



Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales
ICADE

Evaluación de la Eficiencia de Mercado en el índice NQROBO mediante técnicas de análisis multifractal

Autor: Javier López Guisández
Director: Alejandro Rodríguez Gallego

MADRID | Abril 2025

Índice

1. Resumen / Abstract.....	3
2. Palabras clave.....	5
3. Introducción	4
3.1 Objetivo	4
3.2 Importancia de la IA y la robótica	5
3.3 Metodología.....	7
3.4 Estructura del trabajo.....	8
4. Inteligencia Artificial y Robótica	9
5. Nasdaq CTA Artificial Intelligence & Robotics (NQROBO)	15
6. Hipótesis del mercado eficiente	18
7. Multifractal Detrended Fluctuation Analysis (MF-DFA).....	22
8. Resultados del análisis	28
9. Conclusión.....	38
10. Bibliografía.....	43
Anexo I: Código Python.....	48

Índice de tablas y figuras

Tabla 1: Comparación HME Y HMF.....	21
Tabla 2: Métricas para la categoría IA.....	31
Tabla 3: Métricas para la categoría Ambas (IA y robótica).....	31
Tabla 4: Métricas para la categoría Robótica	31
Tabla 5: Resultados post-shuffling	36
Figura 1: Peso por capitalización	6
Figura 2: Popularidad IA	14
Figura 3: Peso por país	15
Figura 4: Peso por capitalización	16
Figura 5: Subsectores y pesos por actividad.....	16
Figura 6: Evolución índice NQROBO	17
Figura 7: Evolución del índice NQROBO.....	28
Figura 8: Retornos logarítmicos diarios e histograma categorías índice NQROBO	30
Figura 9: Simulación inversión NQROBO.....	32
Figura 10: MF-DFA previo a corte temporal.....	33
Figura 11: MF-DFA AI	34
Figura 12: MF-DFA Robótica.....	35
Figura 13: MF-DFA Ambos.....	36

1. Resumen

La inteligencia artificial y la robótica se han consolidado como motores clave para el desarrollo humano y tecnológico, son hoy dos de los sectores más prometedores donde se depositan grandes expectativas. Su capacidad para transformar nuestra sociedad ya es algo evidente, sin embargo, debido a sus altos costes de diseño y desarrollo, necesitan del sector financiero, convirtiéndolo en un elemento esencial dentro de este ecosistema. Las empresas que se encuentran en estos sectores necesitan de los mercados para obtener financiación de manera eficiente y sostenible. El presente trabajo tiene como objetivo principal realizar un análisis sobre la eficiencia en el comportamiento bursátil de las empresas del sector de la IA y la robótica empleando el índice *Nasdaq CTA Artificial Intelligence & Robotics* (NQROBO) como aproximación representativa de los mismos. Que este mercado alcanzase la eficiencia supondría importantes ventajas para estas empresas, ya que atraería capital de un mayor número de inversores. Se ha llevado a cabo un análisis cuantitativo transversal y longitudinal aplicando la innovadora técnica *Multifractal Detrended Fluctuation Analysis* (MF-DFA), la cual descompone la serie temporal para estudiar como escalan las fluctuaciones y la existencia de memoria a largo plazo en la serie. Los resultados de este estudio demuestran que tras un periodo de rica multifractalidad en el índice, el evento de la pandemia inició un cambio de tendencia acercando el comportamiento conjunto del índice, tanto empresas de IA como de robótica, hacia una mayor eficiencia. Este cambio supone importantes beneficios, como la atracción de inversores no especializados y el impulso de la inversión pasiva.

Abstract

Artificial intelligence and robotics have established themselves as key drivers of human and technological development. Nowadays, they are two of the most promising sectors, in which high expectations are placed. Their ability to transform our society is already evident; however, due to their high development cost, they rely heavily on the financial sector, making it an essential component of this ecosystem. Companies operating within these sectors require markets to obtain financing in an efficient and sustainable manner. The main objective of this work is to analyze the efficiency of the stock market behavior of companies in the artificial intelligence and robotics sectors, using the Nasdaq CTA Artificial Intelligence & Robotics (NQROBO) index as a representative approximation. Achieving market efficiency would bring significant advantages to these companies by attracting capital from a larger number of investors. A quantitative, transversal, and longitudinal analysis was carried out using the innovative Multifractal Detrended Fluctuation Analysis (MF-DFA) technique, which decomposes the time series to study how fluctuations scale and the existence of long-term memory in the series. The results of this study demonstrate that, after a period of rich multifractality in the index, the onset of the pandemic initiated a trend shift, bringing the overall behavior of the index—both for AI and robotics companies—closer to greater efficiency. This shift implies significant benefits, such as attracting non-specialized investors and boosting passive investment.

2. Palabras clave

- *Inteligencia artificial (IA)*
- *Robótica*
- *Multifractalidad*
- *NQROBO*
- *Random Walk*
- *Coefficiente de Hurst*
- *Tech Bubble*
- *Movimiento browniano*
- *Hipótesis del mercado eficiente (HME)*
- *Multifractal Detrended Fluctuation Analysis (MF-DFA)*
- *Espectro de multifractalidad*

3. Introducción

3.1 Objetivo

El objetivo principal de este trabajo es realizar un análisis cuantitativo sobre el índice NQROBO, un índice bursátil que replica el comportamiento de empresas vinculadas a la IA y la robótica. El trabajo se centra en evaluar si el comportamiento del índice cumple con la teoría o hipótesis del mercado eficiente, según la cual los precios de los activos financieros reflejan la información disponible en el mercado, tanto pasada como presente, garantizando que no existen patrones predecibles o ineficiencias que puedan ser explotadas de manera reiterada.

Para llevar a cabo esta evaluación, el estudio seguirá un enfoque transversal y longitudinal. El enfoque transversal permitirá conocer el comportamiento de las empresas del índice tras su división en tres categorías: IA, robótica o la combinación de ambas. Proporcionando así distintas perspectivas sobre como cada sector influye en el comportamiento del índice en su totalidad. El análisis longitudinal, tomará como punto de referencia el inicio de la pandemia del COVID-19, siendo este marzo del año 2020, y buscará identificar si ha existido un cambio en el comportamiento de estas empresas tras este evento. La elección de esta fecha se debe a que la pandemia marcó un importante cambio en los mercados, acelerando la inversión en tecnologías emergentes y afectando de manera significativa a la valoración de las mismas.

Para este análisis se empleará la técnica *Multifractal Detrended Fluctuation Analysis* (MD-DFA) basada en la descomposición del índice para identificar patrones en las series temporales, pudiendo llegar así a tres resultados distintos: persistencia, eficiencia o anti-persistencia. La persistencia indicará que el índice tiende a mantener un patrón a lo largo del tiempo, es decir, una correlación positiva entre movimientos; la eficiencia reflejará un comportamiento aleatorio en el cual los resultados de un período no tienen influencia alguna sobre los resultados futuros. Este comportamiento es propio de la hipótesis de eficiencia de mercado, que establece que los precios reflejan toda la información disponible en el mercado y que los movimientos de los precios son impredecibles, por último, la anti-persistencia o reversión a la media mostrará una correlación negativa o una tendencia a revertir resultados previos.

En resumen, este análisis multifractal nos permitirá no solo conocer si el comportamiento es diferente según la categoría asignada a las empresas, sino también si la estructura multifractal ha sufrido un cambio tras la pandemia, por razones como una posible burbuja especulativa en torno a estas empresas.

3.2 Importancia de la IA y la robótica

En los últimos años, la IA y la robótica se han consolidado como piezas clave del avance tecnológico, destacando por su capacidad para transformar significativamente nuestra vida social y laboral. Estas tecnologías han sido el motor del inicio de una nueva era tecnológica, reconocida en la literatura como la Industria 4.0 (Jan et al., 2023; Javaid et al., 2021)

La robótica y la IA tienen enfoques distintos, pero a la vez complementarios. La robótica surgió con el propósito de diseñar y construir máquinas capaces de reemplazar al ser humano en tareas físicas, repetitivas o automáticas, generalmente de menor complejidad, enfocándose en realizar trabajos prácticos (Whitesides, 2018). Por otro lado, la IA es una rama de la informática orientada a desarrollar programas capaces de llevar a cabo tareas que normalmente requieren de la inteligencia humana. Esto incluye habilidades como el aprendizaje, la toma de decisiones, la autocorrección y la creatividad (Chinecherem & Kenneth, 2017). No obstante, la integración de ambas disciplinas genera importantes sinergias, que crean valor más allá de la suma de sus aportaciones individuales.

Los importantes avances en ambas tecnologías han llevado a una rápida y creciente implementación en el mundo empresarial, debido a los significativos beneficios que aportan a las actividades diarias y a la eficiencia de estas. Su uso permite optimizar procesos, reducir costes y aumentar la productividad, consolidándose como herramientas indispensables en la nueva industria 4.0. A modo de ejemplo, la IA y la robótica están transformando la forma en que industrias como el turismo, la hostelería y el ocio interactúan con sus clientes. Tecnologías que antes eran innovadoras, como los sistemas de recomendación, los chatbots o los asistentes de voz, han pasado a ser herramientas habituales. Hoy, los avances van aún más lejos, con robots como "*Pepper*" que es capaz de desempeñar funciones en la recepción de hoteles, ofreciendo información y asistiendo a los huéspedes (El Confidencial, 2017; Koo et al., 2021; Pandey & Gelin, 2018).

Lo que hace solo unos años parecía ciencia ficción, ahora se ha convertido en una realidad, redefiniendo la experiencia del cliente y marcando el rumbo hacia un futuro aún más automatizado e inteligente. Otras industrias como la financiera emplean estos avances para crear algoritmos capaces de realizar operaciones de trading de manera autónoma o para evaluar el riesgo de determinadas operaciones (Weber et al., 2024).

Esta revolución tecnológica ha impactado profundamente los mercados financieros, convirtiendo a las empresas tecnológicas en protagonistas clave de la economía mundial. Compañías líderes en IA, así como aquellas centradas en robótica, cloud computing y análisis de datos han visto como la cotización de sus acciones se ha disparado, convirtiéndose en el motor del crecimiento de algunos de los índices más importantes del mundo. Según un artículo publicado por el *New York Times* a principios de 2024, las empresas tecnológicas conocidas como las “Magnificent Seven”, entre las que se encuentran Google, Meta o Nvidia, acumularon más del 90% del beneficio del índice *Standard & Poor's 500* durante 2023 (Russell & Rennison, 2024). Este gran auge que vemos en la Figura 1 es en parte el resultado de la creciente demanda de soluciones innovadoras y de las grandes expectativas que existen en estas tecnologías para poder resolver desafíos como la sostenibilidad ambiental o la automatización.

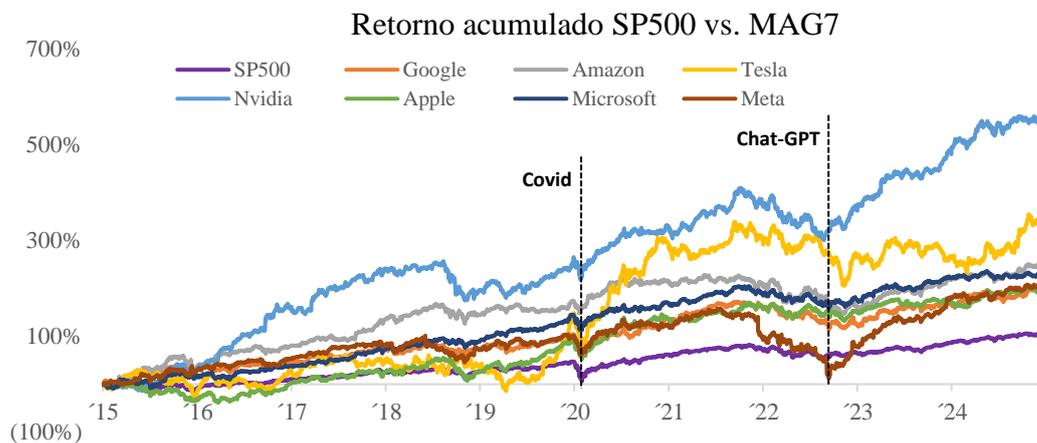


Figura 1: Peso por capitalización. Fuente: Factset

Sin embargo, este rápido crecimiento ha generado preocupaciones sobre la posibilidad de una burbuja especulativa. El alto valor bursátil que estas empresas han alcanzado

impulsadas por las altas expectativas plantea importantes riesgos si no logran cumplir con los ambiciosos objetivos de avance y desarrollo que prometen a los inversores (Shanbhogue, 2024). Una fuerte corrección en la cotización de estas empresas tecnológicas podría tener un efecto dominó arrastrando a sectores interconectados teniendo importantes consecuencias a nivel global.

3.3 Metodología

Este trabajo se centra en evaluar la eficiencia del mercado de empresas vinculadas a la IA y la robótica, utilizando el índice NQROBO como referencia. Este índice es una buena aproximación del comportamiento de las compañías que compiten en estos sectores, las cuales se clasificarán según su enfoque en robótica, IA o una combinación de ambas. Además, este análisis tomará como punto de referencia el inicio de la pandemia, generando así seis conjuntos de datos distintos que nos permitirá estudiar como la pandemia pudo haber alterado el comportamiento de estos mercados.

La metodología utilizada para analizar la eficiencia de estos mercados es el *Multifractal Detrended Fluctuation Analysis* (MF-DFA). Esta técnica se aplicará a los retornos logarítmicos diarios calculados para cada uno de los seis conjuntos de datos. Utilizando Python y la librería MF DFA, se obtendrán diversas métricas que permitirán analizar con mayor precisión el comportamiento multifractal de los datos y realizar comparaciones tanto longitudinales como transversales.

En este análisis, se estudiará la evolución temporal de la eficiencia del mercado, comparando los resultados obtenidos antes y después del evento de referencia, la pandemia. La segmentación por categorías nos permitirá conocer diferencias en el comportamiento de estas compañías. Además, se compararán los resultados con una serie resultante de promediar mil series de ruido gaussiano, que representará la eficiencia al ser generada con un coeficiente de Hurst (H) de 0,5, y se aplicará una técnica de shuffling a los datos para determinar si la fractalidad observada se debe a la autocorrelación entre los retornos o a la presencia de colas gruesas en su distribución. Finalmente, se analizarán los resultados para extraer conclusiones sobre la eficiencia del mercado en esta industria, alineando los mismos con las teorías de eficiencia de mercado y de multifractalidad.

3.4 Estructura del trabajo

El presente documento está dividido en diez secciones a través de las cuales se aborda el análisis multifractal para conocer la eficiencia del índice bursátil NQROBO. A continuación, se resume de manera breve los tres grandes apartados en los que se puede dividir el estudio.

La primera parte del trabajo abarca la contextualización, presentando el marco teórico y los fundamentos del estudio. Comienza con la **Introducción** en la que se detallan los **Objetivos** y la **Metodología** a emplear y continua con la descripción del **Nasdaq CTA Artificial Intelligence & Robotics (NQROBO)** y la naturaleza de las empresas que lo constituyen.

La segunda parte se centra en el enfoque metodológico empleado. Se realiza una introducción breve de la **Hipótesis del mercado eficiente** de Fama, que servirá como marco teórico fundamental y se explica de manera más detallada la técnica **Multifractal Detrended Fluctuation Analysis (MF-DFA)**, la cual se empleará para analizar la eficiencia de nuestro mercado a estudiar.

Por último, la tercera parte comprende los **Resultados del análisis** obtenidos tras el análisis, la discusión de estos y las conclusiones extraídas de ellos. Para este apartado se hace uso de gráficos y tablas que permiten sintetizar la información y presentarla de manera visual.

Finalmente, la **Conclusión** aporta posibles líneas futuras de investigación y la implicación de los resultados.

4. Inteligencia Artificial y Robótica

La IA y la robótica han pasado a ser disciplinas propias y motores de una nueva era industrial (Jan et al., 2023). Ambas tecnologías se han visto impulsadas por avances tecnológicos, dándoles el potencial no solo para transformar la operativa de diversas industrias, sino también para redefinir nuestra vida cotidiana. Este progreso ha dado lugar a una nueva era caracterizada por la integración de la tecnología en casi todos los aspectos de nuestra vida y sociedad.

En el ámbito de la IA, tres de los principales catalizadores de esta transformación ha sido la adopción de las redes neuronales profundas o Deep Learning, el gran avance de los componentes o hardware como las unidades de procesamiento gráfico (GPUs) y las unidades de procesamiento tensorial (TPUs) y el auge del Big Data, dando acceso a una mayor cantidad de datos y capacidad de procesamiento. Esta tecnología ha permitido a los programas evolucionar más allá de los antiguos sistemas expertos, que operaban bajo reglas condicionales predefinidas. En lugar de limitarse a ejecutar instrucciones previamente programadas, los nuevos modelos de IA son capaces de aprender de los datos, identificar patrones y mejorar su rendimiento con el tiempo (Deng, 2018). Estos avances han sido un elemento clave en la historia de esta tecnología y han permitido a la IA alcanzar importantes hitos como la visión por computador, la creación de LLMs para el procesamiento o generación de lenguaje natural o la conducción automática (Haenlein & Kaplan, 2019). Al igual que la IA, la robótica ha pasado por diversas etapas. En su fase inicial, los robots estaban controlados por programas simples diseñados para ejecutar tareas específicas bajo instrucciones previamente definidas. Más tarde, la segunda generación introdujo robots agentes, equipados con sensores y actuadores capaces de captar información de su entorno, como el tacto, la luz o el sonido, permitiéndoles ajustar su operación en función de las condiciones externas. Actualmente, la robótica ha avanzado hacia una tercera generación centrada en los robots inteligentes que están dotados de sensores de alta precisión y capacidades similares a las humanas. Estos robots no solo procesan y analizan datos complejos, sino que también son capaces de tomar decisiones por cuenta propia, adaptarse a cambios en su entorno y realizar tareas humanas de gran complejidad (Zhang & Lu, 2021).



Ilustración 1: Robot Pepper Fuente:

<https://www.digitalavmagazine.com/wp-content/uploads/2016/07/Pepper-Robot-Costa-Diadema3.jpg>

La robótica se centra en conectar la percepción del entorno con la ejecución de acciones, pero para que los robots puedan desempeñar tareas complejas requieren que esa conexión y ejecución sea “inteligente” (Brady, 1985). La IA, el Machine Learning y el Deep Learning son elementos claves en esta nueva fase de la robótica avanzada.

La IA es la ciencia e ingeniería centrada en crear sistemas inteligentes, en especial programas informáticos inteligentes (Turing, 1950). Estos programas son capaces de llevar a cabo tareas complejas que hasta ahora solo podían hacer los seres humanos, como la toma de decisiones. Dentro de la IA, el Machine Learning se especializa en desarrollar algoritmos, que como se menciona anteriormente, pueden aprender de nueva información y estar en un estado de mejora constante. Por su parte, el Deep Learning es una rama del Machine Learning basada en redes neuronales profundas, incluyendo arquitecturas como las convolucionales y los Transformers. Estas posibilitan el procesamiento de datos para hallar patrones complejos, facilitando tareas como la clasificación de imágenes y el procesamiento de lenguaje natural. En definitiva, la combinación de estas tecnologías tiene la capacidad de transformar la robótica, creando robots más eficientes, autónomos e inteligentes (Soori et al., 2023).

A modo de ejemplo, la IA y la robótica se han consolidado como herramientas esenciales en el campo de la medicina. Su uso, en constante crecimiento y evolución, puede dividirse en dos áreas principales: la virtual, más centrada en el uso de la IA, y enfocada en optimizar la gestión y la toma de decisiones, y la física, donde destacan ambas tecnologías

mediante el uso de robots y dispositivos tecnológicos avanzados como apoyo en operaciones y servicios médicos (Hamet & Tremblay, 2017). Ejemplo de ello es el robot *Da Vinci* empleado para operaciones quirúrgicas de alta precisión.

Más allá de la medicina, la IA y la robótica también están transformando otras industrias, como la agricultura, la automoción o las finanzas. En el sector agrícola se están diseñando robots inteligentes para automatizar tareas como la cosecha, siembra o riego, no solo aumentando la productividad, sino también optimizando el uso de recursos como el agua. La IA los dota de algoritmos capaces de analizar las condiciones del suelo o de predecir las condiciones meteorológicas, permitiéndolos tomar decisiones como el momento óptimo de riego o para cosechar (Soori et al., 2023). En el sector de la automoción, los coches autónomos o inteligentes incorporan múltiples tecnologías impulsadas por la IA y robótica que dotan a estos coches de capacidades para percibir su entorno, identificar obstáculos y tomar decisiones en tiempo real sin necesidad de intervención humana, con el objetivo de mejorar la seguridad vial y la eficiencia del transporte, lo cual es fundamental por razones claras como el aumento de la población y el número de vehículos (Hussain & Zeadally, 2019). En la industria financiera, el uso de la IA es ya una práctica consolidada desde hace años. Empleándose en tareas como la detección de riesgos, la recomendación de inversiones, la concesión de préstamos o la elaboración de modelos predictivos del comportamiento del mercado. (Weber et al., 2024).

En definitiva, los robots se están convirtiendo en aliados fundamentales en la mayoría de los sectores, no solo para aumentar la productividad, sino también para mejorar la precisión, reducir errores y asumir tareas que antes eran imposibles de automatizar. Surge así el término “cobot”, definidos como robots colaborativos que destacan por su capacidad de interactuar de manera segura y eficiente con los humanos, adaptándose tanto a sus necesidades como a las del entorno (Javaid et al., 2021). Conscientes del enorme potencial de estas tecnologías, el apoyo institucional y político ha adquirido relevancia en los últimos años. Programas como “*Horizon Europe*¹” de la Unión Europea están diseñados para canalizar importantes recursos económicos hacia la investigación y el desarrollo de tecnologías innovadoras, como la IA y la robótica. Estos esfuerzos son símbolo del papel fundamental que se espera que estas tecnologías tengan en la economía global y en la competitividad internacional.

¹ https://research-and-innovation.ec.europa.eu/funding/funding-opportunities/funding-programmes-and-open-calls/horizon-europe_en

Sin embargo, no es únicamente el capital público el que se siente atraído por el potencial de estas herramientas. Las inversiones privadas han experimentado un aumento significativo en los últimos años demostrando que el avance en estos campos es un factor estratégico clave para la competitividad de Europa y su autonomía (European Commission, 2024). Según un informe de McKinsey & Company (2023) la IA podría aportar billones de dólares a la economía mundial. En su estudio, McKinsey cifra esta aportación en la horquilla entre los 2,6 y los 4,4 billones de dólares, centrándose en el aumento de la productividad de cuatro áreas: marketing, comunicación con clientes, investigación y el desarrollo de software.

A pesar de los innumerables beneficios que ofrecen estas tecnologías, el auge de la IA y la robótica plantea desafíos significativos en diversos ámbitos, especialmente en la ética y la economía. Uno de los riesgos más preocupantes y discutidos es su impacto en el empleo. Aunque la historia sugiere que las nuevas tecnologías tienden a generar más empleo del que eliminan, en este caso, las opiniones están divididas (Torresen, 2018).

Informes como el del World Economic Forum (2016) advierten que estas tecnologías podrían reducir significativamente el empleo en el corto plazo, especialmente en sectores basados en tareas mecánicas y rutinarias. Por otro lado, otros análisis refutan estas proyecciones argumentando que la automatización reducirá el empleo en algunas tareas pero creará nuevas oportunidades laborales y aumentará la demanda de habilidades más especializadas, contribuyendo a la evolución del mercado laboral (Acemoglu & Restrepo, 2016).

Otro de los riesgos unido al auge de estas tecnologías es el relacionado con la ética y el tratamiento de los datos. Los robots y los sistemas de IA deben ser capaces de tomar decisiones basadas en principios éticos, un enfoque conocido como *computer ethics*. Esto implica que incluso en la ejecución de tareas repetitivas, los sistemas deben ser capaces de discernir qué comportamientos son aceptables y cuáles no, alineándose con los valores humanos y la ley (Torresen, 2018). Un claro ejemplo de ello son los coches autónomos, que deben ser capaces de tomar decisiones en escenarios complicados como una situación de accidente inminente en la que deban elegir entre distintas acciones que afectan a la seguridad de los ocupantes y de los peatones. Estas decisiones no solo requieren capacidad de análisis técnico, sino también una programación ética que refleje los valores sociales. Además, toda la información captada por estos sistemas debería ser tratada

manteniendo la privacidad de los usuarios y la seguridad de los datos (Müller, 2023). Esto requiere no solo la implementación de medidas avanzadas de encriptación, sino también el diseño de leyes claras para garantizar que el uso de los datos sea transparente, limitado a los fines previstos y protegido frente a accesos no autorizados, como es el caso del Reglamento General de Protección de Datos (RPGD¹) en Europa. Este reglamento europeo incorpora derechos como el no ser objeto de decisiones basadas únicamente en un tratamiento automatizado. Es decir, salvo excepciones, las empresas deben informar al interesado de que la decisión ha sido automatizada y este tiene derecho a impugnarla y a que dicha decisión sea revisada por una persona.

Finalmente, uno de los riesgos más destacados y el tema central de este trabajo, es la posible existencia de una burbuja en la cotización de las empresas tecnológicas enfocadas en la IA y la robótica. A lo largo de las últimas décadas, hemos sido testigos de notables auges y caídas en el sector tecnológico, periodos comúnmente denominados “*tech bubbles*” o burbujas tecnológicas, que han tenido un impacto significativo en la política, la economía global y la riqueza individual. Un ejemplo emblemático fue la crisis de las *dot-com* en la década de 1990, donde el NASDAQ multiplicó su valor en cinco veces en tan solo cinco años, antes de corregir dramáticamente en el año 2000, llevando a la quiebra a numerosas empresas y afectando a millones de inversores (Floridi, 2024).

Estas burbujas bursátiles se definen como un aumento rápido, continuado e incoherente en la cotización de las acciones tecnológicas. Surgen en periodos de especulación y grandes expectativas que nublan la situación actual de estas empresas, creando una mayor diferencia entre su valor fundamental y de mercado. Floridi (2024) afirma que todas las burbujas presentan cuatro características fundamentales:

1. Crecimiento sostenido del precio de las acciones tecnológicas, con valoraciones muy superiores a las que ofrecen las métricas tradicionales como la ratio precio/beneficio.
2. Aumento notable de las salidas a bolsa y del número de rondas de financiación de las empresas de este sector, con la entrada de inversores no profesionales ante el miedo de perder esta “oportunidad en el mercado”.
3. Marcos regulatorios lentos y poco claros para supervisar a estas empresas.

¹ https://europa.eu/youreurope/business/dealing-with-customers/data-protection/data-protection-gdpr/index_es.htm

4. Explosión mediática e intereses creciente por las empresas del sector.

En el caso de la IA, su creciente popularidad durante la última década es evidente. En la *Figura 2* se observa esta evolución, representada a través del interés, medido por el número de búsquedas en Google. El gráfico utiliza un índice donde el número 100 representa el valor máximo, indicando que la IA ha alcanzado el pico de popularidad más alto registrado hasta la fecha.

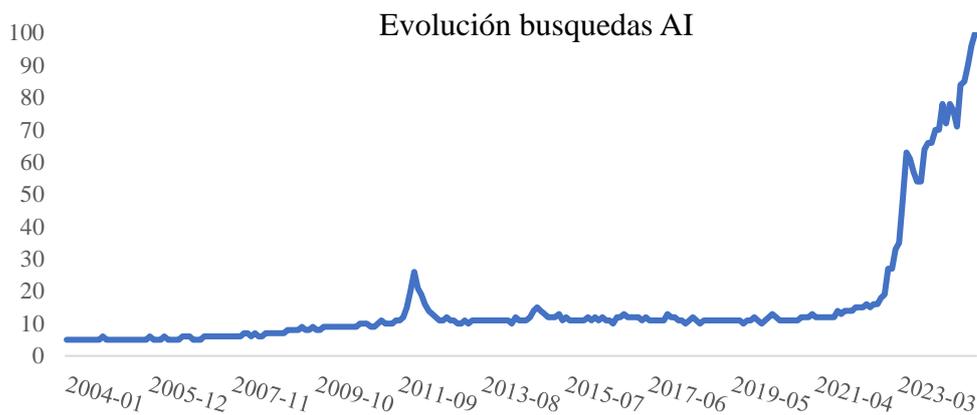


Figura 2: Popularidad IA. Fuente: Google Trends

Este gran interés ha llevado a que muchas compañías usen etiquetas y palabras relacionadas con estas tecnologías para aumentar su exposición y expectativas de crecimiento. Bancos de inversión y grandes consultoras motivan a inversores y empresas a “no dejar atrás esta oportunidad”, teniendo como resultado un importante aumento en la capitalización bursátil de estas compañías. Autores como Widder & Hicks (2024) ya anuncian un cambio en el panorama actual y las primeras opiniones e indicios de que estamos ante una burbuja, con expectativas que superan la realidad al menos en el futuro cercano.

5. Nasdaq CTA Artificial Intelligence & Robotics (NQROBO)

El primer paso para llevar a cabo un análisis de la eficiencia en la cotización de una serie de empresas es escoger un índice representativo de ellas. Para este estudio se emplea el índice NQROBO¹ que fue diseñado para replicar el comportamiento de empresas del sector de la IA y la robótica. Previo a formar parte del índice, se calcula una ratio de intensidad para cada una de las empresas consideradas potenciales, esta ratio mide su nivel de actividad en los dos sectores. Posteriormente, se clasifican en tres categorías: *Enablers*, *Engagers* y *Enhancers*, dependiendo de su rol y contribución dentro del ecosistema de la IA y la robótica. Una vez categorizadas y evaluadas, se seleccionan aproximadamente las 30 empresas con la mejor ratio dentro de cada categoría, conformando en este caso un índice compuesto por 108 empresas (Nasdaq, 2024)

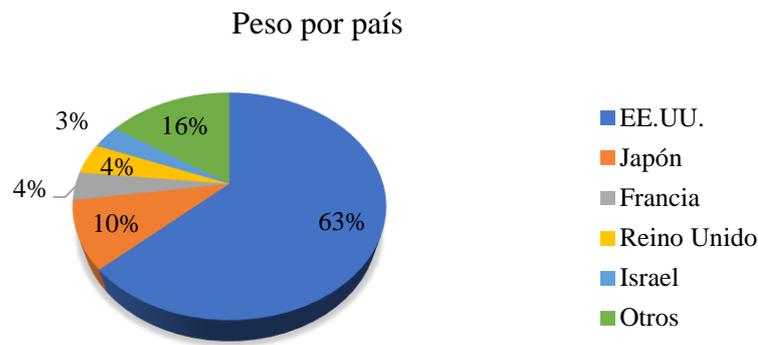


Figura 3: Peso por país. Fuente: https://indexes.nasdaqomx.com/docs/NOROBO_Research2024.pdf

Como se observa en la *Figura 3*, alrededor de tres quintas partes de las empresas incluidas en este índice cotizan en Estados Unidos. Por esta razón, este estudio utiliza la cotización de todas las acciones en dólares, convirtiendo los valores desde las bolsas de origen con el tipo de cambio diario para estandarizar los precios en una única moneda. Japón también muestra un alto porcentaje cercano al 10% lo que refleja su inversión e interés por desarrollar empresas en estos sectores estratégicos. En cuanto al tamaño bursátil, vemos en la *Figura 4* que el peso de las empresas con un valor superior a los 20 mil millones de dólares estadounidenses representa el 44,5%, un dato, que según los informes de Nasdaq (2024), se ha duplicado en los dos últimos años. Por último, las empresas de mediana capitalización con valores de entre 2 mil millones y 10 mil millones de dólares constituyen el 36,2% del índice, mientras que las empresas de pequeña capitalización con

¹ <https://indexes.nasdaq.com/Index/Overview/NQROBO>

un valor inferior a 2 mil millones de dólares comprenden una sexta parte del peso total del índice.

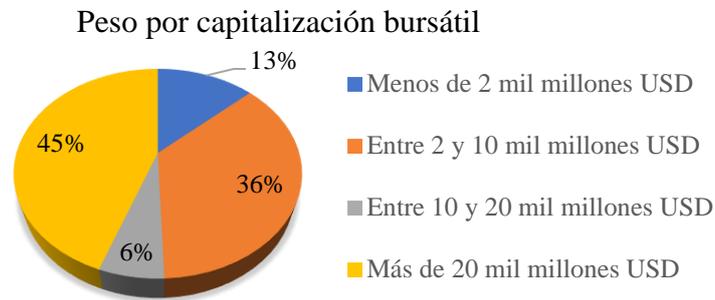


Figura 4: Peso por capitalización. Fuente: https://indexes.nasdaqomx.com/docs/NOROBO_Research2024.pdf

En la Figura 5 se muestran los principales subsectores representados en el índice y el porcentaje de empresas enfocadas en IA, robótica o una combinación de ambas.

Tecnología o Sector
Impresión 3D y Fabricación Aditiva
Sistemas Avanzados de Asistencia al Conductor (ADAS) y Software y Sistemas de Conducción Autónoma
Inteligencia Artificial (IA) y Aprendizaje Automático (ML)
Logística Automatizada y Cumplimiento; Visión por Computadora y de Máquinas
Internet of Things (IoT)
Robótica para el sector Comercial, Industrial y Médico
Procesamiento del Lenguaje Natural (NLP) y Modelos de Lenguaje Extensos (LLM)
Automatización de Procesos Robóticos (RPA) y Software Low/No Code
Semiconductores
Software de Simulación
Vehículos No Tripulados

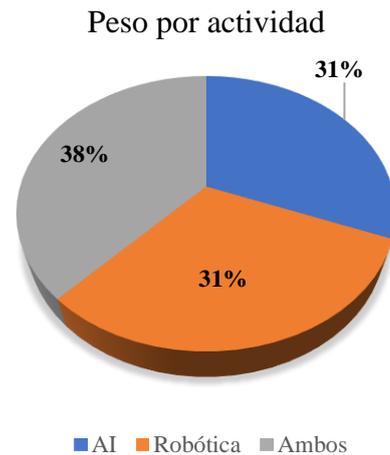


Figura 5: Subsectores y pesos por actividad. Fuente: <https://indexes.nasdaqomx.com/docs/NOROBO%20Thematic%20Revenue%20Overview%20%E2%80%93%20April%202024.pdf>

En la Figura 6 se observa la evolución del índice NQROBO desde diciembre de 2017. Es importante destacar el gran crecimiento que tuvo desde el inicio de la pandemia del COVID-19, un periodo que marcó un punto de inflexión para las empresas de IA y robótica. Este auge se atribuye al aumento en la demanda de estas tecnologías, el

lanzamiento de productos innovadores como ChatGPT y a las ayudas desde la política monetaria. Sin embargo, esta tendencia ha generado inquietud sobre la posible existencia de una burbuja en la valoración de estas empresas, dado el rápido incremento de sus precios y la alta especulación en torno a su potencial futuro. Este comportamiento plantea interrogantes sobre la sostenibilidad de estos niveles de valoración en el largo plazo.

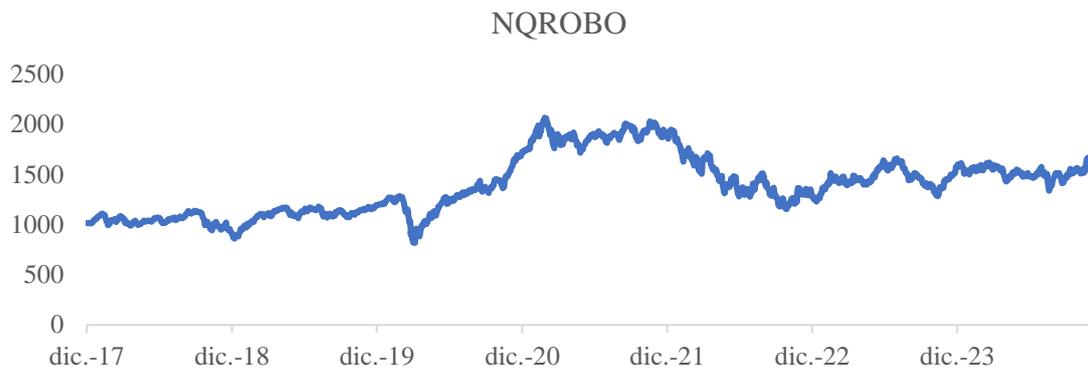


Figura 6: Evolución índice NQROBO. Fuente: <https://indexes.nasdaqomx.com/index/History/NQROBO>

6. Hipótesis del mercado eficiente

En 1970, Eugene Fama publica un importante artículo en el que profundiza en los fundamentos de la Hipótesis del Mercado Eficiente (HME), proporcionando un marco teórico y empírico para explicar los movimientos de los precios en los mercados financieros (Fama, 1970). Su trabajo es la continuación de estudios que se remontan al siglo XVI, cuando el matemático italiano Girolamo Cardano planteó el principio de igualdad en los juegos de azar y las apuestas. A lo largo del tiempo, estas ideas evolucionaron gracias a contribuciones fundamentales como las de Louis Bachelier, quien introdujo el famoso concepto de *random walk* en el análisis financiero, y Milton Friedman, cuyos trabajos sobre las oportunidades de arbitraje sentaron las bases para formar esta nueva hipótesis (Bachelier, 1900; Bellhouse, 2005; Friedman, 1953)

La HME sostiene que un mercado es eficiente cuando el precio de los activos financieros refleja de manera completa e inmediata la información disponible y no existen costes de transacción. Para ello, la hipótesis se basa en tres premisas: la actuación racional de los inversores ante la nueva información, la compensación aleatoria de las decisiones irracionales y la ausencia de oportunidades libre de riesgo, conocidas como oportunidades de arbitraje. Simplemente con que una de ellas se cumpla podríamos, según esta hipótesis, hablar de un mercado eficiente, el cual sería imposible de batir de manera consistente.

En su artículo, Fama describe tres niveles de eficiencia: débil, semifuerte y fuerte. La eficiencia débil sostiene que los precios de los activos reflejan la información histórica, descartando la posibilidad de usar el análisis técnico, que se basa en emplear datos pasados para predecir movimientos futuros y obtener retornos anormales. La eficiencia semifuerte amplía este concepto, afirmando que los precios no solo incorporan la información pasada sino también la pública actual, lo que invalida estrategias de análisis fundamental orientadas a identificar valores infravalorados para obtener rendimientos superiores. Por último, la eficiencia fuerte afirma que los precios reflejan incluso la información no pública o privilegiada, impidiendo a los inversores con acceso a esa información obtener retornos superiores al mercado (Fama, 1970). Uno de los pilares fundamentales de la hipótesis es el concepto de *random walk*, que sostiene que los retornos diarios de los activos financieros siguen un comportamiento estocástico, es decir, aleatorio, donde los resultados del día anterior no influyen en los del día actual. Esto

implica que, dado que la información no puede predecirse y, al momento de surgir, está disponible para todos de manera simultánea, tanto un inversor principiante como uno experto obtendrán rendimientos similares, siempre que actúen de forma racional y diversifiquen sus inversiones. Por otro lado, el hecho de que algunos inversores o fondos logren superar al mercado en momentos específicos no invalida la hipótesis. Según la HME, estos resultados son parte de la variabilidad inherente de los mercados ya que mientras algunos inversores obtendrán altos retornos, otros experimentarán rendimientos por debajo del promedio. Sin embargo, Fama refutó las ideas iniciales propuestas por Bachelier o Markowitz, que asumían un comportamiento normal de los retornos financieros (Bachelier, 1900; Markowitz, 1952). A través de su estudio, Fama demostró que los retornos presentan colas gruesas, es decir, una mayor frecuencia de eventos extremos que lo establecido en una distribución normal, y que estos son explicados mejor mediante el uso de distribuciones estables no normales, como la distribución t de Student con varianza infinita. (Fama, 1970; Guerrien & Gun, 2011; Malkiel, 2003, 2005; Szegö, 2002; Timmermann & Granger, 2004)

La hipótesis presentada por Fama fue ampliamente aceptada tras su publicación, convirtiéndose en una teoría fundamental en el mundo financiero. A pesar de ello, es cuestionada por presentar limitaciones. El propio Fama, 20 años más tarde de su publicación original, destaca una de ellas: el problema de la hipótesis conjunta (Fama, 1991). Para conocer si un mercado actúa de manera eficiente, debemos ser primero capaces de predecir cómo el precio se comportaría bajo una hipótesis de eficiencia. Para ello, hemos de utilizar modelos de valoración que permitan identificar cómo debería ajustarse el precio ante diferentes tipos de información. Sin embargo, esta aproximación depende de la validez y precisión del modelo empleado, introduciendo una ambigüedad fundamental: cuando los resultados empíricos no coinciden con las predicciones, no podemos determinar si esto se debe a una ineficiencia del mercado o a fallos en el propio modelo de valoración (Liu et al., 2022). Diversos autores han presentado otra serie de limitaciones como la presencia de asimetrías o curtosis en la distribución de los retornos (Jondeau & Rockinger, 2003), la racionalidad de los inversores (Hirshleifer, 2015), la existencia de momentum o persistencia (L. K. C. Chan et al., 1996), errores en incorporar la nueva información al precio de los activos (K. C. Chan et al., 1997), la existencia de información privilegiada (Jaffe, 1974) o la duda de que los activos sigan el comportamiento de un *random walk* (B. Mandelbrot, 1963; Cortés & Corzo, 2009).

Ante esta serie de limitaciones surgen otras hipótesis o propuestas para comprender el comportamiento de los mercados y su eficiencia. Edgar Peters realiza una crítica a la HME señalando que esta hipótesis prioriza la conveniencia matemática y simplifica la realidad de los mercados. En su libro argumenta que es necesaria una hipótesis de mercado que no solo se ajuste a los hechos observados, sino que también considere el propósito fundamental de los mercados y las dinámicas complejas que los caracterizan. Para ello, propone la hipótesis del mercado fractal (HMF) basada en los estudios previos de Benoit Mandelbrot sobre los mercados y su interpretación (G. Liu et al., 2022; Peters, 1994; Weron & Weron, 2000). Mandelbrot (1963) introdujo el modelo fractal para describir objetos con un comportamiento complejo. Este modelo, aplicado al ámbito financiero, consiste en descomponer la serie temporal de los retornos en distintas escalas, analizar su comportamiento y comparar los resultados. Peters (1994) adopta este enfoque para estudiar los mercados financieros, considerados como sistemas fractales o autosimilares, utilizando la teoría del caos para capturar su naturaleza discontinua, anómala y no periódica. Las estructuras autosimilares son aquellas en la que el conjunto es similar o casi idéntico a una parte del mismo, por ello presenta las mismas propiedades estadísticas independientemente de la escala empleada para la observación (Katz, 1999; Oprean-Stan et al., 2025; Weron & Weron, 2000). A diferencia de la HME, la HMF no se centra en la eficiencia de los mercados, sino en su estabilidad y liquidez. Peters resalta que, si todos los inversores reaccionaran de la misma manera ante nueva información, como asume la HME, no habría liquidez en los mercados. Sin embargo, los inversores tienen horizontes de inversión y objetivos diferentes, lo que genera respuestas diversas ante la misma información. En ausencia de liquidez, los inversores estarían dispuestos a aceptar cualquier precio incluso si este no fuera el adecuado según un mercado eficiente (Peters, 1994)

Tabla 1: Comparación HME Y HMF Fuente: G. Liu et al (2022)

Aspecto	HME (Fama, 1965, 1970)	HMF (Peters, 1991, 1994)
Fundamentos y hipótesis	Equilibrio de mercado, sin fricciones, competencia perfecta, información suficiente, incremento de precio continuo y moderado	Desequilibrio de mercado, incrementos de precio discontinuos y violentos, estabilidad del mercado determinada por la liquidez
Características de los inversores	Racionalidad perfecta, expectativas homogéneas, periodos de inversión idénticos	Racionalidad limitada, expectativas heterogéneas, periodos de Inversión no idénticos
Características del mercado	Linealidad, normalidad, independencia	No linealidad, autosimilitud, dependencia a largo plazo, apertura
Clasificación del mercado	Eficiencia débil, eficiencia semifuerte, eficiencia fuerte	Monofractal, multifractal
Funciones de distribución	Movimiento browniano del precio, distribución gaussiana	Movimiento browniano fractal del precio
Previsibilidad	Imprevisibilidad del precio y del riesgo	Previsibilidad (precio a corto plazo, riesgo a largo plazo)
Dimensión	Dimensión topológica (entera)	Dimensión fractal (fracción)
Métodos de prueba	Prueba de secuencias y reversiones, prueba de correlación, prueba de razón de varianza, etc.	Análisis R/S, análisis de espectro, función de escalado, exponentes locales de Hölder, etc.
Logros	Modern Portfolio Theory (MPT)	Fractal Portfolio Theory
Conexiones	La HME es un caso especial de la HMF, mientras que la HMF amplía el significado de la HME; ambas comparten uniformidad inherente	

En su formulación de la HMF, Peters (1991, 1994) asumió que los mercados estaban sujetos a movimiento brownianos fractales, permitiendo analizar su estructura mediante el coeficiente de Hurst (H). Este coeficiente, obtenido mediante el análisis de rango reescalado, fue presentado por Mandelbrot (1970) y mide la memoria o autocorrelación en series temporales de retornos de tal manera que según su valor podemos extraer las siguientes conclusiones de la serie temporal:

- Si $H = 0,5$, entonces los retornos siguen un movimiento browniano clásico con retornos aleatorios y no relacionados.
- Si $0 < H < 0,5$, indica anti-persistencia y reversión a la media, mostrando autocorrelación negativa.
- Si $0,5 < H < 1$, muestra memoria a largo plazo y persistencia (efecto momentum).

Los casos de persistencia y anti-persistencia siguen un movimiento browniano fractal que permite capturar dinámicas más complejas y realistas de los mercados financieros. La HMF se subdivide a su vez en la técnica monofractal y la multifractal, dependiendo de la complejidad de la serie y la existencia de un único coeficiente de Hurst o una serie de ellos para caracterizarla (G. Liu et al., 2022). En nuestro caso emplearemos un análisis multifractal para conocer el comportamiento del índice NQROBO.

7. Multifractal Detrended Fluctuation Analysis (MF-DFA)

La HMF abarca tanto métodos monofractales como multifractales, cada uno adaptado a diferentes niveles de complejidad en el análisis de series temporales. El método monofractal, que puede considerarse un caso particular del enfoque multifractal, se basa en una distribución normal y un único exponente de Hurst (H), lo que limita su capacidad para analizar sistemas con estructuras complejas (Thompson & Wilson, 2016). Por otro lado, el enfoque multifractal, propuesto por Kantelhardt et al. (2002), generaliza el método monofractal para abordar series temporales cuyo comportamiento no puede ser caracterizado por un único exponente de Hurst (H). Estas series presentan una variabilidad significativa en los exponentes de escalado, reflejando dinámicas diferentes a diversas escalas temporales o correlación entre fluctuaciones de pequeñas y grandes escalas.

El análisis multifractal se ha convertido en una herramienta versátil con aplicaciones en diversos campos. En la medicina, se utiliza para estudiar patrones en la frecuencia cardíaca, la presión arterial, y realizar estudios pulmonares (Ihlen, 2012; Ivanov et al., 1999; Pavlov et al., 2020). También se aplica en la fisiología, meteorología o economía para realizar estudios sobre pacientes con Parkinson, la variabilidad de la temperatura o el precio del oro (Gómez-Gómez et al., 2021; Madanchi et al., 2020; Wang et al., 2011). En el estudio de los mercados financieros el modelo multifractal es la evolución de aportaciones previas como las Bachelier o Mandelbrot y sus trabajos sobre los movimientos brownianos en los mercados (Bachelier, 1900; B. B. Mandelbrot, 1963). La técnica *Multifractal Detrended Fluctuations Analysis (MF-DFA)* permite demostrar la existencia de comportamiento multifractal en los mercados, lo que ha suscitado gran interés por este modelo y la econofísica (Di Matteo, 2007).

La técnica MF-DFA permite evaluar el comportamiento multifractal de series temporales no estacionarias. Para ello calcula las fluctuaciones de las variaciones en diferentes escalas, previamente habiendo ajustado un polinomio para eliminar tendencias locales. Una vez calculadas estas variaciones se calcula la relación entre ellas mediante un espectro de coeficientes de Hurst (H) (Ihlen, 2012; Thompson & Wilson, 2016).

Kantelhardt et al., (2002) definen los siguientes pasos para realizar el análisis MF-DFA, siendo los tres primeros comunes con el análisis monofractal.

Paso 1: Asegurar que el conjunto de datos empleado de longitud N es un conjunto de datos agregado. Si tenemos los retornos diarios, cuya naturaleza es desagregada, debemos convertirlos y obtener el perfil sin tendencia de la serie usando la siguiente formula:

$$Y_i = \sum_{k=1}^i (X_k - \mu_X), \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, N \quad [1]$$

donde $\mu_X = \left(\frac{1}{N}\right) \sum_{k=1}^N (X_k)$

Paso 2: Dividir los datos en segmentos sin solapar de longitud s , creando $N_s = \text{int}(N/s)$ segmentos. Si N no es divisible exactamente por s , para evitar la pérdida de datos se debe repetir el proceso empezando por el otro extremo de los datos, en este caso, existirán $2N_s$ segmentos (para más información ver Kantelhardt et al., 2002)

Paso 3: Para cada segmento v ($v=1, \dots, 2N_s$) ajustar un polinomio de grado m y obtener la tendencia local mediante un ajuste por mínimos cuadrados. Dado que la eliminación de la tendencia se realiza restando el ajuste polinómico, diferentes ordenes diferirán en su capacidad para eliminar las tendencias de los datos. En el caso de $m=1$ se trataría de un ajuste lineal. Comparar los resultados nos permite estimar la tendencia presente en los datos.

$$F^2(v, s) = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s [Y_{(v-1)s+i} - y_{(v-1)s+i}]^2 \quad [2]$$

donde $y_{(v-1)s+i}$ es el polinomio ajustado para el segmento $Y_{(v-1)s+i}$ mediante mínimos cuadrados.

Paso 4: $F(v, s)$ es la función de la varianza para cada segmento v de longitud s escogida anteriormente. Obtener la función de fluctuación $F_q(s)$ calculando el promedio de las varianzas de los $2N_s$ segmentos. Se realiza para distintos valores de q , siendo $q=2$ el valor estándar del análisis DFA monofractal.

$$F_q(s) = \left(\frac{1}{2N_s} \sum_{v=1}^{2N_s} [F^2(v, s)]^{q/2} \right)^{1/q} \quad \text{para } q \neq 0 \quad [3]$$

$$F_q(s) = \exp \left(\frac{1}{4N_s} \sum_{v=1}^{2N_s} \ln(F^2(v, s)) \right) \quad \text{para } q = 0 \quad [4]$$

Esta función de fluctuación $F_q(s)$ depende de dos parámetros: el tamaño del segmento s y el valor de q . El objetivo es conocer como la función $F_q(s)$ se comporta para distintos valores de estos parámetros, por lo que tendremos que repetir del paso 2 al 4 para distintos valores de s .

Dependiendo del valor que tome el parámetro q , se podrá analizar con mayor detalle las fluctuaciones grandes o pequeñas dentro del segmento. Los valores negativos de q asignan mayor peso a los segmentos con fluctuaciones pequeñas, mientras que los valores positivos enfatizan las fluctuaciones grandes (Ihlen, 2012).

Paso 5: Tras repetir el proceso para distintos valores de s , se puede observar el comportamiento de escalado de la función de fluctuación $F_q(s)$ mediante el análisis de gráficos log-log de $F_q(s)$ frente a s para cada valor de q . Este proceso permite observar como las fluctuaciones evolucionan a distintas escalas. El escalado de la función obedece una ley de potencias con un exponente $h(q)$.

$$F_q(s) \sim s^{h(q)} \quad [5]$$

donde $h(q)$ es el exponente de Hurst generalizado o exponente de autosimilitud, este coeficiente se obtiene calculando la pendiente de la curva $F_q(s)$ en los gráficos log-log. En el caso de datos multifractales existirán diferentes $h(q)$ en función del valor de q , mientras que para datos monofractales $h(q)$ se mantendrá constante. De esta manera es posible definir el grado de multifractalidad como:

$$\Delta h = h(q_{min}) - h(q_{max}) \quad [6]$$

donde mayores valores de Δh indican una mayor fractalidad en la serie (Zunino et al., 2008).

Si los datos son multifractales, la dependencia de q se puede conocer mediante el exponente de escalado multifractal $\tau(q)$, definido como:

$$\tau(q) = qh(q) - 1 \quad [7]$$

Aplicando la transformación de Legendre se puede obtener la intensidad de singularidad α o el exponente de Hölder:

$$\alpha = \tau(q)' = h(q) + qh'(q) \quad [8]$$

a partir de la cual se obtiene el espectro de singularidad $D(\alpha)$:

$$D(\alpha) = q\alpha - \tau(q) \quad [9]$$

El espectro de singularidad $D(\alpha)$ presenta una forma de parábola invertida con un máximo en $D(\alpha) = 1$ cuando $q = 0$, punto conocido como la dimensión fractal. Cuando

este pico del espectro (*Peak α*) se encuentra en $\alpha = 0,5$ indica que es un mercado eficiente, o cercano a ello, en el que las fluctuaciones dominantes siguen una dinámica aleatoria (Morales Martínez et al., 2021; Thompson & Wilson, 2016). La amplitud del espectro indica la fuerza de multifractalidad en la serie y presenta una relación inversa con la eficiencia de mercado, a mayor amplitud mayor ineficiencia (Domino, 2011).

En un mercado eficiente, las fluctuaciones deberían seguir el comportamiento de un *random walk*, lo que implica que valores $h(q)$ para distintos q deberían ser 0,5 o muy cercano a ello. Sin embargo, en series con propiedades multifractales, la dependencia de $h(q)$ sobre q muestra la existencia de distintas dinámicas en las pequeñas y grandes fluctuaciones. Para cuantificar la desviación respecto a la eficiencia, Wang et al. (2009) definen la siguiente métrica, *Market Deficiency Metric* (MDM):

$$MDM = \frac{|h(q_{min}) - 0,5| + |h(q_{max}) - 0,5|}{2} \quad [10]$$

en nuestro caso consideraremos los valores $h(q)$ en $q = -5$ y $q = 5$, que capturan las fluctuaciones pequeñas y grandes respectivamente. Cuanto más se acerque esta métrica a 0 más eficiente es la serie, mientras que valores muy elevados muestran propiedades multifractales.

Para el análisis MF-DFA del índice NQROBO se utilizará un script en Python junto con la librería MF-DFA desarrollada por Rydin Gorjão et al. (2022). El proceso comenzará con una limpieza exhaustiva de los datos, asegurando su calidad y consistencia. A continuación, se realizará un análisis preliminar mediante el uso de visualizaciones gráficas y el cálculo de métricas financieras. Posteriormente, se calcularán los retornos logarítmicos diarios de las distintas empresas que componen el índice, clasificándolas según su actividad y dividiendo el conjunto de datos en dos periodos, utilizando el inicio de la pandemia como punto de corte.

Finalmente, se llevará a cabo el análisis MF-DFA para comparar los resultados tanto de forma transversal como longitudinal. Para este propósito, se empleará la función *get_mfdfa*, que facilita la obtención del coeficiente de Hurst (H), así como de otras métricas multifractales relevantes. Con el objetivo de evaluar la eficiencia del mercado,

se generará ruido gaussiano fraccional (fGn) con $H=0,5$ como referencia. Este ruido es una generalización del ruido blanco que incorporara la dependencia temporal de los datos en función del coeficiente de Hurst que se emplee para su generación. En nuestro caso al emplear un coeficiente $H=0,5$ representa un mercado eficiente, ya que no existe memoria a largo plazo y los retornos son aleatorios. Si el coeficiente de Hurst obtenido a partir del análisis MF-DFA se desvía significativamente de 0,5, y por lo tanto de nuestro ruido Gaussiano, esto indicaría la presencia de persistencia o anti-persistencia, lo que sugiere un comportamiento ineficiente del mercado.

Además, para conocer el origen de la multifractalidad, se aplicará un proceso de shuffling a las series temporales, en el cual los retornos se distribuirán aleatoriamente. Este procedimiento permite diferenciar entre dos posibles orígenes de la multifractalidad (Kantelhardt et al., 2002):

1. Memoria en la serie (dependencia a largo plazo): Si la multifractalidad desaparece después del shuffling, significa que su origen está en la estructura de autocorrelación dentro de la serie.
2. Colas gruesas en la distribución de probabilidad de los retornos: Si la multifractalidad persiste tras el shuffling, esto sugiere que su origen radica en la distribución de los valores extremos (colas gruesas) en lugar de en la memoria temporal.

De este modo, el uso combinado del ruido gaussiano fraccional como benchmark de eficiencia y la aplicación del shuffling permitirá una mejor comprensión de la dinámica del mercado y del papel que juegan la memoria y la distribución de retornos en la aparición de multifractalidad.

8. Resultados del análisis

En este apartado se presentan los resultados obtenidos de aplicar el análisis multifractal (MF-DFA) al índice bursátil NQROBO, enfocándose en como varían la amplitud del espectro multifractal y el comportamiento del coeficiente de Hurst generalizado (H). El estudio se centra en el impacto de la pandemia del COVID-19, tomando como fecha de referencia el 11 de marzo de 2020, para identificar posibles cambios en la dinámica del índice antes y después de este hito. Además, se comparan los resultados con un ruido gaussiano que se emplea como referencia para evaluar la eficiencia del mercado. Asimismo, se analizan y comparan las tres categorías principales del índice: empresas enfocadas exclusivamente en IA, en robótica y en ambas tecnologías, permitiendo evaluar las diferencias en la estructura multifractal y las dinámicas de mercado en estas categorías. Estos resultados se representan mediante gráficas que permiten comprender mejor la estructura multifractal del mercado y el posible cambio de comportamiento tras un evento de tan alto impacto como fue la pandemia. Pevio a este análisis multifractal se ha llevado a cabo un análisis descriptivo de los datos.

En la Figura 7 se puede observar la evolución del índice desde su inicio en diciembre de 2017 hasta finales del año 2024.



Figura 7: Evolución del índice NQROBO Fuente: NASDAQ

Durante los primeros años, el índice muestra un comportamiento relativamente estable con un crecimiento gradual reflejando del interés progresivo en los sectores analizados. No obstante, a partir de 2020 se evidencia una mayor volatilidad, coincidiendo con las primeras señales de alerta sobre la pandemia del COVID-19. Tras la declaración oficial de la pandemia en marzo de 2020, el índice experimenta una fuerte tendencia alcista y alcanzan un máximo histórico, impulsado por el creciente interés en la automatización y los avances tecnológicos en diversos sectores clave. Este pico, sin embargo, es seguido por una significativa corrección, que posiblemente se pueda atribuir a una sobrevaloración de las empresas y a los cambios macroeconómicos y tensiones globales. Posterior a esta corrección, en 2024 se observa una recuperación con una tendencia alcista sostenida que puede sugerir una estabilización del mercado y una disminución de la volatilidad observada en los años anteriores. Esta menor volatilidad queda evidenciada en los retornos logarítmicos diarios, como se muestra en la Figura 8, en el que podemos ver los retornos diarios para las tres clasificaciones de empresas distinguidas dentro del índice. Si observamos el año 2020, los retornos presentan un rango más amplio, tanto en valores positivos como negativos, lo que refleja un aumento significativo en la volatilidad del índice durante este periodo.

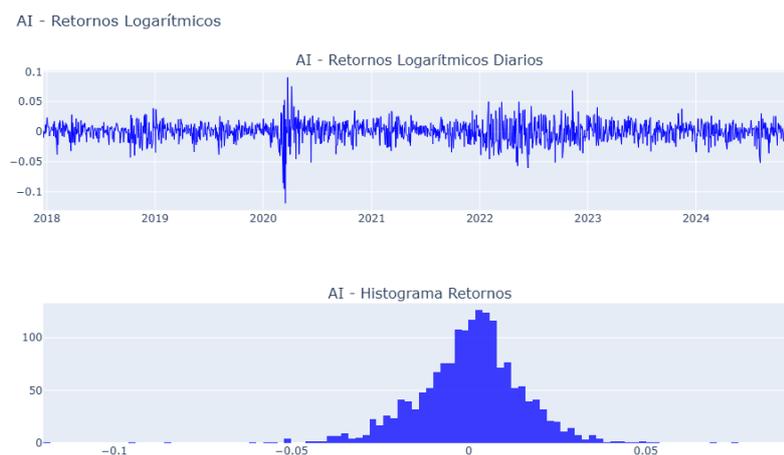




Figura 8: Retornos logarítmicos diarios e histograma categorías índice NQROBO Fuente: NASDAQ

En las Tablas 1, 2 y 3 se presentan las métricas financieras anuales obtenidas del análisis de las tres categorías del índice NQROBO. Este análisis permite observar la evolución de los retornos y la volatilidad a lo largo de los últimos siete años, pudiendo resaltar períodos de alta volatilidad como el año 2020, coincidiendo con el inicio de la pandemia de COVID-19. Comparando las tablas se puede ver como las empresas únicamente enfocadas en IA ofrecen los mejores valores de Sharpe ratio, pero también una mayor volatilidad asociada. Además, se puede apreciar la persistencia de valores extremos en las métricas de asimetría y curtosis, especialmente en los años más volátiles, lo que sugiere la existencia de comportamientos no normales en las distribuciones de los retornos durante esos años. El test de Jarque-Bera cuya hipótesis nula es la normalidad y su hipótesis alternativa la no normalidad, refuerza las observaciones anteriores al presentar p-valores bajos en los años previos a la pandemia. Esto permite rechazar la hipótesis nula y mostrar que los retornos en estos años no seguían una distribución normal. Para los años

posteriores a la pandemia, vemos p-valores más altos careciendo de evidencia para rechazar la hipótesis nula de normalidad en el comportamiento de los retornos.

Tabla 2: Métricas para la categoría IA

Categoría	Año	Retorno Anual (%)	Volatilidad Añualizada (%)	Ratio de Sharpe	Asimetría	Curtosis	Estadístico de Jarque-Bera	p-valor de Jarque-Bera
AI	2017	0,45%	9,74%	0,05	0,24	1,79	0,06	0,9710
AI	2018	-6,24%	20,14%	-0,31	-0,36	0,91	13,26	0,0010
AI	2019	31,73%	16,58%	1,91	-0,51	1,57	34,90	0,0000
AI	2020	43,36%	33,22%	1,31	-1,16	7,97	696,15	0,0000
AI	2021	19,62%	20,11%	0,98	-0,07	0,22	0,60	0,7410
AI	2022	-61,91%	33,88%	-1,83	0,21	0,10	1,84	0,3990
AI	2023	48,40%	20,44%	2,37	0,12	-0,14	0,88	0,6430
AI	2024	0,84%	21,00%	0,04	-0,54	0,95	18,76	0,0000

Tabla 3: Métricas para la categoría Ambas (IA y robótica)

Categoría	Año	Retorno Anual (%)	Volatilidad Añualizada (%)	Ratio de Sharpe	Asimetría	Curtosis	Estadístico de Jarque-Bera	p-valor de Jarque-Bera
Ambas	2017	0,02%	6,29%	0,00	-0,05	0,87	0,02	0,9880
Ambas	2018	-2,92%	20,32%	-0,14	-0,30	1,86	37,43	0,0000
Ambas	2019	34,48%	16,33%	2,11	-0,34	2,23	53,80	0,0000
Ambas	2020	46,73%	32,70%	1,43	-1,07	6,65	491,84	0,0000
Ambas	2021	6,74%	18,72%	0,36	-0,21	0,05	1,86	0,3940
Ambas	2022	-48,81%	33,06%	-1,48	0,24	0,06	2,37	0,3060
Ambas	2023	24,99%	20,24%	1,23	0,00	-0,17	0,37	0,8300
Ambas	2024	-2,75%	18,83%	-0,15	-0,55	0,32	12,26	0,0020

Tabla 4: Métricas para la categoría Robótica

Categoría	Año	Retorno Anual (%)	Volatilidad Añualizada (%)	Ratio de Sharpe	Asimetría	Curtosis	Estadístico de Jarque-Bera	p-valor de Jarque-Bera
Robótica	2017	0,32%	5,22%	0,06	-0,24	-0,47	0,31	0,8550
Robótica	2018	-16,08%	17,34%	-0,93	-0,16	1,27	16,52	0,0000
Robótica	2019	19,47%	15,79%	1,23	-0,35	1,41	24,52	0,0000
Robótica	2020	23,69%	29,81%	0,79	-0,41	6,98	496,97	0,0000
Robótica	2021	-0,60%	16,39%	-0,04	0,03	1,15	12,75	0,0020
Robótica	2022	-36,90%	24,22%	-1,52	0,30	0,37	5,00	0,0820
Robótica	2023	4,22%	19,00%	0,22	0,16	0,69	5,44	0,0660
Robótica	2024	-8,86%	19,11%	-0,46	-0,82	3,27	122,65	0,0000

Fuente: Elaboración propia

Con estas métricas, la Figura 9 muestra el rendimiento acumulado de una inversión mantenida desde 2018 en las distintas categorías del índice NQROBO, así como en su conjunto. El gráfico refleja cómo el inicio de la pandemia tuvo un impacto positivo en la cotización de las empresas del índice, siendo especialmente notable en el sector de la IA, que experimentó un crecimiento más acelerado, pero también una corrección posterior más pronunciada. Pese a su menor volatilidad, el sector de la robótica parece tener un rendimiento menor al promedio del índice.

Inversión simulada por categoría



Figura 9: Simulación inversión NQROBO Fuente: Elaboración propia

Tras el análisis descriptivo, se ha empleado Python y la librería MF-DFA de Rydin Gorjão et al. (2022) para llevar a cabo el análisis multifractal sobre los retornos logarítmicos diarios de las series temporales extraídas de los datos originales. El primer conjunto de gráficos que se muestra en la Figura 10 presenta los resultados obtenidos sobre el conjunto de datos originales previo al corte temporal. El gráfico de la izquierda muestra la evolución del Coeficiente de Hurst (H) para distintos niveles de q , lo cual permite extraer conclusiones sobre cómo escalan los segmentos con pequeñas y grandes fluctuaciones. Cuanto menores son los valores de q , mayor es el peso que toman los segmentos con fluctuaciones pequeñas. Para estos casos, se observan valores de $H(q)$ superiores a 0.5, lo que indica un comportamiento persistente y alejado de la eficiencia del mercado. A medida que aumenta el valor de q , el coeficiente $H(q)$ se vuelve más estable, acercándose al ruido gaussiano empleado como benchmark de eficiencia, simulando el comportamiento de un ruido browniano clásico o random walk (Ihlen, 2012).

Las distintas categorías presentan una riqueza multifractal distinta, lo que se refleja en la amplitud variable del espectro multifractal. La categoría AI presenta la mayor amplitud en su espectro multifractal, lo que significa que contiene una mayor variedad de comportamientos de escalado entre pequeñas y grandes fluctuaciones. Esto refleja que los retornos de las empresas enfocadas en IA muestran una dinámica de mercado más compleja y menos eficiente en comparación con las otras categorías analizadas. Por otro lado, el SP500, la categoría combinación de ambas y la robótica muestra un espectro menos amplio, indicando una menor variabilidad en el comportamiento de escalado y acercándose más al ruido gaussiano, mostrando un mayor grado de eficiencia

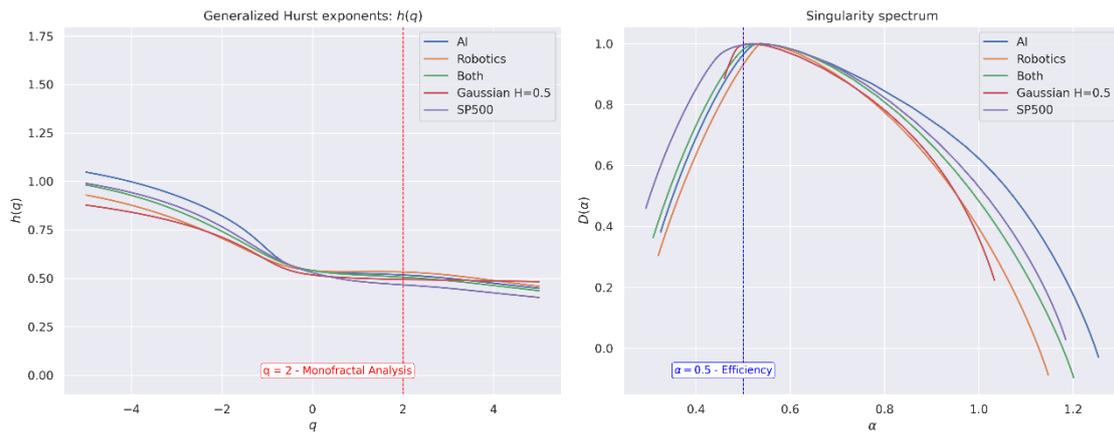


Figura 10: MF-DFA previo a corte temporal: Elaboración propia

Tras este análisis inicial, se ha realizado un corte longitudinal para estudiar el comportamiento de estos sectores previa y posteriormente al inicio de la pandemia, cuya fecha de inicio se ha asumido como el 11 de marzo de 2020. Este corte longitudinal permite identificar posibles cambios estructurales de los retornos y en las propiedades multifractales de las series temporales provocados por el impacto de la pandemia. Al dividir los datos en dos periodos se pueden contrastar los patrones de comportamiento antes y después de este evento, proporcionando información sobre la reacción y adaptación de los mercados financieros de estos sectores analizados frente a situaciones de alta incertidumbre. Este enfoque también permite explorar si el evento de la pandemia actuó como catalizador para reducir la complejidad de los retornos o si, por el contrario, incrementó las anomalías del mercado.

El conjunto de gráficos mostrados en la Figura 11 presenta el análisis multifractal de los retornos logarítmicos diarios para la categoría AI y el SP500, comparando los periodos antes y después del inicio de la pandemia. En el gráfico de la izquierda, se observa que antes de la pandemia los valores de $H(q)$, para ambas series, son notablemente más elevados para $q < 0$, lo que indica una mayor persistencia en las pequeñas fluctuaciones y una estructura de mercado menos eficiente. Tras el inicio de la pandemia, los valores de $H(q)$ se reducen y se estabilizan, acercándose al comportamiento del benchmark, lo que sugiere una mejora en la eficiencia del mercado durante este periodo, llegando incluso a bajar del nivel 0,5 lo cual podría indicar un comportamiento de reversión a la media o anti-persistencia.

En el gráfico de la derecha, que muestra el espectro de singularidad $D(\alpha)$, se aprecia una disminución en la amplitud del espectro tras la pandemia. Esto implica una menor riqueza multifractal, lo que puede interpretarse como una reducción en la complejidad del comportamiento del mercado para la categoría AI. Sin embargo, sigue existiendo cierta heterogeneidad en comparación con el benchmark gaussiano, lo que indica que el mercado no alcanza aún una eficiencia completa. Estos resultados reflejan cómo el impacto de la pandemia ha influido notablemente en la dinámica del mercado, provocando un comportamiento más homogéneo y eficiente, pero manteniendo todavía rasgos multifractales.

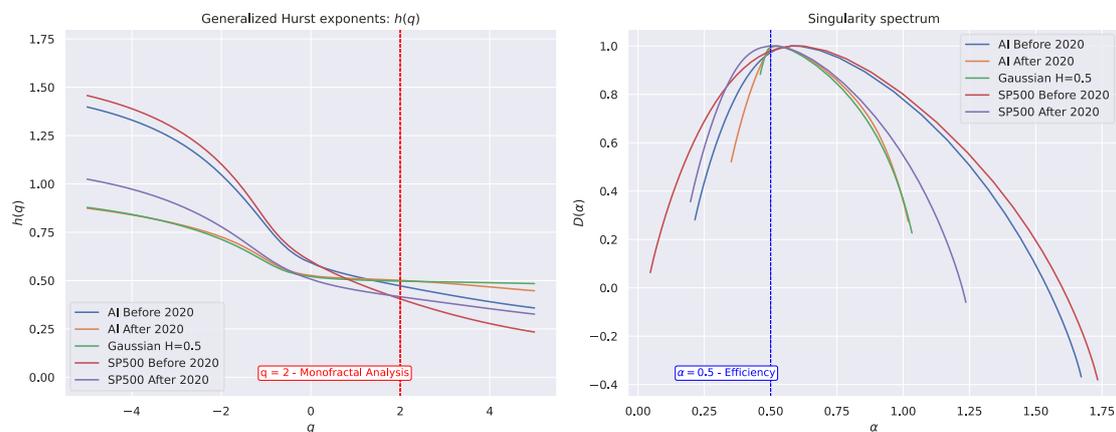


Figura 11: MF-DFA AI Fuente: Elaboración propia

En la Figura 12 se presenta el mismo análisis multifractal, pero aplicado a la categoría Robotics. Al igual que en el caso de AI, se comparan los periodos antes y después de la pandemia utilizando nuevamente el SP500 y el ruido gaussiano como referencia. En el gráfico de la izquierda, que muestra los exponentes generalizados de Hurst $H(q)$, se observa un patrón similar al del caso anterior. Antes de la pandemia, los valores de $H(q)$ son más altos para $q < 0$, indicando persistencia en las pequeñas fluctuaciones. Sin embargo, tras ella los valores de $H(q)$ para la categoría Robotics muestran una disminución y se acercan al benchmark gaussiano, suponiendo una mejora notable en la eficiencia de este sector.

El gráfico correspondiente al espectro de singularidad $D(\alpha)$, revela una contracción en la amplitud del espectro multifractal tras el inicio de la pandemia. Aunque esta reducción es

menos pronunciada que en el caso de AI, también sugiere una reducción en la complejidad del comportamiento del mercado en este sector. Cabe destacar que, tras el corte temporal, el espectro de Robotics se aproxima menos al del ruido gaussiano, mostrando que este sector ha experimentado una transición menos marcada hacia un comportamiento eficiente y homogéneo.

Junto a los resultados para el conjunto AI, estos resultados refuerzan la hipótesis de que la pandemia actuó como un catalizador que impulsó una mayor eficiencia en los mercados financieros, especialmente en aquellos sectores donde inicialmente existían dinámicas más complejas y multifractales. Sin embargo, el grado de esta convergencia hacia la eficiencia varía entre sectores, siendo más pronunciado en IA que en Robótica.

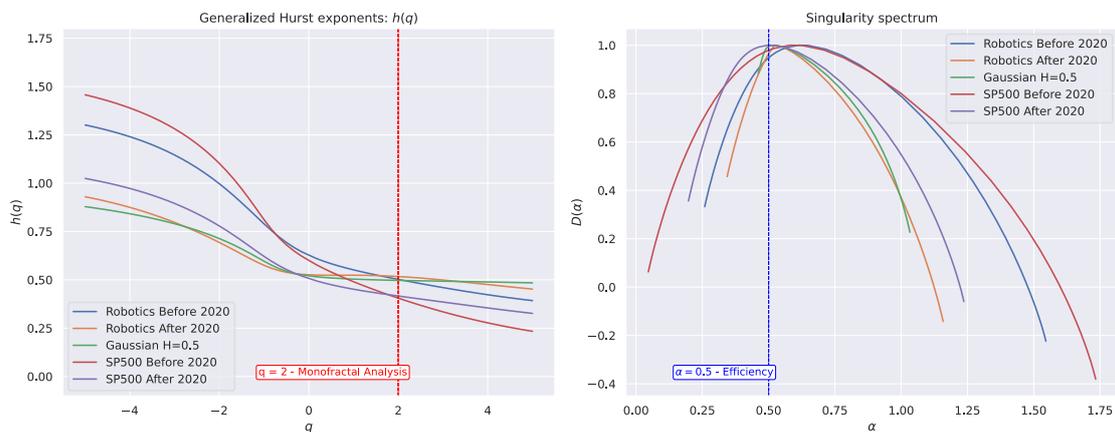


Figura 12: MF-DFA Robótica Fuente: Elaboración propia

La Figura 13 presenta el análisis de la categoría Both, que engloba a empresas enfocadas simultáneamente en IA y robótica. De manera similar a los casos anteriores, se identifica un comportamiento persistente en las fluctuaciones de menor magnitud y una tendencia hacia la eficiencia en las fluctuaciones de mayor escala. En cuanto al espectro de multifractalidad, se aprecia una desviación significativa respecto al benchmark, evidenciando una mayor complejidad y multifractalidad en el comportamiento de estas empresas.

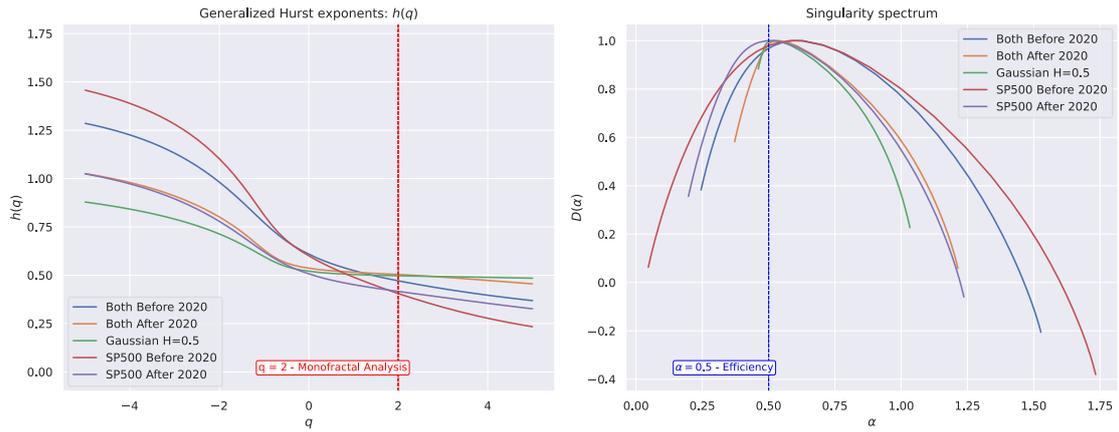


Figura 13: MF-DFA Ambos Fuente: Elaboración propia

Por último, se ha realizado un análisis comparativo de las series temporales antes y después del COVID, aplicando la técnica de shuffling para determinar si la presencia de propiedades multifractales en estos períodos se debía a la memoria y autocorrelación de las series o, por el contrario, a la presencia de colas gruesas en la distribución de los retornos. Para evaluar el grado de eficiencia de las series, se han empleado tres métricas clave: la amplitud del espectro multifractal, que mide la intensidad de la multifractalidad; la *Market Deficiency Metric* (MDM), que cuantifica la desviación respecto al comportamiento aleatorio que debería tener un mercado eficiente; y el *Peak Alpha*, que indica el exponente de Hölder dominante en la serie, siendo 0,5 el valor asociado a un mercado y eficiente.

Tabla 5: Resultados post-shuffling

Serie	Spectral Width	MDM	Peak Alpha
AI Before	1,457	0,520	0,596
AI Before Shuffled	1,085	0,374	0,582
Robotics Before	1,287	0,454	0,631
Robotics Before Shuffled	1,032	0,349	0,571
Both Before	1,282	0,459	0,612
Both Before Shuffled	1,036	0,361	0,585
SP500 Before	1,687	0,612	0,603
SP500 Before Shuffled	1,184	0,416	0,634

Serie	Spectral Width	MDM	Peak Alpha
AI After	0,668	0,213	0,528
AI After Shuffled	0,873	0,292	0,557
Robotics After	0,815	0,239	0,528
Robotics After Shuffled	0,917	0,306	0,561
Both After	0,842	0,285	0,538
Both After Shuffled	0,849	0,283	0,555
SP500 After	1,039	0,349	0,509
SP500 After Shuffled	1,025	0,334	0,597

Fuente: Elaboración propia

Como se observa en la Tabla 5, al aplicar shuffling a las series temporales antes de la pandemia, los resultados muestran una clara mejora en las métricas de eficiencia. En particular, la amplitud del espectro multifractal se reduce significativamente, el MDM disminuye y el Peak Alpha se desplaza hacia valores más cercanos a 0,5, lo que indica un acercamiento al comportamiento de un mercado eficiente. Estos resultados sugieren que gran parte de la multifractalidad observada antes de la pandemia estaba impulsada por la memoria y la autocorrelación en los retornos.

Sin embargo, después de la pandemia las series ya presentan valores más cercanos a la eficiencia de mercado, por lo que la aplicación de técnicas de shuffling no produce cambios significativos en las métricas, lo que indica que las propiedades multifractales residuales están dominadas por la presencia de colas gruesas en la distribución de probabilidad de los retornos en lugar de la existencia de autocorrelación en las series.

9. Conclusión

El sector financiero desempeña un papel fundamental en el desarrollo de la IA y la robótica, ya que son sectores que necesitan de grandes cantidades de capital para continuar su investigación y evolución tecnológica. Las empresas que compiten en estos sectores se enfrentan a altos costes operativos y una necesidad constante de reinversión para continuar en la carrera por la innovación y así no perder su liderazgo, convirtiendo así a las inversiones en un factor crítico para su crecimiento sostenido. No obstante, el rápido crecimiento y las altas expectativas generadas en torno a estas industrias también plantean importantes riesgos. La posibilidad de que se forme una burbuja bursátil no es algo remoto, ejemplos de ello se han visto en el pasado, como la crisis “*dot-com*”. La explosión de una burbuja en estos sectores dada la interdependencia actual tendría consecuencias significativas para el mercado global, dada su importancia en la economía mundial. Un ejemplo claro de este fenómeno fue la reacción del mercado ante la nueva aplicación Deepseek, que prometía resultados similares a los de ChatGPT, pero con un entrenamiento más eficiente y utilizando hardware más asequible. Esta innovación generó una fuerte respuesta en el mercado con importantes correcciones en empresas clave del sector, como NVIDIA, cuyos ingresos dependen en gran medida de la demanda de hardware enfocado en modelos de IA. La posibilidad de que los desarrolladores optaran por soluciones con un menor coste impulsó la volatilidad en los precios de las acciones de varias empresas tecnológicas vinculadas a la IA, reflejando así la sensibilidad del mercado ante noticias y avances en la IA. Por ello, el objetivo de este estudio era comprender el comportamiento de este mercado para prevenir posibles riesgos sistémicos.



En este contexto, el presente trabajo ha explorado la eficiencia de mercado del índice NQROBO, compuesto por las empresas más representativas en los sectores de la IA y la robótica. Para ello, se ha hecho uso de la técnica *Multifractal Detrended Fluctuations Analysis*, reconocida en la literatura financiera por su capacidad para identificar patrones complejos en series temporales a partir de los retornos logarítmicos.

Los resultados obtenidos evidencian un importante e interesante cambio en el comportamiento de estos mercados tras el inicio de la pandemia en marzo de 2020. Previo a esta fecha estos sectores presentaban estructuras de mercado más complejas y de mayor riqueza multifractal, siendo esto sinónimo de ineficiencia. Esta complejidad y desviación de la eficiencia de mercado es el resultado del perfil heterogéneo de los participantes en el mercado y de una gran variedad de factores y condiciones que influyen en el comportamiento de los precios de los activos.

Sin embargo, a partir del inicio de la pandemia, se observa una tendencia positiva hacia una mayor eficiencia de mercado, lo que indica que los precios comenzaron a reflejar de manera más precisa la información disponible. Pese a ello, el índice NQROBO continúa manteniendo propiedades multifractales, lo que sugiere que, aunque el mercado ha avanzado hacia una mayor eficiencia, aún existen niveles significativos de volatilidad e incertidumbre propios de sectores emergentes.

La explicación de por qué un evento como el inicio de una pandemia pudo actuar como un catalizador hacia la eficiencia de mercado tiene varias respuestas posibles las cuales sería interesante investigar con mayor profundidad. En primer lugar, la aceleración en la

adopción de nuevas tecnologías durante la crisis sanitaria aumentó la demanda de servicios y productos basados en la IA y/o la robótica, esto generó un gran interés y un conocimiento más profundo de ambos sectores. En segundo lugar, pudieron ser las respuestas de las autoridades monetarias ante la crisis lo que contribuyese a reducir la incertidumbre y crear un entorno más propicio para el desarrollo e inversión en estas tecnologías en el que los precios comenzaron a reflejar de manera más precisa la información disponible.

El uso de la técnica MF-DFA en este trabajo ha permitido aportar una visión innovadora, más allá de la comúnmente empleada hipótesis del mercado eficiente, sobre el comportamiento de estos mercados claves y emergentes. A diferencia de las teorías tradicionales que estudian la eficiencia de la serie temporal en su conjunto, el análisis multifractal reconoce que los mercados pueden tener diferentes grados de eficiencia en función de la ventana temporal analizada. En el caso del NQROBO, la existencia de propiedades multifractales sugiere que, aunque tras la pandemia el comportamiento del mercado ha iniciado un camino positivo hacia lo que parece ser la eficiencia, todavía existen oportunidades de obtener retornos anormales en este mercado mediante estrategias de inversión activa. Esto es de vital importancia para los inversores y gestores de carteras, que deben evaluar cuidadosamente el binomio riesgo-rentabilidad de sus inversiones en estos sectores, ya que, como se ha evidenciado en este estudio, estos mercados combinan una tendencia general al alza con una volatilidad significativa, lo que genera periodos de alta rentabilidad, pero también episodios de correcciones pronunciadas y drásticas.

En cuanto a futuras líneas de investigación, sería interesante ampliar este análisis multifractal con el uso de datos intradiarios aumentado así el número de observaciones o extenderlo a otros sectores emergentes que comparten características similares en términos de inversión de capital y requerimientos de financiación, como pueden ser las energías renovables o la biotecnología, y conocer cuál fue el impacto de la pandemia en los mismos. Además, se podría profundizar en el estudio del impacto de otros factores macroeconómicos y geopolíticos, como las variaciones en la curva de tipos de interés, la inflación o el lanzamiento de productos disruptivos como fue ChatGPT o más recientemente Deepseek, sobre la eficiencia de los mercados y su estructura multifractal,

lo que permitiría ampliar el conocimiento sobre como otros eventos o condiciones influyen en estos sectores.

En conclusión, este trabajo contribuye a la literatura ofreciendo un análisis cuantitativo de los mercados emergentes tecnológicos, aportando una nueva perspectiva sobre la eficiencia de estos y sus posibilidades de evolución a futuro. El desarrollo de tecnologías como la IA o la robótica no solo dependen del avance tecnológico y la investigación, sino también del apoyo del sector financiero para aportar los recursos económicos necesarios para su actividad de manera eficiente y sostenible. Si bien estos mercados emergentes presentan importantes riesgos, también suponen únicas oportunidades de inversión para aquellos inversores capaces de identificar y gestionar esta incertidumbre. Este trabajo ha tenido como objetivo realizar un análisis cuantitativo que contribuya a una mejor comprensión de estos mercados, promoviendo así el desarrollo sostenible de las dos tecnologías con mayor potencial disruptivo de nuestro tiempo.

Declaración de Uso de Herramientas de Inteligencia Artificial Generativa en Trabajos Fin de Grado

ADVERTENCIA: Desde la Universidad consideramos que ChatGPT u otras herramientas similares son herramientas muy útiles en la vida académica, aunque su uso queda siempre bajo la responsabilidad del alumno, puesto que las respuestas que proporciona pueden no ser veraces. En este sentido, NO está permitido su uso en la elaboración del Trabajo fin de Grado para generar código porque estas herramientas no son fiables en esa tarea. Aunque el código funcione, no hay garantías de que metodológicamente sea correcto, y es altamente probable que no lo sea.

Por la presente, yo, Javier López Guisández estudiante de E2-Analytics de la Universidad Pontificia Comillas al presentar mi Trabajo Fin de Grado titulado "Evaluación de la Eficiencia de Mercado en el índice NQROBO mediante técnicas de análisis multifractal", declaro que he utilizado la herramienta de Inteligencia Artificial Generativa ChatGPT u otras similares de IAG de código sólo en el contexto de las actividades descritas a continuación:

1. **Brainstorming de ideas de investigación:** Utilizado para idear y esbozar posibles áreas de investigación.
2. **Interpretador de código:** Para realizar análisis de datos preliminares.
3. **Estudios multidisciplinares:** Para comprender perspectivas de otras comunidades sobre temas de naturaleza multidisciplinar.
4. **Corrector de estilo literario y de lenguaje:** Para mejorar la calidad lingüística y estilística del texto.
5. **Sintetizador y divulgador de libros complicados:** Para resumir y comprender literatura compleja.
6. **Revisor:** Para recibir sugerencias sobre cómo mejorar y perfeccionar el trabajo con diferentes niveles de exigencia.
7. **Traductor:** Para traducir textos de un lenguaje a otro.

Afirmo que toda la información y contenido presentados en este trabajo son producto de mi investigación y esfuerzo individual, excepto donde se ha indicado lo contrario y se han dado los créditos correspondientes (he incluido las referencias adecuadas en el TFG y he explicitado para que se ha usado ChatGPT u otras herramientas similares). Soy consciente de las implicaciones académicas y éticas de presentar un trabajo no original y acepto las consecuencias de cualquier violación a esta declaración.

Fecha: 8 de Abril de 2025

Firma:



10. Bibliografía

- Acemoglu, D., & Restrepo, P. (2016). *The race between machine and man: Implications of technology for growth, factor shares and employment*.
- Bachelier, L. (1900). Théorie de la spéculation. *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, 17, 21-86. <https://doi.org/10.24033/asens.476>
- Bellhouse, D. (2005). Decoding Cardano's Liber de Ludo Aleae. *Historia Mathematica*, 32(2), 180-202. <https://doi.org/10.1016/j.hm.2004.04.001>
- Brady, M. (1985). Artificial intelligence and robotics. *Artificial Intelligence*, 26(1), 79-121. [https://doi.org/10.1016/0004-3702\(85\)90013-X](https://doi.org/10.1016/0004-3702(85)90013-X)
- Chan, K. C., Gup, B. E., & Pan, M. (1997). International Stock Market Efficiency and Integration: A Study of Eighteen Nations. *Journal of Business Finance & Accounting*, 24(6), 803-813. <https://doi.org/10.1111/1468-5957.00134>
- Chan, L. K. C., Jegadeesh, N., & Lakonishok, J. (1996). Momentum Strategies. *The Journal of Finance*, 51(5), 1681-1713. <https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1996.tb05222.x>
- Chinecherem, O., & Kenneth, C. (2017). *Robotics and Artificial Intelligence: Differences and Similarities*. 15(12).
- Cortés, J. M., & Corzo, T. (2009). La eficiencia en los mercados financieros: Una introducción a la cuestión. *Revista Empresa y Humanismo*, 81-106. <https://doi.org/10.15581/015.12.33273>
- Deng, L. (2018). Artificial Intelligence in the Rising Wave of Deep Learning: The Historical Path and Future Outlook [Perspectives]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 35(1), 180-177. <https://doi.org/10.1109/MSP.2017.2762725>
- Di Matteo, T. (2007). Multi-scaling in finance. *Quantitative Finance*, 7(1), 21-36. <https://doi.org/10.1080/14697680600969727>
- Domino, K. (2011). The use of the Hurst exponent to predict changes in trends on the Warsaw Stock Exchange. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 390(1), 98-109. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2010.04.015>
- El Confidencial. (2017, noviembre 17). *El robot Pepper ya es una realidad en hogares, hospitales y hoteles*. https://www.elconfidencial.com/tecnologia/2017-11-17/pepper-hoteles-lopesan_1478705/
- European Commission. (2024, enero 24). *Communication on boosting startups and innovation in trustworthy artificial intelligence*. <https://digital-strategy.ec.europa.eu/en/library/communication-boosting-startups-and-innovation-trustworthy-artificial-intelligence>
- Fama, E. F. (1970). Efficient capital markets. *Journal of finance*, 25(2), 383-417.
- Fama, E. F. (1991). Efficient Capital Markets: II. *The Journal of Finance*, 46(5), 1575-1617. <https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1991.tb04636.x>

- Floridi, L. (2024). Why the AI Hype is Another Tech Bubble. *Philosophy & Technology*, 37(4), 128, s13347-024-00817-w. <https://doi.org/10.1007/s13347-024-00817-w>
- Friedman, M. (1953). Essays in Positive Economics. *University of Chicago press*, 157-203.
- Gómez-Gómez, J., Carmona-Cabezas, R., Ariza-Villaverde, A. B., Gutiérrez De Ravé, E., & Jiménez-Hornero, F. J. (2021). Multifractal detrended fluctuation analysis of temperature in Spain (1960–2019). *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 578, 126118. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2021.126118>
- Guerrien, B., & Gun, O. (2011). *Efficient Market Hypothesis: What are we talking about?* 56.
- Haenlein, M., & Kaplan, A. (2019). A Brief History of Artificial Intelligence: On the Past, Present, and Future of Artificial Intelligence. *California Management Review*, 61(4), 5-14. <https://doi.org/10.1177/0008125619864925>
- Hamet, P., & Tremblay, J. (2017). Artificial intelligence in medicine. *Metabolism*, 69, S36-S40. <https://doi.org/10.1016/j.metabol.2017.01.011>
- Hirshleifer, D. (2015). Behavioral Finance. *Annual Review of Financial Economics*, 7(1), 133-159. <https://doi.org/10.1146/annurev-financial-092214-043752>
- Hussain, R., & Zeadally, S. (2019). Autonomous Cars: Research Results, Issues, and Future Challenges. *IEEE Communications Surveys & Tutorials*, 21(2), 1275-1313. <https://doi.org/10.1109/COMST.2018.2869360>
- Ihlen, E. A. F. (2012). Introduction to Multifractal Detrended Fluctuation Analysis in Matlab. *Frontiers in Physiology*, 3. <https://doi.org/10.3389/fphys.2012.00141>
- Ivanov, P. Ch., Amaral, L. A. N., Goldberger, A. L., Havlin, S., Rosenblum, M. G., Struzik, Z. R., & Stanley, H. E. (1999). Multifractality in human heartbeat dynamics. *Nature*, 399(6735), 461-465. <https://doi.org/10.1038/20924>
- Jaffe, J. F. (1974). Special Information and Insider Trading. *The Journal of Business*, 47(3), 410-428.
- Jan, Z., Ahamed, F., Mayer, W., Patel, N., Grossmann, G., Stumptner, M., & Kuusk, A. (2023). Artificial intelligence for industry 4.0: Systematic review of applications, challenges, and opportunities. *Expert Systems with Applications*, 216, 119456. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2022.119456>
- Javaid, M., Haleem, A., Singh, R. P., & Suman, R. (2021). Substantial capabilities of robotics in enhancing industry 4.0 implementation. *Cognitive Robotics*, 1, 58-75. <https://doi.org/10.1016/j.cogr.2021.06.001>
- Jondeau, E., & Rockinger, M. (2003). Conditional volatility, skewness, and kurtosis: Existence, persistence, and comovements. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 27(10), 1699-1737. [https://doi.org/10.1016/S0165-1889\(02\)00079-9](https://doi.org/10.1016/S0165-1889(02)00079-9)
- Kantelhardt, J. W., Zschiegner, S. A., Koscielny-Bunde, E., Havlin, S., Bunde, A., & Stanley, H. E. (2002). Multifractal detrended fluctuation analysis of nonstationary time series. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 316(1-4), 87-114. [https://doi.org/10.1016/S0378-4371\(02\)01383-3](https://doi.org/10.1016/S0378-4371(02)01383-3)

- Katz, J. S. (1999). The self-similar science system. *Research Policy*, 28(5), 501-517. [https://doi.org/10.1016/S0048-7333\(99\)00010-4](https://doi.org/10.1016/S0048-7333(99)00010-4)
- Koo, C., Xiang, Z., Gretzel, U., & Sigala, M. (2021). Artificial intelligence (AI) and robotics in travel, hospitality and leisure. *Electronic Markets*, 31(3), 473-476. <https://doi.org/10.1007/s12525-021-00494-z>
- Liu, G., Yu, C.-P., Shiu, S.-N., & Shih, I.-T. (2022). The Efficient Market Hypothesis and the Fractal Market Hypothesis: Interfluves, Fusions, and Evolutions. *Sage Open*, 12(1), 21582440221082137. <https://doi.org/10.1177/21582440221082137>
- Liu, J., Moskowitz, T. J., & Stambaugh, R. F. (2022). *Pricing Without Mispricing*.
- Madanchi, A., Taghavi-Shahri, F., Taghavi-Shahri, S. M., & Rahimi Tabar, M. R. (2020). Scaling behavior in measured keystroke time series from patients with Parkinson's disease. *The European Physical Journal B*, 93(7), 126. <https://doi.org/10.1140/epjb/e2020-100561-4>
- Malkiel, B. G. (2003). *The Efficient Market Hypothesis and Its Critics*.
- Malkiel, B. G. (2005). Reflections on the Efficient Market Hypothesis: 30 Years Later. *The Financial Review*, 40(1), 1-9. <https://doi.org/10.1111/j.0732-8516.2005.00090.x>
- Mandelbrot, B. (1963). New Methods in Statistical Economics. *Journal of Political Economy*, 71(5), 421-440. <https://doi.org/10.1086/258792>
- Mandelbrot, B. B. (1970). Long-run interdependence in price records and other economic time series. *Econometrica*, 38(4), 122.
- Markowitz, H. (1952). Portfolio Selection. *The Journal of Finance*, 7(1), 77-91. <https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1952.tb01525.x>
- McKinsey & Company. (2023). *The economic potential of generative AI: The next productivity frontier*. <https://www.mckinsey.com/capabilities/mckinsey-digital/our-insights/the-economic-potential-of-generative-AI-the-next-productivity-frontier#key-insights>
- Morales Martínez, J. L., Segovia-Domínguez, I., Rodríguez, I. Q., Horta-Rangel, F. A., & Sosa-Gómez, G. (2021). A modified Multifractal Detrended Fluctuation Analysis (MFDFA) approach for multifractal analysis of precipitation. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 565, 125611. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2020.125611>
- Müller, V. C. (2023). *Ethics of Artificial Intelligence and Robotics*. <https://plato.stanford.edu/archives/fall2023/entries/ethics-ai/>
- Nasdaq. (2024). *Nasdaq CTA Artificial Intelligence & Robotics™ Index methodology*. <https://indexes.nasdaqomx.com/docs/NQROBO%20Thematic%20Revenue%20Overview%20E2%80%93%20April%202024.pdf>
- Oprean-Stan, C., Tanasescu, C., & Bratian, V. (2025). Are the capital markets efficient? A fractal market theory approach. *Economic Computation & Economic Cybernetics Studies & Research*, 48(4). <https://doi.org/10.2139/ssrn.5086059>
- Pandey, A. K., & Gelin, R. (2018). A Mass-Produced Sociable Humanoid Robot: Pepper: The First Machine of Its Kind. *IEEE Robotics & Automation Magazine*, 25(3), 40-48. <https://doi.org/10.1109/MRA.2018.2833157>

- Pavlov, A. N., Abdurashitov, A. S., Koronovskii, A. A., Pavlova, O. N., Semyachkina-Glushkovskaya, O. V., & Kurths, J. (2020). Detrended fluctuation analysis of cerebrovascular responses to abrupt changes in peripheral arterial pressure in rats. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 85, 105232. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2020.105232>
- Peters, E. E. (1991). *Chaos and order in the capital markets: A new view of cycles, prices, and market volatility*. Wiley.
- Peters, E. E. (1994). *Fractal market analysis: Applying chaos theory to investment and economics*. J. Wiley.
- Russell, K., & Rennison, J. (2024, enero). These Seven Tech Stocks Are Driving the Market. *New York Times*. <https://www.nytimes.com/interactive/2024/01/22/business/magnificent-seven-stocks-tech.html>
- Rydin Gorjão, L., Hassan, G., Kurths, J., & Witthaut, D. (2022). MFDFA: Efficient multifractal detrended fluctuation analysis in python. *Computer Physics Communications*, 273, 108254. <https://doi.org/10.1016/j.cpc.2021.108254>
- Shanbhogue, R. (2024, noviembre 18). Will the bubble burst for AI in 2025, or will it start to deliver? *The Economist*. <https://www.economist.com/the-world-ahead/2024/11/18/will-the-bubble-burst-for-ai-in-2025-or-will-it-start-to-deliver>
- Soori, M., Arezoo, B., & Dastres, R. (2023). Artificial intelligence, machine learning and deep learning in advanced robotics, a review. *Cognitive Robotics*, 3, 54-70. <https://doi.org/10.1016/j.cogr.2023.04.001>
- Szegö, G. (2002). Measures of risk. *Journal of Banking & Finance*, 26(7), 1253-1272. [https://doi.org/10.1016/S0378-4266\(02\)00262-5](https://doi.org/10.1016/S0378-4266(02)00262-5)
- Thompson, J. R., & Wilson, J. R. (2016). Multifractal detrended fluctuation analysis: Practical applications to financial time series. *Mathematics and Computers in Simulation*, 126, 63-88. <https://doi.org/10.1016/j.matcom.2016.03.003>
- Timmermann, A., & Granger, C. W. J. (2004). Efficient market hypothesis and forecasting. *International Journal of Forecasting*, 20(1), 15-27. [https://doi.org/10.1016/S0169-2070\(03\)00012-8](https://doi.org/10.1016/S0169-2070(03)00012-8)
- Torresen, J. (2018). A Review of Future and Ethical Perspectives of Robotics and AI. *Frontiers in Robotics and AI*, 4, 75. <https://doi.org/10.3389/frobt.2017.00075>
- Turing, A. M. (1950). Computing Machinery and Intelligence. *Mind*, LIX(236), 433-460. <https://doi.org/10.1093/mind/LIX.236.433>
- Wang, Y., Liu, L., & Gu, R. (2009). Analysis of efficiency for Shenzhen stock market based on multifractal detrended fluctuation analysis. *International Review of Financial Analysis*, 18(5), 271-276. <https://doi.org/10.1016/j.irfa.2009.09.005>
- Wang, Y., Wei, Y., & Wu, C. (2011). Analysis of the efficiency and multifractality of gold markets based on multifractal detrended fluctuation analysis. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 390(5), 817-827. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2010.11.002>

- Weber, P., Carl, K. V., & Hinz, O. (2024). Applications of Explainable Artificial Intelligence in Finance—A systematic review of Finance, Information Systems, and Computer Science literature. *Management Review Quarterly*, 74(2), 867-907. <https://doi.org/10.1007/s11301-023-00320-0>
- Weron, A., & Weron, R. (2000). Fractal market hypothesis and two power-laws. *Chaos, Solitons & Fractals*, 11(1-3), 289-296. [https://doi.org/10.1016/S0960-0779\(98\)00295-1](https://doi.org/10.1016/S0960-0779(98)00295-1)
- Whitesides, G. M. (2018). Soft Robotics. *Angewandte Chemie International Edition*, 57(16), 4258-4273. <https://doi.org/10.1002/anie.201800907>
- Widder, D. G., & Hicks, M. (2024). *Watching the Generative AI Hype Bubble Deflate*.
- World Economic Forum. (2016). *The Future of Jobs Employment, Skills and Workforce Strategy for the Fourth Industrial Revolution*. World Economic Forum. https://www.academia.edu/31540537/The_Future_of_Jobs_Employment_Skills_and_Workforce_Strategy_for_the_Fourth_Industrial_Revolution
- Zhang, C., & Lu, Y. (2021). Study on artificial intelligence: The state of the art and future prospects. *Journal of Industrial Information Integration*, 23, 100224. <https://doi.org/10.1016/j.jii.2021.100224>
- Zunino, L., Tabak, B. M., Figliola, A., Pérez, D. G., Garavaglia, M., & Rosso, O. A. (2008). A multifractal approach for stock market inefficiency. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 387(26), 6558-6566. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2008.08.028>

Anexo I: Código Python

```
# MFDFA - TFG Javier López
```

```
**Author:** Javier López Guisández (202004918@alu.comillas.edu)
```

```
**Date:** 2025.03.30
```

```
## 0. Librerías
```

```
La primera vez que se ejecute será necesario descargar los siguientes paquetes  
"""
```

```
! pip install MFDFA  
! pip install FBM  
! pip install -U kaleido
```

```
# %config InlineBackend.figure_format = 'svg' # 'png', 'retina', 'jpeg',  
'svg', 'pdf'
```

```
import pandas as pd  
from pathlib import Path  
import numpy as np  
import matplotlib.pyplot as plt  
from MFDFA import MFDFA  
from numpy.polynomial.polynomial import polyfit  
import plotly.graph_objects as go  
from plotly.subplots import make_subplots  
import pandas as pd  
import seaborn as sns  
import plotly.graph_objects as go  
from scipy.stats import jarque_bera  
from fbm import FBM  
import kaleido  
import random  
import plotly.io as pio  
sns.set()
```

```
"""---
```

```
## 1. Datos índice NQROBO
```

```
Primero cargaremos los datos del índice NQROBO, dividiremos en las distintas  
categorías y haremos un análisis preliminar mediante el cálculo de métricas  
financieras y gráficas.  
"""
```

```
df = pd.read_excel('NQROBO.xlsx')  
df_categories = pd.read_excel('NQROBO_clasificación.xlsx')  
NQROBO_EOD = pd.read_excel('EOD_NQROBO.xlsx')  
sp_index = pd.read_excel('SP500.xlsx')
```

```
#complete_date_rng = pd.date_range(start=df.index.min(), end=df.index.max(),  
freq='B')  
#df = df.reindex(complete_date_rng)
```

```
# Ahora df debería tener huecos en los festivos
```

```

"""### 1.1 Evolución del índice NQROBO

"""

# Convertir 'Trade date' a formato datetime
NQROBO_EOD['Trade Date'] = pd.to_datetime(NQROBO_EOD['Trade Date'])

# Graficar los datos
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(NQROBO_EOD['Trade Date'], NQROBO_EOD['Index Value'], label='Index
Value', linewidth=2)

# Configuración del gráfico
plt.title('Valor del índice NQROBO', fontsize=16)
plt.xlabel('Fecha cotización', fontsize=12)
plt.ylabel('Valor del índice', fontsize=12)
plt.grid(True, linestyle='--', alpha=0.6)
plt.xticks(rotation=45, fontsize=10)
plt.tight_layout()

# Mostrar
plt.show()

"""### 1.2 Clasificación y métricas financieras"""

# Crear un diccionario para agrupar empresas por categoría
categories = df_categories.groupby('Category')['Company Name'].apply(list)

# Crear dataframes por categoría
dataframes_by_category = {}
for category, companies in categories.items():
    columns = ['Date'] + companies
    dataframes_by_category[category] = df[columns]

# Acceder a cada dataframe por categoría
df_ai = dataframes_by_category['AI']
df_ro = dataframes_by_category['Robotics']
df_both = dataframes_by_category['Both']

"""### 1.2.1 Cálculo retornos logarítmicos diarios, retornos acumulados y
simulación inversión"""

# Función para calcular los retornos logarítmicos, retornos acumulativos y
precios
def process_dataframe(df):
    log_returns = np.log(df.drop(columns=['Date']) /
df.drop(columns=['Date']).shift(1))
    df['Log Average Return'] = np.nanmean(log_returns.values, axis=1)
    df = df.iloc[1:] # Eliminar el primer día (NaN)
    df['cum_return'] = df['Log Average Return'].cumsum()
    df = df.iloc[1:] # Eliminar el primer día (NaN)
    df['price'] = 100 * np.exp(df['cum_return'])
    return df

# Aplicar la función a los dataframes

```

```

df_ai = process_dataframe(df_ai)
df_ro = process_dataframe(df_ro)
df_both = process_dataframe(df_both)
df_all= process_dataframe(df)
sp_index = process_dataframe(sp_index)

```

```

"""### 1.2.2 Gráfico retornos logarítmicos diarios

```

En el siguiente gráfico podemos observar los retornos logarítmicos diarios para las tres categorías: AI, Robotics y Both

```

"""
# Crear espacios para cada categoría
fig = go.Figure()

# Añadir los datos de la categoría AI
fig.add_trace(go.Scatter(
    x=df_ai['Date'],
    y=df_ai['Log Average Return'],
    mode='lines',
    name='AI',
    line=dict(width=1)
))

# Añadir los datos de la categoría Robotics
fig.add_trace(go.Scatter(
    x=df_ro['Date'],
    y=df_ro['Log Average Return'],
    mode='lines',
    name='Robotics',
    line=dict(width=1)
))

# Añadir los datos de la categoría Both
fig.add_trace(go.Scatter(
    x=df_both['Date'],
    y=df_both['Log Average Return'],
    mode='lines+markers',
    name='Both',
    line=dict(width=1)
))

# Configuración del diseño del gráfico
fig.update_layout(
    title='Retornos logarítmicos diarios',
    xaxis_title='Date',
    yaxis_title='Retorno logarítmico',
    template='plotly',
    hovermode='x unified',
    legend=dict(
        title='Categoría',
        orientation='h',
        x=0.5,
        xanchor='center',
        y=-0.2
    )
)

```

```

)

# Mostrar el gráfico interactivo
fig.show()

# Crear subplots para las tres categorías
from plotly.subplots import make_subplots

fig = make_subplots(rows=1, cols=3, shared_xaxes=True,
                    subplot_titles=("AI", "Robotics", "Both"))

# Añadir datos de la categoría AI
fig.add_trace(go.Scatter(
    x=df_ai['Date'],
    y=df_ai['Log Average Return'],
    mode='lines',
    name='AI',
    line=dict(color='blue', width=1)
), row=1, col=1)

# Añadir datos de la categoría Robotics
fig.add_trace(go.Scatter(
    x=df_ro['Date'],
    y=df_ro['Log Average Return'],
    mode='lines',
    name='Robotics',
    line=dict(color='red', width=1)
), row=1, col=2)

# Añadir datos de la categoría Both
fig.add_trace(go.Scatter(
    x=df_both['Date'],
    y=df_both['Log Average Return'],
    mode='lines',
    name='Both',
    line=dict(color='green', width=1)
), row=1, col=3)

# Configuración del diseño del gráfico
fig.update_layout(
    height=500,
    width=2000,
    title_text="Retornos logarítmicos diarios por categoría",
    xaxis_title="Fecha",
    yaxis_title="Retorno logarítmico",
    showlegend=False
)

# Mostrar el gráfico
fig.show()

"""### 1.2.3 Gráficos incluyendo histogramas"""

# Grafico AI
fig_ai = make_subplots(rows=2, cols=1, subplot_titles=("AI - Retornos
Logarítmicos Diarios", "AI - Histograma Retornos"))

```

```

fig_ai.add_trace(go.Scatter(
    x=df_ai['Date'],
    y=df_ai['Log Average Return'],
    mode='lines',
    line=dict(color='blue', width=1)
), row=1, col=1)

fig_ai.add_trace(go.Histogram(
    x=df_ai['Log Average Return'],
    marker=dict(color='blue'),
    opacity=0.75
), row=2, col=1)

fig_ai.update_layout(height=600, width=1000, title_text="AI - Retornos
Logarítmicos", showlegend=False)

# Gráfico Robotics
fig_ro = make_subplots(rows=2, cols=1, subplot_titles=("Robotics - Retornos
Logarítmicos Diarios", "Robotics - Histograma Retornos"))

fig_ro.add_trace(go.Scatter(
    x=df_ro['Date'],
    y=df_ro['Log Average Return'],
    mode='lines',
    line=dict(color='red', width=1)
), row=1, col=1)

fig_ro.add_trace(go.Histogram(
    x=df_ro['Log Average Return'],
    marker=dict(color='red'),
    opacity=0.75
), row=2, col=1)

fig_ro.update_layout(height=600, width=1000, title_text="Robotics - Retornos
Logarítmicos", showlegend=False)

# Gráfico para Both
fig_both = make_subplots(rows=2, cols=1, subplot_titles=("Both - Retornos
Logarítmicos Diarios", "Both - Histograma Retornos"))

fig_both.add_trace(go.Scatter(
    x=df_both['Date'],
    y=df_both['Log Average Return'],
    mode='lines',
    line=dict(color='green', width=1)
), row=1, col=1)

fig_both.add_trace(go.Histogram(
    x=df_both['Log Average Return'],
    marker=dict(color='green'),
    opacity=0.75
), row=2, col=1)

fig_both.update_layout(height=600, width=1000, title_text="Both - Retornos
Logarítmicos", showlegend=False)

```

```

# Mostrar los gráficos
fig_ai.show()
fig_ro.show()
fig_both.show()

""### 1.2.3 Gráfico inversión simulada histórica

Una inversión hubiera generado los siguientes resultados
""

# Crear espacios para cada categoría
fig = go.Figure()

# Añadir los datos de la categoría AI
fig.add_trace(go.Scatter(
    x=df_ai['Date'],
    y=df_ai['price'],
    mode='lines',
    name='AI',
    line=dict(width=1)
))

# Añadir los datos de la categoría Robotics
fig.add_trace(go.Scatter(
    x=df_ro['Date'],
    y=df_ro['price'],
    mode='lines',
    name='Robotics',
    line=dict(width=1)
))

# Añadir los datos de la categoría Both
fig.add_trace(go.Scatter(
    x=df_both['Date'],
    y=df_both['price'],
    mode='lines',
    name='Ambos',
    line=dict(width=1)
))

# Añadir los datos de la categoría total índice
fig.add_trace(go.Scatter(
    x=df_all['Date'],
    y=df_all['price'],
    mode='lines',
    name='NQROBO',
    line=dict(width=1)
))

# Configuración del diseño
fig.update_layout(
    title='Inversión simulada por categoría',
    xaxis_title='Fecha',
    yaxis_title='Retorno (%) simulado',
    template='plotly',

```

```

        hovermode='x unified',
        legend=dict(
            title='Categoría',
            orientation='h',
            x=0.1,
            xanchor='center',
            y=-0.2
        )
    )
)

# Mostrar el gráfico interactivo
fig.show()

"""### 1.2.4 Métricas financieras por año y categoría"""

# Función para calcular estadísticas descriptivas anuales
def calcular_estadisticas_anuales(df, categoria):
    # Convertir la columna 'Date' a datetime si no lo está
    df['Date'] = pd.to_datetime(df['Date'])

    # Añadir una columna con el año
    df['Year'] = df['Date'].dt.year

    # Crear lista para almacenar resultados por año
    resultados_anuales = []

    # Iterar por cada año
    for year, group in df.groupby('Year'):
        # Calcular el retorno anual a partir del cumsum
        group['cumsum'] = group['Log Average Return'].cumsum() # Acumulado
del año
        retorno_anual = group['cumsum'].iloc[-1] # Último valor del acumulado
del año

        # Calcular la volatilidad anualizada
        volatilidad_anual = group['Log Average Return'].std() * np.sqrt(252) *
100 # Volatilidad anualizada (%)

        # Calcular otras métricas
        ratio_sharpe = retorno_anual * 100 / volatilidad_anual # Ratio de
Sharpe

        asimetria = group['Log Average Return'].skew() # Asimetría
        curtosis = group['Log Average Return'].kurtosis() # Curtosis

        # Prueba de Jarque-Bera
        jb_stat, jb_p_valor = jarque_bera(group['Log Average
Return'].dropna())

        # Agregar resultados del año a la lista
        resultados_anuales.append({
            "Categoría": categoria,
            "Año": year,
            "Retorno Anual (%)": retorno_anual * 100, # Convertido a
porcentaje
            "Volatilidad Anualizada (%)": volatilidad_anual,
            "Ratio de Sharpe": ratio_sharpe,

```

```

        "Asimetría": asimetria,
        "Curtosis": curtosis,
        "Estadístico de Jarque-Bera": round(jb_stat,3),
        "p-valor de Jarque-Bera": round(jb_p_valor,3)
    })

    return resultados_anuales

# Calcular estadísticas anuales para cada dataframe
estadisticas_ai_anuales = calcular_estadisticas_anuales(df_ai, "AI")
estadisticas_ro_anuales = calcular_estadisticas_anuales(df_ro, "Robótica")
estadisticas_both_anuales = calcular_estadisticas_anuales(df_both, "Ambas")

# Combinar los resultados en un único dataframe
resultados_anuales = pd.DataFrame(estadisticas_ai_anuales +
estadisticas_ro_anuales + estadisticas_both_anuales)

resultados_anuales

# Guardar los resultados en un archivo Excel - Nombre del archivo
nombre_archivo = "resultados_anuales.xlsx"

# Exportar el DataFrame a un archivo Excel
resultados_anuales.to_excel(nombre_archivo, index=False)

print(f"Los resultados anuales se han guardado en el archivo:
{nombre_archivo}")

resultados_anuales

"""
"""
## 2. Análisis MF-DFA

### 2.1 Definición funciones para el análisis
"""

def get_mfdfa(data,
    lag_start=None,
    lag_end=None,
    lag_steps=None,
    q=None,
    mode='fgn',
    iterations=1000,
    order=1,
    integrate=True,
    window=None):
    """
    Wrapper around the MFDFA package

    :param data: time series
    :param lag_start: minimum lag
    :param lag_end: maximum lag (if not provided, len(data)//6)
    :param lag_steps: how many lags to generate

```

```

:param q: power q
:param order: order of polynomial fitting
:return:
"""

def _integrate(data):
    mean = data.mean()
    return (data - mean).cumsum()

def _power_variations(q_min, q_max, q_steps):
    q = np.linspace(q_min, q_max, q_steps)
    q = q[q != .0]
    return q

data_length = len(data)

if lag_start is None:
    # if lag_start is not provided explicitly,
    lag_start = 3

if lag_end is None:
    # if lag_end is not provided explicitly,
    lag_end = data_length // 3 #6 check

if lag_steps is None:
    # if lag_steps is not provided explicitly,
    lag_steps = min(100, data_length // 6)

# Select a band of lags, which usually ranges from
# very small segments of data, to very long ones, as
# Notice these must be ints, since these will segment
# the data into chunks of lag size
#
# logspace uses log10
lags = np.unique(np.logspace(np.log10(lag_start), np.log10(lag_end),
lag_steps).astype(int))

# q power variations, removing the 0 power
if q is None:
    q = _power_variations(-5, +5, 61)

if mode == 'normal':
    # override
    iterations = 1

# Obtain the (MF)DFA as
extensions = {}
if window:
    extensions['window'] = window

dfa_list = []

for iter in range(iterations):
    #print(f'get_mfdfa(): {iter=} / {iterations}')

```

```

if mode == 'shuffle':
    # shuffle data
    data = np.random.permutation(data)

if mode == 'fgn':
    data = generate_fractional_gaussian_noise(0.5, len(data))

# integrate series
if integrate:
    integr_data = _integrate(data)
else:
    # passthrough
    integr_data = data

# Obtain the (MF)DFA as
extensions = {}
if window:
    extensions['window'] = window

# using MFDFA package to calculate the multifractal DFA
lag, dfa = MFDFA(integr_data, lag=lags, q=q, order=order,
extensions=extensions)

dfa_list.append(dfa)

# Compute the average of the results

dfa = np.mean(dfa_list, axis=0)

# This "fine-tuning" should be done in a more robust way,
# by truncating the lag_start and lag_end values before and not here.
start = int(0.00 * lag.size)
end = int(0.60 * lag.size)

# And now we need to fit the line to find the slope. Don't
# forget that since you are plotting in a double logarithmic
# scales, you need to fit the logs of the results
slope = polyfit(np.log10(lag[start:end]), np.log10(dfa[start:end]), 1)[1]

# Hurst exponent
hq = slope - 1

# q-order mass exponent
tau = q * hq - 1

# q-order singularity exponent
alpha = np.gradient(tau) / np.gradient(q)

# Dimension (aka D(alpha))
Dalpha = q * alpha - tau

metrics = pd.DataFrame(index=q,
                        data={'slope': slope,

```

```

        'hq': hq,
        'tau': tau,
        'alpha': alpha,
        'Dalpha': Dalpha})

    spectral_width = metrics['alpha'].max() - metrics['alpha'].min()
    nn = len(metrics)
    peak = metrics.iloc[nn//2-2: nn//2+2]

    return q, lag, dfa, slope, hq, tau, alpha, Dalpha, metrics,
    spectral_width, peak

"""### 2.2 Generación ruido Gaussiano como benchmark de eficiencia"""

def generate_fractional_gaussian_noise(hurst, length):
    """
    Genera ruido Gaussiano fraccional (fGn) con un coeficiente de Hurst dado.
    Configura una semilla para resultados reproducibles.
    """

    # Inicializar el generador de ruido fraccional
    fbm_instance = FBM(n=length, hurst=hurst, length=1, method='daviesharte')
    # Generar la serie de ruido fraccional
    fgn = fbm_instance.fgn()
    return fgn

"""### 2.3 Comparación previo a corte temporal"""

def plot_comparativo_multifractal(q_results_list, categorias, filename=None):

    # Crear figura
    figure, axes = plt.subplots(1, 2, figsize=(15, 6))

    # Gráfico 1: Comparación de Hurst Generalizado (h(q))
    for q_results, categoria in zip(q_results_list, categorias):
        axes[0].plot(q_results.index, q_results.hq, '-', label=categoria)
        axes[0].axvline(x=2, color='red', linestyle='dashed', linewidth=0.8,
label='_nolegend_') # Línea sin leyenda
        axes[0].set(title='Generalized Hurst exponents: $h(q)$', xlabel=r'$q$',
ylabel=r'$h(q)$', ylim=[-0.1, 1.8])
        axes[0].legend()
        # Añadir cuadro de texto
        axes[0].text(0.70, 0.05, 'q = 2 - Monofractal Analysis', color='red',
transform=axes[0].transAxes, fontsize=10,
                    ha='right', va='bottom', bbox=dict(boxstyle='round,pad=0.2',
fc='white', ec='red', lw=0.5))

    # Gráfico 2: Comparación del Espectro de Singularidad
    for q_results, categoria in zip(q_results_list, categorias):
        axes[1].plot(q_results.alpha, q_results.Dalpha, '-', label=categoria)
        axes[1].axvline(x=0.5, color='blue', linestyle='dashed',
linewidth=0.8, label='_nolegend_') # Línea sin leyenda
        axes[1].set(title='Singularity spectrum', xlabel=r'$\alpha$',
ylabel=r'$D(\alpha)$')
        axes[1].legend()

```

```

# Añadir cuadro de texto
axes[1].text(0.30, 0.05, r'\alpha = 0.5$ - Efficiency', color='blue',
transform=axes[1].transAxes, fontsize=10,
             ha='right', va='bottom', bbox=dict(boxstyle='round,pad=0.2',
fc='white', ec='blue', lw=0.5))

# Ajustar diseño
plt.tight_layout()

# Guardar gráficos si se da como input un nombre de archivo
if filename:
    plt.savefig(filename, dpi=300)

# Mostrar gráficos
plt.show()

def aplicar_y_graficar(df, categoria,modo):
    """
    Aplica el análisis MF-DFA a un dataframe y devuelve los resultados.
    """
    # Cálculo de MF-DFA
    q, lag, dfa, slope, hq, tau, alpha, Dalpha, metrics, spectral_width,peak =
    get_mfdfa(
        df['Log Average Return'].dropna().values,
        lag_start=None,
        lag_end=None,
        lag_steps=None,
        q=None,
        mode= modo ,
        iterations=1000,
        order=1,
        integrate=True,
        window=None
    )

    # Crear un dataframe con los resultados
    q_results = pd.DataFrame({'hq': hq, 'tau': tau, 'alpha': alpha, 'Dalpha':
    Dalpha}, index=q)
    print(f'{categoria} - Ancho del espectro multifractal: {spectral_width}')
    return q_results

# Cálculo para cada categoría
q_results_ai = aplicar_y_graficar(df_ai, "AI", "normal")
q_results_ro = aplicar_y_graficar(df_ro, "Robotics", "normal")
q_results_both = aplicar_y_graficar(df_both, "Both", "normal")
q_results_sp500 = aplicar_y_graficar(sp_index, "SP500", "normal")
q_results_benchmarkt= aplicar_y_graficar(df_ai, "Gaussian H=0.5", "fgn")

# Lista de resultados y categorías
q_results_list = [q_results_ai, q_results_ro,
q_results_both,q_results_benchmarkt,q_results_sp500]
categorias = ["AI", "Robotics", "Both", "Gaussian H=0.5", "SP500"]

```

```

# Generar gráficos comparativos
plot_comparativo_multifractal(q_results_list,
categorias,filename="General.png")

"""### 2.4 Comparación tras corte temporal"""

def dividir_por_fecha(df, cutoff_date, categoria):
    """
    Divide un dataframe en dos según una fecha de corte.
    """
    before = df[df['Date'] < cutoff_date].copy()
    after = df[df['Date'] >= cutoff_date].copy()
    return before, after

# Fecha de corte
cutoff_date = pd.to_datetime("2020-03-11")

# Dividir los dataframes por fecha
df_ai_before, df_ai_after = dividir_por_fecha(df_ai, cutoff_date, "AI")
df_ro_before, df_ro_after = dividir_por_fecha(df_ro, cutoff_date, "Robotics")
df_both_before, df_both_after = dividir_por_fecha(df_both, cutoff_date,
"Both")
df_sp500_before, df_sp500_after = dividir_por_fecha(sp_index, cutoff_date,
"SP500")

# Aplicar análisis a los dataframes divididos
q_results_ai_before = aplicar_y_graficar(df_ai_before, "AI Before
2020", "normal")
q_results_ai_after = aplicar_y_graficar(df_ai_after, "AI After 2020", "normal")

q_results_ro_before = aplicar_y_graficar(df_ro_before, "Robotics Before
2020", "normal")
q_results_ro_after = aplicar_y_graficar(df_ro_after, "Robotics After
2020", "normal")

q_results_both_before = aplicar_y_graficar(df_both_before, "Both Before
2020", "normal")
q_results_both_after = aplicar_y_graficar(df_both_after, "Both After
2020", "normal")

q_results_sp500_before = aplicar_y_graficar(df_sp500_before, "SP500 Before
2020", "normal")
q_results_sp500_after = aplicar_y_graficar(df_sp500_after, "SP500 After
2020", "normal")

q_results_gauss = aplicar_y_graficar(df_both, "Gaussian H=0.5", "fgn")

# Generar gráficos comparativos

plot_comparativo_multifractal(
[q_results_ai_before, q_results_ai_after,
q_results_gauss, q_results_sp500_before, q_results_sp500_after],

```

```

    ["AI Before 2020", "AI After 2020", "Gaussian H=0.5", "SP500 Before
2020", "SP500 After 2020"],
    filename="grafico_ai.svg"
)

plot_comparativo_multifractal(
    [q_results_ro_before, q_results_ro_after,
q_results_gauss, q_results_sp500_before, q_results_sp500_after],
    ["Robotics Before 2020", "Robotics After 2020", "Gaussian H=0.5", "SP500
Before 2020", "SP500 After 2020"],
    filename="grafico_robotics.svg"
)

plot_comparativo_multifractal(
    [q_results_both_before, q_results_both_after,
q_results_gauss, q_results_sp500_before, q_results_sp500_after],
    ["Both Before 2020", "Both After 2020", "Gaussian H=0.5", "SP500 Before
2020", "SP500 After 2020"],
    filename="grafico_both.svg"
)

""### 2.5 Shuffle de los datos

Shuffle de los datos para conocer fuente de multifractalidad
""

q_results_ai_before_shuffle = aplicar_y_graficar(df_ai_before, "AI Before
2020", "shuffle")
q_results_ai_after_shuffle = aplicar_y_graficar(df_ai_after, "AI After
2020", "shuffle")

q_results_ro_before_shuffle = aplicar_y_graficar(df_ro_before, "Robotics
Before 2020", "shuffle")
q_results_ro_after_shuffle = aplicar_y_graficar(df_ro_after, "Robotics After
2020", "shuffle")

q_results_both_before_shuffle = aplicar_y_graficar(df_both_before, "Both
Before 2020", "shuffle")
q_results_both_after_shuffle = aplicar_y_graficar(df_both_after, "Both After
2020", "shuffle")

q_results_sp500_before_shuffle = aplicar_y_graficar(df_sp500_before, "SP500
Before 2020", "shuffle")
q_results_sp500_after_shuffle = aplicar_y_graficar(df_sp500_after, "SP500
After 2020", "shuffle")

df_antes = [
    q_results_ai_before, q_results_ai_before_shuffle,
    q_results_ro_before, q_results_ro_before_shuffle,
    q_results_both_before, q_results_both_before_shuffle,
    q_results_sp500_before, q_results_sp500_before_shuffle
]

# Nombres cada DataFrame
df_names = [
    "AI Before", "AI Before Shuffle",

```

```

    "RO Before", "RO Before Shuffle",
    "Both Before", "Both Before Shuffle",
    "SP500 Before", "SP500 Before Shuffle"
]

# Lista para almacenar resultados
results_antes = []

# Iterar sobre los DataFrames
for name, df in zip(df_names, df_antes):
    n = len(df) # Número de filas en el DataFrame

    # Calcular ancho espectro
    spectral_width = df['alpha'].max() - df['alpha'].min()

    # Calcular MDM
    MDM = 0.5 * (abs(df['hq'].min() - 0.5) + abs(df['hq'].max() - 0.5))

    # Calcular el valor pico
    peak = df.iloc[n // 2 - 1: n // 2 + 1] # Selección de filas en el centro
    peak = peak.mean() # Promedio de las filas seleccionadas
    peak_alpha = peak["alpha"] # Extraer el valor de "alpha"

    # Agregar los resultados a la lista con el nombre
    results_antes.append([name, spectral_width, MDM, peak_alpha])

# Crear un DataFrame con los resultados
result_antes_df = pd.DataFrame(
    results_antes,
    columns=['Name', 'Spectral Width', 'MDM', 'Peak Alpha']
)

# Mostrar el DataFrame resultante
result_antes_df

df_antes = [
    q_results_ai_before, q_results_ai_before_shuffle,
    q_results_ro_before, q_results_ro_before_shuffle,
    q_results_both_before, q_results_both_before_shuffle,
    q_results_sp500_before, q_results_sp500_before_shuffle
]

# Nombres filas
df_names = [
    "AI Before", "AI Before Shuffle",
    "RO Before", "RO Before Shuffle",
    "Both Before", "Both Before Shuffle",
    "SP500 Before", "SP500 Before Shuffle"
]

# Lista para resultados
results_antes = []

for name, df in zip(df_names, df_antes):
    n = len(df) # Número de filas en el DataFrame

```

```

# Calcular amplitud del espectro
spectral_width = df['alpha'].max() - df['alpha'].min()

# Calcular MDM
MDM = 0.5 * (abs(df['hq'].min() - 0.5) + abs(df['hq'].max() - 0.5))

# Calcular el valor pico
peak = df.iloc[n // 2 - 1: n // 2 + 1] # Selección de filas en el centro
peak = peak.mean() # Promedio de las filas seleccionadas
peak_alpha = peak["alpha"] # Extraer el valor de "alpha"

# Agregar los resultados a la lista con el nombre
results_antes.append([name, spectral_width, MDM, peak_alpha])

# Crear un DataFrame con los resultados
result_antes_df = pd.DataFrame(
    results_antes,
    columns=['Name', 'Spectral Width', 'MDM', 'Peak Alpha']
)

# Mostrar el DataFrame resultante
result_antes_df

df_after = [
    q_results_ai_after, q_results_ai_after_shuffle,
    q_results_ro_after, q_results_ro_after_shuffle,
    q_results_both_after, q_results_both_after_shuffle,
    q_results_sp500_after, q_results_sp500_after_shuffle
]

# Nombres para cada DataFrame
df_names = [
    "AI After", "AI After Shuffle",
    "RO After", "RO After Shuffle",
    "Both After", "Both After Shuffle",
    "SP500 After", "SP500 After Shuffle"
]

# Lista para almacenar resultados
results_after = []

# Iterar sobre los DataFrames
for name, df in zip(df_names, df_after):
    n = len(df) # Número de filas en el DataFrame

    # Calcular ancho espectral
    spectral_width = df['alpha'].max() - df['alpha'].min()

    # Calcular MDM
    MDM = 0.5 * (abs(df['hq'].min() - 0.5) + abs(df['hq'].max() - 0.5))

    # Calcular el valor pico
    peak = df.iloc[n // 2 - 1: n // 2 + 1] # Selección de filas en el centro
    peak = peak.mean() # Promedio de las filas seleccionadas

```

```
peak_alpha = peak["alpha"] # Extraer el valor de "alpha"

# Agregar los resultados a la lista con el nombre
results_after.append([name, spectral_width, MDM, peak_alpha])

# Crear un DataFrame con los resultados
result_after_df = pd.DataFrame(
    results_after,
    columns=['Name', 'Spectral Width', 'MDM', 'Peak Alpha']
)

# Mostrar el DataFrame resultante
result_after_df
```