



COMILLAS

UNIVERSIDAD PONTIFICIA

ICAI

GRADO EN INGENIERÍA EN TECNOLOGÍAS
INDUSTRIALES

TRABAJO FIN DE GRADO

***Modelo Fraccionario de las Líneas de Transmisión
Eléctrica de Paso Bajo: Comportamientos Dinámicos y
Análisis de Bifurcación***

Autor: Paula García-Gasco Solano

Director: D. Fco. Javier Rodríguez Gómez

Co-Director: D. Alberto Rodríguez Gómez

Madrid

Julio de 2024

Declaro, bajo mi responsabilidad, que el Proyecto presentado con el título

Modelo Fraccionario de las Líneas de

Transmisión Eléctrica de Paso Bajo:

Comportamientos Dinámicos y Análisis de Bifurcación

en la ETS de Ingeniería - ICAI de la Universidad Pontificia Comillas en el curso académico 2023/24 es de mi autoría, original e inédito y no ha sido presentado con anterioridad a otros efectos. El Proyecto no es plagio de otro, ni total ni parcialmente y la información que ha sido tomada de otros documentos está debidamente referenciada.

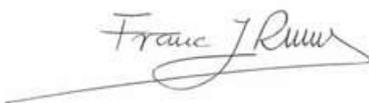
Fdo.: Paula García-Gasco Solano Fecha: 13/07/2024



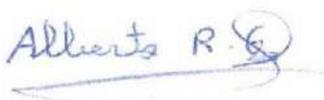
Autorizada la entrega del proyecto

LOS DIRECTORES DEL PROYECTO

Fdo.: Dr. Francisco Javier Rodríguez Gómez Fecha: 13/07/2024



Fdo.: Alberto Rodríguez Gómez Fecha: 13/07/2024





COMILLAS

UNIVERSIDAD PONTIFICIA

ICAI

GRADO EN INGENIERÍA EN TECNOLOGÍAS
INDUSTRIALES

TRABAJO FIN DE GRADO

***Modelo Fraccionario de las Líneas de Transmisión
Eléctrica de Paso Bajo: Comportamientos Dinámicos y
Análisis de Bifurcación***

Autor: Paula García-Gasco Solano

Director: D. Fco. Javier Rodríguez Gómez

Co-Director: D. Alberto Rodríguez Gómez

Madrid

Julio de 2024

MODELO FRACCIONARIO DE LAS LÍNEAS DE TRANSMISIÓN
ELÉCTRICA DE PASO BAJO:
COMPORTAMIENTOS DINÁMICOS Y ANÁLISIS DE BIFURCACIÓN

Autora: García-Gasco Solano, Paula.

Directores: Rodríguez Gómez, Fco. Javier; Rodríguez Gómez, Alberto.

Entidad Colaboradora: ICAI – Universidad Pontificia Comillas.

RESUMEN DEL PROYECTO

I. INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS

Con el paso de los años, debido a la dificultad que supone resolver ecuaciones diferenciales de órdenes altos, se han desarrollado nuevas herramientas y métodos de resolución y simplificación, con el objetivo de obtener resultados más eficientes, rigurosos y precisos. Sin embargo, el nivel de dificultad para resolver algunas ecuaciones diferenciales de orden fraccionario y modelos matemáticos estándar de orden entero, imposibilitan su aplicación en la vida real.

Los solitones son ondas solitarias que aparecen en los sistemas de telecomunicaciones para el transporte de información y aumentar la capacidad y concreción de datos. El presente proyecto se centra en el estudio y diseño de diferentes modelos matemáticos para el análisis de las ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento dinámico y bifurcaciones de las ondas solitarias y viajeras, también conocidas como solitones.

Para ello, se realizarán simulaciones numéricas de los modelos numéricos con el apoyo del software *Wolfram Mathematica*®.

Consecuentemente, los principales objetivos a seguir en este proyecto para su correcto desarrollo serían:

Un primer capítulo presentando el modelo fraccionario de las líneas de transmisión eléctrica de paso bajo, a partir del cual se desarrollara el proyecto.

Seguidamente, se estudiará el comportamiento de los solitones en modelos fraccionarios según el método sub-ODE modificado. En el caso de las ecuaciones diferenciales parciales no lineales, este nos permite obtener múltiples soluciones partiendo de ecuaciones sub-ODE generalizadas.

A continuación, se pasará a analizar el método de expansión (G' / G) asociado con la ecuación diferencial de segundo orden, la ecuación generalizada de Riccati y la ecuación elíptica de Jacobi, los cuales generan un amplio número de posibles soluciones exactas a las ecuaciones que describen el comportamiento dinámico de las líneas de transmisión eléctrica de paso bajo.

El siguiente objetivo será estudiar método de transformación lineal fraccionario, puesto que obtiene soluciones localizadas generales que no proporcionan los otros dos métodos anteriores.

Posteriormente, se desarrollará el método de expansión (G' / G^2). Este método aproxima la ecuación del comportamiento dinámico de los solitones de líneas de transmisión eléctrica

de paso bajo a una ecuación diferencial ordinaria mediante una transformación lineal simple. Este método permite clasificar las soluciones en tres grupos: hiperbólicas, trigonométricas y racionales.

Una vez analizados los métodos anteriores, se procederá a compararlos mediante el uso de números, tablas y gráficos para poder concluir cual es el más óptimo en función de la complejidad y precisión.

Finalmente, se desarrollarán las conclusiones obtenidas tras la aplicación de cada método matemático y se añadirán unas líneas futuras de investigación.

Palabras clave: Método de expansión, solitones, comportamiento dinámico, líneas eléctricas de paso bajo, Ecuación de 2º orden lineal, Ecuación Generalizada de Riccati, Ecuación Elíptica de Jacobi.

II. METODOLOGÍA

En el desarrollo del Proyecto se procederá de la siguiente manera:

A) En el primer capítulo se lleva a cabo la introducción del modelo fraccionario del comportamiento de los solitones en líneas de transmisión eléctrica de paso bajo.

B) En el segundo, se analiza el nuevo método sub-ODE modificado aplicado a los solitones tanto numérica, como gráficamente.

C) En el tercero se realiza el estudio del método de expansión (G' / G) aplicado a la ecuación de Riccati unificada presentando los resultados gráficamente para la posterior comparación de métodos.

D) Se analiza el método de expansión (G' / G) aplicado a la ecuación Elíptica de Jacobi y se presentan gráficamente los resultados obtenidos.

E) Se estudia el método de expansión (G' / G^2) tanto numérica como gráficamente.

F) Finalmente, se compara los resultados obtenidos gráficamente a partir de cada uno de los métodos para obtener el más preciso y eficaz. Asimismo, se añaden unas futuras líneas de investigación.

III. RESULTADOS

Entre los diversos resultados obtenidos a lo largo del presente proyecto, resulta relevante presentar en esta parte introductoria, los resultados obtenidos en diferentes casos para los cuatro métodos de expansión estudiados:

III.1. Método de Expansión (G' / G) aplicado a la ODE lineal de 2° Orden

El primer método a estudiar se corresponde con el Método de Expansión (G' / G) aplicado a la ODE lineal de 2° orden, el cual se particularizará a la PDE no lineal que define el comportamiento dinámico de los solitones. A continuación, se muestran los resultados principales y su resolución gráfica.

Sean las ecuaciones que representan el comportamiento dinámico de los solitones:

$$\begin{aligned} \text{(ODE)} &\equiv \frac{K^2}{12} V''(\xi) + (K - U) V(\xi) + \alpha U V^2(\xi) - \beta U V^3(\xi) = 0 \\ V(\xi) &= a_0 + a_1 \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right) \text{ para } a_1 \neq 0. \end{aligned} \quad (1.1.1)$$

Y sea la ecuación diferencial lineal de segundo orden:

$$G''(\xi) + \lambda G'(\xi) + \mu G(\xi) = 0. \quad (1.1.2)$$

Resolviendo el sistema algebraico de ecuaciones obtenido, expresando la ODE en términos de potencias de $\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)$ y agrupando los términos del mismo orden e igualándolos a cero, se obtienen los siguientes valores para las constantes:

$$\left(\begin{array}{l} a_0 \rightarrow \frac{\alpha \left(1 - \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}\right)}{3\beta} \quad a_1 \rightarrow -\frac{2\alpha}{3\beta \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}} \quad K \rightarrow -\frac{24\alpha^2}{(2\alpha^2 - 9\beta)(\lambda^2 - 4\mu)} \quad U \rightarrow \frac{216\alpha^2\beta}{(2\alpha^2 - 9\beta)^2(\lambda^2 - 4\mu)} \\ a_0 \rightarrow \frac{\alpha \left(\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}} + 1\right)}{3\beta} \quad a_1 \rightarrow \frac{2\alpha}{3\beta \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}} \quad K \rightarrow -\frac{24\alpha^2}{(2\alpha^2 - 9\beta)(\lambda^2 - 4\mu)} \quad U \rightarrow \frac{216\alpha^2\beta}{(2\alpha^2 - 9\beta)^2(\lambda^2 - 4\mu)} \end{array} \right)$$

Además, estas soluciones se clasificarán en tres casos:

$$\text{Caso I: } \lambda^2 - 4\mu > 0 \quad \left\{ u_1(\xi), u_2(\xi) \right.$$

$$\text{Caso II: } \lambda^2 - 4\mu < 0 \quad \left\{ u_3(\xi), u_4(\xi) \right.$$

$$\text{Caso III: } \lambda^2 - 4\mu = 0 \quad \left\{ u_5(\xi), u_6(\xi) \right.$$

Tomando los siguientes valores:

$$\left(\begin{array}{ll} \{\alpha, \beta, \delta\} & \{2, 2, 2\} \\ \omega = & 1.57117 \\ \xi = & 0.58554 x - 1.57117 t \end{array} \right)$$

se ha obtenido una gráfica correspondiente al caso I y otra correspondiente al caso II.

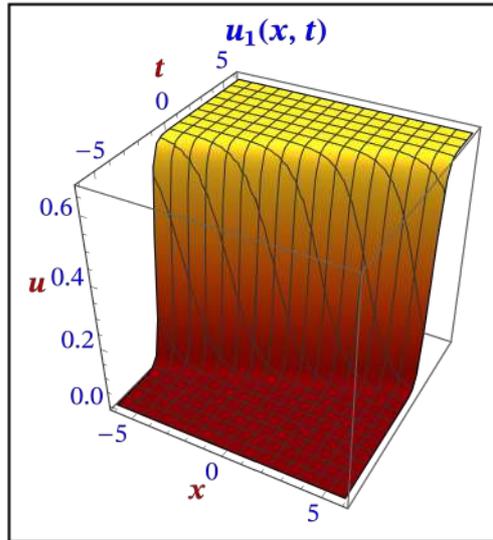


Figura 1. Solución de la ecuación de propagación de los solitones para $\alpha, \beta, \delta=2, \lambda=1.5$ y $\mu=0.05$, caso I de soluciones.

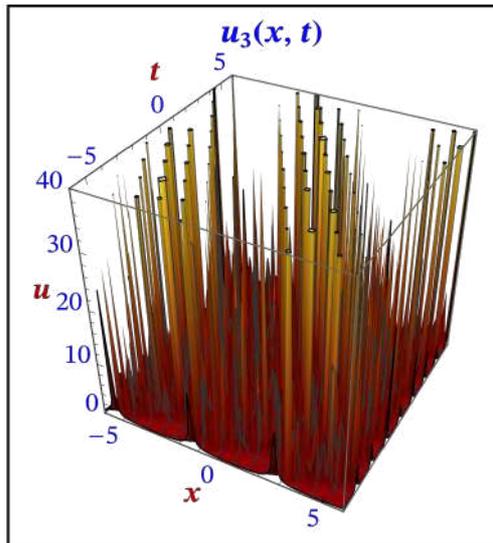


Figura 2. Solución de la ecuación de propagación de los solitones para $\alpha, \beta, \delta=2, \lambda=1$ y $\mu=2$, caso II de soluciones.

III.II. Método de Expansión (G' / G) aplicado a la Ecuación Generalizada de Riccati

El segundo método a estudiar se corresponde con el Método de Expansión (G' / G) aplicado a la Ecuación Generalizada de Riccati, particularizado a la PDE no lineal que define el comportamiento dinámico de los solitones. A continuación, se muestran los resultados principales y su resolución gráfica.

Sean las ecuaciones que representan el comportamiento dinámico de los solitones:

$$(ODE) \equiv \frac{K^2}{12} V''(\xi) + (K - U) V(\xi) + \alpha U V^2(\xi) - \beta U V^3(\xi) = 0 \quad (1.2.1)$$

$$V(\xi) = a_0 + a_1 \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right) \text{ para } a_1 \neq 0.$$

Y sea la ecuación Generalizada de Riccati:

$$G'(\xi) = r + p G(\xi) + q G^2(\xi). \quad (1.2.2)$$

Resolviendo el sistema algebraico de ecuaciones obtenido por el mismo procedimiento que con el método anterior:

$$\left(\begin{array}{l} a_0 \rightarrow 0 \quad a_1 \rightarrow \frac{2\alpha}{3p\beta} \quad K \rightarrow \frac{24\alpha^2}{(9\beta-2\alpha^2)p^2+8qr\alpha^2} \quad U \rightarrow \frac{216p^2\alpha^2\beta}{((9\beta-2\alpha^2)p^2+8qr\alpha^2)^2} \\ a_0, r \rightarrow 0 \quad a_1 \rightarrow \frac{2\alpha}{3\beta p} \quad K \rightarrow \frac{24\alpha^2}{p^2(9\beta-2\alpha^2)} \quad U \rightarrow \frac{216\alpha^2\beta}{p^2(9\beta-2\alpha^2)^2} \end{array} \right)$$

Además, estas soluciones se clasificarán en cuatro casos:

$$\text{Caso I: } p^2 - 4qr > 0, pq \neq 0 \text{ o } qr \neq 0 \quad \left\{ u_1(\xi), \dots, u_{12}(\xi) \right.$$

$$\text{Caso II: } p^2 - 4qr < 0, pq \neq 0 \text{ o } qr \neq 0 \quad \left\{ u_{13}(\xi), \dots, u_{24}(\xi) \right.$$

$$\text{Caso II: } r = 0 \quad pq \neq 0 \quad \left\{ u_{25}(\xi), u_{26}(\xi) \right.$$

$$\text{Caso IV: } r = p = 0 \quad q \neq 0 \quad \left\{ u_{27}(\xi) \right.$$

Para el caso I, cuando $p^2 - 4qr$ es mayor que cero, y los siguientes valores:

$$\left(\begin{array}{l} \{\alpha, \beta\} \quad \quad \quad \{2, 2\} \\ \{p, q, r\} = \quad \quad \{1.5, 0.05, 1\} \\ \omega = \quad \quad \quad 2.5873 \\ \xi = \quad \quad \quad 0.665282x - 2.5873t \end{array} \right)$$

se ha obtenido la siguiente gráfica :

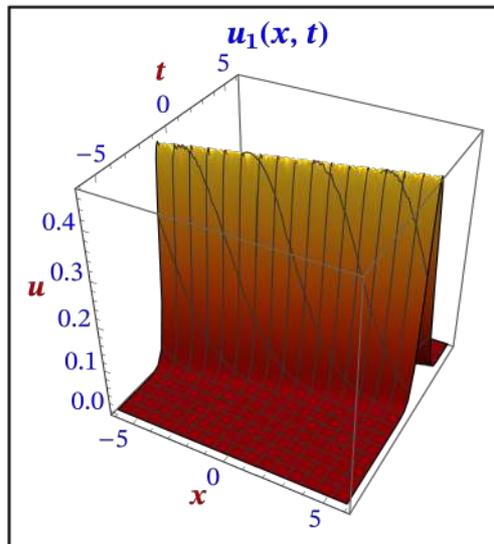


Figura 3. Solución a la ecuación de propagación de los solitones para $\alpha, \beta=2, p=1.5, q=0.05$ y $r=1$ perteneciente al caso I de soluciones ($p^2 - 4qr > 0$).

En cambio, para el caso II y los siguientes valores:

$$\left(\begin{array}{l} \{\alpha, \beta\} \\ \{p, q, r\} = \\ \omega = \\ \xi = \end{array} \begin{array}{l} \{2, 2\} \\ \{1.5, 1, 2\} \\ 0.720854 \\ 0.351161 x - 0.720854 t \end{array} \right)$$

algunos ejemplos de gráficas obtenidos son :

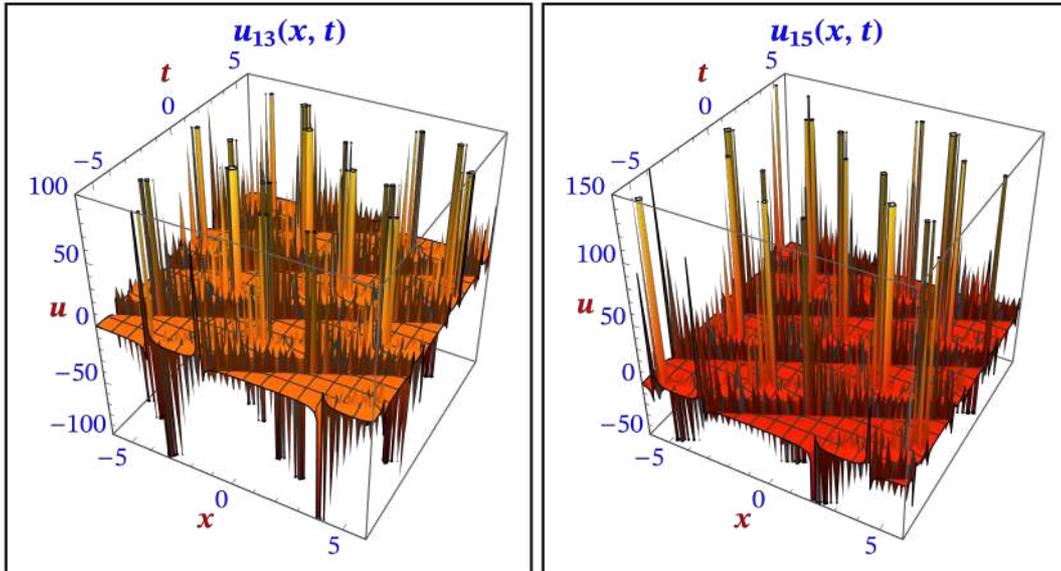


Figura 4. Soluciones a la ecuación de propagación de los solitones para $\alpha, \beta=2, p=1.5, q=1$ y $r=2$ pertenecientes al caso II de soluciones ($p^2 - 4 q r < 0$).

III.III. Método de Expansión (G' / G) aplicado a la Ecuación Elíptica de Jacobi

El tercer método a estudiar se corresponde con el Método de Expansión (G' / G) aplicado a la Ecuación Elíptica de Jacobi, particularizado a la PDE no lineal que define el comportamiento dinámico de los solitones. A continuación, se muestran los resultados principales y su resolución gráfica.

Sean las ecuaciones que representan el comportamiento dinámico de los solitones:

$$\begin{aligned} \text{(ODE)} \equiv \frac{K^2}{12} V''(\xi) + (K - U) V(\xi) + \alpha U V^2(\xi) - \beta U V^3(\xi) &= 0 \\ V(\xi) = a_0 + a_1 \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right) &\text{ para } a_1 \neq 0 \end{aligned} \tag{1.3.1}$$

Y sea la ecuación Elíptica de Jacobi:

$$(G'(\xi))^2 = P G^4(\xi) + Q G^2(\xi) + R \tag{1.3.2}$$

Resolviendo el sistema algebraico de ecuaciones obtenido por el mismo procedimiento que con los métodos anteriores:

$$\left\{ \begin{array}{l} i = 1 \quad a_0 \rightarrow \frac{\alpha}{3\beta} \quad a_1 \rightarrow -\frac{\alpha}{3\beta\sqrt{Q}} \quad K \rightarrow -\frac{6\alpha^2}{Q(2\alpha^2-9\beta)} \quad U \rightarrow \frac{54\alpha^2\beta}{Q(2\alpha^2-9\beta)^2} \\ i = 2 \quad a_0 \rightarrow \frac{\alpha}{3\beta} \quad a_1 \rightarrow \frac{\alpha}{3\beta\sqrt{Q}} \quad K \rightarrow -\frac{6\alpha^2}{Q(2\alpha^2-9\beta)} \quad U \rightarrow \frac{54\alpha^2\beta}{Q(2\alpha^2-9\beta)^2} \end{array} \right.$$

Además, estas soluciones se clasificarán en cuatro casos:

Caso I: $i = 1$, $a_0 \rightarrow \frac{\alpha}{3\beta}$ y $a_1 \rightarrow -\frac{\alpha}{3\beta\sqrt{Q}}$ $\{ u_{1,1}(\xi), \dots, u_{1,n}(\xi) \}$

Caso II: $i = 2$, $a_0 \rightarrow \frac{\alpha}{3\beta}$ y $a_1 \rightarrow \frac{\alpha}{3\beta\sqrt{Q}}$ $\{ u_{2,1}(\xi), \dots, u_{2,n}(\xi) \}$

Para los siguientes valores en el caso I:

$$\left(\begin{array}{l} \{ \alpha, \beta, \delta, k^2 \} \quad \{ 3., 51.923, 0.980552, 0.866025, 0.75 \} \\ \{ C_1, C_2 \} \quad \{ C_1 \rightarrow 1, C_2 \rightarrow 1 \} \end{array} \right)$$

Se han obtenido las gráficas mostradas a continuación para cada caso:

$$u_{i,1,1}(\xi) = u_{i,1,1}(x, t):$$

$$\{ P, Q, R \} = \{ 0.75, -1.75, 1 \}$$

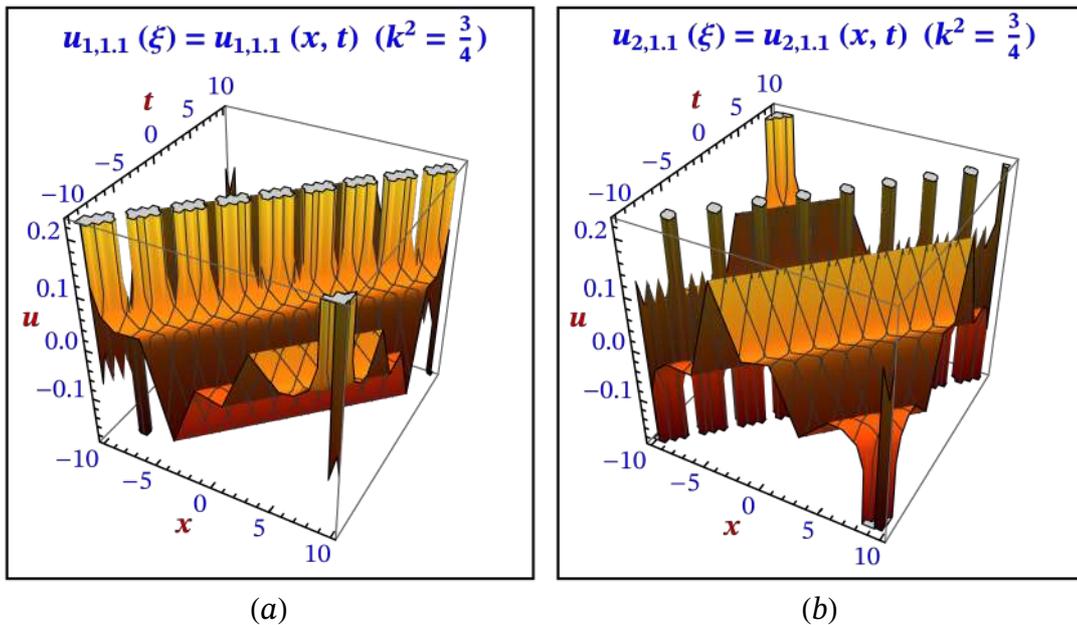


Figura 5. Soluciones a la ecuación de propagación de los solitones para $k^2=0.75$, $C_1=1$, $C_2=1$, $P=0.75$, $Q=-1.75$ y $R=1$ (a) caso I de soluciones ($i = 1$) y (b) caso II ($i = 2$).

$$u_{i,3}(\xi) = u_{i,3}(x, t):$$

$$\{P, Q, R\} = \{-1, 1.25, -0.25\}$$

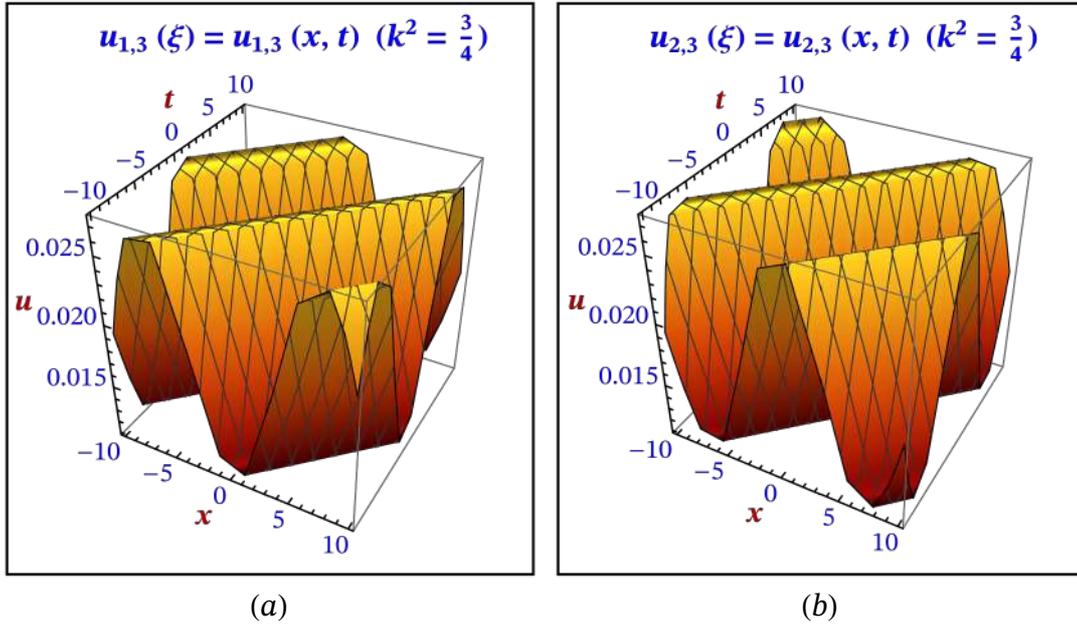


Figura 6. Soluciones a la ecuación de propagación de los solitones para $k^2=0.75$, $C_1=1$, $C_2=1$, $P=-1$, $Q=1.25$ y $R=-0.25$ (a) caso I de soluciones ($i = 1$) y (b) caso II ($i = 2$).

$$u_{i,11.1}(\xi) = u_{i,11.1}(x, t):$$

$$\{P, Q, R\} = \{-0.25, 0.875, -0.015625\}$$

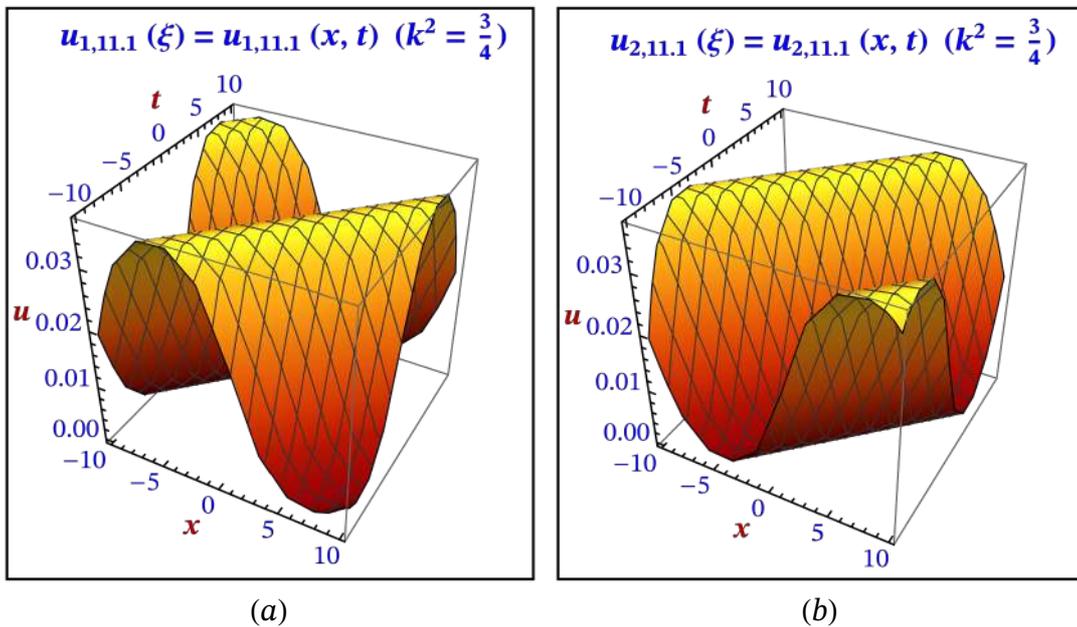


Figura 7. Soluciones a la ecuación de propagación de los solitones para $k^2=0.75$, $C_1=1$, $C_2=1$, $P=-0.25$, $Q=0.875$ y $R=-0.015625$ (a) caso I de soluciones ($i = 1$) y la (b) caso II ($i = 2$).

III.IV. Método de Expansión (G' / G^2) aplicado a la Ecuación Generalizada de Riccati

El último y cuarto método a estudiar se corresponde con el Método de Expansión (G' / G^2) aplicado a la Ecuación Generalizada de Riccati, particularizado a la PDE no lineal que define el comportamiento dinámico de los solitones. A continuación, se mostrarán los resultados principales y su resolución gráfica.

Sean las ecuaciones que describen el comportamiento dinámico de los solitones:

$$(PDE) \equiv L C_0 V_{tt} - V_{xx} - \frac{\delta^2}{12} V_{xxxx} - L C v (V^2)_{tt} + L C \beta (V^3)_{tt} = 0$$

$$u(\xi) = V(\xi) = \alpha_0 + \alpha_1 \left(\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)} \right) + \beta_1 \left(\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)} \right)^{-1} \tag{1.4.1}$$

Y sea la ecuación Generalizada de Riccati:

$$(ODE - Riccati) \equiv \left(\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)} \right)' = a + b \left(\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)} \right) + c \left(\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)} \right)^2 \tag{1.4.2}$$

Resolviendo el sistema algebraico de ecuaciones obtenido por el mismo procedimiento que con los métodos anteriores:

$$\left(\begin{array}{llllll} \alpha_0 \rightarrow \frac{v}{3\beta} & \alpha_1 \rightarrow \frac{v \sqrt{\frac{c}{a}}}{3\beta} & \beta_1 \rightarrow 0 & k \rightarrow \frac{\sqrt{6} v \sqrt{\frac{1}{ac(2v^2-9\beta)}}}{\delta} & \omega \rightarrow \frac{3 \sqrt{6} v \sqrt{\frac{\beta}{acC_0L}}}{\delta(2v^2-9\beta)} \\ \alpha_0 \rightarrow \frac{v}{3\beta} & \alpha_1 \rightarrow 0 & \beta_1 \rightarrow \frac{v \sqrt{\frac{a}{c}}}{3\beta} & k \rightarrow \frac{\sqrt{6} v \sqrt{\frac{1}{ac(2v^2-9\beta)}}}{\delta} & \omega \rightarrow \frac{3 \sqrt{6} v \sqrt{\frac{\beta}{acC_0L}}}{\delta(2v^2-9\beta)} \\ \alpha_0 \rightarrow \frac{v}{3\beta} & \alpha_1 \rightarrow \frac{v \sqrt{\frac{c}{a}}}{6\beta} & \beta_1 \rightarrow \frac{v}{6\beta \sqrt{\frac{c}{a}}} & k \rightarrow \frac{\sqrt{\frac{3}{2}} v \sqrt{\frac{1}{ac(2v^2-9\beta)}}}{\delta} & \omega \rightarrow \frac{3 \sqrt{\frac{3}{2}} v \sqrt{\frac{\beta}{acC_0L}}}{\delta(2v^2-9\beta)} \\ \alpha_0 \rightarrow \frac{v}{3\beta} & \alpha_1 \rightarrow \frac{v \sqrt{\frac{c}{a}}}{3 \sqrt{2} \beta} & \beta_1 \rightarrow \frac{v}{3 \sqrt{2} \beta \sqrt{\frac{c}{a}}} & k \rightarrow \frac{\sqrt{3} v \sqrt{\frac{1}{ac(2v^2-9\beta)}}}{\delta} & \omega \rightarrow \frac{3 \sqrt{3} v \sqrt{\frac{\beta}{acC_0L}}}{\delta(2v^2-9\beta)} \end{array} \right)$$

Además, estas soluciones se clasificarán en cuatro casos:

- Caso I: soluciones trigonométricas $(ac) > 0 \quad b = 0 \quad \{ u_{1,1}(\xi), \dots, u_{1,4}(\xi) \}$
- Caso II: soluciones hiperbólicas $(ac) < 0 \quad b = 0. \quad \{ u_{2,1}(\xi), \dots, u_{2,4}(\xi) \}$
- Caso III: soluciones racionales $a = 0 \quad c \neq 0. \quad \{ u_{3,1}(\xi), \dots, u_{3,4}(\xi) \}$

Para cada caso, aplicando los siguientes valores:

$$\left(\begin{array}{ll} \{v, \beta, \delta, L, C_0\} & \{0.015, -0.0025, 0.1, 1, 1\} \\ \{C_1, C_2\} & \{C_1 \rightarrow 1, C_2 \rightarrow 1\} \end{array} \right)$$

Las gráficas correspondientes a cada caso se muestran a continuación :

Caso I: $\{a, b, c\} = \{1, 0, 2\}$.

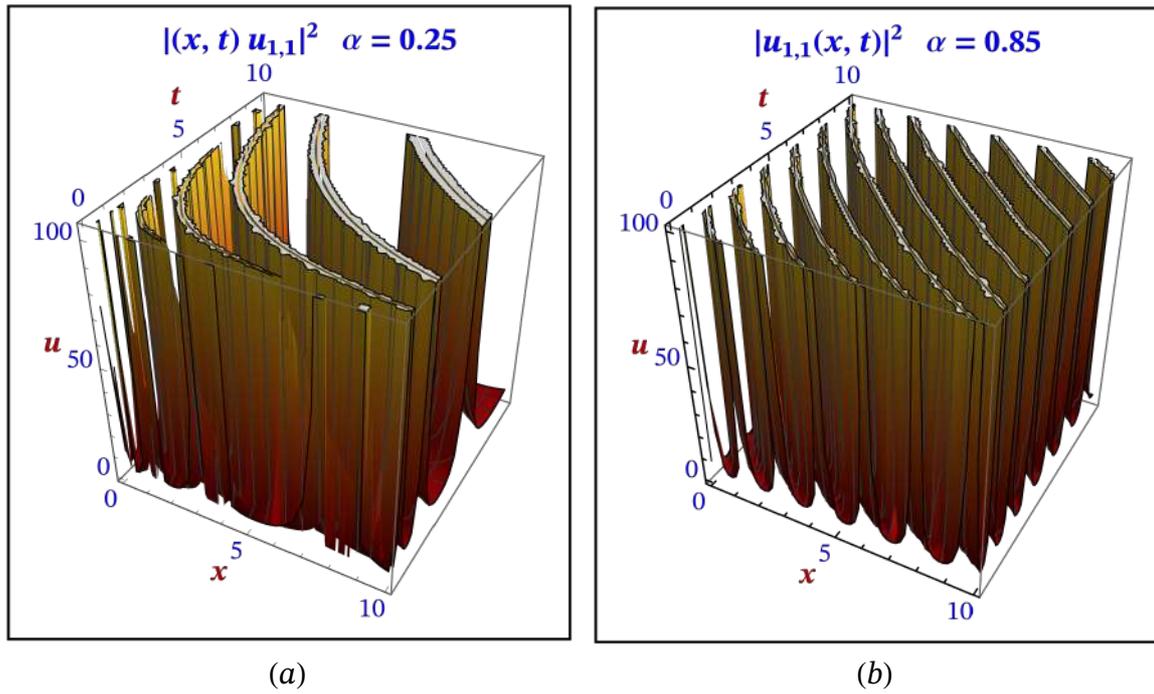


Figura 8. Soluciones a la ecuación de propagación de los solitones para $\nu = 0.015$, $\beta = -0.0025$, $\delta = 0.1$, $L = 1$, $C_0 = 1$, $C_1 = 1$, $C_2 = 1$, $a = 1$, $b = 0$ y $c = 2$, siendo (a) $\alpha = 0.25$ y (b) $\alpha = 0.85$.

Caso II: $\{a, b, c\} = \{-1, 0, 2\}$

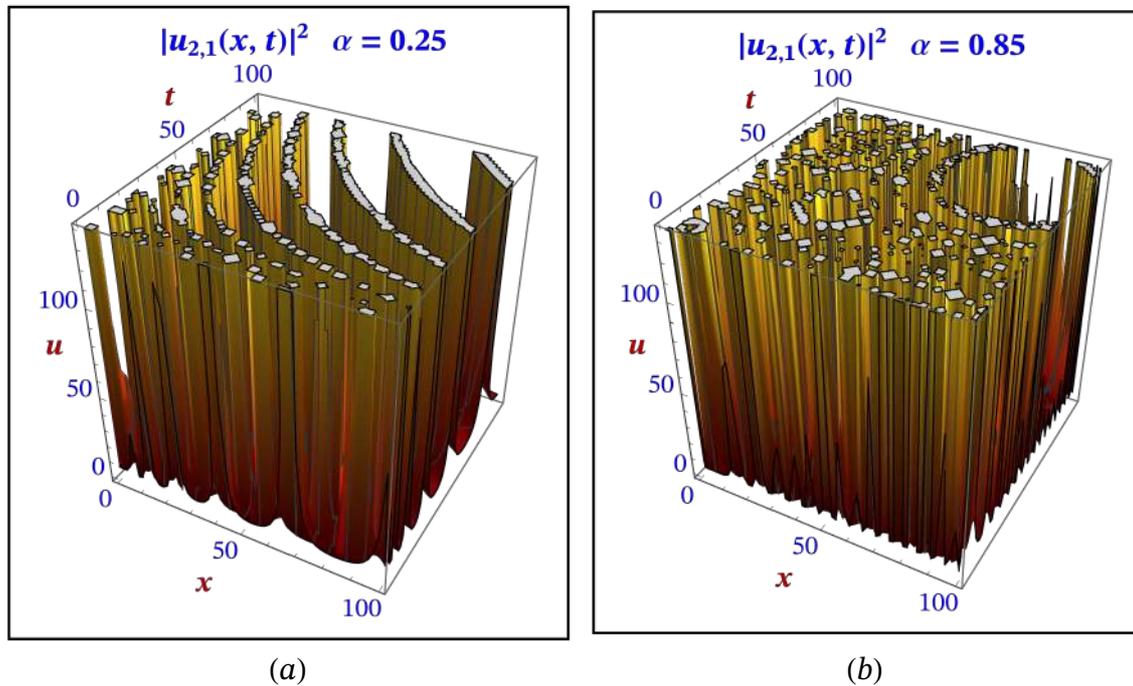


Figura 9. Soluciones a la ecuación de propagación de los solitones para $\nu = 0.015$, $\beta = -0.0025$, $\delta = 0.1$, $L = 1$, $C_0 = 1$, $C_1 = 1$, $C_2 = 1$, $a = -1$, $b = 0$ y $c = 2$, siendo (a) $\alpha = 0.25$ y (b) $\alpha = 0.85$.

IV. CONCLUSIONES

Tras realizar un análisis exhaustivo de cada método estudiado a lo largo del proyecto, se pueden realizar las siguientes conclusiones:

1. El método de expansión (G'/G) en función de la ecuación diferencial de 2º orden facilita la transformación de ecuaciones no lineales complejas de segundo orden en ecuaciones más sencillas y manejables, simplificando el proceso de resolución.

Además, permite conseguir una representación precisa de fenómenos dinámicos complejos.

2. El método de expansión (G'/G) en función de la ecuación generalizada de Riccati se consigue definir una gran variedad de soluciones en función de una serie de parámetros (p, q, r), que se clasificarán en función de si el valor de $(p^2 - 4qr)$ es mayor, menor o igual que cero.

Cabe destacar su facilidad adaptándose a diferentes condiciones iniciales y parámetros específicos.

3. Con este método de expansión (G'/G) en función de la ecuación elíptica de Jacobi se obtienen una serie de soluciones expresadas en términos de funciones elípticas y sus relaciones. Este método se caracteriza por ser el más eficaz y preciso de los estudiados.

4. El método de expansión (G'/G^2) asociado con la ecuación generalizada de Riccati proporciona una mayor flexibilidad y capacidad de resolución que el método de expansión (G'/G), permitiendo alcanzar soluciones más generales.

V. LÍNEAS FUTURAS DE INVESTIGACIÓN

Los métodos de expansión (G'/G) y (G'/G^2) han demostrado ser una herramienta de gran utilidad y eficaz para obtener soluciones exactas a ecuaciones diferenciales no lineales.

Para continuar profundizando a cerca de este proyecto se proponen las siguientes líneas futuras de investigación:

1. En primer lugar se propone la extensión de los métodos a ecuaciones diferenciales de orden superior, como tercer y cuarto orden lineales.
2. Otra posible líneas de trabajo se corresponde con el desarrollo y estudio del método de expansión (G'/G^2) aplicado a la ecuación elíptica de Jacobi.
3. Diseño de nuevos Métodos Analíticos:
 - (a) Nuevas líneas de investigación en la actualidad son la aplicación de los métodos analíticos estudiados (i) método de Expansión ($\frac{G'}{G}$) y (ii) el método de Expansión ($\frac{G'}{G^2}$) para deducir las nuevas soluciones exactas para ecuaciones diferenciales fraccionarias no lineales (*nonlinear partial differential equations-NPDEs*), tales como la ecuación de tiempo fraccionaria no lineal de Harry Dym (HD):

$$D_t^\alpha u(x, t) = u^3(x, t) u_{xxx}(x, t) \quad 0 < \alpha \leq 1$$

$$u(x, 0) = \left(a - \frac{3\sqrt{b}}{2} x \right)^{\frac{2}{3}} \quad (1.0.3)$$

• $D_t^\alpha \equiv$ derivada fraccionaria de orden α en el sentido de Caputo

y la ecuación de onda larga regularizada simétrica (*symmetric regularized long wave-SRLW*)

$$D_t^{2\alpha} u + D_x^{2\alpha} u + u D_t^\alpha (D_x^\alpha u) + D_x^\alpha u D_t^\alpha u + D_t^{2\alpha} (D_x^{2\alpha} u) = 0, \quad 0 < \alpha \leq 1$$

• $D_t^\alpha \equiv$ derivada conformable de orden α . (1.0.4)

(b) Así mismo, son objeto de estudio y diseño de nuevos algoritmos basados en un tercer método: (iii) el método de la función multi-exp (*multi-exp-function method-MEFM*) que calcule las soluciones de ondas múltiples (*multiple wave solution-MVS*) en ecuaciones no lineales de dimensión (2+1), determinando las soluciones de ondas múltiples para el Modelo de Gilson-Pickering que contiene soluciones de tipo uno, dos y tres solitones y en la ecuación (2+1)-dimensional Bogoyavlenskii-Kadomtsev-Petviashvili (BKP):

$$u_{xxt} + u_{xxxxy} + 12 u_{xx} u_{xy} + 8 u_x u_{xxy} + 4 u_{xxx} u_y = \gamma u_{yyy}, \quad \gamma = \pm 1$$

o

$$(u_{xt} + u_{xxxxy} + 8 u_x u_{xy} + 4 u_{xx} u_y)_x = \gamma u_{yyy}$$

• $u(x, y, t) \equiv$ amplitud de la onda (1.0.5)

4. Como última línea de investigación, se plantea el desarrollo de modelos descriptivos para prever el comportamiento dinámico de los solitones, permitiendo controlar a las empresas del sector eléctrico el transporte eléctrico, en situaciones de fluctuación de la demanda.

FRACTIONAL MODEL OF LOW-PASS ELECTRICAL
TRANSMISSION LINES:
DYNAMIC BEHAVIOR AND BIFURCATION ANALYSIS

I. INTRODUCTION AND OBJECTIVES

Over the years, due to the difficulty of solving high-order differential equations, new tools and methods for resolution and simplification have been developed with the goal of obtaining more efficient, rigorous, and precise results. However, the level of difficulty in solving some fractional-order differential equations and standard integer-order mathematical models makes their applications in real life impossible.

Solitons are solitary waves that appear in telecommunication systems for information transport, increasing data capacity and precision. This project focuses on the study and design of different mathematical models for analyzing the differential equations that describe the dynamic behavior and bifurcations of solitary and traveling waves, also known as solitons.

To achieve this, numerical simulations of the mathematical models will be performed using the *Wolfram Mathematica*® software.

Consequently, the main objectives of this project for its proper development are:

A first chapter presenting the fractional model of low-pass electrical transmission lines, from which the project will be developed.

Subsequently, the behavior of solitons in fractional models will be studied according to the modified sub-ODE method. In the case of nonlinear partial differential equations, this allows obtaining multiple solutions from generalized sub-ODE equations.

Next, the expansion method (G' / G) associated with the second-order differential equation, the generalized Riccati equation, and the Jacobi elliptic equation will be analyzed, generating a large number of possible exact solutions to the equations that describe the dynamic behavior of low-pass electrical transmission lines.

The following objective will be to study the fractional linear transformation method, as it obtains general localized solutions that the previous two methods do not provide.

To continue, the expansion method (G' / G^2) will be developed. This method approximates the equation of the dynamic behavior of solitons in low-pass electrical transmission lines to an ordinary differential equation through a simple linear transformation. This method allows classifying the solutions into three groups: hyperbolic, trigonometric, and rational.

Once the previous methods have been analyzed, they will be compared using numbers, tables, and graphs to conclude which is the most optimal in terms of complexity and precision.

Finally, the conclusions obtained after applying each mathematical method will be developed, and some future lines of research will be added.

Keywords of the project: Expansion Method, solitons, dynamic behavior, low-pass electrical transmission lines, Second-Order Linear ODE, Generalized Riccati Equation, Jacobi Elliptic Equation.

II. METHODOLOGY

This project will be developed in the following manner:

- A)** In the first chapter, the introduction of the fractional model of the behavior of solitons in low-pass electrical transmission lines is carried out.
 - B)** In the second chapter, the new modified sub-ODE method applied to solitons is analyzed both numerically and graphically.
 - C)** In the third chapter, the study of the expansion method (G' / G) applied to the generalized Riccati equation is conducted, presenting the results graphically for the subsequent comparison of methods
 - D)** The expansion method (G' / G) applied to the Jacobi elliptic equation is analyzed, and the results obtained are presented graphically.
 - E)** The expansion method (G' / G^2) is studied both numerically and graphically.
 - F)** Finally, the results obtained graphically from each of the methods are compared to determine the most accurate and effective one. Additionally, future lines of research are proposed.
-

III. RESULTS

Among the various results obtained throughout this project, it is relevant to present in this introductory part the results obtained in different cases for the four expansion methods studied:

III.I. Expansion Method (G' / G) applied to the Second-Order Linear ODE

The first method to be studied corresponds to the Expansion Method (G' / G) applied to the second-order linear ODE, which will be particularized to the nonlinear PDE that defines the dynamic behavior of solitons. Below, the main results and their graphical resolution are shown.

Let the equations that represent the dynamic behavior of solitons be:

$$\begin{aligned} \text{(ODE)} &\equiv \frac{K^2}{12} V''(\xi) + (K - U) V(\xi) + \alpha U V^2(\xi) - \beta U V^3(\xi) = 0 \\ V(\xi) &= a_0 + a_1 \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right) \text{ for } a_1 \neq 0. \end{aligned} \quad (1.1.1)$$

And let the second-order linear differential equation be:

$$G''(\xi) + \lambda G'(\xi) + \mu G(\xi) = 0. \quad (1.1.2)$$

Solving the algebraic system of equations obtained, expressing the ODE in terms of powers of $\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)$ and grouping the terms of the same order and equating them to zero, the following values for the constants are obtained:

$$\left(\begin{array}{l} a_0 \rightarrow \frac{\alpha \left(1 - \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}} \right)}{3\beta} \quad a_1 \rightarrow -\frac{2\alpha}{3\beta \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}} \quad K \rightarrow -\frac{24\alpha^2}{(2\alpha^2 - 9\beta)(\lambda^2 - 4\mu)} \quad U \rightarrow \frac{216\alpha^2\beta}{(2\alpha^2 - 9\beta)^2(\lambda^2 - 4\mu)} \\ a_0 \rightarrow \frac{\alpha \left(\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}} + 1 \right)}{3\beta} \quad a_1 \rightarrow \frac{2\alpha}{3\beta \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}} \quad K \rightarrow -\frac{24\alpha^2}{(2\alpha^2 - 9\beta)(\lambda^2 - 4\mu)} \quad U \rightarrow \frac{216\alpha^2\beta}{(2\alpha^2 - 9\beta)^2(\lambda^2 - 4\mu)} \end{array} \right)$$

In addition, these solutions will be classified into three cases:

$$\text{Case I: } \lambda^2 - 4\mu > 0 \quad \left\{ u_1(\xi), u_2(\xi) \right.$$

$$\text{Case II: } \lambda^2 - 4\mu < 0 \quad \left\{ u_3(\xi), u_4(\xi) \right.$$

$$\text{Case III: } \lambda^2 - 4\mu = 0 \quad \left\{ u_5(\xi), u_6(\xi) \right.$$

Using the following values:

$$\left(\begin{array}{ll} \{\alpha, \beta, \delta\} & \{2, 2, 2\} \\ \omega = & 1.57117 \\ \xi = & 0.58554 x - 1.57117 t \end{array} \right)$$

a graph corresponding to case I and another corresponding to case II have been obtained.

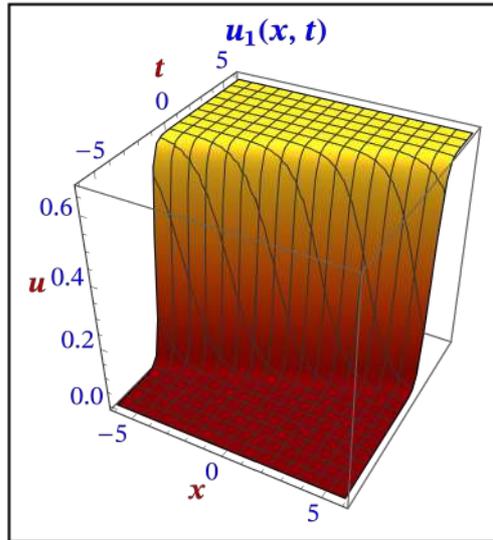


Figure 1. Solution of the soliton propagation equation for $\alpha, \beta, \delta=2, \lambda=1.5$ and $\mu=0.05$, case I of solutions.

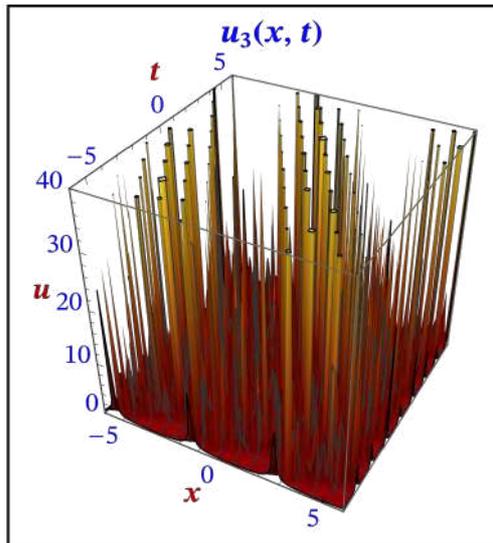


Figure 2. Solution of the soliton propagation equation for $\alpha, \beta, \delta=2, \lambda=1$ and $\mu=2$, case II of solutions.

III.II. Expansion Method (G' / G) applied to the Generalized Riccati Equation

The second method to be studied corresponds to the Expansion Method (G' / G) applied to the Generalized Riccati Equation, specialized for the nonlinear PDE that defines the dynamic behavior of solitons. The main results and their graphical resolution are presented below.

Let the equations that represent the dynamic behavior of solitons be:

$$\begin{aligned}
 \text{(ODE)} \equiv \frac{K^2}{12} V''(\xi) + (K - U) V(\xi) + \alpha U V^2(\xi) - \beta U V^3(\xi) &= 0 \\
 V(\xi) = a_0 + a_1 \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right) \text{ for } a_1 \neq 0. &
 \end{aligned}
 \tag{1.2.1}$$

And let it be the Generalized Riccati Equation:

$$G'(\xi) = r + p G(\xi) + q G^2(\xi). \quad (1.2.2)$$

Solving the algebraic system of equations obtained using the same procedure as with the previous method:

$$\left(\begin{array}{l} a_0 \rightarrow 0 \quad a_1 \rightarrow \frac{2\alpha}{3p\beta} \quad K \rightarrow \frac{24\alpha^2}{(9\beta-2\alpha^2)p^2+8qr\alpha^2} \quad U \rightarrow \frac{216p^2\alpha^2\beta}{((9\beta-2\alpha^2)p^2+8qr\alpha^2)^2} \\ a_0, r \rightarrow 0 \quad a_1 \rightarrow \frac{2\alpha}{3\beta p} \quad K \rightarrow \frac{24\alpha^2}{p^2(9\beta-2\alpha^2)} \quad U \rightarrow \frac{216\alpha^2\beta}{p^2(9\beta-2\alpha^2)^2} \end{array} \right)$$

In addition, these solutions will be classified into four cases:

$$\text{Case I: } p^2 - 4qr > 0, \quad pq \neq 0 \text{ or } qr \neq 0 \quad \left\{ u_1(\xi), \dots, u_{12}(\xi) \right\}$$

$$\text{Case II: } p^2 - 4qr < 0 \quad pq \neq 0 \text{ or } qr \neq 0 \quad \left\{ u_{13}(\xi), \dots, u_{24}(\xi) \right\}$$

$$\text{Case II: } r = 0 \quad pq \neq 0 \quad \left\{ u_{25}(\xi), u_{26}(\xi) \right\}$$

$$\text{Case IV: } r = p = 0 \quad q \neq 0 \quad \left\{ u_{27}(\xi) \right\}$$

For case I, when $p^2 - 4qr$ is greater than zero, and the following values:

$$\left(\begin{array}{l} \{\alpha, \beta\} = \{2, 2\} \\ \{p, q, r\} = \{1.5, 0.05, 1\} \\ \omega = 2.5873 \\ \xi = 0.665282x - 2.5873t \end{array} \right)$$

the following graph has been obtained :

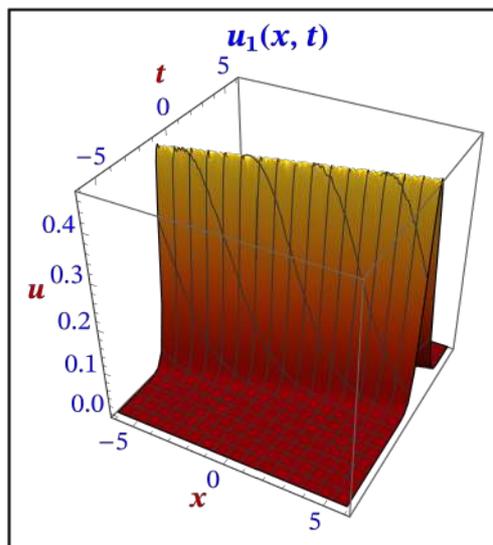


Figure 3. Solutions to the soliton propagation equation for $\alpha, \beta=2, p=1.5, q=0.05$ and $r=1$ belonging to case I of solutions ($p^2 - 4qr > 0$).

In contrast, for case II and the following values:

$$\left(\begin{array}{l} \{\alpha, \beta\} \\ \{p, q, r\} = \\ \omega = \\ \xi = \end{array} \begin{array}{l} \{2, 2\} \\ \{1.5, 1, 2\} \\ 0.720854 \\ 0.351161 x - 0.720854 t \end{array} \right)$$

some examples of obtained graphs are :

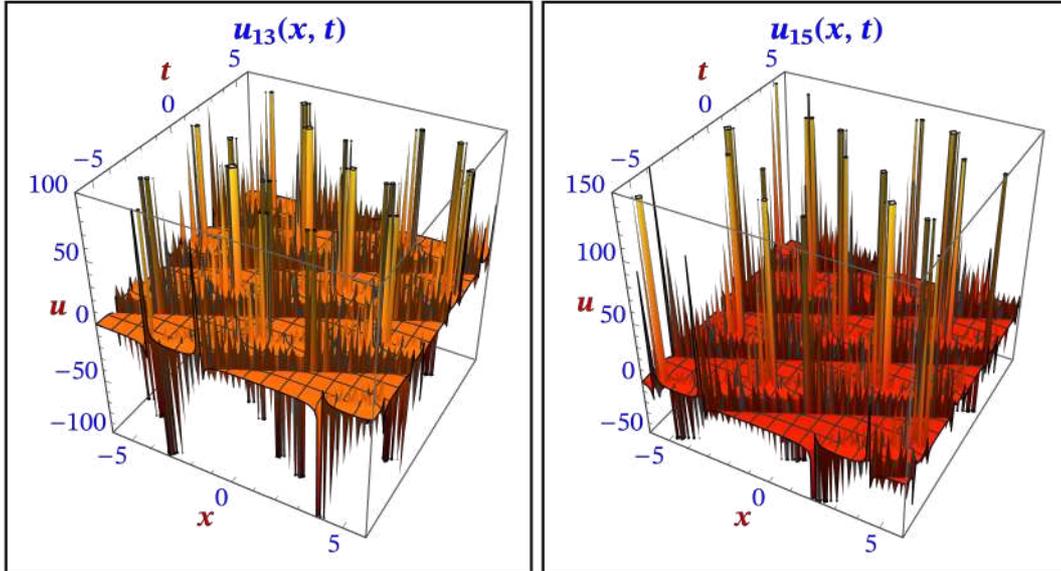


Figure 4. Solution to the soliton propagation equation for $\alpha, \beta=2, p=1.5, q=1$ and $r=2$ belonging to case II of solutions ($p^2 - 4qr < 0$).

III.III. Expansion Method (G' / G) applied to the Jacobi Elliptic Equation

The third method to be studied corresponds to the Expansion Method (G' / G) applied to the Jacobi Elliptic Equation, specialized for the nonlinear PDE that defines the dynamic behavior of solitons. The main results and their graphical resolution are presented below.

Let the equations that represent the dynamic behavior of solitons be:

$$\begin{aligned} \text{(ODE)} \equiv \frac{K^2}{12} V''(\xi) + (K - U) V(\xi) + \alpha U V^2(\xi) - \beta U V^3(\xi) &= 0 \\ V(\xi) = a_0 + a_1 \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right) \text{ for } a_1 \neq 0 & \end{aligned} \quad (1.3.1)$$

And let it be the Jacobi Elliptic Equation:

$$(G'(\xi))^2 = P G^4(\xi) + Q G^2(\xi) + R \quad (1.3.2)$$

Solving the algebraic system of equations obtained using the same procedure as with the previous methods:

$$\left(\begin{array}{l} i = 1 \quad a_0 \rightarrow \frac{\alpha}{3\beta} \quad a_1 \rightarrow -\frac{\alpha}{3\beta\sqrt{Q}} \quad K \rightarrow -\frac{6\alpha^2}{Q(2\alpha^2-9\beta)} \quad U \rightarrow \frac{54\alpha^2\beta}{Q(2\alpha^2-9\beta)^2} \\ i = 2 \quad a_0 \rightarrow \frac{\alpha}{3\beta} \quad a_1 \rightarrow \frac{\alpha}{3\beta\sqrt{Q}} \quad K \rightarrow -\frac{6\alpha^2}{Q(2\alpha^2-9\beta)} \quad U \rightarrow \frac{54\alpha^2\beta}{Q(2\alpha^2-9\beta)^2} \end{array} \right)$$

In addition, these solutions will be classified into four cases:

Case I: $i = 1$, $a_0 \rightarrow \frac{\alpha}{3\beta}$ and $a_1 \rightarrow -\frac{\alpha}{3\beta\sqrt{Q}}$ $\{ u_{1,1}(\xi), \dots, u_{1,n}(\xi) \}$

Case II: $i = 2$, $a_0 \rightarrow \frac{\alpha}{3\beta}$ and $a_1 \rightarrow \frac{\alpha}{3\beta\sqrt{Q}}$ $\{ u_{2,1}(\xi), \dots, u_{2,n}(\xi) \}$

For the following values in case I:

$$\left(\begin{array}{l} \{ \alpha, \beta, \delta, k^2 \} \quad \{ 3., 51.923, 0.980552, 0.866025, 0.75 \} \\ \{ C_1, C_2 \} \quad \{ C_1 \rightarrow 1, C_2 \rightarrow 1 \} \end{array} \right)$$

The graphs shown below have been obtained for each case:

$$u_{i,1,1}(\xi) = u_{i,1,1}(x, t):$$

$$\{ P, Q, R \} = \{ 0.75, -1.75, 1 \}$$

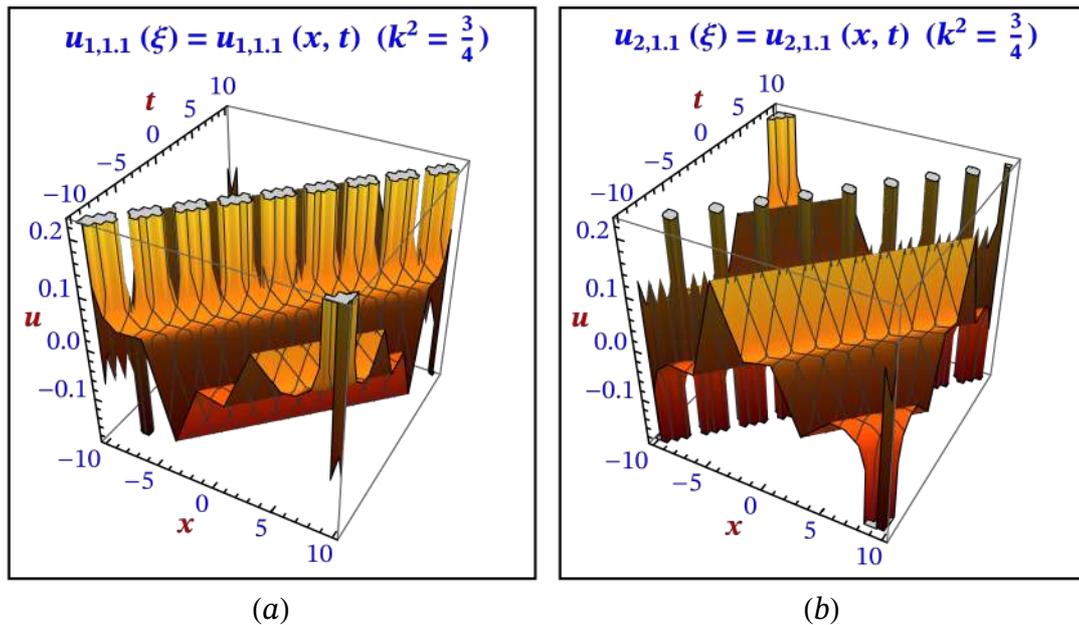


Figure 5. Solution to the soliton propagation equation for $k^2=0.75$, $C_1=1$, $C_2=1$, $P=0.75$, $Q=-1.75$ y $R=1$ (a) case I of oslutions ($i = 1$) and (b) case II ($i = 2$).

$$u_{i,3}(\xi) = u_{i,3}(x, t):$$

$$\{P, Q, R\} = \{-1, 1.25, -0.25\}$$

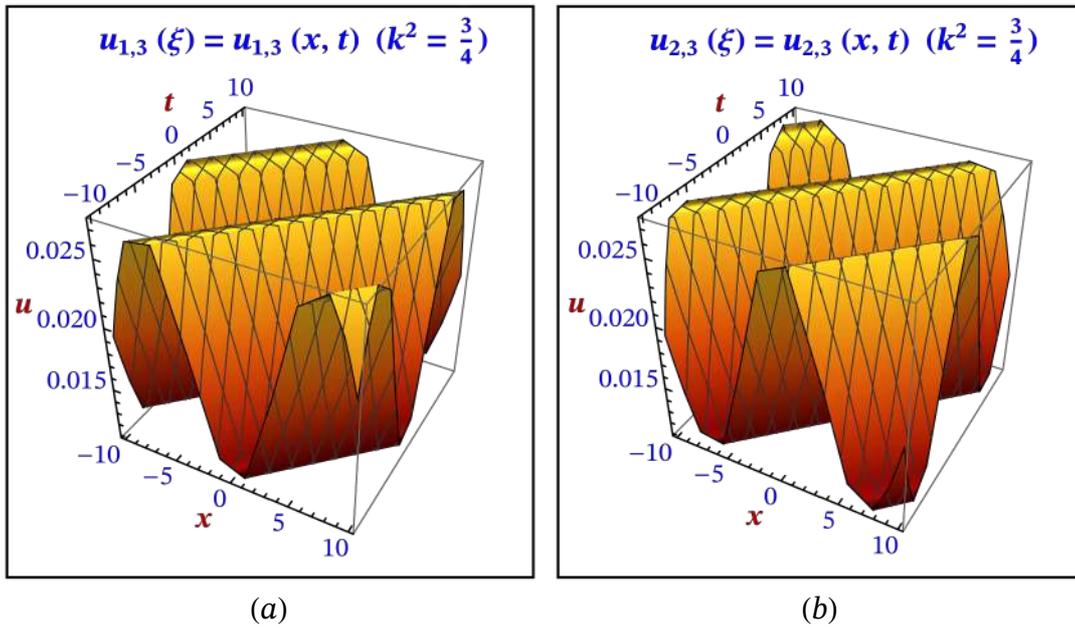


Figure 6. Solutions to the soliton propagation equation for $k^2=0.75$, $C_1=1$, $C_2=1$, $P=-1$, $Q=1.25$ and $R=-0.25$ (a) case I for solutions ($i = 1$) and (b) case II ($i = 2$).

$$u_{i,11.1}(\xi) = u_{i,11.1}(x, t):$$

$$\{P, Q, R\} = \{-0.25, 0.875, -0.015625\}$$

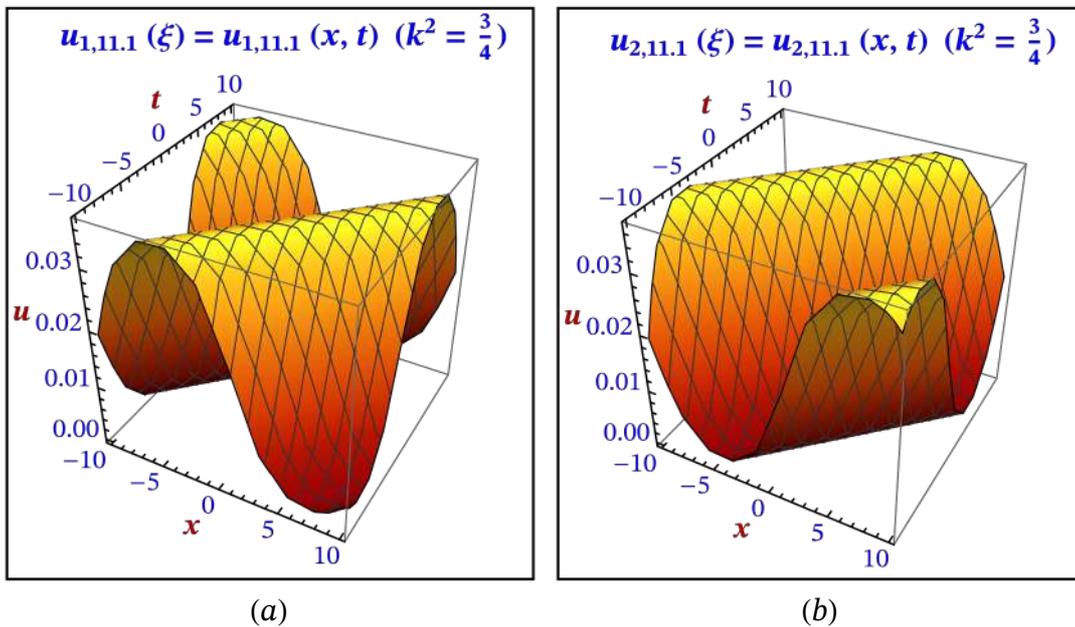


Figure 7. Solution to the soliton propagation equation for $k^2=0.75$, $C_1=1$, $C_2=1$, $P=-0.25$, $Q=0.875$ and $R=-0.015625$ (a) case I of solutions ($i = 1$) and (b) case II ($i = 2$).

III.IV. Expansion Method (G' / G^2) applied to the Generalized Riccati Equation

The last and fourth method to be studied corresponds to the Expansion Method (G' / G^2) applied to the Generalized Riccati Equation, specialized for the nonlinear PDE that defines the dynamic behavior of solitons. The main results and their graphical resolution will be presented below.

Let the equations that describe the dynamic behavior of solitons be:

$$\begin{aligned} \text{(PDE)} \equiv L C_0 V_{tt} - V_{xx} - \frac{\delta^2}{12} V_{xxxx} - L C v (V^2)_{tt} + L C \beta (V^3)_{tt} &= 0 \\ u(\xi) = V(\xi) = \alpha_0 + \alpha_1 \left(\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)} \right) + \beta_1 \left(\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (1.4.1)$$

And let it be the Generalized Riccati Equation:

$$\text{(ODE - Ricatti)} \equiv \left(\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)} \right)' = a + b \left(\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)} \right) + c \left(\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)} \right)^2 \quad (1.4.2)$$

Solving the algebraic system of equations obtained using the same procedure as with the previous methods:

$$\left(\begin{array}{cccccc} \alpha_0 \rightarrow \frac{v}{3\beta} & \alpha_1 \rightarrow \frac{v \sqrt{\frac{c}{a}}}{3\beta} & \beta_1 \rightarrow 0 & k \rightarrow \frac{\sqrt{6} v \sqrt{\frac{1}{ac(2v^2-9\beta)}}}{\delta} & \omega \rightarrow \frac{3 \sqrt{6} v \sqrt{\frac{\beta}{acC_0L}}}{\delta(2v^2-9\beta)} \\ \alpha_0 \rightarrow \frac{v}{3\beta} & \alpha_1 \rightarrow 0 & \beta_1 \rightarrow \frac{v \sqrt{\frac{a}{c}}}{3\beta} & k \rightarrow \frac{\sqrt{6} v \sqrt{\frac{1}{ac(2v^2-9\beta)}}}{\delta} & \omega \rightarrow \frac{3 \sqrt{6} v \sqrt{\frac{\beta}{acC_0L}}}{\delta(2v^2-9\beta)} \\ \alpha_0 \rightarrow \frac{v}{3\beta} & \alpha_1 \rightarrow \frac{v \sqrt{\frac{c}{a}}}{6\beta} & \beta_1 \rightarrow \frac{v}{6\beta \sqrt{\frac{c}{a}}} & k \rightarrow \frac{\sqrt{\frac{3}{2}} v \sqrt{\frac{1}{ac(2v^2-9\beta)}}}{\delta} & \omega \rightarrow \frac{3 \sqrt{\frac{3}{2}} v \sqrt{\frac{\beta}{acC_0L}}}{\delta(2v^2-9\beta)} \\ \alpha_0 \rightarrow \frac{v}{3\beta} & \alpha_1 \rightarrow \frac{v \sqrt{\frac{c}{a}}}{3 \sqrt{2} \beta} & \beta_1 \rightarrow \frac{v}{3 \sqrt{2} \beta \sqrt{\frac{c}{a}}} & k \rightarrow \frac{\sqrt{3} v \sqrt{\frac{1}{ac(2v^2-9\beta)}}}{\delta} & \omega \rightarrow \frac{3 \sqrt{3} v \sqrt{\frac{\beta}{acC_0L}}}{\delta(2v^2-9\beta)} \end{array} \right)$$

In addition, these solutions will be classified into four cases:

- Case I: trigonometric solutions $(ac) > 0 \quad b = 0 \quad \left\{ u_{1,1}(\xi), \dots, u_{1,4}(\xi) \right\}$
- Case II: hyperbolic solutions $(ac) < 0 \quad b = 0 \quad \left\{ u_{2,1}(\xi), \dots, u_{2,4}(\xi) \right\}$
- Case III: rational solutions $a = 0 \quad c \neq 0 \quad \left\{ u_{3,1}(\xi), \dots, u_{3,4}(\xi) \right\}$

For each case, applying the following values:

$$\left(\begin{array}{cc} \{v, \beta, \delta, L, C_0\} & \{0.015, -0.0025, 0.1, 1, 1\} \\ \{C_1, C_2\} & \{C_1 \rightarrow 1, C_2 \rightarrow 1\} \end{array} \right)$$

The graphs corresponding to each case are shown below:

Case I: $\{a, b, c\} = \{1, 0, 2\}$.

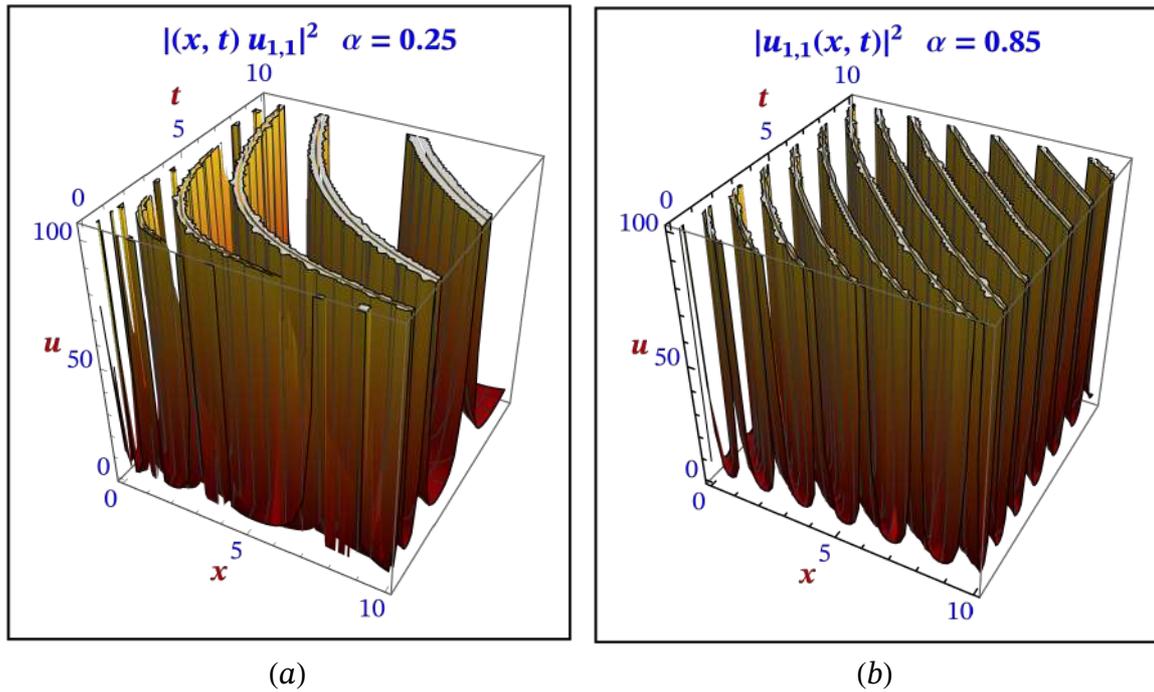


Figure 8. Solution to the soliton propagation equation for $\nu = 0.015$, $\beta = -0.0025$, $\delta = 0.1$, $L = 1$, $C_0 = 1$, $C_1 = 1$, $C_2 = 1$, $a = 1$, $b = 0$ and $c = 2$, with (a) $\alpha = 0.25$ and (b) $\alpha = 0.85$.

Case II: $\{a, b, c\} = \{-1, 0, 2\}$

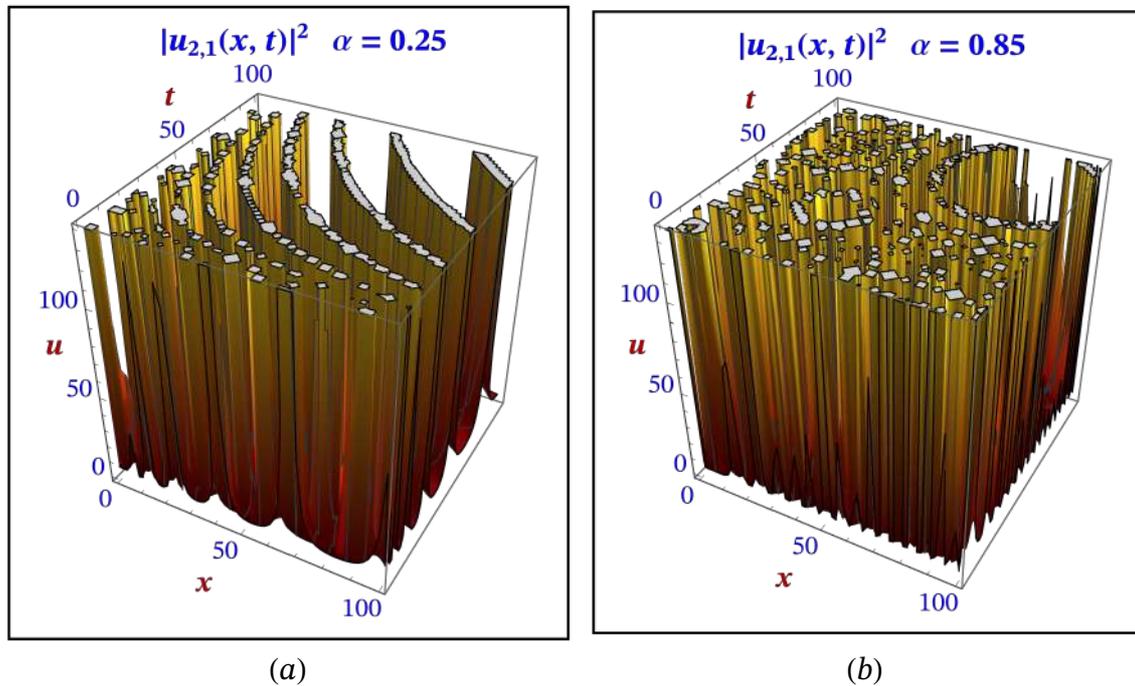


Figure 9. Solution to the soliton propagation equation for $\nu = 0.015$, $\beta = -0.0025$, $\delta = 0.1$, $L = 1$, $C_0 = 1$, $C_1 = 1$, $C_2 = 1$, $a = -1$, $b = 0$ and $c = 2$, with (a) $\alpha = 0.25$ and (b) $\alpha = 0.85$.

IV. CONCLUSIONS

After conducting a thorough analysis of each method studied throughout the project, the following conclusions can be drawn:

1. The expansion method (G' / G) in relation to the second-order differential equation facilitates the transformation of complex nonlinear second-order equations into simpler, more manageable forms, simplifying the resolution process. Additionally, it allows for an accurate representation of complex dynamic phenomena.
2. The expansion method (G' / G) in relation to the generalized Riccati equation defines a wide variety of solutions based on a series of parameters (p, q, r), classified according to whether the value of $(p^2 - 4qr)$ is greater than, less than, or equal to zero.
Notably, it easily adapts to different initial conditions and specific parameters.
3. This expansion method (G' / G) in relation to the Jacobi elliptic equation yields a series of solutions expressed in terms of elliptic functions and their relationships.
This method is characterized as the most effective and precise among those studied.
4. The expansion method (G' / G^2) associated with the generalized Riccati equation offers greater flexibility and resolution capability than the (G' / G) method, allowing for more general solutions.

V. FUTURE LINES OF RESEARCH

The expansion methods (G'/G) and (G'/G^2) have proven to be highly useful and effective tools for obtaining exact solutions to nonlinear differential equations. To further explore this project, the following future research directions are proposed:

1. Firstly, extending the methods to higher-order differential equations, such as third and fourth-order linear equations.
2. Another potential line of work involves the development and study of the expansion method (G'/G^2) applied to the Jacobi elliptic equation.
3. Design of new Analytical Methods:
 - (a) New lines of research currently include applying the studied analytical methods: (i) the Expansion Method $(\frac{G'}{G})$ and (ii) the Expansion Method $(\frac{G'}{G^2})$ to deduce new exact solutions for nonlinear fractional differential equations (NPDEs), such as the nonlinear fractional time equation of Harry Dym (HD):

$$D_t^\alpha u(x, t) = u^3(x, t) u_{xxx}(x, t) \quad 0 < \alpha \leq 1$$

$$u(x, 0) = \left(a - \frac{3\sqrt{b}}{2} x \right)^{\frac{2}{3}} \quad (1.0.3)$$

• $D_t^\alpha \equiv$ fractional derivative of order α in the sense of Caputo

and the symmetric regularized long wave (SRLW) equation:

$$D_t^{2\alpha} u + D_x^{2\alpha} u + u D_t^\alpha (D_x^\alpha u) + D_x^\alpha u D_t^\alpha u + D_t^{2\alpha} (D_x^{2\alpha} u) = 0, \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (1.0.4)$$

• $D_t^\alpha \equiv$ conformable derivative of order α .

(b) Similarly, the study and design of new algorithms based on a third method: (iii) the multi-exp-function method (MEFM) to compute multiple wave solutions (MWS) in nonlinear equations in (2+1) dimensions, determining multiple wave solutions for the Gilson-Pickering Model, which contains one, two, and three soliton solutions, and for the (2+1)-dimensional Bogoyavlenskii–Kadomtsev–Petviashvili (BKP) equation:

$$u_{xxt} + u_{xxxxy} + 12 u_{xx} u_{xy} + 8 u_x u_{xxy} + 4 u_{xxx} u_y = \gamma u_{yyy}, \quad \gamma = \pm 1$$

$$(u_{xt} + u_{xxx} + 8 u_x u_{xy} + 4 u_{xx} u_y)_x = \gamma u_{yyy} \quad (1.0.5)$$

• $u(x, y, t) \equiv$ wave amplitude

4. As the final line of research, developing descriptive models to predict the dynamic behavior of solitons, enabling electric sector companies to control electric transport in situations of fluctuating demand.

“La belleza de la ecuación no radica en su simpleza, sino en su capacidad para explicar el orden del universo.”



James Clerk Maxwell.

Agradecimientos

La finalización de este proyecto significa el fin de un capítulo de mi vida, una etapa donde he crecido, madurado y aprendido de la mano de mi familia y amigos. A lo largo de estos años universitarios, he desarrollado un cariño especial a la ingeniería. Sin embargo, no podría estar aquí si no es por toda la gente que me ha acompañado por el camino. Gracias.

Gracias a mi familia, en especial a mis padres, por apoyarme e impulsarme, por creer en mí más que nadie.

Gracias a mis hermanos, por enseñarme la importancia del esfuerzo y la constancia.

Gracias a mis abuelos, los cuales no pudieron estudiar lo que querían y siempre han estado orgullosos de que verme luchar por cumplir mis sueños.

Gracias a mis amigos, por ser un apoyo incondicional.

Gracias a mis tutores, D. Fco. Javier Rodríguez Gómez y D. Alberto Rodríguez Gómez, por introducirme en el mundo de las ecuaciones diferenciales, enseñándomelas con un entusiasmo ilimitado y transmitiéndome toda su pasión.

Gracias a mí misma, por confiar en mí y luchar por lo todo lo que quiero sin rendirme, por demostrarme todo lo que puedo llegar a conseguir.

Organización del Proyecto

El presente proyecto está dividido en una serie de capítulos, cuyo contenido se detalla a continuación:

I. Memoria

- **Capítulo 1.** Se describe la introducción del trabajo, detallando los objetivos a conseguir a través del proyecto y las herramientas necesarias para alcanzarlos. Asimismo, se especificarán los Objetivos de Desarrollo Sostenible que entrarán en juego a lo largo del proyecto.
- **Capítulo 2.** Se estudia el comportamiento dinámico de los solitones en modelos fraccionarios según el método de expansión (G' / G) aplicado a la ecuación de segundo orden lineal, a la ecuación generalizada de Riccati y a la ecuación elíptica de Jacobi.
- **Capítulo 3.** Se desarrollará un análisis acerca del comportamiento dinámico de los solitones según el método de expansión (G' / G^2) aplicado a la ecuación generalizada de Riccati.
- **Capítulo 4.** Se procederá a comparar los métodos empleados para poder concluir cual es el más óptimo en función de la complejidad y precisión, además de añadir las futuras líneas de investigación.
- **Capítulo 5.** Se realizará un estudio económico, analizando la aplicación del proyecto en el mundo laboral y su viabilidad económica.

Modelo Fraccionario de las Líneas de Transmisión Eléctrica de Paso Bajo: Comportamientos Dinámicos y Análisis de Bifurcación

Índice

Capítulo 1	1
1. Introducción	1
1.1. Introducción	1
1.2. Motivación	3
1.3. Objetivos	4
1.4. Metodología	5
1.4.1. Plan de Trabajo	6
1.5. Recursos	7
1.6. Estado del Arte	8
1.6.1. Modelo Fraccionario del Comportamiento de los Solitones en Líneas de Transmisión Eléctrica de Paso Bajo	8
1.6.2. Nuevo Método Sub-ODE Modificado	9
1.6.3. Método de Expansión de la Ecuación de Riccati Unificada	11
1.6.4. Método de Transformación Lineal Fraccionario	13
1.6.5. Método de Expansión (G' / G^2)	14
1.7. Alineación con los Objetivos de Desarrollo Sostenible (ODS)	16
Capítulo 2	19
2. Método de Expansión (G' / G)	19
2.1. Descripción del Método de Expansión (G' / G)	19
2.2. Aplicación del Método de Expansión (G' / G)	21
2.2.1. Ecuación Diferencial de 2º Orden (ODE)	22
2.2.2. Ecuación Diferencial Generalizada de Riccati	30
2.2.3. Ecuación Elíptica de Jacobi	41
2.3. Problemas	51
2.3.1. Problemas (<i>Low-Pass Electrical Lines-LPEL</i>) ODE 2º Grado Lineal	51
2.3.2. Problemas (<i>Low-Pass Electrical Lines-LPEL</i>) ODE Generalizada de Riccati	60
2.3.3. Problemas (<i>Low-Pass Electrical Lines-LPEL</i>) ODE Elíptica de Jacobi	76
Capítulo 3	111
3. El Método de Expansión (G' / G^2)	111
3.1. Descripción del Método de Expansión (G' / G^2)	111

3.2. Aplicación del Método de Expansión (G' / G^2)	114
3.3. Propagación de Ondas en Línea de Transmisión Eléctrica de Paso Bajo no Lineal	116
3.4. Problemas	120
3.4.1. Problemas (<i>Low-Pass Electrical Lines-LPEL</i>) ODE de Riccati: $\left(\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)}\right)' = a + b\left(\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)}\right) + c\left(\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)}\right)^2$	120
Capítulo 4	153
4. Conclusión y Líneas Futuras de Investigación	153
4.1. Conclusiones	153
4.1.1. Método de Expansión (G' / G) en Función de la Ecuación Diferencial de 2º Orden	153
4.1.2. Método de Expansión (G' / G) en Función de la Ecuación Generalizada de Riccati	153
4.1.3. Método de Expansión (G' / G) en Función de la Ecuación Elíptica de Jacobi	154
4.1.4. Método de expansión (G' / G^2) en Función de la Ecuación Generalizada de Riccati	154
4.2. Líneas Futuras de Investigación	155
4.2.1 Ecuaciones Diferenciales de Orden Superior	155
4.2.2. Método de Expansión (G' / G^2) a la Ecuación Elíptica de Jacobi	155
4.2.3. Diseño de Nuevos Métodos Analíticos	156
4.2.3. Desarrollo de Modelos Predictivos	157
Capítulo 5	159
5. Estudio Económico del Proyecto	159
5.1. Antecedentes	159
5.2. Mejoras del Proyecto	159
5.2.1. Mejoras para el Sector Energético	159
5.2.2. Mejoras Para Iberdrola	160
5.3. Conclusión	163
Lista de Acrónimos	165
Bibliografía	167
Referencias Bibliográficas	167
Direcciones URL	168

Índice de Figuras

Figura 1.1. Representación de una onda <i>Wavelet</i> en Matlab [CORT07].	2
Figura 1.2. Cronograma orientativo del TFG.	6
Figura 1.3. Solución de la ecuación de propagación de los solitones para $l=1.0$, $\delta=0.5$, $\sigma=1.0$, $\beta=-1.0$, $\xi_0=0$ y $A = B = D = 0$. $\epsilon = 1.0$ (curva roja) y $\epsilon = -1.0$ (curva azul) para $t = 0$.	10
Figura 1.4. Solución de la ecuación de propagación de los solitones para $l=1.0$, $\delta=0.5$, $\sigma=1.0$, $\beta=1.0$, $\xi_0=0$ y $A = B = E = 0$. $\alpha=1.0$ (curva roja continua), $\alpha=1.5$ (curva roja discontinua), $\alpha=-1.0$ (curva azul continua) y $\alpha=-1.5$ (curva azul discontinua) en $t = 0$.	12
Figura 1.5. Solución discontinua (kink) de la ecuación de propagación de los solitones para $l=1.0$, $\delta=0.5$, $\sigma=0.2$, $\beta=1.0$, $\alpha = 1.0$, $\xi_0=0$ y $A = B = 0$. $\alpha=1.0$ (curva roja continua) y $\alpha=2.0$ (curva roja discontinua) para $\epsilon=1.0$ y $\alpha=1.0$ (curva azul continua) y $\alpha=2.0$ (curva azul discontinua) para $\epsilon=-1.0$, todo ello para $t = 0$.	13
Figura 1.6. Energía asequible y no contaminante (ODS).	16
Figura 1.7. Industria, Innovación e Infraestructura (ODS).	16
Figura 1.8. Ciudades y Comunidades Sostenibles (ODS).	17

Índice de Tablas

Tabla 2.1. Expresiones de $G'(\xi)$, $G''(\xi)$ y $G'''(\xi)$ y sus relaciones junto con las expresiones de $u(\xi)$ y sus derivadas definidas como polinomios en términos de $G^k(\xi)$ y $G^{-k}(\xi)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$).34

Tabla 2.2. Ecuación general de Riccati para los valores $(p^2 - 4qr) > 0$,36
 $p q \neq 0$ o $q r \neq 0$. (Caso I)

Tabla 2.3. Relación de $\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}$ en función de la ecuación general de37
 Riccati para los valores $(p^2 - 4qr) > 0$, $p q \neq 0$ o $q r \neq 0$. (Caso I)

Tabla 2.4. Ecuación general de Riccati para los valores $(p^2 - 4qr) < 0$,38
 $p q \neq 0$ o $q r \neq 0$. (Caso II)

Tabla 2.5. Relación de $\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}$ en función de la ecuación general de39
 Riccati para los valores $(p^2 - 4qr) < 0$, $p q \neq 0$ o $q r \neq 0$. (Caso II)

Tabla 2.6. Ecuación general de Riccati para los valores $r = 0$,39
 $p q \neq 0$ o $q r \neq 0$. (Caso III)

Tabla 2.7. Relación de $\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}$ en función de la ecuación general40
 de Riccati para los valores $r = 0$, $p q \neq 0$ o $q r \neq 0$. (Caso III)

Tabla 2.8. Ecuación general de Riccati para los valores $r = 0$,40
 $p q \neq 0$ o $q r \neq 0$. (Caso IV)

Tabla 2.9. Relación de $\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}$ en función de la ecuación general40
 de Riccati para los valores $r = 0$, $p q \neq 0$ o $q r \neq 0$. (Caso IV)

Tabla 2.10. Soluciones de la ecuación45
 Elíptica Jacobi $(G'(\xi))^2 = P G^4(\xi) + Q G^2(\xi) + R$
 dependiendo de los valores de (P, Q, R) [FARO24].

Tabla 2.11. Soluciones reducidas de la ODE Elíptica de Jacobi
 $(G'(\xi))^2 = P G^4(\xi) + Q G^2(\xi) + R$ cuando $k \rightarrow 1$ y $k \rightarrow 0$. [FARO24].47

Tabla 2.12. Relación $\frac{G_j'(\xi)}{G_j(\xi)}$ de la ODE Elíptica de Jacobi
 $(G'(\xi))^2 = P G^4(\xi) + Q G^2(\xi) + R$ cuando $k \rightarrow 1$. [FARO24].48

Tabla 2.13. Soluciones de la ODE lineal de 2º orden
 $(ODE) \equiv G''(\xi) + \lambda G'(\xi) + \mu G(\xi) = 0$ en función del valor de $\lambda^2 - 4\mu$54

Tabla 2.14. Soluciones particulares de la ODE lineal de 2º orden
 $(ODE) \equiv G''(\xi) + \lambda G'(\xi) + \mu G(\xi) = 0$ para los casos IV y V.55

Tabla 2.15. Soluciones de la EDO Generalizada de Riccati $(ODE) \equiv G'(\xi) =$..64
 $r + p G(\xi) + q G^2(\xi)$ para el caso I.

Tabla 2.16. Soluciones de la EDO Generalizada de Riccati $(ODE) \equiv G'(\xi) =$..65
 $r + p G(\xi) + q G^2(\xi)$ para el caso II.

Tabla 2.17. Soluciones de la EDO Generalizada de Riccati (ODE) $\equiv G'(\xi) = r + p G(\xi) + q G^2(\xi)$ para el caso III. ..66

Tabla 2.18. Soluciones de la EDO Generalizada de Riccati (ODE) $\equiv G'(\xi) = r + p G(\xi) + q G^2(\xi)$ para el caso IV. ..66

Tabla 2.19. Expresiones de $G_k(\xi)$ obtenidas a partir EDO Generalizada de Riccati (ODE) $\equiv G'(\xi) = r + p G(\xi) + q G^2(\xi)$ para cada valor de k66

Tabla 2.20. Expresiones de $u_k(\xi)$ obtenidas a partir EDO Generalizada de Riccati (ODE) $\equiv G'(\xi) = r + p G(\xi) + q G^2(\xi)$ para cada valor de k68

Tabla 2.21. Expresiones de $u(\xi)$ y sus derivadas a partir de la ecuación Elíptica de Jacobi (ODE) $\equiv (G'(\xi))^2 = P G^4(\xi) + Q G^2(\xi) + R$76

Tabla 2.22. Expresiones de $u(\xi)$ y sus potencias a partir de la ecuación Elíptica de Jacobi (ODE) $\equiv (G'(\xi))^2 = P G^4(\xi) + Q G^2(\xi) + R$76

Tabla 2.23. Coeficientes $\{a_0, a_1, K, U\}$ de las soluciones $u(\xi) = a_0 + a_1 \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)$79

Tabla 2.24. Soluciones $G_j(\xi)$ de la ODE Elíptica de Jacobi (ODE – Elíptica Jacobi) $\equiv (G'(\xi))^2 = P G^4(\xi) + Q G^2(\xi) + R$81

Tabla 2.25. Coeficientes de las soluciones de la ODE Elíptica de Jacobi (ODE) $\equiv (G'(\xi))^2 = P G^4(\xi) + Q G^2(\xi) + R$82

Tabla 2.26. Soluciones de $u_{i,j}(\xi)$ y los parámetros K, U de la ODE Elíptica de Jacobi (ODE) $\equiv (G'(\xi))^2 = P G^4(\xi) + Q G^2(\xi) + R$82

Tabla 2.27. Soluciones de $u_{i,j}(\xi)$ ($k \rightarrow 1$) y $u_{i,j}(\xi)$ ($k \rightarrow 0$) de la ODE Elíptica de Jacobi (ODE) $\equiv (G'(\xi))^2 = P G^4(\xi) + Q G^2(\xi) + R$86

Tabla 3.1. Expresiones de $u(\xi)$ y sus derivadas a partir de la ecuación Generalizada de Riccati (ODE – Riccati) $\equiv \left(\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)}\right)' = a + b \left(\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)}\right) + c \left(\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)}\right)^2$122

Tabla 3.2. Soluciones obtenidas para " $u_k(\xi)$ " partiendo de la ecuación Generalizada de Riccati (ODE – Riccati) $\equiv \left(\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)}\right)' = a + b \left(\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)}\right) + c \left(\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)}\right)^2$125

Tabla 3.3. Coeficientes de las soluciones $u_{i,j}(\xi)$ partiendo de la Ecuación Generalizada de Riccati (ODE – Riccati) $\equiv \left(\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)}\right)' = a + b \left(\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)}\right) + c \left(\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)}\right)^2$126

Tabla 3.4. Soluciones $u_{i,j}(\xi)$ del caso I partiendo de la Ecuación Generalizada de Riccati (ODE – Riccati) $\equiv \left(\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)}\right)' = a + b \left(\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)}\right) + c \left(\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)}\right)^2$127

Tabla 3.5. Soluciones $u_{i,j}(\xi)$ del caso II partiendo de la Ecuación Generalizada de Riccati (ODE – Riccati) $\equiv \left(\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)}\right)' = a + b \left(\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)}\right) + c \left(\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)}\right)^2$128

Tabla 3.6. Soluciones $u_{ij}(\xi)$ del caso III partiendo de la Ecuación Generalizada de Riccati (ODE – Riccati) $\equiv \left(\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)}\right)' = a + b\left(\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)}\right) + c\left(\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)}\right)^2$.

.....129

Capítulo 1

1. Introducción

1.1. Introducción

Desde sus primeras apariciones en los cálculos clásicos de Newton y Leibniz, las ecuaciones diferenciales han desempeñado un papel importante en los ámbitos de la física, la ingeniería y las matemáticas. Incluso, llegando a tener una notable presencia en nuestro día a día, debido a su aplicación para la resolución de problemas cotidianos. Es por esto y por la dificultad que supone resolver ecuaciones diferenciales de órdenes altos, que a lo largo de las últimas décadas se ha investigado nuevas herramientas y métodos de resolución para simplificar los cálculos y obtener resultados más eficientes, rigurosos y precisos.

Sin embargo, el nivel de dificultad para resolver algunas ecuaciones diferenciales de orden fraccionario y algunos modelos matemáticos estándar con derivadas de orden entero, imposibilitan su aplicación en ciertas situaciones de la vida real. Consecuentemente, a partir de 1965, se comenzó a modelar problemas de ecuación diferenciales desarrollados con cálculos fraccionarios. Estos modelos fraccionarios permiten formular fenómenos de los campos de la ciencia e ingeniería que las ecuaciones diferenciales no lineales no son capaces.

Los solitones son ondas solitarias que aparecen en los sistemas de telecomunicaciones para el transporte de información y aumentar la capacidad y concreción de datos. Entre los múltiples métodos de resolución implementados en la investigación de la propagación de ondas solitarias (solitones) localizadas y viajeras en el modelo fraccionario de líneas de transmisión eléctrica de paso bajo, destacan el nuevo método sub-ODE modificado, el método de expansión de la ecuación Riccati unificada y el método de transformación lineal fraccionario. A raíz de décadas de investigación, se ha desarrollado el método de expansión (G' / G^2), el cual aproxima la ecuación del comportamiento dinámico de los solitones de líneas de transmisión eléctrica de paso bajo a una ecuación diferencial ordinaria mediante una transformación fraccionaria lineal simple.

En el siguiente proyecto, se estudiarán y diseñarán diferentes modelos fraccionarios de las líneas de transmisión eléctrica de paso bajo para analizar el comportamiento dinámico y la bifurcación de la propagación de ondas solitarias (solitones) localizadas y viajeras mediante el uso de estos diferentes métodos.

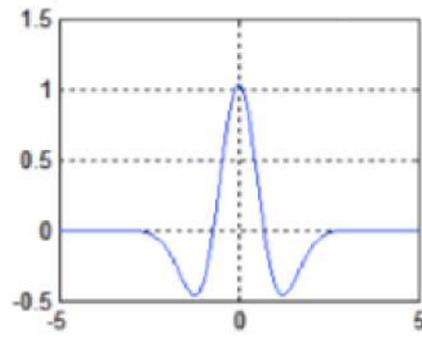


Figura 1.1. Representación de una onda *Wavelet* en Matlab [[CORT07](#)].

1.2. Motivación

Con el paso de las últimas décadas, se han producido nuevos avances tecnológicos con notables efectos sobre las herramientas matemáticas, mejorándolas para adaptarse a las nuevas necesidades que aparecen en la sociedad a diario.

A lo largo de este último siglo, se ha producido un salto tecnológico, con avances notables que han repercutido sobre las herramientas matemáticas, adaptándolas a las nuevas necesidades de la sociedad. Estas herramientas desarrolladas presentan una gran utilidad sobre diversos campos de la Ingeniería como la propagación de ondas, análisis de datos y gráficos, redes de comunicación y reconocimiento de patrones.

Los siguientes métodos que se van a analizar permiten estudiar el comportamiento dinámico de las ondas con mayor exactitud.

Entre los múltiples métodos de resolución que se han desarrollado, en la investigación de solitones en el modelo fraccionario de líneas de transmisión eléctrica de paso bajo, destacan el nuevo método sub-ODE modificado, el método de expansión de la ecuación Riccati unificada y el método de transformación lineal fraccionario. Estos métodos de resolución proporcionan diversas soluciones exactas generalizadas de ondas brillantes, oscuras, curvadas, anti curvadas, hiperbólicas y doblemente periódicas para las líneas de transmisión eléctrica de paso bajo no lineales. Estos métodos también proporcionan un gran número de soluciones individuales no generalizadas no útiles en el estudio del comportamiento dinámico y análisis de bifurcación de los solitones.

Por un lado, el nuevo método sub-ODE proporciona, en el caso de las ecuaciones diferenciales parciales no lineales, muchas más soluciones partiendo de sub-ODE generalizadas. El método de expansión de la ecuación Riccati unificada genera un número infinito de posibles soluciones exactas a las ecuaciones que describen el comportamiento dinámico de las líneas de transmisión eléctrica de paso bajo. En cambio, el método de transformación lineal fraccionario obtiene soluciones localizadas generales que no proporcionan los otros dos métodos anteriores.

Posteriormente, se ha desarrollado el método de expansión (G' / G^2), el cual aproxima la ecuación del comportamiento dinámico de los solitones de líneas de transmisión eléctrica de paso bajo a una ecuación diferencial ordinaria mediante una transformación fraccionaria lineal simple. Este último método clasifica las soluciones en tres grupos: hiperbólicas, trigonométricas y racionales.

1.3. Objetivos

El objetivo principal del siguiente proyecto se basa en realizar un exhaustivo estudio del comportamiento dinámico y bifurcaciones de los solitones de las líneas eléctricas de paso bajo mediante el uso de diferentes métodos. El estudio de varios métodos permite examinar cual de ellos es más preciso y eficaz a la hora de resolver los modelos fraccionarios de ecuaciones diferenciales no lineales. Se compararán los resultados de solitón obtenidos con las soluciones de la literatura científica y se presentarán gráficamente para su análisis detallado.

Los principales objetivos a seguir en este proyecto serán:

1. El primer capítulo consistirá en el presentar el modelo fraccionario de las líneas de transmisión eléctrica de paso bajo, a partir del cual se desarrollará el proyecto. En este apartado se explicará su definición y aplicación en base a sus propiedades.
2. Para comenzar con el proyecto, se estudiarán el comportamiento de los solitones en modelos fraccionarios según el nuevo método de sub-ODE modificado. En el caso de las ecuaciones diferenciales parciales no lineales, este nos permite obtener múltiples soluciones partiendo de ecuaciones sub-ODE generalizadas.
3. A continuación, se pasará a analizar el método de expansión de la ecuación Riccati unificada, el cual genera un número infinito de posibles soluciones exactas a las ecuaciones que describen el comportamiento dinámico de las líneas de transmisión eléctrica de paso bajo.
4. El siguiente objetivo será estudiar método de transformación lineal fraccionario, puesto que obtiene soluciones localizadas generales que no proporcionan los otro dos métodos anteriores.
5. Posteriormente, se desarrollará el método de expansión (G'/G^2). Este aproxima la ecuación del comportamiento dinámico de los solitones de líneas de transmisión eléctrica de paso bajo a una ecuación diferencial ordinaria mediante una transformación lineal simple. Este método permite clasificar las soluciones en tres grupos: hiperbólicas, trigonométricas y racionales.
6. Una vez analizados los métodos anteriores, se procederá a compararlos mediante el uso de números, tablas y gráficos para poder concluir cual es el más óptimo en función de la complejidad y precisión.

1.4. Metodología

En el desarrollo del Proyecto se procederá de la siguiente manera:

- **A)** En el primer capítulo se llevará a cabo la introducción del modelo fraccionario del comportamiento de los solitones en líneas de transmisión eléctrica de paso bajo.
- **B)** En el segundo, se analizará el nuevo método sub-ODE modificado aplicado a los solitones tanto numérica, como gráficamente.
- **C)** En el tercero se realizará el estudio del método de expansión de la ecuación Riccati unificada presentando los resultados gráficamente para la posterior comparación de métodos.
- **D)** Se analizará el método de transformación lineal fraccionario y se presentarán gráficamente los resultados obtenidos.
- **E)** Se estudiará el método de expansión (G' / G^2) tanto numérica como gráficamente.
- **F)** Finalmente, se compararán los resultados obtenidos gráficamente a partir de cada uno de los métodos para obtener el más preciso y eficaz.

Se incluirán conclusiones y futuras líneas de investigación.

1.4.1. Plan de Trabajo

El desarrollo de este proyecto se ajustará al cronograma mostrado en la Figura 1.2, donde se detallan las actividades a realizar y los tiempos a emplear.

Para la realización de este proyecto, los tiempos se ajustarán al cronograma mostrado en la Figura 1.2, donde quedan detalladas las actividades a realizar.

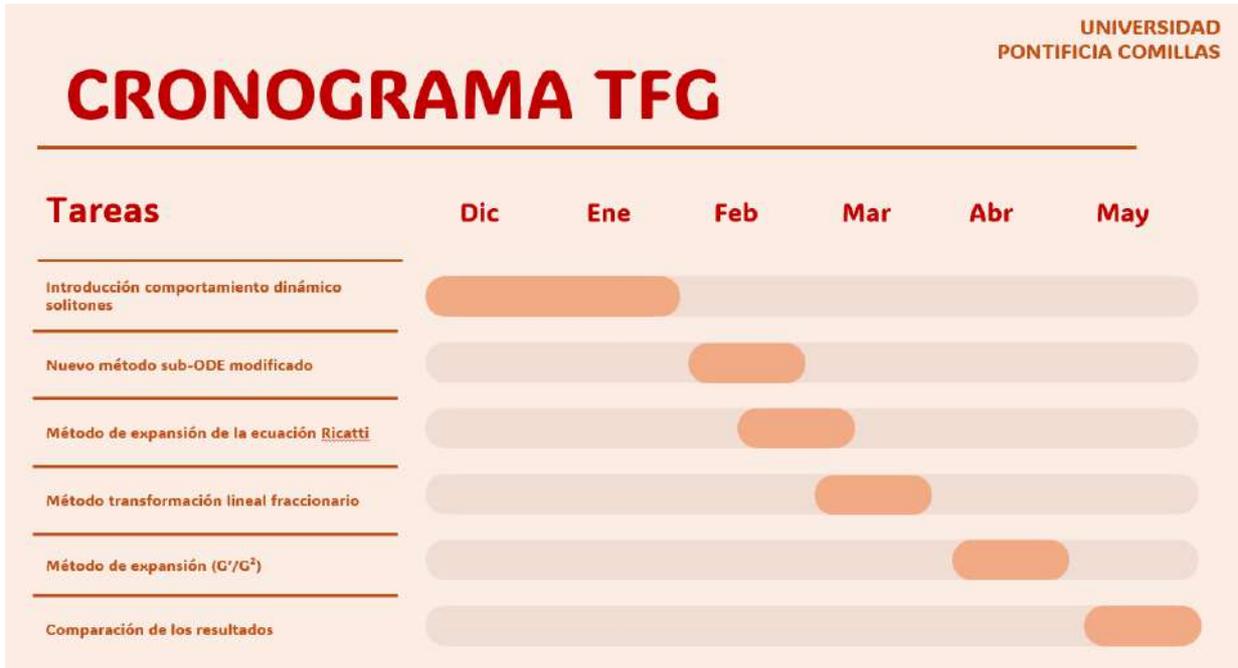


Figura 1.2. Cronograma orientativo del TFG.

1.5. Recursos

Se citan los diferentes recursos a emplear en la realización del presente proyecto:

- Procesador de textos Microsoft Office 2023®.
- Procesador científico del software *Mathematica* 13®.
- Software simbólico y numérico:
Mathematica 13® y MATLAB 2022®.
- Software para la creación de gráficos, esquemas, organigramas, diseño de circuitos: Power-Point 2023®.

1.6. Estado del Arte

1.6.1. Modelo Fraccionario del Comportamiento de los Solitones en Líneas de Transmisión Eléctrica de Paso Bajo

El modelo no lineal que representa la propagación de solitones en líneas de transmisión eléctrica de paso bajo viene definido como:

$$\tilde{V}_{tt} - \alpha (\tilde{V}^2)_{tt} + \beta (\tilde{V}^3)_{tt} - \delta^2 \tilde{V}_{xx} - \frac{\delta^4}{12} \tilde{V}_{xxxx} = 0 \quad (1.6.1)$$

siendo $\tilde{V} = \tilde{V}(x, t)$ el voltaje de la línea de transmisión eléctrica y α , β y δ las constantes. Mientras que la variable x representa la distancia de propagación, la variable t es el tiempo transcurrido.

A través de los métodos que se estudiarán a continuación, se consigue llegar mediante diferentes formas a la ecuación del modelo no lineal de propagación de solitones, tal y como se mostrará posteriormente.

1.6.2. Nuevo Método Sub-ODE Modificado

Este método se emplea para resolver ecuaciones diferenciales parciales (PDE) mediante la descomposición de la EDP original en subecuaciones diferenciales ordinarias (ODE). Estas sub-ODEs se derivan de la PDE principal y se resuelven por separado, lo que simplifica el problema en general y facilita su resolución.

Se considera una PDE no-lineal con dos variables independientes x y t :

$$H(\Phi, \Phi_x, \Phi_t, \Phi_{xx}, \Phi_{xt}, \Phi_{tt}, \dots) = 0 \quad (1.6.2)$$

donde H es un polinomio en $\Phi(x, t)$ e incluye las derivadas parciales de orden más alto y términos no lineales.

$$\Phi(x, t) = \Phi(\xi), \quad \xi = \sqrt{l(x - \sigma t)} + \xi_0 \quad (1.6.3)$$

donde ξ_0 es una constante arbitraria y σ representa la velocidad de la onda.

Insertando $\Phi(x, t)$ en H , se obtiene G , un polinomio en $\Phi(x, t)$ y sus derivadas respecto a la variable ξ :

$$G(\Phi(\xi), \Phi'(\xi), \Phi''(\xi), \dots) = 0 \quad (1.6.4)$$

donde G es un polinomio en función de $\Phi(x, t)$ y sus derivadas con respecto a la variable ξ .

Suponiendo que la ecuación de G admite solución formal:

$$\Phi(\xi) = \eta F^N(\xi), \quad \eta > 0 \quad (1.6.5)$$

siendo N un parámetro y $F(\xi)$ satisface la siguiente sub-ODE generalizada para términos no lineales de orden superior:

$$F'^2(\xi) = A F^{2-2P}(\xi) + B F^{2-P}(\xi) + C F^2(\xi) + D F^{2+P}(\xi) + E F^{2+2P}(\xi), \quad P > 0 \quad (1.6.6)$$

donde $F'^2 = \frac{dF}{d\xi}$ y A, B, C, D y E son constantes.

El parámetro N se obtiene a través de un procedimiento de equilibrio homogéneo, tal y como se muestra:

$$\begin{aligned} \deg[\Phi(\xi)] &= N & \deg[\Phi^2(\xi)] &= 2N \\ \deg[\Phi'(\xi)] &= N + P & \deg[\Phi''(\xi)] &= N + 2P \end{aligned} \quad (1.6.7)$$

A continuación, sustituyendo $\Phi(\xi)$ en G junto con $F'^2(\xi)$, teniendo en cuenta todos los coeficientes de $F^{Ni}(\xi) [F'(\xi)]^m$, con $m = 0, 1$ e $i = 0, 1, 2, 3 \dots$

Igualando los coeficientes a cero, se obtiene un sistema de ecuaciones algebraicas en función de A, B, C, D, E, σ y η .

$$\begin{aligned} F^0(\xi): X^2 B &= 0 \\ F^P(\xi): X^2 \eta P^2 C + 12(X - Y) \eta &= 0 \\ F^{2P}(\xi): \frac{3}{2} X^2 \eta D P^2 + 12 \alpha Y \eta^2 &= 0 \\ F^{3P}(\xi): 2 X^2 \eta P^2 E - 12 \beta Y \eta^3 &= 0 \end{aligned} \quad (1.6.8)$$

donde $X = l \delta^2$ y $Y = l \sigma^2$.

Mediante este sistema de ecuaciones, se deduce que $A = 0$.

Finalmente, a partir de las soluciones obtenidas de $F'^2(\xi)$, se contruye el modelo que describe la ecuación del comportamiento dinámico de los solitones en líneas eléctricas de paso bajo no lineales.

$$\tilde{V}_{tt} - \alpha (\tilde{V}^2)_{tt} + \beta (\tilde{V}^3)_{tt} - \delta^2 \tilde{V}_{xx} - \frac{\delta^4}{12} \tilde{V}_{xxxx} = 0. \quad (1.6.9)$$

A partir de la combinación del sistema de ecuaciones y la ecuación que describe el comportamiento dinámico de los solitones, se obtendrán las diferentes soluciones de la propagación de ondas.

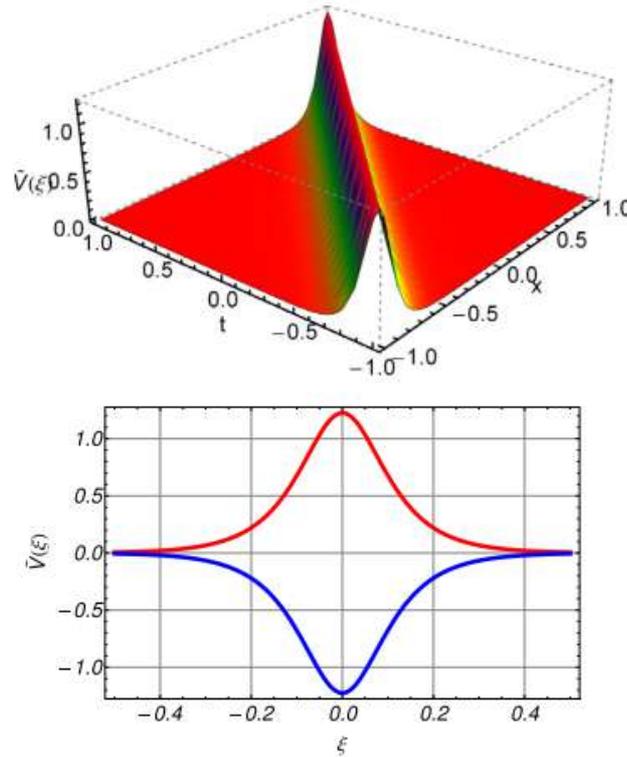


Figura 1.3. Solución de la ecuación de propagación de los solitones para $l=1.0, \delta=0.5, \sigma=1.0, \beta=-1.0, \xi_0=0$ y $A=B=D=0$. $\epsilon = 1.0$ (curva roja) y $\epsilon = -1.0$ (curva azul) para $t = 0$.

1.6.3. Método de Expansión de la Ecuación de Riccati Unificada

Debido a la complejidad de la resolución de ecuaciones diferenciales no lineales, dependiendo del caso se recurren a diferentes métodos.

El método de expansión de la ecuación de Riccati unificada consiste en asumir una solución de la forma:

$$\Phi(\xi) = \sum_{i=0}^M A_i H^i(\xi) \quad (1.6.10)$$

donde A_i ($i = 0, 1, 2, \dots, M$) son constantes a determinar, M es un integrador positivo determinado a partir de los términos de derivadas de orden más alto con los términos no lineales de mayor potencia.

Además, $H(\xi)$ cumple la ecuación generalizada de Riccati, puesto que

$$H'(\xi) = h_0 + h_1 H(\xi) + h_2 H^2(\xi) \quad (1.6.11)$$

siendo $H' = \frac{dH}{d\xi}$ y h_0, h_1 y h_2 constantes, tal que h_2 debe ser distinto de 0.

Despejando, se obtienen las siguientes soluciones de la ecuación de Riccati unificada:

$$\begin{aligned} H_+(\xi) &= -\frac{h_1}{2h_2} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2h_2} \left[\frac{\eta_1 \tanh\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\xi\right) + \eta_2}{\eta_1 + \eta_2 \tanh\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\xi\right)} \right] & \Delta > 0 & \quad y \quad \eta_1^2 + \eta_2^2 \neq 0 \\ H_-(\xi) &= -\frac{h_1}{2h_2} + \frac{\sqrt{-\Delta}}{2h_2} \left[\frac{\eta_3 \tanh\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}\xi\right) + \eta_4}{\eta_3 + \eta_4 \tanh\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}\xi\right)} \right] & \Delta < 0 & \quad y \quad \eta_3^2 + \eta_4^2 \neq 0 \\ H_0(\xi) &= -\frac{h_1}{2h_2} - \frac{1}{h_2\xi + h} & \Delta = 0 & \end{aligned} \quad (1.6.12)$$

donde η_r para $r = 1, 2, 3, 4$ son constantes arbitrarias, h un integrador constante y $\Delta = h_1^2 - 4h_0h_2$.

Al igual que ocurre con el nuevo método sub-ODE modificado, al sustituir $H(\xi)$ en G y H' e igualándolo a cero, se obtiene un sistema de ecuaciones en función de A_i ($i = 0, 1, 2, \dots, M$), h_0, h_1, h_2 y σ .

Con este sistema de ecuaciones y las soluciones obtenidas de la ecuación de Riccati unificada obtenemos la solución exacta de la propagación de los solitones, la cual es la misma que en el caso anterior del nuevo método del sub-ODE modificado.

$$\tilde{V}_{tt} - \alpha (\tilde{V}^2)_{tt} + \beta (\tilde{V}^3)_{tt} - \delta^2 \tilde{V}_{xx} - \frac{\delta^4}{12} \tilde{V}_{xxxx} = 0. \quad (1.6.13)$$

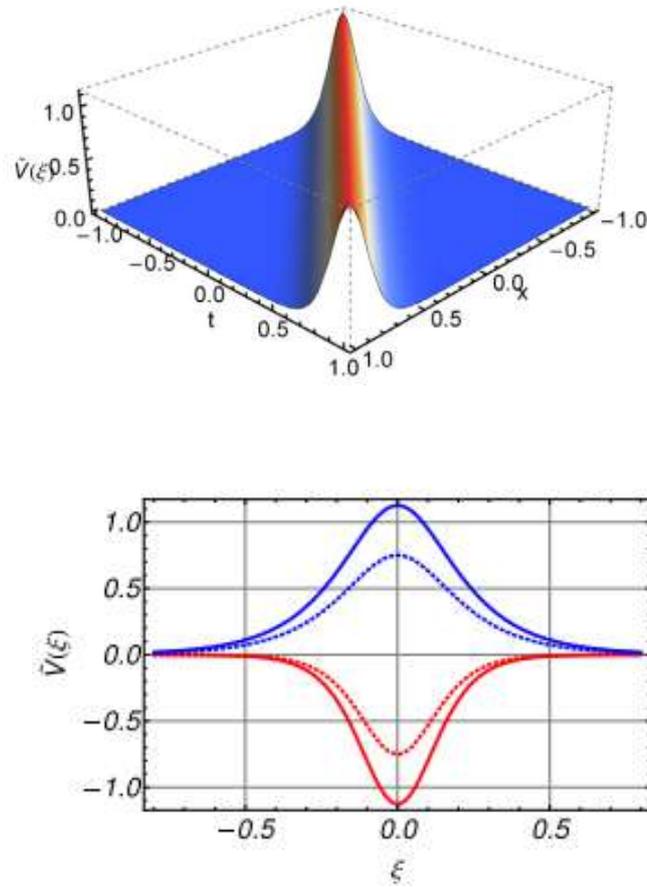


Figura 1.4. Solución de la ecuación de propagación de los solitones para $l=1.0$, $\delta=0.5$, $\sigma=1.0$, $\beta=1.0$, $\xi_0=0$ y $A = B = E = 0$. $\alpha=1.0$ (curva roja continua), $\alpha=1.5$ (curva roja discontinua), $\alpha=-1.0$ (curva azul continua) y $\alpha=-1.5$ (curva azul discontinua) en $t = 0$.

1.6.4. Método de Transformación Lineal Fraccionario

El método de transformación lineal fraccionario se basa en la transformación fraccionaria de Möbius, una extensión de las transformaciones clásicas de Möbius. Este método parte de funciones racionales de la forma:

$$\Phi(\xi) = \frac{P + Q f(\xi, m)^\gamma}{1 + R f(\xi, m)^\gamma} \quad (1.6.14)$$

donde P , Q y R son constantes reales, γ es un integrador y $f(\xi, m)$ es una función jacobiana elíptica cuyo parámetro es m ($0 \leq m \leq 1$). La función $f(\xi, m)$ puede ser especificada como $f(\xi, m)=\text{cn}(\xi, m)$, $f(\xi, m)=\text{dn}(\xi, m)$ o $f(\xi, m)=\text{sn}(\xi, m)$.

Al igual que ocurre con los métodos anteriores (el nuevo método sub-ODE modificado y el método de expansión de la ecuación de Riccati unificada), al introducir $\Phi(\xi)$ en G e igualando los coeficientes de $\text{cn}(\xi, m)$ o $\text{sn}(\xi, m)$ a cero, se obtiene un sistema de ecuaciones algebraicas, a partir de las cuales se obtendrá la ecuación del modelo fraccionario de propagación de solitones por líneas eléctricas de paso bajo:

$$\tilde{V}_{tt} - \alpha (\tilde{V}^2)_{tt} + \beta (\tilde{V}^3)_{tt} - \delta^2 \tilde{V}_{xx} - \frac{\delta^4}{12} \tilde{V}_{xxxx} = 0 \quad (1.6.15)$$

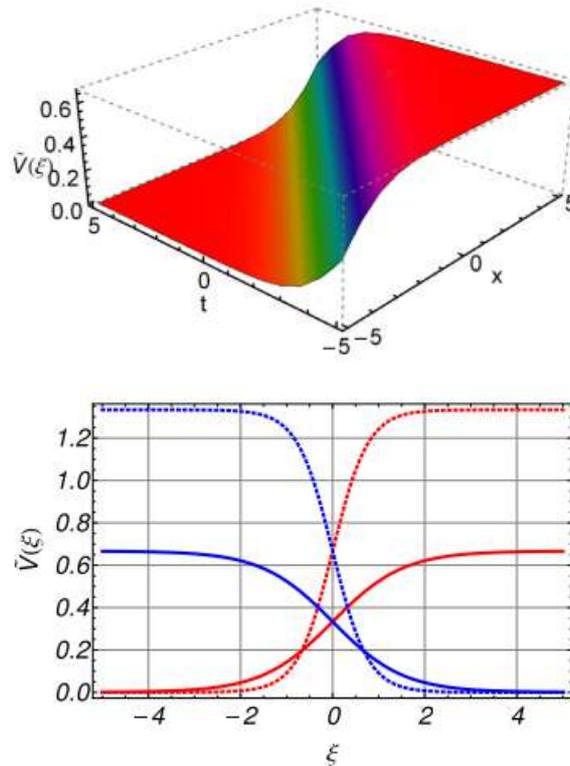


Figura 1.5. Solución discontinua (kink) de la ecuación de propagación de los solitones para $l=1.0$, $\delta=0.5$, $\sigma=0.2$, $\beta=1.0$, $\alpha = 1.0$, $\xi_0=0$ y $A = B = 0$. $\alpha=1.0$ (curva roja continua) y $\alpha=2.0$ (curva roja discontinua) para $\epsilon=1.0$ y $\alpha=1.0$ (curva azul continua) y $\alpha=2.0$ (curva azul discontinua) para $\epsilon=-1.0$, todo ello para $t = 0$.

1.6.5. Método de Expansión (G' / G^2)

Recientemente, ha sido propuesto otro método de obtención de soluciones exactas a ecuaciones diferenciales fraccionarias no lineales. Este método, conocido como el método de expansión (G' / G^2), recurre a una técnica utilizada comúnmente en algoritmos genéticos para mejorar la búsqueda en espacios de soluciones complejas, como es el caso de la propagación de los solitones.

Dada una ecuación diferencial fraccionaria no lineal

$$p(u, D_t^\alpha u, D_x^\beta u, D_y^\gamma u, D_t^\alpha D_t^\alpha u, D_t^\alpha D_x^\beta u, D_x^\beta D_x^\beta u) = 0 \quad \alpha > 0, \quad \gamma \quad y \quad \beta < 1 \quad (1.6.16)$$

donde $u(x, y, t)$ es una función desconocida y p es un polinomio de u y sus derivadas parciales fraccionarias.

Mediante la transformación compleja fraccionaria $u(x, t) = U(\xi)$

$$\xi = \frac{kx^\beta}{\Gamma(1+\beta)} + \frac{ct^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \quad (1.6.17)$$

donde k y c son constantes distintas a cero y se cumple que $Q(U, U', U'', U''', \dots) = 0$.

La solución formal de la ecuación diferencial ordinaria se puede expresar como

$$U(\xi) = a_0 + \sum_{n=1}^N a_n \left(\frac{G'}{G^2}\right)^n + b_n \left(\frac{G'}{G^2}\right)^{-n} \quad (1.6.18)$$

$$\left(\frac{G'}{G^2}\right) = \mu + \lambda \left(\frac{G'}{G^2}\right)^2$$

para λ distinta de 0 y μ distinta de 1, siendo λ y μ integradores y a_0 , a_n y b_n y constantes a determinar.

Combinando las ecuaciones anteriores, se obtienen las soluciones. Generalmente, estos resultados se pueden clasificar según tres casos:

Caso A: $\mu \lambda > 0$:

$$\left(\frac{G'}{G^2}\right) = \sqrt{\frac{\mu}{\lambda}} \left(\frac{C \cos \sqrt{\mu \lambda} \xi + D \sin \sqrt{\mu \lambda} \xi}{D \cos \sqrt{\mu \lambda} \xi - C \sin \sqrt{\mu \lambda} \xi} \right) \quad (1.6.19)$$

Caso B: $\mu \lambda < 0$:

$$\left(\frac{G'}{G^2}\right) = -\frac{\sqrt{|\mu \lambda|}}{\lambda} \left(\frac{C \sinh(2 \sqrt{|\mu \lambda|} \xi) + C \cosh(2 \sqrt{|\mu \lambda|} \xi) + D}{C \sinh(2 \sqrt{|\mu \lambda|} \xi) + C \cosh(2 \sqrt{|\mu \lambda|} \xi) - D} \right) \quad (1.6.20)$$

Caso C: $\mu = 0$ y $\lambda \neq 0$:

$$\left(\frac{G'}{G^2}\right) = -\frac{C}{\lambda(C \xi + D)} \quad (1.6.21)$$

donde C y D son constantes distintas de cero en todos los casos.

1.7. Alineación con los Objetivos de Desarrollo Sostenible (ODS)

Para llevar a cabo este proyecto, se tendrán en cuenta los múltiples Objetivos de Desarrollo Sostenible (ODS) en los que las bifurcaciones de los solitones pueden tener un mayor impacto. Se ha llegado a la conclusión de que en varios de ellos podría suponer una ayuda notable:

- Energía sostenible y no contaminante. En un mundo donde la principal energía utilizada es no renovable y tiene un fin, resulta de gran interés analizar las energías utilizadas y las pérdidas que generan para poder optimizar su consumo. Gracias a este proyecto se podrá estudiar las bifurcaciones que presentan los solitones en las líneas de transmisión eléctrica, pudiendo así optimizar su comportamiento dinámico para conseguir las mínimas pérdidas posible de energía eléctrica y optimizar su consumo.



Figura 1.6. Energía asequible y no contaminante (ODS).

- Industria, innovación e infraestructuras. En este objetivo todavía queda un largo camino por recorrer para se pueda aprovechar al máximo este potencial. Su principal objetivo es introducir nuevas tecnologías para generar fuerzas económicas dinámicas y competitivas que generen empleo e ingresos. Especialmente en el campo de la ingeniería existe un gran margen de mejora. Mediante el estudio de proyectos como este, se pueden conocer mejor las industrias e infraestructuras ya existentes y así proponer planes de mejora y optimización para su crecimiento.



Figura 1.7. Industria, Innovación e Infraestructura (ODS).

- Ciudades y comunidades sostenibles. El mundo actual cada vez se encuentra más urbanizado y no deja de disminuir la población rural. Más de la mitad de la población mundial vive en ciudades. De la mano de este avance metropolitano, es necesario un avance tecnológico para que la ciudad se pueda adaptar a su creciente población. Es por ello, que para no tener que aumentar el consumo de los recursos exponencialmente, se debe optimizar su

uso y reducir sus pérdidas. Mediante este proyecto se podrá conocer el comportamiento dinámico de los solitones para optimizar la transmisión eléctrica.



Figura 1.8. Ciudades y Comunidades Sostenibles (ODS).

Capítulo 2

2. Método de Expansión (G'/G)

2.1. Descripción del Método de Expansión (G'/G)

Se considera una PDE no lineal

$$P(V, V_x, V_t, V_{xx}, V_{tt}, \dots) = 0 \quad (2.1.1)$$

siendo $V = V(x, t)$ una función desconocida y P un polinomio en V , con sus derivadas parciales.

Paso 1. Se determina el voltaje V

$$V(x, t) = V(\xi) \quad \text{para} \quad \xi = \sqrt{k} (x - \omega t) \quad (2.1.2)$$

donde k se trata de un parámetro positivo y ω representa la velocidad de propagación.

Para ello, se reduce la ecuación (1.1.1), convirtiéndola en la siguiente ODE no lineal:

$$H(V, V', V'', \dots) = 0 \quad (2.1.3)$$

donde H es un polinomio de $V(\xi)$ y las derivadas de V son respecto a ξ .

Paso 2. Se asume que la solución a la anterior ecuación es de la forma:

$$V(\xi) = \sum_{i=0}^N a_i \left(\frac{G'}{G} \right)^i \quad a_N \neq 0 \quad (2.1.4)$$

siendo a_i para $i = 1, 2, \dots, N$, constantes a determinar posteriormente, sabiendo que $a_N \neq 0$. Además, la función $G = G(\xi)$ puede verificar una las siguientes tres ecuaciones auxiliares:

- La ecuación generalizada de Riccati:

$$G'(\xi) = r + p G(\xi) + q G^2(\xi) \quad (2.1.5)$$

- La ecuación elíptica de Jacobi:

$$(G'(\xi))^2 = R + Q G^2(\xi) + P G^4(\xi) \quad (2.1.6)$$

- La ODE de 2º orden lineal:

$$G''(\xi) + \lambda G'(\xi) + \mu G(\xi) = 0 \quad (2.1.7)$$

donde $r, p, q, R, Q, P, \lambda$ y μ representan constantes reales que serán determinadas más adelante.

Paso 3. Se determina el valor del integrador positivo N de la ecuación $V(\xi)$ mediante el balance del orden de las derivadas máximas y los términos no lineales más altos de la ecuación de H .

Paso 4. Se sustituye la ecuación (2.1.4) junto con una de las tres ecuaciones auxiliares (2.1.5), (2.1.6) y (2.1.7) en la ecuación (2.1.3). A continuación, se despejan los coeficientes de $G^i(\xi)$, para los valores de $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, en la ecuación (2.1.5), y de $(G'(\xi)/G(\xi))^i$, para $i = 0, 1, 2, \dots$ en las ecuaciones (1.1.6) y (1.1.7).

Estos coeficientes se igualan a cero, dando lugar a un sistema de ecuaciones algebraicas, que se resuelve con el software *Mathematica*.

Como resultado, se obtendrán los valores de los coeficientes a_i para $i = 0, 1, 2, \dots, N$, y los valores de $r, p, q, R, Q, P, \lambda$ y μ .

Paso 5. Se obtiene conjuntos de resultados a partir de las ecuaciones auxiliares (2.1.5), (2.1.6) y (2.1.7) según la ecuación diferencial auxiliar considerada.

Paso 6. Se sustituyen los valores de $a_i, r, p, q, R, Q, P, \lambda$ y μ junto con los resultados obtenidos de las ecuaciones auxiliares en la ecuación (2.1.4), para conseguir así las soluciones exactas de la ecuación PDE (2.1.1).

2.2. Aplicación del Método de Expansión (G'/G)

Particularizando este método de expansión de (G'/G) a la PDE no lineal que rige la propagación de ondas de transmisión eléctrica de paso bajo (*Low-Pass Electrical Lines-LPEL*) no lineal:

$$\begin{aligned} & \bullet \frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial t^2} - \alpha \frac{\partial^2 V^2(x, t)}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial^2 V^3(x, t)}{\partial t^2} - \delta^2 \frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\delta^4}{12} \frac{\partial^4 V(x, t)}{\partial x^4} = 0 \\ & \bullet (\text{PDE}) \equiv V_{tt} - \alpha (V^2)_{tt} + \beta (V^3)_{tt} - \delta^2 V_{xx} - \frac{\delta^4}{12} V_{xxxx} = 0. \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

donde α , β y δ se tratan de constantes positivas y reales. Por otro lado, $V(x, t)$ representa el voltaje de las líneas de transmisión eléctrica, x la distancia de propagación y t el tiempo.

En primer lugar se sustituye en la ecuación (2.2.1) la relación establecida en la ecuación (2.1.2) entre ξ y las variables x y t . Entonces, se obtiene la siguiente ecuación:

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \left\{ \frac{k^2 \delta^4}{12} \frac{d^2 V}{d\xi^2} + (k \delta^2 - k \omega^2) V + \alpha k \omega^2 V^2 - \beta k \omega^2 V^3 \right\} = 0 \quad (2.2.2)$$

Se integra la ecuación (2.2.2) respecto ξ dos veces y, tras sustituir las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} K &= k \delta^2 \\ U &= k \omega^2 \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

se obtiene una ecuación diferencial ordinaria ODE:

$$(\text{ODE}) \equiv \frac{K^2}{12} \frac{d^2 V(\xi)}{d\xi^2} + (K - U) V(\xi) + \alpha U V^2(\xi) - \beta U V^3(\xi) = 0. \quad (2.2.4)$$

Mediante el balance correspondiente de $\frac{d^2 V(\xi)}{d\xi^2}$ con $V^3(\xi)$, se obtiene $N = 1$. Por lo que se reduce la ecuación a la expresión:

$$V(\xi) = a_0 + a_1 \left(\frac{G'}{G} \right) \quad (2.2.5)$$

donde a_0 y a_1 son constantes a determinar y se conoce que $a_1 \neq 0$.

En los siguientes apartados se estudian las soluciones generales de las ecuaciones diferenciales auxiliares siguientes:

- Ecuación diferencial de 2º orden (ODE-*Ordinary differential equation*).
- Ecuación diferencial generalizada de Riccati.
- Ecuación Elíptica de Jacobi.

2.2.1. Ecuación Diferencial de 2º Orden (ODE)

Este método de resolución se basa en sustituir la ecuación (2.2.5) y la ODE lineal de 2º orden (2.1.7) en la ecuación (2.2.4) para posteriormente, igualar a cero todos los coeficientes de $\left(\frac{G'}{G}\right)^i$, para $i = 0, 1, 2, 3$. Entonces, se obtendrá un conjunto de ecuaciones algebraicas:

$$\begin{aligned} \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^3 &: \frac{1}{6} K^2 a_1 - U \beta a_1^3 = 0 \\ \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^2 &: \frac{1}{4} K^2 \lambda a_1 + U \alpha a_1^2 - 3 U \beta a_0 a_1^2 = 0 \\ \frac{G'(\xi)}{G(\xi)} &: \frac{1}{12} K^2 a_1 (\lambda^2 + 2\mu) + (K - U) a_1 + 2 U \alpha a_0 a_1 - 3 U \beta a_0 a_1^2 = 0 \\ \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^0 &: \frac{1}{12} K^2 \lambda \mu a_1 + (K - U) a_0 + U \alpha a_0^2 - U \beta a_0^3 = 0 \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

Resolviendo el anterior sistema de ecuaciones algebraicas (2.2.6) con el apoyo de Mathematica, se llegan a los siguientes resultados:

$$\begin{aligned} K &= -\frac{24\alpha^2}{(\lambda^2 - 4\mu)(2\alpha^2 - 9\beta)^2} \quad U = -\frac{216\alpha^2\beta}{(\lambda^2 - 4\mu)(2\alpha^2 - 9\beta)^2} \\ a_0 &= \frac{\alpha}{3\beta} \left(1 \pm \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}\right) \quad a_1 = \pm \frac{2\alpha}{3\beta\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}} \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

Sustituyendo los valores obtenidos para K , U , a_0 y a_1 en la ecuación (2.2.5), se consigue el valor del voltaje de las líneas eléctricas en función de ξ y el valor de ξ en función del espacio y tiempo recorrido por los solitones:

$$V(\xi) = \frac{\alpha}{3\beta} \left(1 \pm \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}\right) \pm \frac{2\alpha}{3\beta\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}} \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right) \quad (2.2.8)$$

$$\begin{aligned} \xi &= \sqrt{-\frac{24\alpha^2}{\delta^2(\sqrt{\lambda^2 - 4\mu})(2\alpha^2 - 9\beta)}} x - \sqrt{-\frac{216\alpha^2\beta}{(\lambda^2 - 4\mu)(2\alpha^2 - 9\beta)}} t, \\ &2\alpha^2 < 9\beta, \beta > 0 \text{ y } \lambda^2 - 4\mu \neq 0 \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

Una vez obtenidos las expresiones del voltaje y ξ , se particularizan los valores del voltaje en función de si $\lambda^2 - 4\mu$ es mayor, menor o igual a cero.

Para el caso de $\lambda^2 - 4\mu$ mayor que cero, se obtienen funciones soluciones de forma hiperbólicas; mientras que para el caso de $\lambda^2 - 4\mu$ menor que cero, las soluciones serán funciones trigonométricas.

En primer lugar, si $\lambda^2 - 4\mu > 0$:

$$V_1(\xi) = \frac{\alpha}{3\beta} \left[1 \pm \frac{A_1 \sinh\left(\frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \xi\right) + A_2 \cosh\left(\frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \xi\right)}{A_1 \cosh\left(\frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \xi\right) + A_2 \sinh\left(\frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \xi\right)} \right] \quad (2.2.10)$$

Concretamente, si se determina $A_1 \neq 0$, $A_2 = 0$, $\lambda > 0$ y $\mu = 0$, se obtienen las soluciones de una onda del solitón *kink*:

$$V_2(\xi) = \frac{\alpha}{3\beta} \left[1 \pm \tanh\left(\frac{\lambda}{2} \xi\right) \right] \quad (2.2.11)$$

$$\xi = \sqrt{\frac{-24\alpha^2}{\delta^2 \lambda^2 (2\alpha^2 - 9\beta)}} x - \sqrt{\frac{216\alpha^2 \beta}{\lambda^2 (2\alpha^2 - 9\beta)^2}} t$$

En cambio, si se fija $A_1 = 0$, $A_2 \neq 0$, $\lambda > 0$ y $\mu = 0$, se obtendrán las soluciones de una onda del solitón *anti-kink*:

$$V_3(\xi) = \frac{\alpha}{3\beta} \left[1 \pm \coth\left(\frac{\lambda}{2} \xi\right) \right] \quad (2.2.12)$$

$$\xi = \sqrt{\frac{-24\alpha^2}{\delta^2 \lambda^2 (2\alpha^2 - 9\beta)}} x - \sqrt{\frac{216\alpha^2 \beta}{\lambda^2 (2\alpha^2 - 9\beta)^2}} t$$

En segundo lugar, si $\lambda^2 - 4\mu < 0$:

$$V_4(\xi) = \frac{\alpha}{3\beta} \left[1 \pm i \frac{A_1 \cos\left(\frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} \xi\right) - A_2 \sin\left(\frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} \xi\right)}{A_1 \sin\left(\frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} \xi\right) + A_2 \cos\left(\frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} \xi\right)} \right] \quad (2.2.13)$$

$$i = \sqrt{-1}$$

Específicamente, si se fijan los valores $A_1 = 0$, $A_2 \neq 0$, $\lambda > 0$ y $\mu = 0$ en la expresión del voltaje de las líneas eléctricas para $\lambda^2 - 4\mu < 0$ se obtienen las mismas soluciones de la onda del solitón *kink* $V_3(\xi)$. Consecuentemente, fijando $A_1 \neq 0$, $A_2 = 0$, $\lambda > 0$ y $\mu = 0$, se consiguen las mismas soluciones de la onda del solitón *anti-kink* $V_2(\xi)$.

Mediante los ejemplos mostrados a continuación se determina la solución general de una ODE de 2º orden en la variable $G(\xi)$ así como la relación $\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)$ y se comprueba lo explicado de forma teórica anteriormente.

■ **Ejemplo 2.2.1. Ecuación Diferencial de 2º Orden.** ([CHAN12], [MALI10], [FAN09])

Sea la ecuación diferencial lineal de segundo orden (ODE):

$$(ODE) \equiv G''(\xi) + \lambda G'(\xi) + \mu G(\xi) = 0$$

donde λ, μ son constantes reales arbitrarias.

En los casos indicados, se pide:

- (i) Hállese la solución general $G(\xi)$ de la ODE y su derivada $G'(\xi)$.
- (ii) Calcúlese la relación $\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)$.
- (a) $(\lambda^2 - 4\mu) > 0$.
- (b) $(\lambda^2 - 4\mu) < 0$.
- (c) $(\lambda^2 - 4\mu) = 0$.

SOLUCIÓN

(a)

$$\left\{ (1) G(\xi):, c_1 e^{\frac{1}{2}\xi(-\sqrt{\lambda^2-4\mu}-\lambda)} + c_2 e^{\frac{1}{2}\xi(\sqrt{\lambda^2-4\mu}-\lambda)} \right\}$$

$$\left\{ (1) G(\xi):, \left(\cosh\left(\frac{\lambda\xi}{2}\right) - \sinh\left(\frac{\lambda\xi}{2}\right) \right) \left((c_1 + c_2) \cosh\left(\frac{1}{2}\xi\sqrt{\lambda^2-4\mu}\right) + (c_2 - c_1) \sinh\left(\frac{1}{2}\xi\sqrt{\lambda^2-4\mu}\right) \right) \right\}$$

$$\left\{ (2) G'(\xi):, \frac{1}{2} \left(c_2 (-\lambda) \cosh\left(\frac{\lambda\xi}{2} - \frac{1}{2}\xi\sqrt{\lambda^2-4\mu}\right) + c_2 \sqrt{\lambda^2-4\mu} \cosh\left(\frac{\lambda\xi}{2} - \frac{1}{2}\xi\sqrt{\lambda^2-4\mu}\right) - c_1 \lambda \cosh\left(\frac{1}{2}\xi\sqrt{\lambda^2-4\mu} + \frac{\lambda\xi}{2}\right) - c_1 \sqrt{\lambda^2-4\mu} \cosh\left(\frac{1}{2}\xi\sqrt{\lambda^2-4\mu} + \frac{\lambda\xi}{2}\right) + c_2 \lambda \sinh\left(\frac{\lambda\xi}{2} - \frac{1}{2}\xi\sqrt{\lambda^2-4\mu}\right) - c_2 \sqrt{\lambda^2-4\mu} \sinh\left(\frac{\lambda\xi}{2} - \frac{1}{2}\xi\sqrt{\lambda^2-4\mu}\right) + c_1 \lambda \sinh\left(\frac{1}{2}\xi\sqrt{\lambda^2-4\mu} + \frac{\lambda\xi}{2}\right) + c_1 \sqrt{\lambda^2-4\mu} \sinh\left(\frac{1}{2}\xi\sqrt{\lambda^2-4\mu} + \frac{\lambda\xi}{2}\right) \right) \right\}$$

Se reduce la expresión trigonométrica de $\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)$ simplificando el numerador:

$$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} = \frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2} \frac{A_1 \sinh\left(\frac{1}{2}\xi\sqrt{\lambda^2-4\mu}\right) - A_2 \cosh\left(\frac{1}{2}\xi\sqrt{\lambda^2-4\mu}\right)}{A_1 \cosh\left(\frac{1}{2}\xi\sqrt{\lambda^2-4\mu}\right) - A_2 \sinh\left(\frac{1}{2}\xi\sqrt{\lambda^2-4\mu}\right)} - \frac{\lambda}{2}$$

(b)

$$\left\{ (1) G(\xi):, c_1 e^{\frac{1}{2}\xi(-\lambda-i\sqrt{4\mu-\lambda^2})} + c_2 e^{\frac{1}{2}\xi(-\lambda+i\sqrt{4\mu-\lambda^2})} \right\}$$

$$\left\{ (1) G(\xi): , \right. \\ \left. \left(\cosh\left(\frac{\lambda \xi}{2}\right) - \sinh\left(\frac{\lambda \xi}{2}\right) \right) \left((c_1 + c_2) \cos\left(\frac{1}{2} \xi \sqrt{4\mu - \lambda^2}\right) - i(c_1 - c_2) \sin\left(\frac{1}{2} \xi \sqrt{4\mu - \lambda^2}\right) \right) \right\} \\ \left\{ (2) G'(\xi): , \right. \\ -\frac{1}{2} c_2 \lambda \cosh\left(\frac{\lambda \xi}{2} - \frac{1}{2} i \xi \sqrt{4\mu - \lambda^2}\right) + \frac{1}{2} i c_2 \sqrt{4\mu - \lambda^2} \cosh\left(\frac{\lambda \xi}{2} - \frac{1}{2} i \xi \sqrt{4\mu - \lambda^2}\right) - \\ \frac{1}{2} c_1 \lambda \cosh\left(\frac{\lambda \xi}{2} + \frac{1}{2} i \xi \sqrt{4\mu - \lambda^2}\right) - \frac{1}{2} i c_1 \sqrt{4\mu - \lambda^2} \cosh\left(\frac{\lambda \xi}{2} + \frac{1}{2} i \xi \sqrt{4\mu - \lambda^2}\right) + \\ \frac{1}{2} c_2 \lambda \sinh\left(\frac{\lambda \xi}{2} - \frac{1}{2} i \xi \sqrt{4\mu - \lambda^2}\right) - \frac{1}{2} i c_2 \sqrt{4\mu - \lambda^2} \sinh\left(\frac{\lambda \xi}{2} - \frac{1}{2} i \xi \sqrt{4\mu - \lambda^2}\right) + \\ \left. \frac{1}{2} c_1 \lambda \sinh\left(\frac{\lambda \xi}{2} + \frac{1}{2} i \xi \sqrt{4\mu - \lambda^2}\right) + \frac{1}{2} i c_1 \sqrt{4\mu - \lambda^2} \sinh\left(\frac{\lambda \xi}{2} + \frac{1}{2} i \xi \sqrt{4\mu - \lambda^2}\right) \right\}$$

Se reduce la expresión trigonométrica de $\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)$ simplificando el numerador:

$$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} = \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \left(\frac{-A_1 \sin\left(\frac{1}{2} \xi \sqrt{4\mu - \lambda^2}\right) + A_2 \cos\left(\frac{1}{2} \xi \sqrt{4\mu - \lambda^2}\right)}{A_1 \cos\left(\frac{1}{2} \xi \sqrt{4\mu - \lambda^2}\right) + A_2 \sin\left(\frac{1}{2} \xi \sqrt{4\mu - \lambda^2}\right)} \right) - \frac{\lambda}{2}$$

(c)

$$\left\{ (1) G(\xi): , \left\{ c_1 e^{-\frac{\lambda \xi}{2}} + c_2 \xi e^{-\frac{\lambda \xi}{2}} \right\} \right\} \\ \left\{ (2) G'(\xi): , \left\{ c_2 e^{-\frac{\lambda \xi}{2}} + \lambda \left(-\frac{1}{2} c_1 e^{-\frac{\lambda \xi}{2}} - \frac{1}{2} c_2 \xi e^{-\frac{\lambda \xi}{2}} \right) \right\} \right\}$$

$$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} = \frac{c_2 e^{-\frac{\lambda \xi}{2}} - \frac{1}{2} \lambda \left(c_1 e^{-\frac{\lambda \xi}{2}} + c_2 \xi e^{-\frac{\lambda \xi}{2}} \right)}{c_1 e^{-\frac{\lambda \xi}{2}} + c_2 \xi e^{-\frac{\lambda \xi}{2}}} = -\frac{\lambda}{2} + \frac{c_2}{c_2 \xi + c_1}$$

La solución de la ecuación (ODE) tiene la expresión:

$$G(\xi) = \begin{cases} c_1 e^{\frac{1}{2} \xi (-\sqrt{\lambda^2 - 4\mu} - \lambda)} + c_2 e^{\frac{1}{2} \xi (\sqrt{\lambda^2 - 4\mu} - \lambda)} - \frac{\lambda}{2} & \lambda^2 - 4\mu > 0 \\ c_1 e^{\frac{1}{2} \xi (-\lambda - i \sqrt{4\mu - \lambda^2})} + c_2 e^{\frac{1}{2} \xi (-\lambda + i \sqrt{4\mu - \lambda^2})} & \lambda^2 - 4\mu < 0 \\ c_1 e^{-\frac{\lambda \xi}{2}} + c_2 \xi e^{-\frac{\lambda \xi}{2}} & \lambda^2 - 4\mu = 0 \end{cases}$$

$$\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right) = \begin{cases} \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \frac{C_1 \sinh\left(\frac{1}{2} \xi \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}\right) + C_2 \cosh\left(\frac{1}{2} \xi \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}\right)}{C_1 \cosh\left(\frac{1}{2} \xi \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}\right) + C_2 \sinh\left(\frac{1}{2} \xi \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}\right)} - \frac{\lambda}{2} & \lambda^2 - 4\mu > 0 \\ \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \left(\frac{-C_1 \sin\left(\frac{1}{2} \xi \sqrt{4\mu - \lambda^2}\right) + C_2 \cos\left(\frac{1}{2} \xi \sqrt{4\mu - \lambda^2}\right)}{C_1 \cos\left(\frac{1}{2} \xi \sqrt{4\mu - \lambda^2}\right) + C_2 \sin\left(\frac{1}{2} \xi \sqrt{4\mu - \lambda^2}\right)} \right) - \frac{\lambda}{2} & \lambda^2 - 4\mu < 0 \\ -\frac{\lambda}{2} + \frac{C_2}{C_2 \xi + C_1} & \lambda^2 - 4\mu = 0 \end{cases}$$

■ **Ejemplo 2.2.2. (Otra versión)** ([CHAN12])

Sea la ecuación diferencial lineal de segundo orden (ODE):

$$(ODE) \equiv G''(\xi) + \lambda G'(\xi) + \mu G(\xi) = 0$$

donde λ, μ son constantes reales arbitrarias.

- (i) Hállese la solución general $G(\xi)$ de la ODE y su derivada $G'(\xi)$.
 - (ii) Calcúlese la relación $\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}$.
- (a) $(\lambda^2 - 4\mu) > 0$.
 - (b) $(\lambda^2 - 4\mu) < 0$.

SOLUCIÓN

(a)

$$\left\{ G(\xi):, c_1 e^{\frac{1}{2}\xi(-\sqrt{\lambda^2-4\mu}-\lambda)} + c_2 e^{\frac{1}{2}\xi(\sqrt{\lambda^2-4\mu}-\lambda)} \right\}$$

$$\left\{ G(\xi):, \left(\cosh\left(\frac{\lambda\xi}{2}\right) - \sinh\left(\frac{\lambda\xi}{2}\right) \right) \left((c_1 + c_2) \cosh\left(\frac{1}{2}\xi\sqrt{\lambda^2-4\mu}\right) + (c_2 - c_1) \sinh\left(\frac{1}{2}\xi\sqrt{\lambda^2-4\mu}\right) \right) \right\}$$

$$\left\{ G'(\xi):, \frac{1}{2} \left(c_2 (-\lambda) \cosh\left(\frac{\lambda\xi}{2} - \frac{1}{2}\xi\sqrt{\lambda^2-4\mu}\right) + c_2 \sqrt{\lambda^2-4\mu} \cosh\left(\frac{\lambda\xi}{2} - \frac{1}{2}\xi\sqrt{\lambda^2-4\mu}\right) - c_1 \lambda \cosh\left(\frac{1}{2}\xi\sqrt{\lambda^2-4\mu} + \frac{\lambda\xi}{2}\right) - c_1 \sqrt{\lambda^2-4\mu} \cosh\left(\frac{1}{2}\xi\sqrt{\lambda^2-4\mu} + \frac{\lambda\xi}{2}\right) + c_2 \lambda \sinh\left(\frac{\lambda\xi}{2} - \frac{1}{2}\xi\sqrt{\lambda^2-4\mu}\right) - c_2 \sqrt{\lambda^2-4\mu} \sinh\left(\frac{\lambda\xi}{2} - \frac{1}{2}\xi\sqrt{\lambda^2-4\mu}\right) + c_1 \lambda \sinh\left(\frac{1}{2}\xi\sqrt{\lambda^2-4\mu} + \frac{\lambda\xi}{2}\right) + c_1 \sqrt{\lambda^2-4\mu} \sinh\left(\frac{1}{2}\xi\sqrt{\lambda^2-4\mu} + \frac{\lambda\xi}{2}\right) \right) \right\}$$

$$\left\{ \frac{G'(\xi)}{G(\xi)} =, \frac{1}{2} \left(-\lambda + \sqrt{\lambda^2-4\mu} \left(1 - \frac{2c_1}{c_2 \cosh(\xi\sqrt{\lambda^2-4\mu}) + c_2 \sinh(\xi\sqrt{\lambda^2-4\mu}) + c_1} \right) \right) \right\}$$

(b)

$$\left\{ G(\xi):, c_1 e^{\frac{1}{2}\xi(-\lambda-i\sqrt{4\mu-\lambda^2})} + c_2 e^{\frac{1}{2}\xi(-\lambda+i\sqrt{4\mu-\lambda^2})} \right\}$$

$$\left\{ G(\xi):, \left(\cosh\left(\frac{\lambda\xi}{2}\right) - \sinh\left(\frac{\lambda\xi}{2}\right) \right) \left((c_1 + c_2) \cos\left(\frac{1}{2}\xi\sqrt{4\mu-\lambda^2}\right) - i(c_1 - c_2) \sin\left(\frac{1}{2}\xi\sqrt{4\mu-\lambda^2}\right) \right) \right\}$$

$$\left\{ G'(\xi):, \frac{1}{2} i e^{-\frac{\lambda\xi}{2}} \left((c_2 - c_1) \sqrt{4\mu-\lambda^2} + i(c_1 + c_2)\lambda \right) \cos\left(\frac{1}{2}\xi\sqrt{4\mu-\lambda^2}\right) + \left(i(c_1 + c_2) \sqrt{4\mu-\lambda^2} + (c_1 - c_2)\lambda \right) \sin\left(\frac{1}{2}\xi\sqrt{4\mu-\lambda^2}\right) \right\}$$

$$\left\{ \frac{G'(\xi)}{G(\xi)} =, -\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2} i \sqrt{4\mu-\lambda^2} \left(1 - \frac{2c_1}{c_2 \cos(\xi\sqrt{4\mu-\lambda^2}) + i c_2 \sin(\xi\sqrt{4\mu-\lambda^2}) + c_1} \right) \right\}$$

■ Ejemplo 2.2.3. (ODE de 2º Orden)

Dadas las ecuaciones

(i) $u(\xi) = a_0 + \sum_{k=1}^N a_k \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)^k$

(ii) $G''(\xi) + \lambda G'(\xi) + \mu G(\xi) = 0$ ODE de segundo orden.

dedúzcanse las expresiones de $u'(\xi)$ y $u''(\xi)$ como expansión en términos de $\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)$:

(a) $u'(\xi) = -\sum_{k=1}^N k a_k \left(\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)^{k+1} + \lambda \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)^k + \mu \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)^{k-1} \right).$

(b) $u''(\xi) = \sum_{k=1}^N k a_k \left((k+1) \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)^{k+2} + (2k+1)\lambda \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)^{k+1} + ((k-2)\lambda^2 + 2k\mu) \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)^k + (2k-1)\lambda\mu \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)^{k-1} + (k-1)\mu^2 \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)^{k-2} \right).$

$$(a) u'(\xi) = -\sum_{k=1}^N k a_k \left(\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)^{k+1} + \lambda \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)^k + \mu \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)^{k-1} \right)$$

$$(b) \sum_{k=1}^N k a_k \left((k+1) \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)^{k+2} + (2k+1)\lambda \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)^{k+1} + ((k-2)\lambda^2 + 2k\mu) \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)^k + (2k-1)\lambda\mu \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)^{k-1} + (k-1)\mu^2 \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)^{k-2} \right)$$

(2.2.14)

$$(b) \quad u''(\xi) = \sum_{k=1}^N k a_k \left(k(\lambda^2 + 2\mu) \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)^k + (2k-1)\lambda\mu \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)^{k-1} \right. \\ \left. + (2k+1)\lambda \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)^{k+1} + (k-1)\mu^2 \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)^{k-2} + (k+1) \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)^{k+2} \right)$$

SOLUCIÓN

(a)

Se parte de las ecuaciones:

$$(a) \quad u(\xi) = a_0 + \sum_{k=1}^N a_k \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)^k$$

$$(b) \quad G''(\xi) + \lambda G'(\xi) + \mu G(\xi) = 0 \Rightarrow \bullet \frac{G''(\xi)}{G(\xi)} = -\lambda \frac{G'(\xi)}{G(\xi)} - \mu$$

$$(c) \quad G'''(\xi) + \lambda G''(\xi) + \mu G'(\xi) = 0 \Rightarrow \frac{G'''(\xi)}{G(\xi)} = -\lambda \frac{G''(\xi)}{G(\xi)} - \mu \frac{G'(\xi)}{G(\xi)}$$

$$\frac{G'''(\xi)}{G(\xi)} = -\lambda \left(-\lambda \frac{G'(\xi)}{G(\xi)} - \mu \right) - \mu \frac{G'(\xi)}{G(\xi)}$$

$$\bullet \frac{G'''(\xi)}{G(\xi)} = \lambda^2 \frac{G'(\xi)}{G(\xi)} - \mu \frac{G'(\xi)}{G(\xi)} + \lambda \mu$$

y se deduce la expresión de $u'(\xi)$:

$$u'(\xi) = \frac{d}{d\xi} \left(a_0 + \sum_{k=1}^N a_k \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)^k \right) = \sum_{k=1}^N \frac{d}{d\xi} \left(a_k \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)^k \right) \\ = \sum_{k=1}^N k a_k \left(\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)^{k-1} \left(\frac{G''(\xi)G(\xi) - G'(\xi)^2}{G(\xi)^2} \right) \right) \\ = \sum_{k=1}^N k a_k \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)^{k-1} \left(\frac{G''(\xi)}{G(\xi)} - \frac{G'(\xi)^2}{G(\xi)^2} \right) \\ = \sum_{k=1}^N k a_k \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)^{k-1} \left(-\lambda \frac{G'(\xi)}{G(\xi)} - \mu - \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)^2 \right) \\ = \sum_{k=1}^N k a_k \left(-\lambda \frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)^{k-1} - \mu \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)^{k-1} - \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)^{k+1} \right) \\ u'(\xi) = -\sum_{k=1}^N k a_k \left(\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)^{k+1} + \lambda \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)^k + \mu \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)^{k-1} \right)$$

$$u'(\xi) = -\sum_{k=1}^N k a_k \left(\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)^{k+1} + \lambda \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)^k + \mu \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)^{k-1} \right)$$

(b)

La expresión de $u''(\xi)$ es la siguiente:

$$\begin{aligned} \bullet \frac{d^2}{d\xi^2} \left(a_k \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)^k \right) &= a_k \left((k-1) k \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)^{k-2} \left(\frac{G''(\xi)}{G(\xi)} - \frac{G'(\xi)^2}{G(\xi)^2} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + k \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)^{k-1} \left(\frac{G^{(3)}(\xi)}{G(\xi)} + \frac{2G'(\xi)^3}{G(\xi)^3} - \frac{3G'(\xi)G''(\xi)}{G(\xi)^2} \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u''(\xi) &= \sum_{k=1}^N a_k \left((k-1) k \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)^{k-2} \left(\frac{G''(\xi)}{G(\xi)} - \frac{G'(\xi)^2}{G(\xi)^2} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + k \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)^{k-1} \left(\frac{G^{(3)}(\xi)}{G(\xi)} + \frac{2G'(\xi)^3}{G(\xi)^3} - \frac{3G'(\xi)G''(\xi)}{G(\xi)^2} \right) \right) \end{aligned}$$

Se sustituye

$$\begin{aligned} \bullet \frac{G''(\xi)}{G(\xi)} &= -\lambda \frac{G'(\xi)}{G(\xi)} - \mu \\ \bullet \frac{G'''(\xi)}{G(\xi)} &= \lambda^2 \frac{G'(\xi)}{G(\xi)} - \mu \frac{G'(\xi)}{G(\xi)} + \lambda \mu \end{aligned}$$

en $u''(\xi)$, lo que resulta:

$$\begin{aligned} u''(\xi) &= \sum_{k=1}^N k a_k \left(\frac{k\lambda^2 + (k-1)\mu + (k+1)\mu}{k(\lambda^2 + 2\mu)} \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)^k + \frac{((k-1)\lambda\mu + k\lambda\mu)}{(2k-1)\lambda\mu} \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)^{k-1} + \right. \\ &\quad \left. \frac{(k\lambda + (k+1)\lambda)}{(2k+1)\lambda} \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)^{k+1} + (k-1)\mu^2 \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)^{k-2} + (k+1) \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)^{k+2} \right) \end{aligned}$$

Se reduce la expresión de $u''(\xi)$:

$$\begin{aligned} u''(\xi) &= \sum_{k=1}^N k a_k \left(k(\lambda^2 + 2\mu) \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)^k + (2k-1)\lambda\mu \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)^{k-1} \right. \\ &\quad \left. + (2k+1)\lambda \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)^{k+1} + (k-1)\mu^2 \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)^{k-2} + (k+1) \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)^{k+2} \right) \end{aligned}$$

2.2.2. Ecuación Diferencial Generalizada de Riccati

Para la obtención del voltaje de las líneas eléctricas utilizando la ecuación diferencial generalizada de Riccati, se sustituirán la ecuación (2.2.5) y la ecuación generalizada de Riccati (2.1.5) en la ODE (2.2.4). A partir de esta sustitución de ecuaciones, se obtendrán los coeficientes de $G^i(\xi)$, para $i = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$, y se igualarán a cero, para conseguir un sistema de ecuaciones algebraicas. De este sistema de ecuaciones se despejarán, con el uso de Mathematica, los valores de a_i (para $i = 0, 1$), r, p, q, U y K . Mathematica proporciona dos posibles resultados al conjunto de ecuaciones algebraicas.

RESULTADO 1:

$$K = \frac{-24 \alpha^2}{p^2 (2 \alpha^2 - 9 \beta)} \quad U = \frac{216 \alpha^2 \beta}{p^2 (2 \alpha^2 - 9 \beta)^2} \quad (2.2.15)$$

$$a_0 = 0 \quad a_1 = \frac{2 \alpha}{3 p \beta} \left(\frac{G'}{G} \right) \quad r = 0.$$

Sustituyendo todos estos valores obtenidos en la ecuación (2.2.5), se consigue la expresión del voltaje de las líneas eléctricas y la expresión de ξ en función del espacio y tiempo recorridos por los solitones:

$$V(\xi) = \frac{2 \alpha}{3 p \beta} \left(\frac{G'}{G} \right) \quad (2.2.16)$$

$$\xi = \sqrt{\frac{-24 \alpha^2}{p^2 \delta^2 (2 \alpha^2 - 9 \beta)}} x - \sqrt{\frac{216 \alpha^2 \beta}{p^2 (2 \alpha^2 - 9 \beta)^2}} t, \quad 2 \alpha^2 < 9 \beta, \beta > 0 \text{ y } p \neq 0.$$

A partir de estas expresiones, se pueden deducir las soluciones exactas para la ecuación (2.2.1):

$$V_4(\xi) = \frac{2 \alpha}{3 \beta} \left(\frac{\cosh(p \xi) - \sinh(p \xi)}{d + \cosh(p \xi) - \sinh(p \xi)} \right) \quad (2.2.17)$$

$$V_5(\xi) = \frac{2 \alpha}{3 \beta} \left(\frac{d}{d + \cosh(p \xi) + \sinh(p \xi)} \right).$$

RESULTADO 2:

$$K = \frac{-24 \alpha^2}{2 \alpha^2 (p^2 - 4 q r) - 9 \beta p^2} \quad U = \frac{216 \alpha^2 \beta}{(2 \alpha^2 (p^2 - 4 q r) - 9 \beta p^2)^2} \quad (2.2.18)$$

$$a_0 = 0 \quad a_1 = \frac{2 \alpha}{3 p \beta}.$$

Sustituyendo estos valores obtenidos en la ecuación (2.2.5), se consigue la expresión del voltaje de las líneas eléctricas y la expresión de ξ en función del espacio y tiempo recorridos por los solitones:

$$V(\xi) = \frac{2\alpha}{3p\beta} \left(\frac{G'}{G} \right)$$

$$\xi = \sqrt{\frac{-24\alpha^2}{2\alpha^2\delta^2(p^2-4qr)-9\beta p^2}} x - \sqrt{\frac{216\alpha^2\beta}{(2\alpha^2(p^2-4qr)-9\beta p^2)^2}} t, \quad (2.2.19)$$

$$2\alpha^2\delta^2(p^2-4qr) < 9\beta p^2 \text{ y } \beta > 0.$$

A partir de estas expresiones, se pueden deducir las múltiples soluciones exactas para la ecuación (2.2.1). Algunas de estas soluciones son:

$$V_6(\xi) = \frac{\alpha}{3\beta p} \left(\frac{(p^2-4qr) \operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{p^2-4qr}}{2}\xi\right)}{p + \sqrt{p^2-4qr} \tanh\left(\frac{\sqrt{p^2-4qr}}{2}\xi\right)} \right) \quad p^2-4qr > 0$$

$$V_7(\xi) = \frac{1}{3} \frac{\alpha(p^2-4qr) \left(1 + \tan^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{-p^2+4qr}\xi\right)\right)}{p\beta \left(-\sqrt{-p^2+4qr} \tan\left(\frac{1}{2}\sqrt{-p^2+4qr}\xi\right) - p\right)} \quad p^2-4qr < 0. \quad (2.2.20)$$

Para los valores mostrados en el resultado 2, la expresión del voltaje de las líneas eléctricas (V) se particularizará en función de los diferentes casos: p^2-4qr sea mayor, menor o igual que cero.

Mediante los siguientes ejemplos, se mostrará la solución general de la ODE no lineal de primer orden en función de $G(\xi)$ y de su derivada $G'(\xi)$, además de la relación entre ambas $\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)$. Asimismo, se comprobará lo explicado de forma teórica anteriormente.

■ **Ejemplo 2.2.4. Ecuación Generalizada de Riccati.** ([SHAH19]) ([TALA14])

Sea la ecuación diferencial no lineal de primer orden (ODE) generalizada de Riccati:

$$(ODE) \equiv G'(\xi) = r + p G(\xi) + q G^2(\xi)$$

donde r, p, q son constantes reales arbitrarias.

En los casos indicados, se pide:

(i) Hállese la solución general $G(\xi)$ de la ODE Generalizada de Riccati y su derivada $G'(\xi)$.

(ii) Calcúlese la relación $\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)$.

(a) $(p^2 - 4qr) > 0$.

(b) $(p^2 - 4qr) < 0$.

(c) $(p^2 - 4qr) = 0$.

SOLUCIÓN

(a)

$$\left\{ (1) G(\xi):, -\frac{p + \sqrt{p^2 - 4qr} \tanh\left(\frac{1}{2}(\xi + c_1) \sqrt{p^2 - 4qr}\right)}{2q} \right\}$$

$$\left\{ (2) G'(\xi):, \frac{4qr - p^2}{2q \left(1 + \cosh\left(\xi \sqrt{p^2 - 4qr} + c_1 \sqrt{p^2 - 4qr}\right)\right)} \right\}$$

$$\left\{ (3), \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right), =, \frac{(p^2 - 4qr) \operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2}(\xi + c_1) \sqrt{p^2 - 4qr}\right)}{2 \left(p + \sqrt{p^2 - 4qr} \tanh\left(\frac{1}{2}(\xi + c_1) \sqrt{p^2 - 4qr}\right)\right)} \right\}$$

(b)

$$\left\{ (1) G(\xi):, \frac{-p + \sqrt{4qr - p^2} \tan\left(\frac{1}{2}(\xi + c_1) \sqrt{4qr - p^2}\right)}{2q} \right\}$$

$$\left\{ (2) G'(\xi):, \frac{4qr - p^2}{2q \left(1 + \cos\left(\xi \sqrt{4qr - p^2} + c_1 \sqrt{4qr - p^2}\right)\right)} \right\}$$

$$\left\{ (3), \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right), =, \frac{(p^2 - 4qr) \sec^2\left(\frac{1}{2}(\xi + c_1) \sqrt{4qr - p^2}\right)}{2 \left(p - \sqrt{4qr - p^2} \tan\left(\frac{1}{2}(\xi + c_1) \sqrt{4qr - p^2}\right)\right)} \right\}$$

(c)

$$\left\{ (1) G(\xi):, \frac{2r \left(-p - \frac{2}{\xi + 4c_1 r}\right)}{p^2} \right\}$$

$$\left\{ (2) G'(\xi):, \frac{4r}{p^2(\xi+4c_1r)^2} + \frac{8c_1r^2}{p(\xi+4c_1r)^2} - \frac{2r}{p(\xi+4c_1r)} + \frac{2\xi r}{p(\xi+4c_1r)^2} \right\}$$

$$\left\{ (3), \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right), =, - \frac{2}{(\xi+4c_1r)(2+p(\xi+4c_1r))} \right\}$$

La solución de la ecuación (ODE) Generalizada de Riccati tiene la expresión:

$$G(\xi) = \begin{cases} -\frac{p+\sqrt{p^2-4qr} \tanh\left(\frac{1}{2}(\xi+c_1)\sqrt{p^2-4qr}\right)}{2q} & p^2-4qr > 0 \\ \frac{-p+\sqrt{4qr-p^2} \tan\left(\frac{1}{2}(\xi\sqrt{4qr-p^2}+c_1\sqrt{4qr-p^2})\right)}{2q} & p^2-4qr < 0 \\ -\frac{2(4c_1pr^2+\xi pr+2r)}{p^2(\xi+4c_1r)} & p^2-4qr = 0 \end{cases}$$

$$G'(\xi) = \begin{cases} \frac{-p^2+4qr}{2q(1+\text{Cosh}[\sqrt{p^2-4qr}\xi+\sqrt{p^2-4qr}c_1])} & p^2-4qr > 0 \\ \frac{4qr-p^2}{2q(1+\cos(\xi\sqrt{4qr-p^2}+c_1\sqrt{4qr-p^2}))} & p^2-4qr < 0 \\ \frac{4r}{p^2(\xi+4c_1r)^2} + \frac{8c_1r^2}{p(\xi+4c_1r)^2} - \frac{2r}{p(\xi+4c_1r)} + \frac{2\xi r}{p(\xi+4c_1r)^2} & p^2-4qr = 0 \end{cases}$$

$$\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right) = \begin{cases} \frac{(p^2-4qr) \text{sech}^2\left(\frac{1}{2}(\xi+c_1)\sqrt{p^2-4qr}\right)}{2(p+\sqrt{p^2-4qr} \tanh\left(\frac{1}{2}(\xi+c_1)\sqrt{p^2-4qr}\right))} & p^2-4qr > 0 \\ \frac{(p^2-4qr) \sec^2\left(\frac{1}{2}(\xi+c_1)\sqrt{4qr-p^2}\right)}{2(p-\sqrt{4qr-p^2} \tan\left(\frac{1}{2}(\xi+c_1)\sqrt{4qr-p^2}\right))} & p^2-4qr < 0 \\ -\frac{2}{(\xi+4c_1r)(2+p(\xi+4c_1r))} & p^2-4qr = 0 \end{cases}$$

■ **Ejemplo 2.2.5. (ODE Generalizada de Riccati)**

Sean las ecuaciones relacionadas con el método de Expansión $\left(\frac{G'}{G}\right)$ y la ODE Generalizada de Riccati:

$$(i) \quad u(\xi) = a_0 + \sum_{k=1}^m a_k \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^k$$

$$(ii) \quad (ODE) \equiv G'(\xi) = r + p G(\xi) + q G^2(\xi) \quad \text{ODE Generalizada de Riccati.}$$

Dedúzcanse las expresiones indicadas expresadas como polinomios en términos de $G^k(\xi)$ y $G^{-k}(\xi)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$).

$$(a) \quad G'(\xi), G''(\xi) \text{ y } G'''(\xi).$$

$$(b) \quad \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right), \left(\frac{G''(\xi)}{G(\xi)}\right) \text{ y } \left(\frac{G'''(\xi)}{G(\xi)}\right).$$

$$(c) \quad u(\xi), u'(\xi), u''(\xi).$$

SOLUCIÓN

Tabla 2.1. Expresiones de $G'(\xi)$, $G''(\xi)$ y $G'''(\xi)$ y sus relaciones junto con las expresiones de $u(\xi)$ y sus derivadas definidas como polinomios en términos de $G^k(\xi)$ y $G^{-k}(\xi)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$).

Fórmulas

$$G'(\xi) = p G(\xi) + q G(\xi)^2 + r$$

$$G''(\xi) = (2 q G(\xi) + p) (p G(\xi) + q G(\xi)^2 + r)$$

$$G'''(\xi) = (p G(\xi) + q G(\xi)^2 + r) (6 p q G(\xi) + 6 q^2 G(\xi)^2 + p^2 + 2 q r)$$

$$\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right) = q G(\xi) + \frac{r}{G(\xi)} + p$$

$$\left(\frac{G''(\xi)}{G(\xi)}\right) = 3 p q G(\xi) + \frac{p r}{G(\xi)} + 2 q^2 G(\xi)^2 + p^2 + 2 q r$$

$$\left(\frac{G'''(\xi)}{G(\xi)}\right) = q G(\xi) (7 p^2 + 8 q r) + \frac{r(p^2 + 2 q r)}{G(\xi)} + 12 p q^2 G(\xi)^2 + 6 q^3 G(\xi)^3 + p^3 + 8 p q r$$

$$u(\xi) = \sum_{k=1}^m a_k \left(q G(\xi) + \frac{r}{G(\xi)} + p\right)^k + a_0$$

$$u'(\xi) = \sum_{k=1}^m a_k \left(k \left(3 p q G(\xi) + \frac{p r}{G(\xi)} + 2 q^2 G(\xi)^2 + p^2 + 2 q r\right) \left(q G(\xi) + \frac{r}{G(\xi)} + p\right)^{k-1} - k \left(q G(\xi) + \frac{r}{G(\xi)} + p\right)^{k+1}\right)$$

■ **Ejemplo 2.2.6. (Soluciones de la ODE Generalizada de Riccati)**

([ZHU06]) ([TALA14])

Sea la ecuación diferencial generalizada de Riccati

$$(ODE) \equiv G'(\xi) = r + p G(\xi) + q G^2(\xi).$$

donde r, p, q con constantes reales.

Las soluciones generales de la Ecuación Generalizada de Riccati son las indicadas en la Tablas anteriores. En cada Caso o Familia

(i) Determínese que cada solución $G_k(\xi)$ satisface la ODE generalizada de Riccati.

(ii) Hállese la realación $\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)$

- | | | | | |
|-----------------------------|-------------------|--------------|-----|---------------|
| (a) Caso I (Familia I). | $p^2 - 4 q r > 0$ | $p q \neq 0$ | o | $q r \neq 0.$ |
| (b) Caso II (Familia II). | $p^2 - 4 q r < 0$ | $p q \neq 0$ | o | $q r \neq 0.$ |
| (c) Caso III (Familia III). | $r = 0$ | $p q \neq 0$ | o | $q r \neq 0.$ |
| (d) Caso IV (Familia IV). | $r = p = 0$ | $q \neq 0$ | | |
-

SOLUCIÓN

(a) ([ZHU06])

Tabla 2.2. Ecuación general de Riccati para los valores $(p^2 - 4qr) > 0$, $p q \neq 0$ o $q r \neq 0$. (Caso I)

k	$G_k(\xi)$
• $k = 1$	$G_1(\xi) = -\frac{\sqrt{p^2-4qr} \tanh(\frac{1}{2}\xi \sqrt{p^2-4qr})+p}{2q}$
• $k = 2$	$G_2(\xi) = -\frac{\sqrt{p^2-4qr} \coth(\frac{1}{2}\xi \sqrt{p^2-4qr})+p}{2q}$
• $k = 3$	$G_3(\xi) = -\frac{p+\sqrt{p^2-4qr} (\tanh(\xi \sqrt{p^2-4qr})+i \operatorname{sech}(\xi \sqrt{p^2-4qr}))}{2q}$
• $k = 4$	$G_4(\xi) = -\frac{\sqrt{p^2-4qr} (\coth(\xi \sqrt{p^2-4qr})+\operatorname{csch}(\xi \sqrt{p^2-4qr}))+p}{2q}$
• $k = 5$	$G_5(\xi) = -\frac{\sqrt{p^2-4qr} (\tanh(\frac{1}{4}\xi \sqrt{p^2-4qr})+\coth(\frac{1}{4}\xi \sqrt{p^2-4qr}))+2p}{4q}$
• $k = 6$	$G_6(\xi) = \frac{\sqrt{p^2-4qr} (\sqrt{c_1^2+c_2^2}-c_1 \cosh(\xi \sqrt{p^2-4qr})) - p}{c_1 \sinh(\xi \sqrt{p^2-4qr})+c_2} - p$
• $k = 7$	$G_7(\xi) = \frac{-\sqrt{p^2-4qr} (c_1 \cosh(\xi \sqrt{p^2-4qr})+\sqrt{c_1^2+c_2^2}) - p}{c_1 \sinh(\xi \sqrt{p^2-4qr})+c_2} - p$
• $k = 8$	$G_8(\xi) = \frac{2r \cosh(\frac{1}{2}\xi \sqrt{p^2-4qr})}{\sqrt{p^2-4qr} \sinh(\frac{1}{2}\xi \sqrt{p^2-4qr})-p \cosh(\frac{1}{2}\xi \sqrt{p^2-4qr})}$
• $k = 9$	$G_9(\xi) = \frac{2r \sinh(\frac{1}{2}\xi \sqrt{p^2-4qr})}{\sqrt{p^2-4qr} \cosh(\frac{1}{2}\xi \sqrt{p^2-4qr})-p \sinh(\frac{1}{2}\xi \sqrt{p^2-4qr})}$
• $k = 10$	$G_{10}(\xi) = \frac{2r \cosh(\xi \sqrt{p^2-4qr})}{\sqrt{p^2-4qr} \sinh(\xi \sqrt{p^2-4qr})-p \cosh(\xi \sqrt{p^2-4qr})+i \sqrt{p^2-4qr}}$
• $k = 11$	$G_{11}(\xi) = \frac{2r \sinh(\xi \sqrt{p^2-4qr})}{-p \sinh(\xi \sqrt{p^2-4qr})+\sqrt{p^2-4qr} \cosh(\xi \sqrt{p^2-4qr})+\sqrt{p^2-4qr}}$
• $k = 12$	$G_{12}(\xi) = \frac{4r \sinh(\frac{1}{4}\xi \sqrt{p^2-4qr}) \cosh(\frac{1}{4}\xi \sqrt{p^2-4qr})}{2 \sqrt{p^2-4qr} \cosh^2(\frac{1}{4}\xi \sqrt{p^2-4qr})-2p \sinh(\frac{1}{4}\xi \sqrt{p^2-4qr}) \cosh(\frac{1}{4}\xi \sqrt{p^2-4qr})-\sqrt{p^2-4qr}}$

Tabla 2.3. Relación de $\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}$ en función de la ecuación general de Riccati para los valores $(p^2 - 4qr) > 0$, $p \neq 0$ o $q \neq 0$. (Caso I)

k	$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}$
• $k = 1$	$\frac{(p^2-4qr) \operatorname{sech}^2(\frac{1}{2}\xi \sqrt{p^2-4qr})}{2(\sqrt{p^2-4qr} \tanh(\frac{1}{2}\xi \sqrt{p^2-4qr})+p)}$
• $k = 2$	$-\frac{(p^2-4qr) \operatorname{csch}^2(\frac{1}{2}\xi \sqrt{p^2-4qr})}{2(\sqrt{p^2-4qr} \coth(\frac{1}{2}\xi \sqrt{p^2-4qr})+p)}$
• $k = 3$	$-\frac{i(p^2-4qr)}{\sqrt{p^2-4qr} \cosh(\xi \sqrt{p^2-4qr})+p(\sinh(\xi \sqrt{p^2-4qr})-i)}$
• $k = 4$	$-\frac{(p^2-4qr) \operatorname{csch}^2(\frac{1}{2}\xi \sqrt{p^2-4qr})}{2(\sqrt{p^2-4qr} \coth(\frac{1}{2}\xi \sqrt{p^2-4qr})+p)}$
• $k = 5$	$-\frac{(p^2-4qr) \operatorname{csch}^2(\frac{1}{2}\xi \sqrt{p^2-4qr})}{2(\sqrt{p^2-4qr} \coth(\frac{1}{2}\xi \sqrt{p^2-4qr})+p)}$
• $k = 6$	$-\left((c_1(p^2-4qr) \left(-c_2 \sinh(\xi \sqrt{p^2-4qr}) - \sqrt{c_1^2+c_2^2} \cosh(\xi \sqrt{p^2-4qr}) + c_1 \right)) / \right. \\ \left. \left((c_1 \sinh(\xi \sqrt{p^2-4qr}) + c_2) \right. \right. \\ \left. \left. \left(c_1 \left(p \sinh(\xi \sqrt{p^2-4qr}) + \sqrt{p^2-4qr} \cosh(\xi \sqrt{p^2-4qr}) \right) - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \sqrt{c_1^2+c_2^2} \sqrt{p^2-4qr} + c_2 p \right) \right) \right)$
• $k = 7$	$-\left((c_1(p^2-4qr) \left(-c_2 \sinh(\xi \sqrt{p^2-4qr}) + \sqrt{c_1^2+c_2^2} \cosh(\xi \sqrt{p^2-4qr}) + c_1 \right)) / \right. \\ \left. \left((c_1 \sinh(\xi \sqrt{p^2-4qr}) + c_2) \right. \right. \\ \left. \left. \left(c_1 \left(p \sinh(\xi \sqrt{p^2-4qr}) + \sqrt{p^2-4qr} \cosh(\xi \sqrt{p^2-4qr}) \right) + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \sqrt{c_1^2+c_2^2} \sqrt{p^2-4qr} + c_2 p \right) \right) \right)$
• $k = 8$	$\frac{(p^2-4qr) \operatorname{sech}^2(\frac{1}{2}\xi \sqrt{p^2-4qr})}{2(p-\sqrt{p^2-4qr} \tanh(\frac{1}{2}\xi \sqrt{p^2-4qr}))}$
• $k = 9$	$-\frac{(p^2-4qr) \operatorname{csch}^2(\frac{1}{2}\xi \sqrt{p^2-4qr})}{2(p-\sqrt{p^2-4qr} \coth(\frac{1}{2}\xi \sqrt{p^2-4qr}))}$
• $k = 10$	$\frac{p^2-4qr}{i p \sinh(\xi \sqrt{p^2-4qr})-i \sqrt{p^2-4qr} \cosh(\xi \sqrt{p^2-4qr})+p}$
• $k = 11$	$-\frac{(p^2-4qr) \operatorname{csch}^2(\frac{1}{2}\xi \sqrt{p^2-4qr})}{2(p-\sqrt{p^2-4qr} \coth(\frac{1}{2}\xi \sqrt{p^2-4qr}))}$
• $k = 12$	$-\frac{(p^2-4qr) \operatorname{csch}^2(\frac{1}{2}\xi \sqrt{p^2-4qr})}{2(p-\sqrt{p^2-4qr} \coth(\frac{1}{2}\xi \sqrt{p^2-4qr}))}$

(b)

Tabla 2.4. Ecuación general de Riccati para los valores $(p^2 - 4qr) < 0$, $p q \neq 0$ o $q r \neq 0$. (Caso II)

k	$G_k(\xi)$
• $k = 13$	$G_{13}(\xi) = \frac{\sqrt{4qr-p^2} \tan(\frac{1}{2}\xi \sqrt{4qr-p^2}) - p}{2q}$
• $k = 14$	$G_{14}(\xi) = -\frac{\sqrt{4qr-p^2} \cot(\frac{1}{2}\xi \sqrt{4qr-p^2}) + p}{2q}$
• $k = 15$	$G_{15}(\xi) = \frac{\sqrt{4qr-p^2} (\tan(\xi \sqrt{4qr-p^2}) + \sec(\xi \sqrt{4qr-p^2})) - p}{2q}$
• $k = 16$	$G_{16}(\xi) = -\frac{\sqrt{4qr-p^2} (\cot(\xi \sqrt{4qr-p^2}) + \csc(\xi \sqrt{4qr-p^2})) + p}{2q}$
• $k = 17$	$G_{17}(\xi) = \frac{\sqrt{4qr-p^2} (\tan(\frac{1}{4}\xi \sqrt{4qr-p^2}) - \cot(\frac{1}{4}\xi \sqrt{4qr-p^2})) - 2p}{4q}$
• $k = 18$	$G_{18}(\xi) = \frac{\sqrt{4qr-p^2} (\sqrt{c_1^2 - c_2^2} - c_1 \cos(\xi \sqrt{4qr-p^2})) - p}{c_1 \sin(\xi \sqrt{4qr-p^2}) + c_2} - p$
• $k = 19$	$G_{19}(\xi) = \frac{-\sqrt{4qr-p^2} (c_1 \cos(\xi \sqrt{4qr-p^2}) + \sqrt{c_1^2 - c_2^2}) - p}{c_1 \sin(\xi \sqrt{4qr-p^2}) + c_2} - p$
• $k = 20$	$G_{20}(\xi) = -\frac{2r \cos(\frac{1}{2}\xi \sqrt{4qr-p^2})}{\sqrt{4qr-p^2} \sin(\frac{1}{2}\xi \sqrt{4qr-p^2}) + p \cos(\frac{1}{2}\xi \sqrt{4qr-p^2})}$
• $k = 21$	$G_{21}(\xi) = \frac{2r \sin(\frac{1}{2}\xi \sqrt{4qr-p^2})}{\sqrt{4qr-p^2} \cos(\frac{1}{2}\xi \sqrt{4qr-p^2}) - p \sin(\frac{1}{2}\xi \sqrt{4qr-p^2})}$
• $k = 22$	$G_{22}(\xi) = -\frac{2r \cos(\xi \sqrt{4qr-p^2})}{\sqrt{4qr-p^2} \sin(\xi \sqrt{4qr-p^2}) + p \cos(\xi \sqrt{4qr-p^2}) + \sqrt{4qr-p^2}}$
• $k = 23$	$G_{23}(\xi) = \frac{2r \sin(\xi \sqrt{4qr-p^2})}{-p \sin(\xi \sqrt{4qr-p^2}) + \sqrt{4qr-p^2} \cos(\xi \sqrt{4qr-p^2}) + \sqrt{4qr-p^2}}$
• $k = 24$	$G_{24}(\xi) = \frac{4r \sin(\frac{1}{4}\xi \sqrt{4qr-p^2}) \cos(\frac{1}{4}\xi \sqrt{4qr-p^2})}{2 \sqrt{4qr-p^2} \cos^2(\frac{1}{4}\xi \sqrt{4qr-p^2}) - 2p \sin(\frac{1}{4}\xi \sqrt{4qr-p^2}) \cos(\frac{1}{4}\xi \sqrt{4qr-p^2}) - \sqrt{4qr-p^2}}$

Tabla 2.5. Relación de $\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}$ en función de la ecuación general de Riccati para los valores $(p^2 - 4qr) < 0$, $pq \neq 0$ o $qr \neq 0$. (Caso II)

k	$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}$
• $k = 13$	$\frac{(p^2 - 4qr) \sec^2(\frac{1}{2}\xi \sqrt{4qr - p^2})}{2(p - \sqrt{4qr - p^2} \tan(\frac{1}{2}\xi \sqrt{4qr - p^2}))}$
• $k = 14$	$\frac{(p^2 - 4qr) \csc^2(\frac{1}{2}\xi \sqrt{4qr - p^2})}{2(\sqrt{4qr - p^2} \cot(\frac{1}{2}\xi \sqrt{4qr - p^2}) + p)}$
• $k = 15$	$\frac{p^2 - 4qr}{p(-\sin(\xi \sqrt{4qr - p^2})) - \sqrt{4qr - p^2} \cos(\xi \sqrt{4qr - p^2}) + p}$
• $k = 16$	$\frac{(p^2 - 4qr) \csc^2(\frac{1}{2}\xi \sqrt{4qr - p^2})}{2(\sqrt{4qr - p^2} \cot(\frac{1}{2}\xi \sqrt{4qr - p^2}) + p)}$
• $k = 17$	$\frac{(p^2 - 4qr) \csc^2(\frac{1}{2}\xi \sqrt{4qr - p^2})}{2(\sqrt{4qr - p^2} \cot(\frac{1}{2}\xi \sqrt{4qr - p^2}) + p)}$
• $k = 18$	$\frac{(c_1(p^2 - 4qr)(c_2 \sin(\xi \sqrt{4qr - p^2}) - \sqrt{c_1^2 - c_2^2} \cos(\xi \sqrt{4qr - p^2}) + c_1)) / ((c_1 \sin(\xi \sqrt{4qr - p^2}) + c_2)(c_1(p \sin(\xi \sqrt{4qr - p^2}) + \sqrt{4qr - p^2} \cos(\xi \sqrt{4qr - p^2})) - \sqrt{c_1^2 - c_2^2} \sqrt{4qr - p^2} + c_2 p))}{1}$
• $k = 19$	$\frac{(c_1(p^2 - 4qr)(c_2 \sin(\xi \sqrt{4qr - p^2}) + \sqrt{c_1^2 - c_2^2} \cos(\xi \sqrt{4qr - p^2}) + c_1)) / ((c_1 \sin(\xi \sqrt{4qr - p^2}) + c_2)(c_1(p \sin(\xi \sqrt{4qr - p^2}) + \sqrt{4qr - p^2} \cos(\xi \sqrt{4qr - p^2})) + \sqrt{c_1^2 - c_2^2} \sqrt{4qr - p^2} + c_2 p))}{1}$
• $k = 20$	$\frac{(p^2 - 4qr) \sec^2(\frac{1}{2}\xi \sqrt{4qr - p^2})}{2(\sqrt{4qr - p^2} \tan(\frac{1}{2}\xi \sqrt{4qr - p^2}) + p)}$
• $k = 21$	$\frac{(p^2 - 4qr) \csc^2(\frac{1}{2}\xi \sqrt{4qr - p^2})}{2(p - \sqrt{4qr - p^2} \cot(\frac{1}{2}\xi \sqrt{4qr - p^2}))}$
• $k = 22$	$\frac{p^2 - 4qr}{p(-\sin(\xi \sqrt{4qr - p^2})) + \sqrt{4qr - p^2} \cos(\xi \sqrt{4qr - p^2}) + p}$
• $k = 23$	$\frac{(p^2 - 4qr) \csc^2(\frac{1}{2}\xi \sqrt{4qr - p^2})}{2(p - \sqrt{4qr - p^2} \cot(\frac{1}{2}\xi \sqrt{4qr - p^2}))}$
• $k = 24$	$\frac{(p^2 - 4qr) \csc^2(\frac{1}{2}\xi \sqrt{4qr - p^2})}{2(p - \sqrt{4qr - p^2} \cot(\frac{1}{2}\xi \sqrt{4qr - p^2}))}$

(c)

Tabla 2.6. Ecuación general de Riccati para los valores $r = 0$, $pq \neq 0$ o $qr \neq 0$. (Caso III)

k	$G_k(\xi)$
• $k = 25$	$G_{25}(\xi) = -\frac{c_3 p}{q(c_3 - \sinh(\xi p) + \cosh(\xi p))}$
• $k = 26$	$G_{26}(\xi) = -\frac{p(\sinh(\xi p) + \cosh(\xi p))}{q(c_3 + \sinh(\xi p) + \cosh(\xi p))}$

Tabla 2.7. Relación de $\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}$ en función de la ecuación general de Riccati para los valores $r = 0$,
 $p q \neq 0$ o $q r \neq 0$. (Caso III)

k	$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}$
• $k = 25$	$\frac{p}{c_3 e^{\xi p} + 1}$
• $k = 26$	$\frac{c_3 p}{c_3 + e^{\xi p}}$

(d)

Tabla 2.8. Ecuación general de Riccati para los valores $r = 0$, $p q \neq 0$ o $q r \neq 0$. (Caso IV)

k	$G_k(\xi)$
• $k = 27$	$G_{27}(\xi) = -\frac{1}{c_1 + \xi q}$

Tabla 2.9. Relación de $\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}$ en función de la ecuación general de Riccati para los valores $r = 0$,
 $p q \neq 0$ o $q r \neq 0$. (Caso IV)

k	$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}$
• $k = 27$	$-\frac{q}{c_1 + \xi q}$

2.2.3. Ecuación Elíptica de Jacobi

Combinando la ecuación elíptica de Jacobi (2.1.6) y la ecuación (2.2.5) en la ecuación (2.2.2), se obtienen los coeficientes de $\left(\frac{G'}{G}\right)^i$, para $i = 0, 1, 2, \dots$, y se igualarán a cero, consiguiendo así un sistema de ecuaciones algebraicas:

$$\begin{aligned} \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^3 &: \frac{1}{6}K^2 a_1 - \beta U a_1^3 = 0 \\ \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^2 &: -3\beta U a_0 a_1^2 + \alpha U a_1^2 = 0 \\ \frac{G'(\xi)}{G(\xi)} &: \frac{-1}{6}K^2 a_1 Q + (K - U) a_1 + 2\alpha U a_0 a_1 - 3\beta U a_0^2 a_1 = 0 \\ \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^0 &: (K - U) a_0 + \alpha U a_0^2 - \beta U a_0^3 = 0 \end{aligned} \quad (2.2.21)$$

Con el uso de *Mathematica*, se conseguirán, a partir de este sistema de ecuaciones, los siguientes valores:

$$\begin{aligned} K &= -\frac{6\alpha^2}{Q(2\alpha^2 - 9\beta)} \\ U &= -\frac{54\alpha^2\beta}{Q(2\alpha^2 - 9\beta)^2} \\ a_0 &= -\frac{\alpha}{3\beta} \\ a_1 &= \pm \frac{\alpha}{3\beta\sqrt{Q}} \\ P &= P \\ Q &= Q, \text{ para } Q > 0 \end{aligned} \quad (2.2.22)$$

Sustituyendo los valores obtenidos en la ecuación del voltaje de las líneas eléctricas (1.2.5):

$$\begin{aligned} V(\xi) &= \frac{\alpha}{3\beta} \left[1 \pm \frac{1}{\sqrt{Q}} \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right) \right] \\ \xi &= \sqrt{\frac{-6\alpha^2}{Q(2\alpha^2 - 9\beta)\delta^2}} x - \sqrt{\frac{54\alpha^2\beta}{Q(2\alpha^2 - 9\beta)^2}} t, \quad 2\alpha^2 < 9\beta \text{ y } \beta > 0 \end{aligned} \quad (2.2.23)$$

Una vez conseguida la expresión del voltaje de las líneas eléctricas (2.2.23), es necesario especificar las diferentes soluciones en función de la forma que tome la función elíptica de Jacobi. Para ello se determinará el valor de $G(\xi)$, R , P y Q para cada caso.

Sin embargo, primero es necesario conocer las relaciones entre las funciones elípticas de Jacobi.

Conociendo las tres funciones básicas $\text{sn}(\xi, m)$, $\text{cn}(\xi, m)$ y $\text{dn}(\xi, m)$, donde sn repre-

senta la función seno elíptico jacobiano, cn la función coseno elíptico jacobiano y dn la función elíptica jacobiana de tercer tipo. A partir de ellas se establecen las siguientes relaciones:

En primer lugar, las inversas de las funciones elípticas de Jacobi:

$$\begin{aligned} \operatorname{ns}(\xi) &= \frac{1}{\operatorname{sn}(\xi)} \\ \operatorname{nc}(\xi) &= \frac{1}{\operatorname{cn}(\xi)} \\ \operatorname{nd}(\xi) &= \frac{1}{\operatorname{dn}(\xi)} \end{aligned} \quad (2.2.24)$$

En segundo lugar, las relaciones entre las tres funciones básicas:

$$\begin{aligned} \operatorname{sc}(\xi) &= \frac{\operatorname{sn}(\xi)}{\operatorname{cn}(\xi)} \\ \operatorname{sd}(\xi) &= \frac{\operatorname{sn}(\xi)}{\operatorname{dn}(\xi)} \\ \operatorname{cd}(\xi) &= \frac{\operatorname{cn}(\xi)}{\operatorname{dn}(\xi)} \end{aligned} \quad (2.2.25)$$

Finalmente, las inversas de las tres relaciones anteriores:

$$\begin{aligned} \operatorname{cs}(\xi) &= \frac{1}{\operatorname{sc}(\xi)} \\ \operatorname{ds}(\xi) &= \frac{1}{\operatorname{sd}(\xi)} \\ \operatorname{dc}(\xi) &= \frac{1}{\operatorname{cd}(\xi)} \end{aligned} \quad (2.2.26)$$

Asimismo, estas funciones elípticas jacobianas cumplen una serie de relaciones cuadráticas.

A continuación, se describen las soluciones de las funciones elípticas en función de m .

CASO 1.

$$\begin{aligned} G(\xi) &= \operatorname{dn}(\xi, m) \\ R &= -(1 - m^2) \\ Q &= 2 - m^2 \\ P &= -1 \end{aligned} \quad (2.2.27)$$

Aplicando los valores mostrados para $G(\xi)$, R , P y Q , se obtiene la solución exacta de la ecuación (2.2.1):

$$V_8(\xi) = \frac{\alpha}{3\beta} \left[1 \pm \frac{m^2 \operatorname{cd}(\xi) \operatorname{sn}(\xi)}{\sqrt{2 - m^2}} \right]$$

$$\xi = \sqrt{-\frac{6\alpha^2}{(2-m^2)(2\alpha^2-9\beta)\delta^2}} x - \sqrt{\frac{54\alpha^2\beta}{(2-m^2)(2\alpha^2-9\beta)^2}} t$$

Concretamente, cuando m tiende a 1, se obtiene la solución de onda del solitón *kink*:

$$V_9 = \frac{\alpha}{3\beta} [1 \pm \tanh(\xi)]$$

$$\xi = \sqrt{-\frac{6\alpha^2}{(2\alpha^2-9\beta)\delta^2}} x - \sqrt{\frac{54\alpha^2\beta}{(2\alpha^2-9\beta)^2}} t \quad (2.2.29)$$

CASO 2.

$$G(\xi) = \operatorname{cn}(\xi, m)$$

$$R = 1 - m^2$$

$$Q = 2m^2 - 1$$

$$P = -m^2 \quad (2.2.30)$$

Aplicando los valores mostrados para $G(\xi)$, R , P y Q , se obtiene la solución exacta de la ecuación (2.2.1):

$$V_{10}(\xi) = \frac{\alpha}{3\beta} \left[1 \pm \frac{\operatorname{sc}(\xi) \operatorname{dn}(\xi)}{\sqrt{2m^2-1}} \right]$$

$$\xi = \sqrt{-\frac{6\alpha^2}{(2m^2-1)(2\alpha^2-9\beta)\delta^2}} x - \sqrt{\frac{54\alpha^2\beta}{(2m^2-1)(2\alpha^2-9\beta)^2}} t \quad (2.2.31)$$

Concretamente, cuando m tiende a 1, se obtiene una la solución de una onda del solitón *kink*, la misma que se obtiene en el caso 1 (2.2.28).

CASO 3.

$$G(\xi) = \operatorname{sn}(\xi, m)$$

$$R = 1$$

$$Q = -(1+m^2)$$

$$P = m^2 \quad (2.2.32)$$

CASO 4.

$$G(\xi) = \operatorname{ns}(\xi, m)$$

$$R = m^2$$

$$Q = -(1+m^2)$$

$$P = -1 \quad (2.2.33)$$

CASO 5.



$$\begin{aligned} G(\xi) &= nc(\xi, m) \\ R &= -m^2 \\ Q &= 2m^2 - 1 \\ P &= 1 - m^2 \end{aligned} \tag{2.2.34}$$

CASO 6.



$$\begin{aligned} G(\xi) &= nd(\xi, m) \\ R &= -1 \\ Q &= 2 - m^2 \\ P &= -(1 - m^2) \end{aligned} \tag{2.2.35}$$

CASO 7.



$$\begin{aligned} G(\xi) &= sc(\xi, m) \\ R &= 1 \\ Q &= 2 - m^2 \\ P &= 1 - m^2 \end{aligned} \tag{2.2.36}$$

CASO 8.



$$\begin{aligned} G(\xi) &= sd(\xi, m) \\ R &= 1 \\ Q &= 2 - m^2 \\ P &= -m^2(1 - m^2) \end{aligned} \tag{2.2.37}$$

CASO 9.



$$\begin{aligned} G(\xi) &= cs(\xi, m) \\ R &= 1 - m^2 \\ Q &= 2 - m^2 \\ P &= 1 \end{aligned} \tag{2.2.38}$$

CASO 10.



$$\begin{aligned} G(\xi) &= cd(\xi, m) \\ R &= 1 \\ Q &= -(1 + m^2) \\ P &= m^2 \end{aligned} \tag{2.2.39}$$

CASO 11.



$$\begin{aligned} G(\xi) &= ds(\xi, m) \\ R &= -m^2(1 - m^2) \\ Q &= 2m^2 - 1 \\ P &= 1 \end{aligned} \tag{2.2.40}$$

CASO 12.

$$\begin{aligned} G(\xi) &= \operatorname{dc}(\xi, m) \\ R &= m^2 \\ Q &= -(1 + m^2) \\ P &= 1 \end{aligned} \tag{2.2.41}$$

Resolviendo en función de los valores especificados en cada caso para $G(\xi)$, R , P y Q , se obtendrá una solución concreta para la función elíptica jacobiana. En los dos primeros casos se muestran las soluciones exactas para los valores correspondientes.

En los ejemplos a continuación se describen las soluciones de la ecuación Elíptica de Jacobi demostradas teóricamente:

■ **Ejemplo 2.2.7. Soluciones de la Ecuación Elíptica de Jacobi.** ([FARO24])

Sea la ecuación elíptica de Jacobi de primera clase:

$$(\text{ODE} - \text{Jacobi}) \equiv (G'(\xi))^2 = P G^4(\xi) + Q G^2(\xi) + R$$

donde $G'(\xi) = \frac{dG}{d\xi}$, $\xi = (x, t)$, P , Q , R son constantes reales.

(a) Representétese la tabla con las soluciones $G_j(\xi)$ de la ODE Elíptica de Jacobi en función de los valores P , Q , R y de las funciones elípticas:

$$\operatorname{sn}(\xi, k^2) \quad \operatorname{cn}(\xi, k^2) \quad \operatorname{dn}(\xi, k^2) \quad (\text{Mathematica})$$

donde el parámetro k^2 , $0 < k^2 < 1$ representa el módulo.

(b) Calcúlense las soluciones reducidas de la ODE cuando el módulo k^2 se aproxima $k^2 \rightarrow 1$ y $k^2 \rightarrow 0$.

(c) Obténgase la relación $\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)$ cuando el módulo k^2 se aproxima $k^2 \rightarrow 1$.

SOLUCIÓN

(a)

Tabla 2.10. Soluciones de la ecuación Elíptica Jacobi

$(G'(\xi))^2 = P G^4(\xi) + Q G^2(\xi) + R$ dependiendo de los valores de (P, Q, R) [FARO24].

i	j	$G_j(\xi)$	P	Q	R
1	1.1	$\operatorname{sn}(\xi k^2)$	k^2	$-k^2 - 1$	1
2	1.2	$\operatorname{cd}(\xi k^2)$	k^2	$-k^2 - 1$	1
3	2	$\operatorname{cn}(\xi k^2)$	$-k^2$	$2k^2 - 1$	$1 - k^2$
4	3	$\operatorname{dn}(\xi k^2)$	-1	$2 - k^2$	$k^2 - 1$
5	4.1	$\operatorname{ns}(\xi k^2)$	1	$-k^2 - 1$	k^2
6	4.2	$\operatorname{dc}(\xi k^2)$	1	$-k^2 - 1$	k^2
7	5	$\operatorname{nc}(\xi k^2)$	$1 - k^2$	$2k^2 - 1$	$-k^2$
8	6	$\operatorname{nd}(\xi k^2)$	$k^2 - 1$	$2 - k^2$	-1
9	7	$\operatorname{sc}(\xi k^2)$	$1 - k^2$	$2 - k^2$	1
10	8	$\operatorname{sd}(\xi k^2)$	$-k^2(1 - k^2)$	$2k^2 - 1$	1
11	9	$\operatorname{cs}(\xi k^2)$	1	$2 - k^2$	$1 - k^2$

12	10	$-\operatorname{ds}(\xi k^2)$	1	$2k^2 - 1$	$k^2(k^2 - 1)$
13	11.1	$k \operatorname{cn}(\xi k^2) + \operatorname{dn}(\xi k^2)$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}(k^2 + 1)$	$-\frac{1}{4}(1 - k^2)^2$
14	11.2	$k \operatorname{cn}(\xi k^2) - \operatorname{dn}(\xi k^2)$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}(k^2 + 1)$	$-\frac{1}{4}(1 - k^2)^2$
15	12.1	$\operatorname{cs}(\xi k^2) + \operatorname{ns}(\xi k^2)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}(1 - 2k^2)$	$\frac{1}{4}$
16	12.2	$\operatorname{ns}(\xi k^2) - \operatorname{cs}(\xi k^2)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}(1 - 2k^2)$	$\frac{1}{4}$
17	13.1	$\operatorname{nc}(\xi k^2) + \operatorname{sc}(\xi k^2)$	$\frac{1}{4}(1 - k^2)$	$\frac{1}{2}(k^2 + 1)$	$\frac{1}{4}(1 - k^2)$
18	13.2	$\operatorname{nc}(\xi k^2) - \operatorname{sc}(\xi k^2)$	$\frac{1}{4}(1 - k^2)$	$\frac{1}{2}(k^2 + 1)$	$\frac{1}{4}(1 - k^2)$
19	14.1	$\operatorname{ds}(\xi k^2) + \operatorname{ns}(\xi k^2)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}(k^2 - 2)$	$\frac{k^4}{4}$
20	14.2	$\operatorname{ns}(\xi k^2) - \operatorname{ds}(\xi k^2)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}(k^2 - 2)$	$\frac{k^4}{4}$
21	15.1	$\operatorname{sn}(\xi k^2) + i \operatorname{cn}(\xi k^2)$	$\frac{k^2}{4}$	$\frac{1}{2}(k^2 - 2)$	$\frac{k^2}{4}$
22	15.2	$\operatorname{sn}(\xi k^2) - i \operatorname{cn}(\xi k^2)$	$\frac{k^2}{4}$	$\frac{1}{2}(k^2 - 2)$	$\frac{k^2}{4}$
23	15.3	$\operatorname{cd}(\xi k^2) + i \sqrt{1 - k^2} \operatorname{sd}(\xi k^2)$	$\frac{k^2}{4}$	$\frac{1}{2}(k^2 - 2)$	$\frac{k^2}{4}$
24	15.4	$\operatorname{cd}(\xi k^2) - i \sqrt{1 - k^2} \operatorname{sd}(\xi k^2)$	$\frac{k^2}{4}$	$\frac{1}{2}(k^2 - 2)$	$\frac{k^2}{4}$
25	16.1	$k \operatorname{sn}(\xi k^2) + i \operatorname{dn}(\xi k^2)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}(1 - 2k^2)$	$\frac{1}{4}$
26	16.2	$k \operatorname{sn}(\xi k^2) - i \operatorname{dn}(\xi k^2)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}(1 - 2k^2)$	$\frac{1}{4}$
27	16.3	$\frac{\operatorname{sn}(\xi k^2)}{\operatorname{cn}(\xi k^2) + 1}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}(1 - 2k^2)$	$\frac{1}{4}$
28	16.4	$\frac{\operatorname{sn}(\xi k^2)}{1 - \operatorname{cn}(\xi k^2)}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}(1 - 2k^2)$	$\frac{1}{4}$
29	17.1	$\frac{\operatorname{sn}(\xi k^2)}{\operatorname{dn}(\xi k^2) + 1}$	$\frac{k^2}{4}$	$\frac{1}{2}(k^2 - 2)$	$\frac{1}{4}$
30	17.2	$\frac{\operatorname{sn}(\xi k^2)}{1 - \operatorname{dn}(\xi k^2)}$	$\frac{k^2}{4}$	$\frac{1}{2}(k^2 - 2)$	$\frac{1}{4}$
31	18.1	$\frac{\operatorname{dn}(\xi k^2)}{k \operatorname{sn}(\xi k^2) + 1}$	$\frac{1}{4}(k^2 - 1)$	$\frac{1}{2}(k^2 + 1)$	$\frac{1}{4}(k^2 - 1)$
32	18.2	$\frac{\operatorname{dn}(\xi k^2)}{1 - k \operatorname{sn}(\xi k^2)}$	$\frac{1}{4}(k^2 - 1)$	$\frac{1}{2}(k^2 + 1)$	$\frac{1}{4}(k^2 - 1)$
33	19.1	$\frac{\operatorname{cn}(\xi k^2)}{\operatorname{sn}(\xi k^2) + 1}$	$\frac{1}{4}(1 - k^2)$	$\frac{1}{2}(k^2 + 1)$	$\frac{1}{4}(1 - k^2)$
34	19.2	$\frac{\operatorname{cn}(\xi k^2)}{1 - \operatorname{sn}(\xi k^2)}$	$\frac{1}{4}(1 - k^2)$	$\frac{1}{2}(k^2 + 1)$	$\frac{1}{4}(1 - k^2)$
35	20.1	$\frac{\operatorname{sn}(\xi k^2)}{\operatorname{cn}(\xi k^2) + \operatorname{dn}(\xi k^2)}$	$\frac{1}{4}(1 - k^2)^2$	$\frac{1}{2}(k^2 + 1)$	$\frac{1}{4}$
36	20.2	$\frac{\operatorname{sn}(\xi k^2)}{\operatorname{dn}(\xi k^2) - \operatorname{cn}(\xi k^2)}$	$\frac{1}{4}(1 - k^2)^2$	$\frac{1}{2}(k^2 + 1)$	$\frac{1}{4}$
37	21.1	$\frac{\operatorname{cn}(\xi k^2)}{\operatorname{dn}(\xi k^2) + \sqrt{1 - k^2}}$	$\frac{k^4}{4}$	$\frac{1}{2}(k^2 - 2)$	$\frac{1}{4}$
38	21.2	$\frac{\operatorname{cn}(\xi k^2)}{\sqrt{1 - k^2} - \operatorname{dn}(\xi k^2)}$	$\frac{k^4}{4}$	$\frac{1}{2}(k^2 - 2)$	$\frac{1}{4}$

(b)

Tabla 2.11. Soluciones reducidas de la ODE Elíptica de Jacobi $(G'(\xi))^2 = P G^4(\xi) + Q G^2(\xi) + R$ cuando $k \rightarrow 1$ y $k \rightarrow 0$. [FARO24].

i	j	$G_j(\xi)$	$G_j(\xi) (k \rightarrow 1)$	$G_j(\xi) (k \rightarrow 0)$
1	1.1	$\text{sn}(\xi k^2)$	$\tanh(\xi)$	$\sin(\xi)$
2	1.2	$\text{cd}(\xi k^2)$	1	$\cos(\xi)$
3	2	$\text{cn}(\xi k^2)$	$\text{sech}(\xi)$	$\cos(\xi)$
4	3	$\text{dn}(\xi k^2)$	$\text{sech}(\xi)$	1
5	4.1	$\text{ns}(\xi k^2)$	$\text{coth}(\xi)$	$\csc(\xi)$
6	4.2	$\text{dc}(\xi k^2)$	1	$\sec(\xi)$
7	5	$\text{nc}(\xi k^2)$	$\cosh(\xi)$	$\sec(\xi)$
8	6	$\text{nd}(\xi k^2)$	$\cosh(\xi)$	1
9	7	$\text{sc}(\xi k^2)$	$\sinh(\xi)$	$\tan(\xi)$
10	8	$\text{sd}(\xi k^2)$	$\sinh(\xi)$	$\sin(\xi)$
11	9	$\text{cs}(\xi k^2)$	$\text{csch}(\xi)$	$\cot(\xi)$
12	10	$-\text{ds}(\xi k^2)$	$-\text{csch}(\xi)$	$-\csc(\xi)$
13	11.1	$k \text{cn}(\xi k^2) + \text{dn}(\xi k^2)$	$2 \text{sech}(\xi)$	1
14	11.2	$k \text{cn}(\xi k^2) - \text{dn}(\xi k^2)$	0	-1
15	12.1	$\text{cs}(\xi k^2) + \text{ns}(\xi k^2)$	$\text{coth}(\xi) + \text{csch}(\xi)$	$\cot(\xi) + \csc(\xi)$
16	12.2	$\text{ns}(\xi k^2) - \text{cs}(\xi k^2)$	$\tanh\left(\frac{\xi}{2}\right)$	$\tan\left(\frac{\xi}{2}\right)$
17	13.1	$\text{nc}(\xi k^2) + \text{sc}(\xi k^2)$	$\sinh(\xi) + \cosh(\xi)$	$\tan(\xi) + \sec(\xi)$
18	13.2	$\text{nc}(\xi k^2) - \text{sc}(\xi k^2)$	$\cosh(\xi) - \sinh(\xi)$	$\sec(\xi) - \tan(\xi)$
19	14.1	$\text{ds}(\xi k^2) + \text{ns}(\xi k^2)$	$\text{coth}(\xi) + \text{csch}(\xi)$	$2 \csc(\xi)$
20	14.2	$\text{ns}(\xi k^2) - \text{ds}(\xi k^2)$	$\tanh\left(\frac{\xi}{2}\right)$	0
21	15.1	$\text{sn}(\xi k^2) + i \text{cn}(\xi k^2)$	$\tanh(\xi) + i \text{sech}(\xi)$	$\sin(\xi) + i \cos(\xi)$
22	15.2	$\text{sn}(\xi k^2) - i \text{cn}(\xi k^2)$	$\tanh(\xi) - i \text{sech}(\xi)$	$\sin(\xi) - i \cos(\xi)$
23	15.3	$\text{cd}(\xi k^2) + i \sqrt{1-k^2} \text{sd}(\xi k^2)$	1	$\cos(\xi) + i \sin(\xi)$
24	15.4	$\text{cd}(\xi k^2) - i \sqrt{1-k^2} \text{sd}(\xi k^2)$	1	$\cos(\xi) - i \sin(\xi)$
25	16.1	$k \text{sn}(\xi k^2) + i \text{dn}(\xi k^2)$	$\tanh(\xi) + i \text{sech}(\xi)$	i
26	16.2	$k \text{sn}(\xi k^2) - i \text{dn}(\xi k^2)$	$\tanh(\xi) - i \text{sech}(\xi)$	$-i$
27	16.3	$\frac{\text{sn}(\xi k^2)}{\text{cn}(\xi k^2)+1}$	$\tanh\left(\frac{\xi}{2}\right)$	$\tan\left(\frac{\xi}{2}\right)$
28	16.4	$\frac{\text{sn}(\xi k^2)}{1-\text{cn}(\xi k^2)}$	$\text{coth}\left(\frac{\xi}{2}\right)$	$\cot\left(\frac{\xi}{2}\right)$
29	17.1	$\frac{\text{sn}(\xi k^2)}{\text{dn}(\xi k^2)+1}$	$\tanh\left(\frac{\xi}{2}\right)$	$\frac{\sin(\xi)}{2}$
30	17.2	$\frac{\text{sn}(\xi k^2)}{1-\text{dn}(\xi k^2)}$	$\text{coth}\left(\frac{\xi}{2}\right)$	$\csc(\xi) \infty$
31	18.1	$\frac{\text{dn}(\xi k^2)}{k \text{sn}(\xi k^2)+1}$	$\cosh(\xi) - \sinh(\xi)$	1

32	18.2	$\frac{dn(\xi k^2)}{1-k \operatorname{sn}(\xi k^2)}$	$\sinh(\xi) + \cosh(\xi)$	1
33	19.1	$\frac{cn(\xi k^2)}{\operatorname{sn}(\xi k^2)+1}$	$\cosh(\xi) - \sinh(\xi)$	$\frac{\cos(\xi)}{\sin(\xi)+1}$
34	19.2	$\frac{cn(\xi k^2)}{1-\operatorname{sn}(\xi k^2)}$	$\sinh(\xi) + \cosh(\xi)$	$-\frac{\cos(\xi)}{\sin(\xi)-1}$
35	20.1	$\frac{\operatorname{sn}(\xi k^2)}{cn(\xi k^2)+dn(\xi k^2)}$	$\frac{\sinh(\xi)}{2}$	$\tan\left(\frac{\xi}{2}\right)$
36	20.2	$\frac{\operatorname{sn}(\xi k^2)}{dn(\xi k^2)-cn(\xi k^2)}$	Indeterminate	$\cot\left(\frac{\xi}{2}\right)$
37	21.1	$\frac{cn(\xi k^2)}{dn(\xi k^2)+\sqrt{1-k^2}}$	1	$\frac{\cos(\xi)}{2}$
38	21.2	$\frac{cn(\xi k^2)}{\sqrt{1-k^2}-dn(\xi k^2)}$	-1	$(-\operatorname{sgn}(\sec(\xi))) \infty$

(c)

Tabla 2.12. Relación $\frac{G'_j(\xi)}{G_j(\xi)}$ de la ODE Elíptica de Jacobi $(G'(\xi))^2 = P G^4(\xi) + Q G^2(\xi) + R$ cuando $k \rightarrow 1$. [FARO24].

i	j	$\frac{G'_j(\xi)}{G_j(\xi)}$	$\frac{G'_j(\xi)}{G_j(\xi)} (k \rightarrow 1)$
1	1.1	$\frac{cn(\xi k^2) dn(\xi k^2)}{\operatorname{sn}(\xi k^2)}$	$\operatorname{csch}(\xi) \operatorname{sech}(\xi)$
2	1.2	$\frac{(k^2-1) nd(\xi k^2) sd(\xi k^2)}{cd(\xi k^2)}$	0
3	2	$-\frac{dn(\xi k^2) \operatorname{sn}(\xi k^2)}{cn(\xi k^2)}$	$-\tanh(\xi)$
4	3	$-\frac{k^2 cn(\xi k^2) \operatorname{sn}(\xi k^2)}{dn(\xi k^2)}$	$-\tanh(\xi)$
5	4.1	$-\frac{cs(\xi k^2) ds(\xi k^2)}{ns(\xi k^2)}$	$-\operatorname{csch}(\xi) \operatorname{sech}(\xi)$
6	4.2	$\frac{(1-k^2) nc(\xi k^2) sc(\xi k^2)}{dc(\xi k^2)}$	0
7	5	$\frac{dc(\xi k^2) sc(\xi k^2)}{nc(\xi k^2)}$	$\tanh(\xi)$
8	6	$\frac{k^2 cd(\xi k^2) sd(\xi k^2)}{nd(\xi k^2)}$	$\tanh(\xi)$
9	7	$\frac{dc(\xi k^2) nc(\xi k^2)}{sc(\xi k^2)}$	$\operatorname{coth}(\xi)$
10	8	$\frac{cd(\xi k^2) nd(\xi k^2)}{sd(\xi k^2)}$	$\operatorname{coth}(\xi)$
11	9	$-\frac{ds(\xi k^2) ns(\xi k^2)}{cs(\xi k^2)}$	$-\operatorname{coth}(\xi)$
12	10	$-\frac{cs(\xi k^2) ns(\xi k^2)}{ds(\xi k^2)}$	$-\operatorname{coth}(\xi)$
13	11.1	$\frac{k^2 (-cn(\xi k^2)) \operatorname{sn}(\xi k^2) - k dn(\xi k^2) \operatorname{sn}(\xi k^2)}{k cn(\xi k^2) + dn(\xi k^2)}$	$-\tanh(\xi)$
14	11.2	$\frac{k^2 cn(\xi k^2) \operatorname{sn}(\xi k^2) - k dn(\xi k^2) \operatorname{sn}(\xi k^2)}{k cn(\xi k^2) - dn(\xi k^2)}$	$\tanh(\xi)$
15	12.1	$\frac{-cs(\xi k^2) ds(\xi k^2) - ds(\xi k^2) ns(\xi k^2)}{cs(\xi k^2) + ns(\xi k^2)}$	$-\operatorname{csch}(\xi)$
16	12.2	$\frac{ds(\xi k^2) ns(\xi k^2) - cs(\xi k^2) ds(\xi k^2)}{ns(\xi k^2) - cs(\xi k^2)}$	$\operatorname{csch}(\xi)$

17	13.1	$\frac{\operatorname{dc}(\xi k^2) \operatorname{nc}(\xi k^2) + \operatorname{dc}(\xi k^2) \operatorname{sc}(\xi k^2)}{\operatorname{nc}(\xi k^2) + \operatorname{sc}(\xi k^2)}$	1
18	13.2	$\frac{\operatorname{dc}(\xi k^2) \operatorname{sc}(\xi k^2) - \operatorname{dc}(\xi k^2) \operatorname{nc}(\xi k^2)}{\operatorname{nc}(\xi k^2) - \operatorname{sc}(\xi k^2)}$	-1
19	14.1	$\frac{-\operatorname{cs}(\xi k^2) \operatorname{ds}(\xi k^2) - \operatorname{cs}(\xi k^2) \operatorname{ns}(\xi k^2)}{\operatorname{ds}(\xi k^2) + \operatorname{ns}(\xi k^2)}$	-csch(ξ)
20	14.2	$\frac{\operatorname{cs}(\xi k^2) \operatorname{ns}(\xi k^2) - \operatorname{cs}(\xi k^2) \operatorname{ds}(\xi k^2)}{\operatorname{ns}(\xi k^2) - \operatorname{ds}(\xi k^2)}$	csch(ξ)
21	15.1	$\frac{\operatorname{cn}(\xi k^2) \operatorname{dn}(\xi k^2) - i \operatorname{dn}(\xi k^2) \operatorname{sn}(\xi k^2)}{\operatorname{sn}(\xi k^2) + i \operatorname{cn}(\xi k^2)}$	-i sech(ξ)
22	15.2	$\frac{\operatorname{cn}(\xi k^2) \operatorname{dn}(\xi k^2) + i \operatorname{dn}(\xi k^2) \operatorname{sn}(\xi k^2)}{\operatorname{sn}(\xi k^2) - i \operatorname{cn}(\xi k^2)}$	i sech(ξ)
23	15.3	$\frac{(k^2-1) \operatorname{nd}(\xi k^2) \operatorname{sd}(\xi k^2) + i \sqrt{1-k^2} \operatorname{cd}(\xi k^2) \operatorname{nd}(\xi k^2)}{\operatorname{cd}(\xi k^2) + i \sqrt{1-k^2} \operatorname{sd}(\xi k^2)}$	0
24	15.4	$\frac{(k^2-1) \operatorname{nd}(\xi k^2) \operatorname{sd}(\xi k^2) - i \sqrt{1-k^2} \operatorname{cd}(\xi k^2) \operatorname{nd}(\xi k^2)}{\operatorname{cd}(\xi k^2) - i \sqrt{1-k^2} \operatorname{sd}(\xi k^2)}$	0
25	16.1	$\frac{k \operatorname{cn}(\xi k^2) \operatorname{dn}(\xi k^2) - i k^2 \operatorname{cn}(\xi k^2) \operatorname{sn}(\xi k^2)}{k \operatorname{sn}(\xi k^2) + i \operatorname{dn}(\xi k^2)}$	-i sech(ξ)
26	16.2	$\frac{k \operatorname{cn}(\xi k^2) \operatorname{dn}(\xi k^2) + i k^2 \operatorname{cn}(\xi k^2) \operatorname{sn}(\xi k^2)}{k \operatorname{sn}(\xi k^2) - i \operatorname{dn}(\xi k^2)}$	i sech(ξ)
27	16.3	$\frac{(\operatorname{cn}(\xi k^2) + 1) \left(\frac{\operatorname{dn}(\xi k^2) \operatorname{sn}(\xi k^2)^2}{(\operatorname{cn}(\xi k^2) + 1)^2} + \frac{\operatorname{cn}(\xi k^2) \operatorname{dn}(\xi k^2)}{\operatorname{cn}(\xi k^2) + 1} \right)}{\operatorname{sn}(\xi k^2)}$	csch(ξ)
28	16.4	$\frac{(1 - \operatorname{cn}(\xi k^2)) \left(\frac{\operatorname{cn}(\xi k^2) \operatorname{dn}(\xi k^2)}{1 - \operatorname{cn}(\xi k^2)} - \frac{\operatorname{dn}(\xi k^2) \operatorname{sn}(\xi k^2)^2}{(1 - \operatorname{cn}(\xi k^2))^2} \right)}{\operatorname{sn}(\xi k^2)}$	-csch(ξ)
29	17.1	$\frac{(\operatorname{dn}(\xi k^2) + 1) \left(\frac{k^2 \operatorname{cn}(\xi k^2) \operatorname{sn}(\xi k^2)^2}{(\operatorname{dn}(\xi k^2) + 1)^2} + \frac{\operatorname{cn}(\xi k^2) \operatorname{dn}(\xi k^2)}{\operatorname{dn}(\xi k^2) + 1} \right)}{\operatorname{sn}(\xi k^2)}$	csch(ξ)
30	17.2	$\frac{(1 - \operatorname{dn}(\xi k^2)) \left(\frac{\operatorname{cn}(\xi k^2) \operatorname{dn}(\xi k^2)}{1 - \operatorname{dn}(\xi k^2)} - \frac{k^2 \operatorname{cn}(\xi k^2) \operatorname{sn}(\xi k^2)^2}{(1 - \operatorname{dn}(\xi k^2))^2} \right)}{\operatorname{sn}(\xi k^2)}$	-csch(ξ)
31	18.1	$\frac{(k \operatorname{sn}(\xi k^2) + 1) \left(\frac{k \operatorname{cn}(\xi k^2) \operatorname{dn}(\xi k^2)^2}{(k \operatorname{sn}(\xi k^2) + 1)^2} - \frac{k^2 \operatorname{cn}(\xi k^2) \operatorname{sn}(\xi k^2)}{k \operatorname{sn}(\xi k^2) + 1} \right)}{\operatorname{dn}(\xi k^2)}$	-1
32	18.2	$\frac{(1 - k \operatorname{sn}(\xi k^2)) \left(\frac{k \operatorname{cn}(\xi k^2) \operatorname{dn}(\xi k^2)^2}{(1 - k \operatorname{sn}(\xi k^2))^2} - \frac{k^2 \operatorname{cn}(\xi k^2) \operatorname{sn}(\xi k^2)}{1 - k \operatorname{sn}(\xi k^2)} \right)}{\operatorname{dn}(\xi k^2)}$	1
33	19.1	$\frac{(\operatorname{sn}(\xi k^2) + 1) \left(-\frac{\operatorname{cn}(\xi k^2)^2 \operatorname{dn}(\xi k^2)}{(\operatorname{sn}(\xi k^2) + 1)^2} - \frac{\operatorname{dn}(\xi k^2) \operatorname{sn}(\xi k^2)}{\operatorname{sn}(\xi k^2) + 1} \right)}{\operatorname{cn}(\xi k^2)}$	-1
34	19.2	$\frac{(1 - \operatorname{sn}(\xi k^2)) \left(\frac{\operatorname{cn}(\xi k^2)^2 \operatorname{dn}(\xi k^2)}{(1 - \operatorname{sn}(\xi k^2))^2} - \frac{\operatorname{dn}(\xi k^2) \operatorname{sn}(\xi k^2)}{1 - \operatorname{sn}(\xi k^2)} \right)}{\operatorname{cn}(\xi k^2)}$	1
35	20.1	$\frac{1}{\operatorname{sn}(\xi k^2)} (\operatorname{cn}(\xi k^2) + \operatorname{dn}(\xi k^2))$ $\left(\frac{\operatorname{cn}(\xi k^2) \operatorname{dn}(\xi k^2)}{\operatorname{cn}(\xi k^2) + \operatorname{dn}(\xi k^2)} - \frac{\operatorname{sn}(\xi k^2) (k^2 (-\operatorname{cn}(\xi k^2)) \operatorname{sn}(\xi k^2) - \operatorname{dn}(\xi k^2) \operatorname{sn}(\xi k^2))}{(\operatorname{cn}(\xi k^2) + \operatorname{dn}(\xi k^2))^2} \right)$	coth(ξ)
36	20.2	$\frac{1}{\operatorname{sn}(\xi k^2)} (\operatorname{dn}(\xi k^2) - \operatorname{cn}(\xi k^2))$ $\left(\frac{\operatorname{cn}(\xi k^2) \operatorname{dn}(\xi k^2)}{\operatorname{dn}(\xi k^2) - \operatorname{cn}(\xi k^2)} - \frac{\operatorname{sn}(\xi k^2) (\operatorname{dn}(\xi k^2) \operatorname{sn}(\xi k^2) - k^2 \operatorname{cn}(\xi k^2) \operatorname{sn}(\xi k^2))}{(\operatorname{dn}(\xi k^2) - \operatorname{cn}(\xi k^2))^2} \right)$	-coth(ξ)
37	21.1	$\frac{(\operatorname{dn}(\xi k^2) + \sqrt{1-k^2}) \left(\frac{k^2 \operatorname{cn}(\xi k^2)^2 \operatorname{sn}(\xi k^2)}{(\operatorname{dn}(\xi k^2) + \sqrt{1-k^2})^2} - \frac{\operatorname{dn}(\xi k^2) \operatorname{sn}(\xi k^2)}{\operatorname{dn}(\xi k^2) + \sqrt{1-k^2}} \right)}{\operatorname{cn}(\xi k^2)}$	0

38 21.2

$$\frac{(\sqrt{1-k^2} - \operatorname{dn}(\xi|k^2)) \left(-\frac{k^2 \operatorname{cn}(\xi|k^2)^2 \operatorname{sn}(\xi|k^2)}{(\sqrt{1-k^2} - \operatorname{dn}(\xi|k^2))^2} - \frac{\operatorname{dn}(\xi|k^2) \operatorname{sn}(\xi|k^2)}{\sqrt{1-k^2} - \operatorname{dn}(\xi|k^2)} \right)}{\operatorname{cn}(\xi|k^2)}$$

0

2.3. Problemas

2.3.1. Problemas (Low-Pass Electrical Lines–LPEL) ODE 2º Grado Lineal

■ Problema 2.3.1. (ODE 2º Grado Lineal)

Sea la ecuación diferencial de segundo grado ODE:

$$(ODE) \equiv \frac{K^2}{12} V''(\xi) + (K - U) V(\xi) + \alpha U V^2(\xi) - \beta U V^3(\xi) = 0$$

(a) Sustitúyase la solución

$$V(\xi) = a_0 + a_1 \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right) \quad a_1 \neq 0$$

y las expresiones de $V'(\xi)$ y $V''(\xi)$ desarrolladas en series de potencias de $\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)$ en la ecuación (ODE):

$$\begin{aligned} \bullet V'(\xi) &= -\sum_{k=1}^m k a_k \left(\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)^{k+1} + \lambda \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)^k + \mu \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)^{k-1} \right) \\ \bullet V''(\xi) &= \sum_{k=1}^m k a_k \left(k(\lambda^2 + 2\mu) \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)^k + (2k-1)\lambda\mu \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)^{k-1} \right. \\ &\quad \left. + (2k+1)\lambda \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)^{k+1} + (k-1)\mu^2 \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)^{k-2} \right. \\ &\quad \left. + (k+1) \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)^{k+2} \right) \end{aligned}$$

(a.1) Dedúzcase el sistema (ODE) expresado en términos de las potencias de $\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)$:

$$\sum_{k=0}^m \beta_k \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)^k = 0.$$

$$(ODE) \equiv \left\{ \sum_{k=0}^m \alpha_k \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)^k = 0 \right.$$

(a.2) Determinéense los sistemas algebraicos de ecuaciones correspondientes agrupan los términos del mismo orden de $\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)$ del lado izquierdo de la ecuación y reduciendo los coeficiente a cero.

(b) Resuélvase el sistema algebraicos de ecuaciones en las variables $\{a_0, a_1, K, U\}$.

(c) Compruébense las soluciones obtenidas en el sistema algebraico.

SOLUCIÓN

(a)

$$\begin{aligned} &\left\{ (ODE) \equiv \frac{1}{12} K^2 V^2(\xi) + (K - U) V(\xi) + \alpha U V(\xi)^2 - \beta U V(\xi)^3 = 0 \right\} \\ &\left\{ (ODE), \frac{1}{12} a_1 K^2 \left(\frac{(\lambda^2 + 2\mu) G'(\xi)}{G(\xi)} + \frac{3\lambda G'(\xi)^2}{G(\xi)^2} + \frac{2G'(\xi)^3}{G(\xi)^3} + \lambda\mu \right) + \right. \\ &\left. (K - U) \left(\frac{a_1 G'(\xi)}{G(\xi)} + a_0 \right) + \alpha U \left(\frac{a_1 G'(\xi)}{G(\xi)} + a_0 \right)^2 + \beta (-U) \left(\frac{a_1 G'(\xi)}{G(\xi)} + a_0 \right)^3, = 0 \right\} \end{aligned}$$

$$\left\{ \text{ODE, } \frac{1}{12} a_1 \lambda K^2 \mu + y^3 \left(\frac{a_1 K^2}{6} - a_1^3 \beta U \right) + y^2 \left(\frac{1}{4} a_1 \lambda K^2 + \alpha a_1^2 U - 3 a_0 a_1^2 \beta U \right) + \right. \\ \left. y \left(\frac{1}{12} a_1 \lambda^2 K^2 + \frac{1}{6} a_1 K^2 \mu + a_1 K + 2 \alpha a_0 a_1 U - 3 a_0^2 a_1 \beta U - a_1 U \right) + \right. \\ \left. a_0 K + \alpha a_0^2 U - a_0^3 \beta U - a_0 U \right\}$$

$$\left(\begin{array}{l} \left(\frac{G'[\xi]}{G[\xi]} \right)^0: \quad \frac{1}{12} a_1 \lambda K^2 \mu + a_0 (K - U) + \alpha a_0^2 U + a_0^3 \beta (-U) \quad = 0 \\ \left(\frac{G'[\xi]}{G[\xi]} \right)^1: \quad a_1 \left(\frac{1}{12} K^2 (\lambda^2 + 2 \mu) + K - U \right) + 2 \alpha a_1 a_0 U - 3 a_1 a_0^2 \beta U \quad = 0 \\ \left(\frac{G'[\xi]}{G[\xi]} \right)^2: \quad \frac{1}{4} a_1 \lambda K^2 + \alpha a_1^2 U - 3 a_0 a_1^2 \beta U \quad = 0 \\ \left(\frac{G'[\xi]}{G[\xi]} \right)^3: \quad \frac{a_1 K^2}{6} - a_1^3 \beta U \quad = 0 \end{array} \right)$$

(b) Soluciones

Solución del sistema algebraico

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda, \mu \quad \text{Constantes arbitrarias} \\ a_0 = \frac{\alpha}{3\beta} \left(1 \pm \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}} \right) \\ a_1 = \pm \frac{2\alpha}{3\beta \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}} \quad (\lambda^2 - 4\mu) \neq 0 \\ K = -\frac{24\alpha^2}{(2\alpha^2 - 9\beta)(\lambda^2 - 4\mu)} \\ U = \frac{216\alpha^2\beta}{(2\alpha^2 - 9\beta)^2(\lambda^2 - 4\mu)} \end{array} \right.$$

(c) Comprobación de las soluciones

$$\left(\begin{array}{l} F_0 = \frac{1}{12} a_1 \lambda K^2 \mu + a_0 (K - U) + \alpha a_0^2 U + a_0^3 \beta (-U) = 0 \\ F_1 = a_1 \left(\frac{1}{12} K^2 (\lambda^2 + 2 \mu) + K - U \right) + 2 \alpha a_1 a_0 U - 3 a_1 a_0^2 \beta U = 0 \\ F_2 = \frac{1}{4} a_1 \lambda K^2 + \alpha a_1^2 U - 3 a_0 a_1^2 \beta U = 0 \\ F_3 = \frac{a_1 K^2}{6} - a_1^3 \beta U = 0 \end{array} \right)$$

$$\left\{ (1) \text{ Regla (a) , } \left(\begin{array}{l} a_0 \rightarrow \frac{\alpha \left(1 - \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}} \right)}{3\beta} \\ a_1 \rightarrow -\frac{2\alpha}{3\beta \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}} \\ K \rightarrow -\frac{24\alpha^2}{(2\alpha^2 - 9\beta)(\lambda^2 - 4\mu)} \\ U \rightarrow \frac{216\alpha^2\beta}{(2\alpha^2 - 9\beta)^2(\lambda^2 - 4\mu)} \end{array} \right) \right\}$$

$$\left(\begin{array}{l} F_0 = \frac{1}{12} a_1 \lambda K^2 \mu + a_0 (K - U) + \alpha a_0^2 U + a_0^3 \beta (-U) = 0 \\ F_1 = a_1 \left(\frac{1}{12} K^2 (\lambda^2 + 2\mu) + K - U \right) + 2\alpha a_1 a_0 U - 3a_1 a_0^2 \beta U = 0 \\ F_2 = \frac{1}{4} a_1 \lambda K^2 + \alpha a_1^2 U - 3a_0 a_1^2 \beta U = 0 \\ F_3 = \frac{a_1 K^2}{6} - a_1^3 \beta U = 0 \end{array} \right)$$

$$\left\{ (2) \text{ Regla (b) , } \left(\begin{array}{l} a_0 \rightarrow \frac{\alpha \left(\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}} + 1 \right)}{3\beta} \\ a_1 \rightarrow \frac{2\alpha}{3\beta \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}} \\ K \rightarrow -\frac{24\alpha^2}{(2\alpha^2 - 9\beta)(\lambda^2 - 4\mu)} \\ U \rightarrow \frac{216\alpha^2 \beta}{(2\alpha^2 - 9\beta)^2 (\lambda^2 - 4\mu)} \end{array} \right) \right.$$

$$\left(\begin{array}{l} F_0 = 0 \\ F_1 = 0 \\ F_2 = 0 \\ F_3 = 0 \end{array} \right)$$

■ **Problema 2.3.2.**

Sea la expresión que representa la solución de Ecuación Propagación de Ondas en Línea de Transmisión Eléctrica de Paso Bajo no Lineal:

$$u(\xi) = a_0 + a_1 \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)$$

donde los coeficientes a_k son:

(i)

$$\left(\begin{array}{l} a_0 \rightarrow \frac{\alpha \left(1 - \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}} \right)}{3\beta} \quad a_1 \rightarrow -\frac{2\alpha}{3\beta \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}} \quad K \rightarrow -\frac{24\alpha^2}{(2\alpha^2 - 9\beta)(\lambda^2 - 4\mu)} \quad U \rightarrow \frac{216\alpha^2 \beta}{(2\alpha^2 - 9\beta)^2 (\lambda^2 - 4\mu)} \\ a_0 \rightarrow \frac{\alpha \left(\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}} + 1 \right)}{3\beta} \quad a_1 \rightarrow \frac{2\alpha}{3\beta \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}} \quad K \rightarrow -\frac{24\alpha^2}{(2\alpha^2 - 9\beta)(\lambda^2 - 4\mu)} \quad U \rightarrow \frac{216\alpha^2 \beta}{(2\alpha^2 - 9\beta)^2 (\lambda^2 - 4\mu)} \end{array} \right)$$

y siendo la relación:

$$\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right) = \frac{1}{2} \left(-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \left(1 - \frac{2c_1}{c_2 \cosh(\xi \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}) + c_2 \sinh(\xi \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}) + c_1} \right) \right)$$

$$\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right) = \begin{cases} \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \frac{C_1 \sinh\left(\frac{1}{2}\xi \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}\right) + C_2 \cosh\left(\frac{1}{2}\xi \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}\right)}{C_1 \cosh\left(\frac{1}{2}\xi \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}\right) + C_2 \sinh\left(\frac{1}{2}\xi \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}\right)} - \frac{\lambda}{2} & \lambda^2 - 4\mu > 0 \\ \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \left(\frac{-C_1 \sin\left(\frac{1}{2}\xi \sqrt{4\mu - \lambda^2}\right) + C_2 \cos\left(\frac{1}{2}\xi \sqrt{4\mu - \lambda^2}\right)}{C_1 \cos\left(\frac{1}{2}\xi \sqrt{4\mu - \lambda^2}\right) + C_2 \sin\left(\frac{1}{2}\xi \sqrt{4\mu - \lambda^2}\right)} \right) - \frac{\lambda}{2} & \lambda^2 - 4\mu < 0 \\ -\frac{\lambda}{2} + \frac{C_2}{C_2 \xi + C_1} & \lambda^2 - 4\mu = 0 \end{cases}$$

que viene de la solución general de la (ODE) $\equiv G''(\xi) + \lambda G'(\xi) + \mu G(\xi) = 0$.

Determinense las soluciones siguientes, tomado $\xi = \sqrt{k} (x - \omega t)$.

$$(a) \text{ Caso I. } \quad \lambda^2 - 4\mu > 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} u_1(\xi) \\ u_2(\xi) \end{array} \right.$$

(b) Caso II. $\lambda^2 - 4\mu < 0$ $\begin{cases} u_3(\xi) \\ u_4(\xi) \end{cases}$

(c) Caso III. $\lambda^2 - 4\mu = 0$ $\begin{cases} u_5(\xi) \\ u_6(\xi) \end{cases}$

$\begin{cases} b_0, C_1, C_2 & \text{constantes arbitrarias} \\ \xi = \sqrt{k} (x - \omega t) \end{cases}$

$$\xi = \sqrt{-\frac{24\alpha^2}{\delta^2(2\alpha^2-9\beta)(\lambda^2-4\mu)}} x - \sqrt{\frac{216\alpha^2\beta}{(2\alpha^2-9\beta)^2(\lambda^2-4\mu)}} t \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{k} \frac{216\alpha^2\beta}{(2\alpha^2-9\beta)^2(\lambda^2-4\mu)}}$$

SOLUCIÓN

Tabla 2.13. Soluciones de la ODE lineal de 2º orden (ODE) $\equiv G''(\xi) + \lambda G'(\xi) + \mu G(\xi) = 0$ en función del valor de $\lambda^2 - 4\mu$.

Casos	$u_k(\xi)$
Caso I. $\lambda^2 - 4\mu > 0$	$u_1(\xi) = \frac{\alpha}{3\beta} - \frac{\alpha(C_1 \sinh(\frac{1}{2}\xi \sqrt{\lambda^2-4\mu}) + C_2 \cosh(\frac{1}{2}\xi \sqrt{\lambda^2-4\mu}))}{3\beta(C_2 \sinh(\frac{1}{2}\xi \sqrt{\lambda^2-4\mu}) + C_1 \cosh(\frac{1}{2}\xi \sqrt{\lambda^2-4\mu}))}$
Caso I. $\lambda^2 - 4\mu > 0$	$u_2(\xi) = \frac{\alpha}{3\beta} + \frac{\alpha(C_1 \sinh(\frac{1}{2}\xi \sqrt{\lambda^2-4\mu}) + C_2 \cosh(\frac{1}{2}\xi \sqrt{\lambda^2-4\mu}))}{3\beta(C_2 \sinh(\frac{1}{2}\xi \sqrt{\lambda^2-4\mu}) + C_1 \cosh(\frac{1}{2}\xi \sqrt{\lambda^2-4\mu}))}$
Caso II. $\lambda^2 - 4\mu < 0$	$u_3(\xi) = \frac{\alpha}{3\beta} - \frac{i\alpha(C_2 \cos(\frac{1}{2}\xi \sqrt{4\mu-\lambda^2}) - C_1 \sin(\frac{1}{2}\xi \sqrt{4\mu-\lambda^2}))}{3\beta(C_2 \sin(\frac{1}{2}\xi \sqrt{4\mu-\lambda^2}) + C_1 \cos(\frac{1}{2}\xi \sqrt{4\mu-\lambda^2}))}$
Caso II. $\lambda^2 - 4\mu < 0$	$u_4(\xi) = \frac{\alpha}{3\beta} + \frac{i\alpha(C_2 \cos(\frac{1}{2}\xi \sqrt{4\mu-\lambda^2}) - C_1 \sin(\frac{1}{2}\xi \sqrt{4\mu-\lambda^2}))}{3\beta(C_2 \sin(\frac{1}{2}\xi \sqrt{4\mu-\lambda^2}) + C_1 \cos(\frac{1}{2}\xi \sqrt{4\mu-\lambda^2}))}$
Caso III. $\lambda^2 - 4\mu = 0$	$u_5(\xi) = \frac{\alpha}{3\beta} - \frac{2\alpha C_2}{3\beta(C_2 \xi + C_1) \sqrt{\lambda^2-4\mu}}$
Caso III. $\lambda^2 - 4\mu = 0$	$u_6(\xi) = \frac{\alpha}{3\beta} + \frac{2\alpha C_2}{3\beta(C_2 \xi + C_1) \sqrt{\lambda^2-4\mu}}$

■ **Problema 2.3.3.**

Dadas las soluciones de la Ecuación Propagación de Ondas en Línea de Transmisión Eléctrica de Paso Bajo no Lineal dada a continuación:

(i) Caso I. $\lambda^2 - 4\mu > 0$

$$u_1(\xi) = \frac{\alpha}{3\beta} - \frac{\alpha(C_1 \sinh(\frac{1}{2}\xi \sqrt{\lambda^2-4\mu}) + C_2 \cosh(\frac{1}{2}\xi \sqrt{\lambda^2-4\mu}))}{3\beta(C_2 \sinh(\frac{1}{2}\xi \sqrt{\lambda^2-4\mu}) + C_1 \cosh(\frac{1}{2}\xi \sqrt{\lambda^2-4\mu}))}$$

$$u_2(\xi) = \frac{\alpha}{3\beta} + \frac{\alpha(C_1 \sinh(\frac{1}{2}\xi \sqrt{\lambda^2-4\mu}) + C_2 \cosh(\frac{1}{2}\xi \sqrt{\lambda^2-4\mu}))}{3\beta(C_2 \sinh(\frac{1}{2}\xi \sqrt{\lambda^2-4\mu}) + C_1 \cosh(\frac{1}{2}\xi \sqrt{\lambda^2-4\mu}))}$$

(a) Determinéense las soluciones particulares $u_1(\xi)$, $u_2(\xi)$ para los siguientes casos:

Caso IV. $\lambda^2 - 4\mu > 0$ $C_1 \neq 0, C_2 = 0, \lambda > 0, \mu = 0$

Caso V. $\lambda^2 - 4\mu > 0$ $C_2 \neq 0, C_1 = 0, \lambda > 0, \mu = 0,$

siendo $\xi = \sqrt{k} (x - \omega t) t$.

SOLUCIÓN

(a)

Tabla 2.14. Soluciones particulares de la ODE lineal de 2º orden (ODE) $\equiv G''(\xi) + \lambda G'(\xi) + \mu G(\xi) = 0$ para los casos IV y V.

Casos	$u_k(\xi)$
Caso IV. $\lambda^2 - 4\mu > 0. C_1 \neq 0, C_2 = 0, \mu = 0$	$u_7(\xi) = -\frac{\alpha(\tanh(\frac{\lambda\xi}{2})-1)}{3\beta}$
Caso IV. $\lambda^2 - 4\mu > 0. C_1 \neq 0, C_2 = 0, \mu = 0$	$u_8(\xi) = \frac{\alpha(\tanh(\frac{\lambda\xi}{2})+1)}{3\beta}$
Caso V. $\lambda^2 - 4\mu > 0. C_2 \neq 0, C_1 = 0, \mu = 0$	$u_9(\xi) = -\frac{\alpha(\coth(\frac{\lambda\xi}{2})-1)}{3\beta}$
Caso V. $\lambda^2 - 4\mu > 0. C_2 \neq 0, C_1 = 0, \mu = 0$	$u_{10}(\xi) = \frac{\alpha(\coth(\frac{\lambda\xi}{2})+1)}{3\beta}$
Casos	$u_k(\xi)$
Caso VI. $\lambda^2 - 4\mu < 0. C_1 \neq 0, C_2 = 0, \mu = 0$	$u_{11}(\xi) = -\frac{\alpha(\tanh(\frac{\lambda\xi}{2})-1)}{3\beta}$
Caso VI. $\lambda^2 - 4\mu < 0. C_1 \neq 0, C_2 = 0, \mu = 0$	$u_{12}(\xi) = \frac{\alpha(\tanh(\frac{\lambda\xi}{2})+1)}{3\beta}$
Caso VII. $\lambda^2 - 4\mu < 0. C_2 \neq 0, C_1 = 0, \mu = 0$	$u_{13}(\xi) = -\frac{\alpha(\coth(\frac{\lambda\xi}{2})-1)}{3\beta}$
Caso VII. $\lambda^2 - 4\mu < 0. C_2 \neq 0, C_1 = 0, \mu = 0$	$u_{14}(\xi) = \frac{\alpha(\coth(\frac{\lambda\xi}{2})+1)}{3\beta}$

■ **Problema 2.3.4.**

Representense las gráficas de las soluciones la Ecuación Propagación de Ondas en Línea de Transmisión Eléctrica de Paso Bajo no Lineal con los parámetros indicados en los diferentes casos:

- (a) Caso I. $\lambda^2 - 4\mu > 0$ $\{\alpha, \beta, \delta\} = \{2, 2, 2\}$ $\{\lambda, \mu\} = \{1.5, 0.05\}$ $\{C_1 \rightarrow 2, C_2 \rightarrow 1\}$.
 $u_1(\xi), u_2(\xi)$.
- (b) Caso II. $\lambda^2 - 4\mu < 0$ $\{\alpha, \beta, \delta\} = \{2, 2, 2\}$ $\{\lambda, \mu\} = \{1, 2\}$ $\{C_1 \rightarrow 2, C_2 \rightarrow 1\}$.
 $u_3(\xi), u_4(\xi)$.

siendo

$$\begin{cases} C_1, C_2 & \text{constantes arbitrarias} \\ \xi = \sqrt{k} (x - \omega t) \end{cases}$$

$$\xi = \sqrt{k} (x - \omega t) = \sqrt{-\frac{24\alpha^2}{\delta^2(2\alpha^2-9\beta)(\lambda^2-4\mu)}} x - \sqrt{\frac{216\alpha^2\beta}{(2\alpha^2-9\beta)^2(\lambda^2-4\mu)}} t \quad (\lambda^2 - 4\mu > 0)$$

$$\xi = \sqrt{k} (x - \omega t) = \sqrt{-\frac{24\alpha^2}{\delta^2(2\alpha^2-9\beta)(4\mu-\lambda^2)}} x - \sqrt{\frac{216\alpha^2\beta}{(2\alpha^2-9\beta)^2(4\mu-\lambda^2)}} t \quad (\lambda^2 - 4\mu < 0).$$

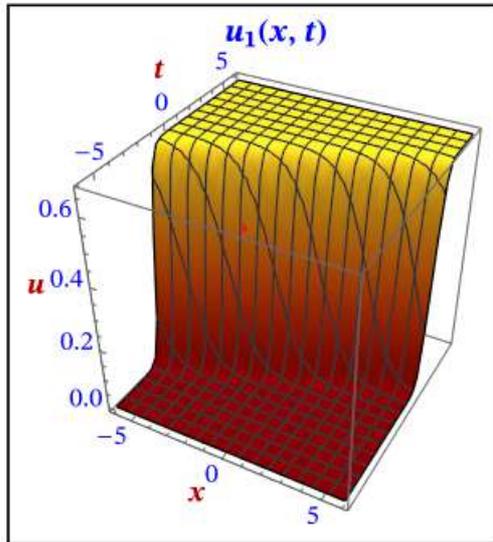
SOLUCIÓN

(a)

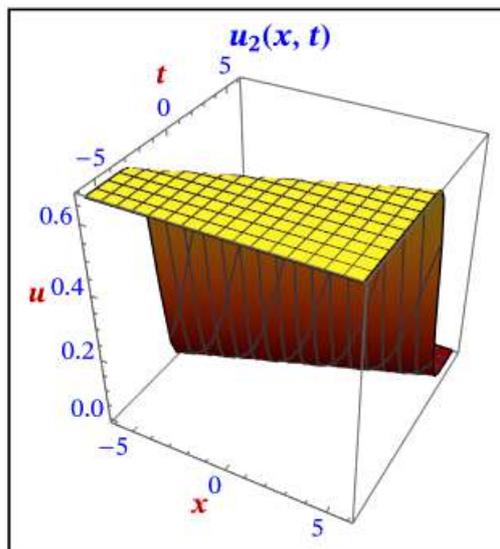
$$\{ \text{Caso I. } \lambda^2 - 4\mu > 0 \}$$

$$\left(\begin{array}{ll} \{\alpha, \beta, \delta\} & \{2, 2, 2\} \\ \{\lambda, \mu\} & \{1.5, 0.05\} \\ \lambda^2 - 4\mu & 2.05 \\ \omega & 2.90332 \\ \xi & 1.082x - 2.90332t \end{array} \right)$$

$$u_1(x, t) = \left(\frac{1}{3} - \frac{2 \sinh(0.715891 (1.082x - 2.90332t)) + \cosh(0.715891 (1.082x - 2.90332t))}{3 (\sinh(0.715891 (1.082x - 2.90332t)) + 2 \cosh(0.715891 (1.082x - 2.90332t)))} \right)$$



$$u_2(x, t) = \left(\frac{2 \sinh(0.715891 (1.082x - 2.90332t)) + \cosh(0.715891 (1.082x - 2.90332t))}{3 (\sinh(0.715891 (1.082x - 2.90332t)) + 2 \cosh(0.715891 (1.082x - 2.90332t)))} + \frac{1}{3} \right)$$

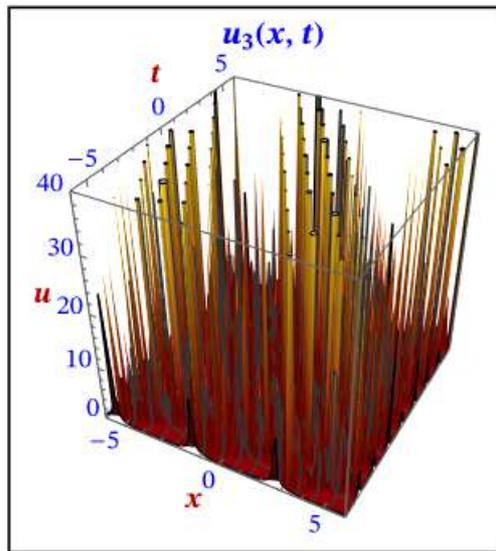


(b)

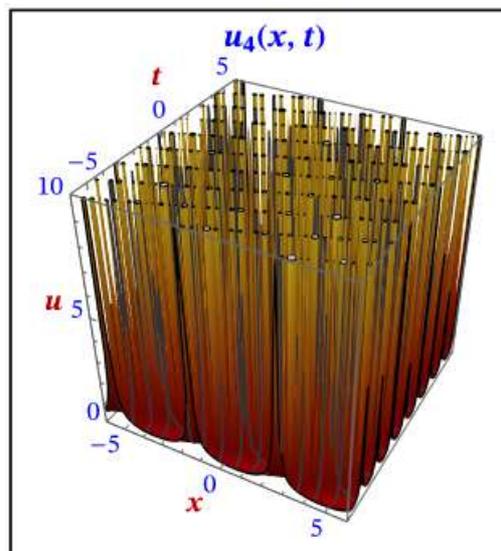
{Caso II. $\lambda^2 - 4\mu < 0$ }

$$\left(\begin{array}{ll} \{\alpha, \beta, \delta\} & \{2, 2, 2\} \\ \{\lambda, \mu\} = & \{1., 2\} \\ 4\mu - \lambda^2 = & 7. \\ \omega = & 1.57117 \\ \xi = & 0.58554 x - 1.57117 t \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{l} u_3(x, t) = \\ \frac{1}{3} - \frac{i(\cos(1.32288(0.58554x - 1.57117t)) - 2\sin(1.32288(0.58554x - 1.57117t)))}{3(\sin(1.32288(0.58554x - 1.57117t)) + 2\cos(1.32288(0.58554x - 1.57117t)))} \end{array} \right)$$



$$\left(\begin{array}{l} u_4(x, t) = \\ \frac{1}{3} + \frac{i(\cos(1.32288(0.58554x - 1.57117t)) - 2\sin(1.32288(0.58554x - 1.57117t)))}{3(\sin(1.32288(0.58554x - 1.57117t)) + 2\cos(1.32288(0.58554x - 1.57117t)))} \end{array} \right)$$



2.3.2. Problemas (Low-Pass Electrical Lines–LPEL) ODE Generalizada de Riccati

■ Ecuación Propagación de Ondas en Línea de Transmisión Eléctrica de Paso Bajo no Lineal

Sea la PDEs no lineal que rigen la propagación de ondas en línea de transmisión eléctrica de paso bajo no lineal [SHAH19] (*Low-Pass Electrical Lines–LPEL*)

$$(PDE) \equiv V_{tt} - \alpha (V^2)_{tt} + \beta (V^3)_{tt} - \delta^2 V_{xx} - \frac{\delta^4}{12} V_{xxxx} = 0$$

$$(PDE) \equiv u_{tt} - \alpha (u^2)_{tt} + \beta (u^3)_{tt} - \delta^2 u_{xx} - \frac{\delta^4}{12} u_{xxxx} = 0$$

que se reduce mediante la transformación

$$V = V(x, t) = V(\xi) \quad \xi = \sqrt{k} (x - \omega t)$$

$$V = u(x, t) = u(\xi) \quad \xi = \sqrt{k} (x - \omega t)$$

en la ecuación diferencial de segundo grado no lineal (ODE) :

$$(ODE) \equiv \frac{K^2}{12} u''(\xi) + (K - U) u(\xi) + \alpha U u^2(\xi) - \beta U u^3(\xi) = 0.$$

■ Problema 2.3.5. (Ecuación Generalizada de Riccati)

Sea la ecuación diferencial de segundo grado no lineal (ODE)

$$(ODE) \equiv \frac{K^2}{12} u''(\xi) + (K - U) u(\xi) + \alpha U u^2(\xi) - \beta U u^3(\xi) = 0$$

(a) Sustitúyase la solución para $m = 1$

$$u(\xi) = \sum_{k=1}^m a_k \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)^k + a_0 = \sum_{k=1}^m a_k \left(q G(\xi) + \frac{r}{G(\xi)} + p \right)^k + a_0 = a_1 \left(q G(\xi) + \frac{r}{G(\xi)} + p \right) + a_0$$

y las expresiones de $u'(\xi)$ y $u''(\xi)$ expresadas como polinomios en términos de $G^k(\xi)$ y $G^{-k}(\xi)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) en la ecuación (ODE):

(a.1) Dedúzcase el sistema (ODE) expresado como polinomios en términos de $G^k(\xi)$ y $G^{-k}(\xi)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$):

$$(ODE) \equiv \left\{ \sum_{k=0}^m [\alpha_k (G(\xi))^k + \beta_k (G(\xi))^{-k}] = 0 \right.$$

(a.2) Determinése el sistema algebraico de ecuaciones correspondientes agrupando los términos del mismo orden de $G^k(\xi)$ y $G^{-k}(\xi)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) del lado izquierdo de la ecuación y reduciendo los coeficientes a cero.

(b) Resuélvase el sistema algebraico de ecuaciones en las variables $\{a_0, a_1, K, U\}$.

(c) Compruébense las soluciones obtenidas en el sistema algebraico.

Indicación:

$$\left\{ a_0 \rightarrow 0, a_1 \rightarrow \frac{2\alpha}{3p\beta}, K \rightarrow \frac{24\alpha^2}{(9\beta-2\alpha^2)p^2+8qr\alpha^2}, U \rightarrow \frac{216p^2\alpha^2\beta}{((9\beta-2\alpha^2)p^2+8qr\alpha^2)^2} \right\}$$

$$\left\{ a_0 \rightarrow 0, a_1 \rightarrow \frac{2\alpha}{3\beta p}, r \rightarrow 0, K \rightarrow \frac{24\alpha^2}{p^2(9\beta-2\alpha^2)}, U \rightarrow \frac{216\alpha^2\beta}{p^2(9\beta-2\alpha^2)^2} \right\}$$

SOLUCIÓN

(a)

$u(\xi)$	$a_1 \left(q G(\xi) + \frac{r}{G(\xi)} + p \right) + a_0$
$u'(\xi)$	$a_1 p q G(\xi) - \frac{a_1 p r}{G(\xi)} + a_1 q^2 G(\xi)^2 - \frac{a_1 r^2}{G(\xi)^2}$
$u''(\xi)$	$a_1 p^2 q G(\xi) + \frac{a_1 p^2 r}{G(\xi)} + 3 a_1 p q^2 G(\xi)^2 + \frac{3 a_1 p r^2}{G(\xi)^2} +$ $2 a_1 q^3 G(\xi)^3 + 2 a_1 q^2 r G(\xi) + \frac{2 a_1 q r^2}{G(\xi)} + \frac{2 a_1 r^3}{G(\xi)^3} + 2 a_1 p q r$

{(a.1) Ecuación (ODE).}

$$\left\{ \left(\text{ODE} \equiv \frac{1}{12} K^2 u''(\xi) + (K - U) u(\xi) + \alpha U u(\xi)^2 - \beta U u(\xi)^3 \right) = 0 \right\}$$

$$\left\{ \text{ODE, } G(\xi) \left(\frac{1}{12} a_1 K^2 p^2 q + \frac{1}{6} a_1 K^2 q^2 r + a_1 q (K - U) - 3 a_1^3 \beta p^2 q U + 2 \alpha a_1^2 p q U - \right. \right.$$

$$\left. 6 a_0 a_1^2 \beta p q U - 3 a_1^3 \beta q^2 r U + 2 \alpha a_0 a_1 q U - 3 a_0^2 a_1 \beta q U \right) +$$

$$\frac{1}{G(\xi)} \left(\frac{1}{12} a_1 K^2 p^2 r + \frac{1}{6} a_1 K^2 q r^2 + a_1 r (K - U) - 3 a_1^3 \beta p^2 r U + 2 \alpha a_1^2 p r U - \right.$$

$$\left. 6 a_0 a_1^2 \beta p r U - 3 a_1^3 \beta q r^2 U + 2 \alpha a_0 a_1 r U - 3 a_0^2 a_1 \beta r U \right) +$$

$$G(\xi)^2 \left(\frac{1}{4} a_1 K^2 p q^2 - 3 a_1^3 \beta p q^2 U + \alpha a_1^2 q^2 U - 3 a_0 a_1^2 \beta q^2 U \right) +$$

$$\frac{\frac{1}{4} a_1 K^2 p r^2 - 3 a_1^3 \beta p r^2 U + \alpha a_1^2 r^2 U - 3 a_0 a_1^2 \beta r^2 U}{G(\xi)^2} +$$

$$G(\xi)^3 \left(\frac{1}{6} a_1 K^2 q^3 - a_1^3 \beta q^3 U \right) + \frac{\frac{1}{6} a_1 K^2 r^3 - a_1^3 \beta r^3 U}{G(\xi)^3} +$$

$$\frac{1}{6} a_1 K^2 p q r + a_1 p (K - U) + a_0 (K - U) - a_1^3 \beta p^3 U + \alpha a_1^2 p^2 U -$$

$$3 a_0 a_1^2 \beta p^2 U - 6 a_1^3 \beta p q r U + 2 \alpha a_0 a_1 p U - 3 a_0^2 a_1 \beta p U +$$

$$2 \alpha a_1^2 q r U - 6 a_0 a_1^2 \beta q r U + \alpha a_0^2 U - a_0^3 \beta U, = 0 \left. \right\}$$

{(a.2) Sistema algebraico de ecuaciones.}

$(G(\xi))^0:$	$a_1 \left(\frac{1}{6} K^2 p q r + K p - p U \right) + a_0 \left(-3 a_1^2 \beta U (p^2 + 2 q r) + 2 \alpha a_1 p U + K - U \right) + \alpha a_1^2 U (p^2 + 2 q r) - a_1^3 \beta p U (p^2 + 6 q r) + a_0^2 (\alpha U - 3 a_1 \beta p U) + a_0^3 \beta (-U)$	$= 0$
$(G(\xi))^1:$	$a_1 \left(-\frac{1}{12} K^2 q (-p^2 - 2 q r) + K q - q U \right) - 3 a_1^3 \beta q U (p^2 + q r) + a_0 (2 \alpha a_1 q U - 6 a_1^2 \beta p q U) + 2 \alpha a_1^2 p q U - 3 a_0^2 a_1 \beta q U$	$= 0$
$(G(\xi))^2:$	$\frac{1}{4} a_1 K^2 p q^2 - 3 a_1^3 \beta p q^2 U + \alpha a_1^2 q^2 U - 3 a_0 a_1^2 \beta q^2 U$	$= 0$
$(G(\xi))^3:$	$\frac{1}{6} a_1 K^2 q^3 - a_1^3 \beta q^3 U$	$= 0$
$(G(\xi))^{-1}:$	$a_1 \left(-\frac{1}{12} K^2 r (-p^2 - 2 q r) + K r - r U \right) - 3 a_1^3 \beta r U (p^2 + q r) + a_0 (2 \alpha a_1 r U - 6 a_1^2 \beta p r U) + 2 \alpha a_1^2 p r U - 3 a_0^2 a_1 \beta r U$	$= 0$
$(G(\xi))^{-2}:$	$\frac{1}{4} a_1 K^2 p r^2 - 3 a_1^3 \beta p r^2 U + \alpha a_1^2 r^2 U - 3 a_0 a_1^2 \beta r^2 U$	$= 0$
$(G(\xi))^{-3}:$	$\frac{1}{6} a_1 K^2 r^3 - a_1^3 \beta r^3 U$	$= 0$

(b) Soluciones del Sistema Algebraico

Solución del sistema algebraico

$$\left\{ a_0 \rightarrow 0, a_1 \rightarrow \frac{2\alpha}{3p\beta}, K \rightarrow \frac{24\alpha^2}{(9\beta - 2\alpha^2)p^2 + 8qr\alpha^2}, \right.$$

$$\left. U \rightarrow \frac{216p^2\alpha^2\beta}{((9\beta - 2\alpha^2)p^2 + 8qr\alpha^2)^2} \right\}$$

$$\left\{ a_0 \rightarrow 0, a_1 \rightarrow \frac{2\alpha}{3\beta p}, r \rightarrow 0, K \rightarrow \frac{24\alpha^2}{p^2(9\beta - 2\alpha^2)}, U \rightarrow \frac{216\alpha^2\beta}{p^2(9\beta - 2\alpha^2)^2} \right\}$$

(c) Comprobación de las soluciones

$$\left\{ (1) \text{ Regla (a), } \left(\begin{array}{l} a_0 \rightarrow 0 \\ a_1 \rightarrow \frac{2\alpha}{3p\beta} \\ K \rightarrow \frac{24\alpha^2}{(9\beta - 2\alpha^2)p^2 + 8qr\alpha^2} \\ U \rightarrow \frac{216p^2\alpha^2\beta}{((9\beta - 2\alpha^2)p^2 + 8qr\alpha^2)^2} \end{array} \right) \right\}$$

$(G(\xi))^0:$	$a_1 \left(\frac{1}{6} K^2 p q r + K p - p U \right) + a_0 \left(-3 a_1^2 \beta U (p^2 + 2 q r) + 2 \alpha a_1 p U + K - U \right) + \alpha a_1^2 U (p^2 + 2 q r) - a_1^3 \beta p U (p^2 + 6 q r) + a_0^2 (\alpha U - 3 a_1 \beta p U) + a_0^3 \beta (-U)$	$= 0$
$(G(\xi))^1:$	$a_1 \left(-\frac{1}{12} K^2 q (-p^2 - 2 q r) + K q - q U \right) - 3 a_1^3 \beta q U (p^2 + q r) + a_0 (2 \alpha a_1 q U - 6 a_1^2 \beta p q U) + 2 \alpha a_1^2 p q U - 3 a_0^2 a_1 \beta q U$	$= 0$
$(G(\xi))^2:$	$\frac{1}{4} a_1 K^2 p q^2 - 3 a_1^3 \beta p q^2 U + \alpha a_1^2 q^2 U - 3 a_0 a_1^2 \beta q^2 U$	$= 0$
$(G(\xi))^3:$	$\frac{1}{6} a_1 K^2 q^3 - a_1^3 \beta q^3 U$	$= 0$
$(G(\xi))^{-1}:$	$a_1 \left(-\frac{1}{12} K^2 r (-p^2 - 2 q r) + K r - r U \right) - 3 a_1^3 \beta r U (p^2 + q r) + a_0 (2 \alpha a_1 r U - 6 a_1^2 \beta p r U) + 2 \alpha a_1^2 p r U - 3 a_0^2 a_1 \beta r U$	$= 0$
$(G(\xi))^{-2}:$	$\frac{1}{4} a_1 K^2 p r^2 - 3 a_1^3 \beta p r^2 U + \alpha a_1^2 r^2 U - 3 a_0 a_1^2 \beta r^2 U$	$= 0$
$(G(\xi))^{-3}:$	$\frac{1}{6} a_1 K^2 r^3 - a_1^3 \beta r^3 U$	$= 0$

$$\left\{ (2) \text{ Regla (b) , } \begin{pmatrix} a_0 \rightarrow 0 \\ a_1 \rightarrow \frac{2\alpha}{3p\beta} \\ r \rightarrow 0 \\ K \rightarrow \frac{24\alpha^2}{p^2(9\beta-2\alpha^2)} \\ U \rightarrow \frac{216\alpha^2\beta}{p^2(9\beta-2\alpha^2)^2} \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} F_0 = 0 \\ F_1 = 0 \\ F_2 = 0 \\ F_3 = 0 \\ F_{-1} = 0 \\ F_{-2} = 0 \\ F_{-3} = 0 \end{pmatrix}$$

■ **Problema 2.3.6. (Ecuación Generalizada de Riccati)**

Sea la expresión que representa la solución de Ecuación Propagación de Ondas en Línea de Transmisión Eléctrica de Paso Bajo no Lineal (LPEL):

$$u(\xi) = a_0 + a_1 \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)$$

donde los coeficientes a_k son:

$$(i) \left\{ a_0 \rightarrow 0, a_1 \rightarrow \frac{2\alpha}{3p\beta}, K \rightarrow \frac{24\alpha^2}{(9\beta-2\alpha^2)p^2+8qr\alpha^2}, U \rightarrow \frac{216p^2\alpha^2\beta}{((9\beta-2\alpha^2)p^2+8qr\alpha^2)^2} \right\}$$

$$\left\{ a_0 \rightarrow 0, a_1 \rightarrow \frac{2\alpha}{3\beta p}, r \rightarrow 0, K \rightarrow \frac{24\alpha^2}{p^2(9\beta-2\alpha^2)}, U \rightarrow \frac{216\alpha^2\beta}{p^2(9\beta-2\alpha^2)^2} \right\}$$

y donde la relación:

$$\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)$$

que viene determinada por las soluciones generales de la ODE generalizada de Riccati

$$(ODE) \equiv G'(\xi) = r + p G(\xi) + q G^2(\xi) \quad (G_k(\xi), k = 1, \dots, 27)$$

Determinense las soluciones siguientes, tomado $\xi = \sqrt{k} (x - \omega t)$.

- (a) Caso I (Familia I). $p^2 - 4qr > 0$ $pq \neq 0$ o $qr \neq 0$ $\left\{ u_1(\xi), \dots, u_{12}(\xi) \right\}$
- (b) Caso II (Familia II). $p^2 - 4qr < 0$ $pq \neq 0$ o $qr \neq 0$ $\left\{ u_{13}(\xi), \dots, u_{24}(\xi) \right\}$
- (c) Caso III (Familia III). $r = 0$ $pq \neq 0$ $\left\{ u_{25}(\xi), \dots, u_{26}(\xi) \right\}$
- (d) Caso IV (Familia IV). $r = p = 0$ $q \neq 0$ $\left\{ u_{27}(\xi) \right\}$

$$\left\{ \begin{array}{l} r, p, q, C_1, C_2 \text{ constantes arbitrarias} \\ \xi = \sqrt{k} (x - \omega t) \end{array} \right.$$

$$\xi = \sqrt{-\frac{24\alpha^2}{\delta^2(2\alpha^2(p^2-4qr)-9\beta p^2)}} x - \sqrt{\frac{216p^2\alpha^2\beta}{(2\alpha^2(p^2-4qr)-9\beta p^2)^2}} t$$

$$\omega = 3 \sqrt{-\frac{\beta\delta^2 p^2}{2\alpha^2(p^2-4qr)-9\beta p^2}}$$

SOLUCIÓN

(a) Soluciones de la EDO Generalizada de Riccati. Caso I.

Caso I. $p^2 - 4rp > 0$.

Coeficientes a_k :

$$\left\{ a_0 \rightarrow 0, a_1 \rightarrow \frac{2\alpha}{3\beta p}, K \rightarrow \frac{24\alpha^2}{(9\beta-2\alpha^2)p^2+8qr\alpha^2}, U \rightarrow \frac{216p^2\alpha^2\beta}{((9\beta-2\alpha^2)p^2+8qr\alpha^2)^2} \right\}$$

Tabla 2.15. Soluciones de la EDO Generalizada de Riccati (ODE) $\equiv G'(\xi) = r + p G(\xi) + q G^2(\xi)$ para el caso I.

$u_k(\xi)$
$u_1(\xi) = \frac{2\alpha}{3\beta p} \left(\frac{(p^2-4qr) \operatorname{sech}^2(\frac{1}{2} \sqrt{p^2-4qr} \xi)}{2(p + \sqrt{p^2-4qr} \tanh(\frac{1}{2} \sqrt{p^2-4qr} \xi))} \right)$
$u_2(\xi) = \frac{2\alpha}{3\beta p} \left(- \frac{(p^2-4qr) \operatorname{csch}^2(\frac{1}{2} \sqrt{p^2-4qr} \xi)}{2(p + \sqrt{p^2-4qr} \coth(\frac{1}{2} \sqrt{p^2-4qr} \xi))} \right)$
$u_3(\xi) = \frac{2\alpha}{3\beta p} \left(- \frac{i(p^2-4qr)}{\sqrt{p^2-4qr} \cosh(\sqrt{p^2-4qr} \xi) + p(\sinh(\sqrt{p^2-4qr} \xi) - i)} \right)$
$u_4(\xi) = \frac{2\alpha}{3\beta p} \left(- \frac{(p^2-4qr) \operatorname{csch}^2(\frac{1}{2} \sqrt{p^2-4qr} \xi)}{2(p + \sqrt{p^2-4qr} \coth(\frac{1}{2} \sqrt{p^2-4qr} \xi))} \right)$
$u_5(\xi) = \frac{2\alpha}{3\beta p} \left(- \frac{(p^2-4qr) \operatorname{csch}^2(\frac{1}{2} \sqrt{p^2-4qr} \xi)}{2(p + \sqrt{p^2-4qr} \coth(\frac{1}{2} \sqrt{p^2-4qr} \xi))} \right)$
$u_6(\xi) = \frac{2\alpha}{3\beta p} \left(- \frac{(p^2-4qr) c_1 (-\sqrt{c_1^2+c_2^2} \cosh(\sqrt{p^2-4qr} \xi) + c_1 - \sinh(\sqrt{p^2-4qr} \xi) c_2)}{(\sinh(\sqrt{p^2-4qr} \xi) c_1 + c_2) (\sqrt{p^2-4qr} \cosh(\sqrt{p^2-4qr} \xi) + p \sinh(\sqrt{p^2-4qr} \xi) c_1 + p c_2 - \sqrt{p^2-4qr} \sqrt{c_1^2+c_2^2})} \right)$
$u_7(\xi) = \frac{2\alpha}{3\beta p} \left(- \frac{(p^2-4qr) c_1 (\sqrt{c_1^2+c_2^2} \cosh(\sqrt{p^2-4qr} \xi) + c_1 - \sinh(\sqrt{p^2-4qr} \xi) c_2)}{(\sinh(\sqrt{p^2-4qr} \xi) c_1 + c_2) (\sqrt{p^2-4qr} \cosh(\sqrt{p^2-4qr} \xi) + p \sinh(\sqrt{p^2-4qr} \xi) c_1 + p c_2 + \sqrt{p^2-4qr} \sqrt{c_1^2+c_2^2})} \right)$
$u_8(\xi) = \frac{2\alpha}{3\beta p} \left(\frac{(p^2-4qr) \operatorname{sech}^2(\frac{1}{2} \sqrt{p^2-4qr} \xi)}{2(p - \sqrt{p^2-4qr} \tanh(\frac{1}{2} \sqrt{p^2-4qr} \xi))} \right)$
$u_9(\xi) = \frac{2\alpha}{3\beta p} \left(- \frac{(p^2-4qr) \operatorname{csch}^2(\frac{1}{2} \sqrt{p^2-4qr} \xi)}{2(p - \sqrt{p^2-4qr} \coth(\frac{1}{2} \sqrt{p^2-4qr} \xi))} \right)$
$u_{10}(\xi) = \frac{2\alpha}{3\beta p} \left(\frac{p^2-4qr}{i \sinh(\sqrt{p^2-4qr} \xi) p + p - i \sqrt{p^2-4qr} \cosh(\sqrt{p^2-4qr} \xi)} \right)$
$u_{11}(\xi) = \frac{2\alpha}{3\beta p} \left(- \frac{(p^2-4qr) \operatorname{csch}^2(\frac{1}{2} \sqrt{p^2-4qr} \xi)}{2(p - \sqrt{p^2-4qr} \coth(\frac{1}{2} \sqrt{p^2-4qr} \xi))} \right)$
$u_{12}(\xi) = \frac{2\alpha}{3\beta p} \left(- \frac{(p^2-4qr) \operatorname{csch}^2(\frac{1}{2} \sqrt{p^2-4qr} \xi)}{2(p - \sqrt{p^2-4qr} \coth(\frac{1}{2} \sqrt{p^2-4qr} \xi))} \right)$

(b) Soluciones de la EDO Generalizada de Riccati. Caso II.

Caso II. $p^2 - 4rp < 0$

Coefficientes a_k :

$$\left\{ a_0 \rightarrow 0, a_1 \rightarrow \frac{2\alpha}{3\beta p}, K \rightarrow \frac{24\alpha^2}{(9\beta - 2\alpha^2)p^2 + 8qr\alpha^2}, U \rightarrow \frac{216p^2\alpha^2\beta}{((9\beta - 2\alpha^2)p^2 + 8qr\alpha^2)^2} \right\}$$

Tabla 2.16. Soluciones de la EDO Generalizada de Riccati (ODE) $\equiv G'(\xi) = r + p G(\xi) + q G^2(\xi)$ para el caso II.

$u_k(\xi)$
$u_{13}(\xi) = \frac{2\alpha}{3\beta p} \left(\frac{(p^2-4qr) \sec^2(\frac{1}{2} \sqrt{4qr-p^2} \xi)}{2(p-\sqrt{4qr-p^2} \tan(\frac{1}{2} \sqrt{4qr-p^2} \xi))} \right)$
$u_{14}(\xi) = \frac{2\alpha}{3\beta p} \left(\frac{(p^2-4qr) \csc^2(\frac{1}{2} \sqrt{4qr-p^2} \xi)}{2(p+\sqrt{4qr-p^2} \cot(\frac{1}{2} \sqrt{4qr-p^2} \xi))} \right)$
$u_{15}(\xi) = \frac{2\alpha}{3\beta p} \left(\frac{p^2-4qr}{-\sin(\sqrt{4qr-p^2} \xi)p+p-\sqrt{4qr-p^2} \cos(\sqrt{4qr-p^2} \xi)} \right)$
$u_{16}(\xi) = \frac{2\alpha}{3\beta p} \left(\frac{(p^2-4qr) \csc^2(\frac{1}{2} \sqrt{4qr-p^2} \xi)}{2(p+\sqrt{4qr-p^2} \cot(\frac{1}{2} \sqrt{4qr-p^2} \xi))} \right)$
$u_{17}(\xi) = \frac{2\alpha}{3\beta p} \left(\frac{(p^2-4qr) \csc^2(\frac{1}{2} \sqrt{4qr-p^2} \xi)}{2(p+\sqrt{4qr-p^2} \cot(\frac{1}{2} \sqrt{4qr-p^2} \xi))} \right)$
$u_{18}(\xi) = \frac{2\alpha}{3\beta p} \left(\frac{(p^2-4qr) c_1 (-\sqrt{c_1^2-c_2^2} \cos(\sqrt{4qr-p^2} \xi)+c_1+\sin(\sqrt{4qr-p^2} \xi) c_2)}{(\sin(\sqrt{4qr-p^2} \xi) c_1+c_2)((\sqrt{4qr-p^2} \cos(\sqrt{4qr-p^2} \xi)+p \sin(\sqrt{4qr-p^2} \xi)) c_1+p c_2-\sqrt{4qr-p^2} \sqrt{c_1^2-c_2^2})} \right)$
$u_{19}(\xi) = \frac{2\alpha}{3\beta p} \left(\frac{(p^2-4qr) c_1 (\sqrt{c_1^2-c_2^2} \cos(\sqrt{4qr-p^2} \xi)+c_1+\sin(\sqrt{4qr-p^2} \xi) c_2)}{(\sin(\sqrt{4qr-p^2} \xi) c_1+c_2)((\sqrt{4qr-p^2} \cos(\sqrt{4qr-p^2} \xi)+p \sin(\sqrt{4qr-p^2} \xi)) c_1+p c_2+\sqrt{4qr-p^2} \sqrt{c_1^2-c_2^2})} \right)$
$u_{20}(\xi) = \frac{2\alpha}{3\beta p} \left(\frac{(p^2-4qr) \sec^2(\frac{1}{2} \sqrt{4qr-p^2} \xi)}{2(p+\sqrt{4qr-p^2} \tan(\frac{1}{2} \sqrt{4qr-p^2} \xi))} \right)$
$u_{21}(\xi) = \frac{2\alpha}{3\beta p} \left(\frac{(p^2-4qr) \csc^2(\frac{1}{2} \sqrt{4qr-p^2} \xi)}{2(p-\sqrt{4qr-p^2} \cot(\frac{1}{2} \sqrt{4qr-p^2} \xi))} \right)$
$u_{22}(\xi) = \frac{2\alpha}{3\beta p} \left(\frac{p^2-4qr}{-\sin(\sqrt{4qr-p^2} \xi)p+p+\sqrt{4qr-p^2} \cos(\sqrt{4qr-p^2} \xi)} \right)$
$u_{23}(\xi) = \frac{2\alpha}{3\beta p} \left(\frac{(p^2-4qr) \csc^2(\frac{1}{2} \sqrt{4qr-p^2} \xi)}{2(p-\sqrt{4qr-p^2} \cot(\frac{1}{2} \sqrt{4qr-p^2} \xi))} \right)$
$u_{24}(\xi) = \frac{2\alpha}{3\beta p} \left(\frac{(p^2-4qr) \csc^2(\frac{1}{2} \sqrt{4qr-p^2} \xi)}{2(p-\sqrt{4qr-p^2} \cot(\frac{1}{2} \sqrt{4qr-p^2} \xi))} \right)$

(c) Soluciones de la EDO Generalizada de Riccati. Caso III.

Caso III. $r = 0$.

Coefficientes a_k :

$$\left\{ a_0 \rightarrow 0, a_1 \rightarrow \frac{2\alpha}{3\beta p}, r \rightarrow 0, K \rightarrow \frac{24\alpha^2}{p^2(9\beta - 2\alpha^2)}, U \rightarrow \frac{216\alpha^2\beta}{p^2(9\beta - 2\alpha^2)^2} \right\}$$

Tabla 2.17. Soluciones de la EDO Generalizada de Riccati (ODE) $\equiv G'(\xi) = r + p G(\xi) + q G^2(\xi)$ para el caso III.

$$u_k(\xi)$$

$$u_{25}(\xi) = \frac{2\alpha}{3\beta p} \left(\frac{p}{\cosh(p\xi)c_3 + \sinh(p\xi)c_3 + 1} \right)$$

$$u_{26}(\xi) = \frac{2\alpha}{3\beta p} \left(\frac{p c_3}{\cosh(p\xi) + \sinh(p\xi) + c_3} \right)$$

(d) Soluciones de la EDO Generalizada de Riccati. Caso IV.

Caso IV. $r = 0, q = 0.$

Coefficientes a_k :

$$\left\{ a_0 \rightarrow 0, a_1 \rightarrow \frac{2\alpha}{3\beta p}, r \rightarrow 0, K \rightarrow \frac{24\alpha^2}{p^2(9\beta - 2\alpha^2)}, U \rightarrow \frac{216\alpha^2\beta}{p^2(9\beta - 2\alpha^2)^2} \right\}$$

Tabla 2.18. Soluciones de la EDO Generalizada de Riccati (ODE) $\equiv G'(\xi) = r + p G(\xi) + q G^2(\xi)$ para el caso IV.

$$u_k(\xi)$$

$$u_{27}(\xi) = \frac{2\alpha}{3\beta p} \left(-\frac{q}{q\xi + c_1} \right)$$

■ **Problema 2.3.7. (Ecuación Generalizada de Riccati)**

Expresiones en **Mathematica** de la (a) Ecuación Generalizada de Riccati y las soluciones de la de (b) Ecuación Propagación de Ondas en Línea de Transmisión Eléctrica de Paso Bajo no Lineal:

(a) (ODE) $\equiv G'(\xi) = r + p G(\xi) + q G^2(\xi)$

• $G_k(\xi) = \{ G_1(\xi), \dots, G_{27}(\xi) \}$

(b) (PDE) $\equiv u_{tt} - \alpha (u^2)_{tt} + \beta (u^3)_{tt} - \delta^2 u_{xx} - \frac{\delta^4}{12} u_{xxxx} = 0$

(ODE) $\equiv \frac{K^2}{12} u''(\xi) + (K - U) u(\xi) + \alpha U u^2(\xi) - \beta U u^3(\xi) = 0$

• $V_k(\xi) = u_k(\xi) = \{ u_1(\xi), \dots, u_{27}(\xi) \}$

Indicación: Las expresiones de las funciones $G_k(\xi)$ y $u_k(\xi)$ provienen del problema anterior.

SOLUCIÓN

(a)

Tabla 2.19. Expresiones de $G_k(\xi)$ obtenidas a partir EDO Generalizada de Riccati (ODE) $\equiv G'(\xi) = r + p G(\xi) + q G^2(\xi)$ para cada valor de k .

$$G_k(\xi)$$

$$G_1(\xi) = -\frac{\sqrt{p^2-4qr} \tanh\left(\frac{1}{2}\xi \sqrt{p^2-4qr}\right) + p}{2q}$$

$$G_2(\xi) = -\frac{\sqrt{p^2-4qr} \coth\left(\frac{1}{2}\xi \sqrt{p^2-4qr}\right) + p}{2q}$$

$$G_3(\xi) = -\frac{p + \sqrt{p^2-4qr} (\tanh(\xi \sqrt{p^2-4qr}) + i \operatorname{sech}(\xi \sqrt{p^2-4qr}))}{2q}$$

$$G_4(\xi) = -\frac{\sqrt{p^2-4qr} (\coth(\xi \sqrt{p^2-4qr}) + \operatorname{csch}(\xi \sqrt{p^2-4qr})) + p}{2q}$$

$$G_5(\xi) = -\frac{\sqrt{p^2-4qr} (\tanh(\frac{1}{4}\xi \sqrt{p^2-4qr}) + \coth(\frac{1}{4}\xi \sqrt{p^2-4qr})) + 2p}{4q}$$

$$G_6(\xi) = \frac{\sqrt{p^2-4qr} (\sqrt{c_1^2+c_2^2} - c_1 \cosh(\xi \sqrt{p^2-4qr}))}{c_1 \sinh(\xi \sqrt{p^2-4qr}) + c_2} - p$$

$$G_7(\xi) = \frac{-\sqrt{p^2-4qr} (c_1 \cosh(\xi \sqrt{p^2-4qr}) + \sqrt{c_1^2+c_2^2})}{c_1 \sinh(\xi \sqrt{p^2-4qr}) + c_2} - p$$

$$G_8(\xi) = \frac{2r \cosh(\frac{1}{2}\xi \sqrt{p^2-4qr})}{\sqrt{p^2-4qr} \sinh(\frac{1}{2}\xi \sqrt{p^2-4qr}) - p \cosh(\frac{1}{2}\xi \sqrt{p^2-4qr})}$$

$$G_9(\xi) = \frac{2r \sinh(\frac{1}{2}\xi \sqrt{p^2-4qr})}{\sqrt{p^2-4qr} \cosh(\frac{1}{2}\xi \sqrt{p^2-4qr}) - p \sinh(\frac{1}{2}\xi \sqrt{p^2-4qr})}$$

$$G_{10}(\xi) = \frac{2r \cosh(\xi \sqrt{p^2-4qr})}{\sqrt{p^2-4qr} \sinh(\xi \sqrt{p^2-4qr}) - p \cosh(\xi \sqrt{p^2-4qr}) + i \sqrt{p^2-4qr}}$$

$$G_{11}(\xi) = \frac{2r \sinh(\xi \sqrt{p^2-4qr})}{-p \sinh(\xi \sqrt{p^2-4qr}) + \sqrt{p^2-4qr} \cosh(\xi \sqrt{p^2-4qr}) + \sqrt{p^2-4qr}}$$

$$G_{12}(\xi) = \frac{4r \sinh(\frac{1}{4}\xi \sqrt{p^2-4qr}) \cosh(\frac{1}{4}\xi \sqrt{p^2-4qr})}{2 \sqrt{p^2-4qr} \cosh^2(\frac{1}{4}\xi \sqrt{p^2-4qr}) - 2p \sinh(\frac{1}{4}\xi \sqrt{p^2-4qr}) \cosh(\frac{1}{4}\xi \sqrt{p^2-4qr}) - \sqrt{p^2-4qr}}$$

$$G_{13}(\xi) = \frac{\sqrt{4qr-p^2} \tan(\frac{1}{2}\xi \sqrt{4qr-p^2}) - p}{2q}$$

$$G_{14}(\xi) = -\frac{\sqrt{4qr-p^2} \cot(\frac{1}{2}\xi \sqrt{4qr-p^2}) + p}{2q}$$

$$G_{15}(\xi) = \frac{\sqrt{4qr-p^2} (\tan(\xi \sqrt{4qr-p^2}) + \sec(\xi \sqrt{4qr-p^2})) - p}{2q}$$

$$G_{16}(\xi) = -\frac{\sqrt{4qr-p^2} (\cot(\xi \sqrt{4qr-p^2}) + \operatorname{csc}(\xi \sqrt{4qr-p^2})) + p}{2q}$$

$$G_{17}(\xi) = \frac{\sqrt{4qr-p^2} (\tan(\frac{1}{4}\xi \sqrt{4qr-p^2}) - \cot(\frac{1}{4}\xi \sqrt{4qr-p^2})) - 2p}{4q}$$

$$G_{18}(\xi) = \frac{\sqrt{4qr-p^2} (\sqrt{c_1^2-c_2^2} - c_1 \cos(\xi \sqrt{4qr-p^2}))}{c_1 \sin(\xi \sqrt{4qr-p^2}) + c_2} - p$$

$$G_{19}(\xi) = \frac{-\sqrt{4qr-p^2} (c_1 \cos(\xi \sqrt{4qr-p^2}) + \sqrt{c_1^2-c_2^2})}{c_1 \sin(\xi \sqrt{4qr-p^2}) + c_2} - p$$

$$G_{20}(\xi) = -\frac{2r \cos(\frac{1}{2}\xi \sqrt{4qr-p^2})}{\sqrt{4qr-p^2} \sin(\frac{1}{2}\xi \sqrt{4qr-p^2}) + p \cos(\frac{1}{2}\xi \sqrt{4qr-p^2})}$$

$$G_{21}(\xi) = \frac{2r \sin(\frac{1}{2}\xi \sqrt{4qr-p^2})}{\sqrt{4qr-p^2} \cos(\frac{1}{2}\xi \sqrt{4qr-p^2}) - p \sin(\frac{1}{2}\xi \sqrt{4qr-p^2})}$$

$$G_{22}(\xi) = -\frac{2r \cos(\xi \sqrt{4qr-p^2})}{\sqrt{4qr-p^2} \sin(\xi \sqrt{4qr-p^2}) + p \cos(\xi \sqrt{4qr-p^2}) + \sqrt{4qr-p^2}}$$

$$G_{23}(\xi) = \frac{2r \sin(\xi \sqrt{4qr-p^2})}{-p \sin(\xi \sqrt{4qr-p^2}) + \sqrt{4qr-p^2} \cos(\xi \sqrt{4qr-p^2}) + \sqrt{4qr-p^2}}$$

$$G_{24}(\xi) = \frac{4r \sin(\frac{1}{4}\xi \sqrt{4qr-p^2}) \cos(\frac{1}{4}\xi \sqrt{4qr-p^2})}{2 \sqrt{4qr-p^2} \cos^2(\frac{1}{4}\xi \sqrt{4qr-p^2}) - 2p \sin(\frac{1}{4}\xi \sqrt{4qr-p^2}) \cos(\frac{1}{4}\xi \sqrt{4qr-p^2}) - \sqrt{4qr-p^2}}$$

$$G_{25}(\xi) = -\frac{c_3 p}{q(c_3 - \sinh(\xi p) + \cosh(\xi p))}$$

$$G_{26}(\xi) = -\frac{p(\sinh(\xi p) + \cosh(\xi p))}{q(c_3 + \sinh(\xi p) + \cosh(\xi p))}$$

$$G_{27}(\xi) = -\frac{1}{c_1 + \xi q}$$

(b)

Tabla 2.20. Expresiones de $u_k(\xi)$ obtenidas a partir EDO Generalizada de Riccati (ODE) $\equiv G'(\xi) = r + p G(\xi) + q G^2(\xi)$ para cada valor de k .

$u_k(\xi)$
$u_1(\xi) = \frac{2\alpha}{3\beta p} \left(\frac{(p^2-4qr) \operatorname{sech}^2(\frac{1}{2} \sqrt{p^2-4qr} \xi)}{2(p + \sqrt{p^2-4qr} \tanh(\frac{1}{2} \sqrt{p^2-4qr} \xi))} \right)$
$u_2(\xi) = \frac{2\alpha}{3\beta p} \left(-\frac{(p^2-4qr) \operatorname{csch}^2(\frac{1}{2} \sqrt{p^2-4qr} \xi)}{2(p + \sqrt{p^2-4qr} \coth(\frac{1}{2} \sqrt{p^2-4qr} \xi))} \right)$
$u_3(\xi) = \frac{2\alpha}{3\beta p} \left(-\frac{i(p^2-4qr)}{\sqrt{p^2-4qr} \cosh(\sqrt{p^2-4qr} \xi) + p(\sinh(\sqrt{p^2-4qr} \xi) - i)} \right)$
$u_4(\xi) = \frac{2\alpha}{3\beta p} \left(-\frac{(p^2-4qr) \operatorname{csch}^2(\frac{1}{2} \sqrt{p^2-4qr} \xi)}{2(p + \sqrt{p^2-4qr} \coth(\frac{1}{2} \sqrt{p^2-4qr} \xi))} \right)$
$u_5(\xi) = \frac{2\alpha}{3\beta p} \left(-\frac{(p^2-4qr) \operatorname{csch}^2(\frac{1}{2} \sqrt{p^2-4qr} \xi)}{2(p + \sqrt{p^2-4qr} \coth(\frac{1}{2} \sqrt{p^2-4qr} \xi))} \right)$
$u_6(\xi) = \frac{2\alpha}{3\beta p} \left(-\frac{(p^2-4qr) c_1 (-\sqrt{c_1^2+c_2^2} \cosh(\sqrt{p^2-4qr} \xi) + c_1 - \sinh(\sqrt{p^2-4qr} \xi) c_2)}{(\sinh(\sqrt{p^2-4qr} \xi) c_1 + c_2) (\sqrt{p^2-4qr} \cosh(\sqrt{p^2-4qr} \xi) + p \sinh(\sqrt{p^2-4qr} \xi) c_1 + p c_2 - \sqrt{p^2-4qr} \sqrt{c_1^2+c_2^2})} \right)$
$u_7(\xi) = \frac{2\alpha}{3\beta p} \left(-\frac{(p^2-4qr) c_1 (\sqrt{c_1^2+c_2^2} \cosh(\sqrt{p^2-4qr} \xi) + c_1 - \sinh(\sqrt{p^2-4qr} \xi) c_2)}{(\sinh(\sqrt{p^2-4qr} \xi) c_1 + c_2) (\sqrt{p^2-4qr} \cosh(\sqrt{p^2-4qr} \xi) + p \sinh(\sqrt{p^2-4qr} \xi) c_1 + p c_2 + \sqrt{p^2-4qr} \sqrt{c_1^2+c_2^2})} \right)$
$u_8(\xi) = \frac{2\alpha}{3\beta p} \left(\frac{(p^2-4qr) \operatorname{sech}^2(\frac{1}{2} \sqrt{p^2-4qr} \xi)}{2(p - \sqrt{p^2-4qr} \tanh(\frac{1}{2} \sqrt{p^2-4qr} \xi))} \right)$
$u_9(\xi) = \frac{2\alpha}{3\beta p} \left(-\frac{(p^2-4qr) \operatorname{csch}^2(\frac{1}{2} \sqrt{p^2-4qr} \xi)}{2(p - \sqrt{p^2-4qr} \coth(\frac{1}{2} \sqrt{p^2-4qr} \xi))} \right)$
$u_{10}(\xi) = \frac{2\alpha}{3\beta p} \left(\frac{p^2-4qr}{i \sinh(\sqrt{p^2-4qr} \xi) p + p - i \sqrt{p^2-4qr} \cosh(\sqrt{p^2-4qr} \xi)} \right)$
$u_{11}(\xi) = \frac{2\alpha}{3\beta p} \left(-\frac{(p^2-4qr) \operatorname{csch}^2(\frac{1}{2} \sqrt{p^2-4qr} \xi)}{2(p - \sqrt{p^2-4qr} \coth(\frac{1}{2} \sqrt{p^2-4qr} \xi))} \right)$
$u_{12}(\xi) = \frac{2\alpha}{3\beta p} \left(-\frac{(p^2-4qr) \operatorname{csch}^2(\frac{1}{2} \sqrt{p^2-4qr} \xi)}{2(p - \sqrt{p^2-4qr} \coth(\frac{1}{2} \sqrt{p^2-4qr} \xi))} \right)$
$u_{13}(\xi) = \frac{2\alpha}{3\beta p} \left(\frac{(p^2-4qr) \operatorname{sec}^2(\frac{1}{2} \sqrt{4qr-p^2} \xi)}{2(p - \sqrt{4qr-p^2} \tan(\frac{1}{2} \sqrt{4qr-p^2} \xi))} \right)$
$u_{14}(\xi) = \frac{2\alpha}{3\beta p} \left(\frac{(p^2-4qr) \operatorname{csc}^2(\frac{1}{2} \sqrt{4qr-p^2} \xi)}{2(p + \sqrt{4qr-p^2} \cot(\frac{1}{2} \sqrt{4qr-p^2} \xi))} \right)$
$u_{15}(\xi) = \frac{2\alpha}{3\beta p} \left(\frac{p^2-4qr}{-\sin(\sqrt{4qr-p^2} \xi) p + p - \sqrt{4qr-p^2} \cos(\sqrt{4qr-p^2} \xi)} \right)$
$u_{16}(\xi) = \frac{2\alpha}{3\beta p} \left(\frac{(p^2-4qr) \operatorname{csc}^2(\frac{1}{2} \sqrt{4qr-p^2} \xi)}{2(p + \sqrt{4qr-p^2} \cot(\frac{1}{2} \sqrt{4qr-p^2} \xi))} \right)$

$$u_{17}(\xi) = \frac{2\alpha}{3\beta p} \left(\frac{(p^2-4qr) \csc^2(\frac{1}{2} \sqrt{4qr-p^2} \xi)}{2(p+\sqrt{4qr-p^2} \cot(\frac{1}{2} \sqrt{4qr-p^2} \xi))} \right)$$

$$u_{18}(\xi) = \frac{2\alpha}{3\beta p} \left(\frac{(p^2-4qr) c_1 (-\sqrt{c_1^2-c_2^2} \cos(\sqrt{4qr-p^2} \xi) + c_1 + \sin(\sqrt{4qr-p^2} \xi) c_2)}{(\sin(\sqrt{4qr-p^2} \xi) c_1 + c_2) (\sqrt{4qr-p^2} \cos(\sqrt{4qr-p^2} \xi) + p \sin(\sqrt{4qr-p^2} \xi) c_1 + p c_2 - \sqrt{4qr-p^2} \sqrt{c_1^2-c_2^2})} \right)$$

$$u_{19}(\xi) = \frac{2\alpha}{3\beta p} \left(\frac{(p^2-4qr) c_1 (\sqrt{c_1^2-c_2^2} \cos(\sqrt{4qr-p^2} \xi) + c_1 + \sin(\sqrt{4qr-p^2} \xi) c_2)}{(\sin(\sqrt{4qr-p^2} \xi) c_1 + c_2) (\sqrt{4qr-p^2} \cos(\sqrt{4qr-p^2} \xi) + p \sin(\sqrt{4qr-p^2} \xi) c_1 + p c_2 + \sqrt{4qr-p^2} \sqrt{c_1^2-c_2^2})} \right)$$

$$u_{20}(\xi) = \frac{2\alpha}{3\beta p} \left(\frac{(p^2-4qr) \sec^2(\frac{1}{2} \sqrt{4qr-p^2} \xi)}{2(p+\sqrt{4qr-p^2} \tan(\frac{1}{2} \sqrt{4qr-p^2} \xi))} \right)$$

$$u_{21}(\xi) = \frac{2\alpha}{3\beta p} \left(\frac{(p^2-4qr) \csc^2(\frac{1}{2} \sqrt{4qr-p^2} \xi)}{2(p-\sqrt{4qr-p^2} \cot(\frac{1}{2} \sqrt{4qr-p^2} \xi))} \right)$$

$$u_{22}(\xi) = \frac{2\alpha}{3\beta p} \left(\frac{p^2-4qr}{-\sin(\sqrt{4qr-p^2} \xi) p + \sqrt{4qr-p^2} \cos(\sqrt{4qr-p^2} \xi)} \right)$$

$$u_{23}(\xi) = \frac{2\alpha}{3\beta p} \left(\frac{(p^2-4qr) \csc^2(\frac{1}{2} \sqrt{4qr-p^2} \xi)}{2(p-\sqrt{4qr-p^2} \cot(\frac{1}{2} \sqrt{4qr-p^2} \xi))} \right)$$

$$u_{24}(\xi) = \frac{2\alpha}{3\beta p} \left(\frac{(p^2-4qr) \csc^2(\frac{1}{2} \sqrt{4qr-p^2} \xi)}{2(p-\sqrt{4qr-p^2} \cot(\frac{1}{2} \sqrt{4qr-p^2} \xi))} \right)$$

$$u_{25}(\xi) = \frac{2\alpha}{3\beta p} \left(\frac{p}{\cosh(p\xi) c_3 + \sinh(p\xi) c_3 + 1} \right)$$

$$u_{26}(\xi) = \frac{2\alpha}{3\beta p} \left(\frac{p c_3}{\cosh(p\xi) + \sinh(p\xi) + c_3} \right)$$

$$u_{27}(\xi) = \frac{2\alpha}{3\beta p} \left(-\frac{q}{q\xi + c_1} \right)$$

■ **Problema 2.3.8. (Ecuación Generalizada de Riccati)**

Represéntense las gráficas de las soluciones la Ecuación Propagación de Ondas en Línea de Transmisión Eléctrica de Paso Bajo no Lineal con los parámetros indicados en los diferentes casos:

- (a) Caso I. $p^2 - 4qr > 0$ $\{\alpha, \beta, \delta, p, q, r\} = \{2, 2, 3, 1.5, 0.05, 1\}$ $\{C_1 \rightarrow 2, C_2 \rightarrow 1\}$.
 $u_1(\xi), u_2(\xi), u_6(\xi)$.
- (b) Caso II. $p^2 - 4qr < 0$ $\{\alpha, \beta, \delta, p, q, r\} = \{2, 2, 3, 1.5, 1, 2\}$ $\{C_1 \rightarrow 2, C_2 \rightarrow 1\}$.
 $u_{13}(\xi), u_{14}(\xi), u_{15}(\xi)$.

siendo

$$\begin{cases} C_1, C_2 & \text{constantes arbitrarias} \\ \xi = \sqrt{k} (x - \omega t) \end{cases}$$

$$\xi = \sqrt{k} (x - \omega t) = \sqrt{-\frac{24\alpha^2}{\delta^2(2\alpha^2(p^2-4qr)-9\beta p^2)}} x - \sqrt{\frac{216p^2\alpha^2\beta}{(2\alpha^2(p^2-4qr)-9\beta p^2)^2}} t.$$

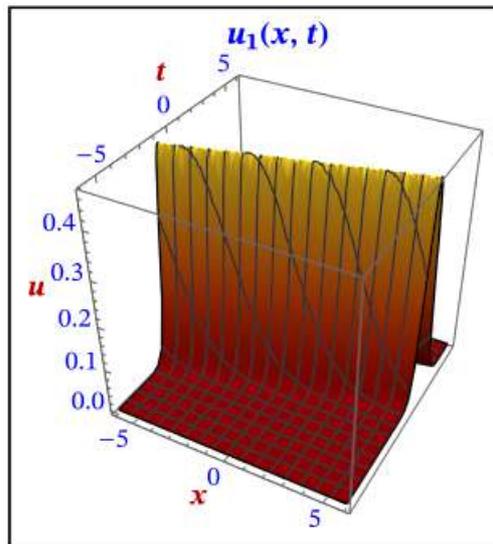
SOLUCIÓN

(a)

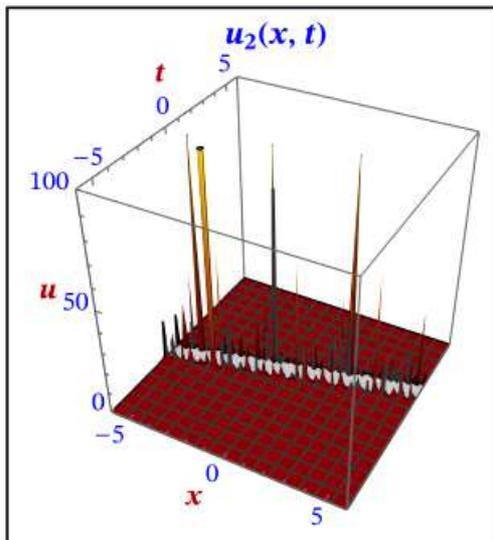
$$\{ \text{Caso I. } p^2 - 4qr > 0 \}$$

$$\left(\begin{array}{ll} \{\alpha, \beta\} & \{2, 2\} \\ \{p, q, r\} = & \{1.5, 0.05, 1\} \\ p^2 - 4qr = & 2.05 \\ \omega = & 2.5873 \\ \xi = & 0.665282x - 2.5873t \end{array} \right)$$

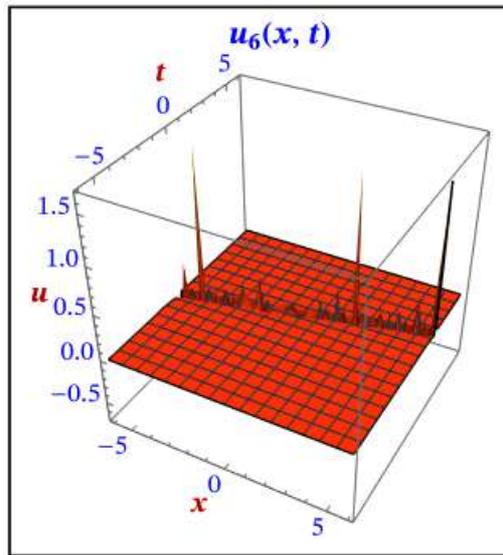
$$\left(\begin{array}{l} u_1(x, t) = \\ \frac{0.455556 \operatorname{sech}^2(0.715891 (0.665282x - 2.5873t))}{1.43178 \tanh(0.715891 (0.665282x - 2.5873t)) + 1.5} \end{array} \right)$$



$$\left(\begin{array}{l} u_2(x, t) = \\ \frac{0.455556 \operatorname{csch}^2(0.715891 (0.665282x - 2.5873t))}{1.43178 \operatorname{coth}(0.715891 (0.665282x - 2.5873t)) + 1.5} \end{array} \right)$$



$$u_6(x, t) = \frac{0.0828283 (-\sinh(1.43178 (0.665282 x - 2.5873 t)) - \sqrt{5} \cosh(1.43178 (0.665282 x - 2.5873 t)) + 2)}{\sinh(1.43178 (0.665282 x - 2.5873 t)) + 1} (2 (1.5 \sinh(1.43178 (0.665282 x - 2.5873 t)) + 1.43178 \cosh(1.43178 (0.665282 x - 2.5873 t))) + 4.70$$

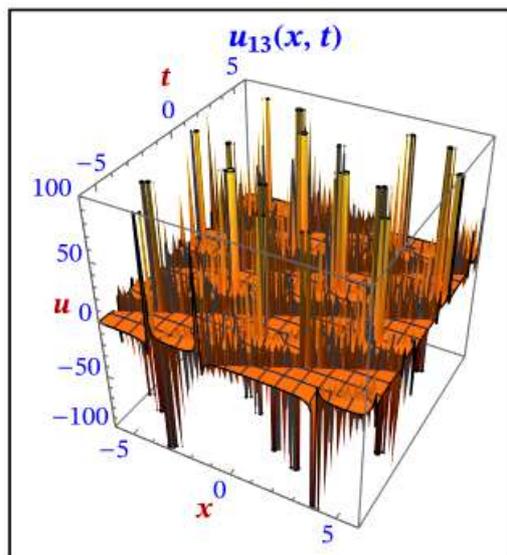


(b)

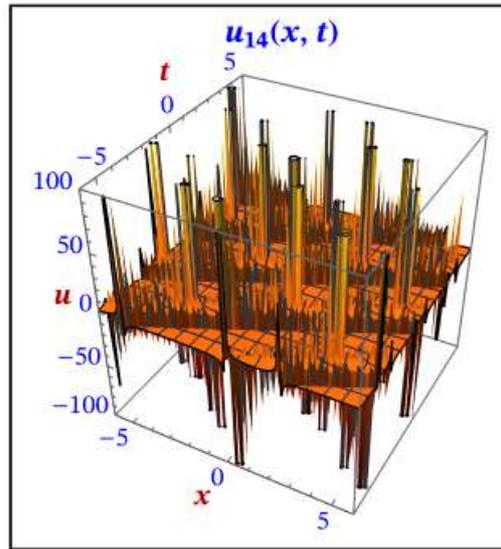
$$\{ \text{Caso II. } p^2 - 4 q r < 0 \}$$

$$\left(\begin{array}{ll} \{ \alpha, \beta \} & \{ 2, 2 \} \\ \{ p, q, r \} & \{ 1.5, 1, 2 \} \\ p^2 - 4 q r & = -5.75 \\ \omega & = 0.720854 \\ \xi & = 0.351161 x - 0.720854 t \end{array} \right)$$

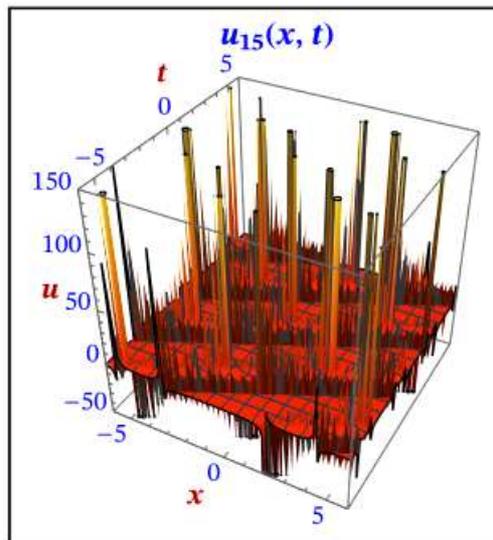
$$\left(\begin{array}{l} u_{13}(x, t) = \\ \frac{1.27778 \sec^2(1.19896 (0.351161 x - 0.720854 t))}{1.5 - 2.39792 \tan(1.19896 (0.351161 x - 0.720854 t))} \end{array} \right)$$



$$u_{14}(x, t) = \left(\frac{1.27778 \csc^2(1.19896 (0.351161 x - 0.720854 t))}{2.39792 \cot(1.19896 (0.351161 x - 0.720854 t)) + 1.5} \right)$$



$$u_{15}(x, t) = \left(\frac{2.55556}{-1.5 \sin(2.39792 (0.351161 x - 0.720854 t)) - 2.39792 \cos(2.39792 (0.351161 x - 0.720854 t)) + 1.5} \right)$$



■ **Problema 2.3.9. (Ecuación Generalizada de Riccati)**

Represéntense las gráficas de las soluciones la Ecuación Propagación de Ondas en Línea de Transmisión Eléctrica de Paso Bajo no Lineal con los parámetros indicados en los diferentes casos:

(a) Caso III. $r = 0$ $\{\alpha, \beta, \delta, p, q, r\} = \{2, 2, 3, 1.5, 1, 0\}$ $\{C_1 \rightarrow 2, C_2 \rightarrow 1, C_3 \rightarrow 1\}$.

$$u_{25}(\xi), u_{26}(\xi).$$

(b) Caso IV. $r = 0, q = 0$ $\{\alpha, \beta, \delta, p, q, r\} = \{2, 2, 3, 1.5, 1, 0\}$
 $\{C_1 \rightarrow 2, C_2 \rightarrow 1, C_3 \rightarrow 1\}$.

$$u_{27}(\xi).$$

siendo

$$\begin{cases} C_1, C_2, C_3 & \text{constantes arbitrarias} \\ \xi = \sqrt{k} (x - \omega t) \end{cases}$$

$$\xi = \sqrt{k} (x - \omega t) = \sqrt{-\frac{24 \alpha^2}{\delta^2 (2 \alpha^2 (p^2 - 4 q r) - 9 \beta p^2)}} x - \sqrt{\frac{216 p^2 \alpha^2 \beta}{(2 \alpha^2 (p^2 - 4 q r) - 9 \beta p^2)^2}} t.$$

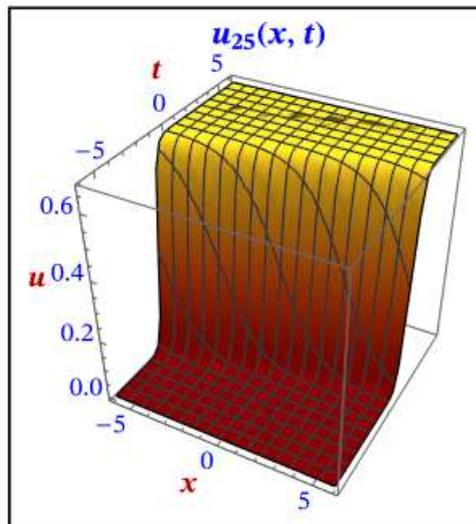
SOLUCIÓN

(a)

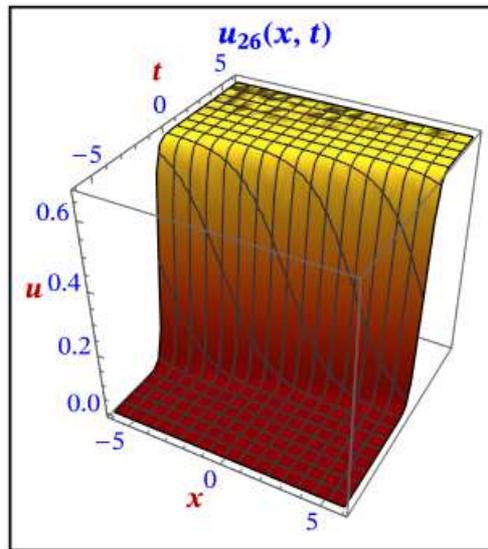
{Caso III. $r = 0$ }

$$\begin{pmatrix} \{\alpha, \beta\} & \{2, 2\} \\ \{p, q, r\} & \{1.5, 1, 0\} \\ p^2 - 4 q r & 2.25 \\ \omega & 2.77128 \\ \xi & 0.68853 x - 2.77128 t \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{u_{25}(x, t) = 0.666667}{\sinh(1.5 (0.68853 x - 2.77128 t)) + \cosh(1.5 (0.68853 x - 2.77128 t)) + 1} \right)$$



$$\left(\begin{array}{l} u_{26}(x, t) = \\ \frac{0.666667}{\sinh(1.5(0.68853x - 2.77128t)) + \cosh(1.5(0.68853x - 2.77128t)) + 1} \end{array} \right)$$

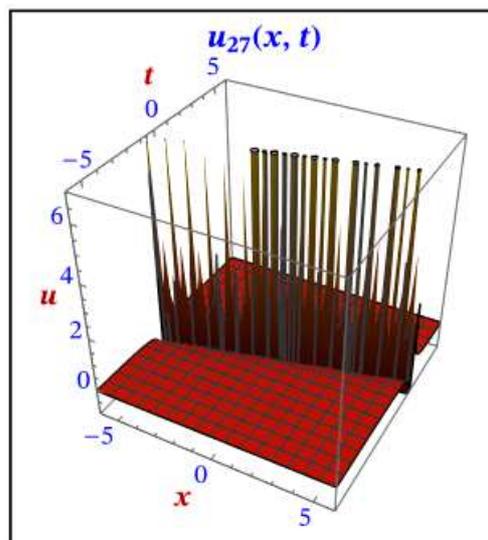


(b)

{Caso IV. $r = 0$ $q = 0$.}

$$\left(\begin{array}{l} \{\alpha, \beta\} = \{2, 2\} \\ \{p, q, r\} = \{1.5, 1, 0\} \\ p^2 - 4qr = 2.25 \\ \omega = 2.77128 \\ \xi = 0.68853x - 2.77128t \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{l} u_{27}(x, t) = \\ -\frac{0.444444}{-2.77128t + 0.68853x + 2} \end{array} \right)$$



2.3.3. Problemas (Low-Pass Electrical Lines–LPEL) ODE Elíptica de Jacobi

■ Ecuación Propagación de Ondas en Línea de Transmisión Eléctrica de Paso Bajo no Lineal

Sea la PDEs no lineal que rigen la propagación de ondas en línea de transmisión eléctrica de paso bajo no lineal [SHAH19] (*Low-Pass Electrical Lines–LPEL*)

$$(PDE) \equiv V_{tt} - \alpha (V^2)_{tt} + \beta (V^3)_{tt} - \delta^2 V_{xx} - \frac{\delta^4}{12} V_{xxxx} = 0$$

$$(PDE) \equiv u_{tt} - \alpha (u^2)_{tt} + \beta (u^3)_{tt} - \delta^2 u_{xx} - \frac{\delta^4}{12} u_{xxxx} = 0$$

que se reduce mediante la transformación

$$V = V(x, t) = V(\xi) \quad \xi = \sqrt{k} (x - \omega t)$$

$$V = u(x, t) = u(\xi) \quad \xi = \sqrt{k} (x - \omega t)$$

en la ecuación diferencial de segundo grado no lineal (ODE) :

$$(PDE - ODE) \equiv \frac{K^2}{12} u''(\xi) + (K - U) u(\xi) + \alpha U u^2(\xi) - \beta U u^3(\xi) = 0.$$

■ Problema 2.3.10. Método de Expansión ($\frac{G'}{G}$): Solución $u(\xi)$ en la PDE.

Sea la ecuación diferencial asociada al Método de Expansión ($\frac{G'}{G}$):

$$(i) \quad (ODE - \text{Elíptica Jacobi}) \equiv (G'(\xi))^2 = P G^4(\xi) + Q G^2(\xi) + R$$

y la solución aoptada para ecuación (PDE – ODE) con $m = 1$

$$(ii) \quad u(\xi) = a_0 + \sum_{k=1}^m a_k \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)^k \quad \Rightarrow \quad u(\xi) = a_0 + a_1 \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right).$$

Realizando el cambio de variable

$$z(\xi) = \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)$$

dedúzcanse las expresiones siguientes:

(a) Las derivadas $u'(\xi)$, $u''(\xi)$, $u^{(3)}(\xi)$, $u^{(4)}(\xi)$ como polinomios en términos de $\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)$ y de $z(\xi)$, siempre que sea posible.

(b) Tabla con las expresiones de $u(\xi)$, $u^2(\xi)$, $u^3(\xi)$ en función de la variable $z(\xi)$.

Indicación: Compruébese que sólo la derivada $u''(\xi)$ se puede expresar como un polinomio en términos de $z(\xi) = \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)$.

SOLUCIÓN

(a)

Tabla 2.21. Expresiones de $u(\xi)$ y sus derivadas a partir de la ecuación Elíptica de Jacobi (ODE) $\equiv (G'(\xi))^2 = P G^4(\xi) + Q G^2(\xi) + R$.

$u(\xi)$	$\frac{a_1 G'(\xi)}{G(\xi)} + a_0$
$u(\xi)$	$a_1 z(\xi) + a_0$
$u'(\xi)$	$a_1 \left(-\frac{G'(\xi)^2}{G(\xi)^2} + 2 P G(\xi)^2 + Q \right)$
$u'(\xi)$	$a_1 (2 P G(\xi)^2 + Q - z(\xi)^2)$
$u''(\xi)$	$\frac{2 a_1 G'(\xi)^3}{G(\xi)^3} - \frac{2 a_1 Q G'(\xi)}{G(\xi)}$
$u''(\xi)$	$2 a_1 z(\xi)^3 - 2 a_1 Q z(\xi)$
$u^{(3)}(\xi)$	$-\frac{6 a_1 G'(\xi)^4}{G(\xi)^4} + 12 a_1 P G'(\xi)^2 + \frac{8 a_1 Q G'(\xi)^2}{G(\xi)^2} - 4 a_1 P Q G(\xi)^2 - 2 a_1 Q^2$
$u^{(3)}(\xi)$	$12 a_1 P G'(\xi)^2 - 4 a_1 P Q G(\xi)^2 - 2 a_1 Q^2 + 8 a_1 Q z(\xi)^2 - 6 a_1 z(\xi)^4$
$u^{(4)}(\xi)$	$\frac{24 a_1 G'(\xi)^5}{G(\xi)^5} + 48 a_1 P^2 G(\xi)^3 G'(\xi) - \frac{48 a_1 P G'(\xi)^3}{G(\xi)} +$ $48 a_1 P Q G(\xi) G'(\xi) + \frac{16 a_1 Q^2 G'(\xi)}{G(\xi)} - \frac{40 a_1 Q G'(\xi)^3}{G(\xi)^3}$
$u^{(4)}(\xi)$	$48 a_1 P^2 G(\xi)^3 G'(\xi) - \frac{48 a_1 P G'(\xi)^3}{G(\xi)} +$ $48 a_1 P Q G(\xi) G'(\xi) + 16 a_1 Q^2 z(\xi) - 40 a_1 Q z(\xi)^3 + 24 a_1 z(\xi)^5$

(b)

Tabla 2.22. Expresiones de $u(\xi)$ y sus potencias a partir de la ecuación Elíptica de Jacobi (ODE) $\equiv (G'(\xi))^2 = P G^4(\xi) + Q G^2(\xi) + R$.

$u(\xi)$	$\frac{a_1 G'(\xi)}{G(\xi)} + a_0$
$u(\xi)$	$a_1 z(\xi) + a_0$
$u(\xi)^2$	$\left(\frac{a_1 G'(\xi)}{G(\xi)} + a_0 \right)^2$
$u(\xi)^2$	$(a_1 z(\xi) + a_0)^2$
$u(\xi)^3$	$\left(\frac{a_1 G'(\xi)}{G(\xi)} + a_0 \right)^3$
$u(\xi)^3$	$(a_1 z(\xi) + a_0)^3$

■ **Problema 2.3.11. Método de Expansión ($\frac{G'}{G}$). Aplicación del Método (ODE Elíptica de Jacobi).**

Sea la ecuación diferencial de segundo grado no lineal (ODE)

$$(PDE - ODE) \equiv \frac{K^2}{12} u''(\xi) + (K - U) u(\xi) + \alpha U u^2(\xi) - \beta U u^3(\xi) = 0$$

(a) Determinése la solución para $m = 1$

$$u(\xi) = a_0 + \sum_{k=1}^m a_k \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)^k = a_0 + \sum_{k=1}^m a_k (z(\xi))^k \quad \bullet \quad z(\xi) = \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)$$

y las expresiones de $u^2(\xi)$, $u^3(\xi)$, $u'(\xi)$ y $u''(\xi)$ expresadas como polinomios en términos de $(z(\xi))^k = \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)^k$.

(a.1) Dedúzcase la ecuación (PDE - ODE) expresada como polinomios en términos de la expresión:

$$(z(\xi))^k = \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)^k \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

$$(PDE - ODE) \equiv \left\{ \sum_{k=0}^m \left[a_k \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)^k \right] \right\} = 0 \quad .$$

(a.2) Determinése el sistema algebraico de ecuaciones correspondientes agrupando los términos del mismo orden de $(z(\xi))^k = \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)^k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) del lado izquierdo de la ecuación y reduciendo los coeficientes a cero.

(b) Resuélvase el sistema algebraico de ecuaciones en las variables $\{a_0, a_1, K, U\}$.

(c) Escribáanse las soluciones $u_k(\xi)$ obtenidas del sistema algebraico.

(d) Compruébense las soluciones obtenidas $u_k(\xi)$ en la ecuación ODE.

(e) Créese una tabla con las soluciones y los siguientes datos:

$u_k(\xi)$	$a_0 + a_1 z(\xi)$	$\left\{ z(\xi) \rightarrow \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right) \right\}$	K	U	$\left\{ z(\xi) \rightarrow \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right) \right\}$
------------	--------------------	---	-----	-----	---

$$\bullet \quad u(\xi) = a_0 + a_1 \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right) \quad \bullet \quad u(\xi) = a_0 + a_1 z(\xi)$$

(f) Indíquense los valores de los parámetros de la expresión de $\xi = \sqrt{k} (x - \omega t)$ en función de $\alpha, \beta, \delta, P, Q, R$.

SOLUCIÓN

(a)

$u(\xi)$	$\frac{a_1 G'(\xi)}{G(\xi)} + a_0$
$u(\xi)$	$a_1 z(\xi) + a_0$
$u(\xi)^2$	$\left(\frac{a_1 G'(\xi)}{G(\xi)} + a_0\right)^2$
$u(\xi)^2$	$(a_1 z(\xi) + a_0)^2$
$u(\xi)^3$	$\left(\frac{a_1 G'(\xi)}{G(\xi)} + a_0\right)^3$
$u(\xi)^3$	$(a_1 z(\xi) + a_0)^3$

$u(\xi)$	$\frac{a_1 G'(\xi)}{G(\xi)} + a_0$
$u(\xi)$	$a_1 z(\xi) + a_0$
$u'(\xi)$	$a_1 \left(-\frac{G'(\xi)^2}{G(\xi)^2} + 2 P G(\xi)^2 + Q\right)$
$u'(\xi)$	$a_1 (2 P G(\xi)^2 + Q - z(\xi)^2)$
$u''(\xi)$	$\frac{2 a_1 G'(\xi)^3}{G(\xi)^3} - \frac{2 a_1 Q G'(\xi)}{G(\xi)}$
$u''(\xi)$	$2 a_1 z(\xi)^3 - 2 a_1 Q z(\xi)$
$u^{(3)}(\xi)$	$-\frac{6 a_1 G'(\xi)^4}{G(\xi)^4} + 12 a_1 P G'(\xi)^2 + \frac{8 a_1 Q G'(\xi)^2}{G(\xi)^2} - 4 a_1 P Q G(\xi)^2 - 2 a_1 Q^2$
$u^{(3)}(\xi)$	$12 a_1 P G'(\xi)^2 - 4 a_1 P Q G(\xi)^2 - 2 a_1 Q^2 + 8 a_1 Q z(\xi)^2 - 6 a_1 z(\xi)^4$
$u^{(4)}(\xi)$	$\frac{24 a_1 G'(\xi)^5}{G(\xi)^5} + 48 a_1 P^2 G(\xi)^3 G'(\xi) - \frac{48 a_1 P G'(\xi)^3}{G(\xi)} +$ $48 a_1 P Q G(\xi) G'(\xi) + \frac{16 a_1 Q^2 G'(\xi)}{G(\xi)} - \frac{40 a_1 Q G'(\xi)^3}{G(\xi)^3}$
$u^{(4)}(\xi)$	$48 a_1 P^2 G(\xi)^3 G'(\xi) - \frac{48 a_1 P G'(\xi)^3}{G(\xi)} +$ $48 a_1 P Q G(\xi) G'(\xi) + 16 a_1 Q^2 z(\xi) - 40 a_1 Q z(\xi)^3 + 24 a_1 z(\xi)^5$

{(a.1) Ecuación (ODE).}

$$\left\{ \left(\text{ODE} - \text{PDE} \equiv \frac{1}{12} K^2 u''(\xi) + (K - U) u(\xi) + \alpha U u(\xi)^2 - \beta U u(\xi)^2 \right) = 0 \right\}$$

$$\left\{ \text{ODE} (z(\xi)): , z(\xi) \left(-\frac{1}{6} a_1 K^2 Q + a_1 K + 2 \alpha a_0 a_1 U - 3 a_0^2 a_1 \beta U - a_1 U \right) + \right.$$

$$\left. z(\xi)^3 \left(\frac{a_1 K^2}{6} - a_1^3 \beta U \right) + a_0 K + \alpha a_0^2 U + a_0^3 \beta (-U) + z(\xi)^2 (\alpha a_1^2 U - 3 a_0 a_1^2 \beta U) - a_0 U \right\}$$

{(a.2) Sistema algebraico de ecuaciones.}

$(z(\xi))^0 = \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^0:$	$a_0 (K - U) + \alpha a_0^2 U + a_0^3 \beta (-U)$	$= 0$
$(z(\xi))^1 = \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^1:$	$a_1 \left(-\frac{K^2 Q}{6} + K - U\right) + 2 \alpha a_1 a_0 U - 3 a_1 a_0^2 \beta U$	$= 0$
$(z(\xi))^2 = \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^2:$	$\alpha a_1^2 U - 3 a_0 a_1^2 \beta U$	$= 0$
$(z(\xi))^3 = \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^3:$	$\frac{a_1 K^2}{6} - a_1^3 \beta U$	$= 0$

(b)

i	a_0	a_1	K	U
1	$\frac{\alpha}{3\beta}$	$-\frac{\alpha}{3\beta\sqrt{Q}}$	$-\frac{6\alpha^2}{Q(2\alpha^2-9\beta)}$	$\frac{54\alpha^2\beta}{Q(2\alpha^2-9\beta)^2}$
2	$\frac{\alpha}{3\beta}$	$\frac{\alpha}{3\beta\sqrt{Q}}$	$-\frac{6\alpha^2}{Q(2\alpha^2-9\beta)}$	$\frac{54\alpha^2\beta}{Q(2\alpha^2-9\beta)^2}$

(c)

$$\left(u(\xi) = \frac{a_1 G'(\xi)}{G(\xi)} + a_0 \right)$$

$$\left(\begin{array}{l} u_1(\xi) = \frac{\alpha}{3\beta} - \frac{\alpha G'(\xi)}{3\beta\sqrt{Q}G(\xi)} \quad K \rightarrow -\frac{6\alpha^2}{Q(2\alpha^2-9\beta)} \quad U \rightarrow \frac{54\alpha^2\beta}{Q(2\alpha^2-9\beta)^2} \\ u_2(\xi) = \frac{\alpha}{3\beta} + \frac{\alpha G'(\xi)}{3\beta\sqrt{Q}G(\xi)} \quad K \rightarrow -\frac{6\alpha^2}{Q(2\alpha^2-9\beta)} \quad U \rightarrow \frac{54\alpha^2\beta}{Q(2\alpha^2-9\beta)^2} \end{array} \right)$$

(d)

$$\left(\begin{array}{l} u_1(\xi) \text{ ODE} = 0 \\ u_2(\xi) \text{ ODE} = 0 \end{array} \right)$$

(e)

Tabla 2.23. Coeficientes $\{a_0, a_1, K, U\}$ de las soluciones $u(\xi) = a_0 + a_1 \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)$.

$u_k(\xi)$	$a_0 + a_1 z(\xi)$ $\left\{z(\xi) \rightarrow \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)\right\}$	K	U
$u_1(\xi)$	$\frac{\alpha}{3\beta} - \frac{\alpha G'(\xi)}{3\beta\sqrt{Q}G(\xi)}$	$-\frac{6\alpha^2}{Q(2\alpha^2-9\beta)}$	$\frac{54\alpha^2\beta}{Q(2\alpha^2-9\beta)^2}$
$u_2(\xi)$	$\frac{\alpha}{3\beta} + \frac{\alpha G'(\xi)}{3\beta\sqrt{Q}G(\xi)}$	$-\frac{6\alpha^2}{Q(2\alpha^2-9\beta)}$	$\frac{54\alpha^2\beta}{Q(2\alpha^2-9\beta)^2}$

(f)

{(f) Expresión de $\xi = \sqrt{k}(x - \omega t)$ }

$$\left(\begin{array}{l} k = \frac{K}{\delta^2} = -\frac{6\alpha^2}{\delta^2 Q(2\alpha^2-9\beta)} \\ \omega = \delta \sqrt{\frac{U}{K}} = 3\delta \sqrt{-\frac{\beta}{2\alpha^2-9\beta}} \\ \xi = \sqrt{k}(x - \omega t) = \sqrt{6} x \sqrt{-\frac{\alpha^2}{\delta^2 Q(2\alpha^2-9\beta)}} - 3\sqrt{6} t \sqrt{\frac{\alpha^2\beta}{Q(2\alpha^2-9\beta)^2}} \end{array} \right)$$

i	a_0	a_1	K	U
1	$\frac{\alpha}{3\beta}$	$-\frac{\alpha}{3\beta\sqrt{Q}}$	$-\frac{6\alpha^2}{Q(2\alpha^2-9\beta)}$	$\frac{54\alpha^2\beta}{Q(2\alpha^2-9\beta)^2}$
2	$\frac{\alpha}{3\beta}$	$\frac{\alpha}{3\beta\sqrt{Q}}$	$-\frac{6\alpha^2}{Q(2\alpha^2-9\beta)}$	$\frac{54\alpha^2\beta}{Q(2\alpha^2-9\beta)^2}$

■ **Problema 2.3.12. Método de Expansión $\left(\frac{G'}{G}\right)$. Expresiones de las Soluciones.**

Sea la expresión que representa la solución de Ecuación de Propagación de Ondas en Línea de Transmisión Eléctrica de Paso Bajo no Lineal (LPEL):

$$(PDE - ODE) \equiv \frac{K^2}{12} u''(\xi) + (K - U) u(\xi) + \alpha U u^2(\xi) - \beta U u^3(\xi) = 0$$

$$u(\xi) = a_0 + \sum_{k=1}^m a_k \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^k = a_0 + a_1 \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)$$

donde los coeficientes a_0, a_1 son los coeficientes reales calculados y expresados en la Tabla 2.22, y donde la relación $\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)$ se deduce de los valores del problema 2.3.12 que viene determinada por las soluciones generales de la ODE Elíptica de Jacobi:

$$(ODE - Elíptica Jacobi) \equiv (G'(\xi))^2 = P G^4(\xi) + Q G^2(\xi) + R$$

Calcúlense las siguientes tablas de soluciones:

- (a) Tabla con las soluciones $G_i(\xi)$ de la ODE Elíptica de Jacobi.
- (b) Tabla con los coeficientes:

i	a_0	a_1	K	U
-----	-------	-------	-----	-----

- (c) Expresión de las soluciones $u_{i,j}(\xi)$ ($i = 1, 2; j = 1, 2, 3 \dots$) considerando dos casos:

$$\text{Caso I (} i = 1 \text{)} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline i & a_0 & a_1 \\ \hline 1 & \frac{\alpha}{3\beta} & -\frac{\alpha}{3\beta\sqrt{Q}} \\ \hline \end{array} \left\{ u_{1,1}(\xi), \dots, u_{1,n}(\xi) \right.$$

$$\text{Caso I (} i = 2 \text{)} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline i & a_0 & a_1 \\ \hline 2 & \frac{\alpha}{3\beta} & \frac{\alpha}{3\beta\sqrt{Q}} \\ \hline \end{array} \left\{ u_{2,1}(\xi), \dots, u_{2,n}(\xi) \right.$$

Tabla con las soluciones $u_{i,j}$ y los parámetros K, U .

- (d) Tabla con las soluciones $u_{i,j}$ cuando ($k \rightarrow 1$) y ($k \rightarrow 0$).

- $\begin{cases} R, P, Q & \text{constantes arbitrarias} \\ C_1, C_2 \end{cases}$

- $\xi = \sqrt{k} (x - \omega t) = \sqrt{\frac{K}{\delta^2}} x - \sqrt{\frac{K}{\delta^2}} \delta \sqrt{\frac{U}{K}} t = \frac{1}{\delta} \sqrt{K} x - \sqrt{U} t.$

SOLUCIÓN

(a) [FARO24].

Tabla 2.24. Soluciones $G_j(\xi)$ de la ODE Elíptica de Jacobi (ODE – Elíptica Jacobi) $\equiv (G'(\xi))^2 = P G^4(\xi) + Q G^2(\xi) + R$.

i	j	$G_j(\xi)$	P	Q	R
1	1.1	$\text{sn}(\xi k^2)$	k^2	$-k^2 - 1$	1
2	1.2	$\text{cd}(\xi k^2)$	k^2	$-k^2 - 1$	1
3	2	$\text{cn}(\xi k^2)$	$-k^2$	$2k^2 - 1$	$1 - k^2$
4	3	$\text{dn}(\xi k^2)$	-1	$2 - k^2$	$k^2 - 1$
5	4.1	$\text{ns}(\xi k^2)$	1	$-k^2 - 1$	k^2
6	4.2	$\text{dc}(\xi k^2)$	1	$-k^2 - 1$	k^2
7	5	$\text{nc}(\xi k^2)$	$1 - k^2$	$2k^2 - 1$	$-k^2$
8	6	$\text{nd}(\xi k^2)$	$k^2 - 1$	$2 - k^2$	-1
9	7	$\text{sc}(\xi k^2)$	$1 - k^2$	$2 - k^2$	1
10	8	$\text{sd}(\xi k^2)$	$-k^2(1 - k^2)$	$2k^2 - 1$	1
11	9	$\text{cs}(\xi k^2)$	1	$2 - k^2$	$1 - k^2$
12	10	$-\text{ds}(\xi k^2)$	1	$2k^2 - 1$	$k^2(k^2 - 1)$
13	11.1	$k \text{cn}(\xi k^2) + \text{dn}(\xi k^2)$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}(k^2 + 1)$	$-\frac{1}{4}(1 - k^2)^2$
14	11.2	$k \text{cn}(\xi k^2) - \text{dn}(\xi k^2)$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}(k^2 + 1)$	$-\frac{1}{4}(1 - k^2)^2$
15	12.1	$\text{cs}(\xi k^2) + \text{ns}(\xi k^2)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}(1 - 2k^2)$	$\frac{1}{4}$
16	12.2	$\text{ns}(\xi k^2) - \text{cs}(\xi k^2)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}(1 - 2k^2)$	$\frac{1}{4}$
17	13.1	$\text{nc}(\xi k^2) + \text{sc}(\xi k^2)$	$\frac{1}{4}(1 - k^2)$	$\frac{1}{2}(k^2 + 1)$	$\frac{1}{4}(1 - k^2)$
18	13.2	$\text{nc}(\xi k^2) - \text{sc}(\xi k^2)$	$\frac{1}{4}(1 - k^2)$	$\frac{1}{2}(k^2 + 1)$	$\frac{1}{4}(1 - k^2)$
19	14.1	$\text{ds}(\xi k^2) + \text{ns}(\xi k^2)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}(k^2 - 2)$	$\frac{k^4}{4}$
20	14.2	$\text{ns}(\xi k^2) - \text{ds}(\xi k^2)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}(k^2 - 2)$	$\frac{k^4}{4}$
21	15.1	$\text{sn}(\xi k^2) + i \text{cn}(\xi k^2)$	$\frac{k^2}{4}$	$\frac{1}{2}(k^2 - 2)$	$\frac{k^2}{4}$
22	15.2	$\text{sn}(\xi k^2) - i \text{cn}(\xi k^2)$	$\frac{k^2}{4}$	$\frac{1}{2}(k^2 - 2)$	$\frac{k^2}{4}$
23	15.3	$\text{cd}(\xi k^2) + i \sqrt{1 - k^2} \text{sd}(\xi k^2)$	$\frac{k^2}{4}$	$\frac{1}{2}(k^2 - 2)$	$\frac{k^2}{4}$
24	15.4	$\text{cd}(\xi k^2) - i \sqrt{1 - k^2} \text{sd}(\xi k^2)$	$\frac{k^2}{4}$	$\frac{1}{2}(k^2 - 2)$	$\frac{k^2}{4}$
25	16.1	$k \text{sn}(\xi k^2) + i \text{dn}(\xi k^2)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}(1 - 2k^2)$	$\frac{1}{4}$
26	16.2	$k \text{sn}(\xi k^2) - i \text{dn}(\xi k^2)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}(1 - 2k^2)$	$\frac{1}{4}$
27	16.3	$\frac{\text{sn}(\xi k^2)}{\text{cn}(\xi k^2) + 1}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}(1 - 2k^2)$	$\frac{1}{4}$
28	16.4	$\frac{\text{sn}(\xi k^2)}{1 - \text{cn}(\xi k^2)}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}(1 - 2k^2)$	$\frac{1}{4}$

29	17.1	$\frac{\operatorname{sn}(\xi k^2)}{\operatorname{dn}(\xi k^2)+1}$	$\frac{k^2}{4}$	$\frac{1}{2}(k^2-2)$	$\frac{1}{4}$
30	17.2	$\frac{\operatorname{sn}(\xi k^2)}{1-\operatorname{dn}(\xi k^2)}$	$\frac{k^2}{4}$	$\frac{1}{2}(k^2-2)$	$\frac{1}{4}$
31	18.1	$\frac{\operatorname{dn}(\xi k^2)}{k \operatorname{sn}(\xi k^2)+1}$	$\frac{1}{4}(k^2-1)$	$\frac{1}{2}(k^2+1)$	$\frac{1}{4}(k^2-1)$
32	18.2	$\frac{\operatorname{dn}(\xi k^2)}{1-k \operatorname{sn}(\xi k^2)}$	$\frac{1}{4}(k^2-1)$	$\frac{1}{2}(k^2+1)$	$\frac{1}{4}(k^2-1)$
33	19.1	$\frac{\operatorname{cn}(\xi k^2)}{\operatorname{sn}(\xi k^2)+1}$	$\frac{1}{4}(1-k^2)$	$\frac{1}{2}(k^2+1)$	$\frac{1}{4}(1-k^2)$
34	19.2	$\frac{\operatorname{cn}(\xi k^2)}{1-\operatorname{sn}(\xi k^2)}$	$\frac{1}{4}(1-k^2)$	$\frac{1}{2}(k^2+1)$	$\frac{1}{4}(1-k^2)$
35	20.1	$\frac{\operatorname{sn}(\xi k^2)}{\operatorname{cn}(\xi k^2)+\operatorname{dn}(\xi k^2)}$	$\frac{1}{4}(1-k^2)^2$	$\frac{1}{2}(k^2+1)$	$\frac{1}{4}$
36	20.2	$\frac{\operatorname{sn}(\xi k^2)}{\operatorname{dn}(\xi k^2)-\operatorname{cn}(\xi k^2)}$	$\frac{1}{4}(1-k^2)^2$	$\frac{1}{2}(k^2+1)$	$\frac{1}{4}$
37	21.1	$\frac{\operatorname{cn}(\xi k^2)}{\operatorname{dn}(\xi k^2)+\sqrt{1-k^2}}$	$\frac{k^4}{4}$	$\frac{1}{2}(k^2-2)$	$\frac{1}{4}$
38	21.2	$\frac{\operatorname{cn}(\xi k^2)}{\sqrt{1-k^2}-\operatorname{dn}(\xi k^2)}$	$\frac{k^4}{4}$	$\frac{1}{2}(k^2-2)$	$\frac{1}{4}$

(b)

Tabla 2.25. Coeficientes de las soluciones de la ODE Elíptica de Jacobi (ODE) $\equiv (G'(\xi))^2 = P G^4(\xi) + Q G^2(\xi) + R$.

i	a_0	a_1	K	U
1	$\frac{\alpha}{3\beta}$	$-\frac{\alpha}{3\beta\sqrt{Q}}$	$\frac{54\alpha^2\beta}{Q(2\alpha^2-9\beta)^2}$	$-\frac{6\alpha^2}{Q(2\alpha^2-9\beta)}$
2	$\frac{\alpha}{3\beta}$	$\frac{\alpha}{3\beta\sqrt{Q}}$	$\frac{54\alpha^2\beta}{Q(2\alpha^2-9\beta)^2}$	$-\frac{6\alpha^2}{Q(2\alpha^2-9\beta)}$

(c)

Tabla 2.26. Soluciones de $u_{i,j}(\xi)$ y los parámetros K , U de la ODE Elíptica de Jacobi (ODE) $\equiv (G'(\xi))^2 = P G^4(\xi) + Q G^2(\xi) + R$.

nº	$u_{i,j}(\xi)$	K	U
Caso I.			
1	$u_{1,1.1}(\xi) = \frac{\alpha}{3\beta} - \frac{\alpha \operatorname{cn}(\xi k^2) \operatorname{dn}(\xi k^2)}{3\beta \sqrt{-k^2-1} \operatorname{sn}(\xi k^2)}$	$-\frac{6\alpha^2}{Q(2\alpha^2-9\beta)}$	$\frac{54\alpha^2\beta}{Q(2\alpha^2-9\beta)^2}$
2	$u_{1,1.2}(\xi) = \frac{\alpha}{3\beta} - \frac{\alpha(k^2-1) \operatorname{sn}(\xi k^2)}{3\beta \sqrt{-k^2-1} \operatorname{cn}(\xi k^2) \operatorname{dn}(\xi k^2)}$	$-\frac{6\alpha^2}{Q(2\alpha^2-9\beta)}$	$\frac{54\alpha^2\beta}{Q(2\alpha^2-9\beta)^2}$
3	$u_{1,2}(\xi) = \frac{\alpha}{3\beta} + \frac{\alpha \operatorname{dn}(\xi k^2) \operatorname{sn}(\xi k^2)}{3\beta \sqrt{2k^2-1} \operatorname{cn}(\xi k^2)}$	$-\frac{6\alpha^2}{Q(2\alpha^2-9\beta)}$	$\frac{54\alpha^2\beta}{Q(2\alpha^2-9\beta)^2}$
4	$u_{1,3}(\xi) = \frac{\alpha}{3\beta} + \frac{\alpha k^2 \operatorname{cn}(\xi k^2) \operatorname{sn}(\xi k^2)}{3\beta \sqrt{2-k^2} \operatorname{dn}(\xi k^2)}$	$-\frac{6\alpha^2}{Q(2\alpha^2-9\beta)}$	$\frac{54\alpha^2\beta}{Q(2\alpha^2-9\beta)^2}$
5	$u_{1,4.1}(\xi) = \frac{\alpha}{3\beta} + \frac{\alpha \operatorname{cn}(\xi k^2) \operatorname{dn}(\xi k^2)}{3\beta \sqrt{-k^2-1} \operatorname{sn}(\xi k^2)}$	$-\frac{6\alpha^2}{Q(2\alpha^2-9\beta)}$	$\frac{54\alpha^2\beta}{Q(2\alpha^2-9\beta)^2}$
6	$u_{1,4.2}(\xi) = \frac{\alpha}{3\beta} - \frac{\alpha(1-k^2) \operatorname{sn}(\xi k^2)}{3\beta \sqrt{-k^2-1} \operatorname{cn}(\xi k^2) \operatorname{dn}(\xi k^2)}$	$-\frac{6\alpha^2}{Q(2\alpha^2-9\beta)}$	$\frac{54\alpha^2\beta}{Q(2\alpha^2-9\beta)^2}$
7	$u_{1,5}(\xi) = \frac{\alpha}{3\beta} - \frac{\alpha \operatorname{dn}(\xi k^2) \operatorname{sn}(\xi k^2)}{3\beta \sqrt{2k^2-1} \operatorname{cn}(\xi k^2)}$	$-\frac{6\alpha^2}{Q(2\alpha^2-9\beta)}$	$\frac{54\alpha^2\beta}{Q(2\alpha^2-9\beta)^2}$
8	$u_{1,6}(\xi) = \frac{\alpha}{3\beta} - \frac{\alpha k^2 \operatorname{cn}(\xi k^2) \operatorname{sn}(\xi k^2)}{3\beta \sqrt{2-k^2} \operatorname{dn}(\xi k^2)}$	$-\frac{6\alpha^2}{Q(2\alpha^2-9\beta)}$	$\frac{54\alpha^2\beta}{Q(2\alpha^2-9\beta)^2}$

12	$u_{2,10}(\xi) = \frac{\alpha}{3\beta} - \frac{\alpha \operatorname{cn}(\xi k^2)}{3\beta \sqrt{2k^2-1} \operatorname{dn}(\xi k^2) \operatorname{sn}(\xi k^2)}$	$-\frac{6\alpha^2}{Q(2\alpha^2-9\beta)} \frac{54\alpha^2\beta}{Q(2\alpha^2-9\beta)^2}$
13	$u_{2,11.1}(\xi) = \frac{\alpha}{3\beta} + \frac{\sqrt{2}\alpha(k^2(-\operatorname{cn}(\xi k^2))\operatorname{sn}(\xi k^2)-k\operatorname{dn}(\xi k^2)\operatorname{sn}(\xi k^2))}{3\beta\sqrt{k^2+1}(k\operatorname{cn}(\xi k^2)+\operatorname{dn}(\xi k^2))}$	$-\frac{6\alpha^2}{Q(2\alpha^2-9\beta)} \frac{54\alpha^2\beta}{Q(2\alpha^2-9\beta)^2}$
14	$u_{2,11.2}(\xi) = \frac{\alpha}{3\beta} + \frac{\sqrt{2}\alpha(k^2\operatorname{cn}(\xi k^2)\operatorname{sn}(\xi k^2)-k\operatorname{dn}(\xi k^2)\operatorname{sn}(\xi k^2))}{3\beta\sqrt{k^2+1}(k\operatorname{cn}(\xi k^2)-\operatorname{dn}(\xi k^2))}$	$-\frac{6\alpha^2}{Q(2\alpha^2-9\beta)} \frac{54\alpha^2\beta}{Q(2\alpha^2-9\beta)^2}$
15	$u_{2,12.1}(\xi) = \frac{\alpha}{3\beta} + \frac{\sqrt{2}\alpha\left(-\frac{\operatorname{cn}(\xi k^2)\operatorname{dn}(\xi k^2)}{\operatorname{sn}(\xi k^2)^2} - \frac{\operatorname{dn}(\xi k^2)}{\operatorname{sn}(\xi k^2)^2}\right)}{3\beta\sqrt{1-2k^2}\left(\frac{\operatorname{cn}(\xi k^2)}{\operatorname{sn}(\xi k^2)} + \frac{1}{\operatorname{sn}(\xi k^2)}\right)}$	$-\frac{6\alpha^2}{Q(2\alpha^2-9\beta)} \frac{54\alpha^2\beta}{Q(2\alpha^2-9\beta)^2}$
16	$u_{2,12.2}(\xi) = \frac{\alpha}{3\beta} + \frac{\sqrt{2}\alpha\left(\frac{\operatorname{dn}(\xi k^2)}{\operatorname{sn}(\xi k^2)^2} - \frac{\operatorname{cn}(\xi k^2)\operatorname{dn}(\xi k^2)}{\operatorname{sn}(\xi k^2)^2}\right)}{3\beta\sqrt{1-2k^2}\left(\frac{1}{\operatorname{sn}(\xi k^2)} - \frac{\operatorname{cn}(\xi k^2)}{\operatorname{sn}(\xi k^2)}\right)}$	$-\frac{6\alpha^2}{Q(2\alpha^2-9\beta)} \frac{54\alpha^2\beta}{Q(2\alpha^2-9\beta)^2}$
17	$u_{2,13.1}(\xi) = \frac{\alpha}{3\beta} + \frac{\sqrt{2}\alpha\left(\frac{\operatorname{dn}(\xi k^2)\operatorname{sn}(\xi k^2)}{\operatorname{cn}(\xi k^2)^2} + \frac{\operatorname{dn}(\xi k^2)}{\operatorname{cn}(\xi k^2)^2}\right)}{3\beta\sqrt{k^2+1}\left(\frac{\operatorname{sn}(\xi k^2)}{\operatorname{cn}(\xi k^2)} + \frac{1}{\operatorname{cn}(\xi k^2)}\right)}$	$-\frac{6\alpha^2}{Q(2\alpha^2-9\beta)} \frac{54\alpha^2\beta}{Q(2\alpha^2-9\beta)^2}$
18	$u_{2,13.2}(\xi) = \frac{\alpha}{3\beta} + \frac{\sqrt{2}\alpha\left(\frac{\operatorname{dn}(\xi k^2)\operatorname{sn}(\xi k^2)}{\operatorname{cn}(\xi k^2)^2} - \frac{\operatorname{dn}(\xi k^2)}{\operatorname{cn}(\xi k^2)^2}\right)}{3\beta\sqrt{k^2+1}\left(\frac{1}{\operatorname{cn}(\xi k^2)} - \frac{\operatorname{sn}(\xi k^2)}{\operatorname{cn}(\xi k^2)}\right)}$	$-\frac{6\alpha^2}{Q(2\alpha^2-9\beta)} \frac{54\alpha^2\beta}{Q(2\alpha^2-9\beta)^2}$
19	$u_{2,14.1}(\xi) = \frac{\alpha}{3\beta} + \frac{\sqrt{2}\alpha\left(-\frac{\operatorname{cn}(\xi k^2)\operatorname{dn}(\xi k^2)}{\operatorname{sn}(\xi k^2)^2} - \frac{\operatorname{cn}(\xi k^2)}{\operatorname{sn}(\xi k^2)^2}\right)}{3\beta\sqrt{k^2-2}\left(\frac{\operatorname{dn}(\xi k^2)}{\operatorname{sn}(\xi k^2)} + \frac{1}{\operatorname{sn}(\xi k^2)}\right)}$	$-\frac{6\alpha^2}{Q(2\alpha^2-9\beta)} \frac{54\alpha^2\beta}{Q(2\alpha^2-9\beta)^2}$
20	$u_{2,14.2}(\xi) = \frac{\alpha}{3\beta} + \frac{\sqrt{2}\alpha\left(\frac{\operatorname{cn}(\xi k^2)}{\operatorname{sn}(\xi k^2)^2} - \frac{\operatorname{cn}(\xi k^2)\operatorname{dn}(\xi k^2)}{\operatorname{sn}(\xi k^2)^2}\right)}{3\beta\sqrt{k^2-2}\left(\frac{1}{\operatorname{sn}(\xi k^2)} - \frac{\operatorname{dn}(\xi k^2)}{\operatorname{sn}(\xi k^2)}\right)}$	$-\frac{6\alpha^2}{Q(2\alpha^2-9\beta)} \frac{54\alpha^2\beta}{Q(2\alpha^2-9\beta)^2}$
21	$u_{2,15.1}(\xi) = \frac{\alpha}{3\beta} + \frac{\sqrt{2}\alpha(\operatorname{cn}(\xi k^2)\operatorname{dn}(\xi k^2)-i\operatorname{dn}(\xi k^2)\operatorname{sn}(\xi k^2))}{3\beta\sqrt{k^2-2}(\operatorname{sn}(\xi k^2)+i\operatorname{cn}(\xi k^2))}$	$-\frac{6\alpha^2}{Q(2\alpha^2-9\beta)} \frac{54\alpha^2\beta}{Q(2\alpha^2-9\beta)^2}$
22	$u_{2,15.2}(\xi) = \frac{\alpha}{3\beta} + \frac{\sqrt{2}\alpha(\operatorname{cn}(\xi k^2)\operatorname{dn}(\xi k^2)+i\operatorname{dn}(\xi k^2)\operatorname{sn}(\xi k^2))}{3\beta\sqrt{k^2-2}(\operatorname{sn}(\xi k^2)-i\operatorname{cn}(\xi k^2))}$	$-\frac{6\alpha^2}{Q(2\alpha^2-9\beta)} \frac{54\alpha^2\beta}{Q(2\alpha^2-9\beta)^2}$
23	$u_{2,15.3}(\xi) = \frac{\alpha}{3\beta} + \frac{\sqrt{2}\alpha\left(\frac{(k^2-1)\operatorname{sn}(\xi k^2)}{\operatorname{dn}(\xi k^2)^2} + \frac{i\sqrt{1-k}\sqrt{k+1}\operatorname{cn}(\xi k^2)}{\operatorname{dn}(\xi k^2)^2}\right)}{3\beta\sqrt{k^2-2}\left(\frac{\operatorname{cn}(\xi k^2)}{\operatorname{dn}(\xi k^2)} + \frac{i\sqrt{1-k}\sqrt{k+1}\operatorname{sn}(\xi k^2)}{\operatorname{dn}(\xi k^2)}\right)}$	$-\frac{6\alpha^2}{Q(2\alpha^2-9\beta)} \frac{54\alpha^2\beta}{Q(2\alpha^2-9\beta)^2}$
24	$u_{2,15.4}(\xi) = \frac{\alpha}{3\beta} + \frac{\sqrt{2}\alpha\left(\frac{(k^2-1)\operatorname{sn}(\xi k^2)}{\operatorname{dn}(\xi k^2)^2} - \frac{i\sqrt{1-k}\sqrt{k+1}\operatorname{cn}(\xi k^2)}{\operatorname{dn}(\xi k^2)^2}\right)}{3\beta\sqrt{k^2-2}\left(\frac{\operatorname{cn}(\xi k^2)}{\operatorname{dn}(\xi k^2)} - \frac{i\sqrt{1-k}\sqrt{k+1}\operatorname{sn}(\xi k^2)}{\operatorname{dn}(\xi k^2)}\right)}$	$-\frac{6\alpha^2}{Q(2\alpha^2-9\beta)} \frac{54\alpha^2\beta}{Q(2\alpha^2-9\beta)^2}$
25	$u_{2,16.1}(\xi) = \frac{\alpha}{3\beta} + \frac{\sqrt{2}\alpha(k\operatorname{cn}(\xi k^2)\operatorname{dn}(\xi k^2)-i k^2\operatorname{cn}(\xi k^2)\operatorname{sn}(\xi k^2))}{3\beta\sqrt{1-2k^2}(k\operatorname{sn}(\xi k^2)+i\operatorname{dn}(\xi k^2))}$	$-\frac{6\alpha^2}{Q(2\alpha^2-9\beta)} \frac{54\alpha^2\beta}{Q(2\alpha^2-9\beta)^2}$
26	$u_{2,16.2}(\xi) = \frac{\alpha}{3\beta} + \frac{\sqrt{2}\alpha(k\operatorname{cn}(\xi k^2)\operatorname{dn}(\xi k^2)+i k^2\operatorname{cn}(\xi k^2)\operatorname{sn}(\xi k^2))}{3\beta\sqrt{1-2k^2}(k\operatorname{sn}(\xi k^2)-i\operatorname{dn}(\xi k^2))}$	$-\frac{6\alpha^2}{Q(2\alpha^2-9\beta)} \frac{54\alpha^2\beta}{Q(2\alpha^2-9\beta)^2}$
27	$u_{2,16.3}(\xi) = \frac{\alpha}{3\beta} + \frac{\sqrt{2}\alpha(\operatorname{cn}(\xi k^2)+1)\left(\frac{\operatorname{dn}(\xi k^2)\operatorname{sn}(\xi k^2)^2}{(\operatorname{cn}(\xi k^2)+1)^2} + \frac{\operatorname{cn}(\xi k^2)\operatorname{dn}(\xi k^2)}{\operatorname{cn}(\xi k^2)+1}\right)}{3\beta\sqrt{1-2k^2}\operatorname{sn}(\xi k^2)}$	$-\frac{6\alpha^2}{Q(2\alpha^2-9\beta)} \frac{54\alpha^2\beta}{Q(2\alpha^2-9\beta)^2}$
28	$u_{2,16.4}(\xi) = \frac{\alpha}{3\beta} + \frac{\sqrt{2}\alpha(1-\operatorname{cn}(\xi k^2))\left(\frac{\operatorname{cn}(\xi k^2)\operatorname{dn}(\xi k^2)}{1-\operatorname{cn}(\xi k^2)} - \frac{\operatorname{dn}(\xi k^2)\operatorname{sn}(\xi k^2)^2}{(1-\operatorname{cn}(\xi k^2))^2}\right)}{3\beta\sqrt{1-2k^2}\operatorname{sn}(\xi k^2)}$	$-\frac{6\alpha^2}{Q(2\alpha^2-9\beta)} \frac{54\alpha^2\beta}{Q(2\alpha^2-9\beta)^2}$
29	$u_{2,17.1}(\xi) = \frac{\alpha}{3\beta} + \frac{\sqrt{2}\alpha(\operatorname{dn}(\xi k^2)+1)\left(\frac{k^2\operatorname{cn}(\xi k^2)\operatorname{sn}(\xi k^2)^2}{(\operatorname{dn}(\xi k^2)+1)^2} + \frac{\operatorname{cn}(\xi k^2)\operatorname{dn}(\xi k^2)}{\operatorname{dn}(\xi k^2)+1}\right)}{3\beta\sqrt{k^2-2}\operatorname{sn}(\xi k^2)}$	$-\frac{6\alpha^2}{Q(2\alpha^2-9\beta)} \frac{54\alpha^2\beta}{Q(2\alpha^2-9\beta)^2}$
30	$u_{2,17.2}(\xi) = \frac{\alpha}{3\beta} + \frac{\sqrt{2}\alpha(1-\operatorname{dn}(\xi k^2))\left(\frac{\operatorname{cn}(\xi k^2)\operatorname{dn}(\xi k^2)}{1-\operatorname{dn}(\xi k^2)} - \frac{k^2\operatorname{cn}(\xi k^2)\operatorname{sn}(\xi k^2)^2}{(1-\operatorname{dn}(\xi k^2))^2}\right)}{3\beta\sqrt{k^2-2}\operatorname{sn}(\xi k^2)}$	$-\frac{6\alpha^2}{Q(2\alpha^2-9\beta)} \frac{54\alpha^2\beta}{Q(2\alpha^2-9\beta)^2}$
31	$u_{2,18.1}(\xi) = \frac{\alpha}{3\beta} + \frac{\sqrt{2}\alpha(k\operatorname{sn}(\xi k^2)+1)\left(\frac{k\operatorname{cn}(\xi k^2)\operatorname{dn}(\xi k^2)^2}{(k\operatorname{sn}(\xi k^2)+1)^2} - \frac{k^2\operatorname{cn}(\xi k^2)\operatorname{sn}(\xi k^2)}{k\operatorname{sn}(\xi k^2)+1}\right)}{3\beta\sqrt{k^2+1}\operatorname{dn}(\xi k^2)}$	$-\frac{6\alpha^2}{Q(2\alpha^2-9\beta)} \frac{54\alpha^2\beta}{Q(2\alpha^2-9\beta)^2}$

32	$u_{2,18.2}(\xi) = \frac{\alpha}{3\beta} + \frac{\sqrt{2} \alpha (1-k \operatorname{sn}(\xi k^2)) \left(\frac{k \operatorname{cn}(\xi k^2) \operatorname{dn}(\xi k^2)^2}{(1-k \operatorname{sn}(\xi k^2))^2} - \frac{k^2 \operatorname{cn}(\xi k^2) \operatorname{sn}(\xi k^2)}{1-k \operatorname{sn}(\xi k^2)} \right)}{3\beta \sqrt{k^2+1} \operatorname{dn}(\xi k^2)}$	$-\frac{6\alpha^2}{Q(2\alpha^2-9\beta)} \frac{54\alpha^2\beta}{Q(2\alpha^2-9\beta)^2}$
33	$u_{2,19.1}(\xi) = \frac{\alpha}{3\beta} + \frac{\sqrt{2} \alpha (\operatorname{sn}(\xi k^2)+1) \left(-\frac{\operatorname{cn}(\xi k^2)^2 \operatorname{dn}(\xi k^2)}{(\operatorname{sn}(\xi k^2)+1)^2} - \frac{\operatorname{dn}(\xi k^2) \operatorname{sn}(\xi k^2)}{\operatorname{sn}(\xi k^2)+1} \right)}{3\beta \sqrt{k^2+1} \operatorname{cn}(\xi k^2)}$	$-\frac{6\alpha^2}{Q(2\alpha^2-9\beta)} \frac{54\alpha^2\beta}{Q(2\alpha^2-9\beta)^2}$
34	$u_{2,19.2}(\xi) = \frac{\alpha}{3\beta} + \frac{\sqrt{2} \alpha (1-\operatorname{sn}(\xi k^2)) \left(\frac{\operatorname{cn}(\xi k^2)^2 \operatorname{dn}(\xi k^2)}{(1-\operatorname{sn}(\xi k^2))^2} - \frac{\operatorname{dn}(\xi k^2) \operatorname{sn}(\xi k^2)}{1-\operatorname{sn}(\xi k^2)} \right)}{3\beta \sqrt{k^2+1} \operatorname{cn}(\xi k^2)}$	$-\frac{6\alpha^2}{Q(2\alpha^2-9\beta)} \frac{54\alpha^2\beta}{Q(2\alpha^2-9\beta)^2}$
35	$u_{2,20.1}(\xi) = \frac{\alpha}{3\beta} + \frac{1}{3\beta \sqrt{k^2+1} \operatorname{sn}(\xi k^2)} \sqrt{2} \alpha (\operatorname{cn}(\xi k^2) + \operatorname{dn}(\xi k^2))$ $\left(\frac{\operatorname{cn}(\xi k^2) \operatorname{dn}(\xi k^2)}{\operatorname{cn}(\xi k^2)+\operatorname{dn}(\xi k^2)} - \frac{\operatorname{sn}(\xi k^2) (k^2 (-\operatorname{cn}(\xi k^2)) \operatorname{sn}(\xi k^2) - \operatorname{dn}(\xi k^2) \operatorname{sn}(\xi k^2))}{(\operatorname{cn}(\xi k^2)+\operatorname{dn}(\xi k^2))^2} \right)$	$-\frac{6\alpha^2}{Q(2\alpha^2-9\beta)} \frac{54\alpha^2\beta}{Q(2\alpha^2-9\beta)^2}$
36	$u_{2,20.2}(\xi) = \frac{\alpha}{3\beta} + \frac{1}{3\beta \sqrt{k^2+1} \operatorname{sn}(\xi k^2)} \sqrt{2} \alpha$ $(\operatorname{dn}(\xi k^2) - \operatorname{cn}(\xi k^2)) \left(\frac{\operatorname{cn}(\xi k^2) \operatorname{dn}(\xi k^2)}{\operatorname{dn}(\xi k^2)-\operatorname{cn}(\xi k^2)} - \frac{\operatorname{sn}(\xi k^2) (\operatorname{dn}(\xi k^2) \operatorname{sn}(\xi k^2) - k^2 \operatorname{cn}(\xi k^2) \operatorname{sn}(\xi k^2))}{(\operatorname{dn}(\xi k^2)-\operatorname{cn}(\xi k^2))^2} \right)$	$-\frac{6\alpha^2}{Q(2\alpha^2-9\beta)} \frac{54\alpha^2\beta}{Q(2\alpha^2-9\beta)^2}$
37	$u_{2,21.1}(\xi) = \frac{\alpha}{3\beta} + \frac{1}{3\beta \sqrt{k^2-2} \operatorname{cn}(\xi k^2)} \sqrt{2} \alpha$ $(\operatorname{dn}(\xi k^2) + \sqrt{1-k} \sqrt{k+1}) \left(\frac{k^2 \operatorname{cn}(\xi k^2)^2 \operatorname{sn}(\xi k^2)}{(\operatorname{dn}(\xi k^2) + \sqrt{1-k} \sqrt{k+1})^2} - \frac{\operatorname{dn}(\xi k^2) \operatorname{sn}(\xi k^2)}{\operatorname{dn}(\xi k^2) + \sqrt{1-k} \sqrt{k+1}} \right)$	$-\frac{6\alpha^2}{Q(2\alpha^2-9\beta)} \frac{54\alpha^2\beta}{Q(2\alpha^2-9\beta)^2}$
38	$u_{2,21.2}(\xi) = \frac{\alpha}{3\beta} + \frac{1}{3\beta \sqrt{k^2-2} \operatorname{cn}(\xi k^2)} \sqrt{2} \alpha$ $(\sqrt{1-k} \sqrt{k+1} - \operatorname{dn}(\xi k^2)) \left(-\frac{k^2 \operatorname{cn}(\xi k^2)^2 \operatorname{sn}(\xi k^2)}{(\sqrt{1-k} \sqrt{k+1} - \operatorname{dn}(\xi k^2))^2} - \frac{\operatorname{dn}(\xi k^2) \operatorname{sn}(\xi k^2)}{\sqrt{1-k} \sqrt{k+1} - \operatorname{dn}(\xi k^2)} \right)$	$-\frac{6\alpha^2}{Q(2\alpha^2-9\beta)} \frac{54\alpha^2\beta}{Q(2\alpha^2-9\beta)^2}$

(d)

Tabla 2.27. Soluciones de $u_{i,j}(\xi)$ ($k \rightarrow 1$) y $u_{i,j}(\xi)$ ($k \rightarrow 0$) de la ODE Elíptica de Jacobi (ODE) $\equiv (G'(\xi))^2 = PG^4(\xi) + QG^2(\xi) + R$.

n°	$u_{i,j}(\xi)$ ($k \rightarrow 1$)	$u_{i,j}(\xi)$ ($k \rightarrow 0$)
Caso I.		
1	$u_{1,1.1}(\xi) = \frac{\alpha+i \sqrt{2} \alpha \operatorname{csch}(2\xi)}{3\beta}$	$u_{1,1.1}(\xi) = \frac{\alpha+i \alpha \cot(\xi)}{3\beta}$
2	$u_{1,1.2}(\xi) = \frac{\alpha}{3\beta}$	$u_{1,1.2}(\xi) = \frac{\alpha-i \alpha \tan(\xi)}{3\beta}$
3	$u_{1,2}(\xi) = \frac{\alpha (\tanh(\xi)+1)}{3\beta}$	$u_{1,2}(\xi) = \frac{\alpha-i \alpha \tan(\xi)}{3\beta}$
4	$u_{1,3}(\xi) = \frac{\alpha (\tanh(\xi)+1)}{3\beta}$	$u_{1,3}(\xi) = \frac{\alpha}{3\beta}$
5	$u_{1,4.1}(\xi) = \frac{\alpha-i \sqrt{2} \alpha \operatorname{csch}(2\xi)}{3\beta}$	$u_{1,4.1}(\xi) = \frac{\alpha-i \alpha \cot(\xi)}{3\beta}$
6	$u_{1,4.2}(\xi) = \frac{\alpha}{3\beta}$	$u_{1,4.2}(\xi) = \frac{\alpha+i \alpha \tan(\xi)}{3\beta}$
7	$u_{1,5}(\xi) = \frac{\alpha-\alpha \tanh(\xi)}{3\beta}$	$u_{1,5}(\xi) = \frac{\alpha+i \alpha \tan(\xi)}{3\beta}$
8	$u_{1,6}(\xi) = \frac{\alpha-\alpha \tanh(\xi)}{3\beta}$	$u_{1,6}(\xi) = \frac{\alpha}{3\beta}$
9	$u_{1,7}(\xi) = \frac{\alpha-\alpha \coth(\xi)}{3\beta}$	$u_{1,7}(\xi) = -\frac{\alpha (\sqrt{2} \csc(\xi) \sec(\xi)-2)}{6\beta}$
10	$u_{1,8}(\xi) = \frac{\alpha-\alpha \coth(\xi)}{3\beta}$	$u_{1,8}(\xi) = \frac{\alpha+i \alpha \cot(\xi)}{3\beta}$
11	$u_{1,9}(\xi) = \frac{\alpha (\coth(\xi)+1)}{3\beta}$	$u_{1,9}(\xi) = \frac{\alpha (\sqrt{2} \csc(\xi) \sec(\xi)+2)}{6\beta}$
12	$u_{1,10}(\xi) = \frac{\alpha (\coth(\xi)+1)}{3\beta}$	$u_{1,10}(\xi) = \frac{\alpha-i \alpha \cot(\xi)}{3\beta}$
13	$u_{1,11.1}(\xi) = \frac{\alpha (\tanh(\xi)+1)}{3\beta}$	$u_{1,11.1}(\xi) = \frac{\alpha}{3\beta}$

14	$u_{1,11.2}(\xi) = \frac{\alpha - \alpha \tanh(\xi)}{3\beta}$	$u_{1,11.2}(\xi) = \frac{\alpha}{3\beta}$
15	$u_{1,12.1}(\xi) = \frac{\alpha - i \sqrt{2} \alpha \operatorname{csch}(\xi)}{3\beta}$	$u_{1,12.1}(\xi) = \frac{\sqrt{2} \alpha \csc(\xi) + \alpha}{3\beta}$
16	$u_{1,12.2}(\xi) = \frac{\alpha + i \sqrt{2} \alpha \operatorname{csch}(\xi)}{3\beta}$	$u_{1,12.2}(\xi) = \frac{\alpha - \sqrt{2} \alpha \csc(\xi)}{3\beta}$
17	$u_{1,13.1}(\xi) = 0$	$u_{1,13.1}(\xi) = \frac{\alpha - \sqrt{2} \alpha \sec(\xi)}{3\beta}$
18	$u_{1,13.2}(\xi) = \frac{2\alpha}{3\beta}$	$u_{1,13.2}(\xi) = \frac{\sqrt{2} \alpha \sec(\xi) + \alpha}{3\beta}$
19	$u_{1,14.1}(\xi) = \frac{\alpha - i \sqrt{2} \alpha \operatorname{csch}(\xi)}{3\beta}$	$u_{1,14.1}(\xi) = \frac{\alpha - i \alpha \cot(\xi)}{3\beta}$
20	$u_{1,14.2}(\xi) = \frac{\alpha + i \sqrt{2} \alpha \operatorname{csch}(\xi)}{3\beta}$	$u_{1,14.2}(\xi) = \frac{\alpha + i \alpha \cot(\xi)}{3\beta}$
21	$u_{1,15.1}(\xi) = \frac{\sqrt{2} \alpha \operatorname{sech}(\xi) + \alpha}{3\beta}$	$u_{1,15.1}(\xi) = \frac{2\alpha}{3\beta}$
22	$u_{1,15.2}(\xi) = \frac{\alpha - \sqrt{2} \alpha \operatorname{sech}(\xi)}{3\beta}$	$u_{1,15.2}(\xi) = 0$
23	$u_{1,15.3}(\xi) = \frac{\alpha}{3\beta}$	$u_{1,15.3}(\xi) = 0$
24	$u_{1,15.4}(\xi) = \frac{\alpha}{3\beta}$	$u_{1,15.4}(\xi) = \frac{2\alpha}{3\beta}$
25	$u_{1,16.1}(\xi) = \frac{\sqrt{2} \alpha \operatorname{sech}(\xi) + \alpha}{3\beta}$	$u_{1,16.1}(\xi) = \frac{\alpha}{3\beta}$
26	$u_{1,16.2}(\xi) = \frac{\alpha - \sqrt{2} \alpha \operatorname{sech}(\xi)}{3\beta}$	$u_{1,16.2}(\xi) = \frac{\alpha}{3\beta}$
27	$u_{1,16.3}(\xi) = \frac{\alpha + i \sqrt{2} \alpha \operatorname{csch}(\xi)}{3\beta}$	$u_{1,16.3}(\xi) = \frac{\alpha - \sqrt{2} \alpha \csc(\xi)}{3\beta}$
28	$u_{1,16.4}(\xi) = \frac{\alpha - i \sqrt{2} \alpha \operatorname{csch}(\xi)}{3\beta}$	$u_{1,16.4}(\xi) = \frac{\sqrt{2} \alpha \csc(\xi) + \alpha}{3\beta}$
29	$u_{1,17.1}(\xi) = \frac{\alpha + i \sqrt{2} \alpha \operatorname{csch}(\xi)}{3\beta}$	$u_{1,17.1}(\xi) = \frac{\alpha + i \alpha \cot(\xi)}{3\beta}$
30	$u_{1,17.2}(\xi) = \frac{\alpha - i \sqrt{2} \alpha \operatorname{csch}(\xi)}{3\beta}$	$u_{1,17.2}(\xi) = \frac{\alpha - i \alpha \cot(\xi)}{3\beta}$
31	$u_{1,18.1}(\xi) = \frac{2\alpha}{3\beta}$	$u_{1,18.1}(\xi) = \frac{\alpha}{3\beta}$
32	$u_{1,18.2}(\xi) = 0$	$u_{1,18.2}(\xi) = \frac{\alpha}{3\beta}$
33	$u_{1,19.1}(\xi) = \frac{2\alpha}{3\beta}$	$u_{1,19.1}(\xi) = \frac{\sqrt{2} \alpha \sec(\xi) + \alpha}{3\beta}$
34	$u_{1,19.2}(\xi) = 0$	$u_{1,19.2}(\xi) = \frac{\alpha (\sqrt{2} \cos(\xi) + (\sin(\xi) - 1) (\sqrt{2} \tan(\xi) + 1))}{3\beta (\sin(\xi) - 1)}$
35	$u_{1,20.1}(\xi) = \frac{\alpha - \alpha \operatorname{coth}(\xi)}{3\beta}$	$u_{1,20.1}(\xi) = \frac{\alpha - \sqrt{2} \alpha \csc(\xi)}{3\beta}$
36	$u_{1,20.2}(\xi) = \frac{\alpha (\operatorname{coth}(\xi) + 1)}{3\beta}$	$u_{1,20.2}(\xi) = \frac{\sqrt{2} \alpha \csc(\xi) + \alpha}{3\beta}$
37	$u_{1,21.1}(\xi) = \frac{\alpha}{3\beta}$	$u_{1,21.1}(\xi) = \frac{\alpha - i \alpha \tan(\xi)}{3\beta}$
38	$u_{1,21.2}(\xi) = \frac{\alpha}{3\beta}$	$u_{1,21.2}(\xi) = \frac{\alpha + i \alpha \tan(\xi)}{3\beta}$

nº	$u_{i,j}(\xi) (k \rightarrow 1)$	$u_{i,j}(\xi) (k \rightarrow 0)$
Caso II.		
1	$u_{2,1.1}(\xi) = \frac{\alpha - i \sqrt{2} \alpha \operatorname{csch}(2\xi)}{3\beta}$	$u_{2,1.1}(\xi) = \frac{\alpha - i \alpha \cot(\xi)}{3\beta}$
2	$u_{2,1.2}(\xi) = \frac{\alpha}{3\beta}$	$u_{2,1.2}(\xi) = \frac{\alpha + i \alpha \tan(\xi)}{3\beta}$

3	$u_{2,2}(\xi) = \frac{\alpha - \alpha \tanh(\xi)}{3\beta}$	$u_{2,2}(\xi) = \frac{\alpha + i \alpha \tan(\xi)}{3\beta}$
4	$u_{2,3}(\xi) = \frac{\alpha - \alpha \tanh(\xi)}{3\beta}$	$u_{2,3}(\xi) = \frac{\alpha}{3\beta}$
5	$u_{2,4,1}(\xi) = \frac{\alpha + i \sqrt{2} \alpha \operatorname{csch}(2\xi)}{3\beta}$	$u_{2,4,1}(\xi) = \frac{\alpha + i \alpha \cot(\xi)}{3\beta}$
6	$u_{2,4,2}(\xi) = \frac{\alpha}{3\beta}$	$u_{2,4,2}(\xi) = \frac{\alpha - i \alpha \tan(\xi)}{3\beta}$
7	$u_{2,5}(\xi) = \frac{\alpha (\tanh(\xi)+1)}{3\beta}$	$u_{2,5}(\xi) = \frac{\alpha - i \alpha \tan(\xi)}{3\beta}$
8	$u_{2,6}(\xi) = \frac{\alpha (\tanh(\xi)+1)}{3\beta}$	$u_{2,6}(\xi) = \frac{\alpha}{3\beta}$
9	$u_{2,7}(\xi) = \frac{\alpha (\coth(\xi)+1)}{3\beta}$	$u_{2,7}(\xi) = \frac{\alpha (\sqrt{2} \csc(\xi) \sec(\xi)+2)}{6\beta}$
10	$u_{2,8}(\xi) = \frac{\alpha (\coth(\xi)+1)}{3\beta}$	$u_{2,8}(\xi) = \frac{\alpha - i \alpha \cot(\xi)}{3\beta}$
11	$u_{2,9}(\xi) = \frac{\alpha - \alpha \coth(\xi)}{3\beta}$	$u_{2,9}(\xi) = -\frac{\alpha (\sqrt{2} \csc(\xi) \sec(\xi)-2)}{6\beta}$
12	$u_{2,10}(\xi) = \frac{\alpha - \alpha \coth(\xi)}{3\beta}$	$u_{2,10}(\xi) = \frac{\alpha + i \alpha \cot(\xi)}{3\beta}$
13	$u_{2,11,1}(\xi) = \frac{\alpha - \alpha \tanh(\xi)}{3\beta}$	$u_{2,11,1}(\xi) = \frac{\alpha}{3\beta}$
14	$u_{2,11,2}(\xi) = \frac{\alpha (\tanh(\xi)+1)}{3\beta}$	$u_{2,11,2}(\xi) = \frac{\alpha}{3\beta}$
15	$u_{2,12,1}(\xi) = \frac{\alpha + i \sqrt{2} \alpha \operatorname{csch}(\xi)}{3\beta}$	$u_{2,12,1}(\xi) = \frac{\alpha - \sqrt{2} \alpha \csc(\xi)}{3\beta}$
16	$u_{2,12,2}(\xi) = \frac{\alpha - i \sqrt{2} \alpha \operatorname{csch}(\xi)}{3\beta}$	$u_{2,12,2}(\xi) = \frac{\sqrt{2} \alpha \csc(\xi) + \alpha}{3\beta}$
17	$u_{2,13,1}(\xi) = \frac{2\alpha}{3\beta}$	$u_{2,13,1}(\xi) = \frac{\sqrt{2} \alpha \sec(\xi) + \alpha}{3\beta}$
18	$u_{2,13,2}(\xi) = 0$	$u_{2,13,2}(\xi) = \frac{\alpha - \sqrt{2} \alpha \sec(\xi)}{3\beta}$
19	$u_{2,14,1}(\xi) = \frac{\alpha + i \sqrt{2} \alpha \operatorname{csch}(\xi)}{3\beta}$	$u_{2,14,1}(\xi) = \frac{\alpha + i \alpha \cot(\xi)}{3\beta}$
20	$u_{2,14,2}(\xi) = \frac{\alpha - i \sqrt{2} \alpha \operatorname{csch}(\xi)}{3\beta}$	$u_{2,14,2}(\xi) = \frac{\alpha - i \alpha \cot(\xi)}{3\beta}$
21	$u_{2,15,1}(\xi) = \frac{\alpha - \sqrt{2} \alpha \operatorname{sech}(\xi)}{3\beta}$	$u_{2,15,1}(\xi) = 0$
22	$u_{2,15,2}(\xi) = \frac{\sqrt{2} \alpha \operatorname{sech}(\xi) + \alpha}{3\beta}$	$u_{2,15,2}(\xi) = \frac{2\alpha}{3\beta}$
23	$u_{2,15,3}(\xi) = \frac{\alpha}{3\beta}$	$u_{2,15,3}(\xi) = \frac{2\alpha}{3\beta}$
24	$u_{2,15,4}(\xi) = \frac{\alpha}{3\beta}$	$u_{2,15,4}(\xi) = 0$
25	$u_{2,16,1}(\xi) = \frac{\alpha - \sqrt{2} \alpha \operatorname{sech}(\xi)}{3\beta}$	$u_{2,16,1}(\xi) = \frac{\alpha}{3\beta}$
26	$u_{2,16,2}(\xi) = \frac{\sqrt{2} \alpha \operatorname{sech}(\xi) + \alpha}{3\beta}$	$u_{2,16,2}(\xi) = \frac{\alpha}{3\beta}$
27	$u_{2,16,3}(\xi) = \frac{\alpha - i \sqrt{2} \alpha \operatorname{csch}(\xi)}{3\beta}$	$u_{2,16,3}(\xi) = \frac{\sqrt{2} \alpha \csc(\xi) + \alpha}{3\beta}$
28	$u_{2,16,4}(\xi) = \frac{\alpha + i \sqrt{2} \alpha \operatorname{csch}(\xi)}{3\beta}$	$u_{2,16,4}(\xi) = \frac{\alpha - \sqrt{2} \alpha \csc(\xi)}{3\beta}$
29	$u_{2,17,1}(\xi) = \frac{\alpha - i \sqrt{2} \alpha \operatorname{csch}(\xi)}{3\beta}$	$u_{2,17,1}(\xi) = \frac{\alpha - i \alpha \cot(\xi)}{3\beta}$
30	$u_{2,17,2}(\xi) = \frac{\alpha + i \sqrt{2} \alpha \operatorname{csch}(\xi)}{3\beta}$	$u_{2,17,2}(\xi) = \frac{\alpha + i \alpha \cot(\xi)}{3\beta}$
31	$u_{2,18,1}(\xi) = 0$	$u_{2,18,1}(\xi) = \frac{\alpha}{3\beta}$

32	$u_{2,18.2}(\xi) = \frac{2\alpha}{3\beta}$	$u_{2,18.2}(\xi) = \frac{\alpha}{3\beta}$
33	$u_{2,19.1}(\xi) = 0$	$u_{2,19.1}(\xi) = \frac{\alpha - \sqrt{2} \alpha \sec(\xi)}{3\beta}$
34	$u_{2,19.2}(\xi) = \frac{2\alpha}{3\beta}$	$u_{2,19.2}(\xi) = \frac{\sqrt{2} \alpha \sec(\xi) + \alpha}{3\beta}$
35	$u_{2,20.1}(\xi) = \frac{\alpha (\coth(\xi) + 1)}{3\beta}$	$u_{2,20.1}(\xi) = \frac{\sqrt{2} \alpha \csc(\xi) + \alpha}{3\beta}$
36	$u_{2,20.2}(\xi) = \frac{\alpha - \alpha \coth(\xi)}{3\beta}$	$u_{2,20.2}(\xi) = \frac{\alpha - \sqrt{2} \alpha \csc(\xi)}{3\beta}$
37	$u_{2,21.1}(\xi) = \frac{\alpha}{3\beta}$	$u_{2,21.1}(\xi) = \frac{\alpha + i \alpha \tan(\xi)}{3\beta}$
38	$u_{2,21.2}(\xi) = \frac{\alpha}{3\beta}$	$u_{2,21.2}(\xi) = \frac{\alpha - i \alpha \tan(\xi)}{3\beta}$

■ **Problema 2.3.13. Método de Expansión ($\frac{G'}{G}$). Gráficas Caso I.**

Represéntense las gráficas de las soluciones de la Ecuación Propagación de Ondas en Línea de Transmisión Eléctrica de Paso Bajo no Lineal (LPEL):

$$(ODE) \equiv (L C_0 \omega^2 - k^2) U(\xi) - L C_0 v \omega^2 U^2(\xi) + L C_0 \beta \omega^2 U^3(\xi) - \frac{1}{12} k^4 U''(\xi) = 0$$

$$(PDE) \equiv L C_0 V_{tt} - V_{xx} - \frac{\delta^2}{12} V_{xxxx} - L C v (V^2)_{tt} + L C \beta (V^3)_{tt}$$

con los parámetros indicados en los diferentes casos:

$$(x, t) = \begin{cases} x \in [0, X] = [-10, 10] \\ t \in [0, T] = [-10, 10] \end{cases}$$

siendo

$$\begin{cases} C_1, C_2 & \text{constantes arbitrarias} \\ \xi = \sqrt{k} (x - \omega t) \end{cases}$$

$$\left\{ \alpha \rightarrow 3, \beta \rightarrow 26 + 4\sqrt{42}, \delta \rightarrow \frac{2\sqrt{18+3\sqrt{42}}}{6+\sqrt{42}}, k \rightarrow \frac{3}{4}, k^2 \rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^2 \right\}$$

$$\{C_1 \rightarrow 1, C_2 \rightarrow 1\}$$

Caso I.

$$\begin{cases} u_{1,2}(\xi) = u_{1,1}(x, t) \\ u_{1,2}(\xi) = u_{1,2}(x, t), \quad t = 0 \end{cases}$$

$$u_{1,2}(\xi) = \frac{\alpha}{3\beta} - \frac{\alpha (k^2 - 1) \operatorname{sn}(\xi|k^2)}{3\beta \sqrt{2k^2 - 1} \operatorname{cn}(\xi|k^2) \operatorname{dn}(\xi|k^2)}$$

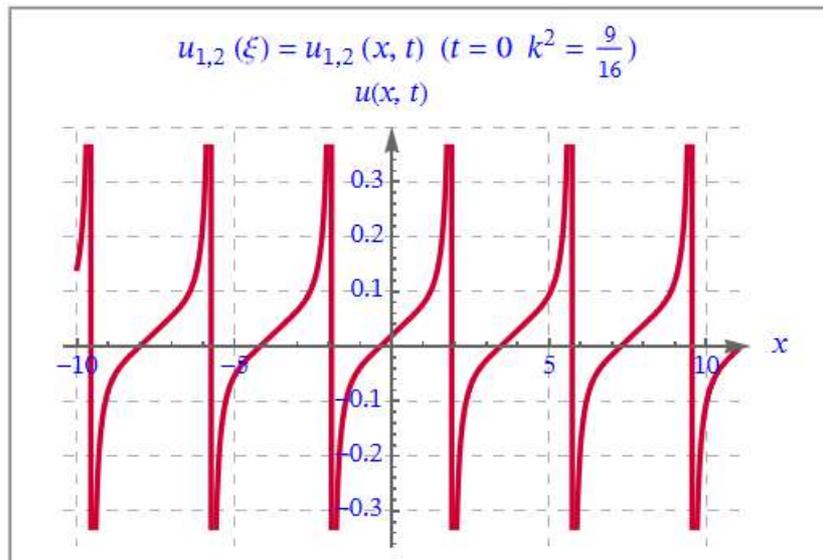
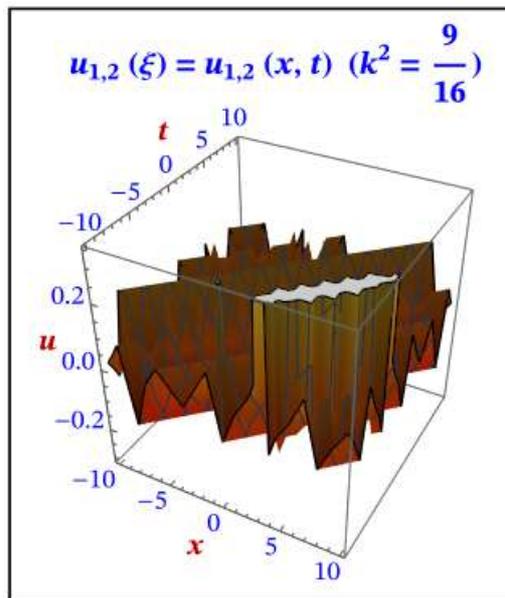
$$(a) \left\{ k \rightarrow \frac{3}{4}, k^2 \rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^2 \right\}$$

$$(b) \left\{ k \rightarrow \sqrt{\frac{3}{4}}, k^2 \rightarrow \left(\frac{3}{4}\right) \right\}.$$

SOLUCIÓN

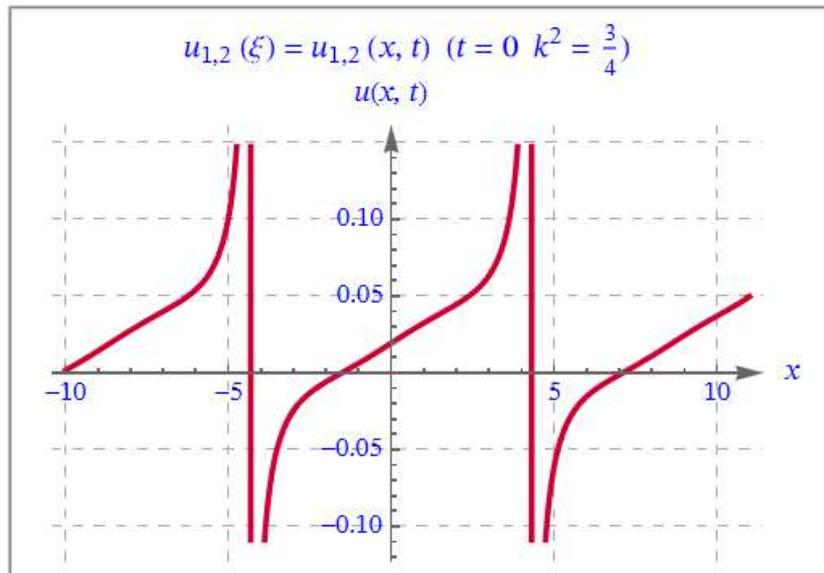
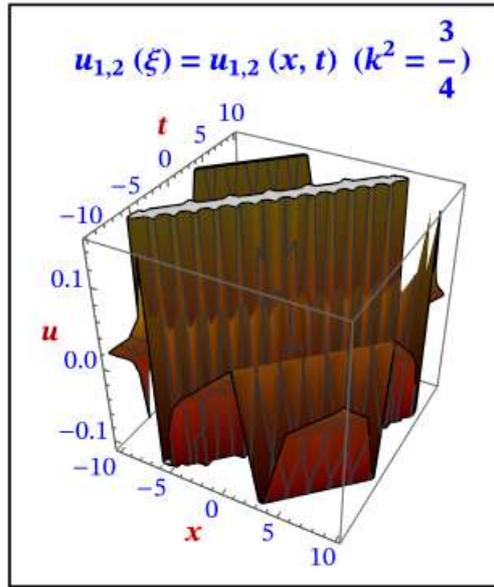
(a)

$$\left(\begin{array}{ll} \{\alpha, \beta, \delta, k^2\} & \{3., 51.923, 0.980552, 0.75, 0.5625\} \\ \{P, Q, R\} = & \{-0.5625, 0.125, 0.4375\} \\ \{C_1, C_2\} & \{C_1 \rightarrow 1, C_2 \rightarrow 1\} \\ K = & 0.961481 \\ U = & 1. \\ \frac{1}{\delta} \sqrt{K} & 1. \\ \omega = \sqrt{U} & 1. \\ \xi = \sqrt{k} (x - \omega t) = \frac{1}{\delta} \sqrt{K} x - \sqrt{U} t & 1. x - 1. t \end{array} \right)$$



(b)

$$\left(\begin{array}{ll} \{\alpha, \beta, \delta, k^2\} & \{3., 51.923, 0.980552, 0.866025, 0.75\} \\ \{P, Q, R\} = & \{-0.75, 0.5, 0.25\} \\ \{C_1, C_2\} & \{C_1 \rightarrow 1, C_2 \rightarrow 1\} \\ K = & 0.24037 \\ U = & 0.25 \\ \frac{1}{\delta} \sqrt{K} & 0.5 \\ \omega = \sqrt{U} & 0.5 \\ \xi = \sqrt{k} (x - \omega t) = \frac{1}{\delta} \sqrt{K} x - \sqrt{U} t & 0.5 x - 0.5 t \end{array} \right)$$



■ **Problema 2.3.14. Método de Expansión ($\frac{G'}{G}$). Gráficas de Varias Soluciones: $k^2 \rightarrow (\frac{3}{4})^2$.**

Representense las gráficas de las soluciones de la Ecuación Propagación de Ondas en Línea de Transmisión Eléctrica de Paso Bajo no Lineal (LPEL):

$$(ODE) \equiv (L C_0 \omega^2 - k^2) U(\xi) - L C_0 v \omega^2 U^2(\xi) + L C_0 \beta \omega^2 U^3(\xi) - \frac{1}{12} k^4 U''(\xi) = 0$$

$$(PDE) \equiv L C_0 V_{tt} - V_{xx} - \frac{\delta^2}{12} V_{xxxx} - L C v (V^2)_{tt} + L C \beta (V^3)_{tt}$$

con los parámetros indicados:

$$\begin{cases} C_1, C_2 & \text{constantes arbitrarias} \\ \xi = \sqrt{k} (x - \omega t) \end{cases}$$

$$\left\{ \alpha \rightarrow 3, \beta \rightarrow 26 + 4\sqrt{42}, \delta \rightarrow \frac{2\sqrt{18+3\sqrt{42}}}{6+\sqrt{42}}, k \rightarrow \sqrt{\frac{3}{4}}, k^2 \rightarrow \left(\frac{3}{4}\right) \right\}$$

$$\{C_1 \rightarrow 1, C_2 \rightarrow 1\} \quad \left\{ k \rightarrow \sqrt{\frac{3}{4}}, k^2 \rightarrow \left(\frac{3}{4}\right) \right\}$$

(i) Caso I. Gráficas de las soluciones $u_{1,j}(x, t)$.

(ii) Caso II. Gráficas de las soluciones $u_{2,j}(x, t)$.

$$\bullet u_{1,j}(x, t), u_{2,j}(x, t) \quad (x, t) = \begin{cases} x \in [-X, X] = [-10, 10] \\ t \in [-T, T] = [-10, 10] \end{cases}$$

$$\bullet u_{1,j}(x, t), u_{2,j}(x, t) \quad (x, t) = \begin{cases} x \in [-X, X] = [-10, 10] \\ t = \frac{T}{2} \end{cases}$$

donde $i = \{1, 2, 3, 4, 13, 31, 37\}$ y las soluciones son:

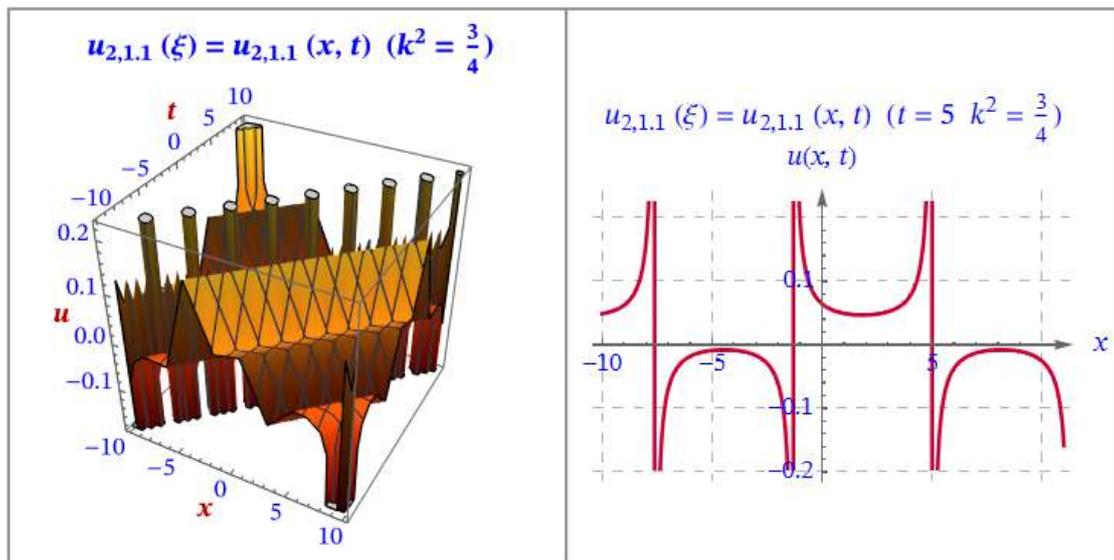
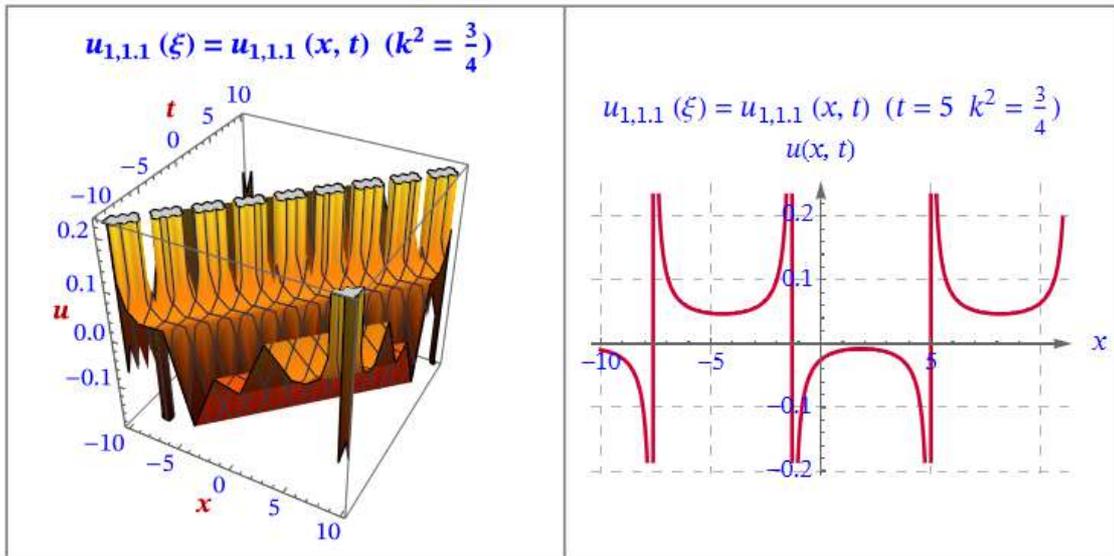
$$\begin{pmatrix} u_{1,1.1}(\xi) & u_{2,1.1}(\xi) \\ u_{1,1.2}(\xi) & u_{2,1.2}(\xi) \\ u_{1,3}(\xi) & u_{2,3}(\xi) \\ u_{1,11.1}(\xi) & u_{2,11.1}(\xi) \\ u_{1,21.1}(\xi) & u_{2,21.1}(\xi) \end{pmatrix}.$$

SOLUCIÓN

(a)

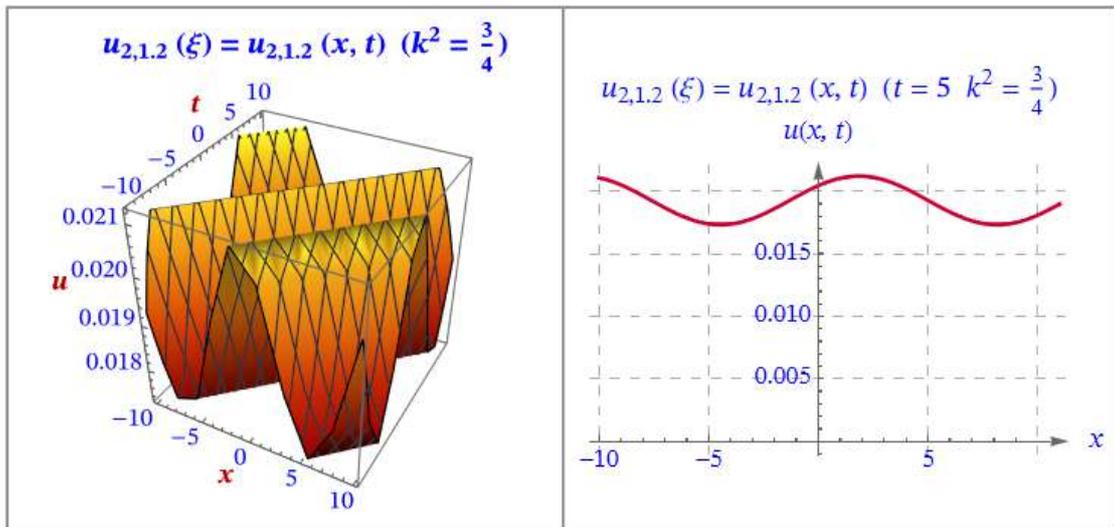
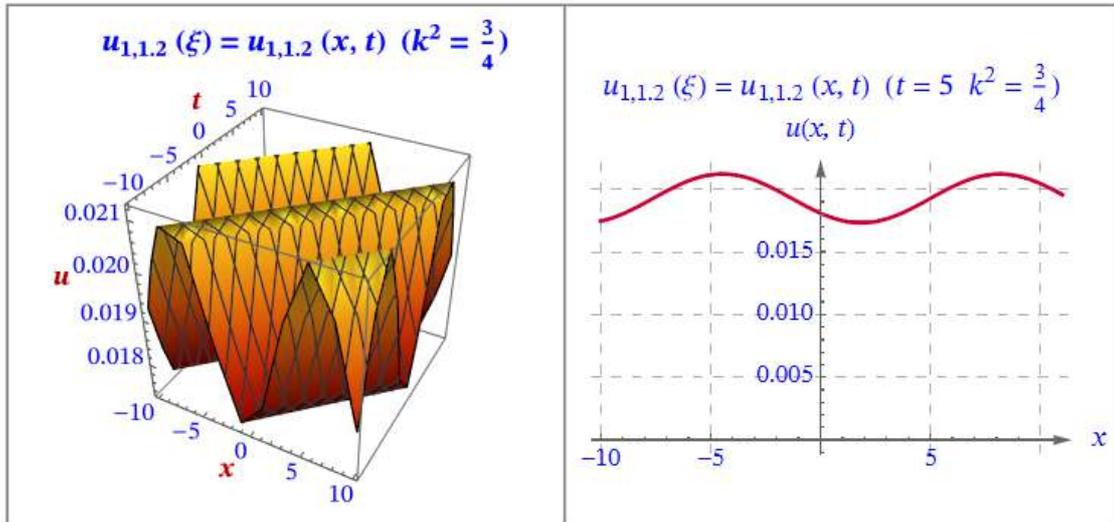
$$u_{1,1.1}(\xi) = u_{1,1.1}(x, t)$$

$$u_{2,1.1}(\xi) = u_{2,1.1}(x, t)$$



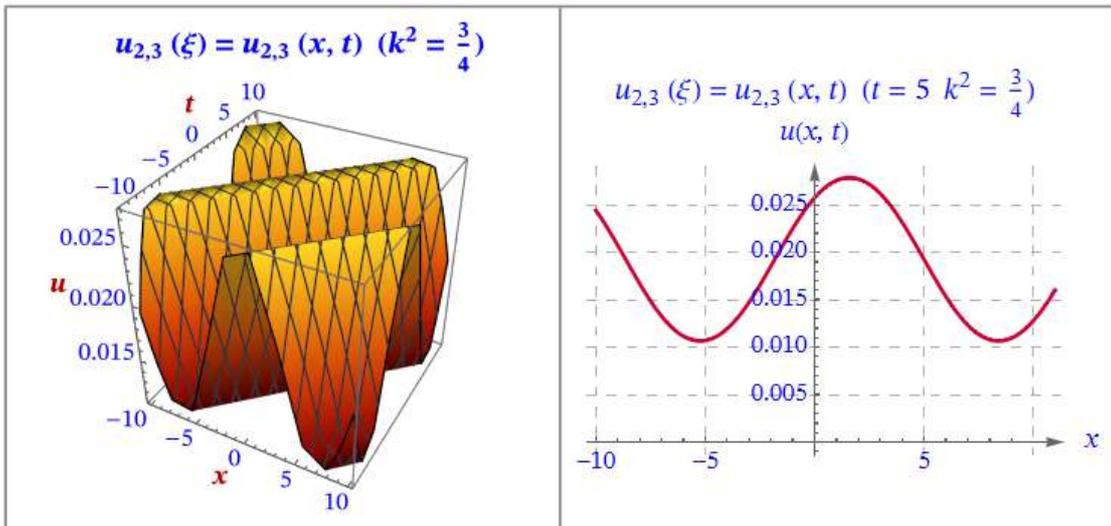
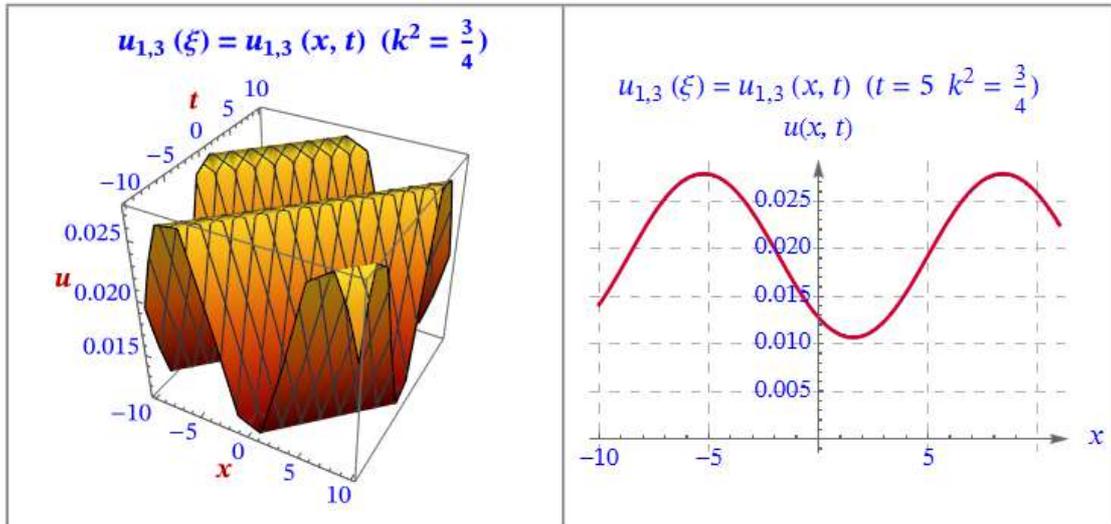
$$u_{1,1,2}(\xi) = u_{1,1,2}(x, t)$$

$$u_{2,1,2}(\xi) = u_{2,1,2}(x, t)$$



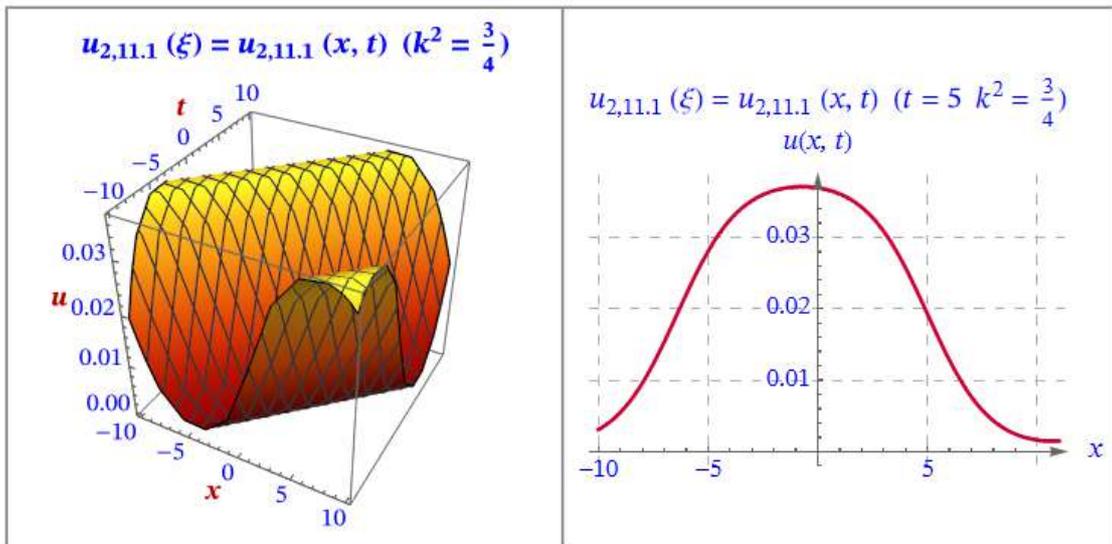
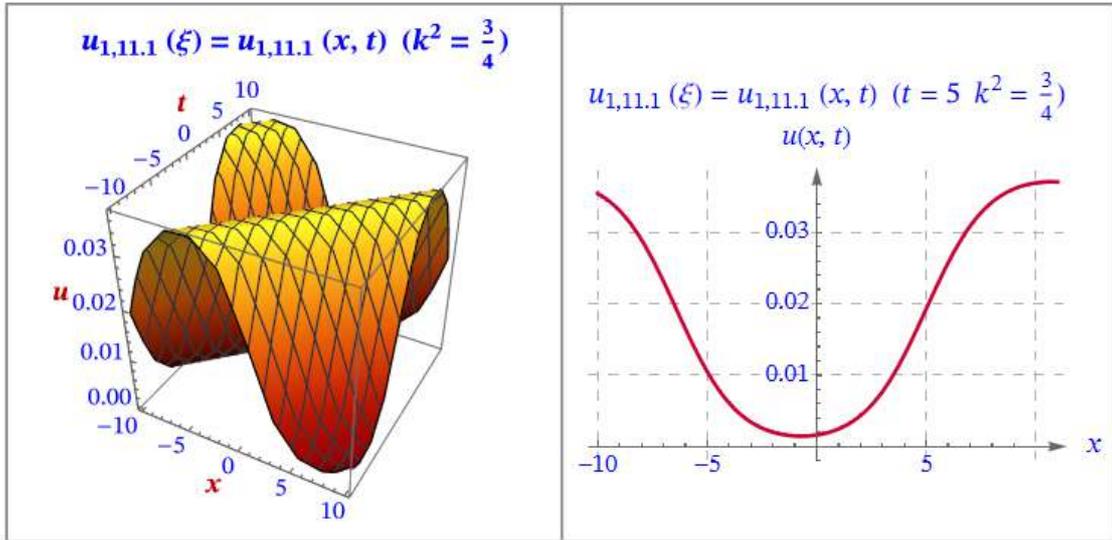
$$u_{1,3}(\xi) = u_{1,3}(x, t)$$

$$u_{2,3}(\xi) = u_{2,3}(x, t)$$



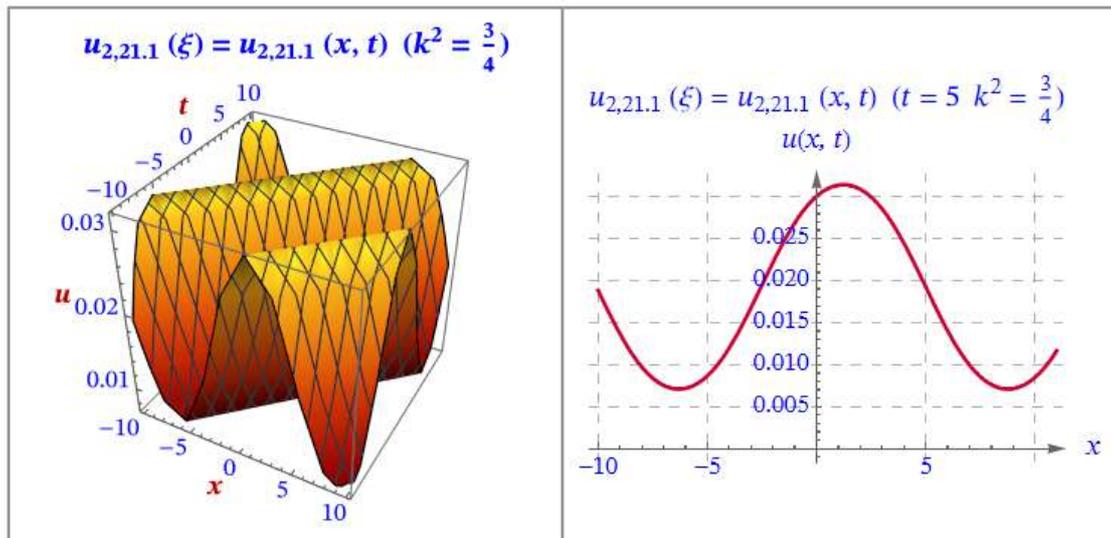
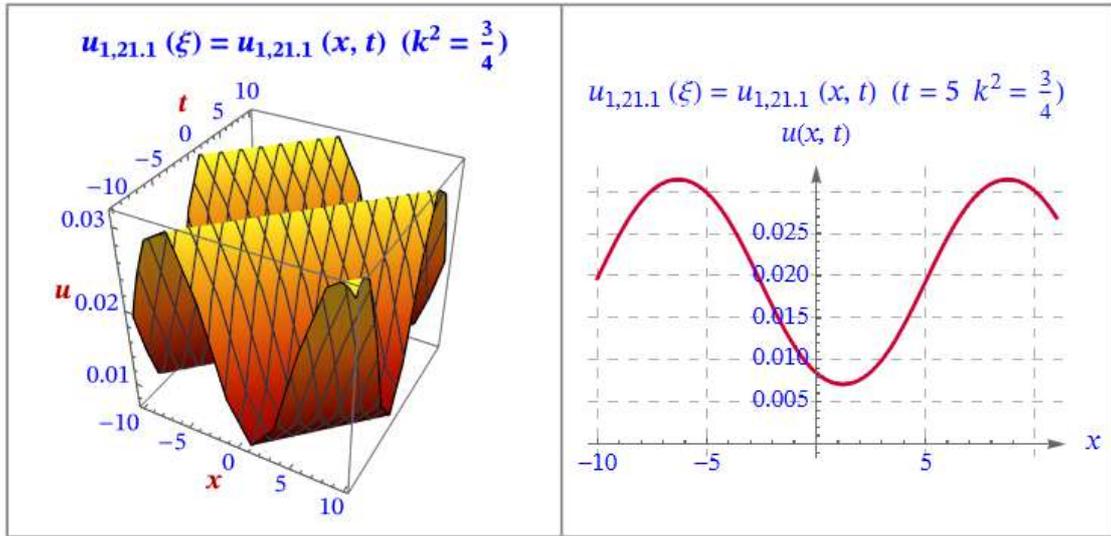
$$u_{1,11.1}(\xi) = u_{1,11.1}(x, t)$$

$$u_{2,11.1}(\xi) = u_{2,11.1}(x, t)$$



$$u_{1,21.1}(\xi) = u_{1,21.1}(x, t)$$

$$u_{2,21.1}(\xi) = u_{2,21.1}(x, t)$$



■ **Problema 2.3.15. Método de Expansión ($\frac{G'}{G}$). Gráficas Varias Soluciones: ($k \rightarrow 1$).**

Representense las gráficas de las soluciones de la Ecuación Propagación de Ondas en Línea de Transmisión Eléctrica de Paso Bajo no Lineal (LPEL):

$$(ODE) \equiv (L C_0 \omega^2 - k^2) U(\xi) - L C_0 v \omega^2 U^2(\xi) + L C_0 \beta \omega^2 U^3(\xi) - \frac{1}{12} k^4 U''(\xi) = 0$$

$$(PDE) \equiv L C_0 V_{tt} - V_{xx} - \frac{\delta^2}{12} V_{xxxx} - L C v (V^2)_{tt} + L C \beta (V^3)_{tt}$$

con los parámetros indicados:

$$\begin{cases} C_1, C_2 & \text{constantes arbitrarias} \\ \xi = \sqrt{k} (x - \omega t) \\ \left\{ \alpha \rightarrow 3, \beta \rightarrow 26 + 4\sqrt{42}, \delta \rightarrow \frac{2\sqrt{18+3\sqrt{42}}}{6+\sqrt{42}}, k \rightarrow 1, k^2 \rightarrow 1 \right\} \\ \{C_1 \rightarrow 1, C_2 \rightarrow 1\} \quad \{k \rightarrow 1, k^2 \rightarrow 1\} \end{cases}$$

(i) Caso I. Gráficas de las soluciones $u_{1,j}(x, t)$.

(ii) Caso II. Gráficas de las soluciones $u_{2,j}(x, t)$.

$$\begin{aligned} \bullet u_{1,j}(x, t), u_{2,j}(x, t) \quad (x, t) &= \begin{cases} x \in [-X, X] = [-10, 10] \\ t \in [-T, T] = [-10, 10] \end{cases} \\ \bullet u_{1,j}(x, t), u_{2,j}(x, t) \quad (x, t) &= \begin{cases} x \in [-X, X] = [-10, 10] \\ t = \frac{T}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

donde $j = \{1, 3, 5, 9, 15\}$ y las soluciones son:

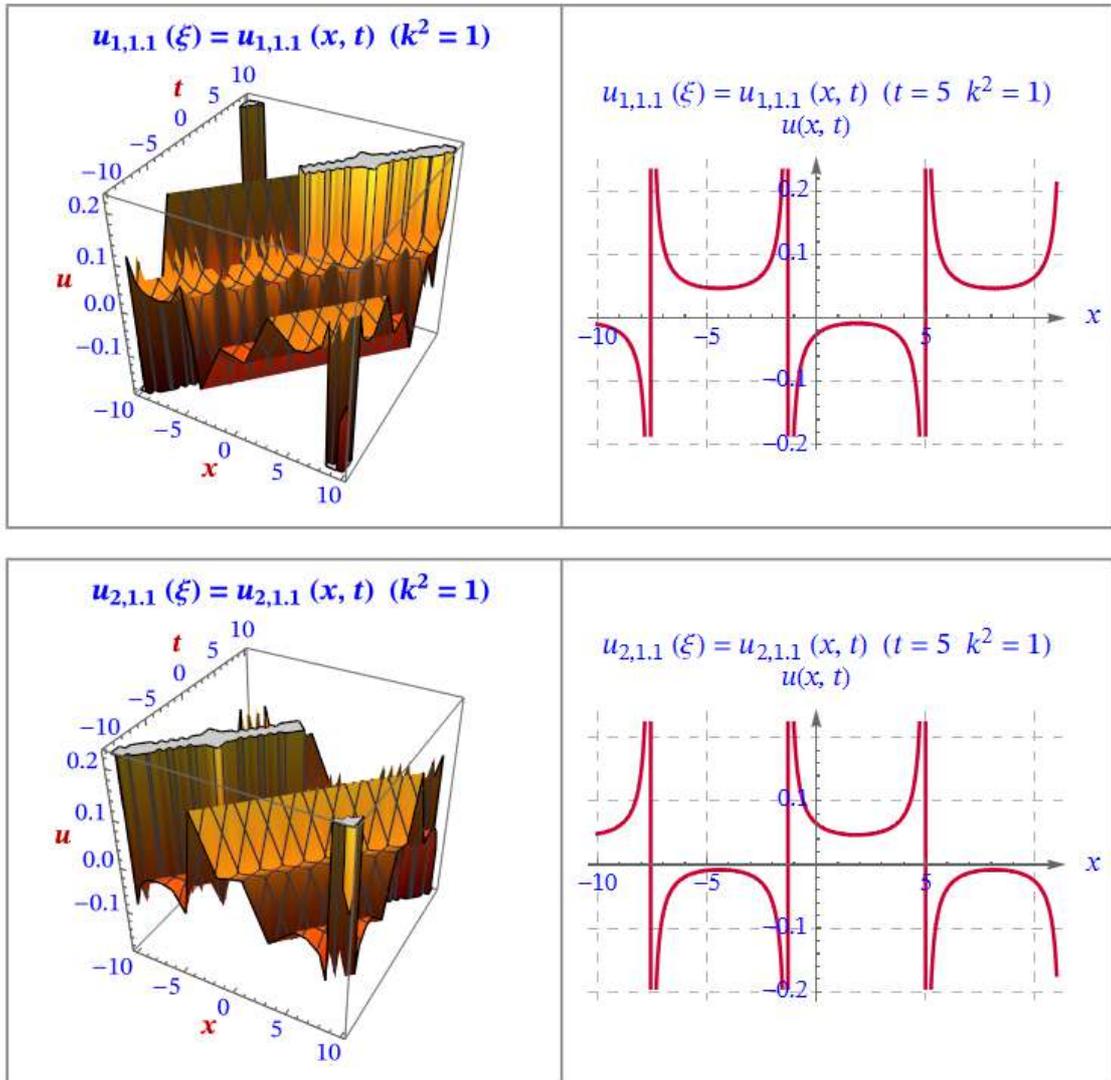
$$\begin{pmatrix} u_{1,1.1}(\xi) & u_{2,1.1}(\xi) \\ u_{1,2}(\xi) & u_{2,2}(\xi) \\ u_{1,4.1}(\xi) & u_{2,4.1}(\xi) \\ u_{1,7}(\xi) & u_{2,7}(\xi) \\ u_{1,12.1}(\xi) & u_{2,12.1}(\xi) \end{pmatrix}.$$

SOLUCIÓN

(a)

$$u_{1,1.1}(\xi) = u_{1,1.1}(x, t)$$

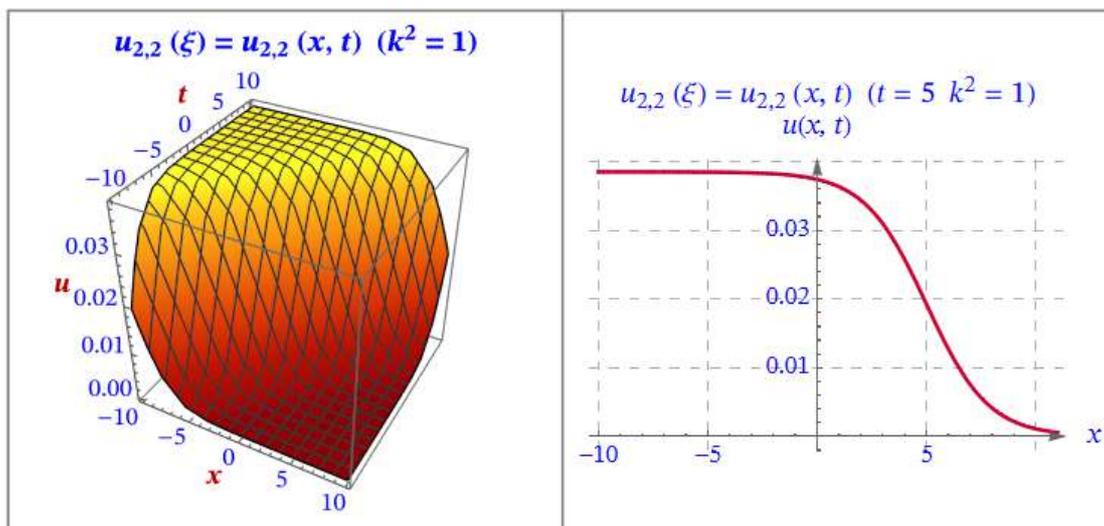
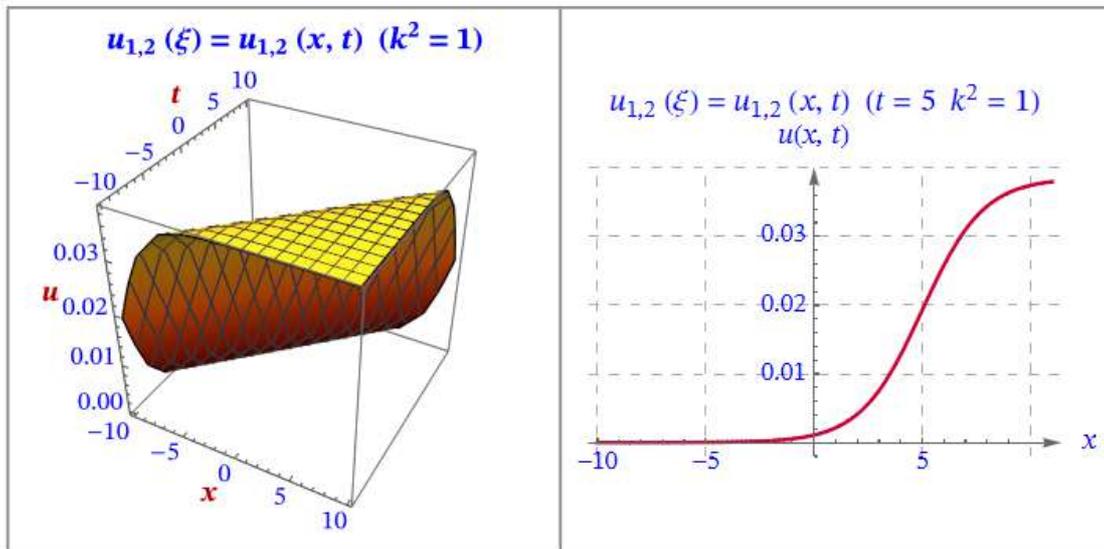
$$u_{2,1.1}(\xi) = u_{2,1.1}(x, t)$$



Solución (1, 2)

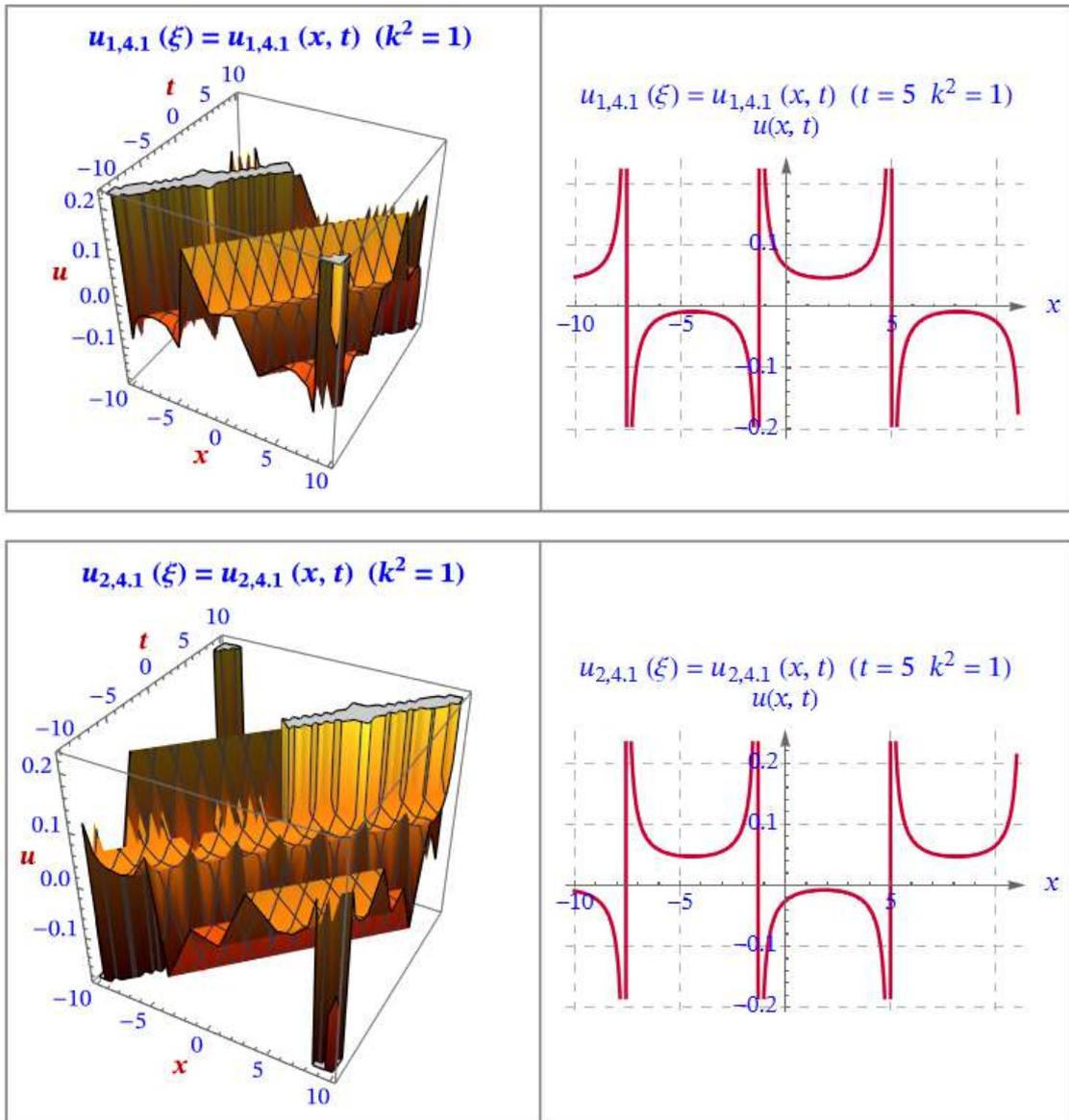
$$u_{1,2}(\xi) = u_{1,2}(x, t)$$

$$u_{2,2}(\xi) = u_{2,2}(x, t)$$



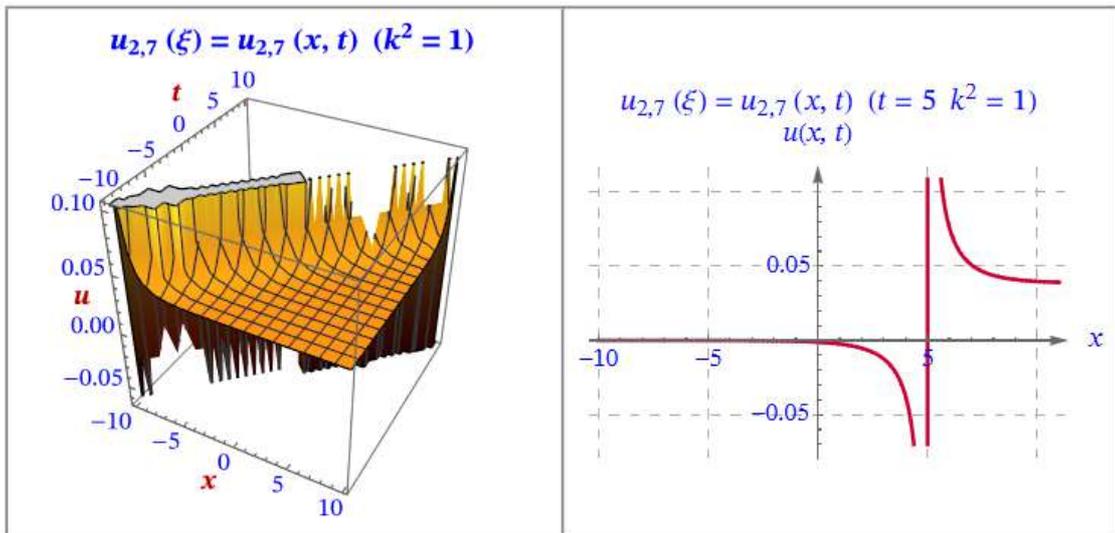
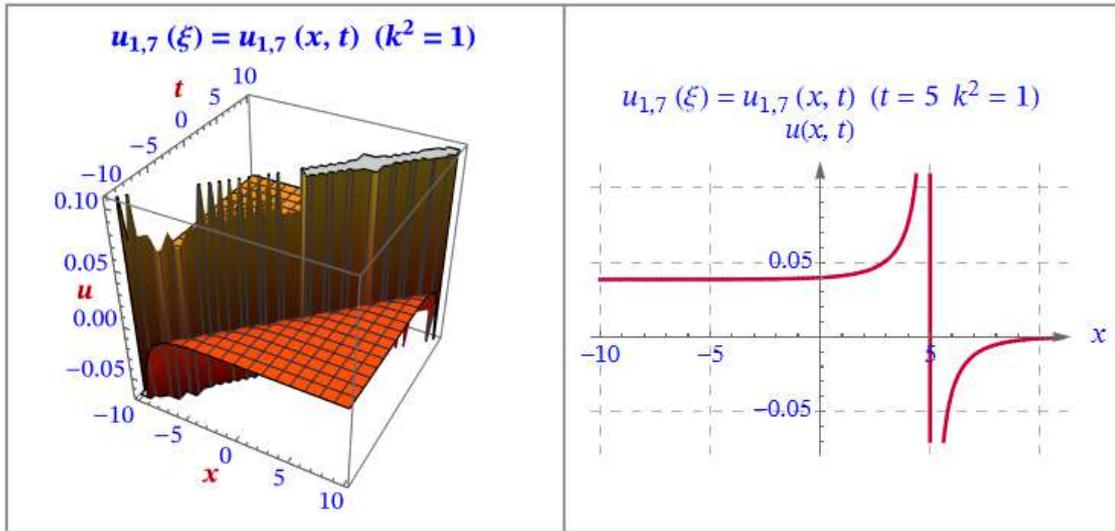
$$u_{1,4.1}(\xi) = u_{1,4.1}(x, t)$$

$$u_{2,4.1}(\xi) = u_{2,4.1}(x, t)$$



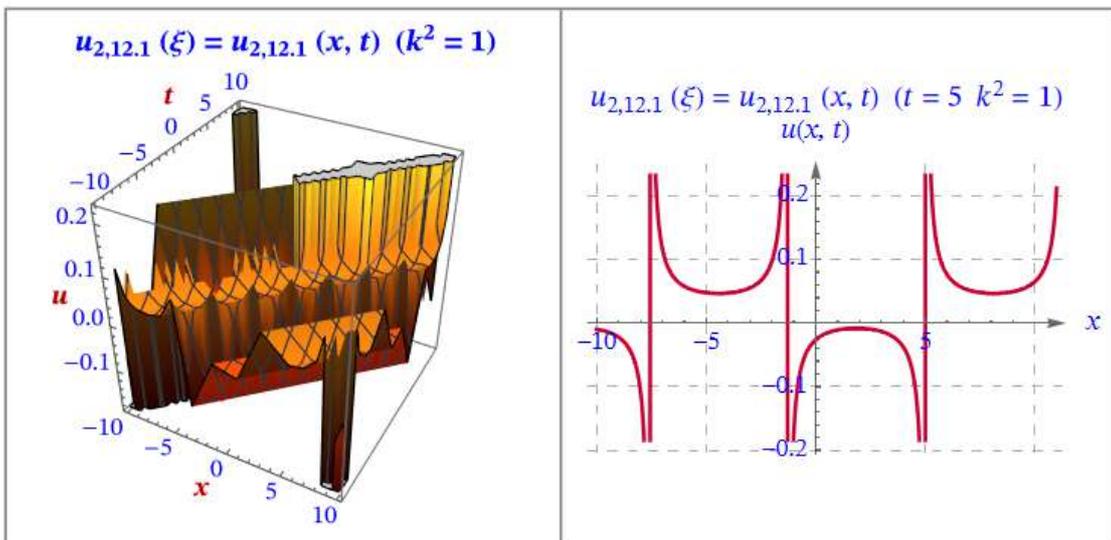
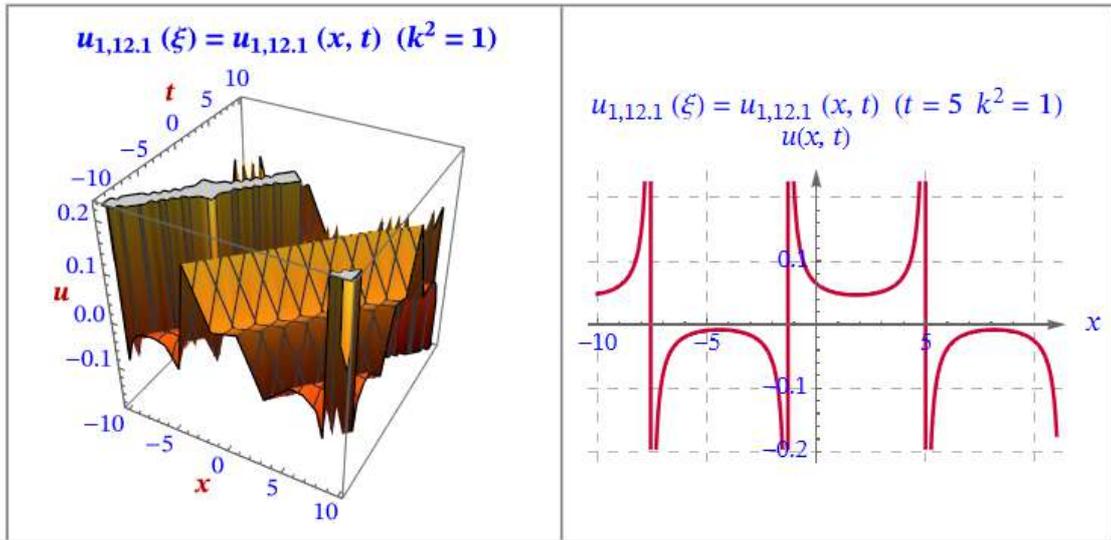
$$u_{1,7}(\xi) = u_{1,7}(x, t)$$

$$u_{2,7}(\xi) = u_{2,7}(x, t)$$



$$u_{1,12.1}(\xi) = u_{1,12.1}(x, t)$$

$$u_{2,12.1}(\xi) = u_{2,12.1}(x, t)$$



■ **Problema 2.3.16. Método de Expansión ($\frac{G'}{G}$). Gráficas de Varias Soluciones: ($k \rightarrow 0$).**

Representense las gráficas de las soluciones de la Ecuación Propagación de Ondas en Línea de Transmisión Eléctrica de Paso Bajo no Lineal (LPEL):

$$(ODE) \equiv (L C_0 \omega^2 - k^2) U(\xi) - L C_0 v \omega^2 U^2(\xi) + L C_0 \beta \omega^2 U^3(\xi) - \frac{1}{12} k^4 U''(\xi) = 0$$

$$(PDE) \equiv L C_0 V_{tt} - V_{xx} - \frac{\delta^2}{12} V_{xxxx} - L C v (V^2)_{tt} + L C \beta (V^3)_{tt}$$

con los parámetros indicados:

$$\begin{cases} C_1, C_2 & \text{constantes arbitrarias} \\ \xi = \sqrt{k} (x - \omega t) \\ \left\{ \alpha \rightarrow 3, \beta \rightarrow 26 + 4\sqrt{42}, \delta \rightarrow \frac{2\sqrt{18+3\sqrt{42}}}{6+\sqrt{42}}, k \rightarrow 0, k^2 \rightarrow 0 \right\} \\ \{C_1 \rightarrow 1, C_2 \rightarrow 1\} \end{cases}$$

(i) Caso I. Gráficas de las soluciones $u_{1,j}(x, t)$.

(ii) Caso II. Gráficas de las soluciones $u_{2,j}(x, t)$.

$$\begin{aligned} \bullet u_{1,j}(x, t), u_{2,j}(x, t) \quad (x, t) &= \begin{cases} x \in [-X, X] = [-10, 10] \\ t \in [-T, T] = [-10, 10] \end{cases} \\ \bullet u_{1,j}(x, t), u_{2,j}(x, t) \quad (x, t) &= \begin{cases} x \in [-X, X] = [-10, 10] \\ t = \frac{T}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

donde $j = \{1, 3, 5, 9, 15\}$ y las soluciones son:

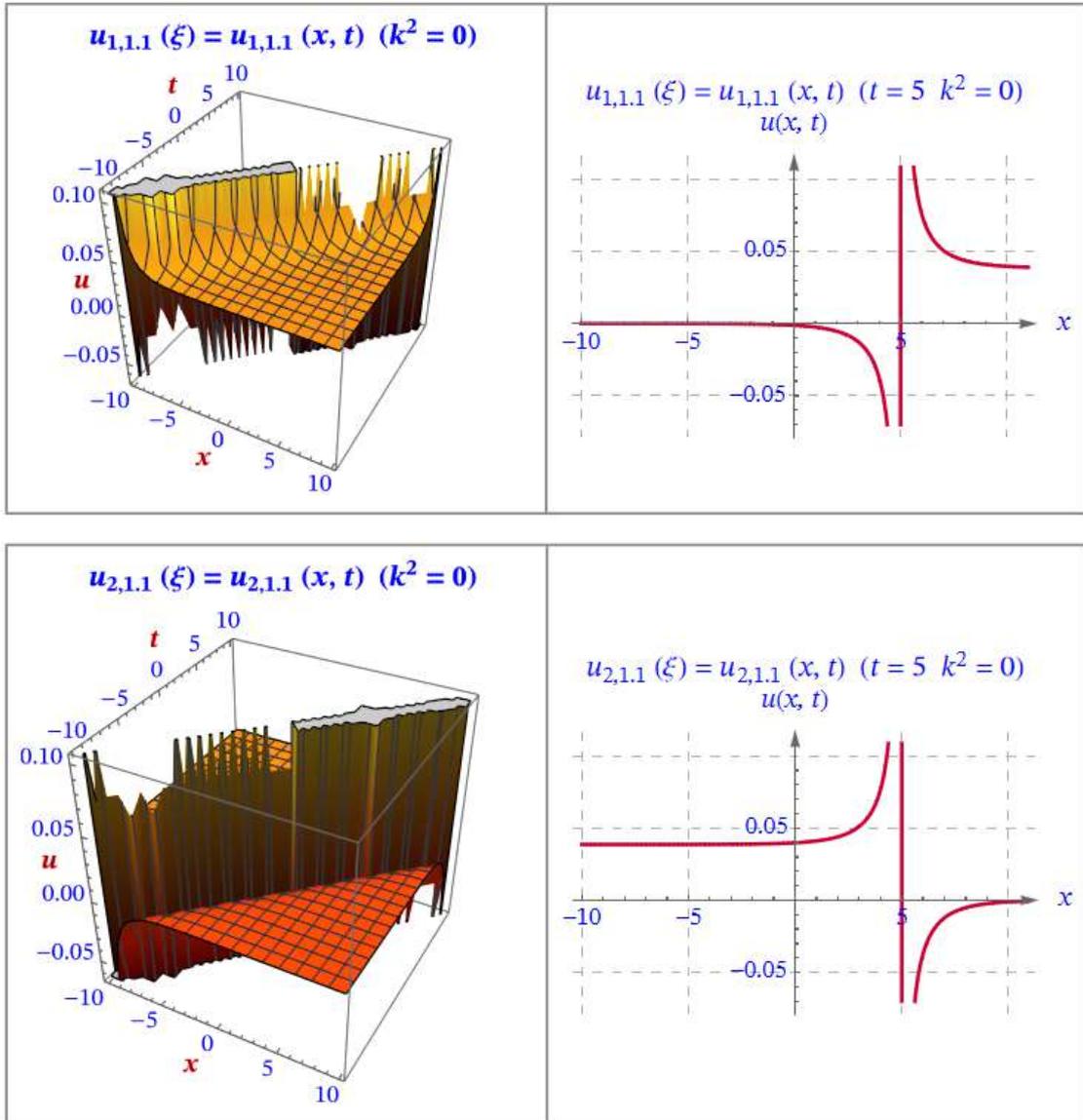
$$\begin{pmatrix} u_{1,1.1}(\xi) & u_{2,1.1}(\xi) \\ u_{1,2}(\xi) & u_{2,2}(\xi) \\ u_{1,4.1}(\xi) & u_{2,4.1}(\xi) \\ u_{1,7}(\xi) & u_{2,7}(\xi) \\ u_{1,12.1}(\xi) & u_{2,12.1}(\xi) \end{pmatrix}.$$

SOLUCIÓN

(a)

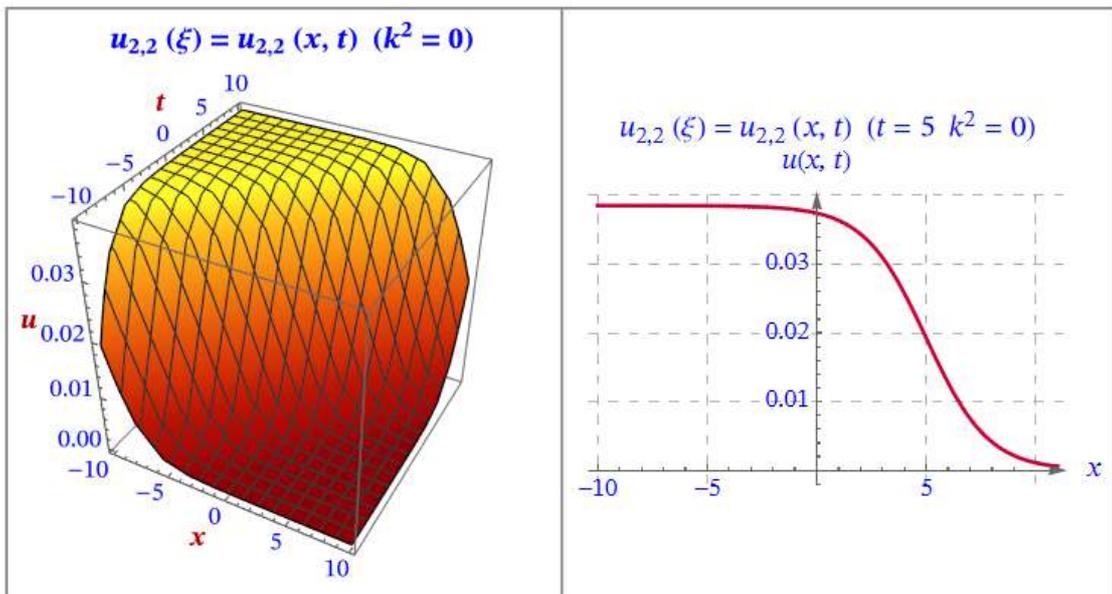
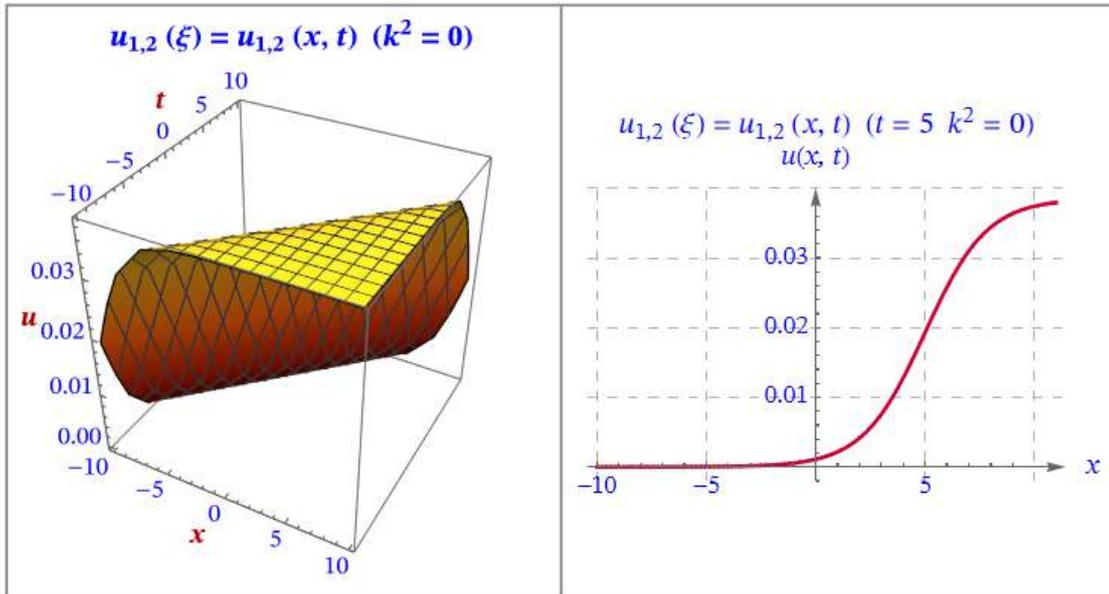
$$u_{1,1.1}(\xi) = u_{1,1.1}(x, t)$$

$$u_{2,1.1}(\xi) = u_{2,1.1}(x, t)$$



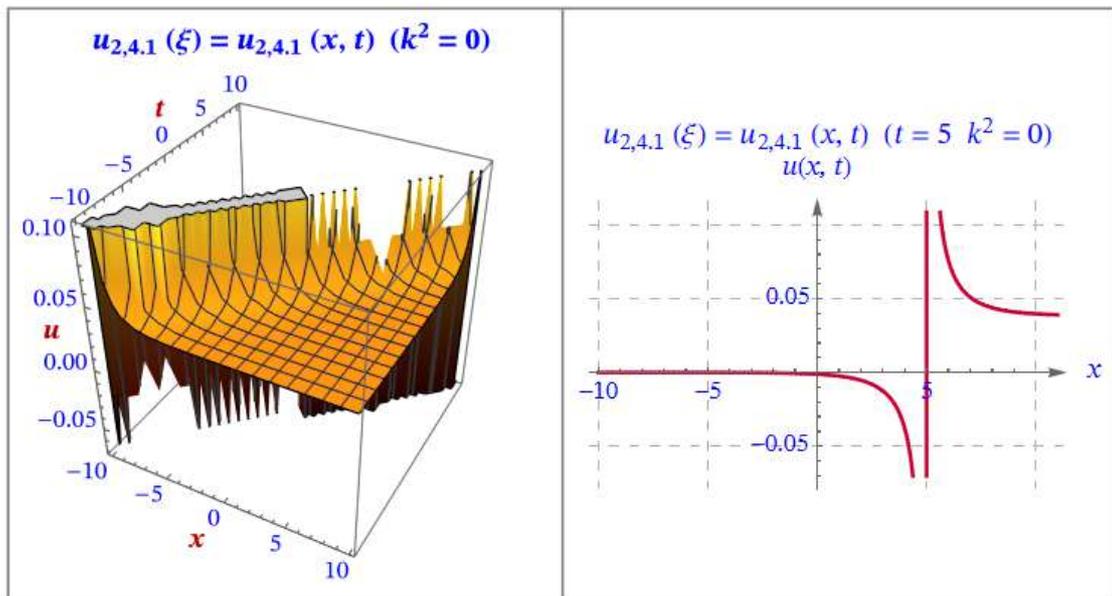
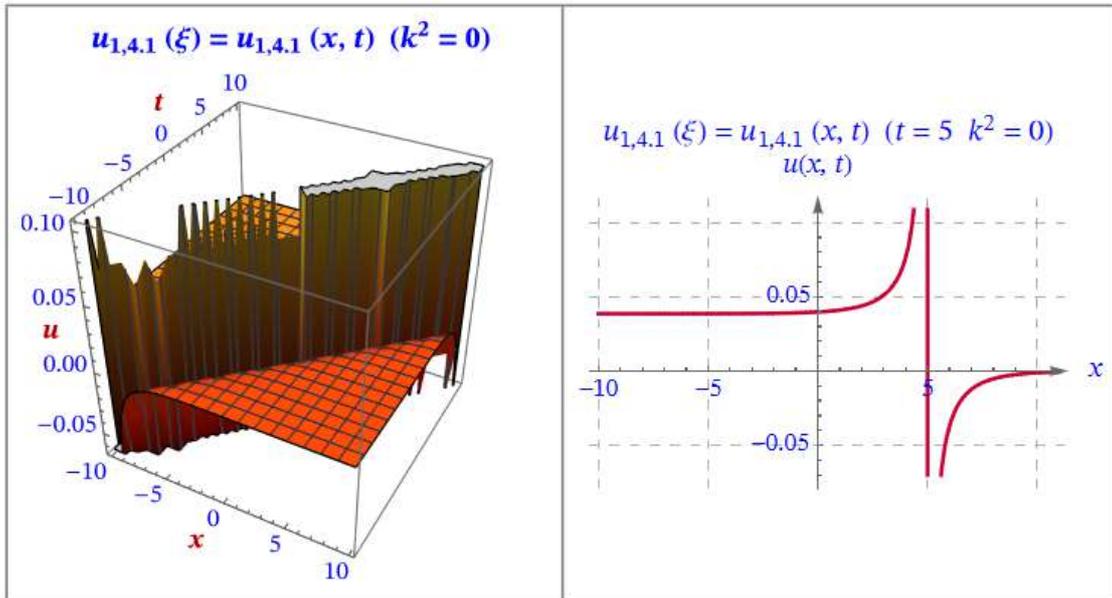
$$u_{1,2}(\xi) = u_{1,2}(x, t)$$

$$u_{2,2}(\xi) = u_{2,2}(x, t)$$



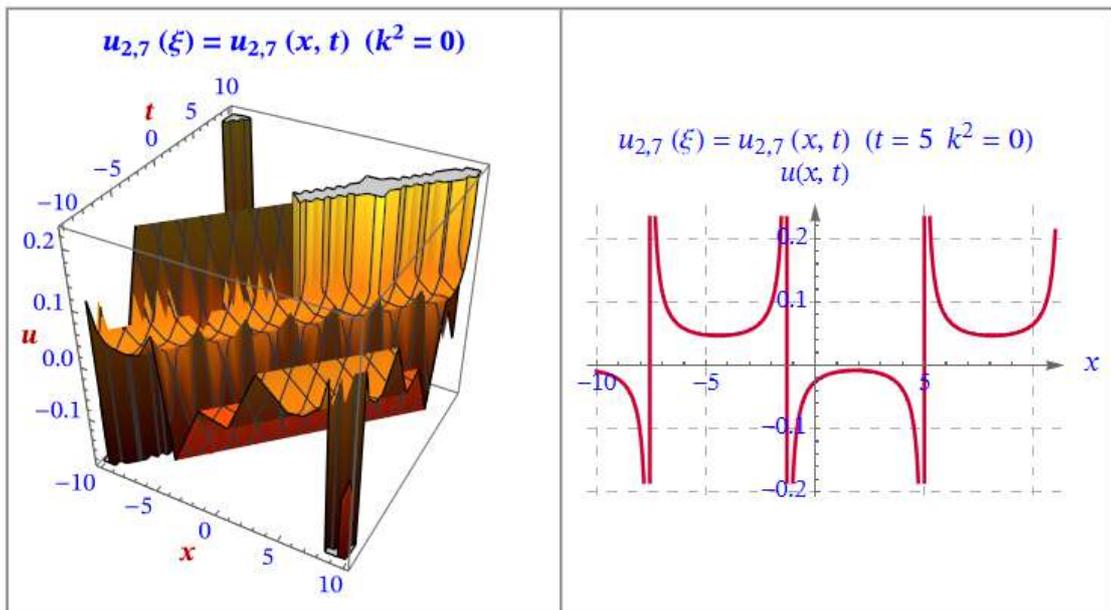
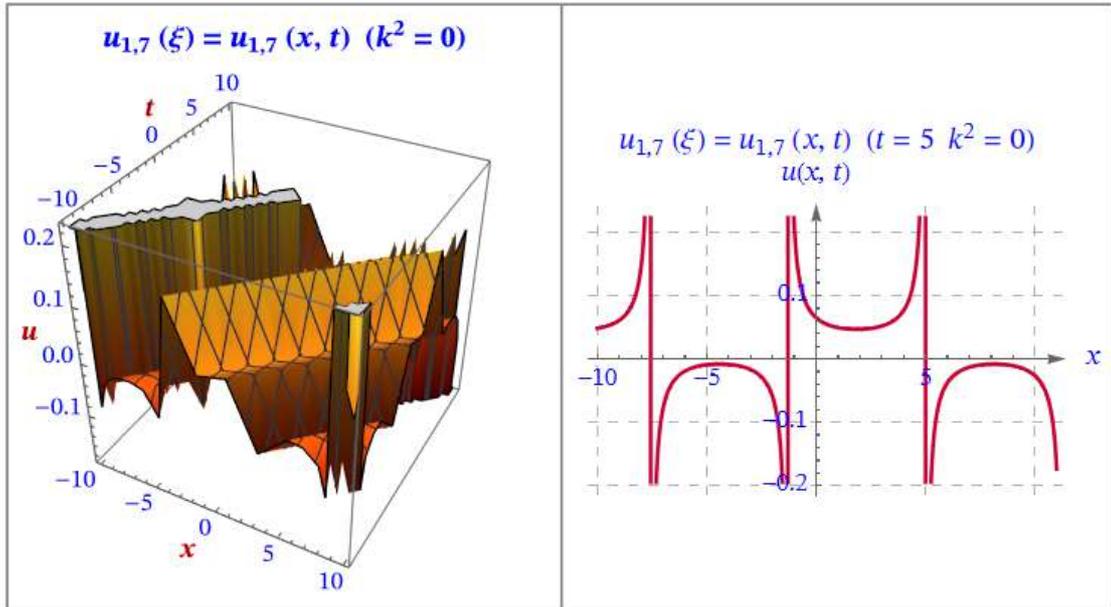
$$u_{1,4.1}(\xi) = u_{1,4.1}(x, t)$$

$$u_{2,4.1}(\xi) = u_{2,4.1}(x, t)$$



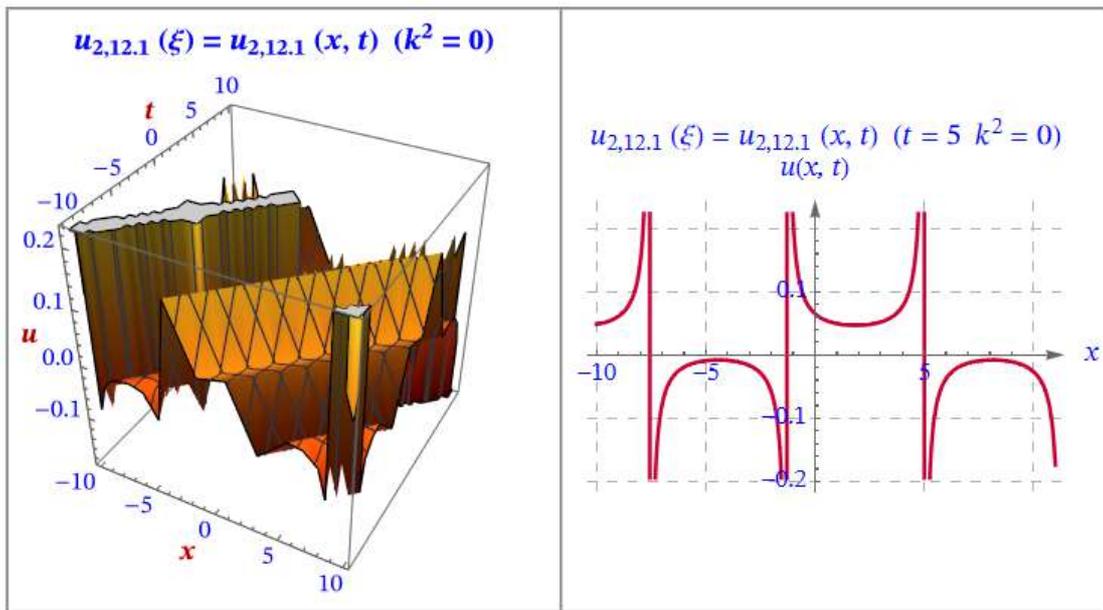
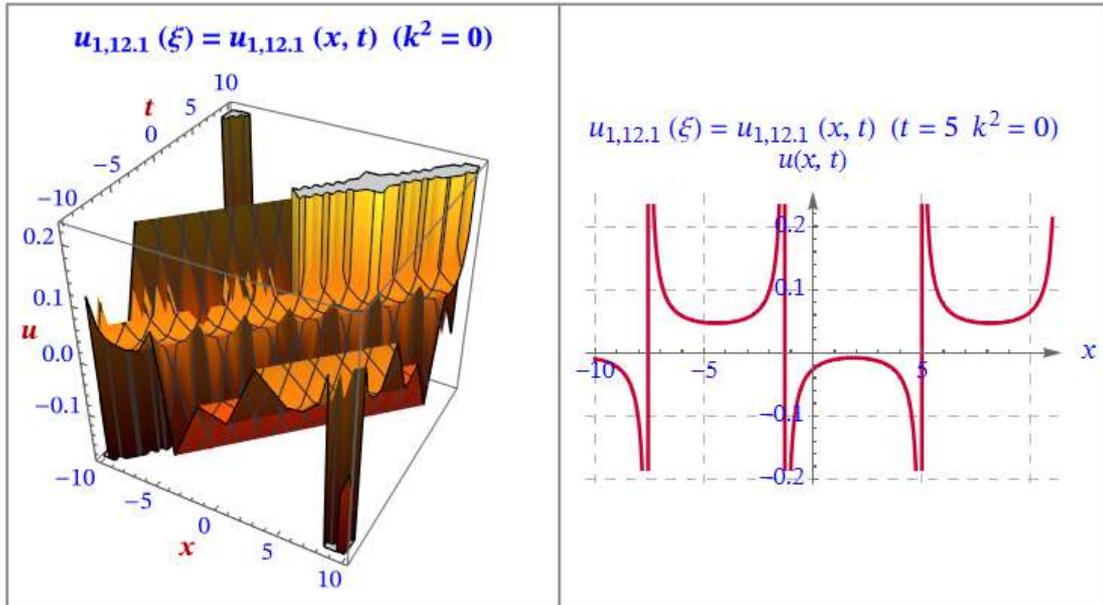
$$u_{1,7}(\xi) = u_{1,7}(x, t)$$

$$u_{2,7}(\xi) = u_{2,7}(x, t)$$



$$u_{1,12.1}(\xi) = u_{1,12.1}(x, t)$$

$$u_{2,12.1}(\xi) = u_{2,12.1}(x, t)$$



Capítulo 3

3. El Método de Expansión (G' / G^2)

3.1. Descripción del Método de Expansión (G' / G^2)

En el presente capítulo se procederá a estudiar el método analítico (G' / G^2) para encontrar soluciones a las EDPs fraccionarias del comportamiento dinámico de ondas de los solitones en función del espacio y tiempo. A través de este método, las ecuaciones no lineales fraccionarias se transforman en ecuaciones diferenciales ordinarias (ODE) de orden entero, lo cual simplifica notablemente su análisis y resolución [ARSH18], [NURU21].

Además, proporciona un enfoque sobre el comportamiento de los solitones muy útil, especialmente en contraste con otros métodos analíticos aplicables.

El método de expansión (G' / G^2) proporciona tres únicos tipos de soluciones posibles: soluciones hiperbólicas, soluciones trigonométricas y soluciones racionales.

Se considera que la EDP fraccionaria no lineal general es:

$$P(u, D_t^\alpha u, D_x^\alpha u, D_t^{2\alpha} u, D_t^\alpha D_x^\alpha u, D_x^{2\alpha} u) = 0, \quad 0 < \alpha < 1 \quad t \geq 0 \quad (3.1.1)$$

siendo $u = u(x, t)$ una función desconocida de las variables independientes x y t y P representando un polinomio de u y sus derivadas parciales.

Para poder estudiar la solución exacta de la ecuación (3.1.1), se deben seguir una serie de pasos:

Paso 1.

Para la resolución de la ecuación (3.1.1), se utilizará la siguiente transformación fraccionaria lineal:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= U(\xi) \\ \xi &= \frac{k_1 x^\alpha}{\alpha} + \frac{k_2 t^\alpha}{\alpha}, \quad \text{para } k_1, k_2 \neq 0 \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

Paso 2.

Aplicando la transformación anterior sobre la ecuación (3.1.1), se consigue una EDO de la forma:

$$\varphi(U, U', U'', U''', \dots) = 0 \quad (3.1.3)$$

donde $'$ representa la derivada ordinaria de U respecto a ξ .

Paso 3.

La solución general de la EDO se puede escribir como:

$$U(\xi) = a_0 + \sum_{i=1}^N \left(a_i \left(\frac{G'}{G^2} \right)^i + b_i \left(\frac{G'}{G^2} \right)^{-i} \right) \quad (3.1.4)$$

siendo $G = G(\xi)$ la solución de la siguiente ecuación:

$$\left(\frac{G'}{G^2} \right)' = \mu + \lambda \left(\frac{G'}{G^2} \right)^2 \quad (3.1.5)$$

En la ecuación (3.1.5), se cumple que μ y λ son números enteros y $\mu \neq 1$ y $\lambda \neq 0$. Además, a_0, a_n y a_n (para $n = 1, 2, 3, \dots, N$) son constantes desconocidas a determinar.

El valor de N se obtiene a partir de la realización de un balance homogéneo entre los términos no lineales y las derivadas de orden más alto de la EDO transformada, la ecuación (3.1.3).

Paso 4.

Se sustituye la ecuación (3.1.4), mediante el uso de la ecuación (3.1.5), en la ecuación (3.1.3). A continuación, todos los coeficientes obtenidos se igualan a cero para conseguir un sistema de ecuaciones algebraicas no lineales. Este sistema se resuelve con ayuda del software de *Mathematica* para obtener los valores de las constantes desconocidas a_0, a_n y a_n , para $n = 1, 2, 3, \dots, N$.

Paso 5.

La solución general de la ecuación (3.1.5) tiene tres posibles tipos de soluciones en función de los valores de μ y λ :

Caso 1: si $\mu \lambda > 0$

$$\left(\frac{G'}{G^2} \right) = \sqrt{\frac{\mu}{\lambda}} \left(\frac{C \cos(\sqrt{\mu \lambda} \xi) + D \sin(\sqrt{\mu \lambda} \xi)}{D \cos(\sqrt{\mu \lambda} \xi) - C \sin(\sqrt{\mu \lambda} \xi)} \right) \quad (3.1.6)$$

En este caso se obtiene como solución una función trigonométrica en función de las constantes C y D , cuyos valores son distintos de cero.

Caso 2: si $\mu \lambda < 0$

$$\left(\frac{G'}{G^2} \right) = -\frac{\sqrt{|\mu \lambda|}}{\lambda} \left(\frac{C \sinh(2 \sqrt{|\mu \lambda|} \xi) + C \cosh(2 \sqrt{|\mu \lambda|} \xi) + D}{C \sinh(2 \sqrt{|\mu \lambda|} \xi) + C \cosh(2 \sqrt{|\mu \lambda|} \xi) - D} \right) \quad (3.1.7)$$

En este caso se obtiene como solución una función hiperbólica en función de las constantes C y D , cuyos valores son distintos de cero.

Caso 3: si $\mu = 0$ y $\lambda \neq 0$

$$\left(\frac{G'}{G^2} \right) = -\frac{C}{\lambda (C \xi + D)} \quad (3.1.8)$$

En este caso se obtiene como solución una función racional en función de las constantes C y D , cuyos valores son distintos de cero.

Los tres tipos de soluciones (trigonométrica, hiperbólica y racional) se obtienen sustituyendo las ecuaciones (3.1.6), (3.1.7) y (3.1.8) en la ecuación (3.1.4).

3.2. Aplicación del Método de Expansión (G' / G^2)

En el siguiente apartado, se particularizará el método de expansión (G' / G^2) a la ecuación diferencial que describe la propagación de ondas en líneas eléctricas de paso bajo en función del espacio y tiempo [ARSH18], [NURU21].

En primer lugar, la ecuación diferencial que describe la propagación de ondas en líneas eléctricas de paso bajo es:

$$\begin{aligned} & \bullet L C_0 D_{tt}^{2\alpha} V(x, t) - D_{xx}^{2\alpha} V(x, t) - \frac{\delta^2}{12} D_{xxxx}^{4\alpha} V(x, t) - \\ & LC_0 \nu D_{tt}^{2\alpha} V^2(x, t) + LC_0 \beta D_{tt}^{2\alpha} V^3(x, t) = 0 \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

donde α , β y δ representan constantes positivas y reales. Por otro lado, $V(x, t)$ representa el voltaje de las líneas de transmisión eléctrica, x la distancia de propagación y t el tiempo.

D_x^α y D_t^α denotan las derivadas de Caputo de $V(x, t)$ de orden α respecto a x y t , respectivamente, para los valores $0 < \alpha < 1$.

Asimismo, cabe destacar que si se considera $LC_0 = 1$, la ecuación (3.2.1) es equivalente a la ecuación diferencial parcial de espacio-tiempo en líneas de transmisión eléctrica de paso bajo. Es por ello, que se va a fijar dicho valor.

Usando las siguientes transformaciones:

$$\begin{aligned} & V(x, t) = U(\xi) \\ & \xi = k \frac{x^\alpha}{\alpha} + c \frac{t^\alpha}{\alpha}, \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

e integrando dos veces la ecuación resultante respecto a ξ e igualando las constantes a cero, se obtiene la siguiente EDO:

$$(LC_0 c^2 - k^2) U - LC_0 \nu c^2 U^2 + LC_0 \beta c^2 U^3 - \frac{1}{12} \delta^2 k^4 U'' = 0 \quad (3.2.3)$$

De acuerdo con el método de expansión (G' / G^2), la solución general de la EDO tiene la siguiente forma:

$$U(\xi) = a_0 + \sum_{i=1}^N \left(a_i \left(\frac{G'}{G^2} \right)^i + b_i \left(\frac{G'}{G^2} \right)^{-i} \right). \quad (3.2.4)$$

Sin embargo para resolver la EDO a través del método de expansión (G' / G^2), es necesario encontrar el valor de N mediante el principio del balance homogéneo entre los términos no lineales y las derivadas de orden más alto. En este caso, se obtiene un valor de $N = 1$. Es por ello, que la solución general de la EDO que describe la transmisión de ondas en líneas eléctricas de paso bajo tiene la forma:

$$U(\xi) = a_0 + a_1 \left(\frac{G'}{G^2} \right) + b_1 \left(\frac{G'}{G^2} \right)^{-1} \quad (3.2.5)$$

donde a_0 , a_1 y b_1 son constantes arbitrarias a determinar.

Introduciendo la ecuación (3.2.5) en la ecuación (3.2.3), agrupando todos los coeficientes del mismo orden de $(G' / G^2)^i$, para $i = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$, e igualándolos a cero, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones algebraicas no lineales:

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{6} \delta^4 k^4 a_1 \lambda \mu - a_1 k^2 \delta^2 + 3 \beta c^2 a_0^2 a_1 + 3 \beta c^2 a_1^2 b_1 - 2 \nu c^2 a_0 a_1 + a_1 c^2 &= 0 \\
 -\frac{1}{6} \delta^4 k^4 b_1 \lambda \mu - b_1 k^2 \delta^2 + 3 \beta c^2 a_0^2 b_1 + 3 \beta c^2 b_1^2 a_1 - 2 \nu c^2 a_0 b_1 + b_1 c^2 &= 0 \\
 \beta c^2 a_0^3 + 6 \beta c^2 a_0 a_1 b_1 - c^2 \nu a_0^2 - 2 c^2 \nu a_1 b_1 - \delta^2 k^2 a_0 + c^2 a_0 &= 0 \\
 -\frac{1}{6} \delta^4 k^4 a_1 \lambda^2 + \beta c^2 a_1^3 &= 0 \\
 -\frac{1}{6} \delta^4 k^4 b_1 \mu^2 + \beta c^2 b_1^3 &= 0 \\
 3 \beta c^2 a_0 a_1^2 - \nu c^2 a_1^2 &= 0 \\
 3 \beta c^2 a_0 b_1^2 - \nu c^2 b_1^2 &= 0
 \end{aligned} \tag{3.2.6}$$

A partir de los valores obtenidos de este sistema de ecuaciones algebraicas no lineales, se obtienen varios conjuntos de valores para las constantes arbitrarias, que nos permiten conocer la solución de la ecuación que describe la transmisión de ondas en líneas eléctricas de paso bajo.

3.3. Propagación de Ondas en Línea de Transmisión Eléctrica de Paso Bajo no Lineal

Los conjuntos de valores de las constantes arbitrarias al sistema de ecuaciones algebraicas anterior son: [SHAH19], [NURU21]

Conjunto de soluciones 1:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{3} \frac{\nu}{\beta} & a_1 &= \frac{\nu}{\beta} \sqrt{-\frac{1}{9} \frac{\lambda}{\mu}} & b_1 &= 0 \\
 k &= \frac{\nu}{\delta} \sqrt{\frac{6}{(2\nu^2 - 9\beta)\mu\lambda}} & c &= \frac{6\nu}{\delta(2\nu^2 - 9\beta)} \sqrt{-\frac{3}{2} \frac{\beta}{LC_0\mu\lambda}}
 \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

Para este conjunto de valores de las constantes arbitrarias, se obtendrá una solución exacta a la ecuación que representa el potencial de las líneas de transmisión eléctrica de paso bajo en función de los valores de μ y λ , diferenciando los casos en los que $\mu\lambda$ es mayor o menor que cero.

Si $\mu\lambda > 0$:

$$\begin{aligned}
 V_1(x, t) &= \frac{1}{3} \frac{\nu}{\beta} + \frac{\nu}{\beta} \sqrt{-\frac{1}{9}} \left(\frac{C \cos(\sqrt{\mu\lambda} \xi) + D \sin(\sqrt{\mu\lambda} \xi)}{D \cos(\sqrt{\mu\lambda} \xi) - C \sin(\sqrt{\mu\lambda} \xi)} \right) \\
 \bullet \xi &= k \frac{x^\alpha}{\alpha} + c \frac{t^\alpha}{\alpha}.
 \end{aligned} \tag{3.3.2}$$

En este caso se obtienen soluciones de la forma de función trigonométrica.

Si $\mu\lambda < 0$:

$$\begin{aligned}
 V_2(x, t) &= \\
 \frac{1}{3} \frac{\nu}{\beta} - \frac{\nu}{\beta} \sqrt{-\frac{1}{9} \frac{\lambda}{\mu}} \frac{\sqrt{|\mu\lambda|}}{\lambda} &\left(\frac{C \sinh(2\sqrt{|\mu\lambda|} \xi) + C \cosh(2\sqrt{|\mu\lambda|} \xi) + D}{C \sinh(2\sqrt{|\mu\lambda|} \xi) + C \cosh(2\sqrt{|\mu\lambda|} \xi) - D} \right)
 \end{aligned} \tag{3.3.3}$$

En este caso se obtienen soluciones de la forma de función hiperbólica.

Conjunto de soluciones 2:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{3} \frac{\nu}{\beta} & a_1 &= 0 & b_1 &= \frac{\nu}{\beta} \sqrt{-\frac{1}{9} \frac{\mu}{\lambda}} \\
 k &= \frac{\nu}{\delta} \sqrt{\frac{6}{(2\nu^2 - 9\beta)\mu\lambda}} & c &= \frac{6\nu}{\delta(2\nu^2 - 9\beta)} \sqrt{-\frac{3}{2} \frac{\beta}{LC_0\mu\lambda}}
 \end{aligned} \tag{3.3.4}$$

Para este conjunto de valores de las constantes arbitrarias, se obtendrá una solución exacta a la ecuación que representa el potencial de las líneas de transmisión eléctrica de paso bajo en función de los valores de μ y λ , diferenciando los casos en los que $\mu\lambda$ es mayor o menor que cero.

Si $\mu \lambda > 0$:

$$V_3(x, t) = \frac{1}{3} \frac{v}{\beta} + \frac{v}{\beta} \sqrt{-\frac{1}{9}} \left(\frac{D \cos(\sqrt{\mu \lambda} \xi) - C \sin(\sqrt{\mu \lambda} \xi)}{C \cos(\sqrt{\mu \lambda} \xi) + D \sin(\sqrt{\mu \lambda} \xi)} \right) \quad (3.3.5)$$

$$\bullet \xi = k \frac{x^\alpha}{\alpha} + c \frac{t^\alpha}{\alpha}.$$

En este caso se obtienen soluciones de la forma de función trigonométrica.

Si $\mu \lambda < 0$:

$$V_4(x, t) = \frac{1}{3} \frac{v}{\beta} - \frac{v}{\beta} \sqrt{-\frac{1}{9}} \frac{\lambda}{\mu} \frac{1}{\sqrt{|\mu \lambda|}} \left(\frac{C \sinh(2 \sqrt{|\mu \lambda|} \xi) + C \cosh(2 \sqrt{|\mu \lambda|} \xi) + D}{C \sinh(2 \sqrt{|\mu \lambda|} \xi) + C \cosh(2 \sqrt{|\mu \lambda|} \xi) - D} \right) \quad (3.3.6)$$

En este caso se obtienen soluciones de la forma de función hiperbólica.

Conjunto de soluciones 3:

$$a_0 = \frac{1}{3} \frac{v}{\beta} \quad a_1 = \frac{v}{\beta} \quad b_1 = \frac{1}{36} \frac{v}{\beta} \frac{1}{\sqrt{-\frac{1}{36} \frac{\lambda}{\mu}}} \quad (3.3.7)$$

$$k = \frac{v}{\delta} \sqrt{\frac{3}{2(2v^2 - 9\beta)\mu\lambda}} \quad c = \frac{6v}{\delta(2v^2 - 9\beta)} \sqrt{-\frac{3}{8} \frac{\beta}{L C_0 \mu \lambda}}$$

Para este conjunto de valores de las constantes arbitrarias, se obtendrá una solución exacta a la ecuación que representa el potencial de las líneas de transmisión eléctrica de paso bajo en función de los valores de μ y λ , diferenciando los casos en los que $\mu\lambda$ es mayor o menor que cero.

La expresión del potencial de las líneas de transmisión eléctrica de paso bajo queda en función de dos constantes arbitrarias, C y D .

Si $\mu \lambda > 0$:

$$V_5(x, t) = \frac{1}{3} \frac{v}{\beta} + \frac{v}{\beta} \sqrt{-\frac{1}{36}} \left(\frac{C \cos(\sqrt{\mu \lambda} \xi) + D \sin(\sqrt{\mu \lambda} \xi)}{D \cos(\sqrt{\mu \lambda} \xi) - C \sin(\sqrt{\mu \lambda} \xi)} \right) +$$

$$\frac{1}{36} \frac{v}{\beta} \frac{1}{\sqrt{-\frac{1}{36}}} \left(\frac{D \cos(\sqrt{\mu \lambda} \xi) - C \sin(\sqrt{\mu \lambda} \xi)}{C \cos(\sqrt{\mu \lambda} \xi) + D \sin(\sqrt{\mu \lambda} \xi)} \right) \quad (3.3.8)$$

$$\bullet \xi = k \frac{x^\alpha}{\alpha} + c \frac{t^\alpha}{\alpha}.$$

En este caso se obtienen soluciones de la forma de función trigonométrica.

Si $\mu \lambda < 0$:

$$\begin{aligned}
 V_6(x, t) &= \frac{1}{3} \frac{\nu}{\beta} - \\
 &\frac{\nu}{\beta} \sqrt{-\frac{1}{36} \frac{\lambda}{\mu}} \frac{\sqrt{|\mu \lambda|}}{\lambda} \left(\frac{C \sinh(2 \sqrt{|\mu \lambda|} \xi) + C \cosh(2 \sqrt{|\mu \lambda|} \xi) + D}{C \sinh(2 \sqrt{|\mu \lambda|} \xi) + C \cosh(2 \sqrt{|\mu \lambda|} \xi) - D} \right) - \\
 &\frac{1}{36} \frac{\nu}{\beta} \frac{1}{\sqrt{-\frac{1}{36} \frac{\lambda}{\mu}}} \frac{\lambda}{\sqrt{|\mu \lambda|}} \\
 &\left(\frac{C \sinh(2 \sqrt{|\mu \lambda|} \xi) + C \cosh(2 \sqrt{|\mu \lambda|} (k \frac{x^\alpha}{\alpha} + c \frac{t^\alpha}{\alpha})) - D}{C \sinh(2 \sqrt{|\mu \lambda|} \xi) + C \cosh(2 \sqrt{|\mu \lambda|} \xi) - D} \right).
 \end{aligned} \tag{3.3.9}$$

Se obtienen soluciones de la forma de función hiperbólica.

Conjunto de soluciones 4:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{3} \frac{\nu}{\beta} & a_1 &= \frac{\nu}{\beta} \sqrt{\frac{1}{18} \frac{\lambda}{\mu}} & b_1 &= \frac{1}{\sqrt{18}} \frac{\nu}{\beta} \frac{1}{\sqrt{\frac{\lambda}{\mu}}} \\
 k &= \frac{\nu}{\delta} \sqrt{-\frac{3}{(2\nu^2 - 9\beta)\mu\lambda}} & c &= \frac{3\sqrt{3}\nu}{\delta(2\nu^2 - 9\beta)} \sqrt{\frac{\beta}{LC_0\mu\lambda}}.
 \end{aligned} \tag{3.3.10}$$

Para este conjunto de valores de las constantes arbitrarias, se obtendrá una solución exacta a la ecuación que representa el potencial de las líneas de transmisión eléctrica de paso bajo en función de los valores de μ y λ , diferenciando los casos en los que $\mu \lambda$ es mayor o menor que cero.

Si $\mu \lambda > 0$:

$$\begin{aligned}
 V_7(x, t) &= \frac{1}{3} \frac{\nu}{\beta} + \frac{\nu}{\beta} \sqrt{\frac{1}{18}} \left(\frac{C \cos(\sqrt{\mu \lambda} \xi) + D \sin(\sqrt{\mu \lambda} \xi)}{D \cos(\sqrt{\mu \lambda} \xi) - C \sin(\sqrt{\mu \lambda} \xi)} \right) + \\
 &\frac{1}{\sqrt{18}} \frac{\nu}{\beta} \left(\frac{D \cos(\sqrt{\mu \lambda} \xi) - C \sin(\sqrt{\mu \lambda} \xi)}{C \cos(\sqrt{\mu \lambda} \xi) + D \sin(\sqrt{\mu \lambda} \xi)} \right)
 \end{aligned} \tag{3.3.11}$$

En este caso se obtienen soluciones de la forma de función trigonométrica.

Si $\mu \lambda < 0$:

$$\begin{aligned}
 & V_8(x, t) = \\
 & \frac{1}{3} \frac{\nu}{\beta} - \frac{\nu}{\beta} \sqrt{\frac{1}{18} \frac{\lambda}{\mu}} \frac{\sqrt{|\mu \lambda|}}{\lambda} ((C \sinh(2 \sqrt{|\mu \lambda|} \xi) + C \cosh(2 \sqrt{|\mu \lambda|} \xi) + D) / \\
 & \quad (C \sinh(2 \sqrt{|\mu \lambda|} \xi) + C \cosh(2 \sqrt{|\mu \lambda|} \xi) - D)) - \\
 & \frac{1}{\sqrt{18}} \frac{\nu}{\beta} \sqrt{\frac{\lambda}{\mu}} \frac{\lambda}{\sqrt{|\mu \lambda|}} ((C \sinh(2 \sqrt{|\mu \lambda|} \xi) + C \cosh(2 \sqrt{|\mu \lambda|} \xi) - D) / \\
 & \quad (C \sinh(2 \sqrt{|\mu \lambda|} \xi) + C \cosh(2 \sqrt{|\mu \lambda|} \xi) - D)).
 \end{aligned} \tag{3.3.12}$$

En este caso se obtienen soluciones de la forma de función hiperbólica.

En los siguientes apartados, se estudiarán las soluciones generales de las ecuaciones diferenciales auxiliares siguientes:

(a) Ecuación diferencial generalizada de Riccati:

$$G'(\xi) = r + p G(\xi) + q G^2(\xi). \tag{3.3.13}$$

3.4. Problemas

3.4.1. Problemas (*Low-Pass Electrical Lines-LPEL*) ODE de Riccati:

$$\left(\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)}\right)' = a + b \left(\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)}\right) + c \left(\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)}\right)^2.$$

[[SHAH19](#)], [[NURU21](#)]

■ Ecuación Propagación de Ondas en Línea de Transmisión Eléctrica de Paso Bajo no Lineal

Sea la PDEs no lineal que rige la propagación de ondas en línea de transmisión eléctrica de paso bajo no lineal (*Low-Pass Electrical Lines-LPEL*) [[NURU21](#)].

$$\bullet (\text{PDE}) \equiv L C_0 V_{tt} - V_{xx} - \frac{\delta^2}{12} V_{xxxx} - L C v (V^2)_{tt} + L C \beta (V^3)_{tt} = 0$$

que se reduce mediante la transformación

$$V = V(x, t) = U(\xi) \quad \xi = kx + \omega t$$

en la ecuación diferencial de segundo grado no lineal (ODE) :

$$(\text{ODE}) \equiv (L C_0 \omega^2 - k^2) U(\xi) - L C_0 v \omega^2 U^2(\xi) + L C_0 \beta \omega^2 U^3(\xi) - \frac{1}{12} \delta^2 k^4 U''(\xi) = 0.$$

$$(\text{ODE - Ricatti}) \equiv \left(\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)}\right)' = a + b \left(\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)}\right) + c \left(\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)}\right)^2$$

Cambio de Variable

$$z(\xi) = \left(\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)}\right) \quad z'(\xi) = \left(\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)}\right)' \quad z''(\xi) = \left(\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)}\right)''$$

$$(\text{ODE - Ricatti}) \equiv z'(\xi) = a + b z(\xi) + c z(\xi)^2$$

$$z''(\xi) = b z'(\xi) + 2 c z(\xi) z'(\xi) = (b + 2 c z(\xi)) (a + b z(\xi) + c z(\xi)^2)$$

$$z''(\xi) = a b + 2 a c z(\xi) + b^2 z(\xi) + 3 b c z(\xi)^2 + 2 c^2 z(\xi)^3$$

Si la solución a la ODE es

$$u(\xi) = a_0 + a_1 \left(\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)}\right)^1 + b_1 \left(\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)}\right)^{-1}$$

$$u(\xi) = a_0 + a_1 z(\xi) + b_1 z^{-1}(\xi)$$

al derivar, resulta

$$u(\xi) = a_1 z'(\xi) - b_1 z^{-2}(\xi) z'(\xi) = (a_1 - b_1 z^{-2}(\xi)) \underline{z'(\xi)}$$

$$\bullet z'(\xi) = a + b z(\xi) + c z(\xi)^2$$

$$u(\xi) = (a_1 - b_1 z^{-2}(\xi)) (a + b z(\xi) + c z(\xi)^2)$$

$$u'(\xi) = a_1 a + a_1 b z(\xi) + a_1 c z^2(\xi) - b b_1 z^{-1}(\xi) - a b_1 z^{-2}(\xi) - c b_1$$

$$u(\xi) = a_0 + \sum_{k=1}^N \left(a_k \left(\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)}\right)^k + b_k \left(\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)}\right)^{-k} \right)$$

■ **Problema 3.4.1. Método de Expansión ($\frac{G'}{G^2}$) (ODE de Riccati).**

Sea la ecuación diferencial de segundo grado no lineal (ODE)

$$(ODE) \equiv (L C_0 \omega^2 - k^2) U(\xi) - L C_0 v \omega^2 U^2(\xi) + L C_0 \beta \omega^2 U^3(\xi) - \frac{1}{12} k^4 U''(\xi) = 0$$

(a) Sustitúyase la solución para $m = 1$:

$$U(\xi) = u(\xi) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^N \left(\alpha_k \left(\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)} \right)^k + \beta_k \left(\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)} \right)^{-k} \right)$$

$$u(\xi) = \alpha_0 + \alpha_1 \left(\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)} \right) + \beta_1 \left(\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)} \right)^{-1}$$

y las expresiones de $u^2(\xi)$, $u^3(\xi)$, $u'(\xi)$ y $u''(\xi)$ expresadas como polinomios en términos de $\left(\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)} \right)^k$ y $\left(\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)} \right)^{-k}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) en la ecuación (ODE).

(a) Determinéense las expresiones de

$$z'(\xi) \quad z''(\xi) \quad z^{(3)}(\xi)$$

en función de $z(\xi) = \left(\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)} \right)$, partiendo de la ODE de Riccati:

$$(ODE - Riccati) \equiv \left(\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)} \right)' = a + b \left(\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)} \right) + c \left(\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)} \right)^2$$

$$(ODE - Riccati) \equiv z'(\xi) = a + b z(\xi) + c z(\xi)^2$$

(b) Determinéense las expresiones de $u(\xi)$, $u'(\xi)$, $u''(\xi)$ en términos de $z(\xi) = \left(\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)} \right)$.

(b.1) Dedúzcase el sistema (ODE) expresado como polinomios en términos de $z(\xi)^k = \left(\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)} \right)^k$ y $z(\xi)^{-k} = \left(\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)} \right)^{-k}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$)

$$(ODE) \equiv \left\{ \alpha_0 + \sum_{k=1}^m \left[\alpha_k z(\xi)^k + \beta_k z(\xi)^{-k} \right] \right\} = 0$$

(b.2) Determinéense el sistema algebraico de ecuaciones correspondientes agrupando los términos del mismo orden de $\left(\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)} \right)^k$ y $\left(\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)} \right)^{-k}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) del lado izquierdo de la ecuación y reduciendo los coeficientes a cero.

(c) Resuélvase el sistema algebraico de ecuaciones en las variables $\{\alpha_0, \alpha_1, \beta_1, k, \omega\}$.

(d) Exprésense las soluciones obtenidas:

$$\bullet u(\xi) = \alpha_0 + \alpha_1 \left(\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)} \right) + \beta_1 \left(\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)} \right)^{-1} \quad \bullet u(\xi) = \alpha_0 + \alpha_1 z(\xi) + \beta_1 z(\xi)^{-1}.$$

(e) Compruébense las soluciones obtenidas $u_k(\xi)$ en la ecuación ODE.

(f) Créese una tabla con las soluciones y los siguientes datos:

$u_k(\xi)$	$\alpha_0 + \alpha_1 z(\xi) + \beta_1 z(\xi)^{-1}$	k	ω
------------	--	-----	----------

 $\left\{ z(\xi) \rightarrow \left(\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)} \right) \right\}.$

SOLUCIÓN

(a)

Reglas
$\left\{ z(\xi) \rightarrow \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)^2} \right) \right\}$
$\left\{ z'(\xi) \rightarrow a + b z(\xi) + c z(\xi)^2 \right\}$
$\left\{ z''(\xi) \rightarrow z(\xi) (2ac + b^2) + ab + 3bc z(\xi)^2 + 2c^2 z(\xi)^3 \right\}$
$\left\{ z^{(3)}(\xi) \rightarrow z(\xi) (8abc + b^3) + cz(\xi)^2 (8ac + 7b^2) + a(2ac + b^2) + 12bc^2 z(\xi)^3 + 6c^3 z(\xi)^4 \right\}$

(b)

Tabla 3.1. Expresiones de $u(\xi)$ y sus derivadas a partir de la ecuación

Generalizada de Riccati (ODE – Riccati) $\equiv \left(\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)} \right)' = a + b \left(\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)} \right) + c \left(\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)} \right)^2$.

$u(\xi)$	$\alpha_0 + \alpha_1 z(\xi) + \frac{\beta_1}{z(\xi)}$
$u(\xi)$	$\alpha_0 + \alpha_1 \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)^2} \right) + \frac{\beta_1}{\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)^2} \right)}$
$u'(\xi)$	$a \alpha_1 - \frac{a \beta_1}{z(\xi)^2} + \alpha_1 b z(\xi) - \frac{b \beta_1}{z(\xi)} - \beta_1 c + \alpha_1 c z(\xi)^2$
$u'(\xi)$	$a \alpha_1 - \frac{a \beta_1}{\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)^2} \right)^2} + \alpha_1 b \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)^2} \right) - \frac{b \beta_1}{\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)^2} \right)} - \beta_1 c + \alpha_1 c \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)^2} \right)^2$
$u''(\xi)$	$\frac{2a^2 \beta_1}{z(\xi)^3} + \alpha_1 z(\xi) (2ac + b^2) + \frac{\beta_1 (2ac + b^2)}{z(\xi)} +$ $b(a \alpha_1 + \beta_1 c) + \frac{3ab \beta_1}{z(\xi)^2} + 3 \alpha_1 b c z(\xi)^2 + 2 \alpha_1 c^2 z(\xi)^3$
$u''(\xi)$	$\frac{2a^2 \beta_1}{\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)^2} \right)^3} + \alpha_1 (2ac + b^2) \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)^2} \right) + \frac{\beta_1 (2ac + b^2)}{\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)^2} \right)} +$ $b(a \alpha_1 + \beta_1 c) + \frac{3ab \beta_1}{\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)^2} \right)^2} + 3 \alpha_1 b c \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)^2} \right)^2 + 2 \alpha_1 c^2 \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)^2} \right)^3$

{(b.1) Ecuación (ODE).}

$$\left\{ \left(\text{ODE} \equiv (L C_0 \omega^2 - k^2) u(\xi) - L C_0 v \omega^2 u(\xi)^2 + L C_0 \beta \omega^2 u(\xi)^3 - \frac{1}{12} \delta^2 k^4 u_2(\xi) \right) = 0 \right\}$$

$$\left\{ \text{ODE-2, } \frac{\beta \beta_1^3 C_0 L \omega^2 - \frac{1}{6} a^2 \beta_1 \delta^2 k^4}{z(\xi)^3} + \right.$$

$$\frac{1}{6} \alpha_1 z(\xi) (6 C_0 L \omega^2 (3 \alpha_0^2 \beta + 3 \alpha_1 \beta \beta_1 - 2 \alpha_0 v + 1) - k^2 (a c \delta^2 k^2 + 6)) +$$

$$\frac{\beta_1 (6 C_0 L \omega^2 (3 \alpha_0^2 \beta + 3 \alpha_1 \beta \beta_1 - 2 \alpha_0 v + 1) - k^2 (a c \delta^2 k^2 + 6))}{6 z(\xi)} +$$

$$z(\xi)^3 \left(\alpha_1^3 \beta C_0 L \omega^2 - \frac{1}{6} \alpha_1 c^2 \delta^2 k^4 \right) + \alpha_0 (C_0 L \omega^2 (6 \alpha_1 \beta \beta_1 + 1) - k^2) +$$

$$\alpha_0^3 \beta C_0 L \omega^2 - 2 \alpha_1 \beta_1 C_0 L v \omega^2 - \alpha_0^2 C_0 L v \omega^2 -$$

$$\alpha_1^2 C_0 L \omega^2 z(\xi)^2 (v - 3 \alpha_0 \beta) - \frac{\beta_1^2 C_0 L \omega^2 (v - 3 \alpha_0 \beta)}{z(\xi)^2}, = 0 \left. \right\}$$

{(b.2) Sistema algebraico de ecuaciones.}

$(z(\xi))^0 = \left(\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)}\right)^0:$	$\alpha_0^3 \beta C_0 L \omega^2 + 6 \alpha_1 \alpha_0 \beta \beta_1 C_0 L \omega^2 +$ $\alpha_0 C_0 L \omega^2 - 2 \alpha_1 \beta_1 C_0 L v \omega^2 - \alpha_0^2 C_0 L v \omega^2 - \alpha_0 k^2$	= 0
$(z(\xi))^1 = \left(\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)}\right)^1:$	$\frac{1}{6} \alpha_1 (6 C_0 L \omega^2 - k^2 (a c \delta^2 k^2 + 6)) +$ $3 \alpha_0^2 \alpha_1 \beta C_0 L \omega^2 + 3 \alpha_1^2 \beta \beta_1 C_0 L \omega^2 - 2 \alpha_0 \alpha_1 C_0 L v \omega^2$	= 0
$(z(\xi))^2 = \left(\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)}\right)^2:$	$3 \alpha_0 \alpha_1^2 \beta C_0 L \omega^2 - \alpha_1^2 C_0 L v \omega^2$	= 0
$(z(\xi))^3 = \left(\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)}\right)^3:$	$\alpha_1^3 \beta C_0 L \omega^2 - \frac{1}{6} \alpha_1 c^2 \delta^2 k^4$	= 0
$(z(\xi))^{-1} = \left(\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)}\right)^{-1}:$	$\frac{1}{6} \beta_1 (6 C_0 L \omega^2 - k^2 (a c \delta^2 k^2 + 6)) +$ $3 \alpha_1 \beta \beta_1^2 C_0 L \omega^2 + 3 \alpha_0^2 \beta \beta_1 C_0 L \omega^2 - 2 \alpha_0 \beta_1 C_0 L v \omega^2$	= 0
$(z(\xi))^{-2} = \left(\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)}\right)^{-2}:$	$3 \alpha_0 \beta \beta_1^2 C_0 L \omega^2 - \beta_1^2 C_0 L v \omega^2$	= 0
$(z(\xi))^{-3} = \left(\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)}\right)^{-3}:$	$\beta \beta_1^3 C_0 L \omega^2 - \frac{1}{6} a^2 \beta_1 \delta^2 k^4$	= 0

(c)

i	α_0	α_1	β_1	k	ω
1	$\frac{v}{3\beta}$	$\frac{v\sqrt{-\frac{c}{a}}}{3\beta}$	0	$\frac{\sqrt{6}v\sqrt{\frac{1}{ac(2v^2-9\beta)}}}{\delta}$	$\frac{3\sqrt{6}v\sqrt{-\frac{\beta}{acC_0L}}}{\delta(2v^2-9\beta)}$
2	$\frac{v}{3\beta}$	0	$\frac{v\sqrt{-\frac{a}{c}}}{3\beta}$	$\frac{\sqrt{6}v\sqrt{\frac{1}{ac(2v^2-9\beta)}}}{\delta}$	$\frac{3\sqrt{6}v\sqrt{-\frac{\beta}{acC_0L}}}{\delta(2v^2-9\beta)}$
3	$\frac{v}{3\beta}$	$\frac{v\sqrt{-\frac{c}{a}}}{6\beta}$	$\frac{v}{6\beta\sqrt{-\frac{c}{a}}}$	$\frac{\sqrt{\frac{3}{2}}v\sqrt{\frac{1}{ac(2v^2-9\beta)}}}{\delta}$	$\frac{3\sqrt{\frac{3}{2}}v\sqrt{-\frac{\beta}{acC_0L}}}{\delta(2v^2-9\beta)}$
4	$\frac{v}{3\beta}$	$\frac{v\sqrt{\frac{c}{a}}}{3\sqrt{2}\beta}$	$\frac{v}{3\sqrt{2}\beta\sqrt{\frac{c}{a}}}$	$\frac{\sqrt{3}v\sqrt{-\frac{1}{ac(2v^2-9\beta)}}}{\delta}$	$\frac{3\sqrt{3}v\sqrt{\frac{\beta}{acC_0L}}}{\delta(2v^2-9\beta)}$

(d)

$$\left(u(\xi) \quad \alpha_0 + \alpha_1 \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)^2} \right) + \frac{\beta_1}{\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)^2} \right)} \right)$$

$$\left(\begin{array}{l} u_1(\xi) = \frac{v\sqrt{-\frac{c}{a}}z(\xi)}{3\beta} + \frac{v}{3\beta} \quad k \rightarrow \frac{\sqrt{6}v\sqrt{\frac{1}{ac(2v^2-9\beta)}}}{\delta} \quad \omega \rightarrow \frac{3\sqrt{6}v\sqrt{-\frac{\beta}{acC_0L}}}{\delta(2v^2-9\beta)} \\ u_2(\xi) = \frac{v\sqrt{-\frac{a}{c}}}{3\beta z(\xi)} + \frac{v}{3\beta} \quad k \rightarrow \frac{\sqrt{6}v\sqrt{\frac{1}{ac(2v^2-9\beta)}}}{\delta} \quad \omega \rightarrow \frac{3\sqrt{6}v\sqrt{-\frac{\beta}{acC_0L}}}{\delta(2v^2-9\beta)} \\ u_3(\xi) = \frac{v\sqrt{-\frac{c}{a}}z(\xi)}{6\beta} + \frac{v}{6\beta\sqrt{-\frac{c}{a}}z(\xi)} + \frac{v}{3\beta} \quad k \rightarrow \frac{\sqrt{\frac{3}{2}}v\sqrt{\frac{1}{ac(2v^2-9\beta)}}}{\delta} \quad \omega \rightarrow \frac{3\sqrt{\frac{3}{2}}v\sqrt{-\frac{\beta}{acC_0L}}}{\delta(2v^2-9\beta)} \\ u_4(\xi) = \frac{v\sqrt{\frac{c}{a}}z(\xi)}{3\sqrt{2}\beta} + \frac{v}{3\sqrt{2}\beta\sqrt{\frac{c}{a}}z(\xi)} + \frac{v}{3\beta} \quad k \rightarrow \frac{\sqrt{3}v\sqrt{-\frac{1}{ac(2v^2-9\beta)}}}{\delta} \quad \omega \rightarrow \frac{3\sqrt{3}v\sqrt{\frac{\beta}{acC_0L}}}{\delta(2v^2-9\beta)} \end{array} \right)$$

(e)

$$\left(\begin{array}{l} u_1(\xi) \text{ EDO} = 0 \\ u_2(\xi) \text{ EDO} = 0 \\ u_3(\xi) \text{ EDO} = 0 \\ u_4(\xi) \text{ EDO} = 0 \end{array} \right)$$

(f)

Tabla 3.2. Soluciones obtenidas para " $u_k(\xi)$ " partiendo de la ecuación

Generalizada de Riccati (ODE – Riccati) $\equiv \left(\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)}\right)' = a + b \left(\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)}\right) + c \left(\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)}\right)^2$.

$u_k(\xi)$	$\alpha_0 + \alpha_1 z(\xi) + \beta_1 z(\xi)^{-1}$ $\left\{ z(\xi) \rightarrow \left(\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)} \right) \right\}$	k	ω
$u_1(\xi)$	$\frac{v \sqrt{-\frac{c}{a}} z(\xi)}{3\beta} + \frac{v}{3\beta}$	$\frac{\sqrt{6} v \sqrt{\frac{1}{ac(2v^2-9\beta)}}}{\delta}$	$\frac{3 \sqrt{6} v \sqrt{-\frac{\beta}{acC_0L}}}{\delta(2v^2-9\beta)}$
$u_2(\xi)$	$\frac{v \sqrt{-\frac{a}{c}}}{3\beta z(\xi)} + \frac{v}{3\beta}$	$\frac{\sqrt{6} v \sqrt{\frac{1}{ac(2v^2-9\beta)}}}{\delta}$	$\frac{3 \sqrt{6} v \sqrt{-\frac{\beta}{acC_0L}}}{\delta(2v^2-9\beta)}$
$u_3(\xi)$	$\frac{v \sqrt{-\frac{c}{a}} z(\xi)}{6\beta} + \frac{v}{6\beta \sqrt{-\frac{c}{a}} z(\xi)} + \frac{v}{3\beta}$	$\frac{\sqrt{\frac{3}{2}} v \sqrt{\frac{1}{ac(2v^2-9\beta)}}}{\delta}$	$\frac{3 \sqrt{\frac{3}{2}} v \sqrt{-\frac{\beta}{acC_0L}}}{\delta(2v^2-9\beta)}$
$u_4(\xi)$	$\frac{v \sqrt{\frac{c}{a}} z(\xi)}{3 \sqrt{2} \beta} + \frac{v}{3 \sqrt{2} \beta \sqrt{\frac{c}{a}} z(\xi)} + \frac{v}{3\beta}$	$\frac{\sqrt{3} v \sqrt{-\frac{1}{ac(2v^2-9\beta)}}}{\delta}$	$\frac{3 \sqrt{3} v \sqrt{\frac{\beta}{acC_0L}}}{\delta(2v^2-9\beta)}$

■ **Problema 3.4.2. Método de Expansión $\left(\frac{G'}{G^2}\right)$. (Expresiones de las Soluciones).**

Sea la expresión que representa la solución de Ecuación Propagación de Ondas en Línea de Transmisión Eléctrica de Paso Bajo no Lineal (LPEL):

$$(ODE) \equiv (L C_0 \omega^2 - k^2) U(\xi) - L C_0 v \omega^2 U^2(\xi) + L C_0 \beta \omega^2 U^3(\xi) - \frac{1}{12} k^4 U''(\xi) = 0$$

$$U(\xi) = u(\xi) = \alpha_0 + \alpha_1 \left(\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)}\right) + \beta_1 \left(\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)}\right)^{-1}$$

donde los coeficientes $\alpha_0, \alpha_k, \beta_k$ son los coeficientes reales calculados y expresados en la Tabla 28.16, y donde la relación $\left(\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)}\right)$ es:

$$\left(\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)}\right) = \begin{cases} \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{c}} \frac{C_1 \cos(\sqrt{ac}\xi) + C_2 \sin(\sqrt{ac}\xi)}{C_2 \cos(\sqrt{ac}\xi) - C_1 \sin(\sqrt{ac}\xi)} & (ac) > 0 \quad b = 0 \\ -\frac{\sqrt{|ac|}}{c} \frac{(C_1 (\sinh(2\xi \sqrt{|ac|}) + \cosh(2\xi \sqrt{|ac|})) + C_2)}{(C_1 \sinh(2\xi \sqrt{|ac|}) + C_1 \cosh(2\xi \sqrt{|ac|}) - C_2)} & (ac) < 0 \quad b = 0 \\ -\frac{C_1}{c C_1 \xi + c C_2} & a = 0 \quad c \neq 0 \end{cases}$$

que viene determinada por las soluciones generales de la ODE de Riccati:

$$(ODE - Riccati) \equiv \left(\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)}\right)' = a + b \left(\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)}\right) + c \left(\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)}\right)^2$$

Determinense las soluciones siguientes $u_{i,j}(\xi)$, tomado $\xi = kx + \omega t$.

(a) Caso I (Soluciones Trigonómicas). $(ac) > 0 \quad b = 0 \quad \left\{ u_{1,1}(\xi), \dots, u_{1,4}(\xi) \right\}$

- (b) Caso II (Soluciones Hipérbolicas). $(a c) < 0 \quad b = 0. \quad \left\{ u_{2,1}(\xi), \dots, u_{2,4}(\xi) \right\}$
 (c) Caso III (Soluciones Racionales). $a = 0 \quad c \neq 0. \quad \left\{ u_{3,1}(\xi), \dots, u_{3,4}(\xi) \right\}$
 $\left\{ \begin{array}{l} a, b, c, C_1, C_2 \text{ constantes arbitrarias} \\ \xi = kx + \omega t \end{array} \right.$

SOLUCIÓN

Tabla 3.3. Coeficientes de las soluciones $u_{i j}(\xi)$ partiendo de la Ecuación

$$\text{Generalizada de Riccati (ODE - Riccati)} \equiv \left(\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)} \right)' = a + b \left(\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)} \right) + c \left(\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)} \right)^2.$$

i	α_0	α_1	β_1	k	ω
1	$\frac{v}{3\beta}$	$\frac{v \sqrt{-\frac{c}{a}}}{3\beta}$	0	$\frac{\sqrt{6} v \sqrt{\frac{1}{ac(2v^2-9\beta)}}}{\delta}$	$\frac{3 \sqrt{6} v \sqrt{-\frac{\beta}{acC_0L}}}{\delta(2v^2-9\beta)}$
2	$\frac{v}{3\beta}$	0	$\frac{v \sqrt{-\frac{a}{c}}}{3\beta}$	$\frac{\sqrt{6} v \sqrt{\frac{1}{ac(2v^2-9\beta)}}}{\delta}$	$\frac{3 \sqrt{6} v \sqrt{-\frac{\beta}{acC_0L}}}{\delta(2v^2-9\beta)}$
3	$\frac{v}{3\beta}$	$\frac{v \sqrt{-\frac{c}{a}}}{6\beta}$	$\frac{v}{6\beta \sqrt{-\frac{c}{a}}}$	$\frac{\sqrt{\frac{3}{2}} v \sqrt{\frac{1}{ac(2v^2-9\beta)}}}{\delta}$	$\frac{3 \sqrt{\frac{3}{2}} v \sqrt{-\frac{\beta}{acC_0L}}}{\delta(2v^2-9\beta)}$
4	$\frac{v}{3\beta}$	$\frac{v \sqrt{\frac{c}{a}}}{3 \sqrt{2} \beta}$	$\frac{v}{3 \sqrt{2} \beta \sqrt{\frac{c}{a}}}$	$\frac{\sqrt{3} v \sqrt{-\frac{1}{ac(2v^2-9\beta)}}}{\delta}$	$\frac{3 \sqrt{3} v \sqrt{\frac{\beta}{acC_0L}}}{\delta(2v^2-9\beta)}$

(a) Caso I.

Tabla 3.4. Soluciones $u_{ij}(\xi)$ del caso I partiendo de la Ecuación

$$\text{Generalizada de Riccati (ODE - Riccati)} \equiv \left(\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)} \right)' = a + b \left(\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)} \right) + c \left(\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)} \right)^2.$$

$u_{i,j}(\xi)$	k	ω
Caso I. $(ac) > 0 \quad b = 0.$		
$u_{1,1}(\xi) = \frac{\sqrt{a} v \sqrt{-\frac{c}{a}} (C_2 \sin(\xi \sqrt{ac}) + C_1 \cos(\xi \sqrt{ac}))}{3 \beta \sqrt{c} (C_2 \cos(\xi \sqrt{ac}) - C_1 \sin(\xi \sqrt{ac}))} + \frac{v}{3 \beta}$	$\frac{\sqrt{6} v \sqrt{\frac{1}{ac(2v^2-9\beta)}}}{\delta}$	$\frac{3 \sqrt{6} v \sqrt{-\frac{\beta}{acC_0L}}}{\delta(2v^2-9\beta)}$
$u_{1,2}(\xi) = \frac{\sqrt{c} v \sqrt{-\frac{a}{c}} (C_2 \cos(\xi \sqrt{ac}) - C_1 \sin(\xi \sqrt{ac}))}{3 \sqrt{a} \beta (C_2 \sin(\xi \sqrt{ac}) + C_1 \cos(\xi \sqrt{ac}))} + \frac{v}{3 \beta}$	$\frac{\sqrt{6} v \sqrt{\frac{1}{ac(2v^2-9\beta)}}}{\delta}$	$\frac{3 \sqrt{6} v \sqrt{-\frac{\beta}{acC_0L}}}{\delta(2v^2-9\beta)}$
$u_{1,3}(\xi) = \frac{\sqrt{a} v \sqrt{-\frac{c}{a}} (C_2 \sin(\xi \sqrt{ac}) + C_1 \cos(\xi \sqrt{ac}))}{6 \beta \sqrt{c} (C_2 \cos(\xi \sqrt{ac}) - C_1 \sin(\xi \sqrt{ac}))} + \frac{\sqrt{c} v (C_2 \cos(\xi \sqrt{ac}) - C_1 \sin(\xi \sqrt{ac}))}{6 \sqrt{a} \beta \sqrt{-\frac{c}{a}} (C_2 \sin(\xi \sqrt{ac}) + C_1 \cos(\xi \sqrt{ac}))} + \frac{v}{3 \beta}$	$\frac{\sqrt{\frac{3}{2}} v \sqrt{\frac{1}{ac(2v^2-9\beta)}}}{\delta}$	$\frac{3 \sqrt{\frac{3}{2}} v \sqrt{-\frac{\beta}{acC_0L}}}{\delta(2v^2-9\beta)}$
$u_{1,4}(\xi) = \frac{\sqrt{a} v \sqrt{\frac{c}{a}} (C_2 \sin(\xi \sqrt{ac}) + C_1 \cos(\xi \sqrt{ac}))}{3 \sqrt{2} \beta \sqrt{c} (C_2 \cos(\xi \sqrt{ac}) - C_1 \sin(\xi \sqrt{ac}))} + \frac{\sqrt{c} v (C_2 \cos(\xi \sqrt{ac}) - C_1 \sin(\xi \sqrt{ac}))}{3 \sqrt{2} \sqrt{a} \beta \sqrt{\frac{c}{a}} (C_2 \sin(\xi \sqrt{ac}) + C_1 \cos(\xi \sqrt{ac}))} + \frac{v}{3 \beta}$	$\frac{\sqrt{3} v \sqrt{-\frac{1}{ac(2v^2-9\beta)}}}{\delta}$	$\frac{3 \sqrt{3} v \sqrt{-\frac{\beta}{acC_0L}}}{\delta(2v^2-9\beta)}$

(b) Caso II.

Tabla 3.5. Soluciones $u_{i,j}(\xi)$ del caso II partiendo de la Ecuación

$$\text{Generalizada de Riccati (ODE - Riccati)} \equiv \left(\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)} \right)' = a + b \left(\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)} \right) + c \left(\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)} \right)^2.$$

$u_{i,j}(\xi)$	k	ω
Caso II. $(ac) < 0 \quad b = 0.$		
$u_{2,1}(\xi) = \frac{v}{3\beta} \frac{v \sqrt{-\frac{c}{a}} \sqrt{ ac } (C_1 (\sinh(2\xi \sqrt{ ac }) + \cosh(2\xi \sqrt{ ac })) + C_2)}{3\beta c (C_1 (\sinh(2\xi \sqrt{ ac }) + \cosh(2\xi \sqrt{ ac })) - C_2)}$	$\frac{\sqrt{6} v \sqrt{\frac{1}{ac(2v^2-9\beta)}}}{\delta}$	$\frac{3 \sqrt{6} v \sqrt{-\frac{\beta}{acC_0L}}}{\delta(2v^2-9\beta)}$
$u_{2,2}(\xi) = \frac{v}{3\beta} \frac{cv \sqrt{-\frac{a}{c}} (C_1 (\sinh(2\xi \sqrt{ ac }) + \cosh(2\xi \sqrt{ ac })) - C_2)}{3\beta \sqrt{ ac } (C_1 (\sinh(2\xi \sqrt{ ac }) + \cosh(2\xi \sqrt{ ac })) + C_2)}$	$\frac{\sqrt{6} v \sqrt{\frac{1}{ac(2v^2-9\beta)}}}{\delta}$	$\frac{3 \sqrt{6} v \sqrt{-\frac{\beta}{acC_0L}}}{\delta(2v^2-9\beta)}$
$u_{2,3}(\xi) = \frac{v \sqrt{-\frac{c}{a}} \sqrt{ ac } (C_1 (\sinh(2\xi \sqrt{ ac }) + \cosh(2\xi \sqrt{ ac })) + C_2)}{6\beta c (C_1 (\sinh(2\xi \sqrt{ ac }) + \cosh(2\xi \sqrt{ ac })) - C_2)} - \frac{cv (C_1 (\sinh(2\xi \sqrt{ ac }) + \cosh(2\xi \sqrt{ ac })) - C_2)}{6\beta \sqrt{-\frac{c}{a}} \sqrt{ ac } (C_1 (\sinh(2\xi \sqrt{ ac }) + \cosh(2\xi \sqrt{ ac })) + C_2)} + \frac{v}{3\beta}$	$\frac{\sqrt{\frac{3}{2}} v \sqrt{\frac{1}{ac(2v^2-9\beta)}}}{\delta}$	$\frac{3 \sqrt{\frac{3}{2}} v \sqrt{-\frac{\beta}{acC_0L}}}{\delta(2v^2-9\beta)}$
$u_{2,4}(\xi) = \frac{v \sqrt{\frac{c}{a}} \sqrt{ ac } (C_1 (\sinh(2\xi \sqrt{ ac }) + \cosh(2\xi \sqrt{ ac })) + C_2)}{3 \sqrt{2} \beta c (C_1 (\sinh(2\xi \sqrt{ ac }) + \cosh(2\xi \sqrt{ ac })) - C_2)} - \frac{cv (C_1 (\sinh(2\xi \sqrt{ ac }) + \cosh(2\xi \sqrt{ ac })) - C_2)}{3 \sqrt{2} \beta \sqrt{\frac{c}{a}} \sqrt{ ac } (C_1 (\sinh(2\xi \sqrt{ ac }) + \cosh(2\xi \sqrt{ ac })) + C_2)} + \frac{v}{3\beta}$	$\frac{\sqrt{3} v \sqrt{-\frac{1}{ac(2v^2-9\beta)}}}{\delta}$	$\frac{3 \sqrt{3} v \sqrt{\frac{\beta}{acC_0L}}}{\delta(2v^2-9\beta)}$

(c) Caso III.

Tabla 3.6. Soluciones $u_{i,j}(\xi)$ del caso III partiendo de la Ecuación

$$\text{Generalizada de Riccati (ODE - Riccati)} \equiv \left(\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)} \right)' = a + b \left(\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)} \right) + c \left(\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)} \right)^2.$$

$u_{i,j}(\xi)$	k	ω
Caso III. $a = 0 \quad c \neq 0$.		
$u_{3,1}(\xi) = \frac{v}{3\beta} - \frac{C_1 v \sqrt{-\frac{c}{a}}}{3\beta(cC_1\xi + cC_2)}$	$\frac{\sqrt{6} v \sqrt{\frac{1}{ac(2v^2-9\beta)}}}{\delta}$	$\frac{3 \sqrt{6} v \sqrt{-\frac{\beta}{acC_0L}}}{\delta(2v^2-9\beta)}$
$u_{3,2}(\xi) = \frac{v}{3\beta} - \frac{v \sqrt{-\frac{a}{c}} (cC_1\xi + cC_2)}{3\beta C_1}$	$\frac{\sqrt{6} v \sqrt{\frac{1}{ac(2v^2-9\beta)}}}{\delta}$	$\frac{3 \sqrt{6} v \sqrt{-\frac{\beta}{acC_0L}}}{\delta(2v^2-9\beta)}$
$u_{3,3}(\xi) = -\frac{v(cC_1\xi + cC_2)}{6\beta C_1 \sqrt{-\frac{c}{a}}} - \frac{C_1 v \sqrt{-\frac{c}{a}}}{6\beta(cC_1\xi + cC_2)} + \frac{v}{3\beta}$	$\frac{\sqrt{3} v \sqrt{\frac{1}{ac(2v^2-9\beta)}}}{\delta}$	$\frac{3 \sqrt{3} v \sqrt{-\frac{\beta}{acC_0L}}}{\delta(2v^2-9\beta)}$
$u_{3,4}(\xi) = -\frac{v(cC_1\xi + cC_2)}{3\sqrt{2}\beta C_1 \sqrt{\frac{c}{a}}} - \frac{C_1 v \sqrt{\frac{c}{a}}}{3\sqrt{2}\beta(cC_1\xi + cC_2)} + \frac{v}{3\beta}$	$\frac{\sqrt{3} v \sqrt{-\frac{1}{ac(2v^2-9\beta)}}}{\delta}$	$\frac{3 \sqrt{3} v \sqrt{\frac{\beta}{acC_0L}}}{\delta(2v^2-9\beta)}$

■ **Problema 3.4.3. Método de Expansión $\left(\frac{G'}{G^2}\right)$. Gráficas Caso I.**

Representense las gráficas de las soluciones de la Ecuación Propagación de Ondas en Línea de Transmisión Eléctrica de Paso Bajo no Lineal (LPEL):

$$\text{(ODE)} \equiv (L C_0 \omega^2 - k^2) U(\xi) - L C_0 v \omega^2 U^2(\xi) + L C_0 \beta \omega^2 U^3(\xi) - \frac{1}{12} k^4 U''(\xi) = 0$$

$$\text{(PDE)} \equiv L C_0 V_{tt} - V_{xx} - \frac{\delta^2}{12} V_{xxxx} - L C v (V^2)_{tt} + L C \beta (V^3)_{tt}$$

con los parámetros indicados en los diferentes casos:

$$(x, t) = \begin{cases} x \in [0, X] = [0, 10] \\ t \in [0, T] = [0, 10] \end{cases}$$

siendo

$$\begin{cases} C_1, C_2 & \text{constantes arbitrarias} \\ \xi = kx + \omega t \end{cases}$$

$$\{v \rightarrow 0.015, \beta \rightarrow -0.0025, \delta \rightarrow 0.1, L \rightarrow 1, C_0 \rightarrow 1, a \rightarrow 1, b \rightarrow 0, c \rightarrow 2\}$$

$$\{C_1 \rightarrow 1, C_2 \rightarrow 1\}$$

Caso I. $(ac) > 0. \quad b = 0$

$$\begin{cases} u_{1,1}(\xi) = u_{1,1}(x, t) \\ u_{1,1}(\xi) = u_{1,1}(x, t), \quad t = \frac{T}{4} \end{cases}$$

$$u_{1,1}(\xi) = \frac{\sqrt{a} \sqrt{-\frac{c}{a}} (\cos(\sqrt{ac} \xi) C_1 + \sin(\sqrt{ac} \xi) C_2) v}{3 \sqrt{c} \beta (\cos(\sqrt{ac} \xi) C_2 - \sin(\sqrt{ac} \xi) C_1)} + \frac{v}{3\beta}$$

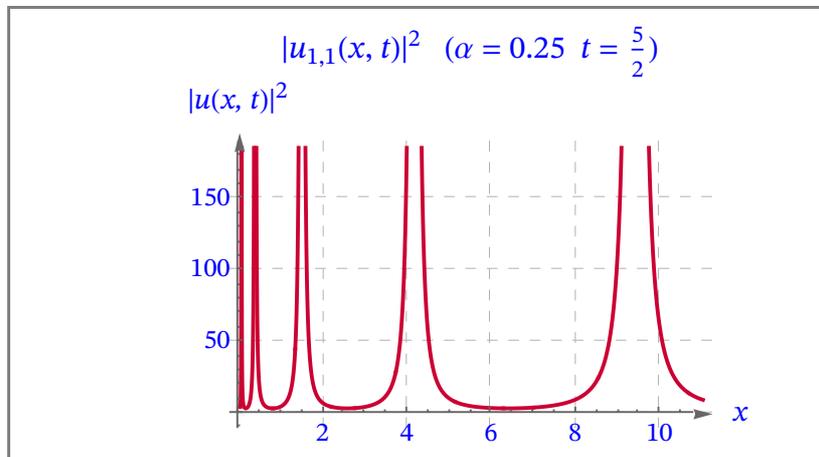
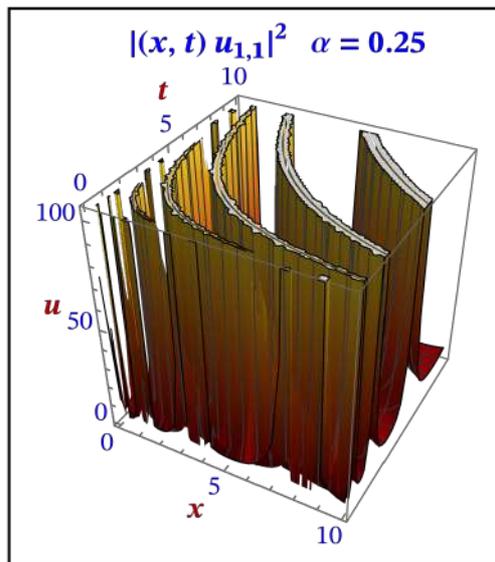
$$\bullet k = \frac{\sqrt{6} v \sqrt{\frac{1}{ac(2v^2-9\beta)}}}{\delta} \quad \bullet \omega = \frac{3 \sqrt{6} v \sqrt{\frac{\beta}{acLC_0}}}{(2v^2-9\beta)\delta}$$

- (a) $\alpha = 0.25$.
- (b) $\alpha = 0.85$.
- (c) $\alpha = 1$.

SOLUCIÓN

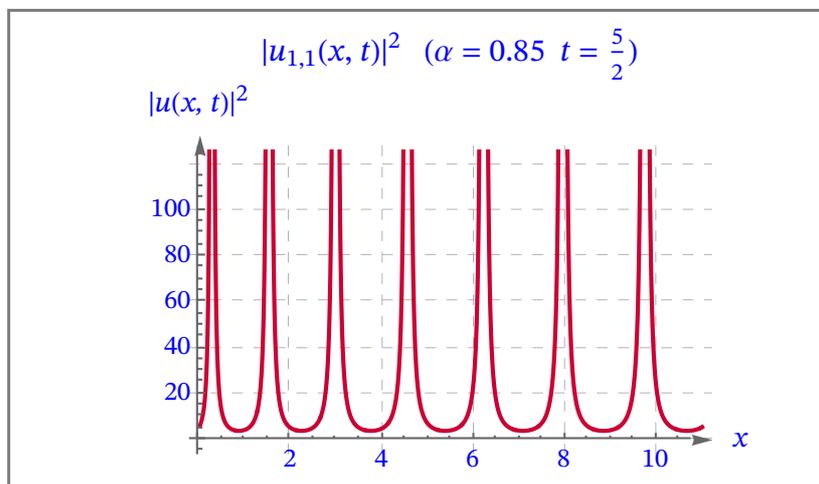
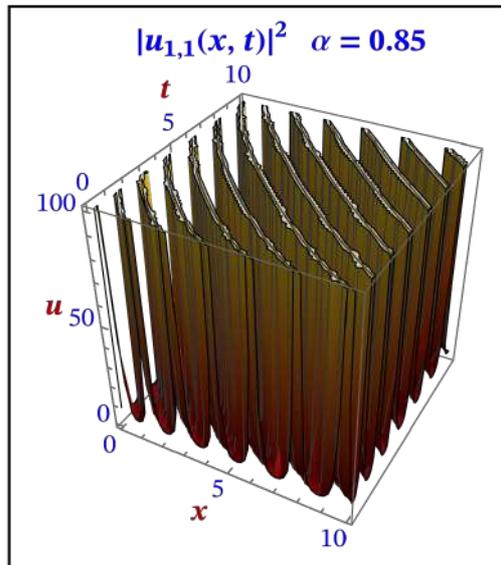
(a)

$$\left(\begin{array}{ll} \{v, \beta, \delta, L, C_0\} & \{0.015, -0.0025, 0.1, 1, 1\} \\ \{a, b, c\} = & \{1, 0, 2\} \\ \{C_1, C_2\} & \{C_1 \rightarrow 1, C_2 \rightarrow 1\} \\ \alpha = & 0.25 \\ k = & 1.71499 \\ \omega = & 1.69809 \\ \xi = k \left(\frac{x^\alpha}{\alpha}\right) + \omega \left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right) = & 1.71499 \left(\frac{x^{0.25}}{0.25}\right) + 1.69809 \left(\frac{t^{0.25}}{0.25}\right) \end{array} \right)$$



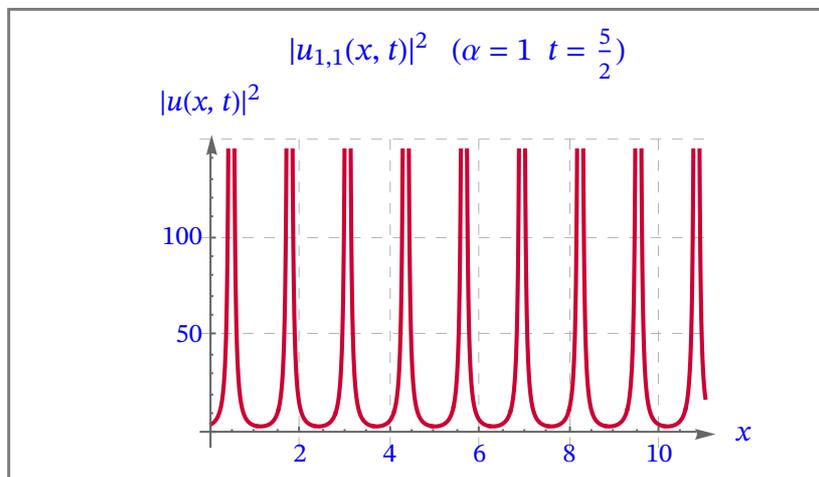
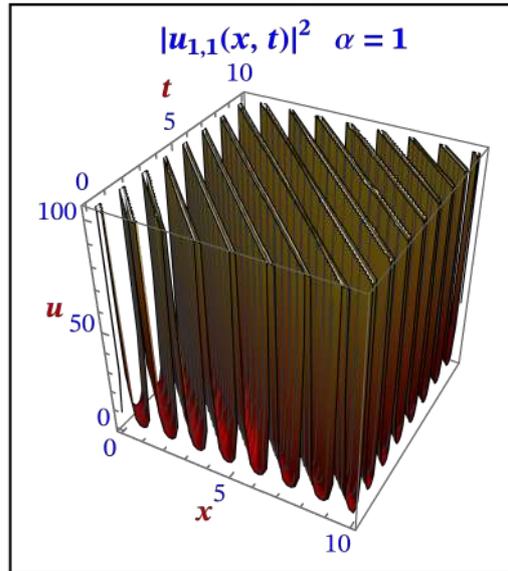
(b)

$$\left(\begin{array}{ll} \{v, \beta, \delta, L, C_0\} & \{0.015, -0.0025, 0.1, 1, 1\} \\ \{a, b, c\} = & \{1, 0, 2\} \\ \{C_1, C_2\} & \{C_1 \rightarrow 1, C_2 \rightarrow 1\} \\ \alpha = & 0.85 \\ k = & 1.71499 \\ \omega = & 1.69809 \\ \xi = k \left(\frac{x^\alpha}{\alpha}\right) + \omega \left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right) = & 1.71499 \left(\frac{x^{0.85}}{0.85}\right) + 1.69809 \left(\frac{t^{0.85}}{0.85}\right) \end{array} \right)$$



(c)

$$\left(\begin{array}{ll} \{v, \beta, \delta, L, C_0\} & \{0.015, -0.0025, 0.1, 1, 1\} \\ \{a, b, c\} = & \{1, 0, 2\} \\ \{C_1, C_2\} & \{C_1 \rightarrow 1, C_2 \rightarrow 1\} \\ \alpha = & 1 \\ k = & 1.71499 \\ \omega = & 1.69809 \\ \xi = k \left(\frac{x^\alpha}{\alpha}\right) + \omega \left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right) = & 1.71499 \left(\frac{x^1}{1}\right) + 1.69809 \left(\frac{t^1}{1}\right) \end{array} \right)$$



■ **Problema 3.4.4. Método de Expansión ($\frac{G'}{G^2}$). Gráficas Caso I.**

Representense las gráficas de las soluciones de la Ecuación Propagación de Ondas en Línea de Transmisión Eléctrica de Paso Bajo no Lineal (LPEL):

$$(ODE) \equiv (L C_0 \omega^2 - k^2) U(\xi) - L C_0 v \omega^2 U^2(\xi) + L C_0 \beta \omega^2 U^3(\xi) - \frac{1}{12} k^4 U''(\xi) = 0$$

$$(PDE) \equiv L C_0 V_{tt} - V_{xx} - \frac{\delta^2}{12} V_{xxxx} - L C v (V^2)_{tt} + L C \beta (V^3)_{tt}$$

con los parámetros indicados en los diferentes casos:

$$(x, t) = \begin{cases} x \in [0, X] = [0, 100] \\ t \in [0, T] = [0, 100] \end{cases}$$

$$\{v \rightarrow 0.0025, \beta \rightarrow 0.0025, \delta \rightarrow 0.1, L \rightarrow 1, C_0 \rightarrow 1, a \rightarrow 1, b \rightarrow 0, c \rightarrow 2\}$$

$$\{C_1 \rightarrow 1, C_2 \rightarrow 1\}$$

Caso I. $(a c) > 0. b = 0$

$$\begin{cases} u_{1,1}(\xi) = u_{1,1}(x, t) \\ u_{1,1}(\xi) = u_{1,1}(x, t), & t = \frac{T}{2} \\ u_{1,1}(\xi) = u_{1,1}(x, t), & x = \frac{X}{2} \end{cases}$$

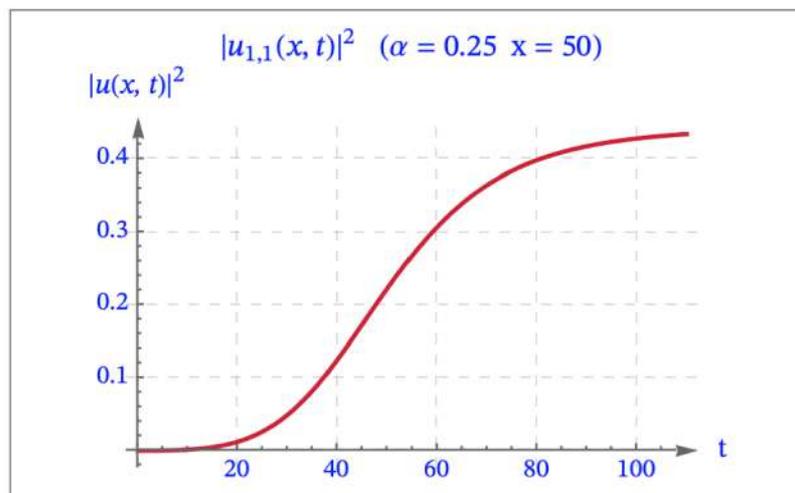
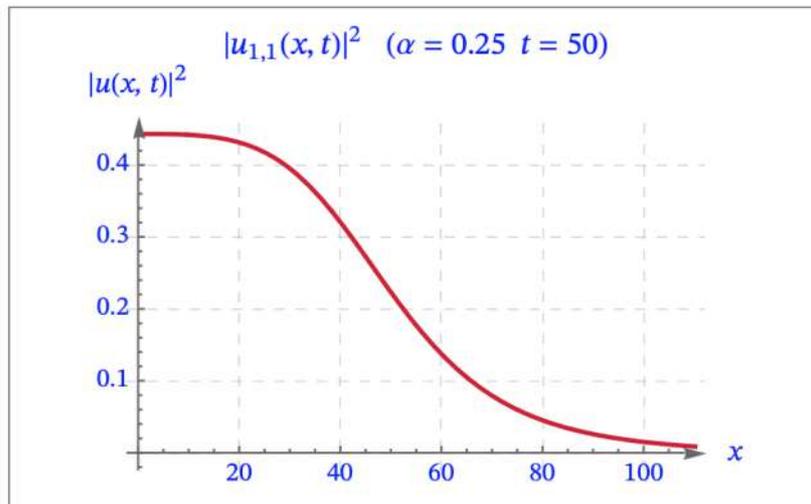
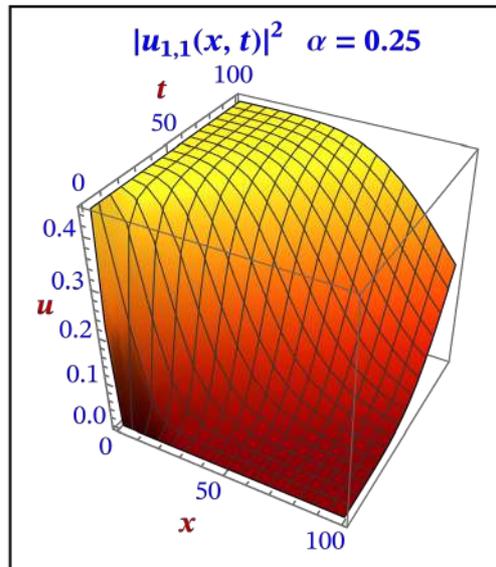
(a) $\alpha = 0.25$

(b) $\alpha = 0.95$

SOLUCIÓN

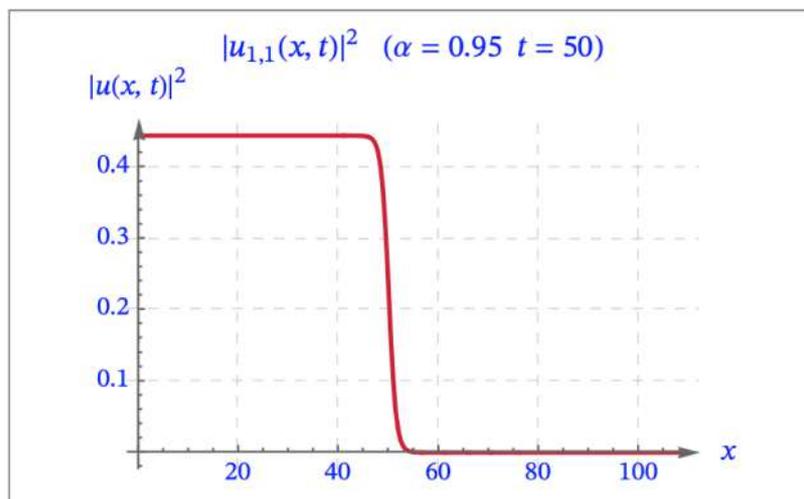
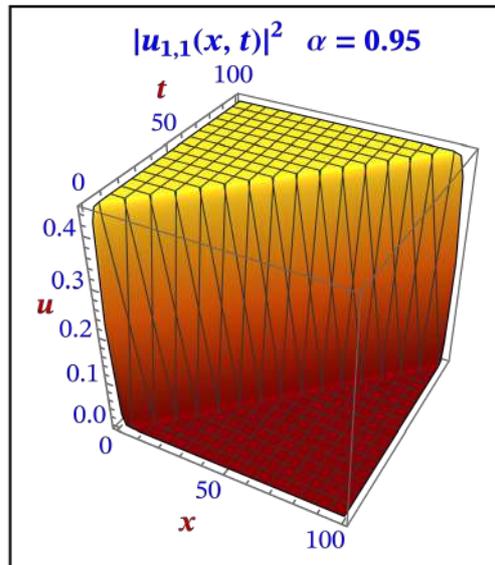
(a)

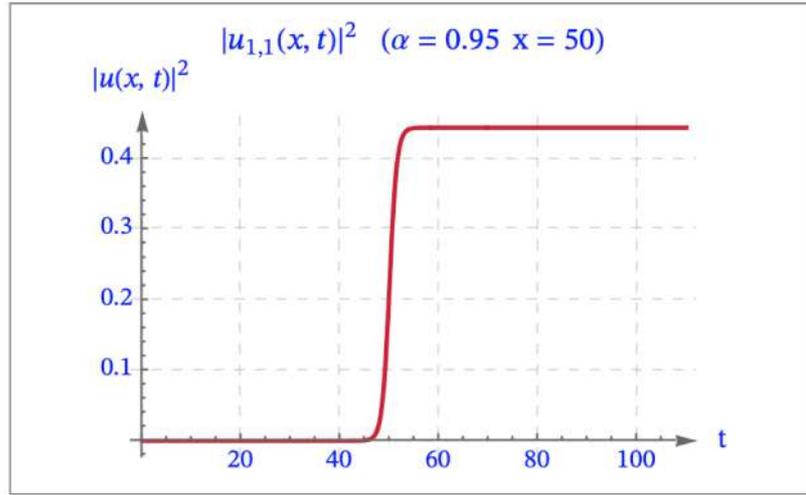
$$\left(\begin{array}{l} \{v, \beta, \delta, L, C_0\} \\ \{a, b, c\} = \\ \{C_1, C_2\} \\ \alpha = \\ k = \\ \omega = \\ \xi = k \left(\frac{x^\alpha}{\alpha}\right) + \omega \left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right) = \end{array} \begin{array}{l} \{0.0025, 0.0025, 0.1, 1, 1\} \\ \{1, 0, 2\} \\ \{C_1 \rightarrow 1, C_2 \rightarrow 1\} \\ 0.25 \\ 0. + 0.288755 i \\ 0. - 0.288836 i \\ 0. + 0.288755 I \left(\frac{x^{0.25}}{0.25}\right) + 0. - 0.288836 I \left(\frac{t^{0.25}}{0.25}\right) \end{array} \right)$$



(b)

$$\left(\begin{array}{l} \{v, \beta, \delta, L, C_0\} \\ \{a, b, c\} = \\ \{C_1, C_2\} \\ \alpha = \\ k = \\ \omega = \\ \xi = k \left(\frac{x^\alpha}{\alpha}\right) + \omega \left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right) = \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} \{0.0025, 0.0025, 0.1, 1, 1\} \\ \{1, 0, 2\} \\ \{C_1 \rightarrow 1, C_2 \rightarrow 1\} \\ 0.95 \\ 0. + 0.288755 i \\ 0. - 0.288836 i \\ 0. + 0.288755 I \left(\frac{x^{0.95}}{0.95}\right) + 0. - 0.288836 I \left(\frac{t^{0.95}}{0.95}\right) \end{array} \right)$$





■ **Problema 3.4.5. Método de Expansión ($\frac{G'}{G^2}$). Gráficas Caso II.**

Represéntense las gráficas de las soluciones de la Ecuación Propagación de Ondas en Línea de Transmisión Eléctrica de Paso Bajo no Lineal (LPEL):

$$(ODE) \equiv (L C_0 \omega^2 - k^2) U(\xi) - L C_0 v \omega^2 U^2(\xi) + L C_0 \beta \omega^2 U^3(\xi) - \frac{1}{12} k^4 U'''(\xi) = 0$$

$$(PDE) \equiv L C_0 V_{tt} - V_{xx} - \frac{\delta^2}{12} V_{xxxx} - L C v (V^2)_{tt} + L C \beta (V^3)_{tt}$$

con los parámetros indicados en los diferentes casos:

$$(x, t) = \begin{cases} x \in [0, X] = [0, 100] \\ t \in [0, T] = [0, 100] \end{cases}$$

$$\{v \rightarrow 1., \beta \rightarrow 1., \delta \rightarrow 1., L \rightarrow 1, C_0 \rightarrow 1, a \rightarrow -1, b \rightarrow 0, c \rightarrow 2\}$$

$$\{C_1 \rightarrow 1, C_2 \rightarrow 1\}$$

Caso II. $(a c) < 0. b = 0$

$$\begin{cases} u_{2,1}(\xi) = u_{2,1}(x, t) \\ u_{2,1}(\xi) = u_{2,1}(x, t), \quad t = \frac{T}{2} \\ u_{2,1}(\xi) = u_{2,1}(x, t), \quad x = \frac{X}{2} \end{cases}$$

$$u_{2,1}(\xi) = \frac{v}{3\beta} - \frac{\sqrt{-\frac{a}{c}} c v ((\cosh(2\xi \sqrt{|a c|}) + \sinh(2\xi \sqrt{|a c|})) C_1 - C_2)}{3\beta \sqrt{|a c|} ((\cosh(2\xi \sqrt{|a c|}) + \sinh(2\xi \sqrt{|a c|})) C_1 + C_2)}$$

$$\bullet k = \frac{\sqrt{6} v \sqrt{\frac{1}{a c (2 v^2 - 9 \beta)}}}{\delta} \quad \bullet \omega = \frac{3 \sqrt{6} v \sqrt{-\frac{\beta}{a c L C_0}}}{(2 v^2 - 9 \beta) \delta}$$

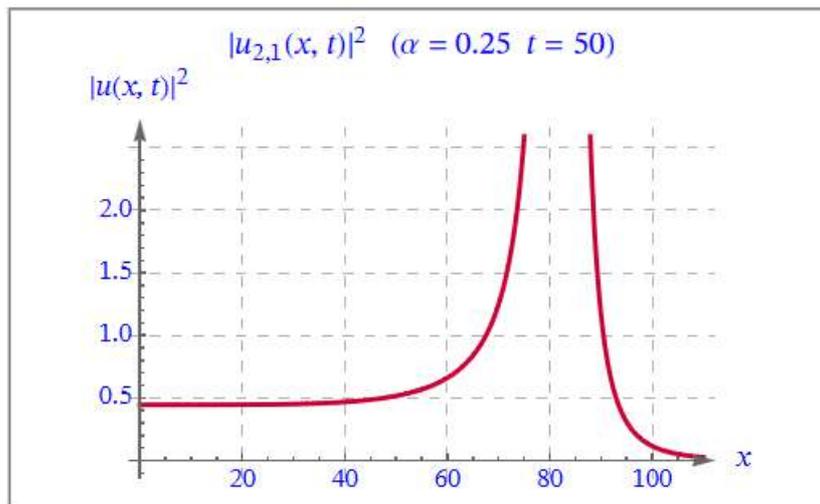
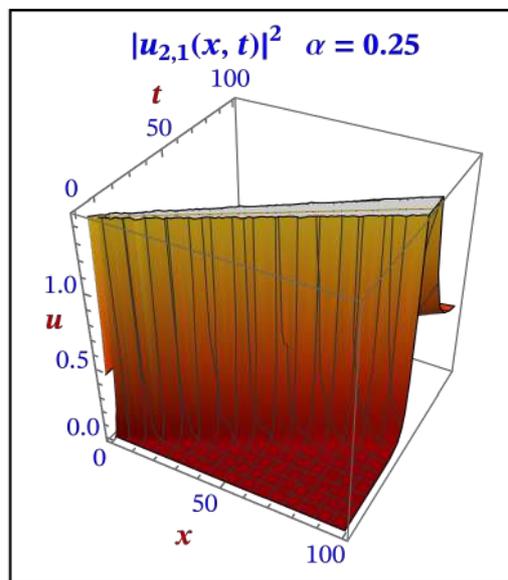
(a) $\alpha = 0.25.$

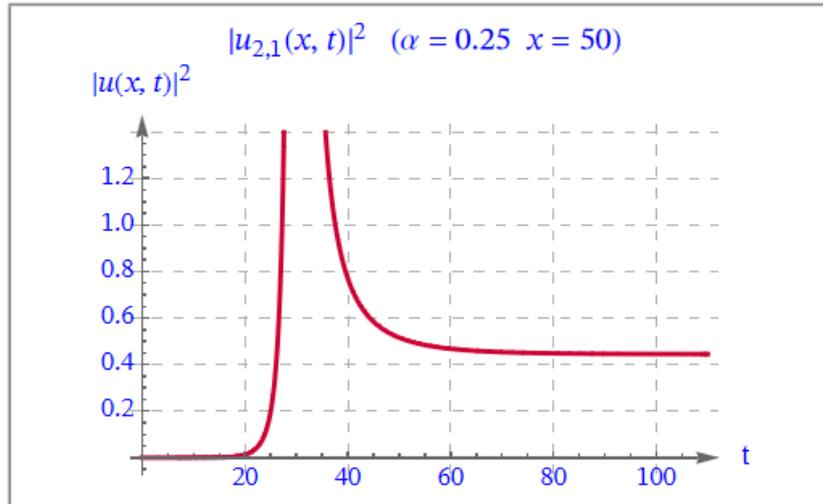
(b) $\alpha = 0.95.$

SOLUCIÓN

(a)

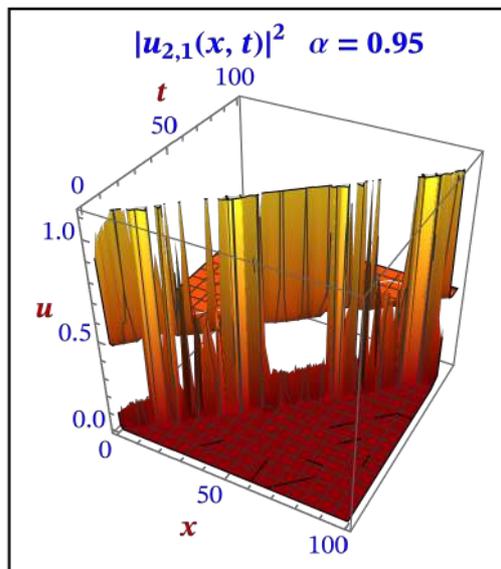
$$\left(\begin{array}{l} \{v, \beta, \delta, L, C_0\} \\ \{a, b, c\} = \\ \{C_1, C_2\} \\ \alpha = \\ k = \\ \omega = \\ \xi = k \left(\frac{x^\alpha}{\alpha}\right) + \omega \left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right) = \end{array} \begin{array}{l} \{1, 1, 1, 1, 1\} \\ \{-1, 0, 2\} \\ \{C_1 \rightarrow 1, C_2 \rightarrow 1\} \\ 0.25 \\ \sqrt{\frac{3}{7}} \\ -\frac{3\sqrt{3}}{7} \\ \sqrt{\frac{3}{7}} \left(\frac{x^{0.25}}{0.25}\right) + -\frac{3\sqrt{3}}{7} \left(\frac{t^{0.25}}{0.25}\right) \end{array} \right)$$

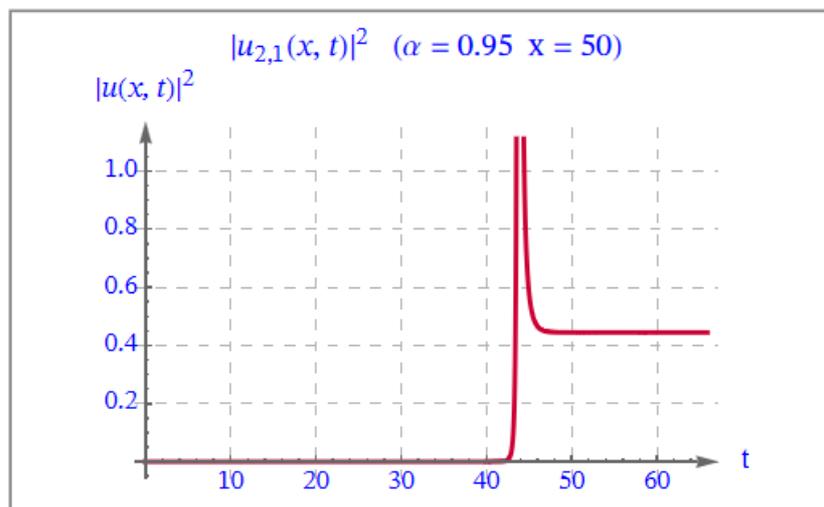
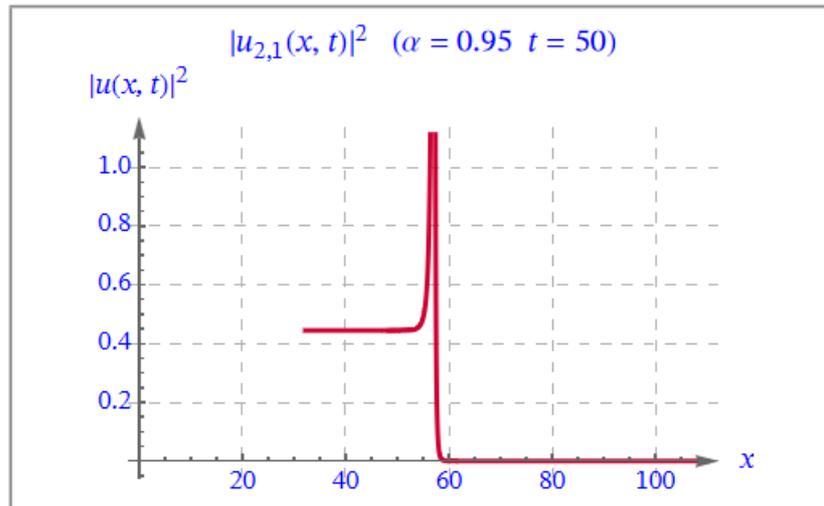




(b)

$$\left(\begin{array}{l} \{v, \beta, \delta, L, C_0\} \\ \{a, b, c\} \\ \{C_1, C_2\} \\ \alpha = \\ k = \\ \omega = \\ \xi = k \left(\frac{x^\alpha}{\alpha}\right) + \omega \left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right) \end{array} \quad \begin{array}{l} \{1, 1, 1, 1, 1\} \\ \{-1, 0, 2\} \\ \{C_1 \rightarrow 1, C_2 \rightarrow 1\} \\ 0.95 \\ \sqrt{\frac{3}{7}} \\ -\frac{3\sqrt{3}}{7} \\ \sqrt{\frac{3}{7}} \left(\frac{x^{0.95}}{0.95}\right) + -\frac{3\sqrt{3}}{7} \left(\frac{t^{0.95}}{0.95}\right) \end{array} \right)$$





■ **Problema 3.4.6. Método de Expansión ($\frac{G'}{G^2}$). Gráficas Caso I.**

Representense las gráficas de las soluciones de la Ecuación Propagación de Ondas en Línea de Transmisión Eléctrica de Paso Bajo no Lineal (LPEL):

$$(ODE) \equiv (L C_0 \omega^2 - k^2) U(\xi) - L C_0 v \omega^2 U^2(\xi) + L C_0 \beta \omega^2 U^3(\xi) - \frac{1}{12} k^4 U''(\xi) = 0$$

$$(PDE) \equiv L C_0 V_{tt} - V_{xx} - \frac{\delta^2}{12} V_{xxxx} - L C v (V^2)_{tt} + L C \beta (V^3)_{tt}$$

con los parámetros indicados en los diferentes casos:

$$(x, t) = \begin{cases} x \in [0, X] = [0, 100] \\ t \in [0, T] = [0, 100] \end{cases}$$

$$\{v \rightarrow 0.0025, \beta \rightarrow 0.0025, \delta \rightarrow 0.1, L \rightarrow 1, C_0 \rightarrow 1, a \rightarrow 1, b \rightarrow 0, c \rightarrow 2\}$$

$$\{C_1 \rightarrow 1, C_2 \rightarrow 1\}$$

Caso I. $(a c) > 0. b = 0$

$$\begin{cases} u_{1,4}(\xi) = u_{1,4}(x, t) \\ u_{1,4}(\xi) = u_{1,4}(x, t), \quad t = \frac{T}{2} \\ u_{1,4}(\xi) = u_{1,4}(x, t), \quad x = \frac{X}{2} \end{cases}$$

$$u_{1,4}(\xi) = \frac{\sqrt{a} \sqrt{\frac{c}{a}} (\cos(\sqrt{ac} \xi) C_1 + \sin(\sqrt{ac} \xi) C_2) v}{3 \sqrt{2} \sqrt{c} \beta (\cos(\sqrt{ac} \xi) C_2 - \sin(\sqrt{ac} \xi) C_1)} + \frac{v}{3 \beta} + \frac{\sqrt{c} (\cos(\sqrt{ac} \xi) C_2 - \sin(\sqrt{ac} \xi) C_1) v}{3 \sqrt{2} \sqrt{a} \sqrt{\frac{c}{a}} \beta (\cos(\sqrt{ac} \xi) C_1 + \sin(\sqrt{ac} \xi) C_2)}$$

$$\bullet k = \frac{\sqrt{3} v \sqrt{\frac{1}{ac(2v^2-9\beta)}}}{\delta} \quad \bullet \omega = \frac{3 \sqrt{3} v \sqrt{\frac{\beta}{acLC_0}}}{(2v^2-9\beta)\delta}$$

(a) $\alpha = 0.25.$

(b) $\alpha = 0.50.$

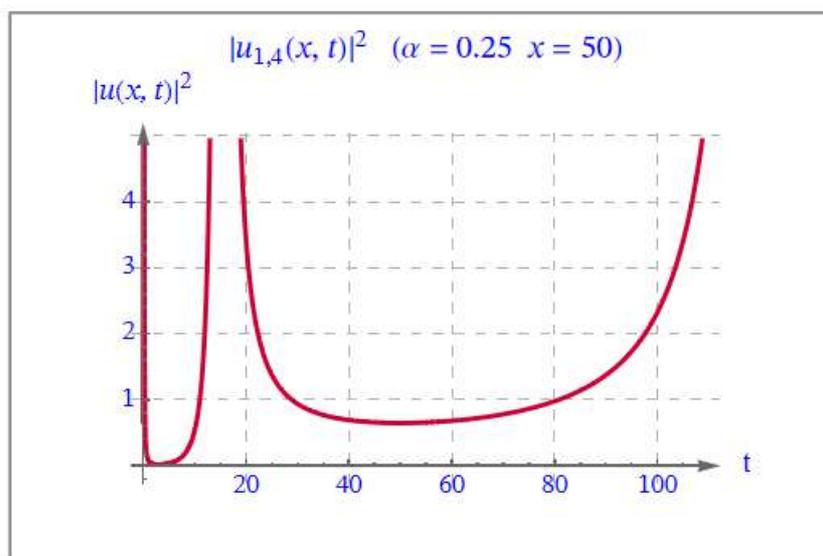
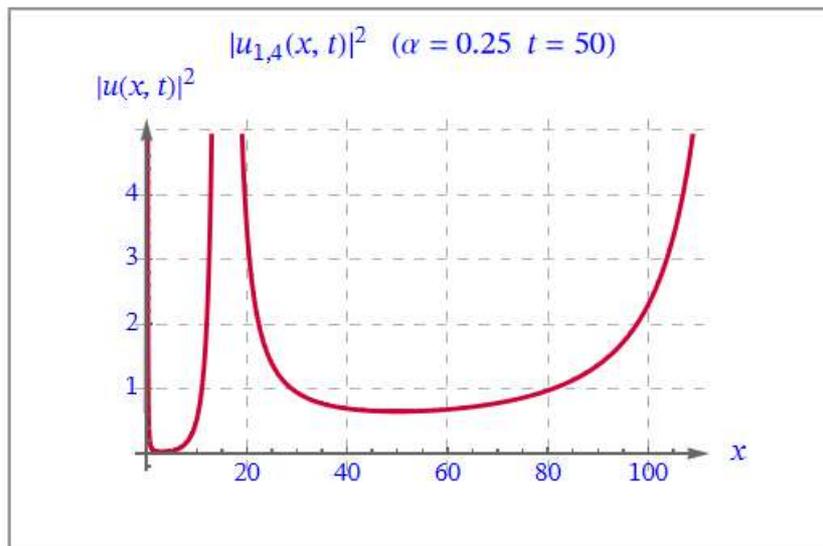
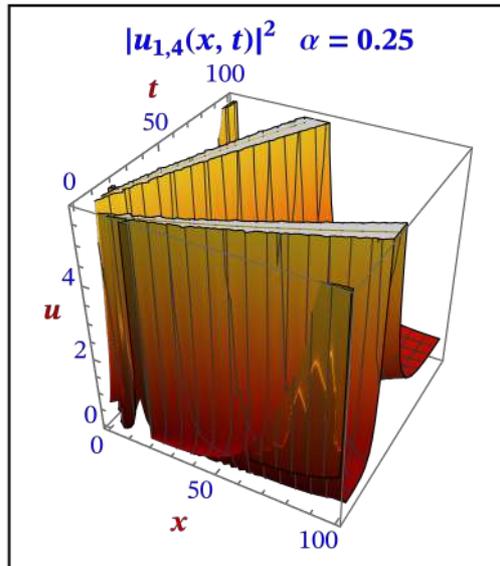
(c) $\alpha = 0.75.$

(d) $\alpha = 1.$

SOLUCIÓN

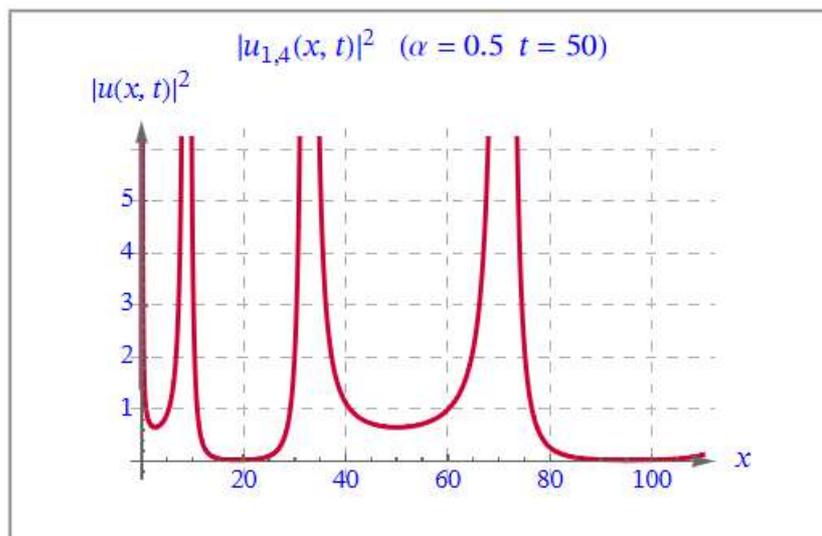
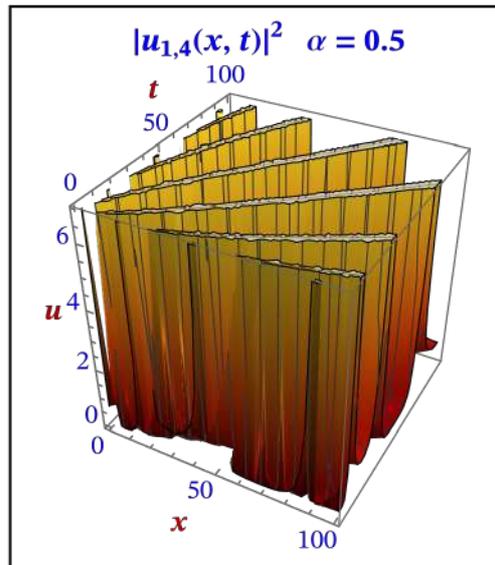
(a)

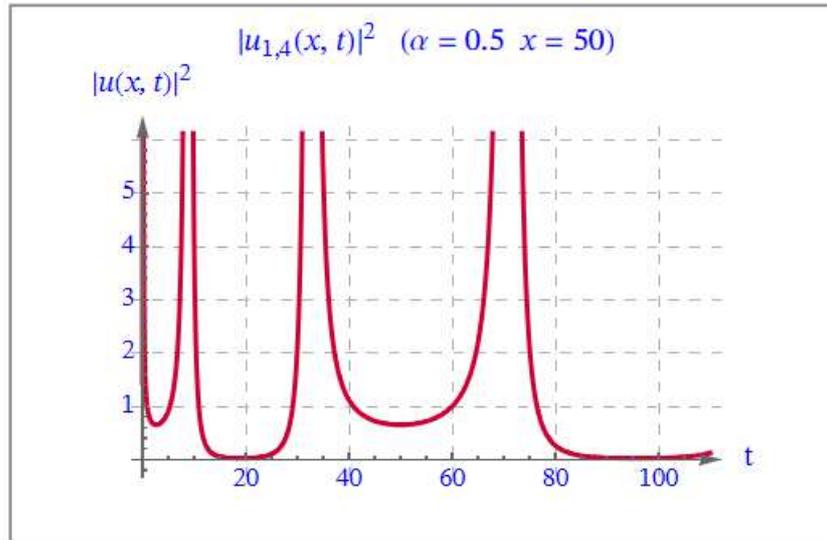
$$\left(\begin{array}{l} \{v, \beta, \delta, L, C_0\} \quad \{0.0025, 0.0025, 0.1, 1, 1\} \\ \{a, b, c\} = \quad \{1, 0, 2\} \\ \{C_1, C_2\} \quad \{C_1 \rightarrow 1, C_2 \rightarrow 1\} \\ \alpha = \quad 0.25 \\ k = \quad 0.204181 \\ \omega = \quad -0.204238 \\ \xi = k \left(\frac{x^\alpha}{\alpha}\right) + \omega \left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right) = 0.204181 \left(\frac{x^{0.25}}{0.25}\right) + -0.204238 \left(\frac{t^{0.25}}{0.25}\right) \end{array} \right)$$



(b)

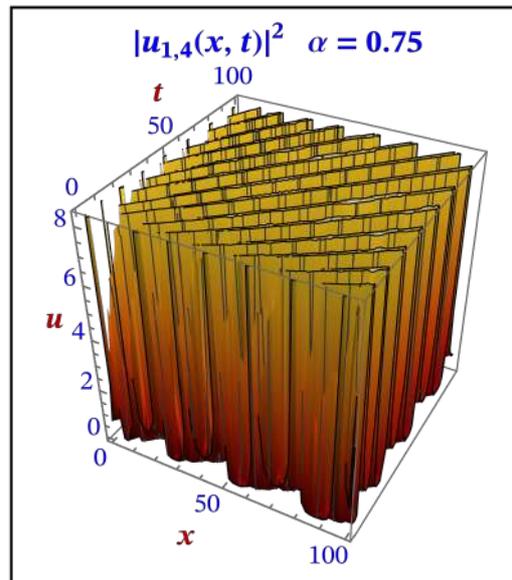
$$\left(\begin{array}{l} \{v, \beta, \delta, L, C_0\} \\ \{a, b, c\} = \\ \{C_1, C_2\} \\ \alpha = \\ k = \\ \omega = \\ \xi = k \left(\frac{x^\alpha}{\alpha}\right) + \omega \left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right) = \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} \{0.0025, 0.0025, 0.1, 1, 1\} \\ \{1, 0, 2\} \\ \{C_1 \rightarrow 1, C_2 \rightarrow 1\} \\ 0.5 \\ 0.204181 \\ -0.204238 \\ 0.204181 \left(\frac{x^{0.5}}{0.5}\right) + -0.204238 \left(\frac{t^{0.5}}{0.5}\right) \end{array} \right)$$

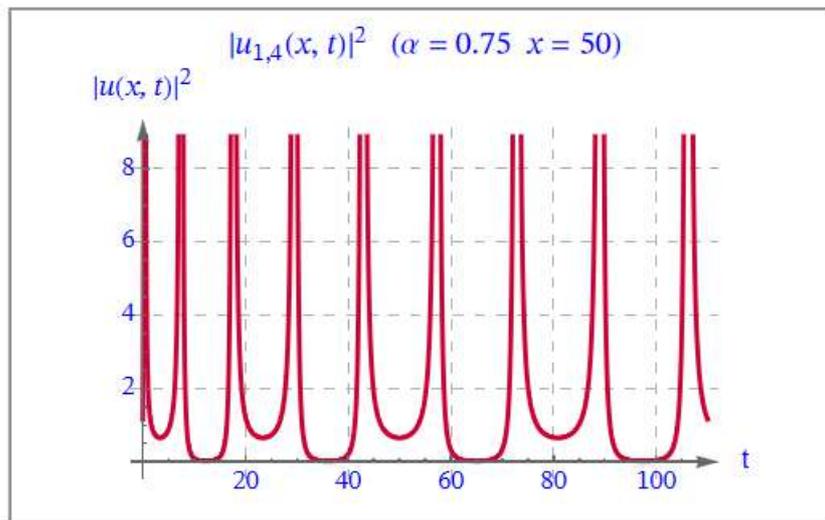
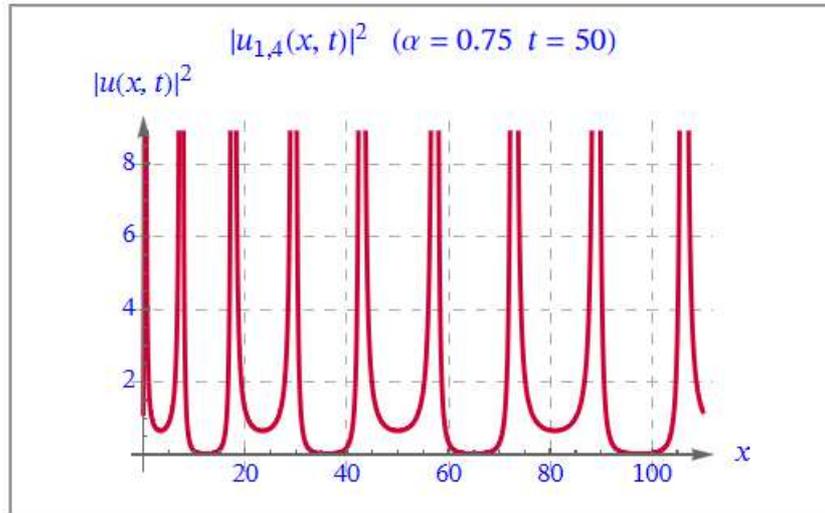




(c)

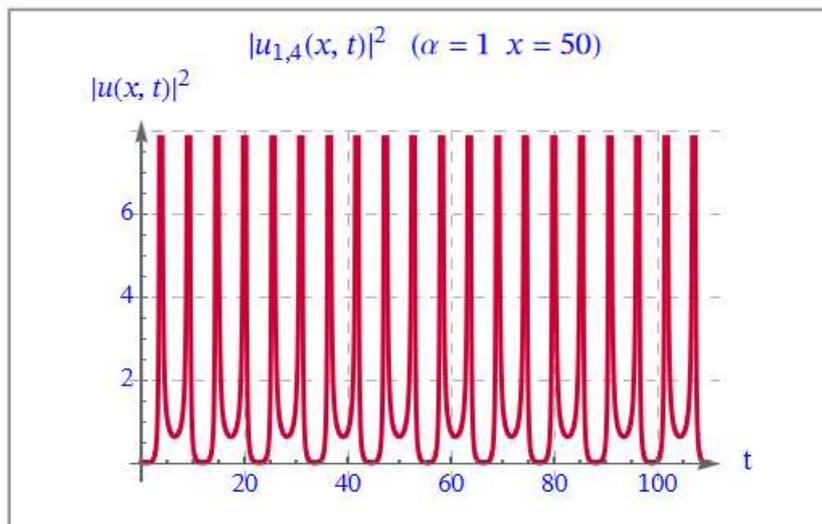
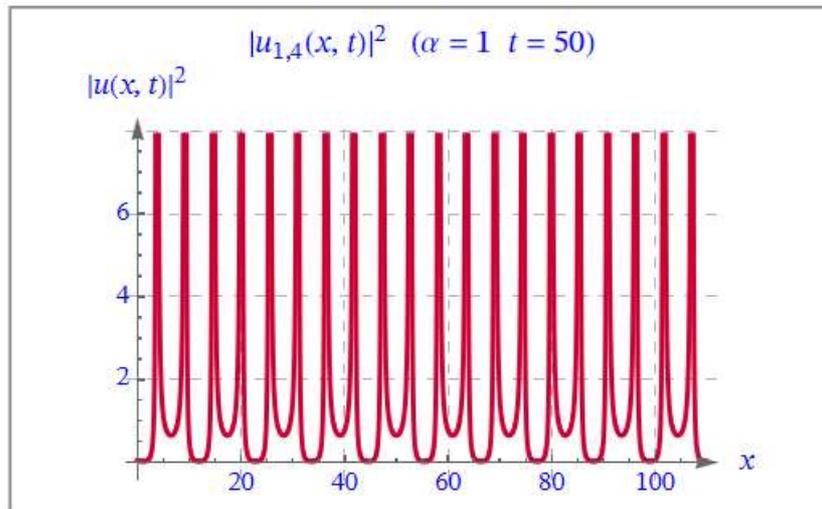
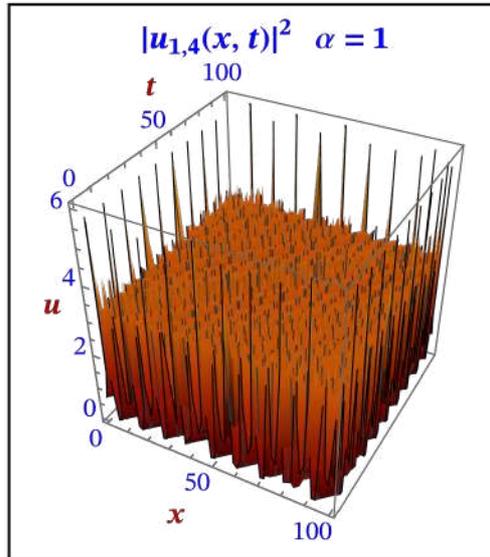
$$\left(\begin{array}{l} \{v, \beta, \delta, L, C_0\} \\ \{a, b, c\} \\ \{C_1, C_2\} \\ \alpha = \\ k = \\ \omega = \\ \xi = k \left(\frac{x^\alpha}{\alpha}\right) + \omega \left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right) \end{array} \quad \begin{array}{l} \{0.0025, 0.0025, 0.1, 1, 1\} \\ \{1, 0, 2\} \\ \{C_1 \rightarrow 1, C_2 \rightarrow 1\} \\ 0.75 \\ 0.204181 \\ -0.204238 \\ 0.204181 \left(\frac{x^{0.75}}{0.75}\right) + -0.204238 \left(\frac{t^{0.75}}{0.75}\right) \end{array} \right)$$





(d)

$$\left(\begin{array}{l} \{v, \beta, \delta, L, C_0\} \\ \{a, b, c\} \\ \{C_1, C_2\} \\ \alpha = \\ k = \\ \omega = \\ \xi = k \left(\frac{x^\alpha}{\alpha}\right) + \omega \left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right) = \end{array} \quad \begin{array}{l} \{0.0025, 0.0025, 0.1, 1, 1\} \\ \{1, 0, 2\} \\ \{C_1 \rightarrow 1, C_2 \rightarrow 1\} \\ 1 \\ 0.204181 \\ -0.204238 \\ 0.204181 \left(\frac{x^1}{1}\right) + -0.204238 \left(\frac{t^1}{1}\right) \end{array} \right)$$



■ **Problema 3.4.7. Método de Expansión ($\frac{G'}{G^2}$). Gráficas Caso I.**

Representense las gráficas de las soluciones de la Ecuación Propagación de Ondas en Línea de Transmisión Eléctrica de Paso Bajo no Lineal (LPEL):

$$(ODE) \equiv (L C_0 \omega^2 - k^2) U(\xi) - L C_0 v \omega^2 U^2(\xi) + L C_0 \beta \omega^2 U^3(\xi) - \frac{1}{12} k^4 U''(\xi) = 0$$

$$(PDE) \equiv L C_0 V_{tt} - V_{xx} - \frac{\delta^2}{12} V_{xxxx} - L C v (V^2)_{tt} + L C \beta (V^3)_{tt}$$

con los parámetros indicados en los diferentes casos:

$$(x, t) = \begin{cases} x \in [-X, X] = [-200, 200] \\ t \in [0, T] = [0, 100] \end{cases}$$

$$\{v \rightarrow -0.015, \beta \rightarrow -0.0025, \delta \rightarrow 5.85, L \rightarrow 1, C_0 \rightarrow 1, a \rightarrow 1, b \rightarrow 0, c \rightarrow 2\}$$

$$\{C_1 \rightarrow 1, C_2 \rightarrow 1\}$$

Caso I. $(ac) > 0, b = 0$

$$\begin{cases} u_{1,4}(\xi) = u_{1,4}(x, t) \\ u_{1,4}(\xi) = u_{1,4}(x, t), \quad t = 50 \\ u_{1,4}(\xi) = u_{1,4}(x, t), \quad x = 50 \end{cases}$$

$$u_{1,4}(\xi) = \frac{\sqrt{a} \sqrt{\frac{c}{a}} (\cos(\sqrt{ac} \xi) C_1 + \sin(\sqrt{ac} \xi) C_2) v}{3 \sqrt{2} \sqrt{c} \beta (\cos(\sqrt{ac} \xi) C_2 - \sin(\sqrt{ac} \xi) C_1)} + \frac{v}{3 \beta} + \frac{\sqrt{c} (\cos(\sqrt{ac} \xi) C_2 - \sin(\sqrt{ac} \xi) C_1) v}{3 \sqrt{2} \sqrt{a} \sqrt{\frac{c}{a}} \beta (\cos(\sqrt{ac} \xi) C_1 + \sin(\sqrt{ac} \xi) C_2)}$$

$$\bullet k = \frac{\sqrt{3} v \sqrt{-\frac{1}{ac(2v^2-9\beta)}}}{\delta} \quad \bullet \omega = \frac{3 \sqrt{3} v \sqrt{\frac{\beta}{acLC_0}}}{(2v^2-9\beta)\delta}$$

(a) $\alpha = 0.25.$

(b) $\alpha = 0.50.$

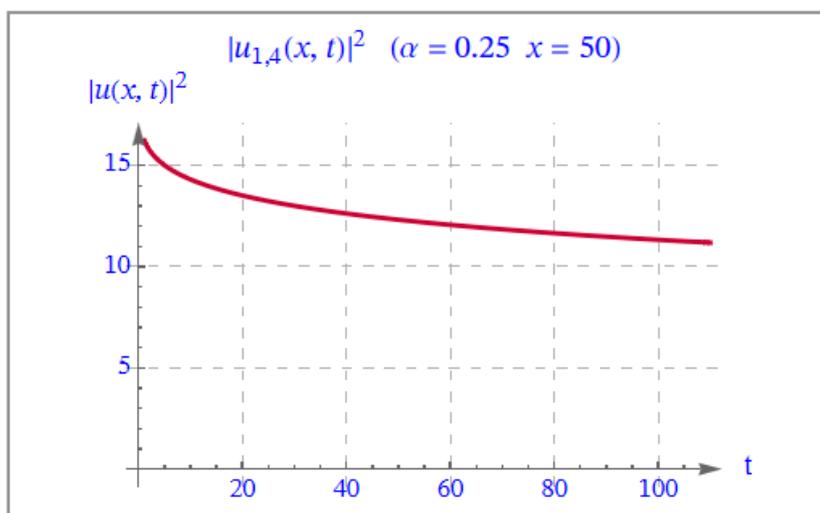
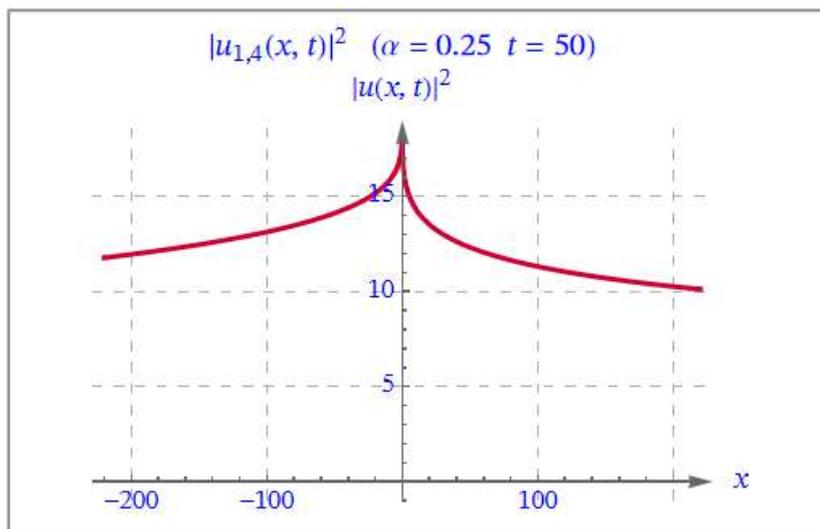
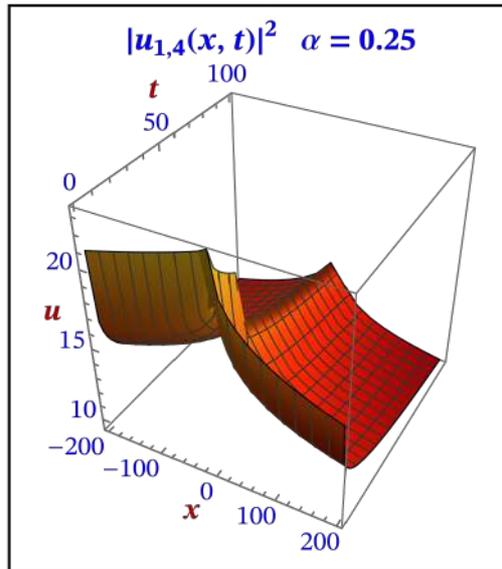
(c) $\alpha = 0.75.$

(d) $\alpha = 0.95.$

SOLUCIÓN

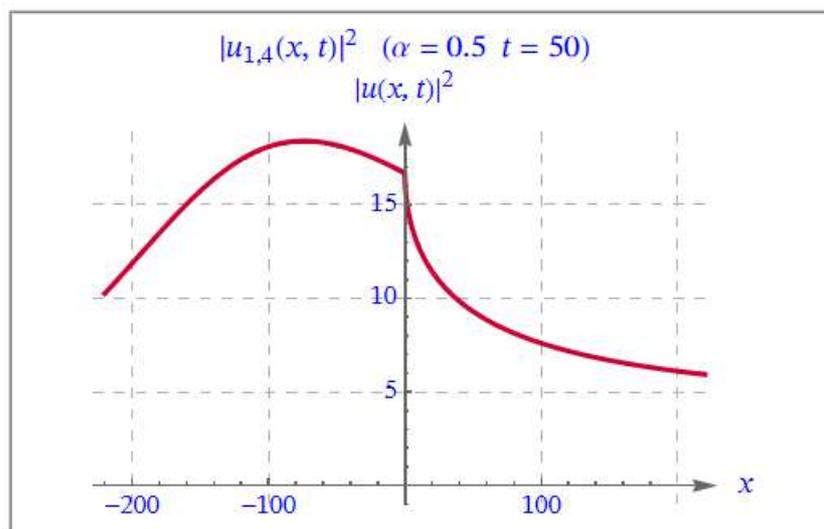
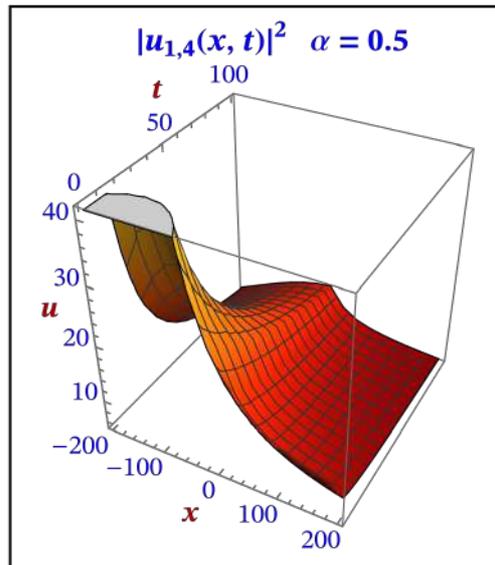
(a)

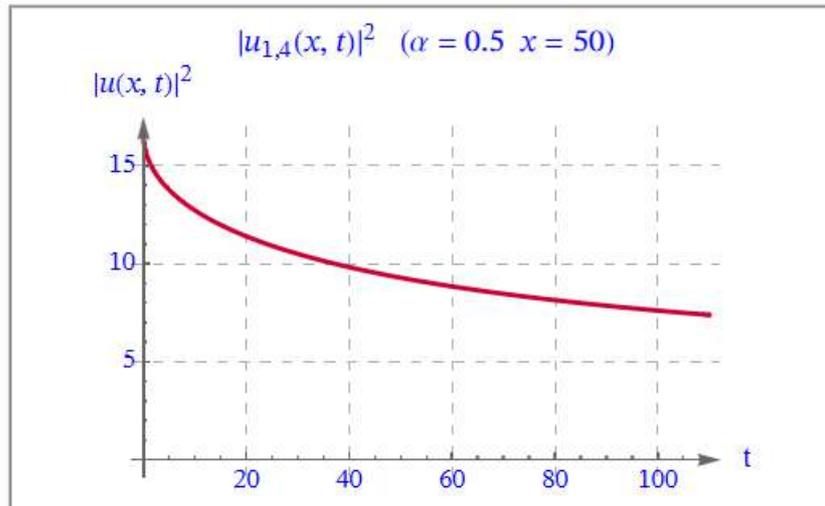
$$\left(\begin{array}{ll} \{v, \beta, \delta, L, C_0\} & \{-0.015, -0.0025, 5.85, 1, 1\} \\ \{a, b, c\} = & \{1, 0, 2\} \\ \{C_1, C_2\} & \{C_1 \rightarrow 1, C_2 \rightarrow 1\} \\ \alpha = & 0.25 \\ k = & 0. - 0.0207295 i \\ \omega = & 0. - 0.0205253 i \\ \xi = k \left(\frac{x^\alpha}{\alpha}\right) + \omega \left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right) = & 0. - 0.0207295 I \left(\frac{x^{0.25}}{0.25}\right) + 0. - 0.0205253 I \left(\frac{t^{0.25}}{0.25}\right) \end{array} \right)$$



(b)

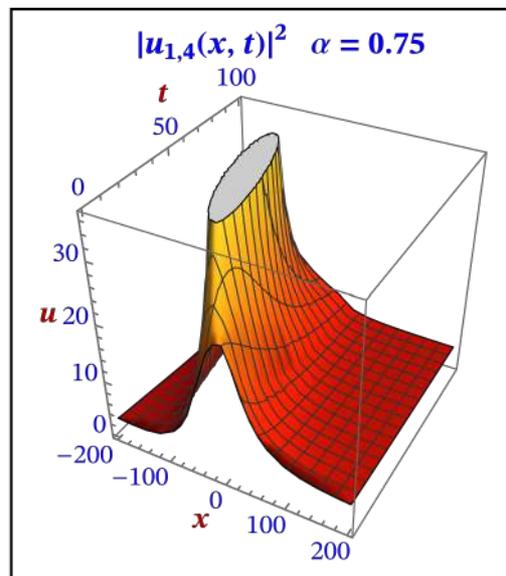
$$\left(\begin{array}{l} \{v, \beta, \delta, L, C_0\} \\ \{a, b, c\} \\ \{C_1, C_2\} \\ \alpha = \\ k = \\ \omega = \\ \xi = k \left(\frac{x^\alpha}{\alpha}\right) + \omega \left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right) = \end{array} \begin{array}{l} \{-0.015, -0.0025, 5.85, 1, 1\} \\ \{1, 0, 2\} \\ \{C_1 \rightarrow 1, C_2 \rightarrow 1\} \\ 0.5 \\ 0. - 0.0207295 i \\ 0. - 0.0205253 i \\ 0. - 0.0207295 i \left(\frac{x^{0.5}}{0.5}\right) + 0. - 0.0205253 i \left(\frac{t^{0.5}}{0.5}\right) \end{array} \right)$$

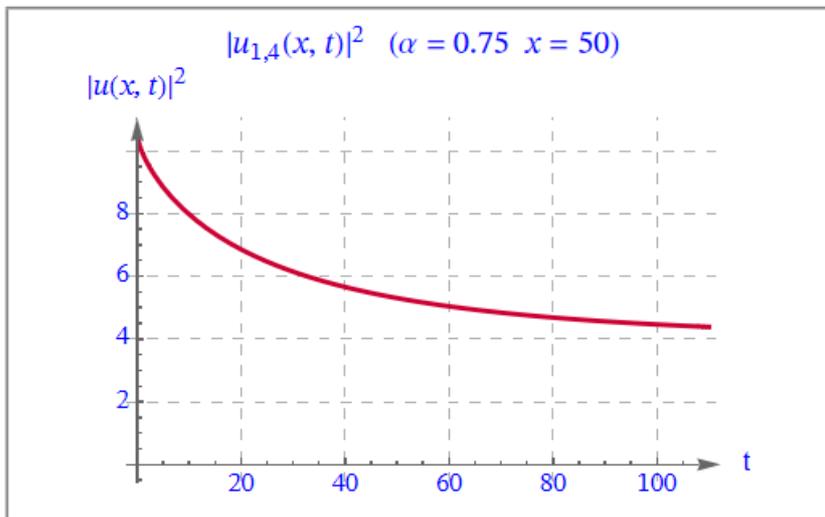
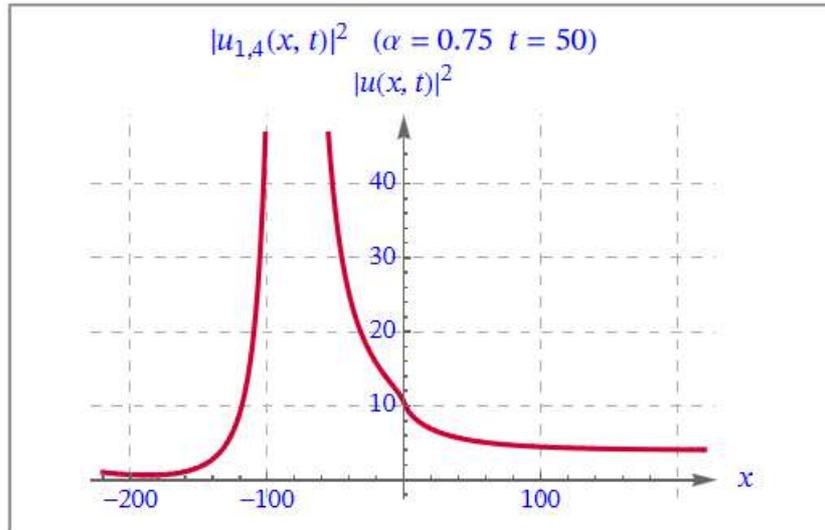




(c)

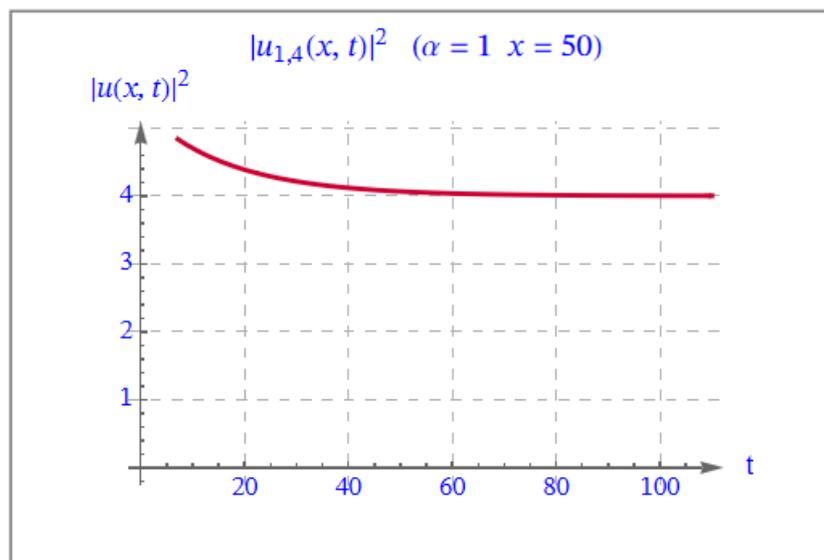
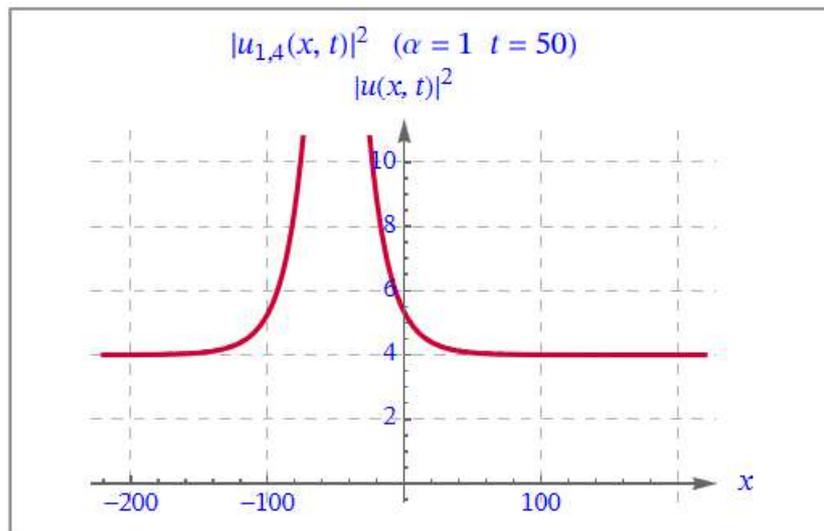
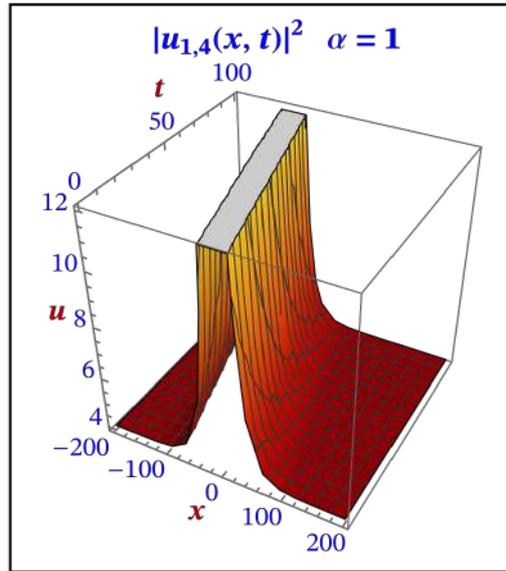
$$\left(\begin{array}{l} \{v, \beta, \delta, L, C_0\} \\ \{a, b, c\} = \\ \{C_1, C_2\} \\ \alpha = \\ k = \\ \omega = \\ \xi = k \left(\frac{x^\alpha}{\alpha} \right) + \omega \left(\frac{t^\alpha}{\alpha} \right) = \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} \{-0.015, -0.0025, 5.85, 1, 1\} \\ \{1, 0, 2\} \\ \{C_1 \rightarrow 1, C_2 \rightarrow 1\} \\ 0.75 \\ 0. - 0.0207295 i \\ 0. - 0.0205253 i \\ 0. - 0.0207295 i \left(\frac{x^{0.75}}{0.75} \right) + 0. - 0.0205253 i \left(\frac{t^{0.75}}{0.75} \right) \end{array} \right)$$





(d)

$$\left(\begin{array}{l} \{v, \beta, \delta, L, C_0\} \\ \{a, b, c\} = \\ \{C_1, C_2\} \\ \alpha = \\ k = \\ \omega = \\ \xi = k \left(\frac{x^\alpha}{\alpha}\right) + \omega \left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right) = \end{array} \begin{array}{l} \{-0.015, -0.0025, 5.85, 1, 1\} \\ \{1, 0, 2\} \\ \{C_1 \rightarrow 1, C_2 \rightarrow 1\} \\ 1 \\ 0. - 0.0207295 i \\ 0. - 0.0205253 i \\ 0. - 0.0207295 I \left(\frac{x^1}{1}\right) + 0. - 0.0205253 I \left(\frac{t^1}{1}\right) \end{array} \right)$$



Capítulo 4

4. Conclusión y Líneas Futuras de Investigación

4.1. Conclusiones

El estudio del comportamiento dinámico de los solitones en líneas de transmisión eléctrica de paso bajo a través de los métodos empleados ha permitido obtener resultados significativos en el análisis de los modelos fraccionarios, ajustándose con creces a la solución exacta y obteniendo resultados concluyentes en tiempos reducidos.

A continuación, se expondrán las conclusiones obtenidas con cada uno de los métodos estudiados:

4.1.1. Método de Expansión (G'/G) en Función de la Ecuación Diferencial de 2º Orden

El método de expansión (G'/G) aplicado a la ecuación diferencial de 2º orden demuestra ser una técnica de gran utilidad para obtener soluciones exactas de ecuaciones diferenciales no lineales. Para ello se han resuelto una serie de problemas, con los cuales se han logrado alcanzar resultados satisfactorios. La exactitud de las soluciones obtenidas es una ventaja significativa, pues permite una representación precisa de fenómenos dinámicos complejos, como es el caso de la ecuación que describe el comportamiento dinámico de los solitones.

Así mismo, las soluciones obtenidas se expresan como combinaciones lineales de términos de la forma (G'/G), lo que facilita su aplicación.

Al aplicar este método se facilita la transformación de ecuaciones no lineales complejas de segundo orden en ecuaciones más sencillas y manejables, simplificando así el proceso de resolución. Este método facilita el análisis y obtención de soluciones exactas.

4.1.2. Método de Expansión (G'/G) en Función de la Ecuación Generalizada de Riccati

El método de expansión (G'/G) aplicado a la ecuación generalizada de Riccati permite obtener soluciones esenciales para describir una amplia gama de fenómenos en los campos de las matemáticas y la física.

Tras la realización de una serie de problemas aplicándola sobre la ecuación que describe el comportamiento dinámico de los solitones, se concluye como este método admite una gran variedad de soluciones en función de una serie de parámetros (p , q , r), que se clasifican en diferentes familias según si el valor de $(p^2 - 4qr)$ es mayor, menor o igual a 0. Cada una de estas familias proporcionan una perspectiva diferente sobre la ecuación estudiada.

Además, este método se caracteriza por la facilidad que tiene a adaptarse a diferentes condiciones iniciales y parámetros específicos.

4.1.3. Método de Expansión (G'/G) en Función de la Ecuación Elíptica de Jacobi

El método de expansión (G'/G) aplicado a la ecuación elíptica de Jacobi permite alcanzar una serie de soluciones en términos de funciones elípticas, permitiendo alcanzar una gran precisión en la resolución de ecuaciones periódicas o de simetría elíptica.

Tras la realización de un conjunto de problemas sobre la resolución de la ecuación que describe el comportamiento dinámico de los solitones, se concluye como este método ofrece una descripción detallada de la transición entre diferentes regímenes del comportamiento dinámico. Esto se debe a que esta técnica permite el ajuste de las soluciones en función del módulo k^2 .

Además, las soluciones obtenidas a través de este método se expresan en términos de funciones elípticas como $\text{sn}(\xi, k^2)$, $\text{cn}(\xi, k^2)$, $\text{dn}(\xi, k^2)$ y sus relaciones. Estas funciones son fundamentales para la descripción de fenómenos periódicos y quasi-periódicos.

Pese a ser no ser el método más sencillo, este se trata del método más eficaz y preciso a la hora de analizar el comportamiento dinámico y bifurcaciones de los solitones.

Este método no entraba dentro de los objetivos iniciales del proyecto, pero finalmente fue desarrollado debido a su importancia en la resolución de ecuaciones diferenciales no lineales de forma eficaz y precisa.

4.1.4. Método de expansión (G'/G^2) en Función de la Ecuación Generalizada de Riccati

Finalmente, el método de expansión (G'/G^2) aplicado a la ecuación generalizada de Riccati extiende la metodología del método de expansión (G'/G), proporcionando una mayor flexibilidad y capacidad de resolución de ecuaciones diferenciales no lineales complejas. Además, permite alcanzar soluciones más generales, abarcando una variedad más completa de aplicaciones.

Este método destaca por su capacidad para manejar una mayor diversidad de ecuaciones no lineales, siendo así más eficaz para sistemas con gran complejidad y no lineales.

En líneas generales, mientras que el método (G'/G) resulta más eficaz para ecuaciones de segundo orden no lineales y problemas relativamente simples, el método (G'/G^2) resulta más preciso y eficaz en ecuaciones más complejas que requieren soluciones más generales.

4.2. Líneas Futuras de Investigación

Los métodos de expansión (G' / G) y (G' / G^2) han demostrado ser una herramienta de gran utilidad y eficaz en la obtención de soluciones exactas para ecuaciones diferenciales no lineales.

Pese al análisis exhaustivo de este método a lo largo del proyecto, existen varias direcciones futuras en las que se podrían ampliar y profundizar en estos métodos. A continuación, se detallan una serie de líneas futuras de investigación más prometedoras:

4.2.1 Ecuaciones Diferenciales de Orden Superior

En primer lugar, la extensión a ecuaciones diferenciales de orden superior. El objetivo sería adaptar y aplicar el método (G' / G) a ecuaciones de tercer y cuarto orden lineales para su resolución.

La ODE de tercer grado lineal viene expresada como:

$$G^{(3)}(\xi) + a G''(\xi) + b G'(\xi) + c G(\xi) = 0. \quad (4.2.1)$$

Por otro lado, la ODE de cuarto grado lineal se define como:

$$G^{(4)}(\xi) + a G^{(3)}(\xi) + b G''(\xi) + c G'(\xi) + d G(\xi) = 0. \quad (4.2.2)$$

Particularizando el método de expansión $(\frac{G'}{G})$ a la PDE no lineal que rige la propagación de ondas de transmisión eléctrica de paso bajo no lineal:

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \left\{ \frac{k^2 \delta^4}{12} \frac{d^2 V}{d\xi^2} + (k \delta^2 - k \omega^2) V + \alpha k \omega^2 V^2 - \beta k \omega^2 V^3 \right\} = 0. \quad (4.2.3)$$

Introduciendo en la ecuación (4.2.3), la ODE de tercer o cuarto grado lineal y despejando todos los coeficientes de $(\frac{G'}{G})^i$ para $i = 0, 1, 2, \dots$, se obtiene un sistema de ecuaciones algebraicas con el cual se obtienen el valor de las constantes que definen las ecuaciones (a, b, c, d, K, U) .

4.2.2. Método de Expansión (G' / G^2) a la Ecuación Elíptica de Jacobi

Otra posible línea de investigación se trata del desarrollo del método de expansión (G' / G^2) a la ecuación elíptica de Jacobi. Obteniendo así, otro método con el que solucionar ecuaciones más complejas.

La ecuación Elíptica de Jacobi se describe como:

$$(G'(\xi))^2 = R + Q G^2(\xi) + P G^4(\xi). \quad (4.2.4)$$

Por otro lado, la ecuación diferencial que describe la propagación de los solitones en las líneas eléctricas de paso bajo es la siguiente:

$$\begin{aligned} & \bullet L C_0 D_{tt}^{2\alpha} V(x, t) - D_{xx}^{2\alpha} V(x, t) - \frac{\delta^2}{12} D_{xxx}^{4\alpha} V(x, t) - \\ & L C_0 \nu D_{tt}^{2\alpha} V^2(x, t) + L C_0 \beta D_{tt}^{2\alpha} V^3(x, t) = 0 \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

A cerca de esta ecuación cabe destacar que $LC_0 = 1$ y α , β y δ representan constantes positivas y reales.

De acuerdo con la el método de expansión (G' / G^2), la solución general de la ODE tiene la siguiente forma:

$$U(\xi) = a_0 + \sum_{i=1}^N \left(a_i \left(\frac{G'}{G^2} \right)^i + b_i \left(\frac{G'}{G^2} \right)^{-i} \right). \quad (4.2.6)$$

Combinando las ecuaciones (4.2.4), (4.2.5) y (4.2.6), se obtiene un sistema de ecuaciones algebraicas con el cual se consiguen los valores de las constantes que definen las soluciones exactas de la ODE que define el comportamiento dinámico de los solitones.

4.2.3. Diseño de Nuevos Métodos Analíticos

(a) Otras líneas de investigación actuales son la aplicación de los métodos analíticos estudiados (i) método de Expansión ($\frac{G'}{G}$) y (ii) el método de Expansión ($\frac{G'}{G^2}$) para deducir las nuevas soluciones exactas para ecuaciones diferenciales fraccionarias no lineales (*nonlinear partial differential equations-NPDEs*), tales como la ecuación de tiempo fraccionaria no lineal de Harry Dym (HD)

$$D_t^\alpha u(x, t) = u^3(x, t) u_{xxx}(x, t) \quad 0 < \alpha \leq 1$$

$$u(x, 0) = \left(a - \frac{3\sqrt{b}}{2} x \right)^{\frac{2}{3}} \quad (4.2.7)$$

• $D_t^\alpha \equiv$ derivada fraccionaria de orden α en el sentido de Caputo

y la ecuación de onda larga regularizada simétrica (*symmetric regularized long wave-SRLW*)

$$D_t^{2\alpha} u + D_x^{2\alpha} u + u D_t^\alpha (D_x^\alpha u) + D_x^\alpha u D_t^\alpha u + D_t^{2\alpha} (D_x^{2\alpha} u) = 0, \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (4.2.8)$$

• $D_t^\alpha \equiv$ derivada conformable de orden α .

(b) Así mismo, son objeto de estudio y diseño de nuevos algoritmos basados en un tercer método: (iii) el método de la función multi-exp (*multi-exp-function method-MEFM*) que calcule las soluciones de ondas múltiples (*multiple wave solution-MVS*) en ecuaciones no lineales de dimensión (2+1), determinando las soluciones de ondas múltiples para el Modelo de Gilson-Pickering que contiene soluciones de tipo uno, dos y tres solitones y en la ecuación (2+1)-dimensional Bogoyavlenskii-Kadomtsev-Petviashvili (BKP):

$$u_{xxt} + u_{xxxxy} + 12 u_{xx} u_{xy} + 8 u_x u_{xxy} + 4 u_{xxx} u_y = \gamma u_{yyy}, \quad \gamma = \pm 1$$

$$(u_{xt} + u_{xxx} y + 8 u_x u_{xy} + 4 u_{xx} u_y)_x = \gamma u_{yyy} \quad (4.2.9)$$

• $u(x, y, t) \equiv$ amplitud de la onda

4.2.3. Desarrollo de Modelos Predictivos

Otra posible línea de investigación se trata del desarrollo de modelos predictivos para su aplicación en empresas del sector energético.

La demanda de energía varía notablemente en el tiempo debido a la influencia de factores como los cambios estacionales, eventos climáticos o hábitos de consumo. Gracias al desarrollo de estos modelos predictivos se podrán anticipar estas fluctuaciones de la demanda de energía, facilitando a las empresas llevar a cabo una mejor planificación y gestión de los recursos energéticos disponibles.

Asimismo, estos modelos predictivos facilitarán la predicción de energía renovable, optimizando su integración en la red eléctrica y reduciendo la dependencia sobre fuentes no renovables.

Por otro lado, el control y mantenimiento de las infraestructuras eléctricas es muy costoso, pero sin embargo es necesario para la eficiencia del sistema. Estos modelos desarrollados podrán prever fallos, minimizando los tiempo de inactividad y sus costes asociados.

En líneas generales, el desarrollo de estos modelos les permitirá reducir a las empresas energéticas enormemente sus costes de mantenimiento y controlar las fluctuaciones en la demanda, para optimizar así su producción y transporte.

Capítulo 5

5. Estudio Económico del Proyecto

5.1. Antecedentes

El sector energético se enfrenta a varios desafíos críticos, como la reducción de pérdidas de energía durante la transmisión y distribución eléctrica para poder cumplir con las estrictas regulaciones medioambientales, y la adopción de tecnologías avanzadas para mejorar la eficiencia. Otro gran desafío al que se debe enfrentar es la reducción de emisiones de CO₂.

En este capítulo se analizará desde una perspectiva económica el efecto que este proyecto puede tener sobre el sector energético, en general, e Iberdrola, en particular, con el estudio del comportamiento dinámico de los solitones en líneas eléctricas, analizando las eficiencias y reducciones de costes, así como la mejora de la percepción de los usuarios con la compañía.

5.2. Mejoras del Proyecto

5.2.1. Mejoras para el Sector Energético

Analizando este proyecto desde una perspectiva económica y de mercado, el estudio del comportamiento dinámico de los solitones en líneas de transmisión eléctrica de paso bajo de paso bajo tiene múltiples aplicaciones.

Para empezar, este proyecto genera valor a las empresas del sector energético optimizando el uso de sus recursos para reducir las pérdidas de energía en las líneas eléctricas, lo cual conlleva una mayor eficiencia operativa y una reducción de costes operativos.

Por otro lado, la reducción de pérdidas energéticas contribuye al cuidado del medio ambiente, reduciendo las emisiones de CO₂, alineando las empresas con los Objetivos de Desarrollo y Sostenibilidad (ODS). Este aspecto aporta un gran valor y reputación a las empresas de cara al público y los clientes, haciéndolas destacar sobre la competencia.

Finalmente, el estudio del comportamiento de los solitones en las líneas eléctricas de paso bajo permite su conocimiento en profundidad y mejoras en las infraestructuras eléctricas, haciéndolas más fuertes y eficientes.

5.2.2. Mejoras Para Iberdrola

■ 5.2.2.1. Beneficios para Iberdrola

En este caso, el centro de estudio va a ser los beneficios y mejoras que aportaría este proyecto a Iberdrola.

Como se ha mencionado anteriormente, una de las mayores aportaciones de este proyecto en el mundo laboral es la reducción de pérdidas energéticas, lo cual le permite a Iberdrola mejorar la eficiencia de sus redes de transmisión, minimizando las pérdidas eléctricas durante el transporte.

Además, esta reducción de pérdidas energéticas supone un notable ahorro económico. Al desperdiciar menos energía, se minimizan los costes operativos, maximizando los márgenes de beneficio.

Iberdrola, al igual que la mayoría de las compañías, se encuentra dentro de un mercado laboral energético muy competitivo. Es por ello que, para destacar, es muy importante adoptar nuevas tecnologías y emplear métodos avanzados de análisis para poder posicionar a Iberdrola como la empresa líder en innovación dentro del sector energético.

Finalmente, la mejora de la eficiencia energética y reducción de las emisiones de CO₂ supone de gran ayuda a Iberdrola para cumplir con las regulaciones medioambientales y los ODS impuestos por el Gobierno.

■ 5.2.2.2. Beneficios para Iberdrola

Iberdrola se ha estado centrando durante los últimos años en invertir en diferentes proyectos de mejora de la eficiencia energética. Uno de estos proyectos se ha basado en el despliegue de redes inteligentes (*Smart grids*), las cuales integran de forma dinámica las acciones de los usuarios conectados a ellas, con el fin de suministrar electricidad de manera eficiente, sostenible, económica y segura. Este proyecto tiene tres retos principales para conseguir construir ciudades inteligentes y colaboradoras con el medio ambiente:

- Integrar un mayor volumen de energía renovable proveniente de fuentes limpias: viento, sol y agua.
- Electrificar otros usos, como la climatización y transporte energético, puesto que actualmente, las pérdidas en el transporte causan más del 25% de las emisiones de CO₂.
- Responder a las demandas de un consumidor más conectado que, empoderado por la tecnología, quiere tomar decisiones que le permitan optimizar y/o adaptar su consumo a sus hábitos de vida y tener la posibilidad de convertirse en productor de la energía que consume en su casa, a través de fórmulas como el autoconsumo.

Es concretamente en el segundo reto en el que entra en juego este proyecto, para minimizar las pérdidas del transporte energético. Gracias a él, obtendremos un estudio y conocimiento exhaustivo del comportamiento de solitones para poder crear modelos que predigan su comportamiento y bifurcaciones, las cuales generan las pérdidas de energía.

■ 5.2.2.3. Caso de Aplicación del Proyecto

Estos modelos predictivos de comportamiento de los solitones pueden ser esenciales en la gestión de la red eléctrica inteligente, ayudando a equilibrar la carga y optimizar la distribución eléctrica, especialmente en situaciones de alta demanda o fluctuaciones significativas. Tras la aplicación de estos modelos se podría reducir el riesgo de apagones, asegurando un suministro de energía fiable a los consumidores, ya que se podría identificar con antelación los picos de demanda.

En el primer trimestre de 2024, Iberdrola experimentó problemas debido a un aumento inesperado en la demanda de energía durante un período de condiciones climáticas adversas. Este evento generó una sobrecarga en algunas de sus instalaciones de generación y distribución. El estudio y modelado del comportamiento y bifurcaciones de los solitones podría haber tenido un gran impacto positivo en este incidente. En condiciones estables, los solitones son ondas solitarias con propagación constante. Es por ello, que sus bifurcaciones pueden ser útiles para entender y predecir fenómenos no lineales en sistemas eléctricos. Si Iberdrola se hubiese apoyado en modelos predictivos sobre el comportamiento de los solitones, podría haber previsto este pico de demanda, para gestionar la estabilidad de la red de manera eficaz y ajustar la carga de manera preventiva, evitando sobrecargas y apagones y proporcionando alertas tempranas y recomendaciones de acción.

Por otro lado, otra situación donde podría haber tenido gran utilidad un modelo predictivo sobre el comportamiento dinámico de los solitones más reciente ha sido las caídas del precio de la electricidad a cero debido a la alta producción de energía renovable combinada con una demanda notablemente más baja de lo esperado, ocurrida en repetidas ocasiones durante la semana del 17 al 23 de junio de 2024. En este caso, este modelo predictivo habría previsto los fenómenos no lineales ocurridos en la demanda eléctrica, permitiendo a Iberdrola ajustar su oferta de energía y evitar que los precios caigan a cero. Asimismo, con estos modelos se podría optimizar el almacenamiento energético y la integración de fuentes de energía renovable, mejorando la estabilidad y eficiencia de red. Con estas herramientas predictivas, Iberdrola podría anticipar los cambios en la producción y en la demanda, ajustando sus estrategias de gestión.

■ 5.2.2.4. Impacto económico sobre Iberdrola

A continuación, se va a realizar una estimación aproximada basada en la suposición de que estos modelos reducen las pérdidas energéticas en un 1 – 2%, lo cual es conservador dado el potencial de optimización mencionado, ya que se podrían evitar picos y caídas exponenciales en el precio de la electricidad. Para comenzar, la producción anual de Iberdrola se encuentra alrededor de los 100 TWh anuales, con una tasa de pérdidas del 7%. Esto conlleva unas pérdidas energéticas de 7 TWh aproximadamente. Además, tal y como se ha supuesto, en la mejora de la eficiencia energética sería de un 1-2%, lo cual reduciría las pérdidas en 0.7-1.4 TWh anuales.

El valor económico del ahorro energético dependerá del precio de la electricidad. No obstante, aplicando el precio medio del año 2023 en España, siendo este 147.192 €/MWh, se obtiene un ahorro económico de entre 103,034 y 206,067 millones de euros anuales. Se puede observar que, aún siendo conservadores con la reducción de pérdidas energéticas gracias a la aplicación de modelos predictivos, los beneficios económicos son importantes.

■ 5.2.2.5. Propuesta del plan de negocio

Actualmente, el impacto medioambiental es uno de los KPIs (*Key Performance Indicators*) más importantes para la mayoría de los usuarios, junto con el tradicional “mejor precio”. El cliente de mayor valor económico para una compañía energética no es aquel que se mueve por el mejor precio. El cliente más rentable es aquel que busca en esta compañía valores cualitativos, como es el caso de la reducción de emisiones de CO₂ y la contribución con el medio ambiente. El cliente más sensible a las cuestiones medioambientales obtendrá un valor percibido superior al valor real generado por el ahorro económico, fruto de la aplicación de los modelos predictivos.

Así, aunque el valor real pueda ser cuantificado entre 100 y 200 millones de euros anuales aproximadamente, el valor percibido por los usuarios será notablemente mayor.

El plan de negocio a proponer será el siguiente:

- Se propondrá un incremento de un 1% en los precios del KWh a los usuarios, a cambio de asegurarles una estabilidad energética, con caídas y picos controlados, y con un aporte al medio ambiente, reduciendo las emisiones de CO₂.
- Por otro lado, Iberdrola saldrá beneficiado desde varias perspectivas. Por un lado, desde una perspectiva más cualitativa, Iberdrola destacará dentro del sector energético por ser líder en la innovación, además de estar comprometida con el medio ambiente, una de las grandes preocupaciones de la población actualmente. Por otro lado, desde una perspectiva más económica y cuantitativa, Iberdrola aumentará sus ingresos, debido al aumento de precio de las tarifas, y reducirá sus pérdidas económicas, fruto de las pérdidas energéticas, lo que aumentará su margen de beneficio.

■ 5.2.2.6. Percepción del Público

Como se ha mencionado anteriormente, la adopción de tecnologías más eficientes y ecológicas tendrá un impacto medioambiental y maximización de beneficios de las empresas, pero también supondrá un impacto significativo en la percepción de la marca por el público.

En primer lugar, las empresas que invierten en tecnologías avanzadas y eficientes se posicionan como líderes en innovación dentro del sector energético. Esto puede crear cierto atractivo a la empresa de cara al público y sus posibles futuros clientes. Además, mejorará la percepción pública de la empresa.

Asimismo, supondrá la reducción del impacto negativo. Cada vez la población le da más importancia al cuidado del medioambiente y, muchas veces, a la hora de en qué empresa invertir o contratar, uno de los factores predeterminantes a tener en cuenta, además de la calidad y el precio, es si la empresa es ecológica y colabora con el medioambiente. Gracias a las tecnologías ecológicas se conseguirán reducir las emisiones de CO₂ y la huella de carbono, mejorando la reputación de la empresa a largo plazo.

Por otro lado, obtener certificaciones reconocidas a nivel internacional, como ISO 14001 (gestión ambiental) o LEED (construcción sostenible), y destacarlas en el material de marketing puede reforzar la credibilidad y compromiso ambiental de la empresa.

Además, la implementación de tecnologías ecológicas, le permitirá a la empresa realizar campañas de “Marketing Verde”, con la finalidad de dar una mejor imagen de cara al público. Un ejemplo de una campaña de Marketing Verde exitosa es la de Patagonia, conocida como “Don’t Buy This Jacket”. Esta campaña alentaba a los consumidores a considerar el impacto ambiental de sus compras.

■ 5.2.2.7. Estrategia de Venta del Proyecto

Como objetivo final, tras analizar el impacto económico que puede llegar a tener este proyecto sobre Iberdrola, se pretende vender este proyecto. Para ello, se realizará un Elevator Pitch, el cual se enfocará en los beneficios desde dos perspectivas diferentes, la del cliente y la de la empresa.

ELEVATOR PITCH

¿Quieres ganar 100 millones adicionales y fidelizar a tus mejores clientes?

A través de la inteligencia artificial, se puede conseguir mejorar la eficiencia en el transporte energético, previendo las posibles fluctuaciones en la producción y demanda y minimizando las pérdidas en la red eléctrica, reduciendo así la huella de carbono. Siendo este el factor más determinante a la hora de fidelizar a los clientes más rentables, los que no buscan el mejor precio, sino la mejor calidad.

Con el apoyo de esta resolución de ecuaciones que describen el comportamiento dinámico de los solitones, se podrán crear modelos predictivos que permitan reducir las pérdidas energéticas. Suponiendo que esta reducción es de en torno a un 2%, el ahorro económico sobrepasaría los 200 millones de euros anuales.

¿PONEMOS TODA NUESTRA ENERGÍA EN SER LA EMPRESA MÁS VERDE CON EL MEDIOAMBIENTE?

5.3. Conclusión

El estudio del comportamiento dinámico de los solitones en líneas eléctricas de paso bajo ofrece una enorme oportunidad para transformar el sector energético y mejorar la eficiencia operativa de empresas, como es el caso de Iberdrola. A través de la implementación de tecnologías, se pueden alcanzar reducciones notables en las pérdidas de energía, lo cual no solamente genera un ahorro económico sino también una menor huella de carbono.

En este caso en concreto, Iberdrola se beneficiará en gran medida de este proyecto, posicionándose así como empresa líder en innovación tecnológica y compromiso con el medio ambiente. La adopción de modelos predictivos basados en el comportamiento de los solitones le permitirá gestionar de una forma más eficiente la transmisión y distribución la energía, anticipando picos de demanda.

El impacto económico de la reducción de pérdidas energéticas, estimado en hasta 200 millones de euros anuales, demuestran como pequeñas mejoras en la eficiencia energética, en este caso de un 2%, pueden generar beneficios significativos. Además, la percepción positiva hacia la empresa del pública fortalecerá su reputación, aumentando la fidelidad de sus clientes más rentables.

En líneas generales, la integración de esta tecnología no solo representa una mejora operativa y económico, sino también un avance estratégico para Iberdrola en su misión de ser la empresa líder del sector energético, transmitiendo una imagen de compromiso con la sostenibilidad e innovación.

Lista de Acrónimos

Se indican en la siguiente tabla todas las abreviaturas, acrónimos e iniciales utilizadas en este Proyecto.

Acrónimo	Descripción
BKP	<i>Bogoyavlenskii – Kadomtsev – Petviashvili.</i>
EDP	<i>Partial Differential Equations</i> – Ecuaciones en derivadas parciales.
HD	<i>Harry Dym.</i>
LPEL	<i>Low Pass Electrical Lines</i> – Líneas de transmisión eléctrica de paso bajo.
MEFM	<i>Multi –exp Function Method</i> – Método de la Función Multi – exp.
MVS	<i>Multiple Wave Solution</i> – Soluciones de Ondas Múltiples.
ODE	<i>Ordinary differential equation</i> – Ecuación diferencial ordinaria.
PDE	<i>Partial differential equation</i> – Ecuación diferencial parcial.

Bibliografía

Referencias Bibliográficas

- [1] [ALI05]
ALI, A. T. *New exact solutions for (3+ 1)-dimensional Kadomtsev-Petviashvili equation and generalized (2+ 1)-dimensional Boussinesq equation*. International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation, 2005, vol. 6, no 2, p. 151-162.
- [2] [ALI11]
ALI, Ahmad T. *New generalized Jacobi elliptic function rational expansion method*. Journal of computational and applied mathematics, 2011, vol. 235, no 14, p. 4117-4127.
- [3] [ALSH23]
AL-SHAWBA, Altaf A., et al. *Compatible extension of the (G'/G)-expansion approach for equations with conformable derivative*. Heliyon, 2023, vol. 9, no 5.
- [4] [ARSH18]
ARSHED, Saima; SADIA, Misbah. *(G'/G²)-Expansion method: new traveling wave solutions for some nonlinear fractional partial differential equations*. Optical and Quantum Electronics, 2018, vol. 50, p. 1-20.
- [5] [ASIS22]
ASÍS BERARDUCCI, Manuel Alejandro. *Analysis of the Iberdrola-PNM Resources Deal and its Impact on the Global Energy Industry*. 2022.
- [6] [BAUT03]
BAUTISTA, G.; PINA, E.; SOTO, E. *Fórmulas y teoremas de adición de las funciones elípticas de Jacobi*. Revista mexicana de física, 2003, vol. 49, no 3, p. 276-282.
- [7] [CARR12]
CARRENO, Juan Carlos López; SUÁRES, Rosalba Mendoza. *Acerca de algunas soluciones de ciertas ecuaciones de onda*. Boletín de Matemáticas, 2012, vol. 19, no 2, p. 107-118.
- [8] [CHAN12]
CHAND, Fakir; MALIK, Anand K. *Exact traveling wave solutions of some nonlinear equations using G-G' expansion Method*. International Journal of Nonlinear Science, 2012, vol. 14, no 4, p. 416-424.
- [9] [FAN09]
FAN, Xinghua; YANG, Shouxiang; ZHAO, Dan. *Travelling wave solutions for the Gilson-Pickering equation by using the simplified G'/G-expansion method*. Int. J. Nonlinear Sci, 2009, vol. 8, p. 368-373.
- [10] [GOME06]
GÓMEZ, Cesar; SALAS, Álvaro. *Exact solutions for the generalized shallow water wave equation by the general projective Riccati equations method*. Boletín de Matemáticas, 2006, vol. 13, no 1, p. 50-56.
- [11] [HWAN16]
HWANG, Chanmi, et al. *"Don't buy this jacket" Consumer reaction toward anti-consumption apparel advertisement*. Journal of Fashion Marketing and Management: An International Journal, 2016, vol. 20, no 4, p. 435-452.
- [12] [MA12]
MA, Hong-cai; ZHANG, Zhi-Ping; DENG, Ai-ping. *A new periodic solution to Jacobi elliptic functions of MKdV equation and BBM equation*. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series, 2012, vol. 28, no 2, p. 409-415.
- [13] [MALI10]
MALIK, Anand; CHAND, Fakir; MISHRA, S. C. *Exact travelling wave solutions of some nonlinear equations by G' G-expansion method*. Applied Mathematics and Computation, 2010, vol. 216, no 9, p. 2596-2612.
- [14] [NURU21]
NURUZZAMAN, Md; KUMAR, Dipankar; PAUL, Gour Chandra. *Fractional low-pass electrical transmission line model: Dynamic behaviors of exact solutions with the impact of fractionality and free parameters*. Results in Physics, 2021, vol. 27, p. 104457.
- [15] [SALA15]
SALAS, Alvaro H. *Exact solutions to Helmholtz oscillator equation for an electrical circuit with quadratic nonlinearity*. Visión electrónica, 2015, vol. 9, no 2, p. 248-252.
- [16] [SEND14]
SENDIN, A, et al. *PLC deployment and architecture for Smart Grid applications in Iberdrola*. En 18th IEEE International Symposium on Power Line Communications and Its Applications. IEEE, 2014. p. 173-178.
- [17] [SHAF18]
SHAFIA, Humayra. *Exact solutions of fractional differential equations by using new generalized (G'= G)-expansion method*. Tesis Doctoral, BRAC University, 2018.
- [18] [SHAH19]
SHAHOOT, Ayad M., et al. *The (G'/G)-expansion method for solving a nonlinear PDE describing the nonlinear low-pass electrical lines*. Journal of Taibah University for Science, 2019, vol. 13, no 1, p. 63-70.
- [19] [TALA14]
TALA-TEBUE, E., et al. *Envelope periodic solutions for a discrete network with the Jacobi elliptic functions and the alternative (G'/G)-expansion method including the generalized Riccati equation*. The European Physical Journal Plus, 2014, vol. 129, p. 1-10.

Direcciones URL

- [20] Iberdrola. (s.f.). Precio luz hoy. Recuperado el 3 de julio de 2024, de <https://www.iberdrola.es/luz/precio-luz-hoy>
- [21] Banco Mundial. (n.d.). Consumo de electricidad per cápita (kWh per cápita). Recuperado el 3 de julio de 2024, de <https://datos.bancomundial.org/indicador/eg.use.elec.kh.pc>