisfacen ambas ecuaciones, así como $p_i > 0$ para $i = u, m, d$. Por lo tanto, existen infinitas PNR en este modelo.

Para ver que el modelo trinomial tampoco es completo, observe que un derecho contingente (*ingl. contingent claim)*, un derivado cuyo pago futuro depende del valor de otro activo subyacente o más generalmente, que depende de la realización de algún acontecimiento futuro incierto) con pagos (X_u, X_m, X_d) puede ser replicado por una cartera formada por la acción y el bono si y sólo si existe una solución (a^*, b^*) al siguiente sistema de ecuaciones:

$$a^* uS + b^* e^r = X_u \qquad [5.6]$$

$$a^* mS + b^* e^r = X_m \qquad [5.7]$$

$$a^* dS + b^* e^r = X_d \qquad [5.8]$$

De [5.6] y [5.7] cualquier solución debe satisfacer:

$$a^* = \frac{X_u - X_m}{uS - mS} \qquad [5.9]$$

mientras que a partir de [5.5], [5.7] y [5.8] también debemos tener:

$$a^* = \frac{X_m - X_d}{mS - dS} \qquad [5.10]$$

Es una tarea muy elemental elegir valores de (X_u, X_m, X_d) tales que [5.9] y [5.10] sean inconsistentes (por ejemplo, dejamos $X_u = X_m = 1$ y $X_d = 0$). Esto demuestra de forma muy sencilla el carácter incompleto del modelo trinomial.

5.2 Valoración de otros activos financieros

Además de la valoración de opciones, la VNR puede utilizarse para valorar muchos otros activos. Por ejemplo, Luenberger (1998) utiliza un contrato Forward (la aplicación un Futuro será de forma análoga) como ejemplo para explicar cómo se aplica la VNR a otros activos. Si consideramos un contrato Forward sobre un valor con proceso de precio S, que se hace en $t = 0$ con un precio F_0 para entrega en el momento T. El valor inicial de este contrato es $f_0 = 0$. En el momento $t > 0$, nuevos contratos tienen un precio F_t. Para determinar entonces el valor f_t en t, recordamos que la función f_t tiene que ser una derivada del valor S; por tanto, su precio deflactado debe ser una martingala en el mundo neutral al riesgo.

Así:

$$\bar{f}_1 = \widehat{\mathrm{E}}_1(f_T) \qquad [5.11]$$

Y de forma equivalente:

$$e^{-rt} f_1 = e^{-rT} \widehat{\mathrm{E}}_1(f_T) = e^{-rT} \widehat{\mathrm{E}}_t(S_T - F_0) \qquad [5.12]$$

El mismo argumento aplicado a un contrato suscrito en t con precio forward F_t y valor cero da como resultado:

$$0 = e^{-rT} \widehat{\mathrm{E}}_t(S_T - F_t) \qquad [5.13]$$

O de forma equivalente:

$$\widehat{\mathrm{E}}(S_T) = F_t \qquad [5.14]$$

Usando esto en [0.13] encontramos el resultado:

$$f_1 = e^{-r(T-1)}(F_1 - F_0) \qquad [5.15]$$

Esto es la fórmula genérica de valorar contratos Forward (y Futuros) en el mundo financiero.

También se puede usar la VNR en los mercados de divisas y bonos, como muestran por ejemplo Bingham & Kiesel (2004). Técnicas como el modelo Garman-Kohlhagen, una extensión de BS a las opciones sobre divisas, se basan en la VNR. Otra posible aplicación son los derivados de tipos de interés. Instrumentos como los swaps, caps, floors y swaptions de tipos de interés se valoran utilizando medidas de riesgo neutro. Estas medidas ayudan a tener en cuenta la incertidumbre en los movimientos de los tipos de interés y se utilizan en modelos como el Black-Derman-Toy o el Hull-White. Las medidas neutrales al riesgo son además vitales para valorar derivados de crédito, como las Credit Default Swaps (CDS) y las Collateralized Debt Obligations (CDO). Estas medidas ayudan a evaluar el riesgo de crédito y las probabilidades de impago de forma que se ajusten a las expectativas del mercado.

5.3 Aplicación a la valoración de activos reales

Las medidas neutrales al riesgo se utilizan también para valorar activos reales o de infraestructura, especialmente cuando estos activos tienen opciones implícitas, como derechos de compra o venta, o cuando se evalúan los rendimientos esperados neutrales al riesgo de activos reales. En este caso, se habla de *Opciones Reales*. Este enfoque puede ser particularmente relevante por ejemplo en el sector inmobiliario o en proyectos de infraestructura, donde el valor de las opciones, como la opción de expandir, reducir o abandonar un proyecto, puede ser muy significativo al éxito de un comercio (Van Bragt et al., 2015).

En el ámbito de las finanzas corporativas, las medidas neutrales al riesgo también pueden aplicarse para valorar decisiones estratégicas de negocios o proyectos con flexibilidad implícita, utilizando la teoría de opciones reales. Esta teoría permite incorporar el valor de la flexibilidad en la toma de decisiones empresariales, como en el caso de invertir en investigación y desarrollo, expandir a nuevos mercados o cerrar operaciones poco rentables, proporcionando así un marco robusto para la evaluación y gestión de inversiones estratégicas (Constantinides et al., 2007).

Otra aplicación clásica de las opciones reales son los derivados de energía. Aïd et al. (2013) describen en su trabajo por ejemplo un modelo para el mercado energético basado en la VNR. Esta aproximación permite valorar derivados de electricidad en un contexto donde los precios al contado pueden experimentar picos significativos debido a la escasez y la fluctuación de la demanda. El modelo introduce una función de escasez para explicar las variaciones del precio al contado respecto al precio marginal del combustible. Luego, usando el principio de VNR, el modelo puede calcular precios de futuros y opciones, ofreciendo fórmulas cerradas para futuros y semi-explícitas para opciones spread y opciones europeas sobre futuros de electricidad. El uso de la VNR es fundamental en mercados incompletos, como el de la energía, donde la incertidumbre en la producción y la demanda puede generar grandes fluctuaciones. El modelo también permite explorar la prima de riesgo en futuros de electricidad y su relación con la demanda y la capacidad de producción.

5.4 Valoración en mercados incompletos

En mercados completos, la VNR funciona bajo el supuesto de una estrategia de cobertura única, que conduce a una medida de probabilidad neutral al riesgo única. Este supuesto sustenta gran parte de los primeros trabajos en este campo, en particular los de Harrison y Kreps (1979) y Harrison y Pliska (1981), que establecieron la equivalencia entre la ausencia de arbitraje y la existencia de una medida neutral al riesgo.

Sin embargo, en los mercados incompletos, esta unicidad se rompe. En este caso, la ausencia de una estrategia de cobertura global da lugar a múltiples medidas de probabilidad neutrales al riesgo que pueden ser coherentes con los precios observados de los activos. Delbaen y Schachermayer (1994) demostraron que, incluso en ausencia de arbitraje, la existencia de estas múltiples medidas neutrales al riesgo podría dar lugar a una dinámica más compleja en la valoración de activos.

En los mercados incompletos, el conjunto de PNR, representa todas las medidas posibles que son coherentes con los precios observados de los activos. Este conjunto puede abarcar varias interpretaciones del riesgo, ya que el carácter incompleto inherente al mercado crea ambigüedad. La existencia de múltiples medidas neutrales al riesgo refleja la incertidumbre sobre los riesgos no observables o los riesgos que no pueden cubrirse totalmente. Esto tiene implicaciones significativas tanto para los modelos teóricos como para las aplicaciones prácticas en finanzas.

Los enfoques tradicionales para estimar las PNR en mercados completos suelen basarse en modelos estructurales completos, asumiendo un equilibrio único. Este supuesto puede dar lugar a problemas de sobreajuste y especificación errónea cuando se aplica a mercados incompletos. Para resolver estos problemas, los métodos más recientes se centran en estimar las PNR sin suponer que el mercado es completo (Kaido & White, 2009).

Chernozhukov, Hong y Tamer (2007) desarrollaron un enfoque de estimación de conjuntos extremos que permite construir estimadores de conjuntos y regiones de confianza para los precios de mercado del riesgo, componentes clave de la transformación de Girsanov que conecta las medidas de probabilidad del mundo real y neutrales al riesgo, a través de una derivada de Radon-Nikodym. Este enfoque proporciona un marco flexible para tratar con mercados incompletos mediante la identificación de un conjunto acotado de posibles medidas neutrales al riesgo sin imponer supuestos estrictos sobre la completitud del mercado.

Las aplicaciones de este marco se extienden a diversos contextos, como la valoración de activos en mercados con riesgos no observados o con estrategias de cobertura incompletas. Al centrarse en la estimación de conjuntos extremos, los investigadores pueden derivar un conjunto de posibles medidas neutrales al riesgo coherentes con los precios observados de los activos, lo que permite un enfoque más matizado de la VNR en mercados incompletos.

Otras investigaciones en este ámbito han ampliado estas técnicas para incorporar datos de alta frecuencia y métodos no paramétricos. Aït-Sahalia y Lo (1998) estimaron de forma no paramétrica las densidades neutrales al riesgo, mientras que Chernov y Ghysels (2000) propusieron métodos para estimar los parámetros asociados tanto a las medidas neutrales al riesgo como a las medidas de probabilidad real. Rosenberg y Engle (2002) utilizaron los rendimientos de los activos para estimar una única medida de probabilidad neutral al riesgo, reconociendo que esta unicidad podría no mantenerse en mercados incompletos.

5.5 Limitaciones

Una limitación importante de la VNR es que se basa en una serie de suposiciones simplificadas que pueden no reflejar completamente la complejidad del mundo real. Por ejemplo, esta metodología asume mercados perfectamente líquidos y sin fricciones, donde los activos pueden intercambiarse continuamente a precios libres de riesgo. En la realidad, existen costes de transacción, restricciones de liquidez y otros factores que pueden distorsionar los precios y afectar la eficacia de la VNR (Sundaram, 1997).

Además, depende en gran medida de modelos matemáticos complejos para describir la dinámica de los precios de los activos y la incertidumbre. Estos modelos (por ejemplo, el binomial o BS) pueden ser difíciles de calibrar y pueden no capturar completamente las complejidades de los mercados financieros. La incertidumbre en la estimación de parámetros y la sensibilidad a los supuestos del modelo pueden introducir errores en la valoración de opciones y estrategias de cobertura. Por lo tanto, hay que dejar claro que el VNR no nos ayuda a estimar los parámetros en este ámbito en comparación con los modelos clásicos (Zimmermann, 1998).

6 CONCLUSIONES

En este trabajo, se ha explorado en profundidad el enfoque general de valoración de opciones financieras basado en PNR o medidas de martingala. A lo largo del estudio, se han abordado diversos aspectos teóricos relacionados con este enfoque, así como su aportación para el mundo financiero.

El enfoque de la VNR representa un paradigma fundamental en la teoría financiera moderna. Una de las principales contribuciones de este enfoque es proporcionar una manera de valorar sistemática y coherentemente opciones financieras. Todos los modelos anteriores estaban diseñados para un único tipo específico de activo, mientras que el enfoque de la VNR representa un nuevo paradigma al tratarse de un modelo general para la valoración de todos los activos. Proporciona una interpretación única y coherente para una variedad de modelos financieros, lo que facilita la comparación y comprensión entre ellos.

La idea básica detrás de este enfoque es que el precio de un activo financiero en el futuro puede ser expresado como el valor esperado utilizando una medida de probabilidad neutral al riesgo de su pago futuro descontado. Bajo esta medida de probabilidad, el rendimiento esperado de cualquier estrategia de inversión es igual al tipo de interés sin riesgo.

La VNR ofrece varias ventajas en la práctica financiera. Simplifica las demostraciones matemáticas, lo que permite una comprensión más clara de los resultados y propiedades de los modelos financieros, como hemos visto a lo largo de ese trabajo. Aparte de eso, esta metodología permite una visión unificada de modelos discreto y continuo. Por ejemplo, en el modelo binomial y trinomial, la estructura esencial sigue siendo la misma, lo que facilita la comprensión y aplicación de los principios subyacentes.

Otra ventaja importante es que facilita la implementación práctica de los modelos financieros, al ofrecer un marco teórico coherente que guía el proceso de valoración. Esto permite una aplicación más eficiente en contextos reales y facilita la valoración de una amplia gama de activos financieros, no solo opciones financieras. La VNR es especialmente útil en entornos de mercado completos, pero también se aplica en mercados incompletos, donde proporciona un marco sólido para la valoración de activos y la gestión del riesgo.

Todas estas ventajas se hacen especialmente evidentes en modelos de tiempo discreto, como el modelo binomial. En este contexto, la verificación de la existencia de PNR no representa una tarea complicada y puede realizarse de manera relativamente intuitiva. Sin embargo, en modelos de tiempo continuo, esta tarea es más compleja, como hemos visto en este trabajo. Esta complejidad se ve agravada por la presencia de factores como la volatilidad estocástica o los procesos de salto, comunes en los mercados financieros reales.

A pesar de todas estas ventajas, es importante señalar que muchas de las técnicas y resultados obtenidos con la VNR también pueden lograrse sin ella. Tanto Black y Scholes (1973) como Cox, Ross y Rubinstein (1979) han desarrollado sus modelos sin el conocimiento de la VNR, y ambos modelos funcionan perfectamente sin su aplicación. La valoración de opciones funciona sin las PNR.

Otra conclusión importante es que el VNR no proporciona una estimación de los parámetros u y d en modelos de tiempo discreto, ya que éstos son independientes de la probabilidad de una subida o bajada del subyacente en el árbol binomial. Las probabilidades sólo dependen de la volatilidad del subyacente. Esto también se aplica a los modelos de tiempo continuo, como el modelo Black-Scholes, donde el mayor reto a la hora de valorar una opción es determinar su volatilidad, tarea en la que la VNR no nos ayuda.

Finalmente, la dificultad de encontrar en la literatura una explicación clara de las aportaciones del modelo de la VNR es considerable. De hecho, algunos autores lo interpretan incorrectamente, asumiendo que los agentes sean indiferentes al riesgo, lo que no es correcto. Esta confusión sobre la neutralidad al riesgo de los agentes contribuye a malentendidos, dificultando la comprensión de su verdadera aportación al ámbito financiero.

En resumen, este trabajo ha supuesto una importante contribución a nuestra comprensión del enfoque de la probabilidad neutral al riesgo o martingala para la valoración de opciones y otros activos financieros. Su relevancia para las finanzas modernas se ha visto confirmada por un análisis teórico que resume la literatura existente en este ámbito de forma intuitiva y fácilmente comprensible.

DECLARACIÓN DE USO DE HERRAMIENTAS DE INTELIGENCIA ARTIFICIAL GENERATIVA

ADVERTENCIA: Desde la Universidad consideramos que ChatGPT u otras herramientas similares son herramientas muy útiles en la vida académica, aunque su uso queda siempre bajo la responsabilidad del alumno, puesto que las respuestas que proporciona pueden no ser veraces. En este sentido, NO está permitido su uso en la elaboración del Trabajo fin de Grado para generar código porque estas herramientas no son fiables en esa tarea. Aunque el código funcione, no hay garantías de que metodológicamente sea correcto, y es altamente probable que no lo sea.

Por la presente, yo, Jonas Beck, estudiante de E4 - Grado en Administración y Dirección de Empresas, con Mención Internacional de la Universidad Pontificia Comillas al presentar mi Trabajo Fin de Grado titulado ”Aportaciones del enfoque general de valoración de opciones financieras basado en probabilidades neutrales al riesgo o medidas de martingalas a la valoración financiera.”, declaro que he utilizado la herramienta de Inteligencia Artificial Generativa ChatGPT u otras similares de IAG de código sólo en el contexto de las actividades descritas a continuación:

1. **Traductor:** Para traducir textos de un lenguaje a otro.

Afirmo que toda la información y contenido presentados en este trabajo son producto de mi investigación y esfuerzo individual, excepto donde se ha indicado lo contrario y se han dado los créditos correspondientes (he incluido las referencias adecuadas en el TFG y he explicitado para que se ha usado ChatGPT u otras herramientas similares). Soy consciente de las implicaciones académicas y éticas de presentar un trabajo no original y acepto las consecuencias de cualquier violación a esta declaración.

Fecha: 24.05.2024

Firma: ______________________________

BIBLIOGRAFÍA

Aïd, R., Campi, L., & Langrené, N. (2013). A Structural Risk-Neutral Model for Pricing and Hedging Power Derivatives. *Mathematical Finance*, *23*(3), 387-438. https://doi.org/10.1111/j.1467-9965.2011.00507.x

Aït-Sahalia, Y., & Lo, A. W. (1998). Nonparametric Estimation of State-Price Densities Implicit in Financial Asset Prices. *The Journal of Finance*, *53*(2), 499-547. https://doi.org/10.1111/0022-1082.215228

Aristote, & Rackham, H. (1990). *Aristotle: In twenty-three volumes*. Harvard university press.

Arrow, K. J. (1953). Le role des valeurs boursieres pour la repartition la meilleure des risques. *Econometrie*, 41-47.

Arrow, K. J., & Debreu, G. (1954). Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy. *Econometrica*, *22*(3), 265-290. JSTOR. https://doi.org/10.2307/1907353

Bachelier, L. (1900). *Theory of Speculation*.

Baxter, M., & Rennie, A. (1996). *Financial calculus: An introduction to derivative pricing*. Cambridge University Press.

Bingham, N. H., & Kiesel, R. (2004). *Risk-neutral valuation: Pricing and hedging of financial derivatives* (Second edition). Springer.

Black, F., & Scholes, M. (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy, Vol. 81*(No. 3), 637-654.

Bodie, Z. (2020). Robert C. Merton and the Science of Finance. *Annual Review of Financial Economics*, *12*(1), 19-38. https://doi.org/10.1146/annurev-financial-100520-074656

Boyle, P. (1986). Option Valuation Using Three-Jump Process. *International Options Journal*, *3*, 7-12.

Brown, R. (1828). XXVII. *A brief account of microscopical observations made in the months of June, July and August* 1827*, on the particles contained in the pollen of plants; and* *on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies*. *The Philosophical Magazine*, *4*(21), 161-173. https://doi.org/10.1080/14786442808674769

Caballero Fernández, R., Gonzalez Pareja, A., & Triguero Ruiz, F. (1994). *Métodos matemáticos para la economía*. McGraw-Hill.

Campbell, J. Y. (2000). Asset Pricing at the Millennium. *The Journal of Finance*, *55*(4), 1515-1567. https://doi.org/10.1111/0022-1082.00260

Carabias López, S. (2016). *Introducción a la Modelización de Mercados Financieros*. Universidad Pontificia Comillas.

Chan, R. H., Guo, Y. Zy., Lee, S. T., & Li, X. (2019). Options. En R. H. Chan, Y. Zy. Guo, S. T. Lee, & X. Li, *Financial Mathematics, Derivatives and Structured Products* (pp. 67-85). Springer Singapore. https://doi.org/10.1007/978-981-13-3696-6_8

Chernov, M., & Ghysels, E. (2000). A study towards a unified approach to the joint estimation of objective and risk neutral measures for the purpose of options valuation. *Journal of Financial Economics*, *56*(3), 407-458.

Chernozhukov, V., Hong, H., & Tamer, E. (2007). Estimation and Confidence Regions for Parameter Sets in Econometric Models. *Econometrica*, *75*(5), 1243-1284. JSTOR.

Cochrane, J. H. (2001). *Asset Pricing*. Princeton University Press. https://books.google.es/books?id=WpmtKSoM4KcC

Constantinides, G. M., Jackwerth, J. C., & Perrakis, S. (2007). Chapter 13 Option Pricing: Real and Risk-Neutral Distributions. En *Handbooks in Operations Research and Management Science* (Vol. 15, pp. 565-591). Elsevier. https://doi.org/10.1016/S0927-0507(07)15013-1

Cox, J. C., & Ross, S. A. (1976). The valuation of options for alternative stochastic processes. *Journal of Financial Economics*, *3*(1-2), 145-166. https://doi.org/10.1016/0304-405X(76)90023-4

Cox, J. C., Ross, S. A., & Rubinstein, M. (1979). Option pricing: A simplified approach. *Journal of Financial Economics*, *7*(3), 229-263. https://doi.org/10.1016/0304-405X(79)90015-1

Crespo Espert, J. L. (2004). Tres décadas de la teoría de opciones. *BOLSA DE MADRID*. https://www.bolsasymercados.es/esp/publicacion/revista/2004/02/p28-33.pdf

Cvitanić, J., & Zapatero, F. (2004). *Introduction to the economics and mathematics of financial markets*. MIT Press.

Delbaen, F., & Schachermayer, W. (1994). A general version of the fundamental theorem of asset pricing. *Mathematische Annalen*, *300*(1), 463-520. https://doi.org/10.1007/BF01450498

Duffie, D. (1993). Dynamic Asset Pricing Theory. *The Journal of Finance*, *48*(5), 2032. https://doi.org/10.2307/2329081

Duffie, D. (2001). *Dynamic asset pricing theory* (3rd ed). Princeton university press.

Einstein, A. (1905). Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen. *Annalen Der Physik*, *322*(8), 549-560. https://doi.org/10.1002/andp.19053220806

Elliott, R. J., & Kopp, P. E. (1999). *Mathematics of financial markets*. Springer.

Fernández Pérez, J. L. (2001). Breve historia de las matemáticas en los mercados financieros. *Monografías de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas, Químicas y Naturales de Zaragoza*, *Nº. 19*, 87-95.

Föllmer, H., & Schied, A. (2004). *Stochastic finance: An introduction in discrete time* (2., rev.extended ed). de Gruyter.

Gisiger, N. (2010). Risk-Neutral Probabilities Explained. *SSRN Electronic Journal*. https://doi.org/10.2139/ssrn.1395390

Grossman, S. J., & Shiller, R. J. (1981). The Determinants of the Variability of Stock Market Prices. *The American Economic Review*, *71*(2), 222-227. JSTOR.

Hansen, L., & Richard, S. F. (1987). The Role of Conditioning Information in Deducing Testable. *Econometrica*, *55*(3), 587-613.

Harrison, J. M., & Kreps, D. M. (1979). Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets. *Journal of Economic Theory*, *20*(3), 381-408. https://doi.org/10.1016/0022-0531(79)90043-7

Harrison, J. M., & Pliska, S. R. (1981). Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading. *Stochastic Processes and Their Applications*, *11*(3), 215-260. https://doi.org/10.1016/0304-4149(81)90026-0

Harrison, J. M., & Pliska, S. R. (1983). A stochastic calculus model of continuous trading: Complete markets. *Stochastic Processes and Their Applications*, *15*(3), 313-316. https://doi.org/10.1016/0304-4149(83)90038-8

Haug, E. G. (2007). *The complete guide to option pricing formulas* (2. ed). McGraw-Hill.

Hull, J. (2012). *Options, futures, and other derivatives* (8. ed). Prentice Hall.

Ingersoll, J. E. (1987). *Theory of Financial Decision Making*. Rowman & Littlefield. https://books.google.es/books?id=gAO3AAAAIAAJ

Itô, K. (1951). On a Formula Concerning Stochastic Differentials. *Nagoya Mathematical Journal*, *3*, 55-65. https://doi.org/10.1017/S0027763000012216

Jarrow, R. A., & Protter, P. (2007). Chapter 1 An Introduction to Financial Asset Pricing. En *Handbooks in Operations Research and Management Science* (Vol. 15, pp. 13-69). Elsevier. https://doi.org/10.1016/S0927-0507(07)15001-5

Josheski, D., & Apostolov, M. (2020). A review of the binomial and trinomial models for option pricing and their convergence to the Black-Scholes model determined option prices. *Econometrics*, *24*(2), 53-85. https://doi.org/10.15611/eada.2020.2.05

Joshi, M. S. (2010). *The concepts and practice of mathematical finance* (2. ed., repr. with corr). Cambridge Univ. Press.

Kaido, H., & White, H. (2009). Inference on Risk-Neutral Measures for Incomplete Markets. *Journal of Financial Econometrics*, *7*(3), 199-246. https://doi.org/10.1093/jjfinec/nbp004

Luenberger, D. G. (1998). *Investment science*. Oxford University Press.

Merton, R. C. (1970). A Dynamic General Equilibrium Model of the Asset Market and Its Application to the Pricing of the Capital Structure of the Firm. *Sloan School of Management Working Paper, No. 497-70*, Chapter 11 in Continuous-Time Finance.

Merton, R. C. (1998). Applications of Option-Pricing Theory: Twenty-Five Years Later. *American Economic Review*, *88*, 323-349.

Merton, R. C., Simons, R. V., & Wilkie, A. D. (1994). Influence of Mathematical Models in Finance on Practice: Past, Present and Future [and Discussion]. *Philosophical Transactions: Physical Sciences and Engineering*, *347*(1684), 451-463. JSTOR.

Musiela, M., & Rutkowski, M. (1998). *Martingale Methods in Financial Modelling* (Corr. 2. printing). Springer.

Petters, A. O., & Dong, X. (2016). *An Introduction to Mathematical Finance with Applications*. Springer New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4939-3783-7

Roggi, O., Damodaran, A., & Garvey, M. (2012). Risk Taking: A Corporate Governance Perspective. *SSRN Electronic Journal*. https://doi.org/10.2139/ssrn.2556159

Rosenberg, J., & Engle, R. (2002). Empirical pricing kernels. *Journal of Financial Economics*, *64*(3), 341-372.

Ross, S. A. (1976). The arbitrage theory of capital asset pricing. *Journal of Economic Theory*, *13*(3), 341-360. https://doi.org/10.1016/0022-0531(76)90046-6

Ross, S. A. (1978). A Simple Approach to the Valuation of Risky Streams. *The Journal of Business*, *51*(3), 453-475. JSTOR.

Sharpe, W. F. (1978). *Investments*. Prentice-Hall.

Sundaram, R. K. (1997). Equivalent Martingale Measures and Risk-Neutral Pricing: An Expository Note. *The Journal of Derivatives*, *5*(1), 85-98. https://doi.org/10.3905/jod.1997.407984

Sundaresan, S. M. (2000). Continuous-Time Methods in Finance: A Review and an Assessment. *The Journal of Finance*, *55*(4), 1569-1622. JSTOR.

Van Bragt, D., Francke, M. K., Singor, S. N., & Pelsser, A. (2015). Risk-Neutral Valuation of Real Estate Derivatives. *The Journal of Derivatives*, *23*(1), 89-110. https://doi.org/10.3905/jod.2015.23.1.089

Von Smoluchowski, M. (1906). Zur kinetischen Theorie der Brownschen Molekularbewegung und der Suspensionen. *Annalen Der Physik*, *326*(14), 756-780. https://doi.org/10.1002/andp.19063261405

Wiener, N. (1923). Differential-Space. *Journal of Mathematics and Physics*, *2*(1-4), 131-174. https://doi.org/10.1002/sapm192321131

Wilmott, P. (2014). *Paul wilmott on quantitative finance*. Wiley.

Xiaoping, H., Jiafeng, G., Tao, D., Lihua, C., & Jie, C. (2014). Pricing Options Based on Trinomial Markov Tree. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, *2014*, 1-7. https://doi.org/10.1155/2014/624360

Zimmermann, H. (1998). Risikoneutrale Bewertung. En H. Zimmermann, *State-Preference Theorie und Asset Pricing* (pp. 27-50). Physica-Verlag HD. https://doi.org/10.1007/978-3-642-58990-4_3

ANEXOS

Anexo I Planteamiento matemático de un proceso estocástico en tiempo discreto

El modelo más simple de un modelo discreto es un modelo de un periodo, en lo cual solo hay los momentos $\mathrm{t} = 0; \mathrm{T}$. Por lo tanto, el precio de un valor sólo cambia una vez, un valor S comienza con el valor $\mathrm{S}(0)$ en $\mathrm{t} = 0$, y termina con el valor $\mathrm{S}(1)$ al final del periodo $\mathrm{t} = \mathrm{T}$. Si el valor es arriesgado (por ejemplo, una acción cuyo valor futuro se desconoce), entonces $\mathrm{S}(1)$ se modela como una variable aleatoria, cuyo valor se revelará en el momento $\mathrm{t} = 1$.

En seguida asumamos que existe un numero finito de posibles precios de un activo con riesgo S, que vienen dado por $S_1, S_2, \dots S_{K-1}, S_K$ con la probabilidad p_i así que $P(S(T) = s_i) = p_i$.

Además, existe un activo sin riesgo B, lo cual sigue $B(0) = 1$ y $B(1) \geq B(0)$. Usando el tipo de interés sin riesgo r sabemos que $B(0) + e^r B(0) = B(1)$

Si ahora se considera que existen N activos con riesgo $S_1, \dots, S_N$, el proceso de riqueza estará dado por $X(t)$, lo cual será en el momento $t = 0$:

$$X(0) = x$$

Esta cantidad se utiliza para invertir en los valores disponibles. Denotemos por $\delta_i, i = 1, \dots, N$ el número de activos con riesgo i que se tiene entre $t = 0$ y $t = 1$. δ_0 será la cantidad invertida en el activo sin riesgo en $t = 0$. Por eso la riqueza al final del periodo viene dado por:

$$X(1) = \delta_0 B(1) + \delta_1 S_1(1) + \dots + \delta_N S_N(1)$$

La cartera debe satisfacer algún tipo de restricción presupuestaria. La restricción presupuestaria típica es la denominada condición de autofinanciación, en otras palabras, no se puede utilizar fondos distintos del patrimonio inicial para financiar las posiciones en el mercado, y no se permite gastar dinero fuera del mercado:

$$X(0) = \delta_0 B(0) + \delta_1 S_1(0) + \dots + \delta_N S_N(0) \qquad [0.1]$$

El beneficio/pérdida, de una estrategia de cartera δ , denominada como $G = X(1) - X(0)$ se denominará proceso de ganancias. Si denotamos $\Delta S_i = S_i(1) - S_i(0)$ la ganancia de una acción del valor S_i, se deduce de las definiciones anteriores y de la ecuación [0.1] que $G = \delta_0 r + \delta_1 \Delta S_1 + \dots + \delta_N \Delta S_N$. Tenemos la siguiente relación entre los procesos de ganancias y riqueza: $X(1) = X(0) + G$.

Como en este modelo no hay más bienes que el dinero, es conveniente elegir uno de los valores como referencia y normalizar los precios de todos los demás con respecto a él. La elección habitual para este proceso denominado *numerario* es el activo sin riesgo:

$$\bar{S}_i(t) := S_i(t)/B(t)$$

Así, definimos el proceso de ganancias descontadas como $\bar{G} := \delta_1 \Delta\bar{S}_1 + \cdots + \delta_N \Delta\bar{S}_N$,

donde $\Delta\bar{S}_i = \bar{S}_i(1) - \bar{S}_i(0)$ y entonces llegamos a la ecuación:

$$\bar{X}(1) = \delta_0 + \sum_{i=1}^{N} \delta_i \bar{S}_i(1) = X(0) + \bar{G} \qquad [0.2]$$

Esto va a ser nuestro base en las modelizaciones que siguen.

Anexo II Modelación matemática de la estimación de *u y d*

Podemos encontrar valores adecuados para $u, d\ y\ p$ ajustando el modelo multiplicativo lo mejor posible, y sabemos de antes que toman los siguientes valores:

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$$
$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

Para ello, calculamos tanto el valor esperado del logaritmo de una variación de precios como la varianza del logaritmo de la variación de precios e igualamos estos valores. Este enfoque viene de Cox et al (1979) y va a ser demostrado según Luenberger (1998).

Este planteamiento es posible porque en el modelo binomial, las probabilidades de alcanzar los distintos nodos finales del árbol binomial vienen dadas por una distribución binomial. Más concretamente, la probabilidad de alcanzar el valor $Su^j d^{n-j}$ viene dada por $\binom{n}{j} p^j (1-p)^{n+j}$, donde $\binom{u}{j} = \frac{n!}{(n-j)!j!}$ es el coeficiente binomial. Esta distribución se aproxima (bajo ciertas condiciones) a una distribución normal para grandes n. El logaritmo de los precios finales tiene la forma $j \ln u + (n-j) \ln\ d$, que es lineal en j. Por lo tanto, la distribución de los precios finales puede considerarse casi lognormal.

Entonces, para realizar el emparejamiento del valor esperado del logaritmo de una variación de precios como la varianza del logaritmo de la variación de precios, sólo es necesario asegurarse de que la variable aleatoria S_1, que es el precio después del primer paso, tiene las propiedades correctas ya que el proceso es idéntico después. Tomando $S(0) = 1$ y sabiendo que $\mathrm{E}(S_1) = p * u + (1-p) *\ d$ encontramos por cálculo directo que:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(\ln S_1) &= p \ln u + (1-p) \ln\ d \\ \mathrm{var}\ (\ln S_1) &= p\ (\ln u)^2 + (1-p)\ (\ln\ d)^2 - [p \ln n + (1-p) \ln\ d]^2 \\ &= p\ (1-p)(\ln\ u - \ln\ d)^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, las ecuaciones de correspondencia con los parámetros adecuadas son:

$$pU + (1-p)D = v\Delta t \qquad [0.3]$$

$$p(1-p)(U-D)^2 = \sigma^2 \Delta t \qquad [0.4]$$

donde $U = \ln\ u$ y $D = \ln\ d$.

Aquí, hubiera que elegir tres parámetros: $U, D\ y\ p$, pero sólo hay dos ecuaciones. Por tanto, existe un grado de libertad de uno. Una forma de utilizar este grado de libertad es fijar $D = -U$, lo que es equivalente a dejar $d = 1/n$. Así podemos reducir las ecuaciones [0.3] y [0.4] a la siguiente forma:

$$(2p-1)U = \nu\Delta t$$
$$4p(1-p)U^2 = \sigma^2\Delta l$$

Si elevamos al cuadrado la primera ecuación y la sumamos a la segunda, obtenemos

$$U^2 = \sigma^2\Delta t + (\nu\Delta t)^2$$

Sustituyendo esto en la primera ecuación, podemos resolver p directamente, y entonces se puede determinar $U = \ln u$. Las soluciones resultantes para las ecuaciones de ajuste de parámetros son:

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\sigma^2/(\nu^2\Delta t) + 1}} \\ \ln\ u &= \sqrt{\sigma^2\Delta t + (\nu\Delta t)^2} \\ \ln\ d &= -\sqrt{\sigma^2\Delta t + (\nu\Delta t)^2} \end{aligned} \qquad [0.5]$$

Entonces para pequeños Δt la ecuación [0.5] puede ser aproximada como:

$$p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\nu}{\sigma}\right)\sqrt{\Delta t} \qquad [0.6]$$

Y finalmente:

$$\begin{aligned} u &= e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \\ d &= \frac{1}{u} = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \end{aligned} \qquad [0.7]$$

Anexo III Convergencia del modelo binomial al modelo Black-Scholes

Veremos que a medida que los pasos aumentan (y por eso Δt sea más pequeño), el modelo binomial para opciones europeas converge al modelo BS.

Recordando las conclusiones a las que llegamos presentando el modelo binomial para la valoración de una opción Call y Put que quedaran definidas como:

$$c = e^{-rT}\sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{(n-j)!\,j!} q^j (1-q)^{n-j} max\left(S_0 u^j d^{n-j} - K, 0\right)$$

$$p = e^{-rT}\sum_{j=0}^{n} \left(\frac{n!}{j!\,(n-j)!}\right) q^j (1-q)^{n-j} max\left[K - S_0 u^j d^{n-j}, 0\right]$$

Expresado de forma más genérica la ecuación de una Call europea sea:

$$c = e^{-rT}\sum_{j>\alpha} \frac{n!}{(n-j)!\,j!} q^j (1-q)^{n-j} \left(S_0 u^j d^{n-j} - K\right) \qquad [0.8]$$

donde α, el número mínimo de movimientos alcistas para que $S_T > K$, sea definida como:

$$\alpha = \frac{n}{2} - \frac{\ln(S_0/K)}{2\sigma\sqrt{T/n}}$$

Esto es cierto porque si $S_0 u^j d^{n-j} > K$ (el precio de la acción es mayo que el precio de ejercicio *K*, la opción esta *ITM*) los términos de la ecuación [0.8] son mayor que cero. Escrito de otra forma:

$$\ln\,(S_0/K) > -j\ln\,(u) - (n-j)\ln\,(d) \qquad [0.9]$$

Sabemos de antes que $u = e^{\sigma\sqrt{T/n}}$ y $d = e^{-\sigma\sqrt{T/n}}$ y por la ecuación [0.9] se modifica a:

$$\ln\,(S_0/K) > n\sigma\sqrt{T/n} - 2j\sigma\sqrt{T/n}$$

y finalmente

$$j > \frac{n}{2} - \frac{\ln(S_0/K)}{2\sigma\sqrt{T/n}}$$

lo que compruebe la certeza de la ecuación [0.8] como muestran ambos Hull (2012) y Haug (2007).

Aun así, para aproximar esta expresión al modelo BS (Civitanic & Zapatero, 2003) que expondremos posteriormente, también se puede definir como:

$$C_t = S_t B_1(a) - K e^{-r(T-t)} B_2(a) \qquad [0.10]$$

Donde:

$$B_1(a) = P[X > a] \rightarrow X \sim B(n, \hat{p}')$$
$$\mathrm{q} = \frac{\mathrm{q}u}{\mathrm{q}u + (1-q)d} = \frac{e^{r\Delta t} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}} e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} e^{-r\Delta t}$$
$$(1-\mathrm{q}) = \frac{(1-\mathrm{q})d}{\mathrm{q}u + (1-\mathrm{q})d} = \frac{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{r\Delta t}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}} e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} e^{-r\Delta t}$$

$$B_2(a) = P[X > a] \rightarrow X \sim B(n, p)$$
$$\mathrm{q} = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} = \frac{e^{r\Delta t} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}$$
$$(1-\mathrm{q}) = \frac{u - e^{r\Delta t}}{u - d} = \frac{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{r\Delta t}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}$$

Esto es consistente con lo que hemos obtenido en las ecuaciones en el apartado anterior. Lo mismo ocurre con la opción Put, cuya valoración en tiempo discreto sería la siguiente:

$$P_t = K e^{-r(T-t)} B_2(a) - S_t B_1(a) \qquad [0.11]$$

Donde:

$$B_1(a) = P[X < a] \rightarrow X \sim B(n, \hat{p}')$$
$$\mathrm{q} = \frac{\mathrm{q}u}{\mathrm{q}u + (1-q)d} = \frac{e^{r\Delta t} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}} e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} e^{-r\Delta t}$$
$$(1-\mathrm{q}) = \frac{(1-\mathrm{q})d}{\mathrm{q}u + (1-\mathrm{q})d} = \frac{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{r\Delta t}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}} e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} e^{-r\Delta t}$$

$$B_2(a) = P[X < a] \rightarrow X \sim B(n, \hat{p})$$
$$\mathrm{q} = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} = \frac{e^{r\Delta t} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}$$
$$(1-q) = \frac{u - e^{r\Delta t}}{u - d} = \frac{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{r\Delta t}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}$$

Tomar el límite del modelo binomial significa que el valor de n, tiende a infinito. De este modo, las distribuciones binomiales que conforman la fórmula de valoración se aproximarán a distribuciones normales en tiempo continuo. Para comenzar, se tomará la segunda distribución binomial, ya que tiene las PNR más sencillas:

$$X \sim B_2(n, \hat{p}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} X \sim N_2[\mu = n\hat{p}; \sigma = n\hat{p}(1-\hat{p})]$$

La distribución normal normalizada se define como $Z \sim N(0,1)$. Se normalizaría la probabilidad del modelo asociado a esta distribución:

$$P[X > \alpha] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} P\left[Z > \frac{\alpha - n\hat{p}}{\sqrt{n\hat{p}(1-\hat{p})}}\right] = 1 - P\left[Z < \frac{\alpha - n\hat{p}}{\sqrt{n\hat{p}(1-\hat{p})}}\right]$$
$$= 1 - N\left(\frac{\alpha - n\hat{p}}{\sqrt{n\hat{p}(1-\hat{p})}}\right) = N\left(\frac{n\hat{p} - \alpha}{\sqrt{n\hat{p}(1-\hat{p})}}\right)$$

Sustituyendo en la probabilidad anterior el valor de α y calculando el límite cuando n tiende a infinito de la expresión resultante, obtenemos la distribución de probabilidad que en el modelo BS $N(d_2)$:

$$N\left(\frac{n\hat{p} - \alpha}{\sqrt{n\hat{p}(1-\hat{p})}}\right) \overset{\alpha = \frac{n}{2} - \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)}{2\sigma\sqrt{\frac{(T-t)}{n}}}}{=} N\left(\frac{n\hat{p} - \frac{n}{2} - \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)}{2\sigma\sqrt{\frac{(T-t)}{n}}}}{\sqrt{n\hat{p}(1-\hat{p})}}\right)$$

$$= N\left(\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)}{2\sigma\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})(T-t)}} + \frac{\sqrt{n}\left(\hat{p} - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}\right)$$
$$\overset{\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)}{2\sigma\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})(T-t)}} + \frac{\sqrt{n}\left(\hat{p}-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}} = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}}{=} N\left(\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right)$$

De esta forma, se concluye en la fórmula de valoración de BS para la opción Call:

$$C_t = S_t N\left(\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right) - Ke^{-r(T-t)} N\left(\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right)$$
$$= S_t N(d_1) - Ke^{-r(T-t)} N(d_2)$$

Para la valoración de opciones Put el desarrollo es muy parecido y concluye en la fórmula de valoración:

$$P_t = Ke^{-r(T-t)}N\left(-\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right) - S_tN\left(-\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right) =$$

$$= Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - S_tN(-d_1)$$

Esto son las ecuaciones que usa el modelo de Black y Scholes (1973). Hemos visto que para valores grandes de n, es decir si usamos varios periodos, el modelo binomial converge al modelo BS.

Anexo IV Planteamiento de la evolución del bono en el modelo Black-Scholes

La dinámica del activo sin riesgo en el modelo BS se describe mediante ecuaciones diferenciales. En ese modelo, la trayectoria del precio de un activo sin riesgo, que da derecho a una unidad monetaria en el momento T es:

$$B(t) = e^{-r(T-t)}$$

Aquí se puede ver que es una función de una sola variable, el momento en que se observa el precio t, mientras que el vencimiento T y el tipo de interés sin riesgo r, son parámetros. Entonces se puede simplificar la notación, eliminando el argumento de la función $B(t)$. Así se genera una ecuación diferencial que representa esta trayectoria derivando su expresión y eliminando el parámetro T:

$$\frac{dB}{dt} = re^{-r(T-t)}$$

Sustituyendo $e^{-r(T-t)}$ por B la ecuación queda como:

$$\frac{dB}{dt} = r\mathrm{B} \qquad [0.12]$$

Esto también se puede expresar como:

$$dB = rB\ dt$$

Nos acordamos a la condición final, que indica que en el momento final el valor del activo sin riesgo será una unidad monetaria $B(T) = 1$ y añadimos eso a la ecuación.

Sin embargo, es más interesante conocer el proceso que hemos denominado resolución de la ecuación, esto es dado la ecuación diferencial junto con la condición inicial, encontrar la trayectoria temporal de la variable $B(t)$ que representa el precio en el momento t del activo sin riesgo. El problema de resolver ecuaciones diferenciales es el problema inverso al de generarlas. Si para generar la ecuación se derivó la trayectoria, para resolver la ecuación, tenemos que calcular primitivas.

El caso más sencillo de resolver es de las *ecuaciones en variables separables*. El procedimiento para resolverlas consiste en separar convenientemente las variables dependiente e independiente en los dos miembros de la ecuación, y calcular la primitiva en cada miembro.

En el proceso de resolución partimos de la ecuación diferencial, que es la siguiente:

$$dB = rBdt$$

Siempre bajo la condición final: $B(T) = 1$. Dividiendo entre B, la ecuación también se puede escribir como

$$\frac{1}{B}dB = rdt \qquad [0.13]$$

Finalmente se obtiene la solución de esta ecuación integrando los dos lados:

$$\int \frac{1}{B}dB = \int rdt \qquad [0.14]$$

Para calcular las primitivas, se agrupa las dos constantes de la integración, que sea lo siguiente:

$$\begin{aligned} \ln\, B &= rt + c \\ B &= e^{rt+c} \end{aligned}$$

El valor de c esta determinado al exigir la condición final:

$$B(T) = e^{rT+c} = 1 \Rightarrow rT + c = 0 \Rightarrow c = -rT$$

Para obtener el valor del activo sin riesgo en función del tiempo finalmente se sustituye el valor del parámetro en la solución:

$$B = B(t) = e^{rt-rT} = e^{-r(T-t)} \qquad [0.15]$$

Anexo V Proceso de Wiener o movimiento browniano

El proceso de Wiener, también conocido como movimiento browniano, fue observado por primera vez por Robert Brown (1828) para explicar el movimiento de partículas en líquidos y definido posteriormente por Albert Einstein (1905) y Marian von Smoluchowski (1906). Norbert Wiener (1923) aportó la primera prueba probabilística de la existencia del proceso de Wiener, que más tarde desarrolló Itô Kiyoshi (1951) para formular ecuaciones diferenciales estocásticas que se utilizan en diversos ámbitos de matemática financiera. Esto proceso aleatorio es el modelo básico de tiempo continuo, y su valor en el tiempo t normalmente se denota por $W(t)$. Por razones de simplicidad en este trabajo no nos vamos a concentrar en la definición formal de este proceso de Wiener, simplemente lo vemos de forma heurística, como límite de un modelo de tiempo discreto. Entonces un proceso de Wiener sigue la forma:

$$W(t_{k+1}) = W(t_k) + z(t_k)\sqrt{\Delta t}\,; \;\; con\, W(0) = 0 \qquad [0.16]$$

siendo $z(t_k)$ variables aleatorias normales estándar (es decir que siguen una distribución estándar normal, con media cero y varianza uno) y que son independientes entre sí. Teniendo esto en cuenta se sabe que la diferencia entre $W(t_{k+1}) - W(t_k)$ también son variables aleatorias distribuidas normalmente con media cero y varianza Δt. Más genérica, para $k < 1$:

$$W(t_l) - W(t_k) = \sum_{i=k}^{l-1} z(t_i)\sqrt{\Delta t}$$

Se deduce que $W(t_l) - W(t_k)$ esta distribuido normalmente con media cero y la varianza $t_l - t_k$. El proceso W se llama *camino aleatorio.* Entonces en el límite, si Δt converge a cero, se puede demonstrar que ese camino aleatorio converge a eso proceso del movimiento Browniano, o proceso de Wiener, también denotado W, que es la base matemática para la modelización estocástica en el modelo BS.

Este proceso de Wiener tiene las propiedades siguientes:

i.) $W(t) - W(\mathrm{s})$ esta distribuido de forma normal con media cero y varianza de $t - s$ para $0 < s < t$: $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$. Esto indica que el valor esperado de $[W(t + \Delta t) - W(t)]^2$ se comporta como Δt para pequeños $\Delta t > 0$.

ii.) El proceso W tiene incrementos independientes: para cualquier conjunto de tiempos $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, las variables aleatorias $W(t_2) - W(t_1), W(t_3) - W(t_2), \ldots, W(t_n) - W(t_{n-1})$ son independientes. Esto indica que si pensamos en W

como un proceso de precios, que la variación del precio mañana es independiente de la variación del precio hoy.

iii.) El proceso comienza en cero: $W(0) = 0$.

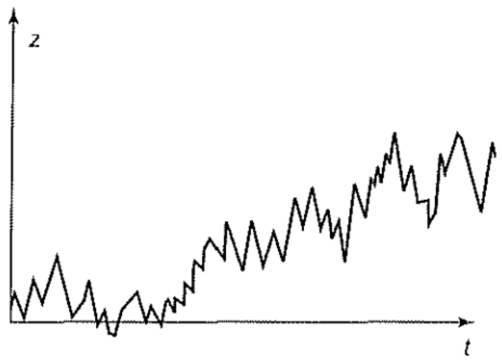
iv.) Las trayectorias muestrales $\{W(t); t \geq 0\}$ son funciones continuas de t, es decir que son continuas.

A pesar de su continuidad, las trayectorias del movimiento browniano no son diferenciables en ninguna parte. Intuitivamente, el movimiento browniano puede ir "a cualquier parte" en cualquier punto del intervalo siguiente, por corto que sea, porque el incremento es una extracción de una distribución normal. Este comportamiento "loco" también se refleja en el hecho de que si $t \to s$ el valor esperado viene a infinito:

$$E\left[\left(\frac{W(s) - W(t)}{t - s}\right)^2\right] = \frac{1}{t - s} \to \infty$$

Una trayectoria posible de un proceso de Wiener se pone en la Figura IV.I:

Figura IV.I: Trayectoria de un proceso de Wiener; Fuente: Luenberger (1998, p. 65)



Utilizando las propiedades de las expectativas condicionales y el hecho de que $W(t) - W(s)$ es independiente de $W(s)$, sabemos el valor esperado de un resultado futuro del movimiento browniano, condicionado a la información pasada y presente, es exactamente igual al valor presente:

$$\begin{aligned} E[W(t) \mid W(s)] &= E[W(t) - W(s) \mid W(s)] + E[W(s) \mid W(s)] \\ &= E[W(t) - W(s)] + W(s) \\ &= W(s) \end{aligned}$$

Es decir, el movimiento browniano es un proceso martingala:

$$E[W(t) \mid W(s)] = W(s)$$

De manera menos formal, puede decirse que la mejor estimación del valor futuro del movimiento browniano es su valor actual.

El movimiento browniano en sí mismo no es suficientemente flexible para modelizar diversos procesos de precios de activos. Generalizando consideramos el proceso de la forma:

$$X(t_{k+1}) = X(t_k) + \mu\big(t, X(t_k)\big)\Delta t + \sigma\big(t, X(t_k)\big)\sqrt{\Delta t} \cdot z(t_k)\ ; con\ X(0) = x \qquad [0.17]$$

Aquí, $z(t_k)$son variables aleatorias normales estándar independientes que siguen una distribución normal $\mathcal{N}(0, \mathrm{t})$, mientras que μ y σ son funciones deterministas de la variable del tiempo t y de la variable de estado x.

Llamamos μ a la *deriva* (*ingl. drift*) y σ a la función volatilidad. En el caso del modelo BS, se usa un proceso browniano geométrico, por lo que la interpretación de las dos variables μ y σ será la siguiente:

$$\begin{aligned} \mu\big(t, X(t_k)\big) &= \mu S_t \\ \sigma\big(t, X(t_k)\big) &= \sigma S_t \end{aligned} \qquad [0.18]$$

Entonces, si $\mu > 0$ representar procesos estocásticos que tienden a subir, mientras que $\mu < 0$ representa procesos estocásticos que tienden a bajar.

Si el término dW no estuviera presente, sería una ecuación diferencial ordinaria. Esto es fundamental, como en seguida se modeliza precios de los valores siguiendo esta *ecuación diferencial estocástica*, donde el movimiento browniano representará la incertidumbre sobre el precio futuro. En el límite, cuando t llega a cero, integramos y obtenemos:

$$X(t) = x + \int_0^t \mu(u, X(u))du + \int_0^t \sigma(u, X(u))dW(u)$$

o escrita de forma más popular:

$$dX(t) = \mu\big(t, X(t)\big)dt + \sigma\big(t, X(t)\big)dW(t)\ ; con\ X(0) = x \qquad [0.19]$$

Esta expresión se denomina *ecuación diferencial estocástica*, para el proceso X , que se denomina *proceso de difusión*.