



GRADO EN ADMINISTRACIÓN Y DIRECCIÓN DE EMPRESAS

TRABAJO FIN DE GRADO

ANÁLISIS DE LA EFICIENCIA DÉBIL DEL MERCADO MEDIANTE HERRAMIENTAS FRACTALES Y MULTIFRACTALES: APLICACIÓN AL MERCADO DE FUTUROS DEL EU ETS

Autor: Ignacio de Vicente-Tutor Vázquez
Director: Karin Alejandra Irene Martín Bujack

Madrid
Junio 2025

Índice

1. Introducción.....	8
2. Enfoque general y justificación metodológica	9
2.1. Motivación del enfoque fractal y multifractal	9
2.2. Hipótesis de eficiencia débil y conexión metodológica	12
3. Fundamento teórico, muestra y metodología empírica	14
3.1. Selección y justificación de la muestra.....	14
3.1.1. Introducción al EU ETS.....	14
3.1.2. Descripción de la muestra y fuente de datos.....	15
3.1.3. Estadísticas descriptivas de la muestra	16
3.1.4. Cálculo de los retornos logarítmicos.....	18
3.2. Pruebas estadísticas convencionales aplicadas a la eficiencia del mercado	20
3.2.1. Tests de estacionariedad - ADF y KPSS.....	21
3.2.2. Análisis de autocorrelación - ACF y PACF.....	23
3.2.3. Runs Test (test de secuencias aleatorias)	24
3.2.4. Limitaciones de los métodos clásicos y necesidad de enfoques complementarios	26
3.3. Estadística de Hurst	28
3.3.1. Fundamento teórico del exponente de Hurst.....	29
3.3.2. Estimación simplificada del exponente de Hurst	31
3.3.3. Estimación complete - Método de rango reescalado (R/S)	33
3.3.4. Análisis temporal de Hurst por ventanas anuales	35
3.4. Análisis multifractal (MF-DFA).....	36
3.4.1. Fundamento teórico del análisis multifractal	36

3.4.2.	Preparación de los datos para MF-DFA.....	39
3.4.3.	Estimación de $H(q)$	41
3.4.4.	Cálculo y visualización del espectro multifractal $f(\alpha)$	44
3.4.5.	Clasificación y taxonomía de la multifractalidad.....	47
4.	Resultados del análisis empírico.....	51
4.1.	Evidencia empírica mediante pruebas estadísticas tradicionales.....	51
4.1.1.	Resultados de los tests de estacionariedad: ADF y KPSS	51
4.1.2.	Análisis de autocorrelación: funciones ACF y PACF.....	53
4.1.3.	Runs Test (test de secuencias aleatorias)	54
4.2.	Resultados del análisis de memoria larga (Hurst)	55
4.2.1.	Estimación simplificada del exponente de Hurst	55
4.2.2.	Estimación completa del exponente de Hurst mediante el método R/S.....	56
4.2.3.	Análisis del exponente de Hurst por ventanas anuales	57
4.3.	Resultados del análisis multifractal (MF-DFA)	59
3.1.5.	Estimación del exponente generalizado de Hurst $H(q)$	59
3.1.6.	Cálculo del espectro multifractal $f(\alpha)$	60
3.1.7.	Prueba de shuffling: validación de la multifractalidad estructural.....	61
3.1.8.	Comparación con un proceso de referencia (fGn simulado).....	62
5.	Conclusiones.....	63
6.	Bibliografía.....	66
7.	Anexos	71

Índice de figuras

Figura 1: Distribución de precios de cierre y volumen.....	18
Figura 2: Boxplots de precios de cierre y volumen	18
Figura 3: Fragmento de los retornos logarítmicos calculados a partir de los precios diarios de los futuros del EU ETS	20
Figura 4: Ejemplo de multifractalidad débil y simple	49
Figura 5: Ejemplo de multifractalidad débil y compleja	49
Figura 6: Ejemplo de multifractalidad fuerte y simple	50
Figura 7: Ejemplo de multifractalidad fuerte y compleja	50
Figura 8: Funciones de autocorrelación (ACF) y autocorrelación parcial (PACF) para la serie de precios de cierre del EU ETS (2017–2024)	54
Figura 9: Representación log-log de $\log(R/S)$ frente a $\log(n)$	57
Figura 10: Evolución del exponente de Hurst por año (2017–2024).....	58
Figura 11: Curva del exponente de Hurst generalizado ($H(q)$) frente a momentos (q)	60
Figura 12: Espectro multifractal ($f(\alpha)$) vs (α)	61
Figura 13: Comparación del espectro multifractal entre la serie original y la versión desordenada (shuffled).....	62
Figura 14: Comparación del espectro multifractal entre el EU ETS y una serie simulada de ruido gaussiano fraccional.....	63

Índice de tablas

Tabla 1: Estadísticas descriptivas del precio de cierre y volumen de los futuros del EU ETS (2017–2024)	17
Tabla 2: Tipología de estructuras multifractales según fuerza y complejidad geométrica.....	48

1. Introducción

La creciente complejidad de los mercados financieros ha provocado el desarrollo de herramientas analíticas capaces de capturar patrones que trascienden los enfoques estadísticos tradicionales. En este contexto, la Hipótesis de Mercado Eficiente (EMH), formulada por Fama (1970), continúa siendo un pilar fundamental para el estudio del comportamiento de los precios, especialmente en su versión débil, que sostiene que los precios actuales ya reflejan toda la información contenida en los precios pasados, imposibilitando la obtención sistemática de beneficios anormales mediante análisis técnico.

No obstante, la validez empírica de esta hipótesis ha sido cuestionada en numerosos contextos, particularmente ante la evidencia de fenómenos como la persistencia, la heterocedasticidad, las burbujas especulativas o las crisis financieras. Ante estas limitaciones, el análisis de series temporales ha incorporado enfoques alternativos basados en geometría fractal y multifractal, que permiten detectar patrones complejos, no lineales y dependencias de largo plazo que no son captadas por los modelos clásicos.

Este trabajo se enmarca en este enfoque metodológico alternativo. En lugar de partir del análisis de un mercado en particular, el objetivo central es explorar en profundidad el conjunto de herramientas cuantitativas diseñadas para evaluar la eficiencia de los mercados desde una perspectiva fractal y multifractal, contrastándolas con los enfoques estadísticos más tradicionales. Para ello, se toma como caso práctico representativo el comportamiento de los precios de los futuros del mercado europeo de derechos de emisión de CO₂ (EU ETS) en el periodo comprendido entre 2017 y 2024. Este activo presenta un interés creciente tanto desde el punto de vista económico como medioambiental, al ser uno de los instrumentos clave de la Unión Europea en su lucha contra el cambio climático. Sin embargo, su elección aquí responde sobre todo a que constituye un escenario adecuado para aplicar herramientas metodológicas avanzadas.

El análisis metodológico se organiza en tres grandes bloques. En primer lugar, se aplican tests estadísticos clásicos para evaluar la estacionariedad y aleatoriedad de la serie: el test de Dickey-Fuller aumentado (ADF), el test KPSS, las funciones de autocorrelación (ACF y PACF) y el Runs Test. Posteriormente, se calcula el exponente de Hurst, tanto de forma simplificada como mediante el método clásico de Rango Reescalado (R/S), para detectar la posible existencia de memoria de largo plazo. Finalmente, se implementa un análisis multifractal basado en el algoritmo MF-DFA (Multifractal Detrended Fluctuation Analysis), que permite estimar la dependencia multiescala mediante el cálculo del exponente generalizado $H(q)$ y del espectro multifractal $f(\alpha)$. Además, se introduce una clasificación interpretativa que permite distinguir entre estructuras multifractales simples y complejas, así como fuertes y débiles, lo que añade una dimensión cualitativa relevante al análisis.

2. Enfoque general y justificación metodológica

2.1. Motivación del enfoque fractal y multifractal

Este trabajo adopta un enfoque metodológico centrado en herramientas fractales y multifractales para el análisis de la eficiencia débil en mercados financieros. Esta elección responde a la necesidad de superar las limitaciones de los métodos estadísticos tradicionales, que tienden a asumir linealidad, independencia temporal y estructuras homogéneas en las series de precios. Sin embargo, numerosos estudios han evidenciado que las series financieras presentan comportamientos no lineales, dependencia de largo plazo y fenómenos como la agrupación de volatilidad (Mandelbrot, 1997; Peters, 1994). En este contexto, las técnicas inspiradas en la geometría fractal permiten capturar patrones complejos que escapan al alcance de los modelos clásicos.

Los fractales, introducidos formalmente por Benoît B. Mandelbrot en la década de 1970, describen estructuras con autosimilitud, es decir, patrones que se repiten a diferentes escalas (Mandelbrot, 1982). Aunque inicialmente aplicados en la física y las ciencias naturales, su incorporación al análisis financiero ha permitido modelar irregularidades observadas en los precios, como la persistencia de eventos extremos o la variabilidad dependiente del horizonte temporal (Mandelbrot & Hudson, 2004). Esta observación ha dado lugar al desarrollo de modelos de series temporales basados en teorías fractales y multifractales.

Desde el punto de vista metodológico, el presente trabajo se apoya en dos herramientas clave: el exponente de Hurst y el análisis multifractal mediante el algoritmo MF-DFA (Multifractal Detrended Fluctuation Analysis). Ambas técnicas permiten evaluar la existencia de estructuras de dependencia más allá de las correlaciones lineales de corto plazo, considerando también memorias de largo alcance y heterogeneidades en el comportamiento temporal de los precios (Kantelhardt et al., 2002). Esta aproximación permite una caracterización más rica y realista de los mercados financieros.

El exponente de Hurst, desarrollado inicialmente para el análisis de series hidrológicas (Hurst, 1951), mide la persistencia de un proceso estocástico. Valores mayores a 0.5 indican persistencia, es decir, una tendencia a mantener la dirección de los movimientos pasados, valores menores, antipersistencia, tendencia a revertir, y un valor de 0.5 es característico de un proceso puramente aleatorio (paseo aleatorio). Dado que la eficiencia débil implica aleatoriedad en la evolución de los precios, encontrar evidencia de persistencia sería incompatible con dicha hipótesis (Peters, 1994).

El análisis multifractal, por su parte, permite estudiar cómo varía la dependencia temporal de la serie en función del tamaño de las fluctuaciones. El algoritmo MF-DFA, propuesto por Kantelhardt et al. (2002), permite calcular funciones como $H(q)$, $\tau(q)$ y el espectro multifractal $f(\alpha)$, que

capturan la estructura jerárquica y multiescalar de la serie. La presencia de multifractalidad implica que el comportamiento de la serie no es homogéneo, sino que existen distintos regímenes de dependencia, lo cual contraviene también la idea de aleatoriedad implícita en la Hipótesis de Mercado Eficiente (Di Matteo, 2007; Zunino et al., 2008).

La elección del mercado de futuros del EU ETS como caso de aplicación empírica responde tanto a su relevancia actual en el marco de las políticas climáticas europeas como a su idoneidad para testar estas herramientas. Se trata de un mercado relativamente joven, expuesto a factores regulatorios y con periodos de alta volatilidad, lo que lo convierte en un entorno propicio para el análisis de eficiencia desde una perspectiva no convencional (Chevallier, 2012).

El análisis se organiza en dos grandes bloques. En primer lugar, se aplican herramientas estadísticas convencionales, tests de estacionariedad como ADF (Dickey & Fuller, 1979) y KPSS (Kwiatkowski et al., 1992), funciones de autocorrelación (ACF y PACF), y el Runs test, que permiten establecer un punto de referencia en línea con la literatura tradicional. En segundo lugar, se incorporan los enfoques fractal y multifractal, con el objetivo de detectar dinámicas que podrían pasar desapercibidas bajo análisis lineales.

En suma, este trabajo se inscribe en un marco cuantitativo que combina técnicas tradicionales con enfoques avanzados de análisis fractal. La elección de estos métodos no se basa únicamente en una preferencia teórica, sino en una necesidad metodológica derivada de la complejidad observada en los mercados financieros. Evaluar la eficiencia débil a partir de este marco más amplio permite no solo contrastar la hipótesis de aleatoriedad, sino también explorar la presencia de memoria, dependencia jerárquica y no linealidad en las series de precios.

En el desarrollo de este trabajo se han utilizado herramientas de inteligencia artificial, como asistentes de redacción automática, con el fin de optimizar la claridad expositiva y mejorar la

coherencia y precisión en la presentación de los contenidos, siempre bajo supervisión y criterio académico propio.

2.2. Hipótesis de eficiencia débil y conexión metodológica

La hipótesis de eficiencia de mercado (Efficient Market Hypothesis, EMH), en su formulación clásica por Eugene Fama (1970), sostiene que los precios de los activos financieros reflejan en todo momento la información disponible. Dentro de esta teoría, la eficiencia en su forma débil afirma que los precios actuales ya incorporan toda la información contenida en los precios pasados. Bajo esta premisa, ningún análisis basado exclusivamente en datos históricos (como el análisis técnico) permitiría generar rentabilidades sistemáticamente superiores al promedio del mercado.

Formalmente, si P_t representa el precio de un activo en el momento t , la eficiencia débil implica que:

$$E[P_{t+1}|I_t]=P_t$$

donde I_t denota la información pasada disponible hasta el momento t . Esto equivale a suponer que las series de precios siguen un paseo aleatorio, es decir, sus variaciones son independientes e impredecibles. En términos estadísticos, esta propiedad puede contrastarse mediante pruebas de autocorrelación, tests de raíz unitaria o tests de aleatoriedad como el Runs test (Campbell et al., 1997).

No obstante, una parte creciente de la literatura ha puesto en cuestión esta hipótesis en contextos reales, donde las series financieras muestran indicios de persistencia, dependencia temporal de largo alcance y estructuras jerárquicas no homogéneas (Di Matteo, 2007; Mandelbrot & Hudson, 2004). Estos fenómenos contradicen los supuestos del paseo aleatorio, sugiriendo la posible

existencia de patrones explotables y, por tanto, de ineficiencias.

En este trabajo, se plantea precisamente evaluar la eficiencia débil desde dos frentes metodológicos complementarios:

1. **Diagnóstico clásico:** Se aplican tests estándar como ADF, KPSS, autocorrelaciones y el Runs test para detectar posibles señales de no aleatoriedad en los precios. Estos métodos permiten establecer si las series son estacionarias, si presentan memoria corta o si hay evidencia directa contra la independencia serial.
2. **Análisis fractal y multifractal:** Se emplean herramientas como el exponente de Hurst y el análisis MF-DFA (Kantelhardt et al., 2002), que permiten identificar estructuras más profundas, como memoria de largo plazo o multifractalidad, indicadoras de comportamientos no lineales y dependientes de la magnitud de las fluctuaciones. Estas propiedades son especialmente relevantes porque pueden permanecer ocultas bajo métodos tradicionales, pero tienen implicaciones directas sobre la predictibilidad de los precios y, por tanto, sobre la validez de la eficiencia débil.

En particular, encontrar un valor del exponente de Hurst significativamente distinto de 0.5 sugiere que los precios no siguen un proceso puramente aleatorio. Un valor mayor a 0.5 indica persistencia, es decir, que los movimientos actuales tienden a prolongarse en la misma dirección, mientras que un valor menor refleja antipersistencia, lo que también contradice la hipótesis de eficiencia débil (Peters, 1994).

Asimismo, la presencia de multifractalidad, identificada mediante la curvatura del espectro $f(\alpha)$ y la variabilidad del exponente $H(q)$, revela la existencia de una dependencia jerárquica entre las fluctuaciones, lo que se interpreta como una señal de heterogeneidad temporal e ineficiencia

estructural (Zunino et al., 2008).

3. Fundamento teórico, muestra y metodología empírica

3.1. Selección y justificación de la muestra

3.1.1. Introducción al EU ETS

El Sistema de Comercio de Derechos de Emisión de la Unión Europea (EU ETS, por sus siglas en inglés) constituye el principal instrumento de política climática de la Unión Europea para reducir las emisiones de gases de efecto invernadero (GEI) de forma económicamente eficiente. Establecido en 2005 como parte de la implementación del Protocolo de Kioto, el EU ETS opera bajo un enfoque de “cap and trade”, en el que se fija un tope total de emisiones para determinados sectores emisores, y se permite a las empresas comprar y vender derechos de emisión (EUAs) según sus necesidades operativas (Ellerman et al., 2010).

El sistema cubre sectores clave como la generación eléctrica, la industria pesada y, desde la fase 3, también la aviación intraeuropea. En su evolución, el EU ETS ha atravesado distintas fases regulatorias, caracterizadas por ajustes en el volumen total de derechos, mecanismos de subasta, y mayor cobertura geográfica y sectorial. La introducción de la Reserva de Estabilidad del Mercado (MSR) en 2019 y la paulatina reducción del volumen total de derechos son ejemplos de medidas diseñadas para reforzar la eficiencia del mercado y su función de señal de precio del carbono (European Commission, 2020).

Desde el punto de vista financiero, los derechos de emisión se comportan como activos negociables cuya cotización responde tanto a factores regulatorios como a dinámicas de oferta y demanda,

expectativas económicas y volatilidad energética (Chevallier, 2011). Estas características hacen del EU ETS un caso de estudio especialmente relevante para analizar su grado de eficiencia débil desde una perspectiva fractal, sin que su elección responda exclusivamente a un interés medioambiental, sino a su idoneidad como mercado con suficiente profundidad, liquidez y complejidad para aplicar técnicas avanzadas de análisis de series temporales.

3.1.2. Descripción de la muestra y fuente de datos

Para llevar a cabo el análisis empírico, se ha utilizado una serie temporal de precios de cierre diarios del contrato de futuros más líquido del EU ETS, obtenida del proveedor financiero Barchart. La muestra abarca desde enero de 2017 hasta marzo de 2024, cubriendo así el final de la Fase 3 (2013–2020) y parte de la Fase 4 (2021–2030), dos periodos significativos en la evolución normativa y económica del mercado europeo de derechos de emisión.

Los datos fueron extraídos directamente del portal especializado Barchart, una fuente reputada de datos financieros, utilizando el símbolo CKJ24, correspondiente al contrato de futuros del EU ETS. Este símbolo hace referencia al contrato activo con vencimiento próximo, que suele emplearse como referencia de mercado por su elevada liquidez. El archivo se obtuvo en formato CSV e incluía todas las variables típicas del mercado de futuros: fecha, precio de apertura, máximo, mínimo, precio de cierre y volumen, aunque para el análisis se ha trabajado exclusivamente con los precios de cierre diarios, por ser el valor más representativo del consenso de mercado al finalizar cada jornada.

Una de las principales ventajas de utilizar futuros en lugar de precios spot (precios de adjudicación en subastas) es su regularidad temporal. A diferencia del mercado spot, donde las subastas no se celebran todos los días laborables ni siguen una periodicidad fija, el mercado de futuros de derechos de emisión opera de manera continua de lunes a viernes durante todo el año, sin

interrupciones ni vacíos de datos significativos. Esta continuidad garantiza la coherencia temporal necesaria para aplicar con fiabilidad herramientas estadísticas sensibles a la regularidad del calendario, como las funciones de autocorrelación, los tests de estacionariedad o los modelos multifractales, que pueden verse gravemente afectados por huecos temporales o saltos irregulares en la serie.

La limpieza de los datos fue mínima, dado que la serie proveniente de Barchart ya venía libre de valores nulos, días sin actividad o anomalías evidentes. No fue necesario eliminar festivos ni fines de semana, ya que el propio dataset contenía únicamente observaciones correspondientes a días de cotización efectiva. Tampoco se identificaron outliers extremos, valores atípicos o precios nulos, lo que permitió trabajar con la serie original sin modificaciones adicionales.

En cuanto al tratamiento estadístico, los retornos logarítmicos diarios fueron calculados como>

$$r_t = \log\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)$$

donde P_t es el precio de cierre del día t . Esta transformación, común en estudios financieros, se aplicó a toda la serie con el objetivo de garantizar la estacionariedad y estabilizar la varianza, requisitos esenciales para los métodos estadísticos empleados, tanto clásicos (ADF, KPSS, ACF, PACF, Runs test) como avanzados (Hurst y MF-DFA) (Campbell, Lo & MacKinlay, 1997; Cont, 2001). Además, los retornos logarítmicos son aditivos en el tiempo y permiten una mejor modelización del riesgo acumulado (Cont, 2001).

3.1.3. Estadísticas descriptivas de la muestra

Antes de aplicar cualquier metodología econométrica o fractal, es esencial conocer las

características básicas de la muestra utilizada. La Tabla 1 presenta las estadísticas descriptivas de las dos variables clave: el precio de cierre diario de los futuros del EU ETS y el volumen de negociación asociado.

Estadístico	Close	Volume
Observaciones (n)	3,641	3,465
Media	25.50	23,667.69
Desviación estándar	26.43	15,428.87
Mínimo	2.75	5.00
Percentil 25 (Q1)	6.91	12,658.00
Mediana	14.79	21,679.00
Percentil 75 (Q3)	26.42	31,618.00
Máximo	100.34	129,967.00

Tabla 1: Estadísticas descriptivas del precio de cierre y volumen de los futuros del EU ETS (2017–2024)

Se observa una amplia dispersión en ambas variables, con un rango de precios que va desde los 2,75 € hasta los 100,34 €, reflejando la evolución significativa del mercado a lo largo del tiempo. El volumen también muestra fuerte heterogeneidad, lo cual es típico en mercados con actividad especulativa o regulaciones cambiantes.

Los siguientes gráficos siguientes ayudan a visualizar esta información:

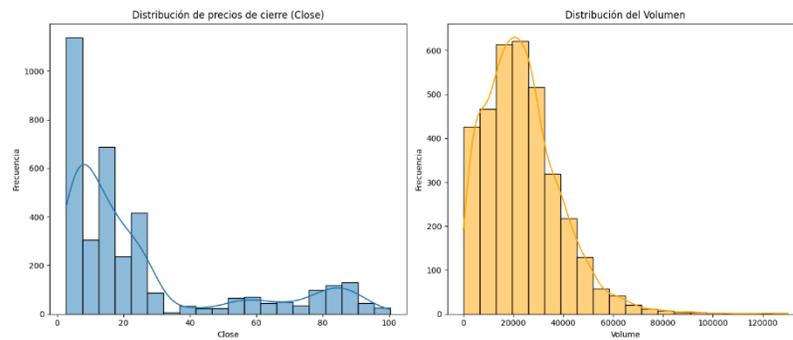


Figura 1: Distribución de precios de cierre y volumen

Ambas distribuciones son asimétricas a la derecha, mostrando colas largas. Esta característica sugiere la existencia de eventos extremos o puntas de liquidez, lo cual es relevante para el análisis multifractal posterior.

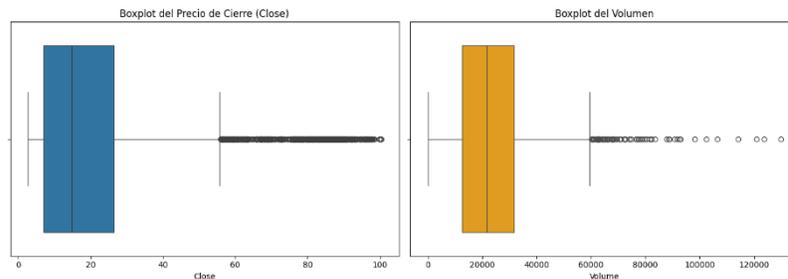


Figura 2: Boxplots de precios de cierre y volumen

Los boxplots confirman la presencia de outliers, especialmente en el volumen, y revelan la falta de simetría en la distribución de ambas variables. Esta información justifica la necesidad de emplear métodos robustos y no paramétricos en las siguientes fases del análisis.

3.1.4. Cálculo de los retornos logarítmicos

Antes de aplicar cualquier prueba estadística o metodología fractal, ha sido necesario transformar

la serie original de precios de cierre diarios en una serie de retornos logarítmicos, mediante la fórmula:

$$r_t = \log\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)$$

donde P_t representa el precio de cierre del día t . Esta transformación es estándar en finanzas cuantitativas y se justifica por varias razones fundamentales:

- Centra la serie en torno a cero, facilitando la comparación entre periodos y mejorando la interpretabilidad.
- Reduce la influencia de tendencias deterministas.
- Favorece la estacionariedad, lo que resulta crucial para la validez de pruebas como el ADF, KPSS, o el Runs Test.
- Estabiliza la varianza y facilita el análisis de escalabilidad, esencial para el estudio fractal y multifractal posterior.
- Además, los retornos logarítmicos son aditivos en el tiempo, lo que permite modelizar acumulaciones de riesgo o rentabilidad de forma coherente (Campbell, Lo & MacKinlay, 1997; Cont, 2001).

En consecuencia, esta serie transformada ha sido la base común utilizada en todos los análisis estadísticos y empíricos presentados en este trabajo, incluyendo:

- Pruebas de estacionariedad (ADF, KPSS)

- Funciones de autocorrelación (ACF, PACF)
- Runs Test de aleatoriedad
- Estimación del exponente de Hurst
- Y el análisis multifractal (MF-DFA)

La Figura 3 ilustra un fragmento de la serie de retornos logarítmicos calculados a partir de los precios diarios de los futuros del EU ETS durante los primeros días de 2017.

	Date	Close	Log Return
0	2017-02-06	5.09	NaN
1	2017-02-07	5.16	0.013659
2	2017-02-08	5.21	0.009643
3	2017-02-09	5.28	0.013346
4	2017-02-10	5.11	-0.032727
5	2017-02-13	4.89	-0.044007
6	2017-02-14	5.12	0.045962
7	2017-02-15	5.06	-0.011788
8	2017-02-16	4.93	-0.026027
9	2017-02-17	4.97	0.008081

Figura 3: Fragmento de los retornos logarítmicos calculados a partir de los precios diarios de los futuros del EU ETS

3.2. Pruebas estadísticas convencionales aplicadas a la eficiencia del mercado

La Hipótesis de los Mercados Eficientes (HME), sostiene que los precios de los activos financieros reflejan toda la información disponible en el mercado. En su forma más básica, conocida como forma débil, esta teoría afirma que los precios actuales ya incorporan toda la información contenida

en los precios pasados. Si esto se cumple, entonces el comportamiento histórico de los precios no puede utilizarse para predecir movimientos futuros, y las series temporales deben comportarse como un paseo aleatorio (Fama, 1970; Lo, 2004).

Para contrastar empíricamente este supuesto en el contexto del mercado europeo de derechos de emisión (EU ETS), se aplica un conjunto de pruebas estadísticas ampliamente utilizadas en la literatura financiera. Estas herramientas permiten detectar la posible existencia de memoria, autocorrelaciones significativas o patrones sistemáticos que contradecirían la eficiencia débil (Lim & Brooks, 2011; Worthington & Higgs, 2006). Esta subsección describe y aplica tres tipos de pruebas ampliamente aceptadas en la literatura para evaluar la validez de la EMH en su forma débil:

1. Tests de estacionariedad (ADF y KPSS)
2. Análisis de autocorrelación (ACF y PACF)
3. Runs Test (test de aleatoriedad no paramétrico)

3.2.1. Tests de estacionariedad - ADF y KPSS

Una serie de precios que sigue un paseo aleatorio es, por definición, no estacionaria. Por tanto, comprobar la estacionariedad de la serie es un primer paso esencial para evaluar la validez de la Hipótesis de los Mercados Eficientes en su forma débil (Fama, 1970; Brooks, 2019).

(a) Test de Dickey-Fuller Aumentado (ADF):

El test ADF contrasta la siguiente hipótesis nula:

- H_0 : La serie tiene una raíz unitaria (es no estacionaria)
- H_1 : La serie es estacionaria

La especificación del modelo ADF es:

$$\Delta y_t = \alpha + \beta t + \gamma y_{t-1} + \sum_{i=1}^p \delta_i \Delta y_{t-i} + \epsilon_t$$

donde:

- y_t : variable dependiente (precio de los futuros)
- $\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$: primera diferencia
- t : tendencia temporal
- γ : coeficiente clave que indica la presencia o no de raíz unitaria
- ϵ_t : término de error

Si el coeficiente γ no es significativamente distinto de cero, no se puede rechazar la hipótesis nula de raíz unitaria, y se concluye que la serie es no estacionaria (Dickey & Fuller, 1979; Said & Dickey, 1984).

(b) Test KPSS (Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin):

El test KPSS toma un enfoque contrario al ADF:

- H_0 : La serie es estacionaria alrededor de una tendencia
- H_1 : La serie tiene una raíz unitaria (es no estacionaria)

Se basa en una descomposición de la serie temporal como:

$$y_t = r_t + \epsilon_t$$

donde:

- r_t : componente determinística (tendencia estocástica)
- ϵ_t : ruido blanco

Se calcula la suma acumulada de residuos del modelo y se normaliza para obtener el estadístico KPSS, que se compara con valores críticos obtenidos de simulaciones (Kwiatkowski et al., 1992).

El uso conjunto del ADF y el KPSS permite una evaluación robusta de la estacionariedad, ya que sus hipótesis nulas son opuestas. Esta estrategia es común en estudios empíricos sobre eficiencia de mercado (Narayan, 2005; Lim & Brooks, 2011).

3.2.2. Análisis de autocorrelación - ACF y PACF

El segundo enfoque se centra en identificar dependencias temporales en la serie de precios. En un mercado eficiente en su forma débil, no debería existir autocorrelación significativa, ya que los movimientos pasados de precios no deberían tener relación con los futuros (Fama, 1970; Lim & Brooks, 2011).

(a) Funciones de autocorrelación (ACF):

La función de autocorrelación mide la correlación entre la serie y sus rezagos:

$$\rho_k = \frac{Cov(y_t, y_{t-k})}{Var(y_t)}$$

donde ρ_k es la autocorrelación de orden k .

Se calcula para distintos valores de k , y si muchas autocorrelaciones son significativas (es decir, salen fuera del intervalo de confianza). Si muchas autocorrelaciones exceden estos límites, se puede concluir que existe dependencia temporal, lo que sería incompatible con la hipótesis de eficiencia débil (Brooks, 2019).

(b) Funciones de autocorrelación parcial (PACF):

La PACF mide la correlación entre y_t y y_{t-k} eliminando el efecto de los rezagos intermedios ($y_{t-1}, \dots, y_{t-k+1}$).

Se estima a través de regresiones múltiples y permite identificar la estructura exacta de dependencia sin la distorsión acumulada de la ACF:

$$y_t = \alpha + \sum_{i=1}^k \beta_i y_{t-i} + \varepsilon_t$$

Este enfoque permite identificar de forma más precisa el orden del modelo autoregresivo adecuado y detectar patrones de dependencia no evidentes en la ACF (Tsay, 2010). Si las funciones PACF muestran valores significativamente diferentes de cero para ciertos rezagos, esto indica una estructura de memoria que contradice la aleatoriedad pura de los precios.

El análisis conjunto de ACF y PACF es una práctica estándar para explorar la estructura temporal de series financieras y evaluar si los precios siguen un comportamiento de paseo aleatorio o presentan patrones de dependencia (Hamilton, 1994).

3.2.3. Runs Test (test de secuencias aleatorias)

El test de secuencias, o Runs Test, es una herramienta no paramétrica destinada a evaluar la aleatoriedad de una serie binaria. A diferencia de otros tests que requieren suposiciones fuertes sobre la distribución de los datos, como normalidad o linealidad, el Runs Test resulta especialmente útil en el análisis financiero, donde los rendimientos frecuentemente violan estos supuestos (Knoke & Bohrnstedt, 1994; Brooks, 2019).

En el marco de la Hipótesis de los Mercados Eficientes (EMH), una serie temporal verdaderamente eficiente debería mostrar un comportamiento aleatorio, sin estructura predecible (Fama, 1970). En consecuencia, el número de secuencias positivas y negativas debería situarse dentro del rango esperado bajo la hipótesis de aleatoriedad.

Fundamento matemático del runs test:

El principio básico del Runs Test es contar el número de "runs" o secuencias consecutivas de signos

iguales (ya sean positivos o negativos) en una serie de datos. Por ejemplo, en una secuencia de rendimientos como $[+,+,-,-,+]$, existen tres runs: dos positivos, uno negativo y uno positivo nuevamente.

Sea:

n_1 : número de observaciones positivas (p. ej., días con rendimiento positivo).

n_2 : número de observaciones negativas.

R : número total de runs observados en la serie.

Bajo la hipótesis nula de aleatoriedad, la esperanza matemática del número de runs es:

$$\mathbb{E}[R] = \frac{2n_1n_2}{n_1 + n_2} + 1$$

Y su varianza asociada:

$$Var[R] = \frac{2n_1n_2(2n_1n_2 - n_1 - n_2)}{(n_1 + n_2)^2(n_1 + n_2 - 1)}$$

El estadístico de prueba Z se calcula como:

$$Z = \frac{R - \mathbb{E}[R]}{\sqrt{Var[R]}}$$

Este valor se compara con la distribución normal estándar para evaluar si el número de runs difiere significativamente del esperado bajo aleatoriedad (Sprent & Smeeton, 2001).

Aplicación práctica en el estudio:

En este trabajo, se aplica el Runs Test a la serie de rendimientos diarios de los futuros del mercado EU ETS. Primero, los rendimientos se convierten en una serie binaria: se asigna 1 a los días con rendimiento positivo y 0 a los negativos. Los rendimientos exactamente nulos se excluyen del análisis para evitar ambigüedad.

Una ventaja clave de este enfoque es que no depende de la magnitud de los cambios, sino únicamente de su dirección, lo que lo convierte en una prueba robusta frente a valores atípicos o

heterocedasticidad (Sing & Makridakis, 1977).

La interpretación es directa:

- Si el número de secuencias es excesivamente bajo, se infiere persistencia (tendencia a mantener el signo del rendimiento), lo que puede interpretarse como memoria en la serie.
- Si el número es excesivamente alto, se interpreta como anti-persistencia o reversión a la media.
- Si se encuentra dentro del rango esperado bajo la hipótesis nula, no se puede rechazar la aleatoriedad.

Este análisis complementa los resultados obtenidos con los tests de autocorrelación y de estacionariedad, aportando una evaluación robusta e independiente de los supuestos sobre la distribución de los datos. Es particularmente útil para apoyar o refutar la existencia de patrones en la dirección de los precios, lo que sería incompatible con la forma débil de la EMH.

3.2.4. Limitaciones de los métodos clásicos y necesidad de enfoques complementarios

A pesar de su amplia utilización en estudios de series temporales financieras, las herramientas clásicas utilizadas para evaluar la eficiencia en su forma débil, como los tests de raíz unitaria, las funciones de autocorrelación y el Runs Test, presentan una serie de limitaciones metodológicas y conceptuales que deben ser reconocidas y abordadas (Lo & MacKinlay, 1988; Charles & Darné, 2009). Estas limitaciones justifican la incorporación de enfoques más sofisticados, capaces de capturar estructuras no evidentes y dinámicas complejas en los datos, como es el caso del análisis fractal y multifractal.

En primer lugar, los tests de estacionariedad (como el ADF y el KPSS) parten de supuestos que, si bien son apropiados en contextos lineales o de corto plazo, pueden resultar insuficientes para

caracterizar procesos con comportamiento no lineal, memoria de largo plazo o múltiples escalas de variabilidad (Greene, 2018; Serletis & Rosenberg, 2009). Por ejemplo, el test ADF está diseñado para detectar raíces unitarias bajo una forma funcional lineal específica. Sin embargo, si la dependencia en la serie sigue una forma no lineal, este test podría no tener poder suficiente para rechazar la hipótesis nula, lo que implicaría un diagnóstico erróneo sobre la naturaleza estocástica del proceso (Cipollini & Molteni, 2004).

Asimismo, tanto la Función de Autocorrelación (ACF) como la Función de Autocorrelación Parcial (PACF), aunque útiles para identificar patrones de dependencia de corto plazo, se ven afectadas por la selección del número de rezagos, así como por la presencia de ruido o fluctuaciones estacionales. La significación estadística de los coeficientes estimados en estas funciones también se ve influenciada por el tamaño muestral y la varianza del proceso, lo que puede generar resultados inconsistentes en situaciones de alta volatilidad, como suele ocurrir en mercados financieros (Tsay, 2010).

El Runs Test, por su parte, representa un intento de evaluar aleatoriedad desde una perspectiva no paramétrica y direccional (basada en la secuencia de signos positivos y negativos), lo cual constituye una ventaja respecto a métodos basados en correlaciones. Sin embargo, este test también se limita a detectar patrones secuenciales relativamente simples. La información utilizada por el Runs Test se basa únicamente en la dirección de los cambios de precios, sin considerar la magnitud de dichos cambios ni su posible variabilidad dependiente del tiempo. Además, su poder estadístico puede verse reducido cuando la serie contiene largos periodos de estancamiento o fluctuaciones simétricas, como ocurre en mercados parcialmente eficientes o en transición (Sprent & Smeeton, 2001).

De forma general, una limitación transversal a todos estos métodos es su incapacidad para detectar estructuras no lineales, dinámicas multifactoriales o comportamientos que evolucionan a lo largo

del tiempo. En mercados financieros, especialmente aquellos sometidos a regulaciones, externalidades ambientales o dinámicas especulativas, como es el caso del mercado de derechos de emisión de CO₂, estas características pueden ser especialmente relevantes (Alvarez-Ramirez et al., 2008).

Por ejemplo, un mercado puede mostrar independencia lineal en primera instancia, pero presentar fenómenos de persistencia o antipersistencia en ventanas temporales concretas, o patrones cuya magnitud varía en función de la escala temporal (diaria, semanal, anual). Estos comportamientos no son captados adecuadamente por los tests clásicos, ya que su concepción se basa en supuestos de homogeneidad temporal y linealidad.

Por todo lo anterior, en el presente trabajo se considera esencial complementar los métodos clásicos con herramientas más modernas y robustas, capaces de capturar la complejidad inherente al comportamiento de los precios en mercados financieros contemporáneos. En concreto, se recurre a la estadística de Hurst, que permite identificar la presencia de memoria de largo plazo en las series (Hurst, 1951), y al análisis multifractal (MF-DFA), que ofrece una visión más rica y profunda de la heterogeneidad y autosimilitud de los datos a través de diferentes escalas y momentos estadísticos (Kantelhardt et al., 2002).

Ambas metodologías se desarrollan en las secciones siguientes de este capítulo metodológico, con el objetivo de proporcionar una evaluación más completa y matizada de la eficiencia del mercado de futuros del EU ETS. De este modo, se intenta superar las limitaciones de las pruebas tradicionales y ofrecer una caracterización más precisa del grado de eficiencia informacional en el mercado analizado.

3.3. Estadística de Hurst

3.3.1. Fundamento teórico del exponente de Hurst

El exponente de Hurst, denotado como H , es una medida de la dependencia temporal o "memoria" en series de tiempo, originalmente formulada por el hidrólogo Harold Edwin Hurst (1951) en su estudio sobre los flujos del río Nilo. Desde entonces, ha sido aplicado extensamente en campos como la economía, la climatología, la biología y la física estadística (Mandelbrot & Wallis, 1969; Peters, 1994). En el contexto financiero, el valor de H proporciona información clave sobre la persistencia o aleatoriedad en la evolución de los precios de activos, incluyendo los futuros del mercado EU ETS (Di Matteo, 2007).

Naturaleza y significado del exponente:

Matemáticamente, el exponente de Hurst se basa en la relación de escalado del rango reescalado R/S con el tamaño de la muestra n :

$$\frac{R(n)}{S(n)} \sim cn^H,$$

donde:

- $R(n)$ es el rango acumulado ajustado de la serie sobre ventanas de tamaño n ,
- $S(n)$ es la desviación estándar correspondiente,
- c es una constante de proporcionalidad,
- H es el exponente de Hurst que determina la tasa de crecimiento del rango reescalado con el tamaño de la ventana.

Esta expresión refleja que, para una serie con dependencia temporal, el rango acumulado aumenta con n de forma más o menos acelerada en función de la persistencia de la serie.

El valor de H se interpreta del siguiente modo:

- Si $H = 0.5$, la serie se comporta como un camino aleatorio puro, sin memoria: cada observación es independiente.

- Si $H > 0.5$, la serie exhibe persistencia: un incremento es más probable que sea seguido por otro incremento (y lo mismo para las caídas).
- Si $H < 0.5$, hay anti-persistencia: los movimientos tienden a revertirse en el corto plazo, es decir, una subida es seguida de una bajada, y viceversa.

Relación con la autocorrelación y la dependencia temporal:

Aunque el análisis de autocorrelación (ACF y PACF) permite explorar la dependencia lineal entre observaciones en distintos rezagos, el exponente de Hurst permite capturar la dependencia de largo plazo, que puede no ser visible con las herramientas convencionales (Greene, 2018). A diferencia de la autocorrelación, el exponente H condensa en un único valor el grado de dependencia temporal global, lo que resulta especialmente útil para procesos estocásticos complejos o no lineales (Beran, 1994).

Desde el punto de vista de los procesos estocásticos, el exponente de Hurst está vinculado con la fractalidad y la autosimilitud de la serie. En particular, un proceso con $H \neq 0.5$ no solo tiene dependencia temporal, sino que también presenta una estructura fractal: su comportamiento estadístico es similar a distintas escalas temporales (Mandelbrot, 1982).

Modelos teóricos asociados:

El valor de H está relacionado con ciertos modelos teóricos de series temporales. Por ejemplo, un proceso de caminata aleatoria (random walk) tiene $H = 0.5$, mientras que un proceso de ruido rojo o persistente tendrá $H > 0.5$, y un ruido azul o antipersistente mostrará $H < 0.5$. En particular, para un proceso fraccionalmente integrado ARIMA (ARFIMA), el exponente de Hurst puede expresarse en términos del parámetro de memoria larga d como:

$$H = d + 0.5$$

Esto evidencia cómo la estimación de H también puede informar sobre la necesidad de modelar

un proceso con memoria larga en un contexto econométrico (Granger & Joyeux, 1980).

Estimación práctica:

La estimación del exponente de Hurst puede llevarse a cabo mediante varios métodos, entre ellos:

- **Método R/S (Rango Reescalado):** técnica clásica introducida por Hurst (1951) que evalúa cómo varía el cociente R/S con el tamaño de la ventana n mediante un ajuste log-log.
- **Método de la varianza agregada:** evalúa cómo varía la varianza al agrupar los datos en bloques de distintos tamaños.
- **Método de la desviación estándar de la media:** se basa en el comportamiento de la desviación media de bloques agrupados.
- **Análisis de espectro de potencia:** relaciona H con la pendiente del espectro de Fourier en el dominio de frecuencia (Taqqu et al., 1995).
- **MF-DFA (Multifractal Detrended Fluctuation Analysis):** una extensión multifractal del método DFA que permite estimar $H(q)$ para distintos momentos q , capturando múltiples regímenes de comportamiento.

En este trabajo, se aplican dos enfoques:

- El método simplificado basado en librerías (por ejemplo, `compute_Hc`).
- El método clásico de R/S, implementado paso a paso para reforzar la comprensión matemática del procedimiento.

3.3.2. Estimación simplificada del exponente de Hurst

Una de las formas más accesibles y ampliamente utilizadas para estimar el exponente de Hurst es mediante algoritmos simplificados implementados en bibliotecas estadísticas especializadas. En el presente trabajo, se ha empleado la función `compute_Hc()` del paquete `hurst` en Python, ampliamente reconocida por su eficiencia computacional y su adecuación al análisis preliminar de

series financieras (Weron, 2002; Taquu et al., 1995).

Fundamento del método simplificado:

La función `compute_Hc()` proporciona una estimación rápida del exponente de Hurst a partir de una serie temporal, mediante una versión optimizada del método clásico de rango reescalado (R/S), propuesto originalmente por Hurst (1951). Este enfoque permite evitar el cálculo manual de los subcomponentes, haciendo que el procedimiento sea más eficiente desde el punto de vista computacional.

Formalmente, dado un vector de precios P_t , la función realiza los siguientes pasos:

1. Se calcula la serie acumulada del perfil centrado $Y(t) = \sum_{i=1}^t (r_i - \bar{r})$.
2. Se divide la serie en ventanas de diferentes escalas (longitudes).
3. Para cada ventana, se calcula el rango acumulado R y la desviación estándar S .
4. Se obtiene el cociente R/S para cada ventana.
5. Se ajusta una relación de tipo log-log: $\log(R/S) = H \log(n) + c$, y se estima H como la pendiente.

Este procedimiento se condensa en la función mencionada, que devuelve tres resultados:

- El exponente estimado de Hurst H .
- La constante de proporcionalidad c .
- Un array con los valores de R/S usados para la estimación.

Ventajas y limitaciones:

La principal ventaja del método simplificado es su rapidez y facilidad de implementación, lo que lo convierte en una herramienta útil para análisis exploratorios incluso en series extensas. Además, su interpretación se alinea con el marco conceptual del análisis fractal y de la dependencia temporal.

No obstante, el método también presenta limitaciones importantes:

- Es sensible a valores atípicos o tendencias no estacionarias.

- Al basarse en una única técnica, puede inducir sesgos si no se contrasta con métodos alternativos.
- Tiende a sobreestimar el valor de H en presencia de estructuras de volatilidad o heterocedasticidad (Barunik & Kristoufek, 2010).

Por este motivo, en el presente estudio se complementa esta estimación con el método clásico de R/S (sección 3.3.3) y un análisis desagregado por años (sección 3.3.4), lo que permite una evaluación más robusta y matizada del comportamiento dinámico de los precios del mercado de carbono.

3.3.3. Estimación complete - Método de rango reescalado (R/S)

El método de rango reescalado (Rescaled Range, R/S), introducido por Harold Edwin Hurst (1951) en sus estudios sobre la capacidad de almacenamiento del Nilo, constituye uno de los enfoques más clásicos y robustos para estimar el exponente de Hurst (H). A diferencia del método simplificado empleado anteriormente, el procedimiento de R/S proporciona una aproximación más rigurosa, especialmente adecuada para detectar memoria de largo plazo en series temporales financieras (Mandelbrot & Wallis, 1969; Lo, 1991).

Este método ha sido ampliamente utilizado en economía, hidrología y física estadística, y representa un componente fundamental del análisis fractal en series temporales financieras (Peters, 1994; Greene & Fielitz, 1977).

Fundamento del método:

El procedimiento comienza dividiendo la serie temporal de interés $X = \{x_1, x_2, \dots, x_T\}$ en bloques o subseries de longitud n, variando este parámetro a lo largo del análisis para construir una representación log-log del comportamiento de la serie.

Para cada subserie de longitud n , se procede del siguiente modo:

1. Cálculo de la media de la subserie:

$$\bar{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n x_t$$

2. Serie acumulada centrada:

$$Y_t = \sum_{i=1}^t (x_i - \bar{x}_n) \quad \text{para } t = 1, \dots, n$$

3. Rango acumulado:

$$R(n) = \max(Y_1, \dots, Y_n) - \min(Y_1, \dots, Y_n)$$

4. Desviación estándar:

$$S(n) = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (x_t - \bar{x}_n)^2}$$

5. Cálculo del R/S:

$$\left(\frac{R}{S}\right)(n) = \frac{R(n)}{S(n)}$$

Este proceso se repite para diferentes tamaños de ventana n , y se representa gráficamente $\log(R/S)(n)$ frente a $\log(n)$. Si la serie presenta una dependencia persistente (memoria de largo plazo), se espera una relación de la forma:

$$\mathbb{E} \left[\frac{R}{S}(n) \right] \propto n^H$$

Por tanto, al ajustar una regresión lineal simple en el plano log-log, la pendiente de la línea corresponde a una estimación del exponente de Hurst H .

3.3.4. Análisis temporal de Hurst por ventanas anuales

Una vez estimado el exponente de Hurst sobre la serie completa, resulta metodológicamente pertinente descomponer el análisis en intervalos temporales más reducidos, en este caso, ventanas anuales, para examinar la evolución dinámica del grado de eficiencia del mercado a lo largo del tiempo. Esta estrategia es habitual en estudios empíricos donde se busca evaluar la estabilidad temporal de la dependencia de largo plazo en los mercados financieros (Grech & Mazur, 2004; Cajueiro & Tabak, 2005).

Justificación de la segmentación:

El análisis por subperiodos anuales responde a la hipótesis de que la eficiencia de mercado no es necesariamente constante, sino que puede estar influenciada por factores exógenos variables: reformas regulatorias, eventos macroeconómicos, crisis energéticas o cambios en la demanda de derechos de emisión. Como destacan Lo (2004) y Di Matteo (2007), una evaluación estática del mercado podría ocultar dinámicas relevantes que solo se manifiestan en intervalos temporales específicos.

El enfoque por ventanas anuales, además, permite detectar episodios de ineficiencia temporal que podrían estar relacionados con condiciones particulares del sistema EU ETS, como los ajustes en el mecanismo de reserva de estabilidad de mercado (MSR) o la volatilidad generada por cambios en la política climática europea (Benz & Trück, 2009).

Procedimiento aplicado:

Para cada año comprendido entre 2017 y 2024 (con 2024 tratado como incompleto), se extraen los datos correspondientes y se aplica la estimación simplificada del exponente de Hurst (como la descrita en el apartado 3.3.2) sobre la subserie anual. En el caso de 2023 y 2024, al ser 2024 parcial, se combinan ambos años para obtener una muestra suficientemente representativa.

El cálculo sigue los siguientes pasos:

1. Filtrado por año de la serie `df_futuros`, previamente limpiada y ordenada por fecha.
2. Aplicación de `compute_Hc()`, función simplificada que estima el exponente H bajo el supuesto de una relación de potencias en la varianza de las diferencias.
3. Registro de resultados en un diccionario de Python indexado por año (por ejemplo, `hurst_results[2018] = 0.89`).
4. Visualización final en un gráfico de barras o líneas, representando el valor de H por año.

Este análisis permite detectar si ciertos episodios temporales rompen con la hipótesis de eficiencia en su forma débil. Por ejemplo, varios años consecutivos con valores de H significativamente mayores a 0.5 podrían interpretarse como evidencia de un comportamiento fractal sostenido, señalando ineficiencias estructurales o una dependencia prolongada en la evolución de precios (Barunik & Kristoufek, 2010).

3.4. Análisis multifractal (MF-DFA)

3.4.1. Fundamento teórico del análisis multifractal

El análisis multifractal constituye una herramienta estadística avanzada diseñada para caracterizar de forma precisa la complejidad de las series temporales financieras. A diferencia de los enfoques clásicos, que se centran en detectar dependencias lineales de corto plazo, el análisis multifractal permite identificar relaciones no lineales, dependencias de largo alcance y heterogeneidad de escalas dentro de una misma serie (Mandelbrot, 1997; Calvet & Fisher, 2002).

Este enfoque se fundamenta en la teoría de los sistemas complejos, según la cual los movimientos de precios no son producto de un proceso aleatorio uniforme, sino el resultado de múltiples mecanismos interactuando en diversas escalas temporales. En este contexto, la multifractalidad

puede entenderse como la superposición de múltiples estructuras de comportamiento, cada una con una intensidad de fluctuación distinta, lo que no puede explicarse mediante una única métrica como el exponente de Hurst clásico (Kantelhardt et al., 2002).

Perfil acumulado y detrended fluctuation analysis:

La base del método MF-DFA (Multifractal Detrended Fluctuation Analysis), introducido por Kantelhardt et al. (2002), consiste en analizar cómo fluctúa la serie de tiempo a distintas escalas de observación. Para ello, se parte de una transformación inicial sobre la serie original de precios o retornos, que consiste en construir su perfil acumulado:

$$Y(i) = \sum_{k=1}^i [x_k - \langle x \rangle], \quad i = 1, \dots, N$$

donde x_k representa los retornos logarítmicos (habitualmente centrados), $\langle x \rangle$ es su media, y N es el número total de observaciones.

Posteriormente, este perfil acumulado se divide en segmentos no solapados de longitud s , y en cada uno se ajusta una tendencia local (generalmente mediante regresión polinómica). La desviación respecto a dicha tendencia se utiliza para definir la fluctuación local en ese segmento:

$$F^2(v, s) = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s [Y(vs + i) - P_v(i)]^2$$

donde $P_v(i)$ es el polinomio ajustado (típicamente de orden 1 o 2). Esta medida se calcula en todos los segmentos y se promedia mediante una generalización para distintos momentos q , dando lugar a la función de fluctuación:

$$F_q(s) = \left(\frac{1}{2N_s} \sum_{v=1}^{2N_s} [F^2(v, s)]^{q/2} \right)^{1/q}$$

para $q \neq 0$, y en el caso $q = 0$:

$$F_0(s) = \exp\left(\frac{1}{2N_s} \sum_{v=1}^{2N_s} \ln[F^2(v, s)]\right)$$

La relación entre $F_q(s)$ y la escala s sigue una ley de potencias:

$$F_q(s) \sim s^{H(q)}$$

donde $H(q)$ es el exponente de Hurst generalizado, cuya dependencia respecto a q permite distinguir entre series monofractales y multifractales. En una serie monofractal, $H(q)$ es constante. En una multifractal, $H(q)$ varía significativamente con q , revelando distintos regímenes estadísticos para fluctuaciones pequeñas y grandes (Kantelhardt et al., 2002; Jiang & Zhou, 2008).

Espectro multifractal y singularidades:

La información contenida en la función $H(q)$ puede transformarse para obtener el espectro multifractal $f(\alpha)$, que ofrece una representación más intuitiva de la estructura interna de la serie. Para ello, se define la función de masas $\tau(q)$:

$$\tau(q) = qH(q) - 1$$

y a partir de ella, se calcula el conjunto de singularidades α y su dimensión de Hausdorff asociada $f(\alpha)$, mediante una transformación de Legendre:

$$\alpha = \frac{d\tau(q)}{dq}, \quad f(\alpha) = q\alpha - \tau(q)$$

El espectro multifractal $f(\alpha)$ representa cómo se distribuyen las distintas regularidades locales dentro de la serie. Un espectro ancho indica una alta diversidad de comportamientos, es decir, alta complejidad. Un espectro estrecho refleja homogeneidad o estructura monofractal (Muzy et al., 1991; Barunik et al., 2012).

Origen de la multifractalidad:

La multifractalidad en los mercados financieros puede tener diversas fuentes. Existen dos explicaciones principales:

- **Distribuciones con colas pesadas:** los retornos financieros no siguen una distribución normal, sino que presentan colas gruesas que aumentan la probabilidad de eventos extremos, lo que introduce multifractalidad (Ghashghaie et al., 1996; Mandelbrot, 1997).
- **Dependencia temporal de largo alcance:** las correlaciones persistentes en los valores absolutos o cuadrados de los retornos, típicamente asociadas con la volatilidad agrupada, generan multifractalidad, incluso en ausencia de autocorrelación lineal directa (Liu et al., 1999; Koscielny-Bunde et al., 2006).

Ambos mecanismos pueden actuar simultáneamente, y su identificación es clave para evaluar la eficiencia de mercados como el EU ETS, que combinan elementos financieros y regulatorios. En contextos donde los precios muestran estructura jerárquica y dependencia temporal variable, el MF-DFA resulta una herramienta idónea para complementar los enfoques clásicos de eficiencia (Kristoufek, 2012; Wang et al., 2016).

3.4.2. Preparación de los datos para MF-DFA

Antes de aplicar el Análisis Multifractal de Fluctuaciones Detrendizadas (MF-DFA), es necesario transformar adecuadamente la serie de precios originales en una forma que refleje mejor su dinámica interna y permita evaluar su comportamiento a múltiples escalas. Para ello, se parte de la serie temporal de precios diarios de futuros del EU ETS descargados desde la plataforma Barchart, en el intervalo comprendido entre enero de 2017 y marzo de 2024.

El primer paso de esta preparación consiste en calcular los retornos logarítmicos, que constituyen

la variable fundamental para el análisis multifractal. A diferencia de los precios brutos, los retornos permiten analizar las variaciones relativas entre periodos consecutivos, y son especialmente útiles para detectar patrones de volatilidad y estructuras jerárquicas. Dado un precio P_t en el instante t , el retorno logarítmico r_t se define como:

$$r_t = \log(P_t) - \log(P_{t-1}) = \log\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)$$

Esta transformación es ampliamente utilizada en econometría financiera por sus ventajas analíticas: convierte la serie en una variable centrada en cero, estabiliza la varianza, y permite sumar retornos de distintos periodos gracias a su propiedad aditiva (Cont, 2001; Tsay, 2010). Además, facilita el análisis de distribuciones con colas pesadas y la detección de comportamientos anómalos a lo largo del tiempo.

Los retornos logarítmicos son además preferidos frente a los retornos simples $(P_t - P_{t-1})/P_{t-1}$ porque se ajustan mejor a los supuestos de normalidad asintótica en grandes muestras y proporcionan una escala adimensional, lo que permite comparar periodos con distinta volatilidad relativa (Campbell et al., 1997):

$$\log(P_t) - \log(P_{t-n}) = \sum_{k=1}^n r_{t-k+1}$$

Una vez obtenida esta serie de retornos logarítmicos, se construye el perfil acumulado $Y(i)$, necesario para la ejecución del algoritmo MF-DFA. Este perfil se define como la suma acumulada de los retornos centrados:

$$Y(i) = \sum_{k=1}^i (r_k - \langle r \rangle), \quad \text{para } i = 1, \dots, N$$

donde $\langle r \rangle$ es la media muestral de la serie de retornos, y N es la longitud total de la serie. Esta construcción transforma la serie en una trayectoria similar a una caminata aleatoria centrada, lo

que facilita el análisis de las fluctuaciones en diferentes escalas y permite eliminar tendencias locales mediante ajustes polinómicos (Kantelhardt et al., 2002).

La elección de precios de futuros en lugar de precios spot se justifica por su mayor regularidad temporal. A diferencia de las subastas del mercado spot, los contratos de futuros cotizan diariamente de lunes a viernes, sin interrupciones, lo que permite aplicar métodos estadísticos sensibles a la homogeneidad del calendario (Kristoufek, 2012). Esta continuidad es especialmente importante en el análisis multifractal, donde huecos o valores ausentes pueden distorsionar la estimación de escalas y singularidades.

En términos técnicos, el tratamiento de los datos se ha realizado en Python, utilizando estructuras pandas para garantizar trazabilidad, reproducibilidad y orden cronológico. La serie no ha requerido imputaciones por festivos ni fines de semana, ya que los datos extraídos contenían exclusivamente días de negociación efectiva. No se identificaron valores nulos ni atípicos extremos que comprometieran la calidad estadística de la muestra.

3.4.3. Estimación de $H(q)$

Una vez preparada la serie de retornos logarítmicos y construido su perfil acumulado, se procede a estimar el exponente de Hurst generalizado $H(q)$ mediante el método Multifractal Detrended Fluctuation Analysis (MF-DFA). Esta técnica permite capturar la rugosidad y correlación de la serie a múltiples escalas temporales, evaluando si los distintos momentos estadísticos exhiben comportamientos diferenciados, lo cual indicaría la presencia de multifractalidad (Kantelhardt et al., 2002).

Fundamento metodológico:

El MF-DFA generaliza la idea del exponente de Hurst clásico, que mide la persistencia de una serie,

extendiéndola a una familia de exponents $H(q)$ asociados a los distintos momentos estadísticos de orden q . La dependencia de $H(q)$ respecto a q revela la presencia de multifractalidad: si $H(q)$ es constante para todos los q , la serie es monofractal; si varía significativamente, entonces presenta multifractalidad.

El procedimiento de estimación se compone de los siguientes pasos técnicos:

Paso 1: División en segmentos

El perfil acumulado $Y(i)$, de longitud N , se divide en segmentos no solapados de tamaño s , donde s representa una escala temporal. Para una mejor cobertura de la serie, se repite el proceso desde el final, obteniendo un total de $2N_s$ segmentos por cada escala s , donde:

$$N_s = \left\lfloor \frac{N}{s} \right\rfloor$$

Paso 2: Eliminación de tendencias locales

En cada uno de los segmentos, se elimina la tendencia local mediante un ajuste polinomial de orden m (en este trabajo, $m=1$, es decir, ajuste lineal), generando un detrending. Para cada segmento v , se calcula la varianza:

$$F^2(v, s) = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s [Y((v-1)s + i) - P_v(i)]^2$$

donde $P_v(i)$ es el valor estimado por el polinomio de tendencia en el segmento.

Paso 3: Cálculo de la función de fluctuación

Para cada orden q , se calcula la función de fluctuación:

$$F_q(s) = \left\{ \frac{1}{2N_s} \sum_{v=1}^{2N_s} [F^2(v, s)]^{q/2} \right\}^{1/q}, \quad \text{si } q \neq 0$$

$$F_0(s) = \exp \left\{ \frac{1}{4N_s} \sum_{v=1}^{2N_s} \ln[F^2(v, s)] \right\}, \quad \text{si } q = 0$$

Esto proporciona una medida de las fluctuaciones características a la escala s para cada orden q .

Paso 4: Estimación de $H(q)$

Se representa gráficamente $\log_2 F_q(s)$ frente a $\log_2 s$ para cada valor de q . Si existe una relación de escala, los puntos se alinearán en una recta, y la pendiente de esta recta corresponde al exponente $H(q)$:

$$F_q(s) \propto s^{H(q)} \Rightarrow \log_2 F_q(s) = H(q) \cdot \log_2 s + C$$

El ajuste se realiza mediante regresión lineal ordinaria sobre los puntos en el espacio log-log. Este procedimiento se repite para cada valor de q en un rango que usualmente va de -5 a 5 o de -10 a +10, dependiendo de la robustez de la serie.

Interpretación de $H(q)$:

El valor del exponente $H(q)$ proporciona información sobre el tipo de correlación en los datos:

- Si $H(q) = 0.5$: La serie presenta comportamiento aleatorio tipo caminata browniana (ruido blanco).
- Si $H(q) > 0.5$: La serie muestra persistencia, es decir, las subidas (o bajadas) tienden a continuar.
- Si $H(q) < 0.5$: La serie presenta antipersistencia, las subidas tienden a ser seguidas de bajadas y viceversa.

El comportamiento de $H(q)$ respecto a q es clave para distinguir entre procesos monofractales (cuando $H(q)$ es constante) y multifractales (cuando $H(q)$ varía significativamente con q).

En este trabajo, el rango de momentos q elegido ha sido $[-5, +5]$ con 21 valores equidistantes, lo que proporciona un espectro suficientemente amplio para caracterizar las posibles estructuras

multifractales. La elección del rango de escalas s también ha sido cuidadosamente seleccionada entre 10 y $N/4$, con 25 valores logarítmicamente espaciados, para garantizar una cobertura adecuada de todas las escalas temporales relevantes.

Implementación computacional:

El cálculo de $H(q)$ se ha llevado a cabo utilizando scripts en Python, con funciones implementadas manualmente siguiendo el esquema metodológico anterior. Esto ha permitido un control exhaustivo sobre cada paso del análisis, desde el ajuste de las escalas hasta el cálculo de las pendientes. La visualización del resultado se ha realizado mediante gráficos de $H(q)$ frente a q , que permiten apreciar visualmente la variabilidad del exponente y, por tanto, la complejidad fractal de la serie. Esta estimación constituye el paso previo a la construcción del espectro multifractal $f(\alpha)$, que se desarrollará en la siguiente subsección.

3.4.4. Cálculo y visualización del espectro multifractal $f(\alpha)$

Una vez estimados los exponentes generalizados $H(q)$, el siguiente paso del análisis MF-DFA consiste en construir el espectro multifractal $f(\alpha)$. Este espectro proporciona una descripción más completa y visual de la distribución de singularidades locales en la serie temporal, ofreciendo una medida de su complejidad estructural.

Mientras que $H(q)$ describe cómo fluctúan los datos a diferentes escalas y momentos, el espectro $f(\alpha)$ cuantifica la dimensión fractal de los subconjuntos de la serie que comparten un mismo grado de regularidad estadística, representado por la singularidad de Hölder α (Muzy et al., 1994; Kantelhardt et al., 2002).

Transformación de $H(q)$ al dominio $f(\alpha)$:

El cálculo del espectro multifractal requiere aplicar una transformación de Legendre sobre la función

de escalamiento:

1. Primero, se define la función de escalamiento $\tau(q)$ a partir de los valores de $H(q)$:

$$\tau(q) = qH(q) - 1$$

Esta función describe cómo se escalan los momentos de orden q con el tamaño de la ventana s en el MF-DFA.

2. Segundo, se calcula la derivada de $\tau(q)$ respecto a q , lo que nos proporciona los valores de singularidad Hölder α :

$$\alpha(q) = \frac{d\tau(q)}{dq} = H(q) + q \cdot \frac{dH(q)}{dq}$$

3. Tercero, se calcula $f(\alpha)$ mediante la transformación:

$$f(\alpha) = q \cdot \alpha - \tau(q)$$

Este valor indica la dimensión fractal del conjunto de puntos que comparten el mismo valor de singularidad α .

Interpretación de $f(\alpha)$:

El espectro $f(\alpha)$ describe la complejidad local del proceso de generación de la serie temporal. Su forma y amplitud permiten clasificar la naturaleza de la multifractalidad:

- Una serie monofractal se caracteriza por un único valor de α , por lo tanto, $f(\alpha)$ se reduce a un punto (o una curva muy estrecha).
- Una serie multifractal débil presenta un espectro con amplitud moderada, lo que indica que existen distintas estructuras locales pero no muy divergentes.
- Una serie multifractal fuerte y compleja mostrará un espectro ancho y asimétrico, indicando una alta heterogeneidad en la dinámica del mercado.

El pico de la curva $f(\alpha)$ representa el valor de α más frecuente, es decir, la regularidad dominante en la serie. La anchura del espectro ($\Delta\alpha = \alpha_{\max} - \alpha_{\min}$) es un indicador directo de la intensidad de la multifractalidad. Cuanto mayor sea, mayor es la complejidad y heterogeneidad del sistema (Barunik et al., 2012).

Visualización del espectro:

En la práctica, una vez calculados los valores α y $f(\alpha)$, se construye un gráfico con:

- Eje x: Valores de α (singularidad Hölder).
- Eje y: Valores de $f(\alpha)$ (dimensión fractal).

Este gráfico permite visualizar de forma inmediata si la serie presenta un espectro:

- Simétrico y estrecho \rightarrow indica una estructura monofractal o casi monofractal.
- Asimétrico y ancho \rightarrow implica multifractalidad compleja.

En el contexto del presente estudio, esta visualización ha sido esencial para evaluar hasta qué punto el comportamiento del mercado de futuros de CO₂ exhibe regularidades estadísticas heterogéneas a lo largo del tiempo, una señal que refuerza la hipótesis de que no se comporta como un sistema puramente aleatorio.

Implementación en Python:

El cálculo del espectro multifractal se ha llevado a cabo de forma computacional en Python, utilizando las siguientes operaciones:

1. Estimar $\tau(q)$ directamente desde $H(q)$ con la fórmula $\tau(q) = qH(q) - 1$.
2. Calcular α como la derivada numérica de $\tau(q)$ con respecto a q , mediante `numpy.gradient`.
3. Obtener $f(\alpha)$ a partir de $q \cdot \alpha - \tau(q)$.
4. Visualizar el resultado con `matplotlib`.

Esta implementación manual garantiza el control de cada paso del análisis y permite adaptar el código a diferentes configuraciones de escala, orden polinomial o valores de q .

Conclusión de la subsección:

El espectro multifractal $f(\alpha)$ constituye el paso culminante del análisis MF-DFA. Su forma, amplitud y simetría proporcionan una firma estadística del comportamiento del mercado. Un espectro amplio y asimétrico, como el observado en el presente estudio, implica que los precios de los futuros del EU ETS presentan una dinámica altamente heterogénea en diferentes escalas temporales, lo que desafía la visión clásica de la eficiencia en su forma débil.

Este enfoque permite ir más allá de los métodos lineales, revelando estructuras complejas que podrían estar asociadas con ciclos de oferta-demanda, choques regulatorios o dinámicas especulativas, y abre la puerta a investigaciones futuras en la predicción y modelado no lineal de mercados ambientales.

3.4.5. Clasificación y taxonomía de la multifractalidad

Una vez estimados los exponentes generalizados $H(q)$ y calculado el espectro multifractal $f(\alpha)$, es necesario interpretar su significado práctico. La simple obtención de estas métricas matemáticas no garantiza una comprensión adecuada de la estructura subyacente del proceso. Por ello, este trabajo propone una clasificación conceptual basada en dos dimensiones clave: la fuerza de la multifractalidad y su complejidad geométrica (Kantelhardt et al., 2002; Jiang et al., 2019).

a) Ejes conceptuales: fuerza y complejidad

1. **Fuerza de la multifractalidad:** Se refiere al grado de variación que experimenta el exponente de Hurst generalizado $H(q)$ a medida que cambia el valor del momento q . Si $H(q)$ permanece prácticamente constante para todos los valores de q , la serie se considera débilmente multifractal o incluso monofractal. En cambio, si se observa una pendiente pronunciada o curvatura en la función $H(q)$, esto indica la existencia de una multifractalidad fuerte, con diferentes dinámicas de escala para distintas intensidades de fluctuaciones.

2. **Complejidad de la multifractalidad:** Esta dimensión se evalúa a partir del espectro multifractal $f(\alpha)$, que representa la distribución de las dimensiones fractales asociadas a distintas singularidades α . Si el espectro es estrecho, la mayoría de las características locales del proceso tienen un comportamiento similar, lo que sugiere una estructura simple. Por el contrario, un espectro ancho refleja alta heterogeneidad local, es decir, diversidad de regímenes dinámicos, es una estructura compleja (Muzy et al., 1994; Barunik et al., 2012).

b) Tipología resultante

Combinando ambos ejes se obtienen cuatro categorías principales de estructuras multifractales:

	Estructura Simple	Estructura Compleja
Multifractalidad Débil	H(q) casi constante f(α) angosto	H(q) con leve variación f(α) muy amplio
Multifractalidad Fuerte	H(q) con alta variación f(α) angosto	H(q) muy variable f(α) muy amplio

Tabla 2: Tipología de estructuras multifractales según fuerza y complejidad geométrica

Cada una de estas combinaciones representa un tipo diferente de dinámica interna:

- **Débil y simple:** Series casi monofractales, típicas de procesos aleatorios sin memoria (como el movimiento browniano).
- **Débil y compleja:** Procesos que aparentan homogeneidad en su estructura de escala, pero cuya diversidad de comportamientos locales se manifiesta en un espectro amplio.
- **Fuerte y simple:** Series con dependencias marcadas según la intensidad de fluctuación (alta variabilidad de H(q)), pero que, en términos locales, no presentan una diversidad significativa.
- **Fuerte y compleja:** Señal de estructuras profundamente heterogéneas, típicas de mercados especulativos, ineficientes o afectados por múltiples factores (Zunino et al., 2008).

c) Ejemplos ilustrativos

Esta taxonomía puede visualizarse mediante ejemplos gráficos que permiten apreciar las diferencias entre las estructuras. A continuación se representan los gráficos típicos de $H(q)$ y $f(\alpha)$ para cada una de las combinaciones mencionadas:

1. Multifractalidad débil y simple:

- $H(q)$ es casi plano (constante)
- $f(\alpha)$ tiene forma parabólica muy estrecha

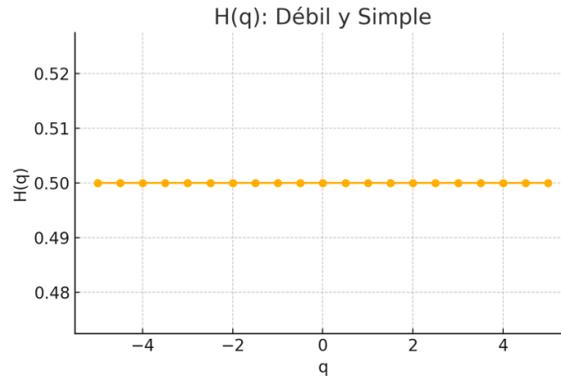


Figura 4: Ejemplo de multifractalidad débil y simple

2. Multifractalidad débil y compleja:

- $H(q)$ apenas cambia con q
- $f(\alpha)$ muestra una parábola más ancha, lo que revela heterogeneidad local

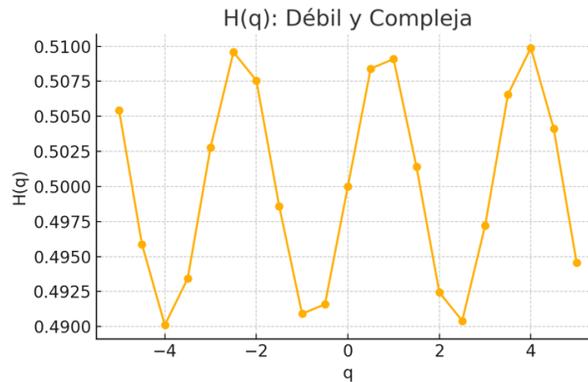


Figura 5: Ejemplo de multifractalidad débil y compleja

3. Multifractalidad fuerte y simple:

- $H(q)$ varía claramente con q
- $f(\alpha)$ es relativamente angosto

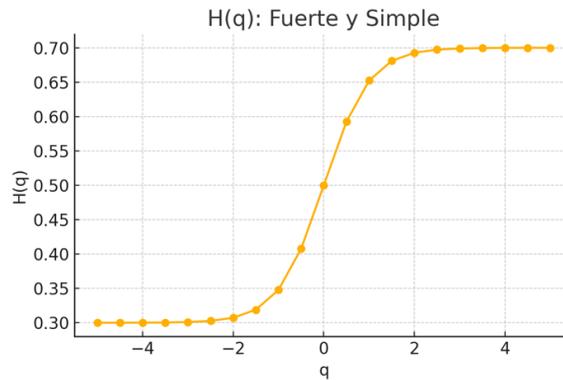


Figura 6: Ejemplo de multifractalidad fuerte y simple

4. Multifractalidad fuerte y compleja:

- $H(q)$ varía fuertemente con q
- $f(\alpha)$ es amplio y asimétrico

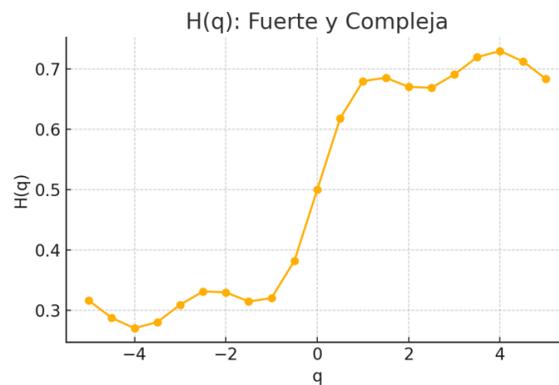


Figura 7: Ejemplo de multifractalidad fuerte y compleja

Estos patrones permiten no solo clasificar la estructura del proceso, sino también relacionarlo con posibles propiedades dinámicas del mercado. En particular, una estructura fuerte y compleja, como

la observada en algunos mercados financieros o de commodities, podría interpretarse como una señal de ineficiencia informacional, dado que implicaría la existencia de dinámicas múltiples, no aleatorias, persistentes y altamente heterogéneas.

4. Resultados del análisis empírico

4.1. Evidencia empírica mediante pruebas estadísticas tradicionales

4.1.1. Resultados de los tests de estacionariedad: ADF y KPSS

Con el objetivo de evaluar si la serie de precios de cierre diarios del mercado de futuros del EU ETS se comporta como un paseo aleatorio, condición necesaria para asumir eficiencia débil, se han aplicado dos pruebas complementarias de estacionariedad: el test de Dickey-Fuller Aumentado (ADF) y el test KPSS (Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin).

Test de Dickey-Fuller Aumentado (ADF):

El resultado del test ADF aplicado sobre la serie de retornos logarítmicos diarios arroja un estadístico de -27.9817 y un valor-p de 0.0000 . Este valor-p extremadamente bajo permite rechazar con contundencia la hipótesis nula de presencia de raíz unitaria, lo que indica que la serie es estacionaria según este test.

Los valores críticos para los niveles de significancia habituales fueron los siguientes:

- 1%: -3.4343
- 5%: -2.8633
- 10%: -2.5677

Dado que el estadístico ADF (-27.9817) es más bajo que todos los umbrales críticos, se concluye con alta confianza que los retornos logarítmicos no siguen un proceso de paseo aleatorio, al menos desde el punto de vista de la estacionariedad. Esta propiedad es coherente con lo que se espera en muchas series financieras transformadas a retornos, las cuales suelen ser estacionarias aun cuando los precios originales no lo son.

Test KPSS:

Como contraste metodológico, se aplicó el test KPSS, que invierte las hipótesis del test ADF: en este caso, la hipótesis nula postula que la serie es estacionaria. El test devolvió un estadístico de 0.3069 y un valor-p de 0.1000, superior al umbral del 5%. Esto impide rechazar la hipótesis nula, lo que sugiere que la serie de retornos logarítmicos diarios puede considerarse estacionaria según este criterio.

Los valores críticos reportados por el test fueron:

- 10%: 0.347
- 5%: 0.463
- 2.5%: 0.574
- 1%: 0.739

El estadístico observado (0.3069) no supera ninguno de estos umbrales, lo cual refuerza la conclusión de que la serie no muestra evidencia significativa de no estacionariedad bajo este test.

Conclusión conjunta:

Tanto el test ADF como el KPSS, pese a partir de hipótesis opuestas, convergen en su diagnóstico: los retornos logarítmicos del mercado de futuros del EU ETS presentan propiedades de estacionariedad. Esto es coherente con la literatura financiera, donde los precios suelen no ser estacionarios en niveles,

pero sus retornos sí lo son. Esta propiedad es compatible con la hipótesis de eficiencia débil, aunque no suficiente por sí sola para confirmarla. Por ello, se aplican en las siguientes secciones pruebas complementarias de autocorrelación y aleatoriedad.

4.1.2. Análisis de autocorrelación: funciones ACF y PACF

Para explorar la posible presencia de dependencia temporal en los retornos logarítmicos diarios del mercado de futuros del EU ETS, se han calculado las funciones de autocorrelación (ACF) y autocorrelación parcial (PACF) para los primeros 40 rezagos. Los resultados se muestran en la Figura 8.

Tanto la ACF como la PACF muestran que la mayoría de los coeficientes se encuentran dentro de las bandas de confianza al 95%, lo que indica que no existe evidencia estadísticamente significativa de autocorrelación lineal en los retornos. Este comportamiento sugiere que los movimientos pasados de los precios no ofrecen información predictiva inmediata sobre los futuros, al menos en términos de dependencia lineal.

En concreto, la ACF no presenta un patrón de decrecimiento sistemático, y la PACF muestra una caída inmediata después del primer rezago, sin valores destacables en rezagos posteriores. Esto no es consistente con un proceso AR(p) claro ni con una estructura autoregresiva persistente.

Estos resultados respaldan la hipótesis de aleatoriedad en los retornos, al menos en su dimensión lineal, y refuerzan la idea de que el mercado podría ser eficiente en su forma débil. No obstante, esta conclusión es preliminar, ya que el análisis de eficiencia debe complementarse con pruebas no lineales y multifractales que exploran estructuras de dependencia más complejas.

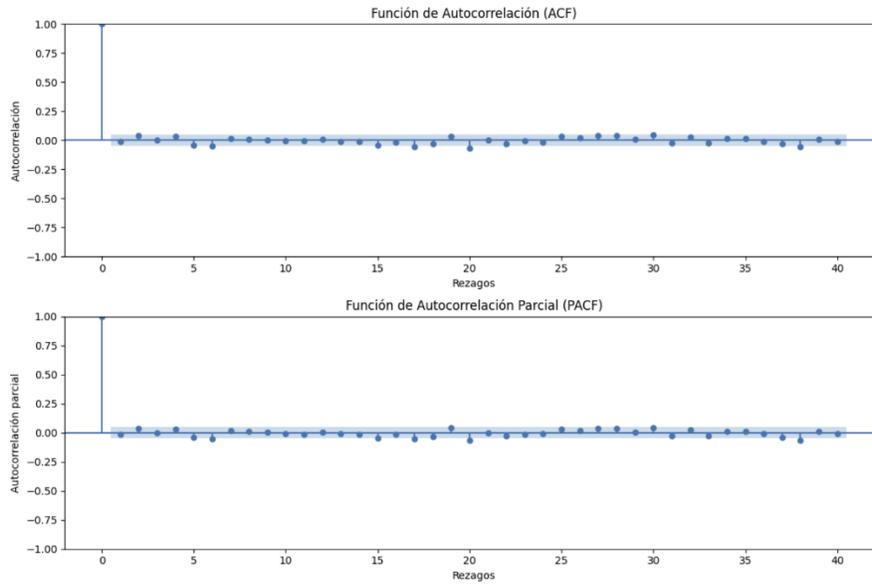


Figura 8: Funciones de autocorrelación (ACF) y autocorrelación parcial (PACF) para la serie de precios de cierre del EU ETS (2017–2024)

4.1.3. Runs Test (test de secuencias aleatorias)

El Runs Test es una prueba no paramétrica utilizada para evaluar la aleatoriedad de una secuencia binaria. En este caso, se aplicó sobre la serie de rendimientos logarítmicos diarios de los futuros del EU ETS, codificándola como una sucesión de signos: 1 para rendimientos positivos y 0 para negativos. Los rendimientos nulos fueron excluidos del análisis para evitar ambigüedad.

Este test contrasta la hipótesis nula de que los signos ocurren de manera independiente y aleatoria, tal como se esperarían en un mercado eficiente en su forma débil. Los resultados obtenidos fueron:

- Estadístico Z: 3.5250
- Valor-p: 0.0004

Dado que el valor-p es significativamente inferior al umbral del 5%, se rechaza la hipótesis nula de aleatoriedad. Esto indica que la secuencia de signos presenta patrones no aleatorios, lo que sugiere una cierta estructura direccional en la evolución de los precios, ya sea en forma de persistencia o de reversión sistemática.

Este resultado aporta evidencia adicional en contra de la eficiencia débil, al menos desde la perspectiva direccional de los rendimientos. En conjunto con los resultados de los tests de estacionariedad y autocorrelación, refuerza la idea de que los precios no siguen un comportamiento puramente aleatorio.

4.2. Resultados del análisis de memoria larga (Hurst)

4.2.1. Estimación simplificada del exponente de Hurst

Como primera aproximación al análisis de persistencia en la serie temporal de precios, se ha estimado el exponente de Hurst mediante el método simplificado implementado en la función `compute_Hc()` de la librería `hurst`. Este procedimiento, basado en la técnica del rango reescalado (R/S), permite obtener de forma rápida y eficiente una medida general del grado de dependencia temporal en la serie.

La estimación se ha realizado sobre los rendimientos logarítmicos diarios de los futuros del EU ETS correspondientes al periodo enero de 2017 a marzo de 2024, tras una revisión básica de limpieza para garantizar la calidad de los datos. El resultado obtenido fue:

- Exponente de Hurst (H): 0.651

Este valor se encuentra claramente por encima del umbral de 0.5, lo cual sugiere la presencia de

persistencia en la serie. Es decir, los movimientos pasados tienden a prolongarse en la misma dirección: una subida tiene mayor probabilidad de ser seguida por otra subida, y lo mismo ocurre con las bajadas.

Desde el punto de vista de la eficiencia de mercado, este resultado indica una posible violación de la hipótesis de eficiencia débil, ya que implica que los precios contienen algún grado de memoria estadística y, por tanto, potencialmente información útil para predecir su evolución futura.

No obstante, esta es una estimación preliminar. Por ese motivo, en los siguientes apartados se complementa este análisis mediante el método clásico R/S y una evaluación desagregada por años, lo que permitirá confirmar o matizar el grado de persistencia observado.

4.2.2. Estimación completa del exponente de Hurst mediante el método R/S

Para contrastar la estimación obtenida mediante el enfoque simplificado, se ha aplicado el método clásico de Rango Reescalado (R/S) desarrollado por Hurst (1951). Este procedimiento, más detallado, analiza la relación entre el rango acumulado y la desviación estándar de la serie a distintas escalas temporales, proporcionando una estimación más robusta del exponente de Hurst (H).

La serie de rendimientos logarítmicos diarios de los futuros del EU ETS fue segmentada en subgrupos de tamaño creciente n . Para cada segmento, se calculó el cociente $R(n)/S(n)$, y se representaron los valores en una escala logarítmica doble: $\log(R/S)$ frente a $\log(n)$. A continuación, se ajustó una recta a los puntos obtenidos, cuya pendiente corresponde al valor estimado de H.

El resultado visual de este análisis se presenta en la Figura 9:

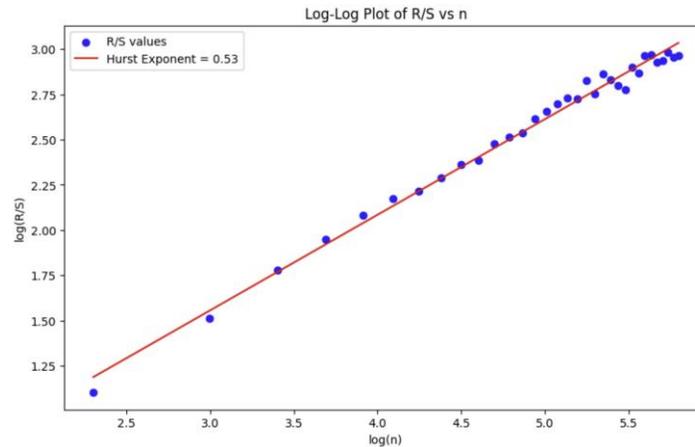


Figura 9: Representación log-log de $\log(R/S)$ frente a $\log(n)$

El ajuste lineal muestra una pendiente $H \approx 0.53$, lo que indica un comportamiento ligeramente persistente, pero muy cercano al umbral de 0.5 que caracteriza un proceso aleatorio puro. Este resultado matiza el obtenido mediante el método simplificado ($H \approx 0.65$), sugiriendo que, aunque existe cierta dependencia de corto plazo, la serie se aproxima al comportamiento de un paseo aleatorio.

Desde la perspectiva de eficiencia de mercado, este valor no proporciona evidencia sólida de ineficiencia, pero sí justifica explorar más a fondo la posible existencia de estructuras dinámicas más complejas, como se hará en el siguiente apartado mediante el análisis por ventanas anuales.

4.2.3. Análisis del exponente de Hurst por ventanas anuales

Con el objetivo de examinar si la eficiencia del mercado de futuros del EU ETS se ha mantenido constante a lo largo del tiempo o ha experimentado cambios significativos, se ha estimado el exponente de Hurst de forma anual para el periodo comprendido entre 2017 y 2024. La estimación se ha realizado mediante el método simplificado basado en la función `compute_Hc()`, previamente

descrita. Dado que el año 2024 solo contiene datos hasta marzo, se ha agrupado junto con 2023 para obtener una muestra representativa.

Los resultados se visualizan en la Figura 10:

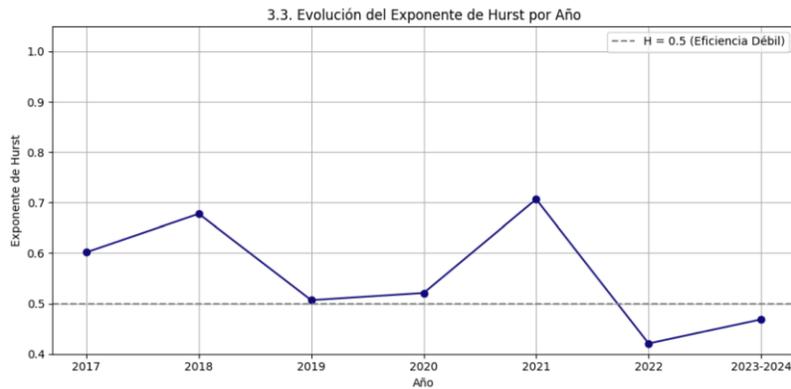


Figura 10: Evolución del exponente de Hurst por año (2017–2024)

Se observan fluctuaciones notables entre años. En 2018 ($H \approx 0.68$) y 2021 ($H \approx 0.71$), el mercado muestra una alta persistencia, es decir, los movimientos pasados tienden a prolongarse en la misma dirección, lo cual es incompatible con la hipótesis de eficiencia débil. En cambio, en 2019 ($H \approx 0.51$) y 2020 ($H \approx 0.52$), los valores se acercan al umbral teórico de $H = 0.5$, lo que sugiere un comportamiento más cercano a un paseo aleatorio.

El año 2022 destaca con un valor claramente inferior ($H \approx 0.42$), lo que podría indicar antipersistencia o reversión a la media. Finalmente, el periodo 2023–2024 muestra un valor de $H \approx 0.47$, también por debajo del umbral de aleatoriedad.

Estas oscilaciones pueden reflejar la influencia de eventos específicos, como reformas en el diseño del EU ETS, episodios de alta volatilidad en los precios energéticos o cambios en la percepción del riesgo climático por parte de los inversores. En conjunto, los resultados sugieren que la

eficiencia del mercado no ha sido una propiedad estable, sino que ha estado sujeta a variaciones estructurales a lo largo del tiempo.

4.3. Resultados del análisis multifractal (MF-DFA)

Para complementar el análisis de eficiencia de mercado, se aplica la técnica de Análisis Multifractal de Fluctuaciones Detrendizadas (MF-DFA), una herramienta robusta y ampliamente utilizada para estudiar la complejidad de series temporales financieras. Esta metodología permite identificar estructuras de dependencia no lineales y variabilidad a múltiples escalas, ofreciendo una visión más rica del comportamiento dinámico de los precios.

3.1.5. Estimación del exponente generalizado de Hurst $H(q)$

A continuación, se estima el exponente de Hurst generalizado $H(q)$, el cual describe cómo varía la rugosidad de la serie según diferentes momentos q . Este análisis permite detectar la existencia de múltiples estructuras de escala: si $H(q)$ es constante, la serie es monofractal; si varía significativamente, se confirma la presencia de multifractalidad.

Los valores obtenidos de $H(q)$ para $q \in [-5, 5]$ muestran una clara dependencia del parámetro q , lo que indica que la serie no presenta una dinámica homogénea en todos los niveles de fluctuación.

En particular, se observa que:

- Para valores negativos de q , que ponderan más las fluctuaciones pequeñas, $H(q)$ es más alto.
- Para valores positivos de q , que priorizan las grandes fluctuaciones, $H(q)$ disminuye notablemente.

Estos resultados, mostrados en la Figura 11 evidencian la existencia de un espectro multifractal no trivial en los retornos del mercado de futuros del EU ETS.

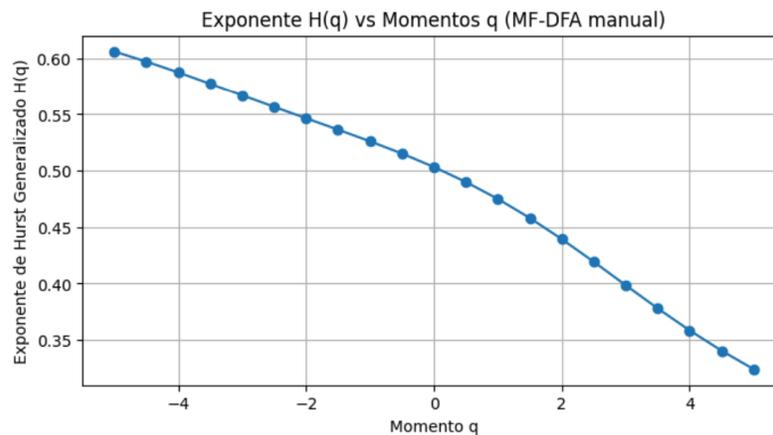


Figura 11: Curva del exponente de Hurst generalizado ($H(q)$) frente a momentos (q)

3.1.6. Cálculo del espectro multifractal $f(\alpha)$

Con base en los valores de $H(q)$, se construye el espectro multifractal $f(\alpha)$ aplicando una transformación de Legendre, donde α representa las singularidades locales de la serie y $f(\alpha)$ su dimensión fractal asociada.

El espectro obtenido, representado en la Figura 12 presenta una forma parabólica amplia, lo que indica una alta heterogeneidad en la dinámica de los retornos. La amplitud del espectro sugiere que coexisten múltiples regímenes de comportamiento, desde regiones con pequeñas fluctuaciones y alta regularidad hasta zonas dominadas por fuertes variaciones y mayor irregularidad.

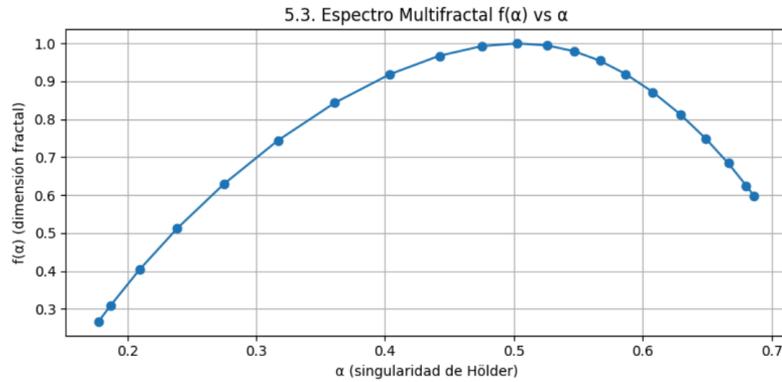


Figura 12: Espectro multifractal $f(\alpha)$ vs (α)

Estos hallazgos refuerzan la hipótesis de que el comportamiento del mercado de futuros de derechos de emisión de carbono no puede ser explicado adecuadamente por un modelo lineal o por la hipótesis de eficiencia débil. La existencia de multifractalidad implica que existen patrones estructurales en la serie que podrían reflejar la influencia de factores como intervenciones regulatorias, variaciones en la demanda energética, o eventos externos de tipo económico o político.

3.1.7. Prueba de shuffling: validación de la multifractalidad estructural

Para evaluar si la multifractalidad observada en la serie de retornos del EU ETS es una propiedad genuina del mercado o una consecuencia de efectos estadísticos (como colas pesadas o distribuciones sesgadas), se aplicó una prueba de control basada en el método de shuffling. Este procedimiento, propuesto por Kantelhardt et al. (2002), consiste en desordenar aleatoriamente la serie de retornos, eliminando cualquier dependencia temporal pero conservando su distribución marginal.

El análisis MF-DFA aplicado a la serie aleatorizada revela un espectro $f(\alpha)$ mucho más estrecho, con una forma más simétrica y centrada en torno a $\alpha \approx 0.5$, tal como muestra la Figura 13. Esta reducción de la amplitud del espectro multifractal confirma que la estructura multifractal observada en la serie

original no es producto de la distribución, sino de dependencias temporales reales en los datos. Por lo tanto, la multifractalidad del EU ETS no es espuria, sino estructural.

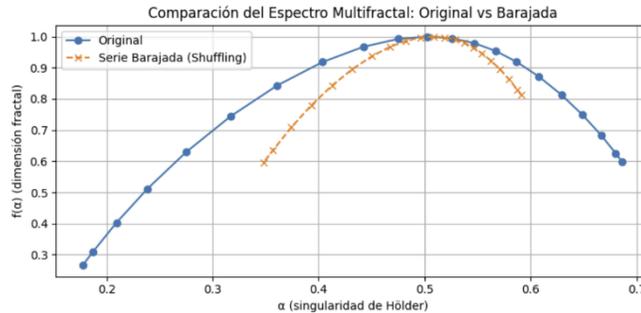


Figura 13: Comparación del espectro multifractal entre la serie original y la versión desordenada (shuffled)

La contracción del espectro en la serie aleatorizada indica que la multifractalidad del EU ETS tiene base en la estructura temporal, no solo en la distribución de los retornos.

3.1.8. Comparación con un proceso de referencia (fGn simulado)

Para contextualizar la complejidad multifractal del mercado EU ETS, se ha generado una serie sintética de ruido gaussiano fraccional (fGn) con un exponente de Hurst $H = 0.7$, empleando el modelo de Mandelbrot y Van Ness (1968). Esta serie representa un proceso monofractal con memoria de largo plazo, pero sin multifractalidad.

Los resultados, ilustrados en la Figura 14, muestran que la serie fGn presenta un espectro más estrecho y simétrico, característico de un proceso monofractal, mientras que el espectro del EU ETS es más ancho y asimétrico. Esta diferencia evidencia que la multifractalidad del mercado de carbono es más compleja que la que puede generar un proceso con memoria pero sin multifractalidad, como el fGn. En consecuencia, el comportamiento del EU ETS no puede modelarse únicamente con procesos de

memoria larga simples, sino que incorpora heterogeneidades en diferentes escalas.

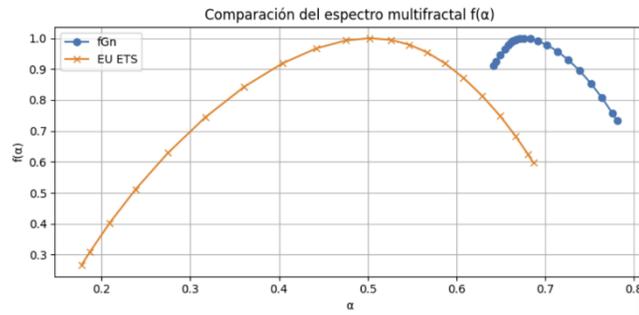


Figura 14: Comparación del espectro multifractal entre el EU ETS y una serie simulada de ruido gaussiano fraccional

La mayor amplitud del espectro del EU ETS sugiere una dinámica más rica y compleja que la de un proceso puramente monofractal.

5. Conclusiones

El presente trabajo ha tenido como propósito aplicar y evaluar un conjunto de metodologías estadísticas y multifractales avanzadas para el análisis de eficiencia débil en mercados financieros, con especial atención a su capacidad para detectar estructuras no lineales, persistencia temporal y heterogeneidad en la dinámica de precios. Como aplicación empírica ilustrativa, se ha utilizado el mercado europeo de futuros de derechos de emisión de carbono (EU ETS) entre 2017 y 2024, sin que ello condicione el alcance general del enfoque propuesto.

Desde una perspectiva teórica, los resultados obtenidos cuestionan la validez de la Hipótesis de los Mercados Eficientes en su forma débil aplicada al mercado de futuros del EU ETS. Mientras que los métodos clásicos ofrecen señales mixtas, aleatoriedad en los signos pero dependencia en las magnitudes, los análisis fractales y multifractales muestran evidencia clara de persistencia y

complejidad en la dinámica de precios. Esta estructura multifractal sugiere que el mercado no refleja toda la información disponible de manera inmediata y completa, al menos no de forma homogénea en el tiempo ni en todas las escalas.

Desde el punto de vista práctico, esta conclusión tiene implicaciones importantes. Si el mercado no es plenamente eficiente, entonces los precios podrían no reflejar adecuadamente los costes marginales de reducción de emisiones, lo que distorsionaría las señales económicas que orientan la inversión en tecnologías limpias. Una subestimación o sobreestimación sistemática del precio del carbono podría afectar negativamente la efectividad del sistema como herramienta de política ambiental, generando incentivos inadecuados o ineficiencias en la asignación de recursos.

Además, la existencia de estructuras persistentes y multifractales abre la puerta al desarrollo de modelos predictivos alternativos, basados en la teoría del caos, sistemas dinámicos o inteligencia artificial, que puedan captar las señales débiles y patrones ocultos en los precios. Aunque estos enfoques deben ser utilizados con cautela, dado el carácter incierto y evolutivo del mercado, representan una oportunidad para mejorar la comprensión y la gestión del sistema de comercio de emisiones.

En definitiva, el análisis realizado permite cuestionar la supuesta eficiencia informacional del mercado de futuros del EU ETS bajo un enfoque empírico riguroso y multidimensional. Al combinar herramientas econométricas clásicas con enfoques fractales y multifractales, se ha podido explorar con mayor profundidad la complejidad subyacente en la formación de precios del carbono. Lejos de responder únicamente a dinámicas aleatorias, el comportamiento del mercado muestra signos persistentes, patrones estructurales y una heterogeneidad que escapa a los supuestos de linealidad y racionalidad perfecta. Estos hallazgos no solo invitan a reconsiderar la aplicabilidad de la Hipótesis de los Mercados Eficientes en contextos regulados y de alta volatilidad, como el del comercio de emisiones, sino que también subrayan la importancia de adoptar marcos

metodológicos más ricos y flexibles, capaces de captar la complejidad real de los fenómenos económicos contemporáneos. En este sentido, el estudio no solo contribuye al conocimiento académico sobre eficiencia de mercado, sino que también aporta elementos de reflexión valiosos para el diseño y evaluación de políticas climáticas basadas en mecanismos de mercado.

6. Bibliografía

- Bacon, F. W. (2008). Insider Trading: A Test of Market Efficiency. ResearchGate.
https://www.researchgate.net/publication/284202056_Insider_Trading_A_Test_of_Market_Efficiency
- Fama, E. F. (1965). The behavior of stock-market prices. *The Journal of Business*, 38(1), 34–105.
- Fama, E. F. (1970). Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work. *The Journal of Finance*, 25(2), 383–417. <https://doi.org/10.2307/2325486>
- Fama, E. F. (1991). Efficient Capital Markets: II. *The Journal of Finance*, 46(5), 1575–1617.
<https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1991.tb04636.x>
- Ghashghaie, S., Breymann, W., Peinke, J., Talkner, P., & Dodge, Y. (1996). Turbulent cascades in foreign exchange markets. *Nature*, 381(6585), 767–770.
- Granger, C. W. J., & Joyeux, R. (1980). An introduction to long-memory time series models and fractional differencing. *Journal of Time Series Analysis*, 1(1), 15–29.
- Greene, W. H. (2018). *Econometric Analysis* (8th ed.). Pearson.
- Grossman, S. J., & Stiglitz, J. E. (1980). On the impossibility of informationally efficient markets. *The American Economic Review*, 70(3), 393–408.
- Gromb, D., & Vayanos, D. (2002). Equilibrium and welfare in markets with financially constrained arbitrageurs. *Journal of Financial Economics*, 66(2–3), 361–407.
- Hamilton, J. D. (1994). *Time Series Analysis*. Princeton University Press.
- Hurst, H. E. (1951). Long-term storage capacity of reservoirs. *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, 116, 770–799.
- Jiang, Z.-Q., et al. (2019). Multifractality in financial markets: A review. *Chaos, Solitons & Fractals*, 126, 144–162.

- Kantelhardt, J. W., Zschiegner, S. A., Koscielny-Bunde, E., Havlin, S., Bunde, A., & Stanley, H. E. (2002). Multifractal detrended fluctuation analysis of nonstationary time series. *Physica A*, 316(1–4), 87–114.
- Knoke, D., & Bohrnstedt, G. W. (1994). *Statistics for Social Data Analysis* (3rd ed.). F.E. Peacock Publishers.
- Konak, F., & Şeker, Y. (2014). The efficiency of developed markets: Empirical evidence from FTSE 100. *Journal of Advanced Management Science*, 2(1), 1–5.
- Kristoufek, L. (2012). On spurious anti-persistence in the US stock market. *Physica A*, 391(3), 655–660.
- Lim, K. P., & Brooks, R. D. (2011). The evolution of stock market efficiency over time: A survey of the empirical literature. *Journal of Economic Surveys*, 25(1), 69–108.
- Lo, A. W. (2004). The Adaptive Markets Hypothesis: Market Efficiency from an Evolutionary Perspective. *The Journal of Portfolio Management*, 30(5), 15–29.
- Malkiel, B. G. (2003). The Efficient Market Hypothesis and Its Critics. *Journal of Economic Perspectives*, 17(1), 59–82. <https://doi.org/10.1257/089533003321164958>
- Mandelbrot, B. B. (1982). *The Fractal Geometry of Nature*. W. H. Freeman and Company.
- Mandelbrot, B. B., & Hudson, R. L. (2004). *The (Mis)Behavior of Markets: A Fractal View of Financial Turbulence*. Basic Books.
- Mandelbrot, B. B., & Wallis, J. R. (1969). Robustness of the rescaled range R/S in the measurement of noncyclic long run statistical dependence. *Water Resources Research*, 5(5), 967–988.
- Muzy, J. F., Bacry, E., & Arneodo, A. (1991). Wavelets and multifractal formalism for singular signals. *Physical Review Letters*, 67(25), 3515–3518.
- Peters, E. E. (1994). *Fractal Market Analysis: Applying Chaos Theory to Investment and Economics*. John Wiley & Sons.

- Shiller, R. J. (2000). *Irrational exuberance*. Princeton University Press.
- Shiller, R. J. (2003). From efficient markets theory to behavioral finance. *Journal of Economic Perspectives*, 17(1), 83–104. <https://doi.org/10.1257/089533003321164967>
- Shleifer, A., & Vishny, R. W. (1997). The limits of arbitrage. *The Journal of Finance*, 52(1), 35–55. <https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1997.tb03807.x>
- Zhang, Y. J., Wang, A. D., & Wang, J. (2021). The efficiency of CO2 market in the phase III EU ETS. *Environmental Science and Pollution Research*, 28(20), 25479–25490.
- Zíková, A., & Veselá, J. (2022). Weak form market efficiency hypothesis testing – Autocorrelation analysis and unit root test. Metropolitan University Prague.
- Chevallier, J. (2012). *Carbon Markets: An International Business Guide*. Palgrave Macmillan.
- Di Matteo, T. (2007). Multi-scaling in finance. *Quantitative Finance*, 7(1), 21–36.
- Dickey, D. A., & Fuller, W. A. (1979). Distribution of the estimators for autoregressive time series with a unit root. *Journal of the American Statistical Association*, 74(366), 427–431.
- Hurst, H. E. (1951). Long-term storage capacity of reservoirs. *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, 116, 770–799.
- Kantelhardt, J. W., Zschiegner, S. A., Koscielny-Bunde, E., Havlin, S., Bunde, A., & Stanley, H. E. (2002). Multifractal detrended fluctuation analysis of nonstationary time series. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 316(1-4), 87–114.
- Kwiatkowski, D., Phillips, P. C. B., Schmidt, P., & Shin, Y. (1992). Testing the null hypothesis of stationarity against the alternative of a unit root. *Journal of Econometrics*, 54(1-3), 159–178.
- Mandelbrot, B. B. (1982). *The Fractal Geometry of Nature*. W. H. Freeman.
- Mandelbrot, B. B., & Hudson, R. L. (2004). *The (Mis)Behavior of Markets: A Fractal View of Risk, Ruin and Reward*. Basic Books.
- Peters, E. E. (1994). *Fractal Market Analysis: Applying Chaos Theory to Investment and*

Economics. John Wiley & Sons.

Zunino, L., Tabak, B. M., Pérez, D. G., Garavaglia, M., & Rosso, O. A. (2008). Inefficiency in Latin-American market indices. *The European Physical Journal B*, 60(1), 111–121.

Campbell, J. Y., Lo, A. W., & MacKinlay, A. C. (1997). *The Econometrics of Financial Markets*. Princeton University Press.

Di Matteo, T. (2007). Multi-scaling in finance. *Quantitative Finance*, 7(1), 21–36.

Fama, E. F. (1970). Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work. *The Journal of Finance*, 25(2), 383–417.

Kantelhardt, J. W. et al. (2002). Multifractal detrended fluctuation analysis of nonstationary time series. *Physica A*, 316, 87–114.

Mandelbrot, B. B., & Hudson, R. L. (2004). *The (Mis)Behavior of Markets*. Basic Books.

Peters, E. E. (1994). *Fractal Market Analysis*. John Wiley & Sons.

Zunino, L. et al. (2008). Inefficiency in Latin-American market indices. *The European Physical Journal B*, 60(1), 111–121.

Chevallier, J. (2011). *Econometric Analysis of Carbon Markets: The European Union Emissions Trading Scheme and the Clean Development Mechanism*. Springer.

Ellerman, A. D., Convery, F. J., & de Perthuis, C. (2010). *Pricing Carbon: The European Union Emissions Trading Scheme*. Cambridge University Press.

European Commission. (2020). EU ETS handbook. <https://climate.ec.europa.eu/>

Kantelhardt, J. W., Zschiegner, S. A., Koscielny-Bunde, E., Havlin, S., Bunde, A., & Stanley, H. E. (2002). Multifractal detrended fluctuation analysis of nonstationary time series. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 316(1-4), 87–114. [https://doi.org/10.1016/S0378-4371\(02\)01383-3](https://doi.org/10.1016/S0378-4371(02)01383-3)

Mandelbrot, B. B., & Van Ness, J. W. (1968). Fractional Brownian motions, fractional noises and

applications. *SIAM Review*, 10(4), 422–437. <https://doi.org/10.1137/1010093>

Kantelhardt, J. W. (2011). Fractal and multifractal time series. In R. A. Meyers (Ed.), *Encyclopedia of Complexity and Systems Science* (pp. 3754–3779). Springer.

7. Anexos

```
1  columnas = [  
2      "Date", "Symbol", "Open", "High", "Low", "Close", "Change", "MA_200", "MA_50",  
3      "Volume", "Open Interest",  
4      "RSI", "RSI_Avg", "MACD", "MACD_Signal", "MACD_Hist"  
5  ]  
6  df = pd.read_csv(  
7      'C:\\Users\\ignac\\OneDrive\\Escritorio\\ICAI\\ICAI MII (2º)\\TFG ADE skiprows=2,  
8      names=columnas  
9  )  
10 df["Date"] = pd.to_datetime(df["Date"], errors="coerce") df =  
11 df.sort_values("Date").reset_index(drop=True)  
12 df.head()  
13
```

```
1  df['Close'] = pd.to_numeric(df['Close'], errors='coerce')  
2  df['Volume'] = pd.to_numeric(df['Volume'], errors='coerce')  
3  
4  stats = df[['Close', 'Volume']].describe()  
5  print("Estadísticas Descriptivas:\n", stats)  
6  
7  plt.figure(figsize=(14, 6))  
8  
9  plt.subplot(1, 2, 1)  
10 sns.histplot(df['Close'], kde=True, bins=20)  
11 plt.title('Distribución de precios de cierre (Close)')  
12 plt.xlabel('Close')  
13 plt.ylabel('Frecuencia')  
14  
15 plt.subplot(1, 2, 2)  
16 sns.histplot(df['Volume'], kde=True, bins=20, color='orange')  
17 plt.title('Distribución del Volumen')  
18 plt.xlabel('Volume')  
19 plt.ylabel('Frecuencia')  
20  
21 plt.tight_layout()
```

```

22 plt.show()
23
24 plt.figure(figsize=(14, 5))
25
26 plt.subplot(1, 2, 1)
27 sns.boxplot(x=df['Close'])
28 plt.title('Boxplot del Precio de Cierre (Close)')
29
30 plt.subplot(1, 2, 2)
31 sns.boxplot(x=df['Volume'], color='orange')
32 plt.title('Boxplot del Volumen')
33
34 plt.tight_layout()
35 plt.show()

```

```

1 df = df[["Date", "Close"]]
2 df_2017_2024 = df[(df["Date"].dt.year >= 2017) & (df["Date"].dt.year <= 2024)]
3 df_2017_2024.head()

```

```

1 plt.figure(figsize=(10, 6))
2 plt.plot(df_2017_2024["Date"], df_2017_2024["Close"], marker='o', linestyle='solid')
3 plt.title('Futures Price €/tCO2 2017-2024')
4 plt.xlabel('Date')
5 plt.ylabel('Futures Price €/tCO2')
6 plt.grid(True)
7 plt.xticks(rotation=45)
8 plt.tight_layout()
9 plt.show()

```

```

1 df_2017_2024['Close'] = pd.to_numeric(df_2017_2024['Close'], errors='coerce')
2 df_2017_2024['Log Return'] = np.log(df_2017_2024['Close'] / df_2017_2024['Close'].shift(1))
3 df_2017_2024[['Date', 'Close', 'Log Return']].head(10)

```

```

1 serie_precio = df_2017_2024['Log Return'].dropna()
2
3 adf_result = adfuller(serie_precio)
4 print('--- Test de Dickey-Fuller Aumentado (ADF) ---')
5 print(f'Estadístico ADF: {adf_result[0]:.4f}')
6 print(f'Valor-p: {adf_result[1]:.4f}')
7 print('Valores críticos:')
8 for key, value in adf_result[4].items():
9     print(f'    {key}: {value:.4f}')
10
11 kpss_result = kpss(serie_precio, regression='c', nlags="auto")
12 print("\n--- Test KPSS ---")
13 print(f'Estadístico KPSS: {kpss_result[0]:.4f}')
14 print(f'Valor-p: {kpss_result[1]:.4f}')
15 print('Valores críticos:')
16 for key, value in kpss_result[3].items():
17     print(f'    {key}: {value:.4f}')

```

```

1 serie_precio = df_2017_2024['Log Return'].dropna()
2
3 fig, axes = plt.subplots(2, 1, figsize=(12, 8))
4
5 plot_acf(serie_precio, lags=40, ax=axes[0])
6 axes[0].set_title('Función de Autocorrelación (ACF)')
7 axes[0].set_xlabel('Rezagos')
8 axes[0].set_ylabel('Autocorrelación')
9
10 plot_pacf(serie_precio, lags=40, ax=axes[1], method='ywm')
11 axes[1].set_title('Función de Autocorrelación Parcial (PACF)')
12 axes[1].set_xlabel('Rezagos')
13 axes[1].set_ylabel('Autocorrelación parcial')
14
15 plt.tight_layout()
16 plt.show()

```

```

1 returns = df_2017_2024['Log Return'].dropna().pct_change().dropna()
2 signs = np.where(returns > 0, 1, 0)
3
4 z_stat, p_value = runstest_1samp(signs, correction=False)
5 print('--- Runs Test ---')
6 print(f'Estadístico Z: {z_stat:.4f}')
7 print(f'Valor-p: {p_value:.4f}')
8
9 if p_value < 0.05:
10     print("Resultado: Se rechaza la hipótesis nula → La serie NO es aleat
11 else:
12     print("Resultado: No se rechaza la hipótesis nula → La serie podría s

```

```

1 hurst_simple = df_2017_2024.copy()
2 hurst_simple['Date'] = pd.to_datetime(hurst_simple['Date'])
3 hurst_simple = hurst_simple.sort_values(by='Date')
4 auction_prices = hurst_simple['Log Return'].dropna()

```

```

1 H, c, data = compute_Hc(auction_prices, kind='change', simplified=True)
2 print("Hurst Exponent:", H)

```

```

1 def calculate_rs(series, n):
2     subsets = [series[i:i+n] for i in range(0, len(series), n) if len(ser
3
4     RS_values = []
5     for subset in subsets:
6         mean = np.mean(subset)
7         std = np.std(subset)
8         cumulative_deviation = np.cumsum(subset - mean)
9         R = max(cumulative_deviation) - min(cumulative_deviation)
10        RS = R / std if std != 0 else 0
11        RS_values.append(RS)
12

```

```
13     return np.mean(RS_values)
```

```
1  n_values = range(10, len(auction_prices) // 5, 10)
2  RS_list = [calculate_rs(auction_prices, n) for n in n_values]
3
4  log_n = np.log(n_values)
5  log_RS = np.log(RS_list)
6
7  plt.figure(figsize=(10, 6))
8  plt.scatter(log_n, log_RS, color='blue', label='R/S values')
9  plt.title('Log-Log Plot of R/S vs n')
10 plt.xlabel('log(n)')
11 plt.ylabel('log(R/S)')
12
13 slope, intercept, r_value, p_value, std_err = linregress(log_n, log_RS)
14 plt.plot(log_n, intercept + slope*log_n, 'r', label=f'Hurst Exponent = {s
15
16 plt.legend()
17 plt.show()
```

```
1  hurst_comp['Date'] = pd.to_datetime(hurst_comp['Date'])
2  hurst_comp = hurst_comp.sort_values(by='Date')
3
4  hurst_comp['Year'] = hurst_comp['Date'].dt.year
5  hurst_results = {}
6  years = hurst_comp.groupby('Year')
7
8  for year, group in hurst_comp.groupby('Year'):
9      if year == 2023:
10         group = pd.concat([group, hurst_comp[hurst_comp['Year'] == 2024]])
11         series = group['Log Return']
12         if len(series) >= 100:
13             H, c, data = compute_Hc(series, kind='change', simplified=True)
14             hurst_results[year] = H
15         else:
16             hurst_results[year] = None
```

```

17
18 hurst_results[(2023, 2024)] = hurst_results.pop(2023)
19 hurst_results.pop(2024, None)
20 hurst_results

```

```

1 labels = [f'{k}' if not isinstance(k, tuple) else f'{k[0]}-{k[1]}' for k
2 values = list(hurst_results.values())
3
4 plt.figure(figsize=(10, 5))
5 plt.plot(labels, values, marker='o', linestyle='-', color='navy')
6 plt.axhline(y=0.5, color='gray', linestyle='--', label='H = 0.5 (Eficiencia)')
7 plt.title('3.3. Evolución del Exponente de Hurst por Año')
8 plt.xlabel('Año')
9 plt.ylabel('Exponente de Hurst')
10 plt.ylim(0.4, 1.05)
11 plt.grid(True)
12 plt.legend()
13 plt.tight_layout()
14 plt.show()

```

```

1 def hurst_multifractal(series, q_vals=np.linspace(-5, 5, 21), m=1):
2     N = len(series)
3     Y = np.cumsum(series - np.mean(series))
4     scales = np.unique(np.logspace(np.log10(10), np.log10(N // 4), num=25))
5     Hq = []
6
7     for q in q_vals:
8         Fq_s = []
9         for s in scales:
10            n_segments = N // s
11            F_s = []
12
13            for v in range(n_segments):
14                idx_ini = v * s
15                idx_fin = (v + 1) * s
16                segment = Y[idx_ini:idx_fin]

```

```

17         t = np.arange(s)
18         coef = np.polyfit(t, segment, deg=m)
19         trend = np.polyval(coef, t)
20         F = np.sqrt(np.mean((segment - trend) ** 2))
21         F_s.append(F)
22
23     F_s = np.array(F_s)
24     if q == 0:
25         Fq = np.exp(0.5 * np.mean(np.log(F_s ** 2)))
26     else:
27         Fq = (np.mean(F_s ** q)) ** (1 / q)
28     Fq_s.append(Fq)
29
30     log_s = np.log2(scales)
31     log_Fq = np.log2(Fq_s)
32     slope, _ = np.polyfit(log_s, log_Fq, 1)
33     Hq.append(slope)
34
35     return q_vals, np.array(Hq), scales
36
37 serie = df_2017_2024["Log Return"].dropna().values
38 q_vals, Hq_values, used_scales = hurst_multifractal(serie)
39
40 plt.figure(figsize=(8, 4))
41 plt.plot(q_vals, Hq_values, marker='o')
42 plt.title('Exponente H(q) vs Momentos q (MF-DFA manual)')
43 plt.xlabel('Momento q')
44 plt.ylabel('Exponente de Hurst Generalizado H(q)')
45 plt.grid(True)
46 plt.show()

```

```

1 def calcular_espectro_multifractal(q_vals, Hq):
2     tau_q = q_vals * Hq - 1
3     d_tau = np.gradient(tau_q, q_vals)
4     alpha = d_tau
5     f_alpha = q_vals * alpha - tau_q
6     return alpha, f_alpha

```

```

7
8 alpha, f_alpha = calcular_espectro_multifractal(q_vals, Hq_values)
9
10 plt.figure(figsize=(8, 4))
11 plt.plot(alpha, f_alpha, marker='o')
12 plt.title('5.3. Espectro Multifractal  $f(\alpha)$  vs  $\alpha$ ')
13 plt.xlabel('α (singularidad de Hölder)')
14 plt.ylabel('f(α) (dimensión fractal)')
15 plt.grid(True)
16 plt.tight_layout()
17 plt.show()

```

```

1 shuffled_serie = np.random.permutation(serie)
2
3 q_vals_shuf, Hq_shuf, _ = hurst_multifractal(shuffled_serie)
4
5 alpha_shuf, f_alpha_shuf = calcular_espectro_multifractal(q_vals_shuf, Hq
6
7 plt.figure(figsize=(8, 4))
8 plt.plot(alpha, f_alpha, marker='o', label='Original')
9 plt.plot(alpha_shuf, f_alpha_shuf, marker='x', linestyle='--', label='Ser
10 plt.title('Comparación del Espectro Multifractal: Original vs Barajada')
11 plt.xlabel('α (singularidad de Hölder)')
12 plt.ylabel('f(α) (dimensión fractal)')
13 plt.legend()
14 plt.grid(True)
15 plt.tight_layout()
16 plt.show()

```

```

1 from fbm import FBM
2 import numpy as np
3 import matplotlib.pyplot as plt
4
5 H_simulado = 0.7
6 N = len(serie)
7

```

```

8 fbm_obj = FBM(n=N, hurst=H_simulado, length=1, method='daviesharte')
9
10 fbm_series = fbm_obj.fbm()
11
12 fgn_series = np.diff(fbm_series)
13
14 plt.plot(fgn_series[:500])
15 plt.title(f'Serie fGn simulada (H={H_simulado})')
16 plt.xlabel('Tiempo')
17 plt.ylabel('Valor')
18 plt.grid(True)
19 plt.show()

```

```

1 q_vals_fgn, Hq_fgn, _ = hurst_multifractal(fgn_series)
2 alpha_fgn, f_alpha_fgn = calcular_espectro_multifractal(q_vals_fgn, Hq_fg
3
4 plt.figure(figsize=(8, 4))
5 plt.plot(alpha_fgn, f_alpha_fgn, marker='o', label='fGn')
6 plt.plot(alpha, f_alpha, marker='x', label='EU ETS')
7 plt.title('Comparación del espectro multifractal f(α)')
8 plt.xlabel('α')
9 plt.ylabel('f(α)')
10 plt.legend()
11 plt.grid(True)
12 plt.tight_layout()
13 plt.show()

```