



Proyecto Fin de Carrera

Modelado y simulación de transformadores acorazados ante perturbaciones de alta frecuencia

Alumno: Alfredo del Río Muñoz

Director: Luis Rouco Rodríguez

Madrid

Junio 2014



UNIVERSIDAD PONTIFICIA COMILLAS

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

(ICAI)

ALFREDO DEL RÍO MUÑOZ – INGENIERO INDUSTRIAL



Autorizada la entrega del proyecto del alumno:

Alfredo Del Río Muñoz

Autoriza la entrega del proyecto cuya información no es de carácter confidencial

EL DIRECTOR DEL PROYECTO

Luis Rouco Rodríguez

Fdo: Luis Rouco Rodríguez Fecha: 23 junio 2014

Vº Bº del coordinador de Proyectos

Fernando de Cuadra García

Fdo: _____ Fecha: _____



UNIVERSIDAD PONTIFICIA COMILLAS
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
(ICAI)
ALFREDO DEL RÍO MUÑOZ – INGENIERO INDUSTRIAL



Contenidos

1	Introducción	1
1.1	El tema del proyecto	1
1.2	Objetivo del proyecto	1
1.3	Organización del documento	2
2	Principios de modelado y simulación de sistemas dinámicos	3
2.1	Modelos de sistemas dinámicos	3
2.2	Solución de sistemas dinámicos no lineales	5
2.3	Solución de sistemas dinámicos lineales	6
2.3.1	Autovalores y autovectores	7
2.3.2	Solución en términos de los autovalores y autovectores de la matriz de estados	8
2.4	Funciones de transferencia de sistemas dinámicos lineales	10
3	Sobretensiones y aislamiento	13
3.1	Sobretensiones	13
3.2	Aislamiento	15
4	Constitución de transformadores	19
4.1	Transformadores monofásicos	19
4.2	Transformadores trifásicos	22
5	Modelos de transformadores a baja frecuencia	25
5.1	Transformador ideal	25
5.2	Transformador real	28
5.2.1	Transformador sin pérdidas en el hierro	28
5.2.2	Transformador con pérdidas en el hierro	30
5.3	Circuito equivalente del transformador	30
5.4	Respuesta en frecuencia	31
5.4.1	Modelo con impedancia de magnetización	32
5.4.2	Modelo sin impedancia de magnetización	33
5.4.3	Comparación de modelos	34
5.5	Respuesta en el tiempo	36
5.5.1	Modelo con impedancia de magnetización	36
5.5.2	Modelo sin impedancia de magnetización	36
5.5.3	Comparación de modelos	37
6	Modelos de transformadores a media frecuencia	39
6.1	Circuitos equivalentes	39
6.2	Respuesta en frecuencia	42
6.3	Respuesta en el tiempo	44



7	Modelos de transformadores a alta frecuencia	49
7.1	Ecuaciones de capacidades de nudos	49
7.2	Ecuaciones de inductancias bobinas.....	50
7.3	Conexión de las ecuaciones de nudos y de bobinas	51
7.4	Modelo completo.....	52
7.5	Caso ejemplo	52
8	Simulación en el dominio del tiempo de transformadores a alta frecuencia	55
8.1	Modelos de simulación.....	55
8.1.1	Modelo implícito de ecuaciones diferenciales y algebraicas	56
8.1.2	Modelo explícito de ecuaciones diferenciales	59
8.2	Resultados de simulación	61
8.2.1	Comparación del método Runge-Kutta con el método basado en autovalores y autovectores	61
8.2.2	Comparación del código de ABB con el código del ICAI	67
8.2.3	Autovalores	73
9	Respuesta en frecuencia de transformadores a alta frecuencia	75
9.1	Modelo de cálculo	75
9.2	Resultados	77
10	Conclusiones	79
11	Referencias	81



Autor: Alfredo Del Río Muñoz

Director: Luis Rouco Rodríguez

Entidad Colaboradora: Universidad Pontificia de Comillas – ICAI

Resumen

El aislamiento de los transformadores debe soportar las solicitaciones de tensión establecidas en las normas de coordinación de aislamiento. De todas ellas la más exigente es la onda de tensión de onda tipo rayo.

El diseño del aislamiento de los transformadores se realiza con la ayuda de programas de simulación que intentan reproducir las tensiones en los arrollamientos en caso de la aplicación de una onda de tensión tipo rayo.

Los programas de simulación construyen modelos muy detallados de las inductancias y capacidades de los arrollamientos a partir de la configuración física de éstos.

Un fabricante nacional, dispone de un código de simulación de tensiones en arrollamientos de transformadores acorazados ante onda tipo rayo. Se trata de código que data de los años 60 del siglo pasado.

El método de simulación de dicho código (basado en la truncación de la exponencial de la matriz) exhibe limitaciones propias de estado del arte de los métodos numéricos y de las capacidades de los ordenadores de dicha época.

El objetivo del proyecto ha sido la mejora del modelo de cálculo de la respuesta de transformadores acorazados en alta frecuencia del citado fabricante nacional. La mejora del código se ha centrado en el método matemático de simulación.

Se ha programado y validado un nuevo modelo de cálculo de la respuesta de transformadores acorazados en lenguaje MATLAB con mejoras en el método matemático de simulación.

Se han implantado dos métodos: simulación de sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales por el método de Runge-Kutta y simulación de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales utilizando los autovalores y autovectores de la matriz de estados.



Los dos métodos de simulación implantados ofrecen idénticos resultados y, además, mejoras (mayor precisión) con relación al método basado en la truncación de la exponencial de la matriz estados.

También se ha obtenido la respuesta en frecuencia del transformador abriendo la puerta a futuros desarrollos.



Author: Alfredo Del Río Muñoz

Director: Luis Rouco Rodríguez

Collaborating Entity: Universidad Pontificia de Comillas – ICAI

Abstract

Transformers isolation must withstand the stresses of tension established in the insulation coordination rules. The most demanding of these ones is the lightning voltage wave type.

The design of the transformer insulation is done with the help of simulation programs that attempt to reproduce the voltages in the coils in case of applying a lightning impulse voltage waveform.

Simulation programs built highly detailed models of the inductances and capacities of the windings from the physical configuration of these ones.

A national manufacturer has a simulation of stresses in shells transformers coils code to wave beam type. This is a code that dates from the 60s of last century.

The simulation method of the code (based on the truncation of the exponential of the matrix) exhibits limitations inherent to that time state of the art of numerical methods and computer capabilities.

The aim of the project has been the improvement of the response of high frequency shells transformers calculation model of that national manufacturer. The improved of the code has been focused on the mathematical simulation method.

A new model of computation for calculating of the response of shells transformers in MATLAB language with improvements in the mathematical simulation method has been programmed and validated.

We have implemented two methods: nonlinear differential equations systems simulation by the Runge-Kutta method and linear differential equations systems simulation using the eigenvalues and eigenvectors of the states matrix.



Both simulation methods implanted provide identical results and, furthermore, improvements (better accuracy) relative to the method based on the truncation of the exponential of the states matrix.

We have also obtained the transformer frequency response, opening the door to future developments.



AUTORIZACIÓN PARA LA DIGITALIZACIÓN, DEPÓSITO Y DIVULGACIÓN EN ACCESO ABIERTO (RESTRINGIDO) DE DOCUMENTACIÓN

1º. Declaración de la autoría y acreditación de la misma.

El autor D. Alfredo Del Río Muñoz, como alumno de la UNIVERSIDAD PONTIFICIA COMILLAS (COMILLAS), DECLARA que es el titular de los derechos de propiedad intelectual, objeto de la presente cesión, en relación con la obra Modelado y Simulación de Transformadores Acorazados antes Perturbaciones de Alta Frecuencia, que ésta es una obra original, y que ostenta la condición de autor en el sentido que otorga la Ley de Propiedad Intelectual como titular único o cotitular de la obra.

En caso de ser cotitular, el autor (firmante) declara asimismo que cuenta con el consentimiento de los restantes titulares para hacer la presente cesión. En caso de previa cesión a terceros de derechos de explotación de la obra, el autor declara que tiene la oportuna autorización de dichos titulares de derechos a los fines de esta cesión o bien que retiene la facultad de ceder estos derechos en la forma prevista en la presente cesión y así lo acredita.

2º. Objeto y fines de la cesión.

Con el fin de dar la máxima difusión a la obra citada a través del Repositorio institucional de la Universidad y hacer posible su utilización de forma libre y gratuita (con las limitaciones que más adelante se detallan) por todos los usuarios del repositorio y del portal e-ciencia, el autor CEDE a la Universidad Pontificia Comillas de forma gratuita y no exclusiva, por el máximo plazo legal y con ámbito universal, los derechos de digitalización, de archivo, de reproducción, de distribución, de comunicación pública, incluido el derecho de puesta a disposición electrónica, tal y como se describen en la Ley de Propiedad Intelectual. El derecho de transformación se cede a los únicos efectos de lo dispuesto en la letra (a) del apartado siguiente.

3º. Condiciones de la cesión.

Sin perjuicio de la titularidad de la obra, que sigue correspondiendo a su autor, la cesión de derechos contemplada en esta licencia, el repositorio institucional podrá:

(a) Transformarla para adaptarla a cualquier tecnología susceptible de incorporarla a internet; realizar adaptaciones para hacer posible la utilización de la obra en formatos



electrónicos, así como incorporar metadatos para realizar el registro de la obra e incorporar “marcas de agua” o cualquier otro sistema de seguridad o de protección.

- (b) Reproducir la en un soporte digital para su incorporación a una base de datos electrónica, incluyendo el derecho de reproducir y almacenar la obra en servidores, a los efectos de garantizar su seguridad, conservación y preservar el formato. .
- (c) Comunicarla y ponerla a disposición del público a través de un archivo abierto institucional, accesible de modo libre y gratuito a través de internet.
- (d) Distribuir copias electrónicas de la obra a los usuarios en un soporte digital.

4º. Derechos del autor.

El autor, en tanto que titular de una obra que cede con carácter no exclusivo a la Universidad por medio de su registro en el Repositorio Institucional tiene derecho a:

- a) A que la Universidad identifique claramente su nombre como el autor o propietario de los derechos del documento.
- b) Comunicar y dar publicidad a la obra en la versión que ceda y en otras posteriores a través de cualquier medio.
- c) Solicitar la retirada de la obra del repositorio por causa justificada. A tal fin deberá ponerse en contacto con el vicerrector/a de investigación (curiarte@rec.upcomillas.es).
- d) Autorizar expresamente a COMILLAS para, en su caso, realizar los trámites necesarios para la obtención del ISBN.
- d) Recibir notificación fehaciente de cualquier reclamación que puedan formular terceras personas en relación con la obra y, en particular, de reclamaciones relativas a los derechos de propiedad intelectual sobre ella.

5º. Deberes del autor.

El autor se compromete a:

- a) Garantizar que el compromiso que adquiere mediante el presente escrito no infringe ningún derecho de terceros, ya sean de propiedad industrial, intelectual o cualquier otro.
- b) Garantizar que el contenido de las obras no atenta contra los derechos al honor, a la intimidad y a la imagen de terceros.
- c) Asumir toda reclamación o responsabilidad, incluyendo las indemnizaciones por daños, que pudieran ejercitarse contra la Universidad por terceros que vieran infringidos sus derechos e intereses a causa de la cesión.



d) Asumir la responsabilidad en el caso de que las instituciones fueran condenadas por infracción de derechos derivada de las obras objeto de la cesión.

6º. Fines y funcionamiento del Repositorio Institucional.

La obra se pondrá a disposición de los usuarios para que hagan de ella un uso justo y respetuoso con los derechos del autor, según lo permitido por la legislación aplicable, y con fines de estudio, investigación, o cualquier otro fin lícito. Con dicha finalidad, la Universidad asume los siguientes deberes y se reserva las siguientes facultades:

a) Deberes del repositorio Institucional:

- La Universidad informará a los usuarios del archivo sobre los usos permitidos, y no garantiza ni asume responsabilidad alguna por otras formas en que los usuarios hagan un uso posterior de las obras no conforme con la legislación vigente. El uso posterior, más allá de la copia privada, requerirá que se cite la fuente y se reconozca la autoría, que no se obtenga beneficio comercial, y que no se realicen obras derivadas.

- La Universidad no revisará el contenido de las obras, que en todo caso permanecerá bajo la responsabilidad exclusiva del autor y no estará obligada a ejercitar acciones legales en nombre del autor en el supuesto de infracciones a derechos de propiedad intelectual derivados del depósito y archivo de las obras. El autor renuncia a cualquier reclamación frente a la Universidad por las formas no ajustadas a la legislación vigente en que los usuarios hagan uso de las obras.

- La Universidad adoptará las medidas necesarias para la preservación de la obra en un futuro.

b) Derechos que se reserva el Repositorio institucional respecto de las obras en él registradas:

- retirar la obra, previa notificación al autor, en supuestos suficientemente justificados, o en caso de reclamaciones de terceros.

Madrid, a 4 de Junio de 2014

ACEPTA

Fdo.....



UNIVERSIDAD PONTIFICIA COMILLAS
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
(ICAI)
ALFREDO DEL RÍO MUÑOZ – INGENIERO INDUSTRIAL



Agradecimientos

Este proyecto fin de carrera es parte de un proyecto de investigación desarrollado por el IIT para Asea Brown Boveri S.A. (ABB).

El autor agradece a ABB el apoyo técnico y económico prestado a lo largo del proyecto y a los señores D. Miguel Cuesto, D. Antonio Fernández y D. Carlos González por sus comentarios y sugerencias.

El autor desea expresar su gratitud a D. Alberto Prieto por haber posibilitado sus estancias en prácticas en la fábrica de ABB en Córdoba durante los veranos de 2012 y 2013.

El autor también desea agradecer a su director de proyecto D.Luis Rouco Rodríguez por su dedicación y conocimientos transmitidos.

Finalmente el autor quiere agradecer a toda su familia, en especial a sus padres, de los que ha aprendido diariamente, y quienes han hecho posible que el autor haya podido realizar esta carrera, y que sea la persona que es hoy en día.



UNIVERSIDAD PONTIFICIA COMILLAS
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
(ICAI)
ALFREDO DEL RÍO MUÑOZ – INGENIERO INDUSTRIAL



1. Introducción

1.1 El tema del proyecto

Equation Chapter 1 Section 1 El aislamiento de los transformadores debe soportar las solicitaciones de tensión establecidas en las normas de coordinación de aislamiento. De todas ellas la más exigente es la onda de tensión de onda tipo rayo.

El diseño del aislamiento de los transformadores se realiza con la ayuda de programas de simulación que intentan reproducir las tensiones en los arrollamientos en caso de la aplicación de una onda de tensión tipo rayo.

Los programas de simulación construyen modelos muy detallados de las inductancias y capacidades de los arrollamientos a partir de la configuración física de éstos.

Un fabricante nacional, dispone de un código de simulación de tensiones en arrollamientos de transformadores acorazados ante onda tipo rayo. Se trata de código que data de los años 60 del siglo pasado.

El método de simulación de dicho código ((basado en la truncación de la exponencial de la matriz) exhibe limitaciones propias de estado del arte de los métodos numéricos y de las capacidades de los ordenadores de dicha época.

1.2 Objetivo del proyecto

El objetivo del proyecto será la mejora del modelo de cálculo de la respuesta de transformadores acorazados en alta frecuencia de un fabricante nacional. La mejora del código se centrará en el método matemático de simulación.

Para alcanzar el citado objetivo, se realizarán las siguientes de tareas:

1. Análisis y documentación del modelo de cálculo de la respuesta de transformadores acorazados en alta frecuencia de un fabricante nacional.
2. Programación, pruebas y validación de un nuevo modelo de cálculo en lenguaje MATLAB con mejoras en el método matemático de simulación.
3. Documentación del nuevo modelo de cálculo.



Como punto de partida para abordar el proyecto, se revisarán los temas relativos a:

- Principios de modelado y simulación de sistemas dinámicos
- Sobretensiones y aislamiento
- Constitución de transformadores
- Modelos de transformadores en baja y media frecuencia

1.3 Organización del documento

Esta memoria contiene 0 capítulos.

El capítulo 0 está dedicado a la revisión de los principios de modelado y simulación de sistemas dinámicos necesarios para la simulación de los modelos de transformadores.

El capítulo 0 introduce el problema de las sobretensiones y aislamiento en las redes eléctricas.

El capítulo 0 explica la constitución de los transformadores y las diferencias entre los transformadores de columnas y los transformadores acorazados.

Los capítulos 0 y 6 detallan los modelos de los transformadores de media y baja frecuencia.

El capítulo 0 detalla los modelos de los transformadores a alta frecuencia. El capítulo 0 contiene los resultados de simulación de transformadores a alta frecuencia. El capítulo 0 contiene los resultados de la respuesta en frecuencia de transformadores a alta frecuencia.

El capítulo 0 expone las conclusiones del proyecto. El capítulo 0 contiene las referencias bibliográficas.

Los capítulos 0, 0 y 0 son el núcleo del proyecto. Los capítulos 0, 0, 0 0 y proporcionan bases para poder comprender y abordar el núcleo del proyecto.



2. Principios de modelado y simulación de sistemas dinámicos

Equation Chapter (Next) Section 1 Este capítulo revisa los principios de modelado y simulación de sistemas dinámicos.

2.1. Modelos de sistemas dinámicos

Considérese un sistema dinámico descrito por un conjunto de ecuaciones diferenciales y algebraicas no lineales escritas en la forma:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{0} &= \mathbf{H}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{u})\end{aligned}\tag{2.1}$$

donde \mathbf{G} y \mathbf{H} son vectores de funciones no lineales, \mathbf{x} son las variables de estado, \mathbf{z} son las variables algebraicas y \mathbf{u} son las variables de entrada.

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &\in \mathfrak{R}^{N \times 1} \\ \mathbf{z} &\in \mathfrak{R}^{M \times 1} \\ \mathbf{u} &\in \mathfrak{R}^{L \times 1}\end{aligned}$$

Cuando el sistema dinámico está expresado en términos de las variables de estado y de las variables algebraicas, se dice que está escrito en forma implícita.

Si el sistema de ecuaciones diferenciales no lineales (2.1) se linealiza alrededor del punto de trabajo $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0, \mathbf{z} = \mathbf{z}_0, \mathbf{u} = \mathbf{u}_0$, resulta:



$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \Delta \dot{\mathbf{x}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0, \mathbf{z}=\mathbf{z}_0, \mathbf{u}=\mathbf{u}_0} & \left. \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{z}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0, \mathbf{z}=\mathbf{z}_0, \mathbf{u}=\mathbf{u}_0} \\ \left. \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0, \mathbf{z}=\mathbf{z}_0, \mathbf{u}=\mathbf{u}_0} & \left. \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0, \mathbf{z}=\mathbf{z}_0, \mathbf{u}=\mathbf{u}_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x} \\ \Delta \mathbf{z} \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0, \mathbf{z}=\mathbf{z}_0, \mathbf{u}=\mathbf{u}_0} \\ \left. \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0, \mathbf{z}=\mathbf{z}_0, \mathbf{u}=\mathbf{u}_0} \end{bmatrix} \Delta \mathbf{u} \\
 &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x} \\ \Delta \mathbf{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \Delta \mathbf{u}
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

donde:

$$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \Delta \mathbf{z} = \mathbf{z} - \mathbf{z}_0, \Delta \mathbf{u} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_0$$

Si se eliminan las variables algebraicas \mathbf{z} de las ecuaciones (2.1), entonces el sistema dinámico queda descrito por un conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales expresadas en términos de las variables de estado \mathbf{x} y de las variables de entrada \mathbf{u}

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \tag{2.3}$$

Quando el sistema dinámico está expresado en términos de las variables de estado, se dice que está escrito en forma explícita.



Si el sistema de ecuaciones diferenciales no lineales (2.3) se linealizan alrededor del punto de trabajo $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0, \mathbf{u} = \mathbf{u}_0$, resulta:

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\mathbf{x}} &= \left. \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0, \mathbf{u}=\mathbf{u}_0} \Delta \mathbf{x} + \left. \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0, \mathbf{u}=\mathbf{u}_0} \Delta \mathbf{u} \\ &= \mathbf{A} \Delta \mathbf{x} + \mathbf{B} \Delta \mathbf{u} \end{aligned} \quad (2.4)$$

La matriz de estados del modelo dinámico lineal (2.4) se puede obtener por linealización analítica o numérica (por el método de la expresión (2.5) o del método de la expresión (2.6)) del sistema de ecuaciones diferenciales no lineales:

$$\left. \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} \approx \left. \frac{\mathbf{F}(\mathbf{x}+h) - \mathbf{F}(\mathbf{x})}{h} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} \quad (2.5)$$

$$\left. \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} \approx \text{Im} \left\{ \left. \frac{\mathbf{F}(\mathbf{x}+jh)}{h} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} \right\} \quad (2.6)$$

Por supuesto, no siempre es posible eliminar las variables algebraicas de un sistema dinámico no lineal escrito en forma implícita (2.1) para pasar a otro escrito en forma explícita (2.3).

Sin embargo, siempre es posible pasar de un sistema dinámico lineal escrito en forma implícita (2.2) a otro escrito en forma explícita (2.4).

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_4^{-1} \mathbf{A}_3 \\ \mathbf{B} &= \mathbf{B}_1 - \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_4^{-1} \mathbf{B}_2 \end{aligned} \quad (2.7)$$

2.2. Solución de sistemas dinámicos no lineales

La solución del sistema de ecuaciones diferenciales no lineales se obtiene por simulación en el dominio del tiempo. La simulación en el dominio del tiempo consiste en la integración numérica de las ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento dinámico del sistema. Un algoritmo de integración numérica de las ecuaciones diferenciales, obtiene en el caso más sencillo las variables de estado en el paso $k+1$ a partir de las variables de estado en el paso anterior k :



$$\mathbf{x}_{k+1} = \Gamma(\mathbf{x}_k)$$

siendo Γ una función que depende del método considerado.

El método de Euler predictor-corrector obtiene \mathbf{x}_{k+1} en dos pasos:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \dot{\mathbf{x}}_k \Delta t = \mathbf{x}_k + \mathbf{F}(\mathbf{x}_k) \Delta t$$
$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \left[\dot{\mathbf{x}}_k + \dot{\hat{\mathbf{x}}}_{k+1} \right] \frac{\Delta t}{2} = \mathbf{x}_k + \left[\mathbf{F}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{F}(\hat{\mathbf{x}}_{k+1}) \right] \frac{\Delta t}{2}$$

El método de Runge-Kutta de orden 4-5 se obtiene \mathbf{x}_{k+1} según:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$
$$k_1 = \mathbf{F}(\mathbf{x}_k)$$
$$k_2 = \mathbf{F}\left(\mathbf{x}_k + \frac{k_1}{2}\right)$$
$$k_3 = \mathbf{F}\left(\mathbf{x}_k + \frac{k_2}{2}\right)$$
$$k_4 = \mathbf{F}(\mathbf{x}_k + k_3)$$

2.3. Solución de sistemas dinámicos lineales

La solución del sistema de ecuaciones diferenciales lineales cuando se produce la variación de una de las variables de entrada Δu tiene dos componentes: la solución homogénea y la solución particular de la completa.

La solución homogénea es la solución que corresponde a entrada nula y condiciones iniciales no nulas. La solución particular de la completa es la solución que corresponde a condiciones iniciales nulas y entrada no nula.

La solución del sistema de ecuaciones diferenciales (2.4) cuando se puede expresar en términos de la exponencial de la matriz de estado \mathbf{A} de acuerdo con la expresión:



$$\Delta \mathbf{x}(t) = \Delta \mathbf{x}_h(t) + \Delta \mathbf{x}_p(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \Delta \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{b} \Delta u(\tau) d\tau \quad (2.8)$$

La exponencial de la matriz de estado \mathbf{A} se puede calcular usando el desarrollo en serie de Taylor:

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \frac{\mathbf{A}}{1!}t + \frac{\mathbf{A}^2}{2!}t^2 + \dots$$

Sin embargo, este método no es siempre numéricamente robusto. Una solución numéricamente robusta y llena de sentido físico se puede obtener en términos de los autovalores y autovectores de la matriz de estado.

2.3.1. Autovalores y autovectores

Una alternativa llena de significado físico está basada en los autovalores y autovectores de la matriz de estado \mathbf{A} . Un autovalor λ_i de la matriz de estado \mathbf{A} y los correspondientes autovectores derecho \mathbf{v}_i e izquierdo \mathbf{w}_i asociados se definen como:

$$\mathbf{A} \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i \lambda_i \quad (2.9)$$

$$\mathbf{w}_i^T \mathbf{A} = \lambda_i \mathbf{w}_i^T \quad (2.10)$$

El estudio de las ecuaciones (2.9) y (2.10) indica que los autovalores derecho e izquierdo no están determinados de forma única (éstos se calculan como la solución de un sistema lineal de N ecuaciones y $N+1$ incógnitas). Una forma de eliminar el grado de libertad es introducir la normalización:

$$\mathbf{w}_i^T \mathbf{v}_i = 1 \quad (2.11)$$

En el caso de N autovalores distintos, las ecuaciones (2.9)-(2.11) se pueden escribir juntas para todos los autovalores en forma matricial:



$$\begin{aligned} \mathbf{A}[\mathbf{v}_1 \quad \dots \quad \mathbf{v}_N] &= [\mathbf{v}_1 \quad \dots \quad \mathbf{v}_N] \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_N \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{w}_N^T \end{bmatrix} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{w}_N^T \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{w}_N^T \end{bmatrix} [\mathbf{v}_1 \quad \dots \quad \mathbf{v}_N] &= \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.12)$$

o en forma más compacta como:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{V} &= \mathbf{V}\mathbf{\Lambda} \\ \mathbf{W}\mathbf{A} &= \mathbf{\Lambda}\mathbf{W} \\ \mathbf{W}\mathbf{V} &= \mathbf{I} \end{aligned} \quad (2.13)$$

donde $\mathbf{\Lambda}$, \mathbf{V} y \mathbf{W} son respectivamente las matrices de los autovalores y los autovectores derechos e izquierdos:

$$\begin{aligned} \mathbf{\Lambda} &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_N \end{bmatrix} \\ \mathbf{V} &= [\mathbf{v}_1 \quad \dots \quad \mathbf{v}_N] \\ \mathbf{W} &= \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{w}_N^T \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2.3.2. Solución en términos de los autovalores y autovectores de la matriz de estados

Si la exponencial de la matriz de estado $e^{\mathbf{A}t}$ se expresa en términos de los autovalores y de los autovectores derechos e izquierdos de la matriz de estados \mathbf{A} , resulta:



$$\begin{aligned} e^{A t} &= \mathbf{V} \mathbf{W} + \frac{\mathbf{V} \Lambda \mathbf{W}}{1!} t + \frac{\mathbf{V} \Lambda^2 \mathbf{W}}{2!} t^2 + \dots \\ &= \mathbf{V} \left(\mathbf{I} + \frac{\Lambda}{1!} t + \frac{\Lambda^2}{2!} t^2 + \dots \right) \mathbf{W} = \mathbf{V} e^{\Lambda t} \mathbf{W} \end{aligned} \quad (2.14)$$

La solución del sistema de ecuaciones diferenciales (2.8) en términos de los autovalores y autovectores de una matriz:

$$\Delta \mathbf{x}(t) = \mathbf{V} e^{A(t-t_0)} \mathbf{W} \Delta \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{V} e^{A(\tau-t_0)} \mathbf{W} \mathbf{b} \Delta u(\tau) d\tau \quad (2.15)$$

Por otra parte, la solución homogénea del sistema de ecuaciones diferenciales lineales (2.15) se puede expresar en términos de los autovalores y de los autovectores derechos e izquierdos de la matriz de estados \mathbf{A} como:

$$\Delta \mathbf{x}(t)_h = \mathbf{V} e^{A t} \mathbf{W} \Delta \mathbf{x}(t_0) = \sum_{i=1}^N \mathbf{v}_i e^{\lambda_i t} \left[\mathbf{w}_i^T \Delta \mathbf{x}(t_0) \right] \quad (2.16)$$

El estudio de la ecuación permite obtener las siguientes conclusiones La respuesta del sistema se expresa como una combinación de la respuesta del sistema para N modos.

- Los autovalores de(2.16) la matriz de estado \mathbf{A} determinan la estabilidad del sistema. Un autovalor real negativo (positivo) indica un comportamiento exponencial decreciente (creciente) mientras que un autovalor complejo con parte real negativa (positiva) indica un comportamiento oscilatorio decreciente (creciente), tal y como se muestra en la Figura 2-1.
- Los componentes del autovector derecho \mathbf{v}_i indican la actividad relativa de cada variable en el modo i-ésimo.
- Las componentes de autovector izquierdo \mathbf{w}_i pesa las condiciones iniciales en el modo i-ésimo.

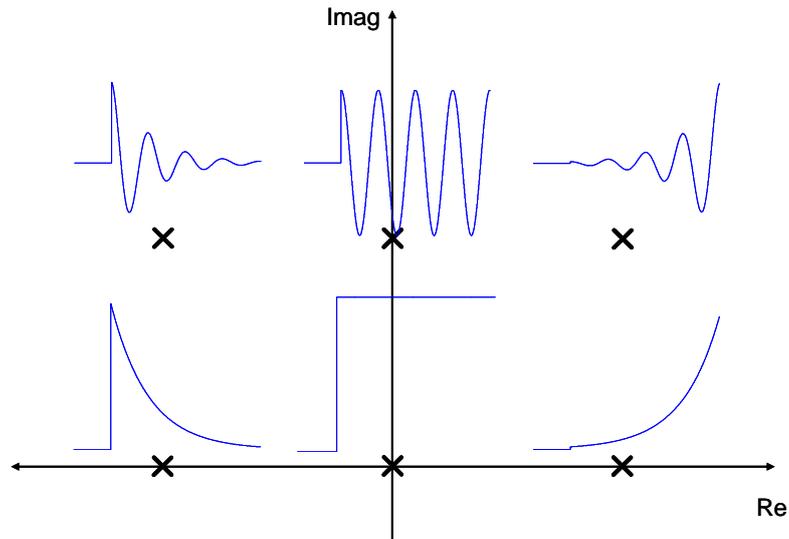


Figura 2-1: Relación entre la localización de los autovalores de la matriz de estados y la respuesta temporal ante un impulso.

2.4. Funciones de transferencia de sistemas dinámicos lineales

Considérese que selecciona entre las entradas, una de ellas u , que se define en el sistema una variable de salida y . Entonces la descripción del sistema queda en la forma:

$$\begin{aligned}\Delta \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\Delta \mathbf{x}(t) + \mathbf{b}\Delta u(t) \\ \Delta y(t) &= \mathbf{c}\Delta \mathbf{x}(t)\end{aligned}\tag{2.17}$$

La función de transferencia expresada en términos de los polos y los residuos queda:

$$\frac{\Delta y(s)}{\Delta u(s)} = \mathbf{c}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b}\tag{2.18}$$



La función de transferencia expresada en términos de los polos y ceros o de los polos y los residuos queda:

$$\frac{\Delta y(s)}{\Delta u(s)} = \frac{\prod_{i=1}^{N_z} (s - z_i)}{\prod_{i=1}^N (s - p_i)} = \sum_{i=1}^N \frac{R_i}{s - p_i} \quad (2.19)$$

donde:

z_i es el cero i -ésimo

p_i es el polo i -ésimo

R_i es el residuo correspondiente al polo i -ésimo

N es el número de polos y

N_z es el número de ceros (el número de ceros es menor o igual al número de polos)

La función de transferencia (2.18) también se puede expresar en términos de los autovalores y autovectores de la matriz de estados como:

$$\frac{\Delta y(s)}{\Delta u(s)} = \mathbf{cV}(s\mathbf{I} - \mathbf{\Lambda})^{-1} \mathbf{Wb} = \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{cv}_i \mathbf{w}_i^T \mathbf{b}}{s - \lambda_i} \quad (2.20)$$

Por tanto los autovalores son los polos de cualquier función de transferencia que se pueda considerar $p_i = \lambda_i$ y los residuos se puedan calcular en términos de los autovectores derechos e izquierdos como:

$$R_i = \mathbf{cv}_i \mathbf{w}_i^T \mathbf{b} \quad (2.21)$$

La respuesta en frecuencia consiste en determinar para cada frecuencia la relación:

$$\frac{\Delta y(\omega)}{\Delta u(\omega)} = \left. \frac{\Delta y(s)}{\Delta u(s)} \right|_{s=j\omega}$$



Si se tiene en cuenta la ecuación (2.18), la respuesta en frecuencia resulta:

$$\frac{\Delta y(\omega)}{\Delta u(\omega)} = \mathbf{c}^T (j\omega\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b}$$

El cálculo de la respuesta en frecuencia precisa el cálculo de la inversa de la matriz de estados para cada frecuencia. Este cálculo puede hacerse de forma más eficiente utilizando los autovalores y autovectores de la matriz de estados como:

$$\frac{\Delta y(\omega)}{\Delta u(\omega)} = \mathbf{c}^T \mathbf{V} (j\omega\mathbf{I} - \mathbf{\Lambda})^{-1} \mathbf{Wb}$$

3. Sobretensiones y aislamiento

3.1. Sobretensiones

Equation Chapter (Next) Section 1 Se denomina sobretensión a una tensión anormal entre dos puntos de una instalación eléctrica, superior al valor máximo que puede existir entre ellos en servicio normal. Las sobretensiones pueden provocar una ruptura dieléctrica, si el elemento afectado es un material aislante interno o un contorno, si se produce una descarga en el aire. Una ruptura dieléctrica también puede ser la causa de nuevas sobretensiones.

Las causas de las sobretensiones pueden externas o internas. Las maniobras son causas internas mientras que las faltas y los rayos son causas externas.

Las sobretensiones también se pueden clasificar en función del tiempo que permanecen sin extinguirse en tres grandes grupos:

- Temporales.
- De maniobra.
- De origen atmosférico.

La Figura 3-1 muestra los tipos de sobretensiones en el plano tiempo - tensión.

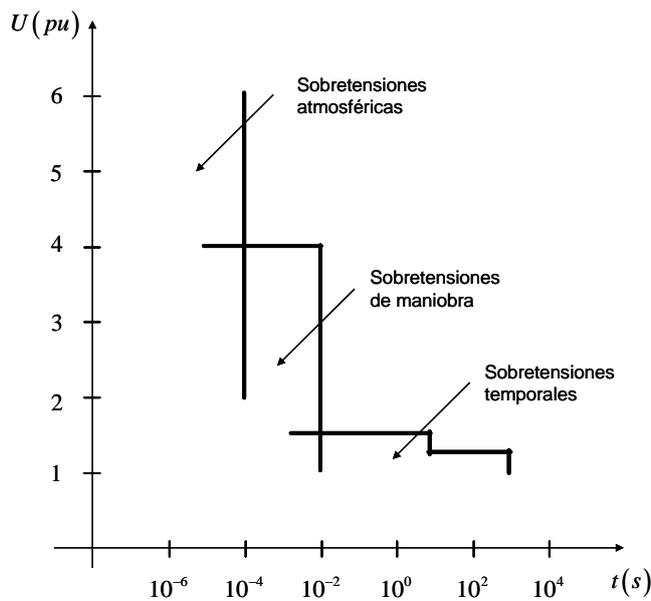


Figura 3-1: Tipos de sobretensiones en el plano tensión-tiempo.



Las sobretensiones temporales son sobretensiones de larga duración (hasta varios segundos), poco amortiguadas y de frecuencia similar a la frecuencia fundamental. Existen gran número de fenómenos en las redes eléctricas que pueden dar lugar a sobretensiones temporales. Entre otras merece la pena mencionar, las sobretensiones debidas a:

- la desconexión de cargas,
- el fenómeno de autoexcitación,
- el efecto Ferranti y
- la ocurrencia de faltas a tierra.

Todas estas causas son internas al sistema eléctrico.

Las sobretensiones de maniobra o de frente lento son sobretensiones de corta duración (milisegundos). Como su nombre indica tienen su origen en maniobras de elementos. También existen gran número de maniobras en las redes eléctricas que pueden dar lugar a sobretensiones de frente lento. Entre otras merece la pena mencionar, las sobretensiones debidas:

- al despeje de faltas
- la conexión de baterías de condensadores
- la desconexión de pequeñas corrientes inductivas
- la conexión de líneas en vacío

Mientras que las faltas son causas externas, las restantes son internas al sistema eléctrico.

Las sobretensiones atmosféricas o de frente rápido son sobretensiones de muy corta duración (microsegundos). Como, su nombre indica son debidas a la caída del rayo.

Las descargas atmosféricas se pueden modelan como pulsos de corriente, en los que la subida desde cero hasta el pico de corriente transcurre en un orden de microsegundos y la bajada de nuevo hasta cero se produce en el orden de las decenas de microsegundos. El valor de cresta del impulso de corriente es del orden de las decenas de kA. La sobretensión provocada por la descarga atmosférica dependerá por tanto del valor de cresta del impulso y de la impedancia característica de la línea donde el rayo incida. Por ejemplo, en caso de la incidencia directa de un rayo de 10 kA (ver Figura 3-2) sobre una línea eléctrica cuya impedancia característica sea de



300 Ω , produciría una sobretensión de 3000 kV. Como quiera que esta sobretensión es muy superior a la tensión soportada por la línea se produciría una falta por contorneamiento de los aisladores o descarga directa desde los conductores al apoyo. Por supuesto, los transformadores conectados a la línea estarían también en peligro. La protección de los transformadores se realiza por medio de pararrayos instalados en bornes del transformador y puesta a tierra del. Los pararrayos son resistencias no lineales. Presentan una resistencia muy elevada a la tensión nominal y una resistencia muy baja en caso de sobretensiones debidas al rayo. En líneas de muy alta tensión la protección frente al impacto directo del rayo se realiza por medio de los cables de tierra o de guarda.

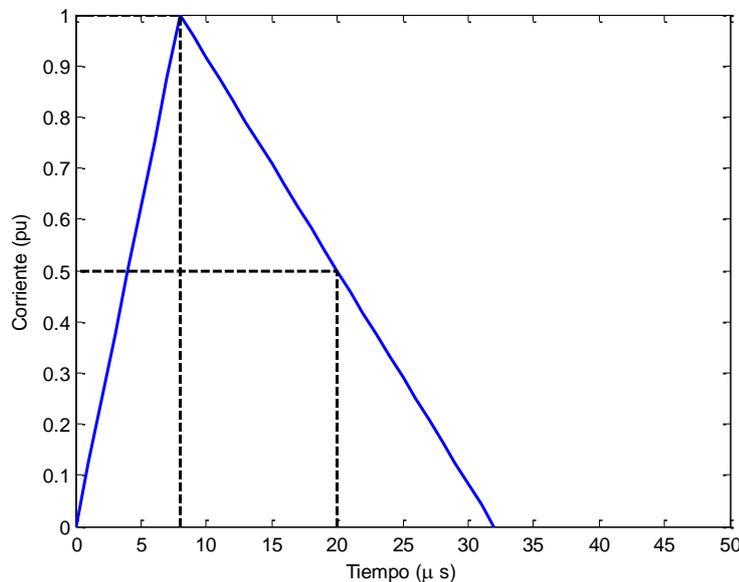


Figura 3-2: Impulso normalizado de corriente que representa la corriente de un rayo.

3.2. Aislamiento

La capacidad de los aislamientos de soportar las diferentes tipos de sobretensiones se comprueba por medio de tres ensayos con ondas normalizadas:

- Tensión normalizada de corta duración (1 minuto) a frecuencia industrial (50 Hz). Asegura la capacidad de los aislamientos de soportar sobretensiones temporales.
- Impulso de tensión tipo de maniobra normalizado es un impulso de tensión con un tiempo de subida hasta el valor de cresta de 250 μ s y un tiempo de
-

cola de 2500 μs (al 50% del valor máximo de tensión). Asegura la capacidad de los aislamientos de soportar sobretensiones de maniobra.

- Impulso de tensión tipo rayo normalizado es un impulso de tensión con un tiempo de subida hasta el valor de cresta de 1.2 μs y un tiempo de cola de 50 μs (al 50% del valor máximo de tensión). Asegura la capacidad de los aislamientos de soportar sobretensiones atmosféricas.

La Figura 3-3 muestra el impulso de tensión tipo rayo normalizado.

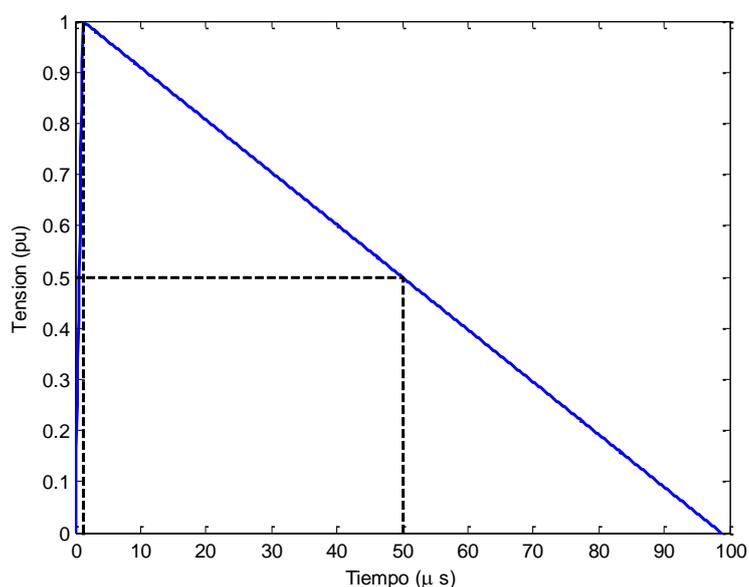


Figura 3-3: Impulso de tensión tipo rayo normalizado.

La coordinación de aislamiento tiene por objetivo asegurar que el nivel de aislamiento seleccionado para los distintos elementos que componen una red sea el adecuado para soportar las sollicitaciones de tensión a las que pueden verse sometidos los materiales.

Las sollicitaciones consisten en sobretensiones que en ciertos casos pueden superar los niveles de aislamiento de ciertos elementos (transformadores, cables, etc.) por lo que es necesario utilizar dispositivos de protección contra sobretensiones. La instalación y el dimensionamiento de los dispositivos de protección debe realizarse con cuidado.

La tensión más elevada más elevada del material determina la aptitud para soportar sobretensiones temporales. La Tabla 3-1 contiene la tensión nominal de la red y tensión más elevada más elevada para el material (U_m) en redes de alta tensión.



Tabla 3-1: Tensión nominal de la red y tensión más elevada más elevada para el material (U_m) en redes de alta tensión.

Tensión nominal de la red (en kV)	Tensión más elevada para el material (U_m en kV)
15	17.5
20	24
30	36
45	52
66	72.5
132	145
220	245
400	420

A cada valor más alto de la tensión U_m le corresponde una tensión nominal a frecuencia industrial de corta duración. Dicho valor representa el límite de sobretensiones de maniobra.

Para cada valor de U_m se puede seleccionar dos tensiones nominales tipo rayo:

- Aislamiento reducido.
- Aislamiento pleno.

El valor seleccionado representa el límite de las sobretensiones atmosféricas admisibles sin causar deterioro. La elección de aislamiento pleno o reducido se hace considerando:

- el grado de exposición del material a las sobretensiones tipo rayo,
- el sistema de puesta a tierra y
- los dispositivos de protección.

Algunas consideraciones prácticas dignas de mención a la hora de la selección del nivel de aislamiento de de los componentes de las redes eléctricas son:

- Líneas aéreas: las redes de alta y media tensión con líneas aéreas tienen aislamiento pleno con independencia de la forma de puesta a tierra del neutro.
- Cables aislados: las redes de alta y media tensión con cables aislados tienen también aislamiento pleno.



- Transformadores MT/BT: el nivel de aislamiento depende del tipo de red.
- Transformadores AT/MT: tienen aislamiento reducido.

La Tabla 3-2 contiene tensión nominal de la red, tensión soportada nominal a frecuencia industrial de corta duración y tensión soportada nominal a impulsos tipo rayo.

Tabla 3-2: Tensión nominal de la red, tensión soportada nominal a frecuencia industrial de corta duración y tensión soportada nominal a impulsos tipo rayo.

Tensión más elevada para el material (Um en kV eficaces)	Tensión soportada nominal a frecuencia industrial de corta duración (en kV eficaces)	Tensión soportada nominal a impulsos tipo rayo (en kV cresta)
17.5	38	75
17.5	38	95
24	50	95
24	50	125
36	70	145
36	70	170
52	95	250
72.5	140	325
145	230	550
145	325	650
245	360	850
245	395	950
420	500	1300
420	520	1425



4. Constitución de transformadores

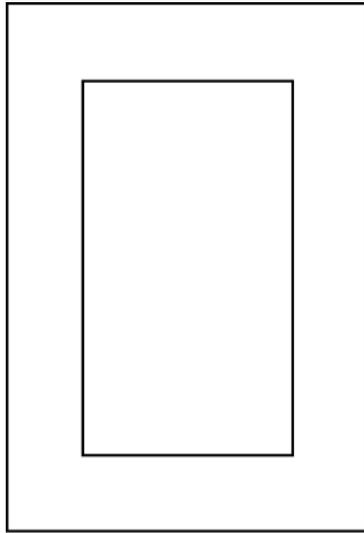
4.1. Transformadores monofásicos

Equation Chapter (Next) Section 1 Los elementos fundamentales de un transformador son el circuito magnético y los circuitos eléctricos o arrollamientos.

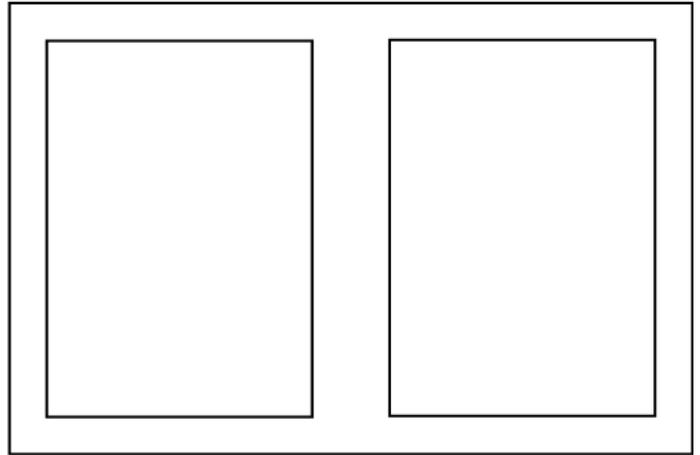
El circuito magnético de un transformador monofásico está formado por chapas magnéticas apiladas de 0.35 mm de espesor. Toma dos formas fundamentales: columnas o acorazado. En la literatura técnica en inglés “core type” o “shell type”. La Figura 4-1 muestra el alzado de los circuitos magnéticos de transformadores monofásicos columnas y acorazados. El núcleo magnético aproxima de forma escalonada la sección circular tal y como muestra la Figura 4-2. Los arrollamientos tienen forma circular para una compensación exacta de los esfuerzos radiales en caso de cortocircuito.

Los arrollamientos de los transformadores pueden ser concéntricos o alternados. La Figura 4-3 muestra su disposición. En los arrollamientos concéntricos, el arrollamiento de menor tensión es el interior y el arrollamiento de mayor tensión es el exterior. En los arrollamientos alternados, los arrollamientos de menor tensión están situados en los extremos superior e inferior.

La Figura 4-4 muestra un transformador con un núcleo de columnas con arrollamientos concéntricos en las dos columnas. También muestra un núcleo acorazado tanto con arrollamientos concéntricos como con arrollamientos alternados.



Núcleo de columnas



Núcleo acorazado

Figura 4-1: Circuitos magnéticos de transformadores monofásicos (alzado).

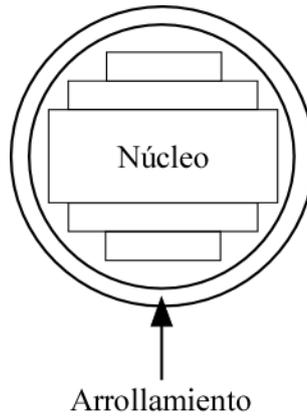
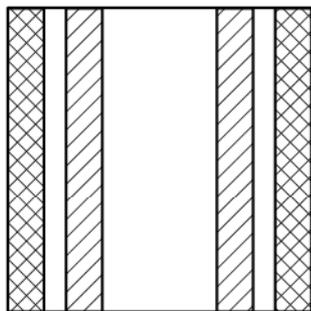
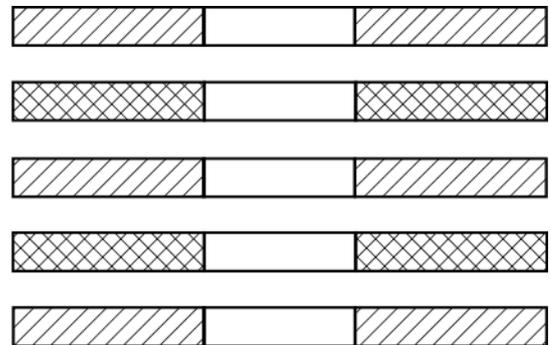


Figura 4-2: Sección de núcleo magnético con arrollamientos concéntricos.



Arrollamientos concéntricos



Arrollamientos alternados

Figura 4-3: Arrollamientos de transformadores.

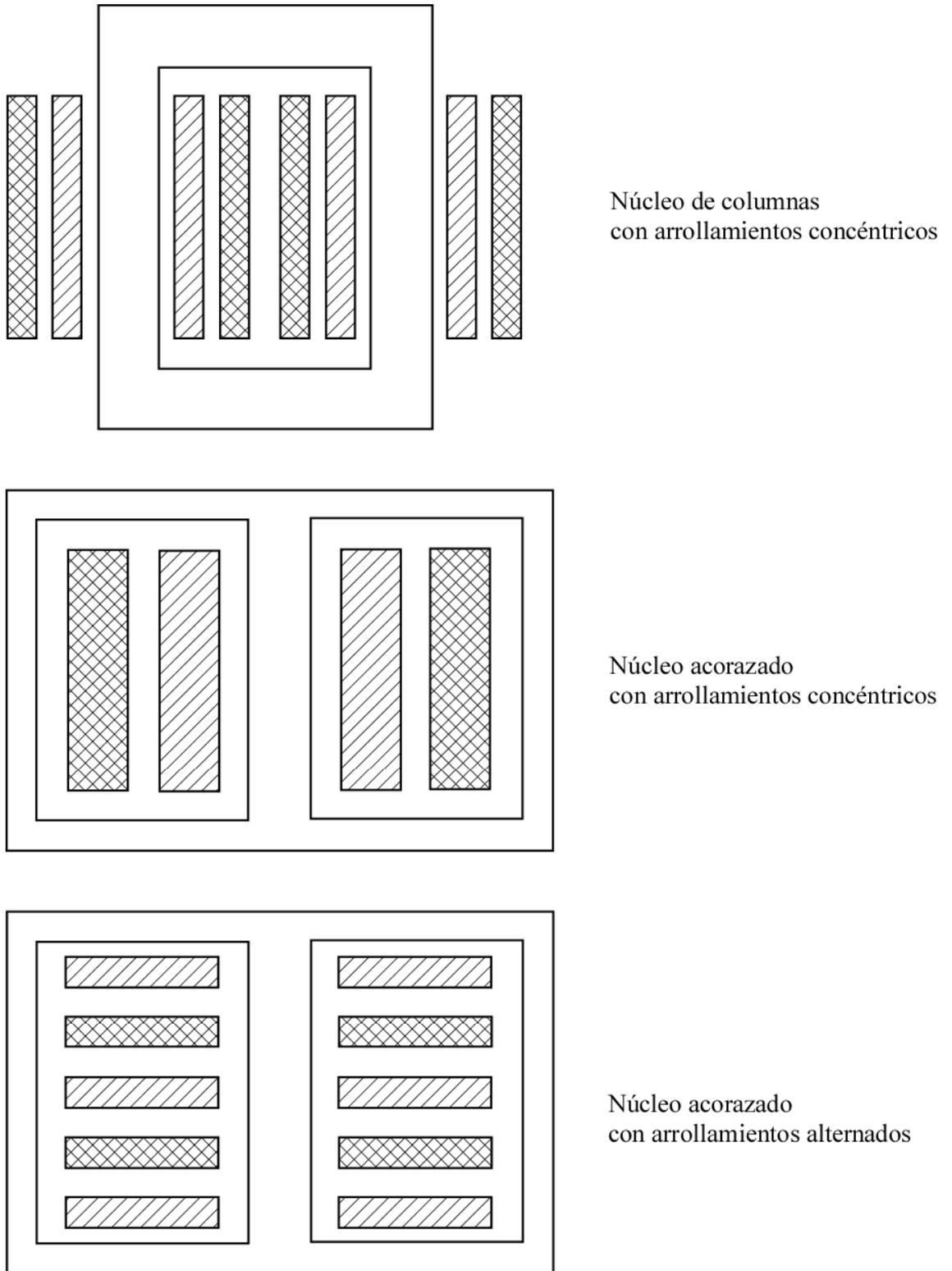
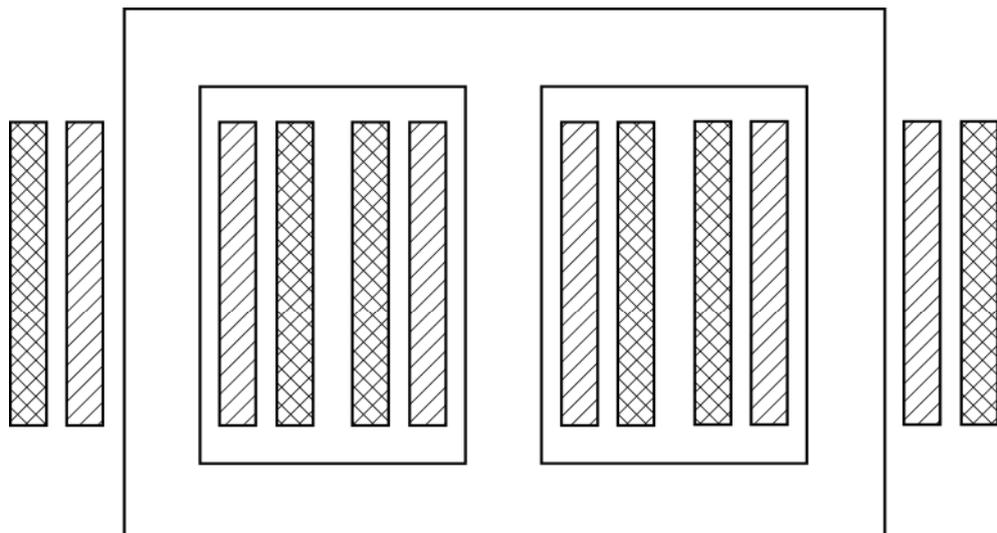


Figura 4-4: Núcleos y arrollamientos de transformadores.

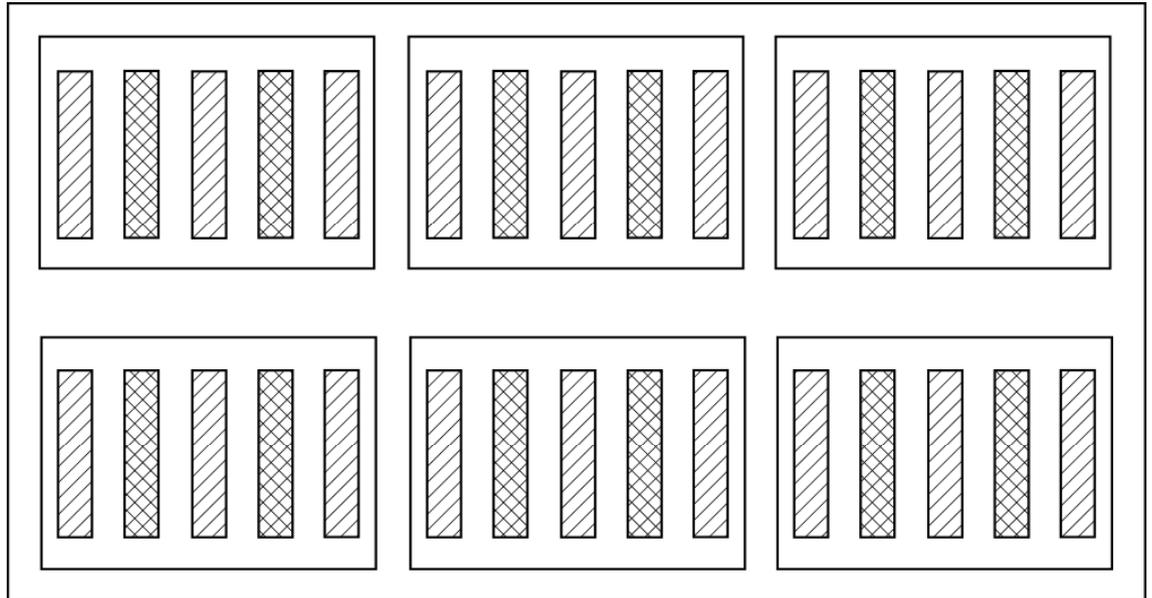
4.2. Transformadores trifásicos

Un transformador trifásico se forma uniendo los circuitos magnéticos de tres transformadores monofásicos. El circuito magnético de tres transformadores monofásicos de columnas tiene un total 6 columnas y 6 culatas. El circuito magnético de un transformador trifásico de tres columnas tiene 3 columnas y 4 culatas tal y como muestra la Figura 4-5. Un transformador trifásico de tres columnas logra ahorros significativos en material magnético con relación a un banco trifásico de tres unidades monofásicas.

La Figura 4-6 muestra la disposición de los circuitos magnéticos y eléctricos de transformadores de acorazados con arrollamientos alternados.



Tranformador trifásico tres columnas con arrollamientos concéntricos
Figura 4-5: Transformadores trifásico de tres columnas con arrollamientos concéntricos.



Transformador trifásico acorazado con arrollamientos alternados
Figura 4-6: Transformadores trifásico acorazados con arrollamientos alternados.



UNIVERSIDAD PONTIFICIA COMILLAS
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
(ICAI)
ALFREDO DEL RÍO MUÑOZ – INGENIERO INDUSTRIAL



5. Modelos de transformadores a baja frecuencia

Equation Chapter (Next) Section 1 Este capítulo presenta los modelos de transformadores monofásicos a baja frecuencia.

Se empieza obteniendo las ecuaciones del transformador “ideal”. A continuación se obtienen las ecuaciones del transformador “real”.

Después se obtiene la respuesta en frecuencia con el secundario en cortocircuito y la respuesta en el tiempo ante un impulso tipo rayo. Se estudia el efecto de la representación de la impedancia de magnetización tanto en la respuesta en frecuencia como en la respuesta en el tiempo.

5.1. Transformador ideal

En un transformador “ideal” se considera que la resistencia de los arrollamientos, la reluctancia del circuito magnético y las pérdidas del circuito magnético son nulas.

Al aplicar una tensión al arrollamiento primario u_1 , circulará por el arrollamiento primario una corriente i_1 , que crea un campo magnético. Si la reluctancia del circuito magnético es nula, el campo magnético se establecerá únicamente en el núcleo magnético del transformador. El flujo del campo magnético establecido en el hierro es el denominado “flujo mutuo” ϕ_m ya que concatenará a los arrollamientos primario y secundario. El flujo del campo magnético establecido en el aire o “flujos de dispersión” de los arrollamientos primario y secundario serán nulos. Supuesto que la tensión aplicada varía con el tiempo, la corriente y el flujo mutuo variarán también en el tiempo.

El sentido del flujo mutuo viene dado por el criterio de la mano derecha. El sentido de los arrollamientos está dado por la forma que la mano derecha abraza el núcleo magnético, el sentido de la corriente viene indicado por la dirección apuntada por el dedo índice y el sentido del flujo está señalado por la dirección apuntada por el dedo pulgar.

La variación del flujo mutuo ϕ_m inducirá sendas fuerzas electromotrices inducidas en los arrollamientos primario y secundario.

$$\begin{aligned} e_1 &= N_1 \frac{d\phi_m}{dt} \\ e_2 &= N_2 \frac{d\phi_m}{dt} \end{aligned} \tag{5.1}$$

Si se conecta una carga en el secundario circulará una corriente i_2 que contribuirá a la creación del campo magnético en el núcleo magnético.

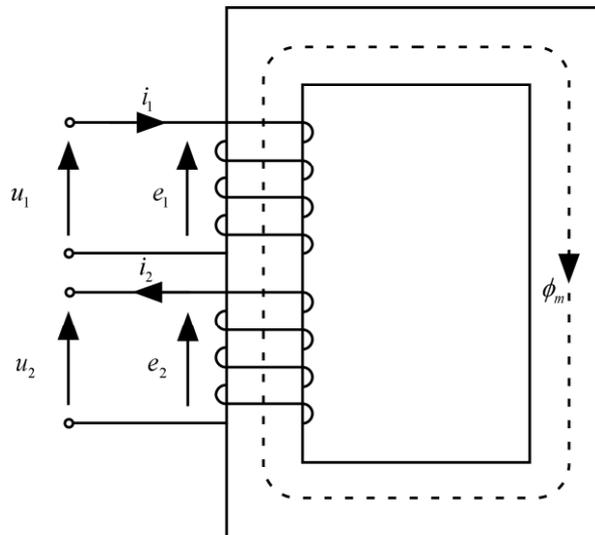


Figura 5-1: Transformador ideal.

La ecuación del circuito magnético es:

$$\sum_i F_i = N_1 i_1 - N_2 i_2 = \mathfrak{R}_m \phi_m = 0 \tag{5.2}$$

Nótese que a fuerza magnetomotriz debida a la corriente secundaria tiene signo contrario a la fuerza magnetomotriz debida a la corriente primaria ya que la corriente secundaria es saliente y contraria a la corriente que definió el sentido del flujo.

La aplicación de la segunda ley de Kirchoff a los circuitos eléctricos (arrollamientos) resulta en:

$$\begin{aligned} u_1 - e_1 &= R_1 i_1 = 0 \\ u_2 - e_2 &= R_2 i_2 = 0 \end{aligned}$$



o lo que es lo mismo:

$$\begin{aligned}u_1 &= e_1 \\u_2 &= e_2\end{aligned}\tag{5.3}$$

Las ecuaciones de los circuitos eléctricos, (5.1) y (5.3), y del circuito magnético (5.2) se pueden resumir en la forma:

$$\begin{aligned}\frac{u_1}{u_2} &= \frac{N_1}{N_2} = K \\ \frac{i_1}{i_2} &= \frac{N_2}{N_1} = \frac{1}{K}\end{aligned}$$

Una importante propiedad de los transformadores ideales es que la potencia entrante es igual a la potencia saliente. Este resultado se puede comprobar sin más que obtener la potencia cedida por el secundario a partir de la potencia absorbida por el primario:

$$p_1 = u_1 i_1 = K u_2 \frac{i_2}{K} = u_2 i_2 = p_2$$

El transformador ideal se representa mediante el circuito equivalente de la Figura 5-2.

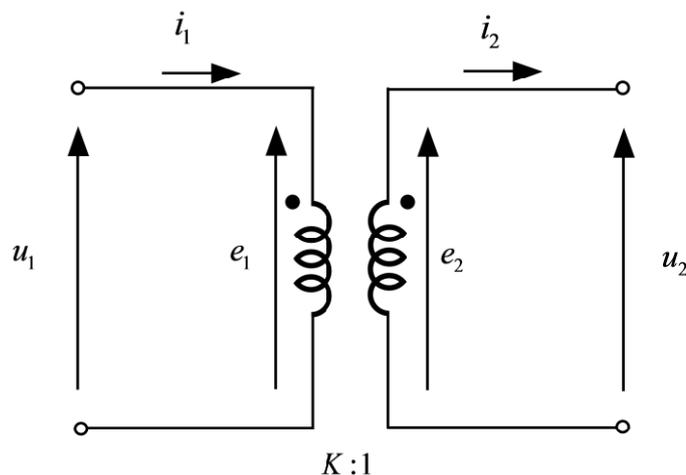


Figura 5-2: Circuito equivalente de un transformador ideal.

5.2. Transformador real

En un transformador real se considera que la resistencia de los arrollamientos y la reluctancia del circuito magnético son distintas de cero. Se obtendrán independientemente las ecuaciones del transformador sin considerar y considerando las pérdidas en el circuito magnético.

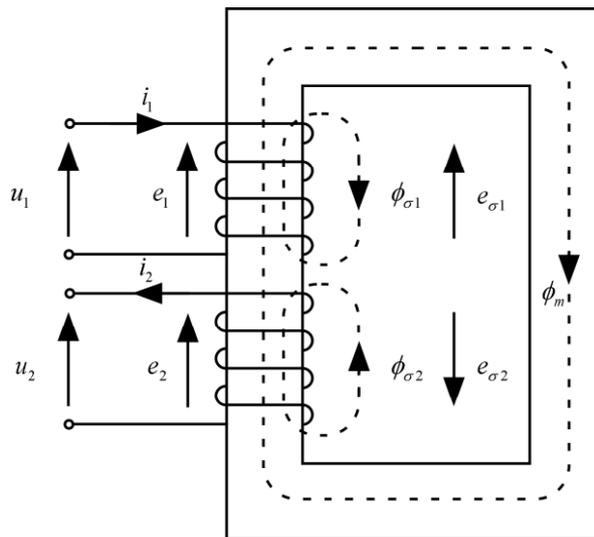


Figura 5-3: Transformador real (sin pérdidas en el hierro).

5.2.1. Transformador sin pérdidas en el hierro

Las ecuaciones de los circuitos eléctricos (arrollamientos) son (ver Figura 5-3):

$$\begin{aligned} u_1 &= R_1 i_1 + e_{\sigma 1} + e_1 \\ e_2 &= R_2 i_2 + e_{\sigma 2} + u_2 \end{aligned} \quad (5.4)$$

donde:

$$\begin{aligned} e_1 &= N_1 \frac{d\phi_m}{dt} \\ e_2 &= N_2 \frac{d\phi_m}{dt} \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} e_{\sigma 1} &= N_1 \frac{d\phi_{\sigma 1}}{dt} \\ e_{\sigma 2} &= N_2 \frac{d\phi_{\sigma 2}}{dt} \end{aligned} \quad (5.6)$$



Si se incluye (5.6) en (5.4), resulta:

$$\begin{aligned}u_1 &= R_1 i_1 + N_1 \frac{d\phi_{\sigma 1}}{dt} + e_1 \\e_2 &= R_2 i_2 + N_2 \frac{d\phi_{\sigma 2}}{dt} + u_2\end{aligned}\quad (5.7)$$

Los flujos de dispersión son proporcionales a las corrientes de acuerdo con:

$$\begin{aligned}N_1 \phi_{\sigma 1} &= L_{\sigma 1} i_1 \\N_2 \phi_{\sigma 2} &= L_{\sigma 2} i_2\end{aligned}\quad (5.8)$$

Si se incluye (5.8) en (5.7), resulta:

$$\begin{aligned}u_1 &= R_1 i_1 + L_{\sigma 1} \frac{di_1}{dt} + e_1 \\e_2 &= R_2 i_2 + L_{\sigma 2} \frac{di_2}{dt} + u_2\end{aligned}\quad (5.9)$$

La ecuación del circuito magnético es:

$$N_1 i_1 - N_2 i_2 = \mathfrak{R} \phi_m \quad (5.10)$$

donde es la \mathfrak{R} reluctancia del circuito magnético.

La ecuación (5.10) también puede escribirse como:

$$i_1 = \frac{N_2}{N_1} i_2 + \frac{\mathfrak{R} \phi_m}{N_1} = \frac{N_2}{N_1} i_2 + i_\mu \quad (5.11)$$

donde

$$i_\mu = \frac{\mathfrak{R} \phi_m}{N_1} \quad (5.12)$$

Si la relación (5.12) se incluye en (5.5) se obtiene:

$$e_1 = N_1 \frac{d\phi_m}{dt} = \frac{N_1^2}{\mathfrak{R}} \frac{di_\mu}{dt} = L_\mu \frac{di_\mu}{dt} \quad (5.13)$$

5.2.2. Transformador con pérdidas en el hierro

Las pérdidas en el hierro se representan considerando que la corriente de magnetización tiene una componente en fase con la fuerza electromotriz inducida en los arrollamientos del transformador:

$$i_m = i_{Fe} + i_\mu$$

donde:

$$e_1 = R_{Fe} i_{Fe}$$

5.3. Circuito equivalente del transformador

El circuito equivalente del transformador se presenta en la Figura 5-4. Como puede apreciarse este circuito equivalente incluye un transformador ideal.

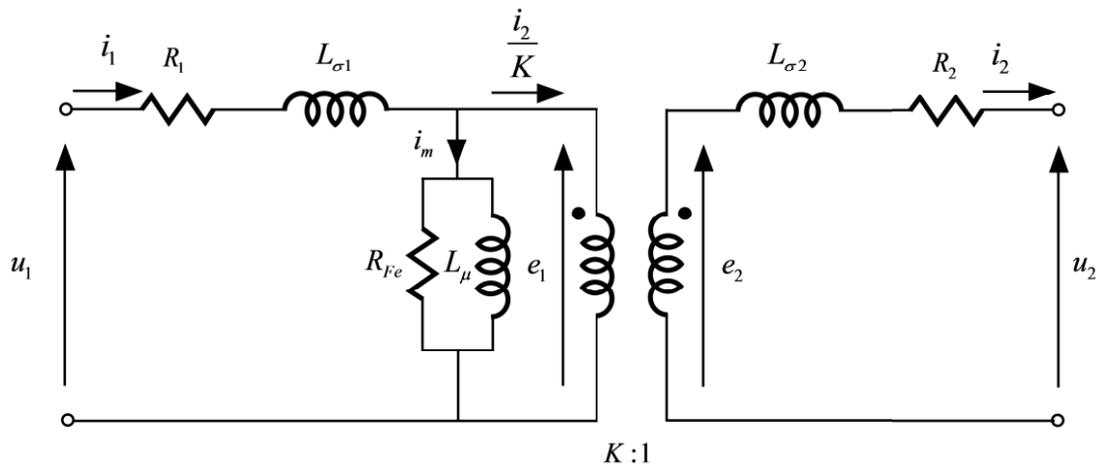


Figura 5-4: Circuito equivalente del transformador real.

Las ecuaciones del modelo del transformador de la Figura 5-4 son:

$$\begin{aligned} u_1 &= R_1 i_1 + L_{\sigma 1} \frac{di_1}{dt} + e_1 \\ e_2 &= R_2 i_2 + L_{\sigma 2} \frac{di_2}{dt} + u_2 \end{aligned} \tag{5.14}$$



$$\frac{e_1}{e_2} = K \quad (5.15)$$

$$i_1 = \frac{i_2}{K} + i_m \quad (5.16)$$

$$\begin{aligned} i_m &= i_{Fe} + i_\mu \\ e_1 &= R_{Fe} i_{Fe} \\ e_1 &= L_\mu \frac{di_\mu}{dt} \end{aligned} \quad (5.17)$$

5.4. Respuesta en frecuencia

En un transformador se pueden considerar diversas funciones de transferencia. Entre otras, se pueden mencionar:

- Tensión secundaria frente a tensión primaria cuando el secundario está en vacío

$$\left. \frac{u_2(s)}{u_1(s)} \right|_{i_2=0}$$

- Tensión primaria frente a corriente primaria cuando el secundario está en cortocircuito

$$\left. \frac{u_1(s)}{i_1(s)} \right|_{u_2=0}$$

Como quiera que los ensayos de respuesta en frecuencia de transformadores buscan caracterizar la impedancia de cortocircuito (resistencia e inductancia de dispersión), se determinará la respuesta en frecuencia de tensión primaria frente a corriente primaria cuando el secundario está en cortocircuito.



5.4.1. Modelo con impedancia de magnetización

Las ecuaciones del modelo del transformador de la Figura 5-4 cuando el secundario está en cortocircuito son:

$$u_1 = R_1 i_1 + L_{\sigma 1} \frac{di_1}{dt} + e_1 \quad (5.18)$$

$$e_2 = R_2 i_2 + L_{\sigma 2} \frac{di_2}{dt}$$

$$\frac{e_1}{e_2} = K \quad (5.19)$$

$$i_1 = \frac{i_2}{K} + i_m \quad (5.20)$$

$$\begin{aligned} i_m &= i_{Fe} + i_{\mu} \\ e_1 &= R_{Fe} i_{Fe} \end{aligned} \quad (5.21)$$

$$e_1 = L_{\mu} \frac{di_{\mu}}{dt}$$

Si las ecuaciones (5.18)-(5.21) se expresan en el dominio de Laplace resultan:

$$u_1(s) = (R_1 + sL_{\sigma 1})i_1(s) + e_1(s) \quad (5.22)$$

$$e_2(s) = (R_2 + sL_{\sigma 2})i_2(s)$$

$$\frac{e_1(s)}{e_2(s)} = K \quad (5.23)$$

$$i_1(s) = \frac{i_2(s)}{K} + i_m(s) \quad (5.24)$$

$$i_m(s) = i_{Fe}(s) + i_{\mu}(s) = \left(\frac{1}{R_{Fe}} + \frac{1}{sL_{\mu}} \right) e_1(s) \quad (5.25)$$

La respuesta en frecuencia se puede obtener alternativamente resolviendo el sistema de ecuaciones lineales (5.26) para cada $s = j\omega$



$$\begin{aligned}
 (R_1 + j\omega L_{\sigma 1})i_1(\omega) + e_1(\omega) &= u_1(\omega) \\
 -e_2(\omega) + (R_2 + j\omega L_{\sigma 2})i_2(\omega) &= 0 \\
 -e_1(\omega) + Ke_2(\omega) &= 0 \\
 -i_1(\omega) + \frac{i_2(\omega)}{K} + i_m(\omega) &= 0 \\
 -i_m(\omega) + \left(\frac{1}{R_{Fe}} + \frac{1}{j\omega L_{\mu}} \right) e_1(\omega) &= 0
 \end{aligned} \tag{5.26}$$

También la respuesta en frecuencia se puede obtener de la expresión analítica de la impedancia equivalente del transformador con el secundario:

$$\frac{u_1(\omega)}{i_1(\omega)} = \frac{1}{\frac{1}{(R_1 + j\omega L_{\sigma 1})} + \frac{1}{\frac{1}{(R_2 + j\omega L_{\sigma 2})K^2} + \frac{1}{R_{Fe}} + \frac{1}{j\omega L_{\mu}}}} \tag{5.27}$$

5.4.2. Modelo sin impedancia de magnetización

La respuesta en frecuencia cuando se desprecia la impedancia de magnetización se puede obtener resolviendo el sistema de ecuaciones lineales (5.28) para cada $s = j\omega$

$$\begin{aligned}
 (R_1 + j\omega L_{\sigma 1})i_1(\omega) + e_1(\omega) &= u_1(\omega) \\
 -e_2(\omega) + (R_2 + j\omega L_{\sigma 2})i_2(\omega) &= 0 \\
 -e_1(\omega) + Ke_2(\omega) &= 0 \\
 -i_1(\omega) + \frac{i_2(\omega)}{K} &= 0
 \end{aligned} \tag{5.28}$$

También la respuesta en frecuencia se puede obtener de la expresión analítica de la impedancia equivalente del transformador con el secundario:

$$\frac{u_1(\omega)}{i_1(\omega)} = (R_1 + j\omega L_{\sigma 1}) + (R_2 + j\omega L_{\sigma 2})K^2 \tag{5.29}$$



5.4.3. Comparación de modelos

Se va a comparar la respuesta en frecuencia con el secundario en cortocircuito de dos modelos (con impedancia de magnetización y sin impedancia de magnetización) a baja frecuencia de un transformador trifásico YNd11 40 MVA 132 kV/21.5 kV.

Para ello se obtienen los parámetros del circuito equivalente a partir de los resultados de los ensayos de vacío y cortocircuito.

Las magnitudes base del equivalente por fase del transformador trifásico son:

$$\begin{aligned}S_B &= 40/3 \text{ MVA} \\U_{B1} &= 132/\sqrt{3} \text{ kV} \\U_{B2} &= 21.5 \text{ kV}\end{aligned}\tag{5.30}$$

Las impedancias base se calculan como:

$$\begin{aligned}I_{B1} &= \frac{S_B}{U_{B1}} = \frac{40/3 \text{ MVA}}{132/\sqrt{3} \text{ kV}} \\I_{B2} &= \frac{S_B}{U_{B2}} = \frac{40/3 \text{ MVA}}{21.5 \text{ kV}} \\Z_{B1} &= \frac{U_{B1}}{I_{B1}} = 435.6000 \Omega \\Z_{B2} &= \frac{U_{B2}}{I_{B2}} = 34.6687 \Omega\end{aligned}\tag{5.31}$$

Teniendo presente que los resultados de los ensayos de cortocircuito del transformador trifásico fueron:

$$\begin{aligned}u_{cc} &= 13.43\% \\P_{cc} &= 184280 \text{ W}\end{aligned}\tag{5.32}$$

Las resistencias y reactancias de los arrollamientos de mayor y menor tensión son:



$$\begin{aligned}R_1 &= 1.0034\Omega \\X_1 &= 29.2333\Omega \\R_2 &= 0.0799\Omega \\X_2 &= 2.3266\Omega\end{aligned}\tag{5.33}$$

Teniendo presente que los resultados de los ensayos de vacío del transformador fueron:

$$\begin{aligned}i_0 &= 0.418\% \\P_0 &= 14750W\end{aligned}\tag{5.34}$$

La resistencia de pérdidas en el hierro y la reactancia de magnetización son:

$$\begin{aligned}R_{Fe} &= 1.1813M\Omega \\X_\mu &= 2.2129M\Omega\end{aligned}\tag{5.35}$$

La Figura 5-5 compara la respuesta frecuencia de dos modelos (con impedancia de magnetización y sin impedancia de magnetización) a baja frecuencia de un transformador trifásico YNd11 40 MVA 132 kV/21.5 kV.

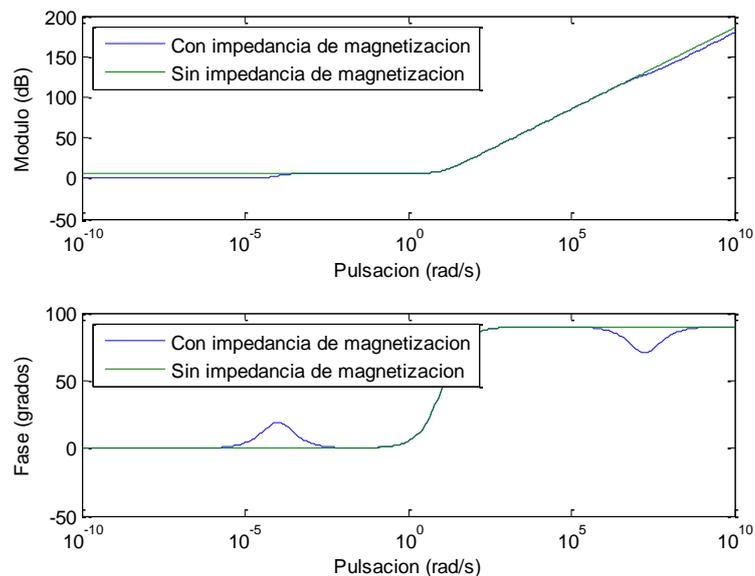


Figura 5-5: Comparación de la respuesta frecuencia de dos modelos (con impedancia de magnetización y sin impedancia de magnetización) a baja frecuencia de un transformador.



5.5. Respuesta en el tiempo

5.5.1. Modelo con impedancia de magnetización

Las ecuaciones diferenciales y algebraicas del modelo del transformador de la Figura 5-4 cuando el secundario está en cortocircuito son:

$$i_m = i_1 - \frac{i_2}{K} \quad (5.36)$$

$$\begin{aligned} i_m - i_\mu &= i_{Fe} \\ e_1 &= R_{Fe} i_{Fe} \end{aligned} \quad (5.37)$$

$$e_2 = \frac{e_1}{K} \quad (5.38)$$

$$\begin{aligned} \frac{di_1}{dt} &= \frac{1}{L_{\sigma 1}} (u_1 - R_1 i_1 - e_1) \\ \frac{di_2}{dt} &= \frac{1}{L_{\sigma 2}} (e_2 - R_2 i_2) \\ \frac{di_\mu}{dt} &= \frac{1}{L_\mu} e_1 \end{aligned} \quad (5.39)$$

$$e_1 = L_\mu \frac{di_\mu}{dt}$$

5.5.2. Modelo sin impedancia de magnetización

Las ecuaciones del modelo del transformador de la de la Figura 5-4 cuando el secundario está en cortocircuito y se desprecia la impedancia de magnetización son:

$$\begin{aligned} \frac{di_1}{dt} &= \frac{1}{L_{\sigma 1} + L_{\sigma 2} K^2} (u_1 - (R_1 + R_2 K^2) i_1) \\ e_1 &= L_\mu \frac{di_\mu}{dt} \end{aligned} \quad (5.40)$$

5.5.3. Comparación de modelos

La Figura 5-6, la Figura 5-7 y la Figura 5-8 comparan la respuesta en tiempo ante un impulso tipo rayo en el primario dos modelos (con impedancia de magnetización y sin impedancia de magnetización) a baja frecuencia del citado transformador trifásico YNd11 40 MVA 132 kV/21.5 kV. La Figura 5-6 compara las corrientes primarias, la Figura 5-7 compara las fuerzas electromotrices primarias con la onda tipo rayo aplicada en el primario y la Figura 5-8 compara las fuerzas electromotrices secundarias con la onda tipo rayo admisible en el secundario.

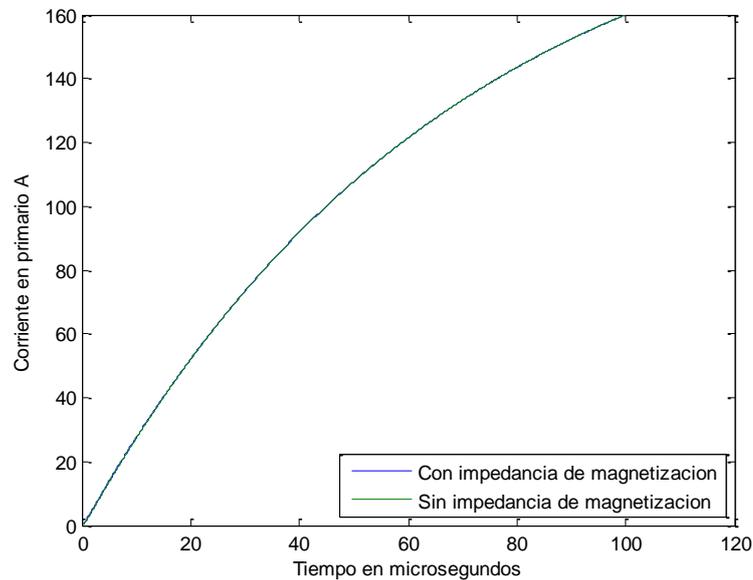


Figura 5-6: Comparación de la respuesta en el tiempo ante un impulso tipo rayo en el primario de dos modelos (con impedancia de magnetización y sin impedancia de magnetización) a baja frecuencia de un transformador: corriente primaria.

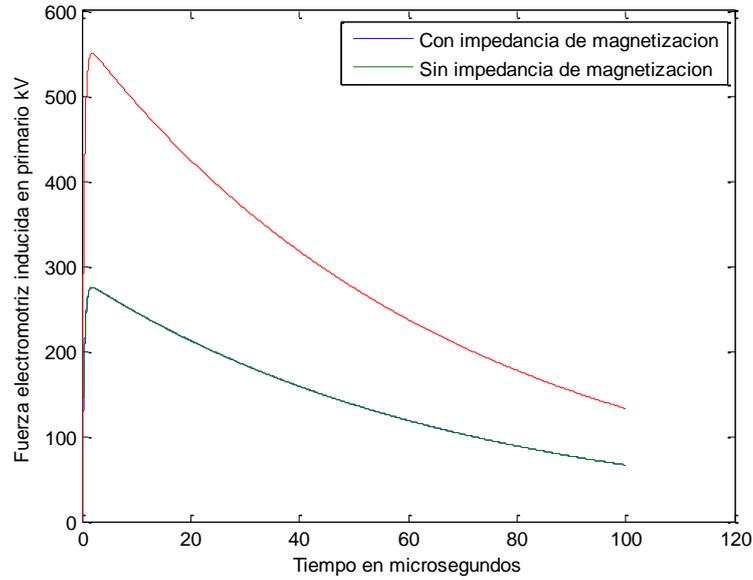


Figura 5-7: Comparación de la respuesta en el tiempo ante un impulso tipo rayo en el primario de dos modelos (con impedancia de magnetización y sin impedancia de magnetización) a baja frecuencia de un transformador: fuerza electromotriz inducida primaria.

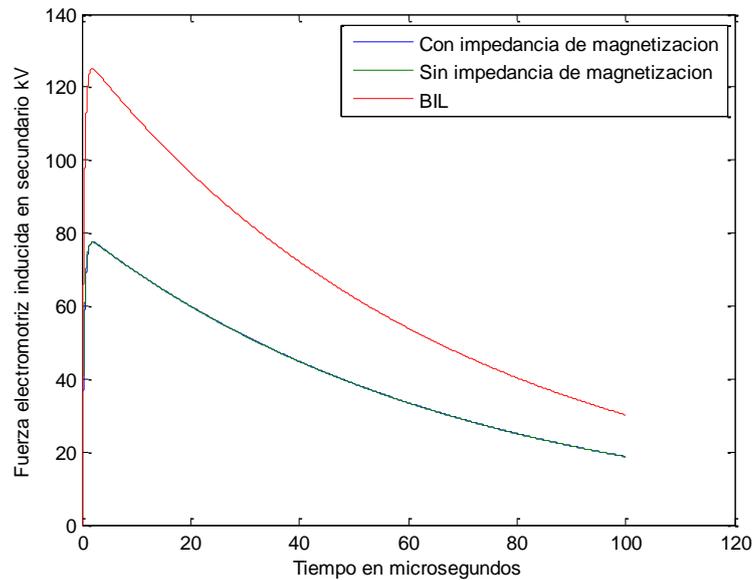


Figura 5-8 Comparación de la respuesta en el tiempo ante un impulso tipo rayo en el primario de dos modelos (con impedancia de magnetización y sin impedancia de magnetización) a baja frecuencia de un transformador: fuerza electromotriz inducida secundaria.

6. Modelos de transformadores a media frecuencia

Equation Chapter (Next) Section 1 Este capítulo discute modelos de transformadores a media frecuencia. El modelo a media frecuencia añade al modelo del transformador a baja frecuencia las capacidades de los arrollamientos de alta y baja tensión a tierra y la capacidad entre los arrollamientos de alta y baja tensión.

Se discuten dos modelos de transformadores dependientes de la disposición de las capacidades.

Después se obtiene la respuesta en frecuencia con el secundario en cortocircuito y la respuesta en el tiempo ante un impulso tipo rayo. También se estudia el efecto de la representación de la impedancia de magnetización tanto en la respuesta en frecuencia como en la respuesta en el tiempo.

6.1. Circuitos equivalentes

La Figura 6-1 muestra el circuito equivalente de un transformador en el que se han incorporado las capacidades de los arrollamientos de alta y baja tensión a tierra y de la capacidad entre los arrollamientos de alta y baja tensión.

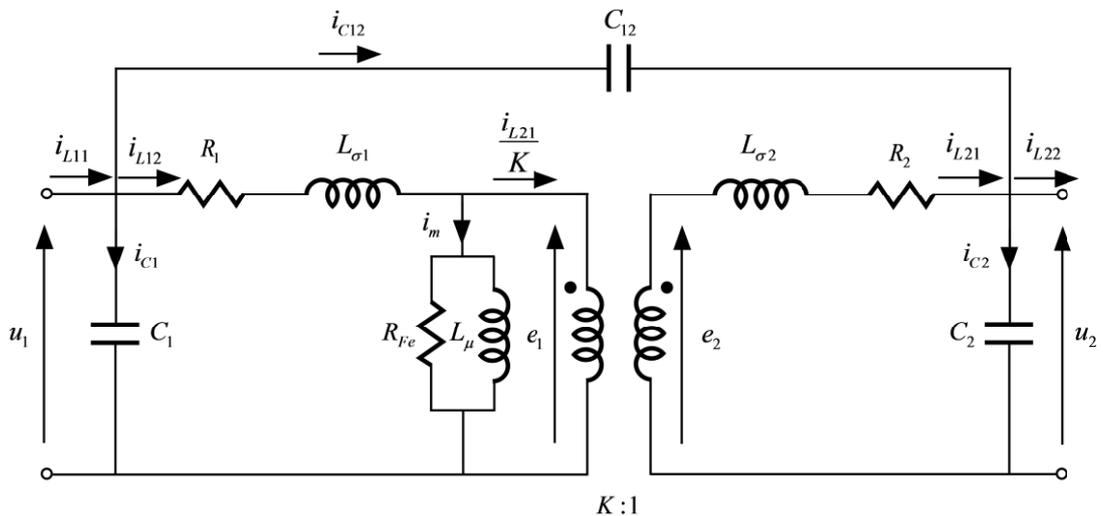


Figura 6-1: Modelo de transformador a frecuencias medias.



Las ecuaciones del modelo del transformador de la Figura 6-1 son:

$$\begin{aligned}u_1 &= R_1 i_{L12} + L_{\sigma 1} \frac{di_{L12}}{dt} + e_1 \\e_2 &= R_2 i_{L21} + L_{\sigma 2} \frac{di_{L21}}{dt} + u_2\end{aligned}\quad (6.1)$$

$$\frac{e_1}{e_2} = K \quad (6.2)$$

$$i_{L12} = \frac{i_{L21}}{K} + i_m \quad (6.3)$$

$$\begin{aligned}i_m &= i_{Fe} + i_{\mu} \\e_1 &= R_{Fe} i_{Fe} \\e_1 &= L_{\mu} \frac{di_{\mu}}{dt}\end{aligned}\quad (6.4)$$

$$\begin{aligned}i_{C1} &= C_1 \frac{du_1}{dt} \\i_{C2} &= C_2 \frac{du_2}{dt} \\i_{C12} &= C_{12} \left(\frac{du_1}{dt} - \frac{du_2}{dt} \right)\end{aligned}\quad (6.5)$$

$$\begin{aligned}i_{L11} &= i_{L12} + i_{C1} + i_{C12} \\i_{L21} + i_{C12} &= i_{C2} + i_{L22}\end{aligned}\quad (6.6)$$

Si se estudia la respuesta en el tiempo ante un impulso tipo rayo en el primario con el secundario en cortocircuito, las capacidades del circuito equivalente de la Figura 6-1 no afectan la tensión ni a la tensión primaria ni a la tensión secundaria. Sólo está afecta la corriente primaria.

La Figura 6-2 muestra el circuito equivalente de un transformador en el que se han incorporado las capacidades de los arrollamientos de alta y baja tensión a tierra y de la capacidad entre los arrollamientos de alta y baja tensión en el punto de medio de los arrollamientos primario y secundario.

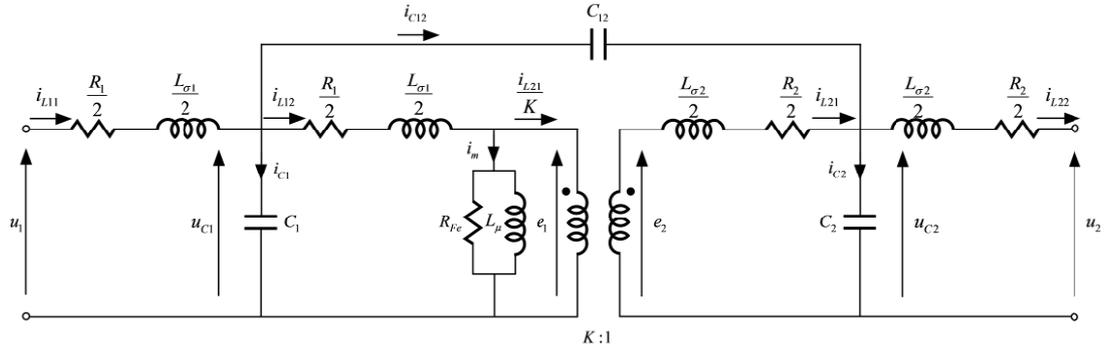


Figura 6-2: Modelo de transformador a frecuencias medias incluyendo la impedancia del conductor de conexión de la fuente de frecuencia variable al transformador.

Las ecuaciones del modelo del transformador de la Figura 6-2 son:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{R_1}{2} i_{L11} + \frac{L_{\sigma 1}}{2} \frac{di_{L11}}{dt} + u_{C1} \\ u_{C1} &= \frac{R_1}{2} i_{L12} + \frac{L_{\sigma 1}}{2} \frac{di_{L12}}{dt} + e_1 \end{aligned} \quad (6.7)$$

$$\begin{aligned} e_2 &= \frac{R_2}{2} i_{L21} + \frac{L_{\sigma 2}}{2} \frac{di_{L21}}{dt} + u_{C2} \\ u_{C2} &= \frac{R_2}{2} i_{L22} + \frac{L_{\sigma 2}}{2} \frac{di_{L22}}{dt} + u_2 \end{aligned}$$

$$\frac{e_1}{e_2} = K \quad (6.8)$$

$$i_{L12} = \frac{i_{L21}}{K} + i_m \quad (6.9)$$

$$\begin{aligned} i_m &= i_{Fe} + i_{\mu} \\ e_1 &= R_{Fe} i_{Fe} \\ e_1 &= L_{\mu} \frac{di_{\mu}}{dt} \end{aligned} \quad (6.10)$$

$$\begin{aligned} i_{C1} &= C_1 \frac{du_{C1}}{dt} \\ i_{C2} &= C_2 \frac{du_{C2}}{dt} \\ i_{C12} &= C_{12} \left(\frac{du_{C1}}{dt} - \frac{du_{C2}}{dt} \right) \end{aligned} \quad (6.11)$$



$$\begin{aligned}i_{L11} &= i_{L12} + i_{C1} + i_{C12} \\i_{L21} + i_{C12} &= i_{C2} + i_{L22}\end{aligned}\tag{6.12}$$

6.2. Respuesta en frecuencia

Se va a obtener las respuesta en frecuencia (tensión primaria frente a corriente primaria con el secundario en cortocircuito) del circuito de la Figura 6-2.

Si las ecuaciones (6.7)-(6.12) se expresan en el dominio de Laplace resultan:

$$\begin{aligned}u_1(s) &= \left(\frac{R_1}{2} + s\frac{L_{\sigma 1}}{2}\right)i_{L11}(s) + u_{C1}(s) \\u_{C1}(s) &= \left(\frac{R_1}{2} + s\frac{L_{\sigma 1}}{2}\right)i_{L12}(s) + e_1(s) \\e_2(s) &= \left(\frac{R_2}{2} + s\frac{L_{\sigma 2}}{2}\right)i_{L21}(s) + u_{C2}(s) \\u_{C2}(s) &= \left(\frac{R_2}{2} + s\frac{L_{\sigma 2}}{2}\right)i_{L22}(s) + u_2(s)\end{aligned}\tag{6.13}$$

$$\frac{e_1(s)}{e_2(s)} = K\tag{6.14}$$

$$i_{L12}(s) = \frac{i_{L21}(s)}{K} + i_m(s)\tag{6.15}$$

$$i_m(s) = i_{Fe}(s) + i_{\mu}(s) = \left(\frac{1}{R_{Fe}} + \frac{1}{sL_{\mu}}\right)e_1(s)\tag{6.16}$$

$$\begin{aligned}i_{C1}(s) &= C_1 s u_{C1}(s) \\i_{C2}(s) &= C_2 s u_{C2}(s) \\i_{C12}(s) &= C_{12} s (u_{C1}(s) - u_{C2}(s))\end{aligned}\tag{6.17}$$

$$\begin{aligned}i_{L11}(s) &= i_{L12}(s) + i_{C1}(s) + i_{C12}(s) \\i_{L21}(s) + i_{C12}(s) &= i_{C2}(s) + i_{L22}(s)\end{aligned}\tag{6.18}$$



La respuesta en frecuencia se puede obtener alternativamente resolviendo el sistema de ecuaciones lineales (6.13)-(6.18) para cada $s = j\omega$

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{R_1}{2} + j\omega \frac{L_{\sigma 1}}{2} \right) i_{L11}(\omega) + u_{C1}(\omega) = u_1(\omega) \\
 & -u_{C1}(\omega) + \left(\frac{R_1}{2} + j\omega \frac{L_{\sigma 1}}{2} \right) i_{L12}(\omega) + e_1(\omega) = 0 \\
 & -e_2(\omega) + \left(\frac{R_2}{2} + j\omega \frac{L_{\sigma 2}}{2} \right) i_{L21}(\omega) + u_{C2}(\omega) = 0 \\
 & -u_{C2}(\omega) + \left(\frac{R_2}{2} + s \frac{L_{\sigma 2}}{2} \right) i_{L22}(\omega) = 0 \\
 & \quad -e_1(\omega) + Ke_2(\omega) = 0 \\
 & \quad -i_{L12}(\omega) + \frac{i_{L21}(\omega)}{K} = 0 \\
 & -i_m(\omega) + \left(\frac{1}{R_{Fe}} + \frac{1}{j\omega L_{\mu}} \right) e_1(\omega) = 0 \\
 & \quad -i_{C1}(\omega) + C_1 j\omega u_{C1}(\omega) = 0 \\
 & \quad -i_{C2}(\omega) + C_2 j\omega u_{C2}(\omega) = 0 \\
 & -i_{C12}(\omega) + C_{12} j\omega (u_{C1}(\omega) - u_{C2}(\omega)) = 0 \\
 & -i_{L11}(\omega) + i_{L12}(\omega) + i_{C1}(\omega) + i_{C12}(\omega) = 0 \\
 & -i_{L21}(\omega) - i_{C12}(\omega) + i_{C2}(\omega) + i_{L22}(\omega) = 0
 \end{aligned} \tag{6.19}$$

Se calcula la respuesta en frecuencia del modelo a media frecuencia del gran transformador de potencia trifásico 40 MVA 132 kV/21.5 kV considerado en el capítulo 0.

Las capacidades por fase fueron deducidas de las capacidades medidas en el ensayo del transformador son:

$$C_1 = 1262.9 \text{ pF}$$

$$C_2 = 2827.2 \text{ pF}$$

$$C_{12} = 1794.1 \text{ pF}$$

La Figura 6-3 muestra la respuesta en frecuencia del transformador trifásico 40 MVA 132 kV/21.5 kV de grupo de conexión YNd11 considerado en el capítulo 0.

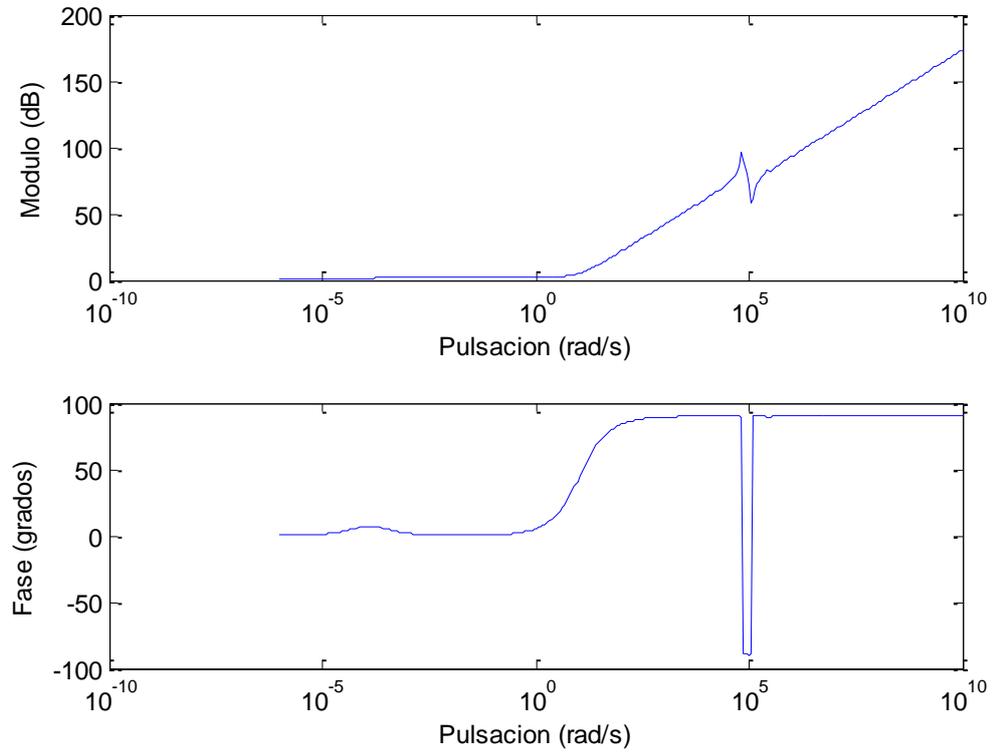


Figura 6-3: Respuesta en frecuencia de un modelo de transformador 40 MVA 132 kV/21.5 kV a media frecuencia.

6.3. Respuesta en el tiempo

Las ecuaciones diferenciales y algebraicas del modelo del transformador de la Figura 6-2 cuando el secundario está en cortocircuito son:

$$i_m = i_{L12} - \frac{i_{L21}}{K} \quad (6.20)$$

$$\begin{aligned} i_{Fe} &= i_m - i_\mu \\ e_1 &= R_{Fe} i_{Fe} \end{aligned} \quad (6.21)$$

$$e_2 = \frac{e_1}{K} \quad (6.22)$$

$$\frac{di_\mu}{dt} = \frac{1}{L_\mu} e_1 \quad (6.23)$$



$$\begin{aligned}i_{L11} &= i_{L12} + i_{C1} + i_{C12} \\i_{L21} + i_{C12} &= i_{C2} + i_{L22}\end{aligned}\tag{6.24}$$

$$i_{C12} = C_{12} \left(\frac{1}{C_1} i_{C1} - \frac{1}{C_1} i_{C1} \right)\tag{6.25}$$

$$\begin{aligned}\frac{di_{L11}}{dt} &= \frac{2}{L_{\sigma 1}} \left(u_1 - \frac{R_1}{2} i_{L11} - u_{C1} \right) \\ \frac{di_{L12}}{dt} &= \frac{2}{L_{\sigma 1}} \left(u_{C1} - \frac{R_1}{2} i_{L12} - e_1 \right) \\ \frac{di_{L21}}{dt} &= \frac{2}{L_{\sigma 2}} \left(e_2 - \frac{R_2}{2} i_{L21} - u_{C2} \right) \\ \frac{di_{L22}}{dt} &= \frac{2}{L_{\sigma 2}} \left(u_{C2} - \frac{R_2}{2} i_{L22} \right)\end{aligned}\tag{6.26}$$

$$\begin{aligned}\frac{du_{C1}}{dt} &= \frac{1}{C_1} i_{C1} \\ \frac{du_{C2}}{dt} &= \frac{1}{C_2} i_{C2}\end{aligned}\tag{6.27}$$

La Figura 5-6, la Figura 5-7 y la Figura 5-8 muestra la respuesta en tiempo ante un impulso tipo rayo en el primario un modelo (con impedancia de magnetización y sin impedancia de magnetización) a media frecuencia del citado transformador trifásico YNd11 40 MVA 132 kV/21.5 kV. La Figura 5-6 muestra la corriente primaria, la Figura 5-7 muestra la fuerza electromotriz primaria con la onda tipo rayo aplicada en el primario y la Figura 5-8 compara la fuerza electromotriz secundaria con la onda tipo rayo admisible en el secundario.

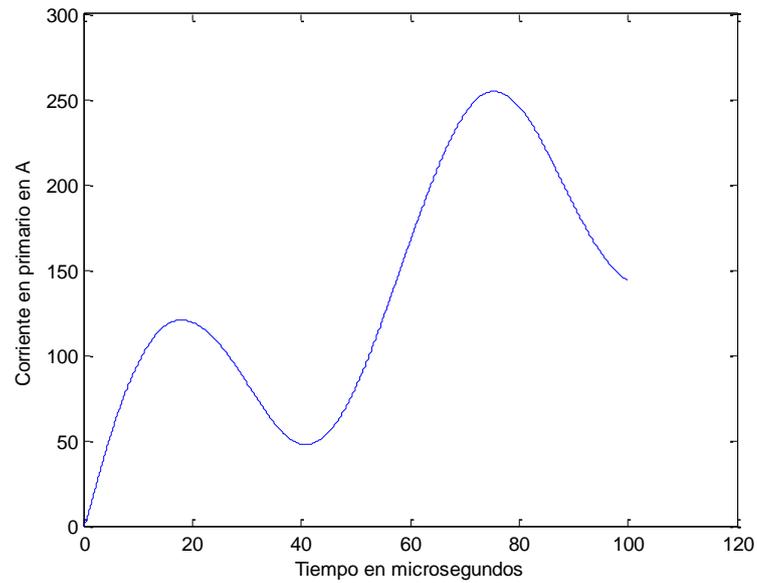


Figura 6-4: Comparación de la respuesta en el tiempo ante un impulso tipo rayo en el primario del modelo a media frecuencia de un transformador: corriente primaria.

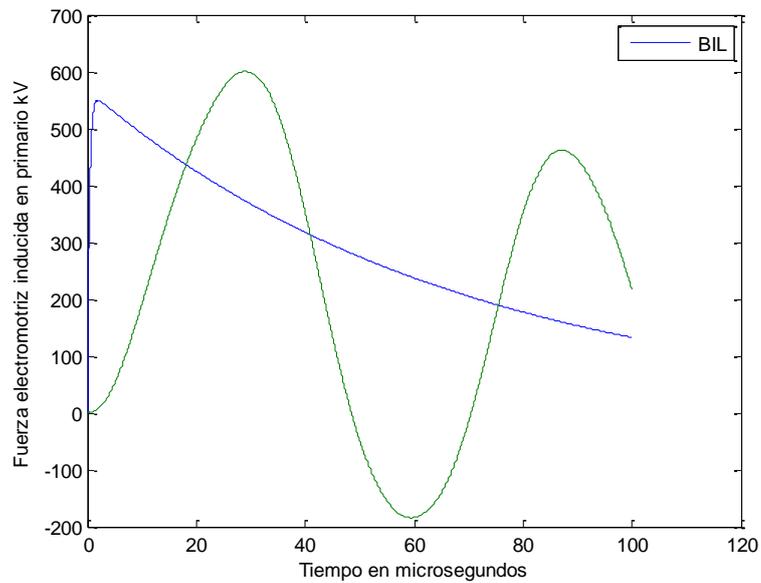


Figura 6-5: Comparación de la respuesta en el tiempo ante un impulso tipo rayo en el primario del modelo a media frecuencia de un transformador: fuerza electromotriz inducida primaria.

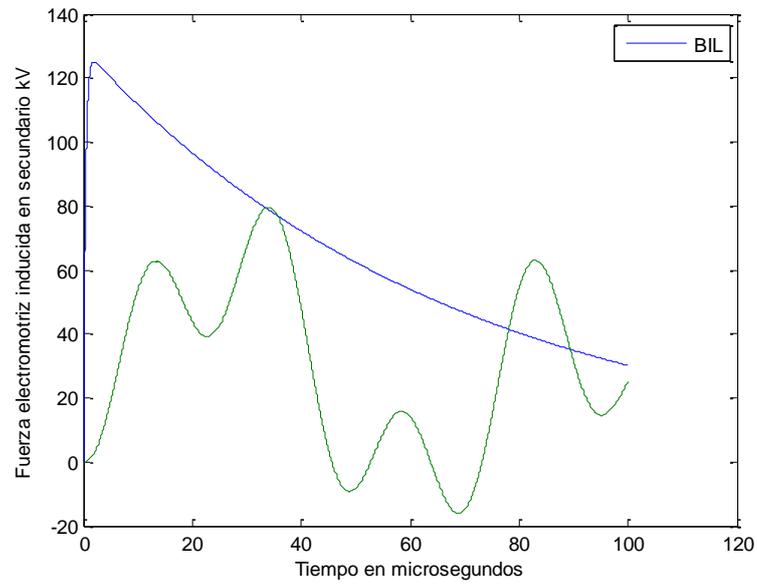


Figura 6-6: Comparación de la respuesta en el tiempo ante un impulso tipo rayo en el primario del modelo a media frecuencia de un transformador: fuerza electromotriz inducida secundaria.





7. Modelos de transformadores a alta frecuencia

Equation Chapter (Next) Section 1 Este capítulo detalla el modelo de transformadores de alta frecuencia de transformadores.

De forma más precisa, este capítulo construye el modelo detallado del transformador a partir de ecuaciones de capacidades de nudos (en términos de la matriz de capacidades de nudos) de inductancias de bobinas (en términos de la matriz de inductancias de bobinas).

La construcción del modelo consiste en la escritura de un sistema de ecuaciones diferenciales en las que tanto las tensiones de nudos y de mallas y corrientes de nudos y de mallas estén relacionadas.

7.1. Ecuaciones de capacidades de nudos

La matriz de capacidades de nudos \mathbf{C} relaciona el vector de tensiones de nudo \mathbf{u}_n y el vector de corrientes salientes de los nodos \mathbf{i}_n y las corrientes inyectadas por las fuentes \mathbf{i}_f a través de las ecuaciones:

$$\mathbf{C} \frac{d\mathbf{u}_n}{dt} = -\mathbf{i}_n + \mathbf{i}_f \quad (7.1)$$

o también:

$$\begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{N1} & \cdots & C_{NN} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u_{n1} \\ \vdots \\ u_{nN} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} i_{n1} \\ \vdots \\ i_{nN} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i_{f1} \\ \vdots \\ i_{fN} \end{bmatrix}$$

Cada uno de los términos de la matriz de capacidades de nudos C_{ij} se obtiene como:

$$C_{ii} = c_i + \sum_k c_{ik}$$
$$C_{ij} = C_{ji} = -c_{ij}$$



siendo:

c_i : Capacidad del nudo i a tierra

c_{ij} : Capacidad entre el nudo i y el nudo j

El circuito de la Figura 7-1 muestra las tensiones de nudos y las corrientes en los nudos en un circuito específico. Se ha considerado una única fuente en el nudo 1.

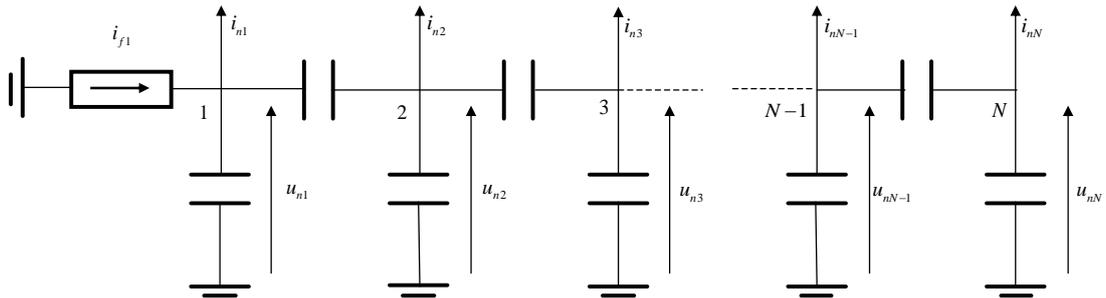


Figura 7-1: Componente capacitiva del circuito equivalente de un transformador a alta frecuencia.

7.2. Ecuaciones de inductancias bobinas

La matriz de inductancias de bobinas \mathbf{L} relaciona el vector de tensiones de bobinas \mathbf{u}_b y el vector de corrientes de bobinas \mathbf{i}_b a través de las ecuaciones:

$$\mathbf{L} \frac{d\mathbf{i}_b}{dt} = \mathbf{u}_b \quad (7.2)$$

a también:

$$\begin{bmatrix} L_{11} & \cdots & L_{1M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{M1} & \cdots & L_{MM} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{b1} \\ \vdots \\ i_{bM} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{b1} \\ \vdots \\ u_{bM} \end{bmatrix}$$

Cada uno de los términos de la matriz de inductancias de mallas L_{ij} se obtiene como:

$$L_{ii} = l_i + \sum_k l_{ik}$$

$$L_{ij} = L_{ji} = -l_{ij}$$

siendo:

l_i : Inductancia propia de la bobina i

l_{ij} : Inductancia mutua entre la bobina i y la bobina j

El circuito de la Figura 7-2 muestra las tensiones y corrientes de bobinas en circuito específico.

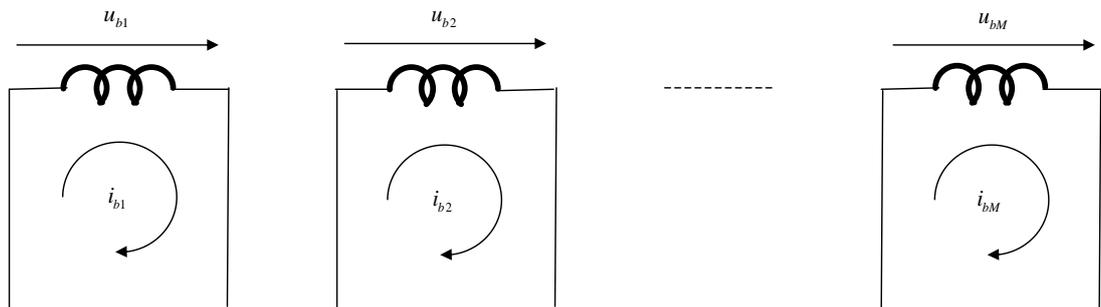


Figura 7-2: Componente inductiva del circuito equivalente de un transformador a alta frecuencia.

7.3. Conexión de las ecuaciones de nudos y de bobinas

Las tensiones de nudos y de bobinas están relacionadas de acuerdo con:

$$\mathbf{u}_b = \mathbf{T}\mathbf{u}_n \quad (7.3)$$

Las corrientes de nudos y de bobinas están relacionadas de acuerdo con:

$$\mathbf{i}_n = \mathbf{T}^T \mathbf{i}_b \quad (7.4)$$

7.4. Modelo completo

Las de ecuaciones algebraico-diferenciales (7.1)-(7.3) que describen la respuesta del transformador quedan:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}_n}{dt} &= \mathbf{C}^{-1}(-\mathbf{i}_n + \mathbf{i}_f) \\ \frac{d\mathbf{i}_m}{dt} &= \mathbf{L}^{-1}\mathbf{u}_m \\ \mathbf{i}_n &= \mathbf{T}^T \mathbf{i}_b \\ \mathbf{u}_b &= \mathbf{T}\mathbf{u}_n \end{aligned} \tag{7.5}$$

7.5. Caso ejemplo

La Figura 7-3 muestra la disposición física de los arrollamientos de un transformador acorazado. La Figura 7-4 muestra el circuito equivalente del transformador acorazado de la Figura 7-3.

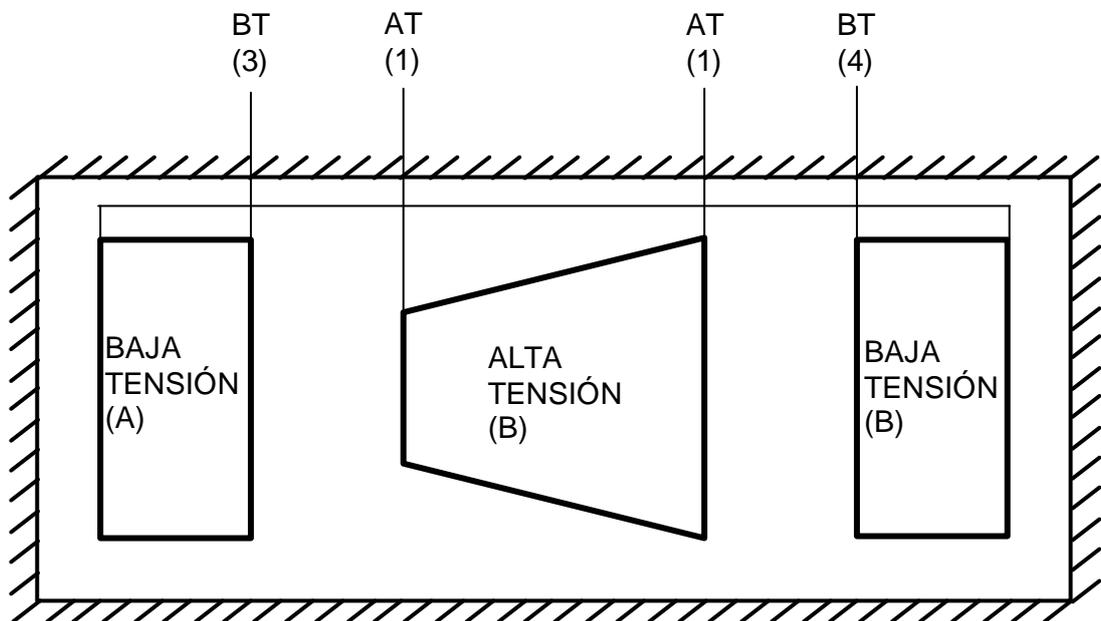


Figura 7-3: Disposición física de los arrollamientos de un transformador acorazado.

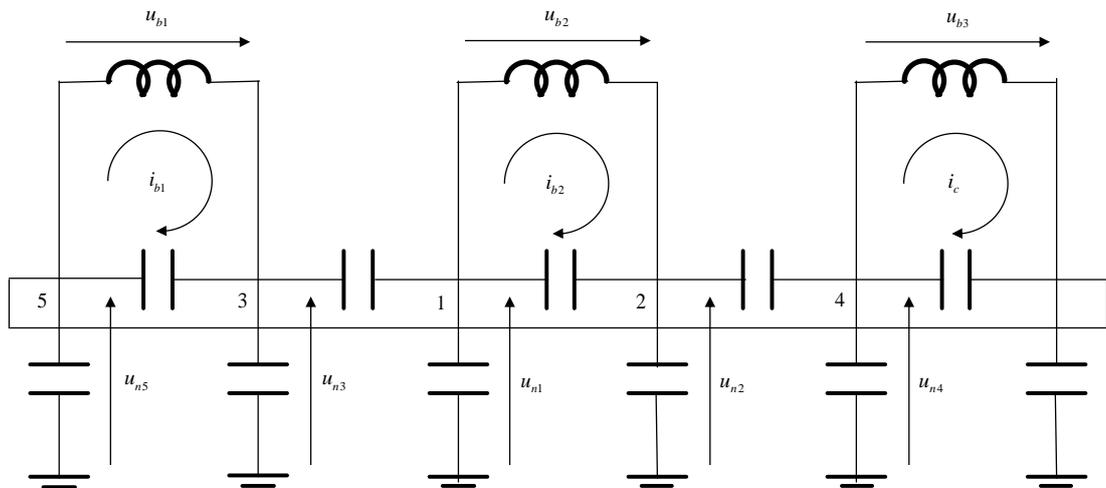


Figura 7-4: Circuito equivalente del un transformador acorazado de la Figura 7-3.

La relación entre las corrientes de salientes de los nudos y las corrientes de las bobinas, el circuito equivalente de la Figura 7-4 es:

$$\begin{bmatrix} i_{n1} \\ i_{n2} \\ i_{n3} \\ i_{n4} \\ i_{n5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{b1} \\ i_{b2} \\ i_{b3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} i_{b1} \\ i_{b2} \\ i_{b3} \end{bmatrix}$$

La relación entre las tensiones de los nudos y las tensiones de las bobinas, el circuito equivalente de la Figura 7-4 es:

$$\begin{bmatrix} u_{b1} \\ u_{b2} \\ u_{b3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{n1} \\ u_{n2} \\ u_{n3} \\ u_{n4} \\ u_{n5} \end{bmatrix}$$



La estructura de la matriz de capacidades del circuito equivalente de la Figura 7-4 es:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 & C_{24} & 0 \\ C_{31} & 0 & C_{33} & 0 & C_{35} \\ 0 & C_{42} & 0 & C_{44} & C_{45} \\ 0 & 0 & C_{53} & C_{54} & C_{55} \end{bmatrix}$$



8. Simulación en el dominio del tiempo de transformadores a alta frecuencia

Este capítulo detalla los modelos y resultados de simulación en el dominio del tiempo de transformadores acorazados.

8.1. Modelos de simulación

El modelo de simulación construido supone que el nudo número 1 es tierra. Por tanto:

$$\begin{aligned}u_{n1} &= 0 \\ \frac{du_{n1}}{dt} &= 0\end{aligned}$$

También el modelo de simulación construido supone que el impulso se aplica en el nudo número 2. El impulso se puede modelar como una función lineal a tramos o como una función combinación de funciones exponenciales:

$$\left. \begin{aligned}u_{n2} &= U_0 \frac{1}{1.2 \cdot 10^{-6}} t \\ \frac{du_{n2}}{dt} &= U \frac{1}{1.2 \cdot 10^{-6}}\end{aligned} \right\} 0 < t \leq 1.2 \cdot 10^{-6}$$
$$\left. \begin{aligned}\frac{t - 1.2 \cdot 10^{-6}}{(1.2 - 50) \cdot 10^{-6}} &= \frac{u_{n2} - U_0}{U_0 - \frac{U_0}{2}} \\ u_{n2} &= U_0 + \frac{U_0}{2} \frac{t - 1.2 \cdot 10^{-6}}{(1.2 - 50) \cdot 10^{-6}} \\ \frac{du_{n2}}{dt} &= \frac{U}{2} \frac{1}{(1.2 - 50) \cdot 10^{-6}}\end{aligned} \right\} 1.2 \cdot 10^{-6} < t \leq 1.2 \cdot 10^{-6} + 2 \cdot (50 - 1.2) \cdot 10^{-6}$$
$$\left. \begin{aligned}u_{n2} &= 0 \\ \frac{du_{n2}}{dt} &= 0\end{aligned} \right\} t > 1.2 \cdot 10^{-6} + 2 \cdot (50 - 1.2) \cdot 10^{-6}$$



$$u_{n2} = U_0 (e^{-\alpha t} - e^{-\beta t})$$

$$\frac{du_{n2}}{dt} = U_0 (-\alpha e^{-\alpha t} + \beta e^{-\beta t})$$

$$U_0 = 1.035319$$

$$\alpha = 0.072786/5 \cdot 10^6$$

$$\beta = 13.04424/5 \cdot 10^6$$

La Figura 5 compara la representación del impulso como una función lineal a tramos o como una función combinación de funciones exponenciales.

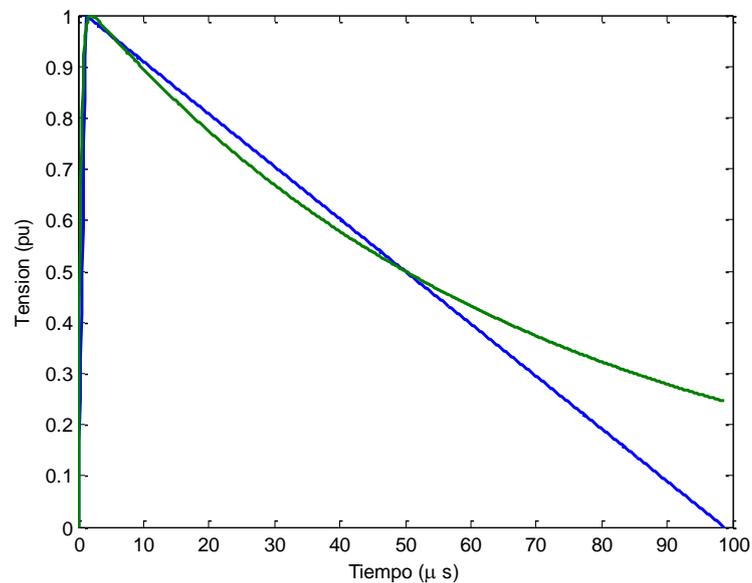


Figura 5: Representación del impulso como una función lineal a tramos o como una función combinación de funciones exponenciales.

El modelo de simulación se puede formular de dos formas:

- Modelo implícito de ecuaciones diferenciales y algebraicas
- Modelo explícito de ecuaciones diferenciales

8.1.1. Modelo implícito de ecuaciones diferenciales y algebraicas

El modelo implícito de ecuaciones diferenciales y algebraicas es un conjunto de ecuaciones algebraicas y diferenciales.



Las ecuaciones algebraicas son:

- Tensiones de bobinas a partir de tensiones de nudos:

$$\begin{bmatrix} u_{b1} \\ \vdots \\ u_{bM} \end{bmatrix} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} u_{n1} \\ \vdots \\ u_{nN} \end{bmatrix}$$

- Corrientes de nudos a partir de corrientes de bobina

$$\begin{bmatrix} i_{n1} \\ \vdots \\ i_{nN} \end{bmatrix} = \mathbf{T}^T \begin{bmatrix} i_{b1} \\ \vdots \\ i_{bM} \end{bmatrix}$$

- Corriente suministrada por la fuente de tensión del impulso:

$$\begin{bmatrix} \frac{du_{n1}}{dt} \\ \frac{du_{n2}}{dt} \\ \frac{du_{n3}}{dt} \\ \vdots \\ \frac{du_{nN}}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^{-1}(1,:) \\ \mathbf{C}^{-1}(2,:) \\ \mathbf{C}^{-1}(3:N,:) \end{bmatrix} \left(-\mathbf{i}_n + \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta i_{n2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$\frac{du_{n2}}{dt} = -\mathbf{C}^{-1}(2,:) \mathbf{i}_n + \mathbf{C}^{-1}(2,2) \Delta i_{n2}$$

$$\Delta i_{n2} = \frac{1}{\mathbf{C}^{-1}(2,2)} \left(\frac{du_{n2}}{dt} + \mathbf{C}^{-1}(2,:) \mathbf{i}_n \right)$$



Las ecuaciones diferenciales son:

- Derivadas de tensiones de nudos:

$$\begin{bmatrix} \frac{du_{n3}}{dt} \\ \vdots \\ \frac{du_{nN}}{dt} \end{bmatrix} = \mathbf{C}^{-1}(3:N,:) \left(-\mathbf{i}_n + \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta i_{n2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

- Derivadas de corrientes de bobinas:

$$\begin{bmatrix} \frac{di_{b1}}{dt} \\ \vdots \\ \frac{di_{bM}}{dt} \end{bmatrix} = \mathbf{L}^{-1} \begin{bmatrix} u_{b1} \\ \vdots \\ u_{bM} \end{bmatrix} \quad (7.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}_n}{dt} &= \mathbf{C}^{-1}(-\mathbf{i}_n + \mathbf{i}_f) \\ \frac{d\mathbf{i}_m}{dt} &= \mathbf{L}^{-1}\mathbf{u}_m \\ \mathbf{i}_n &= \mathbf{T}^T\mathbf{i}_b \\ \mathbf{u}_b &= \mathbf{T}\mathbf{u}_n \end{aligned} \quad (7.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{i}_b}{dt} &= \mathbf{L}^{-1}\mathbf{T}(:,3:N) \begin{bmatrix} u_{n3} \\ \vdots \\ u_{nN} \end{bmatrix} + \mathbf{L}^{-1}\mathbf{T}(:,2)u_{n2} \\ &= \mathbf{A}_{21} \begin{bmatrix} u_{n3} \\ \vdots \\ u_{nN} \end{bmatrix} + \mathbf{b}_2u_{n2} \end{aligned}$$

La solución del conjunto de ecuaciones algebraicas y diferenciales se realiza por el método de Runge-Kutta suponiendo condiciones iniciales nulas.



8.1.2. Modelo explícito de ecuaciones diferenciales

El modelo explícito de ecuaciones diferenciales es un conjunto de ecuaciones diferenciales. Las ecuaciones diferenciales son:

- Derivadas de tensiones de nudos:

$$\frac{du_{n2}}{dt} = -\mathbf{C}^{-1}(2,:) \mathbf{i}_n + \mathbf{C}^{-1}(2,2) \Delta i_{n2}$$

$$\Delta i_{n2} = \frac{1}{\mathbf{C}^{-1}(2,2)} \left(\frac{du_{n2}}{dt} + \mathbf{C}^{-1}(2,:) \mathbf{i}_n \right)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{du_{n3}}{dt} \\ \vdots \\ \frac{du_{nN}}{dt} \end{bmatrix} = \mathbf{C}^{-1}(3:N,:) \left(- \begin{bmatrix} i_{n1} \\ i_{n2} \\ i_{n3} \\ \vdots \\ i_{nN} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta i_{n2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{du_{n3}}{dt} \\ \vdots \\ \frac{du_{nN}}{dt} \end{bmatrix} = \mathbf{C}^{-1}(3:N,:) \left(-\mathbf{T}^T \mathbf{i}_b + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\mathbf{C}^{-1}(2,2)} \left(\frac{du_{n2}}{dt} + \mathbf{C}^{-1}(2,:) \mathbf{T}^T \mathbf{i}_b \right) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{du_{n3}}{dt} \\ \vdots \\ \frac{du_{nN}}{dt} \end{bmatrix} = \mathbf{C}^{-1}(3:N,:) \left(-\mathbf{T}^T + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\mathbf{C}^{-1}(2,2)} \mathbf{C}^{-1}(2,:) \mathbf{T}^T \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \right) \mathbf{i}_b + \mathbf{C}^{-1}(3:N,:) \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\mathbf{C}^{-1}(2,2)} \frac{du_{n2}}{dt} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{d\mathbf{u}_{n3-N}}{dt} = \mathbf{A}_{12} \mathbf{i}_b + \mathbf{b}_1 \frac{du_{n2}}{dt}$$



- Derivadas de corrientes de bobinas:

$$\begin{bmatrix} \frac{di_{b1}}{dt} \\ \vdots \\ \frac{di_{bM}}{dt} \end{bmatrix} = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{T}(:, 3:N) \begin{bmatrix} u_{n3} \\ \vdots \\ u_{nN} \end{bmatrix} + \mathbf{L}^{-1} \mathbf{T}(:, 2) u_{n2}$$

$$\frac{d\mathbf{i}_b}{dt} = \mathbf{A}_{21} \begin{bmatrix} u_{n3} \\ \vdots \\ u_{nN} \end{bmatrix} + \mathbf{b}_2 u_{n2}$$

Las ecuaciones diferenciales escritas en forma compacta son:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}_{n3-N}}{dt} &= \mathbf{A}_{12} \mathbf{i}_b + \mathbf{b}_1 \frac{du_{n2}}{dt} \\ \frac{d\mathbf{i}_b}{dt} &= \mathbf{A}_{21} \mathbf{u}_{n3-N} + \mathbf{b}_2 u_{n2} \\ \begin{bmatrix} \frac{d\mathbf{u}_{n3-N}}{dt} \\ \frac{d\mathbf{i}_b}{dt} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{n3-N} \\ \mathbf{i}_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 U_0 (-\alpha e^{-\alpha t} + \beta e^{-\beta t}) \\ \mathbf{b}_2 U_0 (e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{n3-N} \\ \mathbf{i}_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{b}_1 U_0 \alpha \\ \mathbf{b}_2 U_0 \end{bmatrix} e^{-\alpha t} + \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 U_0 \beta \\ -\mathbf{b}_2 U_0 \end{bmatrix} e^{-\beta t} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{n3-N} \\ \mathbf{i}_b \end{bmatrix} + \mathbf{b}_\alpha e^{-\alpha t} + \mathbf{b}_\beta e^{-\beta t} \end{aligned}$$



La solución del conjunto de ecuaciones diferenciales se realiza a partir de los autovalores y autovectores de la matriz de estados (suponiendo condiciones iniciales nulas) según:

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{x}_p(t) &= \int_{t_0}^t \mathbf{V} e^{\Lambda(t-\tau)} \mathbf{W} \mathbf{b} \Delta u(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t \mathbf{V} e^{\Lambda(t-\tau)} \mathbf{W} (\mathbf{b}_\alpha e^{-\alpha\tau} + \mathbf{b}_\beta e^{-\beta\tau}) d\tau \\ &= \sum_{i=1}^N \mathbf{v}_i \int_{t_0}^t e^{\lambda_i(t-\tau)} \left[\mathbf{w}_i^T (\mathbf{b}_\alpha e^{-\alpha\tau} + \mathbf{b}_\beta e^{-\beta\tau}) \right] d\tau \\ &= \sum_{i=1}^N \mathbf{v}_i e^{\lambda_i t} \int_{t_0}^t e^{-\lambda_i \tau} \left[\mathbf{w}_i^T (\mathbf{b}_\alpha e^{-\alpha\tau} + \mathbf{b}_\beta e^{-\beta\tau}) \right] d\tau \\ &= \sum_{i=1}^N \mathbf{v}_i e^{\lambda_i t} \int_{t_0}^t \left(e^{-(\lambda_i+\alpha)\tau} \left[\mathbf{w}_i^T \mathbf{b}_\alpha \right] + e^{-(\lambda_i+\beta)\tau} \left[\mathbf{w}_i^T \mathbf{b}_\beta \right] \right) d\tau \\ &= \sum_{i=1}^N \mathbf{v}_i e^{\lambda_i t} \left(\frac{-1}{\lambda_i + \alpha} \left(e^{-(\lambda_i+\alpha)t} - e^{-(\lambda_i+\alpha)t_0} \right) \left[\mathbf{w}_i^T \mathbf{b}_\alpha \right] + \frac{-1}{\lambda_i + \beta} \left(e^{-(\lambda_i+\beta)t} - e^{-(\lambda_i+\beta)t_0} \right) \left[\mathbf{w}_i^T \mathbf{b}_\beta \right] \right)\end{aligned}$$

8.2. Resultados de simulación

Esta sección contiene los resultados de simulación en el dominio del tiempo obtenidos por diversos métodos en caso de un transformador proporcionado por ABB.

8.2.1. Comparación del método Runge-Kutta con el método basado en autovalores y autovectores

De la Figura 6 a la Figura 15 se muestra la comparación de las tensiones de los nudos (3 a 12 respectivamente) obtenidas con el método de Runge-Kutta y con el método basado en los autovalores y autovectores. Los resultados ofrecidos por ambos métodos son prácticamente idénticos, tal y como era de esperar.

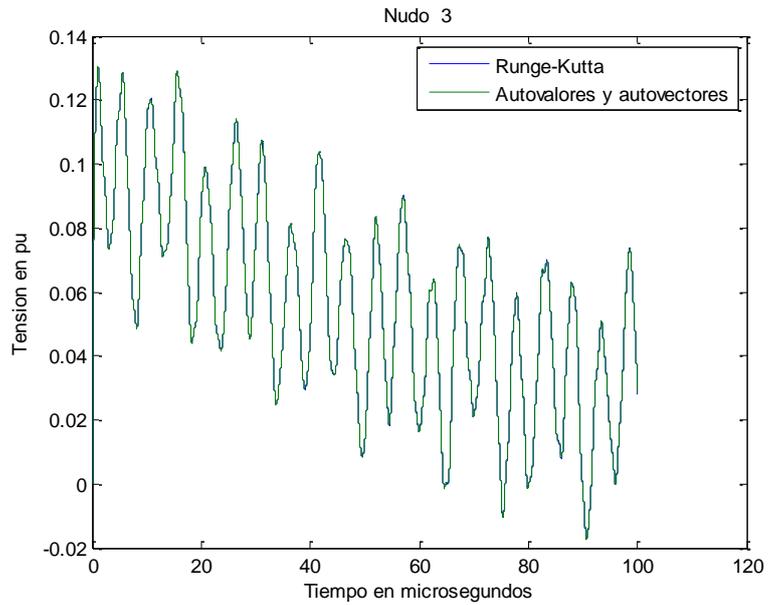


Figura 6: Comparación del método Runge-Kutta con el método basado en autovalores y autovectores: tensión del nudo 3.

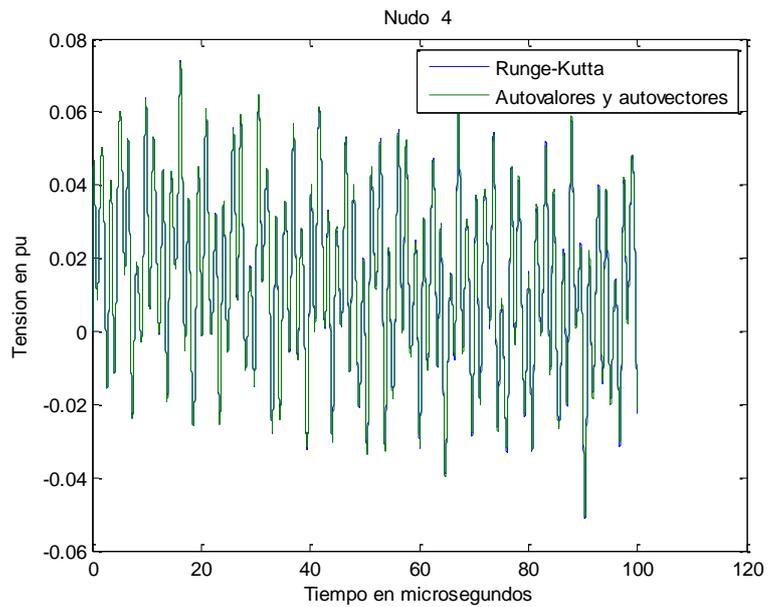


Figura 31: Comparación del método Runge-Kutta con el método basado en autovalores y autovectores: tensión del nudo 4.

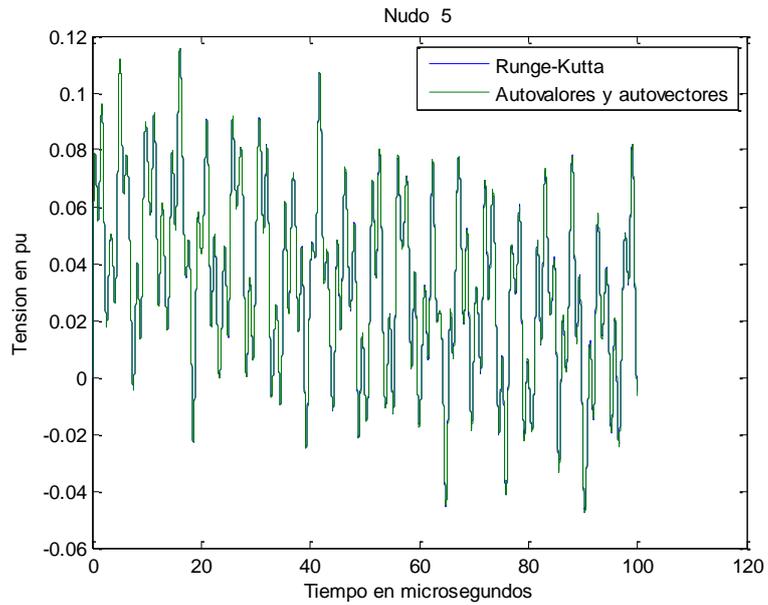


Figura 32: Comparación del método Runge-Kutta con el método basado en autovalores y autovectores: tensión del nudo 5.

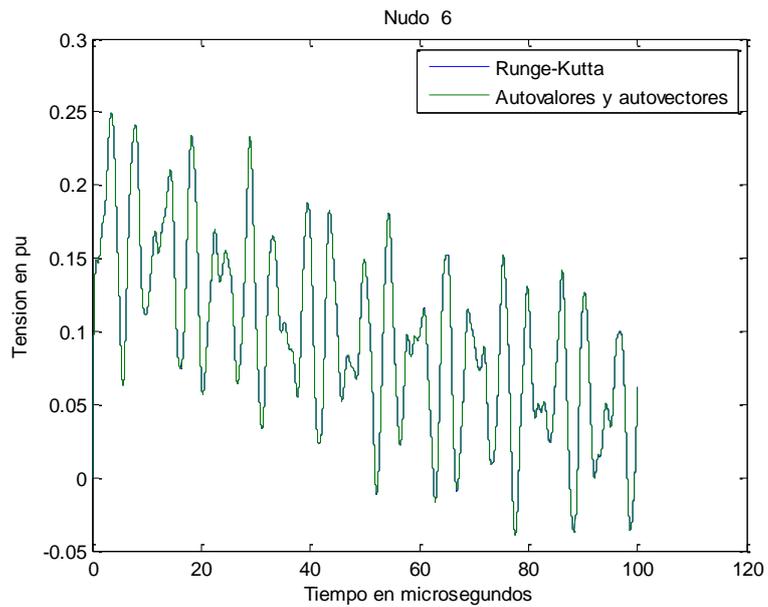


Figura 33: Comparación del método Runge-Kutta con el método basado en autovalores y autovectores: tensión del nudo 6.

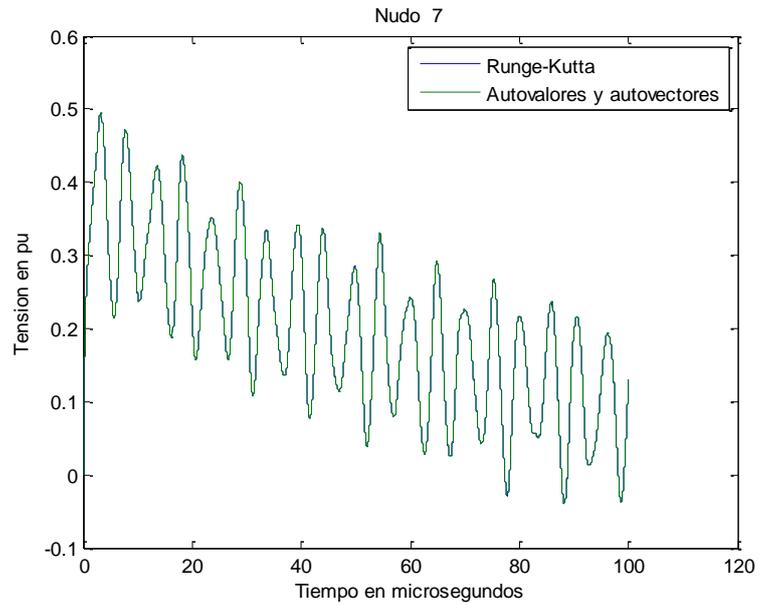


Figura 34: Comparación del método Runge-Kutta con el método basado en autovalores y autovectores: tensión del nudo 7.

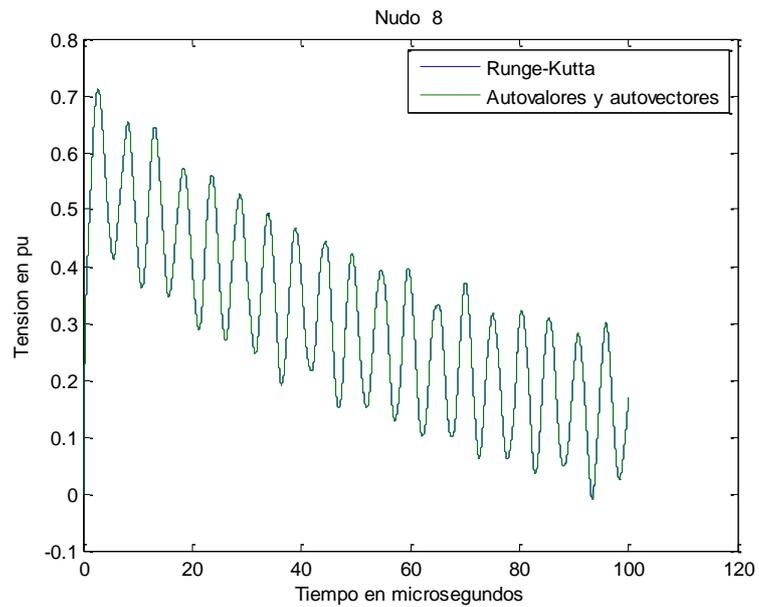


Figura 35: Comparación del método Runge-Kutta con el método basado en autovalores y autovectores: tensión del nudo 8.

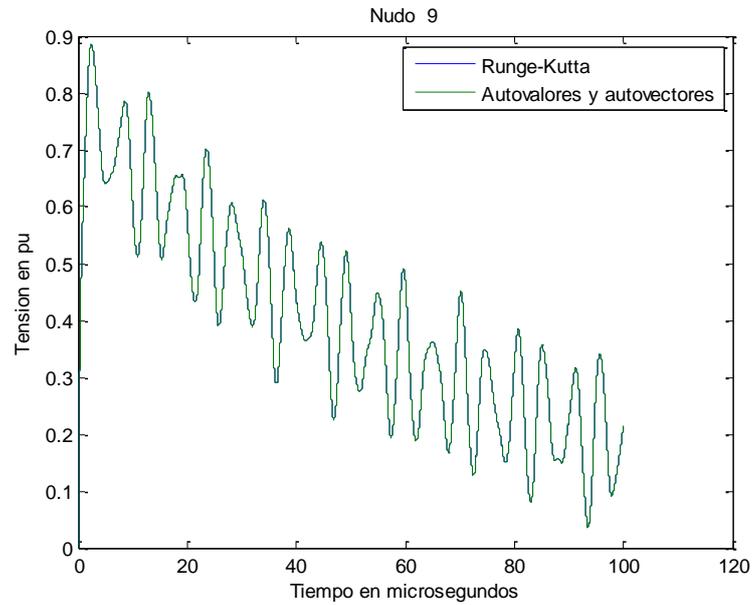


Figura 36: Comparación del método Runge-Kutta con el método basado en autovalores y autovectores: tensión del nudo 9.

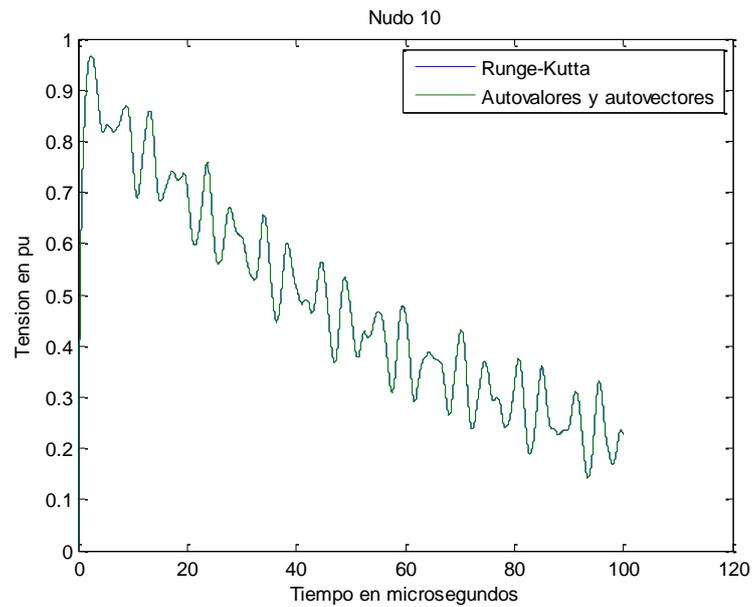


Figura 37: Comparación del método Runge-Kutta con el método basado en autovalores y autovectores: tensión del nudo 10.

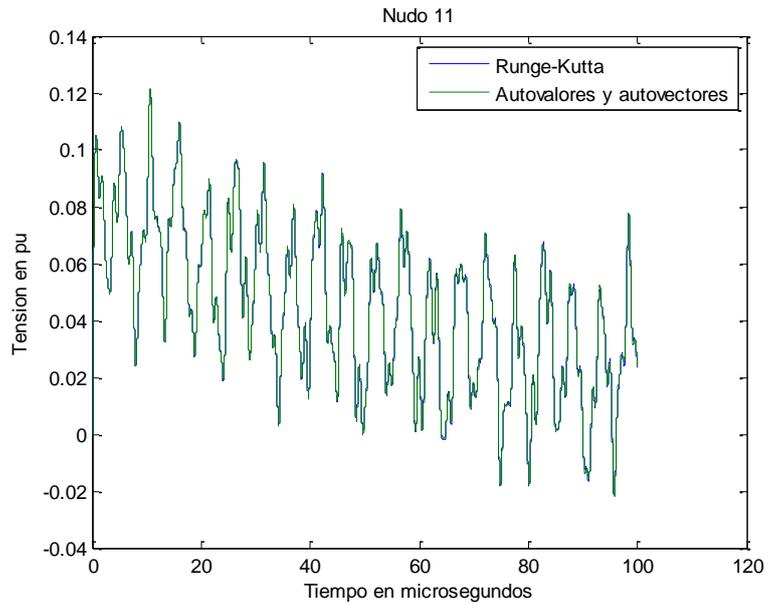


Figura 38: Comparación del método Runge-Kutta con el método basado en autovalores y autovectores: tensión del nudo 11.

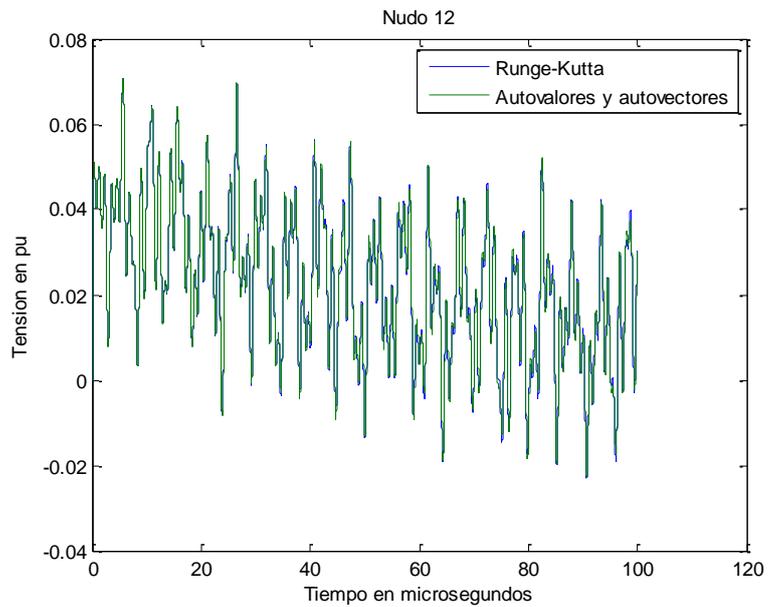


Figura 15: Comparación del método Runge-Kutta con el método basado en autovalores y autovectores: tensión del nudo 12.



8.2.2. Comparación del código de ABB con el código del ICAI

La Figura 40 y la Figura 41 muestran, respectivamente, las tensiones de nudo obtenidas con el código del ICAI y con el código de ABB. Las distribuciones de tensiones tienen formas similares. La comparación más precisa de las tensiones de nudo se realiza nudo a nudo.

De la Figura 42 a la Figura 51 se muestra la comparación de las tensiones de los nudos (3 a 12 respectivamente) obtenidas con el código de ABB y con el código del ICAI. Los resultados ofrecidos por ambos códigos difieren: más cuando las tensiones de los nudos son pequeñas y menos cuando las tensiones de los nudos son grandes. Ello es debido a que el código de ABB utiliza para el cálculo de la exponencial de la matriz de estados un método aproximado consistente en truncar el desarrollo en serie de Taylor.

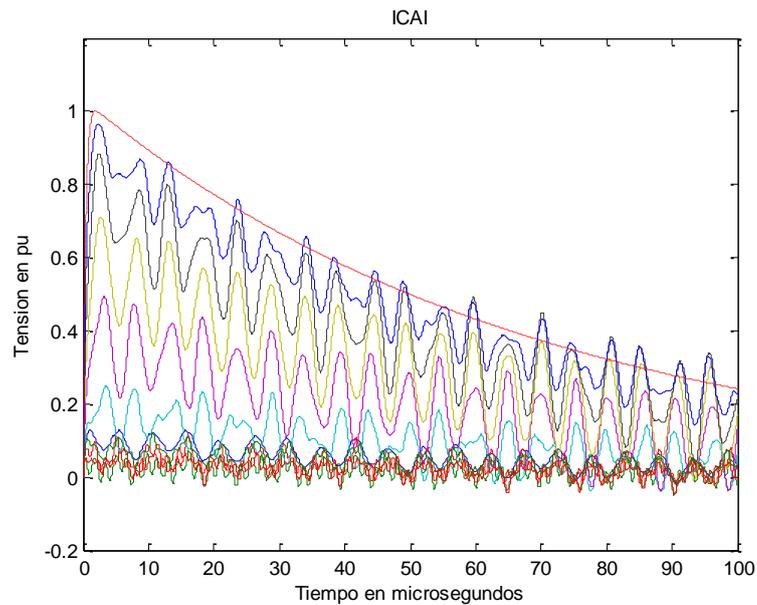


Figura 40: Tensiones en los nudos del transformador obtenidas con el código de ICAI.

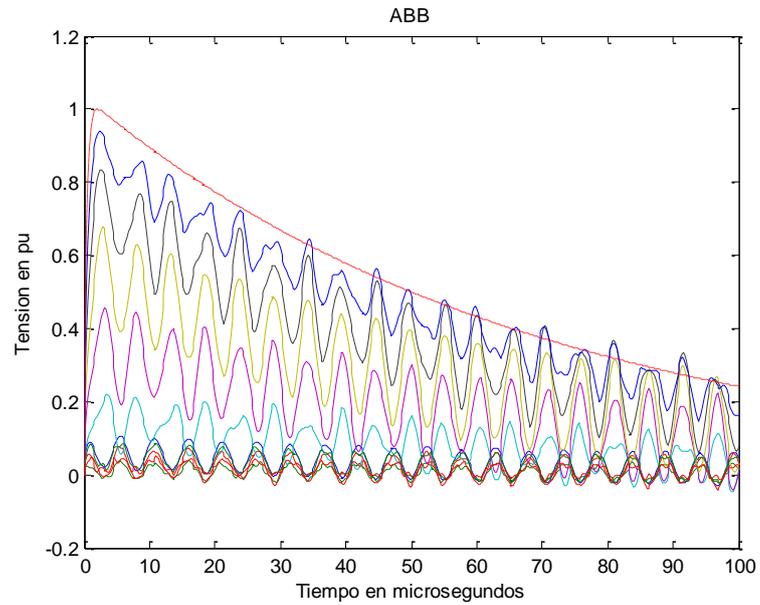


Figura 41: Tensiones en los nodos del transformador obtenidas con el código de ABB.

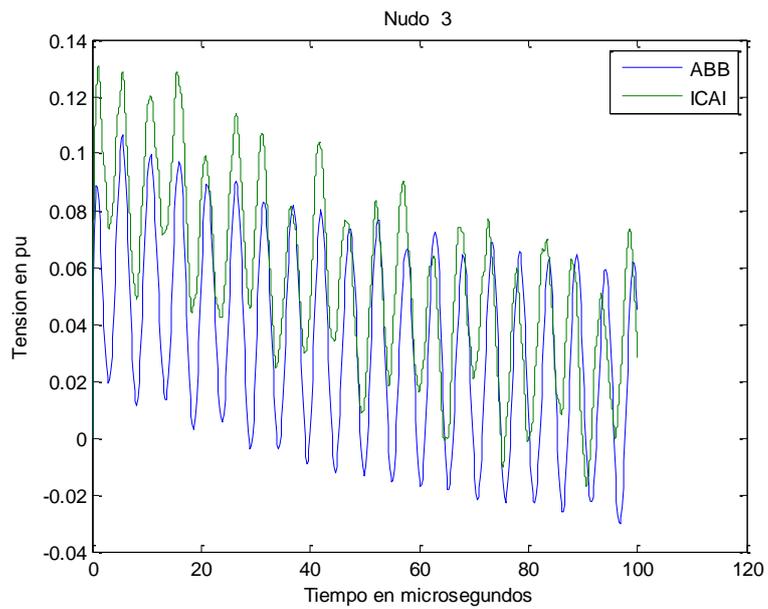


Figura 42: Comparación del código de ABB con el código del ICAI: tensión del nudo 3.

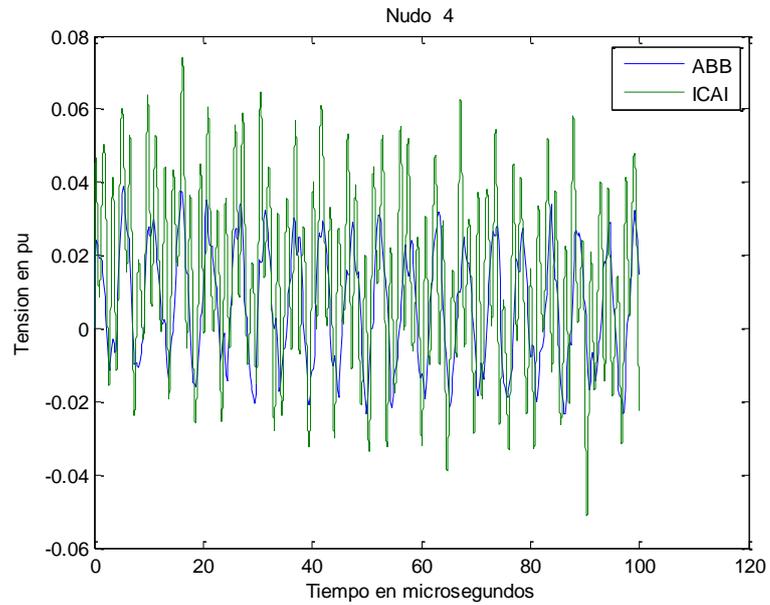


Figura 43: Comparación del código de ABB con el código del ICAI: tensión del nudo 4.

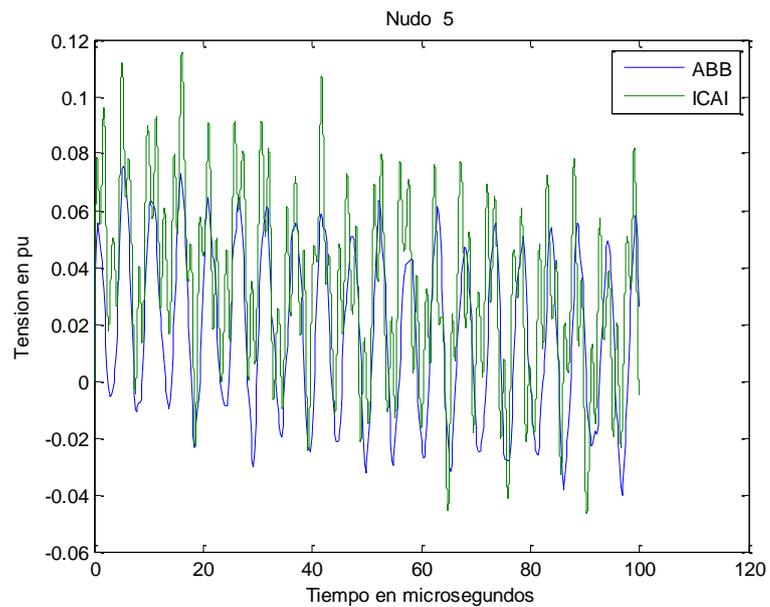


Figura 44: Comparación del código de ABB con el código del ICAI: tensión del nudo 5.

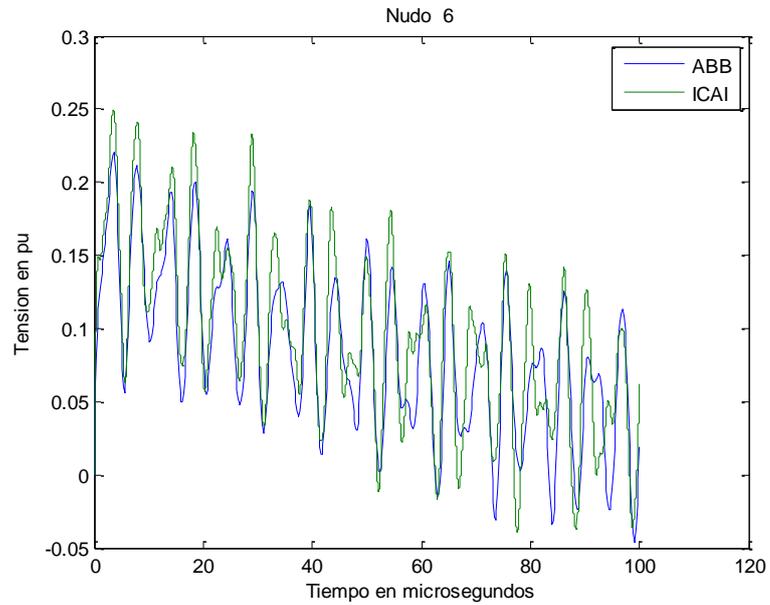


Figura 45: Comparación del código de ABB con el código del ICAI: tensión del nudo 6.

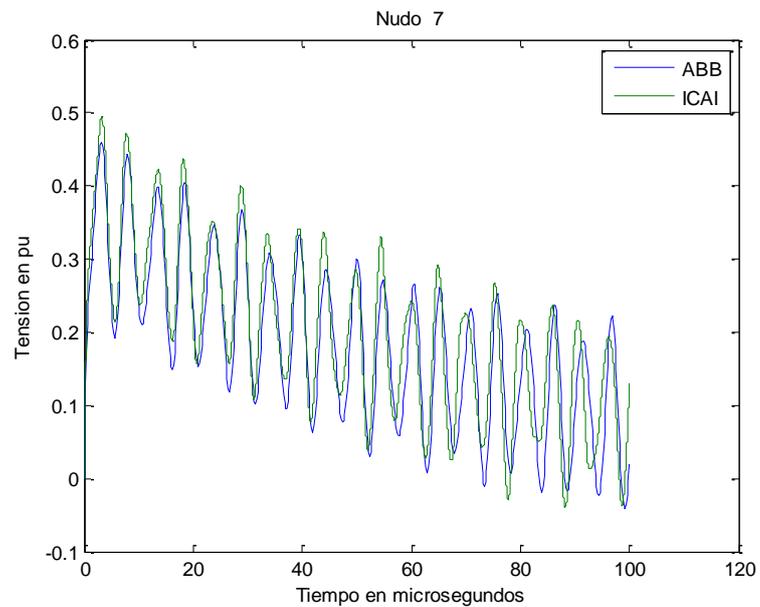


Figura 46: Comparación del código de ABB con el código del ICAI: tensión del nudo 7.

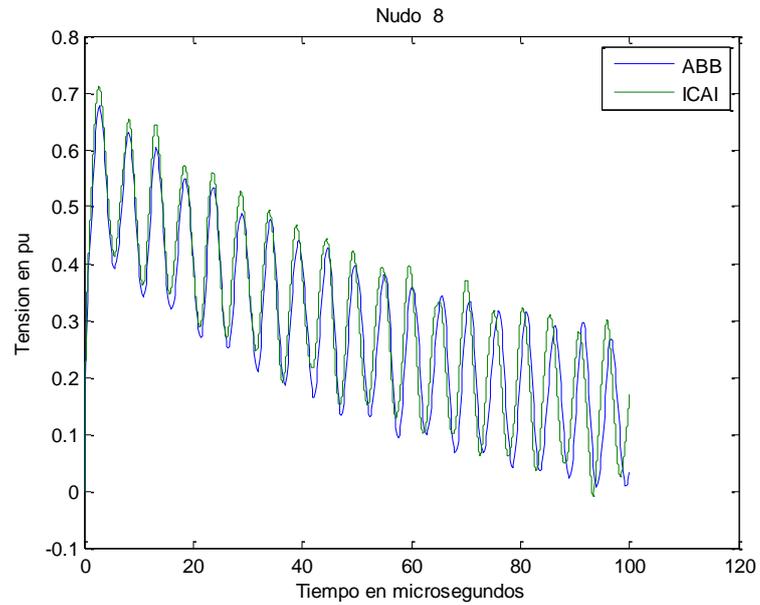


Figura 47: Comparación del código de ABB con el código del ICAI: tensión del nudo 8.

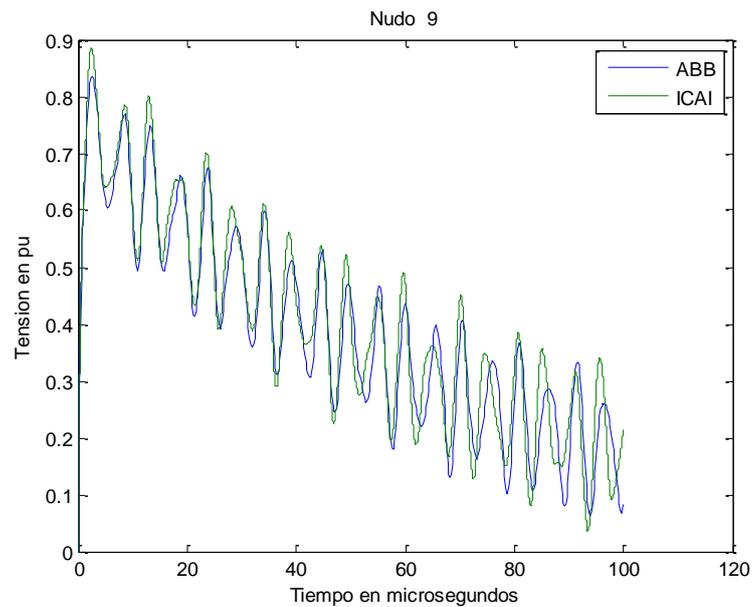


Figura 48: Comparación del código de ABB con el código del ICAI: tensión del nudo 9.

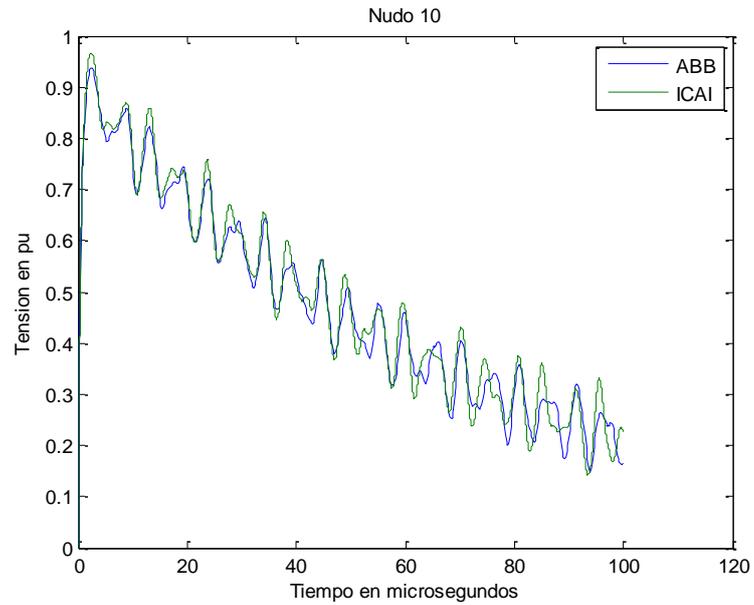


Figura 49: Comparación del código de ABB con el código del ICAI: tensión del nudo 10.

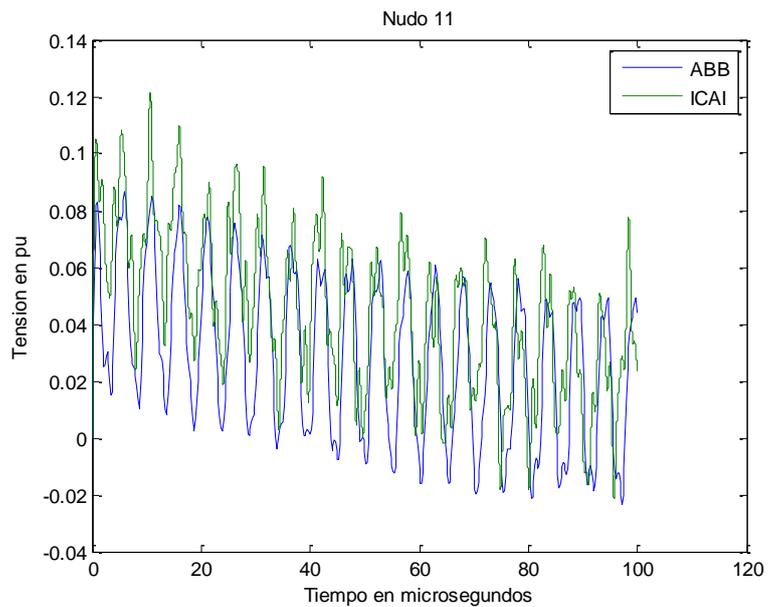


Figura 50: Comparación del código de ABB con el código del ICAI: tensión del nudo 11.

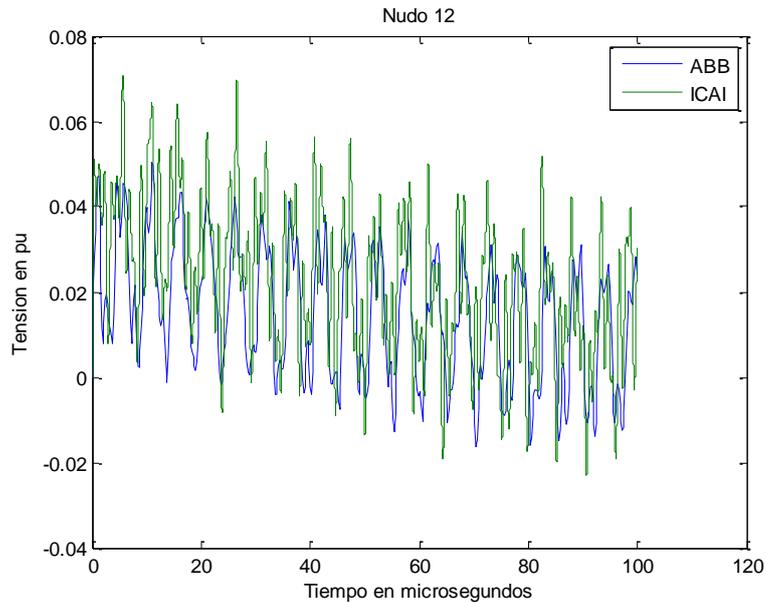


Figura 51: Comparación del código de ABB con el código del ICAI: tensión del nudo 12.

8.2.3. Autovalores

La Tabla 8-1 contiene los autovalores del modelo lineal. El modelo lineal tiene 11 parejas de autovalores complejos conjugados de parte real nula. La parte real es nula porque el circuito no contiene resistencias. La frecuencia de los autovalores varía desde 71 kHz hasta 925 kHz.

Tabla 8-1: Autovalores del modelo lineal para el cálculo de la respuesta en el tiempo.

No.	krad/s	kHz
1	0.0	0.0
2	448.3	71.3
3	1216.3	193.6
4	1750.8	278.7
5	2487.5	395.9
6	3071.5	488.8
7	3584.8	570.5
8	3751.6	597.1
9	3940.0	627.1
10	5727.5	911.6
11	5812.2	925.0





Las ecuaciones diferenciales escritas en forma compacta son:

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{u}_{n2-N}}{dt} &= \mathbf{A}_{12}\mathbf{i}_b + \mathbf{b}_1\Delta i_{n2} \\ \frac{d\mathbf{i}_b}{dt} &= \mathbf{A}_{21}\mathbf{u}_{n2-N} \\ \begin{bmatrix} \frac{d\mathbf{u}_{n2-N}}{dt} \\ \frac{d\mathbf{i}_b}{dt} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{n2-N} \\ \mathbf{i}_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \Delta i_{n2}\end{aligned}$$

Si se desea calcular la respuesta en frecuencia que proporciona la impedancia de entrada (con el secundario en cortocircuito) entonces la entrada y la salida son respectivamente:

$$u = \Delta i_{n2}$$

$$y = u_{n2}$$

9.2. Resultados

La Figura 52 muestra los resultados de la respuesta en frecuencia. Se aprecian los picos de resonancia correspondientes a los polos de la función de transferencia.

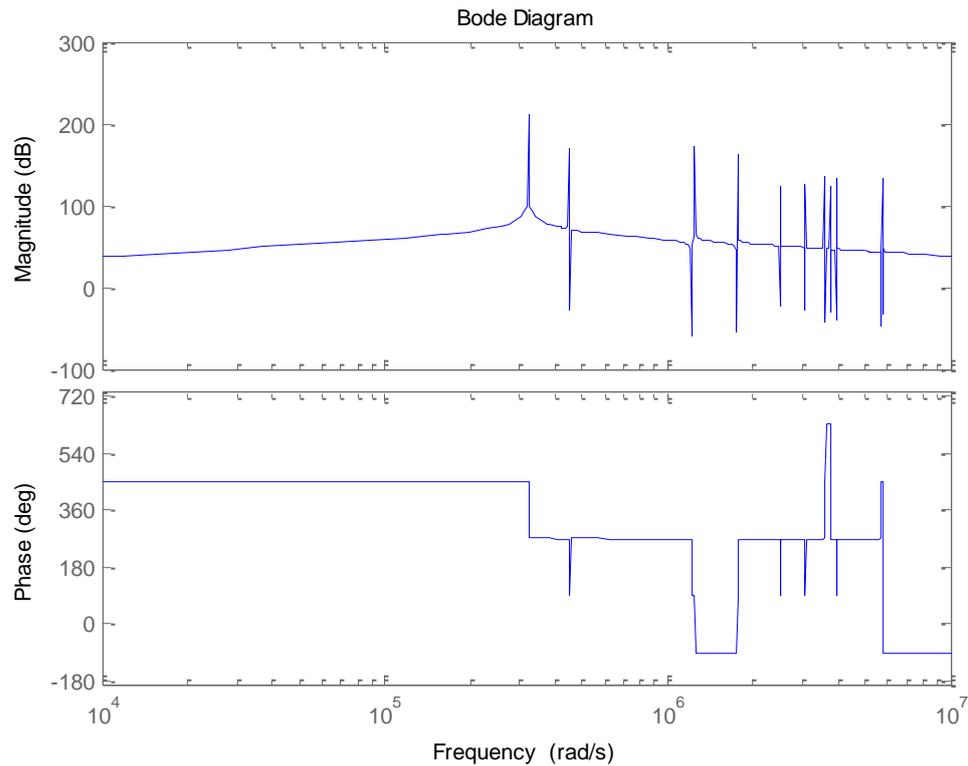


Figura 52: Respuesta en frecuencia.

La Tabla 9-1 contiene los autovalores complejos conjugados del modelo lineal. El modelo lineal tiene un autovalor real nulo y 11 parejas de autovalores complejos conjugados de parte real nula. La parte real es nula porque el circuito no contiene resistencias. La frecuencia de los autovalores varía desde 51 kHz hasta 925 kHz.



Tabla 9-1: Autovalores del modelo lineal de cálculo de la respuesta en el frecuencia.

No.	krad/s	kHz
1	321.9	51.2
2	447.0	71.1
3	1243.3	197.9
4	1766.4	281.1
5	2487.9	396.0
6	3072.3	489.0
7	3581.3	570.0
8	3750.7	596.9
9	3943.1	627.6
10	5733.4	912.5
11	5813.3	925.2



10. Conclusiones

Este proyecto ha mejorado del modelo de cálculo de la respuesta de transformadores acorazados en alta frecuencia de un fabricante nacional. La mejora del código se ha centrado en el método matemático de simulación.

El método de simulación de dicho código (basado en la truncación de la exponencial de la matriz) exhibe limitaciones propias de estado del arte de los métodos numéricos y de las capacidades de los ordenadores de dicha época.

Se ha programado y validado un nuevo modelo de cálculo de la respuesta de transformadores acorazados en lenguaje MATLAB.

Se han implantado dos métodos: simulación de sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales por el método de Runge-Kutta y simulación de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales utilizando los autovalores y autovectores de la matriz de estados.

Los dos métodos de simulación implantados ofrecen idénticos resultados y, además, mejoras (mayor precisión) con relación al método basado en la truncación de la exponencial de la matriz estados.

También se ha obtenido la respuesta en frecuencia del transformador abriendo la puerta a futuros desarrollos.



UNIVERSIDAD PONTIFICIA COMILLAS

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

(ICAI)

ALFREDO DEL RÍO MUÑOZ – INGENIERO INDUSTRIAL



11. Referencias

- [1] A. Greenwood, “Electrical Transients in Power Systems”, John Wiley and Sons, 1991.
- [2] J. A. Martínez Velasco (Coordinador), “Coordinación de aislamiento en redes eléctricas de alta tensión”, Mc Graw Hill, 2007.
- [3] J. L. Torá Galván, “Transporte de la energía eléctrica”, Universidad Pontificia Comillas, 1997.
- [4] IEC, International Standard IEC 71-1: “Insulation Coordination, Part I: Definitions, principles and rules”, 17th Edition, 1993.
- [5] IEC, Technical Report IEC TR 600071-4, “Insulation Coordination, Part 4: Computational guide to insulation coordination and modelling of electrical networks”, First Edition 2004-06.
- [6] J. Sanz Feito, “Máquinas Eléctricas”. Prentice Hall, Madrid, 2002.
- [7] J. Fraile Mora, “Máquinas Eléctricas”. Mc Graw Hill, Madrid, 2003.
- [8] L. F. Blume, A. Boyajian, G. Camilli, T. C. Lenox, S. Minneci, v: M. Monstsinger, “Transformer Engineering”, John Wiley and Sons, 1951.
- [9] A. C. Franklin, D. P. Franklin, “J&P Transformer Book, Eleventh Edition”, Butterworths, 1983.
- [10] J. H. McWhirter, C. D. Fahrnkopf, J. H. Steele “Determination of Impulse Stresses within Transformer Windings by Computers, Transactions of the American Institute of Electrical Engineers, Part III, Power Apparatus and Systems, Volume 76, No. 2, February 1957, pp. 1267-1274.
- [11] P. A. Abetti, F. J. Maginnis, “Natural Frequencies of Coils and Windings Determined by Equivalent Circuit”, Transactions of the American Institute of Electrical Engineers, Part III, Power Apparatus and Systems, Volume 72, No. 2, January 1953, pp. 495-504.
- [12] P. A. Abetti, F. J. Maginnis, “Fundamental Oscillations of Coils and Windings”, Transactions of the American Institute of Electrical Engineers,



Part III-A, Power Apparatus and Systems, Volume 73, No. 1, January 1954, pp. 1-10.

- [13] P. A. Abetti, F. J. Maginnis, “Correlation of Forced and Free Oscillations of Coils and Windings”, Transactions of the American Institute of Electrical Engineers, Part III, Power Apparatus and Systems, Volume 78, No. 4, December 1959, pp. 986-994.
- [14] W. J. McNutt, T. J. Blalock, R. A. Hinton, “Response of Transformer Windings to System Transient Voltages”, IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-93, No. 2, February 1974, 457 - 467 pp. 458-467.