Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales
ICADE

Consecuencias del supuesto de no arbitraje para la valoración de opciones financieras: Comprobación de la paridad Put-Call

Autor: Lucía Martínez Echeverría
Directora: Susana Carabias López

MADRID | Marzo 2025

RESUMEN

Este Trabajo de Fin de Grado analiza la relevancia del concepto de arbitraje y, en particular, el supuesto de ausencia de oportunidades de arbitraje como pilar fundamental de la teoría financiera moderna. Este principio no solo garantiza la coherencia de los precios en los mercados, sino que también permite construir modelos de valoración robustos y universales, especialmente en el ámbito de las opciones financieras. Entre las distintas aplicaciones de la hipótesis de no arbitraje, la paridad Put-Call establece una relación necesaria entre el precio de las opciones de compra y de venta sobre un mismo activo subyacente. Esta paridad actúa como un criterio de valoración para opciones financieras que permite detectar inconsistencias y oportunidades de beneficio sin riesgo. El análisis de esta paridad ofrece una vía para comprender cómo los fundamentos teóricos de las finanzas se traducen en condiciones verificables en los mercados reales.

Palabras clave: arbitraje, supuesto de ausencia de oportunidades de arbitraje, opciones financieras, valoración de opciones, paridad Put-Call, modelo Black-Scholes, modelo binomial.

ABSTRACT

This Final Thesis examines the relevance of the concept of arbitrage, and particularly the principle of no-arbitrage as a fundamental pillar of modern financial theory. This principle not only ensures price consistency in financial markets but also enables the construction of robust and broadly used valuation models, especially in the field of financial options. Among the various applications of the no-arbitrage hypothesis, the Put-Call parity establishes a necessary relationship between the prices of Call and Put options on the same underlying asset. This equality serves as a valuation criterion for options to detect inconsistencies and risk-free profit opportunities. The analysis of this parity provides a way to understand how the theoretical foundations of finance are reflected in verifiable conditions in real markets.

Keywords: arbitrage, principle of no-arbitrage, financial options, option pricing, Put-Call parity, Black-Scholes model, binomial model.

ÍNDICE

ÍNDICE DE GRÁFICAS

ÍNDICE DE TABLAS

1. INTRODUCCIÓN

1.1. Objetivos

Las primeras referencias a los contratos de derivados financieros se remontan a la Antigua Grecia de la mano del filósofo y matemático Tales de Mileto. Gracias a su intuición, predijo una cosecha abundante de aceitunas y negoció con los dueños de las prensas de aceite el derecho, pero no la obligación, de alquilarlas a un precio fijo en el futuro. La alta demanda de aceitunas permitió que sus previsiones dieran sus frutos y pudiera subarrendar las prensas a un precio más elevado. De esta forma, no solo obtuvo un beneficio, sino que también creó un instrumento financiero al que hoy se le denomina opción de compra o *Call*. Este episodio, aunque histórico, revela los principios económicos que subyacen a los contratos de opciones modernas.

A lo largo del tiempo, los derivados financieros, en particular las opciones, han adquirido gran relevancia en los mercados. Su valoración, sin embargo, no está exenta de complejidad, ya que requiere el uso de modelos matemáticos precisos y supuestos rigurosos. Entre ellos, destaca el principio de ausencia de oportunidades de arbitraje (AOA), considerado uno de los pilares de la teoría financiera moderna. Este principio, basado en la coherencia de los precios en el mercado, sostiene que no deben existir posibilidades de obtener beneficios sin riesgo ni inversión inicial. Su aplicación permite garantizar valoraciones consistentes y evitar desequilibrios en los precios de los activos financieros.

En este contexto, el presente trabajo tiene como objetivo principal presentar el concepto de arbitraje como fundamento teórico en la valoración financiera, con especial atención a su aplicación en el ámbito de las opciones financieras. Para ello, se compararán las definiciones formales del concepto de arbitraje, se estudiarán las consecuencias de la hipótesis de AOA y los modelos de valoración de opciones más relevantes, el modelo de Black-Scholes (Black y Scholes, 1973) y el modelo binomial de Cox-Ross-Rubinstein (Cox et al., 1979). Para ilustrar la aplicación de la valoración bajo el supuesto de no arbitraje, se desarrollará un ejercicio de obtención de un tipo de interés implícito a partir de la paridad Put-Call.

1.2. Justificación del Tema

El concepto de arbitraje posee una base lógica sencilla, obtener un beneficio sin riesgo a partir de inconsistencias en los precios del mercado. Esta idea, accesible desde un punto de vista intuitivo, se convierte en una herramienta poderosa cuando se formaliza mediante modelos financieros. Su atractivo radica precisamente en esa combinación de simplicidad conceptual y rigor técnico, lo que lo convierte en un campo de estudio especialmente interesante para la teoría y la práctica financiera.

Entre los múltiples resultados derivados del principio de no arbitraje, la paridad Put-Call destaca por su carácter robusto, su sencillez conceptual y su amplia aplicabilidad en los mercados financieros. Esta relación establece un vínculo fundamental entre las opciones de compra y de venta, proporcionando un criterio claro para evaluar la coherencia en sus precios.

Pese a su importancia teórica, la literatura académica se centra en modelos más complejos, dejando en segundo plano la verificación práctica de esta relación fundamental. Por ello, se considera pertinente ilustrar cómo conceptos como el arbitraje o la paridad Put-Call no solo son formulaciones abstractas, sino también herramientas útiles para interpretar y evaluar precios en condiciones reales.

1.3. Estructura y Metodología

La metodología adoptada en este trabajo combina un enfoque teórico y práctico. En primer lugar, se realiza una revisión de la literatura académica, con el objetivo de establecer una base conceptual sólida sobre la que construir el análisis. Se abordarán definiciones clave, formalizaciones matemáticas y principales implicaciones del arbitraje en el marco de la valoración de activos financieros. Posteriormente, se presentarán los conceptos básicos de la valoración de las opciones financieras y los modelos de valoración más representativos, el modelo binomial y el modelo de Black-Scholes.

Una vez expuestos los fundamentos teóricos, se llevará a cabo un estudio cuantitativo centrado en la aplicación práctica de la paridad Put-Call. Para ello, se emplearán datos reales de mercado correspondientes a opciones europeas sobre acciones del Banco Santander. A partir de estos datos, se calcularán tasas de interés implícitas bajo distintos enfoques temporales, con el objetivo de valorar la consistencia del modelo teórico y detectar posibles desviaciones.

El conjunto del análisis responde a una lógica deductiva, en la que los conceptos generales y principios fundamentales sirven de guía para interpretar y evaluar casos reales en el mercado. Esta aproximación permite no solo validar los modelos desde un punto de vista teórico, sino también examinar su aplicabilidad y utilidad en la práctica financiera real.

2. ARBITRAJE

2.1. El concepto de arbitraje en la valoración financiera

Dado un activo financiero, su valoración consiste en estimar el precio que debe tener dicho activo, es decir, valorar los derechos adquiridos sobre una promesa de recursos futuros contingentes, ajustando la preferencia temporal y el riesgo que conlleva la inversión (Marín y Rubio, 2004). El análisis de una inversión implica evaluar distintas alternativas para decidir cuál es preferible de acuerdo con las expectativas y condiciones establecidas (Luenberger, 1998).

La mayoría de las inversiones se realizan dentro del contexto de los mercados financieros, los cuales presentan un amplio abanico de posibilidades que no se hallan en otros ámbitos de toma de decisiones, gracias a su transparencia institucional, y a su profundidad, amplitud y flexibilidad referentes a la oferta y la demanda (Martín y Trujillo, 2004). Estas características distintivas son las que confieren al análisis de inversión su singularidad y gran potencial (Luenberger,1998). No obstante, la metodología aplicada para determinar la valoración financiera de un activo está condicionada por la naturaleza del instrumento a evaluar y las variables conocidas.

Definido el problema de valoración, dos enfoques fundamentales sirven como base para la construcción de la economía financiera, proporcionando los cimientos para el análisis y la valoración de activos: técnicas de equilibrio y técnicas de ausencia de arbitraje (Marín y Rubio, 2004).

Las primeras explican la formación de precios fundamentándose en el comportamiento de los agentes en el mercado, es decir, en la fuerza de la oferta y la demanda. Se dirá que un mercado alcanza el equilibrio cuando la cantidad demandada por los agentes coincide exactamente con la cantidad ofrecida, dadas las preferencias y dotaciones iniciales de estos.

No obstante, los métodos de valoración de activos presentan divergencias fundamentales. Mientras que la valoración basada en el modelo de equilibrio se sustenta en la maximización del índice de satisfacción de los consumidores en un mercado perfecto, la valoración por arbitraje se apoya en el principio de comparación y su exigencia de coherencia en los precios disponibles en el mercado (Marín y Rubio, 2004).

Las valoraciones basadas en técnicas de ausencia de arbitraje se fundamentan en un menor número de supuestos, lo que las hace más robustas. Son una aplicación del principio de comparación. Este consiste en contrastar la oportunidad de inversión en cuestión con otras alternativas disponibles en el mercado financiero. De esta manera, el mercado actúa como un referente que permite establecer un juicio valorativo (Luenberger, 1998). Esta técnica de valoración se puede apreciar en una situación en la que un individuo debe decidir si invierte en un instrumento que otorga pagos determinados comparándolo con el resto de los activos de características similares en el mercado. Se aceptará la inversión si la tasa de retorno del activo es superior a la tasa de mercado considerada normal. De lo contrario, se rechazará.

Tanto el principio de equilibrio como las técnicas de oportunidades de arbitraje no son excluyentes entre sí, ya que las conclusiones resultantes del modelo de equilibrio deben respetar el principio de ausencia de oportunidades de arbitraje (AOA). Consecuentemente, las acciones individuales son consistentes con la situación de equilibrio, eliminando cualquier incentivo de los agentes para cambiar su comportamiento (Marín y Rubio, 2004).

Intuitivamente, arbitraje se puede entender como la posibilidad de ganar dinero sin inversión inicial y sin riesgo de pérdida.

Pongamos un ejemplo simplificado con un bien de uso común como la gasolina. Si la gasolina cuesta menos en Valencia que en Madrid, uno puede beneficiarse de la diferencia de precios en las distintas ciudades comprando gasolina en Valencia y revendiéndola en Madrid.

Consideremos el caso de dos instituciones financieras que ofrecen tasas de interés idénticas para préstamos y depósitos. Si una de ellas ofrece una tasa superior, un inversor podría obtener beneficios sin riesgo al solicitar un préstamo a la tasa más baja y depositar el monto obtenido a la tasa más alta (Luenberger, 1998).

Finalmente, supongamos que nos encontramos en el mercado de divisas. Observamos que hay dos cotizaciones de operadores diferentes para un mismo tipo de cambio euro/libra esterlina (EUR/GBP), de 1,15 EUR/GBP y de 1,2 EUR/GBP respectivamente. Si queremos obtener un beneficio en esta situación, deberíamos comprar euros al tipo de cambio más barato, esto es a 1,2 EUR/GBP, y venderlos simultáneamente más caros a 1,15 EUR/GBP. La diferencia entre estos dos tipos de cambio nos permite obtener una ganancia sin asumir ningún riesgo (Cvitanić y Zapatero, 2004).

Los tres ejemplos expuestos comparten la esencia del arbitraje. Desde la compra y venta de gasolina entre ciudades con precios distintos, pasando por el aprovechamiento de diferencias en tasas de interés entre instituciones financieras, hasta la explotación de variaciones en tipos de cambio en el mercado de divisas, todos ilustran la premisa intuitiva de comprar barato y vender caro simultáneamente. Aunque la complejidad del escenario varíe al aplicar mercados financieros más avanzados, el principio subyacente del arbitraje permanece constante. Por lo tanto, podríamos definir arbitraje como una forma de obtener un beneficio con una cartera de activos sin necesidad de desembolso inicial y libre de riesgo (Luenberger, 1998).

2.2. Formalización del concepto de arbitraje

2.2.1. Elementos formales de la modelización financiera

Para poder formalizar el concepto de arbitraje, resulta necesario identificar y definir cada uno de los elementos involucrados en la modelización de un mercado financiero.

En primer lugar, un activo financiero se define como un título o instrumento financiero que otorga derechos económicos y de propiedad a quienes invierten en ellos (Cvitanić y Zapatero, 2004). Estos derechos conceden a sus propietarios la capacidad de obtener beneficios económicos por su posesión o uso durante un periodo de tiempo determinado (Fondo Monetario Internacional, 2001). Del mismo modo, una cartera de activos es la selección y combinación de activos financieros en la que un individuo desea invertir. Esta se representa en forma de vector $V = (X_1, X_2, \ldots X_N)$ donde X_1 = número de títulos del activo 1, X_2 es el número de títulos del activo 2, y así sucesivamente.

Si $X_i > 0$, indica que se está tomando una posición larga, es decir, el inversor estaría comprando un título, como por ejemplo una acción. Si $X_i < 0$, se hablaría de una posición corta. En el caso de un activo sin riesgo, un bono, una posición corta consistiría en emitirlo, esto es, solicitar un préstamo; con una acción, tomar una posición corta sería venderla sin poseerla tomándola prestada, y adquirirla en un momento posterior. Normalmente, si un inversor prevé una tendencia alcista en una acción, tomará una posición larga en ella. Por el contrario, un inversor que prevé una bajada de precio optará por una posición corta (Cvitanić y Zapatero, 2004).

Independientemente del estado en el que se encuentre la economía, si un inversor debe decidir entre dos activos con el mismo precio, elegirá el activo que otorgue pagos mayores (Koch-Medina y Merino, 2003). Por tanto, un primer supuesto parte de que un individuo siempre preferirá más a menos riqueza. Dada una cantidad de dinero invertida en un activo financiero o cartera de activos, el rendimiento de una inversión se mide en función de la riqueza o beneficio generado por dicho activo o cartera. El riesgo es la posibilidad de que una inversión no produzca los resultados esperados. Una segunda hipótesis que se suele incorporar a los modelos es la aversión al riesgo de los inversores. En una situación de igual rentabilidad, se prefiere menor riesgo. Normalmente, en los mercados, cuanto mayor rendimiento se desea conseguir, mayor será el riesgo al que se está expuesto.

Igualmente, es necesario definir el tiempo o duración en el cual se puede invertir, y, dentro de este, las fechas en las que se va a negociar o comercializar con los activos financieros (Koch-Medina y Merino, 2003).

La definición de la variable tiempo tiene un impacto significativo en la complejidad de los modelos o métodos matemáticos empleados en el análisis financiero. Se hablará de un modelo estático cuando solamente se consideren dos momentos en el tiempo: el inicial, $t = 0$, esto es el momento presente; y el final, $t = 1$, que se corresponde con un momento concreto en el futuro. De este modo, el valor de un activo en su momento inicial quedaría especificado como $S(t = 0) = S_0$, y el precio final como $S(t = 1) = S_1$

En contraposición, los modelos dinámicos abordan la evolución temporal de las variables. Estos se dividen en discretos y continuos. Los primeros miden el tiempo en número de periodos transcurridos dada su duración. Describen la trayectoria del precio de un activo como una función $S(t) = S_t$ donde t pertenece a un conjunto discreto $t = t_0, t_1, \dots, T$. Por su parte, los modelos continuos emplean la variable temporal en el conjunto de los números reales, representando cada uno de ellos un instante del tiempo. En la función $S(t)$, t pertenecería al subconjunto de los números reales.

Habitualmente, existe una incertidumbre inherente a las trayectorias de los precios de los activos y las variables relevantes. A lo sumo, se podrían conocer las posibles trayectorias de ciertos fenómenos y sus probabilidades asociadas en un momento inicial. Al conjunto de trayectorias aleatorias y respectivas probabilidades se le denomina proceso estocástico (Carabias, 2016). Es preciso señalar la fluctuación de los mercados financieros, caracterizada por la negociación dinámica e incierta en el tiempo de instrumentos similares, ya que implica que los precios futuros de los activos no se conciban como valores estáticos, sino como procesos temporales sujetos a incertidumbre (Luenberger, 1998).

Los estados de la economía en el contexto de la modelización matemática representan todas las posibles condiciones en las que el mercado puede encontrarse en el momento de negociación o intercambio. En una situación dada, es crucial delimitar el problema y analizar las variables relevantes en cada contexto, especialmente en aquellos escenarios más específicos y coyunturales. Resulta conveniente analizar especialmente aquellos estados que constituyen una influencia significativa sobre el entorno económico que se busca representar (Koch-Medina y Merino, 2003).

El tipo de modelo con el que se trabaje dependerá de factores como el número de activos negociados en el mercado, el comportamiento de los agentes que intervienen en él, ya sea sus preferencias, expectativas o dotaciones iniciales, y la variable tiempo. Todos ellos son factores determinantes de los precios disponibles en los mercados.

2.2.2. Definición formal de arbitraje

Como ya se ha indicado, el arbitraje se da cuando hay una oportunidad de ganar con una probabilidad positiva, sin inversión inicial y sin riesgo de perder (Cvitanić y Zapatero, 2004). Este concepto, aunque sencillo en su formulación básica, se manifiesta en los diversos mercados financieros, desde la compraventa de bienes entre ubicaciones con precios diferentes, hasta operaciones complejas en mercados de tipos de cambio. Es preciso señalar que para cada modelo matemático hay una definición formal de arbitraje, puesto que esta cambia en función del tipo de modelo con el que se esté trabajando. La función de estos es simplificar la compleja realidad que tratan de representar. A continuación, se explorarán las aportaciones de distintos autores a este concepto fundamental en las finanzas.

Capiński y Zastawniak (2011) suponen que el valor de una cartera de activos o riqueza total de un inversor siempre debe ser no negativa. Para exponer su planteamiento formal de arbitraje trabajan con un modelo estático.

> (…) cartera admisible con valor inicial $V(0) = 0$ tal que $V(1) > 0$ con probabilidad distinta de cero. (Capiński y Zastawniak, 2011, p.7).

Observemos que la notación empleada utiliza V para denominar el valor de la cartera de activos. El valor que se encuentra entre paréntesis hace referencia al momento temporal, siendo 0 el momento inicial y 1 el momento futuro concreto. $V(0) = 0$ representa la inversión inicial nula. La expresión $V(1) > 0$ quiere decir que el ingreso futuro va a ser estrictamente mayor que cero. Recuérdese que los autores habían supuesto previamente que $V(t) \geq 0$ siempre.

De acuerdo con la definición de arbitraje de Musiela y Rutkowski (2007) para un modelo dinámico:

> (…) Un modelo de valoración de activos M está libre de arbitraje si no existe ninguna cartera φ ∈ Φ para la cual:
>
> $V_0(\varphi) = 0, V_t(\varphi) \geq 0 \; y \; P[V_t(\varphi) > 0] > 0$ (Musiela y Rutkowski 2007, p.15)

Señalar que esta notación difiere de la formalización anterior ya que se está trabajando con un modelo distinto, un modelo dinámico. V sirve para designar el valor de la cartera de activos, la cual es representada en la expresión mediante φ. La notación de la variable tiempo aparece en forma de subíndice, y la igualdad $V_0(\varphi) = 0$ se corresponde con una inversión en una cartera φ sin coste inicial. $V_t(\varphi) \geq 0$ hace referencia al valor que tendrá el activo en un momento futuro concreto y $P[V_t(\varphi) > 0] > 0$ es la probabilidad no negativa de que la cartera genere un beneficio en el momento final. La segunda condición se podría formular de las siguientes maneras y ambas representarían el mismo concepto de obtener una ganancia futura con certeza: $P[V_t(\varphi) \geq 0] = 1 \; y \; P[V_t(\varphi) < 0] = 0$.

Las dos definiciones dadas plantean una formalización del concepto de arbitraje en la que existe una oportunidad de arbitraje que denominaremos de tipo I. Esto es si una inversión tiene un costo inicial nulo, una probabilidad cero de generar un valor negativo en el futuro y una probabilidad estrictamente positiva de obtener un beneficio al final. En otras palabras, se trata de una situación en la que un individuo no paga nada al principio y tiene la posibilidad de ganar algo más adelante (Luenberger, 1998).

Alternativamente, Musiela y Rutkowski (2007) plantean que:

> (…) Una oportunidad de arbitraje es una cartera φ para la cual:
>
> $V_0(\varphi) < 0 \; y \; V_t(\varphi) \geq 0$ (Musiela y Rutkowski 2007, p.15)

En esta formalización, la notación es la misma que la anterior ya que ambas pertenecen a los mismos autores. La diferencia radica en la primera condición puesto que, en comparación con las definiciones previas, el valor del activo o cartera $V_0(\varphi)$ en el momento inicial va a ser estrictamente negativo. Lo que significa que el inversor toma una posición corta al percibir un ingreso en el momento presente. Por ello, se representa el valor de la cartera con símbolo negativo. Incluso, no sería necesario exigir la tercera condición de la notación anterior ya que el inversor se ha beneficiado de la oportunidad de arbitraje al recibir una ganancia en el momento inicial sin asumir una obligación futura.

Por su parte, Cvitanić y Zapatero (2004) dan una definición de arbitraje para una cartera (δ_0, δ_1, …, δ_N) tal que:

$$\delta_0 B(0) + \delta_1 S_1(0) + \cdots + \delta_N S_N(0) < 0$$

y $\delta_0 B(1) + \delta_1 S_1^k(1) + \cdots + \delta_N S_N^k(1) = 0,\ k = 1, \ldots, K$. (Cvitanić y Zapatero 2004, p.85)

Esta formalización se apoya en un modelo estático y, de manera similar a la definición previa, el valor en el momento inicial de la cartera de activos va a ser negativo. Se trata de una cartera autofinanciada con una ganancia inmediata, lo cual equivale a la condición más simplificada de la notación anterior $V_0(\varphi) < 0$. δ_0 es la cantidad invertida en el activo sin riesgo o bono, y $B(0)$ es el valor inicial de este. $\delta_1 S_1(0) + \cdots + \delta_N S_N(0)$ representa el número de activos con riesgo (δ_N) y el valor correspondiente de estos (S_N). Los subíndices denominan al activo con el que se negocia. Se designa $S_i^k(1)$ al pago del activo i si sucede el estado k en el momento 1 (Cvitanić y Zapatero, 2004). Nuevamente, el momento temporal viene dado por el número entre paréntesis. Obsérvese que, si en la segunda condición el valor de la cartera fuera mayor o igual a cero, obtendríamos un beneficio adicional y también existiría arbitraje.

Una cartera para la cual se cumplen estas dos formalizaciones, se dice que presenta una oportunidad de arbitraje de tipo II. En este caso, es posible diseñar una cartera con la cual se ingresa dinero al principio del periodo sin ninguna obligación de pago futuro. Intuitivamente, consiste en obtener dinero al momento y nunca tener que pagar nada, o incluso tener la posibilidad de poder recibir nuevamente un beneficio (Luenberger, 1998).

Se ha comprobado a través de las diversas definiciones que, independientemente del autor al que se esté leyendo y la notación empleada, la naturaleza fundamental del arbitraje es la misma y, por ende, universal. Este carácter general permite que sea un concepto ampliamente aceptado y aplicado en la modelización financiera.

2.3. Supuestos básicos de los modelos de mercado

2.3.1. Supuesto de mercados perfectos

La hipótesis de mercados perfectos se emplea como marco teórico para analizar y explicar el funcionamiento de los mercados en condiciones ideales. Su utilidad radica en su uso como referencia para un análisis comparativo ya que ofrece una visión clara y simplificada de la complejidad del mundo real.

Los supuestos asumidos por este tipo de mercado son la ausencia de costes de transacción e impuestos y el libre acceso de los participantes al mercado (Rivera, 2002). No hay restricciones ni penalizaciones sobre el endeudamiento o las ventas en corto, ni limitaciones en la elección de la cartera (Cvitanić y Zapatero, 2004).

Un mercado perfecto es aquel en el que los agentes que intervienen en él pueden tomar decisiones de producción e inversión racionalmente. El precio de los activos negociados en este mercado debe reflejar al completo toda la información disponible (Fama, 1970). Esta información no tiene un coste asociado y está disponible para todos los inversores sin restricción alguna. De esta manera, todos los participantes del mercado poseen una información simétrica acerca de los activos negociados y sus precios (Mondragón-Hernández, 2011).

2.3.2. Supuesto de Ausencia de Oportunidades de Arbitraje (AOA)

Tomando como referencia un mercado perfecto, se puede afirmar que en este no podrían darse oportunidades de arbitraje, ya que esta condición impediría el equilibrio del mercado e implicaría un desajuste en los precios de los activos provocados por un cambio en el comportamiento de los agentes o una asimetría en la información disponible.

Sin embargo, la realidad difiere de la teoría, ya que puede darse la situación en la que exista una discrepancia en los precios del mercado. En dicho supuesto, los agentes, a los que en este caso denominaremos arbitrajistas, detectarían la oportunidad y emplearían estrategias de negociación para beneficiarse, haciendo desaparecer inmediatamente la disponibilidad de estos precios en el mercado, siempre y cuando estos agentes prefieran más riqueza a menos (Carabias, 2016). Un arbitrajista es un participante del mercado que capitaliza las disparidades en los precios para obtener ganancias sin riesgo. Si bien el número de arbitrajistas en el mercado es reducido, su actividad es notablemente mayor que la de otros inversores que toman posiciones a largo plazo (Musiela y Rutkowski, 2007).

Aunque teóricamente las oportunidades de arbitraje son posibles, no suceden con frecuencia en el mercado, puesto que, una vez identificadas, desaparecen rápidamente. A continuación, se ilustra cómo la actividad de los arbitrajistas contribuye a mantener los mercados libres de estas oportunidades. En el ejemplo del mercado de los tipos de divisa en el que había dos cotizaciones de operadores diferentes para un mismo tipo de cambio EUR/GBP, la demanda por el euro aumentará, haciendo que el operador que ofrece un tipo de cambio barato aumente la cotización del euro. Igualmente, si la oferta de euros crece, el operador que ofrecía un cambio más alto se verá obligado a reducirlo. De esta manera, llegaría un momento en el que las tasas se igualarían y la oportunidad de arbitraje desaparecería.

En caso de existir oportunidades de arbitraje, las ganancias generadas serían reducidas en comparación con el volumen de otro tipo de transacciones (Capiński y Zastawniak, 2011). Para que el arbitraje sea lucrativo, es necesario realizar operaciones con grandes capitales, lo cual impide el acceso a pequeños inversores. El arbitraje requiere acceso a información en tiempo real y una infraestructura tecnológica avanzada ya que, gracias a innovaciones como el trading algorítmico que funciona mediante algoritmos diseñados para realizar transacciones automáticamente al cumplirse ciertas condiciones, se pueden ejecutar órdenes de compra o venta en cuestión de segundos. Esto garantiza un nivel de precisión y rapidez que supera las capacidades humanas. Cumplir con estos requerimientos, implica asumir unos costes operativos más altos. Consecuentemente, la estrategia de arbitraje resulta menos atractiva.

La modelización financiera supone que ningún inversor puede garantizar un ingreso positivo sin asumir riesgo alguno y sin desembolsar un capital inicial. La existencia de una cartera que contradijera este principio implicaría la presencia de una oportunidad de arbitraje (Capiński y Zastawniak, 2011). Este supuesto se conoce como hipótesis o supuesto de ausencia de oportunidades de arbitraje (AOA).

Dado que las oportunidades de arbitraje no pueden mantenerse en los mercados financieros por periodos prolongados, es razonable que los modelos básicos partan del supuesto de que dichas oportunidades no existen (Elliott y Kopp, 1999). De hecho, gran parte de la literatura financiera se fundamenta en la ausencia de arbitraje para facilitar y analizar métodos de valoración de activos y estrategias de cobertura de posiciones financieras (Cvitanić y Zapatero, 2004).

Luenberger (1998) introduce en su planteamiento de modelización financiera el concepto de arbitraje como una condición que contradice la hipótesis de mercados perfectos:

> Si dos métodos de invertir dinero no devolvieran la misma cantidad, entonces existiría una oportunidad para obtener ganancias arbitrales (…). Asumimos que no es posible implementar este esquema en el mercado porque los potenciales arbitrajistas siempre están al tanto de estas discrepancias. Si surge una pequeña discrepancia, ellos la aprovechan, y esta acción tiende a cerrar la brecha en las tasas. Si la desigualdad fuera en la otra dirección, el arbitrajista simplemente podría invertir el procedimiento. Por lo tanto, la igualdad debe mantenerse. (Luenberger, 1998, p.78).

El supuesto de ausencia de arbitraje es la base de la valoración financiera al ser una aproximación realista a las condiciones de mercado perfecto. Los argumentos basados en este principio constituyen un pilar fundamental de las matemáticas financieras (Capiński y Zastawniak, 2011).

2.4. Consecuencias de la hipótesis AOA para la valoración financiera

2.4.1. Ley del precio único

La Ley del Precio Único establece que un mismo bien debe venderse al mismo precio en todos los lugares donde se comercialice una vez que los precios se han convertido a una moneda común (Haskel y Wolf, 2001). Es fácil intuir que, si dos activos dan derecho a los mismos capitales, estos deben tener el mismo precio inicial bajo el supuesto de AOA. En caso contrario, sería posible tomar una posición corta en el activo con un precio mayor y larga en el activo de menor precio. Se trataría de un arbitraje de tipo II en el que se genera un ingreso al comienzo del periodo, dado por la diferencia de precios, y pagos nulos al final (Carabias, 2016).

La hipótesis de no arbitraje proporciona un argumento para la valoración basado en el concepto de réplica. Capiński y Zastawniak (2011) desarrollan esta idea mediante la siguiente demostración.

> Supongamos que para cualquier derecho contingente $D(T)$ existe una estrategia de réplica, es decir, una estrategia admisible $x\,(t), y\,(t)$ con un valor final $V(T) = D(T)$. Entonces, el precio $D(0)$ del derecho contingente en el momento 0 debe ser igual al de la estrategia replicante, es decir, $V(0) = D(0)$. (…) Si $D(0) > V(0)$, entonces podríamos vender el derivado financiero y tomar una posición larga en la estrategia replicante. Nuestra obligación quedaría cubierta por la estrategia, y la diferencia $D(0) - V(0)$ representaría un beneficio por arbitraje. Si $D(0) < V(0)$, tomaríamos las

posiciones opuestas, generando un beneficio por arbitraje de $V(0) - D(0)$. (Capiński y Zastawniak, 2011, p.174-175).

Diremos que una cartera de activos replica un derecho contingente cuando su pago final coincide con el de este en todos los estados posibles. Cuando todos los derechos contingentes son replicables, se habla de un mercado completo. La completitud del mercado garantiza que puede calcularse un precio justo y único para cada activo. De esta manera, se pueden valorar todo tipo de activos a partir del precio de los distintos valores negociados. (Cvitanić y Zapatero, 2004). Si no se pueden replicar todos los capitales a los que da derecho una cartera con activos negociados en el mercado, este se considera incompleto.

La limitación de la metodología de valoración financiera es que solo permite asignar un valor único a activos cuyos rendimientos pueden ser replicados por otros activos que se negocian en los mercados financieros (Carabias, 2001).

2.4.2. Unicidad del tipo de interés sin riesgo

Bajo el supuesto de AOA, en un mercado financiero debe existir un único tipo de interés sin riesgo al que los inversores pueden prestar o pedir prestado a un plazo dado. Si existieran múltiples tasas de interés sin riesgo, surgirían oportunidades de arbitraje, que se conseguirían pidiendo préstamos a la tasa más baja e invirtiéndolos a la tasa más alta.

En su artículo original, Black y Scholes (1973) aplican este principio cuando exigen que el rendimiento de una cartera libre de riesgo debe ser único y coincidir con el tipo de interés sin riesgo para cumplir con el argumento de la AOA. Parten de que es posible formar una cartera sin riesgo mediante la combinación de una posición corta en una opción financiera de compra y una posición larga en su activo subyacente. La clave es construir una posición de cobertura dinámica en la que, al ajustar continuamente la proporción de ambos activos, se repliquen los movimientos de la opción con el activo subyacente, de manera que se elimine la incertidumbre y se garantice que el rendimiento de la cartera se iguala a la tasa de interés sin riesgo.

Cualquier cambio en el valor del activo subyacente se verá compensado por un cambio correspondiente en el valor de la opción, de modo que el valor de la cartera dependerá solamente de la variable tiempo y los valores de las constantes conocidas. Consecuentemente, si el mercado está libre de arbitraje, el rendimiento obtenido de dicha posición debe coincidir con el tipo de interés de los activos libres de riesgo para evitar oportunidades de arbitraje

(Azofra y Fernández, 1992). A partir de esta exigencia, se obtiene el valor de la prima de la opción.

2.4.3. Valor de una cartera con pagos finales nulos

En un mercado libre de arbitraje, una cartera de activos que concede pagos finales nulos en todos los estados posibles debe tener un valor inicial igual a cero. Si una cartera que no genera pagos en el futuro tuviera un valor positivo en el presente, sería posible obtener beneficios sin asumir riesgo simplemente vendiéndola. De esta manera, existiría una oportunidad de arbitraje de tipo II, garantizando una ganancia al principio sin necesidad de recomprar la cartera en un futuro. Este argumento se ha utilizado con menor frecuencia para la valoración de activos bajo la hipótesis de AOA.

2.4.4. Valoración neutral al riesgo y medidas de martingala

En la toma de decisiones de inversión, no solo se deben identificar aquellas oportunidades que ofrecen un mayor rendimiento, sino también aplicar metodologías de valoración que integren adecuadamente el riesgo de la inversión. Una de las aproximaciones más utilizadas es el descuento de los flujos de caja de un activo, que permite ajustar el valor del activo en función de su nivel de riesgo. Para ello, existen dos enfoques (Roggi et al., 2012).

El primero consiste en estimar el valor de un activo con riesgo descontando los flujos de caja esperados de dicho activo a lo largo de su vida a una tasa de descuento ajustada al riesgo. Para calcular los flujos de caja esperados del activo con riesgo, se deben considerar los flujos de caja bajo diferentes escenarios, las probabilidades correspondientes a estos escenarios y calcular un valor esperado a partir de ellos. A continuación, se estima una tasa de descuento ajustada al riesgo, compuesta por dos elementos, la tasa libre de riesgo y la prima de riesgo. Finalmente, se calcula el valor presente de los flujos de caja utilizando la tasa de descuento ajustada al riesgo (Roggi et al., 2012).

$$Valor\ del\ activo = \sum_{t=0}^{T} \frac{E(CF_t)}{(1+i)^t} = \frac{E(CF_1)}{(1+i)} + \frac{E(CF_2)}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{E(CF_n)}{(1+i)^n}$$

Donde el activo tiene una vida de n años, $E(CF_t)$ representa el flujo de caja esperado en el período t e i es la tasa de descuento que refleja el riesgo de los flujos de caja. En este método, el ajuste por riesgo se realiza a través de la tasa de descuento, mientras que los flujos de caja esperados no se modifican directamente.

Alternativamente, el segundo enfoque propone reemplazar los flujos de caja esperados por los flujos de caja garantizados que aceptaríamos como alternativa, llamados equivalentes ciertos, y descontarlos a la tasa libre de riesgo.

$$Valor\ del\ activo = \sum_{t=0}^{T} \frac{CE(CF_t)}{(1+r_f)^t} = \frac{CE(CF_1)}{(1+r_f)} + \frac{CE(CF_2)}{(1+r_f)^2} + \cdots + \frac{CE(CF_n)}{(1+r_f)^n}$$

Donde $CE(CF_t)$ es el equivalente cierto del flujo de caja esperado en el período t, $E(CF_t)$, y r_f es la tasa libre de riesgo.

Es importante destacar que, en este enfoque, los inputs más importantes son los flujos de caja de los equivalentes ciertos, que ya están ajustados al riesgo. Con ambos métodos, el valor presente de los flujos de caja determina el valor ajustado al riesgo del activo (Roggi et al., 2012).

De acuerdo con el primer enfoque, el valor de un derivado será igual al valor esperado de sus pagos futuros descontados al tipo de interés correspondiente dependiendo del riesgo del activo (Gisiger, 2010). No obstante, resulta complejo determinar la prima de riesgo correcta, ya que depende de factores difíciles de estimar en la práctica (Föllmer y Schied, 2004). En cambio, el segundo enfoque, encuentra un resultado que le da soporte teórico, este se denomina valoración neutral al riesgo. Establece que, si en un mercado no existen oportunidades de arbitraje, el valor de un derivado en el mundo real, donde los inversores no se comportan de forma neutral al riesgo, debe coincidir con el valor del mismo derivado en un mundo hipotético neutral al riesgo (Wilmott, 2014). La valoración neutral al riesgo permite que los modelos de valoración se puedan reformular en términos de una medida de probabilidad alternativa denominada probabilidad neutral al riesgo. Esta no es entendida como una probabilidad estadística, sino como una probabilidad equivalente o ajustada mediante la cual los precios de los activos reflejan los flujos de caja descontados a la tasa libre de riesgo, asegurando que la esperanza matemática coincida con el equivalente cierto.

Dos teoremas fundamentales de valoración de activos son la cuarta consecuencia de la hipótesis de AOA y el pilar de la valoración neutral al riesgo, la valoración de derivados y la teoría financiera moderna. Fueron formulados inicialmente por Harrison y Kreps (1979) y posteriormente ampliados por Harrison y Pliska (1981). Estos teoremas establecieron la base matemática para comprender la dinámica de la valoración en los mercados financieros y son clave para desarrollar el concepto de valoración neutral al riesgo.

El primer teorema relaciona el supuesto de AOA y la existencia de la probabilidad neutral al riesgo. Un mercado está libre de arbitraje si, y solo si, existe al menos una medida de probabilidad neutral al riesgo (Harrison y Kreps, 1979). De este modo se demuestra que la valoración de derivados puede realizarse sin inconsistencias internas siempre que se utilice una medida de probabilidad que elimine la posibilidad de generar ganancias sin riesgo. Esta probabilidad modificada también se puede denominar medida de martingala. Las martingalas representan un proceso estocástico que captura la propiedad de un "juego justo", en el que no existe una tendencia a aumentar o disminuir, sino que se aproxima a un escenario libre de riesgo.

El segundo teorema establece la relación entre la unicidad de la probabilidad neutral al riesgo y la completitud del mercado. Un mercado libre de arbitraje es completo siempre que se puedan replicar exactamente los pagos de cualquier derivado o producto financiero a través de otros activos negociados en el mercado. El segundo teorema fundamental de valoración de activos determina que un mercado sin arbitraje es completo si, y solo si, la medida de martingala es única (Harrison y Pliska, 1981). De esta manera, se garantiza un precio único libre de arbitraje para cada derivado. En mercados incompletos pueden existir múltiples medidas neutrales al riesgo que impiden utilizar la valoración neutral al riesgo para valorar derivados.

Este ajuste probabilístico garantiza que la rentabilidad esperada de cualquier activo en el momento presente sea igual a la tasa libre de riesgo, lo que facilita la valoración de derivados sin necesidad de estimar primas de riesgo (Harrison y Kreps, 1979; Harrison y Pliska, 1981). El concepto de martingala es crucial dentro de este marco ya que asegura que el valor futuro de un activo, cuando se descuenta a la tasa libre de riesgo, sea siempre igual a su valor actual, lo que permite eliminar oportunidades de arbitraje (Harrison y Pliska, 1981).

3. APLICACIÓN DEL CONCEPTO DE ARBITRAJE A LA VALORACIÓN DE OPCIONES FINANCIERAS

3.1. Concepto y elementos básicos de opción financiera

Un derivado se puede definir como un instrumento financiero cuyo valor depende de otros activos subyacentes (Hull, 2012). Una opción financiera es un instrumento derivado que otorga al inversor el derecho, pero no la obligación, de comprar o vender una determinada cantidad de un activo fijo dentro de un plazo específico y a un precio de ejercicio. Este tipo de contratos se pueden negociar individualmente en mercados Over-the-Counter (OTC) o en mercados organizados, siendo los más grandes Chicago Board Options Exchange (CBOE) y New York Stock Exchange (NYSE). El tamaño de estos mercados ofrece ventajas como una mayor liquidez, menores costes de transacción y seguridad en la negociación de opciones (Petters y Dong, 2016).

Las opciones permiten a los inversores especular sobre las fluctuaciones de los precios, protegerse de la volatilidad del mercado, generar rendimientos y emplear estrategias de inversión complejas.

El titular de la opción puede optar por cumplir el contrato, lo que se denomina ejercer la opción, o dejarlo expirar. Esta característica hace que el valor de las opciones siempre sea positivo antes de la fecha límite para ejercer la opción (Joshi, 2010). El activo del que depende la opción recibe el nombre de subyacente, y el precio acordado en el contrato para comprar o vender el subyacente se conoce como precio de ejercicio. La fecha límite para ejercer la opción se denomina fecha de vencimiento. En el contrato, también se determina la prima de la opción, que corresponde con el importe que el comprador de la opción debe pagar y el vendedor o emisor recibe si finalmente se formaliza el contrato.

Una opción de compra se denomina Call, mientras que una opción de venta se denomina Put. Existen diferentes normas que determinan el momento en que una opción puede ejercerse. La forma más sencilla es una opción europea, que solo permite su ejercicio en una fecha determinada. Por el contrario, una opción americana puede ejercerse en cualquier momento antes de su fecha de vencimiento. Obsérvese que al ofrecer los mismos derechos que una opción europea, una opción americana tendrá un valor igual o superior al de una opción europea (Joshi, 2010).

Dado que los modelos más relevantes de valoración fueron desarrollados para opciones europeas, el presente trabajo se enfocará en este tipo de activos para facilitar su análisis y reducir el nivel de complejidad.

La notación estándar empleada para las variables o símbolos matemáticos de una posición de opción se definen como: t representando la variable tiempo, T como el momento de vencimiento de la opción, S_t corresponde con el precio del subyacente en el momento t, K es el precio de ejercicio o *strike*, C_t y P_t es el valor de una opción Call y Put respectivamente en el momento t.

Si se representa el valor o prima de una opción Call europea como C_t y el de una opción Put europea como P_t, los flujos de caja generados en $t = 0$ corresponden a un coste de $-C_0$ para quien adquiere la opción Call (posición larga) y un ingreso de C_0 para quien la vende (posición corta). De manera análoga, en el caso de la opción Put P_0, los flujos de caja se corresponden con $-P_0$ y P_0 respectivamente (Petters y Dong, 2016).

Para determinar el valor de la opción Call al vencimiento T, C_T, se verificará que:

$$C_T = max\ \{S_T - K, 0\} = \begin{cases} 0 & si\ S_T \leq K \\ S_T - K & si\ S_T > K \end{cases}$$

De forma similar, el valor de la opción Put europea P_T al vencimiento T será:

$$P_T = max\ \{K - S_T, 0\} = \begin{cases} K - S_T & si\ S_T < K \\ 0 & si\ S_T \geq K \end{cases}$$

De este modo, los flujos generados en el momento de vencimiento para una posición larga en C_T es dado por $max\ \{S_T - K, 0\}$ y para una posición corta en C_T será dado por $-max\{S(T) - K, 0\}$. En el caso de una opción Put, los flujos generados al vencimiento serán $max\ \{K - S_T, 0\}$ para una posición larga, y $-max\ \{K - S_T, 0\}$ si se toma una posición corta.

Dada la relación entre el precio de ejercicio K y el precio al contado S_t del subyacente, se pueden diferenciar tres estados en función de la rentabilidad de la opción para su titular.

Si en una opción Call $S_t > K$ y en una opción Put $K > S_t$, el titular del derecho ejercerá la opción y generará un beneficio, ya que estaría comprando el subyacente a un precio menor que el del mercado, o vendiéndolo a un precio mayor que el que ofrece dicho mercado. En este caso, se diría que la opción está *in-the-money* (ITM). En la situación en la que $S_t = K$, se dice que la opción está *at-the-money* (ATM). Cuando en una opción Call $S_t < K$ y en una opción Put $K <$

S_t, se trata de una opción *out-of-the-money* (OTM). En los dos últimos escenarios, el derecho no será ejercido por el titular ya que no se generaría ningún beneficio.

El principal problema de la valoración de opciones es determinar el valor correcto de la prima en un momento específico, ya que, si este no coincide con el valor al que se negocia en el mercado, se hablaría de oportunidades de arbitraje. De esta manera, se permitiría que un agente obtuviera un beneficio sin riesgo y sin necesidad de pagar la prima correspondiente, al tener la posibilidad de ejercer o no la opción en la fecha de vencimiento sin ninguna obligación. Por lo tanto, se exige el supuesto básico de la AOA.

La valoración de opciones financieras ha sido objeto de estudio desde hace más de un siglo, con contribuciones significativas que han dado forma al desarrollo de la teoría moderna de opciones. Hasta finales del siglo XIX, no existía un método formal para la valoración de opciones financieras, y los precios en los mercados se determinaban de manera aparentemente arbitraria, sustentados en la experiencia y la intuición de los participantes (Crespo Espert, 2004).

El modelo de Black y Scholes (1973) fue el primer modelo formal para valorar opciones europeas y es uno de los desarrollos más citados en la historia de las finanzas (Black y Scholes, 1973). Scholes recibió por ello el Premio Nobel de Economía en 1997, mientras que Black había fallecido en 1995 (Crespo Espert, 2004). Como alternativa, Cox, Ross y Rubinstein propusieron en 1979 el modelo binomial de valoración de opciones (Cox et al., 1979).

Ambos modelos son casos particulares surgidos al aplicar los teoremas fundamentales de valoración de activos a modelos de valoración de instrumentos derivados. Tanto el modelo de Black y Scholes (1973) como el modelo binomial de Cox, Ross y Rubinstein (1979) confirman que la valoración de derivados puede realizarse bajo el supuesto de no arbitraje y mediante la aplicación del método de valoración neutral al riesgo para garantizar la coherencia de los precios en los mercados financieros. Sin embargo, lo que diferencia un modelo de otro son los supuestos sobre la dinámica del precio del activo subyacente.

3.2. Modelo de Black-Scholes de valoración de opciones

Para formular la conocida ecuación del modelo Black-Scholes de valoración de opciones, es necesario partir de una serie de supuestos fundamentales. En este contexto se asumen condiciones ideales, tanto en el mercado del activo subyacente como en el de la opción, y la ausencia de oportunidades de arbitraje (Black y Scholes, 1973):

- No hay impuestos ni costes de transacción.
- El tipo de interés sin riesgo es conocido y constante a lo largo del tiempo.
- Ni el subyacente ni el activo sin riesgo pagan dividendos ni cupones.
- Se permiten posiciones tanto largas como cortas en cualquier activo financiero.
- Todos los activos son perfectamente divisibles y negociables de forma continua.
- Existe un activo sin riesgo (bono) B que evoluciona en el tiempo siguiendo la ecuación diferencial:
$$dB = Br\, dt$$
- Existe un activo con riesgo (subyacente), S, cuyo precio sigue un proceso estocástico denominado movimiento browniano geométrico y denotado por W:
$$dS = \mu S\, dt + \sigma S\, dW$$

La parte determinista, $\mu S\, dt$, refleja la tendencia esperada o deriva del precio, $\mu > 0$ representa procesos estocásticos que tienden a subir, mientras que $\mu < 0$ representa procesos estocásticos que tienden a bajar. El término dW es fundamental puesto que representa la incertidumbre sobre el precio futuro. σ es la función de la volatilidad.

El planteamiento para derivar la fórmula de Black-Scholes se basa en la misma lógica que se empleará en el modelo binomial. En cada momento, se construye una cartera compuesta por una combinación de un activo con riesgo, S, y un activo libre de riesgo, B, de tal forma que se repliquen las características del rendimiento actual del derivado en cuestión. El valor de la cartera debe corresponder al valor del derivado, de acuerdo con el supuesto de no arbitraje. Al tratarse de un modelo en tiempo continuo, dicha equivalencia se mantiene en cada momento.

Si una cartera está construida de manera que su valor no depende de los movimientos aleatorios del mercado, entonces se considera libre de riesgo. De acuerdo con la hipótesis de AOA, dicha cartera debe generar una rentabilidad exactamente igual al tipo de interés sin riesgo del mercado, denotado por r. De esta manera, se relaciona el valor del derivado con los rendimientos esperados de la cartera.

Para construir una cartera sin riesgo, denotada como Π, Black y Scholes combinan una posición larga en una opción y una posición corta en el activo subyacente, las proporciones invertidas en ambos activos se ajustan dinámicamente. La proporción del activo que se vende en corto se determina de manera que compense exactamente el impacto de las fluctuaciones del precio del subyacente sobre el valor de la opción, de forma que el riesgo quede eliminado.

El valor de la opción se representa como una función $f(S,t)$, cuyo valor en el tiempo t depende del precio del activo subyacente, S. Aplicando ecuaciones diferenciales, se determina cómo varía $f(S,t)$ cuando S y t cambian.

Igualmente, la cartera Π debe generar exactamente la rentabilidad del activo sin riesgo:

$$d\Pi = r\Pi\, dt$$

Sustituyendo y reorganizando los términos, se obtiene la ecuación de Black-Scholes:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf$$

El primer término representa el efecto del paso del tiempo sobre el valor de la opción, el segundo mide cómo cambia ese valor ante variaciones en el precio del subyacente, y el tercero refleja la sensibilidad a la curvatura de dichos cambios, ponderada por la volatilidad del activo. Es preciso señalar que la ecuación depende de la volatilidad del activo subyacente, σ, y de variables observables del mercado.

Ya formulada la ecuación de Black-Scholes, se debe encontrar una solución concreta para el caso particular de una opción de compra europea. Para ello, es necesario establecer ciertas condiciones de contorno, es decir, restricciones que la solución debe cumplir en situaciones específicas. Estas condiciones se derivan directamente de las características del producto financiero que se está valorando.

En el caso de una opción Call europea, se establece la siguiente condición sobre su valor en el momento de vencimiento:

$$f(S,T) = max\,\{S_T - K, 0\}$$

Esta es la condición terminal que se impone para resolver la ecuación diferencial. Del mismo modo, se consideran otras condiciones límites para valores extremos de S. Si el precio del activo tiende a cero, el valor de la opción también tiende a cero. En cambio, si el precio del activo crece indefinidamente, el valor de la opción tiende a ser igual a $S - K$.

Con estas condiciones establecidas, se puede resolver la ecuación de Black-Scholes y se obtiene una solución analítica cerrada para el valor de una Call europea, esto es la fórmula de Black y Scholes.

$$C(S,t) = S \cdot N\,(d_1) - K \cdot e^{-r(T-t)} \cdot N\,(d_2)$$

Los parámetros d_1 y d_2 representan el efecto de las principales variables que influyen en el valor de una opción: el tiempo restante hasta el vencimiento, la volatilidad del activo subyacente (σ), el tipo de interés sin riesgo (r) y la relación entre el precio actual del activo (S) y el precio de ejercicio (K). Se definen como:

$$d_1 = \frac{ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(t + \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot (T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} \qquad d_2 = \frac{ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(t - \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot (T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T - t}$$

A partir de estos valores, se utiliza la función de distribución acumulativa de la normal estándar, $N(d)$, para calcular probabilidades ajustadas por riesgo. $S \cdot N\,(d_1)$ representa el valor esperado, ajustado al riesgo, del activo subyacente si la opción se ejerce, y $K \cdot e^{-r(T-t)} \cdot N\,(d_2)$ corresponde al valor actual del precio de ejercicio, ponderado por la probabilidad ajustada de que la opción sea ejercida.

Cuando se plantea el modelo de Black-Scholes como caso particular de la valoración neutral al riesgo, se reemplaza la incertidumbre de las tendencias del mercado por una valoración más sencilla, donde se supone que los activos crecen al tipo sin riesgo. También puede observarse cómo no depende de la rentabilidad esperada del activo, sino únicamente de parámetros observables como el precio actual, precio de ejercicio, tiempo y tipo de interés, y de la estimación de la volatilidad.

3.3. Modelo binomial de valoración de opciones

El modelo binomial surge como alternativa al modelo de Black-Scholes, ya que emplea un método de valoración de opciones más sencillo y ampliamente utilizado en la práctica. Fue introducido por Cox, Ross y Rubinstein en 1979.

De manera análoga al modelo de Black-Scholes, el modelo binomial se fundamenta en el supuesto básico de mercados perfectos.

- No hay impuestos ni costes de transacción.
- El tipo de interés sin riesgo (r) es conocido y constante a lo largo del tiempo.
- Ni el subyacente ni el activo sin riesgo pagan dividendos ni cupones.
- Se permiten posiciones tanto largas como cortas en cualquier activo financiero.
- Todos los activos son perfectamente divisibles y negociables en capitalización discreta, principal diferencia respecto al modelo de Black y Scholes.

- El gran cambio respecto del modelo de Black-Scholes es el supuesto para modelizar el precio de los activos. Se supone que el activo subyacente sigue un modelo binomial multiplicativo (Cox et al., 1979).

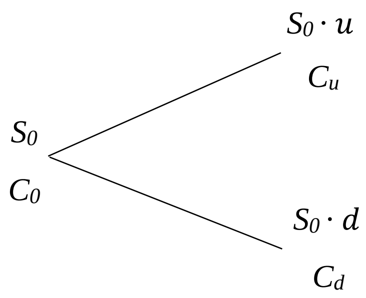
La evolución del precio del activo subyacente se refleja en un árbol binomial que representa las posibles trayectorias del precio de los activos durante la vida de la opción. Establece que el precio del subyacente al final de cada periodo, que suponemos que es una acción, es una variable aleatoria, S_t, que toma el valor $S_{t-1} \cdot u$, con probabilidad p, $0 < p < 1$, y el valor $S_{t-1} \cdot d$, con probabilidad $1 - p$, en el intervalo de tiempo Δt. S_0 es el precio del subyacente en el momento inicial y siempre bajo la condición de $u > d$. Interpretamos que toma el valor $S_{t-1} \cdot u$ si el mercado va al alza *(ingl. "up")* y $S_{t-1} \cdot d$ si el mercado va a la baja *(ingl. "down")*. La variación del precio en porcentaje de S_0 al alza es $u - 1$, y la variación del precio a la baja es $1 - d$.

En este modelo, para garantizar el cumplimiento del supuesto de AOA, la relación entre la rentabilidad del activo subyacente y la tasa de interés sin riesgo debe cumplir $d < (1+r) < u$. Es decir, la rentabilidad del activo libre de riesgo debe situarse dentro del rango definido por las dos posibles rentabilidades del activo con riesgo (Beck, 2024).

Para demostrarlo, supongamos que $(1 + r) \geq u > d$ y que $0 < p < 1$. En este caso, la acción tendría un rendimiento inferior al activo libre de riesgo, incluso en el escenario en el que su precio aumente. Esto permitiría adoptar una posición larga en el activo sin riesgo, un bono, y una posición corta en el menos rentable, la acción, generando un beneficio de $(1 + r) - u$ o $(1 + r) - d$. En cualquier caso, esta operación no es posible bajo el supuesto de ausencia de oportunidades de arbitraje. Un argumento similar descarta la posibilidad de que $u > d \geq (1 + r)$ (Luenberger, 1998).

Se considera una opción cuyo pago final en el escenario alcista, en el que el precio del subyacente alcanza $S_0 \cdot u$, es C_u, mientras que, si el precio se sitúa en $S_0 \cdot d$, el pago asociado de la opción será C_d. De tal forma que:

Figura 1: Árbol binomial de un periodo, elaboración propia



Sabemos que un argumento de la valoración es que, si dos activos dan derecho a los mismos capitales, estos deben tener el mismo precio. Este modelo permite construir una cartera que replique tanto una opción de compra como una opción de venta y, por tanto, encontrar un valor para la prima.

Consideremos un modelo estático en el que se negocian tres activos, un activo sin riesgo con precio A_t para cada momento t, un activo con riesgo con precio S_t en esos mismos instantes, y una opción Call sobre dicho activo con riesgo, con precio C_t y un precio de ejercicio K. Aunque el modelo se pueda aplicar tanto a opciones Call como Put, para simplificar se trabajará con una opción Call.

Si nos centramos en el modelo para un solo periodo, se supone que el precio del activo con riesgo en el momento $t = 0$, S_0, es conocido, mientras que su valor final en $t = 1$, S_1, es una variable aleatoria que sigue un modelo binomial. El activo libre de riesgo evoluciona según la expresión $A_1 = A_0 \cdot (1 + r)$. El precio de la opción Call en $t = 0$ corresponde a su prima, C_0, y su valor en $t = 1$ se determina por los pagos generados al vencimiento, dado por $C_1 = max\{S_T - K, 0\}$.

Se asume un mercado donde un agente puede construir una cartera (x, y, z), comprando en el momento $t = 0$, x activos con riesgo, y activos sin riesgo y z opciones Call. x, y, z pueden tomar cualquier número real, donde un valor positivo representa una posición larga y un valor negativo, una posición corta. De esta manera, el valor inicial de esta cartera, $V_0(x, y, z)$, y el valor final, $V_1(x, y, z)$, quedarían definidos por:

$$V_0(x, y, z) = x \cdot S_0 + y \cdot A_0 + z \cdot C_0$$

$$V_1(x, y, z) = x \cdot S_1 + y \cdot A_1 + z \cdot C_1$$

Por lo tanto, se podría crear una cartera con activos sin y con riesgo $x = x_r$; $y = y_r$; $z = 0$ que replique la opción Call:

$$C_1 = x_r \cdot S_1 + y_r \cdot A_1$$

Bajo el supuesto de AOA, el valor de la prima de la opción debe ser igual al valor de la cartera replicante:

$$C_0 = x_r \cdot S_0 + y_r \cdot A_0$$

Al aplicar el modelo binomial a una opción de compra, los pagos a replicar definen una variable aleatoria que tomará dos valores en el momento de vencimiento, $t = T = 1$, dependiendo de si el mercado va al alza (factor u) o a la baja (factor d).

Figura 2: Posibles pagos de una opción Call a vencimiento, elaboración propia

$$C_1^u = max\{S_1^u - K, 0\} \quad con\ probabilidad\ p$$

$$C_0$$

$$C_1^d = max\{S_1^d - K, 0\} \quad con\ probabilidad\ 1 - p$$

$t = 0$ $\qquad\qquad$ $t = T = 1$

El número de activos con y sin riesgo, denotados como x_r e y_r respectivamente, constituyen la solución del siguiente sistema de ecuaciones lineal:

$$\begin{cases} x_r \cdot S_0 u + y_r \cdot A_1 = C_1^u \\ x_r \cdot S_0 d + y_r \cdot A_1 = C_1^d \end{cases}$$

De donde podemos despejar:

$$x_r = \frac{C_1^u - C_1^d}{S_0 \cdot (u - d)} \qquad\qquad y_r = \frac{uC_1^u - dC_1^d}{A_0(1 + r) \cdot (u - d)}$$

Para que no existan oportunidades de arbitraje, la prima o precio de la opción debería coincidir con el valor en el momento inicial de la cartera replicante, esto es $C_0 = x_r \cdot S_0 + y_r \cdot A_0$. Por lo tanto:

$$C_0 = x_r \cdot S_0 + y_r \cdot A_0 = \frac{C_1^u - C_1^d}{S_0 \cdot (u - d)} \cdot S_0 + \frac{uC_1^u - dC_1^d}{A_0(1 + r) \cdot (u - d)} \cdot A_0$$

A partir del resultado obtenido, se deduce la siguiente expresión:

$$C_0 = \frac{1}{(1 + r)} \cdot \left(\frac{(1 + r) - d}{u - d} \cdot C_1^u + \frac{u - (1 + r)}{u - d} \cdot C_1^d\right) \cdot e^{-r}$$

Trabajando del mismo modo, se puede valorar la opción Put.

Como se ha explicado anteriormente, es posible establecer un marco teórico general para la valoración de opciones, válido para cualquier dinámica que se suponga para el subyacente, esto es la valoración neutral al riesgo. En este enfoque, los precios se interpretan como valores esperados, pero obtenidos a partir de probabilidades neutrales al riesgo que cumplen con la definición de medida de probabilidad. Las mencionadas probabilidades neutrales al riesgo, o también llamadas medidas de martingala, se denotan por q y $1-q$, en contraste con las probabilidades reales p y $1-p$.

Obsérvese que, si miramos el modelo binomial como caso particular de la valoración neutral al riesgo, q y $1-q$ son las probabilidades de los movimientos al alza o a la baja y el precio descontado de las acciones con $T=1$ bajo esta probabilidad será una martingala:

$$C_0 = \frac{q \cdot C^u + (1-q) \cdot C^d}{(1+r)}$$

Al resolver esta ecuación para q , obtenemos:

$$q = \frac{(1+r)-d}{u-d} \qquad\qquad 1-q = \frac{u-(1+r)}{u-d}$$

En un mundo neutral al riesgo, no hay compensaciones por mantener activos con riesgo, sino que la rentabilidad esperada de dichos activos debe ser igual a la tasa libre de riesgo r. Por ello, el valor esperado del precio S_t de una acción en el momento T es el precio inicial S_0 capitalizado al tipo de interés sin riesgo (Cvitanić y Zapatero, 2004).

Al calcular el valor de la opción Call en el modelo binomial utilizando las probabilidades neutrales al riesgo q y $1-q$, estimadas anteriormente, se deriva el siguiente resultado:

$$C_0 = \left(\frac{(1+r)-d}{u-d} \cdot C_1^u + \frac{u-(1+r)}{u-d} \cdot C_1^d\right) \cdot \frac{1}{(1+r)} = [q \cdot C_1^u + (1-q)\, C_1^d] \cdot \frac{1}{(1+r)}$$

Tanto el enfoque de la valoración neutral al riesgo, como el argumento de valoración por cartera replicante, llevan al mismo resultado.

3.4. Paridad Put-Call

Al valorar opciones, tanto Call como Put, los métodos de valoración necesitan ciertas hipótesis sobre cómo evoluciona el precio del activo subyacente. Por ejemplo, si se trata de una acción, se asume que su precio sigue un proceso estocástico específico, este puede ser binomial (Cox et al., 1979) o browniano (Black y Scholes, 1973) entre otros. No obstante, existen algunos resultados relacionados con la valoración de opciones que no dependen de dicha dinámica, lo que les otorga una validez universal.

Entre estos resultados, uno de los más relevantes es la paridad Put-Call. En ella se establece que debe existir una cierta relación entre el valor de la prima de una opción Call y una opción Put sobre el mismo valor subyacente, siempre que este último no pague dividendos y las opciones tengan el mismo precio de ejercicio y vencimiento (Carabias López, 2016).

Para comprender el fundamento teórico de la paridad Put-Call, es útil construir dos carteras que, aunque están compuestas por instrumentos financieros distintos, generan exactamente el mismo resultado en la fecha de vencimiento.

En primer lugar, se formará una cartera A compuesta por una opción Call y un bono cupón cero que prevé un pago de K en el momento T. Por otro lado, se construirá una cartera B compuesta por una opción Put y una acción. Mantenemos la hipótesis de que las acciones no generan dividendos y que tanto la opción Call como la opción Put comparten el mismo precio de ejercicio K y vencen en la misma fecha T. Además, el bono cupón cero incluido en la cartera A entregará un pago de K en el vencimiento.

A continuación, se expone qué ocurre con cada cartera en el momento del vencimiento, considerando los dos escenarios posibles para el precio de la acción en ese momento.

Tabla 1: Valores de Cartera A y B en el momento T, elaboración propia

		$S_T > K$	$K > S_T$
Cartera A	Opción Call europea	$S_T - K$	0
	Bono cupón cero	K	K
	Total	S_T	K
Cartera B	Opción Put europea	0	$K - S_T$
	Acción	S_T	S_T
	Total	S_T	K

En ambas situaciones, $S_T > K$ y $K > S_T$, el pago de las carteras es el mismo. Por ello, se puede intuir que ambas valen $max\{S_{t,}, K\}$ en T. Por tanto, de acuerdo con el supuesto de AOA, deben tener también el mismo valor en el presente, ya sea calculado en tiempo discreto o continuo.

$$C_0 + K(1+r)^{-T} = P_0 + S_0 \qquad\qquad C_0 + Ke^{-rT} = P_0 + S_0$$

Donde el bono representa el valor descontado K y S_0 es el precio actual de la acción.

Esta relación se conoce como la *Paridad Put-Call*, que muchas veces también se expresa de la siguiente forma:

$$C_0 - P_0 = S_0 - K(1+r)^{-T} \qquad\qquad C_0 - P_0 = S_0 - Ke^{-rT}$$

Consecuentemente, la paridad Put-Call representa una condición necesaria para evitar la existencia de oportunidades de arbitraje. Su cumplimiento asegura que los precios de las opciones Call y Put estén correctamente alineados, evitando desequilibrios que puedan ser explotados mediante estrategias de arbitraje (Capiński y Zastawniak, 2011).

4. TIPOS DE INTERÉS IMPLÍCITOS EN LA PARIDAD PUT-CALL

4.1. Material y método

Estudios previos, como los de Frankfurter y Leung (1991) y Hsieh et al. (2008), han evaluado la validez de la paridad Put-Call como criterio de valoración. Los primeros calcularon una tasa implícita a partir de dicha paridad para contrastarla con la tasa de mercado. Hsieh et al, utilizaron la ecuación de la paridad para estimar el valor del subyacente y analizar la contribución de las opciones a la formación de precios de dicho subyacente. Ambos trabajos se desarrollaron en tiempo continuo.

Para ilustrar las consecuencias del supuesto de AOA, se desarrollará una aplicación práctica consistente en la comprobación de si la paridad Put-Call, una relación fundamental en la teoría de precios de opciones, se verifica empíricamente mediante el cálculo de tipos de interés implícitos en tiempo discreto, para un ejemplo en el mercado español.

El presente estudio adopta un enfoque cuantitativo de carácter empírico, basado en datos de precios de opciones europeas tipo Call y Put sobre el mismo activo subyacente, acciones del Banco Santander. Se ha controlado que ambas opciones compartan el mismo precio de ejercicio y fecha de vencimiento, condiciones necesarias para aplicar correctamente el modelo de la paridad. Por lo tanto, la incógnita en esta situación será la tasa de interés, a la que denominaremos tasa de interés implícita. El objetivo de este análisis es comprobar si la tasa implícita calculada mediante la ecuación de la paridad Put-Call es igual a la tasa libre de riesgo tomada como referencia.

Los datos empleados corresponden a una serie temporal diaria de primas de opciones europeas Call y Put sobre acciones del Banco Santander, todas con el mismo vencimiento trimestral y precio de ejercicio. Tanto las primas de las opciones, el interés abierto de estas, como el precio del subyacente, el precio de ejercicio y vencimiento, han sido obtenidos a través de la plataforma financiera Bloomberg. Por su parte, la tasa libre de riesgo a tres meses correspondiente a los rendimientos diarios de bonos soberanos de la zona euro ha sido extraída de la base oficial del Banco Central Europeo (BCE).

Se ha tomado como referencia de tipo de interés sin riesgo la tasa de interés a tres meses de los rendimientos diarios de bonos soberanos de la zona euro, con el objetivo de que haya concordancia con el horizonte trimestral de las opciones. Las tasas diarias están expresadas en términos anualizados.

El procedimiento ha consistido en el cálculo de la tasa de interés implícita para cada día mediante la ecuación de la paridad Put-Call bajo dos enfoques distintos: un modelo en tiempo discreto y otro en tiempo continuo. Para ambos, se ha empleado la ecuación obtenida al despejar la tasa de interés de la paridad Put-Call, puesto que es lo que se quiere calcular.

Para el modelo en tiempo discreto se ha empleado la siguiente ecuación:

$$C_t + K(1+r)^{-T} = P_t + S_t \quad \Rightarrow \quad i = \left(\frac{K}{S_t - C_t + P_t}\right)^{\frac{1}{T}} - 1$$

Análogamente, para el modelo en tiempo continuo se utilizado esta expresión:

$$C_t + Ke^{-rT} = P_t + S_t \quad \Rightarrow \quad i = \frac{1}{T} \cdot ln\left(\frac{K}{S_t - C_t + P_t}\right)$$

Donde:

- C_t y P_t son las primas de la opción Call y Put respectivamente.
- S_t representa el precio del subyacente.
- K se corresponde con el precio de ejercicio.
- T es el tiempo hasta vencimiento en años.

El uso complementario de modelos en tiempo continuo y discreto permite comparar su consistencia y detectar posibles sesgos metodológicos. No obstante, se ha empleado la tasa implícita calculada en tiempo discreto para el análisis e interpretación de resultados.

Para automatizar los cálculos de estas tasas se ha utilizado el software de hoja de cálculo Excel. Las tasas implícitas obtenidas se han contrastado con las tasas libres de riesgo mencionadas. Para apoyar el análisis de los resultados obtenidos, se han elaborado gráficos en Excel para facilitar la presentación e interpretación de los resultados.

4.2. Análisis de datos y resultados

La serie temporal analizada cubre un periodo entre el 20 de junio de 2024 y el 19 de septiembre de 2024, fecha de vencimiento de las opciones. Este periodo incluye exclusivamente aquellas sesiones en las que el mercado se encontraba operativo. Para cada día, se han registrado las primas de las opciones Call y Put europeas sobre acciones del Banco Santander, manteniendo constante el precio de ejercicio en 4,20 euros. A su vez, se ha incorporado el precio diario del activo subyacente, así como el tiempo restante hasta el vencimiento expresado en años.

Es preciso señalar que, durante el período de vida de las opciones, del 20 de junio de 2024 al 19 de septiembre de 2024, el Banco Santander no ha repartido dividendos. Por tanto, no ha sido necesario ajustar la ecuación de la paridad Put-Call por dividendos esperados, ya que los precios de las opciones no se han visto afectados por este tipo de evento.

A partir de estos datos, se calcularon las tasas de interés implícitas según la ecuación de la paridad Put-Call para un modelo en tiempo discreto. Para ello, se aplicó la fórmula previamente presentada y se introdujeron los datos observados correspondientes.

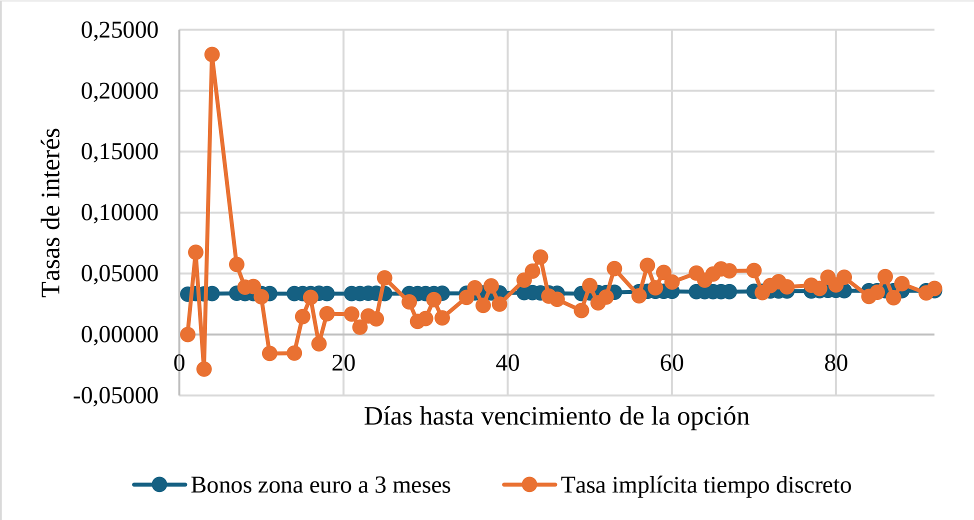
Tabla 2: Datos observados del 20 al 28 de junio de 2024, elaboración propia

t_t	Fecha	T	C_t	Interés abierto Call	P_t	Interés abierto Put	S_t	K	i
1	20/06/2024	0,2521	0,43	134	0,15	22,0	4,441	4,2	0,0377
2	21/06/2024	0,2493	0,35	134	0,18	41,0	4,335	4,2	0,0341
3	24/06/2024	0,2411	0,4	134	0,15	41,0	4,409	4,2	0,0415
4	25/06/2024	0,2384	0,37	134	0,16	41,0	4,3805	4,2	0,0300
5	26/06/2024	0,2356	0,35	134	0,16	41,0	4,3445	4,2	0,0473
6	27/06/2024	0,2329	0,34	134	0,17	41,0	4,337	4,2	0,0345
7	28/06/2024	0,2301	0,33	134	0,17	41,0	4,3305	4,2	0,0311

Los datos se muestran en una tabla que recoge para cada fecha los valores de las primas de las opciones y el interés abierto, esto es el número de contratos de opciones vigentes negociados al cierre diario, el subyacente, el strike, el tiempo a vencimiento, y las tasas implícitas calculadas para cada modelo. Además, se incluye la tasa de interés a tres meses de los rendimientos diarios de bonos soberanos de la zona euro y la diferencia existente entre la tasa implícita y esta tasa libre de riesgo. Los datos se pueden encontrar en el Anexo I y Anexo II.

Esta presentación de datos permite una comparación directa entre la tasa implícita derivada del modelo teórico y la tasa efectivamente observada en el mercado, facilitando la evaluación empírica de si la paridad Put-Call se cumple bajo condiciones reales. A continuación, se presentan los resultados del análisis.

Figura 3: Comparativa tasa implícita y tasa libre de riesgo durante la vida de la opción



Fuente: Elaboración propia a partir de datos de Bloomberg y la base de datos del Banco Central Europeo (BCE)

El gráfico muestra una comparativa entre la tasa de interés implícita en tiempo discreto y la tasa libre de riesgo, representada por los bonos de la zona euro a 3 meses. El eje horizontal indica los días restantes hasta el vencimiento de la opción y el eje vertical los valores de las tasas anualizadas.

La línea azul, correspondiente a los bonos de la zona euro, muestra un comportamiento estable y constante a lo largo del tiempo, manteniéndose en torno al 3 % (0,03). Esta escasa variación refleja la estabilidad de las tasas durante el periodo analizado.

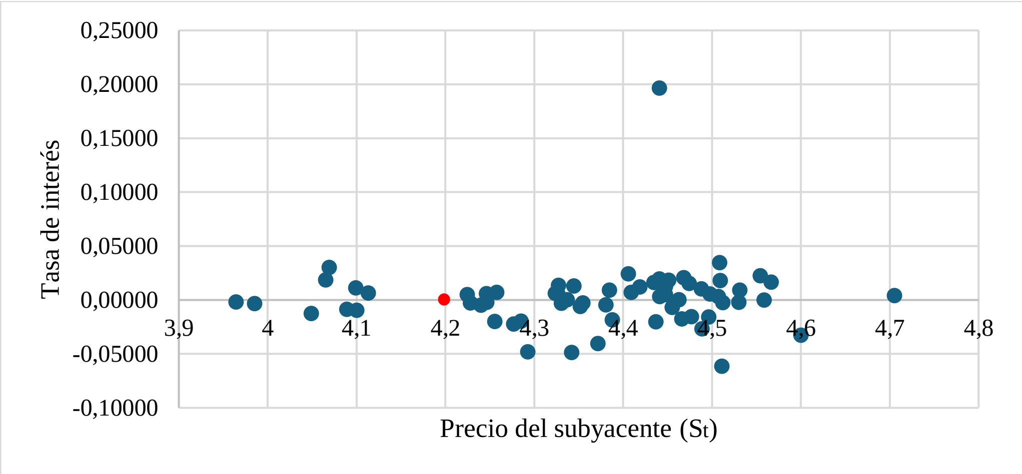
La tasa implícita, representada por la línea naranja, es casi idéntica a la tasa libre de riesgo en los periodos en los que el vencimiento de la opción se encuentra más lejano. No obstante, los valores atípicos se observan en periodos de tiempo próximos al vencimiento. Este hecho explica que existan mayores diferencias entre la tasa implícita y la tasa libre de riesgo.

Por otro lado, el repunte en el precio de las opciones Call al final de su periodo de vida, influido por expectativas de recuperación del subyacente o mayor volatilidad, puede ser un factor que eleve el valor de la tasa implícita. Cuando el precio de la opción Call sube sin que la prima de la opción Put aumente en la misma medida, la diferencia entre ambas se amplía, lo que lleva a una mayor tasa implícita según la fórmula de la paridad. Así, el desajuste entre precios observados y equilibrio teórico explica por qué la tasa implícita permanece sistemáticamente por encima de la tasa de referencia.

Al aplicar tanto la tasa implícita como la tasa libre de riesgo a $S_t - K(1+r)^{-T}$, y compararla con el otro término de la paridad Put-Call $C - P$, se observa que hay discrepancias dependiendo del tipo utilizado. Esto podría indicar que la tasa implícita incorpora factores de mercado adicionales. Consecuentemente, estas diferencias pueden interpretarse como una posible sobrevaloración o infravaloración de las opciones, ya que su precio de mercado difiere del valor estimado según la tasa sin riesgo, véase el Anexo III. Su análisis constituye futuras líneas de investigación orientadas tanto a verificar si las pautas observadas se mantienen al aplicar la paridad a otros conjuntos de datos o escenarios más complejos, como a identificar los factores subyacentes que podrían explicar dichas discrepancias.

Para mostrar la relación entre las tasas empleadas y el subyacente, se ha representado gráficamente la diferencia entre la tasa implícita y la tasa de libre de riesgo en función del precio del subyacente.

Figura 4: Diferencia tasa implícita y tasa libre de riesgo respecto al precio del subyacente



Fuente: Elaboración propia a partir de datos de Bloomberg y la base de datos del Banco Central Europeo (BCE)

El gráfico representa la diferencia entre la tasa implícita y la tasa de los bonos de la zona euro a 3 meses en función del precio del subyacente. El eje de abscisas representa el precio del activo subyacente, que varía aproximadamente entre 3,9 y 4,8. El eje de ordenadas refleja la diferencia entre ambas tasas de interés, con valores que oscilan entre -0,10 y 0,25. El objetivo es evaluar si las discrepancias entre ambas tasas varían según la posición relativa del precio del activo frente al strike, 4,20 euros (punto rojo).

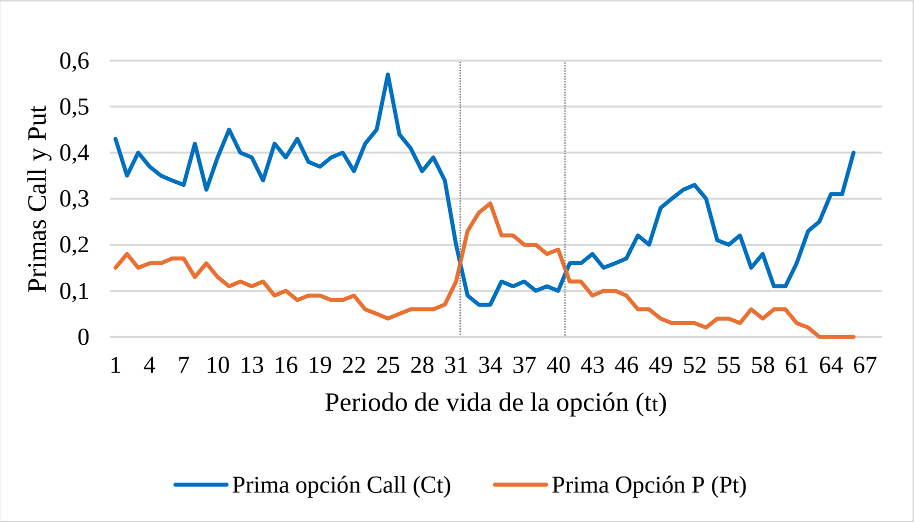
Se observa que la mayoría de los puntos se encuentran concentrados en torno al eje horizontal, lo cual indica que, en general, la tasa implícita no difiere de manera significativa respecto a la tasa libre de riesgo. Esta apreciación se ve respaldada por el valor medio de las diferencias, que asciende a 0,00198. No obstante, al igual que en el gráfico anterior, también se identifican valores atípicos.

Gran parte de los puntos del gráfico de dispersión se concentran en la zona en la que el precio del subyacente está por encima del precio de ejercicio, esto es $S_T > K$. En esta situación, se diría que una opción Call está *in-the-money*, es decir, que, al ejercerla, el titular obtendría un beneficio. Este hecho hace que el valor de la opción de compra aumente. En cambio, la prima de la opción Put se aproxima rápidamente a cero al estar *out-of-the-money*.

Esta situación provoca que el término $C - P$, esencial en el cálculo de la tasa implícita, dependa casi exclusivamente de la prima de la Call. El efecto se podría ver magnificado ya que, como se mostrará a continuación, durante gran parte de la vida de la opción, las acciones del Banco Santander tienen un valor por encima del precio de ejercicio, haciendo que las opciones Call sean más atractivas y por ende su precio aumente.

Para comprender la relación entre las primas de las opciones y el comportamiento del subyacente, se presenta a continuación la evolución temporal de ambas variables.

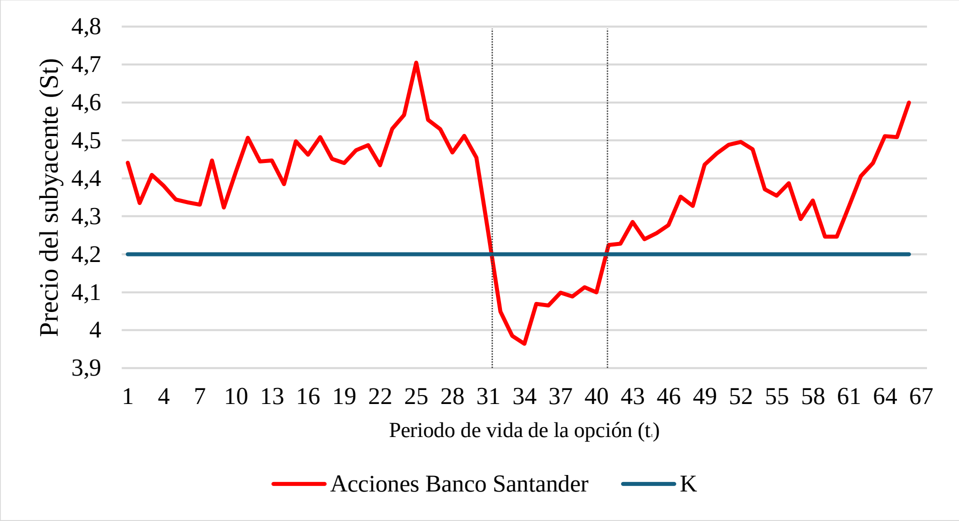
Figura 5: Evolución de las primas Call y Put durante la vida de la opción



Fuente: Elaboración propia a partir de datos de Bloomberg

El gráfico muestra la evolución de las primas de las opciones Call y Put a lo largo del tiempo hasta el momento del vencimiento. El eje de abscisas muestra los días hasta el vencimiento y el eje de ordenadas el valor de las primas de las opciones. A continuación, se presenta un gráfico con la evolución del precio del activo subyacente, acciones del Banco Santander. A diferencia de la representación anterior, en el eje vertical se representa el precio de las acciones.

Figura 6: Evolución precio del activo subyacente durante la vida de la opción



Fuente: Elaboración propia a partir de datos de Bloomberg

Resulta interesante comparar la evolución de estos activos, ya que el precio del activo subyacente es uno de los factores clave determinantes de los precios de las primas de las opciones.

Durante la primera mitad del periodo, se observa que la prima de la opción Call (línea azul) se mantiene por encima de la prima de la opción Put (línea naranja). Esta diferencia podría explicarse por una situación de mercado en la que el subyacente se encuentra por encima del precio de ejercicio, lo que hace que la opción de compra tenga expectativas más favorables.

A partir de $t = 30$ aproximadamente, la prima de la opción de venta supera por un breve periodo al importe de la opción Call. Este comportamiento se debe a que el precio del subyacente en ese mismo periodo disminuye por debajo del precio de ejercicio, lo que hace más atractivas las opciones de venta. Consecuentemente, la demanda de opciones Put aumenta, al igual que su prima y el número total de posiciones activas en ese contrato específico.

En la segunda mitad del periodo, ambas primas se estabilizan en niveles más bajos, aunque la prima de la opción Call vuelve a recuperar una leve superioridad. Este suceso es debido a un aumento en el precio de las acciones del Banco Santander por encima del strike. Por ello, las opciones de compra se convierten en un instrumento financiero altamente demandado por aquellos individuos que anticipan un incremento del precio del activo subyacente.

Cabe destacar que los momentos en los que las primas de las opciones Call y Put coinciden corresponden a situaciones en las que el precio del activo subyacente es igual al precio de ejercicio (líneas discontinuas verticales). Por lo tanto, ninguna de las dos opciones resulta más ventajosa que la otra, ya que al encontrarse *at the money*, su ejercicio no generaría beneficio en ninguno de los dos casos. Si sus primas fuesen diferentes en esta situación, se produciría un desequilibrio en la paridad Put-Call, lo que daría lugar a oportunidades de arbitraje en el mercado.

4.3. Discusión

Uno de los principales objetivos de esta aplicación consistía en comparar la tasa implícita con la tasa libre de riesgo utilizada como referencia. Los resultados de la Figura 3 muestran que, cuando el vencimiento de la opción aún se encuentra lejano, ambas tasas se alinean, en línea con los principios de la teoría financiera. Este comportamiento contrasta con lo observado en el estudio de Frankfurter y Leung (1991), en el que las tasas implícitas derivadas de la paridad no se ajustan de forma consistente a las tasas de observables del mercado. Esta diferencia se atribuye al hecho de que la tasa de referencia empleada su estudio es alta y sigue una tendencia poco estable a lo largo del tiempo.

Se puede concluir que los valores atípicos detectados en las tasas implícitas se explican por la proximidad del vencimiento, ya que cerca de esa fecha los precios de las opciones experimentan una pérdida de valor temporal. Cabe señalar que la aplicación de la paridad Put-Call podría mejorarse mediante la incorporación de tipos de interés correspondientes a bonos de la zona euro con vencimientos a dos y un mes, a medida que se aproxima la fecha de vencimiento. Esta adecuación permitiría que la tasa implícita calculada se ajuste al horizonte temporal y se aproxime con más precisión a la tasa libre de riesgo.

En la Figura 4, las ligeras discrepancias entre las tasas de interés reflejan una fuerte relación entre ellas cuando el vencimiento de la opción aún se encuentra lejano. La Figura 3 muestra cómo esta relación queda respaldada por la alineación observada entre ambas tasas durante el mismo periodo. Al contrastar los valores atípicos identificados en el gráfico de dispersión con los correspondientes precios del subyacente, se aprecia que dichas anomalías se producen en momentos en los que el valor de las acciones se aproxima al vencimiento. Lo cual no solo permite explicar la existencia de estos valores menos habituales, sino que también refuerza la idea de que la tasa implícita presenta una mayor sensibilidad y variabilidad respecto a la tasa libre de riesgo a medida que se reduce el horizonte temporal de la opción.

La concentración de un gran número de observaciones del gráfico en la zona en la que el precio del subyacente supera el precio de ejercicio, indica que las opciones de compra están *in-the-*

money. En este escenario, la baja relevancia de las primas de las opciones Put respecto a las opciones Call hacen que el término $C - P$ dependa principalmente del valor de la opción de compra. Esta dependencia incrementa la sensibilidad de la tasa implícita ante cualquier variación en dicha prima. Dado que el subyacente se mantuvo durante gran parte del periodo por encima del precio de ejercicio, se refuerza la asimetría en las primas y se explican así las discrepancias puntuales respecto a la tasa libre de riesgo. Consecuentemente, las diferencias en la tasa implícita se relacionan más con la posición relativa del precio del subyacente respecto al strike que con su valor absoluto.

Asimismo, en las Figuras 5 y 6 se ha mostrado que los valores de las primas de las opciones Call y Put resultan coherentes con la evolución observada en el precio del activo subyacente, así como con el efecto del tiempo restante hasta el vencimiento.

Puede concluirse que el modelo de paridad Put-Call constituye una herramienta robusta y operativa para inferir la tasa de interés implícita. Esta característica es destacada también por Hsieh et al. (2008), quienes valoran el uso de la paridad como alternativa al modelo de Black-Scholes al evitar riesgos de modelización. Aunque su cumplimiento no es exacto en todos los escenarios, los resultados muestran que la paridad Put-Call sigue siendo válida como criterio de valoración y puede utilizarse para detectar posibles ineficiencias o desequilibrios de precios en el mercado de opciones.

5. CONCLUSIONES

El concepto de arbitraje constituye un pilar fundamental en la valoración de opciones financieras. Este principio, niega la existencia de beneficios sin riesgo e inversión inicial, y permite establecer una base robusta y universal sobre la cual se construyen los modelos de valoración de activos. Su aceptación no solo aporta coherencia lógica a la teoría financiera, sino que actúa como mecanismo de equilibrio que orienta el comportamiento de los agentes en los mercados.

A pesar de las diferentes notaciones y formulaciones empleadas por los autores presentados, se ha mostrado que todos coinciden en la concepción de arbitraje y de los tipos de oportunidades de arbitraje que pueden surgir en el mercado. Esta convergencia evidencia el carácter universal del principio, más allá de los marcos teóricos específicos o las particularidades del modelo empleado, y refuerza su relevancia como criterio de valoración.

La aceptación del supuesto AOA tiene implicaciones fundamentales en la valoración financiera como la ley del precio único, la unicidad del tipo de interés sin riesgo y el reconocimiento de que una cartera con pagos futuros nulos debe tener valor presente igual a cero. Estos argumentos hacen posible construir valoraciones lógicas y consistentes. Igualmente, la hipótesis de AOA permite fundamentar la valoración neutral al riesgo, basada en medidas de martingala. Estas últimas proporcionan un marco teórico que guía el proceso de valoración en modelos tanto discretos como continuos y permiten representar de forma matemática la noción de “juego justo”, donde el precio refleja el valor esperado de los pagos futuros de un activo ajustados al riesgo.

Como cuarta conclusión, cabe destacar que los modelos clásicos de valoración de opciones, el modelo de Black-Scholes y el modelo binomial, son una aplicación del principio de AOA. Difieren entre sí en el modelo de capitalización empleado y la dinámica asumida para precio del activo subyacente. Esta diferencia metodológica no altera el fundamento común que los sustenta, la eliminación de oportunidades de arbitraje como garantía de coherencia en la valoración de opciones.

Al comprobar la validez de la paridad Put-Call mediante un ejercicio ilustrativo, se ha mostrado su utilidad como criterio de valoración y como herramienta para detectar ineficiencias en los precios observados. Trabajos previos en la literatura académica confirman empíricamente estas funciones, lo cual refuerza la aplicabilidad de este principio en contextos de mercado reales.

No obstante, conviene señalar que la aplicación práctica es un ejercicio sencillo, válido para un periodo temporal limitado, que ofrece una base sobre la que desarrollar estudios más detallados. Trabajar con un conjunto de datos más amplio, incorporar una mayor variedad de opciones, con distintos precios de ejercicio y vencimiento, así como aplicar metodologías de análisis más sofisticadas, permitiría que los resultados se adaptaran mejor a contextos de mercado más complejos y reforzar la validez y aplicabilidad del planteamiento en futuras líneas de investigación.

En conjunto, se puede observar cómo el principio de no arbitraje se manifiesta en la valoración de opciones financieras. La integración de modelos teóricos con enfoques empíricos ha permitido demostrar la solidez, relevancia y aplicabilidad universal de este principio fundamental en el ámbito de las finanzas.

DECLARACIÓN DE USO DE HERRAMIENTAS DE INTELIGENCIA ARTIFICIAL GENERATIVA

ADVERTENCIA: Desde la Universidad consideramos que ChatGPT u otras herramientas similares son herramientas muy útiles en la vida académica, aunque su uso queda siempre bajo la responsabilidad del alumno, puesto que las respuestas que proporciona pueden no ser veraces. En este sentido, NO está permitido su uso en la elaboración del Trabajo fin de Grado para generar código porque estas herramientas no son fiables en esa tarea. Aunque el código funcione, no hay garantías de que metodológicamente sea correcto, y es altamente probable que no lo sea.

Por la presente, yo, Lucía Martínez Echeverría, estudiante de E2 – Grado en Administración y Dirección de Empresas de la Universidad Pontificia Comillas al presentar mi Trabajo Fin de Grado titulado "Consecuencias del supuesto de no arbitraje para la valoración de opciones financieras: Comprobación de la paridad Put-Call", declaro que he utilizado la herramienta de Inteligencia Artificial Generativa ChatGPT u otras similares de IAG de código sólo en el contexto de las actividades descritas a continuación:

1. **Crítico:** Para encontrar contra-argumentos a una tesis específica que pretendo defender.
2. **Interpretador de código:** Para realizar análisis de datos preliminares.
3. **Corrector de estilo literario y de lenguaje:** Para mejorar la calidad lingüística y estilística del texto.
4. **Sintetizador y divulgador de libros complicados:** Para resumir y comprender literatura compleja.
5. **Revisor:** Para recibir sugerencias sobre cómo mejorar y perfeccionar el trabajo con diferentes niveles de exigencia.
6. **Traductor:** Para traducir textos de un lenguaje a otro.

Afirmo que toda la información y contenido presentados en este trabajo son producto de mi investigación y esfuerzo individual, excepto donde se ha indicado lo contrario y se han dado los créditos correspondientes (he incluido las referencias adecuadas en el TFG y he explicitado para que se ha usado ChatGPT u otras herramientas similares). Soy consciente de las implicaciones académicas y éticas de presentar un trabajo no original y acepto las consecuencias de cualquier violación a esta declaración.

Fecha: 26 de marzo de 2025

Firma: Mtz Echeverría

BIBLIOGRAFÍA

Azofra, V. y Fernández, A. I. (1992). Evolución reciente de la moderna teoría financiera. *Anales de estudios económicos y empresariales, 7*, p. 111- 126.

Beck, J. (2024). *Aportaciones del enfoque general de la valoración de opciones financieras basado en probabilidades neutrales al riesgo o medidas de martingala a la valoración financiera* (Trabajo de Fin de Grado). Universidad Pontificia Comillas.

Black, F., y Scholes, M. (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, *81*(3), p. 637-654.

Capiński, M y Zastawniak, T. (2011). *Mathematics for Finance. An Introduction to Financial Engineering*. Springer-Verlag.

Carabias, S. (2001). *Valoración por Argumentos de Arbitraje de Activos "No Replicables"*. Universidad Pontificia Comillas.

Carabias, S. (2016). *Introducción a la modelización de mercados financieros*. Madrid, España. Universidad Pontificia Comillas.

Cox, J. C., Ross, S. A., y Rubinstein, M. (1979). Option pricing: A simplified approach. *Journal of Financial Economics*, *7*(3), p. 229-263. https://doi.org/10.1016/0304-405X(79)90015-1

Crespo Espert, J. L. (2004). Tres décadas de la teoría de opciones. *BOLSA DE MADRID.* (128), p. 28-33. https://www.bolsasymercados.es/esp/publicacion/revista/2004/02/p28-33.pdf

Cvitanić, J. y Zapatero, F. (2004). *Introduction to the Economics and Mathematics of Financial Markets,* MIT Press.

Elliott, R. J., y Kopp, P. E. (1999). *Mathematics of financial markets*. Springer.

Fama, E. F. (1970). Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work. *The Journal of Finance*, *25*(2), p. 383–417. doi: https://doi.org/10.2307/2325486

Föllmer, H., y Schied, A. (2004). *Stochastic finance: An introduction in discrete time*. De Gruyter. doi: https://doi.org/10.1515/9783110212075

Fondo Monetario Internacional. (2001). *Manual de estadísticas monetarias y financieras*. Recuperado de: https://www.imf.org/external/pubs/ft/mfs/manual/esl/pdf/mfsmch4s.pdf

Frankfurter, G. y Leung, W. (1991). Further Analysis of the Put-Call Parity Implied Risk-Free Interest Rate. *The Journal of Financial Research 14*(3), p. 217-32. doi: 10.1111/j.1475-6803.1991.tb00659.x.

Gisiger, N. (2010). Risk-Neutral Probabilities Explained. *SSRN Electronic Journal*. https://doi.org/10.2139/ssrn.1395390

Harrison, J. M., y Kreps, D. M. (1979). Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets. *Journal of Economic Theory*, *20*(3), p. 381-408. https://doi.org/10.1016/0022-0531(79)90043-7

Harrison, J. M., y Pliska, S. R. (1981). Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading. *Stochastic Processes and Their Applications*, *11*(3), p. 215-260. https://doi.org/10.1016/0304-4149(81)90026-0

Haskel, J. y Wolf, H. (2001). The Law of One Price—A Case Study. *Scandinavian Journal of Economics 103*(4), p. 545-558. doi: https://doi.org/10.1111/1467-9442.00259

Hsieh, W., Lee, C. y Yuan, S. (2008). Price discovery in the options markets: An application of put-call parity. *The Journal of Futures Markets*, *28*(4), p. 354 - 375. doi: 10.1002/fut.20302.

Hull, J. (2012). *Options, futures, and other derivatives*. Prentice Hall.zz

Joshi, M. S. (2010). *The concepts and practice of mathematical finance.* Cambridge Univ. Press.

Koch-Medina, P y Merino, S. (2003). *Mathematical Finance and Probability*. A Discrete Introduction, Birkhäuser Verlag.

Luenberger, D. G. (1998). *Investment Science*. Oxford University Press.

Marín, J.M. y Rubio, G. (2004). *Economía financiera*. Antoni Bosch.

Martín, J.L. y Trujillo, A. (2004). *Manual de mercados financieros*. Paraninfo.

Mondragón-Hernández, S. (2011). Marco conceptual de las teorías de la irrelevancia, del trade-off y de la jerarquía de las preferencias. *Cuadernos de Contabilidad*, 12 (30), p. 165-178.

Musiela, M. y Rutkowski, M. (2007). *Martingale Methods in Financial Modelling.* Springer Verlag

Petters, A. O., y Dong, X. (2016). *An Introduction to Mathematical Finance with Applications*. Springer New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4939-3783-7

Rivera Godoy, J. A. (2002). Teoría sobre la estructura de capital. *Estudios Gerenciales, 18* (84), p. 31-59. Recuperado de: http://www.scielo.org.co/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0123-59232002000300002&lng=en&tlng=es

Roggi, O., Damodaran, A., y Garvey, M. (2012). Risk Taking: A Corporate Governance Perspective. *SSRN Electronic Journal*. https://doi.org/10.2139/ssrn.2556159

Wilmott, P. (2014). *Paul wilmott on quantitative finance*. Wiley.

ANEXOS

Anexo I: Datos tipos de interés implícitos en la paridad Put-Call

t	Fecha	T	C_t	Interés abierto Call	P_t	Interés abierto Put	S_t	K	i
1	20/06/2024	0,2521	0,43	134	0,15	22,0	4,441	4,2	0,0377
2	21/06/2024	0,2493	0,35	134	0,18	41,0	4,335	4,2	0,0341
3	24/06/2024	0,2411	0,4	134	0,15	41,0	4,409	4,2	0,0415
4	25/06/2024	0,2384	0,37	134	0,16	41,0	4,3805	4,2	0,0300
5	26/06/2024	0,2356	0,35	134	0,16	41,0	4,3445	4,2	0,0473
6	27/06/2024	0,2329	0,34	134	0,17	41,0	4,337	4,2	0,0345
7	28/06/2024	0,2301	0,33	134	0,17	41,0	4,3305	4,2	0,0311
8	01/07/2024	0,2219	0,42	134	0,13	41,0	4,4475	4,2	0,0469
9	02/07/2024	0,2192	0,32	134	0,16	43,0	4,3235	4,2	0,0406
10	03/07/2024	0,2164	0,39	134	0,13	43,0	4,4185	4,2	0,0469
11	04/07/2024	0,2137	0,45	134	0,11	43,0	4,507	4,2	0,0376
12	05/07/2024	0,2110	0,4	134	0,12	43,0	4,445	4,2	0,0405
13	08/07/2024	0,2027	0,39	134	0,11	43,0	4,4475	4,2	0,0391
14	09/07/2024	0,2000	0,34	134	0,12	43,0	4,3845	4,2	0,0434
15	10/07/2024	0,1973	0,42	134	0,09	43,0	4,4975	4,2	0,0402
16	11/07/2024	0,1945	0,39	134	0,1	43,0	4,4625	4,2	0,0343
17	12/07/2024	0,1918	0,43	134	0,08	43,0	4,509	4,2	0,0525
18	15/07/2024	0,1836	0,38	134	0,09	43,0	4,451	4,2	0,0521
19	16/07/2024	0,1808	0,37	134	0,09	143,0	4,4405	4,2	0,0536
20	17/07/2024	0,1781	0,39	134	0,08	143,0	4,474	4,2	0,0495
21	18/07/2024	0,1753	0,4	134	0,08	143,0	4,488	4,2	0,0446
22	19/07/2024	0,1726	0,36	134	0,09	143,0	4,4345	4,2	0,0504
23	22/07/2024	0,1644	0,42	134	0,06	143,0	4,531	4,2	0,0431
24	23/07/2024	0,1616	0,45	134	0,05	143,0	4,5665	4,2	0,0508
25	24/07/2024	0,1589	0,57	134	0,04	143,0	4,705	4,2	0,0383
26	25/07/2024	0,1562	0,44	134	0,05	143,0	4,554	4,2	0,0567
27	26/07/2024	0,1534	0,41	134	0,06	143,0	4,53	4,2	0,0316
28	29/07/2024	0,1452	0,36	134	0,06	143,0	4,468	4,2	0,0541
29	30/07/2024	0,1425	0,39	134	0,06	143,0	4,512	4,2	0,0306
30	31/07/2024	0,1397	0,34	134	0,07	143,0	4,455	4,2	0,0259
31	01/08/2024	0,1370	0,2	134	0,12	143,0	4,2575	4,2	0,0400
32	02/08/2024	0,1342	0,09	134	0,23	144,0	4,049	4,2	0,0197
33	05/08/2024	0,1260	0,07	134	0,27	144,0	3,985	4,2	0,0288
34	06/08/2024	0,1233	0,07	129	0,29	144,0	3,964	4,2	0,0314
35	07/08/2024	0,1205	0,12	129	0,22	144,0	4,069	4,2	0,0634
36	08/08/2024	0,1178	0,11	129	0,22	144,0	4,065	4,2	0,0520
37	09/08/2024	0,1151	0,12	129	0,2	144,0	4,099	4,2	0,0445
38	12/08/2024	0,1068	0,1	139	0,2	144,0	4,089	4,2	0,0248
39	13/08/2024	0,1041	0,11	139	0,18	144,0	4,113	4,2	0,0397
40	14/08/2024	0,1014	0,1	139	0,19	144,0	4,1	4,2	0,0238

41	15/08/2024	0,0986	0,16	149	0,12	144,0	4,2245	4,2	0,0382
42	16/08/2024	0,0959	0,16	149	0,12	144,0	4,228	4,2	0,0303
43	19/08/2024	0,0877	0,18	154	0,09	144,0	4,285	4,2	0,0137
44	20/08/2024	0,0849	0,15	154	0,1	144,0	4,24	4,2	0,0285
45	21/08/2024	0,0822	0,16	154	0,1	144,0	4,2555	4,2	0,0131
46	22/08/2024	0,0795	0,17	154	0,09	147,0	4,2765	4,2	0,0105
47	23/08/2024	0,0767	0,22	154	0,06	147,0	4,3515	4,2	0,0268
48	26/08/2024	0,0685	0,2	154	0,06	147,0	4,327	4,2	0,0463
49	27/08/2024	0,0658	0,28	154	0,04	147,0	4,4365	4,2	0,0128
50	28/08/2024	0,0630	0,3	154	0,03	147,0	4,466	4,2	0,0152
51	29/08/2024	0,0603	0,32	154	0,03	147,0	4,4885	4,2	0,0059
52	30/08/2024	0,0575	0,33	134	0,03	147,0	4,496	4,2	0,0167
53	02/09/2024	0,0493	0,3	134	0,02	147,0	4,4765	4,2	0,0170
54	03/09/2024	0,0466	0,21	134	0,04	147,0	4,3715	4,2	-0,0076
55	04/09/2024	0,0438	0,2	134	0,04	147,0	4,3545	4,2	0,0303
56	05/09/2024	0,0411	0,22	134	0,03	147,0	4,3875	4,2	0,0146
57	06/09/2024	0,0384	0,15	134	0,06	147,0	4,2925	4,2	-0,0154
58	09/09/2024	0,0301	0,18	134	0,04	147,0	4,342	4,2	-0,0157
59	10/09/2024	0,0274	0,11	134	0,06	147,0	4,2465	4,2	0,0309
60	11/09/2024	0,0247	0,11	134	0,06	147,0	4,246	4,2	0,0394
61	12/09/2024	0,0219	0,16	134	0,03	147,0	4,3265	4,2	0,0388
62	13/09/2024	0,0192	0,23	134	0,02	147,0	4,4055	4,2	0,0575
63	16/09/2024	0,0110	0,25	134	0	147,0	4,4405	4,2	0,2295
64	17/09/2024	0,0082	0,31	134	0	147,0	4,511	4,2	-0,0285
65	18/09/2024	0,0055	0,31	134	0	147,0	4,5085	4,2	0,0674
66	19/09/2024	0,0027	0,4	134	0	147,0	4,6	4,2	0,0000

Anexo II: Tasa implícita, tipo de interés sin riesgo y diferencias

t	Fecha	i	Bonos zona euro a 3 meses	Implícita - Sin Riesgo
1	20/06/2024	0,0377	0,0359	0,0018
2	21/06/2024	0,0341	0,0359	-0,0018
3	24/06/2024	0,0415	0,0359	0,0056
4	25/06/2024	0,0300	0,0358	-0,0058
5	26/06/2024	0,0473	0,0359	0,0115
6	27/06/2024	0,0345	0,0358	-0,0013
7	28/06/2024	0,0311	0,0359	-0,0048
8	01/07/2024	0,0469	0,0360	0,0109
9	02/07/2024	0,0406	0,0360	0,0046
10	03/07/2024	0,0469	0,0360	0,0109
11	04/07/2024	0,0376	0,0359	0,0017
12	05/07/2024	0,0405	0,0357	0,0047
13	08/07/2024	0,0391	0,0356	0,0035
14	09/07/2024	0,0434	0,0356	0,0078
15	10/07/2024	0,0402	0,0355	0,0046
16	11/07/2024	0,0343	0,0353	-0,0010
17	12/07/2024	0,0525	0,0353	0,0172
18	15/07/2024	0,0521	0,0351	0,0170
19	16/07/2024	0,0536	0,0351	0,0185
20	17/07/2024	0,0495	0,0351	0,0145
21	18/07/2024	0,0446	0,0352	0,0094
22	19/07/2024	0,0504	0,0352	0,0152
23	22/07/2024	0,0431	0,0353	0,0078
24	23/07/2024	0,0508	0,0354	0,0154
25	24/07/2024	0,0383	0,0353	0,0030
26	25/07/2024	0,0567	0,0354	0,0213
27	26/07/2024	0,0316	0,0352	-0,0036
28	29/07/2024	0,0541	0,0346	0,0195
29	30/07/2024	0,0306	0,0343	-0,0036
30	31/07/2024	0,0259	0,0343	-0,0083
31	01/08/2024	0,0400	0,0340	0,0060
32	02/08/2024	0,0197	0,0335	-0,0137
33	05/08/2024	0,0288	0,0337	-0,0049
34	06/08/2024	0,0314	0,0340	-0,0026
35	07/08/2024	0,0634	0,0341	0,0293
36	08/08/2024	0,0520	0,0342	0,0178
37	09/08/2024	0,0445	0,0342	0,0103
38	12/08/2024	0,0248	0,0341	-0,0093
39	13/08/2024	0,0397	0,0340	0,0057
40	14/08/2024	0,0238	0,0341	-0,0103
41	15/08/2024	0,0382	0,0339	0,0043
42	16/08/2024	0,0303	0,0338	-0,0035
43	19/08/2024	0,0137	0,0337	-0,0200
44	20/08/2024	0,0285	0,0336	-0,0052

45	21/08/2024	0,0131	0,0336	-0,0204
46	22/08/2024	0,0105	0,0334	-0,0229
47	23/08/2024	0,0268	0,0334	-0,0066
48	26/08/2024	0,0463	0,0335	0,0128
49	27/08/2024	0,0128	0,0338	-0,0210
50	28/08/2024	0,0152	0,0337	-0,0184
51	29/08/2024	0,0059	0,0334	-0,0275
52	30/08/2024	0,0167	0,0334	-0,0167
53	02/09/2024	0,0170	0,0336	-0,0165
54	03/09/2024	-0,0076	0,0337	-0,0413
55	04/09/2024	0,0303	0,0336	-0,0032
56	05/09/2024	0,0146	0,0335	-0,0189
57	06/09/2024	-0,0154	0,0335	-0,0489
58	09/09/2024	-0,0157	0,0334	-0,0491
59	10/09/2024	0,0309	0,0334	-0,0025
60	11/09/2024	0,0394	0,0335	0,0059
61	12/09/2024	0,0388	0,0336	0,0052
62	13/09/2024	0,0575	0,0336	0,0238
63	16/09/2024	0,2295	0,0335	0,1960
64	17/09/2024	-0,0285	0,0334	-0,0619
65	18/09/2024	0,0674	0,0335	0,0338
66	19/09/2024	0,0000	0,0330	-0,0330

Anexo III: Discrepancias en la paridad Put-Call bajo distintas tasas

t	Fecha	$C_t - P_t$	$S_t - K(1+r)^{-T}$ (implícita)	$S_t - K(1+r)^{-T}$ (sin riesgo)
1	20/06/2024	0,2800	0,2800	0,2782
2	21/06/2024	0,1700	0,1700	0,1718
3	24/06/2024	0,2500	0,2500	0,2446
4	25/06/2024	0,2100	0,2100	0,2156
5	26/06/2024	0,1900	0,1900	0,1792
6	27/06/2024	0,1700	0,1700	0,1712
7	28/06/2024	0,1600	0,1600	0,1644
8	01/07/2024	0,2900	0,2900	0,2803
9	02/07/2024	0,1600	0,1600	0,1560
10	03/07/2024	0,2600	0,2600	0,2506
11	04/07/2024	0,3400	0,3400	0,3385
12	05/07/2024	0,2800	0,2800	0,2760
13	08/07/2024	0,2800	0,2800	0,2772
14	09/07/2024	0,2200	0,2200	0,2138
15	10/07/2024	0,3300	0,3300	0,3263
16	11/07/2024	0,2900	0,2900	0,2907
17	12/07/2024	0,3500	0,3500	0,3368
18	15/07/2024	0,2900	0,2900	0,2775
19	16/07/2024	0,2800	0,2800	0,2666
20	17/07/2024	0,3100	0,3100	0,2997
21	18/07/2024	0,3200	0,3200	0,3134
22	19/07/2024	0,2700	0,2700	0,2595
23	22/07/2024	0,3600	0,3600	0,3549
24	23/07/2024	0,4000	0,4000	0,3901
25	24/07/2024	0,5300	0,5300	0,5281
26	25/07/2024	0,3900	0,3900	0,3767
27	26/07/2024	0,3500	0,3500	0,3522
28	29/07/2024	0,3000	0,3000	0,2887
29	30/07/2024	0,3300	0,3300	0,3321
30	31/07/2024	0,2700	0,2700	0,2747
31	01/08/2024	0,0800	0,0800	0,0767
32	02/08/2024	-0,1400	-0,1400	-0,1325
33	05/08/2024	-0,2000	-0,2000	-0,1975
34	06/08/2024	-0,2200	-0,2200	-0,2187
35	07/08/2024	-0,1000	-0,1000	-0,1141
36	08/08/2024	-0,1100	-0,1100	-0,1184
37	09/08/2024	-0,0800	-0,0800	-0,0848
38	12/08/2024	-0,1000	-0,1000	-0,0960
39	13/08/2024	-0,0700	-0,0700	-0,0724
40	14/08/2024	-0,0900	-0,0900	-0,0858
41	15/08/2024	0,0400	0,0400	0,0383
42	16/08/2024	0,0400	0,0400	0,0414
43	19/08/2024	0,0900	0,0900	0,0972
44	20/08/2024	0,0500	0,0500	0,0518

45	21/08/2024	0,0600	0,0600	0,0669
46	22/08/2024	0,0800	0,0800	0,0875
47	23/08/2024	0,1600	0,1600	0,1621
48	26/08/2024	0,1400	0,1400	0,1365
49	27/08/2024	0,2400	0,2400	0,2457
50	28/08/2024	0,2700	0,2700	0,2748
51	29/08/2024	0,2900	0,2900	0,2968
52	30/08/2024	0,3000	0,3000	0,3039
53	02/09/2024	0,2800	0,2800	0,2833
54	03/09/2024	0,1700	0,1700	0,1780
55	04/09/2024	0,1600	0,1600	0,1606
56	05/09/2024	0,1900	0,1900	0,1932
57	06/09/2024	0,0900	0,0900	0,0978
58	09/09/2024	0,1400	0,1400	0,1462
59	10/09/2024	0,0500	0,0500	0,0503
60	11/09/2024	0,0500	0,0500	0,0494
61	12/09/2024	0,1300	0,1300	0,1295
62	13/09/2024	0,2100	0,2100	0,2082
63	16/09/2024	0,2500	0,2500	0,2420
64	17/09/2024	0,3100	0,3100	0,3121
65	18/09/2024	0,3100	0,3100	0,3093
66	19/09/2024	0,4000	0,4000	0,4004