



COMILLAS
UNIVERSIDAD PONTIFICIA



ICADE Facultad de Empresariales

LA EFICIENCIA DEL MERCADO DE REAL ESTATE CON MFDFA

Autor: Marta Carpi Pérez

Director: María Teresa Corzo Santamaría

MADRID | Septiembre 2024

ÍNDICE:

1. INTRODUCCIÓN AL MERCADO DE REAL ESTATE	13
1.1 El Mercado de Real Estate y su Actividad	13
1.2 Cómo y Por Qué Invertir en Real Estate	14
1.3 Situación Actual y Perspectivas Futuras	14
2. TEORÍA DE LA EFICIENCIA DEL MERCADO EN CONTEXTO DE REAL ESTATE	16
2.1 Fundamentos de la Teoría del Mercado Eficiente	16
2.2 Aplicación de la Teoría del Mercado Eficiente al Mercado Inmobiliario	17
2.3 Ineficiencias en el Mercado Inmobiliario: Causas y Ejemplos	17
2.4 Medición de la Eficiencia del Mercado Inmobiliario	18
3. GEOMETRÍA FRACTAL Y EFICIENCIA DEL MERCADO INMOBILIARIO	19
3.1 Dimensión Fractal como Medida de Complejidad Espacial	19
3.2 Autosemejanza y Dinámicas de Mercado	19
3.3 Análisis Multifractal de Series Temporales de Precios Inmobiliarios	20
3.4 Aplicaciones Prácticas de la Geometría Fractal en el Mercado Inmobiliario	21
4. ANÁLISIS DE FLUCTUACIONES MULTIFRACTALES SIN TENDENCIA (MFDFA)	22
4.1 Fundamentos del Análisis MFDFA	22
4.2 Aplicación del MFDFA en la Evaluación de la Eficiencia del Mercado Inmobiliario	22
4.3 Estudios Empíricos y Relevancia para el Mercado Inmobiliario	23
4.4 Implicaciones del MFDFA para la Política y la Inversión Inmobiliaria	24
5. JUSTIFICACIÓN Y DETALLE DEL ÍNDICE UTILIZADO: S&P 500 REAL ESTATE	25
5.1 Descripción del Índice S&P 500 Real Estate	25
5.2 Justificación del Uso del S&P 500 Real Estate	26
5.3 Detalle de la Muestra	27
5.4 Conclusión	27
6. IMPLEMENTACIÓN DEL ANÁLISIS DE FLUCTUACIÓN MULTIFRACTAL SIN TENDENCIA (MFDFA)	29
6.1 Limpieza de datos	29
6.2 Implementación	29
6.3 Visualización de Datos	30
6.4 Visualización del Exponente de Hurst en Ventanas Deslizantes	33
6.5 Análisis del Componente Hurst	33
6.6 Proceso fraccionario de Ornstein-Uhlenbeck	35
7. CONCLUSIONES	36
7.1 Interpretación de los Resultados del Análisis Multifractal y del Componente Hurst	37
7.2 Análisis Dinámico del Exponente de Hurst	38
7.3 Evaluación del Proceso Fraccionario de Ornstein-Uhlenbeck	39
7.4 Conclusión General sobre la Eficiencia del Mercado	39
8. BIBLIOGRAFÍA	39
9. DECLARACIÓN DE USO DE HERRAMIENTAS DE INTELIGENCIA ARTIFICIAL GENERATIVA EN TRABAJOS DE FIN DE GRADO	45
10. ANEXO: CÓDIGO PYTHON	45

RESUMEN:

Este estudio examina la eficiencia del mercado inmobiliario mediante el análisis multifractal de fluctuaciones sin tendencia (MFDFA), aplicando esta metodología al índice S&P 500 Real Estate durante el año 2023. Utilizando técnicas avanzadas de análisis de series temporales, se investigan las características multifractales del mercado, lo que permite comprender mejor la complejidad y las dinámicas subyacentes en los precios del mercado inmobiliario. El análisis se centra en calcular el exponente de Hurst generalizado, una métrica fundamental para evaluar la memoria y la dependencia temporal en las series de precios. Además, se exploran los exponentes de escala multifractal y el espectro de singularidad, que ayudan a identificar la heterogeneidad en las respuestas del mercado a diferentes fluctuaciones.

El trabajo incluye un enfoque detallado sobre cómo las diferentes escalas temporales y magnitudes de fluctuaciones afectan el comportamiento del mercado inmobiliario. Se analiza también el proceso fraccionario de Ornstein-Uhlenbeck para comprender la dinámica de reversión a la media y la memoria a largo plazo en los precios de los activos inmobiliarios. Este estudio proporciona un marco metodológico robusto para investigar la eficiencia del mercado inmobiliario y sugiere potenciales aplicaciones para otras clases de activos y mercados financieros.

PALABRAS CLAVE:

- Mercado Inmobiliario
- Eficiencia del Mercado
- Análisis Multifractal
- Exponente de Hurst
- Fluctuaciones de Precios
- Series temporales
- Dinámica de Mercado

ABSTRACT:

This study examines the efficiency of the Real Estate market using multifractal detrended fluctuation analysis (MFDFA), applying this methodology to the S&P 500 Real Estate index for the year 2023. By employing advanced time series analysis techniques, the study investigates the multifractal characteristics of the market, allowing for a deeper understanding of the complexity and underlying dynamics of Real Estate market prices. The analysis focuses on calculating the generalised Hurst exponent, a key metric for evaluating memory and temporal dependence in price series. Additionally, the study explores multifractal scaling exponents and the singularity spectrum to identify heterogeneity in market responses to different levels of fluctuations.

The work includes a detailed approach to how different time scales and fluctuation magnitudes affect Real Estate market behaviour. It also analyses the fractional Ornstein-Uhlenbeck process to understand mean-reversion dynamics and long-term memory in Real Estate asset prices. This study provides a robust methodological framework for investigating market efficiency and suggests potential applications for other asset classes and financial markets.

KEY WORDS:

- Real Estate Market
- Market Efficiency
- Multifractal Analysis
- Hurst Exponent
- Price Fluctuations
- Time Series
- Market Dynamics

1. INTRODUCCIÓN AL MERCADO DE REAL ESTATE

1.1 El Mercado de Real Estate y su Actividad

El término "Real Estate" se refiere a la propiedad de la tierra y todo lo que está adherido a ella, incluyendo bienes inmuebles como casas, edificios comerciales, terrenos y estructuras en esos terrenos. Este sector es fundamental para la economía y tiene un impacto significativo en la vida de las personas, dado que las transacciones inmobiliarias son una parte integral de la sociedad. En el núcleo del Real Estate se encuentran la compra, venta, desarrollo y gestión de propiedades (Real Estate, s. f.).

El Real Estate comprende una variedad de activos con un alto valor económico y social. Estos activos incluyen casas, edificios comerciales, terrenos, recursos naturales y otras mejoras en la propiedad. En otras palabras, el término abarca todas las actividades relacionadas con la compraventa de activos inmobiliarios. El mercado inmobiliario se divide en varias categorías, cada una con características distintivas:

- **Residencial:** Propiedades diseñadas para ser habitadas, como casas, apartamentos y condominios.
- **Comercial:** Edificios y terrenos utilizados para actividades empresariales, como oficinas, tiendas y centros comerciales.
- **Industrial:** Propiedades destinadas a la producción, almacenamiento y distribución de bienes, como fábricas y almacenes.
- **Terrenos:** Parcelas de tierra no desarrolladas que pueden ser utilizadas para agricultura, conservación o futuros desarrollos inmobiliarios.
- **Especializado:** Propiedades con usos específicos como hoteles, hospitales y escuelas.

El sector inmobiliario es crucial no solo por su contribución directa a la economía mediante la generación de empleo y la inversión, sino también por su papel en la configuración del entorno urbano y rural. Las decisiones sobre el uso y desarrollo de la tierra afectan profundamente a las comunidades, influyendo en el acceso a servicios, la movilidad y la calidad de vida (Real Estate, s. f.).

1.2 Cómo y Por Qué Invertir en Real Estate

Hudson-Wilson, Fabozzi y Gordon argumentan a favor de la incorporación de bienes raíces en una cartera de inversión de una organización bien administrada. Las principales consideraciones son las siguientes (Hudson-Wilson et al., 2005):

- **Disminuir el Riesgo Total de la Cartera:** Al combinar varias clases de activos con diferentes respuestas a eventos previstos e inesperados, se puede reducir el riesgo total.
- **Obtener Rentabilidad Competitiva:** Los bienes raíces pueden ofrecer una rentabilidad totalmente competitiva en comparación con otros tipos de activos.
- **Protección Contra la Inflación:** Los bienes raíces pueden actuar como un resguardo contra la inflación imprevista.
- **Participación Representativa del Mundo de las Inversiones:** Incluir bienes raíces en la cartera permite una representación razonable del universo de inversiones.
- **Generación de Flujos de Caja Sólidos:** Los bienes raíces pueden proporcionar flujos de caja estables y robustos para la cartera.

Es esencial revisar periódicamente estos criterios utilizando una definición amplia del sector inmobiliario, que abarque activos de rendimiento combinado público, privado, de deuda y de renta variable.

1.3 Situación Actual y Perspectivas Futuras

El precio de la vivienda es un equilibrio entre la oferta y la demanda. Durante los últimos años, la pandemia causó una interrupción significativa en la construcción, seguida por el aumento de los costos de materiales, lo que paralizó muchos proyectos inmobiliarios. En 2020 y 2021, la construcción fue mínima, y con la reactivación del mercado en 2022, la oferta no pudo igualar la demanda, creando un desequilibrio en el sector. Este exceso de demanda en relación con la oferta ha llevado a un aumento de los precios de viviendas y alquileres.

Para comprender los factores que afectan los precios del mercado inmobiliario, es necesario analizar tanto la oferta como la demanda. Los principales factores incluyen:

- **Inflación:** Afecta directamente los costes de construcción y los precios de los materiales.
- **Tipos de Interés:** Un aumento en los tipos de interés encarece la financiación de los proyectos, reduciendo la demanda de nuevos inmuebles.
- **Crecimiento Económico:** Un crecimiento económico robusto aumenta la capacidad de compra de los consumidores y la demanda de inmuebles.
- **Desempleo:** Altas tasas de desempleo reducen la capacidad de los individuos para adquirir o alquilar propiedades.

Actualmente, los tipos de interés han alcanzado un tope, y con la inflación disminuyendo hacia el objetivo del 2%, no se prevén más subidas significativas. Esto reducirá el costo de financiación notablemente. Además, la banca ha aprendido de la crisis de 2008 y se ha vuelto más cautelosa, evitando la sobrevaloración de carteras. La situación económica esperada para el mercado de Real Estate en 2024 es positiva, con un mayor dinamismo tras la desaceleración inicial de la actividad y una posible reducción de los tipos de interés por parte de los principales bancos centrales (Real Estate Market Outlook España 2024, s. f.).

2. TEORÍA DE LA EFICIENCIA DEL MERCADO EN EL CONTEXTO DEL REAL ESTATE

La teoría de la eficiencia del mercado (EMH, por sus siglas en inglés) es un concepto central en economía financiera que postula que los precios de los activos reflejan toda la información disponible en un mercado dado. Propuesta inicialmente por Eugene Fama en la década de 1960, esta teoría se ha convertido en un pilar fundamental para entender el comportamiento de los precios en diferentes mercados financieros, incluyendo el mercado inmobiliario (Fama, 1970). Según esta teoría, si un mercado es eficiente, los precios de los activos en dicho mercado deben ajustarse rápidamente a la nueva información, impidiendo que los inversores obtengan rendimientos anormales de forma consistente mediante el uso de estrategias basadas en la información pasada o presente.

2.1 Fundamentos de la Teoría del Mercado Eficiente

La teoría del mercado eficiente se clasifica en tres formas principales según el grado de eficiencia del mercado: débil, semifuerte y fuerte. En su forma débil, la EMH sostiene que los precios de los activos reflejan toda la información contenida en los precios pasados. Esto implica que el análisis técnico, basado en patrones de precios históricos, no debería proporcionar rendimientos superiores al promedio del mercado (Fama, 1970).

En su forma semi-fuerte, la EMH argumenta que los precios de los activos reflejan toda la información públicamente disponible, incluyendo no sólo la información histórica de precios, sino también los anuncios de ganancias, las tasas de interés, los eventos macroeconómicos y cualquier otra información de dominio público. En este caso, ni el análisis técnico ni el análisis fundamental permitirían a un inversor obtener rendimientos anormales de manera consistente (Fama, 1991).

Finalmente, en su forma fuerte, la EMH afirma que los precios de los activos incorporan toda la información, tanto pública como privada. Esto significa que incluso los inversores con información privilegiada no podrían obtener ganancias superiores al promedio del mercado de manera constante. Esta versión de la teoría es la más controvertida, ya que sugiere que no existen ineficiencias en el mercado que puedan ser explotadas por cualquier participante (Jensen (Deceased) & C, 1978).

2.2 Aplicación de la Teoría del Mercado Eficiente al Mercado Inmobiliario

La aplicación de la teoría del mercado eficiente al mercado inmobiliario presenta desafíos únicos debido a las características intrínsecas del mercado. A diferencia de los mercados financieros tradicionales, donde los activos son altamente líquidos y las transacciones pueden realizarse rápidamente, el mercado inmobiliario se caracteriza por una baja liquidez, altos costos de transacción y una gran heterogeneidad entre las propiedades. Estas características pueden afectar la velocidad y la precisión con la que la información se incorpora en los precios de los activos inmobiliarios (Case & Shiller, 1988).

En un mercado inmobiliario eficiente, los precios de las propiedades deberían reflejar toda la información relevante, incluyendo factores locales como el desarrollo de infraestructuras, cambios en la regulación del uso del suelo, tasas de interés hipotecarias y tendencias demográficas. Sin embargo, debido a la naturaleza menos transparente y más fragmentada del mercado inmobiliario, es posible que estas variables no se reflejen de manera inmediata o completa en los precios de las propiedades, sugiriendo la presencia de ineficiencias (Geltner et al., 2007).

2.3 Ineficiencias en el Mercado Inmobiliario: Causas y Ejemplos

El mercado inmobiliario puede ser susceptible a diversas ineficiencias debido a varios factores. Primero, la baja frecuencia de transacciones y la heterogeneidad de las propiedades pueden dificultar la integración rápida de la información en los precios. A diferencia de los mercados bursátiles, donde miles de transacciones ocurren en fracciones de segundo, las propiedades inmobiliarias suelen cambiar de manos con poca frecuencia, y cada transacción implica un proceso prolongado de negociación, inspección y cierre (Housing Price Indices Based on All Transactions Compared to Repeat Subsamples - Clapp - 1991 - Real Estate Economics - Wiley Online Library, s. f.).

Además, las barreras de información son más pronunciadas en el mercado inmobiliario. Los compradores y vendedores no siempre tienen acceso a la misma información, y la información sobre propiedades comparables o ventas recientes puede ser incompleta o desactualizada. Esto contrasta con los mercados financieros, donde la información sobre precios y transacciones es generalmente más accesible y transparente.

Otro factor es la influencia de factores emocionales y de comportamiento, que puede llevar a decisiones de compra o venta que no están completamente basadas en la lógica o la información objetiva. Por ejemplo, los compradores pueden sobrevalorar una propiedad debido a preferencias personales o subestimar los riesgos asociados con ciertos vecindarios en función de prejuicios personales. Estos comportamientos pueden crear distorsiones de precios que no se ajustan inmediatamente según la teoría del mercado eficiente (Shiller, 2003).

2.4 Medición de la Eficiencia del Mercado Inmobiliario

Dada la naturaleza particular del mercado inmobiliario, la medición de su eficiencia requiere métodos más sofisticados que los utilizados en mercados financieros más líquidos. Herramientas como el análisis de fluctuaciones sin tendencia (DFA) y el análisis multifractal de fluctuaciones sin tendencia (MFDFA) se han convertido en métodos valiosos para investigar las características temporales y espaciales de las series de precios inmobiliarios (Peters, 1994). Estas técnicas permiten identificar patrones de dependencia temporal y espacial que pueden ser indicativos de ineficiencias en el mercado.

El uso de estos métodos en estudios empíricos ha demostrado que los mercados inmobiliarios a menudo muestran propiedades multifractales y comportamientos caóticos que reflejan la presencia de memoria de largo alcance y la influencia de factores no lineales en la formación de precios. Estos hallazgos sugieren que, en muchos casos, los mercados inmobiliarios no cumplen plenamente con los supuestos de la teoría del mercado eficiente, al menos no en sus formas más fuertes o semi-fuertes (Wang et al., 2011).

3. GEOMETRÍA FRACTAL Y EFICIENCIA DEL MERCADO INMOBILIARIO

La geometría fractal es un enfoque matemático utilizado para estudiar estructuras complejas que muestran patrones repetitivos a diferentes escalas, conocidos como autosemejanza. Esta característica hace que la geometría fractal sea especialmente útil en el análisis de mercados financieros e inmobiliarios, donde los precios y las distribuciones espaciales de los activos muestran una complejidad similar y a menudo no se ajustan a los modelos tradicionales basados en la geometría euclidiana. En el contexto del mercado inmobiliario, la geometría fractal permite una nueva forma de medir la eficiencia del mercado al capturar estas dinámicas complejas y no lineales, proporcionando así una herramienta poderosa para el análisis de patrones de precios y distribución de propiedades.

3.1 Dimensión Fractal como Medida de Complejidad Espacial

Uno de los conceptos fundamentales de la geometría fractal es la dimensión fractal, que cuantifica la complejidad de una estructura que no puede ser descrita por las dimensiones enteras tradicionales (1D, 2D, 3D). En el mercado inmobiliario, la dimensión fractal se utiliza para analizar la distribución espacial de las propiedades, reflejando cómo se organizan las estructuras urbanas y cómo se distribuyen los precios a lo largo de diferentes escalas.

La dimensión fractal puede ayudar a identificar patrones de agrupación o dispersión en los mercados inmobiliarios. Un alto valor de dimensión fractal puede indicar un mercado con alta complejidad espacial, donde las propiedades están distribuidas de manera más densa en ciertas áreas urbanas y más dispersas en otras, reflejando fenómenos como la gentrificación o el desarrollo urbano desigual. En contraste, un bajo valor de dimensión fractal podría sugerir un mercado más homogéneo o menos desarrollado (Falconer, 1997). Este tipo de análisis permite a los investigadores evaluar la eficiencia del mercado inmobiliario en términos de cómo los precios y las propiedades están distribuidos espacialmente, proporcionando información valiosa para la toma de decisiones de inversión.

3.2 Autosemejanza y Dinámicas de Mercado

La autosemejanza es otra característica clave de los fractales que se refiere a la repetición de patrones a diferentes escalas. En el mercado inmobiliario, los patrones de precios pueden mostrar propiedades de autosemejanza, lo que significa que las fluctuaciones de precios a pequeña escala pueden reflejar las fluctuaciones de precios a mayor escala. Esto sugiere que el mercado inmobiliario puede ser analizado como un sistema dinámico no lineal donde los pequeños cambios en una parte del mercado pueden tener efectos amplificados en otros lugares (Mandelbrot, 1982).

Identificar estos patrones autosemejantes puede ayudar a medir la eficiencia del mercado inmobiliario, ya que un mercado eficiente debería reflejar rápidamente toda la información disponible en los precios de las propiedades. Si los patrones de precios muestran autosemejanza, puede indicar que el mercado responde de manera consistente a la información nueva, lo que es una característica de un mercado eficiente. Sin embargo, si los patrones de precios son caóticos o impredecibles a diferentes escalas, esto podría sugerir ineficiencias o oportunidades de arbitraje.

3.3 Análisis Multifractal de Series Temporales de Precios Inmobiliarios

El análisis multifractal es una extensión del concepto de fractales que permite examinar la variabilidad y la complejidad de las series temporales, como las fluctuaciones de precios en el mercado inmobiliario. Mientras que un análisis fractal simple puede describir la autosemejanza de una serie temporal, el análisis multifractal puede capturar variaciones en esta autosemejanza en diferentes escalas de tiempo. Esto es crucial para entender las dinámicas del mercado inmobiliario, ya que los precios de las propiedades pueden estar sujetos a diferentes factores en diferentes períodos (Barnsley & Everywhere, 1988).

El análisis multifractal permite descomponer una serie temporal de precios inmobiliarios en diferentes componentes que corresponden a diferentes tipos de fluctuaciones, desde cambios pequeños y frecuentes hasta grandes fluctuaciones menos frecuentes. Esta descomposición puede proporcionar información sobre la eficiencia del mercado en diferentes condiciones. Por ejemplo, durante períodos de alta volatilidad económica, los mercados inmobiliarios pueden volverse más complejos y menos predecibles, mostrando un comportamiento multifractal más marcado. En contraste, en mercados estables, la serie temporal de precios puede mostrar un comportamiento más simple, indicando un mercado más eficiente (Hutchinson, 1981).

3.4 Aplicaciones Prácticas de la Geometría Fractal en el Mercado Inmobiliario

La aplicación práctica de la geometría fractal en el mercado inmobiliario incluye la identificación de patrones espaciales de desarrollo urbano, la evaluación de la eficiencia del mercado y la predicción de futuros movimientos de precios. Los métodos fractales pueden utilizarse para mapear cómo los precios de las propiedades varían en diferentes regiones y para identificar áreas potenciales de inversión donde los precios pueden estar subvalorados o sobrevalorados (Edgar et al., 1990).

Además, la geometría fractal puede utilizarse en modelos predictivos que incorporan la complejidad y la irregularidad del mercado inmobiliario. Por ejemplo, los modelos que utilizan dimensiones fractales y análisis multifractal pueden prever cómo los precios de las propiedades pueden reaccionar ante diferentes escenarios económicos o cambios en la política gubernamental. Estos modelos pueden ser más precisos que los modelos tradicionales, que a menudo suponen una distribución normal de precios y una estructura de mercado homogénea (Falconer, 2020).

4. ANÁLISIS DE FLUCTUACIONES MULTIFRACTALES SIN TENDENCIA (MFDFA)

4.1 Fundamentos del Análisis MFDFA

El MFDFA se basa en la detección de estructuras multifractales dentro de una serie temporal. A diferencia de los métodos fractales tradicionales que suponen una estructura homogénea de autosemejanza a diferentes escalas, el MFDFA permite capturar una gama más amplia de comportamiento a través de diferentes exponentes de escala. Este enfoque es crucial para el análisis de mercados financieros e inmobiliarios porque los datos de precios de estos mercados a menudo muestran comportamientos de largo alcance y memoria de dependencia que no pueden ser capturados adecuadamente por métodos lineales o fractales simples (Kantelhardt et al., 2002).

El procedimiento del MFDFA implica varios pasos, que incluyen la integración de la serie temporal, la eliminación de tendencias locales en diferentes escalas y el cálculo de la función de fluctuación en función de la escala. Este enfoque permite evaluar la presencia de dependencia de largo alcance y cuantificar la complejidad multifractal en las series de tiempo. En el mercado inmobiliario, estas propiedades pueden reflejar cómo los precios de las propiedades reaccionan a diferentes escalas temporales ante factores externos como políticas gubernamentales, cambios en las tasas de interés y tendencias económicas globales.

4.2 Aplicación del MFDFA en la Evaluación de la Eficiencia del Mercado Inmobiliario

La aplicación del MFDFA en el análisis de mercados inmobiliarios ofrece un enfoque innovador para evaluar la eficiencia del mercado. Según la teoría del mercado eficiente, los precios de los activos reflejan toda la información disponible y se ajustan rápidamente a nuevas informaciones, lo que implica un mercado sin anomalías persistentes. Sin embargo, en el mercado inmobiliario, las ineficiencias pueden surgir debido a varios factores, como la falta de liquidez, los costos de transacción, y la heterogeneidad de las propiedades.

El MFDFA permite identificar estas ineficiencias al revelar la estructura multifractal de las fluctuaciones de precios. Un mercado inmobiliario que exhibe una estructura multifractal compleja podría indicar una presencia significativa de memoria de largo alcance, lo que sugiere que las fluctuaciones de precios están influenciadas por patrones de comportamiento pasados y no se ajustan inmediatamente a la nueva información. Por ejemplo, estudios han demostrado que mercados que presentan propiedades multifractales tienden a tener períodos de alta volatilidad seguidos de estabilidad, lo que contradice el supuesto de eficiencia del mercado (Ihlen, 2012).

Además, la amplitud de la multifractalidad puede ser un indicador de la complejidad del mercado: una mayor amplitud puede reflejar la coexistencia de diferentes comportamientos de mercado en varias escalas temporales, desde fluctuaciones de corto plazo hasta tendencias de largo plazo. Este análisis puede ser particularmente útil para inversores y formuladores de políticas para identificar señales tempranas de burbujas de precios o colapsos de mercado, que no serían detectables a través de un análisis más superficial.

4.3 Estudios Empíricos y Relevancia para el Mercado Inmobiliario

El uso del MFDFA en mercados financieros se ha expandido considerablemente desde su introducción, y su aplicación al mercado inmobiliario proporciona un campo fructífero para futuras investigaciones. Estudios empíricos han demostrado que muchos mercados inmobiliarios no son completamente eficientes y presentan características multifractales que pueden revelar ineficiencias y oportunidades de inversión (Gu & Zhou, 2010). Por ejemplo, en mercados emergentes, donde los datos de precios de las propiedades son menos transparentes y los mercados son menos líquidos, el análisis multifractal puede proporcionar información crucial sobre la estructura del mercado y los riesgos asociados.

Los patrones multifractales identificados en los precios inmobiliarios también pueden ayudar a los analistas a entender cómo los choques externos, como crisis financieras o desastres naturales, impactan de manera diferenciada a diferentes niveles de escala temporal y espacial. Esta capacidad de análisis es fundamental para desarrollar estrategias de mitigación de riesgos y mejorar la toma de decisiones en contextos de alta incertidumbre.

4.4 Implicaciones del MF DFA para la Política y la Inversión Inmobiliaria

El uso del MF DFA no sólo es relevante para el análisis de la eficiencia del mercado inmobiliario, sino que también tiene importantes implicaciones para la política y la inversión. Al identificar patrones de dependencia de largo alcance y multifractalidad en los precios de las propiedades, los inversores pueden ajustar sus estrategias para aprovechar oportunidades de arbitraje o para protegerse contra riesgos de mercado a través de diversificación adecuada y el uso de instrumentos financieros derivados.

Por otro lado, los formuladores de políticas pueden utilizar los resultados del análisis multifractal para diseñar intervenciones de mercado más efectivas. Por ejemplo, si un mercado muestra alta multifractalidad y evidencia de burbujas de precios, los reguladores podrían implementar medidas para enfriar el mercado y prevenir inestabilidades financieras que puedan surgir de un colapso repentino de precios. De esta manera, el MF DFA ofrece un marco cuantitativo para informar tanto a inversores como a responsables de políticas sobre la salud y la estabilidad del mercado inmobiliario.

5. JUSTIFICACIÓN Y DETALLE DEL ÍNDICE UTILIZADO: S&P 500 REAL ESTATE

Para evaluar la eficiencia del mercado de Real Estate mediante la multifractalidad, se ha seleccionado el índice S&P 500 Real Estate. Este índice, un subíndice especializado del S&P 500, agrupa a las principales empresas del mercado inmobiliario en los Estados Unidos, ofreciendo una representación precisa del rendimiento del sector. El S&P 500 Real Estate es particularmente útil para este análisis debido a varias características clave que lo hacen idóneo frente a otras alternativas.

5.1 Descripción del Índice S&P 500 Real Estate

El S&P 500 Real Estate es un índice que refleja el desempeño del sector inmobiliario dentro del marco más amplio del mercado bursátil estadounidense. Este índice incluye empresas de bienes raíces, tales como fideicomisos de inversión inmobiliaria (REITs), compañías de desarrollo y gestión inmobiliaria, entre otras. Para formar parte de este índice, las empresas deben cumplir con ciertos criterios de tamaño, liquidez y clasificación sectorial según el Global Industry Classification Standard (GICS). Esto garantiza que solo las empresas más relevantes y líquidas del sector inmobiliario estén incluidas, lo que aporta una gran transparencia y representatividad al índice.

Características principales del S&P 500 Real Estate:

- **Composición:** El índice incluye una variedad de empresas que operan en diferentes áreas del sector inmobiliario, proporcionando una cobertura integral de este sector. Esto abarca propiedades residenciales, comerciales, industriales y de oficinas, lo que permite una diversificación interna significativa.
- **Diversificación:** La inclusión de empresas de diferentes segmentos del mercado inmobiliario proporciona una diversificación interna que abarca distintos tipos de propiedades y modelos de negocio, desde REITs hasta desarrolladores y gestores de propiedades.
- **Representatividad:** Al ser parte del S&P 500, el índice mantiene una alta correlación con el rendimiento general del mercado bursátil, mientras que se centra específicamente en el sector inmobiliario. Esto facilita el análisis comparativo y la evaluación del desempeño relativo del sector.

- **Transparencia y Liquidez:** Las empresas incluidas en el S&P 500 Real Estate son de gran capitalización y alta liquidez, lo que garantiza datos fiables y representativos. La alta liquidez también contribuye a la eficiencia del mercado, permitiendo ajustes rápidos de precios basados en nueva información.

5.2 Justificación del Uso del S&P 500 Real Estate

El S&P 500 Real Estate ha sido elegido para este análisis de eficiencia del mercado de Real Estate mediante la multifractalidad por varias razones fundamentales:

- **Especialización y Focalización:** El índice proporciona un enfoque especializado en el sector inmobiliario, crucial para un análisis detallado y relevante en este ámbito. A diferencia de índices más generales, el S&P 500 Real Estate permite examinar de cerca el comportamiento de las empresas que operan exclusivamente en el sector de bienes raíces, lo que es esencial para evaluar la eficiencia del mercado en este contexto específico.
- **Alta Liquidez y Transparencia:** Las empresas incluidas en el índice son de alta capitalización y presentan gran liquidez. Esta característica es importante para los estudios de eficiencia del mercado, ya que la alta liquidez facilita el ajuste rápido de precios a nueva información, lo que es indicativo de un mercado más eficiente. Además, la transparencia de las empresas que componen el índice asegura que los datos utilizados en el análisis son fiables y representativos del mercado.
- **Comparabilidad con el Mercado General:** Al ser un subíndice del S&P 500, el S&P 500 Real Estate permite comparar el rendimiento del sector inmobiliario con el resto del mercado de manera efectiva. Esta capacidad de comparación es vital para entender cómo se comporta el sector inmobiliario en relación con otros sectores del mercado, proporcionando un contexto más amplio para la evaluación de la eficiencia del mercado.
- **Acceso a Datos Confiables y Consistentes:** Los precios de cierre del S&P 500 Real Estate están ampliamente disponibles y son utilizados comúnmente por inversores y analistas. La disponibilidad de datos históricos precisos y consistentes facilita la aplicación de técnicas avanzadas de análisis, como el análisis multifractal, para evaluar la eficiencia del mercado.

- **Reflejo de las Condiciones del Mercado Actual:** El análisis se basa en el precio de cierre diario del índice a lo largo del año 2023. El precio de cierre es considerado el más relevante por varias razones:
 - **Valor Final del Día de Negociación:** Refleja el valor percibido del activo al final del día de negociación, capturando la última valoración del mercado.
 - **Interacción entre Oferta y Demanda:** Como resultado de la interacción entre la oferta y la demanda, el precio de cierre refleja las variaciones diarias en el mercado. Esta característica puede sugerir una mayor eficiencia si los precios se ajustan consistentemente a la información disponible.
 - **Punto de Referencia Común:** Es una referencia estándar en la evaluación del rendimiento de los activos, ampliamente disponible y utilizada por inversores y analistas.

5.3 Detalle de la Muestra

Para el análisis de eficiencia del mercado utilizando la multifractalidad, se ha seleccionado una muestra de precios de cierre diarios del índice S&P 500 Real Estate a lo largo del año 2023. Esta selección permite capturar un periodo reciente, relevante y completo, reflejando el comportamiento del mercado inmobiliario en un contexto económico contemporáneo. El uso de datos de un año completo proporciona una muestra suficientemente amplia para identificar patrones multifractales y realizar un análisis estadístico robusto.

Justificación de la Muestra:

- **Actualidad y Relevancia:** Utilizar datos del año 2023 asegura que el análisis esté basado en la información más actualizada, reflejando las condiciones económicas y del mercado inmobiliario contemporáneas.
- **Representatividad Temporal:** La selección de precios de cierre diarios permite captar la dinámica diaria del mercado, proporcionando una alta resolución temporal para el análisis multifractal. Esto es crucial para identificar las propiedades multifractales de las series de precios, que pueden no ser evidentes en datos con menor frecuencia temporal.
- **Suficiencia Estadística:** Un año de datos diarios proporciona una cantidad suficiente de observaciones para realizar un análisis multifractal detallado, asegurando que los resultados sean estadísticamente significativos y robustos.

5.4 Conclusión

En conclusión, el índice S&P 500 Real Estate es una herramienta altamente relevante y conveniente para medir la eficiencia del mercado de Real Estate debido a su especialización sectorial, alta liquidez, transparencia, comparabilidad y disponibilidad de datos. Aunque existen otras alternativas, este índice proporciona un equilibrio óptimo entre representatividad y especificidad para el análisis propuesto, asegurando un análisis exhaustivo y preciso del rendimiento del sector inmobiliario. La elección de la muestra de precios de cierre diarios del año 2023 permite capturar las condiciones actuales del mercado, proporcionando un marco sólido para aplicar técnicas avanzadas como el análisis multifractal.

6. IMPLEMENTACIÓN DEL ANÁLISIS DE FLUCTUACIÓN MULTIFRACTAL SIN TENDENCIA (MF DFA)

6.1 Limpieza de datos

Primero, importo los datos de precios desde un archivo Excel, utilizando herramientas de procesamiento de datos que me permiten trabajar con las fechas como índice principal. Luego, calculo los retornos logarítmicos diarios empleando una técnica estándar en análisis financiero que compara los precios de cierre de dos días consecutivos. Este proceso es esencial para obtener una representación más precisa de los cambios porcentuales en los precios a lo largo del tiempo.

Dado que este cálculo genera algunos datos faltantes, como en la primera fila al desplazar los precios, procedo a limpiar los datos eliminando cualquier valor nulo, asegurándome de trabajar solo con información completa y válida. Finalmente, filtro los datos para centrarme únicamente en los retornos logarítmicos correspondientes al año 2023, que es el período de análisis de este trabajo.

6.2 Implementación

Primero, configuro la función de análisis multifractal utilizando varios parámetros clave. Estos incluyen los datos de entrada, el rango de retardos, los valores de q , el orden de ‘detrending’, y si la serie de datos debe integrarse o no. También se puede aplicar una ventana de extensión opcional.

Dentro de la función, defino dos funciones internas: una para integrar la serie de datos restando la media y acumulando la suma, y otra para generar una serie de valores q dentro de un rango específico. A continuación, determino el tamaño de la serie de datos y establezco valores predeterminados si no se especifican retardos. Genero un conjunto de retardos distribuidos logarítmicamente y, si no se proporciona un valor para q , utilizo un rango estándar de -5 a 5 . Dependiendo de si se ha indicado que se integre la serie de datos, ajusto el cálculo en consecuencia.

Posteriormente, calculo el análisis multifractal de fluctuaciones sin tendencia (MF DFA), utilizando los valores especificados. Ajusto una línea en una escala logarítmica doble para obtener la pendiente y así calcular el exponente de Hurst (h_q). Luego, procedo a calcular los

exponentes multifractales como τ (exponente de masa), α (exponente de singularidad) y $D\alpha$ (dimensión multifractal). Finalmente, determino el ancho espectral, que es la diferencia entre el valor máximo y mínimo de $D\alpha$, y presento las métricas calculadas en un formato adecuado para su análisis posterior.

	slope	hq	tau	alpha	Dalpha
-5.0	2.845914	1.845914	-10.229569	2.120287	-0.371868
-4.5	2.815428	1.815428	-9.169426	2.122241	-0.380660
-4.0	2.776832	1.776832	-8.107328	2.125320	-0.393952
-3.5	2.726887	1.726887	-7.044106	2.125373	-0.394701
-3.0	2.660652	1.660652	-5.981955	2.118129	-0.372433
-2.5	2.570391	1.570391	-4.925976	2.094573	-0.310455
-2.0	2.443691	1.443691	-3.887382	2.033533	-0.179683
-1.5	2.261629	1.261629	-2.892444	1.869836	0.087690
-1.0	2.017547	1.017547	-2.017547	1.492840	0.524707
-0.5	1.799208	0.799208	-1.399604	0.885626	0.956791
0.5	1.621785	0.621785	-0.689108	0.651214	1.014715
1.0	1.577218	0.577218	-0.422782	0.498194	0.920976
1.5	1.539391	0.539391	-0.190914	0.433552	0.841241

Figura 1: Resultados de los parámetros multifractales para diferentes valores de q .

6.3 Visualización de Datos

Primero, implemento una función para visualizar los resultados obtenidos del análisis multifractal. Esta función se encarga de generar un conjunto de gráficos que muestran diversas propiedades multifractales de la serie temporal analizada. Los parámetros que utiliza incluyen los valores de q , los retardos, las funciones de fluctuación, los resultados multifractales, y opcionalmente, un nombre de archivo donde se pueden guardar las gráficas.

Comienzo creando una figura y una cuadrícula de gráficos con un formato de 2x2 y un tamaño de 18x12 pulgadas, lo que proporciona suficiente espacio para visualizar cuatro gráficos de manera simultánea.

El primer gráfico se centra en las funciones de fluctuación. Para cada valor de q , realizo una representación en escala logarítmica que ilustra la relación entre las fluctuaciones y los retardos, iterando sobre los diferentes valores de q . Esta representación permite observar de forma clara cómo las fluctuaciones varían según las diferentes escalas temporales, lo que es esencial para comprender el comportamiento multifractal de los precios analizados.

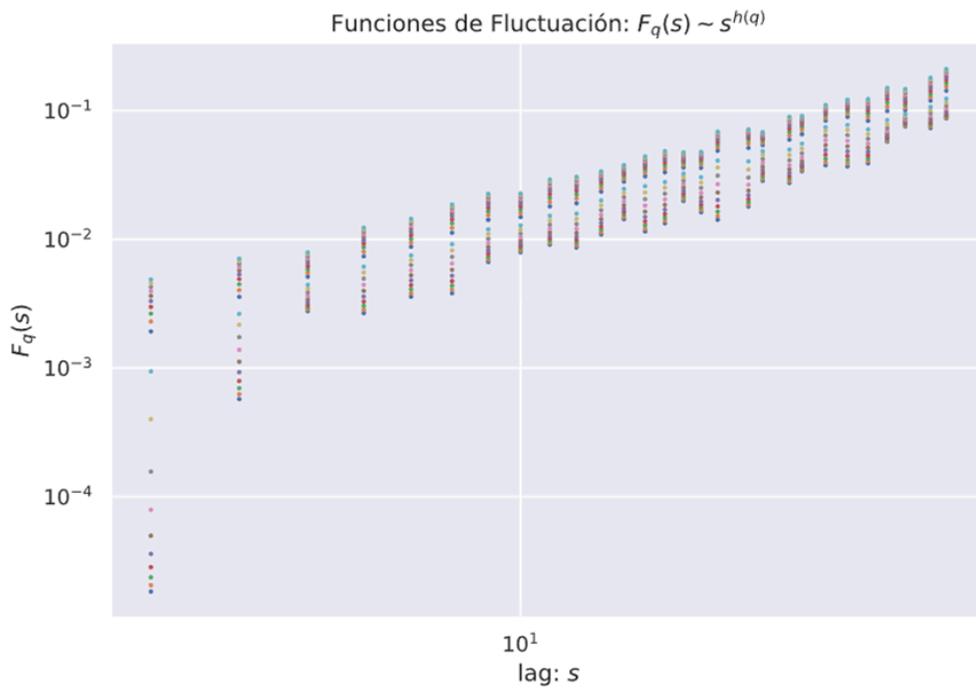


Figura 2.1: Representación gráfica de funciones de fluctuación para diferentes valores de q .

El segundo gráfico presenta los exponentes de Hurst generalizados (h_q) en función de los valores de $q(q)$.

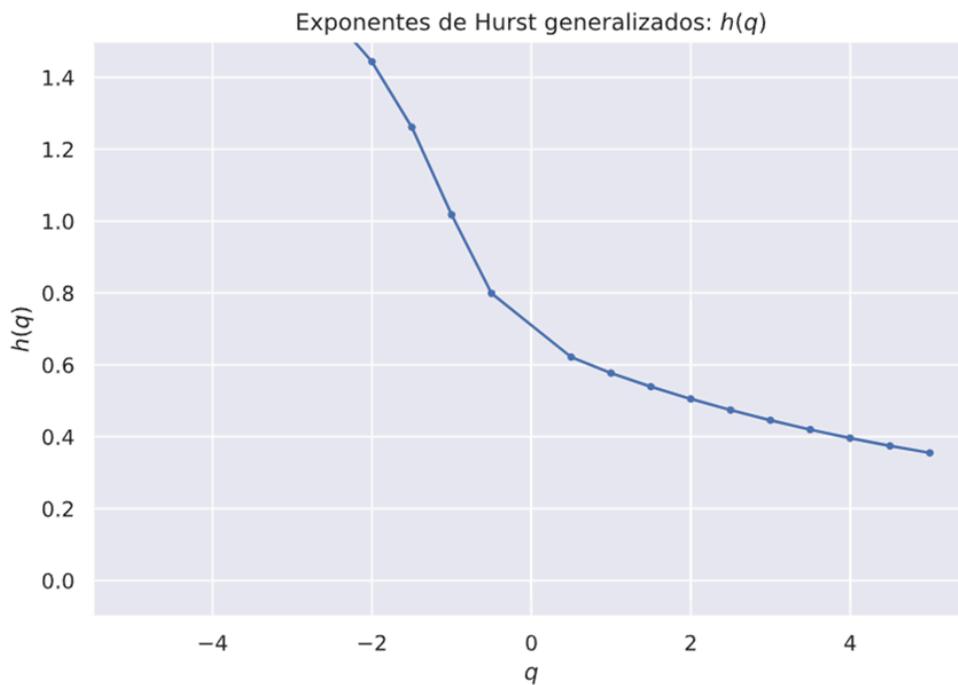


Figura 2.2: Comportamiento del exponente de Hurst en diferentes órdenes de momentos.

A continuación, el tercer gráfico muestra el exponente de escala multifractal (τ) contra los valores de $q(q)$.



Figura 2.3: Variación del exponente de escala multifractal en función de q .

Finalmente, el cuarto gráfico en la cuadrícula se utiliza para ilustrar el espectro de singularidad, el cual muestra la relación entre $D(\alpha)$ y α .

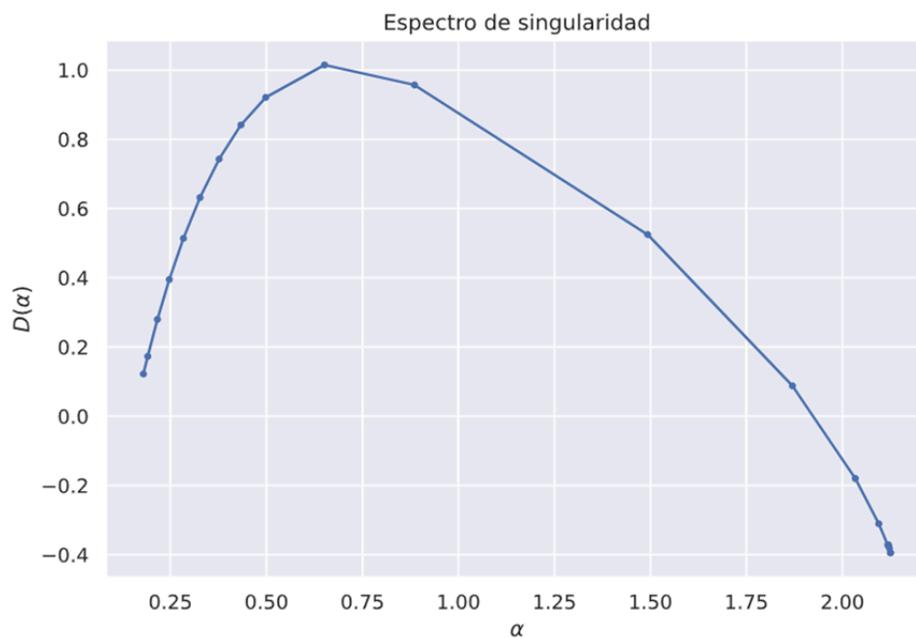


Figura 2.4: Distribución del espectro de singularidad $D(\alpha)$ en función de α .

6.4 Visualización del Exponente de Hurst en Ventanas Deslizantes

En esta sección, me encargo de visualizar la evolución del exponente de Hurst calculado en ventanas deslizantes. Esto permite analizar cómo varía la persistencia y la autocorrelación de la serie temporal a lo largo del tiempo, proporcionando información clave sobre los periodos de eficiencia o ineficiencia del mercado.

Para ello, elaboro una representación gráfica que muestra la evolución del exponente de Hurst a través del tiempo, lo que facilita la identificación de patrones y comportamientos del mercado en diferentes intervalos temporales. La visualización destaca cualquier fluctuación o tendencia, permitiendo obtener una visión clara sobre cómo se comporta la serie temporal y si hay fases de persistencia o corrección en los precios.

El resultado es una gráfica que refleja claramente los cambios en la eficiencia del mercado inmobiliario durante el periodo de estudio, proporcionando una herramienta visual crucial para entender su comportamiento dinámico.

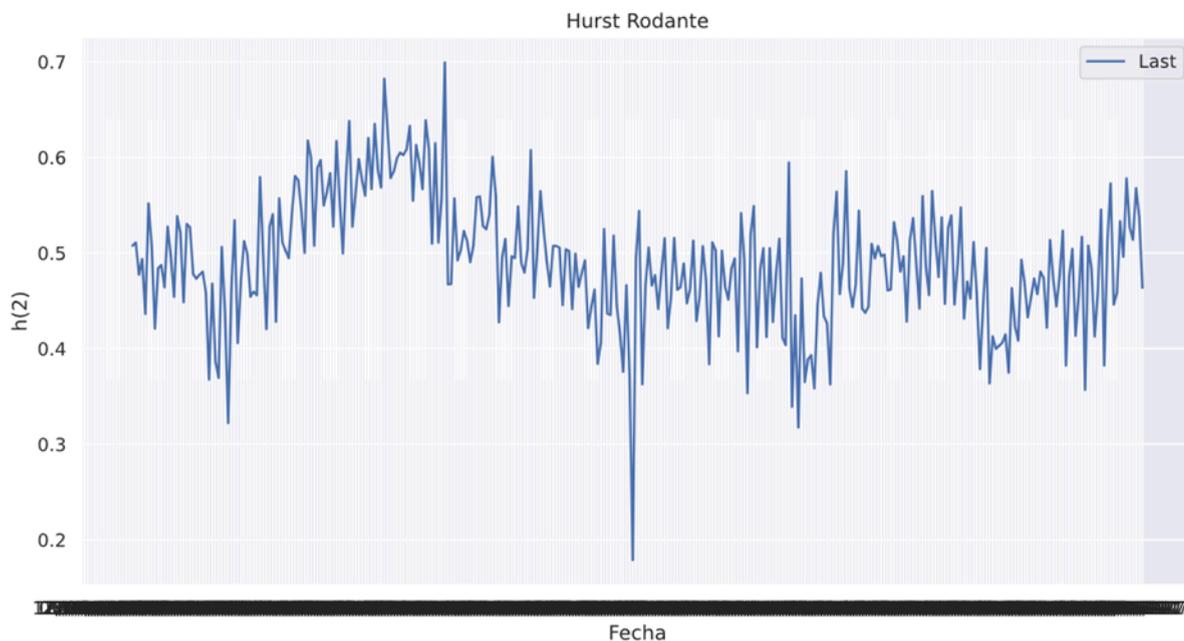


Figura 3: Evolución temporal del exponente de Hurst rodante $h(2)$.

6.5 Análisis del Componente Hurst

Primero, defino dos parámetros clave: el tamaño de la ventana, que se utiliza para analizar segmentos específicos de los datos, y el número de pasos entre las ventanas sucesivas, que determina la frecuencia con la que se recalcula el exponente de Hurst en los diferentes periodos. Luego, aplico un método que permite calcular el exponente de Hurst en cada una de estas ventanas deslizantes utilizando los datos proporcionados. Una vez obtenidos los valores, se ajustan para asegurarse de que se mantengan dentro del rango deseado, que es entre 0 y 1.

Después de calcular los valores del exponente de Hurst a lo largo del tiempo, estos se representan gráficamente en un gráfico de dispersión que muestra la variación del exponente en función de la fecha. Este gráfico es crucial, ya que permite visualizar tendencias o patrones en los datos de manera clara, ayudando a identificar posibles fluctuaciones en la eficiencia del mercado de bienes raíces a lo largo del tiempo. En conjunto, esta visualización, junto con el análisis numérico, proporciona una evaluación integral del comportamiento del mercado inmobiliario en relación con la eficiencia.

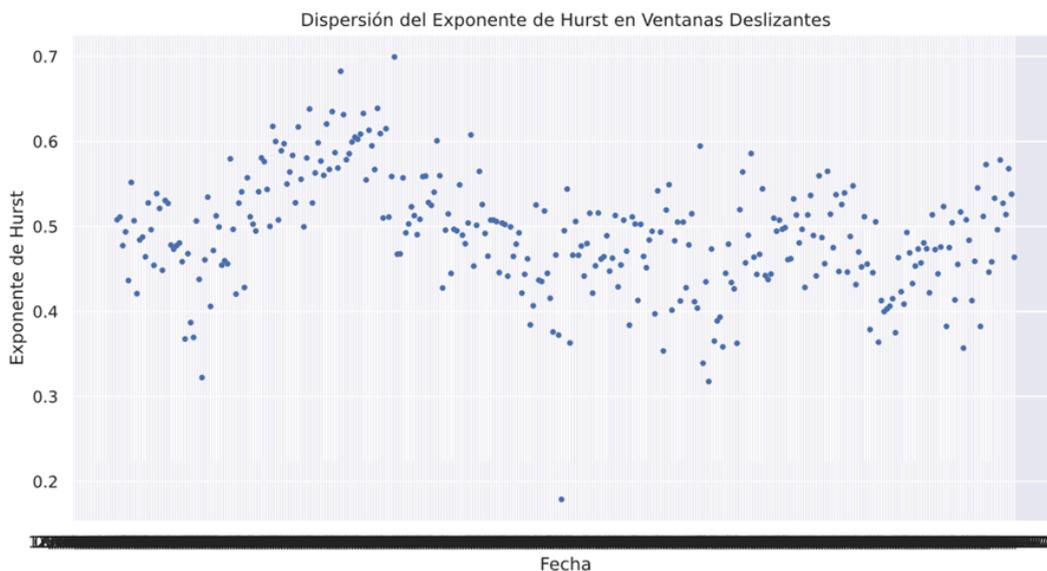


Figura 4: Variación temporal del exponente de Hurst utilizando ventanas deslizantes.

Para evaluar la distribución de los valores del exponente de Hurst calculados en ventanas deslizantes, genero un histograma. Este gráfico permite observar cómo se distribuyen los valores del exponente a lo largo del tiempo y facilita la identificación de patrones o

tendencias. Para la visualización, configuro una figura con un tamaño adecuado, de 12 por 6 pulgadas, que proporciona un formato amplio y claro para la interpretación de los resultados.

El rango de valores del exponente de Hurst se divide en 20 intervalos, lo que permite una segmentación precisa de la distribución, ofreciendo una visión más detallada de cómo fluctúan los valores en diferentes momentos. Este histograma es útil para analizar la variabilidad del exponente de Hurst y, en última instancia, obtener conclusiones sobre la eficiencia del mercado.

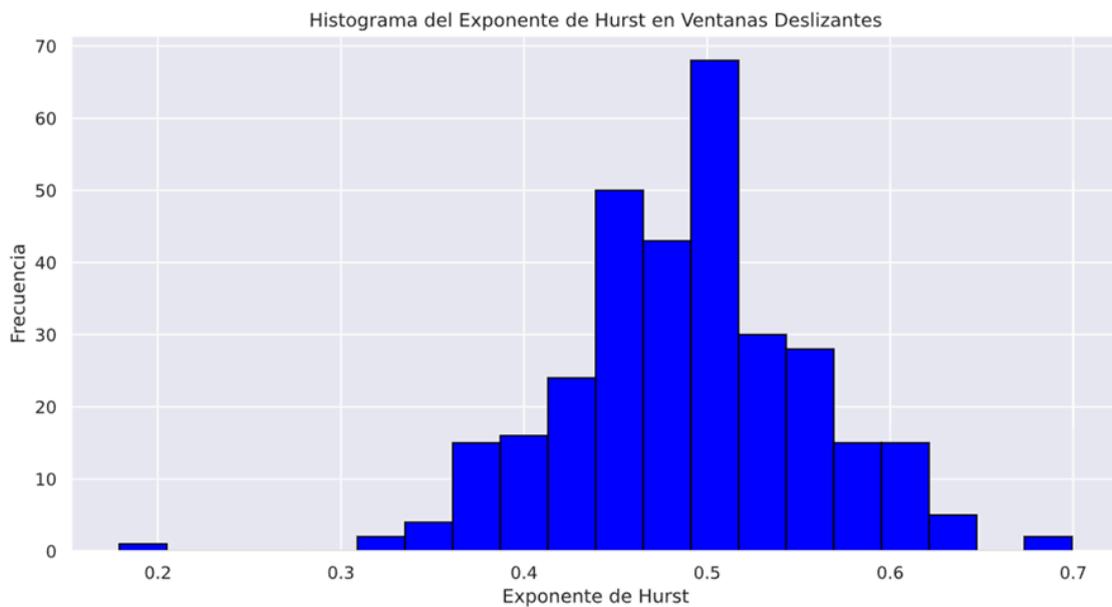


Figura 5: Distribución de los valores del exponente de Hurst calculados en ventanas deslizantes.

6.6 Proceso fraccionario de Ornstein-Uhlenbeck

Para estudiar los efectos de escala en procesos estocásticos continuos, se implementan tres procesos fraccionarios Ornstein-Uhlenbeck ejemplares. Estos procesos se basan en una ecuación diferencial estocástica que incluye una fuerza de reversión media y una volatilidad, complementada con un movimiento browniano fraccionario. El índice de Hurst (H) utilizado en estos procesos determina la autosimilitud y las características de la dependencia temporal en el movimiento browniano fraccionario.

Se configuran tres valores diferentes del índice de Hurst para explorar distintas dinámicas de los procesos, evaluando cómo afectan la escala de autosimilitud y las propiedades de los mismos. El proceso de integración numérica se emplea para suavizar las fluctuaciones, lo que

mejora la regularidad del comportamiento del sistema y genera los resultados esperados en términos de $h(q)=H+1$.

Posteriormente, se aplican técnicas de integración numérica utilizando un método de discretización para simular los procesos de Ornstein-Uhlenbeck a lo largo del tiempo, capturando así la evolución de estos sistemas. Finalmente, se utiliza un enfoque multifractal para analizar las series temporales generadas y detectar la presencia de un comportamiento monofractal o multifractal, lo cual es fundamental para interpretar las dinámicas subyacentes en los datos analizados.

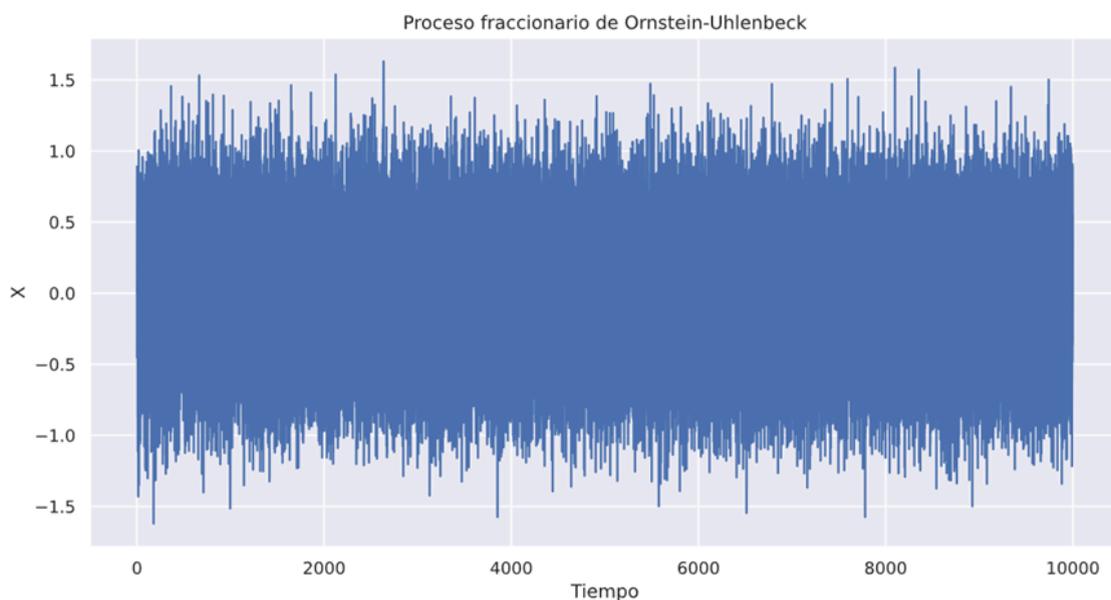


Figura 6: Dinámica del proceso fraccionario de Ornstein-Uhlenbeck a lo largo del tiempo.

7. CONCLUSIONES

7.1 Interpretación de los Resultados del Análisis Multifractal y del Componente Hurst

El presente estudio evalúa la eficiencia del mercado inmobiliario a través del análisis multifractal de fluctuaciones sin tendencia (MFDFA) aplicado al índice S&P 500 Real Estate durante el año 2023. Este enfoque ha facilitado una comprensión detallada de la complejidad y dinámica de los precios, revelando patrones multifractales y variaciones en la eficiencia del mercado a diferentes escalas temporales.

El análisis de las funciones de fluctuación muestra una clara dependencia de la escala, lo que confirma la presencia de multifractalidad en la serie temporal de precios del índice S&P 500 Real Estate. Este hallazgo es significativo porque indica que el comportamiento del mercado no es homogéneo, es decir, distintas escalas temporales muestran dinámicas de precios diferentes. La multifractalidad observada sugiere que tanto las pequeñas como las grandes fluctuaciones de los precios responden a distintas fuerzas del mercado, lo que podría ser un indicio de ineficiencias en ciertas condiciones.

El exponente de Hurst generalizado es una herramienta clave para evaluar cómo responde el mercado ante diferentes tamaños de fluctuaciones. Para fluctuaciones pequeñas, el valor elevado del exponente de Hurst indica persistencia, lo que puede reflejar un cierto grado de ineficiencia, ya que sugiere que los precios tienden a seguir una tendencia. Este comportamiento podría estar influido por decisiones de mercado motivadas por factores técnicos o emocionales que no se ajustan rápidamente a la nueva información. Por otro lado, para fluctuaciones grandes, los valores más bajos del exponente de Hurst sugieren anti-persistencia, lo que implica que el mercado tiende a corregir rápidamente grandes movimientos de precios, lo cual promueve la eficiencia al evitar que estas fluctuaciones persistan sin una justificación clara.

La variabilidad del exponente de Hurst con respecto a las fluctuaciones refuerza la conclusión de que el mercado inmobiliario actúa como un sistema complejo y adaptativo, donde la eficiencia no es estática, sino que varía en función de la escala de análisis.

El exponente de escala multifractal y el espectro de singularidad proporcionan aún más evidencia de la complejidad del mercado. La no linealidad del exponente multifractal indica que las propiedades de la serie temporal no pueden explicarse con un solo exponente de Hurst, lo que sugiere una estructura multifractal compleja. Además, la forma convexa del espectro de singularidad demuestra la existencia de una amplia gama de comportamientos de los precios, con diferentes niveles de concentración y dispersión. Esto es crucial para comprender cómo los precios de los activos inmobiliarios responden de manera diversa ante distintos eventos informativos y condiciones del mercado.

7.2 Análisis Dinámico del Exponente de Hurst

El análisis dinámico del exponente de Hurst, tanto en la serie temporal completa como en ventanas deslizantes, proporciona una visión detallada sobre la eficiencia del mercado a lo largo del tiempo. El histograma del exponente de Hurst muestra que la mayoría de los valores se concentran alrededor de 0.5, lo que sugiere que el mercado inmobiliario se comporta como un paseo aleatorio, respaldando la hipótesis de eficiencia en su forma débil. Esto implica que los precios reflejan de manera efectiva la información disponible, lo que dificulta realizar predicciones precisas basadas en datos históricos.

Además, el análisis de las ventanas deslizantes revela fluctuaciones en el exponente de Hurst, con períodos de persistencia cuando los valores son superiores a 0.5, lo que sugiere una tendencia prolongada y potenciales ineficiencias. A su vez, los períodos con valores inferiores a 0.5 reflejan anti-persistencia, indicando que el mercado tiende a corregir rápidamente los precios después de movimientos significativos. Esta alternancia entre persistencia y anti-persistencia indica que, aunque el mercado tiende a ser eficiente en promedio, hay momentos en los que la eficiencia disminuye, lo que puede crear oportunidades de arbitraje.

Este enfoque proporciona una evaluación más precisa de la eficiencia del mercado, al considerar no solo las tendencias generales, sino también las variaciones temporales, fundamentales para el desarrollo de estrategias de inversión y decisiones económicas informadas.

7.3 Evaluación del Proceso Fraccionario de Ornstein-Uhlenbeck

El uso del proceso fraccionario de Ornstein-Uhlenbeck en este estudio ha proporcionado una visión adicional sobre la memoria de largo alcance y la reversión a la media en el mercado de bienes raíces. El comportamiento de este proceso muestra que, aunque los precios pueden desviarse de su valor medio, hay una tendencia a regresar a este nivel, lo que es indicativo de una estructura de mercado que, si bien puede ser ineficiente en el corto plazo, tiende hacia la estabilidad en el largo plazo. Este hallazgo es consistente con un mercado que exhibe eficiencia parcial y ajustes post-evento.

7.4 Conclusión General sobre la Eficiencia del Mercado

En conclusión, los resultados obtenidos sugieren que el mercado inmobiliario, tal como se refleja en el índice S&P 500 Real Estate durante el año 2023, muestra características de eficiencia en su forma débil, pero con evidencias de ineficiencias temporales y multifractales. El comportamiento del mercado, caracterizado por un exponente de Hurst cercano a 0.5 en promedio, indica que los precios reflejan adecuadamente la información disponible y se ajustan de manera eficiente en la mayoría de los casos. Sin embargo, la presencia de multifractalidad y variaciones temporales en el exponente de Hurst sugieren que existen oportunidades para explotar las ineficiencias a corto plazo, lo cual es relevante tanto para inversores como para reguladores.

Es importante destacar que, aunque el mercado inmobiliario parece operar de manera eficiente en términos generales, estas ineficiencias temporales y multifractales identificadas ofrecen oportunidades para mejoras y ajustes regulatorios que podrían reducir aún más las ineficiencias detectadas. Por tanto, mientras que el mercado puede ser considerado eficiente en un sentido amplio, la variabilidad multifractal y los patrones de comportamiento sugieren que la eficiencia es una medida relativa, influenciada por múltiples factores, incluidos los macroeconómicos y los comportamentales. Este estudio contribuye significativamente al entendimiento de estas dinámicas y ofrece un marco sólido para futuras investigaciones y estrategias de inversión basadas en el comportamiento multifractal del mercado.

8. BIBLIOGRAFÍA

- Aragonés, J. R., & Mascareñas, J. (1994). La eficiencia y el equilibrio en los mercados de capital. *Análisis financiero*, 64(1), 76-89.
- Artigue, V., Cavalli, M. de los Á. F., & Lacués, E. (2021). Estado del arte sobre la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría Fractal en la escuela secundaria. *Pensamiento Matemático*, 11(2), 7.
- Barnsley, M. F., & Everywhere, F. (1988). Academic Press. *San Diego*.
- Case, K. E., & Shiller, R. J. (1988). *The Efficiency of the Market for Single-Family Homes* (Working Paper 2506). National Bureau of Economic Research.
<https://doi.org/10.3386/w2506>
- Chen, J. (2022). Real estate: Definition, types, how to invest in it. *Dostupno na: <https://www.investopedia.com/terms/r/realestate.asp> [pristupljeno 30. studenoga 2022.]*.
- Edgar, G. A., & Mauldin, R. D. (1992). Multifractal decompositions of digraph recursive fractals. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 3(3), 604-628.
- Edgar, G. A., Measure, T., & Geometry, F. (1990). *Undergraduate texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York.
- Falconer, K. J. (1988). The Hausdorff dimension of self-affine fractals. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 103(2), 339-350.
<https://www.cambridge.org/core/journals/mathematical-proceedings-of-the-cambridge-philosophical-society/article/hausdorff-dimension-of-selfaffine-fractals/18A76BD2F0C8EC11FC9FA011584FA2F3>
- Falconer, K. J. (1997). *Techniques in Fractal Geometry*. John Wiley and Sons.
- Falconer, K. J. (2020). A Capacity Approach to Box and Packing Dimensions of

- Projections and Other Images. En P. A. Ruiz, J. P. Chen, L. G. Rogers, R. S. Strichartz, & A. Teplyaev, *Fractals and Dynamics in Mathematics, Science, and the Arts: Theory and Applications* (Vol. 05, pp. 1-19). WORLD SCIENTIFIC.
https://doi.org/10.1142/9789811215537_0001
- Fama, E. F. (1970). Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work. *The Journal of Finance*, 25(2), 383-417. <https://doi.org/10.2307/2325486>
- Fama, E. F. (1991). Efficient Capital Markets: II. *The Journal of Finance*, 46(5), 1575-1617. <https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1991.tb04636.x>
- Fractal—Análisis de tendencia—Formación.* (s. f.). TradingView. Recuperado 7 de abril de 2024, de <https://es.tradingview.com/education/fractal/>
- Geltner, D. M., Miller, N. G., Clayton, J., & Eichholtz, P. (2007). *Commercial real estate: Analysis & investments*. Cengage Learning.
<https://thuvienso.hoasen.edu.vn/handle/123456789/11660>
- Gorjão, L. R., Hassan, G., Kurths, J., & Witthaut, D. (2022). MFDFA: Efficient multifractal detrended fluctuation analysis in python. *Computer Physics Communications*, 273, 108254.
- Gu, G.-F., & Zhou, W.-X. (2010). Detrending moving average algorithm for multifractals. *Physical Review E*, 82(1), 011136.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevE.82.011136>
- Housing Price Indices Based on All Transactions Compared to Repeat Subsamples—Clapp—1991—Real Estate Economics—Wiley Online Library.* (s. f.).
 Recuperado 30 de agosto de 2024, de
<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1111/1540-6229.00553>
- Hudson-Wilson, S., Gordon, J. N., & Fadozzi, F. J. (2005). *Susan Hudson-Wilson, Jacques N. Gordon, Frank J. Fabozzi, Mark J. P. Anson, and S. Michael*

- Giliberto. 2005.*
- Hutchinson, J. E. (1981). Fractals and self similarity. *Indiana University Mathematics Journal*, 30(5), 713-747.
- Hyme, P. (2003). LA TEORÍA DE LOS MERCADOS DE CAPITALS EFICIENTES. UN EXAMEN CRÍTICO. *Cuadernos de Economía*, 22(39), 57-83.
- Ihlen, E. A. (2012). Introduction to multifractal detrended fluctuation analysis in Matlab. *Frontiers in physiology*, 3, 141.
- Iturriaga, H., Chen, J., Yang, J., Martinez, L. M., Shao, L., Liu, Y., Petrovic, C., Kirk, M., & Singamaneni, S. R. (2024). Proton-fluence dependent magnetic properties of exfoliable quasi-2D van der Waals Cr₂Si₂Te₆ magnet. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 36(22), 225801.
- Jensen (Deceased), & C, M. (1978). *Some Anomalous Evidence Regarding Market Efficiency* (SSRN Scholarly Paper 244159). <https://doi.org/10.2139/ssrn.244159>
- Kantelhardt, J. W., Zschiegner, S. A., Koscielny-Bunde, E., Havlin, S., Bunde, A., & Stanley, H. E. (2002). Multifractal detrended fluctuation analysis of nonstationary time series. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 316(1), 87-114. [https://doi.org/10.1016/S0378-4371\(02\)01383-3](https://doi.org/10.1016/S0378-4371(02)01383-3)
- Kennech, J. F. (1990). *Fractal geometry-mathematical foundations and applications [M]*. London: John Wiley & Sons.
- Khan, S. A., Khan, A. Q., & Ali, S. (2006). Stock Market Efficiency: A Literature Review. *JL & Soc 'y*, 34, 119.
- Kimberley, A. (2019). Real Estate, What It Is and How It Works. Retrieved on July, 1, 2019.
- Kindleberger, C. P., & Aliber, R. Z. (1991). *Manías, pánicos y cracs: Historia de las crisis financieras*. Ariel Barcelona.

<https://www.academia.edu/download/55265029/42822-62518-1-PB.pdf>

Klaasen, R. L. (1976). Brief History of Real Estate

Appraisal and Organizations. *Appraisal Journal*, 44(3).

<https://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&profile=ehost&scope=site&authtype=crawler&jrnl=00037087&asa=N&AN=5356954&h=WTfv5meyGdjPjqrGkhOMhR8RmhnGmh3CDPhllBkxFNlgpNOU881NAFHeTaUAhdinvP86SWNn4tNngbiA%2BbH1gw%3D%3D&crl=c>

Malkiel, B. G. (2003). The efficient market hypothesis and its critics. *Journal of economic perspectives*, 17(1), 59-82.

Mandelbrot, B. B. (1975). Stochastic models for the Earth's relief, the shape and the fractal dimension of the coastlines, and the number-area rule for islands.

Proceedings of the National Academy of Sciences, 72(10), 3825-3828.

<https://doi.org/10.1073/pnas.72.10.3825>

Mandelbrot, B. B. (1982). 4. The Many Faces of Scaling: Fractals, Geometry of Nature, and Economics. En W. C. Schieve & P. M. Allen (Eds.), *Self-Organization and Dissipative Structures* (pp. 91-109). University of Texas Press.

<https://doi.org/10.7560/703544-005>

Peters, E. E. (1994). *Fractal Market Analysis: Applying Chaos Theory to Investment and Economics*. John Wiley & Sons.

Quiroga, E. (2017). Eficiencia en los mercados financieros y predicción de precios de los activos. *Ciencias Administrativas*, 10, Article 10.

<https://doi.org/10.24215/23143738e011>

Ramírez, S. A. O. (2013). La hipótesis del mercado eficiente y la hipótesis conductista de los mercados financieros. *NovaRua*, 4(6), Article 6.

<https://erevistas.uacj.mx/ojs/index.php/NovaRua/article/view/29>

Real Estate: Definition, Types, How to Invest in It. (s. f.). Investopedia. Recuperado 28 de julio de 2024, de <https://www.investopedia.com/terms/r/realestate.asp>

Real Estate Market Outlook España 2024. (s. f.). Recuperado 29 de marzo de 2024, de <https://www.cbre.es/insights/reports/real-estate-market-outlook-espana-2024>

Roberts, H. (1967). Statistical versus clinical prediction of the stock market.

Unpublished manuscript, 252.

Sastre, M. A. (2007). Geometría fractal. *Un Paseo por la Geometría, UPM, Madrid, España*, 43-58.

Shiller, R. J. (1981). *Do stock prices move too much to be justified by subsequent changes in dividends?* https://www.aeaweb.org/aer/top20/71.3.421-436.pdf?mod=article_inline

Shiller, R. J. (2003). *The Invention of Inflation-Indexed Bonds in Early America* (Working Paper 10183). National Bureau of Economic Research. <https://doi.org/10.3386/w10183>

Shleifer, A. (2000). *Inefficient markets: An introduction to behavioural finance.* Oup Oxford. [https://books.google.com/books?hl=es&lr=&id=vIP4y-luYoIC&oi=fnd&pg=PR5&dq=Shleifer,+A.+\(2000\).+Inefficient+markets:+An+introduction+to+behavioural+finance.+Oup+Oxford.&ots=P5y-AB5qJl&sig=cAsuHxe0CB41iBK3Svis5PFEBQ](https://books.google.com/books?hl=es&lr=&id=vIP4y-luYoIC&oi=fnd&pg=PR5&dq=Shleifer,+A.+(2000).+Inefficient+markets:+An+introduction+to+behavioural+finance.+Oup+Oxford.&ots=P5y-AB5qJl&sig=cAsuHxe0CB41iBK3Svis5PFEBQ)

Wang, Y., Wei, Y., & Wu, C. (2011). Analysis of the efficiency and multifractality of gold markets based on multifractal detrended fluctuation analysis. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 390(5), 817-827. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2010.11.002>

9. DECLARACIÓN DE USO DE HERRAMIENTAS DE INTELIGENCIA ARTIFICIAL GENERATIVA EN TRABAJOS DE FIN DE GRADO

ADVERTENCIA: Desde la Universidad consideramos que ChatGPT u otras herramientas similares son herramientas muy útiles en la vida académica, aunque su uso queda siempre bajo la responsabilidad del alumno, puesto que las respuestas que proporciona pueden no ser veraces. En este sentido, NO está permitido su uso en la elaboración del Trabajo fin de Grado para generar código porque estas herramientas no son fiables en esa tarea. Aunque el código funcione, no hay garantías de que metodológicamente sea correcto, y es altamente probable que no lo sea.

Por la presente, yo, Marta Carpi Pérez, estudiante de Ade y Business Analytics de la Universidad Pontificia Comillas al presentar mi Trabajo Fin de Grado titulado “La Eficiencia del Mercado de Real Estate con MF DFA”, declaro que he utilizado la herramienta de Inteligencia Artificial Generativa ChatGPT u otras similares de IAG de código sólo en el contexto de las actividades descritas a continuación [el alumno debe mantener sólo aquellas en las que se ha usado ChatGPT o similares y borrar el resto. Si no se ha usado ninguna, borrar todas y escribir “no he usado ninguna”]:

- Brainstorming de ideas de investigación: Utilizado para idear y esbozar posibles áreas de investigación.
- Crítico: Para encontrar contra-argumentos a una tesis específica que pretendo defender.
- Interpretador de código: Para realizar análisis de datos preliminares.
- Sintetizador y divulgador de libros complicados: Para resumir y comprender literatura compleja.

Afirmo que toda la información y contenido presentados en este trabajo son producto de mi investigación y esfuerzo individual, excepto donde se ha indicado lo contrario y se han dado los créditos correspondientes (he incluido las referencias adecuadas en el TFG y he explicitado para que se ha usado ChatGPT u otras herramientas similares). Soy consciente de las implicaciones académicas y éticas de presentar un trabajo no original y acepto las consecuencias de cualquier violación a esta declaración.

Fecha: 23/09/2024

Firma: Marta Carpi Pérez

10. ANEXO: CÓDIGO PYTHON

10.1 Descarga de las librerías necesarias

```
%config InlineBackend.figure_format = 'svg'
import sys
sys.path.append('/home/f979f565-6035-481d-98f6-2be395d28bf8/.local/lib/python3.11/site-p
ackages')
import pandas as pd
from pathlib import Path
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from MF DFA import MF DFA
from numpy.polynomial.polynomial import polyfit
import seaborn as sns
sns.set()
```

10.2 Prueba con 'random walk'

```
num_steps = 1000
mu = 0
sigma = 0.1
rets = np.random.normal(mu, sigma, 1000)
prices = np.cumsum(rets)
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(prices)
```

Descarga de datos del S&P 500 Real Estate:

```
prices = pd.read_csv('SP_500_RE.csv', index_col='Date')
prices.tail()
```

```
missing_values = prices.isnull().sum()
print(missing_values)
```

```
data_types = prices.dtypes
print(data_types)
```

```
prices['Last'] = pd.to_numeric(prices['Last'], errors='coerce')
```

10.3 Cálculo de los retornos, eliminación de los valores faltantes y selección del año de análisis

```
log_rets = np.log(prices / prices.shift(1))
log_rets.tail()
```

```
all_data = log_rets.dropna()
all_data.tail()
```

```
YEAR = 2023
data = all_data.loc[pd.DatetimeIndex(all_data.index).year == 2023]
data
```

10.4 Código base ('hardcore')

```
def get_mfdfa(data,
              lag_start=None,
              lag_end=None,
              lag_steps=None,
              q=None,
              order=1,
              integrate=True,
              window=None):
```

```
    def _integrate(data):
        mean = data.mean()
        return (data - mean).cumsum()
```

```
    def _power_variations(q_min, q_max, q_steps):
```

```

q = np.linspace(q_min, q_max, q_steps)
q = q[q != .0]

return q

data_length = len(data)

if lag_start is None:
    lag_start = 3

if lag_end is None:
    lag_end = data_length // 6

if lag_steps is None:
    lag_steps = min(100, data_length // 6)

    lags = np.unique(np.logspace(np.log10(lag_start), np.log10(lag_end),
lag_steps).astype(int))

if q is None:
    q = _power_variations(-5, +5, 20+1)

if integrate:
    integr_data = _integrate(data)
else:
    integr_data = data

extensions = {}
if window:
    extensions['window'] = window

lag, dfa = MF DFA(integr_data, lag=lags, q=q, order=order, extensions=extensions)

```

```

start = int(0.00 * lag.size)
end   = int(0.60 * lag.size)

slope = polyfit(np.log10(lag[start:end]), np.log10(dfa[start:end]), 1)[1]

hq = slope - 1

tau = q * hq - 1

alpha = np.gradient(tau) / np.gradient(q)

Dalpha = q * alpha - tau

metrics = pd.DataFrame(index=q,
                        data={'slope': slope,
                              'hq': hq,
                              'tau': tau,
                              'alpha': alpha,
                              'Dalpha': Dalpha})

spectral_width = metrics['Dalpha'].max() - metrics['Dalpha'].min()

return q, lag, dfa, slope, hq, tau, alpha, Dalpha, metrics, spectral_width

q, lag, dfa, slope, hq, tau, alpha, Dalpha, metrics, spectral_width = get_mfdfa(
    data.values,
    lag_start=None,
    lag_end=None,
    lag_steps=None,
    q=None,
    order=1,
    integrate=True,
    window=None)

```

Gráfico multifractal

```
def plot_multifractal(q, lag, dfa, q_results, filename=None):
    figure, axes = plt.subplots(2, 2, figsize=(18, 12))

    for i, qn in enumerate(q):
        axes[0][0].loglog(lag[:, i], dfa[:, i], '.', markersize=3, label=f'$q={qn}$')
        axes[0][0].set(xscale='log', yscale='log', title=r'Funciones de Fluctuación: $F_q(s) \sim s^{\{h(q)\}}$',
            xlabel=r'lag: $s$', ylabel=r'$F_q(s)$')

        axes[0][1].plot(q_results.index, q_results.hq, '-.-')
        axes[0][1].set(title='Exponentes de Hurst generalizados: $h(q)$', xlabel=r'$q$',
            ylabel=r'$h(q)$', ylim=[-0.1, 1.5])

        axes[1][0].plot(q_results.index, q_results.tau, '-.-')
        axes[1][0].set(title='Exponente de escala multifractal: $\tau_q$', xlabel=r'$q$',
            ylabel=r'$\tau(q)$')

        axes[1][1].plot(q_results.alpha, q_results.Dalpha, '-.-')
        axes[1][1].set(title='Espectro de singularidad', xlabel=r'$\alpha$', ylabel=r'$D(\alpha)$')

    if filename:
        plt.savefig(filename)
        plt.close(figure)

    return figure

filename = Path('demo_multifractal.svg')
plot_multifractal(q, lag, dfa, metrics, filename=filename)
```

Hurst Rodante:

```
def hurst_rolling(log_rets, window, step):
    def _calculate_hq(x):
        q, lag, dfa, slope, hq, tau, alpha, Dalpha, metrics, spectral_width = get_mfdfa(
```

```

        x.values,
        q=[-2, 2],
        window=False)
    return metrics.loc[2, 'hq']

    result = log_rets.rolling(window=window, min_periods=window,
step=step).apply(_calculate_hq)
    return result

WINDOW = 252
STEP = 5
roll_hurst = hurst_rolling(all_data, WINDOW, STEP)
roll_hurst = roll_hurst.clip(lower=0.0, upper=1.0)

def plot_hurst_timeseries(rolling_hurst, filename=None, figsize=(12, 6)):

    figure, ax = plt.subplots(1, 1, figsize=figsize)

    sns.lineplot(rolling_hurst)
    ax.set(title='Hurst Rodante', xlabel=r'Fecha', ylabel=r'h(2)')

    if filename:
        plt.savefig(filename)
        plt.close(figure)

    return figure

filename = Path('demo_rolling.svg')
plot_hurst_timeseries(roll_hurst, filename=filename)

WINDOW = 252
STEP = 5

roll_hurst = hurst_rolling(all_data, WINDOW, STEP)

```

```
roll_hurst = roll_hurst.clip(lower=0.0, upper=1.0)
```

```
print(roll_hurst)
```

```
plt.figure(figsize=(12, 6))
```

```
plt.plot(roll_hurst.index, roll_hurst.values, '.')
```

```
plt.title('Dispersión del Exponente de Hurst en Ventanas Deslizantes')
```

```
plt.xlabel('Fecha')
```

```
plt.ylabel('Exponente de Hurst')
```

```
plt.show()
```

```
plt.figure(figsize=(12, 6))
```

```
plt.hist(roll_hurst.values, bins=20, color='blue', edgecolor='black')
```

```
plt.title('Histograma del Exponente de Hurst en Ventanas Deslizantes')
```

```
plt.xlabel('Exponente de Hurst')
```

```
plt.ylabel('Frecuencia')
```

```
plt.grid(True)
```

```
plt.show()
```

Proceso fraccionario de Ornstein-Uhlenbeck:

```
from MFDFA import MFDFA
```

```
from MFDFA import fgn
```

```
t_final = 10000
```

```
dt = 0.001
```

```
N = int(t_final / dt)
```

```
theta = 1
```

```
sigma = 0.5
```

```
H = 0.3
```

```
X = np.zeros(N)
```

```
dB = (t_final ** H) * fgn(N, H=H)
```

```
for i in range(1, N):
```

$$X[i] = X[i-1] - \theta * X[i-1] * dt + \sigma * dB[i]$$

```
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
plt.figure(figsize=(12, 6))
```

```
plt.plot(np.arange(N) * dt, X)
```

```
plt.xlabel('Tiempo')
```

```
plt.ylabel('X')
```

```
plt.title('Proceso fraccionario de Ornstein-Uhlenbeck')
```

```
plt.show()
```