



GRADO EN INGENIERÍA EN TECNOLOGÍAS INDUSTRIALES

TRABAJO DE FIN DE GRADO

EVALUACIÓN Y PROPUESTA DE MODELADO PARA LA ESTIMACIÓN DEL VAR Y EL EXPECTED SHORTFALL

BAJO EXPECIFICACIONES DE BASILEA III Y FRTB

Autor: Juan Carlos Herranz Ramos

Director: Eloy Hidalgo Ríos

Madrid
Julio de 2019

AUTORIZACIÓN PARA LA DIGITALIZACIÓN, DEPÓSITO Y DIVULGACIÓN EN RED DE PROYECTOS FIN DE GRADO, FIN DE MÁSTER, TESINAS O MEMORIAS DE BACHILLERATO

1º. Declaración de la autoría y acreditación de la misma.

El autor D. Juan Carlos Herranz Ramos DECLARA ser el titular de los derechos de propiedad intelectual de la obra: *Evaluación y propuesta de modelado para la estimación del VaR y Expected Shortfall*, que ésta es una obra original, y que ostenta la condición de autor en el sentido que otorga la Ley de Propiedad Intelectual.

2º. Objeto y fines de la cesión.

Con el fin de dar la máxima difusión a la obra citada a través del Repositorio institucional de la Universidad, el autor CEDE a la Universidad Pontificia Comillas, de forma gratuita y no exclusiva, por el máximo plazo legal y con ámbito universal, los derechos de digitalización, de archivo, de reproducción, de distribución y de comunicación pública, incluido el derecho de puesta a disposición electrónica, tal y como se describen en la Ley de Propiedad Intelectual. El derecho de transformación se cede a los únicos efectos de lo dispuesto en la letra a) del apartado siguiente.

3º. Condiciones de la cesión y acceso

Sin perjuicio de la titularidad de la obra, que sigue correspondiendo a su autor, la cesión de derechos contemplada en esta licencia habilita para:

- a) Transformarla con el fin de adaptarla a cualquier tecnología que permita incorporarla a internet y hacerla accesible; incorporar metadatos para realizar el registro de la obra e incorporar “marcas de agua” o cualquier otro sistema de seguridad o de protección.
- b) Reproducirla en un soporte digital para su incorporación a una base de datos electrónica, incluyendo el derecho de reproducir y almacenar la obra en servidores, a los efectos de garantizar su seguridad, conservación y preservar el formato.
- c) Comunicarla, por defecto, a través de un archivo institucional abierto, accesible de modo libre y gratuito a través de internet.

- d) Cualquier otra forma de acceso (restringido, embargado, cerrado) deberá solicitarse expresamente y obedecer a causas justificadas.
- e) Asignar por defecto a estos trabajos una licencia Creative Commons.
- f) Asignar por defecto a estos trabajos un HANDLE (URL persistente).

4°. Derechos del autor.

El autor, en tanto que titular de una obra tiene derecho a:

- a) Que la Universidad identifique claramente su nombre como autor de la misma
- b) Comunicar y dar publicidad a la obra en la versión que ceda y en otras posteriores a través de cualquier medio.
- c) Solicitar la retirada de la obra del repositorio por causa justificada.
- d) Recibir notificación fehaciente de cualquier reclamación que puedan formular terceras personas en relación con la obra y, en particular, de reclamaciones relativas a los derechos de propiedad intelectual sobre ella.

5°. Deberes del autor.

El autor se compromete a:

- a) Garantizar que el compromiso que adquiere mediante el presente escrito no infringe ningún derecho de terceros, ya sean de propiedad industrial, intelectual o cualquier otro.
- b) Garantizar que el contenido de las obras no atenta contra los derechos al honor, a la intimidad y a la imagen de terceros.
- c) Asumir toda reclamación o responsabilidad, incluyendo las indemnizaciones por daños, que pudieran ejercitarse contra la Universidad por terceros que vieran infringidos sus derechos e intereses a causa de la cesión.
- d) Asumir la responsabilidad en el caso de que las instituciones fueran condenadas por infracción de derechos derivada de las obras objeto de la cesión.

6°. Fines y funcionamiento del Repositorio Institucional.

La obra se pondrá a disposición de los usuarios para que hagan de ella un uso justo y respetuoso con los derechos del autor, según lo permitido por la legislación aplicable, y con fines de estudio, investigación, o cualquier otro fin lícito. Con dicha finalidad, la Universidad asume los siguientes deberes y se reserva las siguientes facultades:

- La Universidad informará a los usuarios del archivo sobre los usos permitidos, y no garantiza ni asume responsabilidad alguna por otras formas en que los usuarios hagan un uso posterior de las obras no conforme con la legislación vigente. El uso posterior, más allá de la copia privada, requerirá que se cite la fuente y se reconozca la autoría, que no se obtenga beneficio comercial, y que no se realicen obras derivadas.
- La Universidad no revisará el contenido de las obras, que en todo caso permanecerá bajo la responsabilidad exclusiva del autor y no estará obligada a ejercitar acciones legales en nombre del autor en el supuesto de infracciones a derechos de propiedad intelectual derivados del depósito y archivo de las obras. El autor renuncia a cualquier reclamación frente a la Universidad por las formas no ajustadas a la legislación vigente en que los usuarios hagan uso de las obras.
- La Universidad adoptará las medidas necesarias para la preservación de la obra en un futuro.
- La Universidad se reserva la facultad de retirar la obra, previa notificación al autor, en supuestos suficientemente justificados, o en caso de reclamaciones de terceros.

ACEPTA

En Madrid, a 19 de julio de 2019

A handwritten signature in black ink, consisting of several loops and a long horizontal stroke at the end.

Fdo. Juan Carlos Herranz Ramos

Declaración

Declaro, bajo mi responsabilidad, que el Proyecto presentado con el título *Evaluación y propuesta de modelado para la estimación del VaR y Expected Shortfall* en la ETS de Ingeniería - ICAI de la Universidad Pontificia Comillas en el curso académico 2018-2019 es de mi autoría, original e inédito y no ha sido presentado con anterioridad a otros efectos. El Proyecto no es plagio de otro, ni total ni parcialmente y la información que ha sido tomada de otros documentos está debidamente referenciada.



Fdo. Juan Carlos Herranz Ramos

Fecha: 19/07/2019

Autorizada la entrega del proyecto
EL DIRECTOR DEL PROYECTO



Fdo. Eloy Hidalgo Ríos

Fecha: 19/07/2019

Resumen

Evaluación y propuesta de modelado para la estimación del VaR y Expected Shortfall

Autor: Juan Carlos Herranz Ramos

Director: Eloy Hidalgo Ríos

Resumen:

Contexto: Desde la crisis económica mundial del 2007 ha habido un incremento en la complejidad y cantidad de regulaciones destinadas al control de las actividades bancarias. El área de riesgo de mercado con sus métricas tradicionales han sufrido este hecho con particular intensidad con las reformas presentadas en Basilea III y la FRTB. Este trabajo plantea el modelado alternativo de las distribuciones de pérdidas y ganancias con distribuciones generalizadas de Pareto.

Resultados: Este enfoque mejora el desempeño con respecto a los enfoques paramétricos tradicionales mientras que parece no aportar diferencias significativas con respecto a enfoques sin distribución estimada subyacente. Los resultados obtenidos sugieren la dirección de abandonar intentos de modelado de mayor complejidad para buscar soluciones más robustas en la exposición.

Conclusiones: Es preferible tener mecanismos más sencillos y robustos como cambiar las distribuciones subyacentes de riesgo que intentar mejorar el desempeño de la gestión de riesgos de instituciones financieras mediante el aumento de las regulaciones y la complejidad de las mismas.

Abstract:

Context: Since the world economic crisis which initiated back in the year 2007, there has been many changes regarding the quantity and complexity of the regulations directed towards the banking industry. Risk management metrics and institutions have suffered this fact with special intensity through reforms presented at Basel III in documents such as the FRTB. This work develops a new approach to the modelling of P&L distributions through the use of generalized Pareto distributions.

Results: The new approach presents a better performance with respect to all the parametric approaches which have been put to test while not presenting significant differences with respect to approaches which do not need to assume an underlying distribution. The results obtained suggest that more robust solutions are preferable to attempts that try to capture more information by adding complexity to traditionally used distributions.

Conclusions: Simpler mechanisms offer better and more robust results by changing underlying distributions for financial returns. This approach shows that the growth in complexity of the regulations does not always provide better results.

Dedicatoria

A mis padres y abuelos.

Agradecimientos

A mi director y jefe durante las prácticas Eloy Hidalgo Ríos por su paciencia en el desarrollo de este trabajo que me ha permitido desarrollarlo con detalle, a mi coordinadora Sara Lumbreras Sancho por su profundo interés en la temática de mi trabajo que me ha dado energías para hacerlo y a todos aquellos amigos a los que haya aburrido contándoles de que iba. También a Gonzalo Antón por su ayuda en los primeros brotes del trabajo y por su supervisión durante mis prácticas en las que aprendí gran parte de lo que aquí he querido plasmar. Por último a Fernando, Elena, Pablo, Alejandro, Gonzalo, Luis y tantos otros amigos y compañeros que han hecho de mi paso por el ICAI un camino más agradable.

Índice general

1. Introducción	23
1.1. Una visión panorámica	23
1.2. Value at Risk y Expected Shortfall	24
1.2.1. Definición del Value-at-Risk	25
1.2.2. Un inconveniente del VaR	25
1.2.3. Expected Shortfall	26
1.2.4. Medidas de riesgo coherentes	27
1.3. Propiedades adicionales o derivadas	28
1.3.1. Convexidad	28
1.3.2. Elicitabilidad	29
1.3.3. Robustez	30
1.3.4. Medidas de riesgo con espectro exponencial	31
1.4. Elección de parámetros para VaR y ES	32
1.4.1. El horizonte temporal	32
1.4.2. Impacto de la auto-correlación	33
1.4.3. Suposiciones habituales para la distribución de retornos	34
2. Teoría	37
2.1. El riesgo de cola	37
2.2. Dos tipos de convergencia	38
2.3. Teorema Central del Límite	38
2.3.1. Convergencia de la distribución uniforme	39
2.3.2. Convergencia de las distribuciones Exponencial, Weibull y Gamma	39
2.3.3. Ley de los grandes números	44
2.4. Correlación	47
2.5. Resultados de Gnedenko	48
2.5.1. Estimación de los parámetros	49
2.5.2. Cálculo del VaR y el ES	50
2.6. Propiedades heredadas	50

3. Fundamental Review of the Trading Book	53
3.1. Marcos antiguos	53
3.1.1. Basilea I	53
3.1.2. Basilea II.5	54
3.1.3. Basilea III y FRTB	54
3.2. Enfoque estandarizado	55
3.3. ES en FRTB	56
4. Métodos	59
4.1. Simulaciones históricas y paramétricas	59
4.1.1. Método Normal	59
4.1.2. Método de simulación histórica	62
4.1.3. Método de EWMA	62
4.1.4. Método de GPD	63
4.2. Backtesting del VaR	63
4.2.1. Tests genéricos	63
4.2.2. Tests de Kupiec	66
4.2.3. Tests de Christoffersen	67
4.2.4. Tests de Haas	69
4.3. Backtesting de ES	70
4.3.1. Pruebas de Acerbi-Szekely	70
4.3.2. Tests de simulación paramétrica	71
5. Análisis empírico	73
5.1. Análisis preliminar	73
5.2. Portfolio	74
5.2.1. Medidas de dispersión y relación	74
5.3. Ponderación de los retornos	78
5.3.1. Mediante optimización de portfolio	78
5.3.2. Ponderación aleatoria	78
5.4. Retornos	80
5.4.1. Modelado de los retornos con distribución de Laplace	80
5.4.2. Modelado con Pareto	83
5.5. Backtesting	84
5.5.1. Backtesting VaR	84
5.5.2. Backtesting ES	89
5.6. Regularidades en la repetición con variaciones en los portfolios	92
6. Conclusión	105
6.1. Propósitos y objetivos de la investigación	105
6.2. Conclusiones del trabajo	105

6.3. Implicaciones prácticas	106
6.4. Futuras líneas de investigación	107
Referencias	107
A. Activos del portfolio	111
A.1. Gráficos QQ	111
A.2. Gráficos de cajas	111
A.3. Gráficos de retornos	111

Índice de figuras

1.1. Distribución problemática para el cálculo del VaR.	26
1.2. Comparación del ES con distintas ponderaciones exponenciales .	32
2.7. Simulación de distribución Normal estándar.	46
2.8. Simulación de distribución T con 1 grado de libertad.	46
2.9. Simulación de una distribución de Pareto.	47
2.10. Distribución de la correlación para variables independientes ge- neradas aleatoriamente	48
2.11. La correlación entre las muertes por ahogamiento en piscinas y las apariciones cinematográficas de Nicholas Cage es de 0.66. Fuente https://tylervigen.com/spurious-correlations . . .	49
2.12. Propiedades heredadas de distribuciones.	51
5.1. Retornos logarítmicos del portfolio	74
5.2. Gráfico de cajas de los retornos de cada activo	75
5.3. Detalle de gráficos de cajas del portfolio	76
5.4. Detalle de gráficos QQ del portfolio	77
5.5. Representación gráfica de la matriz de correlaciones	79
5.6. Ponderación del portfolio correspondiente a la minimización de la volatilidad.	80
5.7. Ponderación aleatoria.	81
5.8. Detalle de retornos del portfolio	81
5.9. Exposición del portfolio y retornos de las acciones.	82
5.10. Exposición del portfolio y retornos de las acciones.	83
5.11. Exposición del portfolio y retornos de las acciones.	84
5.12. Exposición del portfolio y retornos de las acciones.	85
5.13. Laplace vs. Pareto, 1	86
5.14. Laplace vs. Pareto, 2	87
5.15. Laplace vs. Pareto, 3	88
5.16. Histograma de los valores extremos con Laplace y Pareto	89
5.17. Gráfico de probabilidad del ajuste de Pareto a la distribución de retornos.	90

5.18. Gráfico de probabilidad acumulada del ajuste de Pareto a la distribución de retornos.	91
5.19. Modelado del VaR con GPD y $\alpha = 95\%$	92
5.20. Modelado del VaR con GPD y $\alpha = 99\%$	93
5.21. Modelado del ES con GPD y $\alpha = 95\%$	94
5.22. Modelado del ES con GPD y $\alpha = 99\%$	94
5.23. Comparación de modelos con $\alpha = 95\%$	95
5.24. Comparación de modelos con $\alpha = 99\%$	95
5.25. Zoom para modelos con $\alpha = 95\%$	96
5.26. Zoom para modelos con $\alpha = 99\%$	96
5.27. Representación del test de independencia del tiempo entre ex- cepciones	97
5.28. Zoom para excepciones con $\alpha = 95\%$	101
5.29. Zoom para excepciones con $\alpha = 99\%$	102
5.30. Gráficos de severidad y excepciones para los distintos modelos .	103
5.31. Comparación del método GPD con el método histórico y $\alpha =$ 97.5%	103
5.32. Comparación del método GPD con el método normal y $\alpha = 97.5\%$	104

Índice de cuadros

1.1. Algunas funciones de puntuación típicas	30
1.2. Propiedades de las medidas de riesgo	31
1.3. Distintos supuestos comunes en la distribución de los retornos	35
3.1. Asignación de horizontes de liquidez a factores de riesgo	55
4.1. Cambios diarios en variables financieras. Valores en %	60
4.2. Traducción de probabilidades de la tabla 4.1. Normal.	60
4.3. Traducción de probabilidades de la tabla 4.1. Real.	61
4.4. Traducción de probabilidades de la tabla 4.1. Laplace.	61
4.5. Traducción de probabilidades de la tabla 4.1. Pareto.	61
4.6. Incrementos establecidos por el test del semáforo	64
5.1. Métricas de dispersión y simetría. Valores en %	77
5.2. Test de normalidad Baringhaus-Henze	78
5.3. Métricas de ajuste entrópicas	86
5.4. Total de excepciones.	97
5.5. Resultados del test del semáforo	97
5.6. Resultados del test del binomial.	98
5.7. Resultados del test de proporción de excepciones.	98
5.8. Resultados de tiempo hasta primera excepción.	99
5.9. Resultados del test de independencia de la cobertura condicional	99
5.10. Resultados del test mixto de cobertura condicional.	100
5.11. Resultados del test de independencia del tiempo entre excepciones	100
5.12. Resultados del test mixto de tiempo entre excepciones	101
5.13. Resultados de severidad del ES	102
5.14. Resultados del test incondicional Normal	102
5.15. Resultados del test incondicional T	104

Capítulo 1

Introducción

Cuando RiskMetrics anunció como su medida estándar para el cálculo del riesgo sería el *Value-at-Risk* en 1996, sentó las bases para las instituciones dedicadas a la gestión de riesgos y la medida fue rápidamente adoptada por el Comité de Basilea. Para 1998, distintos investigadores comenzaron a criticar el *Value-at-Risk* como medida de riesgo debido a sus deficiencias estructurales desde el punto de vista de sus propiedades, considerando que debía de ser sustituida por una medida de riesgo coherente. En 2001 se propuso una alternativa llamada *Expected Shortfall*. Los encargados de gestionar los riesgos de muchas instituciones financieras lo adoptaron en paralelo con el *Value-at-Risk*, resaltando el hecho de que el ES podía captar mejor el riesgo de cola y ofrecía propiedades matemáticas más atractivas a la hora de agregar portafolios. Hasta recientemente, el *Value-at-Risk* era la medida exigida por los reguladores. Sin embargo, para octubre del año 2013, tras varias pugnas con distintos bancos, el Comité de Basilea para la Supervisión Bancaria (BCBS por sus siglas en inglés) propuso una reestructuración desde la base de sus reglas para el *banking trading book* intentando que con esta reforma se pudiera capturar los tipos de pérdidas que cabe esperar en períodos de especial estrés financiero. Una parte de dichas reformas consistía en sustituir el mencionado *Value-at-Risk* por el *Expected Shortfall*, el cuál, pensaban los reguladores, captaría de manera más fehaciente las pérdidas extremas que ocurren durante períodos de perturbaciones sistémicas. Además, también se propusieron distintas formas de alterar dichas medidas con cambios en los niveles de confianza, horizontes de liquidez o variaciones contra otros factores de riesgo.

1.1. Una visión panorámica

Teniendo en cuenta esta situación, este trabajo se plantea como un estudio que permita presentar una visión que complementa de forma adecuada los cambios regulatorios que se producirán en los años próximos, con las conse-

cuencias y las premisas que eso conlleva asumir, fundamentalmente, a nivel técnico, tanto desde el punto de vista de una nueva forma de interpretación de los resultados como desde la perspectiva de la modelización matemática para la obtención de dichos resultados, comprobando como responden las distribuciones de retornos financieros a su modelado con distribuciones alternativas a las consideradas convencionalmente y evaluando si esto supone una mejora considerable con respecto a los modelos utilizados actualmente.

En cuanto a la estructura del estudio, un primer lugar, se introducirán las definiciones de las medidas de riesgo comunes, su propiedades más relevantes y algunas de las suposiciones más comunes establecidas para el modelado de los retornos financieros. Posteriormente, se establecen una serie de puntos de apoyo teóricos que, aunque no volverán a aparecer de manera explícita en el resto del trabajo, son la base sobre la que pivotan el resto de conceptos y resultados. Estos puntos de apoyo son, fundamentalmente, el teorema central del límite, la ley de los grandes números y los resultados establecidos para las colas de distribuciones por [Gnedenko \(1943\)](#). En tercer lugar, se realizará una revisión de los métodos que servirán como referencia y la propuesta del método original basado en la Distribución Generalizada de Pareto (en adelante GPD por sus siglas en inglés) sobre el que gira todo este trabajo. Se expondrán también, de manera ordenada, los distintos test y pruebas que serán utilizados para valorar el desempeño relativo del método propuesto con respecto a otros métodos utilizados habitualmente. Tras la exposición de dichos métodos, nos hallaremos en disposición de obtener resultados numéricos y gráficos en forma de tablas y figuras. Se procederá a comentar cada uno de ellos de forma minuciosa haciendo referencia a la exposición de los métodos mencionada anteriormente. Finalizando el trabajo, se expondrán las conclusiones más relevantes extraídas del trabajo, contrastándolas con los objetivos de la investigación, estableciendo algunas posibles implicaciones prácticas y proponiendo algunas posibles líneas de investigación futuras que pueden complementar los desarrollos.

1.2. Value at Risk y Expected Shortfall

Es habitual que el porfolio de una institución financiera dependa de un número elevado¹ de variables de mercado. Las medidas que evalúan el riesgo asociado a instrumentos como los tipos de interés, índices bursátiles de acciones o cotizaciones de materias primas pueden ser de gran utilidad para los traders que trabajan de manera específica y especializada en diversos ámbitos de los mercados financieros. Sin embargo, estas medidas de riesgo específicas no son de utilidad para los gestores que se encuentran en posiciones más altas de la

¹Del orden de los miles o millones.

jerarquía de los bancos o para los reguladores de las instituciones financieras, dado que estos necesitan una medida que represente el riesgo general al que está sometida la institución de forma agregada, no pudiendo entrar en las especificidades de los portafolios, lo que supondría una tarea imposible desde un punto de vista práctico. El *Value-at-Risk* (en adelante VaR) y el *Expected Shortfall* (en adelante ES), representan un intento de proporcionar, en una sola medida, el riesgo al que está expuesto una determinada institución o, de forma más genérica, un determinado portafolio.

1.2.1. Definición del Value-at-Risk

El VaR puede calcularse con la distribución de pérdidas o con la distribución de ganancias² y es, simplemente, el valor de un determinado cuantil especificado mediante un nivel de confianza preestablecido:

$$VaR_{\alpha,t} = \inf \{r_t | H_{t+1}(r_t) \geq \alpha\} = q_{\alpha}(r_t) \quad (1.1)$$

donde H_t es la distribución con la que se modelan los retornos que siguen una distribución «real» F_t (que no puede conocerse). En nuestro caso, consideraremos la distribución de pérdidas, de manera que se trabajará siempre con cantidades positivas. Con esta definición, el VaR, podría considerarse como *la cantidad de dinero que puedo perder en un período T con una seguridad α* ³.

1.2.2. Un inconveniente del VaR

Es claro que el éxito del VaR reside, entre otros factores, en su sencillez y facilidad de comprensión. Al fin y al cabo, el VaR, es simplemente la respuesta a la pregunta: ¿Cómo de mal puede ir? Sin embargo, cuando el VaR se utiliza para regular los riesgos a los que puede someterse un agente económico, pueden llegarse a resultados indeseables por la forma que tiene de establecer incentivos. Supóngase, por ejemplo, que un regulador estipula el VaR de un banco a su cargo en 5 millones de euros, para un día, con un nivel de confianza del 95 %. Dicho banco puede construir un portafolio con un 95.1 % de probabilidades de que las pérdidas diarias no excedan los 5 millones de euros y que, sin embargo, tenga un 4,9 % de probabilidades de perder 500 millones de euros. De esta manera el banco está cumpliendo con los requisitos impuestos por el regulador pero, al mismo tiempo, está asumiendo riesgos desproporcionados desde un punto de vista de la prudencia financiera. Aunque esta distribución puede parecer inusual, en la práctica, muchas estrategias de trading proporcionan una alta probabilidad de obtener buenas ganancias con una pequeña

²En cuyo caso las pérdidas se representan como ganancias negativas

³Para un estudio extenso de la medida puede consultarse [Alexander \(2009\)](#)

probabilidad de sufrir una enorme pérdida ⁴ (esta distribución se representa, esquemáticamente en la figura 1.1). Evidentemente existen incentivos para tratar de cumplir las regulaciones de riesgos mientras se trata de maximizar las posibilidades de obtener grandes ganancias lo que, en la mayoría de las ocasiones, supone someterse a grandes riesgos.

Distribución problemática para el VaR

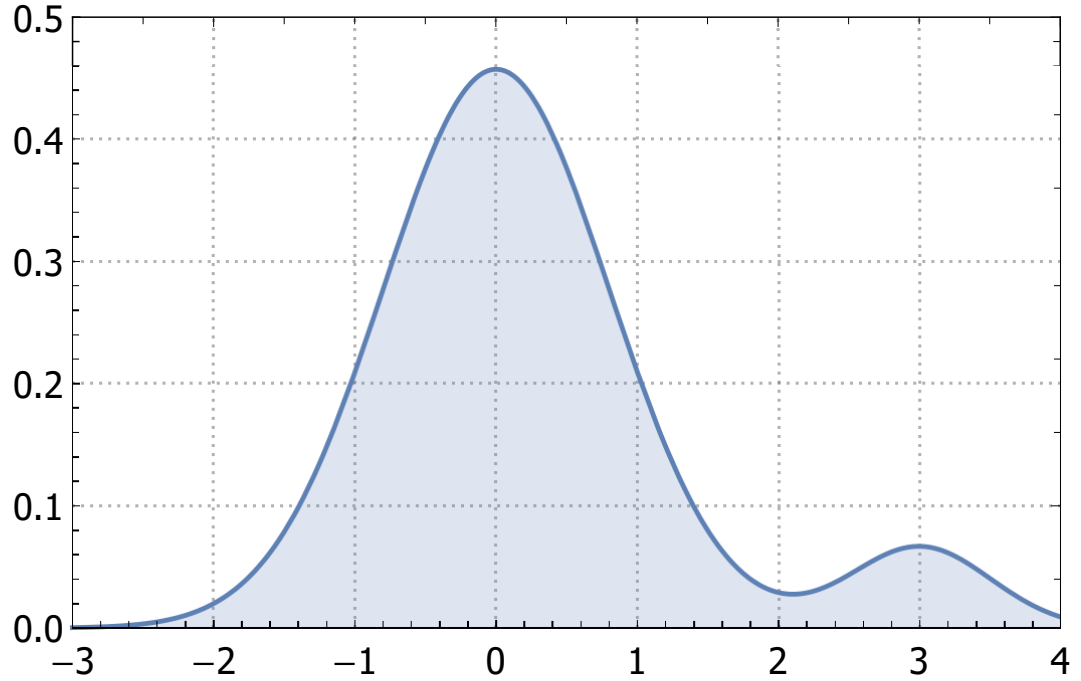


Figura 1.1: Distribución problemática para el cálculo del VaR.

1.2.3. Expected Shortfall

Una medida de riesgo que genera unos mejores incentivos es el ES, también conocido como *conditional VaR (CVaR)*, *conditional tail expectation (CTE)* o *expected tail loss (ETL)*. El ES responde a la pregunta condicionada: Si las cosas van mal, ¿cuánto se espera perder? Entendiendo esta pregunta, la definición del ES no es otra cosa que la esperanza de la distribución de estudio a partir del VaR que hemos definido previamente o, lo que es lo mismo, la integral desde el percentil establecido para el VaR hasta el final de la distribución dividida entre el tamaño de dicha región:

$$ES_{\alpha,t} = \frac{1}{\bar{\alpha}} \int_{\alpha}^1 H_t^{-1}(x) dx = \mathbb{E}[r_t | r_t > VaR_{\alpha,t}] \quad (1.2)$$

⁴Como escribir opciones *out-of-the-money*

donde H_t es la distribución con la que se modelan los retornos que siguen una distribución «real» F_t (que no puede conocerse). Establecer el ES como medida de riesgo a nivel regulatorio limita la posibilidad de buscar establecer una posición como la mencionada anteriormente. Además, el ES tiene mejores propiedades que el ES como medida de riesgo puesto que siempre reconoce el beneficio de tener una posición con mayor diversificación. Como contrapartida, es una medida más compleja de tratar a la hora de comparar el desempeño de distintos modelos, debido a una propiedad que expondremos a continuación.

1.2.4. Medidas de riesgo coherentes

El riesgo puede medirse en términos de distribuciones de probabilidad. Sin embargo, en ocasiones, es de gran utilidad expresar el riesgo con una cifra que represente una cantidad determinada de capital. Las herramientas que nos permiten pasar de distribuciones de probabilidad de variables aleatorias o distribuciones de pérdidas a dichas cantidades de capital es lo que llamamos *medidas de riesgo*. Para establecer a que nos referimos con estas medidas, necesitamos definir un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ donde Ω es el conjunto de estados del campo de trabajo, $\mathcal{F}$ es la clase de sucesos aleatorios que es un σ -álgebra sobre Ω y P es una medida de probabilidad tal que: $P : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R} \in [0, 1]$. Si consideramos, específicamente, el conjunto de los estados financieros de pérdidas y ganancias tenemos que una medida de riesgo es una función que otorga a cada estado un valor de pérdida o ganancia: $\mathcal{R} : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ (Halmos, 2013).

Supongamos que queremos diseñar una medida de riesgo que nos proporcione la cantidad de capital que una institución debe mantener. Artzner et al. (1999) describen en su artículo las propiedades, de las que se derivan condiciones, que debería tener dicha medida:

1. Monotonía: $\Sigma_1 \leq \Sigma_2 \rightarrow \mathcal{R}(\Sigma_1) \leq \mathcal{R}(\Sigma_2)$

- Portfolios más pequeños siempre tienen un riesgo menor o igual que un portfolio más grande. El riesgo mayor que puede tener un portfolio es perderlo todo. Perder todo un portfolio menor siempre será mejor o igual que perder un portfolio mayor de forma parcial.

2. Invarianza traslacional: $\mathcal{R}(\Sigma + \Delta) = \mathcal{R}(\Sigma) - \Delta$

- Añadir una cantidad de capital *segura*⁵ a un portfolio reduce la cantidad de capital que se pierde en esa misma cantidad.

⁵ $\mathcal{R}(\Delta) = 0$

3. Homogeneidad (positiva): $\mathcal{R}(\lambda\Sigma) = \lambda\mathcal{R}(\Sigma)$ ⁶

- Duplicar el tamaño de un portafolio duplica su riesgo.

4. Subaditividad: $\mathcal{R}(\Sigma_1, \Sigma_2) \leq \mathcal{R}(\Sigma_1) + \mathcal{R}(\Sigma_2)$

- Portafolios desagregados siempre tienen un riesgo menor o igual que un portafolio agregado. Esta propiedad favorece la diversificación. La igualdad de esta desigualdad se da cuando la correlación entre ambos portafolios es exactamente igual a uno.

El VaR siempre satisface las tres primeras propiedades, pero no siempre satisface la cuarta. Las medidas de riesgo que satisfacen las cuatro condiciones se denominan *coherentes*. El ES siempre es coherente. La condición de subaditividad no es una condición de interés puramente teórico (como no lo son el resto). Hay ocasiones en las que los bancos observan que al combinar dos de sus portafolios el VaR aumenta. A la hora de comparar las consecuencias de elegir entre el VaR y el ES para medir los beneficios de la diversificación es cuando realmente puede verse la limitación del VaR como medida de riesgo. En [Bürgi et al. \(2008\)](#) se muestra como puede estimarse de forma cuantitativa el efecto que tiene la diversificación sobre un determinado portafolio mediante el cálculo de un *diversification benefit index* (DBI) que tiene en cuenta las variaciones de las medidas de riesgo con respecto a sus diversos componentes. Cualitativamente, puede entenderse de manera muy sencilla que para portafolios con posiciones perfectamente correlacionadas, el índice de diversificación es del 100 %⁷ (cuando ambas posiciones bajan, se pierde por las dos). En cambio, si dos portafolios tienen posiciones correlacionadas perfectamente, pero con signo negativo, todo lo que se pierda en uno de los portafolios se ganará en el otro siendo la pérdida neta igual a cero.

1.3. Propiedades adicionales o derivadas

1.3.1. Convexidad

En muchas situaciones ⁸, el riesgo de una determinada posición global de un agente económico, aumenta de forma no lineal con el tamaño del portafolio. Este

⁶Para el caso de $\lambda = 0$ tenemos la condición de *normalización*: $\mathcal{R}(0) = 0$, que equivale a la afirmación trivial de que un portafolio vacío no tiene riesgo

⁷Lo que quiere decir que se obtiene un beneficio máximo al diversificar

⁸Como cuando la posición financiera incluye derivados financieros con valor dependiente del tiempo.

hecho puede llevar a la relajación de las condiciones de subaditividad y homogeneidad anteriormente descritas requiriendo la definición de otra propiedad conocida como *convexidad*. Una medida de riesgo $\mathcal{R}(\cdot)$ es convexa si:

$$\mathcal{R}(\lambda \Sigma_1 + (1 - \lambda) \Sigma_2) \leq \lambda \mathcal{R}(\Sigma_1) + (1 - \lambda) \mathcal{R}(\Sigma_2)$$

lo que se conoce como *desigualdad de Jensen*⁹. La convexidad de una medida indica los beneficios de la diversificación: la diversificación de un porfolio siempre mejorará su medida de riesgo o se mantendrá igual, pero nunca peor. Si una medida de riesgo convexa además cumple la propiedad de homogeneidad se dice que dicha medida es coherente. El conjunto de medidas coherentes, por tanto, es un subconjunto de las medidas convexas. La condición de convexidad bajo homogeneidad positiva es equivalente a la propiedad de subaditividad (Foellmer and Schied, 2002).

1.3.2. Elicitabilidad

Una función de puntuación (o función de *scoring* en inglés) es una función que asigna a cada predicción puntual¹⁰ un valor numérico que indica la idoneidad de una determinada predicción:

$$S : (x, y) \mapsto [0, \infty)$$

donde x es la predicción e y es el punto observado.

Entonces, tenemos que si $\nu(F)$ es un determinado estadístico¹¹ de una distribución de probabilidad F , una función de puntuación S es *consistente* para dicho estadístico si:

$$\mathbb{E}_F[S(t, y)] \leq \mathbb{E}_F[S(x, y)]$$

cuando $t = \nu(F)$ y es estrictamente consistente si:

$$\mathbb{E}_F[S(t, y)] = \mathbb{E}_F[S(x, y)] \Leftrightarrow x = \nu(F)$$

Una medida *elicitable* es aquella para la que existe una función de puntuación estrictamente consistente (Fissler and Ziegel, 2016)¹². La elicitabilidad, como propiedad de las funciones de puntuación, es un criterio fundamental a

⁹Para las consecuencias de la convexidad en ámbitos financieros y otros véase Taleb (2018).

¹⁰Su definición estricta es más genérica, pero nos atendremos al caso de interés para nuestro estudio. En Gneiting (2009) puede verse su definición y explicación extensa con aplicación a distintos estadísticos relevantes a la hora de evaluar predicciones.

¹¹También llamado *funcional* (Gneiting, 2009) como puede ser la media, la mediana, etc.

¹²Por ejemplo, la función de puntuación del error cuadrático $S(x, y) = (x - y)^2$, es consistente, pero no estrictamente consistente para la media, relativa a la clase de distribuciones

Cuadro 1.1: Algunas funciones de puntuación típicas

Funciones	Nombre	$\nu(F)$ óptimo
$S(x, y) = (x - y)^2$	Error cuadrático	Media
$S(x, y) = x - y $	Error absoluto	Mediana
$S(x, y) = (x - y) / y $	Porcentaje de error absoluto	$\beta - \text{mediana}^{(1)13}$
$S(x, y) = (x - y) / x $	Error relativo	$\beta - \text{mediana}^{(-1)}$
$S(x, y) = (\mathbb{1}_{(x > y)} - \alpha)(x - y)$	Error cuantílico	VaR_α

Elaboración propia basada en Gneiting (2009)

la hora de establecer predicciones óptimas puesto que el conjunto de funciones estrictamente consistentes para un determinado funcional es el conjunto de funciones bajo las cuales dicho funcional es un predictor puntual óptimo. De esta manera, si somos capaces de encontrar una función de puntuación estrictamente consistente para el funcional ν , podremos determinar la predicción óptima bayesiana $\hat{x}$ para $\nu(F)$ (Emmer et al., 2013) con $Y \sim F$ mediante:

$$\hat{x} = \arg \min_x \mathbb{E}_F [S(x, Y)]$$

es decir, un estadístico es elicitable si minimiza *su* función de puntuación.

Esta propiedad es de gran interés por cuanto provoca dificultades a la hora de seleccionar modelos, aunque no a la hora de realizar el *backtesting* como explican Acerbi and Szekely (2014). Esta es una discusión que no es objeto del presente trabajo por lo que aquí nos limitaremos a usar, cuando correspondan, las pruebas elaboradas en Acerbi and Szekely (2014) como método para calificar la idoneidad de nuestro modelo en lo que respecta al desempeño en la estimación del ES.

1.3.3. Robustez

La robustez es otra propiedad deseable en las medidas de riesgo. Una forma común de evaluar la robustez de una medida de riesgo es comprobar la continuidad con respecto a la topología débil pero, como la mayoría de medidas relevantes de riesgo no son continuas con respecto a dicha topología, se establece un criterio más fuerte de convergencia según la *distancia de Was-*

con primer momento finito mientras que es estrictamente consistente para la clase de distribuciones de probabilidad con segundo momento finito.

¹³La función $\beta - \text{mediana}$ se define en Gneiting (2009). No es fundamental para el desarrollo del texto.

Cuadro 1.2: Propiedades de las medidas de riesgo

Propiedades	Medidas		
	VaR	ES	Varianza
Coherencia		✓	
Convexidad		✓	✓
Aditividad comonótona	✓	✓	
Espectral		✓	
Robustez débil	✓		
Robustez de Wasserstein	✓	✓	✓
Elicitabilidad	✓		

serstein (Emmer et al., 2013). De forma cualitativa¹⁴, la ausencia de robustez supone que pequeños errores de medición o estimación en la distribución de pérdidas tienen un impacto sobredimensionado a la hora de estimar o calcular la medida de riesgo correspondiente.

1.3.4. Medidas de riesgo con espectro exponencial

Una de las formas en las que puede caracterizarse una medida de riesgo es considerar cómo asigna las ponderaciones de los distintos percentiles¹⁵ de una distribución de probabilidad. El VaR, por ejemplo, asigna una ponderación del 100% al percentil α y 0% al resto. En cambio, el ES, otorga la misma ponderación a todos los percentiles por encima del VaR y una ponderación nula al resto de percentiles. Un resultado general establece que una medida es coherente (i.e., satisface la condición de subaditividad) si la ponderación otorgada al percentil α es una función no decreciente de α . El VaR no satisface esa condición puesto que asigna un peso menor a los percentiles mayores que α que el peso que asigna al percentil α mientras que el ES si cumple la condición¹⁶. Algunos investigadores (Acerbi, 2002) han propuesto medidas cuya ponderación de los percentiles α crece relativamente rápido con α , por ejemplo, haciendo la ponderación correspondiente al percentil α proporcional a $e^{-(1-\alpha)/\gamma}$ donde γ es una constante. Estas medidas se conocen como *medidas de riesgo con espectro exponencial*, siendo el espectro la ponderación asignada a cada percentil de la distribución de pérdidas. Estas medidas representan una

¹⁴Para una descripción más detallada véase Emmer et al. (2013).

¹⁵Más genéricamente cuantiles o fractiles.

¹⁶Es una función no decreciente aunque no es estrictamente creciente.

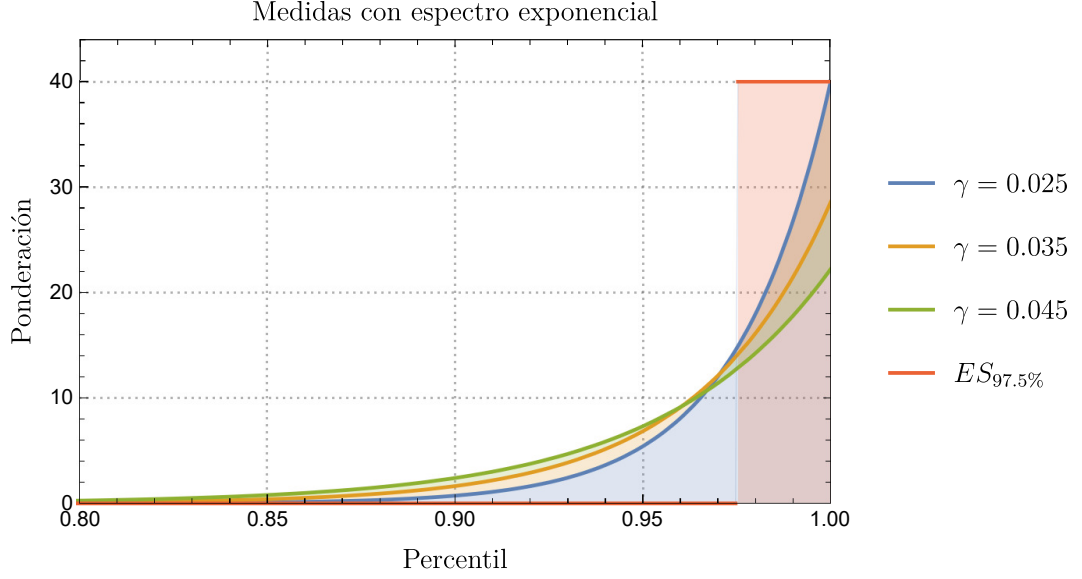


Figura 1.2: Comparación del ES con distintas ponderaciones exponenciales

alternativa más adaptativa y dinámica a la cola de la distribución.

1.4. Elección de parámetros para VaR y ES

Para el VaR y el ES deben elegirse un horizonte temporal y un nivel de confianza determinado. Una hipótesis de trabajo sencilla, que se adopta comúnmente y que nosotros pondremos a prueba, es considerar que la variación del valor de un portafolio a lo largo del tiempo se distribuye de forma Normal. Entonces el VaR se calcula como:

$$VaR = \mu + \sigma N^{-1}(\alpha) \quad (1.3)$$

e, incluso, en períodos de tiempo relativamente cortos la media suele considerarse nula por lo que el VaR es, directamente, una función proporcional a la desviación estándar.

Para el ES hay que calcular:

$$ES = \mu + \sigma \frac{e^{-VaR^2/2}}{\sqrt{2\pi}(1-\alpha)} \quad (1.4)$$

lo que muestra la dependencia que tienen VaR y ES, siempre hay que calcular el primero para obtener el segundo, independientemente de que, después de su obtención, se deseche como medida de riesgo.

1.4.1. El horizonte temporal

La elección del horizonte temporal depende de la aplicación a la que estén dirigidas las medidas de riesgo. Para posiciones muy líquidas y activas en

cuanto a su variación de valor, tiene sentido utilizar horizontes temporales más cortos, lo que permite actualizar las posiciones de los portafolios más rápidamente. En cambio, si se calcula, por ejemplo, para un fondo de pensiones, el horizonte temporal a elegir será considerablemente más largo por tener un nivel de actividad, en términos financieros, mucho menor. La evaluación de la liquidez de determinados activos influye en la definición de los parámetros que se establecen para el cálculo de las medidas de riesgo como se establece en la FRTB (Akkizidis and Kalyvas, 2018). Habitualmente, se comienza haciendo el cálculo del VaR para un día y se realiza la siguiente suposición:

- El VaR de T-días es el VaR de 1-día $\sqrt{T}$ veces
- El ES de T-días es el ES de 1-día $\sqrt{T}$ veces

Estas fórmulas se cumplen cuando los cambios en un determinado portafolio en días sucesivos se distribuyen de forma idéntica e independiente con media cero. En otro caso son aproximaciones ¹⁷. Estas fórmulas se deducen de dos asunciones:

- La suma de distribuciones normales independientes se distribuye de forma normal.
- La desviación estándar de T distribuciones idénticas e independientes es $\sqrt{T}$ veces la desviación estándar de cada distribución.

Por supuesto, son estas suposiciones las que piden el principio. Es decir, en muchas ocasiones lo que se trata es de demostrar, primero, que las distribuciones con las que se trabaja sean normales.

1.4.2. Impacto de la auto-correlación

En la práctica, los cambios en el valor de un portafolio de un día a otro no son completamente independientes. Sea r_t el cambio del valor del portafolio en un día t , una suposición simple de auto-correlación de primer orden puede ser asumir que la correlación entre r_t y r_{t-1} es $\rho \forall t$. Utilizando la fórmula habitual de la varianza de la suma de dos variables, la varianza de $r_t + r_{t-1}$ es:

$$\sigma^2 + \sigma^2 + 2\rho\sigma^2 = 2(1 + \rho)\sigma^2$$

La correlación entre r_t y r_{t-i} es ρ^i (Hull, 2018). Extendiendo este análisis a la desviación estándar de $\sum_t^T r_t$:

$$\sigma \sqrt{T + 2(T-1)\rho + 2(T-2)\rho^2 + \dots + 2\rho^{T-1}}$$

¹⁷Veremos veremos cómo de buenas.

No considerar el impacto de la auto-correlación tiende a subestimar tanto el VaR como el ES (Hull, 2018). Veremos, en la comparación del método Normal y el método EWMA que considerar la auto-correlación puede ser un arma de doble filo por cuanto, en ocasiones, resulta más prudente «recordar» la relación con situaciones más lejanas de estrés financiero mientras que, algunos métodos heterocedásticos como el EWMA basado en GARCH (1.3) tienden a desconsiderar la influencia de los cambios a medida que se alejan en el tiempo.

1.4.3. Suposiciones habituales para la distribución de retornos

Entre los supuestos habituales que se utilizan para el modelado de los retornos están, fundamentalmente los que se mencionan en la tabla 1.3. Nosotros no utilizaremos ninguna de esas suposiciones para nuestro método propuesto, pero sí que las consideraremos a la hora de modelar con métodos como el Normal o el EWMA. En realidad, el método EWMA no es más que un caso específico del modelado de la volatilidad por medio del método GARCH(1,1).

¹⁸Donde $g(Z_t) = \theta Z_t + \lambda(|Z_t| - E(|Z_t|))$ si $\varepsilon_{t-1} \geq 0$ e $I_{t-1} = 1$ si $\varepsilon_{t-1} < 0$

¹⁹Donde $I_{t-1} = 0$ si $\varepsilon_{t-1} \geq 0$ e $I_{t-1} = 1$ si $\varepsilon_{t-1} < 0$

Cuadro 1.3: Distintos supuestos comunes en la distribución de los retornos

Supuesto	Descripción
$r_t = \varepsilon_t$ $\varepsilon_t \sim N(\mu, \sigma^2)$	Los retornos siguen una distribución normal, son independientes e idénticamente distribuidos y tienen volatilidad constante
$r_t = a_0 + a_1 r_{t-1} + \varepsilon_t$ $\varepsilon_t \sim N(\mu, \sigma^2)$	Los retornos siguen un modelo autoregresivo de primer orden con innovaciones normales, independientes, idénticamente distribuidas homocedásticamente.
$r_t = a_0 + a_1 r_{t-1} + \varepsilon_t$ $\varepsilon_t \sim N(\mu = 0, \sigma_t^2)$ $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$	Los retornos siguen un modelo autoregresivo de primer orden con innovaciones normales, independientes, idénticamente distribuidas y con heterocedasticidad simétrica o volatilidad GARCH(1,1).
$r_t = a_0 + a_1 r_{t-1} + \varepsilon_t$ $\varepsilon_t \sim N(\mu = 0, \sigma_t^2)$ $\log \sigma_t^2 = \alpha_0 + \beta_1 g(Z_{t-1}) + \alpha_1 \log \sigma_{t-1}^2$ ¹⁸	Los retornos siguen un modelo autoregresivo de primer orden con innovaciones normales, independientes, idénticamente distribuidas y con heterocedasticidad asimétrica o volatilidad EGARCH(1,1).
$r_t = a_0 + a_1 r_{t-1} + \varepsilon_t$ $\varepsilon_t \sim N(\mu = 0, \sigma_t^2)$ $\sigma_t^2 = K + \delta \sigma_{t-1}^2 + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \phi \varepsilon_{t-1}^2 I_{t-1}$ ¹⁹	Los retornos siguen un modelo autoregresivo de primer orden con innovaciones normales, independientes, idénticamente distribuidas y con heterocedasticidad asimétrica tomando en cuenta el apalancamiento o volatilidad GJR(1,1).

Capítulo 2

Teoría

En este capítulo se muestran, discuten y explican las ideas fundamentales sobre las que se asientan los modelos, conceptos y teorías que se exponen más adelante. La pregunta a la que se tratará de responder es por qué no funciona la distribución Normal para las distribuciones de retornos financieros. A esta pregunta se le dará respuesta a través del teorema central del límite y de la ley de los grandes números. Se realizará un comentario sobre la correlación y su importancia en el cálculo de riesgos, sobre las propiedades de las colas de algunas distribuciones y sobre como heredan ciertas propiedades las distribuciones de probabilidad.

2.1. El riesgo de cola

Tradicionalmente, cuando se trabaja en un marco institucional, los operadores del mercado y los «risk takers» usan principalmente restricciones regulatorias sobre los límites de pérdidas en las colas (algo obligatorio para los bancos desde Basilea III). Se confía en pruebas de estrés financiero, *stop-losses*, *value-at-risk* (VaR), *expected shortfall* (CVaR) o métodos similares de restricción. La información que está implícita en la elección de estas restricciones es, cuando menos, una estadística significativa acerca de la propensión al riesgo y la forma de la distribución que se desea alcanzar. La forma que tiene la cola de una determinada distribución depende, evidentemente, de la distribución que se asuma para la totalidad de los retornos o, para la distribución que se asuma para una determinada «sección» de los mismos. Así, en ocasiones, el estudio de la cola de la distribución de probabilidad es, simplemente, el estudio de la cola de la distribución que se ha elegido de forma general mientras que, en otros casos, el estudio de la cola de la distribución responde a un modelado independiente de la distribución que se elige para los retornos vistos en su totalidad. La elección de unas y otras distribuciones depende, entre otros muchos factores, del tamaño de nuestro portafolio, que se relaciona con el *teorema central*

del límite; de la longitud de las series que estemos estudiando, que tiene conexión con algunas nociones de *convergencia*; de la relación entre las distintas posiciones de nuestro portafolio, donde se utiliza el concepto de *correlación* y de la elección del nivel de confianza, que tiene que ver con la «altura» de la distribución (en cuanto al percentil) que consideramos para nuestras pérdidas, que está en relación con los resultados que obtuvo Gnedenko (1943) en sus estudios sobre las propiedades comunes de las colas de múltiples distribuciones de probabilidad.

2.2. Dos tipos de convergencia

Uno de los motivos fundamentales por los que el modelo Normal y los modelos con colas pesadas¹ se comportan de forma diferente, tienen que ver en gran parte con que la ley de grandes números y el teorema central del límite que, si pueden utilizarse², se comportan de manera muy distinta. Los matemáticos, cuando tratan con la probabilidad, suelen conocer con perfecta exactitud lo que ocurre con las distribuciones de probabilidad cuando el número de observaciones es uno ($n = 1$), es decir, se conoce con precisión la distribución de una única variable aleatoria, o cuando $n = \infty$, es decir, cuando tenemos la suma de infinitas variables aleatorias. El *problema* reside en que nosotros «vivimos nuestro día a día» en un punto intermedio entre ambos extremos. El estudio de este punto intermedio es lo que vamos a llamar *análisis preasintótico* (siguiendo a Taleb (2019)).

2.3. Teorema Central del Límite

En la mayoría de las ocasiones, cuando se habla del teorema central del límite, no se aclara exactamente a qué velocidad nos aproximamos a una distribución Normal. En muchos textos (DeGroot and Schervish, 2012), simplemente se menciona un número aproximado de variables aleatorias para el que puede considerarse que su suma se distribuye de forma Normal³, pero especifi-

¹Las distribuciones con colas pesadas como, por ejemplo, la distribución generalizada de Pareto, asignan un peso (probabilístico) a eventos extremos, mucho mayor que las distribuciones comunes como pueden ser la distribución Uniforme, Exponencial, etc. pero, además de eso, modelan situaciones en las que dichos eventos tienen un impacto especialmente relevante. Para ver el dominio de dichas distribuciones y una definición más rigurosa puede consultarse Taleb (2007).

²Hay ocasiones, como es el caso de la distribución de Cauchy, en los que, directamente, no pueden aplicarse. La distribución de Cauchy no tiene definida la media (Taleb, 2007).

³Esto se debe a que, para la mayoría de distribuciones que se aplican usualmente a campos de la ingeniería, la demografía o la econometría, suele ser suficiente, como veremos

car una velocidad de convergencia es una tarea específicamente diseñada para lo que hemos denominado análisis preasintótico. Aunque el trabajo que hemos citado (Taleb, 2019) se encarga de los desarrollos analíticos para los cálculos de dicha velocidad (o una métrica que la res presente) nosotros realizaremos una simulación de Monte Carlo (con $N = 10\,000$) en la que mostraremos cual es la distribución empírica de la suma de n variables aleatorias distribuidas acorde a distintas distribuciones subyacentes de manera que podamos obtener una idea gráfica de a qué nos referimos cuando hablamos de esta velocidad preasintótica.

2.3.1. Convergencia de la distribución uniforme

Cojamos, por ejemplo, una⁴ distribución uniforme, la distribución con las «colas» (no tiene) más finas. En la figura 2.1 se muestran los resultados de nuestra simulación de Monte Carlo para la que vamos variando el número de variables que se suman en una distribución conjunta. Podemos observar que, cuando tengo dos variables, obtengo una distribución triangular. Si seguimos aumentando, para cuando tenemos $n = 6$, prácticamente tenemos una distribución Normal y cuando llegamos a $n = 20$ obtenemos una aproximación muy precisa. Sumando un número muy pequeño de observaciones, obtengo prácticamente una distribución Normal. En esto es en lo que consiste, básicamente, el teorema central del límite. En resumidas cuentas, las condiciones generales de cumplimiento son dos: tener varianza finita, y ser variables *i.i.d.*⁵ Habitualmente se piensa que si tienes un $n \sim 30$, puedes hablar de convergencia a una distribución Normal. Esto es completamente falso. *Eventualmente, se converge a una distribución Normal, pero a velocidades muy distintas para distintas distribuciones.*

2.3.2. Convergencia de las distribuciones Exponencial, Weibull y Gamma

El caso de la distribución uniforme es un caso excepcional por su rápida convergencia a una distribución Normal. Aún así, el teorema central del límite funciona relativamente bien con la mayoría de las distribuciones que se usan en el ámbito de la ingeniería. Veamos el caso, ahora, de las distribuciones Exponencial, Weibull y Gamma. En primer lugar, podría parecer que,

a continuación.

⁴Para las nociones de convergencia que queremos mostrar no son relevantes los parámetros concretos de las distribuciones sino su estructura: simetría, colas, momentos, etc.

⁵Independientes e idénticamente distribuidas. Siendo estrictos en la definición de las condiciones, la condición de *i.i.d.* no siempre es necesaria aunque siempre es recomendable.

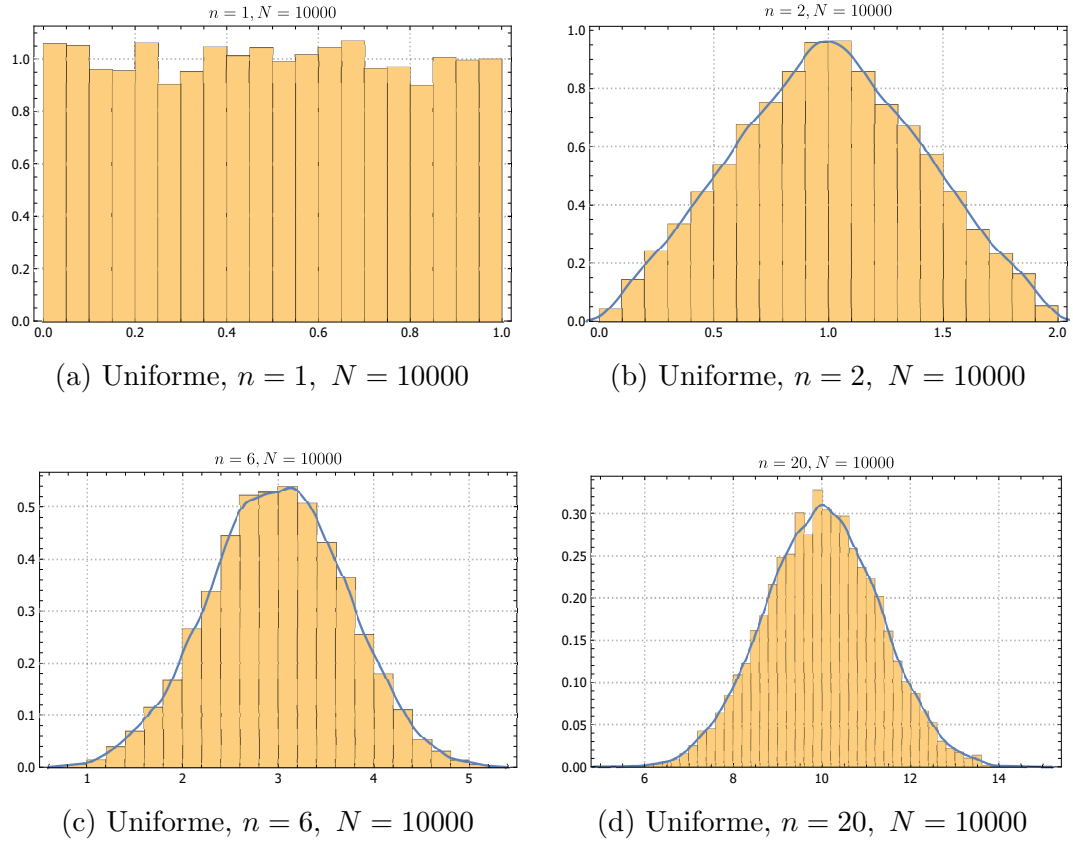


Figura 2.1: Teorema central del límite para el caso Uniforme.

siendo distribuciones completamente asimétricas, puesto que solo tienen una cola cuando se trata una variable, la convergencia a una distribución Normal podría resultar harto complicada. La simulación de Monte Carlo nos muestra que esto no es así. Como podemos observar, para la distribución Exponencial, cuando tenemos un número de variables igual a 20 ($n = 20$) el parecido con la distribución uniforme es muy reseñable salvo, quizás, por una pequeña asimetría. Si nos fijamos en el caso de la distribución de Weibull y la Gamma, vemos que este mismo estado de convergencia se consigue en un punto intermedio entre los dos que se muestran, es decir, entre unas 40 y 100 variables. Para estas dos últimas distribuciones, cuando nos encontramos con unas 100 variables ($n = 100$) podemos decir, sin cometer un error excesivo, que es posible trabajar con la aproximación Normal de estas distribuciones. Estos tres casos son representativos de distribuciones con colas «finas» o «ligeras», por contraposición a las distribuciones con colas gruesas o pesadas.

Distribución Pareto

Podríamos decir que los dos casos anteriores difieren de forma cuantitativa: al fin y al cabo, simplemente tenemos que añadir unas «pocas» variables más para observar prácticamente los mismos efectos de convergencia. Sin embargo,

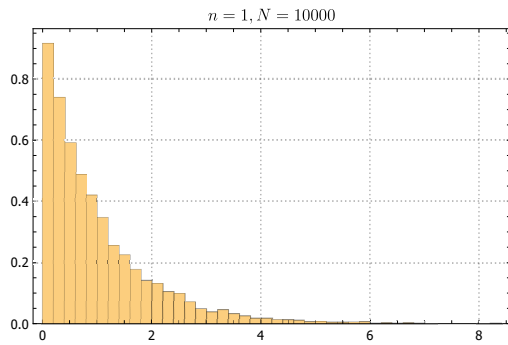
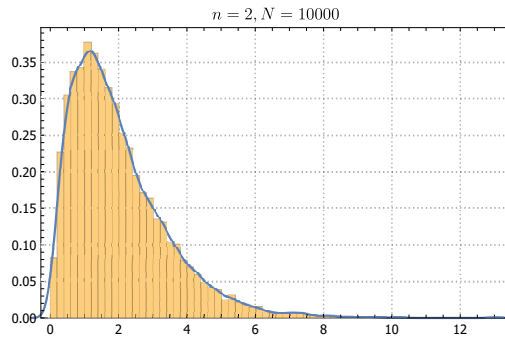
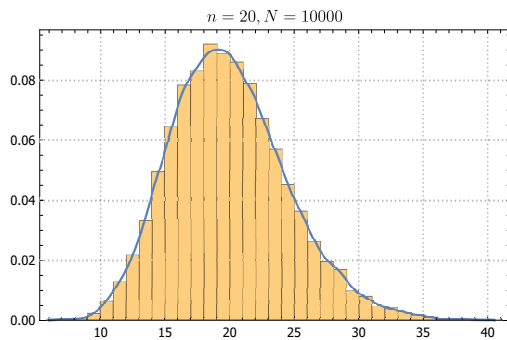
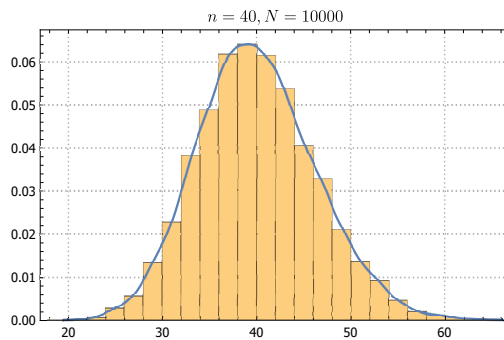
(a) Exponencial, $n = 1$, $N = 10000$ (b) Exponencial, $n = 2$, $N = 10000$ (c) Exponencial, $n = 20$, $N = 10000$ (d) Exponencial, $n = 40$, $N = 10000$

Figura 2.2: Teorema central del límite para el caso Exponencial.

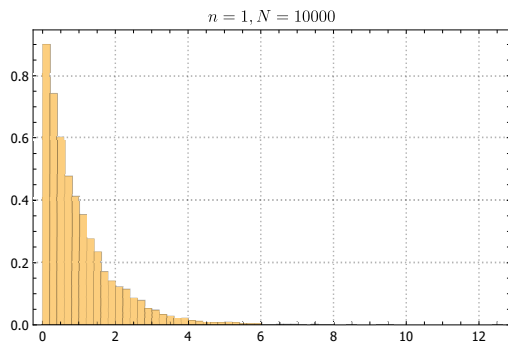
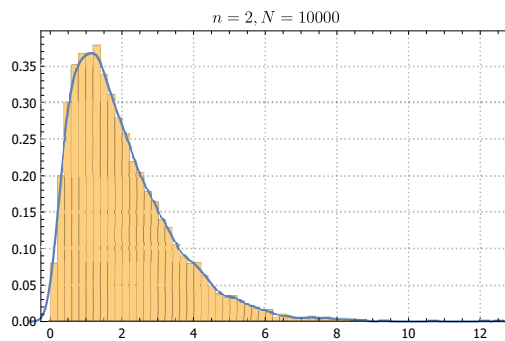
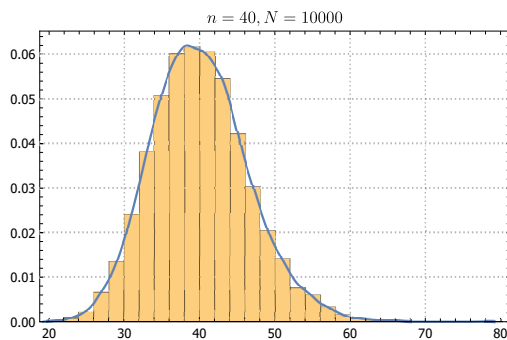
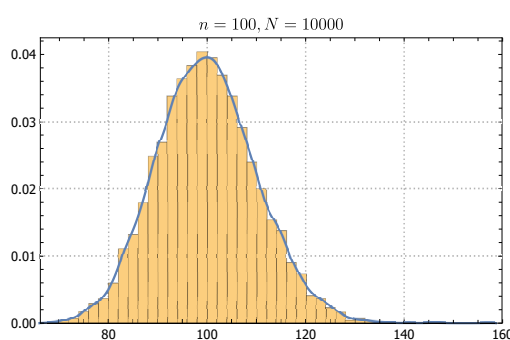
(a) Weibull, $n = 1$, $N = 10000$ (b) Weibull, $n = 2$, $N = 10000$ (c) Weibull, $n = 40$, $N = 10000$ (d) Weibull, $n = 100$, $N = 10000$

Figura 2.3: Teorema central del límite para el caso Weibull.

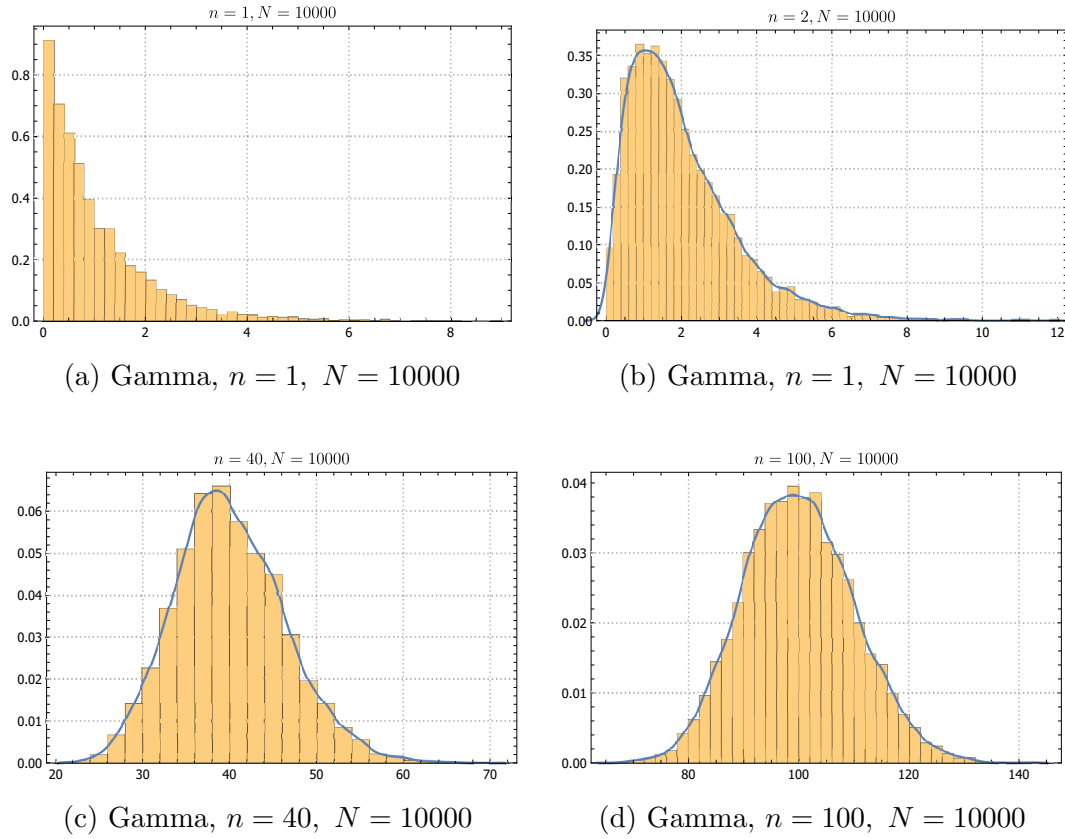


Figura 2.4: Teorema central del límite para el caso Gamma.

el caso de la distribución de Pareto, representado por la figura 2.5, representa diferencias que podrían considerarse cualitativas. Es decir, el caso de las distribuciones de Pareto se diferencia tanto de los anteriores que debe considerarse como perteneciendo a otro tipo de distribuciones separadas de las anteriores. Este otro tipo de distribuciones son las distribuciones de «colas pesadas» que hemos mencionado anteriormente. Cuando observamos la convergencia de las distribuciones de Weibull, Gamma, Exponencial o, incluso, la propia distribución uniforme, podemos admirar como el teorema central del límite se cumple con gran elegancia matemática. En unos pocos pasos, pasamos de encontrarnos con distribuciones asimétricas y desplazadas a distribuciones con la forma de «campana» característica de la distribución Normal. Incluso en el caso de Pareto, técnicamente, se convergerá a una distribución Normal pero, para tener una distribución similar a las que hemos encontrado para los otros casos con $n = 100$, necesitaríamos un número mucho más elevado de observaciones. Quizá, la intuición al ver los otros casos de convergencia, nos lleve a pensar que dicho «número mucho más elevado» de observaciones podría ser del orden de las 10.000, 100.000 o incluso 1.000.000. Al fin y al cabo, cuando, en los otros casos, hemos cambiado de orden de magnitud, hemos observado cambios muy sustanciales en la convergencia a la distribución Normal. Pues bien, según describe [Taleb \(2013\)](#) en su artículo, necesitaríamos una cantidad próxima a

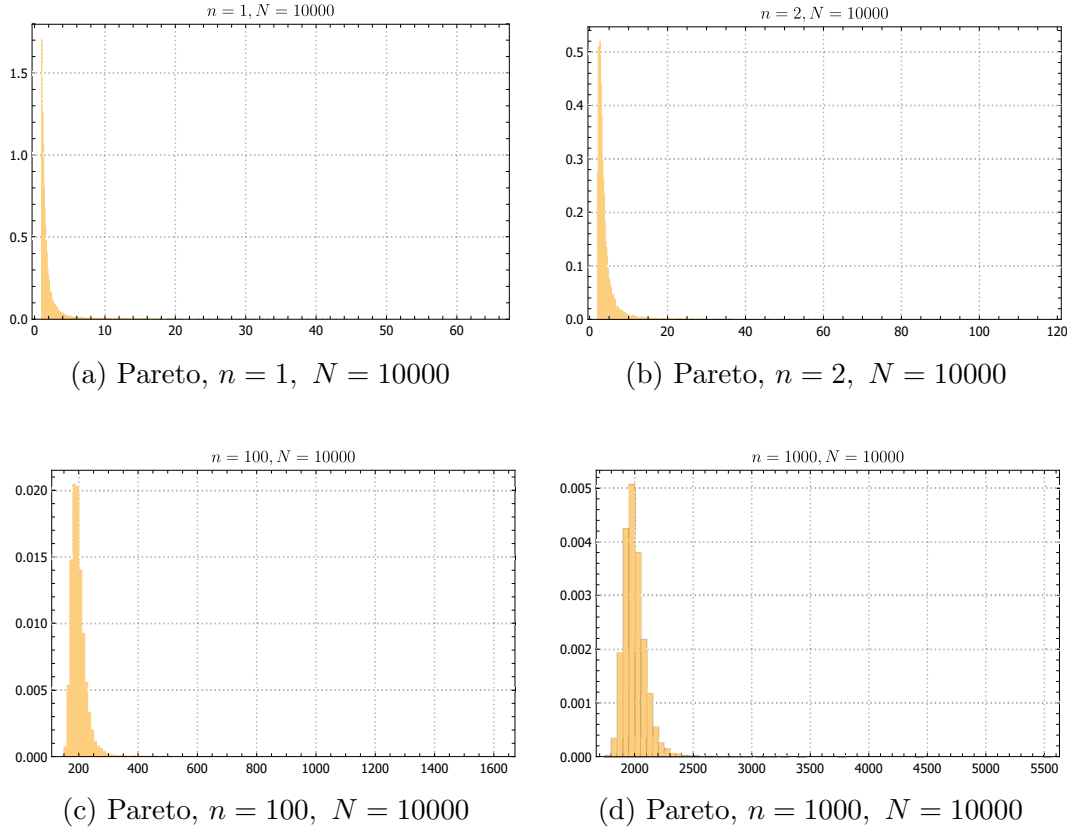


Figura 2.5: Teorema central del límite para el caso de Pareto.

$n = 10^{12}$. Es decir, el orden de magnitud de estrellas en toda nuestra galaxia o el número de neuronas en el cerebro. El problema es que ni el portafolio mas grande del mayor banco se acerca a cifras similares a la anterior. Esta consecuencia será fundamental a lo largo del trabajo puesto que, como comenta [Hull \(2018\)](#), una de las formas de «esperanza» (sic) que se mantiene cuando se utiliza un modelado Normal para portafolios financieros, es el hecho de que cuando estos son muy grandes, se puede «esperar» (sic) una especie de teorema central del límite. Si los retornos responden al modelado con colas de Pareto, como trataremos de demostrar más adelante, podemos citar la inscripción que aparece al inicio del viaje de *La Divina Comedia* de Dante Alighieri: «*Lasciate ogni speranza, voi ch'entrate*»⁶. La cuestión fundamental que debe sacarse como conclusión es que, por todo lo anterior, *si ciertas variables financieras, como los retornos de un portafolio, se comportan como variables de Pareto, no podemos confiar en que haya una convergencia a distribuciones Normales puesto que siempre nos encontraremos en la región preasintótica.*

⁶Abandonar toda esperanza, quienes aquí entráis ([Alighieri, 1811](#)).

2.3.3. Ley de los grandes números

Los resultados que acaban de obtenerse se complementan y completan con el comportamiento de las distribuciones de Pareto con respecto a la ley de los grandes números. Para este análisis debemos fijarnos en la figura 2.6. Los resultados que se presentan en esta figura son los siguientes:

- Las gráficas representan como evoluciona la media de n variables distribuidas según una distribución Normal de alta varianza (subfigura (a)) o según una distribución de Pareto con $\alpha = 1.16^7$ (subfiguras (b), (c) y (d)).
- El número de variables que sobre las que se calcula la media va desde 0 a 10.000.
- En la figura (c), observamos un salto muy similar al que se producía en (b) con la particularidad de que, en este caso, se aprecia una pseudo-convergencia en forma de un descenso que parece tender hacia el valor real de la media que es, recordemos, 8.14. Nada más lejos de la realidad. Este caso se ha elegido para demostrar como, tras la aparición de un caso extremo como el que aquí sucede, aproximadamente, en la observación 2000, es muy probable que al ocurrir los sucesos más comunes, que están por debajo de la media, la media muestral va disminuyendo. Sin embargo, nos encontramos aún muy lejos de la situación de convergencia que, según hemos comentando antes, se encuentra en la vecindad de las 10^{12} observaciones.
- En la figura (d) podemos observar otro caso distinto. Aunque pueda parecer extraño, las tres subfiguras provienen exactamente de la misma distribución de Pareto. Pues bien, en este caso, se ha captado un período de «calma». Como podemos ver, durante todo el proceso, los valores que se obtienen se mantienen próximos a 5 de manera que después de, no lo olvidemos, nada menos que 10.000 observaciones, nos podríamos plantear muy seriamente que la media es, aproximadamente, 5. Pues, a parte de estar equivocados, lo más probable es que, cuando menos lo esperásemos, apareciera un pico de los que hemos observado anteriormente que acabara con cualquier intento de convergencia.

⁷Aunque justo en la próxima sección se expone la distribución generalizada de Pareto, con sus parámetros y demás especificaciones, en este capítulo se está considerando el caso especial en que $\mu = 0$ y $\alpha = 1/\xi$. Para exponer las nociones de convergencia que estamos ilustrando no es un hecho relevante pero, después de la exposición de estos conceptos se considerará el caso más general que se establece en la sección 2.5 y posteriores.

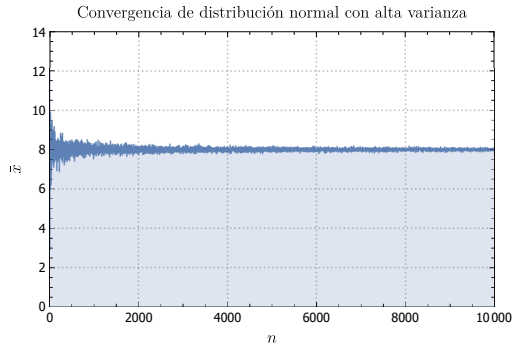
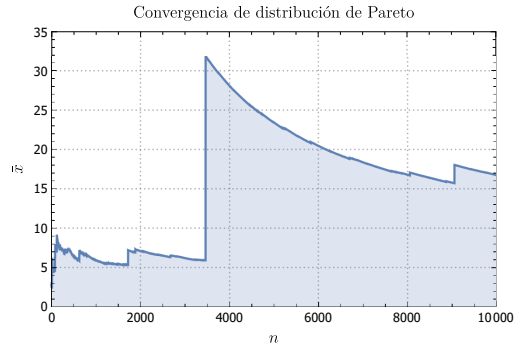
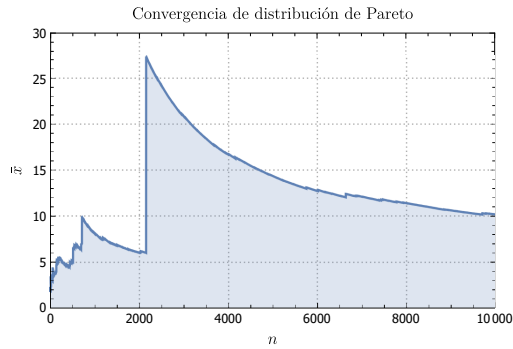
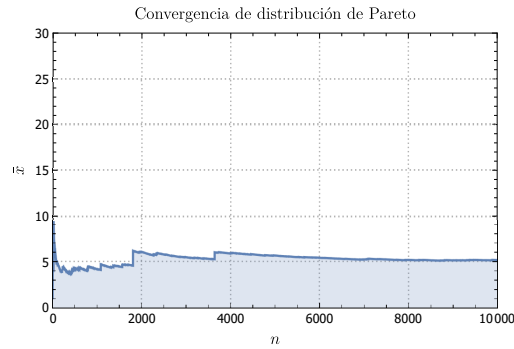
(a) $N(\mu = 8, \sigma^2 = 25)$ (b) $Pareto(0, 1, 1.16), 1$ (c) $Pareto(0, 1, 1.16), 2$ (d) $Pareto(0, 1, 1.16), 3$

Figura 2.6: Diferencias en la convergencia de la distribución Normal y la de Pareto.

Algunas de las conclusiones que podemos sacar del análisis de estas figuras son que:

1. Por muy elevada que sea la varianza, la distribución Normal tiende de manera rápida y estable a una media muestral que es la media real.
2. La distribución de Pareto se caracteriza por períodos de relativa «calma» alternados con fuertes valores extremos que generan problemas de convergencia.

Para ilustrar estas conclusiones y como (no) convergen a la media estas distribuciones pueden observarse las simulaciones de 2.7, 2.8 y 2.9. En ellas se han presentado las primeras 500 valores que se obtienen aleatoriamente para la distribución Normal y de Pareto que acabamos de comentar, así como una distribución T con un grado de libertad, también característica por el peso de sus colas. Hay que recordar que la media de la distribución de la gráfica 2.9 es, aproximadamente, 8.14.

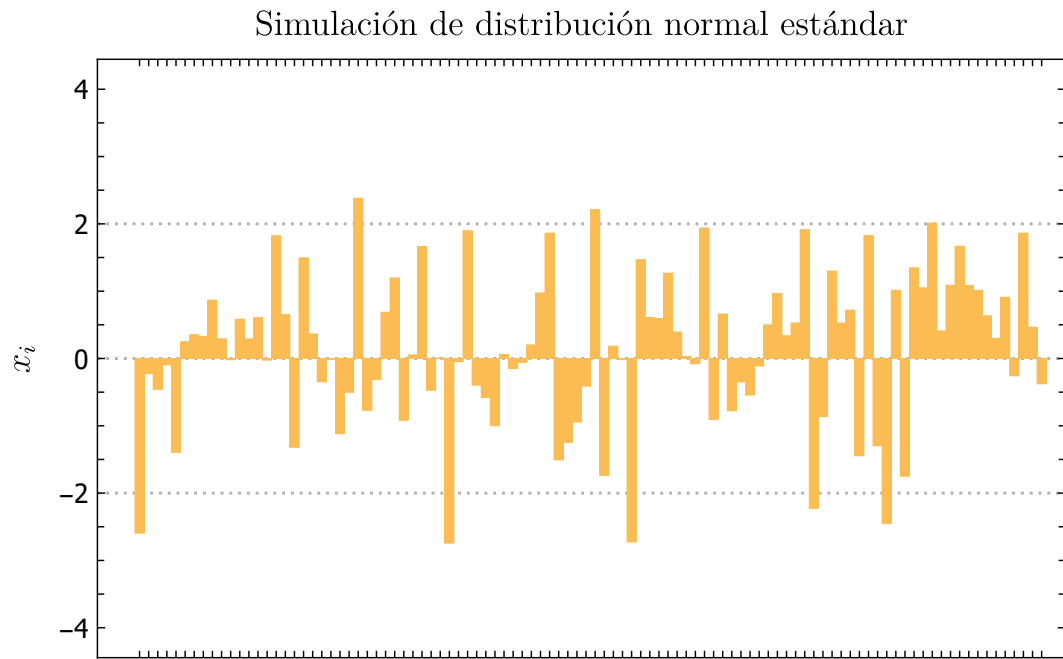


Figura 2.7: Simulación de distribución Normal estándar.

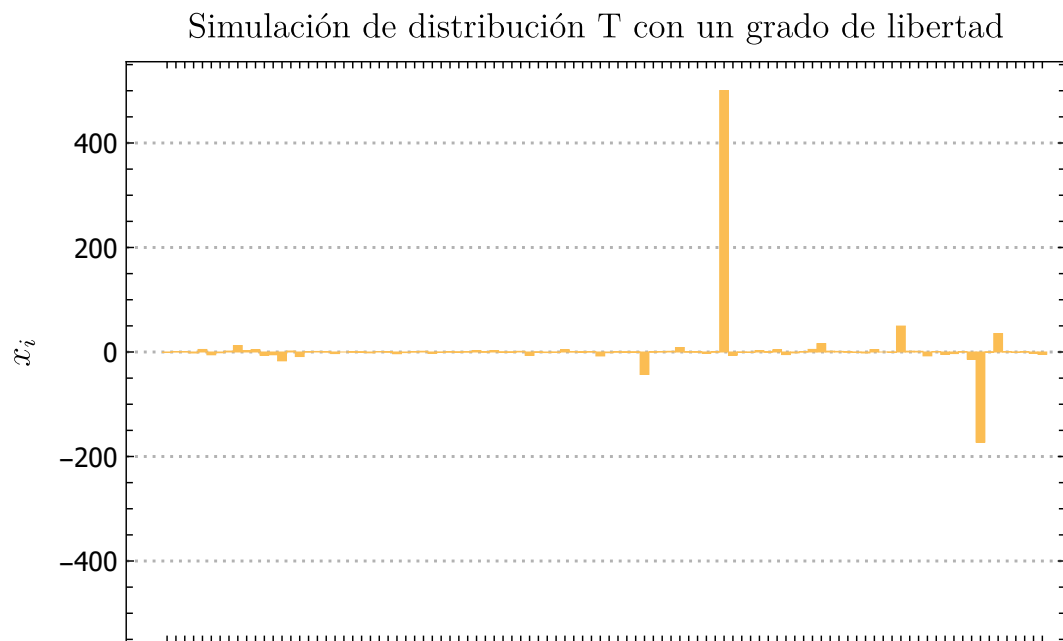


Figura 2.8: Simulación de distribución T con 1 grado de libertad.

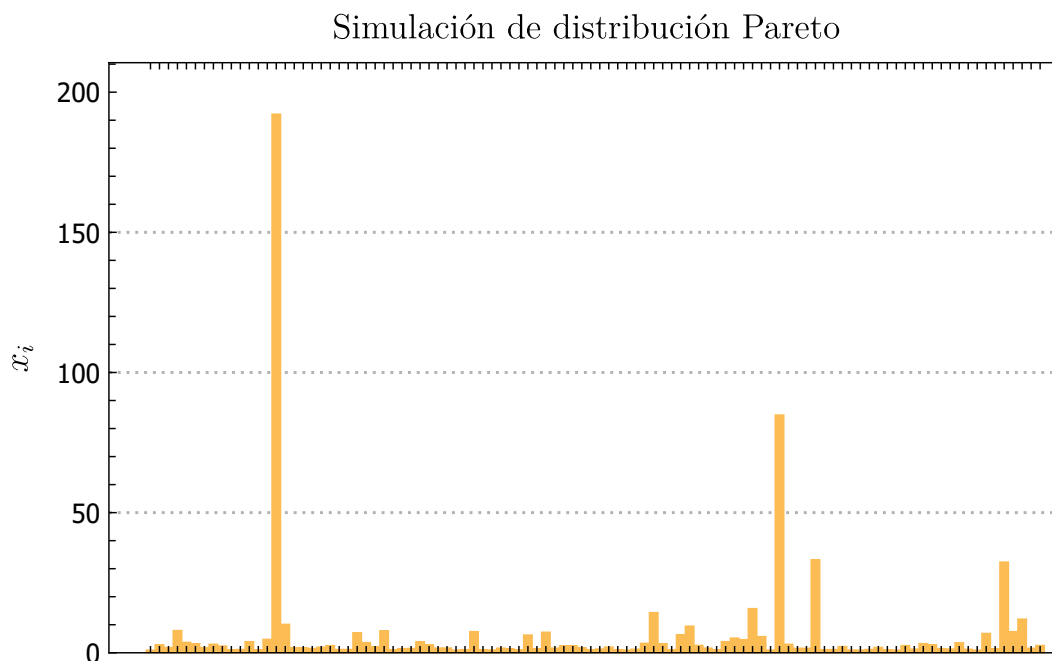


Figura 2.9: Simulación de una distribución de Pareto.

2.4. Correlación

Una de las últimas aspectos sobre la que se quiere levantar un cierto escepticismo es la correlación y su interpretación. En muchas ocasiones se advierte sobre la diferencia tajante entre correlación y causalidad, así como en la naturaleza lineal de la correlación, que es incapaz, como es bien sabido, de capturar relaciones más complejas entre variables. Todo esto es cierto y necesario tenerlo en cuenta pero, aquí, queremos remarcar el hecho de que la correlación, además, *es una variable aleatoria con su propia distribución*. Esto significa, que dependiendo del tamaño de las muestras entre la que se calcule la correlación, pueden obtenerse coeficientes de valores de hasta 0.4 con relativa facilidad y, aunque con menos frecuencia, valores de 0.6 o más. En la gráfica 2.10, se muestran los valores de correlación obtenidos para dos variables aleatorias con distribución Normal subyacente que han sido generadas de forma aleatoria y, por tanto, que son totalmente independientes. La intuición lleva a pensar que el valor de su correlación tenderá a ser 0. Y, ciertamente, el valor medio y mediano de dicha correlación será 0, pero es común obtener valores desde 0.1 hasta 0.5. Aunque no es el objetivo de este trabajo, sería interesante investigar que proporción de la correlación de las variables corresponde a su correlación «real» y que parte es un componente simplemente aleatorio. Este hecho nos lleva a considerar con cierto escepticismo los métodos matriciales para el cálculo del VaR que dependen del cálculo de matrices de correlaciones y varianzas-covarianzas. La naturaleza de la correlación es muchas veces mal interpretada y más veces aún mal utilizada. Nassim Nicholas Taleb ha dicho,

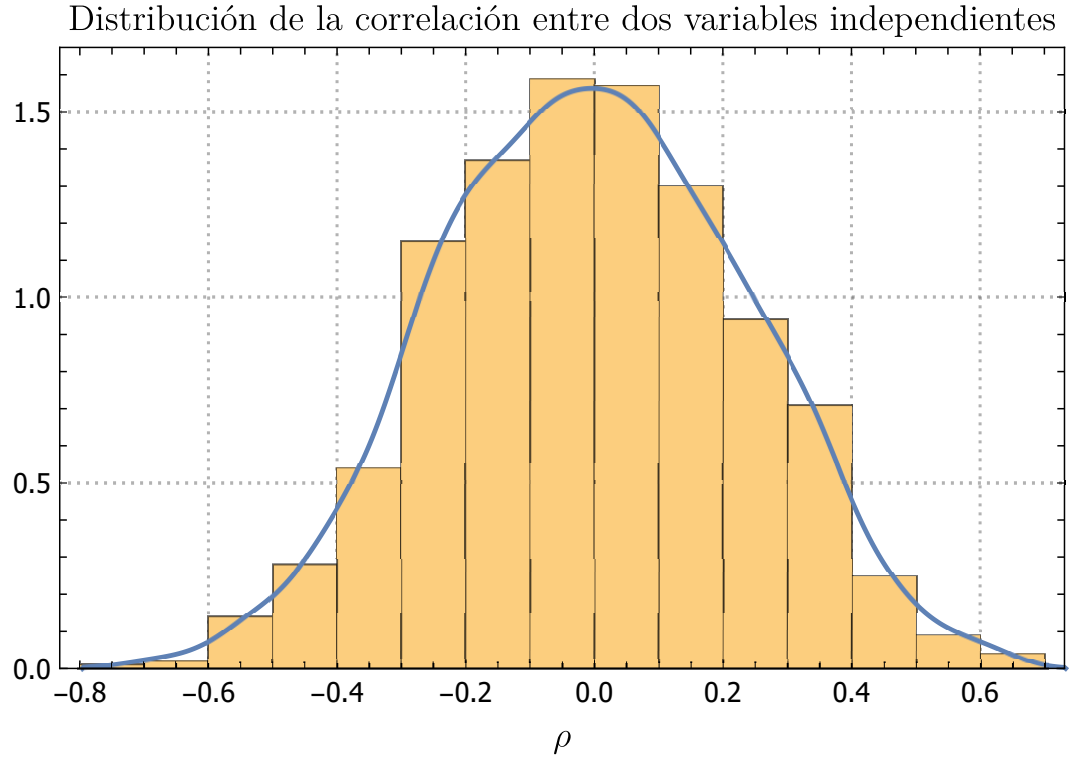


Figura 2.10: Distribución de la correlación para variables independientes generadas aleatoriamente

en alguna ocasión, que todo el estudio de la probabilidad y la estadística consiste, en última instancia, en no cometer errores como el que se presenta en la figura 2.11.

2.5. Resultados de Gnedenko

El principal resultado demostrado por Gnedenko (1943) fue establecer que un amplio rango de distribuciones de probabilidad comparten ciertas propiedades en la distribución de sus colas. Tomando a $F(x)$ como la distribución de probabilidad de una variable x que puede ser la pérdida de un determinado portfolio y u un valor de x en la cola derecha de la distribución. La probabilidad de que x este entre u y $u + x$ es $F(u + x) - F(u)$. Por otro lado, la probabilidad de que x sea mayor que u es $1 - F(u)$. Entonces se define $F_u(x)$ como la probabilidad de que x se encuentre en el intervalo $[u, u + x]$ con la condición de que $x > u$:

$$F_u(x) = \frac{F(u + x) - F(u)}{1 - F(u)} \quad (2.1)$$

La variable $F_u(x)$ define la cola derecha de la distribución de probabilidad. Gnedenko demostró que para un amplio rango de distribuciones de probabilidad $F(x)$ su distribución asociada $F_u(x)$ converge a una distribución de

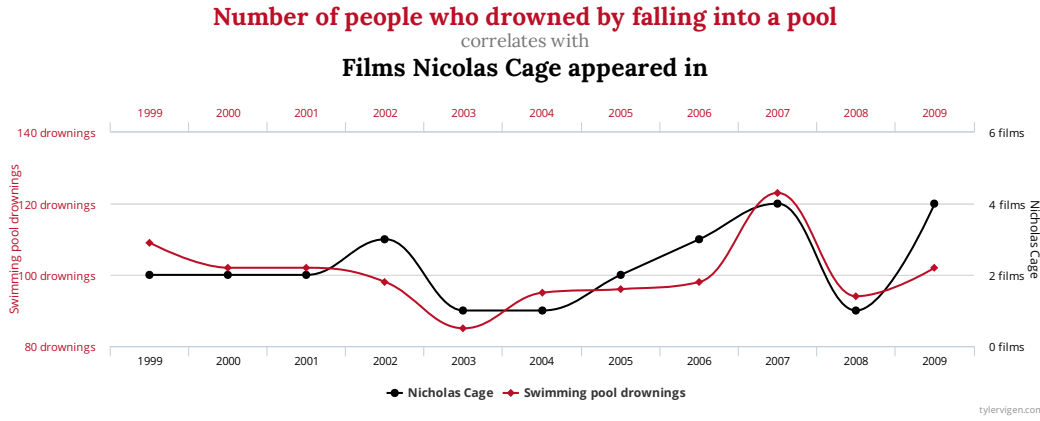


Figura 2.11: La correlación entre las muertes por ahogamiento en piscinas y las apariciones cinematográficas de Nicolas Cage es de 0.66. Fuente <https://tylervigen.com/spurious-correlations>.

Pareto generalizada (GPD, por sus siglas en inglés) a medida que el valor de u se incrementa. Según el Teorema de Pickands-Balkema-de Haan:

$$F_u \xrightarrow{u \uparrow} G(\mu, \sigma, \xi)$$

La distribución generalizada de Pareto tiene la forma⁸:

$$G(x; \mu, \sigma, \xi) = 1 + \left(1 + \xi \frac{(x - \mu)}{\sigma}\right)^{-1/\xi} \quad (2.2)$$

En esta distribución ξ es el parámetro de forma, σ el parámetro de escala y μ el parámetro de localización. Cuando la variable subyacente x se distribuye acorde a una distribución Normal el parámetro de forma es 0. A medida que las colas de la distribución se vuelven más pesadas el parámetro de forma se incrementa. Para la mayoría de datos financieros se tiene que $0.1 < \xi < 0.4$. Una de las propiedades de la GDP es que el k – *momento* de x , definido como $\mathbb{E}(x^k)$, es infinito para $k > 1/\xi$. Para una distribución Normal todos los momentos son finitos pero con $\xi = 0.25$ solo son finitos los primeros 3 momentos y para $\xi = 0.5$ sólo lo sería el primer momento.

2.5.1. Estimación de los parámetros

Para la estimación de los parámetros de forma y escala pueden utilizarse métodos de máxima verosimilitud. La función de densidad de probabilidad puede encontrarse derivando la distribución acumulada con respecto a x :

$$\frac{\partial G}{\partial x} = g$$

⁸En algunas ocasiones se define el parámetro de forma como $\kappa = -\xi$ pero aquí se mantendrá la notación establecida en la ecuación (2.2). Para un ejemplo de la notación alternativa ver Davison, A. C. (1984). «Modelling Excesses over High Thresholds, with an Application»

De manera que la función de densidad queda:

$$g(x; \mu, \sigma, \xi) = \frac{1}{\sigma} \left(1 + \xi \frac{(x - \mu)}{\sigma} \right)^{-1/\xi - 1} \quad (2.3)$$

Primero hay que elegir un valor de u (un valor cercano al percentil-95 de la distribución suele funcionar bien). En nuestro caso, como se verá en el análisis empírico, puede utilizarse dicho valor, pero la distribución de retornos obtenida funciona perfectamente bien cuando se toma la mitad de la distribución de los retornos como una distribución de Pareto. A partir de ahí, se calculan los ratios de máxima verosimilitud y se realiza un problema de optimización para obtener los parámetros de la distribución. En nuestro caso, este se realiza implícitamente en el programa elaborado con funciones preestablecidas, pero este es el mecanismo subyacente.

2.5.2. Cálculo del VaR y el ES

Para el cálculo del VaR y ES, se calculan sus expresiones analíticas según lo establecido por (Norton et al., 2018), siendo el VaR:

$$VaR_\alpha(\Sigma) = \begin{cases} \mu + \sigma \frac{(1-\alpha)^{-\xi} - 1}{\xi} & \text{if } \xi \neq 0, \\ \mu - \sigma \ln(1 - \alpha) & \text{if } \xi = 0. \end{cases} \quad (2.4)$$

y el ES

$$ES_\alpha(\Sigma) = \begin{cases} \mu + \sigma \left[\frac{(1-\alpha)^{-\xi}}{1-\xi} + \frac{(1-\alpha)^{-\xi} - 1}{\xi} \right] & \text{if } \xi \neq 0, \\ \mu + \sigma [1 - \ln(1 - \alpha)] & \text{if } \xi = 0. \end{cases} \quad (2.5)$$

que se obtienen mediante la expresión analítica del α -cuantil y la integración a partir de dicho cuantil.

2.6. Propiedades heredadas

Por último, un breve comentario sobre uno de los orígenes de las colas pesadas que observaremos al realizar el análisis empírico de nuestro portfolio. Se da el caso de que el curtosis de algunas de las series temporales que vamos a estudiar es menor que el de las distribuciones Normales (distribuciones platocúrticas: menos apuntadas y con colas menos gruesas) y, en otros casos, es mayor. (distribuciones leptocúrticas: más apuntadas y con colas más pesadas). La cuestión es que, como se muestra *esquemáticamente* en la figura 2.12, la combinación lineal (en este caso la media) de dos distribuciones, una más dispersa y otra más concentrada, da lugar a distribuciones que heredan un cuerpo central importante, al mismo tiempo que heredan el grosor de las colas. Este

es un hecho fundamental pues explicará que, aunque las series vistas de forma individual tienen una curtosis que varía entre 1.5 y 4 (5.1) *el curtosis de la cartera considerando la ponderación de los activos es de 17.58.*

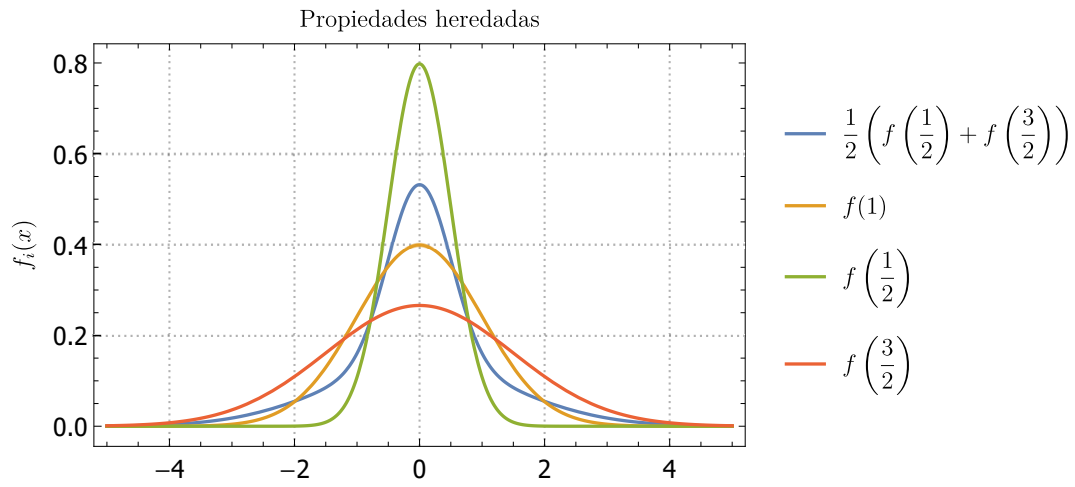


Figura 2.12: Propiedades heredadas de distribuciones.

Capítulo 3

Fundamental Review of the Trading Book

En mayo de 2012, el Comité de Basilea para la Supervisión Bancaria, emitió un documento en el que se proponía una revisión profunda en la manera de realizar los cálculos orientados a determinar el capital regulatorio para los modelos de riesgo de mercado. Este documento se conoce como “Fundamental Review of the Trading Book” (FRTB). Tras la publicación de dicho documento, el Comité de Basilea continuó con su proceso habitual de recabar comentarios de los bancos después de que estos llevaran a cabo sus correspondientes estudios cuantitativos de impacto (QISs, por sus siglas en inglés). La versión final de dichas reglas fue publicada por el mencionado comité en enero del año 2016. Esta última versión, obligaba a los bancos a implementar las nuevas normas a lo largo del año 2019 pero, en diciembre de 2017 se revisó la fecha de implementación para establecerla en el año 2022. La forma de abordar la determinación del capital para riesgo de mercado que se establece en la FRTB es de una complejidad mayor que las formas de afrontar dicho problema previamente por parte de los reguladores.

3.1. Marcos antiguos

3.1.1. Basilea I

En Basilea I los cálculos de capital regulatorio para riesgo de mercado se basaban en un VaR calculado para un horizonte temporal de 10 días con un nivel de confianza del 99 %. El VaR era corriente en el sentido de que los cálculos se hacían en un determinado día basados en el comportamiento de las variables de mercado durante el período de tiempo inmediatamente anterior que era, típicamente, entre uno y cuatro años.

3.1.2. Basilea II.5

Con Basilea II.5 comenzó a requerirse a los bancos el cálculo de una medida conocida como sVaR (*stressed* VaR, por sus siglas en inglés) cuyo cálculo debía hacerse sobre la base del comportamiento de las variables de mercado en un período de 250 días de especial estrés financiero para el banco. Para determinar dicho período de tiempo, los bancos debían encontrar 250 días que supusieran movimientos de mercado que significaran un estrés financiero significativo para el portfolio actual.

3.1.3. Basilea III y FRTB

A partir del FRTB, se produce un cambio en la medida para determinar el capital de riesgo de mercado. En vez de un VaR con un nivel de confianza del 99 %, comienza a utilizarse un *stressed Expected Shortfall* (ES) con un nivel de confianza del 97.5 %. Para las distribuciones normales, un VaR con un nivel de confianza del 99 % y el ES con un nivel de confianza del 97.5 % son prácticamente equivalentes. Si suponemos que la distribución de pérdidas tiene una distribución normal con media μ y desviación típica σ el VaR 99 % es $\mu + 2.326\sigma$ mientras que el ES es $\mu + 2.338\sigma$ ¹. En cambio, cuando las distribuciones no son normales, el ES con un nivel de confianza del 97.5 % puede ser considerablemente mayor al VaR con un nivel de confianza del 99 %.

Otro factor fundamental bajo las directrices de la FRTB es el cambio del horizonte temporal de 10 días presente tanto en Basilea I como en Basilea II.5 a un horizonte temporal que tiene en cuenta los cambios de las variables de mercado dependiendo de su liquidez. Estas variables de mercado se denominan *risk factors*, a sus cambios se les llama *shocks* y los horizontes de tiempo adaptados a su liquidez *liquidity horizons*. Estos horizontes de liquidez van desde los 10 a los 120 días como se muestra en la tabla 3.1.

Con la FRTB, se especifica tanto el enfoque estándar como los modelos internos para el cálculo del capital de riesgo, unos modelos que hasta ahora dependían de cada entidad. De hecho, ahora, incluso si se autoriza a los bancos a utilizar modelos internos, se les requiere el cálculo del capital bajo el enfoque estándar. Como se indica en Hull (2018) en diciembre de 2017 el comité de Basilea anunció que se produciría un cambio hacia considerar el capital regulatorio como, al menos, el 72.5 % del proporcionado por el método estandarizado. Este cambio se presente alcanzar para 2027. Todas estas variaciones son la culminación de la tendencia que se inició desde la crisis del 2008 a partir de la cual comenzó a disminuir la confianza hacia los modelos internos considerándose preferible un enfoque estándar para proporcionar una base mínima

¹De la ecuación (1.4)

Cuadro 3.1: Asignación de horizontes de liquidez a factores de riesgo

Factores de riesgo	Horizonte (días)
Tipo de interés (dependiente de la moneda)	10-60
Volatilidad del tipo de interés	60
Diferencial de crédito: soberano, inversión	20
Diferencial de crédito: soberano, no inversión	40
Diferencial de crédito: corporativo, inversión	40
Diferencial de crédito: corporativo, no inversión	60
Diferencial de crédito: otro	120
Diferencial de crédito: volatilidad	120
Precios de acciones: large cap	10
Precios de acciones: small cap	20
Precios de acciones: large cap volatility	20
Precios de acciones: small cap volatility	60
Acciones: otros	60
Tipo de cambio (dependiente de la moneda)	10-40
Volatilidad del tipo de cambio	40
Precio de la energía	20
Precio de metales preciosos	20
Precio de otras materias primas	60
Volatilidad del precio de la energía	60
Volatilidad del precio de metales preciosos	60
Volatilidad de otras materias primas	120
Materias primas (otras)	120

para los requerimientos de capital regulatorio.

3.2. Enfoque estandarizado

Bajo el enfoque estándar, los requerimientos de capital son la suma de tres componentes: un recargo por riesgo basado en un procedimiento de análisis de sensibilidades, un recargo por riesgo de impago y un riesgo residual adicional. Se considerará aquí exclusivamente el primero de estos componentes puesto que el segundo pertenece al ámbito del riesgo de crédito (cuyas especificaciones quedan fuera del marco de este trabajo) y el tercero considera el riesgo que no puede tenerse en cuenta mediante la curvatura de la delta o la vega incluyendo opciones exóticas que no pueden tratarse como combinaciones lineales de opciones tradicionales (*plain vanilla*).

Considerando este primer componente, se definen siete clases de riesgo (correspondientes a las mesas de operaciones o *trading desks*): general de tipos

de interés, tipo de cambio, materias primas, acciones y tres categorías de de diferencial de crédito. Dentro de cada categoría, se calcula el recargo por delta, el recargo por vega y por curvatura.

$$R_r = \sum_i \sum_j \rho_{ij} \delta_i \delta_j W_i W_j \quad (3.1)$$

3.3. ES en FRTB

La publicación, a inicios del año 2016, del documento *Minimum capital requirement for market risk* por parte del comité de Basilea bajo la FRTB, supone el establecimiento de nuevas metodologías para el cálculo de riesgo en entidades bancarias. En este documento, se otorga cierta flexibilidad a la hora de realizar los cálculos en sus modelos internos, pero se establecen una serie de condiciones que se deben cumplir en cualquier caso. El ES se calcula diariamente para cada una de las mesas de trading y para el modelo interno de la totalidad del banco. Se calcula con un nivel de confianza del 97.5 % con un horizonte base de liquidez de 10 días. El ajuste por liquidez se calcula a partir del ES con el mencionnado horizonte base y con el horizonte de liquidez correspondiente según la siguiente expresión:

$$ES = \sqrt{(ES_T(\Sigma))^2 + \sum_{j \geq 2} \left(ES_T(\Sigma, j) \sqrt{\frac{(\mathcal{L}_j - \mathcal{L}_{j-1})}{T}} \right)^2} \quad (3.2)$$

donde $ES_T(\Sigma)$ es el ES para una cartera de posiciones Σ con un horizonte T , $ES_T(\Sigma, j)$ es *idem.* que el anterior, pero considerando los factores de riesgo de del subgrupo j y dejando constantes el resto y $\mathcal{L}$ son los horizontes de liquidez establecidos en la tabla 3.1. Además, el ES debe calibrarse previamente con respecto a algún período de estrés financiero. Esta condición se establece de manera que los factores de riesgo más relevantes deben considerarse como si estuvieran experimentando un período de estrés. Se deja a la elección de los bancos la selección de un conjunto pequeño de factores de riesgo especialmente relevantes para sus carteras y que tengan una serie temporal lo suficientemente larga para poder obtener resultados relevantes. Este es uno de los criterios fundamentales que hemos tenido que considerar a la hora de realizar nuestro análisis empírico. En cualquier caso, aunque se permite esa libertad de elección de los factores de riesgo relevantes para el banco, al mismo tiempo se establece la restricción de que el conjunto de esos factores debe explicar, al menos, el 75 % de la variación del ES. El ajuste se produce de tal manera que queda:

$$ES = ES_{R,S} \frac{ES_{F,C}}{ES_{R,C}}$$

siendo $ES_{R,S}$ el ES basado en los períodos de estrés con el conjunto reducido de factores de riesgo, $ES_{F,C}$ el ES basado en la consideración de todos los factores de riesgo durante los últimos doce meses y $ES_{R,C}$ el ES basado, de nuevo, en el período actual, pero con el conjunto reducido de los factores de riesgo. Para obtener el $ES_{F,C}$ los bancos ajustan su base de datos mensualmente y repiten la valoración cada vez que los precios están sujetos a cambios materiales. En cualquier caso, la regulación no concreta ninguna metodología concreta para el cálculo de ES permitiéndose simulaciones de Monte Carlo, históricas o cualquier otro tipo de modelo, ya sea paramétrico, semi-paramétrico o no paramétrico. En cuanto al *backtesting* se debe calcular diariamente para VaR y ES mientras que para los cálculos del capital debe calcularse el ES a diez días y re-escalar después con los horizontes de liquidez.

Capítulo 4

Métodos

En este capítulo se exponen los métodos de manera más concreta tanto para el cálculo de VaR y ES como para su *backtesting*. Se comentan sus ventajas y debilidades. En primer lugar la exposición de los métodos irá desde el método Normal hasta el método propuesto o GPD (por *Generalized Pareto Distribution*) pasando por el método de simulación histórica (no-paramétrico) y el EWMA (*Exponential Weighted Moving Average*). Después, se pasará a analizar el funcionamiento de cada uno de los tests y pruebas que se utilizarán como método de evaluación en el capítulo de análisis empírico.

4.1. Simulaciones históricas y paramétricas

4.1.1. Método Normal

Método paramétrico que utiliza como distribución subyacente de los retornos una distribución normal. Es el caso más común de utilización para el modelado en banca y contra el que va dirigido prácticamente todo este trabajo. Consiste básicamente en calcular la volatilidad para cada período de estudio (que en nuestro caso haremos cada 250 días) y aplicarle el valor correspondiente al nivel de confianza de la función de densidad acumulada Normal ([Alexander, 2009](#)). El principal problema de este método y los que están basados en él es, simplemente, que los retornos de prácticamente ninguna variable que tenga que ver con el mundo financiero y de la economía en general sigue una distribución normal. Además, como se ha mostrado en la teoría, si confirmamos experimentalmente que la distribución de los retornos financieros sigue algún tipo de modelo de GPD, podremos también afirmar que no podemos confiar en el teorema central del límite y ni en la ley de los grandes números para los tamaños habituales de portafolios ¹

¹En realidad, como se ha comentado anteriormente, el tamaño del portafolio para conseguir un error en la media similar al de la distribución normal al añadir un elemento aleatorio

Cuadro 4.1: Cambios diarios en variables financieras. Valores en %

σ	Real	Normal	Laplace	Pareto
> 1	23.32	31.73	22.43	21.54
> 2	4.67	4.55	5.03	5.60
> 3	1.3	0.27	1.13	1.69
> 4	0.49	0.01	0.25	0.57
> 5	0.24	0.00 ²	0.06	0.21
> 6	0.13	0.00 ³	0.01	0.09

Cuadro 4.2: Traducción de probabilidades de la tabla 4.1. Normal.

Distribución Normal	
Una vez cada ... días	Una vez cada ... año(s)
3	-
22	-
370	1
-	63
-	6 977
-	2 027 189

Esta situación puede verse con la ayuda de la tabla 4.1. Quizá, a primera vista, la tabla puede resultar interesante, pero no impactante. Por ello, se han elaborado las tablas 4.2, 4.3, 4.4 y 4.5. que muestran la traducción de las probabilidades en términos diarios y anuales. Así, cuando oímos que: «Los sucesos de la crisis de 2007 se producen una vez cada X años» se refieren a esta traducción modelada con una distribución normal. Como puede verse, con los datos reales, el parecido entre uno y otro cesa a partir de las 2 desviaciones típicas (donde comienza a verse el efecto de las colas pesadas). En cambio, la ocurrencia de sucesos para las distribuciones de Laplace y Pareto sí son bastante similares, aproximándose mucho, la de Pareto, a la distribución de cambios reales.

tendría que tener el mismo número de posiciones que estrellas tiene nuestra galaxia, del orden de $\sim 10^{12}$

²El valor «exacto» de este 0 es $5.73 \cdot 10^{-7}$

³El valor «exacto» de este 0 es $1.97 \cdot 10^{-9}$

Cuadro 4.3: Traducción de probabilidades de la tabla 4.1. Real.

Real	
Una vez cada ... días	Una vez cada ... año(s)
4	-
21	-
77	-
-	1
-	2
-	3

Cuadro 4.4: Traducción de probabilidades de la tabla 4.1. Laplace.

Distribución de Laplace	
Una vez cada ... días	Una vez cada ... año(s)
4	-
20	-
89	-
-	2
-	7
-	31

Cuadro 4.5: Traducción de probabilidades de la tabla 4.1. Pareto.

Distribución de Pareto	
Una vez cada ... días	Una vez cada ... año(s)
5	-
18	-
59	-
-	1
-	2
-	5

4.1.2. Método de simulación histórica

Se trata de un método no paramétrico por lo que no asume ninguna distribución particular de los retornos. Se asume que la distribución de los retornos pasados (tanto pérdidas como beneficios) pueden ser utilizados para predecir la distribución de pérdidas y beneficios en el futuro. El VaR del día de cálculo t se calcula como el α -cuantil de la distribución de retornos para los N días anteriores. La curva de la simulación histórica tiene una forma escalonada característica que da cuenta de la «discontinuidad» (en forma de saltos) de este método. La razón de que existan estos saltos es que los cuantiles de la distribución no cambian durante varios días seguidos hasta que no ocurren «eventos extremos». La simulación histórica, por este motivo, es especialmente lenta a la hora de reaccionar a cambios en la volatilidad.

4.1.3. Método de EWMA

Los dos métodos anteriores asumen una ponderación equivalente para todos los retornos de la ventana de estimación mientras que el método de media móvil ponderada exponencialmente, asigna ponderaciones que decrecen exponencialmente. Así, los retornos más recientes tienen ponderaciones mayores en la medida en que, según las suposiciones de este modelo, los retornos actuales influyen de manera más importante que aquellos que están más alejados. La fórmula de estimación de la varianza para una ventana:

$$\hat{\sigma}_t^2 = \frac{1}{\kappa} \sum_{i=1}^{V_{est}} \beta^{i-1} r_{t-i}^2 \quad (4.1)$$

donde V_{est} es el tamaño de la ventana de estimación y κ es una constante de normalización que se define como

$$\kappa = \sum_{i=1}^{V_{est}} \beta^{i-1} = \frac{1 - \beta^{V_{est}}}{1 - \beta} \xrightarrow{V_{est} \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \beta}$$

Por conveniencia y como aproximación, se asume que la ventana de estimación es de tamaño infinito:

$$\hat{\sigma}_t^2 \approx (1 - \beta) \left(r_{t-1}^2 + \sum_{i=1}^{\infty} \beta^{i-1} r_{t-i}^2 \right) = (1 - \beta) r_{t-1}^2 + \beta \hat{\sigma}_{t-1}^2 \quad (4.2)$$

Un valor típico para el factor de ponderación β es 0.94 (Hull, 2018). En nuestro caso, usaremos el que nos proporcione la estimación de parámetros considerando un modelo GARCH(1,1) 1.3 cuyo valor es 0.874. Como podrá observarse más tarde, el método EWMA es muy reactivo a los cambios en los retornos y excesivamente sensible a este parámetro.

4.1.4. Método de GPD

La intención es que el método GDP actúe (gracias al elevado peso de las colas) como un híbrido entre el método histórico que resulta más resistente a los cambios en la volatilidad y el método EWMA (que se adapta, a veces en exceso, a los cambios de volatilidad): lo ideal es mantener cierta inercia para que no se produzcan excepciones después de cambios bruscos al mismo tiempo que se mantiene una cierta adaptabilidad a la forma de los retornos para que no sea excesivamente conservador. El método consiste en dividir el período de estudio en ventanas de 250 días de manera que el VaR y el ES del día t se calcule en base a los parámetros obtenidos por métodos de máxima verosimilitud para los $t - 250$. La forma de calcularlo será utilizar un bucle que vaya estimando los valores de los parámetros de la distribución generalizada de Pareto para cada ventana de estimación y aplicar las expresiones que se derivan de dicha distribución para el caso del VaR (2.4) y el ES (2.5). La EVT se utiliza para realizar estimaciones del VaR con niveles de confianza más elevados que los que se utilizan habitualmente mediante el estudio concreto de las colas de la distribución pero nosotros, justificando previamente el ajuste de forma gráfica y numérica, utilizaremos estos mismos desarrollos con la mitad de la distribución de los retornos considerados como pérdidas (i.e., pérdidas positivas).

4.2. Backtesting del VaR

El backtesting es un baño de realidad para las medidas de riesgo. Como se ha mencionado anteriormente y se comenta en Artzner et al. (1999), el ES es una medida mucho más compleja a la hora de realizar el backtesting y, de hecho, es uno de los motivos principales por los que ha habido resistencias a realizar el cambio del VaR al ES como medida de riesgo estándar (Hull, 2018). De hecho, está en los planes de los reguladores utilizar el ES como medida para el cálculo del capital regulatorio mientras se mantiene el VaR para realizar estimaciones sobre el backtesting (Akkizidis and Kalyvas, 2018).

4.2.1. Tests genéricos

Test del semáforo

El test del semáforo es un test propuesto directamente desde el comité de Basilea, también conocido como *test de las tres zonas*. La metodología de este test puede aplicarse a cualquier número de períodos y distintos niveles de confianza de VaR según lo establecido en BCBS (1996). El propio comité de Basilea proporciona una tabla que ejemplifica las tres zonas mencionadas para

Cuadro 4.6: Incrementos establecidos por el test del semáforo

Excepciones	Zona	Basilea	Test del semáforo
0	Verde	0	0
1	Verde	0	0
2	Verde	0	0
3	Verde	0	0
4	Verde	0	0
5	Amarillo	0.4	0.3982
6	Amarillo	0.5	0.5295
7	Amarillo	0.65	0.652
8	Amarillo	0.75	0.768
9	Amarillo	0.85	0.8791
10	Rojo	1	1

el cálculo del VaR a un 99 % de nivel de confianza en un período de tiempo de 250 días. Los incrementos en el factor de escala de la tabla 4.6 muestran el valor exacto proporcionado por el cálculo del test del semáforo y la aproximación del comité de Basilea que se realiza con redondeos *ad-hoc* para obtener múltiplos de 5.

El test del semáforo se apoya en el uso de la distribución binomial. Los parámetros que se tienen en cuenta son:

- N es el número de observaciones.
- $\bar{\alpha} = 1 - \alpha$ que es la probabilidad de observar un excepción si el modelo es correcto.
- x que es el número de excepciones observados.

donde α es el nivel de confianza del VaR.

El test calcula la probabilidad acumulada de observar hasta x excepciones, mostrándola en la columna «Probabilidad»

$$p = P(X \leq x \mid N, \bar{\alpha}) = B(x \mid N, \bar{\alpha})$$

donde $B(\cdot)$ es la función de probabilidad acumulada de una variable binomial con parámetros $N, \bar{\alpha}$. Las tres zonas se definen por:

- Verde: $B(x \mid N, \bar{\alpha}) \leq 0.95$
- Amarillo: $0.95 < B(x \mid N, \bar{\alpha}) \leq 0.9999$
- Rojo: $0.9999 < B(x \mid N, \bar{\alpha})$

La probabilidad de un error del Tipo I se muestra en la columna «Tipo I» y es igual a $1 - B(X \geq x \mid N, \bar{\alpha})$. Esta probabilidad corresponde, como es sabido, a la probabilidad de rechazar el modelo siendo este correcto. Los elementos de la columna «Probabilidad» y «Tipo I», por tanto, no suman la unidad ⁴.

El incremento en el factor de escala, que se muestra en la columna «Incremento» siempre es 0 para la zona verde y siempre es 1 para la zona roja mientras que, para la zona amarilla, es un ajuste basado en la diferencia relativa entre el nivel de VaR asumido (α) y el observado (x/N). Para calcular dichos incrementos (bajo la hipótesis de normalidad) se calculan los valores críticos asumido y observado y se realiza el siguiente cálculo:

$$\Delta = k_B \left(\frac{Z_{supuesto}}{Z_{observado}} - 1 \right)$$

donde k_B es el factor de escala base establecido en BCBS (1996) que es igual a 3.

Test binomial

El resultado del test binomial se basa en la aproximación de una distribución binomial por una distribución gaussiana. Los parámetros que se tienen en cuenta son:

- N es el número de observaciones.
- $\bar{\alpha} = 1 - \alpha$ que es la probabilidad de observar una excepción si el modelo es correcto.
- x que es el número de excepciones observados.

Si las excepciones son independientes (lo cuál ya es, de por sí, una afirmación aventurada) el número de excepciones se distribuye como una distribución binomial con parámetros N y p . El número de excepciones esperados es Np y la desviación estándar del número de excepciones es $\sqrt{Np(1-p)}$.

El estadístico, por tanto, del que se vale el test es:

$$Z_{Binomial} = \frac{(x - Np)}{\sqrt{Np(1-p)}} \sim N(0, 1)$$

$Z_{Binomial}$ se distribuye, por tanto, como una distribución normal estándar. La aproximación es fidedigna para valores elevados de N y p , siendo normalmente suficientes los valores típicos de *backtesting* de VaR ($N = 250$ y p en

⁴El excedente con respecto a la unidad es exactamente la probabilidad de que existan x excepciones

el rango 1 – 10 %) con los que se obtienen resultados coherentes con los otros tests.

El p – valor de este test es la probabilidad de que una distribución normal estándar exceda el valor absoluto de $Z_{Binomial}$:

$$p - valor_{Binomial} = 1 - \phi(Z_{Binomial})$$

donde $\phi(\cdot)$ es la función de densidad acumulada de la distribución normal. Cuando se observan muy pocos excepciones, relativos a los excepciones esperados, el p – valor_{Binomial} es aproximadamente la probabilidad de observar esos excepciones o menos. Cuando se observan más excepciones de los esperados es, aproximadamente, la probabilidad de observar ese número de excepciones o más (Jorion, 2011).

4.2.2. Tests de Kupiec

Tests basados en los desarrollos de Kupiec (1995).

Test de proporción de excepciones

El estadístico del test de proporción de excepciones es un ratio de verosimilitud definido por

$$\mathfrak{R}_{pof} = -2 \log \left(\frac{(1 - \alpha)^{N-x} \alpha^x}{\left(1 - \frac{x}{N}\right)^{N-x} \left(\frac{x}{N}\right)^x} \right)$$

o lo que es lo mismo

$$\mathfrak{R}_{pof} = -2 \left[(N - x) \log \left(\frac{N(1 - \alpha)}{N - x} \right) + x \log \left(\frac{N\alpha}{x} \right) \right]$$

El p – valor del test de proporción de excepciones es la probabilidad de que una distribución χ^2 con un grado de libertad exceda el valor del ratio:

$$p - valor_{Pdf} = 1 - \chi_{CDF}^2(\mathfrak{R}_{pof})$$

donde χ_{CDF}^2 es la distribución de densidad acumulada de χ^2 con un grado de libertad. El resultado de este test se acepta si $p - valor_{Pdf} < \chi_{CDF}^2(Nivel)$ donde «Nivel» es el nivel establecido para el test ⁵.

Test de tiempo hasta la primera excepción

El estadístico del test de tiempo hasta la primera excepción es un ratio de verosimilitud definido por

⁵El nivel habitual de este test y con el que se trabajará es el 0.95

$$\mathfrak{R}_{tuff} = -2 \log \left(\frac{(1 - \alpha)^{n-1} \alpha}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1} \left(\frac{1}{n}\right)} \right)$$

o lo que es lo mismo

$$\mathfrak{R}_{tuff} = -2 [\log(\alpha) + (n - 1) \log(1 - \alpha) + n \log(n) - (n - 1) \log(n - 1)]$$

y este se distribuye asintóticamente como una distribución χ^2 con un grado de libertad.

El *p-valor* del test de tiempo hasta la primera excepción es la probabilidad de que una distribución χ^2 con un grado de libertad exceda el valor del ratio:

$$p - valor_{Tf} = 1 - \chi_{CDF}^2(\mathfrak{R}_{tuff})$$

donde χ_{CDF}^2 es la distribución de densidad acumulada de χ^2 con un grado de libertad. El resultado de este test se acepta si $\chi_{CDF}^2(\mathfrak{R}_{tuff}) < \chi_{CDF}^2(Nivel)$ donde «Nivel» es el nivel establecido para el test ⁶.

4.2.3. Tests de Christoffersen

Tests basados en los desarrollos de [Christoffersen \(1998\)](#)

Test de independencia de la cobertura condicional

Para definir el ratio de verosimilitud de este test, primero deben definirse las siguientes cantidades:

- N_{00} : Número de períodos sin excepciones seguidos de períodos sin excepciones.
- N_{10} : Número de períodos con excepciones seguidos de períodos sin excepciones.
- N_{01} : Número de períodos sin excepciones seguidos de períodos con excepciones.

⁶Si la muestra bajo estudio no tiene excepciones, el estadístico mostrado anteriormente no está definido. Sin embargo, existen dos casos diferenciados: 1) si el número de observaciones es lo suficientemente grande como para que no importe cuando se produce la primera excepción será demasiado tarde para aceptar el test. Técnicamente, esto ocurre cuando el número de observaciones N es mayor que $1/\bar{\alpha}$ y entonces el test falla cuando $n = N + 1$. En este caso, el ratio de verosimilitud se muestra para $n = N + 1$ con su correspondiente *p-valor*; 2) en otros casos, no es posible afirmar con certeza si el resultado del test sería aceptar o rechazar el modelo. Existen intervalos en los que, de producirse la primera excepción, podría llevar a aceptar o a rechazar el modelo. En estos casos, el test acepta el modelo y muestra un valor indefinido para el ratio de verosimilitud y el *p-valor* (NaN)

- N_{11} : Número de períodos con excepciones seguidos de períodos con excepciones.

y las siguientes estimaciones de probabilidad condicional e incondicional:

- p_{01} : Probabilidad de tener una excepción en el período t dado que no hubo ninguna excepción en el período $t - 1$.

$$p_{01} = \frac{N_{01}}{N_{00} + N_{01}}$$

- p_{11} : Probabilidad de tener una excepción en el período t dado que hubo una excepción en el período $t - 1$.

$$p_{11} = \frac{N_{11}}{N_{00} + N_{01}}$$

- p_{IC} : Probabilidad incondicional de tener una excepción en el período t .

$$p_{IC} = \frac{N_{01} + N_{11}}{N_{00} + N_{01} + N_{10} + N_{11}}$$

Entonces, el estadístico del test viene dado por:

$$\mathfrak{R}_{cci} = -2 \log \left(\frac{(1 - p_{IC})^{N_{00} + N_{10}} p_{IC}^{N_{01} + N_{11}}}{(1 - p_{01})^{N_{00}} p_{01}^{N_{01}} (1 - p_{11})^{N_{10}} p_{11}^{N_{11}}} \right)$$

y este se distribuye asintóticamente como una distribución χ^2 con un grado de libertad. El p -valor del test de independencia de la cobertura condicional es la probabilidad de que una distribución χ^2 con un grado de libertad exceda el valor del ratio:

$$p - \text{valor}_{cci} = 1 - \chi_{CDF}^2(\mathfrak{R}_{cci})$$

donde χ_{CDF}^2 es la distribución de densidad acumulada de χ^2 con un grado de libertad. El resultado de este test se acepta si $p - \text{valor}_{cci} < \chi_{CDF}^2(\text{Nivel})$ donde «Nivel» es el nivel establecido para el test ⁷

Test mixto de cobertura condicional

El estadístico del test mixto de cobertura condicional es la suma de los ratios del test de proporción de excepciones y de independencia de la cobertura condicional

$$\mathfrak{R}_{cc} = \mathfrak{R}_{pof} + \mathfrak{R}_{cci}$$

⁷El nivel habitual de este test y con el que se trabajará es el 0.95

y este se distribuye asintóticamente como una distribución χ^2 con dos grados de libertad.

El p -valor de este test es la probabilidad de que una distribución χ^2 con dos grados de libertad exceda el valor del ratio:

$$p - valor_{cc} = 1 - \chi_{CDF}^2(\mathfrak{R}_{cc})$$

donde χ_{CDF}^2 es la distribución de densidad acumulada de χ^2 con dos grado de libertad. El resultado de este test se acepta si $\chi_{CDF}^2(\mathfrak{R}_{cc}) < \chi_{CDF}^2(Nivel)$ donde «Nivel» es el nivel establecido para el test.

4.2.4. Tests de Haas

Conjunto de pruebas desarrolladas por [Haas \(2001\)](#).

Test de independencia del tiempo entre excepciones

El estadístico del test de independencia del tiempo entre excepciones es la suma de los ratios del test de tiempo hasta la primera excepción

$$\mathfrak{R}_{tbfi} = \sum_{i=1}^x \mathfrak{R}_i^{tuff}(n_i)$$

y este se distribuye asintóticamente como una distribución χ^2 con x grados de libertad.

El p -valor del test de tiempo hasta la primera excepción es la probabilidad de que una distribución χ^2 con x grados de libertad exceda el valor del ratio:

$$p - valor_{tbfi} = 1 - \chi_{CDF}^2(\mathfrak{R}_{tbfi})$$

donde χ_{CDF}^2 es la distribución de densidad acumulada de χ^2 con un grado de libertad. El resultado de este test se acepta si $\chi_{CDF}^2(\mathfrak{R}_{tbfi}) < \chi_{CDF}^2(Nivel)$ donde «Nivel» es el nivel establecido para el test.⁸

Test mixto de tiempo entre excepciones

El estadístico del test mixto de tiempo entre excepciones es la suma de los ratios del test de proporción de excepciones y de independencia del tiempo entre excepciones

$$\mathfrak{R}_{tbf} = \mathfrak{R}_{pof} + \mathfrak{R}_{tbfi}$$

y este se distribuye asintóticamente como una distribución χ^2 con $x + 1$ grados de libertad.

⁸Si no hay excepciones el estadístico no está definido.

El p – valor de este test es la probabilidad de que una distribución χ^2 con $x + 1$ grados de libertad exceda el valor del ratio:

$$p - valor_{tbf} = 1 - \chi_{CDF}^2(\mathfrak{R}_{tbf})$$

donde χ_{CDF}^2 es la distribución de densidad acumulada de χ^2 con $x + 1$ grados de libertad. El resultado de este test se acepta si $\chi_{CDF}^2(\mathfrak{R}_{cc}) < \chi_{CDF}^2(Nivel)$ donde «Nivel» es el nivel establecido para el test.⁹

4.3. Bakctesting de ES

La demostración de que el Expected Shortfall no es una medida elicitable ([Gneiting, 2009](#)) supuso la difusión de la idea errónea de que el ES no podía ser «backstestado». Este error conceptual fue la causa de numerosas críticas a la reciente decisión del comité de Basilea cuando decidió adoptar el ES en lugar del VaR. En su trabajo ([Acerbi and Szekely, 2014](#)) C. Acerbi y B. Szekely introducen tres metodologías no paramétricas e independientes del modelo utilizado para realizar el *backtesting* del ES que son más potentes que las metodologías expuestas por el comité de Basilea. Estos tests requieren, habitualmente, la utilización de una mayor cantidad de espacio para almacenamiento de información pero, al mismo tiempo, no introducen ningún tipo de limitación conceptual ni dificultades computacionales de ningún tipo. Otro aspecto fundamental que se menciona en [Acerbi and Szekely \(2014\)](#) es el hecho de que la elicitabilidad es una propiedad relevante a la hora de la selección de modelos, pero que desde el punto de vista del *backtesting* y, por tanto, desde una perspectiva regulatoria, se trata de una propiedad irrelevante. De hecho, demuestran que mediante una determinada combinación entre VaR y ES pueden conseguir una medida elicitable lo que, en principio, soluciona este problema también.

4.3.1. Pruebas de Acerbi-Szekely

También se conocen como test incondicionales y fueron desarrollados por Carlo Acerbi y Balazs Szekely en [Acerbi and Szekely \(2014\)](#).

$$ES_t = \mathbb{E} \left[\frac{\mathbb{1}_{(r_t > VaR)} r_t}{\bar{\alpha}} \right]$$

el estadístico de la prueba es, por tanto

$$Z = \frac{1}{N_{\bar{\alpha}}} \sum_{t=1}^N \left[\frac{\mathbb{1}_{(X_t > VaR)} r_t}{ES_t} \right] + 1$$

⁹Si no hay excepciones el estadístico no está definido.

También hay que definir la severidad de la pérdida, ratio de severidad o, simplemente severidad como:

$$\hat{\mathcal{S}} = \frac{ES}{VaR}$$

siendo este su valor esperado o estimado, mientras que el valor real u observado será

$$\mathcal{S} = \frac{r_t}{VaR}$$

Acerbi-Szekely Normal

Se compara el estadístico mencionado con el que proporciona una distribución normal.

Acerbi-Szekely T

Se compara el estadístico mencionado con el que proporciona una distribución T con tres grados de libertad.

4.3.2. Tests de simulación paramétrica

Estos tests no se utilizarán puesto que no permiten poner a prueba modelos que no provengan de asumir como distribución subyacente una distribución normal o una distribución T. Estas pruebas son el test condicional, el cuantil y el incondicional (paramétrico) [The Mathworks \(2019\)](#).

Capítulo 5

Análisis empírico

El criterio para la selección de datos no ha sido otro que el de que fueran series temporales lo suficientemente largas para disponer de suficientes datos y la ponderación de los mismos (el tamaño relativo de cada activo en el portafolio) se ha establecido de forma aleatoria. Con esto se pretende simular la situación de un portafolio real. A continuación se muestran los resultados analizados minuciosamente para un portafolio completo. Estos resultados se han comprobado para otros portafolios con distintos activos y ponderaciones obteniendo los mismos resultados ¹

La esperanza es que el método, en la medida en que tiene un ajuste extraordinario en las colas, proporcione mejores resultados en el cálculo del ES que en el del VaR que, al fin y al cabo, es simplemente el cálculo de un percentil. Dicho de otra manera, la potencia del método, supuesto que modele de manera convincente las colas de la distribución, se verá a la hora de evaluar el peso que tienen las colas con respecto a la distribución (esto es, de una u otra manera, calcular el ES ²).

5.1. Análisis preliminar

Es de una importancia fundamental, remarcar el hecho de que la representación que se muestra en la [Figura 5.11](#), nos enseña, por un lado, la distribución de los retornos logarítmicos en forma de un histograma de densidad de probabilidad y, por otro lado, *nuestra exposición teniendo en cuenta las ponderaciones que hemos asignado a los distintos elementos de nuestro portafolio*. Con esto se quiere mostrar que *no es tan importante tratar de predecir como será la distribución de los retornos cuanto establecer una exposición a los mismos que sea*

¹Los valores numéricos de los tests evidentemente varían, pero la selección de este portafolio es representativa de la mayoría de los casos: el desempeño relativo de los distintos modelos siempre es el mismo salvo pequeñas variaciones.

²Más concretamente es calcular la severidad

adecuada teniendo en cuenta criterios de riesgo, beneficio u otros similares.

5.2. Portfolio

Nuestro portfolio está compuesto por [[Tabla con nombres e índices]] variando desde el año 2005 hasta el año 2016. La elección de estas fechas responde al hecho de que son activos con los datos al completo con mayor longitud de serie temporal. Para la representación de los diez elementos del portfolio, se ha elegido un gráfico 5.1 donde se representa la variación logarítmica de los precios $\log(P)$ de los diez activos frente al tiempo t . El tiempo, se ha pasado a unidades sin magnitud (en lugar de conservar las fechas) para facilitar la representación. En algunos casos, como en el *backtesting* del ES, se recuperan ciertas fechas para comparar severidades de pérdida en distintos períodos.

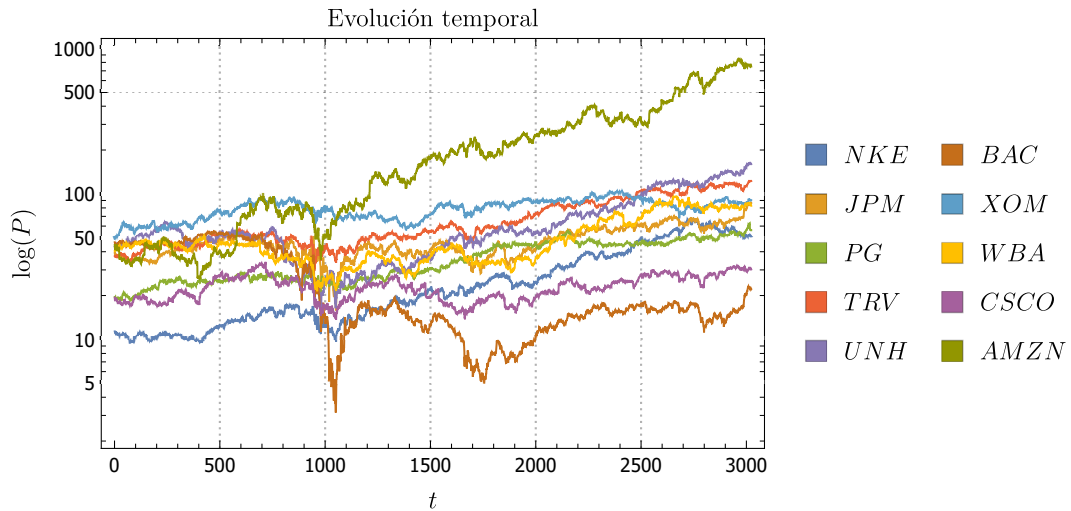


Figura 5.1: Retornos logarítmicos del portfolio

5.2.1. Medidas de dispersión y relación

Como medidas de dispersión mostraremos, por un lado, los gráficos de cajas del portfolio completo 5.2 y dos ejemplos individuales de gráficos de cajas y gráficos Q-Q para los dos primeros elementos del portfolio, por orden alfabético, que servirán de muestra (gráficos 5.3b, 5.3a, 5.4a y 5.4b). La representación individualizada del resto de elementos del portfolio se reserva para los apéndices, donde se presenta un análisis detallado de cada activo. Por último, se muestra la representación de la matriz de correlaciones de forma numérica y de forma gráfica (5.5).

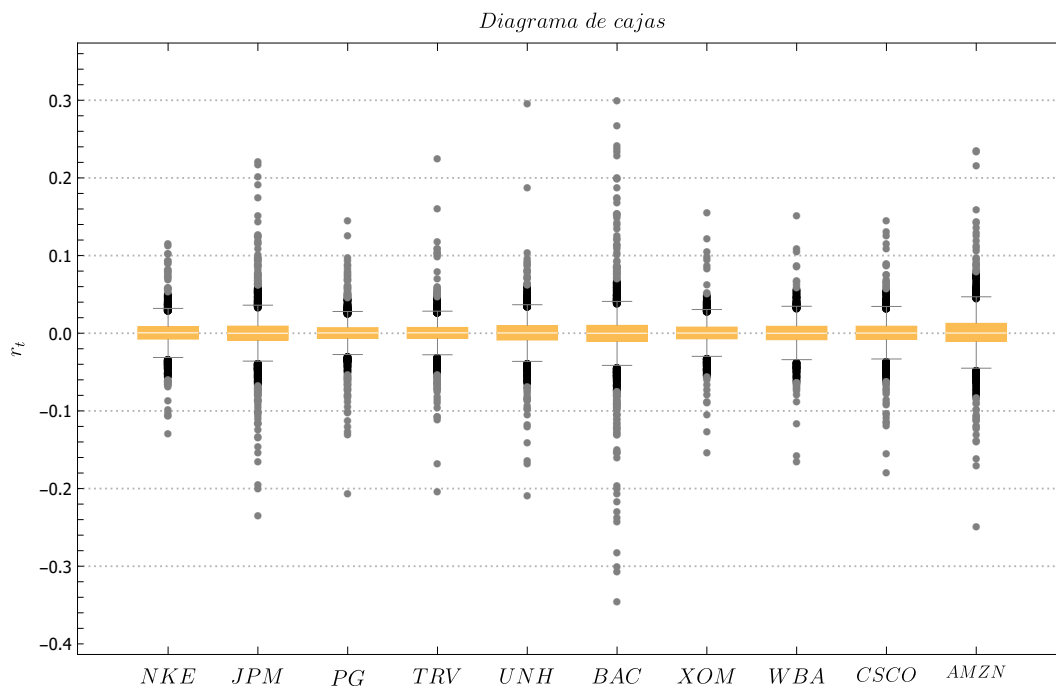


Figura 5.2: Gráfico de cajas de los retornos de cada activo

Gráficos de cajas

La representación de los gráficos de cajas nos permite ver como se agrupan los retornos de nuestros distintos activos a través de la representación de los cuartiles. En este caso se trata de un gráfico de cajas con bigotes (*boxwhisker chart*), que representan el mayor y menor dato cuya distancia a la caja es aún menor que 1.5 veces el rango intercuartílico. La representación de los gráficos de cajas no es paramétrica en el sentido de que no necesita asumir ninguna distribución subyacente. Viendo los gráficos de nuestro portafolio 5.2 podemos compararlos con la distribución más familiar para la que suelen representarse. Es evidente que, por simple inspección visual, se tratan de distribuciones que en ocasiones se encuentran mucho más «agolpadas» en sus valores centrales y en otras ocasiones mucho más dispersas y con una presencia incomparable de valores atípicos o *outliers*. Además de dicho agolpamiento (que se estima cuantitativamente a través del curtosis) se puede observar que, por otro lado, son distribuciones considerablemente simétricas salvo la excepción de unos pocos valores (fundamentalmente en el caso de UNH) pero que, como veremos, aún así tiene un skewness muy bajo.

Si nos fijamos específicamente en el gráfico de cajas de AMZN, podemos ver como el centrado con respecto al cero es prácticamente total y la distribución tiene una oblicuidad muy baja ($\gamma_1 = 1.3245$) y un curtosis elevado ($\kappa = 4.0523$) lo que sugiere la presencia de una gran cantidad de datos en el centro de la distribución, siendo una distribución leptocúrtica.

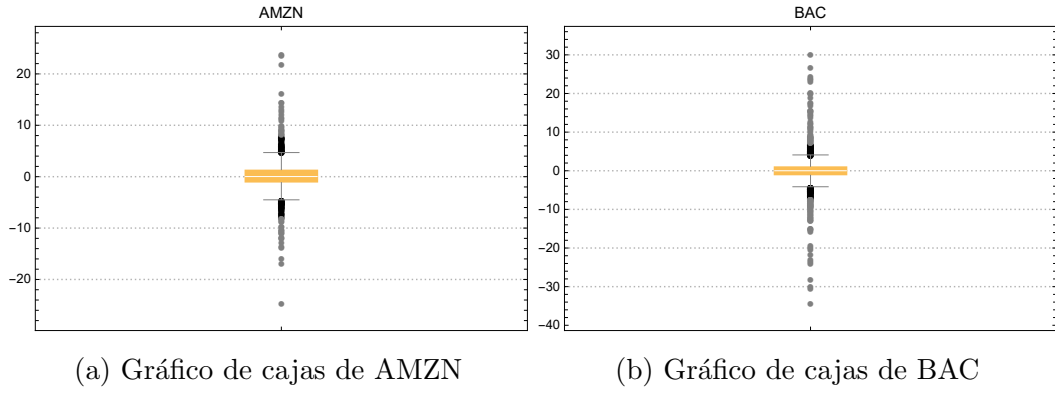


Figura 5.3: Detalle de gráficos de cajas del portfolio

Si nos fijamos específicamente en el gráfico de cajas de BAC, podemos ver como el centrado con respecto al cero también es prácticamente total y la distribución tiene una oblicuidad menor que en el caso anterior lo que indica simetría ³ ($\gamma_1 = 0.82$) y un curtosis menor que 3 ($\kappa = 2.03$) lo que sugiere que se trata de una distribución platicúrtica.

Podemos ver un resumen en la tabla 5.1 donde $\delta(\cdot)$ es la desviación media absoluta con respecto a $\cdot$, $\tilde{x}$ es la mediana y $\bar{x}$ la media.

En un portfolio con colas muy pesadas todos sus elementos no tienen colas pesadas (aunque ninguno se distribuye acorde a una normal) sino que es la combinación de distribuciones leptocúrticas y mesocúrticas lo que provoca que la distribución de retornos ponderados herede esas características, adquiriendo tanto cuerpos (centrales) como colas con mucho peso. Este es uno de los hechos que habíamos adelantado en el capítulo de teoría y que quedaba esquematizado por la gráfica 2.12.

La idea es que, cuando se calcula la varianza, al elevar los términos al cuadrado, estos se hacen muy grandes, inflándose, para luego desinflarse cuando se hace la raíz cuadrada. Cuando los términos del error son muy elevados (cuando hay valores atípicos con un valor muy elevado) este proceso puede llevar a que la varianza crezca demasiado. Si el objetivo es

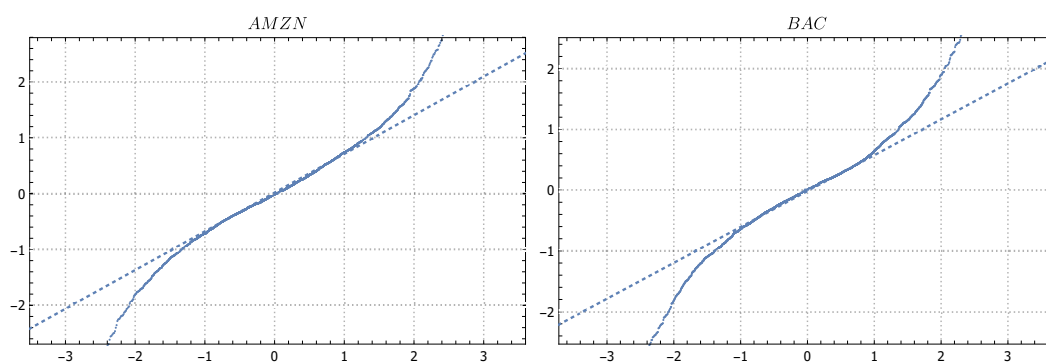
Gráficos de probabilidad

La representación de los gráficos Q-Q es un caso específico de los gráficos de probabilidad que nos permite la comparación entre la distribución de retornos de cada uno de nuestros activos con la distribución normal mediante la comparación de cuantiles. Es sabido que, si los puntos se distribuyen acorde a una distribución normal, se colocarán ordenadamente en la recta punteada. En el caso de que la distribución esté linealmente relacionada con una distribución

³Skewness igual a cero no significa simetría pero en este caso teniendo la inspección visual sí

Cuadro 5.1: Métricas de dispersión y simetría. Valores en %

Índice	σ	$\delta(\bar{x})$	$\delta(\tilde{x})$	γ_1	κ
NKE	16.02	13.33	8.33	0.96	2.65
JPM	11.21	9.09	7.39	0.58	3.12
PG	10.98	10.23	7.94	0.26	1.53
TRV	24.97	21.81	11.56	0.75	2.14
UNH	32.88	25.54	16.99	1.13	3.38
BAC	15.53	13.69	4.58	0.82	2.03
XOM	12.16	10.38	8.72	-0.29	2.12
WBA	18.45	14.93	8.73	0.95	2.67
CSCO	4.41	3.75	3.68	0.18	2.07
AMZN	199.63	155.21	117	1.32	4.05



(a) Gráfico QQ de los retornos de AMZN. (b) Gráfico QQ de los retornos de BAC.

Figura 5.4: Detalle de gráficos QQ del portfolio

normal, los puntos se distribuirán a lo largo de una línea, pero que no será la misma que la línea de guiones. En nuestro caso, observando las gráficas 5.4a y 5.4b, vemos que no se trata de ninguno de los dos casos.

Si nos fijamos específicamente en el caso de AMZN (5.4a), vemos como hay un cierto tramo de coincidencia (donde el gráfico se asemeja a la recta tangente al punto de inflexión de los datos) pero que, después, el número de desviaciones elevadas es mucho mayor que el que cabría esperar para una distribución normal. Es decir, *que proporciona retornos neutrales de manera similar a una distribución normal, pero que proporciona pérdidas y ganancias elevadas en muchas más ocasiones de las que cabría esperar para una distribución normal*. El caso específico de BAC (5.4a) responde al mismo esquema que el anterior pero, si cabe, aún de forma más acentuada.

El rechazo de la hipótesis de normalidad que intuimos de manera visual queda confirmado con la ayuda del test de Barinhaus-Renze:

Cuadro 5.2: Test de normalidad Baringhaus-Henze

Test	Valor del estadístico	p-valor
Baringhaus-Henze	10.43	0

Matriz de correlación gráfica

En nuestro caso, la diversificación podría jugar un papel fundamental a la hora de reducir el riesgo. Esto es algo que, como se ha comentado anteriormente, el VaR no tendría en cuenta

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0.481 & 0.487 & 0.446 & 0.36 & 0.421 & 0.443 & 0.381 & 0.458 & 0.399 \\ 0.481 & 1 & 0.617 & 0.608 & 0.382 & 0.807 & 0.466 & 0.39 & 0.496 & 0.371 \\ 0.487 & 0.617 & 1 & 0.66 & 0.425 & 0.532 & 0.507 & 0.361 & 0.477 & 0.381 \\ 0.446 & 0.608 & 0.66 & 1 & 0.452 & 0.545 & 0.524 & 0.377 & 0.466 & 0.365 \\ 0.36 & 0.382 & 0.425 & 0.452 & 1 & 0.365 & 0.407 & 0.346 & 0.341 & 0.295 \\ 0.421 & 0.807 & 0.532 & 0.545 & 0.365 & 1 & 0.42 & 0.32 & 0.451 & 0.319 \\ 0.443 & 0.466 & 0.507 & 0.524 & 0.407 & 0.42 & 1 & 0.384 & 0.497 & 0.363 \\ 0.381 & 0.39 & 0.361 & 0.377 & 0.346 & 0.32 & 0.384 & 1 & 0.367 & 0.314 \\ 0.458 & 0.496 & 0.477 & 0.466 & 0.341 & 0.451 & 0.497 & 0.367 & 1 & 0.413 \\ 0.399 & 0.371 & 0.381 & 0.365 & 0.295 & 0.319 & 0.363 & 0.314 & 0.413 & 1 \end{pmatrix}$$

5.3. Ponderación de los retornos

5.3.1. Mediante optimización de portfolio

Se utiliza un proceso de optimización para minimizar la volatilidad. Ponderación correspondiente a la figura 5.6. La muestra de esta figura nos permite tomarla como referencia de la composición que debería tener el portfolio si queremos minimizar la volatilidad del mismo.

5.3.2. Ponderación aleatoria

Se utiliza una ponderación generada aleatoriamente. Correspondiente a la figura 5.7. Se ha elegido una ponderación aleatoria de los activos de manera que represente una posición más realista.

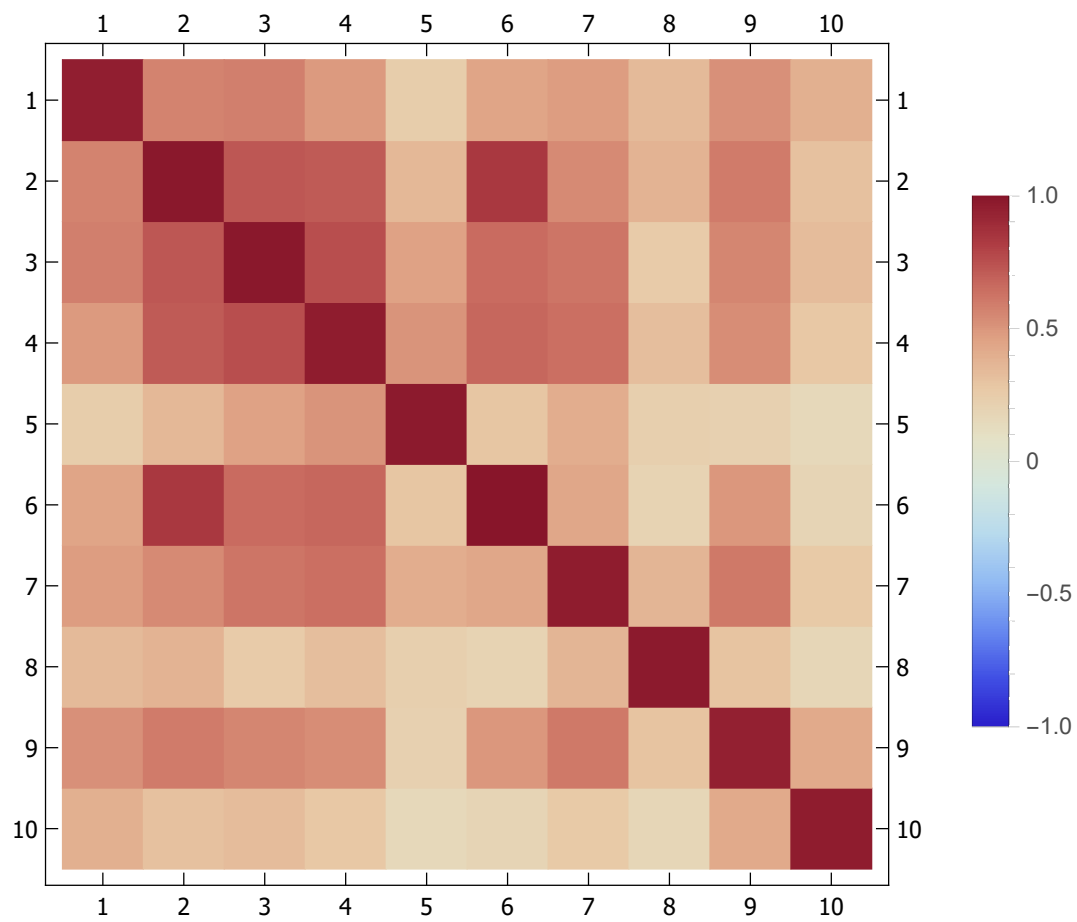


Figura 5.5: Representación gráfica de la matriz de correlaciones

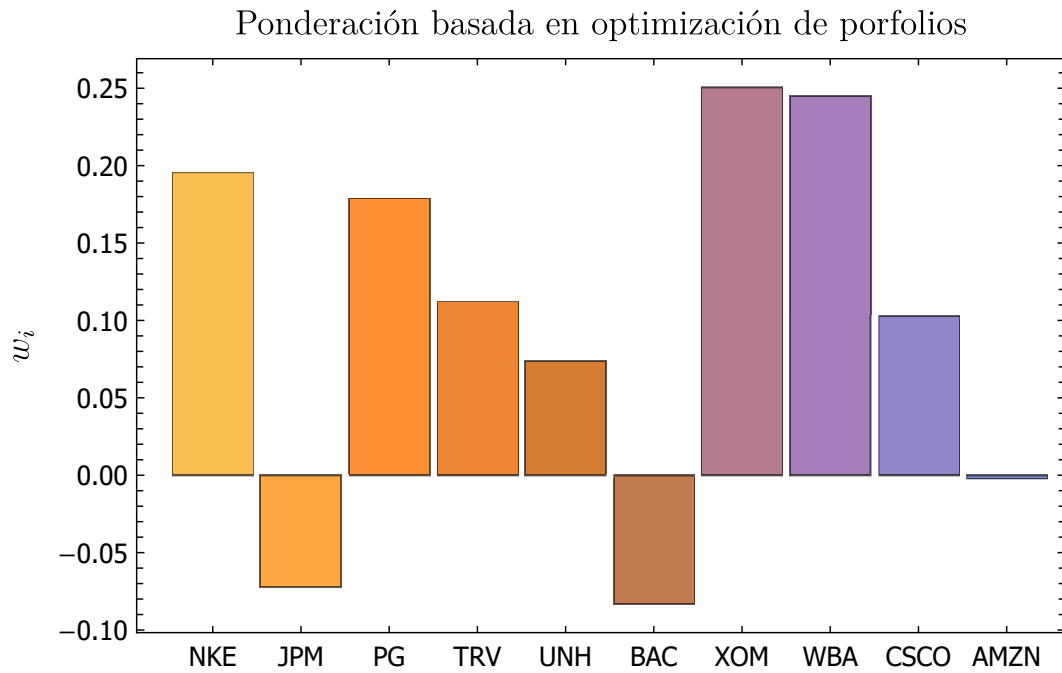


Figura 5.6: Ponderación del portafolio correspondiente a la minimización de la volatilidad.

5.4. Retornos

La representación de los retornos ponderados.

Las demarcaciones con línea discontinua de la figura 5.9 representan un período de tiempo de dos años.

5.4.1. Modelado de los retornos con distribución de Laplace

A partir de aquí, se considerarán las pérdidas como retornos positivos. De esta manera, nos ahorraremos escribir las cantidades continuamente con signos negativos.

Por ser una distribución simétrica (con dos colas) puede utilizarse como aproximación inicial a la distribución de los retornos.

Comparación del desempeño de Laplace y GPD

La buena adaptación visual que observamos con la distribución de Laplace ya es un buen síntoma de que las colas pueden modelarse con distribuciones de Pareto debido a sus similitudes⁴. De lo que se trata ahora es de ver cuál de las dos funciona mejor para hacer el fit a los datos.

⁴Cuando se hace el límite de que algo tiende a cero se obtiene una exponencial. La distribución de Laplace no es más que una doble exponencial.

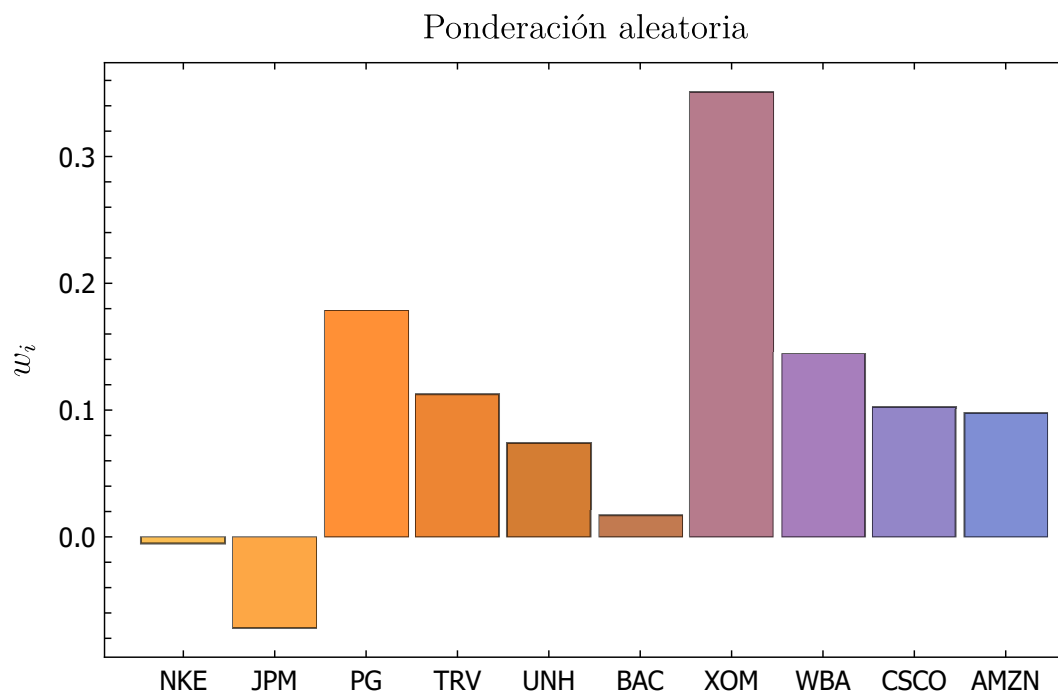


Figura 5.7: Ponderación aleatoria.

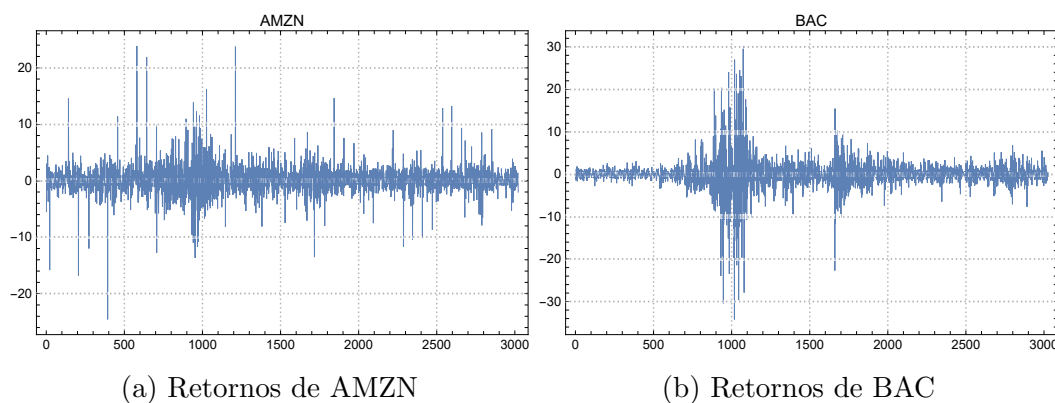


Figura 5.8: Detalle de retornos del portfolio

Por último, comprobamos en la figura 5.16, la cantidad de casos (en realidad su densidad de probabilidad), que hay a esas «alturas» de la distribución. Vemos que la realidad supera al modelo aunque por poco en lo que a colas pesadas se refiere 4.1.

Las diferencias son muy ajustadas y esto se muestra en la (también ajustada) diferencia que se muestra al comparar cuantitativamente cuál de los dos ajustes es mejor utilizando el criterio de información del Akaike que es un criterio entrópico (Geman et al., 2014):

$$\text{AIC} = 2k - 2\ln(\hat{L})$$

El software *Mathematica* nos arroja de forma automática tres distribuciones

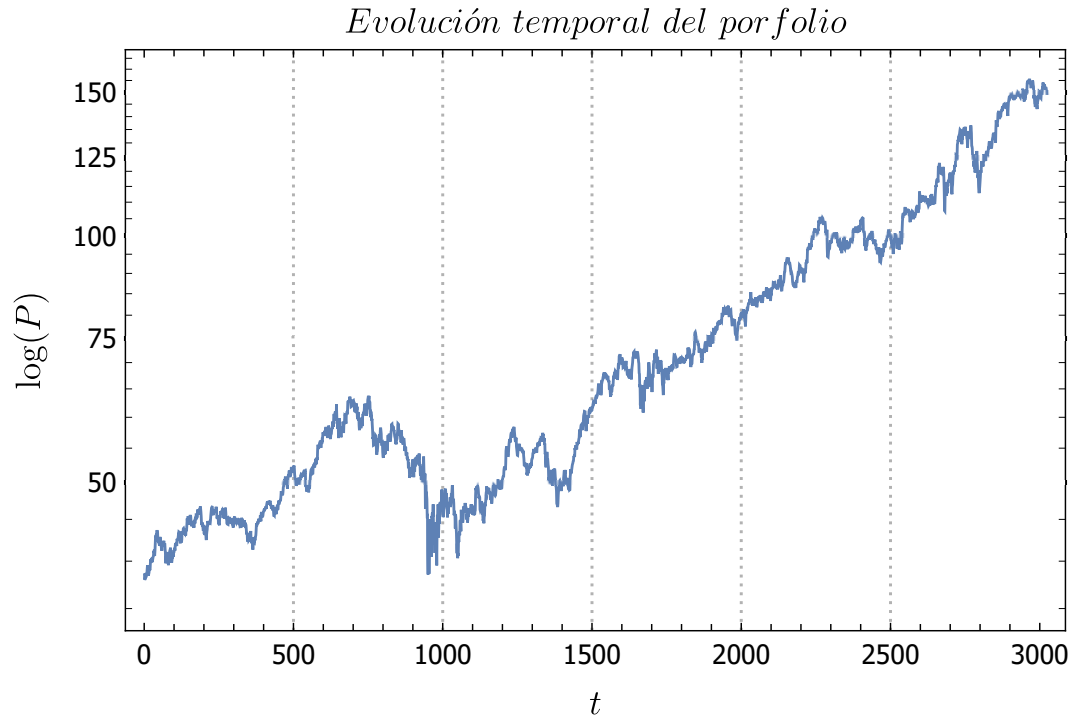


Figura 5.9: Exposición del portolio y retornos de las acciones.

más: Exponencial, Gamma y de Weibull. Como tenemos 4 candidatos, debe calcularse la cantidad:

$$\vartheta(i) = e^{(AIC_{\min} - AIC_i)/2}$$

que debe interpretarse como un valor proporcional a la probabilidad de que el i -ésimo modelo minimice la pérdida (estimada) de información (Burnham, 2002). El segundo y tercer modelo son 0.000363 veces igual de probables que el primer modelo en cuanto a la minimización de la información perdida en el modelado.

Además, en pos de la completitud, se ha añadido el criterio de información bayesiano (*bayesian information criterion* o BIC) que tiene una expresión similar al anterior:

$$\text{BIC} = \ln(n)k - 2\ln(\hat{L})$$

pero en este caso se tienen en cuenta el tamaño de la muestra (n).

Con ayuda de la tabla 5.3 podemos ver que la intuición de que la distribución de Pareto constituye la mejor opción de ajuste está justificada también desde un punto de vista de la información.

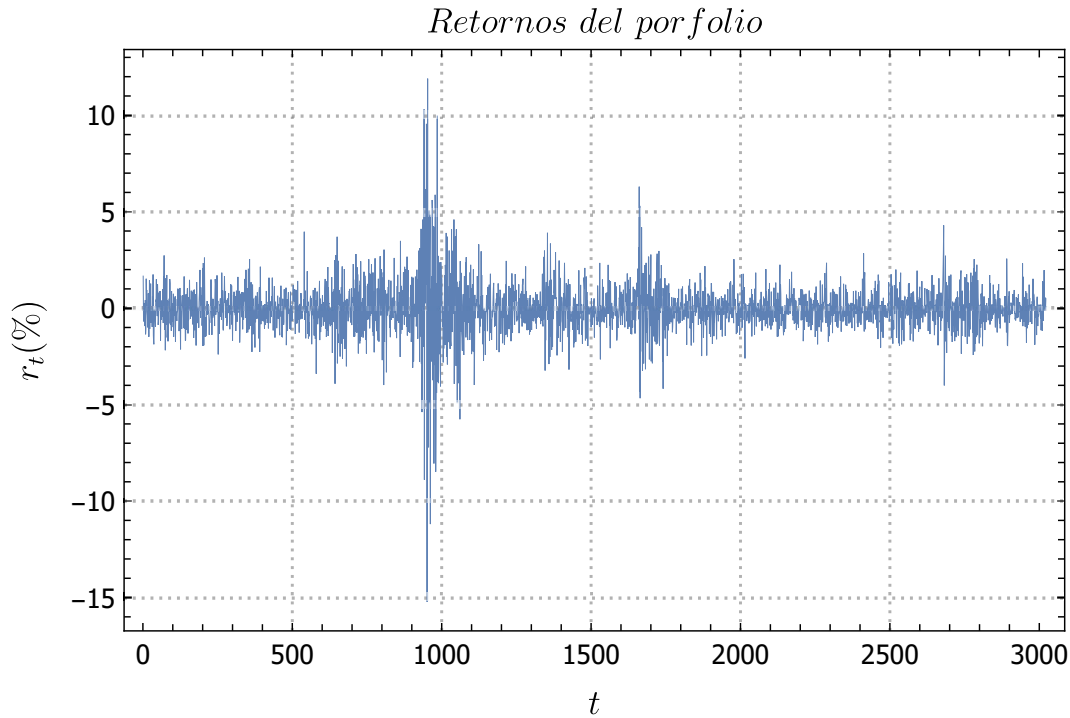


Figura 5.10: Exposición del portolio y retornos de las acciones.

5.4.2. Modelado con Pareto

La comparación relativa entre el modelado con la distribución de Pareto y el resto se confirma cuando se realiza la comparación entre la distribución teórica y los datos reales de las colas. Como podemos observar en las figuras 5.17 y 5.18, el ajuste es de una calidad muy elevada. El primero de los gráficos es el equivalente a los gráficos QQ que se han presentado anteriormente, peor considerando la distribución punteada como la distribución teórica de Pareto de nuestro ajuste mientras que, la segunda figura, representa la probabilidad acumulada de la distribución teórica y la empírica (que es la que presenta un aspecto escalonado). Estas gráficas son dos caras de la misma moneda y con las dos podemos confirmar el buen ajuste que representa la distribución de Pareto que se ha calculado.

VaR

En las figuras 5.19 y 5.20 se muestran los resultados de nuestro modelado para el VaR y los dos niveles de confianza habituales.

Expected Shortfall

En las figuras 5.21 y 5.22 se muestran los resultados de nuestro modelado para el ES y los dos niveles de confianza habituales. Posteriormente, cuando

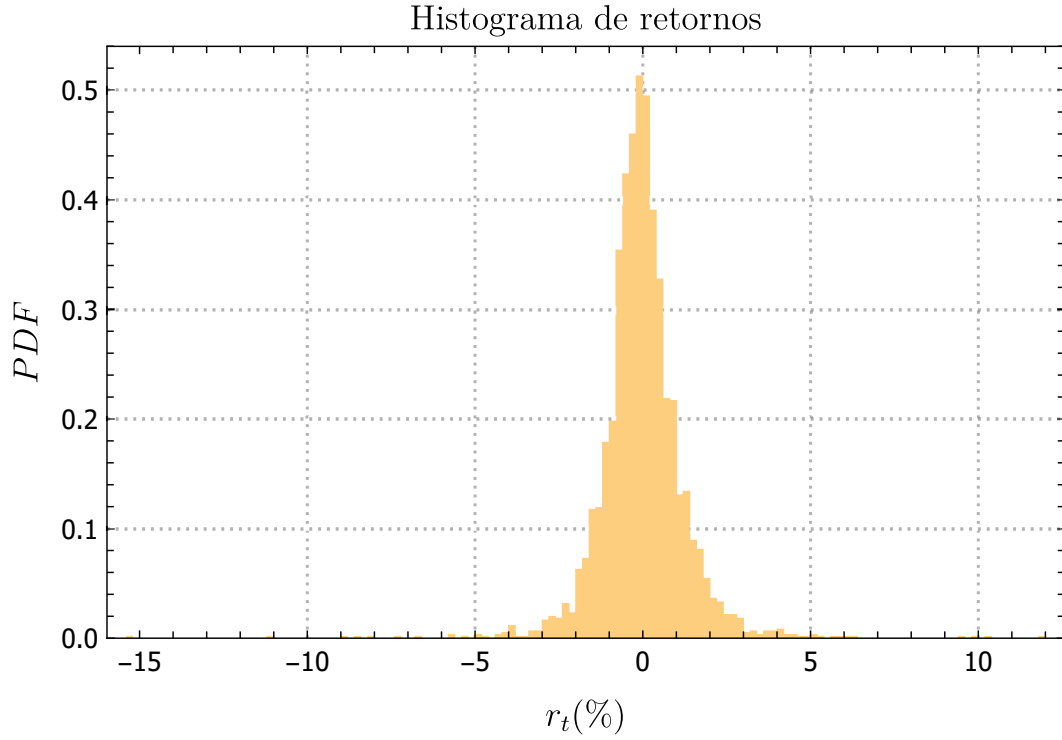


Figura 5.11: Exposición del portfolio y retornos de las acciones.

se utilice el ES para el *backtesting* se utilizará el nivel de confianza del 97.5 % según lo que se establece en [Akkizidis and Kalyvas \(2018\)](#).

5.5. Backtesting

Para el *backtesting* se utilizarán los métodos mencionados en el capítulo homónimo. Se mostrarán las tablas de resultados con sus correspondientes comentarios. Al mismo tiempo, se juzgarán críticamente los distintos tests aportando, al final, una métrica alternativa que proporcione una puntuación a cada medida de forma que puedan ordenarse según su desempeño. En el caso del VaR, el nivel de confianza siempre es 0.95 o 0.99, mientras que el nivel de test será 0.95 salvo que se diga lo contrario. Para el caso del ES, el nivel de confianza siempre es 0.975 según lo establecido en [3.1](#), mientras que el nivel de test será 0.95 salvo que se diga lo contrario.

5.5.1. Backtesting VaR

Test del semáforo

En el primer caso tenemos el test del semáforo. El significado de la columna de «Probabilidad» y «Tipo I» se comentan en su apartado del capítulo de métodos correspondiente ([4.6](#)). Este test muestra, de forma aproximada, lo

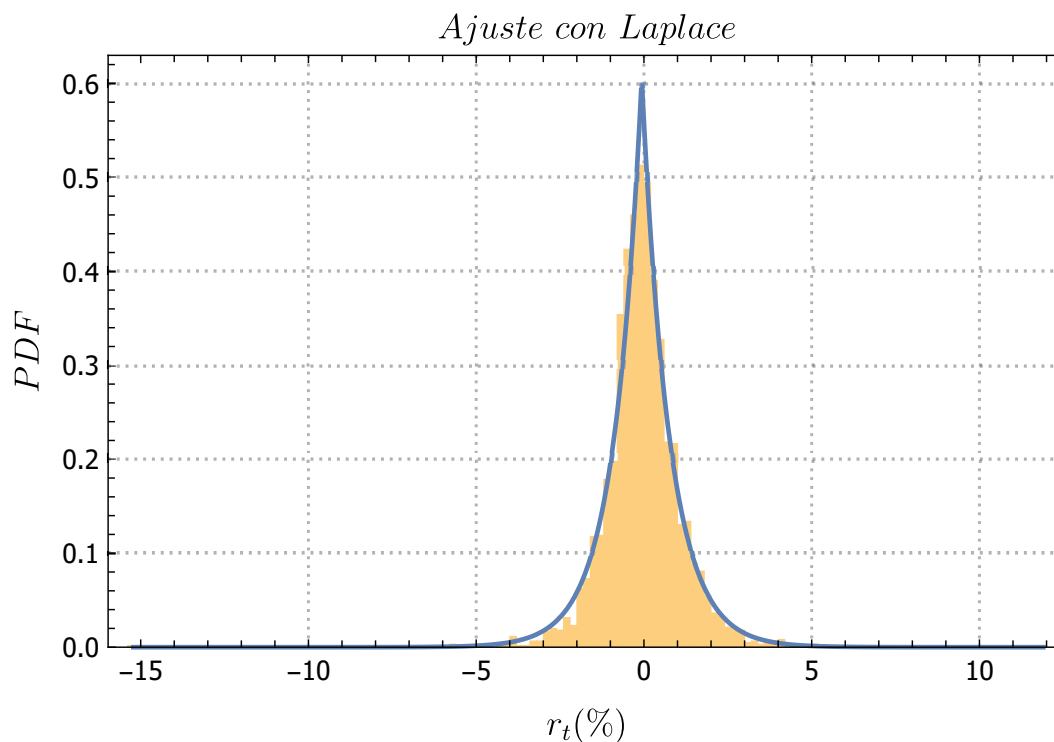


Figura 5.12: Exposición del portfolio y retornos de las acciones.

que va a ser la tónica general del *backtesting*: el método histórico y el método propuesto, GPD, son los que mejor desempeño presentan (5.5). Rechazar el modelo GPD siendo este correcto tiene una probabilidad de, aproximadamente, un 50 % en ambos casos. Este dato solo es mejorado por el método histórico que se sitúa en valores entre el 66 % y el 70 %. Aunque, como se ha comentado ya, la columna «Probabilidad» no representa la complementaria de la «Tipo I», si puede comentarse que ambas posicionan de la misma manera relativa a todos los métodos. Es decir, para establecer una ordenación realtiva entre los métodos ambas columnas aportan resultados coherentes.

Test binomial

Tanto este test como el anterior se basan en la aproximación de la distribución normal por una binomial por lo que son dos caras de la misma moneda. Los resultados que aporta esta prueba (presentes en la tabla 5.6) redundan en lo que acaba de comentarse. Ahora bien, en este caso, en lugar de establecer la zona en la que se encuentra el método, aportando un resultado gradual que va desde el «verde» al «rojo», vemos que tanto el EWMA para los dos niveles de confianza establecidos como el Normal para el 0.99 quedan rechazados por el test binomial. En este caso, los mejores valores del estadístico del test son para el método GPD, que muestra los valores de Z más cercanos a cero, lo que le lleva a obtener los p-valores más cercanos a 0.5 (que es el mejor valor del

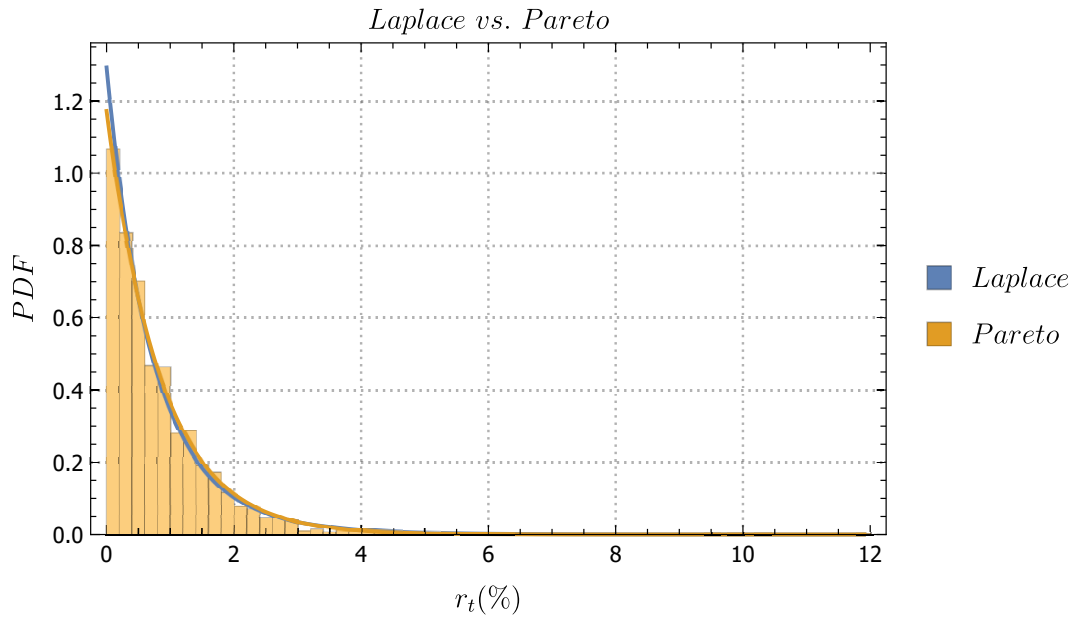


Figura 5.13: Laplace vs. Pareto, 1

Cuadro 5.3: Métricas de ajuste entrópicas

Distribución	AIC	BIC	Δ AIC	$\vartheta(i)$
$GPD(0, 0.77, 0.09)$	2361.19	2371.69	0	1
$Laplace(0, 0.85)$	2377.03	2382.28	-15.84	0.000363
$Exp(1.17)$	2377.03	2382.28	-15.84	0.000363
$\Gamma(0.90, 1.01)$	2388.24	2393.49	-27.05	0
$Weib(0.91, 0.87)$	2390.36	2400.86	-29.17	0

test).

Test de proporción de excepciones

El test de proporción de excepciones nos confirma la dirección que establecen las dos primeras pruebas: los mejores rendimientos son para el método histórico y el GPD. Sin embargo, este caso presenta una particularidad, pese a que el número de excepciones para el método histórico es el menor para ambos niveles de confianza, los valores del ratio de esta prueba y los p-valores, sitúan en mejor posición al método GPD. El motivo es que este test premia la precisión y no solo el hecho de cometer menos errores. Es decir, los resultados de esta prueba (5.7) nos indican que, para el método GPD, hay un mejor ajuste entre el nivel de VaR establecido y el observado. Otra forma de ver este hecho es interpretarlo como que el método histórico resulta excesivamente conser-

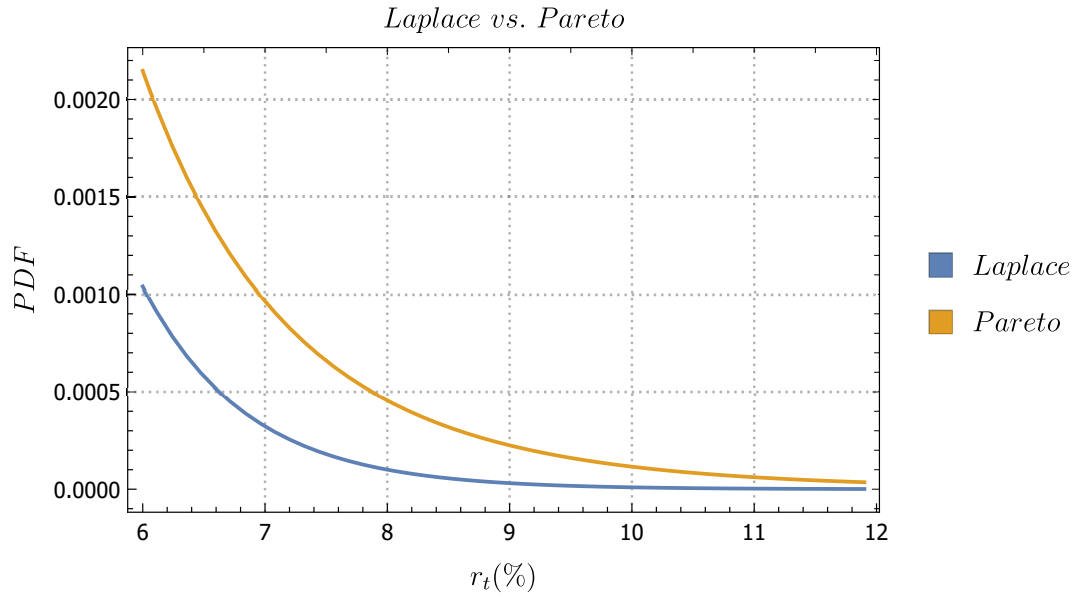


Figura 5.14: Laplace vs. Pareto, 2

vador desde el punto de vista del test de proporción de excepciones. Como luego comentaremos, este resultado resulta fundamental puesto que representa la verdadera confirmación de la idoneidad del ajuste de Pareto para el cálculo del VaR: los valores esperados de excepciones para los dos niveles de confianza son los que más se acercan a los valores esperados situándose en el mejor equilibrio entre posiciones conservadoras y de ajuste excesivo.

Test de tiempo hasta la primera excepción

El test de tiempo hasta la primera excepción (tabla 5.8) no arroja resultados relevantes. Una excepción que se presenta en los primeros momentos de la prueba provoca que los datos que aporta el test sean irrelevantes. En cualquier caso, esto demuestra la sensibilidad del test y nos permite ver que se trata de una prueba poco valiosa a la hora de evaluar el desempeño de nuestros distintos métodos.

Test de independencia de la cobertura condicional

Lo que cabe resaltar del test de independencia de la cobertura condicional es que no es tan exigente en su cumplimiento como los otros. También es importante remarcar el hecho de que para el 95 % de confianza el método que mejor desempeño presenta es el método GPD ($\mathfrak{R} = 0.0001$) mientras que para el 99 % el mejor resultado se lo lleva el método normal ($\mathfrak{R} = 0.0497$) seguido del GPD ($\mathfrak{R} = 0.5714$). El p-valor más elevado es para el método GPD con un valor que llega hasta el 0.9905.

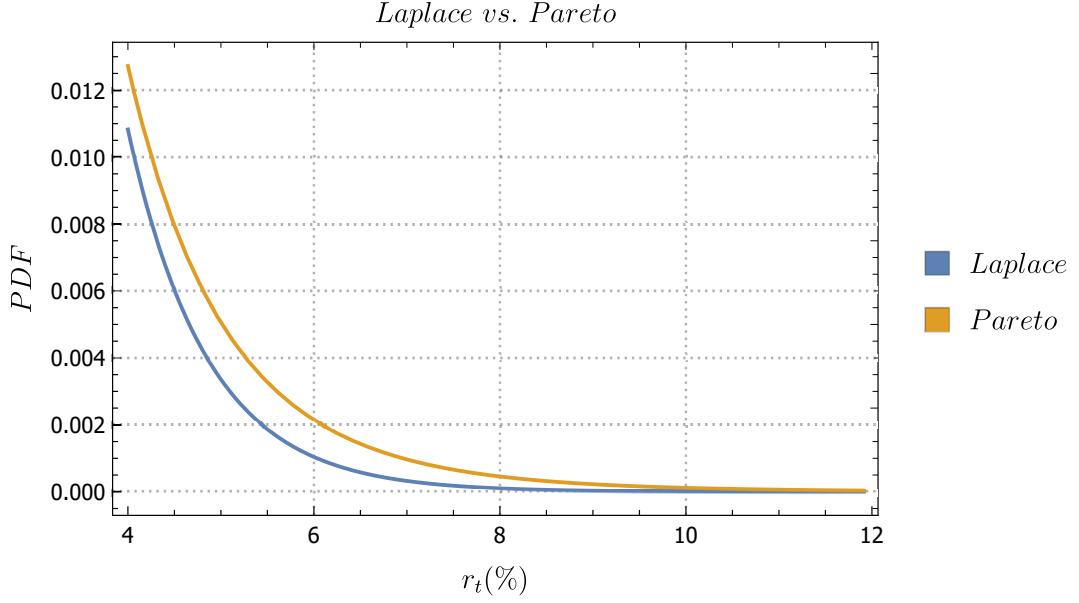


Figura 5.15: Laplace vs. Pareto, 3

Test mixto de cobertura condicional

Comparando los resultados con el caso anterior vemos como, ahora, estableciendo el test mixto, el mejor rendimiento se lo lleva el método GPD para ambos casos. En esta situación (al combinar con el test de proporción de excepciones) vemos como, el método normal, que en la prueba inmediatamente anterior se situaba como uno de los mejores valorados, en este caso llega a rechazarse. Esto demuestra la poca consistencia del método normal en lo que tiene que ver con la evaluación de las distintas características que ponen a prueba los test de *backtesting*. El método GPD obtiene $\mathfrak{R} = 0.0011$ en su versión con $\alpha = 95\%$ y $\mathfrak{R} = 0.5741$ en su versión con $\alpha = 99\%$. La combinación de los tests en forma de tests mixtos da una mejor idea de la robustez de nuestro método frente al resto.

Test de independencia del tiempo entre excepciones y test mixto del tiempo entre excepciones

La similitud de los resultados entre el test de independencia del tiempo entre excepciones y test mixto del tiempo entre excepciones nos permite realizar un análisis conjunto de los mismos. Dada la excepcionalidad de los resultados de este test (se rechazan todos menos los que han tenido peor desempeño en el resto de casos) se han elaborado, adicionalmente a las tablas 5.11 y 5.12, las figuras 5.27a y 5.27b. Si nos fijamos en estas figuras, podemos comprender lo que premia este test. En el eje vertical, están representados los intervalos de tiempo entre excepciones. Como se puede apreciar en estas figuras, el test se

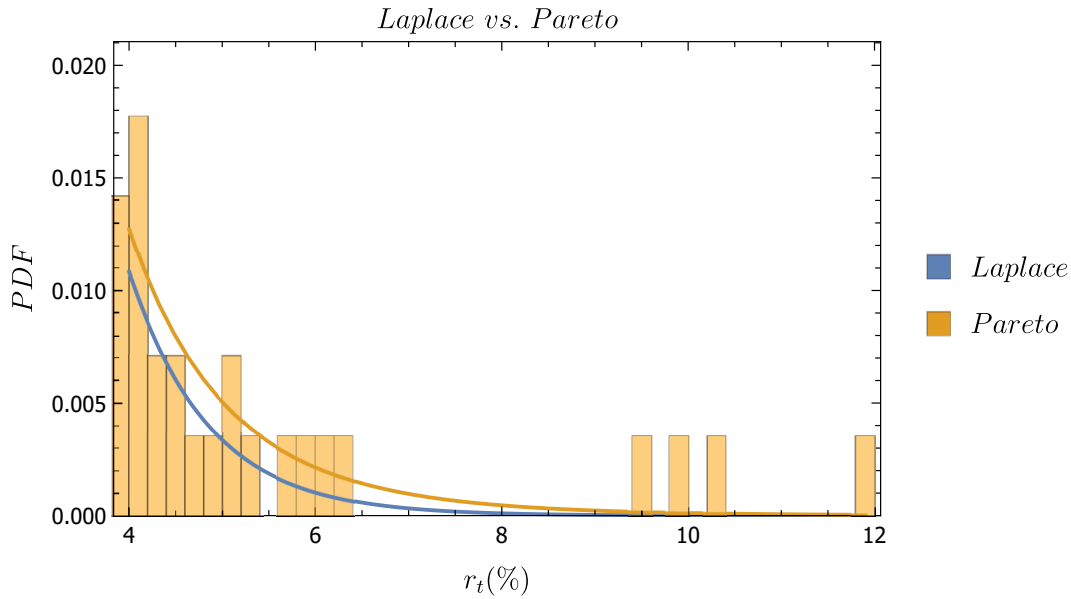


Figura 5.16: Histograma de los valores extremos con Laplace y Pareto

acepta para aquellas distribuciones de intervalos de tiempo entre excepciones más compactos, como es el caso de los dos métodos EWMA. La crítica que hacemos a este test es que, para condiciones similares, desde un punto de vista de la prudencia financiera, es preferible tener valores atípicos de intervalos muy largos sin errores, es decir, este test premia, de alguna manera, que se mantenga una cierta «regularidad» al cometer errores. Nosotros decimos que, para situaciones en las que hay métodos como el EWMA que comete más errores que el resto, el hecho de que se distribuyan de manera más uniforme parece poco relevante.

5.5.2. Backtesting ES

En primer lugar, como se indica en el gráfico 5.30 que es el correlato de la tabla 5.13, podemos ver como:

1. Las menores diferencias entre severidad esperada y observada se dan para el método GPD y T5, los dos modelos con colas más pesadas. Esto sugiere un mejor ajuste de los modelos a la realidad.
2. Para el caso de las excepciones del VaR, vemos como el mejor desempeño es para el método histórico y, nuevamente para el GPD. En este caso y, a diferencia de lo que ocurría en el backtesting del VaR (tabla 5.4), el menor número de excepciones es para el método GPD. Esto sugiere que el nivel de confianza establecido para este caso ($\alpha = 97.5\%$) permite una mejor aproximación que los anteriores niveles utilizados pero, en cualquier caso, la diferencia es mínima (72 frente a 68).

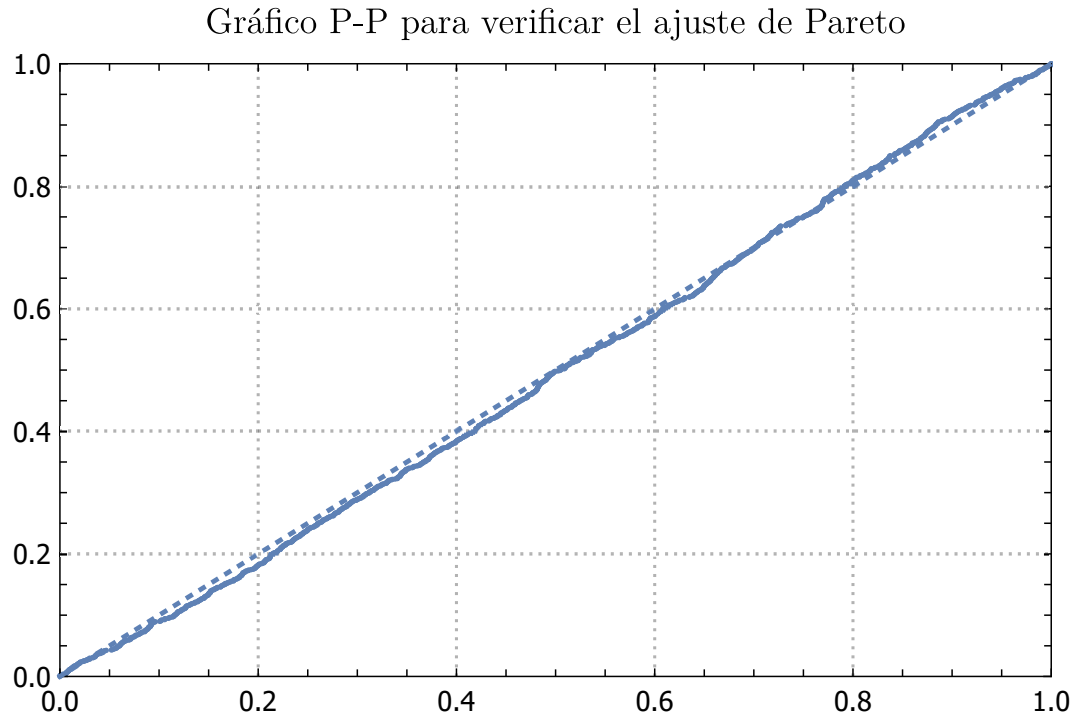


Figura 5.17: Gráfico de probabilidad del ajuste de Pareto a la distribución de retornos.

3. El único caso en que el ratio $\mathfrak{R}$ es menor que 1 (menor número de excepciones de las esperadas) indica que el método GPD es más conservador que el resto de métodos. Esto es una ventaja si, siendo conservador, se acerca al valor real (que corresponde a $\mathfrak{R} = 1$), siendo este el caso.
4. Por último, la columna de «Nivel observado» nos proporciona información complementaria a la que corresponde al caso anterior, a saber, nos indica el nivel observado de severidad frente al esperado teniendo en cuenta el método. Así, para el caso del método GPD, se da la mayor proximidad estando el nivel observado a solo un 0.05 % del esperado. El segundo puesto vuelve a ser para el método histórico que cuyo nivel esperado se separa en un 0.1 % del real.

las diferencias a nivel cuantitativo pueden verse en la tabla 5.13.

Incondicional Normal

Los resultados del test incondicional Normal muestran que el método GPD, según lo indicado en la tabla 5.14, se encuentra entre los métodos aceptados teniendo el mejor valor del ratio del test ($\mathfrak{R} = -0.0116$) y el mejor p-valor (0.4583) lo que sitúa al método GPD como el más alejado de la región de rechazo ($\zeta = -0.2057$). Podemos ver como el método normal y el método T

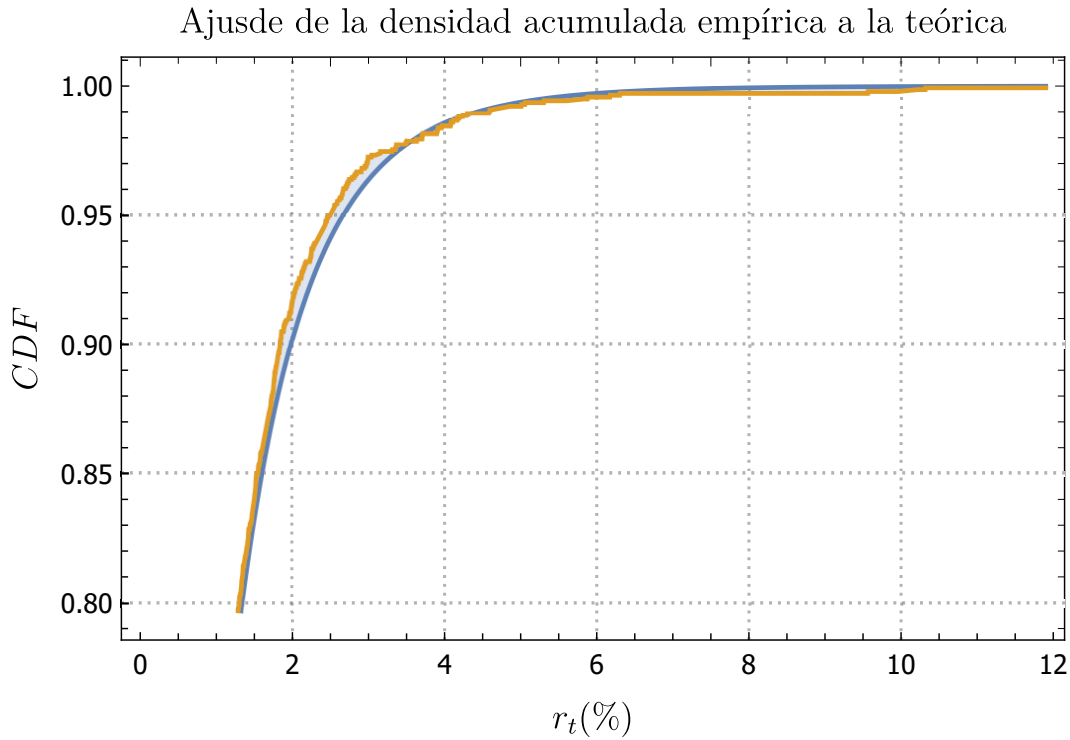


Figura 5.18: Gráfico de probabilidad acumulada del ajuste de Pareto a la distribución de retornos.

con diez grados de libertad son rechazados⁵. El método histórico se sitúa en la segunda posición en desempeño en este test con un valor de su estadístico de $\mathfrak{R} = -0.0917$, situándolo entre el método T con 5 grados de libertad y el método GPD aunque, ciertamente más cercano al primero ($\mathfrak{R} = -0.1289$).

Incondicional T

De nuevo, y por último, en una batalla que parece estarse librando exclusivamente entre nuestro método y el método histórico, el método GPD, según lo indicado en la tabla 5.15, se encuentra entre los métodos aceptados por el test incondicional T pero, sobretodo, es importante resaltar el hecho de que tiene el mejor valor del ratio del test ($\mathfrak{R} = -0.0116$) otorgándole el mejor p-valor (0.4525) lo que sitúa al método GPD como el más alejado de la región de rechazo que, en este caso, se establece en $\zeta = -0.2415$. Con respecto al test anterior vemos que, el hecho de que este considere colas más pesadas en la distribución agranda la región de rechazo permitiendo que ahora el método de distribución T con 10 grados de libertad sea aceptado mientras que el método normal sigue siendo rechazado.

⁵Recordemos que la distribución T se parece tanto más a la distribución normal cuanto mayor es el número de grados de libertad.

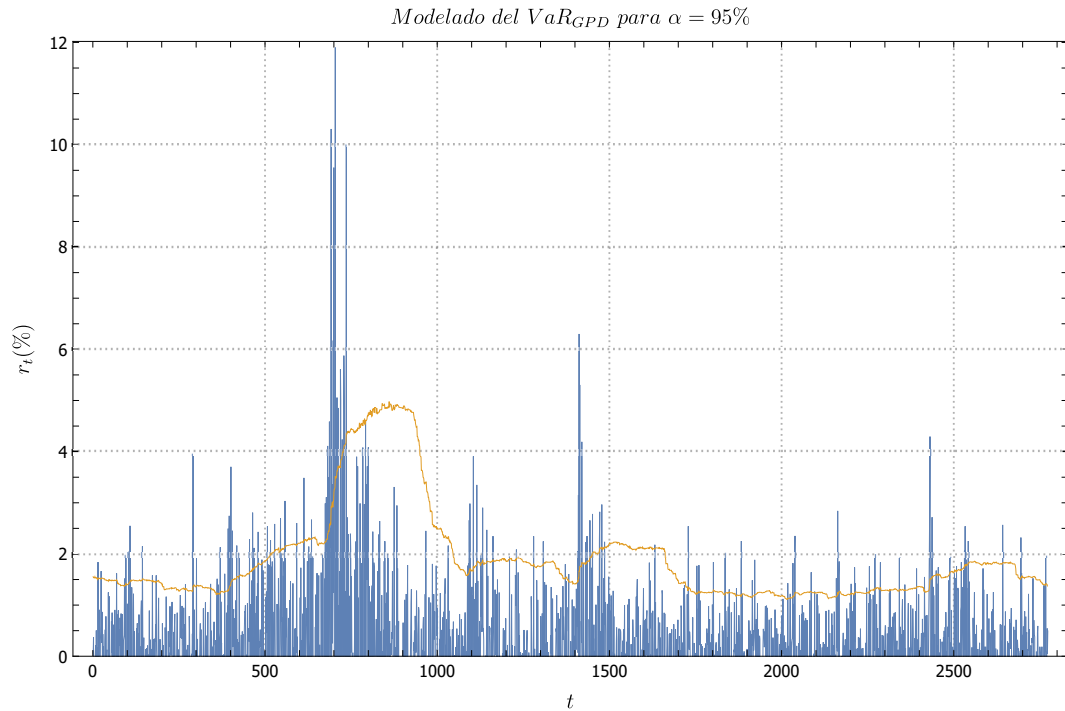


Figura 5.19: Modelado del VaR con GPD y $\alpha = 95\%$.

5.6. Regularidades en la repetición con variaciones en los portafolios

En la repetición del análisis con otros portafolios ⁶ se han dado las siguientes regularidades:

- El método EWMA es el único (prácticamente sin excepciones) para el que suele aceptarse las pruebas de Haas. Particularmente se da para el caso del 0.95 de nivel de confianza.
- La frecuencia de excepciones más próxima a los valores esperados siempre se da para el método histórico o el GPD.
- El peor desempeño general se da siempre para los métodos Normal y EWMA (basado en el método Normal). Particularmente, se da el caso de que los beneficios que, en ocasiones, presenta la ponderación de los retornos se ven excesivamente afectados por:
 1. El horizonte temporal: los períodos excesivamente largos suelen ser perjudiciales.
 2. El factor β : pequeños variaciones provocan cambios excesivos en el desempeño del método.

⁶Se han realizado dos tipos de variaciones: variaciones de las ponderaciones para las mismas acciones y variaciones de los elementos del propio portafolio

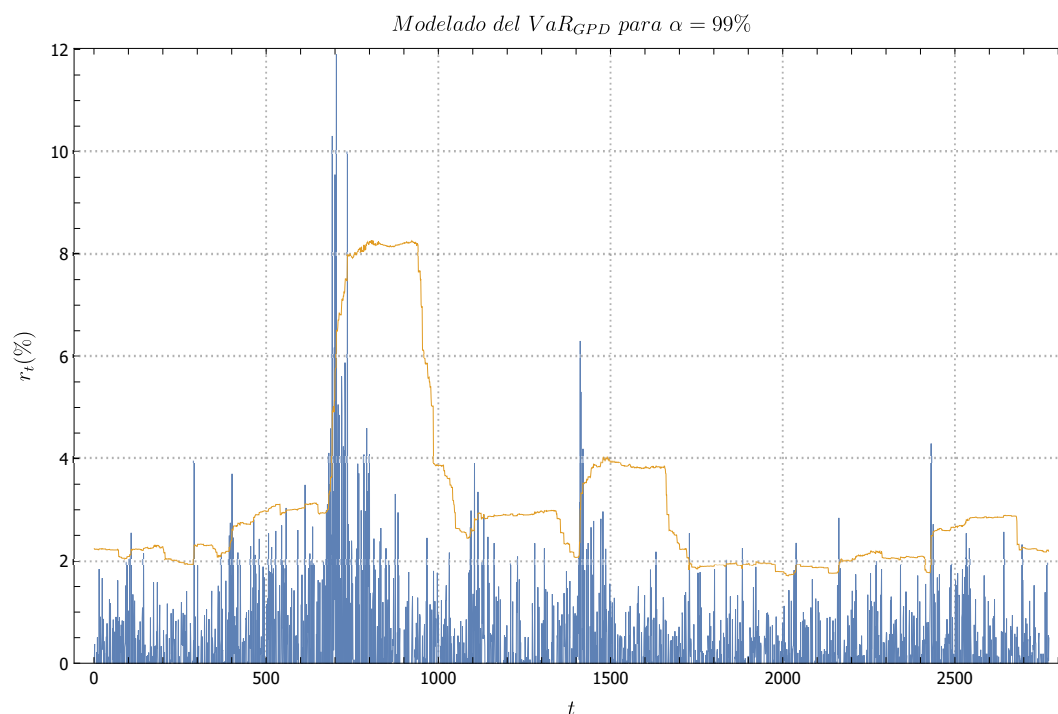
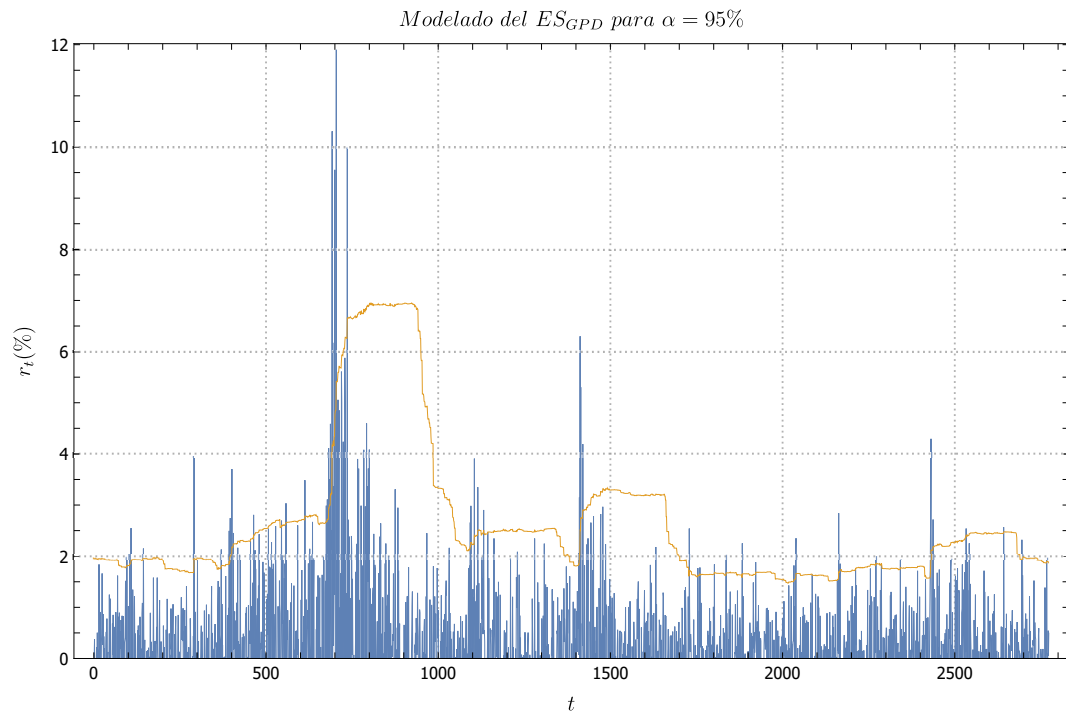
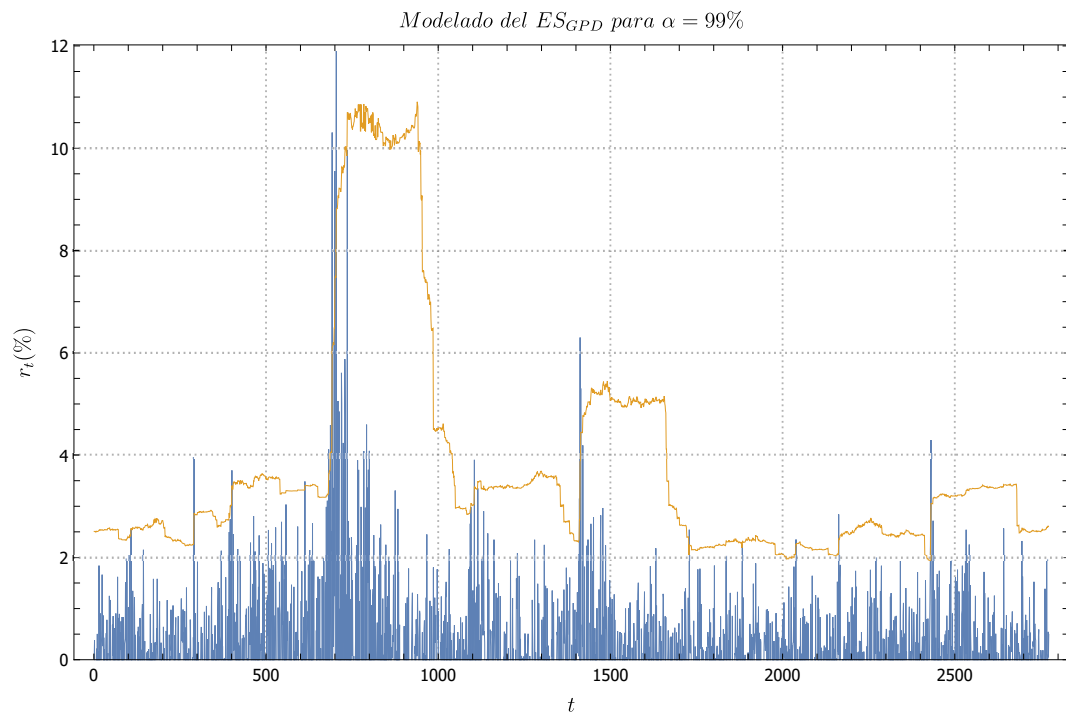
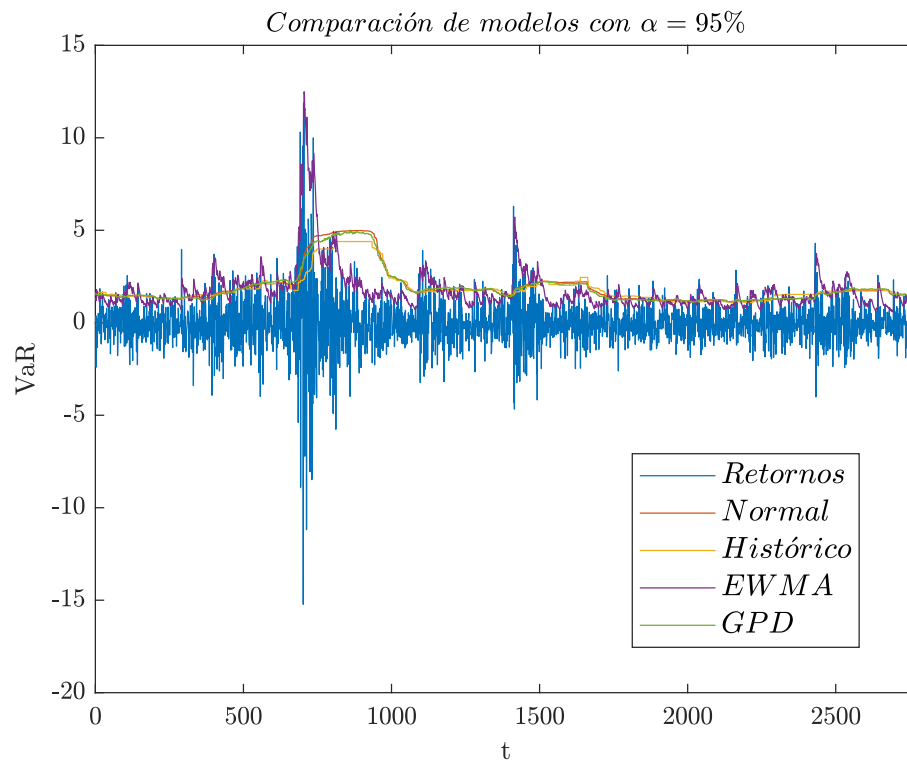
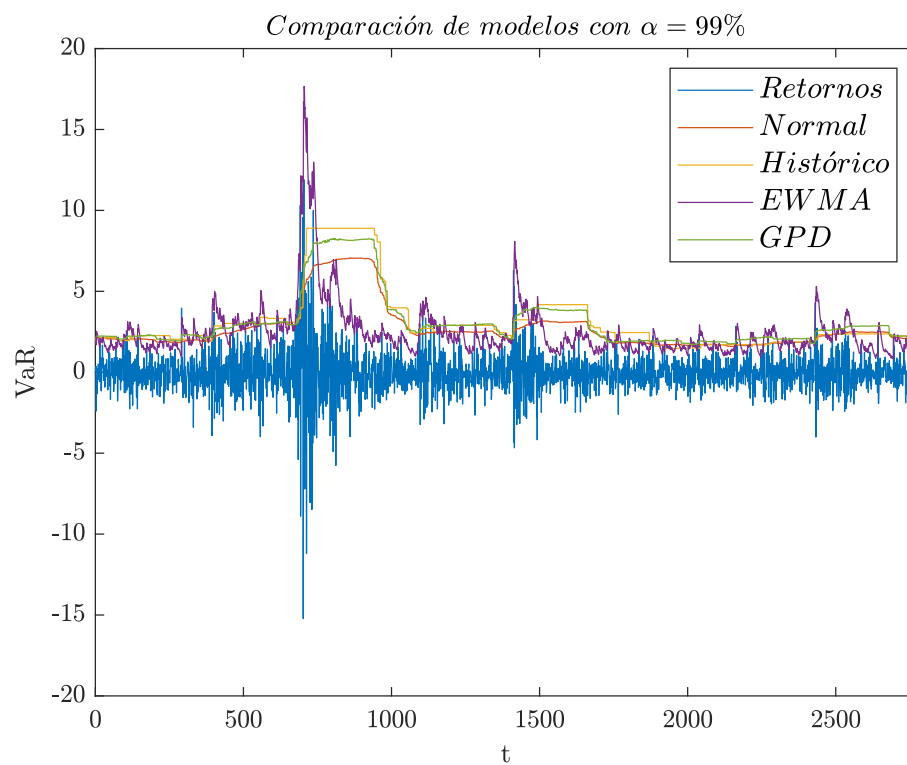


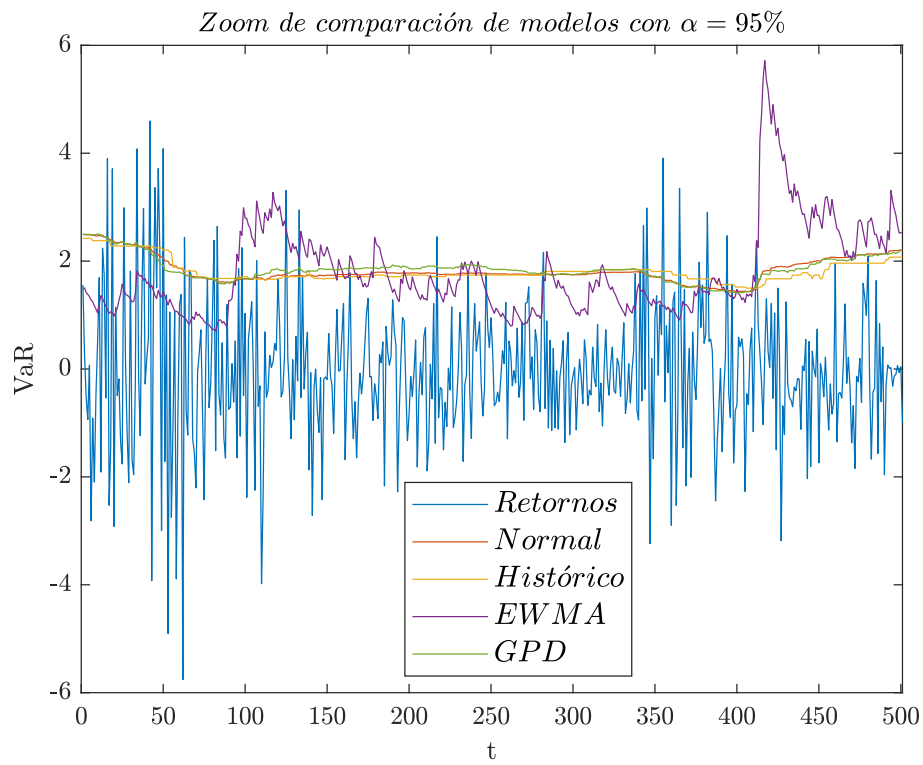
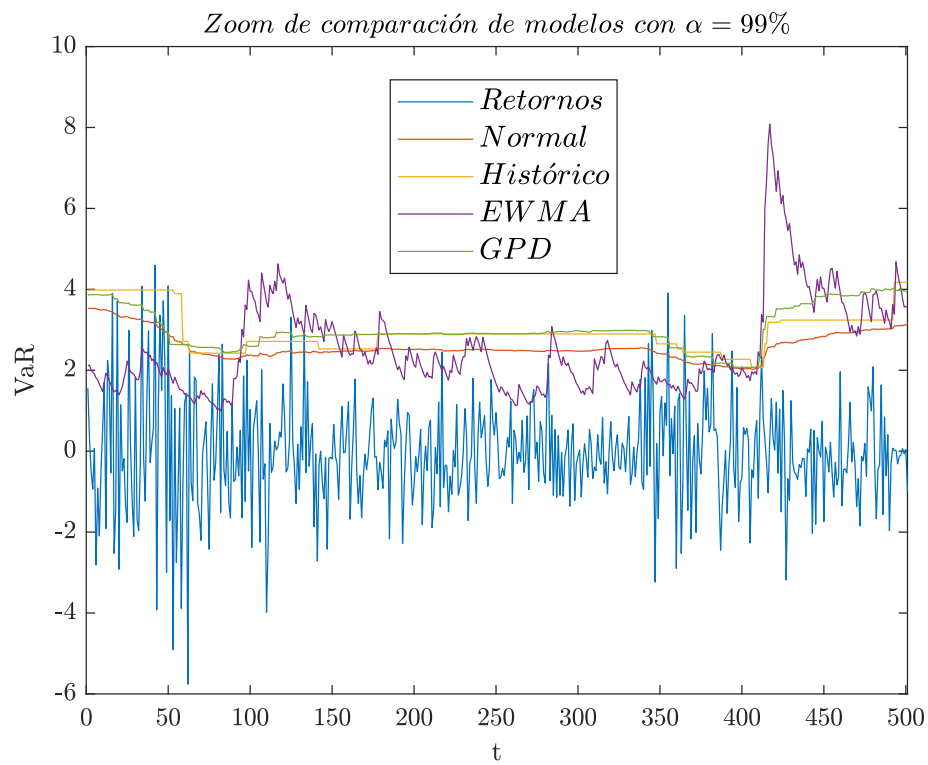
Figura 5.20: Modelado del VaR con GPD y $\alpha = 99\%$.

- El mejor desempeño general se da para el método GPD, especialmente en términos del ES, seguido por el método de simulación histórica.
- Los test de independencia del tiempo entre excepciones y de tiempo hasta la primera excepción suelen arrojar resultados «poco» congruentes con los otros tests en términos de desempeño general de los métodos como ya se ha comentado.

La explicación de que el método EWMA tenga un peor desempeño es que, al asumir que los retornos más cercanos en el tiempo proporcionan mejores predicciones para los retornos futuros. Esto es una ventaja para ciertos momentos de elevada volatilidad, pero con retornos que responden bien a la modelización con Pareto, esto también significa que se van olvidando con más facilidad los eventos extremos. Al fin y al cabo, las distribuciones con colas pesadas se caracterizan por tener más momentos de calma que la distribución normal al mismo tiempo que ocurren eventos más extremos. Esos momentos de calma pueden llevar a que el método EWMA «se confíe» y cometa más errores cuando los períodos a considerar son más extensos, como es el caso.

Figura 5.21: Modelado del ES con GPD y $\alpha = 95\%$ Figura 5.22: Modelado del ES con GPD y $\alpha = 99\%$

Figura 5.23: Comparación de modelos con $\alpha = 95\%$.Figura 5.24: Comparación de modelos con $\alpha = 99\%$.

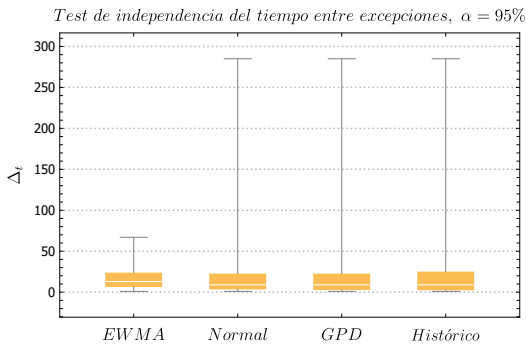
Figura 5.25: Zoom para modelos con $\alpha = 95\%$.Figura 5.26: Zoom para modelos con $\alpha = 99\%$.

Cuadro 5.4: Total de excepciones.

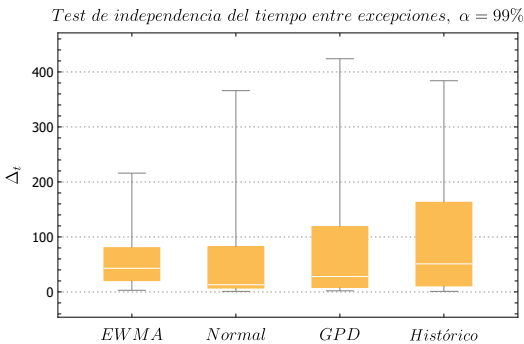
α	Método	Excepciones
0.95	EWMA	165
	Normal	142
	GPD	139
	Histórico	133
0.99	EWMA	48
	Normal	47
	GPD	28
	Histórico	26

Cuadro 5.5: Resultados del test del semáforo

Método	α	Zona	Probabilidad	Tipo I	Incremento
EWMA	0.95	Amarillo	0.99	0.01	0.17
Normal		Verde	0.64	0.40	0.00
GPD		Verde	0.53	0.50	0.00
Histórico		Verde	0.33	0.70	0.00
EWMA	0.99	Amarillo	1.00	0.00	0.30
Normal		Amarillo	1.00	0.00	0.29
GPD		Verde	0.57	0.51	0.00
Histórico		Verde	0.42	0.66	0.00



(a) Métodos con $\alpha = 95\%$



(b) Métodos con $\alpha = 99\%$

Figura 5.27: Representación del test de independencia del tiempo entre excepciones

Cuadro 5.6: Resultados del test del binomial.

Método	α	Resultado	Z	p-valor
EWMA	0.95	Rechazar	2.2959	0.0108
Normal		Aceptar	0.2919	0.3852
GPD		Aceptar	0.0305	0.4878
Histórico		Aceptar	-0.4923	0.3113
EWMA	0.99	Rechazar	3.8687	0.0001
Normal		Rechazar	3.6778	0.0001
GPD		Aceptar	0.0515	0.4795
Histórico		Aceptar	-0.3302	0.3706

Cuadro 5.7: Resultados del test de proporción de excepciones.

Método	α	Resultado	$\mathfrak{R}$	p-valor
EWMA	0.95	Rechazar	4.9820	0.0256
Normal		Aceptar	0.0846	0.7712
GPD		Aceptar	0.0009	0.9757
Histórico		Aceptar	0.2455	0.6202
EWMA	0.99	Rechazar	12.2839	0.0005
Normal		Rechazar	11.1931	0.0008
GPD		Aceptar	0.0026	0.9590
Histórico		Aceptar	0.1113	0.7386

Cuadro 5.8: Resultados de tiempo hasta primera excepción.

Método	α	Resultado	$\mathfrak{R}$	p-valor	Primera excepción
Normal	0.95	Aceptar	2.3776	0.1231	3
Histórico		Aceptar	2.3776	0.1231	3
EWMA		Aceptar	2.3776	0.1231	3
GPD		Aceptar	2.3776	0.1231	3
Normal	0.99	Rechazar	5.4315	0.0198	3
Histórico		Rechazar	5.4315	0.0198	3
EWMA		Rechazar	5.4315	0.0198	3
GPD		Rechazar	5.4315	0.0198	3

Cuadro 5.9: Resultados del test de independencia de la cobertura condicional

Método	α	Resultado	$\mathfrak{R}$	p-valor	N_{00}	N_{10}	N_{01}	N_{11}
EWMA	0.95	Rechazar	10.0777	0.0015	2444	163	163	2
Normal		Aceptar	0.0116	0.9142	2495	135	135	7
GPD		Aceptar	0.0001	0.9905	2501	132	132	7
Histórico		Aceptar	0.0643	0.7998	2513	126	126	7
EWMA	0.99	Aceptar	1.6917	0.1934	2676	48	48	0
Normal		Aceptar	0.0497	0.8237	2679	46	46	1
GPD		Aceptar	0.5714	0.4497	2716	28	28	0
Histórico		Aceptar	1.3550	0.2444	2721	25	25	1

Cuadro 5.10: Resultados del test mixto de cobertura condicional.

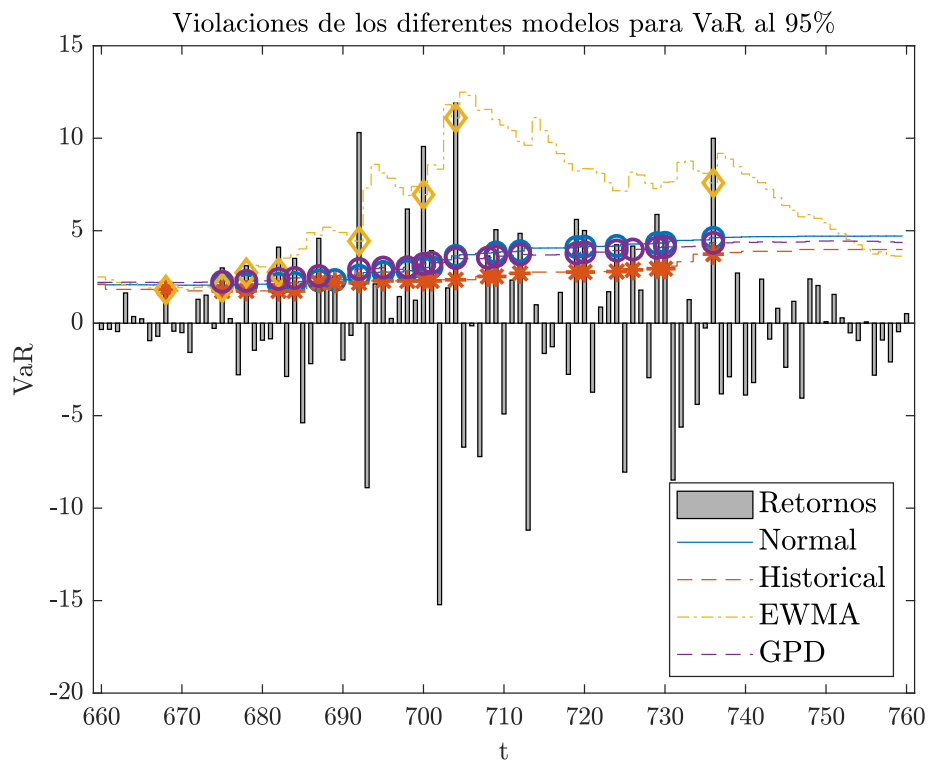
Método	α	Resultado	$\mathfrak{R}$	p-valor
EWMA	0.95	Rechazar	15.0597	0.0005
Normal		Aceptar	0.0962	0.9531
GPD		Aceptar	0.0011	0.9995
Histórico		Aceptar	0.3099	0.8565
EWMA	0.99	Rechazar	13.9756	0.0009
Normal		Rechazar	11.2427	0.0036
GPD		Aceptar	0.5741	0.7505
Histórico		Aceptar	1.4664	0.4804

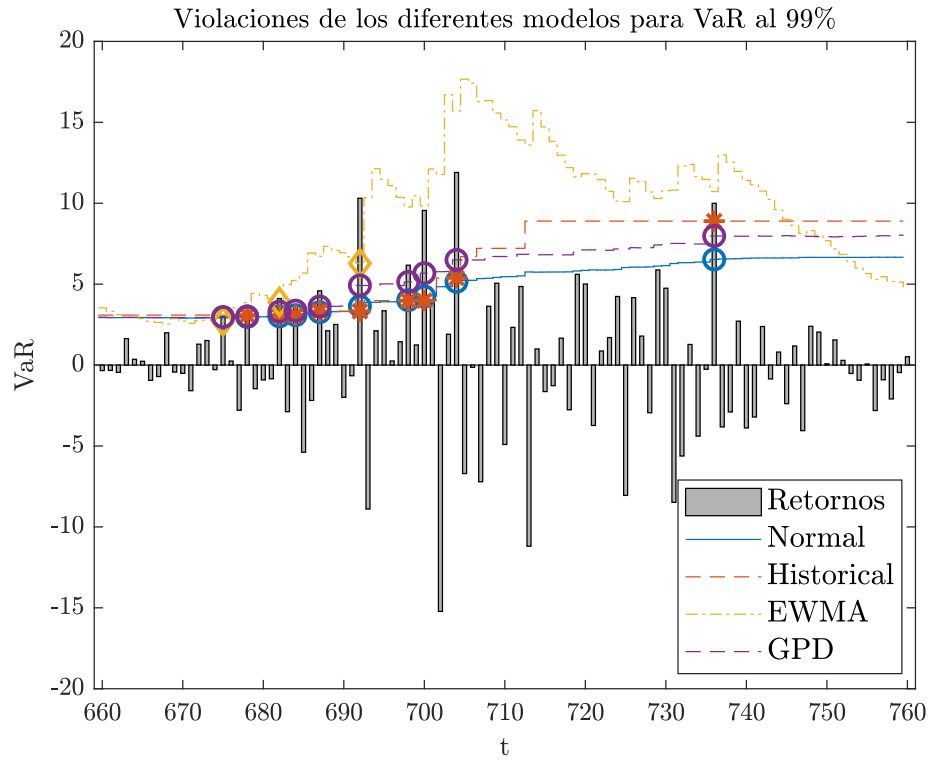
Cuadro 5.11: Resultados del test de independencia del tiempo entre excepciones

Método	α	Resultado	$\mathfrak{R}$	p-valor	mín	Q_1	Q_2	Q_3	máx
EWMA	0.95	Aceptar	131.2201	0.9754	1	7	13	23.25	67
Normal		Rechazar	228.9232	0.0000	1	4	9	22	285
GPD		Rechazar	233.9672	0.0000	1	3.25	9	22	285
Histórico		Rechazar	228.9349	0.0000	1	3	9	24.5	285
EWMA	0.99	Aceptar	51.5302	0.3374	3	20.5	43	80.5	216
Normal		Rechazar	115.1360	0.0000	1	7	13	82	366
GPD		Rechazar	66.7531	0.0001	2	8	28	119	424
Histórico		Rechazar	49.3002	0.0038	1	11	51	163	384

Cuadro 5.12: Resultados del test mixto de tiempo entre excepciones

Método	α	Resultado	$\mathfrak{R}$	p-valor
EWMA	0.95	Aceptar	136.2022	0.9562
Normal		Rechazar	229.0077	0.0000
GPD		Rechazar	233.9682	0.0000
Histórico		Rechazar	229.1804	0.0000
EWMA	0.99	Aceptar	63.8141	0.0759
Normal		Rechazar	126.3291	0.0000
GPD		Rechazar	66.7557	0.0001
Histórico		Rechazar	49.4115	0.0053

Figura 5.28: Zoom para excepciones con $\alpha = 95\%$

Figura 5.29: Zoom para excepciones con $\alpha = 99\%$

Cuadro 5.13: Resultados de severidad del ES

Método	Nivel observado	$\hat{S}$	S	Excepciones	Esperadas	$\mathfrak{R}$
Histórico	0.9740	1.3469	1.4350	72	69.325	1.0386
Normal	0.9701	1.1928	1.3607	83	69.325	1.1973
T 10	0.9715	1.2652	1.3560	79	69.325	1.1396
T 5	0.9715	1.3700	1.3572	79	69.325	1.1396
GPD	0.9755	1.2956	1.3375	68	69.325	0.9809

Cuadro 5.14: Resultados del test incondicional Normal

Método	Resultado	p-valor	$\mathfrak{R}$	ζ
Histórico	Aceptar	0.2296	-0.0917	-0.2057
Normal	Rechazar	0.0029	-0.3658	-0.2057
T 10	Rechazar	0.0404	-0.2213	-0.2057
T 5	Aceptar	0.1575	-0.1289	-0.2057
GPD	Aceptar	0.4583	-0.0116	-0.2057

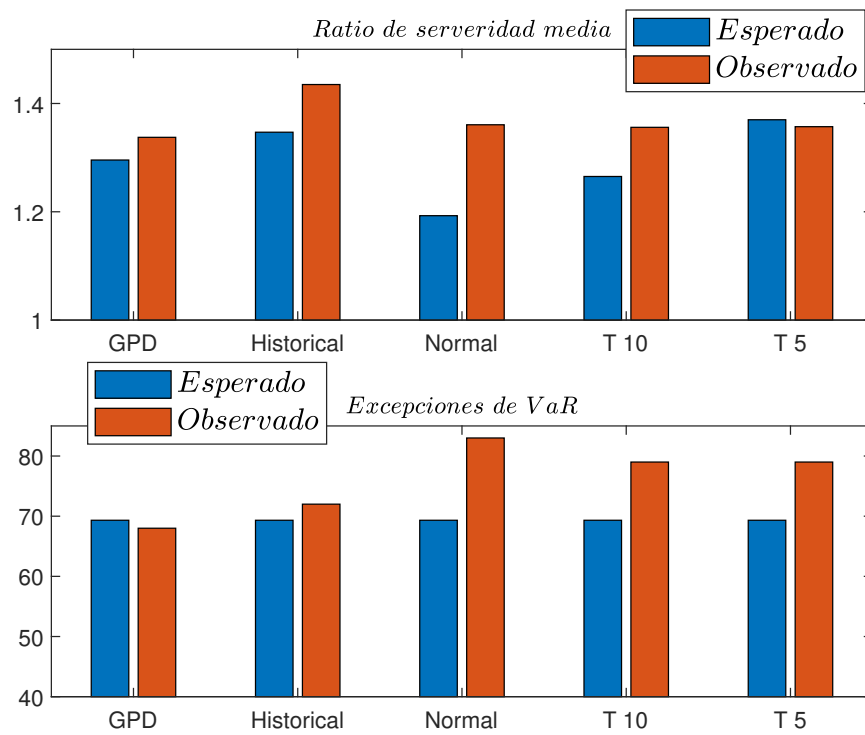
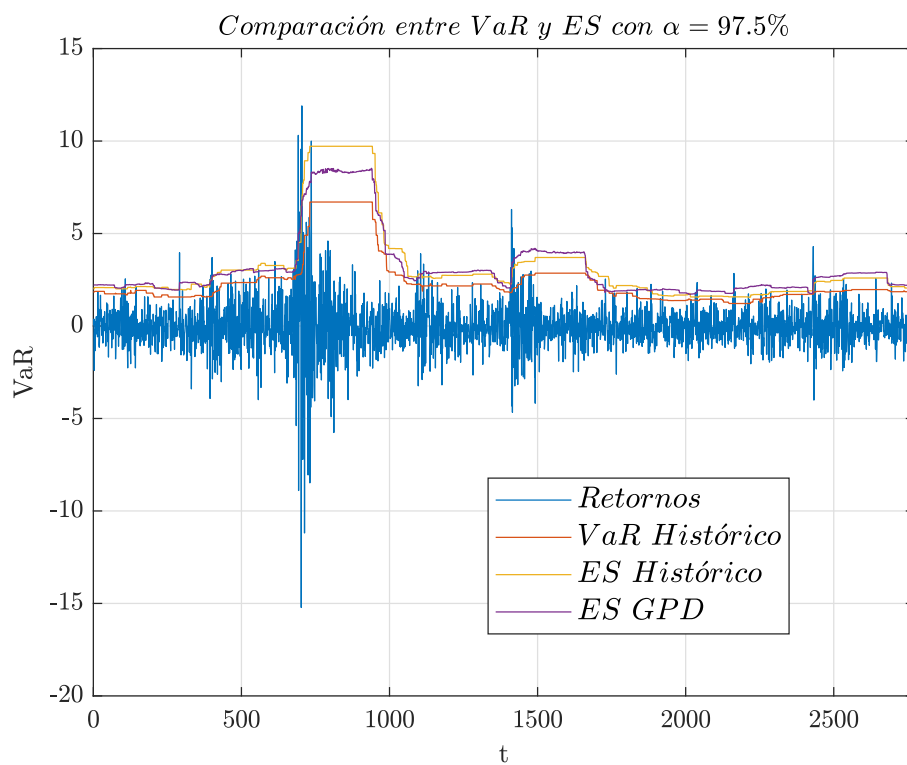


Figura 5.30: Gráficos de severidad y excepciones para los distintos modelos

Figura 5.31: Comparación del método GPD con el método histórico y $\alpha = 97.5\%$

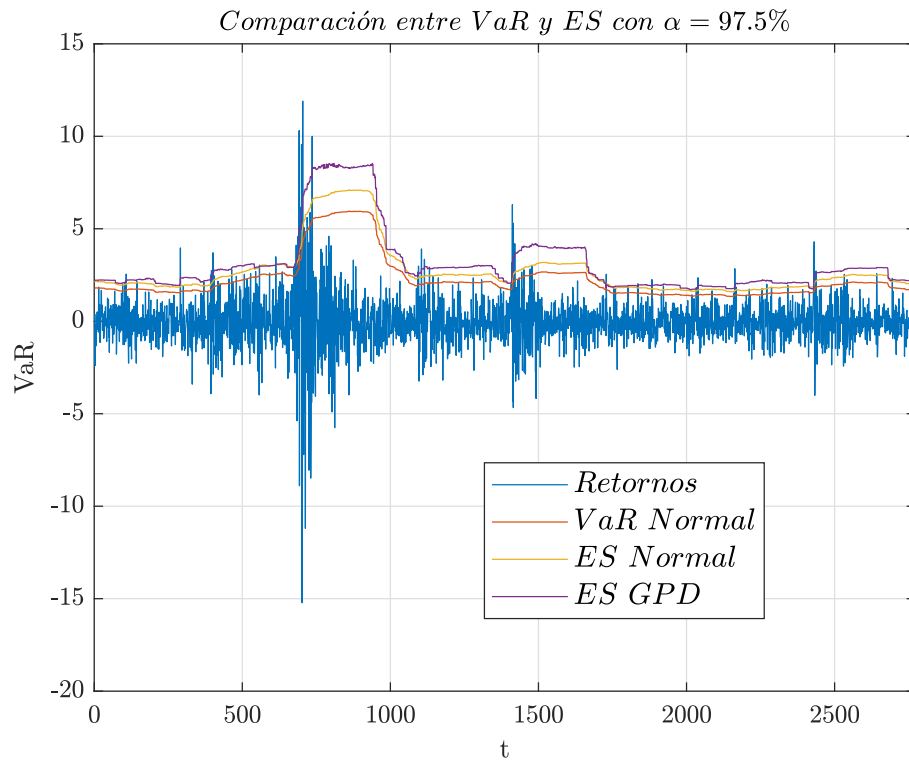


Figura 5.32: Comparación del método GPD con el método normal y $\alpha = 97.5\%$

Cuadro 5.15: Resultados del test incondicional T

Método	Resultado	p-valor	$\mathfrak{R}$	ζ
Histórico	Aceptar	0.2465	-0.0917	-0.2415
Normal	Rechazar	0.0098	-0.3658	-0.2415
T 10	Aceptar	0.0671	-0.2213	-0.2415
T 5	Aceptar	0.1865	-0.1289	-0.2415
GPD	Aceptar	0.4525	-0.0116	-0.2415

Capítulo 6

Conclusión

6.1. Propósitos y objetivos de la investigación

El objetivo fundamental del trabajo ha sido realizar un estudio del estado actual del riesgo de mercado en banca comercial haciendo análisis comparativos y una propuesta de modelado alternativa a las existentes, comparando distintos métodos de VaR y ES teniendo en cuenta los nuevos desarrollos que se plasman en el FRTB y proponiendo una alternativa al modelado de las colas apoyándonos en los desarrollos de la *Extreme Value Theory* y comprobando si, efectivamente, las distribuciones de retornos financieros pueden modelarse con colas de Pareto para estudiar el desempeño absoluto y relativo de esta propuesta.

6.2. Conclusiones del trabajo

- No se puede confiar en el teorema central del límite para ningún tamaño de portafolio si la distribución subyacente de los retornos sigue una distribución de Pareto o, más en general, una distribución con colas pesadas.
- La ley de los grandes números no produce resultados satisfactorios a la hora de realizar estimaciones de la media de variables aleatorias que siguen distribuciones de Pareto. Esto genera problemas de convergencia y provoca la alternancia de períodos de calma y eventos extremos cuya combinación genera dificultades en la gestión de riesgos.
- En un portafolio con colas pesadas, sus elementos, habitualmente, no tienen colas pesadas. Es la combinación de distribuciones leptocúrticas y platicúrticas lo que provoca que la distribución de retornos ponderados herede esas características, adquiriendo tanto cuerpos (centrales) como colas con mucho peso.

- El modelo GPD, en la medida en que tiene un buen ajuste en las colas, proporciona mejores resultados relativos en el cálculo del ES que en el del VaR que, al fin y al cabo, es simplemente el cálculo de un percentil. Dicho de otra manera, la «potencia» del método propuesto, después de demostrar que modela de manera convincente las colas de la distribución, se percibe mejor a la hora de evaluar el peso que tienen las colas con respecto a la distribución (esto es, de una u otra manera, calcular el ES¹).
- El método histórico, que no asume ninguna distribución subyacente de los retornos es el segundo que comete menos errores. Es fundamental tomar nota de este hecho para ver en que lugar quedan los intentos de modelado.
- En vez de tratar de modelar explícitamente la correlación entre los activos de un determinado portafolio como base para la evaluación del riesgo de cola, el ES se focaliza directamente en la cola de la distribución de pérdidas lo que permite liberarse de las dificultades que presenta el uso e interpretación de la correlación.
- El avance del cálculo del ES con respecto al VaR supone un avance en la medida en que tiene más en cuenta el peso de la cola de la distribución y, por tanto, proporciona una medida más conservadora que, al mismo tiempo, si se escoge un modelo correcto, proporciona una mayor precisión en la gestión de riesgos.

6.3. Implicaciones prácticas

Una de las críticas fundamentales que pueden hacerse al enfoque establecido por el FRTB es la idea de que añadir más complejidad a los cálculos de establecimiento del capital regulatorio traerá consigo mejores resultados. Es preferible tener mecanismos más sencillos y robustos como cambiar las distribuciones subyacentes de riesgo. En este sentido, desde el punto de vista de los bancos como un sistema complejo dentro del mercado, la única posibilidad que cabe es permitir que estos caigan antes de que sean demasiado grandes para caer. Es claro que, por lo visto en el capítulo de teoría, la representación de las distribuciones mediante el uso de modelos de Pareto y exponenciales (Laplace) arroja mejores resultados que la modelización normal. Aun así, de lo anterior no se deduce una mejora tan grande a la hora de modelizar determinadas medidas de riesgo como el VaR o el ES. Esto se debe a que, en vez de tratar

¹Más concretamente es calcular la severidad

de mejorar nuestros modelos predictivos, el hecho de que la modelización responda a fenómenos con colas mucho más pesadas que la distribución normal nos debe indicar que deben irse abandonando estas medidas. Son un mapa de los alpes para un montañero en los pirineos: generan una falsa sensación de seguridad y mientras uno sigue perdido. La alternativa es una profunda remodelación del sistema bancario. Una remodelación que, o será sistemática, en el sentido de que involucre a la totalidad de los bancos, o no será. Considerados como sistema (conjunto) los bancos se benefician de una mayor desprotección por cuanto pueden producirse quiebras más pequeñas que no involucren un riesgo sistémico. El sistema actual de bancos centrales actuando como prestamistas de última instancia genera incentivos perversos en los bancos que asumen riesgos desproporcionados.

6.4. Futuras líneas de investigación

Entre las futuras líneas de investigación que pueden ser interesantes y complementarias a los hallazgos de este trabajo, están el análisis de que indicadores económicos tienen relevancia real a la hora de predecir, con mayor o menor antelación, la llegada de crisis financieras. De esta manera podría comprobarse que valor real tienen las medidas de riesgo de mercado a la hora de actuar como *buffer* de seguridad para tiempos de crisis. Un análisis como este involucra muchos aspectos de la teoría económica, la comprensión del ciclo económico, la comprensión de la actividad bancaria en cuanto a intermediario, el *descalce de plazos y riesgos*, los ciclos de liquidez, curvas de rendimientos o de tipos, etc. De este forma podría comprobarse si son de utilidad las medidas de riesgo de mercado y sus regulaciones anejas.

Bibliografía

- C. Acerbi. Spectral measures of risk: A coherent representation of subjective risk aversion. *Journal of Banking & Finance*, 26(7):1505–1518, 2002.
- C. Acerbi and B. Szekely. Back-testing expected shortfall, 2014.
- I. Akkizidis and L. Kalyvas. Market risk: Fundamental review of the trading book, 06 2018.
- C. Alexander. *Market Risk Analysis, Value at Risk Models*, volume 4. John Wiley & Sons, 2009.
- D. Alighieri. La divina comedia. 1811.
- P. Artzner, F. Delbaen, J.-M. Eber, and D. Heath. Coherent measures of risk, July 1999. URL <https://doi.org/10.1111/1467-9965.00068>.
- BCBS. Supervisory framework for the use of 'backtesting' in conjunction with the internal models approach to market risk capital requirements. Página web, 1996. URL <https://www.bis.org/publ/bcbs22.htm>.
- R. Bürgi, M. M. Dacorogna, and R. Iles. Risk aggregation, dependence structure and diversification benefit, 2008. URL <https://doi.org/10.2139/ssrn.1468526>.
- K. Burnham. Model selection and multimodel inference : a practical information-theoretic approach, 2002.
- P. Christoffersen. Evaluating interval forecasts. *International Economic Review*. Vol. 39, pp. 841–862, 1998.
- M. H. DeGroot and M. J. Schervish. *Probability and statistics*. Pearson Education, 2012.
- S. Emmer, M. Kratz, and D. Tasche. What is the best risk measure in practice? a comparison of standard measures. *Journal of Risk* 18(2), 31-60, 2015, 2013.
- T. Fissler and J. F. Ziegel. Higher order elicibility and osband's principle, 08 2016. URL <https://doi.org/10.1214/16-AOS1439>.

- H. Foellmer and A. Schied. Convex measures of risk and trading constraints. *Finance and Stochastics*, 6:429–447, 09 2002. doi: 10.1007/s007800200072.
- D. Geman, H. Geman, and N. N. Taleb. Tail risk constraints and maximum entropy. *Entropy* 17 (6), 3724–3737, 2015, 2014.
- B. Gnedenko. Sur la distribution limite du terme maximum d’une serie aleatoire, 1943.
- T. Gneiting. Making and evaluating point forecasts, 2009.
- M. Haas. New methods in backtesting. *Financial Engineering Research Center, Bonn*, 2001.
- P. R. Halmos. *Measure theory*, volume 18. Springer, 2013.
- J. C. Hull. Risk management and financial institutions. John Wiley & Sons, Inc. Hoboken, New Jersey, 2018. Revisado 2019/06/25.
- P. Jorion. Financial risk manager handbook 6th edition. Wiley Finance, 2011. Revisado 2019/06/25.
- P. Kupiec. Techniques for verifying the accuracy of risk management models. *Journal of Derivatives*. Vol. 3, pp. 73–84., 1995.
- M. Norton, V. Khokhlov, and S. Uryasev. Calculating cvar and bpoe for common probability distributions with application to portfolio optimization and density estimation, 2018.
- N. N. Taleb. Black swans and the domains of statistics. *The American Statistician*, 61(3):198–200, 2007.
- N. N. Taleb. Where do thin tails come from?, 2013.
- N. N. Taleb. (anti)fragility and convex responses in medicine. Unifying Themes in Complex Systems IX, Proceedings of the Ninth International Conference on Complex Systems (2018), in Alfredo J. Morales , Carlos Gershenson, Dan Braha, Ali A. Minai, & Yaneer Bar-Yam, Eds., Springer, pp. 299–325, 2018.
- N. N. Taleb. How much data do you need? an operational, pre-asymptotic metric for fat-tailedness. *International Journal of Forecasting*, 35(2):677–686, 2019.
- I. The Mathworks. Risk management toolbox, user’s guide, 2019. URL https://es.mathworks.com/help/pdf_doc/risk/risk.pdf.

Apéndice A

Activos del portfolio

A.1. Gráficos QQ

A.2. Gráficos de cajas

A.3. Gráficos de retornos

