Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales
(ICADE)

Estimación del coeficiente beta del modelo CAPM para el mercado español

Autor: Abel Grande Freire
Directora: Susana Carabias López

Madrid

Junio 2018

Estimación del coeficiente beta del modelo CAPM para el mercado español

ÍNDICE DE CONTENIDOS

ÍNDICE DE GRÁFICOS

ÍNDICE DE TABLAS

RESUMEN

Este trabajo analiza la obtención teórica del modelo CAPM con el objetivo de conocer cuáles son sus hipótesis iniciales y sus principales conclusiones. Además, se analizará la literatura existente sobre la capacidad del modelo para describir la relación riesgo-rendimiento de activos con riesgo y su aplicación práctica por parte de directivos de empresas para estimar el coste de capital de su compañía. Empleando datos de series temporales de 25 compañías del Ibex 35, se realizarán estimaciones del coeficiente beta del modelo CAPM mediante un modelo estadístico de regresión lineal simple. Los resultados obtenidos sugieren que periodos más largos de observaciones e intervalos de medición de rendimiento semanales dan lugar a estimaciones más precisas del modelo para el mercado español.

Palabras clave: Beta, CAPM, tasa libre de riesgo, rendimiento ordinario, precio ajustado, intervalo de rendimiento, periodo de estimación, Ibex Total Return, ITBM, Ibex 35.

ABSTRACT

This study examines the theory behind the CAPM model in order to understand the assumptions of the model and its main conclusions. Moreover, literature regarding the ability of the model to describe risk-return relationship of risky assets and its practical use by CFOs in current companies in order to estimate its cost of capital will be analyzed. Using time series data for 25 stocks from Ibex 35 (Spain), estimates of beta coefficients have been made through a single index regression model. The results obtained suggest that longer estimation periods and week returns provide better estimates of betas coefficients for the Spanish stock market.

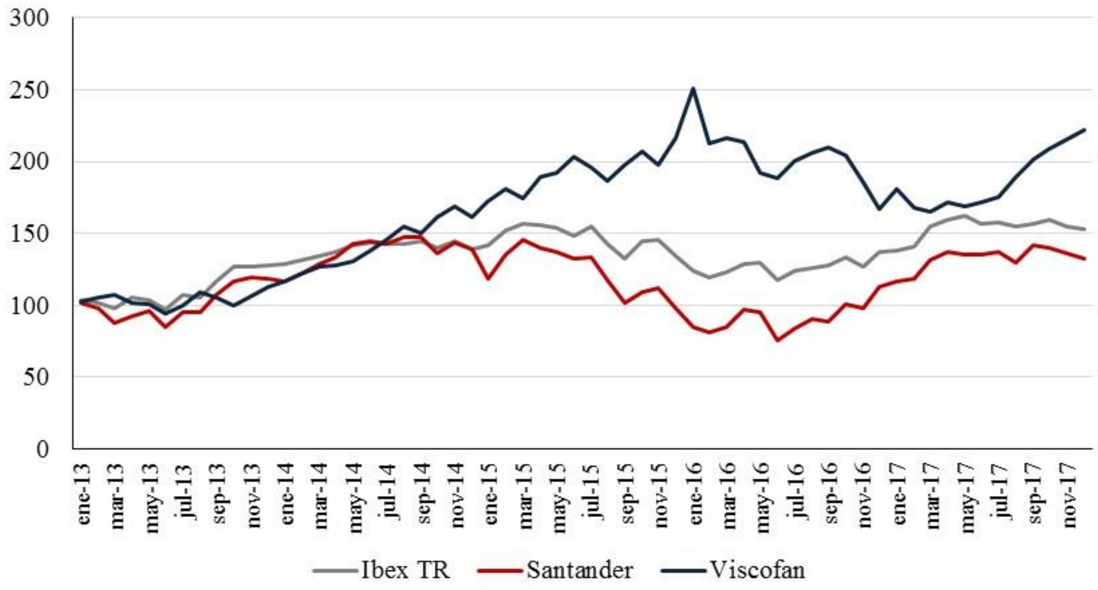
Key words: Beta, CAPM, risk free rate, ordinary return, adjusted price, return interval, estimation period, Ibex Total Return, ITBM, Ibex 35.

1. INTRODUCCIÓN

En los mercados financieros, existen activos altamente correlacionados con el mercado, mientras que otros no están tanto.

En el gráfico 1 se muestran los rendimientos mensuales calculados con precios ajustados indexados con base enero 2013 de dos acciones del Ibex 35 y el rendimiento del índice de rendimiento Ibex Total Return indexado con base enero de 2013. Como se aprecia en el gráfico 1, durante los últimos 5 años, la acción del Santander ha mostrado una gran correlación con el IbexTR. En cambio, la acción de Viscofan ha mostrado una menor correlación con el IbexTR.

Gráfico 1: Rendimiento de Santander, Viscofan y el Ibex Total Return durante los últimos 5 años. Mes base: enero 2013.



Fuente: Elaboración propia

La correlación no establece una relación de causalidad entre las variables sobre las que se mide; no obstante, el modelo CAPM trata de establecer una relación entre el rendimiento del mercado y el rendimiento de un activo a través del coeficiente beta.

En este trabajo, se estudiará la obtención teórica del modelo CAPM con la intención de entender los puntos de partida, las hipótesis iniciales, las restricciones sobre la realidad y las conclusiones estimadas por el modelo. Tras la obtención del modelo, se analizará la literatura referente a sus aplicaciones prácticas y a su efectividad a la hora de explicar la relación entre riesgo y rendimiento para activos con riesgo.

Asimismo, se realizarán diferentes estimaciones sobre el coeficiente beta de 25 activos del Ibex 35. Para ello, se empleará un modelo estadístico de regresión lineal. Se tomarán datos de series temporales de precios ajustados de los 25 activos elegidos a través de la plataforma Yahoo Finanzas.

Con estas estimaciones y la literatura analizada, se pretende dar respuesta a los siguientes problemas de estimación del modelo para el mercado español: ¿qué tasa libre de riesgo debemos emplear?, ¿qué índice de mercado representa mejor al mercado español?, ¿debemos emplear un índice de rendimiento o un índice general?, ¿cómo podemos calcular rendimientos para tener en cuenta todas las fuentes de rendimiento y no solo las ganancias de capital?, ¿debemos trabajar con rendimientos logarítmicos o con rendimientos ordinarios¿, ¿qué periodo de observaciones se debe tomar? o ¿qué intervalo de medición de rendimientos se debe tomar?

2. EL MODELO CAPM

2.1. Introducción al modelo

El modelo CAPM es un modelo estático de valoración de activos financieros que fue desarrollado por Sharpe (1964) y Lintner (1965) en la década de los 60. Sus siglas en inglés son Capital Asset Pricing Model, que se traducen al español como Modelo de Valoración de Activos financieros.

El modelo se basó previos realizados por Harry Markowitz en 1952. En su tesis doctoral presentada en la Universidad de Chicago, Markowitz (1952) mostró su planteamiento acerca de la selección óptima de carteras formadas por activos financieros. Sus aportaciones asentaron las bases de la Teoría de Carteras y fueron ampliamente desarrolladas en la industria financiera.

Estos hallazgos propiciaron que Harry Markowitz y William Sharpe recibieran junto a Merton Miller el Premio Nobel de economía en el año 1990.

2.2. Planteamiento teórico del modelo CAPM

A lo largo de este epígrafe se desarrollará el modelo CAPM y se analizarán sus resultados fundamentales a partir de los desarrollos de Sharpe (1964), Luenberger (1998), Cvitanic y Zapatero (2004), Elton (2014), y Carabias (2016).

2.2.1. Hipótesis del modelo

El CAPM parte de una serie de hipótesis que permiten la obtención del modelo. Estas hipótesis son demasiado restrictivas en comparación con la realidad, pero permiten una enorme simplicidad en la aplicación del modelo.

Tal y como afirma Luenberger (1998), los supuestos básicos de este modelo son los siguientes:

- En el mercado se negocian n acciones o activos con riesgo y un solo activo libre de riesgo.
- El mercado es perfecto lo que supone que no existen costes de transacción, no existen impuestos y los títulos se pueden dividir de forma perfecta.
- Los agentes del mercado prefieren rendimientos mayores para un mismo nivel de riesgo y riesgos menores para un mismo nivel de rendimientos.
- Los agentes del mercado basan sus decisiones solo en la media y la varianza del rendimiento de los activos financieros.

- Todos los agentes del mercado tienen las mismas expectativas y estimaciones.

Cabe destacar que las hipótesis explicadas anteriormente son las asumidas para la obtención del modelo CAPM. Markowitz, solo asume las cuatro primeras para la obtención de la media y la varianza de una cartera, pero sin considerar que existe un activo libre de riesgo.

2.2.2. Rendimiento medio y varianza de una cartera

Markowitz (1952) asienta las bases de la Teoría de Carteras partiendo de la media y la varianza del rendimiento de una cartera de n títulos.

Uno de sus puntos de partida es el hecho de que el rendimiento ordinario de una cartera formada por n títulos es la media ponderada de los rendimientos de esos n títulos. Esto se puede expresar como

$$r_p = \sum_{i=1}^{n} w_i \, r_i$$

donde r_p representa el rendimiento de una cartera, w_i la proporción de la cuantía total invertida que se ha invertido en el activo i y r_i el rendimiento del activo i.

Es importante subrayar que las variables presentadas r_p y r_i son variables aleatorias por lo que debemos buscar un valor que represente la variable. Tomamos la media o esperanza matemática como valor que mejor representa a la variable aleatoria y obtenemos

$$\bar{r}_p = \sum_{i=1}^{n} w_i \, \bar{r}_i$$

De esta manera, podemos afirmar que el rendimiento medio o esperado de una cartera formada por n títulos es la media ponderada de los rendimientos medios o esperados de esos n títulos.

Al introducir el valor esperado del rendimiento como valor representativo del rendimiento, surge la necesidad de trabajar con su varianza como medida de dispersión de esa variable aleatoria. Se demuestra que la varianza del rendimiento esperado de una cartera se puede expresar como

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n} w_i^2\ \sigma_i^2 + \sum_{\forall i \neq j=1}^{n} w_i\ w_j\ \sigma_{ij} = \sum_{i=1}^{n} w_i^2\ \sigma_i^2 + \sum_{\forall j > i=1}^{n} 2\ w_i\ w_j\ \sigma_{ij}$$

donde σ_p^2 representa la varianza del rendimiento de la cartera, σ_i^2 la varianza del rendimiento del activo i y σ_{ij} la correlación entre los activos i y j.

Observamos que la varianza del rendimiento medio de una cartera no es la media ponderada de las varianzas del rendimiento de cada uno de sus títulos.

La principal aportación de Markowitz es la idea de que los inversores toman decisiones sobre dónde invertir su capital en base a la media y la varianza del rendimiento de los activos disponibles.

Además, es fácil demostrar que al combinar varios títulos con una correlación menor de uno, se produce una disminución de la varianza de los rendimientos de la cartera sin que se produzca necesariamente una disminución en el valor esperado del rendimiento de la cartera. Este efecto se conoce habitualmente con el nombre de diversificación. Para ilustrarlo, Elton (2014) supone que no hay relación entre los diferentes activos que forman la cartera, es decir, que $\rho_{ij} = 0$, la expresión de la varianza se reduce a

$$\sum_{i=1}^{n} w_i^2\ \sigma_i^2$$

Además, si asumimos que se invierte la misma cantidad en los n activos que forman la cartera, la proporción invertida en cada activo es $1/n$, por lo que, aplicando la fórmula anterior, la varianza de la cartera sería

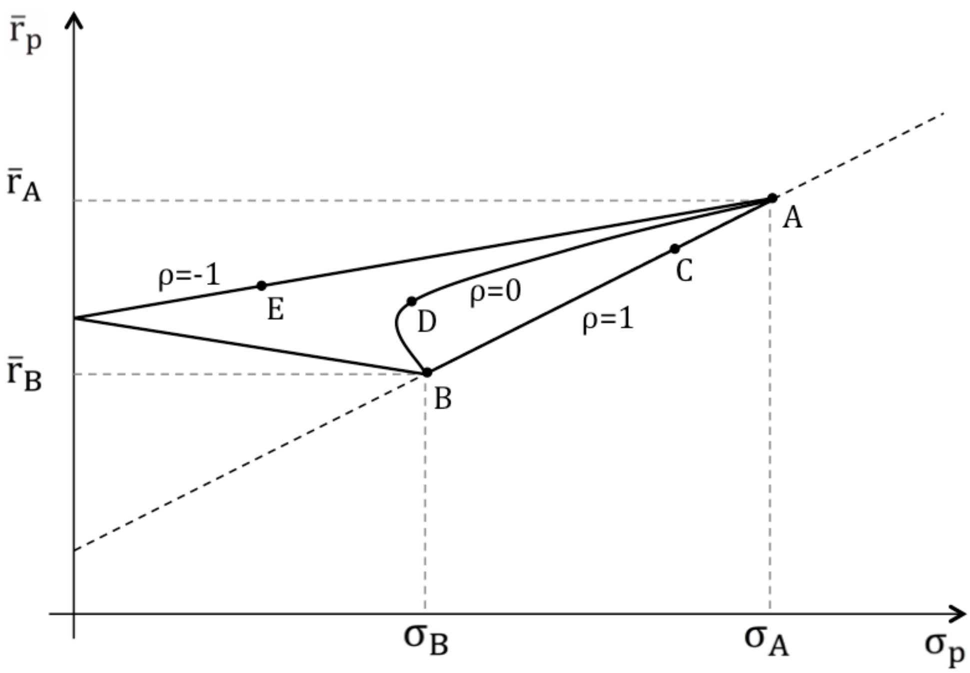
$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n} (1/n)^2\ \sigma_i^2$$

Se observa fácilmente que, al aumentar el número de activos de la cartera, la varianza de los rendimientos de la cartera disminuye. El efecto de la diversificación sería menor si $0 < \rho_{ij} < 1$, pero seguiría existiendo y sería mayor si $\rho_{ij} < 0$. En apartados posteriores se podrá seguir apreciando la importancia del efecto de la diversificación.

2.2.3. El conjunto de posibilidades de inversión

El conjunto de posibilidades de inversión es el conjunto de combinaciones de riesgo y rentabilidad que el inversor puede alcanzar y, por lo tanto, entre las que puede elegir. Puesto que se ha supuesto que la información relevante de una cartera de títulos es el valor esperado de su rendimiento y la varianza del valor de su rendimiento, vamos a tratar de representar gráficamente las diferentes posibilidades de inversión. Al identificar una cartera con estas dos variables, podemos imaginar que el conjunto de posibilidades de inversión se podrá representar en dos ejes en los que cada uno de ellos sea la media y la varianza de una cartera respectivamente. Se puede observar que la forma del conjunto de posibilidades de inversión con dos títulos con riesgo disponibles denominados A y B con distintas correlaciones es tal y como se muestra en el gráfico 2. En el anexo 1, se puede observar un ejemplo numérico que propone Elton (2014), para determinar la forma del conjunto de posibilidades de inversión para este caso.

Gráfico 2: Conjunto de posibilidades de inversión con dos títulos con riesgo y distintas correlaciones entre ellos



Fuente: Elaboración propia basada en Elton (2014)

2.2.3.1. Interpretación de los resultados

En el gráfico 2 se muestran los conjuntos de posibilidades de inversión que se han desarrollado en los tres escenarios planteados por Elton (2014).

En todos ellos, el punto A representa una cartera en la que todo el capital se ha invertido en el activo A ($w_A = 1$) y el punto B representa una cartera en la que todo el capital se ha invertido en el activo B ($w_A = 0$).

En el escenario 1 ($\rho_{AB} = 1$), el punto C representa un punto en el que se ha invertido una parte del capital en el activo A y una parte del capital en el activo B ($0 < w_A < 1$), por lo que podemos concluir que el segmento que une los puntos A, C y B representa el conjunto de posibilidades de inversión si $\rho_{AB} = 1$.

Del mismo modo, en el escenario 2 ($\rho_{AB} = -1$) y en el escenario 3 ($\rho_{AB} = 0$) los puntos E y D representan respectivamente puntos en los que una parte del capital se ha invertido en A y otra parte del capital se ha invertido en B. Tal y como se observa en el ejemplo propuesto, la forma del conjunto de posibilidades de inversión es como se muestra en el gráfico 2.

En la realidad, es imposible encontrar activos diferentes con coeficientes de correlación de 1 o -1, lo que nos puede hacer llegar a la conclusión de que en la práctica el conjunto de posibilidades de inversión tendrá una forma más parecida a la que tiene el conjunto para el escenario 3 ($\rho_{AB} = 0$). Esta conclusión sobre la concavidad del conjunto de posibilidades de inversión se puede observar en Sharpe (1964). Además, podemos concluir que cuanto menor sea el coeficiente de correlación entre los activos, más se parecerá el conjunto de posibilidades de inversión al escenario 2 ($\rho_{AB} = -1$). Del mismo modo, cuanto mayor sea el coeficiente de correlación entre los activos, más se parecerá el conjunto de posibilidades de inversión al escenario 1 ($\rho_{AB} = 1$).

Además, en este ejemplo se pueden apreciar los beneficios de la diversificación expuestos por Markowitz (1952) y explicados anteriormente. En el escenario 3 ($\rho_{AB} = 0$), el punto D nos permite alcanzar un valor esperado del rendimiento de nuestra cartera mayor que el que obtendríamos invirtiendo todo nuestro capital en el activo B exponiéndonos a un riesgo menor. Según Markowitz, en este escenario el inversor preferiría combinar los activos A y B para alcanzar la cartera D antes que invertir todo su capital en el activo B.

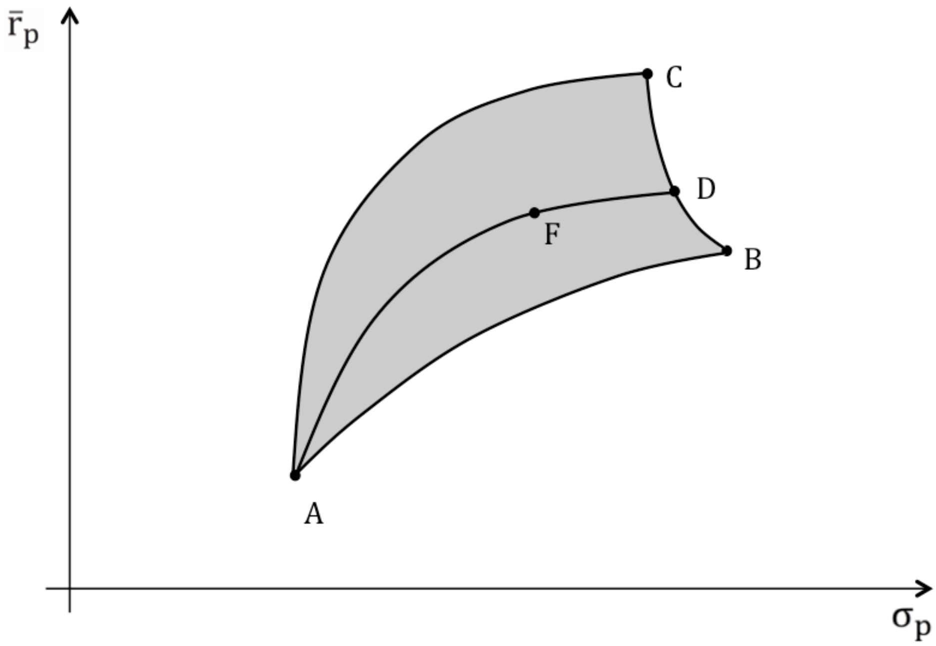
2.2.3.2. Conjunto de posibilidades de inversión para una cartera de más de dos activos con riesgo

El conjunto de posibilidades de inversión o conjunto factible tiene dos propiedades según Luenberger (1998).

La primera, afirma que si se dispone de 3 activos con riesgo que no estén perfectamente correlacionados, el conjunto factible será una región bidimensional sólida. En el gráfico 3 se muestra por qué esta región sería sólida. Si combináramos el activo B con el activo

C obtendríamos un activo D que estaría representado por un punto sobre la línea que une los puntos B y C. El punto exacto de esa línea dependerá de cuánto se invierta en cada uno de ellos. Además, al combinar el punto A con el punto D, obtendríamos un activo F que estaría representado por un punto sobre la línea que une los puntos A y D. Como ocurría con la cartera D, la cartera F puede variar en función de la cantidad que se invierte en B y en C. Por ello, somos capaces de alcanzar cualquier punto dentro de esta región mediante la combinación de estos tres activos.

Gráfico 3: Conjunto factible para tres activos con riesgo sin correlación perfecta



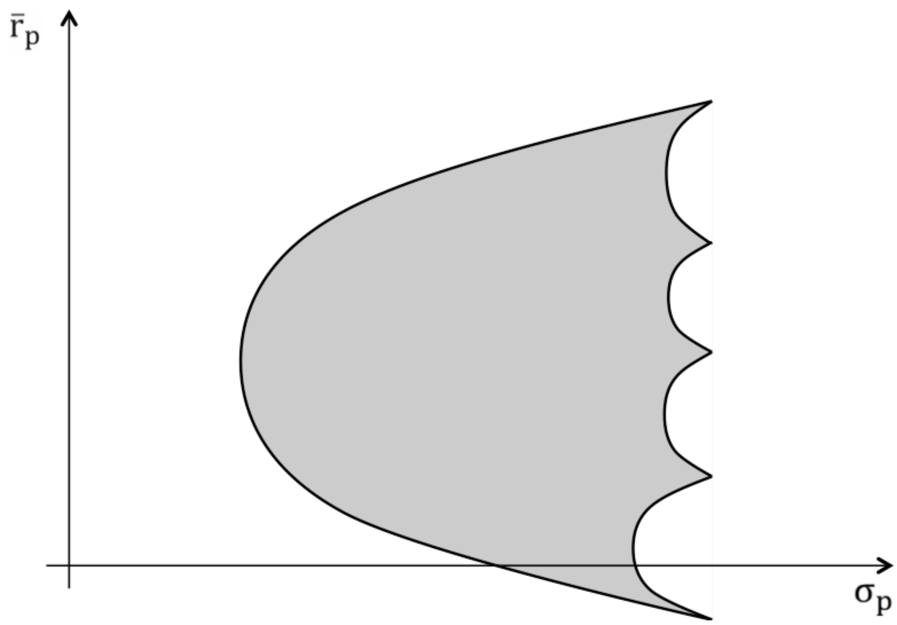
Fuente: Elaboración propia basada en Luenberger (1998)

La segunda propiedad mencionada por Luenberger habla sobre la concavidad del conjunto factible. Una línea resultado de la unión de cualquier pareja de puntos nunca podrá superar el límite marcado por la línea que une los puntos A y C.

En base a estas dos propiedades podemos definir el conjunto factible de dos formas diferentes en función de si existen posiciones cortas o no. En ambos casos el conjunto factible tiene la misma forma, pero en el caso de que existan posiciones cortas el conjunto factible se puede extender hacia la derecha. Esto se muestra en el gráfico 4 y en el gráfico 5 respectivamente.

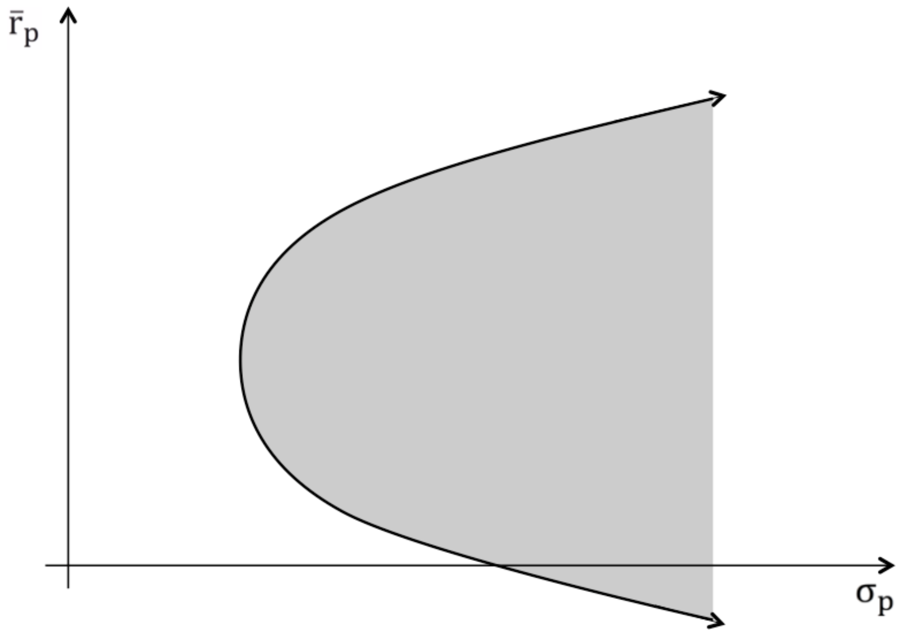
Es importante resaltar que, tal y como afirma Carabias (2016), en el modelo de Markowitz, el conjunto de posibilidades de inversión no es el mismo para todos los inversores, aunque su forma sí, dado que no se suponen las mismas estimaciones para distintos inversores.

Gráfico 4: Conjunto factible sin posiciones cortas



Fuente: Elaboración propia basada en Luenberger (1998)

Gráfico 5: Conjunto factible con posiciones cortas



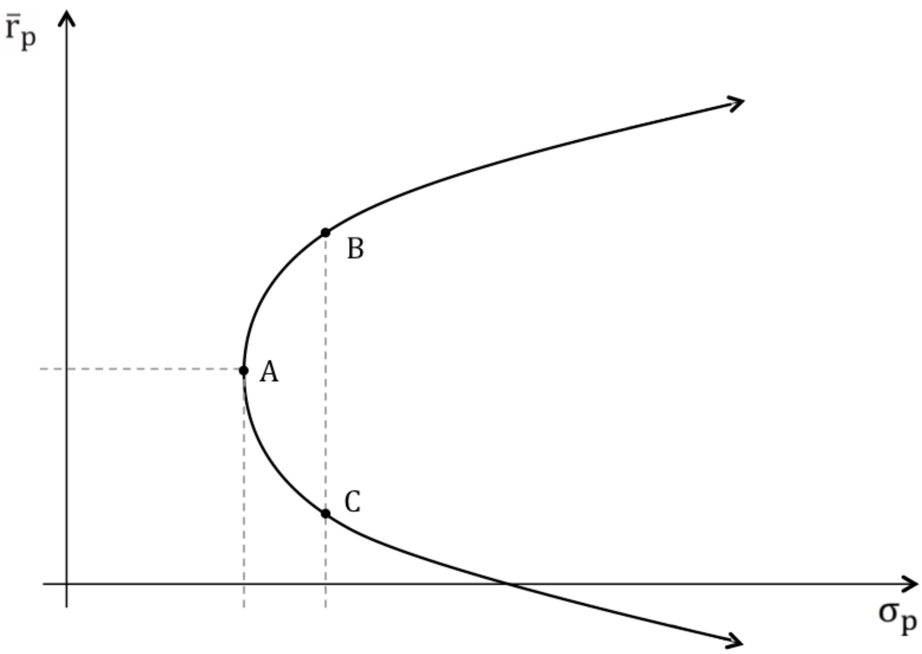
Fuente: Elaboración propia basada en Luenberger (1998)

2.2.4. El conjunto de mínima varianza y la frontera eficiente

Como se ha explicado anteriormente, Markowitz asume que para un nivel de riesgo dado, todos los inversores preferirán mayores rendimientos. Del mismo modo asume que para un nivel de rendimiento dado, todos los inversores preferirán menor riesgo.

Tal y como afirma Luenberger (1998), si observamos las combinaciones posibles de riesgo y rendimiento esperado en el gráfico 5, observamos que para un nivel de rendimiento esperado dado, el punto de menor riesgo es siempre el que se encuentra en el extremo izquierdo del conjunto factible. Esto nos lleva a poder definir el conjunto de mínima varianza, que se muestra en el gráfico 6.

Gráfico 6: Conjunto de mínima varianza



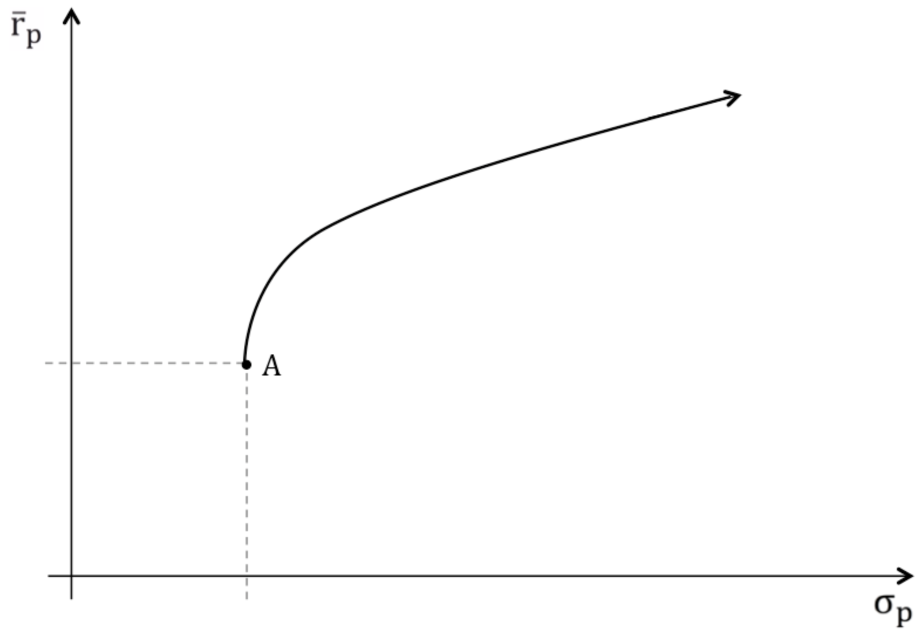
Fuente: Elaboración propia basada en Luenberger (1998)

El punto A representa el punto del conjunto factible con menor varianza, es decir, el activo de menor riesgo. Además podemos observar que en el conjunto de mínima varianza existen activos que, para un nivel de riesgo dado, ofrecen rendimientos esperados diferentes tal y como muestran los puntos B y C.

En este caso, según Markowitz, todos los inversores elegirían el punto B antes que el punto C. Este argumento implica que los inversores solo estarán interesados en la mitad superior del conjunto de mínima varianza.

Markowitz (1952) identifica como frontera eficiente el conjunto de puntos del conjunto factible que representan óptimos de Pareto, es decir, puntos en los que para un nivel de riesgo, el rendimiento esperado es el mayor posible y puntos en los que para un nivel de rendimiento esperado el riesgo es el menor posible. En el gráfico 7 se muestra la forma de la frontera eficiente.

Gráfico 7: Frontera eficiente



Fuente: Elaboración propia basada en Luenberger (1998)

2.2.5. Teorema de un fondo

Si a las hipótesis del modelo de Markowitz les añadimos la existencia de un activo libre de riesgo, se observa el efecto del Teorema de un fondo. Tobin (1958) afirma que para cada inversor existe una cartera formada por activos con riesgo denominada fondo, que al combinarla con el activo libre de riesgo, define la frontera eficiente del conjunto de posibilidades de inversión de ese inversor. Según Tobin, la única decisión que tiene que tomar el inversor es qué proporción invertir en el activo libre de riesgo y qué proporción invertir en el fondo formado por activos con riesgo.

El rendimiento del activo libre de riesgo es una variable cierta, mientras que el rendimiento del fondo es una variable aleatoria, por lo que la correlación entre ambos activos es 0. Esto supone que, tal y como hemos razonado anteriormente, la línea que representará el conjunto de posibilidades de inversión invirtiendo en el fondo y el activo libre de riesgo será una línea recta debido a que son dos activos sin correlación entre sí ($\rho_{r_f F} = 0$).

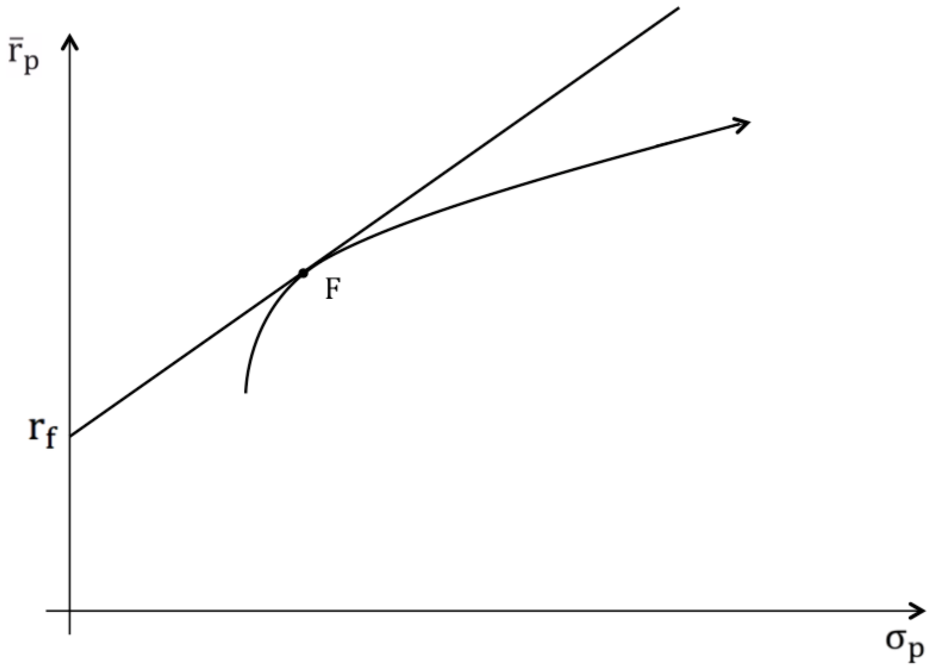
Se demuestra que el punto que representa dicho fondo, debe ser el punto de tangencia de la recta que pasa por el punto que representa el activo libre de riesgo con el conjunto factible del modelo de Markowitz formado por activos con riesgo. Además, se demuestra cómo podemos obtener el rendimiento esperado de la combinación de este fondo y el activo libre de riesgo a partir de las expresiones de la media y la varianza de una cartera expuestas previamente. Esto se conoce como Teorema de un Fondo. Como se muestra en el anexo 2 y siguiendo el razonamiento de Elton (2014) se puede demostrar que

$$\bar{r}_p = r_f + \frac{(\bar{r}_F - r_f)}{\sigma_F}\,\sigma_p$$

donde $\bar{r}_p$ representa el rendimiento esperado de la cartera, $\bar{r}_F$ el rendimiento esperado del fondo, σ_F la desviación típica del fondo, r_f el rendimiento del activo libre de riesgo y σ_p la desviación típica de la cartera formada.

Esta ecuación es una línea recta que representa las posibles combinaciones del activo libre de riesgo y el fondo. Los puntos que quedan a la izquierda del punto F en el gráfico 8 representan puntos en los que se invierte una parte del capital en el activo libre de riesgo y una parte en el fondo. Si se aceptan posiciones cortas, los puntos que quedan a ala derecha del punto F representan puntos en los que se toma una posición corta en el activo libre de riesgo y se invierte todo el capital en el fondo.

Gráfico 8: Frontera eficiente y conjunto factible con un activo libre de riesgo



Fuente: Elaboración propia basada en Elton (2014)

2.2.6. La línea CML

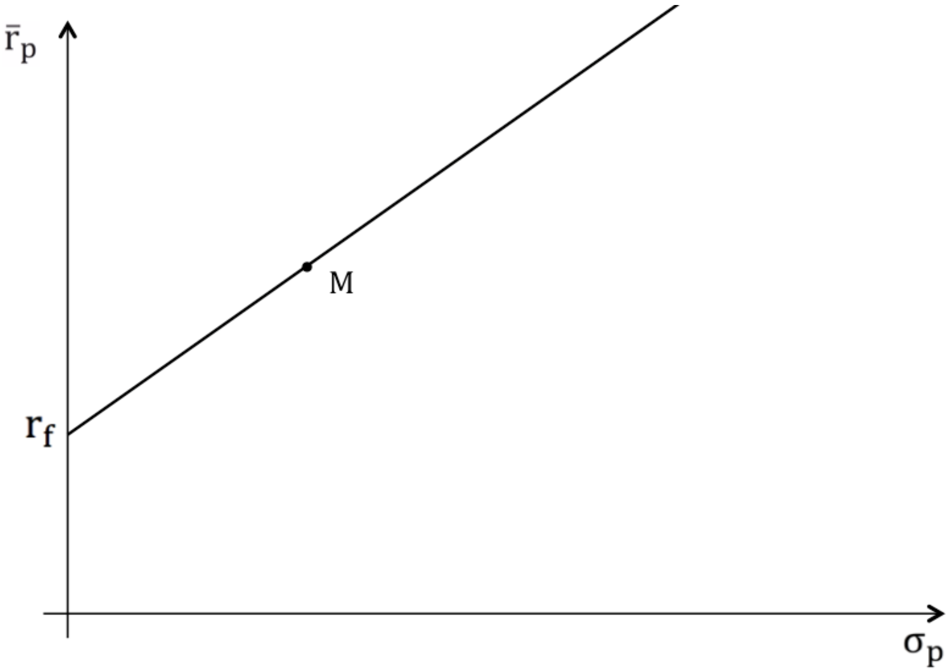
La Capital Market Line, traducida al español como línea del mercado de capitales es, según Luenberger (1998), la relación entre rentabilidad y riesgo que surge cuando se cumple el Teorema de un Fondo y todos los agentes tienen las mismas expectativas sobre media y varianza de los activos disponibles en el mercado.

Bajo los supuestos del CAPM expuestos anteriormente, se concluye que el fondo formado por los activos con riesgo es igual para todos los inversores y esta es la cartera de mercado. De esta forma, la línea CML se puede representar matemáticamente como

$$\bar{r}_p = r_f + \frac{(\bar{r}_M - r_f)}{\sigma_M}\,\sigma_p$$

siendo $\bar{r}_M$ el valor esperado del rendimiento de la cartera de mercado y σ_M su desviación típica. Se puede ver representada en el gráfico 9.

Gráfico 9: Capital market line



Fuente: Elaboración propia basada en Luenberger (1998)

Según Luenberger (1998), si un activo es eficiente deberá encontrarse sobre la línea CML. Además se observa como a medida que aumenta el riesgo, el rendimiento esperado correspondiente debe aumentar también. Se observa que la pendiente de la recta es $K = \frac{(\bar{r}_M - r_f)}{\sigma_M}$, que se conoce como el precio del riesgo ya que informa de cuánto debe aumentar el rendimiento esperado de un activo para que sea eficiente si aumenta su riesgo en una unidad.

Por lo tanto, según la CML, como el fondo es la cartera de mercado, la decisión de los inversores consiste en elegir qué proporción de su capital invertir en el activo libre de riesgo y qué proporción invertir en la cartera de mercado.

2.2.7. La línea SML

La línea SML facilita la relación que deben verificar todos aquellos activos que, de acuerdo con el modelo, están bien valorados. Para obtenerla, partimos de un activo genérico i y de la cartera de mercado. Combinando estos activos podríamos obtener una cartera con la siguiente media y varianza:

$$\bar{r}_p = w_i\, \bar{r}_i + (1 - w_i)\, \bar{r}_M$$

$$\sigma_p^2 = w_i^2\, \sigma_i^2 + 2w_i\, (1 - w_i)\, \sigma_{iM} + (1 - w_i)^2\, \sigma_M^2$$

Donde $\bar{r}_i$ es el valor esperado del rendimiento del activo i, w_i la proporción invertida en el activo i, $\bar{r}_M$ el valor esperado del rendimiento de la cartera de mercado, σ_M^2 la varianza del rendimiento de la cartera de mercado y σ_{iM} la correlación entre el activo i y la cartera de mercado. Estas dos ecuaciones definen paramétricamente una función $\bar{r}_p = \sigma_p(\bar{r}_p)$.

Si la recta que representa la línea CML es tangente al conjunto factible de activos con riesgo, la pendiente de la función $\bar{r}_p = \sigma_p(\bar{r}_p)$ debe ser la misma en ese punto.

Podemos escribir esto como

$$\left.\frac{d\bar{r}_p}{d\sigma_p}\right|_{w_f=0} = \frac{\bar{r}_M - r_f}{\sigma_M}$$

Debido a que $\bar{r}_p = \bar{r}_p(w_f)$

$$\left.\frac{d\bar{r}_p}{d\sigma_p}\right|_{w_i=0} = \frac{\left.\frac{d\bar{r}_p}{dw_i}\right|_{w_i=0}}{\left.\frac{d\sigma_p}{dw_i}\right|_{w_i=0}}$$

Si desarrollamos el numerador y el denominador de esta expresión obtenemos

$$\frac{d\bar{r}_p}{dw_i} = \bar{r}_i - \bar{r}_M$$

$$\left.\frac{d\bar{r}_p}{dw_i}\right|_{w_i=0} = \bar{r}_i - \bar{r}_M$$

$$\frac{d\sigma_p}{dw_i} = \frac{1}{2}[2\ w_i\ \sigma_i^2 + 2\ (1 - w_i)\sigma_{iM} - 2\ w_i\ \sigma_{iM}$$
$$- 2\ (1 - w_i)\sigma_M^2]\ [w_i^2\ \sigma_i^2 + 2\ w_i\ (1 - w_i)\ \sigma_{iM} + (1 - w_i)^2\ \sigma_M^2]^{\frac{-1}{2}}$$

que se puede simplificar así

$$\frac{d\sigma_p}{dw_i} = \frac{w_i\ \sigma_i^2 + (1 - w_i)\sigma_{iM} - w_i\ \sigma_{iM} - (1 - w_i)\sigma_M^2}{\sigma_p}$$

$$\left.\frac{d\sigma_p}{dw_i}\right|_{w_i=0} = \frac{\sigma_{iM} - \sigma_M^2}{\sigma_M}$$

Ahora ya podemos calcular la derivada

$$\left.\frac{d\bar{r}_p}{d\sigma_p}\right|_{w_i=0} = \frac{(\bar{r}_i - \bar{r}_M)\sigma_M}{\sigma_{iM} - \sigma_M^2}$$

e igualarla a la pendiente del conjunto factible en ese punto

$$\frac{(\bar{r}_i - \bar{r}_M)\sigma_M}{\sigma_{iM} - \sigma_M^2} = \frac{\bar{r}_M - r_f}{\sigma_M}$$

que nos lleva a la expresión

$$\bar{r}_i = r_f + \frac{(\bar{r}_M - r_f)}{\sigma_M^2}\sigma_{iM}$$

que también se puede escribir como

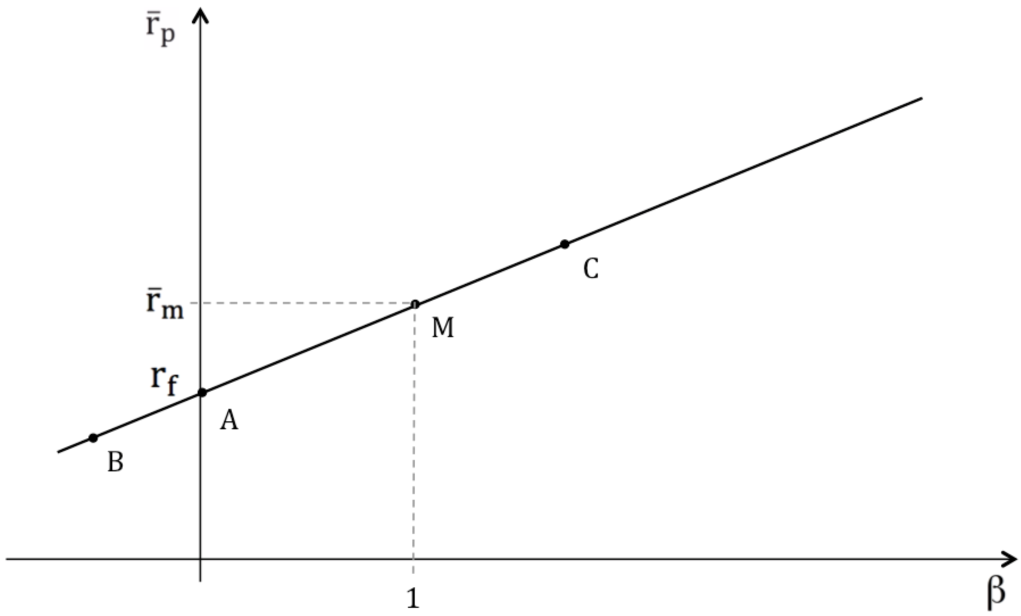
$$\bar{r}_i = r_f + \beta_i\,(\bar{r}_M - r_f)$$

Esta expresión es la ecuación de la línea SML, security market line. El término $\bar{r}_i - r_f$ se puede denominar prima del activo genérico i y representa el exceso del valor de rendimiento esperado el activo genérico i sobre el activo libre de riesgo. El término $\bar{r}_i - r_f$ se puede denominar prima de mercado y representa el exceso del valor de rendimiento esperado de la cartera de mercado sobre el activo libre de riesgo. El valor $\beta_i = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2}$ se denomina beta del activo genérico i y, de acuerdo al modelo CAPM, es la única característica que se necesita del activo genérico i para poder valorarlo. Se observa cómo, en base al CAPM, la beta representa la relación entre la prima de mercado y la prima del activo genérico i.

Observando la ecuación de la línea SML, la beta nos informa de dos aspectos clave de un activo. El primero es si el activo está correlacionado positivamente o negativamente con el mercado y el segundo es la intensidad con la que se da esa relación. Así, un activo con una beta positiva representará un activo cuyo rendimiento tenderá a ir en la misma dirección que el rendimiento de la cartera de mercado. Del mismo modo, un activo con una beta mayor que 1 representará a un activo que tiende a amplificar los movimientos del mercado, mientras que un activo con una beta menor que 1 representará un activo que tiende a mitigar los movimientos del mercado.

De esta manera, tal y como afirma Luenberger (1998), si un activo está incorrelacionado con el mercado ($\beta_i = 0$), de acuerdo con el CAPM el rendimiento esperado de dicho activo será $\bar{r}_i = r_f$ y se puede representar por el punto A en el gráfico 10. Del mismo modo, un activo con una beta negativa ($\beta_i < 0$), de acuerdo con el CAPM, tendrá un rendimiento $\bar{r}_i < r_f$ y puede representarse por el punto B en el gráfico 10. Por otro lado, un activo con una beta positiva ($\beta_i > 0$), de acuerdo con el CAPM, tendrá un rendimiento esperado $\bar{r}_i > r_f$ y podría ser representado por el punto C en el gráfico 10.

Gráfico 10: Security Market Line



Fuente: Elaboración propia basada en Luenberger (1998)

2.2.8. Riesgo sistemático y riesgo no sistemático

Cvitanic y Zapatero (2004) afirman que la relación lineal que establece la línea SML entre la prima de mercado y la prima de un activo sobre el activo libre de riesgo se puede estudiar mediante un modelo de regresión lineal simple con una única variable explicativa, como modelo estadístico para contrastar el CAPM. Dicho modelo podría representarse mediante la expresión

$$r_i = a_i + b_i r_M + \epsilon_i$$

donde r_i representa el rendimiento esperado de un activo genérico i, a_i y b_i los coeficientes del modelo de regresión y ϵ_i la perturbación aleatoria.

Si asumimos que las perturbaciones aleatorias son independientes y que su valor esperado es 0, podemos afirmar que $b_i = \beta_i$. La predicción del modelo CAPM es que, en equilibrio, $a_i = 0$. Además, es inmediato obtener la expresión de la varianza del rendimiento de un activo genérico i como

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_M^2 + \sigma_{\epsilon_i}^2$$

Tal y como se aprecia en la expresión, Cvitanic y Zapatero (2004) afirman que el riesgo de un activo genérico i puede descomponerse en dos partes. El término $\beta_i^2\sigma_M^2$ representa el riesgo del activo i asociado al mercado en el que se encuentra y se denomina riesgo sistemático. El término $\sigma_{\epsilon_i}^2$ se denomina riesgo no sistemático o riesgo específico y representa el riesgo propio de la empresa. Según Damodaran (2012), el riesgo específico puede depender de su sector, de su estructura de financiación, de si la empresa atraviesa dificultades o de cualquier otro aspecto.

La principal aportación del modelo CAPM es que sólo el riesgo sistemático está premiado por el mercado con un mayor rendimiento esperado tal y como se observa en la expresión de la pendiente de la línea SML, $K = \beta$. Fernández (1998) afirma que el mercado no remunerará con rendimiento esperado a nadie por asumir riesgos específicos.

Además, Fernández (1998) asemeja el riesgo sistemático a cruzar un río profundo y con corriente. En este escenario, el riesgo específico supondría cruzar ese río de noche, sin el material adecuado y con una mochila cargada. Del mismo modo que se pueden reducir las probabilidades de ahogamiento cruzando el río de día y con el material adecuado, el riesgo no sistemático se puede reducir si el título se combina en una cartera con otros títulos, es decir, es diversificable (Markowitz 1952). El riesgo sistemático por su parte, es esa parte del riesgo que no es diversificable al combinarse con otros activos.

2.3. Relevancia histórica

La industria de la gestión de riesgos y de la gestión de carteras se apoyado en gran medida en las estimaciones del parámetro beta como variable para medir el riesgo.

Tal y como afirma Elton (2014), está demostrado que las betas estimadas sobre carteras dan lugar a estimaciones mucho más precisas que las estimadas sobre activos individuales. Esto hace que las betas sean una buena medida de riesgo en la gestión de carteras. Además, Damodaran, Garvey y Roggi (2012) defienden el uso del CAPM como herramienta clave para la gestión de riesgos dentro de las compañías de hoy en día. No obstante, existe mucha literatura que muestra evidencia no favorable al CAPM como modelo explicativo sobre el rendimiento de activos.

En este epígrafe se mostrarán diferentes tests empíricos llevados a cabo para contrastar el CAPM, así como otras aportaciones no contrastadas presentes en la literatura sobre la precisión del modelo.

2.3.1. *Tests históricos del CAPM*

Tal y como hemos explicado anteriormente, el modelo CAPM se apoya en una serie de hipótesis iniciales sobre el mercado y sobre los agentes que en él se encuentran que permiten la simplicidad de aplicación del modelo. No obstante, estas hipótesis son muy restrictivas y, en ocasiones, se alejan de la forma de la que actúan los diferentes agentes en los mercados financieros. Por lo tanto, surgen dudas como: ¿verdaderamente el modelo CAPM funciona?, ¿es la beta de un activo una buena aproximación del riesgo sistemático de ese activo? o ¿está la beta de un activo relacionada con el rendimiento de ese activo?

A continuación mostraremos los resultados de una serie de autores que históricamente han tratado de contestar a estas preguntas mediante tests de contraste empíricos del modelo. En cualquier caso, Roll (1977) que el modelo no se puede testar debido a que la cartera de mercado no se puede conocer u observar. Según él, en el momento en el que se asume que la cartera de mercado es una en concreto, cualquier prueba de contraste no estará midiendo la funcionabilidad del modelo, sino la relación entre el rendimiento de un activo y el rendimiento de esa cartera concreta.

Los primeros tests empíricos realizados por Black, Jensen y Scholes (1972) y Fama y Macbeth (1973) muestran que existe una relación lineal entre el rendimiento de un activo y su beta entre los años 1926 y 1968.

Fama y French (1992) también analizaron la relación entre el rendimiento de un activo y su beta utilizando la metodología propuesta por Fama y Macbeth (1973) concluyendo que esta relación es muy débil entre 1941 y 1990 para los activos del NYSE y que esta desaparece entre los años 1963 y 1990. Además, Fama y French afirman que existen otras variables como el tamaño de la compañía o el ratio valor de mercado – valor contable que explican mejor el rendimiento esperado de una compañía y, por lo tanto, son mejores formas de medir el riesgo.

Por otro lado, Amihud, Christensen y Mendelson (1992) afirman que los resultados obtenidos por Fama y French (1992) se deben a las ineficiencias en las estimaciones como resultado de la metodología aplicada en su estudio y no debido a que la beta sea un mal indicador del riesgo sistemático de un activo. Amihud, Christensen y Mendelson (1992) analizaron el mismo periodo de tiempo que Fama y French (1992) y concluyeron que existe una relación entre el rendimiento de un activo y su beta y que dicha relación es muy fuerte por lo que la beta es un buen indicador del riesgo sistemático de un activo.

Chan y Lakonishok (1993) analizaron el periodo de tiempo comprendido entre 1926 y 1991 y concluyeron que existe una relación entre el rendimiento de un activo y su beta hasta el año 1982. Según ellos esto se debe a que, a raíz de la aparición de fondos que replicaban los índices de mercado, activos con betas no muy pequeñas comenzaron a ofrecer mayor rendimiento que activos con betas no muy grandes. No obstante, Chan y Lakonishok (1993) afirman que la beta es una buena medida del riesgo en condiciones extremas, incluso en el período comprendido entre 1982 y 1991.

Raya, Savin y Tiwari (2009) analizaron 10 carteras construidas en función del tamaño de las empresas que las formaban y 25 carteras construidas en función del ratio valor de mercado – valor contable durante períodos de 5 y 10 años entre 1965 y 2004. Concluyeron que las evidencias para descartar el CAPM son estadísticamente más débiles de lo que muestra el consenso general.

Berger (2014) destaca la importancia de la situación de los mercados durante el periodo de observaciones tomado para la estimación de betas. Según Berger, las betas estimadas con un periodo de observaciones en el que los mercados sean estables muestran muy poca relación entre el riesgo estimado y el rendimiento medio. Sin embargo, afirma que las betas estimadas con periodos de observación turbulentos para los mercados, ofrecen estimaciones de betas que muestran una relación muy fuerte entre riesgo y rentabilidad. Esto apoya los resultados obtenidos por Chan y Lakonishok (1993) sobre las betas como buena medida de riesgo en condiciones extremas.

Bilinski y Lyssimachou (2014), aparte de reafirmar que la metodología empleada en Fama y Macbeth (1973) es inapropiada e ineficiente, exponen que la beta de un activo puede predecir muy bien rendimientos positivos muy altos o rendimientos negativos muy bajos, tal y como afirmaban Chan y Lakonishok (1993). Esto les permite concluir que el parámetro beta es muy útil para la gestión del riesgo.

2.3.2. Aportaciones no contrastadas

En este epígrafe se muestran aportaciones de personas relevantes en la industria de inversión sobre el modelo CAPM. No obstante, es importante subrayar que son opiniones personales que no se apoyan en fundamentos teóricos o empíricos.

En 1982, antes de la publicación de Fama y French (1992), Mullins (1982), que llegó a ser vicepresidente de la Reserva Federal, afirmó que el modelo CAPM, a pesar de no ser un modelo preciso, tenía mucho que aportar a la valoración de activos financieros. Mullins afirma que es un modelo fácil de aplicar y que realmente no existían en aquel momento otros métodos más precisos.

Según Connors y Buffett (2009), un inversor no piensa de la forma que afirman las hipótesis del CAPM; si una acción cae mucho más que el mercado, lo que se consideraría un incremento en la volatilidad, para ellos es una oportunidad de inversión. De hecho, según Warren Buffet el inversor no es reticente al riesgo. Es más, el inversor prefiere entornos con una gran volatilidad en el mercado porque es en aquellos escenarios donde encuentra las mejores oportunidades para invertir tal y como afirma Graham (1949).

Damodaran, Garvey y Roggi (2012) destacan la importancia de la gestión de riesgos dentro de una empresa. Una empresa se encuentra expuesta a una serie de riesgos fruto de sus diferentes líneas de negocio, de sus contratos con proveedores o de su exposición a diferentes divisas, entre otros factores. Según Damodaran, Garvey y Roggi (2012), una política de gestión riesgos es esencial para que una compañía pueda maximizar su valor, pero, apoyándose en las conclusiones del CAPM, subrayan que esta debe orientarse a disminuir el riesgo de mercado o riesgo sistemático ya que el riesgo específico o no sistemático puede ser eliminado por el inversor mediante la diversificación. Asimismo, afirman que un analista de riesgos debe evaluar el posible impacto que tendrá asumir riesgos sobre la tasa de descuento y, por lo tanto, sobre el valor de la empresa. La función de los gestores de riesgos en una compañía es decidir entre asumir un coste que permita eliminar el riesgo o asumir la pérdida de valor de la compañía resultante de asumir ese riesgo.

Fernández (2015) afirma que el modelo CAPM es un modelo absurdo. Para ello se apoya en afirmar que en el mundo real los inversores no tienen las mismas expectativas, utilizan diferentes betas ya que cada uno estima betas de una forma determinada, tienen carteras de activos diferentes entre sí, esperan diferentes rendimientos, utilizan diferentes primas de mercado y porque la prima de mercado no es la diferencia entre el rendimiento esperado del mercado y el rendimiento del activo libre de riesgo. Además, Fernández pone en duda que la cartera de mercado sea un punto eficiente del conjunto de posibilidades de inversión.

2.3.3. Aplicación práctica del CAPM por compañías

En base a la literatura analizada sobre contrastes empíricos del modelo, existen importantes evidencias en contra de la capacidad del CAPM para describir la relación riesgo-rendimiento de los mercados financieros. Además, muchas personalidades reconocidas como Warren Buffett ponen en duda sus hipótesis iniciales. Entonces, ¿qué métodos emplean las compañías hoy en día para valorar proyectos o estimar su coste de capital?

Estas preguntas fueron las que se plantearon Graham y Harvey (2001). Graham y Harvey (2001) realizaron una encuesta a 392 directores financieros de compañías americanas con el objetivo de conocer qué prácticas relativas a las finanzas corporativas se aplicaban para valorar proyectos o estimar su coste de capital. Los resultados que obtuvieron muestran que el 73,5% de los participantes contestaron que emplean el modelo CAPM siempre o casi siempre como método para la estimación de su coste de capital.

De forma análoga, Brounen, Jong y Koedijk (2004) realizaron una encuesta a 313 directores financieros de compañías en Reino Unido, Holanda, Alemania y Francia. Sus resultados fueron similares a los obtenidos por Graham y Harvey (2001). El modelo CAPM resultó ser el modelo más utilizado para estimar el coste de los recursos propios, aunque los resultados sobre su utilización fueron ligeramente más bajos que los obtenidos por Graham y Harvey.

Estos resultados muestran como el modelo CAPM, a pesar de la existencia de evidencias en contra de su capacidad para describir la relación riesgo-rendimiento de los mercados financieros, es el modelo de valoración de activos financieros más empleado hoy en día por profesionales. Independientemente de su limitaciones, es necesario conocer cuál es la mejor forma de definir las variables del CAPM para aplicar el modelo de la forma más adecuada.

3. ESTIMACIÓN DEL MODELO DE MERCADO

Según Brooks (2008), un modelo de regresión es un intento de explicar los movimientos de una variable, denominada variable explicada o variable dependiente, como consecuencia de movimientos en una o varias variables, denominadas variables explicativas o variables independientes. Tal y como afirma Brooks (2008), un modelo de regresión lineal simple asume que existe una única variable explicativa, establece una relación lineal entre ambas variables y se puede representar así

$$y_t = \alpha + \beta x_t + u_t$$

donde el subíndice t nos indica el número de observación, α y β los parámetros que debemos estimar para entender la relación entre las variables y u_t el error cometido en cada observación fruto de la estimación del modelo.

Este modelo se poya en las siguientes hipótesis tal y como afirma Brooks:

- El valor esperado de los errores es 0 ($E(u_t) = 0$).
- La varianza de los errores es constante y finita ($\mathrm{var}(u_t) = \sigma^2 < \infty$).
- Los errores son linealmente independientes ($\mathrm{cov}(u_i, u_j) = 0$).
- No existe relación entre el error y la correspondiente variable explicativa ($\mathrm{cov}(u_t, x_t) = 0$).

Cuando este modelo se utiliza para realizar la regresión del rendimiento de un activo sobre el rendimiento del mercado, el modelo se conoce como modelo de mercado tal y como afirman Marín y Rubio (2001) y se puede representar como

$$r_i = a_i + \beta_i r_M + u_i$$

Si se observan las hipótesis del modelo CAPM, se aprecia que son consistentes con las asumidas por el modelo de regresión lineal tal y como afirman Cvitanic y Zapatero (2004). Además, de acuerdo con el modelo CAPM, atendiendo a la forma de la línea SML, la prima de rendimiento esperado de un activo sobre el activo libre de riesgo está linealmente relacionada con la prima de mercado. Esto nos permite realizar estimaciones sobre la beta del modelo CAPM utilizando la herramienta de la regresión lineal entre estas variables tal y como se muestra en la siguiente expresión

$$r_i - r_f = a_i + \beta_i (r_M - r_f) + u_i$$

Cabe destacar que, de acuerdo al modelo CAPM, $\alpha = 0$, por lo que toda evidencia a favor de esto nos llevará a pensar que la beta obtenida explica bien el rendimiento de el activo en cuestión como consecuencia del rendimiento del mercado.

En los siguientes epígrafes se analizarán diferentes problemas a los que nos enfrentamos a la hora de estimar betas como la longitud del período de observaciones o el tipo de índice que se debe considerar como representación del mercado con el objetivo de entender qué elecciones sobre estos parámetros nos llevan a mejores estimaciones de betas para los activos del mercado español.

3.1. Definición de las variables del modelo

Para poder utilizar el modelo CAPM, se necesita tomar decisiones como qué tasa de rendimiento del activo libre de riesgo emplear, cómo medir el rendimiento de un activo o con qué tipo de rendimientos trabajar.

3.1.1. Tipos de rendimientos

Para medir el rendimiento de una operación financiera se pueden utilizar diferentes tipos de rendimientos en función de qué ley de capitalización empleemos. El rendimiento de una acción en un periodo de tiempo comprendido entre $t = 0$ y $t = 1$ se define con la siguiente expresión

$$r[0,1] = \frac{P(t = 1) - P(t = 0)}{P(t = 0)}$$

mientras que el rendimiento logarítmico de una acción en un periodo de tiempo comprendido entre $t = 0$ y $t = 1$ se define con la siguiente expresión

$$\rho_{[0,1]} = \ln \frac{P(t = 1)}{P(t = 0)}$$

Tal y como afirma Carabias (2016), los rendimientos logarítmicos son aditivos en el tiempo, es decir, si se desea calcular el rendimiento logarítmico entre el periodo $t = 0$ y $t = 2$, este se puede obtener mediante la siguiente expresión

$$\rho_{[0,2]} = \rho_{[0,1]} + \rho_{[1,2]}$$

Los rendimientos ordinarios no cumplen esta propiedad. No obstante, se demuestra que el rendimiento ordinario de una cartera se puede expresar como media ponderada de los rendimientos de los títulos que la forman. Esta propiedad no se cumple para rendimientos logarítmicos.

Teniendo en cuenta que el modelo CAPM es un modelo estático, es decir, que los únicos posibles vencimientos son $t = 0$ y $t = 1$, cuando se quieran calcular rendimientos de acciones para realizar regresiones con la prima de mercado emplearemos rendimientos ordinarios debido a las propiedades que se han expuesto.

3.1.2. Precios de las acciones

Utilizaremos un modelo estático, por lo que estamos asumiendo que los capitales solo pueden vencer en el momento inicial o en el momento final. En esta situación, surge la problemática de que, por ejemplo, un inversor reciba dividendos entre el momento de compra y el momento de venta de un activo con riesgo. En esta situación, si solo consideramos el precio de compra y venta del activo, no estaremos calculando el rendimiento real recibido por el accionista, puesto que también ha recibido rendimiento a través de dividendos. Es decir, tal y como afirma Carabias (2016), existen varias fuentes de rendimiento como son, las ganancias de capital, las ampliaciones de capital y los dividendos. Por ello, se deben ajustar los precios de los activos con los que trabajemos para que reflejen no solo las ganancias de capital, sino todas las fuentes de rendimiento posibles.

Si entre un período $t = 0$ y $t = 1$ un inversor recibe dividendos, estos se deberán incluir al calcular el rendimiento ordinario de la siguiente forma

$$r[0,1] = \frac{P(t = 1) - P(t = 0) + d}{P(t = 0)}$$

siendo $r[0,1]$ el rendimiento del periodo $[0,1]$, $P(t = 1)$ el precio del activo en el momento $t = 1$, $(t = 2)$ el precio del activo en el momento $t = 2$ y d los dividendos obtenidos en el periodo.

Además, si entre un periodo $t = 0$ y $t = 1$ se produce una ampliación de capital, el inversor recibirá un derecho de suscripción que tiene un valor en el mercado. Como se observa en Carabias (2016), el valor teórico de este derecho de suscripción será la diferencia entre el precio de la acción antes de la ampliación y el precio teórico después de la ampliación. El precio teórico de las acciones después (P_d) de la ampliación de capital será

$$P_d = \frac{\text{Nº acciones nuevas} \cdot \text{P. nuevas} + \text{Nº acciones antiguas} \cdot \text{P. antiguas}}{\text{Nº total de acciones}}$$

y el valor teórico del derecho de suscripción será

$$\text{Valor del derecho} = P(t=0) - P_d$$

En este caso, el rendimiento obtenido será

$$r[0,1] = \frac{P(t=1) - P(t=0) + \text{valor del derecho}}{P(t=0)}$$

Por lo tanto, si un accionista obtiene rendimiento a través de ganancias de capital, dividendos y ampliaciones de capital, este rendimiento se podrá expresar como

$$r[0,1] = \frac{P(t=1) - P(t=0) + d + \text{valor del derecho}}{P(t=0)}$$

Esto supone que cuando vayamos a estimar el modelo de mercado, tendremos que incorporar de alguna forma estas tres fuentes de rendimiento y no solo las ganancias de capital. En la práctica, la mayoría de las plataformas de comunicación que reportan precios de la bolsa, incorporan precios ajustados de cada activo. El precio ajustado, es un precio que incorpora los efectos de las ampliaciones de capital y de los dividendos, de manera que aplicando la fórmula

$$r[0,1] = \frac{P'(t=1) - P'(t=0)}{P'(t=0)}$$

donde P' representa un precio ajustado, se tendrán en cuenta las tres fuentes de rendimiento explicadas anteriormente. Análogamente, los índices de mercado pueden ajustarse para que tengan en cuentas las tres fuentes de rendimiento, dando lugar a los índices de rendimiento.

En las diferentes estimaciones sobre el modelo de mercado que se realizarán aquí, se utilizarán precios ajustados para medir el rendimiento ordinario obtenido por un inversor en un periodo de tiempo.

3.1.3. Tasa libre de riesgo

Al utilizar el modelo CAPM, surge la necesidad de utilizar una tasa libre de riesgo para calcular el rendimiento esperado de un activo. Está comúnmente aceptado en la literatura utilizar como activo libre de riesgo la deuda pública, pero existen discrepancias sobre qué tipo de deuda pública elegir en base a su madurez. Fernández (2017), en una encuesta realizada en 41 países de los que obtuvo al menos 25 respuestas en cada uno de ellos, preguntó a directivos de empresas sobre qué tasa libre de riesgo utilizaban en sus estimaciones sobre el rendimiento esperado de un activo. Sus resultados, tanto de la encuesta realizada en 2017 como de la realizada en 2013 y 2015, muestran una gran correlación con el bono a 10 años de cada país. Además, en el caso concreto de España se obtuvieron 472 respuestas que apoyan estos resultados, por lo que en los contrastes propuestos en este trabajo se ha decidido emplear el rendimiento del bono español a 10 años como tasa libre de riesgo.

3.2. Problemas en la estimación de betas

Tal y como afirma Damodaran (2012), a la hora de estimar betas se deben tomar decisiones sobre la longitud del periodo de observaciones tomado, sobre el intervalo de tiempo tomado para medir rendimientos, sobre el índice de mercado utilizado en la regresión y sobre los ajustes realizados sobre los parámetros obtenidos en las estimaciones.

3.2.1. Longitud del periodo de observaciones

Damodaran (2012) destaca la importancia de la longitud de periodo de observaciones empleado para realizar la regresión entre la prima de rendimiento del activo analizado sobre el activo libre de riesgo y la prima de mercado.

Cuando se quiere estimar la beta de un activo o de una cartera se debe utilizar un período de tiempo para realizar la regresión entre las dos variables. Una mayor longitud del periodo de observaciones largo ofrecerá un mayor número observaciones y más datos para realizar la estimación. No obstante, cuanto mayor sea el periodo de observaciones más probabilidades habrá de que el perfil de riesgo de la compañía haya cambiado a lo largo de dicho período. Esto puede darse debido a que la compañía se haya orientado a nuevos mercados, haya variado su apalancamiento financiero o haya cambiado su posición de liderazgo respecto a sus competidores.

Numerosos autores como Levy (1971), Baesel (1974), Theobald (1981), Singh (2008), Deb y Mishra (2011) y Tauseef (2016) afirman que la inestabilidad de la beta disminuye cuando se aumenta el periodo de estimación, sugiriendo que las betas calculadas con periodos de estimación más largos ofrecen una estimación más precisa sobre betas futuras. Sin embargo, Theobald (1981) afirma que los beneficios obtenidos en la precisión de las estimaciones como resultado de emplear periodos de estimación más largos son finitos. Los resultados obtenidos por Theobald (1981) indican que, para el caso de compañías en el Reino Unido, el periodo óptimo de estimaciones es de entre

180 y 210 meses. Además, subraya que los beneficios obtenidos en la precisión de las estimaciones eran marginales a partir de los 120 meses.

En base los resultados obtenidos por los autores mencionados, cuando se estimen betas más adelante, se tomarán observaciones del rendimiento de acciones durante los últimos 10 años.

3.2.2. Intervalo de medición de rendimientos

Damodaran (2012) indica que otra decisión necesaria a la hora de estimar betas es qué intervalo de tiempo emplear para calcular rendimientos.

Los rendimientos de las acciones se pueden calcular en intervalos anuales, mensuales, semanales o incluso diarios. Intervalos más cortos permiten disponer de un mayor número de observaciones para un mismo periodo de tiempo de observaciones, pero estas observaciones podrán incluir un mayor ruido.

Hawawini (1983) afirma que betas de compañías con una capitalización bursátil menor suelen reducirse al disminuir el intervalo de medición de rendimientos. Por otro lado, afirma que betas de compañías con una capitalización bursátil mayor suelen aumentar al aumentar el intervalo de medición de rendimientos. Esto sugiere que compañías más pequeñas suelen parecer menos arriesgadas cuando se emplean intervalos menores y compañías más grandes suelen parecer más arriesgadas cuando se emplean intervalos mayores.

Damodaran (2012) afirma que los rendimientos diarios llevan a estimaciones sesgadas de betas como resultado de la disminución que puede darse durante un día del volumen de intercambio de acciones. Por ejemplo, las betas de compañías pequeñas estimadas con rendimientos diarios suelen ser demasiado bajas, porque estas compañías son generalmente las menos líquidas en los mercados financieros. Damodaran afirma que emplear intervalos semanales o mensuales puede reducir considerablemente este sesgo.

En base a esto, posteriormente se analizarán las betas estimadas con datos mensuales y semanales.

3.2.3. Índice de mercado

Un índice de mercado es, según Cvitanic y Zapatero (2004) es un número que trata de resumir el nivel de los mercados financieros o una parte de ellos. En ellos, se agrupan diferentes acciones ponderadas por su capitalización bursátil. Algunos de los índices de mercado más conocidos son el Standard & Poor's 500 en Estados Unidos que representa la media de precios de las 500 compañías más grandes representando a todas las industrias del NYSE o el Dow Jones Industrial Average, que representa a las 30 compañías más importantes de Estados Unidos y es el índice de mercado más antiguo de la historia. En España, se encuentran diferentes índices de mercado como el Ibex 35, que representa a las empresas más importantes del mercado español o el Índice General de la Bolsa de Madrid, que representa a 113 compañías negociadas en la Bolsa de Madrid.

Tal y como afirma Elton (2014), si alguien observara los cambios en un índice de mercado que no incluya dividendos, estaría viendo cambios en el precio de los activos que lo forman, pero no sería capaz de calcular rendimientos. Esto se debe a que, tal y como se ha mostrado en epígrafes anteriores, los dividendos y las ampliaciones de capital también son fuente de rendimiento para el accionista por lo que surge la necesidad de trabajar con índices de mercado que incluyen estas fuentes de rendimiento. Estos son los índices total return o índices de rendimiento.

Por lo tanto, si queremos estimar betas de activos del mercado español surgen varias cuestiones como ¿qué índice debemos utilizar?, ¿debemos utilizar un índice de rendimiento o se puede utilizar el Ibex 35?

3.3. Resultados obtenidos

En este apartado se muestran los resultados obtenidos tras realizar regresiones de 25 activos del Ibex 35 sobre diferentes índices de mercado, diferentes longitudes de sus períodos de observaciones y diferentes intervalos de medición de rendimientos. De esta manera se pretende analizar si puede dar respuesta a los problemas de estimación planteados anteriormente para el mercado español.

Para ello se analizará, sobre todo, el parámetro R^2 ajustado, que representa la parte de los movimientos en la variable dependiente que se pueden explicar por cambios en la variable independiente. Un R^2 ajustado mayor, será un indicador de que el modelo explica mejor los movimientos en el rendimiento de un activo como consecuencia del movimiento en el rendimiento del índice elegido.

3.3.1. Longitud del periodo de estimaciones

Se ha realizado la regresión de 25 activos del Ibex 35 sobre el índice de rendimiento Ibex Total Return. Para ello, por un lado se han empleado 120 datos mensuales del rendimiento ordinario de estas acciones en base a precios ajustados entre enero de 2008 y diciembre de 2017 y, por otro lado se han empleado 60 datos mensuales entre enero de 2013 y diciembre de 2017. Los resultados se pueden observar en la tabla 1.

Tabla 1: Estimación del modelo de mercado con diferentes longitudes del periodo de estimación

	Periodo de estimación: 120 meses			Periodo de estimación: 60 meses		
	Beta	Alfa	R cuadrado ajustado	Beta	Alfa	R cuadrado ajustado
Acciona	1,078	-0,001	0,435	1,026	0,003	0,292
Acerinox	0,900	0,000	0,326	1,004	0,005	0,242
ACS	0,921	0,001	0,410	1,064	0,008	0,504
Arcelormittal	1,470	-0,014	0,215	1,759	-0,009	0,133
Bankinter	0,984	0,006	0,364	1,001	0,020	0,376
Caixabank	1,242	0,011	0,583	1,447	0,015	0,527
Colonial	0,030	0,089	-0,008	-3,583	0,208	-0,008
Enagás	0,627	-0,004	0,354	0,371	-0,006	0,108
Endesa	1,008	0,005	0,310	0,844	0,000	0,192
Ferrovial	1,008	0,011	0,437	0,511	-0,002	0,237
Gas Natural	0,820	-0,004	0,391	0,890	0,004	0,411
Grifols	0,431	-0,003	0,084	0,554	-0,002	0,130
Iberdrola	0,927	-0,002	0,575	0,642	-0,002	0,349
Inditex	-3,784	0,260	0,021	-6,122	0,188	0,037
Indra	0,641	-0,011	0,254	0,771	-0,006	0,175
Mapfre	1,234	0,012	0,620	1,227	0,005	0,573
Mediaset	1,149	0,006	0,411	0,836	0,003	0,293
Meliá	1,430	0,018	0,454	0,825	0,003	0,366
Red Eléctrica	0,309	0,232	-0,008	-0,282	0,122	-0,017
Repsol	0,973	0,000	0,543	1,149	0,001	0,530
Sabadell	1,150	0,002	0,418	1,384	0,006	0,522
Santander	1,412	0,012	0,761	1,465	0,007	0,729
Técnicas Reunidas	0,716	-0,007	0,237	0,713	-0,012	0,202
Telefónica	0,920	-0,005	0,610	1,099	-0,003	0,568
Viscofan	-0,002	-0,010	-0,008	0,077	-0,016	-0,012

Fuente: Elaboración propia

Tal y como se observa en las columnas 4 y 7, en 19 de los 25 activos analizados el R^2 ajustado es mayor si se emplea un periodo de observaciones mayor. Esto, nos permite afirmar que el modelo explica mejor los movimientos en la variable explicada y, por lo tanto, la beta ofrece una mejor estimación sobre la relación entre los rendimientos del activo y el mercado cuando se emplean periodos de observaciones mayores. Esto es coherente con lo que afirman Levy (1971), Baesel (1974), Theobald (1981), Singh (2008), Deb y Mishra (2011) y Tauseef (2016).

No obstante, tal y como se ha explicado anteriormente, Theobald (1981) afirma que los beneficios que se obtienen fruto del aumento en la longitud del periodo de observaciones, son marginales a partir de 120 observaciones. Para comprobar si se cumple Theobald (1981) para nuestra muestra, se ha realizado misma regresión, empleando 100, 120 y 140 datos mensuales desde septiembre de 2009, enero de 2008 y junio de 2007 respectivamente hasta diciembre de 2017. Los resultados obtenidos se muestran en la tabla 2.

Tabla 2: Incremento marginal en el R cuadrado ajustado como resultado de variaciones en el número de observaciones

	100 meses	120 meses	140 meses	Incremento en R cuadrado ajustado (100-120 meses)	Incremento en R cuadrado ajustado (120-140 meses)
	R cuadrado ajustado	R cuadrado ajustado	R cuadrado ajustado		
Acciona	0,399	0,435	0,439	0,036	0,004
Acerinox	0,246	0,326	0,307	0,080	-0,019
ACS	0,417	0,410	0,413	-0,007	0,003
Arcelormittal	0,141	0,215	n.d.	0,074	-0,215
Bankinter	0,520	0,364	0,281	-0,156	-0,083
Caixabank	0,553	0,583	n.d.	0,030	-0,583
Colonial	-0,009	-0,008	-0,007	0,001	0,001
Enagás	0,388	0,354	0,336	-0,034	-0,018
Endesa	0,354	0,310	0,289	-0,044	-0,021
Ferrovial	0,408	0,437	0,426	0,029	-0,011
Gas Natural	0,441	0,391	0,353	-0,050	-0,038
Grifols	0,078	0,084	0,023	0,006	-0,061
Iberdrola	0,565	0,575	0,539	0,010	-0,036
Inditex	0,045	0,021	n.d.	-0,024	-0,021
Indra	0,236	0,254	0,258	0,018	0,004
Mapfre	0,586	0,620	0,589	0,034	-0,031
Mediaset	0,359	0,411	0,394	0,052	-0,017
Meliá	0,504	0,454	0,433	-0,050	-0,021
Red Eléctrica	-0,007	-0,008	-0,006	-0,001	0,002
Repsol	0,520	0,543	0,532	0,023	-0,011
Sabadell	0,424	0,418	0,400	-0,006	-0,018
Santander	0,779	0,761	0,755	-0,018	-0,006
Técnicas Reunidas	0,237	0,237	n.d.	0,000	-0,237
Telefónica	0,706	0,610	0,592	-0,096	-0,018
Viscofan	-0,010	-0,008	-0,005	0,002	0,003

Fuente: Elaboración propia

Tal y como se puede observar en las columnas 5 y 6, al aumentar el número de observaciones de 100 a 120 meses, 13 activos experimentaron un incremento en el R^2 ajustado, mientras que al aumentar el número de observaciones de 120 a 140 meses, solo 6 activos experimentaron un incremento en el R^2 ajustado. Podemos afirmar que para la muestra de activos elegida, que trata de representar el mercado español, también se cumple Theobald (1981).

3.3.2. Intervalo de medición de rendimientos

Tal y como se explicó en epígrafes anteriores, la literatura existente no recomienda el empleo de rendimientos diarios, por lo que en este apartado se analizarán los resultados obtenidos al tomar rendimientos mensuales y semanales.

Se ha realizado la regresión de 25 activos del Ibex 35 sobre el índice de rendimiento Ibex Total Return. Para ello, por un lado se han empleado 120 datos mensuales del rendimiento ordinario de estas acciones en base a precios ajustados entre enero de 2008 y diciembre de 2017 y, por otro lado se han empleado 522 datos semanales entre enero de 2008 y diciembre de 2017. Los resultados se pueden observar en la tabla 3.

Tabla 3: Estimación del modelo de mercado con rendimientos mensuales y rendimientos semanales

	Periodo de estimación: 120 meses			Periodo de estimación: 522 semanas		
	Beta	Alfa	R cuadrado ajustado	Beta	Alfa	R cuadrado ajustado
Acciona	1,078	-0,001	0,435	1,007	-0,001	0,490
Acerinox	0,900	0,000	0,326	0,804	0,000	0,403
ACS	0,921	0,001	0,410	0,875	0,000	0,512
Arcelormittal	1,470	-0,014	0,215	1,241	0,001	0,386
Bankinter	0,984	0,006	0,364	1,133	0,003	0,445
Caixabank	1,242	0,011	0,583	0,966	0,001	0,510
Colonial	0,030	0,089	-0,008	0,976	-0,005	0,158
Enagás	0,627	-0,004	0,354	0,583	-0,001	0,363
Endesa	1,008	0,005	0,310	0,724	-0,001	0,277
Ferrovial	1,008	0,011	0,437	0,906	0,002	0,485
Gas Natural	0,820	-0,004	0,391	0,863	0,000	0,493
Grifols	0,431	-0,003	0,084	0,485	0,000	0,182
Iberdrola	0,927	-0,002	0,575	0,967	0,000	0,682
Inditex	-3,784	0,260	0,021	-0,414	0,413	-0,002
Indra	0,641	-0,011	0,254	0,665	-0,002	0,300
Mapfre	1,234	0,012	0,620	1,056	0,002	0,588
Mediaset	1,149	0,006	0,411	1,010	0,000	0,407
Meliá	1,430	0,018	0,454	1,072	0,002	0,389
Red Eléctrica	0,309	0,232	-0,008	-1,162	0,172	0,000
Repsol	0,973	0,000	0,543	1,034	0,001	0,650
Sabadell	1,150	0,002	0,418	-1,097	-0,012	0,487
Santander	1,412	0,012	0,761	0,960	-0,001	0,817
Técnicas Reunidas	0,716	-0,007	0,237	0,781	-0,001	0,325
Telefónica	0,920	-0,005	0,610	0,871	-0,001	0,658
Viscofan	-0,002	-0,010	-0,008	0,211	-0,002	0,051

Fuente: Elaboración propia

Se observa en la tabla 3 que 19 de los 25 activos de la muestra tienen un R^2 ajustado más alto si se emplean datos semanales en vez de datos mensuales. Aunque la literatura suele afirmar que los rendimientos mensuales son mejores para la estimación del modelo de mercado, los resultados obtenidos indican que, para la muestra tomada, los rendimientos semanales ofrecen una estimación mejor del modelo.

3.3.3. Índices de rendimiento e índices generales

En este apartado se analizarán los resultados obtenidos al estimar el modelo de mercado utilizando como valor representativo del mercado con índices de mercado generales y de rendimiento. Para ello, se ha realizado la regresión de los 25 de la muestra elegida sobre el índice de rendimiento Ibex Total Return por un lado y sobre el Ibex 35 por otro lado empleando 120 datos mensuales del rendimiento ordinario de estas acciones en base a precios ajustados entre enero de 2008 y diciembre de 2017. Los resultados se pueden observar en la tabla 4.

Tabla 4: Estimación del modelo de mercado con índice general y con índice de rendimiento

	Ibex Total Return			Ibex 35		
	Beta	Alfa	R cuadrado ajustado	Beta	Alfa	R cuadrado ajustado
Acciona	1,078	-0,001	0,435	1,067	0,003	0,430
Acerinox	0,900	0,000	0,326	0,899	0,003	0,327
ACS	0,921	0,001	0,410	0,939	0,007	0,428
Arcelormittal	1,470	-0,014	0,215	0,979	0,010	0,364
Bankinter	0,984	0,006	0,364	1,424	-0,009	0,202
Caixabank	1,242	0,011	0,583	1,214	0,016	0,561
Colonial	0,030	0,089	-0,008	0,085	0,090	-0,008
Enagás	0,627	-0,004	0,354	0,640	-0,001	0,372
Endesa	1,008	0,005	0,310	1,028	0,010	0,033
Ferrovial	1,008	0,011	0,437	1,012	0,015	0,443
Gas Natural	0,820	-0,004	0,391	0,827	0,000	0,401
Grifols	0,431	-0,003	0,084	0,435	-0,001	0,086
Iberdrola	0,927	-0,002	0,575	0,934	0,002	0,588
Inditex	-3,784	0,260	0,021	-3,870	0,242	0,022
Indra	0,641	-0,011	0,254	0,645	-0,008	0,260
Mapfre	1,234	0,012	0,620	1,221	0,017	0,612
Mediaset	1,149	0,006	0,411	1,155	0,011	0,419
Meliá	1,430	0,018	0,454	1,443	0,025	0,466
Red Eléctrica	0,309	0,232	-0,008	0,119	0,227	-0,008
Repsol	0,973	0,000	0,543	0,964	0,004	0,538
Sabadell	1,150	0,002	0,418	1,144	0,007	0,417
Santander	1,412	0,012	0,761	1,412	0,019	0,768
Técnicas Reunidas	0,716	-0,007	0,237	0,713	-0,004	0,236
Telefónica	0,920	-0,005	0,610	0,914	-0,001	0,602
Viscofan	-0,002	-0,010	-0,008	0,000	-0,014	-0,008

Fuente: Elaboración propia

Los resultados muestran que 10 activos tienen un mayor R^2 ajustado cuando se emplea el índice de rendimiento del Ibex 35 y 15 activos tienen un mayor R^2 ajustado cuando se emplea el índice general.

Como se ha explicado anteriormente, al estimar el modelo de mercado se deben emplear índices de rendimientos y precios ajustados porque estos tienen en cuenta todas las fuentes de rendimiento y no solo las ganancias de capital. Los resultados obtenidos en estas regresiones para la muestra elegida no ofrecen una evidencia clara a favor del resultado que se esperaba.

3.3.4. Índice de mercado empleado

A pesar de que sabemos que se deben utilizar índices de rendimiento, surge la duda de qué índice emplear en la estimación de mercado. En este epígrafe se analizarán los resultados obtenidos al estimar el modelo de mercado empleando el Ibex Total Return por un lado y el Índice Total de la Bolsa de Madrid (ITBM) por otro lado. Para ello, se han empleado 120 datos mensuales del rendimiento ordinario de estas acciones en base a precios ajustados entre enero de 2008 y diciembre de 2017. Los resultados se pueden observar en la tabla 5.

Tabla 5: Estimación del modelo de mercado con IbexTR e ITBM

	Ibex Total Return			ITBM		
	Beta	Alfa	R cuadrado ajustado	Beta	Alfa	R cuadrado ajustado
Acciona	1,078	-0,001	0,435	1,071	-0,001	0,433
Acerinox	0,900	0,000	0,326	0,893	-0,001	0,323
ACS	0,921	0,001	0,410	0,919	0,002	0,410
Arcelormittal	1,470	-0,014	0,215	1,438	-0,015	0,207
Bankinter	0,984	0,006	0,364	0,986	0,006	0,370
Caixabank	1,242	0,011	0,583	1,242	0,011	0,588
Colonial	0,030	0,089	-0,008	-0,063	0,090	-0,008
Enagás	0,627	-0,004	0,354	0,616	-0,004	0,344
Endesa	1,008	0,005	0,310	1,013	0,005	0,315
Ferrovial	1,008	0,011	0,437	0,993	0,011	0,427
Gas Natural	0,820	-0,004	0,391	0,820	-0,003	0,394
Grifols	0,431	-0,003	0,084	0,430	-0,003	0,084
Iberdrola	0,927	-0,002	0,575	0,926	-0,002	0,578
Inditex	-3,784	0,260	0,021	-3,840	0,260	0,022
Indra	0,641	-0,011	0,254	0,647	-0,010	0,262
Mapfre	1,234	0,012	0,620	1,234	0,012	0,625
Mediaset	1,149	0,006	0,411	1,142	0,006	0,410
Meliá	1,430	0,018	0,454	1,435	0,018	0,460
Red Eléctrica	0,309	0,232	-0,008	0,198	0,229	-0,008
Repsol	0,973	0,000	0,543	0,964	0,000	0,538
Sabadell	1,150	0,002	0,418	1,159	0,002	0,428
Santander	1,412	0,012	0,761	1,407	0,012	0,762
Técnicas Reunidas	0,716	-0,007	0,237	0,700	-0,008	0,225
Telefónica	0,920	-0,005	0,610	0,906	-0,005	0,592
Viscofan	-0,002	-0,010	-0,008	-0,007	-0,015	-0,008

Fuente: Elaboración propia

Los resultados obtenidos son ambiguos. 9 activos muestran un R^2 ajustado más alto utilizando como índice de mercado el ITBM, 11 activos muestran un R^2 ajustado más alto utilizando como índice de mercado el IbexTR y 5 activos muestran un R^2 ajustado similar. A pesar de esto, los incrementos en el R^2 ajustado son mínimos, lo que nos permite afirmar que ambos índices representan de forma similar el mercado español.

4. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha estudiado la obtención teórica del modelo de valoración de activos financieros CAPM, se han analizado cuáles son las variables con las que se debe definir el modelo y cómo tomar una muestra de series de datos temporales sobre precios de acciones para obtener una mejor estimación del coeficiente beta para activos del mercado español.

El modelo asume que el mercado es perfecto, que en él se negocian títulos con riesgo y un solo título sin riesgo, que todos los agentes del mercado basan sus decisiones de inversión en la media y varianza del rendimiento de los activos disponibles y que estas estimaciones son las mismas para todo inversor. A partir de estas hipótesis, el modelo CAPM afirma que el rendimiento de un activo es una función lineal del riesgo sistemático del activo, es decir, de su exposición a movimientos del mercado. Esta relación lineal viene definida por el coeficiente beta, que es único para cada activo.

A pesar de existir evidencias en contra de la capacidad del modelo para describir la relación entre riesgo y rendimiento de un activo, es el modelo más utilizado a nivel mundial por directivos de las empresas para la estimación del coste de capital de su compañía. Esto hace que sea esencial definir de forma correcta las variables del modelo.

En base a la literatura analizada se ha decidido tomar como tasa libre de riesgo el bono español a 10 años. Asimismo, se han empleado rendimientos ordinarios sobre precios ajustados de acciones de forma que se tuvieran en cuenta ganancias de capital, ampliaciones de capital y dividendos. Análogamente, se ha decidido emplear en el modelo índices de rendimiento para representar el mercado español en vez de índices generales.

En base a los resultados obtenidos en las estimaciones del modelo CAPM para la muestra de 25 activos elegidos del Ibex 35, podemos afirmar que el periodo de observaciones óptimo para el mercado español es de 10 años. Asimismo, se obtuvieron mejores resultados al emplear intervalos de rendimiento semanales en vez de mensuales para el mismo periodo de observaciones. Por otro lado, se obtuvieron resultados similares al emplear como índice de mercado el Ibex Total Return y el Índice Total de la Bolsa de Madrid lo que nos permite afirmar que ambos índices representan de forma similar el mercado español.

5. ANEXOS

5.1. Anexo 1

Elton (2014) simplifica el proceso asumiendo que sólo hay dos activos disponibles, de manera que el valor esperado del rendimiento de la cartera se podría escribir como

$$\bar{r}_p = w_A\, \bar{r}_A + w_B\, \bar{r}_B$$

donde A y B representan los dos activos disponibles, $\bar{r}_p$ el valor esperado del rendimiento de la cartera, $\bar{r}_A$ el valor esperado del rendimiento de A, $\bar{r}_B$ el valor esperado del rendimiento del activo B, w_A la proporción invertida en A y w_B la proporción invertida en B.

La suma de la proporción invertida en A y la proporción invertida en B debe ser igual a 1, por lo que

$$w_A + w_B = 1$$

o escrito de otra manera

$$w_A = 1 - w_B$$

Además, con las suposiciones de Elton (2014), podemos escribir la varianza del valor esperado del rendimiento de la cartera como

$$\sigma_p^2 = w_A^2\, \sigma_A^2 + w_B^2\, \sigma_B^2 + 2w_A\, w_B\, \sigma_{AB}$$

donde σ_p^2 representa la varianza del valor esperado del rendimiento de la cartera, σ_A^2 la varianza del valor esperado del rendimiento del activo A, σ_B^2 la varianza del valor esperado del rendimiento del activo B y σ_{AB} la correlación entre A y B.

Escribiendo la correlación como $\sigma_{AB} = \rho_{AB}\, \sigma_A\, \sigma_B$ donde ρ_{AB} es el coeficiente de correlación entre A y B, podemos obtener que

$$\sigma_p^2 = w_A^2\, \sigma_A^2 + w_B^2\, \sigma_B^2 + 2w_A\, w_B\, \rho_{AB}\, \sigma_A\, \sigma_B$$

A partir de la definición de la media y la varianza, Elton (2014) define tres escenarios que nos permitirán vislumbrar la forma del conjunto de posibilidades de inversión. Además, para mayor simplicidad en los cálculos define los dos activos disponibles como $\bar{r}_A = 14\%$; $\sigma_A = 6\%$; $\bar{r}_B = 8\%$; $\sigma_B = 3\%$.

5.1.1. Escenario 1: $\rho_{AB} = 1$

En este escenario las expresiones de la varianza y la media de nuestra cartera son las siguientes

$$\bar{r}_p = w_A \, \bar{r}_A + (1 - w_A) \, \bar{r}_B$$

$$\sigma_p^2 = w_A^2 \, \sigma_A^2 + (1 - w_A)^2 \, \sigma_B^2 + 2w_A \, (1 - w_A) \, \sigma_A \, \sigma_B$$

Se puede observar que la expresión de la varianza se corresponde con la fórmula de un binomio al cuadrado, por lo que las fórmulas de la media y la varianza quedan de la siguiente forma

$$\bar{r}_p = w_A \, \bar{r}_A + (1 - w_A) \, \bar{r}_B$$

$$\sigma_p = w_A \, \sigma_A + (1 - w_A) \, \sigma_B$$

Al tratarse de expresiones lineales, podemos sustituir los valores dados: $\bar{r}_A = 14\%$; $\sigma_A = 6\%$; $\bar{r}_B = 8\%$; $\sigma_B = 3\%$ como se muestra a continuaciónn

$$\bar{r}_p = w_A \, 14 + (1 - w_A) \, 8$$

$$\sigma_p = w_A \, 6 + (1 - w_A) \, 3$$

Reduciendo las expresiones anteriores obtenemos

$$\bar{r}_p = 6 \, w_A + 8$$

$$\sigma_p = 3 \, w_A + 3$$

Si despejamos w_A de ambas fórmulas e igualamos obtenemos

$$\sigma_p = \frac{1}{2} \, \bar{r}_p - 1$$

que representa la ecuación de una recta que puede representarse como se aprecia en el gráfico 1.

5.1.2. Escenario 2: $\rho_{AB} = -1$

En este escenario las fórmulas de la varianza y la media de nuestra cartera son las siguientes

$$\bar{r}_p = w_A \, \bar{r}_A + (1 - w_A) \, \bar{r}_B$$

$$\sigma_p^2 = w_A^2 \, \sigma_A^2 + (1 - w_A)^2 \, \sigma_B^2 - 2w_A \, (1 - w_A) \, \sigma_A \, \sigma_B$$

Se puede observar que la fórmula de la varianza se corresponde con la fórmula de un binomio al cuadrado, por lo que las fórmulas de la media y la varianza quedan de la siguiente forma

$$\bar{r}_p = w_A\, \bar{r}_A + (1 - w_A)\, \bar{r}_B$$

$$\sigma_p = w_A\, \sigma_A - (1 - w_A)\, \sigma_B$$

Sustituimos los valores dados: $\bar{r}_A = 14\%$; $\sigma_A = 6\%$; $\bar{r}_B = 8\%$; $\sigma_B = 3\%$ y obtenemos

$$\bar{r}_p = w_A\, 14 + (1 - w_A)\, 8$$

$$\sigma_p = w_A\, 6 - (1 - w_A)\, 3$$

Reduciendo las expresiones anteriores obtenemos

$$\bar{r}_p = 6\, w_A + 8$$

$$\sigma_p = 9\, w_A - 3$$

Es importante subrayar que σ_p es una variable solamente definida positiva por lo que debemos definirla a trozos para que no tome valores negativos. Entonces, obtenemos

$$\bar{r}_p = 6\, w_A - 8$$

$$\sigma_p = 9\, w_A - 3 \text{ , si } w_A \geq \frac{1}{3}$$

$$\sigma_p = -9\, w_A + 3 \text{ , si } w_A < \frac{1}{3}$$

Si despejamos w_A de ambas fórmulas e igualamos obtenemos

$$\sigma_p = \frac{3}{2}\, \bar{r}_p - 15 \text{ , si } w_A \geq \frac{1}{3}$$

$$\sigma_p = -\frac{3}{2}\, \bar{r}_p + 15 \text{ , si } w_A < \frac{1}{3}$$

que es la ecuación de una recta definida a trozos que puede representarse como se muestra en el gráfico 1.

5.1.3. Escenario 3: $\rho_{AB} = 0$

En este escenario las fórmulas de la varianza y la media de nuestra cartera son las siguientes

$$\bar{r}_p = w_A\, \bar{r}_A + (1 - w_A)\, \bar{r}_B$$

$$\sigma_p^2 = w_A^2\, \sigma_A^2 + (1 - w_A)^2\, \sigma_B^2$$

Sustituimos los valores dados: $\bar{r}_A = 14\%$; $\sigma_A = 6\%$; $\bar{r}_B = 8\%$; $\sigma_B = 3\%$ y obtenemos

$$\bar{r}_p = w_A\, 14 + (1 - w_A)\, 8$$

$$\sigma_p = \sqrt{36\, w_A^2 + 9\, (1 - w_A)^2}$$

Reduciendo las expresiones anteriores obtenemos

$$\bar{r}_p = 6\, w_A + 8$$

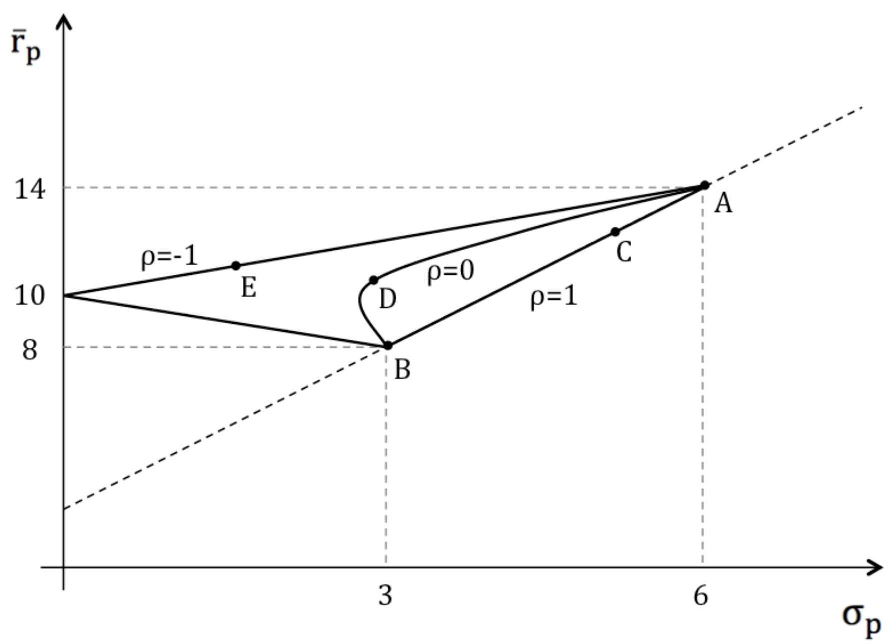
$$\sigma_p = \sqrt{45\, w_A^2 - 18\, w_A + 9}$$

Si despejamos w_A de ambas fórmulas e igualamos obtenemos

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{5}{4}\, r_p^2 - 23\, r_p + 113}$$

que es la ecuación de una parábola que puede representarse como se aprecia en el gráfico 11.

Gráfico 11: Ejemplo de conjunto de posibilidades de inversión para dos títulos con distintas correlaciones



Fuente: Elaboración propia basada en Elton (2014)

5.2. Anexo 2

Podemos definir el valor esperado del rendimiento de una cartera formada por dos activos y su varianza como

$$\bar{r}_p = (1 - w_A)\, r_f + w_A\, \bar{r}_A$$

$$\sigma_p^2 = (1 - w_A)^2\, \sigma_f^2 + w_A^2\, \sigma_A^2 + 2 w_A\, w_B\, \rho_{Af}\, \sigma_A\, \sigma_f$$

donde r_f la variable cierta que representa el rendimiento del activo libre de riesgo y $\bar{r}_A$ el valor esperado del retorno del fondo. El resto de variables representan la mismo que en ejemplos anteriores.

Dado que el para el activo libre de riesgo $\sigma_f^2 = 0$ y $\rho_{Af} = 0$ por definición del propio activo, obtenemos

$$\sigma_p = (w_A^2\, \sigma_A^2)^{1/2} = w_A\, \sigma_A$$

Podemos despejar w_A e introducirlo en la fórmula del rendimiento esperado de la cartera

$$w_A = \frac{\sigma_p}{\sigma_A}$$

$$\bar{r}_p = (1 - \frac{\sigma_p}{\sigma_A})\, r_f + \frac{\sigma_p}{\sigma_A}\, \bar{r}_A$$

Ordenando los términos obtenemos

$$\bar{r}_p = r_f + \frac{(\bar{r}_A - r_f)}{\sigma_A}\, \sigma_p$$

6. REFERENCIAS

Amihud, Y., Christensen, B. y Mendelson, H. (1992). *Further Evidence on the Risk-Return Relationship.* Standford: Standfor University.

Baesel, J.B. (1974). On the Assesment of Risk: Some Further Considerations. *The Journal of Finance*, *29*(5), 1491-1494.

Berger, D. (2013). Financial turbulence and beta estimation. *Applied Financial Economics, 23*, 251–263.

Bilinski, P. y Lyssimachou, D. (2014). Risk Interpretation of the CAPM's Beta: Evidence from a New Research Method. *Abacus: A Journal of Accounting, Finance and Business Studies, 50*(2), 203-226.

Black, F., Jensen, M. y Scholes, M. (1972). The Capital Asset Pricing Model: Some Empirical Tests. In Jensen, M. *Studies in the Theory of Capital Markets*. Nueva York: Praeger Publishers.

Brooks, C. (2008). *Introductory Econometrics for Finance.* Cambridge: Cambridge University Press.

Brounen, D., De Jong, A. y Koedijk, K. (2004). Corporate Finance in Europe: Confronting Theory with Practice. *Financial Management, 33*(4), 71-101.

Buffett, W. y Connors, J. (2009). *Warren Buffett on Business: Principles from the Sage of Omaha.* Hoboken: John Wiley & Sons.

Carabias, S. (2016). *Introducción a la modelización de mercados financieros.* Madrid: Universidad Pontificia de Comillas.

Chan, L. y Lakonishok, J. (1993). Are the Reports of Beta's Death Premature?. *Journal of Portfolio Management, 19*(4), 51-62.

Cvitanic, J. y Zapatero, F. (2004). *Introduction to the Economics and Mathematics of Financial Markets.* Cambridge: The MIT Press.

Damodaran, A. (2012). *Investment Valuation: Tools and Techniques for Determining the Value of Any Asset.* Hoboken: John Wiley & Sons.

Damodaran, A., Garvey, M. y Roggi, O. (2012). *Risk Taking: A Corporate Governance Perspective.* Washington: International Finance Corporation.

Deb, S.G. y Mishra, M. (2011). Are Equity Betas Stable? Evidence from Indian Equity Market. *The IUP Journal of Applied Finance, 17*(4), 5-25.

Elton, E. (2004). *Modern Portfolio Theroy and Investment Analysis*. Hoboken: John Wiley & Sons.

Fama, E. y French, K. (1992). The Cross-Section of Expected Stock Returns. *The Journal of Finance, 18*(2), 427-465.

Fama, E. y Macbeth, J.(1973). Risk, Return and Equilibrium: Empirical Tests. *Journal of Political Economy, 81*(3), 607-636.

Fernández, P. (2015). CAPM: an absurd model. *Business Valuation Review, 34*(1), 4-23.

Fernández, A., Fernández, P. y Pershin, V. (2017). *Discount Rate (Risk-Free Rate and Market Risk Premium) used for 41 countries in 2017: a survey*. Madrid: IESE Business School.

Fernández, S. (1998). *Cómo reducir el riesgo de sus inversiones*. Madrid: Inversor Ediciones.

Graham, B. (1959). *The intelligent investor: a book of practical counsel*. New York: Harper.

Graham, J.R., Harvey, C.R. (2001). The theory and practice of corporate finance: evidence from the field. *Journal of Financial Economics, 61*, 187-243.

Hawawini, G. (1983). Why Beta Shifts as the Return Interval Changes. *Financial Analysts Journal, 39*(3), 73-77.

Levy, R.A. (1971). On the Short-Term Stationarity of Beta Coefficients. *Financial Analyst Journal, 27*(6), 55-62.

Lintner, J. (1965). The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets. *The Review of Economics and Statistics, 47*(1), 13-37.

Luenberger, D. (1998). *Investment Science*. Nueva York: Oxford University Press.

Marín, J.M. y Rubio, G. (2001). *Economía Financiera.* Barcelona: Antoni Bosch.

Markowitz, H. (1952). Portfolio Selection. *The Journal of Finance, 7*(1), 77-91.

Raya, S., Savin, E. y Tiwari, A. (2009). Testing the CAPM Revisited. *Journal of Empirical Finance, 16*(5), 721-733.

Mullins, D. (1982). Does the capital asset pricing work?. *Harvard Business Review, January 1982 issue*, 105-114.

Roll, R. (1977). A Critique of the Asset Pricing Theory's Tests. *Journal of Financial Economics, 4,* 129-176.

Sharpe, W. (1964). Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk. *The Journal of Finance*, *19*(6), 425-442.

Singh, R. (2008). Beta Estimation in the Indian Stock Market: Stability, Stationarity and Computational Considerations. *Decisions, 35*(2), 63-85.

Tauseef, S. (2016). Beta Stationarity and Estimation Period: Evidence from Pakistan's Equity Market. *Business Review, 11*(1).

Theobald, M. (1981). Beta Stationarity and Estimation Period: Some Analytical Results. *Journal of Financial and Quantitative Analysis, 16*(5), 747-757.

Tobin, J. (1958). Liquidity Preference as Behavior Towards Risk. *The Review of Economic Studies, 25*(2), 65-86.