



ICADE BUSINESS SCHOOL

MÁSTER UNIVERITARIO EN GESTIÓN DE RIESGOS FINANCIEROS

EL ALA DEL CISNE NEGRO Y LA MODELIZACIÓN CON SALTOS

Autor: Miguel Angel Vitiello Mouret

Directores: Álvaro Chamizo Cana y Susana Carabias Lopez

Madrid
Agosto, 2016

Miguel Angel
Vitiello
Mouret

EL ALA DEL CISNE NEGRO Y LA MODELIZACIÓN CON SALTOS



Índice

Resumen	10
0. Introducción.....	11
0.1. Objetivo	11
0.2. Justificación.....	11
0.3. Metodología	12
0.4. Estructura.....	12
Capítulo 1: Medición del riesgo de mercado	13
1.1. Concepto del riesgo de mercado	13
1.1.1. ¿Qué es el riesgo de Mercado?.....	13
1.1.2. ¿Qué produce el riesgo de mercado?	13
1.2. Medición del riesgo de mercado.....	14
1.2.1. Medidas tradicionales.....	14
1.2.2. El Valor en riesgo (VaR)	15
1.2.3. Medidas coherentes y el TailVaR	17
1.3. Cálculo del VaR y del TailVaR	18
1.3.1. Métodos de cálculo del VaR	18
1.3.2. Cálculo del TailVar.....	20
1.4. Backtesting	22
1.4.1. Test incondicionales.....	22
1.4.2. Test condicionales	25
1.4.3. Backtesting del TVaR.....	26
Capítulo 2: El Movimiento Browniano Geométrico para la modelización financiera	28
2.1. Introducción	28
2.2. El movimiento browniano	28
2.2.1. Definición e historia.....	28
2.2.2. Caracterización del Movimiento Browniano	28
2.3. Del movimiento browniano al movimiento browniano geométrico.....	32
2.3.1. El lema de Itô	32
2.3.2. El movimiento browniano geométrico	33
Capítulo 3: Limitaciones del movimiento Browniano geométrico para la modelización financiera. El problema de la volatilidad	35
3.1. El problema de la volatilidad	35
3.1.1. Obtención de las volatilidades implícitas por el Modelo de Black-Scholes	35
3.1.2. Problemas en la medición de la volatilidad.....	38
3.2. Limitaciones de la distribución Normal para la modelización financiera	43
3.2.1. El problema de las colas gruesas.....	43
3.2.2. Contraste de la bondad del ajuste	45
3.2.2.1. Contraste de la bondad de ajuste para los precios	46
3.2.2.2. Contraste de la bondad de ajuste para los rendimientos	51
3.3. Problema de escala	55

3.4. Introducción al Cisne Negro como posible explicación a los problemas de modelización financiera	56
3.5. Alternativas al problema de medición de la volatilidad.....	57
3.5.1. Una introducción a la volatilidad estocástica	57
3.5.2. Introducción de saltos en el modelo.....	58
Capítulo 4: Procesos con saltos.....	60
4.1. Proceso de Poisson estándar	60
4.1.1. Proceso de Poisson compensado	61
4.2. Proceso de Poisson compuesto.....	62
4.3. Algoritmos para la simulación de los procesos.....	64
4.3.1. Proceso de Poisson estándar	64
4.3.2. Proceso de Poisson compuesto	65
4.4. Explicación del modelo de difusión con saltos.....	65
4.4.1. El modelo de Merton.....	65
4.4.2. *Podemos llamarlo coherencia estadística	67
4.4.3. Simulación de un modelo con saltos	68
4.4.4. Primera comparación entre browniano geométrico sin y con saltos	69
Capítulo 5: Modelización financiera con movimiento browniano geométrico y con saltos de Poisson. Cálculo del VaR y TailVaR	70
5.1. Introducción.....	70
5.2. Presentación de los datos y Cisnes Negros	70
5.2.1. Los precios de cierre y los rendimientos (Bancos)	70
5.2.2. Los precios de cierre y los rendimientos (Índices Financieros).....	72
5.2.3. Identificación de Cines Negros.....	74
5.3. Cálculo del VaR y TailVaR bajo un movimiento Browniano geométrico	74
5.3.1. Con entidades bancarias.....	75
5.3.2. Con índices financieros	80
5.4. Cálculo del VaR y TailVaR bajo un movimiento Browniano con saltos	84
5.4.1. Algoritmo para la modelización de los procesos con saltos.....	84
5.4.2. Con entidades bancarias.....	86
5.4.3. Con índices financieros	92
5.5. Descripción de resultados.....	98
5.5.1. VaR y TailVaR.....	98
5.5.2. Cálculo del Backtesting	101
5.5.2.1. Backtesting del VaR	101
5.5.2.2. Backtesting del TailVaR.....	104
5.5.3. Una reflexión filosófica	105
Capítulo 6: Conclusión y futuras líneas de investigación.....	109
6.1. Conclusión	109
6.2. Futuras líneas de investigación	112
Bibliografía.....	113
Anexos	115

Índice de figuras y tablas

Figuras

- Figura 1.1. VaR diario al 15% de una cartera hipotética distribuido como una Normal... 16
- Figura 2.1. Representación gráfica de un movimiento Browniano y la distribución Normal como su distribución asociada 31
- Figura 2.2. Varias simulaciones de movimientos brownianos geométricos y las distribuciones Log-Normales como sus distribuciones asociadas..... 34
- Figura 3.1. Comportamiento del precio de la opción con respecto a la volatilidad en opciones (a) ATM: *at-the-money*, (b) OTM: *out-the-money* y (c) ITM: *in-the-money* 39
- Figura 3.2. *Smiles* de Volatilidad con distintos parámetros 40
- Figura 3.3. Simulación de una superficie de volatilidad 41
- Figura 3.4. Precios de cierre y volatilidad histórica a 20 y 40 días del Barclays en el periodo 2008-2016..... 42
- Figura 3.5. Precios de cierre y rendimientos logarítmicos absolutos del Barclays (2008-2016), donde se aprecian los *clusters* de volatilidad 43
- Figura 3.6. Comparación de funciones de densidad de distintas distribuciones (a)Log-Normal y Weibull, (b) Normal y Cauchy 45
- Figura 3.7. Cambio de escala del movimiento browniano y el Ibex 35, (a) con escala original, que son 4 años; (b) con aproximadamente la mitad de la escala, que son 2 años y medio, (c) con un año aproximadamente y finalmente (d) con aproximadamente medio año 55
- Figura 4.1. Distribuciones exponenciales con intensidad: (a) $\lambda = 10$, (b) $\lambda = 20$, (c) $\lambda = 50$ y (d) $\lambda = 100$ 60
- Figura 4.2. Procesos de Poisson con intensidad: (a) $\lambda = 25$, (b) $\lambda = 45$ 61
- Figura 4.3. Procesos de Poisson compensado con intensidad: (a) $\lambda = 25$, (b) $\lambda = 45$ 62
- Figura 4.4. Procesos de Poisson compuesto con saltos gaussianos con intensidad: (a) $\lambda = 25$, (b) $\lambda = 45$ 63
- Figura 4.5. Procesos de Poisson compuesto con saltos gaussianos y compensado con intensidad $\lambda = 45$ 63
- Figura 4.6. Simulación de un Movimiento Browniano geométrico con y sin saltos 69
- Figura 5.1. Precios de cierre de los Bancos y rendimientos 70
- Figura 5.2. Precios de cierre de los Índices financieros y rendimientos 72

• Figura 5.3. (a) Precios de cierre de la variable con dato real y simulado con un movimiento browniano geométrico, (b) distribución de probabilidad de los rendimientos donde se indica el VaR (punto rojo) y el TVaR (punto negro):	
• 5.3.1. Bank of America.....	75
• 5.3.2. Banco de Japón MUFJ	76
• 5.3.3. Banco Chino (ICBC)	77
• 5.3.4. Banco Barcalys	78
• 5.3.5. Banco BBVA.....	78
• 5.3.6. BNP	79
• 5.3.7. CAC40	80
• 5.3.8. FTSE100.....	80
• 5.3.9 IBEX 35	81
• 5.3.10. Nikkei 225	81
• 5.3.11. Shanghai Comp.	82
• 5.3.12. Nasdaq	82
• Figura 5.4. (a) Precios de cierre de la variable con dato real y simulado con un movimiento browniano geométrico y con movimiento browniano geométrico con saltos, (b) distribución de probabilidad de los rendimientos donde se indica el VaR (punto rojo sin relleno), y el $\overline{TVaR}$ (punto azul). Se pueden ignorar los demás puntos.	
• 5.4.1. Bank of America.....	86
• 5.4.2. Banco de Japón MUFJ	87
• 5.4.3. Barclays	88
• 5.4.4. Banco Chino (ICBC)	89
• 5.4.5. Banco BBVA.....	90
• 5.4.6. BNP	91
• 5.4.7. CAC40	92
• 5.4.8. FTSE100.....	93
• 5.4.9 IBEX 35	94
• 5.4.10. Nikkei 225	95
• 5.4.11. Shanghai Comp.	96
• 5.4.12. Nasdaq	97
• Figura 5.5. VaR bajo una comparación entre distribución Normal y no Normal	100
• Figura A.1. Simulación de Modelo de Heston.....	130
• Figura A.2. Distribución del Modelo de Heston	130
• Figura A.3. Función Gamma	133
• Figura A.4. Función de Bessel modificada de segundo tipo (a) para valores enteros (b) y para valores no enteros	134

Tablas

• Tabla 1.1. Ventajas y limitaciones del VaR.....	16
• Tabla 1.2. Enfoque <i>traffic light</i> de Basilea con una distribución binomial ($\alpha, \sqrt{\alpha(1-\alpha)}$) al 99% de intervalo de confianza y 250 días.....	24
• Tabla 1.3. Enfoque <i>traffic light</i> con una distribución Normal($T\alpha, \sqrt{T\alpha(1-\alpha)}$) al 99% de intervalo de confianza y 2000 días.....	24
• Tabla 1.4. Valores críticos para un <i>backtesting</i> del TVaR (C. Acerbi y B. Szekely).....	27
• Tabla 3.1. Descripción estadística de precios y rendimientos	44
• Tabla 3.2. Análisis gráfico de ajustes de distribuciones (de precios) de las variables seleccionadas a las distribuciones propuestas.....	46
• Tabla 3.3. Contraste de bondad de ajuste para la distribución de precios	50
• Tabla 3.4. Análisis gráfico de ajustes de distribuciones (de rendimientos) de las variables seleccionadas a las distribuciones propuestas.....	51
• Tabla 3.5. Contraste de bondad de ajuste para la distribución de rendimientos.....	53
• Tabla 3.6. Propiedades de los modelos de difusión	59
• Tabla 4.1. Comparación entre modelos de difusión y modelos con saltos.....	66
• Tabla 5.1. Descripción estadística de los precios de la variable seleccionada con cotización real y con una cotización simulada (movimiento browniano geométrico).	
• 5.1.1. Bank of America	75
• 5.1.2. Banco de Japón MUFJ	76
• 5.1.3. Banco Chino (ICBC)	77
• 5.1.4. Banco Barclays.....	79
• 5.1.5. BNP.....	79
• 5.1.6. BBVA.....	79
• 5.1.7. Índices con cotización real.....	83
• 5.1.8. Índices con cotización simulada.....	83
• Tabla 5.2. Parámetros del modelo con saltos para cada una de las series seleccionadas	85
• Tabla 5.3. Compara los estadísticos de la cotización real con dos cotizaciones simuladas: movimiento browniano geométrico y con un movimiento browniano con saltos	
• 5.3.1. Bank of America.....	86
• 5.3.2. Banco de Japón MUFJ	87
• 5.3.3. Banco Barclays.....	88
• 5.3.4. Banco Chino (ICBC)	89
• 5.3.5. Banco BBVA.....	90
• 5.3.6. BNP	91
• 5.3.7. CAC40	92
• 5.3.8. FTSE100.....	93
• 5.3.9. IBEX 35	94
• 5.3.10. Nikkei 225	95
• 5.3.11. Shanghai Comp.	96
• 5.3.12. Nasdaq	97

• Tabla 5.4. Valores del VaR y del TailVaR al 5% y 1% de significación de las variables seleccionadas	98
• Tabla 5.5. Backtesting del VaR con movimiento Browniano	101
• Tabla 5.6. Backtesting del VaR con movimiento Browniano con saltos	103
• Tabla 5.7. Backtesting del TVaR	103
• Tabla 5.8. Valores críticos para el movimiento browniano (<i>backtesting del TVaR</i>)	104
• Tabla A.1. Funciones de densidad de distintas distribuciones de probabilidad.....	119

“While in theory randomness is an intrinsic property, in practice, randomness is incomplete information”.

Nassim Taleb(1960-), *The Black Swan: The Impact of the Highly Improbable* (2007).

“Simplicity is not so simple to attain”.

Nassim Taleb, *Antifragile: Things That Gain from Disorder* (2012).

“When the weather changes and hurricanes hit, nobody believes that the laws of physics have changed. Similarly, I don’t believe that when the stock market goes into terrible gyrations its rules have changed. It’s the same stock market with the same mechanisms and the same people”.

Benoît Mandelbrot (1924-2010), *A Theory of Roughness* (2004).

Resumen

En este trabajo se expone una metodología cuantitativa para el cálculo del VaR y del TailVar bajo dos tipos de modelización de las variables. Se intenta replicar series temporales reales (como la del índice CAC40 o la cotización del banco BBVA) de rendimientos financieros simulando su comportamiento mediante un movimiento browniano geométrico y un movimiento browniano al que se le añaden saltos de Poisson. Y con las series simuladas se calculan las medidas de riesgo del VaR y TailVar. Finalmente, se procede a calcular a cada una de las series simuladas su correspondiente *Backtesting*.

Desde un punto de vista metodológico, en un primer lugar se modeliza con un movimiento browniano geométrico y posteriormente se añaden los saltos de Poisson, lo que constituye la principal aportación del trabajo. Tenemos con ello, nuestro objetivo primario: exponer las limitaciones que tiene utilizar el proceso browniano geométrico en la modelización financiera y la utilización de procesos con saltos como alternativa para la modelización financiera. Desde un punto de vista filosófico, se relacionan conceptos literarios como el Cisne Negro (definido por Taleb) e introducimos el concepto del Ala del Cisne Negro, refiriéndonos a los picos de volatilidad y que constituyen unos de los problemas fundamentales de la modelización financiera.

Palabras clave

VaR, TailVar, Backtesting, *problema de volatilidad*, movimiento Browniano geométrico, colas gruesas, saltos de Poisson, Ala del Cisne Negro.

Abstract

This working paper exposes a quantitative methodology for computing the VaR and the TailVaR in two kind of behavioral modelling. We are going to try to replicate real time series (such as the CAC 40 financial index or BBVA's shares) of financial returns by simulating its financial behavior with a geometric Brownian motion and geometric Brownian motion with Poisson jumps (a jump diffusion model). Finally with these simulated series we compute the risk metrics VaR and the TailVaR and then we calculate the backtesting of each series.

In the methodology approach, first we simulate the Brownian motion and then we simulate the jump diffusion model. We have the main goal of checking the limitations of the geometric Brownian motion to financial modelling. We propose the jump diffusion model as an alternative to return's financial modelling. In the philosophy approach, we use literary concepts as Taleb's Black Swan and we create the concept of Black Swan's Wing, which is a volatility peak and is one of the main problems in the financial modelling.

Key words

VaR, TailVar, Backtesting, *volatility problem*, geometric Brownian motion, heavy tails, Poisson jumps, Black Swan Wing.

Introducción

Objetivo

El trabajo tiene como objetivo ilustrar el cálculo del VaR y el TailVaR, como métricas de riesgo de mercado, modelizando las variables financieras (en nuestro caso, los precios o rendimientos de ciertas entidades e índices financieros) con un movimiento browniano geométrico y un movimiento browniano con saltos.

Se pretende discutir si los modelos con saltos pueden mejorar las limitaciones que posee el movimiento browniano geométrico en la modelización financiera.

Por último hemos incluido en capítulo final una reflexión filosófica donde exponemos un objetivo secundario. Este objetivo secundario se basa en la idea de que no se pretende únicamente exponer ambos modelos y comprobar que uno *funciona* mejor que otro. Sino comprender la incertidumbre y complejidad que tiene el entorno financiero y las herramientas que debemos (y no) utilizar en este entorno. Abordaremos este tema desde un punto de vista *empírico escéptico* (término de N. Taleb), esto quiere decir, desde el enfoque que en este trabajo se le da, que preocupándonos por la causa creemos que nunca podremos explicarla totalmente.

Justificación

El día a día de una persona que desarrolla trabajos técnicos en finanzas está marcado por la utilización de métricas basadas en distribuciones asociadas al movimiento Browniano Geométrico, las llamadas distribuciones gaussianas. En este trabajo nos apoyamos en la idea de Taleb en su *El Cisne Negro, El impacto de lo altamente improbable* (2007), de acuerdo con la cual, las *“curvas de campana se utilizaron en los lugares equivocados”*. Con esta idea en mente, es recomendable un *“cambio instrumental”*, es decir, utilizar modelos o métricas distintas.

Partiendo de esta recomendación o necesidad de implementar nuevos modelos o métricas, este trabajo incorpora al movimiento browniano (geométrico) saltos de Poisson. Utilizamos saltos de Poisson ya que son, dentro de los procesos estocásticos con saltos, los menos complejos de utilizar y de implementar, pero producen mejoras significativas al modelo.

La modelización descrita se aplica a la medición de riesgo de mercado, que esta adquiriendo cada vez más importancia dentro del *front office* de los bancos, debido a la globalización y al aumento de la incertidumbre en los mercados financieros. Por otra parte, el riesgo de mercado forma parte de los riesgos *más importantes* dentro de la regulación de Basilea II, por lo que a efectos regulatorios, mejorar las técnicas o modelos para medir el riesgo de mercado podría ser beneficioso tanto para las entidades financieras como para el regulador.

Metodología

El trabajo comienza con una revisión de la literatura sobre los dos procesos estocásticos utilizados: Movimiento Browniano y Procesos con Saltos. A partir de ella se ofrece una presentación de cada proceso, adaptada a la finalidad del trabajo. En ella, se intenta mantener el rigor pero siempre con un objetivo formativo más que axiomático.

El factor de riesgo de mercado con el que se trabaja es el precio de un activo de renta variable, para la cual se trabajó con datos reales de cotizaciones de Bolsa de los precios de cierre de distintas entidades bancarias e índices financieros.

En la aplicación práctica, el cálculo de las métricas de riesgo, se utiliza una simulación de Montecarlo de las series temporales bajo los dos procesos estocásticos. En esta modelización, se procura describir los algoritmos de la forma más adecuada para sean sencillos de implementar en cualquier software. En el anexo se recogen todos los algoritmos o códigos utilizados en el trabajo. Utilizamos mayoritariamente Matlab® y R-Studio®, sin embargo la implementación en cualquier otro programa (como R-Studio® o Scilab®, software gratuitos), es muy parecida.

Por último, se concluye con el cálculo del VaR, TailVaR de las series simuladas bajo los dos procesos estocásticos y con el *backtesting* de cada una de ellas.

Estructura

El trabajo se estructura en 6 capítulos, la conclusión y anexos:

- En el capítulo 1 se presentan los conceptos básicos sobre medición del riesgo de mercado. Nos centramos en explicar de forma detallada las medidas del VaR y el TailVaR. Se expone la necesidad de utilizar procesos estocásticos para modelizar los factores de riesgo. Y concluye con la teoría para el cálculo de un *backtesting*.
- En el capítulo 2, introducimos los procesos estocásticos que utilizaremos en una primera modelización o simulación. Se describen el movimiento browniano estándar y geométrico. En un primer lugar se presenta la formulación matemática y en segundo lugar se simula el proceso.
- En el capítulo 3, introducimos ciertas limitaciones que tiene el movimiento browniano geométrico en la modelización de precios financieros. Se trata principalmente de un problema de volatilidad y colas gruesas. Por último, en ese tema introducimos el concepto de Cisne Negro y las alternativas que existen para salvar dichas limitaciones que tiene el movimiento browniano geométrico: entre ellas, la incorporación de saltos en los modelos financieros.
- En el capítulo 4 se presentan los procesos estocásticos con saltos, principalmente los procesos de Poisson, que constituyen la propuesta de modelización que se ofrece en este trabajo.
- Por último, en el capítulo 5 se desarrolla la implementación práctica de la obtención del VaR y TailVaR. Se empieza presentando las variables de estudio y a continuación se simulan los procesos browniano y browniano con saltos. El capítulo finaliza con el cálculo de las medidas de riesgo y *backtesting* a ambos modelos.
- En el capítulo 6, la conclusión y futuras líneas de investigación, se recogen las ideas importantes que se derivan del trabajo desarrollado en los capítulos anteriores. Las futuras líneas de investigación son los temas en que se puede ampliar el trabajo.
- Los anexos, incluyen conceptos que consideramos relevantes para el entendimiento adecuado del trabajo y los códigos utilizados.

Capítulo 1: Medición del riesgo de mercado

1.1. Concepto del riesgo de mercado

1.1.1. ¿Qué es el riesgo de Mercado?

El *riesgo financiero* es la medición de la probabilidad de ocurrencia de un evento que tenga consecuencias financieras negativas para una empresa.

Dentro de la categoría de los riesgos financieros podemos incluir el riesgo de liquidez, riesgo operacional, riesgo crédito y el riesgo de mercado. El *riesgo de mercado* se define como la *posibilidad* de pérdida asociado a movimientos *adversos* en las variables financieras del mercado.

Identificar un riesgo no es una tarea fácil. La misma naturaleza intrínseca de la definición de riesgo es precisamente el problema con su identificación: *el riesgo más peligroso es aquel que no puede identificarse.*

Uno de los problemas de identificar un riesgo es que, en muchas ocasiones, los tipos de riesgos antes definidos interactúan unos con otros. Por ejemplo, cuando baja el precio de un bono se presenta tanto el riesgo de mercado como de crédito. El movimiento en los precios del bono puede producirse por movimientos de los tipos de interés libres de riesgo, que es puro riesgo de mercado. Pero otro factor determinante en los precios del bono es la percepción de la probabilidad de impago, que es riesgo de crédito. Por lo que en este caso no hay una línea clara entre riesgo de mercado y de crédito ya que están interactuando el uno con el otro.

1.1.2. ¿Qué produce el riesgo de mercado?

El riesgo de mercado se puede descomponer en dos factores la exposición y el factor de riesgo. La *exposición* es un importe monetario que representa *cuanto* (en porcentaje) se puede perder en caso de que se produzca el factor de riesgo; es una variable endógena y es resultado de las *decisiones corporativas* (de inversión y financiación) de la empresa. El *factor de riesgo* es una variable exógena que genera la incertidumbre que *provoca* el riesgo de mercado. De esta forma el *riesgo* de mercado, visto como una *posibilidad* de pérdida, viene dado por un movimiento adverso o no favorable en el factor de riesgo y el *nivel de pérdida* vendrá determinado por la exposición. A continuación expondremos resumidamente cuáles son los principales factores de riesgo de mercado.

Tipo cambio. Los movimientos adversos o desfavorables en el tipo de cambio de monedas extranjeras generan un tipo de riesgo de mercado que se llama *riesgo de tipo de cambio*. Dentro de estos movimientos se incluye la volatilidad de cada moneda, la correlación entre monedas y el riesgo de devaluación. El riesgo de tipo de cambio está relacionado con otros tipos de riesgo, especialmente con el riesgo de tipo de interés, ya que la autoridad monetaria puede elevar los tipos de interés con el objetivo de suavizar la devaluación de una moneda.

Tipos de interés. Los riesgos por tipos de interés surgen por movimientos adversos o desfavorables en el nivel y/o volatilidad de las tasas de rentabilidad o tipos de interés asociado a los bonos, mejor conocido con su expresión en inglés: *yield* del bono. Los movimientos en la *yield* reflejan hechos económicos y el principal determinante de la *yield* son las expectativas inflacionistas. Un aumento de la inflación producirá que los bonos sean menos atractivos, incrementando su *yield*.

Precios de los activos. Los riesgos por precios financieros surgen por movimientos adversos o desfavorables en el nivel y/o volatilidad de las tasas de rentabilidad en los precios de los activos como las acciones o los productos asociados a ellos, como son las opciones. En este trabajo trataremos con este tipo de riesgo a través de los *precios de cierre* (no ajustados por dividendos) de varias entidades bancarias (como el Banco Chino y BBVA, un banco español) y ciertos índices financieros (como los índices del CAC40, un índice de empresas francesas y Nasdaq, un índice de empresas norteamericanas).

1.2. Medición del riesgo de mercado

Se han utilizado varias metodologías para medir el riesgo del mercado. Mencionaremos ahora varias de ellas y concluiremos con la que utilizaremos en este trabajo: el VaR y el TailVar.

1.2.1. Medidas tradicionales

La primera metodología que se desarrolló es el llamado *análisis de brecha* o mejor conocido en inglés como *gap analysis*. El análisis de brecha se basa en comparar el *estado de la situación presente* y el *estado ideal*. Las diferencias entre ambos estados suponen las “brechas” (o el *gap*) que se desea eliminar. Su objetivo es valorar el impacto de los movimientos adversos de los tipos de interés en el balance y la cuenta de pérdidas y ganancias en un horizonte temporal específico. Su cálculo e interpretación son sencillos. La limitación que tuvo este método fue precisamente que se implementó únicamente para el riesgo de tipo de interés.

En la **teoría de carteras**, el riesgo se mide a través de la variación de la rentabilidad de los activos (factores de riesgo) de una cartera, dependiendo esta del propio rendimiento y de la varianza (o desviación típica) de los activos y de las covarianzas entre los activos de la cartera. En principio se puede escoger qué tipo de distribución de probabilidad siguen los rendimientos, sin embargo, dado que solo calculamos esos dos parámetros, tradicionalmente se ha considerado la distribución normal y log-normal. Es una de las primeras en desarrollarse, y tiene un alcance limitado. Precisamente en este trabajo se discute la existencia de *correcciones y desajustes* al supuesto de distribución Normal.

Otro método tradicional es el **análisis de duración**. Que es un análisis de sensibilidad¹ de los bonos ante movimientos de los tipos de interés. Teniendo las mismas ventajas (fácil de realizar e interpretar) y limitaciones (como que sólo analiza el tipo de riesgo de interés) que el análisis de brecha.

¹ un análisis de sensibilidad es un procedimiento donde se *modifican* los parámetros iniciales de un modelo, sirviendo esto como un análisis de riesgos ya que se puede *generar* incertidumbre

1.2.2. El Valor en riesgo (VaR)

El VaR se define como una pérdida máxima de una cartera o de un instrumento de mercado a cierto nivel de confianza sobre un horizonte de tiempo determinado. Por tanto está perdida solo podrá excederse con una probabilidad igual al nivel de significancia.

Como se observa, el VaR tiene dos “apellidos” o parámetros básicos:

- El *nivel de significación* que designamos por α (definimos *nivel de confianza* como: $1 - \alpha$).

En ausencia de regulación, el nivel de confianza es establecido por *apetito al riesgo: la tolerancia de pérdidas*. El sector bancario y de seguros están sometidos a bastante regulación y el riesgo de mercado ha sido y es uno de los riesgos considerado desde siempre en los acuerdos de Basilea. Basilea II exige a las entidades, que gestionan su riesgo de mercado con el VaR, un nivel de significación del 1%, es decir, 99% de nivel de confianza. En nuestro análisis utilizaremos un nivel de significación del 5%, es decir, 95% de nivel de confianza.

- El horizonte temporal o de riesgo (que denotaremos por h), medido en *trading days*, que son 252 o 255 días al año.

El horizonte temporal en el VaR se establece en función de liquidez del instrumento que se esté gestionando. La razón es que los activos más líquidos se pueden cerrar o gestionar (*cubrir*) totalmente del riesgo de mercado de forma más rápida que un activo ilíquido. La regulación establece un VaR a 10 días. Sin embargo, se suelen realizar *varios* VaR: uno diario (para una gestión más efectiva), uno a 10 días (para el cálculo de capital regulatorio) y otro a 1 año (por ejemplo, para agencias de *rating*). Nosotros calcularemos el VaR diario.

El VaR con un porcentaje de significación y horizonte temporal determinado asume que las *órdenes* permanecerán constantes (estáticas) en el periodo escogido. Asumiendo esto, significa que estamos evaluando la incertidumbre de la cuenta de Pérdidas y Ganancias (de ahora en adelante PyG) teórica. Sin embargo, para que este valor tenga sentido para proyecciones futuras a día de hoy debemos descontar la cuenta de PyG. Ahora con todos estos conceptos podemos construir una definición de VaR más técnica:

Matemáticamente, el VaR a h días con un nivel de significación de $100\alpha\%$ es la pérdida (en valor actual) que puede ser excedido con una probabilidad α manteniendo la cartera estática los siguientes h días. Por lo que, para estimar el VaR, en el momento t necesitamos encontrar el $1 - \alpha$ percentil $x_{ht,\alpha}$ de la distribución de PyG del día h descontada, esto es:

$$P(PyG_{h,t} < x_{ht,\alpha}) = \alpha.$$

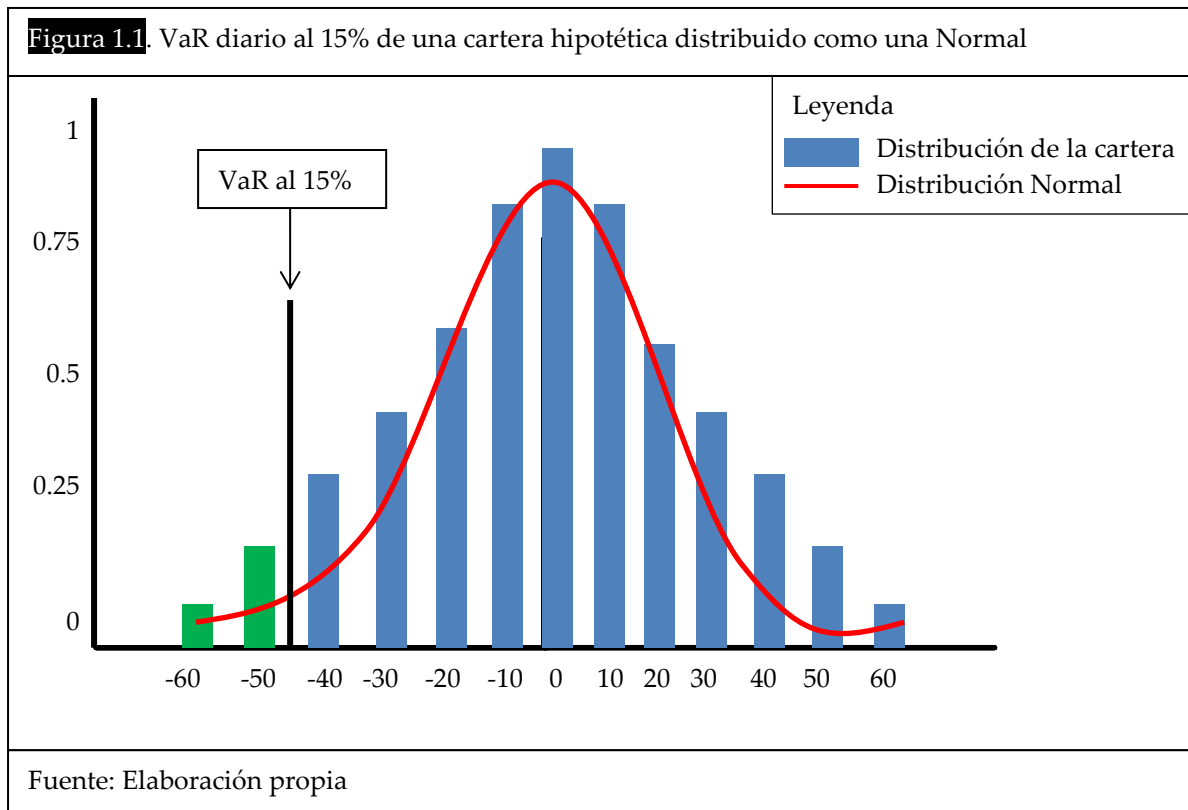
Y luego establecer

$$(1) \quad VaR_{ht,\alpha} = -x_{ht,\alpha}$$

Estamos trabajando con la función (distribución) de ganancias. Las pérdidas son ganancias negativas.

El Ala del Cisne Negro y la Modelización con saltos

Tenemos la representación del VaR al 15% con la distribución de ganancias en la **Figura 1.1**.



Para concluir el análisis del VaR, expondremos las ventajas y limitaciones de esta medida de riesgo. Resumidas en la **Tabla 1.1**.

Tabla 1.1 Ventajas y limitaciones del VaR	
Ventajas	Limitaciones
El VaR es un número, es fácil de interpretar y de entender ya que (puede) estar en unidades monetarias (principal ventaja)	Dado que se calcula, normalmente al 99%, genera una <i>seguridad</i> falsa debido a la creencia que eso es lo <i>máximo</i> que se puede perder
Podemos comparar el VaR de varios activos financieros. y consecuentemente se puede comparar rentabilidad-riesgo de distintos activos o carteras (razón por la cual es utilizado en los bancos)	El VaR no es una medida de riesgo para condiciones extremas. Hay mucha incertidumbre sobre qué pérdida esperar por encima del nivel de confianza. Es decir, en la práctica, cuando la pérdida observada es mayor que el VaR, lo excede por mucho, pero es difícil saber cuánto más
El VaR, dado que es fácil de implementar e interpretar, está disponible en varios softwares.	El VaR no es <i>aditivo</i> (explicaremos esta desventaja de forma aparte), <i>contradiéndose</i> con el concepto de diversificación. Con esta y la anterior son las principales desventajas del VaR.
El VaR es considerado una herramienta muy popular en la gestión de riesgo incluso para la autoridad regulatoria.	El resultado del VaR es tan bueno como las variables que se le introducen. Dado las distintas modalidades del VaR (ver apartado 1.3.1.), pueden dar varios valores del VaR para la misma cartera.
Fuente: Elaboración Propia	

1.2.3. Medidas coherentes de riesgo y el TailVaR

Una medida de riesgo $\varrho(\cdot)$ coherente (Artzner, 1999) es aquella que tiene una serie de propiedades deseables que se presenta a continuación:

- **Subaditividad:** $\varrho(X) + \varrho(Y) \leq \varrho(X + Y)$

De acuerdo con una métrica que verifique esta propiedad, el riesgo total de una cartera formado por dos o más activos es menor o igual que la suma de los riesgos individuales. Una fusión no crea riesgo extra. Esta característica es la base de la diversificación, ya que la diversificación no debe aumentar el riesgo sino reducirlo.

Dado que el VaR no cumple la condición de *subaditividad*, el VaR no es medida coherente de riesgo. Sin embargo, el VaR sí que cumple esta condición bajo ciertos supuestos sobre la distribución de probabilidad de los factores de riesgo. Si la distribución de probabilidad de los factores de riesgo es una distribución Normal entonces el VaR posee la propiedad de subaditividad.

- **Homogeneidad:** $\varrho(kX) = k\varrho(X), \forall k > 0$

Significa que si se aumenta la posición en una cartera, o en alguno de sus activos componentes, el riesgo debe incrementarse proporcionalmente.

- **Monotonía:** $\varrho(X) \geq \varrho(Y)$, si $E(X) \leq E(Y)$

Significa, que a mayor rentabilidad, debe corresponder mayor riesgo.

- **Condición libre de riesgo:** $\varrho(X + n) = \varrho(X) - n$

Significa que si se invierte una cantidad adicional en el portafolio, y se invierte prudentemente, entonces su riesgo se debe reducir en esa cantidad proporcional.

Es recomendable que las medidas de riesgo posean todas estas propiedades con el objetivo de que reflejen fielmente el riesgo que intentan medir. La subaditividad, se considera como una de las más importantes. Si la medida de riesgo considerada no satisface esta propiedad, podría concluirse que “*poner todos los huevos en la misma canasta*” es una buena decisión en el manejo de riesgos. Esto podría tener consecuencias absurdas como no considerar las correlaciones entre activos y un tipo de incongruencia en el sentido de que si los riesgos no son subaditivos, su agregación genera una subestimación de los riesgos combinados, lo que hace que la suma de los riesgos sea una medida no confiable².

La medida coherente de riesgo más conocida es el TailVar (que tiene otros nombres como VaR Condicional, CVaR, e incluye *Expected Shortfall*, *ES*, o *Expected tail loss*, *ETL*) y es la que implementaremos en este trabajo.

Al igual que el VaR, tiene como apellidos el horizonte al que se calcula y el nivel de significación que se utiliza. En nuestro trabajo calcularemos el TVaR al 5% y 1% diario.

²Franco A., L. C., Franco, C., L., E., *El valor en riesgo condicional CVaR como medida coherente de riesgo* (2005), Revista Ingenierías Universidad de Medellín.

En términos matemáticos podemos exponer su definición, conservando la notación anterior:

$$\begin{aligned} VaR_{ht,\alpha} &= -x_\alpha \\ (2) \quad TVaR_\alpha &\equiv ETL_\alpha(X) := -E(X|X < x_\alpha) = -\frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{x_\alpha} xf(x)dx \end{aligned}$$

Donde hemos usado la definición de media de una variable aleatoria continua, $E(\cdot|\cdot)$, denota una *media condicionada*.

Sin profundizar en detalle, expondremos otras medidas coherentes de riesgo. Con un objetivo académico y orientativo, estas medias son las siguientes.

- El **VaR entrópico (EVaR)** es una medida coherente de riesgo creada por Ahmadi-Javid³ y que representa una *cota superior* para el VaR y el CVaR, obtenida por la desigualdad de Chernoff⁴. Puede ser representado bajo el concepto de *entropía relativa*, de ahí su nombre. Su fórmula cerrada para una distribución Normal es sencilla de calcular⁵.
- La medida de riesgo de “*peligro*” *proporcional* (mejor conocida con su nombre en inglés *proportional hazard risk measure*) es coherente bajo ciertas restricciones paramétricas.
- En términos más generales, una medida coherente de riesgo puede ser definida mediante una *transformación de Wang* o utilizando *funciones de distorsión*. Con cualquier función de distorsión convexa se obtiene medidas de riesgo coherente⁶.

1.3. Cálculo del VaR y del TailVar

1.3.1. Métodos de cálculo del VaR

Existen tres métodos de cálculo del VaR:

- A) El VaR lineal *normal* (paramétrico)

Con el VaR paramétrico se asume una distribución de probabilidad para el factor de riesgo: (en nuestro caso son los precios o rendimientos), y se llega a una formula analítica cerrada cuando la variable tiene una relación lineal con los factores de riesgo. El supuesto básico y tradicional de este modelo es que los factores de riesgo siguen una distribución normal (Figura 1.1). Tiene ciertas limitaciones:

- Problema de tener que estimar las correlaciones entre los factores de riesgo en el caso de existir varios. Por ejemplo si la variable de estudio es la pérdida en una cartera compuesta por activos (acciones) de varias empresas (por ejemplo, empresas que cotizan en el Ibex35: Repsol, BBVA, Santander, etc.), es imprescindible estimar las correlaciones entre ellas, una tarea que a veces no es fácil.

³ Ahmadi-Javid, Amir (2012), *Entropic value-at-risk: A new coherent risk measure*. *Journal of Optimization Theory and Applications*.

⁴ Ver anexo: Probabilidad y Cálculo

⁵ El VaR entrópico también tiene una formula cerrada cuando los factores de riesgos siguen una distribución Normal (ver Zhuoyu, D., 2014, *Distributionally Robust Discrete Optimization with Entropic Value-at-Risk*): $EVaR_{1-\alpha} = -\mu + \sqrt{2 \ln\left(\frac{1}{\alpha}\right)} \sigma$. En general, $EVaR_\alpha > TVaR_\alpha > VaR_\alpha$.

⁶Sereda, Bronshtein, Rachev,... (2010), *Distortion Risk Measures in Portfolio Optimization*

- El supuesto de que los factores de riesgo siguen una distribución conocida con una formula analítica cerrada puede comportar un problema de modelización. En general este es un problema intrínseco en la modelización.

Para la distribución Normal(μ, σ), el VaR_α viene dado por la formula *cerrada*:

$$VaR_\alpha = -\mu + \sigma \Phi^{-1}(1 - \alpha)$$

Donde $\Phi^{-1}(\cdot)$ es la distribución de probabilidad Normal inversa.

Para la distribución Log-Normal(μ, σ), el VaR_α viene dado por la formula *cerrada*:

$$VaR_\alpha = -\exp(\mu + \sigma \Phi^{-1}(1 - \alpha))$$

Donde $\Phi^{-1}(\cdot)$ es la distribución de probabilidad Normal inversa.

Y como último ejemplo, para la distribución de Pareto (δ, θ)⁷ la formula quedaría

$$VaR_\alpha = \frac{-\theta}{\delta \sqrt{\alpha}}$$

En términos generales, el VaR paramétrico es la función cuantil de las distribuciones de probabilidad. Cuando la distribución es continua, la función cuantil es la función de distribución inversa.

B) El VaR por simulación histórica

Con el VaR por simulación histórica, a diferencia del paramétrico, no es necesario asumir una distribución de probabilidad para los factores de riesgo ya que utiliza datos históricos. Esta técnica consiste en considerar que cualquier escenario pasado podría ser un escenario futuro. Por tanto, se toma la serie histórica (pudiéndola ordenar), por ejemplo de precios, de una variable para construir una serie de precios hipotéticos con la cual se obtendría un vector de pérdidas simuladas sobre la variable actual. A partir de estos valores finales se podría determinar el percentil asociado al intervalo de confianza deseado y hallar el VaR de la variable.

Tiene el problema de necesitar datos históricos suficientes. En ocasiones, dependiendo de la serie, se requieren datos históricos de más de cuatro años (un requerimiento que no siempre se puede cumplir). Además asume un comportamiento futuro igual al pasado de la variable. Este es un supuesto que puede no ser real y que puede ser muy *costoso*, especialmente si incluye *cambios de régimen o de ciclos económicos*. Un problema que se simplifica con respecto al método paramétrico es el de las correlaciones ya que vienen implícitas en la historia y no hace falta calcularlas.

⁷ En el anexo: Probabilidad y Cálculo, se explican todas las distribuciones expuestas en este capítulo y posteriores.

C) El VaR por simulación Montecarlo

El método Montecarlo es un método cuantitativo que busca representar la realidad a través de un modelo matemático. En concreto consiste en simular aleatoriamente los factores de riesgo (precios en nuestro caso) por medio de un *proceso estocástico*. Realizadas nuestras simulaciones, *obtenemos su distribución de probabilidad* y con ella los estadísticos o medidas que necesitamos calcular.

Los métodos de simulación Montecarlo frecuentemente son más poderosos y flexibles para aproximar el VaR, puesto que no suponen distribución conocida de los rendimientos y consideran fluctuaciones aleatorias que se pudiesen dar en el mercado. Además, si el VaR es obtenido simulando la distribución, esta distribución puede generar una gran variedad de estadísticos de gran uso: intervalos de confianza, valores esperados de pérdida así como curtosis y asimetría. Estos estadísticos dan una idea de la precisión de los resultados.

Sin embargo, los procedimientos de simulación Montecarlo tienden a ser intensivos en términos del tiempo de cálculo y recursos humanos necesarios para obtenerlos. Los cálculos toman tiempo y llegan a ser exitosos sólo si se cuenta con los recursos computacionales necesarios. Actualmente esto no es gran problema porque hay mucho poder de cómputo y es barato. La mayor crítica que tiene el método de Montecarlo es el **riesgo de modelo**. Se puede definir el riesgo de modelo como *el conjunto de posibles consecuencias adversas derivadas de decisiones basadas en resultados incorrectos de modelos o de su uso inapropiado*⁸.

En este trabajo utilizaremos este método. Por lo que **lo primero que necesitamos es un proceso estocástico**. De esto se encarga el siguiente capítulo. Concluyamos el tema con el cálculo del TailVar.

1.3.2. Cálculo del TailVaR

Ante los problemas de no aditividad del VaR y su ineficacia en pérdidas extremas, aparece el TailVar, que es el *promedio* del nivel de pérdida (en valor actual), *condicionado* a exceder al VaR. La diferencia entre ES y ETL, es que ES con pérdidas relativas (%) y ETL es con pérdidas absolutas. El TailVar/ES/ETL posee mucho más información que el VaR y es una de las medidas de riesgo coherente más utilizadas. Observemos que de la definición del TVaR se deduce que para su cálculo es necesario haber obtenido antes el VaR. Añadimos otra forma de calcularlo:

En términos matemáticos podemos exponer su definición, conservando la notación anterior:

$$VaR_{ht,\alpha} = -x_\alpha$$

$$TVaR_\alpha \equiv ETL_\alpha(X) := -E(X|X < x_\alpha) = -\frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{x_\alpha} xf(x)dx = -\frac{1}{\alpha} \int_\alpha^1 q(x)dx$$

Donde $q(x)$ denota la *función cuantil*. Dado que el ETL es una medida coherente, esté es una medida preferida ante el VaR, aunque su cálculo es un poco más amplio que el mismo VaR.

⁸ Se puede ampliar en *Model Risk Management. Aspectos cuantitativos y cualitativos y la gestión del riesgo de Modelo* (2014). Informe de Management Solutions.

Tiene varias fórmulas cerradas cuando los factores de riesgo se distribuyen con distribuciones de probabilidad conocidas. Para la distribución Normal(μ, σ), el $TVaR_\alpha$ viene dado por la formula *cerrada*:

$$TVaR_\alpha = -\mu + \frac{\sigma}{\alpha} \phi\left(\frac{VaR_\alpha - \mu}{\sigma}\right)$$

Donde $\phi(\cdot)$ es la distribución de densidad Normal.

Para la distribución Log-Normal(μ, σ), el VaR_α viene dado por la formula *cerrada*:

$$TVaR_\alpha = -\frac{e^{\mu+\sigma^2}}{1-\alpha} \left[1 - \Phi\left(\frac{\ln(VaR_\alpha) - \mu - \sigma^2}{\sigma}\right) \right]$$

Donde $\Phi(\cdot)$ es la distribución de probabilidad Normal.

Y como último ejemplo, para la distribución de Pareto (δ, θ), utilizando la versión de la cuantil, la formula quedaría

$$TVaR_\alpha = -\frac{\theta \left(1 - \sqrt[\delta]{\alpha^{\delta-1}}\right)}{(1-\alpha)(\delta-1)}$$

Que ya que se define como ES, es una perdida relativa (%).

Algunas ventajas del TailVaR son las siguientes:

- $TVaR_\alpha > VaR_\alpha$
- Además de ser una medida coherente, es aplicable a distribuciones de pérdida no simétricas. Aún para distribuciones no normales, el TailVaR es fácil de controlar y optimizar.
- Es convexa, lo que permite garantizar la existencia de un único óptimo global y local, y simultáneamente se estaría minimizando el VaR.

1.4. Backtesting

Backtesting es un procedimiento estadístico por el cual las pérdidas y ganancias son comparadas sistemáticamente con las estimaciones del VaR calculado. Por ejemplo, si el intervalo de confianza para calcular el VaR es 99%, entonces esperamos que ocurran *excepciones* cada 100 días en promedio. Los modelos VaR son útiles si y solo si tienen cierta exactitud en el momento de estimar riesgo:

"VaR is only as good as its backtest. When someone shows me a VaR number, I don't ask how it is computed, I ask to see the backtest."

(Brown, 2008, p.20)

Existen varias metodologías para proceder con el backtest. Entre ellas las incondicionales y condicionales.

- Son considerados test incondicionales cuando se estudia estadísticamente las excepciones sobre un periodo de tiempo. Se incluyen dentro de esta categoría los test con un enfoque binomial, el *Proportion of Failures* - test de Kupiec (1995), y el enfoque *traffic light* de Basilea (1996).
- Son considerados test condicionales cuando también se estudia no solo la frecuencia de las excepciones sino el *cuándo ocurren*. A veces las excepciones pueden estar relacionadas entre sí. Para ello existen test de independencia entre las excepciones. En esta categoría se incluyen el *test de Christoffersen* (1998) y el test Haas-Kupiec (2001).

En nuestro análisis utilizaremos los test incondicionales de Kupiec-POF, Kupiec-TUFF y el condicional de Kupiec Mixto. A continuación expondremos de forma resumida cada uno de los test.

1.4.1. Test incondicionales

El test de exactitud más común del VaR es contar los días (o periodo, dependiendo de la unidad de tiempo utilizada) cuando las pérdidas exceden las estimaciones del VaR. Si el número de excepciones son menores de las esperadas, el VaR *sobreestima* los riesgos. Por el contrario si existen muchas excepciones, puede producirse por *subestimación* de los riesgos. Lógicamente, es muy poco común el caso en que las excepciones sean exactamente las que sugiere el intervalo de confianza.

Si denotamos por n el número de excepciones y por T el número total de observaciones, podemos definir el *ratio de fallo* $\varphi := \frac{n}{T}$. La situación ideal sería cuando $\varphi = \alpha$, es decir, que el ratio de fallo sea justo igual al nivel de significación. Dado que se puede establecer que un día sea una excepción o no, se puede modelizar las excepciones con una distribución de probabilidad binomial:

$$f(n) = \binom{T}{n} \alpha^n (1 - \alpha)^{T-n}$$

De esta forma utilizando la distribución binomial podemos examinar la exactitud del VaR.

Test de Kupiec

El POF-test de Kupiec es el más conocido y utilizado de los tests de backtesting del VaR. Bajo la hipótesis nula el modelo tendría las excepciones (que siguen una distribución binomial) correctas y el VaR sería correcto. La idea es buscar en donde $\eta = \alpha$ o no lo es. El test utiliza también un ratio de verosimilitud (ya que es una de los ratios más poderosos de su clase, Jorion, 2001). El test se calcula de la siguiente manera:

$$(3) \quad K = -2 \ln \left[\frac{\alpha^n (1 - \alpha)^{T-n}}{\varphi^n (1 - \varphi)^{T-n}} \right]$$

Bajo la hipótesis nula, $K \sim \chi^2_{1,\alpha}$ es decir, que el estadístico se distribuye con una distribución de probabilidad Chi Cuadrado con un *grado de libertad* con α de nivel de significación.

El test de Kupiec posee varias limitaciones:

- Es estadísticamente débil, poco poder de test
- Considera solo la frecuencia de las pérdidas y no cuando ocurren, por lo que puede fallar en rechazar un modelo con excepciones agrupadas.

El test de Kupiec tiene una variante que toma en cuenta cuando ocurre la primera excepción. Si v es el tiempo que se tarda en que ocurra la primera excepción, podemos definir el *time until first failure* test de Kupiec:

$$K_{tuff} = -2 \ln \left[\frac{\alpha(1 - \alpha)^{v-1}}{v^{-1}(v - 1)^{v-1}} \right] \sim \chi^2_{1,\alpha}$$

Sin embargo sigue siendo estadísticamente débil.

Enfoque *traffic light* de Basilea

El backtesting regulatorio es llevado a cabo comparando las estimaciones del VaR al 99% en los últimos 250 días. La siguiente tabla establece las *zonas* establecidas por Basilea, utilizando una distribución binomial y donde se indica el número de excepciones que hay por zona. Las tres zonas son las siguientes:

- *Green zone*. El modelo que caiga en esta zona indica que es un buen modelo y el VaR en ese periodo y a ese nivel de confianza produce estimaciones adecuadas. Bajo un enfoque binomial, para caer en esta zona se tiene que tener de 0 a 4 excepciones en un periodo de 250 días.
- *Yellow zone*. El modelo que caiga en esta zona indica que posiblemente sea un modelo inadecuado pero que también puede ser un modelo adecuado. Un VaR que caiga en esta zona se debería revisar o realizar otro tipo de Backtesting.
- *Red zone*. El modelo que caiga en esta zona indica que el modelo es totalmente inadecuado y que las estimaciones del VaR son totalmente incorrectas. (Ver **Tabla 1.2**).

Se muestra a continuación el enfoque *traffic light* de Basilea.

Tabla 1.2. Enfoque <i>traffic light</i> de Basilea con una distribución binomial ($\alpha, \sqrt{\alpha(1-\alpha)}$) al 99% de intervalo de confianza y 250 días		
Zona	Numero de excepciones	Probabilidad acumulada (distribución binomial)
Verde	0	8,11%
	1	28,58%
	2	54,32%
	3	75,81%
	4	89,22%
Amarilla	5	95,88%
	6	98,63%
	7	99,60%
	8	99,89%
	9	99,97%
Roja	10	99,99%

Fuente: Basle Committee of Banking Supervision (1996), *Supervisory Framework For The Use of "Backtesting" in Conjunction With The Internal Models Approach to Market Risk Capital Requirements*.

Sin embargo, esta tabla no nos serviría dado que nuestro horizonte temporal es mucho mayor a 250 días. Para construir una tabla más adecuada vamos a utilizar el **teorema de Moivre**, por el cual, la distribución binomial con media α y desviación típica $\sqrt{\alpha(1-\alpha)}$ tiende a una distribución Normal de media $T \cdot \alpha$ y desviación típica $\sqrt{T \cdot \alpha(1-\alpha)}$ mientras T se hace cada vez más grande. De esta forma hemos construido la **Tabla 1.3.**, utilizando los mismos percentiles que Basilea y su intervalo de confianza, pero con 2000 días:

Tabla 1.3. Enfoque <i>traffic light</i> con una distribución Normal($T\alpha, \sqrt{T\alpha(1-\alpha)}$) al 99% de intervalo de confianza y 2000 días		
Zona	Numero de excepciones	Probabilidad acumulada (distribución Normal)
Verde	14	8,11%
	17	28,58%
	20	54,32%
	23	75,81%
	26	89,22%
Amarilla	28	95,88%
	30	98,63%
	32	99,60%
	34	99,89%
	36	99,97%
Roja	37	99,99%

Fuente: Elaboración Propia

Este enfoque, sin embargo, tal como expone Haas(2001), no es enfoque apropiado ya que, al igual que los test condicionales, no consideran *cundo* ocurren las excepciones y, además, el enfoque regulatorio tiene problemas para distinguir entre modelos adecuados o no adecuados. Dado esta situación, esta metodología solo será utilizada de forma *preliminar*.

1.4.2. Test condicionales

Los test anteriores tienen la limitación de que solo consideran el número de excepciones que ocurren pero no cuando. En teoría, las excepciones deben estar no agrupadas y son independientes entre sí y los modelos VaR adecuados reaccionan a favor de este efecto y los modelos VaR inadecuados tienden a producir excepciones consecutivas (Finger, 2005).

Es muy deseable que el VaR pueda detectar la agrupación de las excepciones ya que las grandes pérdidas suelen ocurrir rápidamente y por eventos *desastrosos* (como un Cisne Negro⁹). Los test condicionales intentan incorporar estos problemas a sus estadísticos.

Test de Cristoffersen

Es el test condicional más utilizado y conocido. Al igual que Kupiec, utiliza un ratio de verosimilitud, pero incluye un estadístico separado para las excepciones. En el que examina si las excepciones de un día dependen del día anterior. El procedimiento para el test es el siguiente:

- 1) Se define una función indicador con el valor de 1 si el VaR es excedido (el día es una excepción) y 0 si el VaR no es excedido (el día no es una excepción).

$$I_t = \begin{cases} 1 & \text{si } n_t \text{ es una excepción} \\ 0 & \text{si } n_t \text{ no es una excepción} \end{cases}$$

- 2) Para facilitar el cómputo se puede construir la siguiente tabla de contingencia. Donde n_{ij} indica el número de días en que la condición establecida en el indicador se cumple y que además se haya ocurrido la condición en el día anterior:

	$I_{t-1} = 0$	$I_{t-1} = 1$	
$I_t = 0$	n_{00}	n_{10}	$n_{00} + n_{10}$
$I_t = 1$	n_{01}	n_{11}	$n_{01} + n_{11}$
	$n_{00} + n_{01}$	$n_{10} + n_{11}$	T

- 3) Se calculan las probabilidades de observar una excepción condicional en el estado i en el día anterior:

$$\pi_0 = \frac{n_{01}}{n_{00} + n_{01}}, \pi_1 = \frac{n_{11}}{n_{10} + n_{11}}, \pi = \frac{n_{01} + n_{11}}{T}$$

- 4) Se calcula el ratio de verosimilitud:

$$(4) \quad C = -2 \ln \left[\frac{(1 - \pi)^{n_{00} + n_{10}} \pi^{n_{01} + n_{11}}}{(1 - \pi_0)^{n_{00}} \pi_0^{n_{01}} (1 - \pi_1)^{n_{10}} \pi_1^{n_{11}}} \right] \sim \chi_1^2$$

Por último, se puede calcular

$$(5) \quad KC := K + C \sim \chi_{2,\alpha}^2$$

Este test no lo implementaremos, pero es necesario para el entendimiento del siguiente test.

⁹ Concepto que definiremos posteriormente

Test mixto de Kupiec

Una de las principales limitaciones del test de Cristoffersen es que solo examina la dependencia de las excepciones entre dos días sucesivos. Y además estudios empíricos (Campbell, 2005) demostraron que el test de Cristoffersen es inadecuado para capturar las dependencias entre excepciones. Haas (2001), siguiendo la idea de Cristoffersen y de Kupiec, elaboro un test en el cual amplía el intervalo de excepciones. Podemos generalizar el TUFF test de Kupiec a cualquier excepción (no solo la primera):

$$K_{tuff_i} = -2 \ln \left[\frac{\alpha(1-\alpha)^{v_i-1}}{v_i^{-1}(v_i-1)^{v_i-1}} \right]$$

Donde v_i es el tiempo entre excepción i e $i-1$. Con n excepciones, el estadístico para la independencia entre excepciones se formula como:

$$(6) \quad H = \sum_{i=2}^n \left\{ -2 \ln \left[\frac{\alpha(1-\alpha)^{v_i-1}}{v_i^{-1}(v_i-1)^{v_i-1}} \right] \right\} - 2 \ln \left[\frac{\alpha(1-\alpha)^{v-1}}{v^{-1}(v-1)^{v-1}} \right] \sim \chi_{n,\alpha}^2$$

E igual que antes, podemos elaborar un test donde sumemos los estadísticos calculados:

$$(7) \quad KH := K + H \sim \chi_{n+1,\alpha}^2$$

1.4.3. Backtesting del TVaR

En todo el análisis anterior hemos hablado del VaR pero y el análisis para el TVaR: ¿el TVaR puede ser sometido a un *backtesting*? Para responder a esa pregunta hace falta repasar la bibliografía al respecto y ahí está la limitación: hay muy pocos trabajos de *Backtesting* del TVaR, comparado con toda bibliografía del *backtesting* del VaR. Sólo algunos trabajos como Kerkhof y Melenberg (2004) o Angelidis y Degiannakis (2006), son destacables. En este trabajo seguiremos la metodología de C. Acerbi y B. Szekely (2014).

¿Por qué no hay literatura al respecto? Un problema con la *elicitabilidad*¹⁰ (del inglés *elicibility*), ya que se asociaba posibilidad de hacer un *backtesting* con la *elicitabilidad*. Y el TVaR es *elicitable* bajo ciertas condiciones (ver Acerbi y Szekely). Dejando a un lado toda la documentación sobre *elicitabilidad* y demás conceptos, vamos a proceder directamente a explicar los test que se propusieron para realizar un *backtesting* al TVaR.

En Acerbi y Szekely (2014) se explican 4 test, sin embargo, por simplificar usaremos solo los primeros dos:

$$(8) \quad Z_1(Y) = 1 + \frac{1}{n} \sum_{t=1}^T \frac{y_t I_t}{TVaR_\alpha}$$

$$(9) \quad Z_2(Y) = 1 + \sum_{t=1}^T \frac{y_t I_t}{T \cdot \alpha \cdot TVaR_\alpha}$$

Donde I_t es la función indicador ya definida para el test de Cristoffersen.

¹⁰ *Elicitabilidad* se define como la posibilidad de comparar las métricas de riesgo en el que se ha utilizado datos históricos.

Ambos test siguen las hipótesis:

$$H_0: F_t = P_t$$

$$H_1: TVaR_{\alpha}^F > TVaR_{\alpha}^P$$

Donde F_t es la distribución de probabilidad real desconocida del factor de riesgo y P_t es la distribución de probabilidad “predicha” del modelo del factor de riesgo (y_t). $Z_1(Y)$ es invariante ante un exceso (agrupación) de excepciones y $Z_2(Y)$ detecta exceso de excepciones.

- El test 1 (Z_1), está *subordinado* al VaR, por lo que, en principio, para que el test de resultados apropiados el VaR tiene que haber estado bien calculado. Una correcta estimación del TVaR dará como resultado valores en este test cercanos a 0.
- El test 2 (Z_2) comprueba simultáneamente si el número de excepciones son correctos y si el cálculo del TVaR es exacto (el test 1 solo comprueba lo primero). Básicamente la diferencia entre un test y el otro es la manera de sumar las excepciones.

Ahora hemos de exponer la limitación que tienen estos test para el *Backtesting* del TVaR: el nivel de significación del test o p-valor. Ya que la hipótesis no exige una distribución específica, para cualquier distribución de probabilidad habría que calcular su p-valor mediante una simulación de Montecarlo. Esto no comporta ningún problema cuando la distribución es conocida, pero si requiere recursos computacionales que puede ser muy engorroso a la hora de auditar¹¹. Para ello se utilizan una tabla (Tabla 1.4), que se calcularon simulando con una distribución de probabilidad de *t de Student* con distintos grados de libertad (n):

Tabla 1.4.	Valores críticos para un <i>backtesting</i> del TVaR				
	Test 1		Test 2		
α	5%	10%	0.01%	5%	10%
$n = 3$	-0,43	-0,27	-4,4	-0,82	-0,59
$n = 5$	-0,26	-0,17	-2	-0,74	-0,55
$n = 10$	-0,17	-0,12	-1,9	-0,71	-0,53
$n = 100$	-0,12	-0,08	-1,8	-0,7	-0,53
Normal	-0,11	-0,08	-1,8	-0,7	-0,53
Fuente: Acerbi					

El test 2 tiene unos valores críticos que son invariantes con respecto a las propiedades de la cola de la distribución. De esta forma, el test 2 proporciona bastante estabilidad y es el que más se utiliza en el momento de hacer un *backtesting* al TVaR.

Estos dos test son los que implementaremos en nuestro modelo.

¹¹ Introducimos en este momento conceptos regulatorios ya que estos test se realizaron con el objetivo de auditar el cálculo del TVaR con el objetivo de *presentarlo* al comité de Basilea. En 2013, dicho comité remplazo el VaR al 1% por un TVaR de 2,5%.

Capítulo 2: El Movimiento Browniano Geométrico

2.1. Introducción

Este capítulo tiene como objetivo introducir el Movimiento Browniano. El movimiento browniano es un proceso estocástico totalmente aleatorio. Estadísticamente, el movimiento browniano se comporta de forma muy similar a la distribución Normal. Y, matemáticamente el movimiento browniano geométrico es una ecuación diferencial estocástica que se deriva gracias al lema de Itô. En este tema explicaremos las herramientas necesarias para derivar dicho movimiento browniano geométrico y varios conceptos relacionados necesarios para un conocimiento apropiado del movimiento. La importancia del movimiento browniano radica en el hecho de que se puede utilizar para modelizar el comportamiento de los precios *financieros*.

2.2. El movimiento browniano

2.2.1. Definición e historia

El **movimiento browniano estándar** $B(t)$, también conocido con el nombre de *proceso de Wiener* (por N. Wiener, 1894-1964, matemático norteamericano), es un **proceso estocástico** que sirve como modelo básico para la descripción de un efecto «totalmente aleatorio» o «ruido puro». Fue descubierto o descrito por primera vez en 1828 por el botánico R. Brown (1773-1857) al observar cómo se suspendían las partículas de polen en un fluido. Además el movimiento browniano fue investigado por muchos físicos entre ellos Einstein (1879-1955) a comienzos del siglo XX.

A L. Bachelier (1870 -1946), matemático francés, se le atribuye haber sido el primero en modelizar variables financieras con un el movimiento browniano en su tesis *La teoría de la especulación* (1900). Su tesis consistió en el uso del movimiento browniano para evaluar las Opciones financieras. Es el primer escrito histórico en el que se utilizan los procesos estocásticos en tiempo continuo para el estudio de la economía. Parece que Einstein en 1905, con su famoso *paper El movimiento browniano*, desconocía la labor de Bachelier.

2.2.2. Caracterización del Movimiento Browniano

La familia de variables aleatorias $B(t)$ (donde t representa el tiempo y es un parámetro) está definido en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ donde Ω es el *espacio muestral*, $\mathcal{F}$ un *conjunto de σ -álgebra sobre Ω* y P una medida de probabilidad¹. El *conjunto σ de Borel* es el ejemplo más importante de los conjuntos σ que es utilizado en la teoría de funciones y de probabilidad. Ahora expondremos brevemente las propiedades del movimiento browniano.

Como propiedad más importante tenemos que $dB \sim \sqrt{dt}N(0,1) = N(0, \sqrt{dt})$, esto quiere decir que los cambios infinitesimales en el movimiento browniano se distribuyen con una distribución Normal de media 0 y desviación típica $\sqrt{dt}$.

¹Ver anexo: Probabilidad y Cálculo

Entre las propiedades más importantes:

- **Trayectoria continua.** Todas las trayectorias posibles del movimiento browniano son funciones continuas (**no tienen saltos**), pero no son diferenciables en ningún punto.
- El desplazamiento totalmente aleatorio en el intervalo $t - s$, y, consecuentemente, el desplazamiento del movimiento browniano $B(t) - B(s) \forall t > s$ es independiente del pasado y además $B(t) - B(s) \sim N(0, \sqrt{t - s})$. Es decir, **el movimiento browniano posee incrementos gaussianos independientes**.
- Otra propiedad **muy importante** es la **invariancia del movimiento browniano ante traslaciones**, es decir, invariancia ante la escala.
- Si el proceso estocástico empieza en x , $B(0) = x$, entonces $B(t) \sim N(x, \sqrt{t})$, siendo más técnicos, $P[B(t + s) | B(s) = x] = N(x, \sqrt{t})$, la **función de transición** $P(y, t, x, s)$ es la función de distribución de esta función, es decir, $P(y, t, x, s) := P[B(t + s) \leq y | B(s) = x] \equiv P_x[B(t) \leq y]$ y su función de densidad es

$$p_t(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2t}}$$

Generalizando esta idea con incrementos, tenemos una función de distribución más completa:

$$P_x[\{B(t_i) \leq x_i\}_{i=1}^n] = \prod_{i=1}^n \int_{-\infty}^{x_i} p_{t_i - t_{i-1}}(y_{i-1}, y_i) dy_i$$

De hecho, este método, a través del *teorema de extensión de Kolmogorov*, es una de las maneras menos complejas de construir los movimientos brownianos (ver Oksendal B., 2000).

Por último, la **propiedad de Markov** establece que si conocemos el comportamiento del proceso en el presente entonces el comportamiento futuro del proceso es independiente del pasado. Técnicamente tenemos la siguiente definición.

El proceso $X(t)$ es un **proceso de Markov** si para cualquier t y s , la distribución condicional de $X(t + s)$ dado $\mathcal{F}_t$ (el σ -álgebra o conjunto generado por el proceso hasta t , coloquialmente, la información disponible hasta t) es la misma que la distribución condicional de $X(t + s)$ dado $X(t)$, i.e.,: $P[X(t + s) \leq y | \mathcal{F}_t] = P[X(t + s) \leq y | X(t)]$. Se puede demostrar² que **los movimientos brownianos poseen la propiedad de Markov**.

Consideramos necesario introducir en este momento el concepto de filtración ya que hemos definido $\mathcal{F}_t$ como la información disponible hasta t y el concepto de *filtración* especifica cómo la información es revelada en el tiempo. Una **filtración** $\mathbb{F}$ es una familia $\{\mathcal{F}_t\}$ de σ -álgebra **crecientes en** $(\Omega, \mathcal{F}_t)$, $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$. La propiedad de que la filtración es creciente se debe al hecho de que la información «no se olvida». Si añadimos la filtración a nuestro espacio de probabilidad obtenemos el cuádruple $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathbb{F})$ llamado **espacio de probabilidad filtrado**. Un proceso estocástico $X(t)$ en este espacio se llama **adaptado** si para todo t , $X(t)$ es $\mathcal{F}_t$ -medible, esto es, para cualquier t , $\mathcal{F}_t$ contiene toda la información de $X(t)$. Los **movimientos brownianos son procesos adaptados**.

² Se incluye en el anexo: demostraciones del Browniano.

Los supuestos usuales sobre las filtraciones es que son continuas hacia la derecha, formalmente:

$$\mathcal{F}_{t+} := \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s = \mathcal{F}_t$$

Interpretándose de la siguiente manera: cualquier información conocida inmediatamente después de t es también conocida en t . Observad que si $X(t)$ es un proceso adaptado a $\mathbb{F}$, entonces siempre podemos escoger una filtración continua hacia la derecha (p.ej., $\mathfrak{F}_t = \mathcal{F}_{t+} := \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s$) para la cual $X(t)$ es adaptada a $\mathfrak{F}_t$. Sigamos definiendo más clases de procesos estocásticos adaptados como el siguiente.

Un proceso estocástico $X(t)$ adaptado a la filtración $\mathbb{F}$, es una **martingala** si $E|X(t)| < \infty, \forall t$, es decir, si es *integrable* (donde $E[\cdot]$ designa el valor medio) y si $E[X(t)|\mathcal{F}_s] = X(s), \forall s < t$. Podemos apreciar la similitud entre la propiedad de Markov y las martingalas. De hecho, se puede demostrar que **los movimientos brownianos son martingalas**. El supuesto de filtraciones continuas hacia la derecha tiene muchas ventajas. Ya que, por ejemplo, nos permite asumir que las *martingalas* poseen una versión continua hacia la derecha.

Siguiendo con la idea de introducir conceptos relacionados, definiremos los siguientes.

Una variable aleatoria τ es un “**momento de parada**” de un proceso estocástico si constituye una regla para parar este proceso tal que la decisión de parar en el momento t se puede tomar solamente en base a la información disponible en el momento t . Más técnico: τ es un “momento de parada” con respecto a la filtración $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_t, \dots, \mathcal{F}_T)$ en $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ si para cada $t = 0, 1, \dots, T$ el suceso $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$. El supuesto de continuidad hacia la derecha de las filtraciones es esencial para la comprensión de los *momentos de salida* o *momentos cumbres*.

Si $X(t)$ es un proceso aleatorio en $\Omega = \mathbb{R}$ (conjunto de números reales, podemos estar por ejemplo en un *espacio de Borel*) adaptado a $\mathbb{F}$, entonces un **momento cumbre** del conjunto A es definido como $T_A = \inf\{t \geq 0: X(t) \in A\}$ y el (primer) **momento de salida** de un conjunto B es definido como $\tau_B = \inf\{t \geq 0: X(t) \notin B\}$, donde la función $\inf\{\cdot\}$ indica el *ínfimo* del conjunto. Por teorema, cuando la filtración es continua hacia la derecha y el conjunto B es cerrado y A es abierto, τ_B y T_A son momentos de parada.

Finalizando, podemos relacionar los momentos de parada con procesos de Markov, mediante la **propiedad fuerte de Markov**. Los movimientos brownianos tienen la propiedad fuerte de Markov si para cualquier momento de parada τ la distribución condicional de $B(t + \tau), t \geq 0$, dado $\mathcal{F}_\tau$ es $P(B(\tau))$, es decir $P[B(t + \tau) \leq y | \mathcal{F}_\tau] = P[B(t + \tau) \leq y | B(\tau)]$.

Por último, es interesante introducir que la probabilidad de que el movimiento browniano iniciado en x tenga *al menos* un cero en el intervalo temporal $(0, t)$ viene dado por *la función de distribución del momento cumbre*, es decir:

$$P(B(x) \text{ tenga al menos un } 0 \text{ entre } 0 \text{ y } t) = \frac{|x|}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t \frac{du}{\sqrt{u^3} e^{\frac{x^2}{2u}}}$$

Que es la *función de distribución de la Gamma Inversa* con parámetros de forma de $\frac{1}{2}$ y escala $\frac{x^2}{2}$.

Más simple aún, se puede demostrar que esto se puede expresar de otra forma: si el intervalo es entre (a, b) , esta *ley* queda simplificada a:

$$P(B(x) \text{ tenga al menos un } 0 \text{ entre } a \text{ y } b) = \frac{2}{\pi} \arccos \left(\sqrt{\frac{a}{b}} \right)$$

Para completar nuestro análisis, lo único que nos falta es una representación gráfica del movimiento browniano (Figura.2.1). Para ello, vamos a simularlo con Matlab, exponiendo el código que se puede utilizar para simular movimientos brownianos en el anexo de códigos. Aunque aquí expondremos la idea del algoritmo:

La manera más rápida de simular el movimiento browniano es con la propiedad ya descrita:

$$dB \sim \sqrt{dt} N(0,1)$$

Metiendo esta operación en un **bucle** y con una condición inicial ya podemos simular el movimiento browniano. Por ejemplo en Matlab con escribir lo siguiente, obtenemos la Figura.2.1

Algoritmo para simular un movimiento browniano

Establecer: N = número de simulaciones, T =horizonte temporal; $dt = T/N$

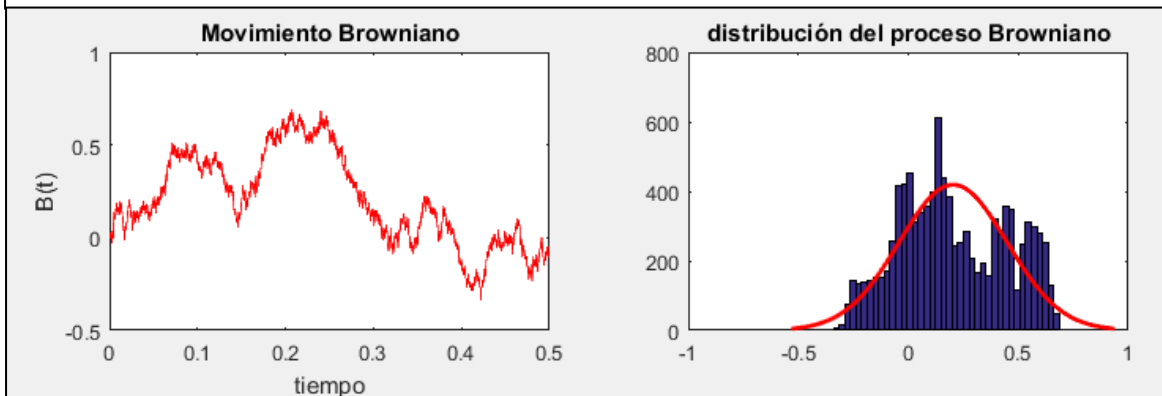
El bucle (con j como *iniciador o indicador*) desde 2 hasta N

$$dB(j) = \sqrt{dt} N(0,1)$$

$$B(j) = B(j-1) + dB(j)$$

Fin del bucle

Figura 2.1. Representación gráfica de un movimiento Browniano y la distribución Normal como su distribución asociada



Fuente: Elaboración propia con Matlab

2.3. Del movimiento browniano al movimiento browniano geométrico

Consideremos ahora el intervalo temporal $(t, t + dt)$ durante el cual el precio del subyacente S varía de S a $S + dS$. Consideremos que los rendimientos $\frac{dS}{S}$ vienen determinados por la suma de dos componentes. Un término determinista que viene dado por la deriva μ y que representa la tasa de crecimiento exponencial del subyacente. Tenemos, pues, sin considerar el otro término, que $\frac{dS}{S} = \mu dt$ o si tenemos en cuenta que la derivada de un logaritmo era precisamente ese ratio, podemos expresar $d \ln S = \mu dt$, dado que es una ecuación diferencial, si integramos de 0 a t obtenemos un crecimiento exponencial del precio subyacente: $S(t) = S(0)e^{\mu t}$.

El otro término es estocástico y considera aspectos aleatorios de la evolución, este término es llamado *volatilidad* y está compuesto por un término constante σ y multiplicado por la variación de un movimiento browniano $dB(t)$ (de media 0 y varianza dt). Teniendo pues:

$$(1) \quad \frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dB(t) \Rightarrow dS = \mu dt S + \sigma dB(t) S \Rightarrow dS(t) = \mu dt S(t) + \sigma dB(t) S(t)$$

Proceso que se llama *browniano geométrico*. Que tiene la particularidad de tener *volatilidad* proporcional al precio.

2.3.1. El Lema de Itô

Esta ecuación es una **ecuación diferencial estocástica** y lo que le hace especial y distinta a todas las ecuaciones es el componente browniano y es precisamente este componente el que dificulta los cálculos ya que su solución ya no se puede obtener mediante las reglas de cálculo «tradicionales» sino que necesita herramientas más potentes³. A mediados del siglo XX, Kiyoshi Itô (1915-2008), matemático japonés, desarrollo esta herramienta: el **lema de Itô**, una versión estocástica de la regla de la cadena.

No es el objetivo de este trabajo exponer cálculo estocástico, por lo que nos limitaremos a proponer ciertos aspectos intuitivos sobre esta ecuación. Lo primero que haremos es proponer el proceso:

$$dX(t) = a(t, X(t))dt + b(t, X(t))dB(t)$$

Que es llamado **proceso de Itô**, donde la deriva y la volatilidad dependen tanto del tiempo como del propio proceso estocástico. Al ser una ecuación diferencial, su solución se obtiene integrando:

$$X(t) = X(0) + \int_0^t a(s, X(s)) ds + \int_0^t b(\tau, X(\tau)) dB(\tau)$$

En la primera componente no hay más que un problema de integración con coeficientes variables resoluble con varias metodologías. Sin embargo el segundo componente es lo difícil del problema y donde una nueva integral fue definida: es la **integral de Itô**.

³ Ver §5.2., Franke, J., Härdle, W., F., Hafner, C., M., (2015), *Statistics of Financial Markets. An Introduction. Fourth Edition. Springer Series.*

Lo que necesitamos para derivar la *fórmula de Itô*, es considerar que un proceso que depende de dos variables se puede calcular su variación de la siguiente manera:

$$dF(X, t) = \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial x} dX(t) \equiv F_t dt + F_x dX = (F_t + a(\cdot)F_x)dt + b(\cdot)F_x dB(t)$$

Donde para simplificar hemos hecho el cambio de nomenclatura $\frac{\partial F}{\partial t} \equiv F_t$ (y de orden dos sería $\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \equiv F_{tt}$). Sin embargo esta fórmula está incompleta ya que faltan los términos de mayor grado. Para ello tenemos la fórmula de Taylor, si $X(0) = X_0$ entonces el desarrollo hasta el grado 2 quedaría:

$$F(X, t) = F(X_0, 0) + F_t dt + F_x dX + \frac{1}{2} [F_{xx}(dX)^2 + 2F_{xt}dXdt + F_{tt}(dt)^2] + \dots$$

Ahora lo que hacemos es seleccionar los coeficientes lineales con respecto a dX y dt . Los términos $F_{xt}dXdt$ y $F_{tt}(dt)^2$ no son lineales y de $(dX)^2 = a^2(dt)^2 + 2abdB(t)dt + b^2[dB(t)]^2$, $a^2(dt)^2$ y $2abdB(t)dt$ no son lineales, y **cuidado con el término** $[dB(t)]^2$ ya que $dB(t) \sim \sqrt{dt}N(0,1)$ entonces $[dB(t)]^2 = dt$.

Por lo que la variación del proceso de Itô viene dado por la **fórmula de Itô**:

(2)

$$dF = \left(F_t + aF_x + \frac{1}{2}b^2F_{xx} \right) dt + bF_x dB(t)$$

2.3.2. El movimiento browniano geométrico

Ahora podemos resolver nuestra ecuación (1). Si tenemos

$$dS(t) = \mu dt S(t) + \sigma dB(t) S(t)$$

Podemos aplicar la fórmula de Itô a la función logarítmica. Si $F(S) = \ln(S)$, entonces:

$$\begin{aligned} F_t &= 0 \\ F_S &= \frac{1}{S} \quad \text{y} \quad \begin{aligned} a(S(t), t) &\equiv \mu S(t) \\ b(S(t), t) &\equiv \sigma S(t) \end{aligned} \\ F_{SS} &= -\frac{1}{S^2} \end{aligned}$$

Obteniendo

(3)

$$d \ln S(t) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) dt + \sigma dB(t)$$

Que si integramos obtenemos:

(4)

$$\ln S(t) = \ln S(0) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) t + \sigma B(t)$$

Y expresándolo exponencialmente:

(5)

$$S(t) = S(0) \exp \left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) t + \sigma B(t) \right]$$

Finalmente ya que $dB \sim N(0, dt)$, entonces podemos notar que el logaritmo de los precios se distribuyen como una normal:

$$(6) \quad \ln S(t) \sim N \left[\ln S(0) + \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t, \sigma \sqrt{t} \right]$$

Confirmando que los precios, con un movimiento browniano geométrico, están log-normalmente distribuidos. Y los rendimientos logarítmicos con una distribución Normal. También podemos simular movimientos brownianos geométricos (Figura. 2.2). La manera más rápida de simular el movimiento browniano geométrico es con su ecuación diferencial. Introduciendo la ecuación diferencial en un bucle y con una condición inicial ya podemos simular el movimiento browniano. Por ejemplo en Matlab con escribir lo siguiente, obtenemos la Figura.2.2. (Ver el código para más detalles).

Algoritmo para simular un movimiento browniano geométrico

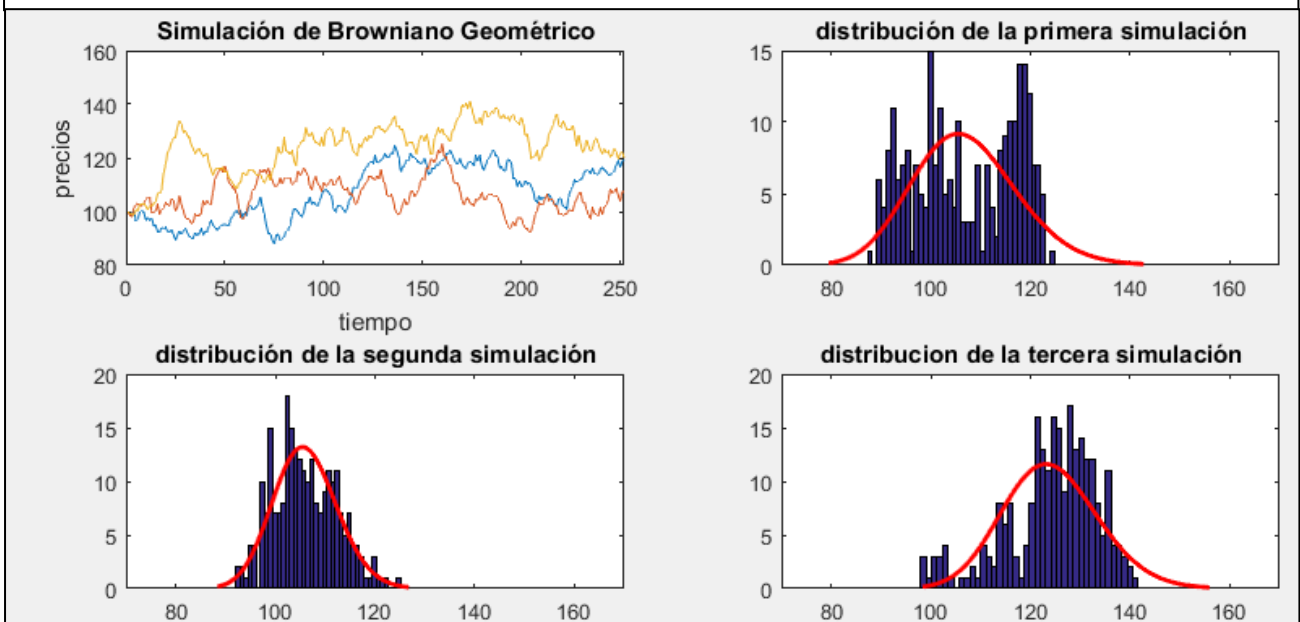
Establecer: N = número de simulaciones, T =horizonte temporal; $dt = T/N$ y los parámetros iniciales: $S(0)$, μ y σ

El bucle (con j como iniciador o indicador) desde 1 hasta N

$$S(j+1) = S(j) \exp \left[\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma \sqrt{dt} B(t) \right]$$

Fin del bucle

Figura 2.2. Varias simulaciones de movimientos brownianos geométricos y las distribuciones Log-Normales como sus distribuciones asociadas.



Fuente: Elaboración propia con Matlab

Capítulo 3: Limitaciones del movimiento Browniano geométrico para la modelización financiera. El problema de la volatilidad

3.1. El problema de la volatilidad

En el capítulo anterior definimos el movimiento browniano geométrico como proceso estocástico capaz de modelizar la evolución de los precios financieros a través de ecuación diferencial y con una distribución logarítmico-normal para precios o Normal para los rendimientos logarítmicos. Sin embargo, tal como establece el título del tema, el movimiento browniano geométrico posee ciertas limitaciones o desajustes en lo que se refiere a la modelización de precios o rendimientos financieros producido fundamentalmente por un *problema de medición de la volatilidad*: la existencia de, por ejemplo, sonrisas de volatilidad, originan el hecho de que la volatilidad sea *estocástica* (i.e., aleatoria). Junto con este problema, aparecen otros problemas o desajustes del movimiento browniano geométrico para la modelización financiera que expondremos en este tema. Por último, tal como se explicó en la estructura, en este tema introduciremos al famoso Cisne Negro.

3.1.1. Obtención de las volatilidades implícitas por el Modelo de Black-Scholes

Con el objetivo de poder obtener las *volatilidades implícitas*, necesitamos una forma de obtenerlas. El método que se utiliza es *despejarla* de la ecuación de Black-Scholes (BS). Para ello necesitamos introducir que es la ecuación de BS.

La *ecuación de BS* es una *elegante* ecuación que proporciona una formula cerrada para valorar el precio de las opciones financieras. Las opciones o derivados financieros son productos financieros cuya *estructura de pago* o *payoff* depende del comportamiento del precio de otro activo llamado *subyacente*. Entre los derivados, los menos complejos son las opciones Call y las opciones Put. El “precio” de la opción es la *prima* que debe compensar al vendedor por el hecho de que el comprador va *ejercer su derecho* (y no la obligación) sobre dicha opción, en *condiciones normales*, cuando obtenga beneficios, estos beneficios serán pérdidas para el vendedor. Ahora otra pregunta clave es ¿Cuál es el precio “correcto”, la *prima*, que se paga por una opción en el momento de su contratación? Esta prima depende en su mayoría de:

- La evolución del **precio del activo subyacente** (S_t).
- Del precio de compra o de venta: **precio de ejercicio** (Strike, K), exógeno y constante.
- Del **vencimiento del contrato** (T). Distinguimos dos situaciones: si la opción sólo se ejerce en una determinada fecha se habla de una opción **europea**. Si la opción se puede ejercer en cualquier momento, se dice que la opción es **americana**. La fórmula cerrada está hecha con opciones europeas.
- Del **tipo de interés libre de riesgo** (r). Considerada una variable exógena y constante.
- En algunas formulaciones, del **pago de dividendos**, utilizando como nivel un porcentaje sobre el subyacente (q).

Como todo modelo, utiliza **varios supuestos**:

- El primer supuesto de partida es que el mercado financiero es un *mercado eficiente* en el sentido:
 - El mercado responde instantáneamente ante nueva información del mercado. Esto quiere decir que estamos ante un modelo continuo.
 - El precio «no tiene memoria» en el sentido de que toda su información pasada está contenida en el precio presente. Esta propiedad se llama *propiedad de Markov*, y los procesos brownianos poseen esta propiedad, tal como expusimos en el capítulo 2.
 - No hay costes de transacción
 - Podemos comprar o vender cualquier cantidad del subyacente.
- $S(t)$ sigue una distinción log-normal descrita en el tema anterior.
- La volatilidad σ es constante, por tanto conocida.
- Tenemos un interés libre de riesgo $r > 0$, también constante y conocido
- Tenemos el **principio de no arbitraje**.

Este último principio es sin duda crucial ya que la idea básica es calcular el rendimiento de la función $V \equiv V(S, t)$, que nos ofrece el precio de la opción al momento t y al precio del subyacente S , mediante la *fórmula de Itô* (formulada en el tema anterior) y luego construir una cartera libre de riesgo Λ , consistente en *shares* del subyacente y de la opción. Por este último principio, se debe cumplir que $d\Lambda = r\Lambda dt$, es decir que Λ debe variar a la tasa libre de riesgo, ecuación que coincide con la de BS. Así pues, comencemos con las ecuaciones (1) y (2) del tema anterior con respecto a V :

$$dS(t) = \mu dt S(t) + \sigma S(t) dB(t)$$

$$(1) \quad dV(t) = \left(V_t + \mu S(t) V_S + \frac{1}{2} \sigma^2 S(t)^2 V_{SS} \right) dt + \sigma S(t) V_S dB(t)$$

Ahora lo que hacemos es *cubrir* el riesgo $\sigma S(t) V_S dB(t)$ construyendo una cartera de la opción y de la cantidad $-\Delta$ (vendiendo) del subyacente: $\Lambda = V(t) - \Delta S$. Si consideramos variaciones en el tiempo y Δ no cambia (este supuesto es bastante importante), la variación de la cartera viene dado por $d\Lambda = dV(t) - \Delta dS(t)$, es decir

$$d\Lambda = \left(V_t + \mu S(t) V_S + \frac{1}{2} \sigma^2 S(t)^2 V_{SS} \right) dt + \sigma S(t) V_S dB(t) - \Delta (S(t) \mu dt + \sigma S(t) dB(t))$$

O más intuitivo:

$$d\Lambda = \left(V_t + \mu S(t) V_S + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 V_{SS} - \Delta S(t) \mu \right) dt + (V_S - \Delta) \sigma S(t) dB(t)$$

Entonces si escogemos el valor $V_S = \Delta$ eliminamos el componente estocástico y la deriva, obteniendo que *la dinámica de la cartera es totalmente determinística*:

$$(2) \quad d\Lambda = \left(V_t + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 V_{SS} \right) dt$$

Es momento de utilizar nuestro principio de no arbitraje, debiéndose cumplir que

$$(3) \quad d\Lambda = \left(V_t + \frac{1}{2} \sigma^2 S(t)^2 V_{SS} \right) dt = r\Lambda dt$$

Si tenemos que $\Lambda = V - \Delta S = V - V_S S$, obtenemos nuestra formula deseada:

$$d\Lambda = V_t + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 V_{SS} - r(V(t) - V_S S(t))$$

U homogeneizada:

$$(4) \quad V_t + \frac{1}{2} \sigma^2 S(t)^2 V_{SS} + rS(t)V_S - rV(t) = 0$$

Esta es la ecuación diferencial de BS. Es una EDP: ecuación diferencial en derivadas parciales (ya que hay derivadas de más de una variable). Mas técnicos, es una *ecuación parabólica* llamada *ecuación de difusión o de calor*¹. Las ecuaciones diferenciales poseen *condiciones* que pueden ser finales, iniciales o de contorno. Dado el tipo de condiciones que tiene la ecuación, este problema se llama *problema de Cauchy de la ecuación de calor*. Y se puede resolver utilizando *método de Duhamel* y con la *solución fundamental de la ecuación de calor* que no es más que una transformada integral cuyo kernel es muy parecido al de la distribución Normal. En realidad hay varios métodos para derivar la solución de la ecuación, sin embargo el método anterior es el consideramos más interesante². Finalmente, tras resolver la EDP, la **ecuación de BS para una Call europea** viene dada por:

$$(5) \quad C(S, K, q, T, t, d_1, d_2) = S e^{q(T-t)} \Phi(d_1) - K e^{-r(T-t)} \Phi(d_2)$$

Para una **Put europea** el procedimiento es muy parecido y se llega a la fórmula:

$$(6) \quad P(K, S, q, T, t, d_1, d_2) = K e^{-r(T-t)} \Phi(-d_2) - S e^{q(T-t)} \Phi(-d_1)$$

Donde $\Phi(x)$ es la función de distribución de la $N(0,1)$: $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy$, buscado en las *tablas*. Y d_1 y d_2 representan las probabilidades de estar en entornos alcistas o bajistas:

$$d_j = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - q + (-1)^{j-1} \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t)}{\sigma \sqrt{(T - t)}} \quad j = 1, 2$$

De esta ecuación, *invirtiéndola*, se puede obtener la volatilidad implícita.

Por otro lado, hay fórmulas cerradas que intentan calcular la volatilidad ya no implícita sino en un *modelo local*, llamados **modelos de volatilidad local** (consultar *Local and Stochastic Volatility* (2012), Johannes Ruf), cuya fórmula más conocida es la desarrollada (en 1994) por B. Dupire.

¹Ver anexo: Ecuaciones diferenciales

² Ver anexo: Derivación de la Ecuación de Black-Scholes.

3.1.2. Problemas en la medición de la volatilidad

Dijimos que expusimos BS para obtener las volatilidades implícitas. Definamos rigurosamente dicho concepto. *La volatilidad implícita de una opción es el valor de la volatilidad que, introducido en la fórmula de BS, proporciona un valor teórico igual al valor de mercado de la misma.*

Comencemos primero por observar como es la relación entre el precio y la volatilidad en el modelo BS. Para ello tenemos las siguientes figuras (**Figura 3.1.**). Utilizando una herramienta Excel de DerivaGem del libro de J. Hull con la que calculamos el precio de una opción introduciéndoles los parámetros que deseamos y con el que podemos obtener un gráfico también. Como se puede notar, el comportamiento de la volatilidad en opciones ATM es lineal y en las opciones OTM e ITM es *cuasilineal*. Tal como establece el modelo como debe ser.

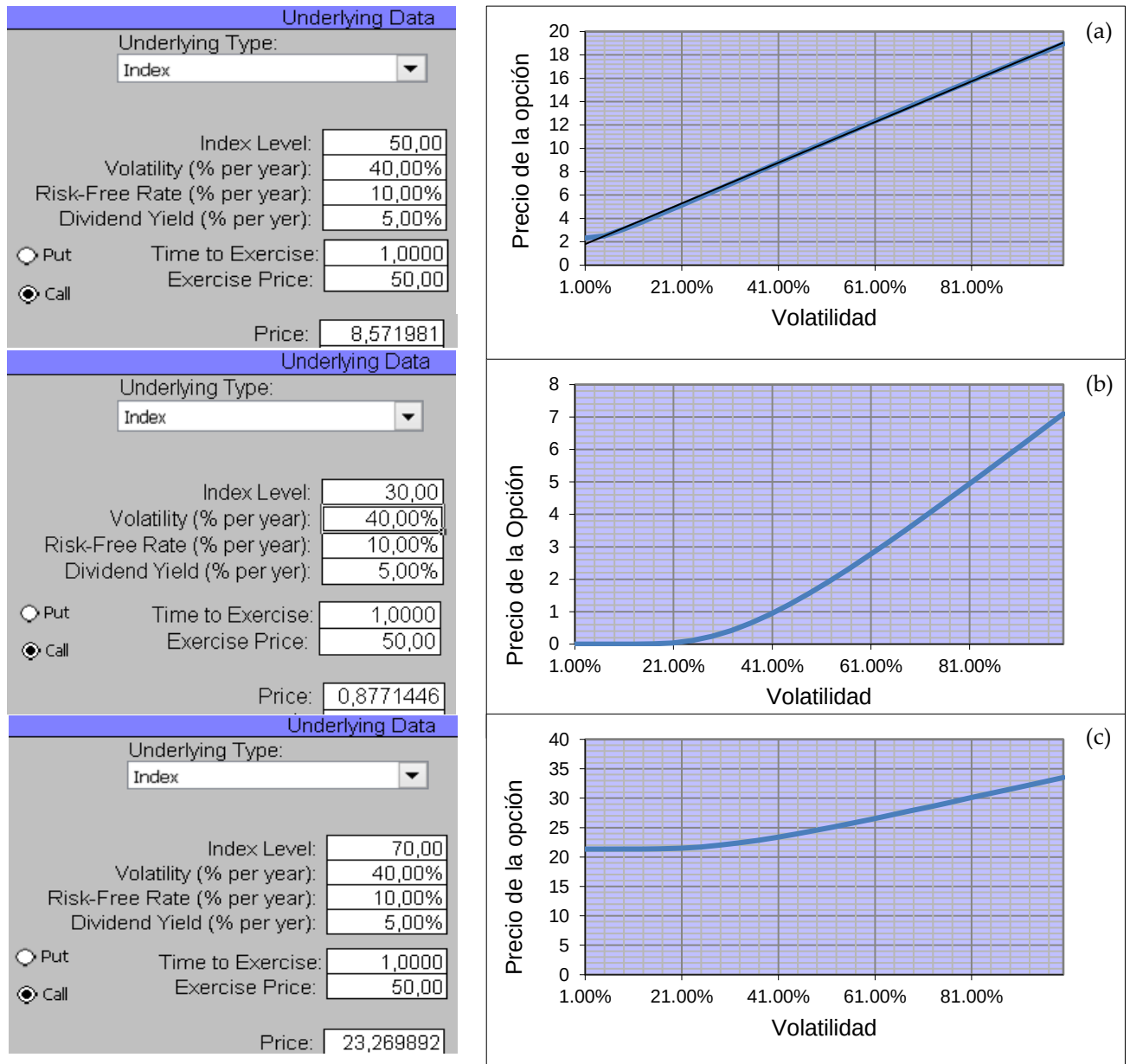
La volatilidad, a diferencia de los otros parámetros del modelo de BS, *no es observable* en el mercado y tampoco es especificada en el contrato de compra. Como consecuencia ¿cómo estimamos dicha volatilidad? Como primer acercamiento tenemos la volatilidad implícita. Otra volatilidad que podemos cuantificar y por tanto utilizar es la volatilidad histórica. Teniendo el problema de (hasta) qué periodo escogemos para calcular dicha volatilidad. Y también hay que tener en cuenta el problema de subestimar o sobrestimar la volatilidad dependiendo de los *acontecimientos que ocurren en el mercado*, que es el principal causante de los movimientos en la volatilidad.

Sin embargo, la volatilidad más importante es la actual y la futura, por lo que no hay que centrar tanto el estudio en la volatilidad histórica (que incluso puede ser irrelevante) sino en una previsión de la volatilidad con la información y acontecimientos del mercado, *tanto bueno como malo*, que es lo que influye en el movimiento de los precios. Los mercados se mueven por volatilidad, por *creencias* y expectativas que afectan a la volatilidad. A veces las *creencias y expectativas no son racionales* y de ahí que sea bastante complicado predecir la volatilidad. En este aspecto nuestra posición filosófica es escéptica.

A pesar de la popularidad de la ecuación de BS, a partir del *crash* de 1987, se empezó a evidenciar cierta divergencia cada vez más grande entre los precios de mercado y los obtenidos mediante esa fórmula. Además de esto, cuando se *“invierte”* dicha fórmula para obtener la volatilidad implícita, se encuentra que **las volatilidades implícitas tienden a estar relacionadas con el precio de ejercicio**. Esta característica contradice la fórmula de BS, ya que dado que la volatilidad es una característica del activo subyacente, todas las opciones sobre el mismo activo deberían tener la misma volatilidad implícita (ya que se ha supuesto un movimiento browniano geométrico). La relación que se observa entre la volatilidad implícita y el precio de ejercicio se ha llamado *sonrisa de volatilidad* (*volatility smile*).

Para tratar de explicar el efecto *smile* de volatilidad, Hull (2002) analiza la relación existente entre la forma de la sonrisa de volatilidad y la distribución que se asume para el valor del activo subyacente en el vencimiento. Llegando a dos conclusiones.

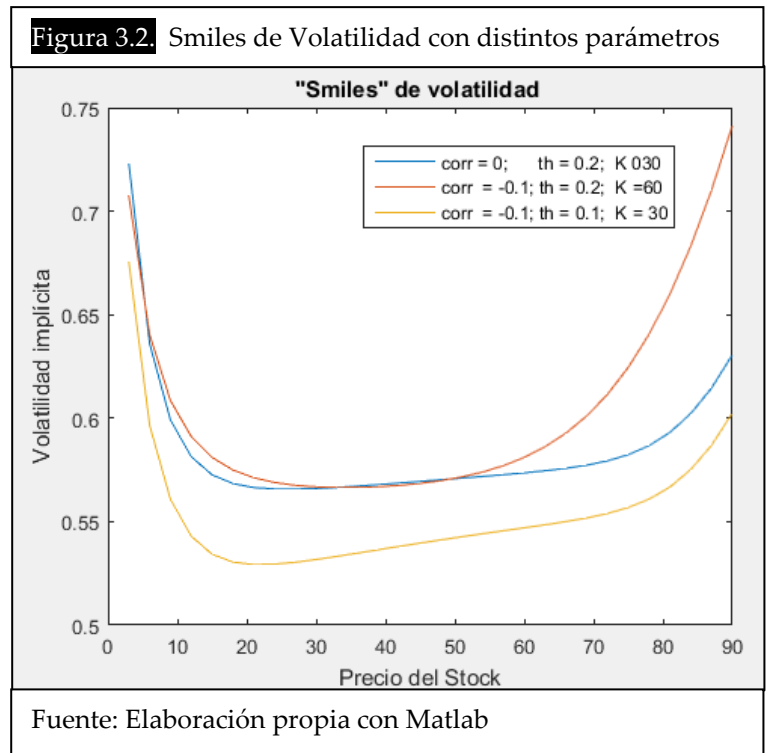
Figura 3.1. Comportamiento del precio de la opción con respecto a la volatilidad en opciones (a) ATM: *at-the-money* ($S = K$), (b) OTM: *out-the-money* ($S < K$), (c) ITM: *in-the-money* ($S > K$).



Fuente: Elaboración con la plantilla de DerivaGem (<http://www-2.rotman.utoronto.ca/~hull/>)

En primer lugar, el caso en que la verdadera distribución del precio del subyacente tiene colas más "pesadas" (*heavy tails*) que la distribución generada por BS. En este caso la sonrisa de volatilidad adoptaría un *patrón cuadrático*. Entonces, los precios de mercado de opciones OTM tenderán a ser mayores que los que se obtendrían mediante la fórmula de BS. *Smiles* de volatilidad cuadráticas tienden a observarse en los mercados de opciones sobre divisas. Según Hull (2002) una posible explicación estaría asociada con los saltos que se observan en los tipos de cambio como consecuencia de las decisiones de los bancos centrales, que tienden a aumentar la volatilidad de los tipos de cambio.

Consideremos ahora el caso en que la verdadera distribución de probabilidad del precio del subyacente tenga la *cola izquierda más pesada* y la *cola derecha más ligera* que la distribución obtenida por BS. Esta situación se correspondería con una *smile* de volatilidad decreciente. Estos tipos de volatilidades tienden a observarse en los mercados de opciones sobre acciones y sobre índices bursátiles. La explicación podría estar relacionada con la *relación negativa* observada entre el precio de las acciones y la volatilidad. Así, es frecuente observar que la volatilidad del precio de las acciones tiende a aumentar cuando los precios disminuyen, *engrosando* la cola izquierda de la distribución, posiblemente como consecuencia del mayor riesgo percibido por los inversores para las acciones de la empresa en cuestión. Podemos observar este comportamiento en **Figura 3.2.**, donde se incluyen 3 *smiles*; donde se indican los distintos parámetros de cada una de ellas³.



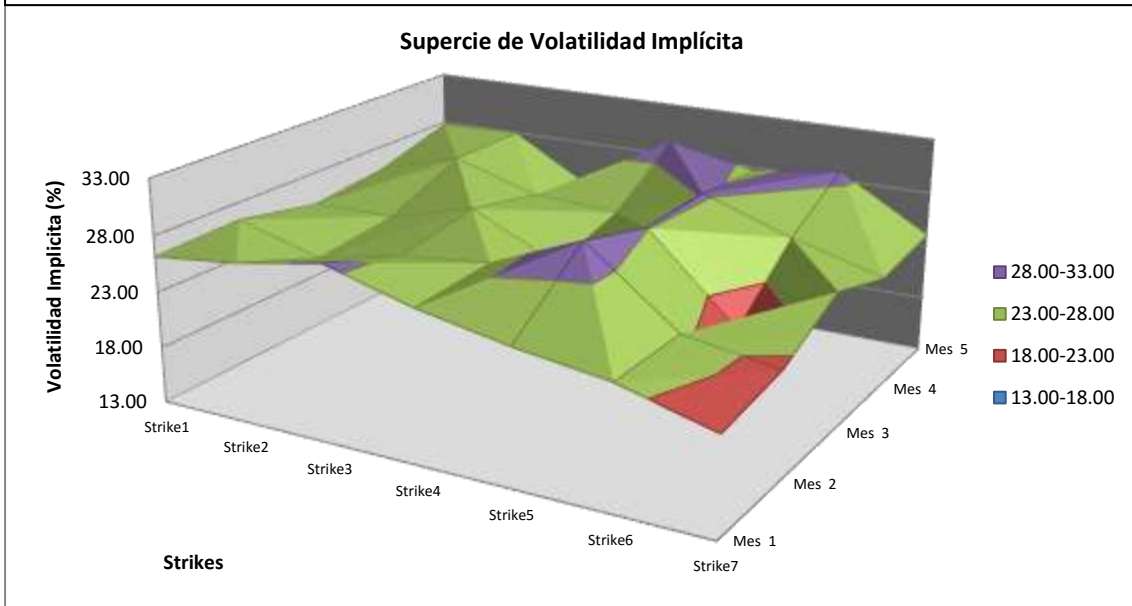
De manera más general Derman (2004) señala que cada mercado tiene su propia forma de *smile*, la cual obedece a los temores generados por las *malas* experiencias de cada uno de ellos: los mercados de acciones temen otro crash; los mercados de oro, luego de años de precios bajos, temen un alza repentina; los inversionistas en el mercado de bonos temen que aumentos en las tasas de interés devalúen sus activos, etc.

La existencia de las *smiles* es una de las principales críticas del del modelo de BS. **Y una de las principales razones por la cual los rendimientos tienen colas gruesas** (lo veremos en el siguiente apartado): la volatilidad es una variable estocástica difícil de aproximar por distribuciones muy acampanadas como la Log-Normal. Necesitamos distribuciones o modelos más complejos para poder aproximar la distribución de los precios.

Además de observar las sonrisas de volatilidad, podemos profundizar más y observar el comportamiento de las volatilidades implícitas ante el vencimiento y los strikes de la opción. Estamos ante los que se llaman *superficies de volatilidad implícitas*. Una figura tridimensional (**Figura 3.3.**) que nos proporciona más información de las volatilidades.

³ Se pueden ver los parámetros utilizados para la construcción de las *smiles* en el anexo con los códigos de Matlab.

Figura 3.3. Simulación de una superficie de volatilidad



Fuente: elaboración propia con un simulador de superficies

En la figura se ha simulado precios de strikes y se ha dibujado la superficie de volatilidades. He utilizado un simulador de superficies para construir dicha figura. En términos generales en el eje de volatilidad y strikes debe aparecer la sonrisa de volatilidad y en el eje volatilidad y vencimiento debe aparecer una función creciente.

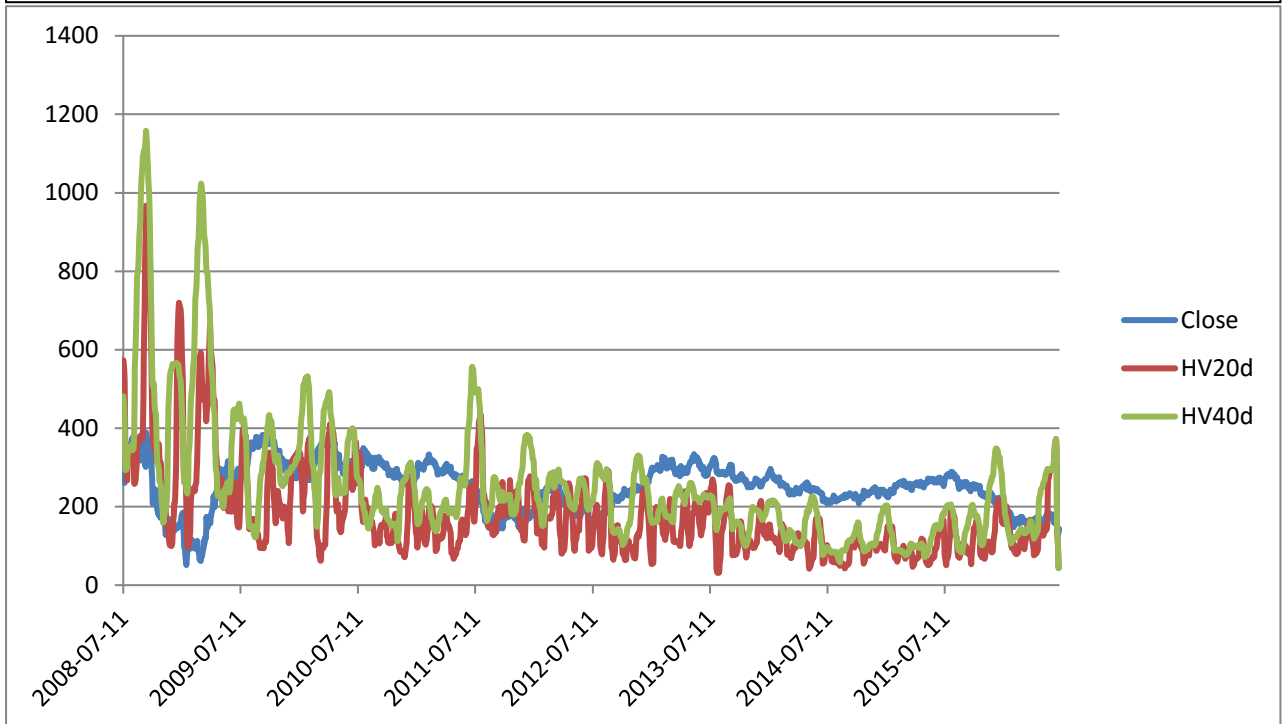
Lo que muestra la figura es que existe mayor volatilidad implícita para los strikes más bajos y un aumento de la volatilidad implícita a medida que aumenta el vencimiento. Las superficies reales de volatilidad suelen tener estas formas. Sin embargo hay que tener en cuenta que la forma de la sonrisa de volatilidad puede variar de mercado a mercado y de “época a época”: esta estructura de volatilidad empezó a comportarse de esta manera a partir del crash 1987. En el futuro puede que el comportamiento de la volatilidad sea distinto. Insistimos en el hecho en que la volatilidad depende de las expectativas y del *miedo a lo inesperado*. Tal como ya expusimos, la volatilidad es una variable estocástica muy difícil de predecir y modelizar.

Dejando a un lado la volatilidad implícita, hemos expuesto la posibilidad de *utilizar volatilidad histórica* para observar el comportamiento de la misma y poder intuirlo. Se puede crear un modelo a partir de la volatilidad histórica. Para ejemplificar este método hemos calculado la volatilidad histórica, utilizando una desviación estándar, a 20 y 40 días de las cotizaciones diarias desde 11/07/2008 hasta 01/07/2016 del banco inglés Barclays. En la representación gráfica (**Figura 3.4.**) de la volatilidad histórica se puede observar una fluctuación bastante aleatoria sin ningún patrón específico.

Se pueden observar también dos características adicionales en la volatilidad histórica:

- Tenemos el *efecto de reversión de la media*. La volatilidad siempre *regresa* a un valor de equilibrio (llamada *volatilidad incondicional*). Sin importar cuanto fluctúe la volatilidad histórica, a un determinado punto la volatilidad siempre se revierte (mas rápida o lentamente) al valor de equilibrio, deshaciendo el camino de aumento o de caída previa.

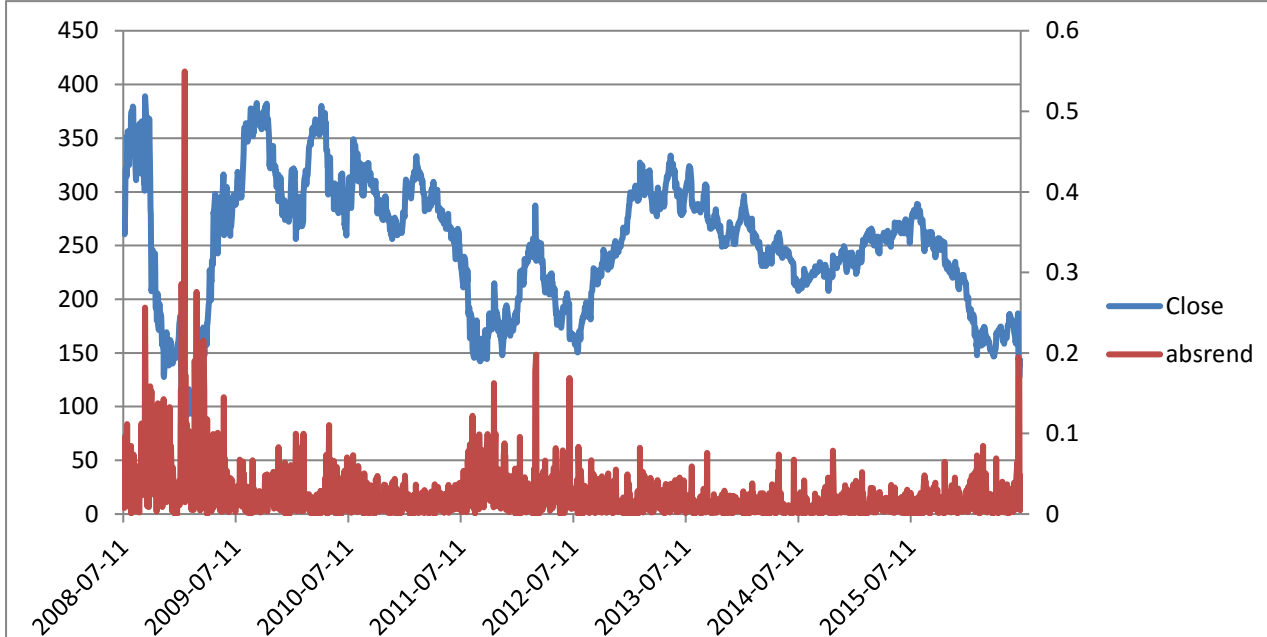
Figura 3.4. Precios de cierre y volatilidad histórica a 20 y 40 días del Barclays en el periodo 2008-2016



Fuente: Yahoo Finance para los datos y el grafico es elaboración propia con Excel

- Y los *clusters de volatilidad*. La volatilidad tiende a mostrar correlación serial. La volatilidad sobre un periodo dado probablemente tendra a relacionarse con la volatilidad del periodo anterior. En este sentido los movimientos de bajadas o subidas tienen a estar *agrupados*: y estos son los *clusters de volatilidad*. Con el objetivo de observarlos más fácilmente hemos calculado los rendimientos logaritmos *absolutos*, donde se pueden apreciar los clusters de bajadas y subidas del activo, observando así las fluctuaciones (Figura 3.5.).

Figura 3.5. Precios de cierre y rendimientos logarítmicos absolutos del Barclays (2008-2016), donde se aprecian los *clusters* de volatilidad a mediados del 2008 y otro más pequeño a mediados del 2011



Fuente: Yahoo Finance para los datos y el grafico es elaboración propia con Excel

3.2. Limitaciones de la distribución Normal para la modelización financiera

3.2.1. El Problema de las colas gruesas

Uno de los principales *desajustes del movimiento browniano geométrico en la modelización financiera* es el supuesto de que el subyacente sigue una distribución Log-Normal. Consecuencia de lo anterior es el supuesto de la No - Normalidad en los rendimientos logarítmicos. En este apartado demostraremos, mediante una descripción estadística de las variables seleccionadas, que los precios (rendimientos) no se distribuyen como una Log-Normal (Normal).

La razón de esto es simple. Los precios o rendimientos se distribuyen presentando lo que se llama *colas gruesas o pesadas*. Desde el punto de vista estadístico, esto ocurre porque la distribución es *asimétrica y leptocúrtica* y desde el punto de vista financiero principalmente es un **problema de la volatilidad** (que lo explicaremos en el apartado anterior).

En la siguiente tabla (**Tabla 3.1.**) se exponen los estadísticos (media, desviación típica, asimetría y curtosis) de las series históricas, (a) tanto para los índices financieros seleccionados (CAC40, Nikkei225, Shanghai Comp., Nasdaq, Ibex 35 y FTSE100), (b) como para las entidades bancarias (BNP, Banco MUFJ, Banco Chino ICDC, *Bank of America*, BBVA y Barclays). Para distribuciones simétricas, como la Normal, la asimetría debe ser *aproximadamente* nula. Para la Normal la *curtosis* es de 3 y el *exceso de curtosis* es nulo. El horizonte temporal escogido para los bancos es el mismo (2008-2016) igual que para las series (2009-2016).

El Ala del Cisne Negro y la Modelización con saltos

Tabla 3.1.	Descripción estadística de precios y rendimientos de las variables seleccionadas					
Tabla 3.1. (a): Índices	CAC40		Nikkei 225		Shanghái Comp. (SHCM)	
	Precio	Rend.	Precio	Rend.	Precio	Rend.
Media	3990,793	0,00713%	13038,7	0,0285%	2676,555	-0,0049%
Dispersión ⁴	537,1656	1,38369%	3785,807	1,4327%	590,4271	1,5285%
Asimetría	0,119032	-0,15518	0,42375	-0,57366	1,333049	-0,850819
Exc. Curtosis	-0,51109	3,32244	-1,18633	4,841618	2,170922	5,211570

Tabla 3.1. (a): Índices (cont)	Nasdaq (NSDQ)		Ibex 35		FTSE100	
	Precio	Rend.	Precio	Rend.	Precio	Rend.
Media	34,53646	0,076%	9550,238	-0,0210%	11,65687	-0,0183%
Dispersión	13,80436	1,668%	1319,812	1,5809%	1,203044	1,3759%
Asimetría	0,774509	-0,16176	-0,34997	-0,13571	-0,63841	-1,55704
Exc. Curtosis	-0,59654	6,494706	-0,70116	6,778014	0,008723	11,50458

Tabla 3.1. (b): Bancos	BNP Paribas		Banco MUJF (Japón)		Banco Chino ICBC	
	Precio	Rend.	Precio	Rend.	Precio	Rend.
Media	47,04657	-0,0202%	5,544566	-0,0358%	3,327004	-0,0113%
Dispersión	9,238523	3,0450%	1,074734	4,0608%	0,597530	1,7293%
Asimetría	-0,67261	0,273691	0,795165	1,921173	0,869000	0,123024
Exc. Curtosis	-0,33608	7,390222	2,598698	442,6987	0,153798	9,101754

Tabla 3.1. (b): Bancos (cont.)	Bank of America (BAC)		BBVA		Barclays (BARC)	
	Precio	Rend.	Precio	Rend.	Precio	Rend.
Media	13,85956	-0,025%	8,16932168	-0,037%	250,8816	-0,0311%
Dispersión	4,777421	4,026%	1,77517746	2,455%	60,68353	3,7782%
Asimetría	1,167788	-0,29916	0,35445227	0,124352	-0,34805	1,068222
Exc. Curtosis	4,39131	16,58878	-0,1907744	5,615303	-0,0714	30,34298

LEYENDA		Asimetría positiva y curtosis positivas		Asimetría y curtosis positivos
		Asimetría y curtosis negativas		Asimetría negativa y curtosis

Fuente: elaboración propia

Obtenemos bastante información de las tablas:

- Todos los índices poseen en rendimientos una asimetría negativa y un *exceso de curtosis* positivo.
- Sin embargo las entidades bancarias solo Bank of America tiene asimetría negativa en los rendimientos. Las demás entidades tienen asimetría positiva. En exceso de curtosis, todas las entidades tienen valores positivos.
- En los índices, solo el Ibex35 y el FTSE100 poseen asimetría negativa en los precios. Los demás índices poseen asimetría positiva. El exceso de curtosis de todas las series es negativo excepto para Shanghái comp. y el FTSE100.
- En las entidades bancarias, en curtosis, BBVA, Barclays y BNP poseen exceso de curtosis negativo. Y en asimetría solo Barclays y BNP poseen asimetría negativa.

⁴ Desviación típica

Observando los resultados, podemos concluir que puede existir una evidencia empírica de que los precios (rendimientos) no se distribuyen como una distribución Log-Normal (Normal). Para ello haremos un contraste de ajuste.

3.2.2. Contraste de la bondad del ajuste

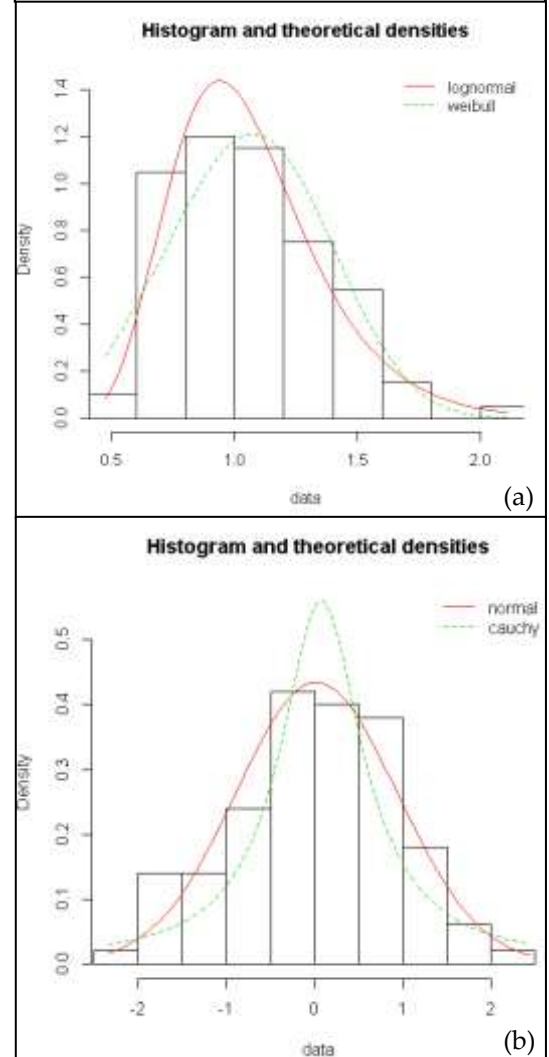
En este apartado realizaremos contrastes de bondad de ajuste para los precios y los rendimientos financieros.

Para estas dos categorías propondremos dos tipos de distribuciones distintas y expondremos tres estadísticos diferentes para cada una de las series seleccionadas.

En el contraste para los precios utilizaremos las distribuciones Log-Normal y la distribución de Weibull. La selección de la Log-Normal obedece a la teoría del movimiento browniano geométrico que expusimos en el tema anterior. En cambio, la decisión de contrastar con la distribución Weibull es sencillamente comparativa⁵, ya que dicha distribución, con cierta parametrización tiene un comportamiento similar a la distribución Log-Normal (Figura. 3.6.a). En dicha figura hemos generado números aleatorios con una distribución Log-Normal de media nula y desviación típica de 0.3; y para la Weibull, hemos utilizado un *parámetro de escala* de 1 y un *parámetro de forma* de 3. Como se puede observar ambas distribución son bastantes parecidas.

En el contraste para los rendimientos utilizaremos las distribuciones Normal y la distribución *t de Student no estandarizada*. La selección de la Normal obedece a la teoría del movimiento browniano geométrico que expusimos en el tema anterior. La decisión de contrastar con la distribución *t de Student* tiene su justificación en el análisis anterior. Como pudimos comprobar, necesitamos una distribución muy leptocúrtica o apuntada. Esta distribución con pocos *grados de libertad* tiene la peculiaridad de presentar bastante curtosis. Por otra parte, es importante mencionar que la distribución *t de Student* se puede obtener *combinando* una distribución Normal con un parámetro de varianza que se distribuye con una distribución Gamma Inversa⁶.

Figura 3.6. Comparación de funciones de densidad de distintas distribuciones (a) Log-Normal y Weibull, (b) Normal y Cauchy



Fuente: Elaboración propia con R-Studio

⁵ Podemos encontrar la utilización de la distribución de Weibull para la modelización financiera en Allena D., Peiris, S., (2013), *Estimating and simulating Weibull models of risk or price durations: An application to ACD models*, North American Journal of Economics and Finance.

⁶ Esto es así por que la distribución Gamma inversa es la distribución *a priori* conjugada de la varianza de la distribución Normal. Estos conceptos se pueden encontrar en la teoría de inferencia bayesiana por

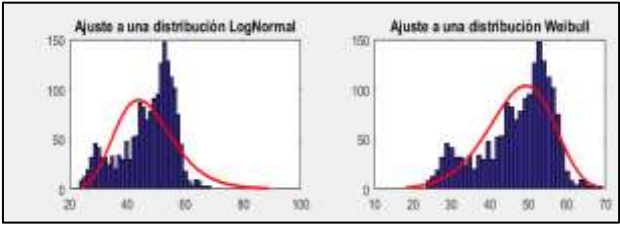
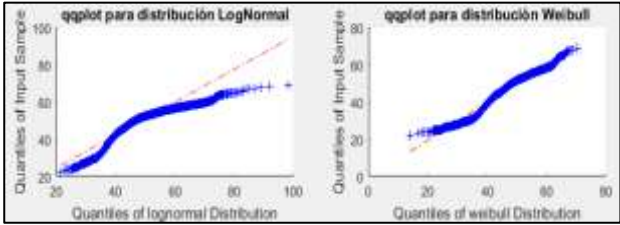
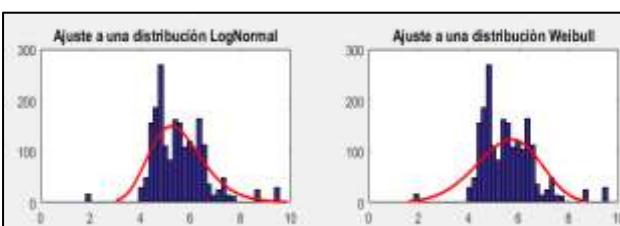
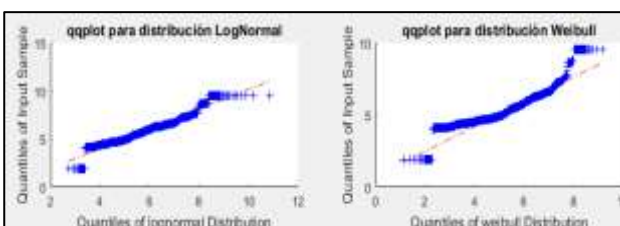
Recordad que habíamos encontrado esta distribución en el comportamiento de los momentos de parada de los procesos estocásticos y en los cambios de signo del movimiento browniano.

Como ejemplo, la distribución de Cauchy, una *t de Student* con un grado de libertad, bajo cierta parametrización, es bastante apuntada (Figura 3.6.b). En dicha figura hemos simulado una distribución Normal con parámetro de localización (que es la media) nulo y desviación típica unitaria; y para la Cauchy hemos utilizado un parámetro de localización nulo y *parámetro de escala* de 0.75. Por último, podemos encontrar la utilización de la distribución de Cauchy en la literatura para la modelización financiera⁷.

3.2.2.1. Contraste de la bondad del ajuste para los precios

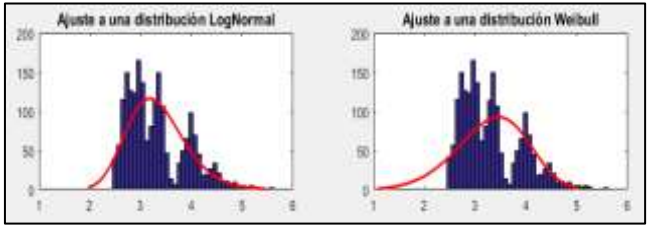
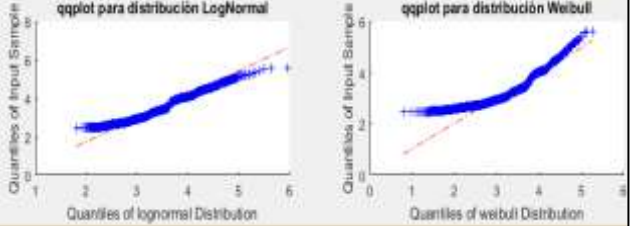
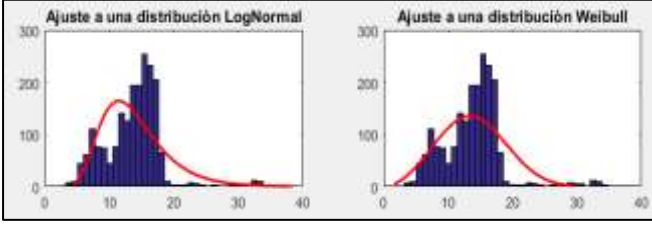
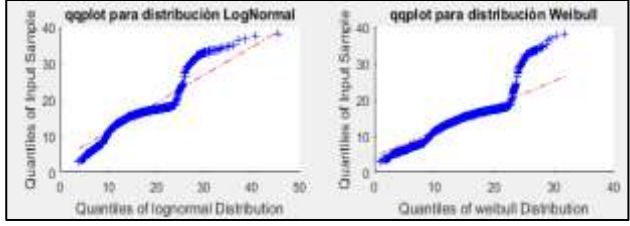
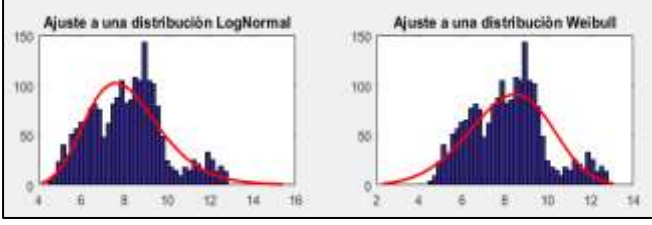
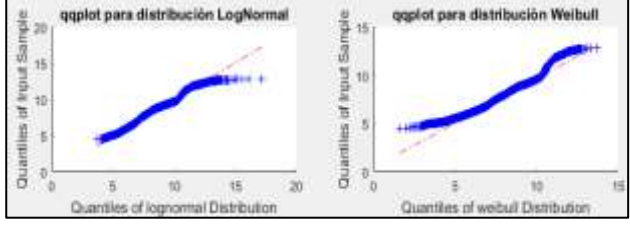
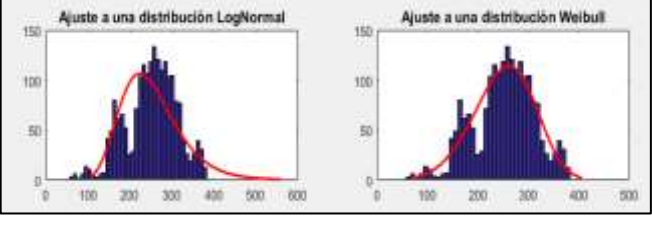
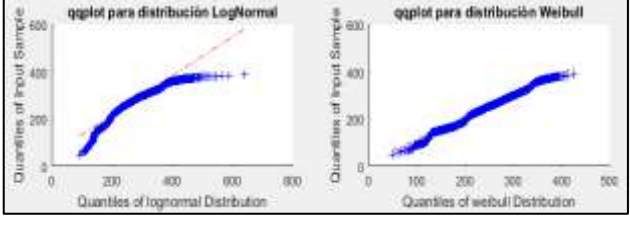
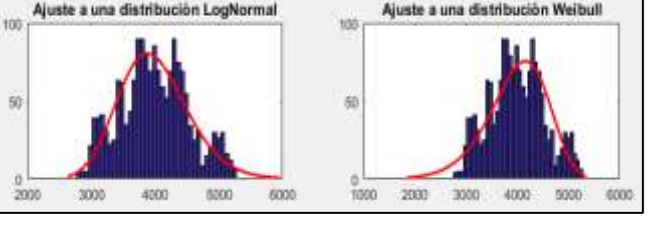
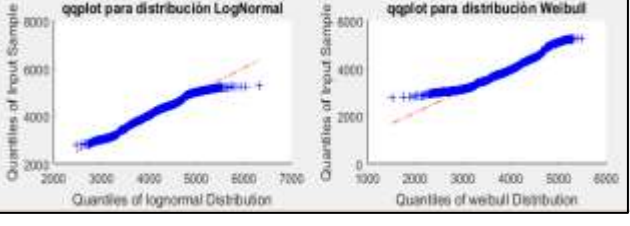
En la siguiente tabla (Tabla 3.2.) exponemos gráficamente los ajustes de las distribuciones de probabilidad de precios de las series temporales seleccionadas. En ella se presentan la distribución de densidad, y el *Q-Q plot*.

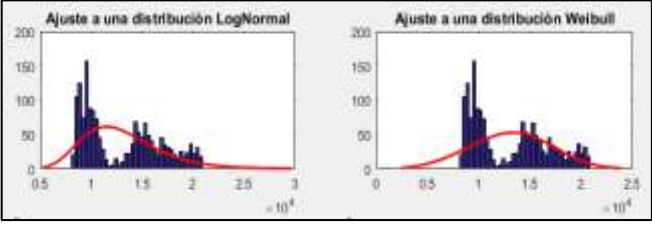
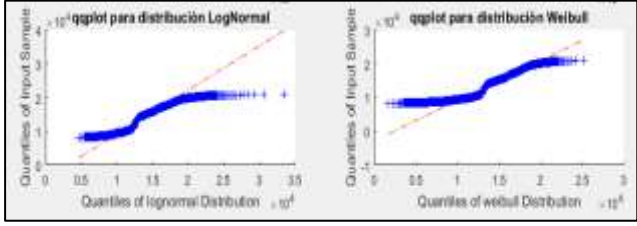
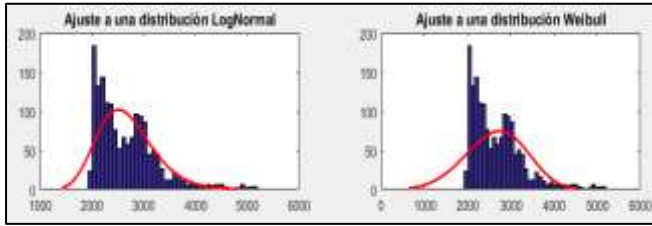
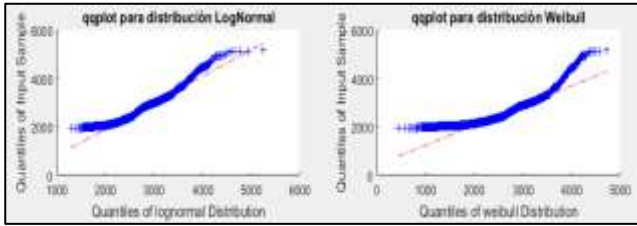
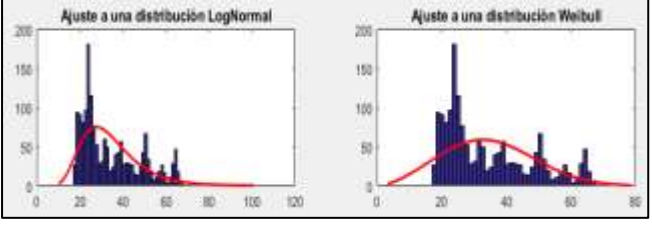
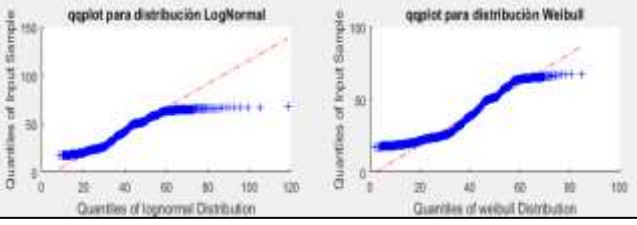
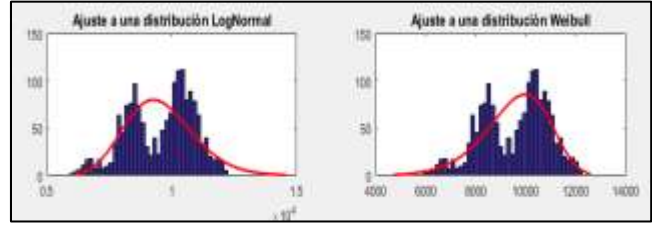
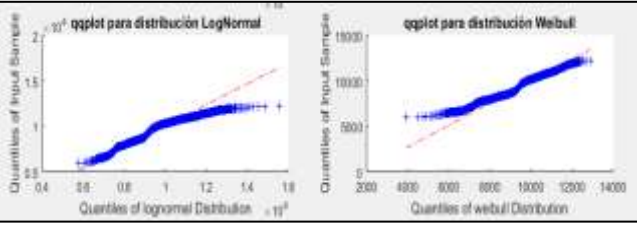
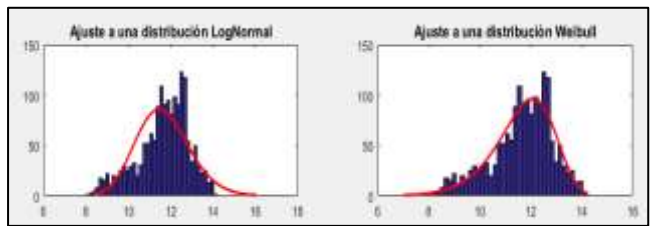
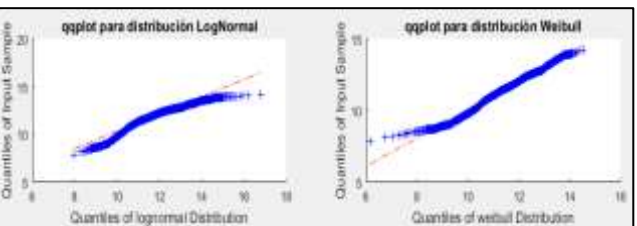
Un *gráfico Cuantil-Cuantil* (*Q-Q plot*) permite observar cuan cerca está la distribución de un conjunto de datos a alguna distribución ideal ó comparar la distribución de dos conjuntos de datos. Su utilización es recomendable y preferida a comparar las funciones de densidad o histogramas. Hay, lógicamente, contrastes diseñados para esta tarea que veremos a continuación; pero la exploración gráfica es una gran ayuda. La idea de este gráfico es que, si las dos distribuciones coinciden, veremos un gráfico muy parecido a una recta.

Tabla 3.2.	Análisis gráfico de ajustes de distribuciones de las variables seleccionadas a las distribuciones propuestas			
BNP				
BMUFJ				

ejemplo en Robert, C. (2001), *The Bayesian Choice: from Decision-Theoretic Motivations to Computational Implementation*, Springer-Verlag, Y en Bishop, C., (2006), *Pattern Recognition and Machine Learning*, Springer.

⁷ Mandelbrot, B., (1963), *The Variation of Certain Speculative Prices*, *The Journal of Business*.

ICBC	 
BAC	 
BBVA	 
BARC	 
CAC40	 

Nikk225		
SHCM		
NSDQ		
IBEX35		
FTSE100		
Fuente: elaboracion propia y graficos realizados con Matlab		

Haciendo un **análisis gráfico**, podemos obtener las siguientes observaciones:

- Las entidades bancarias como BMUFJ, ICBC y BAC no se ajustan adecuadamente a ninguna de las dos distribuciones propuestas, presentando bastantes problemas de ajuste, principalmente el BMUFJ y el BAC. El ICBC, *parece* ajustarse mejor a una distribución logarítmica-Normal, mientras que el BNP, BBVA y BARC se ajustan mejor a la distribución Weibull.
- Los índices financieros como el Nasdaq, Nikkei225 y Shanghai Comp., no parecen ajustarse adecuadamente a las distribuciones propuestas. Las tres presentan bastantes problemas de ajustes. El Ibex 35 y el FTSE100 tienden a modelizarse mejor con la distribución Weibull. Sólo el CAC40 es la que parece ajustarse adecuadamente a ambas distribuciones.

El análisis gráfico nos proporciona bastante ayuda, sin embargo necesitamos un análisis estadístico más exacto, para ello hemos ofrecido los siguientes test: el test de Kolmogorov-Smirnov (KS), Cramer von Mises (CM) y Anderson-Darling (AD).

El **test de KS** verifica las diferencias existentes entre la distribución empírica y la distribución teórica seleccionada. Calcula la máxima distancia existente entre ambas distribuciones, de tal forma que si este valor máximo se considera “grande”, significa que la distribución teórica no ajusta bien la distribución poblacional. Para ello calcula el siguiente estadístico:

$$D = \max[D^+, D^-], \quad D^+ = \max_{1 \leq i \leq N} \left[\frac{i}{N} - Z_i \right], i = 1, 2 \dots N, \quad D^- = \max_{1 \leq i \leq N} \left[Z_i - \frac{i-1}{N} \right], i = 1, 2 \dots N$$

Donde Z_i es la probabilidad acumulada de la distribución que se desea ajustar y N el tamaño de la muestra.

El **test de CM** evalúa la diferencia, al cuadrado, de las funciones de probabilidad acumulada estimada y observada. Tiene las mismas aplicaciones que KS pero teniendo en cuenta toda la distribución y no sólo los puntos de máxima diferencia.

$$CM = \frac{1}{12N} + \sum_{i=1}^N \left[Z_i - \frac{2i-1}{2N} \right]^2$$

El **test de AD** se utiliza para comprobar si una muestra de datos viene de una población que sigue una distribución específica. Es un test que da más importancia a las observaciones de la cola de la distribución.

$$AD = -N - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (2i-1) [\ln Z_i - \ln Z_{N-i+1}]$$

Los tres test se pueden calcular con una hoja de cálculo, sin embargo hay paquetes estadísticos como Matlab que lo calculan fácilmente. En la **Tabla 3.3**, hemos recopilado todos los valores de estos estadísticos.

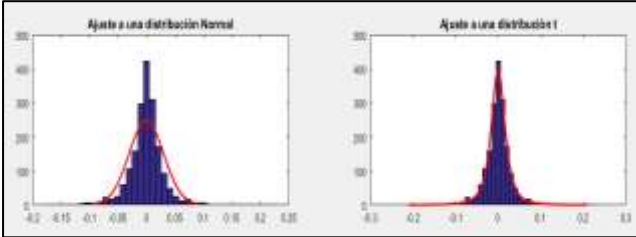
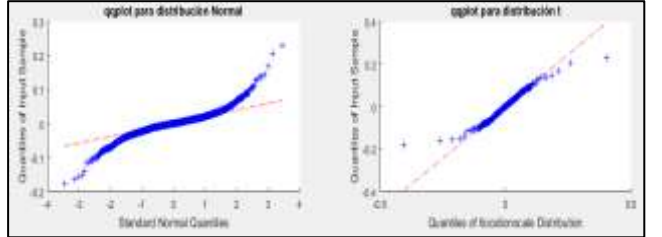
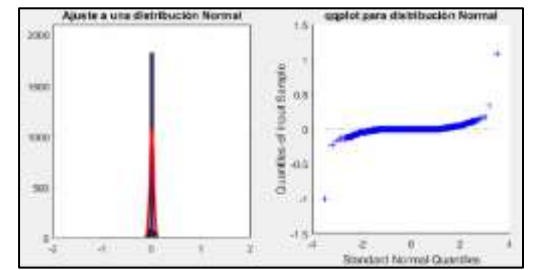
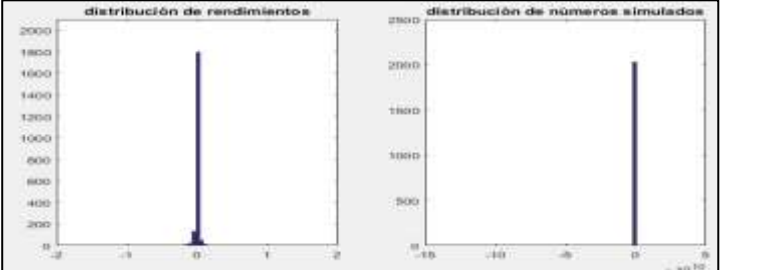
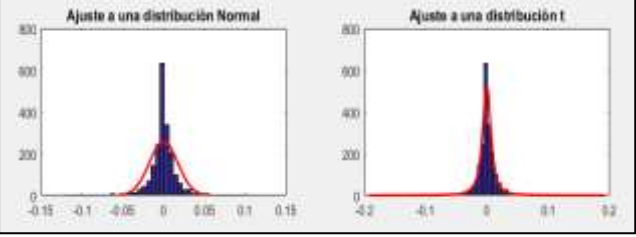
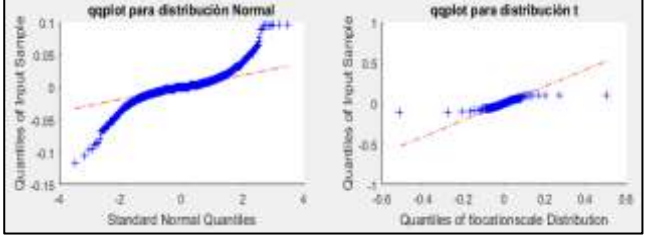
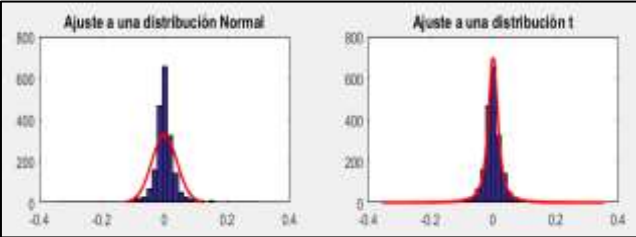
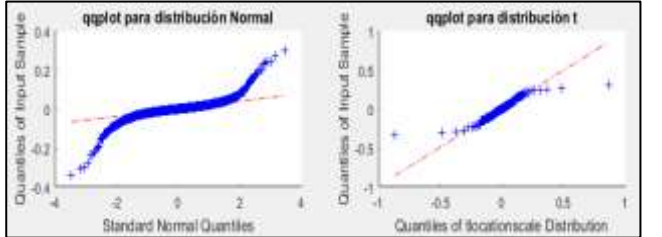
Contraste de bondad de ajuste para la distribución de precios						
Distribución	Distribución Log-Normal			Distribución Weibull		
Estadísticos	KS (0,0301)	CM (0,4613)	AD (2,4925)	KS (0,0301)	CM (0,4613)	AD (2,4925)
BAC	0,1319 (1) 6,5442e-31	12,2248 (1) 0,0010	65,9753 (1) 2,9866e-07	0,1512 (1) 1,7253e-40	9,6183 (1) 0,0010	60,3330 (1) 2,9866e-07
BCH	0,0921 (1) 1,7090e-15	4,9063 (1) 0,0010	29,2670 (1) 2,9484e-07	0,1343 (1) 2,0637e-32	10,5910 (1) 0,0010	62,8646 (1) 2,9484e-07
BMUFJ	0,0783 (1) 2,7277e-11	2,0579 (1) 0,0010	20,2906 (1) 2,9557e-07	0,1340 (1) 3,1154e-32	8,2137 (1) 0,0010	59,9145 (1) 2,9557e-07
BARC	0,1042 (1) 1,6386e-19	7,0936 (1) 0,0010	39,2829 (1) 2,9777e-07	0,0387 ("1") 0,0047	0,6058 ("1") 0,0217	4,2928 ("1") 0,0063
BBVA	0,0572 (1) 2,3392e-06	1,8455 (1) 0,0010	10,1536 (1) 5,3458e-06	0,0716 (1) 1,0297e-09	2,1086 (1) 0,0010	18,3205 (1) 2,8874e-07
BNP	0,1335 (1) 5,9438e-29	12,0491 (1) 0,0010	70,5261 (1) 3,2698e-07	0,0778 (1) 4,0619e-10	3,3550 (1) 0,0010	22,7553 (1) 3,2698e-07
CAC40	0,0395 ("1") 0,0096	0,4984 ("1") 0,0403	4,1029 (1) 0,0078	0,0506 (1) 3,1753e-04	1,3454 (1) 0,0010	10,8572 (1) 1,3652e-06
FTSE100	0,0948 (1) 1,5862e-13	4,9662 (1) 0,0010	30,1920 (1) 3,5885e-07	0,0298 (0) 0,1007	0,3134 (0) 0,1242	2,5623 ("1") 0,0460
IBEX 35	0,1203 (1) 7,0793e-22	5,5685 (1) 0,0010	29,7935 (1) 3,5294e-07	0,0932 (1) 2,6352e-13	3,1217 (1) 0,0010	15,8363 (1) 3,5294e-07
NSDQ	0,1263 (1) 8,1133e-24	5,9338 (1) 0,0010	35,3562 (1) 3,5672e-07	0,1397 (1) 4,7497e-29	8,4101 (1) 0,0010	50,9088 (1) 3,5672e-07
NIkk225	0,1533 (1) 3,6346e-34	10,5023 (1) 0,0010	59,3483 (1) 3,6474e-07	0,1732 (1) 1,7031e-43	9,4142 (1) 0,0010	56,6832 (1) 56,6832
SHCM	0,0941 (1) 6,0417e-13	3,3746 (1) 0,0010	23,4964 (1) 3,6991e-07	0,1665 (1) 1,1840e-39	8,4957 (1) 0,0010	59,3074 (1) 3,6991e-07

Fuente: elaboracion propia y datos obtenidos con Matlab.

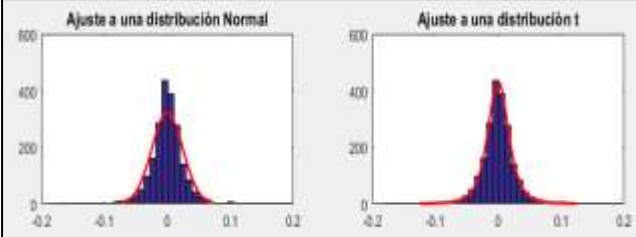
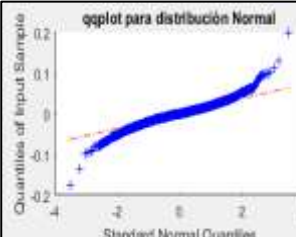
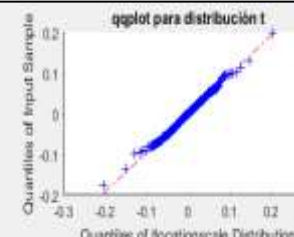
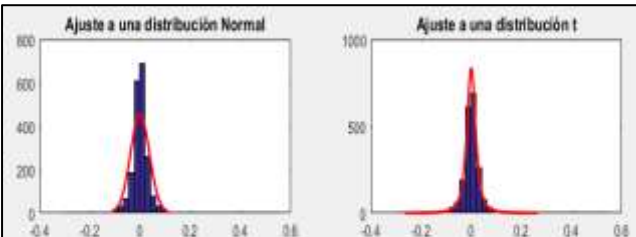
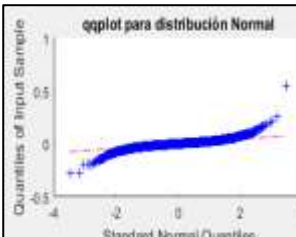
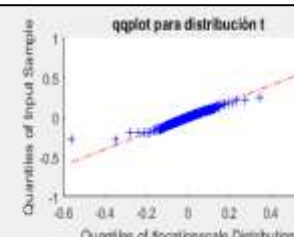
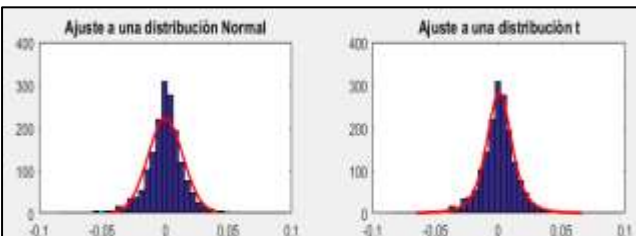
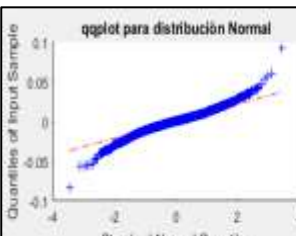
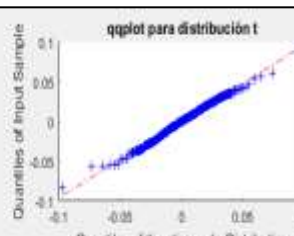
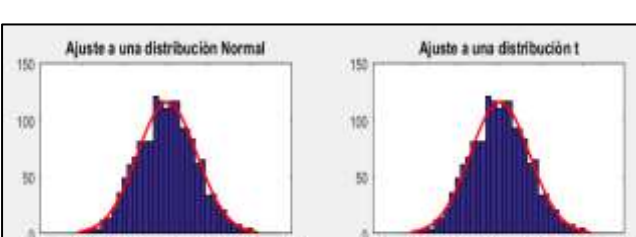
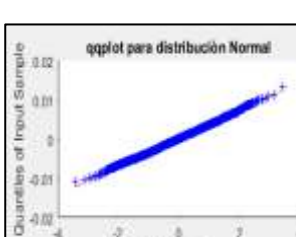
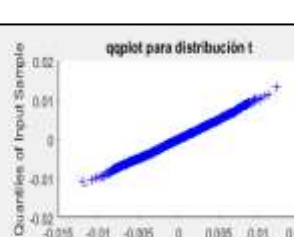
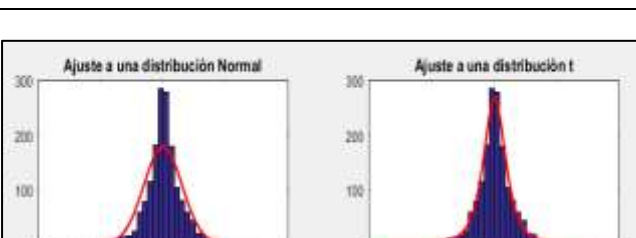
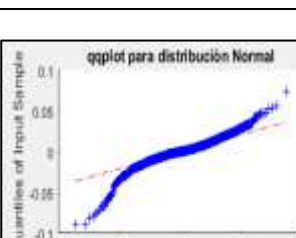
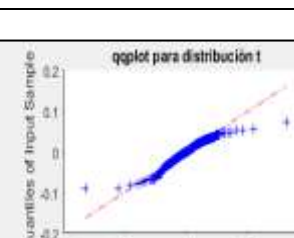
En la primera columna de la **Tabla 3.3.** se expone el estadístico de KS para cada una de las variables seleccionadas para la distribución de probabilidad de precios asumiendo como hipótesis que se distribuye como Log-Normal. El valor crítico para dicho estadístico (y para todos) ha sido puesto en negrilla debajo del nombre del estadístico. La hipótesis *no se rechaza* si el valor del estadístico es menor que el valor crítico. Por otra parte, para cada variable se ha calculado su p-valor, siendo el valor indicado debajo del valor del estadístico. Un p-valor muy pequeño o inferior al 5% o al 1% nos permite *rechazar la hipótesis*. Se indica con (1) cuando se rechaza la hipótesis, con ("1") cuando se rechaza pero *podemos aceptarla* y con (0) cuando no se rechaza totalmente. La segunda y tercer columna indican los estadísticos CM y AD para las mismas series bajo la distribución Log-Normal. Las otras tres columnas indican lo mismo pero para la distribución Weibull. El CAC40 *parece* no rechazar la distribución Log-Normal y el BARC *parece no rechazar* la distribución Weibull, fallando ambos en la cola de la distribución (debido a que se rechaza el test de AD) y el FTSE100 no rechaza totalmente la distribución Weibull. Los demás casos rechazan la hipótesis, pudiendo concluir que la distribución de probabilidad de los precios de los índices financieros e identidades bancarias no es ni la distribución Log-Normal ni la Weibull. Veamos el análisis para los rendimientos.

3.2.2.2. Contraste de la bondad del ajuste para los rendimientos

En la siguiente tabla (Tabla 3.4.) exponemos gráficamente los ajustes de las distribuciones de probabilidad rendimientos de las series temporales seleccionadas. En ella se presentan la distribución de densidad de las distribuciones propuestas y QQ-plot para ambas distribuciones.

Tabla 3.4.	Análisis gráfico de ajustes de distribuciones de las variables seleccionadas a las distribuciones propuestas			
BNP				
BMUFJ ⁸				
ICBC				
BAC				

⁸ Por *problemas técnicos* de Matlab, como que el valor de la máxima verosimilitud no convergió y que falló el cálculo de la matriz de covarianzas (matriz Hessiana no definida positiva), el ajuste del BMUFJ a la *t* de Student no estandarizada no se pudo realizar con éxito. Esto se debe a que en la serie de rendimientos hay muchos valores nulos, debido a la regulación bancaria japonesa, que no permitió al banco *fluctuar libremente*. Lo que se realizó fue una simulación con números aleatorios distribuidos con la *t* de Student que se ajusta mejor a los datos (ver código Matlab) y *comparamos ambas distribuciones*.

BBVA			
BARC			
CAC40			
Nikk225 ⁹			
SHCM			

⁹ El Nikkei 225 fue la única distribución que se ajustó correctamente a la distribución Normal y por ello el ajuste de la t de Student es igual ya que “no hacía falta” que se distribuyese como una t de Student ya que una distribución t de Student converge a una distribución Normal cuando los grados de libertad tienden a infinito, que fue lo que ocurrió en el Nikkei 225.

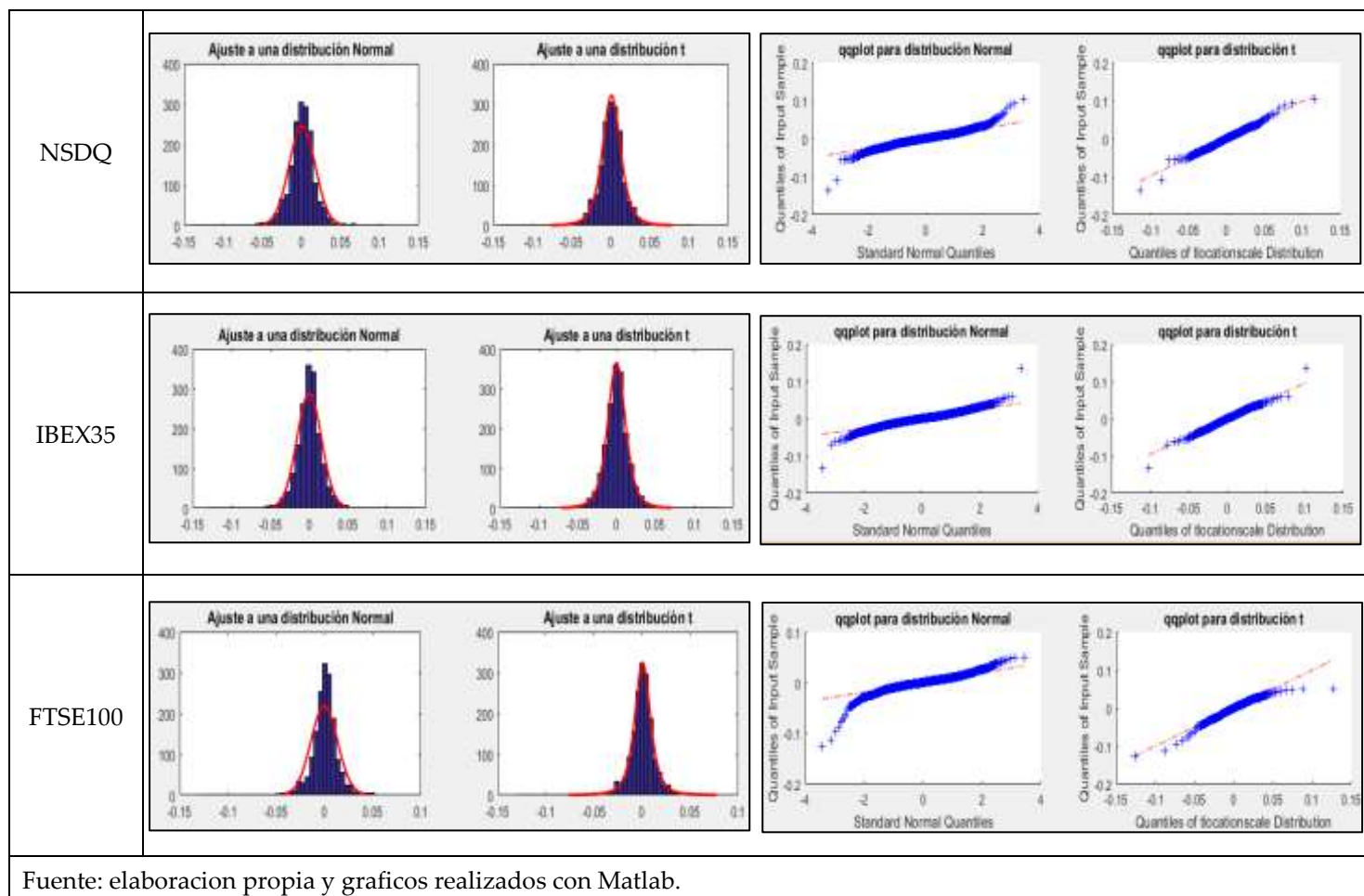


Tabla 3.5. Contraste de bondad de ajuste para la distribución de rendimientos									
Distribución	Distribución Normal			Distribución $t(m, s, n)^{10}$					
Estadísticos	KS (0,0301)	CM (0,4613)	AD (2,4925)	m	s	n	KS (0,0301)	CM (0,4613)	AD (2,4925)
BAC	0,1423 (1) 6,5301e-36	17,7357 (1) 0,0010	98,9154 (1) 2,9866e-07	-2,4e-10	0,0161	1,89	0,0108 (0) 0,9724	0,0184 (0) 0,9899	0,1551 (0) 0,9982
BCH	0,1362 (1) 2,5427e-33	15,0235 (1) 0,0010	80,0930(1) 2,9499e-07	-0,00026	0,0072	1,75	0,0924 (1) 1,4709e-15	1,2618(1) 0,0010	5,5538 (1) 0,0016
BMUFJ ¹¹	0,3777 (1) 7,1495e-253	100,763 (1) 0,0010	Inf (1) 2,9571e-07	-3,88e-11	1,013	0,20	0,3740 (1) 5,4227e-248	71,0557 0,0010	309,4609 (1) 2,9571e-07
BARC	0,1178 (1) 8,3488e-25	12,0010 (1) 0,0010	Inf (1) 2,9791e-07	0,00023	0,018	2,27	0,0097(0) 0,9906	0,0303(0) 0,9752	0,2572 (0) 0,9665
BBVA	0,0649 (1) 4,6385e-08	3,3097 (1) 0,0010	18,8966 (1) 2,8888e-07	-0,00024	0,017	3,63	0,0167 (0) 0,6050	0,0986 (0) 0,5923	0,5617 (0) 0,6848

¹⁰ Distribución t de Student no estandarizada con parámetro de localización m , parámetro de escala s y n grados de libertad

¹¹ Los estadísticos indicados en la distribución t de Student están errados ya que están calculados sobre una distribución errada. Observar como la distribución de rendimientos “se ajusta” a una t de Student de 0.20 grados de libertad; esto es un error de estimación (ver nota 7) y cualquier cálculo que se realice sobre esta distribución estará errado (de ahí el color rojo).

BNP	0,0957 (1) 4,4921e-15	6,6195 (1) 0,0010	37,6518 (1) 3,2715e-07	0,00014	0,017	2,48	0,0154 (0) 0,7706	0,1078 (0) 0,5485	0,7177(0) 0,5442
CAC40	0,0579(1) 2,1302e-05	2,0312 (1) 0,0010	11,5677(1) 4,6352e-07	0,00037	0,010	4,12	0,0158 (0) 0,7820	0,0815 (0) 0,6829	0,6822 (0) 0,5738
FTSE100	0,0870 (1) 1,8460e-11	4,8259 (1) 0,0010	27,8136 (1) 3,5907e-07	0,00058	0,0085	3,05	0,0191 (0) 0,5718	0,1220 (0) 0,4881	1,2387 (0) 0,2532
IBEX 35	0,0533 (1) 1,2437e-04	1,9259 (1) 0,0010	Inf (1) 3,5315e-07	4,22e-08	0,011	4,46	0,0172 (0) 0,6918	0,1042 (0) 0,5652	0,6416 (0) 0,6095
NSDQ	0,0591 (1) 1,4929e-05	2,1571 (1) 0,0010	12,8173 (1) 3,5717e-07	0,00093	0,012	4,10	0,0140 (0) 0,8903	0,0524 (0) 0,8611	0,4631 (0) 0,7846
Nikk225 ¹²	0,0107 (0) 0,9904	0,0283 (0) 0,9807	0,2553 (0) 0,9675	0,0001	0,0035	Inf	0,0108 (0) 0,9897	0,0283 (0) 0,9806	0,2557 (0) 0,9673
SHCM	0,0883 (1) 1,9255e-11	4,6026 (1) 0,0010	25,7516 (1) 3,7014e-07	0,0004	0,0093	2,79	0,0293 (0) 0,1212	0,2275 (0) 0,2202	1,3118 (0) 0,2286

Fuente: elaboracion propia y datos obtenidos con Matlab.

En la **Tabla 3.4.** la información proporcionada es muy parecida a la tabla 3.3., diferenciándose en las distribuciones utilizadas. Los valores siguen significando lo mismo: el valor del estadístico y debajo el p-valor. Con (1) se indica que *se rechaza* la hipótesis, con (“1”) *podemos* no rechazar la hipótesis y con (0) no rechazamos la hipótesis totalmente. En el caso de la distribución Normal, sólo el Nikkei225 no rechaza la distribución Normal, las demás variables financieras rechazan la distribución Normal, incluso hay índices financieros y entidades bancarias, como el Ibex y el Barclays, que tienen en el test de Anderson-Darling un valor infinito, esto significa que el ajuste de los rendimientos a la distribución Normal no está modelizando en ningún momento la cola de la distribución real de los rendimientos. Como queríamos comprobar, la distribución de probabilidad de rendimientos no se distribuye como una distribución Normal. En este sentido, parece que la utilización de un movimiento browniano geométrico para la modelización financiera es bastante limitada.

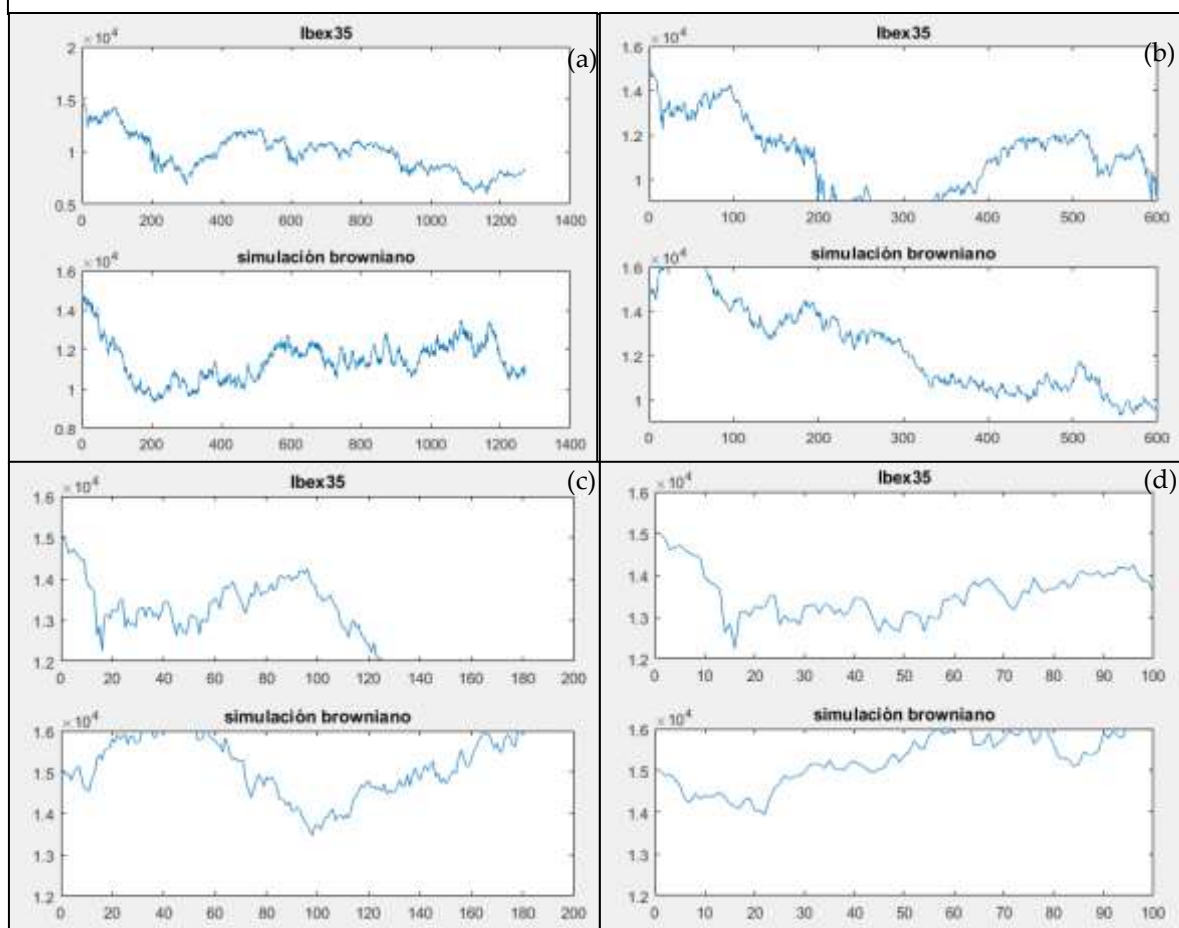
En cambio, la distribución t de Student no estandarizada, al tener mayor apuntamiento y cola gruesa, parece ajustarse mejor a la distribución real de probabilidad de los rendimientos financieros. En las columnas 3, 4 y 5 de la **Tabla 3.4.** hemos presentado los parámetros a los que se ajusta la distribución t, observad los valores “mínimos” de grados de libertad que tiene la distribución. Podemos comprobarlo con los estadísticos. Sólo el Banco ICBC parece rechazar la distribución, y esto se debe a la existencia de varios valores *atípicos* tal como se observa en el *QQ-plot*. Estos “atípicos” son justamente uno de los temas que trata este trabajo, son los famosos *Cisnes Negros*. El Nikkei 225 acepta ambas hipótesis ya que los estadísticos poseen el mismo valor y no rechaza la distribución t con *infinitos* grados de libertad ya que es, por definición, una distribución Normal. El BMUFJ como ya expusimos tuvo problemas de estimación. De esta forma, parece que las distribuciones leptocúrticas, como la t de Student no estandarizada, modelizan adecuadamente los rendimientos financieros. Este hecho tiene una curiosa *coherencia estadística* que expondremos en el siguiente capítulo.

¹² Como se puede observar, los estadísticos son iguales y esto es así por que los rendimientos se distribuían originalmente como una Normal y la t “se ajustó” a ello y por ello se obtuvo “infinitos” grados de libertad. Realmente no se obtuvo infinitos grados de libertad, fueron unos 1200, pero esto, en *términos estadísticos y prácticos*, es infinito.

3.3. Problema de escala

Unas de las propiedades del movimiento browniano estándar más importante es la *invariancia ante la escala*, esto quiere decir que la propiedades del movimiento browniano se mantienen en cualquier horizonte temporal. A continuación se propone nuestra serie del Ibex 35 en el periodo 2008-2012 (hemos reducido el periodo por simplicidad) y una simulación del movimiento browniano con características similares y hemos reducido la escala dos veces para comprobar la invariancia ante la escala del movimiento browniano (Figura 3.7). En (a) tenemos la figura en escala original y (b)-(d) vamos reduciendo tanto la escala temporal como en las ordenadas. El procedimiento para realizarlo es bastante sencillo, en Matlab puede escoger la senda temporal en que quieres la figura, así que reduciendo poco más la senda temporal o el eje de abscisas y ordenadas podemos ir obteniendo el grafico en la figura 3.7.

Figura 3.7. Cambio de escala del movimiento browniano y el Ibex 35, (a) con escala original, que son 4 años; (b) con aproximadamente la mitad de la escala, que son 2 años y medio, (c) con un año aproximadamente y finalmente (d) con aproximadamente medio año.



Fuente: Elaboración propia con Matlab

Como podemos observar, la *forma* del browniano no tiene cambios significativos mientras que en el Ibex 35 se va notando esos *cambios bruscos* que parecen *saltos*. Siguiendo con la idea de Cont¹³, el movimiento browniano es invariante ante cambios de escala temporal mientras que los precios no lo son.

Los precios se mueven esencialmente por saltos en escalas diarias, presentando discontinuidades mensualmente y finalmente a largo plazo los precios actúan de forma similar al movimiento browniano.

3.4. Introducción al Cisne Negro como posible explicación a los problemas de modelización financiera

Considero que es momento de introducir el concepto que le da el título a este trabajo.

El **Cisne Negro**, siguiendo N. Taleb en su *El Cisne Negro. El impacto de lo altamente improbable* (2007), se define como un *suceso* con los tres atributos que siguen:

- Primero es una *rareza*, pues habita fuera del reino de las expectativas normales, porque nada del pasado puede apuntar de forma convincente a su posibilidad.
- Segundo, produce un impacto tremendo.
- Tercero, pese a su condición de rareza, la naturaleza humana hace que inventos explicaciones de su existencia *después* del hecho, con lo que lo hace explicable y predecible.

El Cisne Negro, puede ser *interpretado* como una posible explicación a los problemas de modelización financiera, debido a estas tres características anteriores. El Cisne Negro representa un hecho que es muy complejo de explicar o modelizar, como, en nuestro caso y por ejemplo, la volatilidad. Ahora, sin entrar en un enfoque filosófico, hemos de añadir que el Cisne Negro es muy difícil de modelizar y en nuestra opinión es imposible¹⁴ por su propia definición.

El reciente Brexit (24/06/2016), fue un *auténtico* Cisne Negro debido a que cumplió estas tres características. El lunes negro chino (24/10/2015) también es considerado un Cisne Negro y sucesos históricos como las crisis (la de 2008, 1987 y 1929 como más importantes) son considerados Cisnes Negros.

En este trabajo no adoptaremos dicha definición tan rigurosa, de hecho, el concepto que intentaremos introducir en este trabajo es el concepto de *Ala del Cisne Negro*. No es todo el cisne negro. Y precisamente el *Ala del Cisne Negro* no es más que los *saltos* que realizan los precios. Con diferencia al Cisne negro, el ala del cisne negro es un impacto leve que se produce día a día. Lo que llamamos *picos de volatilidad leves* son las alas del Cisne Negro y el Cisne Negro *completo* es tal como define Taleb.

¹³ Cont, R., y Tankov, P., (2004), *Financial Modelling With Jump Processes*, Chapman & Hall/CRC

¹⁴ En este sentido, nos presentamos con una posición escéptica.

Tal como explicamos en el objetivo, desde el punto de vista de modelización, en este trabajo intentaremos ver cómo afecta introducir picos de volatilidad en el cálculo del VaR/TailVaR y poder analizar (siempre que sea posible) el *impacto* de un Cisne Negro en su totalidad, pero a veces esto no será posible debido también a las limitaciones que tienen los modelos en este aspecto.

Para la modelización real de Cisnes Negros se necesitan modelos mucho más potentes que introducir saltos en los precios debido a que los Cisnes Negros son pura volatilidad, entonces habría que *potenciar la volatilidad del modelo*.

3.5. Alternativas al problema de medición de volatilidad

Como expusimos en el apartado anterior, existen dos limitaciones bastante importantes en la formulación BS. La volatilidad (de los precios) en ningún momento es constate, de hecho, lo contrario, es totalmente estocástica y más difícil de predecir. Para resolver esta limitación, se han formulado *modelos de volatilidad estocástica*, de los cuales en este trabajo hablaremos de forma muy general y en el anexo un simple ejemplo. La otra limitación del modelo es el supuesto de que los precios se comportan como sin cambios de escala, ignorando las discontinuidades diarias que pueden existir en los precios y asumiendo una función continua en la trayectoria de los precios. La figura 3.7.(d) nos demuestra que a cierta senda temporal, los precios dan cambios bruscos, es decir, *los precios dan saltos*, y demostrando que, a corto plazo, los precios no se comportan como una función *estrictamente* continua.

En este trabajo nos encargaremos de implementar un modelo con saltos a los precios. En este apartado expondremos de forma muy general, ambas soluciones y en el siguiente tema detallaremos con mayor profundidad los procesos con saltos.

3.5.1. Una introducción a la volatilidad estocástica

Como hemos mencionado antes, la distribución de los precios suele presentar colas gruesas. Una manera de modelizar dichas colas gruesas es hacer que la volatilidad dependa *también* del precio.

La dinámica del modelo se resume fácilmente en que si el precio se mueve bruscamente de su valor inicial, el movimiento de la volatilidad puede corregir imperfecciones y ajustar la cola gruesa. El principal inconveniente de este procedimiento es la variación y aparición de nuevas *smiles*. Además es un hecho empírico que las volatilidades implícitas varían día a día (incluso pueden variar bastante en un mismo día). Añadido a esto es la información disponible, mientras haya más “tráfico” de un activo, más información se obtiene y más pueden variar las expectativas. Produciéndose que la volatilidad implícita se vuelva estocástica.

Expondremos aquí la idea original de los modelos de volatilidad estocástica (y en el anexo el modelo de Heston); que no más que proporcionarle un proceso estocástico, por ejemplo un browniano, a la volatilidad, es decir:

$$(7) \quad \begin{aligned} dS(t) &= \mu dt S(t) + \sigma(t) S(t) dB_1(t) \\ d\sigma(t) &= \alpha(\sigma, t) dt + \beta(\sigma, t) dB_2(t) \end{aligned}$$

Y usando $\xi[\cdot, \cdot]$ para denotar la covarianza tenemos que

$$\xi[dB_1(t), dB_2(t)] = \eta dt$$

Estableciendo que no es nula la correlación entre el precio (rendimientos) y la variación en volatilidad. En el anexo con el objetivo de ejemplificar explicaremos el modelo de Heston, que es el modelo más utilizado.

En 3.2.2., expusimos que la distribución t de Student no estandarizada se podía obtener combinando una distribución Normal con un parámetro de varianza que se distribuye con una distribución Gamma Inversa. La idea de fondo de los modelos de volatilidad estocástica está basada en ese principio: proporcionarle un comportamiento estocástico (una distribución de probabilidad) a la volatilidad. Por otra parte, los *métodos bayesianos* se pueden utilizar, entre otros temas, para la construcción de modelos de volatilidad (como ARCH, GARCH...) e incluso para modelos con saltos¹⁵. *Insistimos que el principal problema que tiene la modelización financiera se resume en uno solo: un problema de volatilidad.*

Por último, los modelos pueden combinarse aún más, aquí tenemos un modelo con saltos y volatilidad estocástica con saltos en la volatilidad:

$$(8) \quad \begin{aligned} dS(t) &= (\mu - \lambda_1) dt S(t) + \sigma(t) S(t) dB_1(t) + S(t) L_1(t) dq_1(t) \\ d\sigma(t) &= \alpha(\sigma, \lambda_2, t) dt + \beta(\sigma, t) dB_2(t) + L_2(t) dq_2(t) \\ \xi[dB_1(t), dB_2(t)] &= \eta dt \quad ; \quad \xi[dq_1(t), dq_2(t)] = \zeta dt \end{aligned}$$

Un modelo que existe y que es bastante potente, sirviendo, probablemente (o aunque sea aproximarse), como ya dije para modelizar Cisnes Negros. Son los llamados modelos SVJJ y han tenido su utilización en modelizar el VIX, *índices de volatilidad* de los índices financieros¹⁶.

3.5.2. Introducción de saltos en la modelización

Los saltos se producen por movimientos bruscos en el mercado e incluso por “correcciones” en los precios en el mismo. Uno de los más famosos movimientos bruscos se dieron en las crisis: el *crash* de 1929, el de 1987 y la del 2008 (o años posteriores, por contagio). En el del 1987 fue particularmente especial ya que los participantes del mercado se empezaron a dar cuenta del entorno en que se desarrollaban y su componente estocástico y de los desajustes que existían entre sus cálculos y lo que ocurría en el mercado.

¹⁵ Por ejemplo, se puede consultar Jacquier, E., Polson, N., (2010), *Bayesian Methods in Finance*.

¹⁶ Por ejemplo, se puede consultar Zang, X., Ni, J., Huang, J.Z., Wu, L., (2015), *Double-jump stochastic volatility model for VIX: evidence from VVIX*.

Viendo así la necesidad de buscar otros modelos para la modelización financiera. En este sentido aparecieron los modelos de saltos (y los de volatilidad estocástica).

Introduciéndole saltos al modelo permite al modelo la posibilidad de cambiar *bruscamente*. Se ha demostrado (ver Cont, R., 2004) que los *modelos de difusión* (modelo BS) pueden generar colas pesadas siempre que se escoja apropiadamente coeficientes no lineales. Sin embargo la elección del parámetro de difusión como no lineal nos genera un resultado de volatilidad no estacionaria que puede resultar muy costosa y contradictoria con los supuestos del modelo de difusión. De esta forma se generan colas pesadas al coste de tener una volatilidad muy alta. Contrariamente, los *modelos de difusión con saltos* nos permiten obtener colas gruesas sin tener que introducir parámetros no estacionarios.

Por último, una de las principales ventajas que tiene los modelos de difusión con saltos es que modelizan la *discontinuidad* en los movimientos de los precios. Característica que *no* pueden generar los modelos de difusión.

La posible modelización de los cambios bruscos en los precios nos permite explicar la existencia de las *smiles* de volatilidad: la presencia de asimetría o *smiles* se atribuye al miedo de grandes saltos bajistas, siendo esto consistente al hecho de que las *smiles* de volatilidad han aumentado desde el crack del 1987, reflejando este *miedo al salto* (“*jump fear*”). Además que los modelos de difusión con saltos también distinguen entre *smiles* negativas (opciones sobre índices y activos) y *asimetrías* (mercados de divisas) tal como explicamos en el apartado 3.1.

En la **Tabla 3.6**, se exponen las principales desventajas de los modelos de difusión.

Tabla 3.6 modelos de difusión y modelos con saltos	
Característica	Modelos de difusión
Movimientos bruscos	Difícil de modelizar: necesita mucha volatilidad
Colas gruesas/pesadas	Necesita volatilidad no lineal
¿Cómo son los mercados?	Son mercados <i>completos</i>
¿Cómo se comportan las pérdidas?	Los precios se mueven de forma continua y son <i>gaussianos</i> por lo que no hay movimientos bruscos y no hay grandes pérdidas
Fuente: Cont, R., y Tankov, P., (2004), <i>Financial Modelling with Jump Processes</i> , Chapman & Hall/CRC	

De forma general, un modelo con saltos está compuesto por la parte de difusión y se le añade los saltos con un *proceso* $J(t)$ cuya *amplitud* es $L(t)dJ(t)$ y su *intensidad de salto* λ :

$$(9) \quad dS(t) = (\mu - \lambda)dtS(t) + \sigma S(t)dB(t) + S(t)L(t)dJ(t)$$

- La amplitud del salto se refiere a como esa distribuido el salto
- La intensidad del salto se refiere al promedio de saltos durante el periodo.

Son los paramentos difíciles de estimar y que estimaremos por máxima verosimilitud con un programa de optimización con R-Studio.

Capítulo 4: Procesos con saltos de Poisson

4.1. Proceso de Poisson estándar

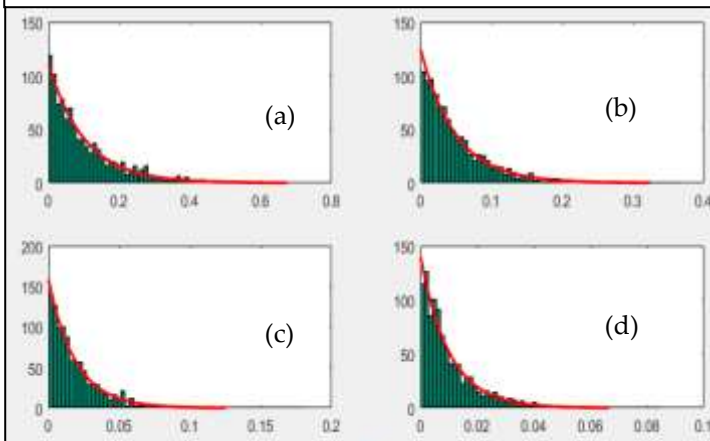
El proceso de Poisson es el ejemplo y proceso fundamental, menos complejo con saltos y trayectoria *discontinua* y es necesario para construir procesos con saltos más complejos.

Conceptos previos necesarios. Para la definición de Proceso de Poisson necesitamos la definición de variables (aleatorias) distribuidas con una *distribución exponencial*. Una variable X se distribuye como una exponencial si su función de densidad viene dada por $f(x, \lambda) = \lambda e^{-\lambda x}, \forall x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, con parámetro de intensidad $\lambda > 0$ y cuya función de distribución *cumulativa* es $F(x, \lambda) = 1 - \lambda e^{-\lambda x}, \forall x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. Tenemos una representación gráfica con distintas intensidad en la **Figura 4.1**. Entre las propiedades más importantes de las variables que se distribuyen con esta ley tenemos dos bastantes importantes:

- *Falta de memoria* ya que $\Pr(T > s + t | T > s) = \Pr(T > t)$, siendo la única distribución (junto con su análoga discreta: distribución geométrica) que tiene esta propiedad.
- Si $(\tau_i)_{i \geq 1}$ son variables aleatorias independientes y distribuidas exponencialmente con intensidad λ entonces la variable aleatoria $Q_t = \inf\{n \geq 1, \sum_{i=1}^n \tau_i > t\}, \forall t > 0$ sigue una *distribución de Poisson* con parámetro de intensidad λt , es decir: $p(Q_t = n) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!} \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Esta propiedad es conocida como *divisibilidad infinita* ya que indica que una variable aleatoria Poisson se puede *dividir* en un número arbitrario de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d.).

Finalmente, sea $(\tau_i)_{i \geq 1}$ una secuencia de variables aleatorias independientes y distribuidas exponencialmente con intensidad λ y $T_n = \sum_{i=1}^n \tau_i$, entonces el proceso $N(t) = \sum_{n \geq 1} \mathbf{1}_{t \geq T_n}$, donde $\mathbf{1}_{t \geq T_n} := \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq T_n \\ 0 & \text{si } 0 \leq t < T_n \end{cases}$ es una *función indicatriz*, es llamado **proceso de Poisson** con intensidad λ . De esta forma el proceso de Poisson es un *proceso de conteo*: cuenta el número de *tiempos aleatorios* (T_n) que ocurren entre 0 y t cuando $(T_n - T_{n-1})_{n \geq 1}$ es una secuencia de variables i.i.d. exponenciales.

Figura 4.1. Distribuciones exponenciales con intensidad: (a) $\lambda = 10$, (b) $\lambda = 20$, (c) $\lambda = 50$ y (d) $\lambda = 100$

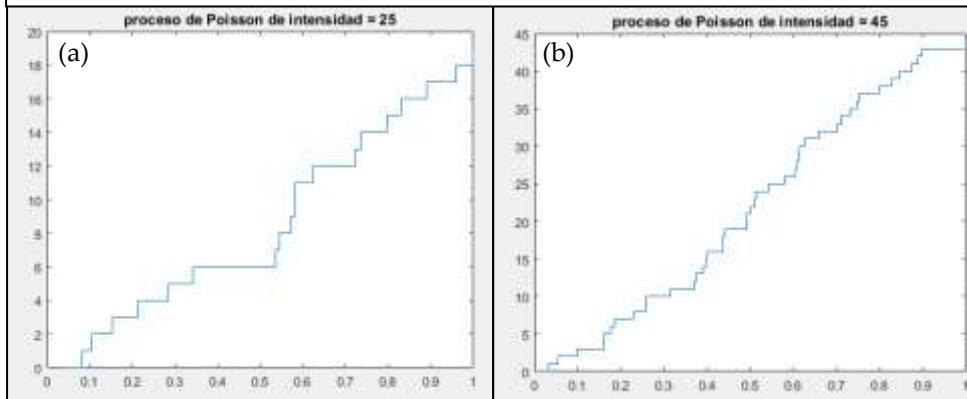


Fuente: Elaboración propia con Matlab

A continuación expondremos las propiedades de este proceso:

- $\forall t > 0, N(t) < \infty$ c. s.
- $\forall w$, la trayectoria $t \rightarrow N(t, w)$ es *segmentadamente o escalonadamente continua* y creciente por saltos de amplitud unitaria.
- La trayectoria $t \rightarrow N(t, w)$ es *continua hacia la derecha con limite a la izquierda* (conocido en el lenguaje financiero por sus siglas en francés *càdlàg*: “continue à droite, limite à gauche”; o por sus siglas en ingles **RCLL**: “right continuous with left limits”). Podemos ver sus *propiedades graficas* en la **Figura 4.2.**
- $N(t)$ es continuo en probabilidad: $\forall t > 0, N_s \xrightarrow[p]{s \rightarrow t} N_t$
- $\forall t > 0, \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, P(N(n)) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!}$, consecuencia de lo anterior, tenemos que $\varphi_{N_t}(\omega) := E[e^{i\omega N_t}] = e[\lambda t(e^{i\omega} - 1)]$, $\forall \omega \in \mathbb{R}$, su función característica.
- $\forall t_i < t_n, i = 1, 2, \dots, n, \{N(t_n) - N(t_{n-i})\}_{i=1}^n$ son variables independientes, es decir, que $N(t)$ posee incrementos independientes.
- **Condición de homogeneidad.** Los incrementos de $N(t)$ son homogéneos, es decir, $\forall t, s > 0, t > s, \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, P(N(t) - N(s) = n) = \frac{e^{-\lambda(t-s)} (\lambda(t-s))^n}{n!}$
- **Propiedad de Markov:** $\forall t, s > 0, t > s, E[f(N(t)) | N(u), u \leq s] = E[f(N(t)) | N(s)]$

Figura 4.2. Procesos de Poisson con intensidad: (a) $\lambda = 25$, (b) $\lambda = 45$



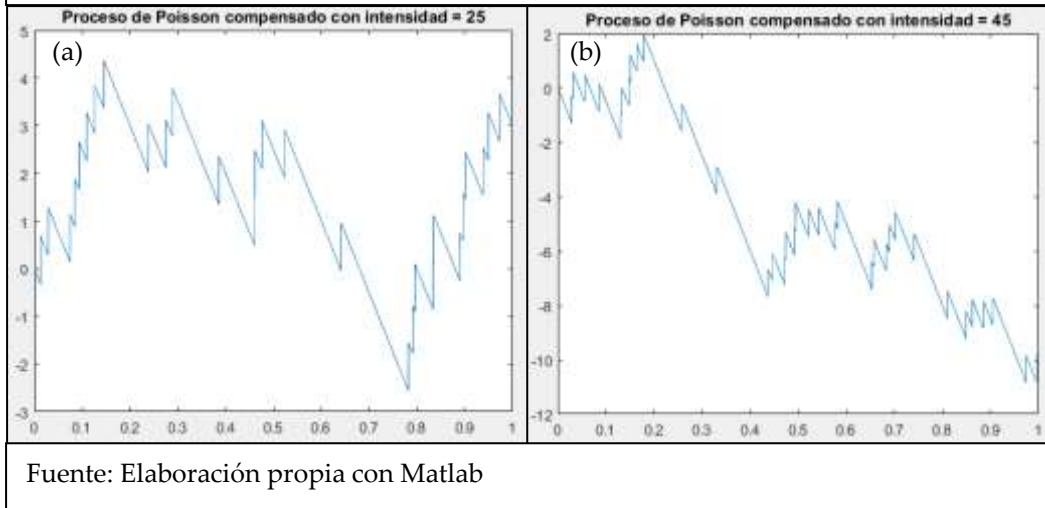
Fuente: Elaboración propia con Matlab

4.1.1. Proceso de Poisson compensado

A pesar de sus potentes propiedades, el proceso de Poisson **no es una martingala**. Por lo que para solucionar este problema, se le añade (o se resta) lo que se llama el *compensador*, que es precisamente la media del proceso: $\bar{N}(t) = N(t) - \lambda t$, obteniendo un *proceso de Poisson compensado* que cumple la condición de martingala y posee una *versión centrada* de la distribución de Poisson y $\varphi_{\bar{N}_t}(\omega) = e[\lambda t(e^{i\omega} - 1 - i\omega)]$, $\forall \omega \in \mathbb{R}$. En la **Figura 4.3.**, hemos simulado dicho proceso para dos intensidades distintas.

En nuestro análisis no es necesario que el Proceso de Poisson sea una martingala, sin embargo con un objetivo de valoración financiera usando modelos de saltos, el requerimiento de que el proceso sea una martingala es esencial.

Figura 4.3. Procesos de Poisson compensado con intensidad: (a) $\lambda = 25$, (b) $\lambda = 45$



4.2. Proceso de Poisson compuesto

El proceso de Poisson descrito anteriormente es muy limitado para modelizar comportamiento de precios reales ya que sus saltos son de amplitud constante. Por lo que será necesario introducir modelos con saltos de amplitud aleatoria. A continuación, y para ello, definiremos el proceso de Poisson compuesto, el cual es un proceso clave para muchos de los conceptos en secciones siguientes.

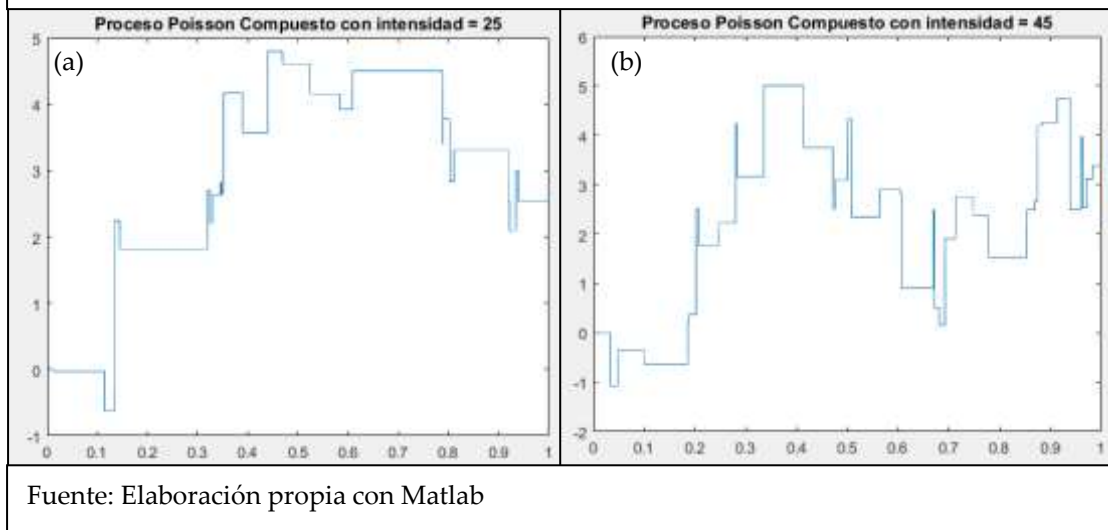
De esta forma, sea $(X_n)_{n \geq 1}$ una secuencia de variables aleatorias i.i.d con la distribución $f(x)$ y $N(t)$ un proceso de Poisson con intensidad λ e independiente X_n . El proceso de **Poisson compuesto** $Y(t)$ es definido como $Y(t) = \sum_{n=1}^{N_t} X_n$. Tenemos las siguientes propiedades:

- La trayectoria de $Y(t)$ son funciones càdlàg escalonadamente constantes (**Figura 4.4**).
- Los *tiempos de salto* del proceso poseen la misma distribución que los tiempos del salto del proceso de Poisson $N(t)$.
- Son *procesos de Levy*¹ y son los únicos procesos de Levy con trayectoria escalonadamente constante.
- Su función característica es $\varphi_{Y_t}(\omega) = e^{[\lambda t(\varphi_{X_t}(\omega)-1)]} \stackrel{\text{def}}{=} \exp[\lambda t \int_{-\infty}^{\infty} (e^{i\omega x} - 1)f(dx)]$.
- Al igual que con el proceso de Poisson simple, se le puede sustraer el compensador para obtener un proceso de *Poisson compuesto compensado*: $\bar{Y}(t) = Y(t) - \beta\lambda t$, donde β es la amplitud de salto promedio. Como consecuencia, $\bar{Y}(t)$ es una martingala.

¹ Un proceso estocástico càdlàg $(Z_t)_{t \geq 0}$ en $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathbb{F})$ iniciado en origen es considerado un *proceso de Lévy* si cumple las siguientes propiedades.

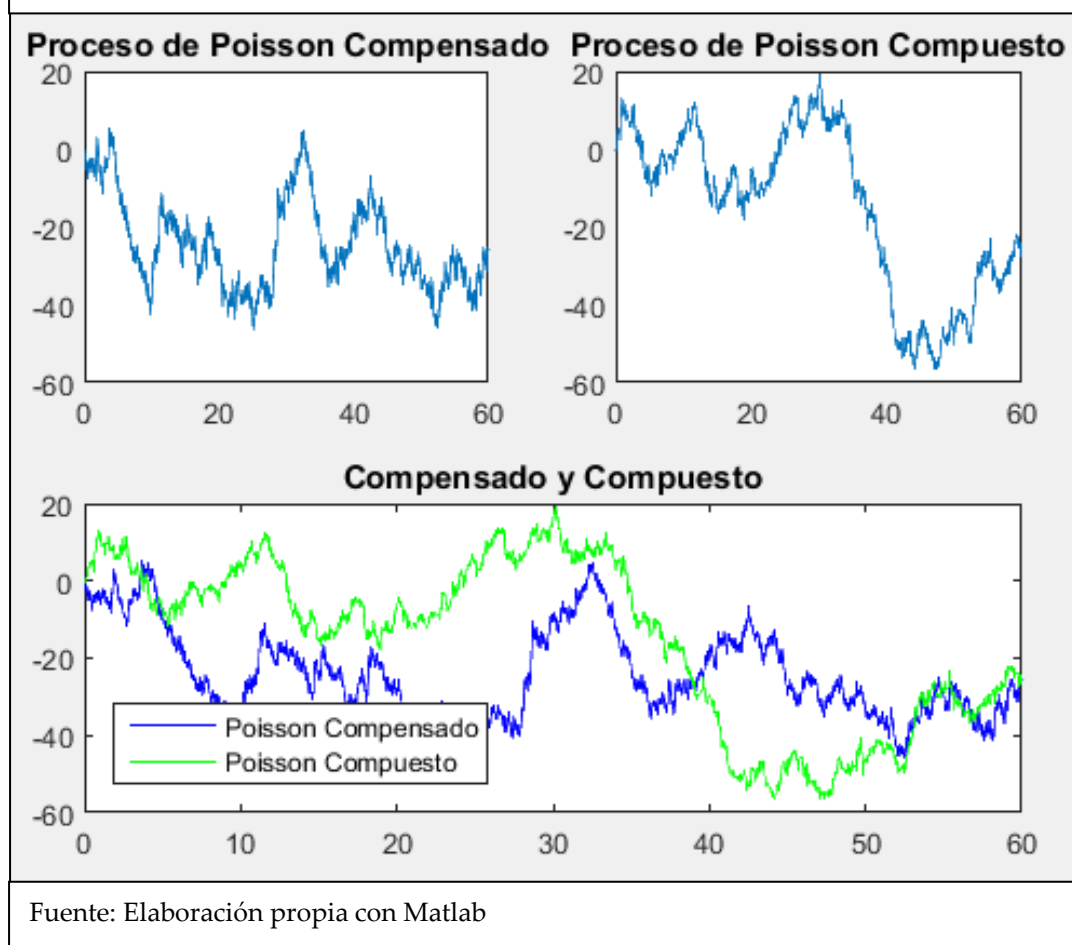
- Incrementos independientes: $\forall t > s, \xi[Z_t - Z_s, \mathbb{F}_s] = 0$
- Incrementos estacionarios: $\forall t, s > 0$, la distribución de $Z_{t+s} - Z_t$ no depende del tiempo.
- *Continuidad estocástica*: $\forall \varepsilon \geq 0, \lim_{s \rightarrow 0} P(|Z_{t+s} - Z_t| \geq \varepsilon) = 0$. Esta condición lo que quiere decir que la probabilidad de ver un salto en un t específico es cero: los saltos y las discontinuidades ocurren en tiempos aleatorios, no por *efectos de calendario*.

Figura 4.4. Procesos de Poisson compuesto con saltos gaussianos con intensidad:
(a) $\lambda = 25$, (b) $\lambda = 45$



Para poder realizar una comparación, hemos ampliado el horizonte temporal y comparado el modelo compensado y el compuesto con una única intensidad (**Figura 4.5**).

Figura 4.5. Procesos de Poisson compuesto con saltos gaussianos y compensado con intensidad $\lambda = 45$.



4.3. Algoritmos para la simulación de los procesos de Poisson

Con el objetivo de entender la dinámica de fondo de los procesos con saltos, en este apartado explicaremos algunos *algoritmos* para poder generar los procesos antes expuestos.

4.3.1. Proceso de Poisson estándar

Para generar un proceso de Poisson, necesitamos antes tener un *generador de Poisson*, que en nuestro caso escogimos utilizar el de exponenciales dada su eficacia. Para ello se utiliza un *bucle condicional*:

Algoritmo para un generador de Poisson

Establecer un inicio a las variables: $X = 0$, $\text{Sum} = 0$, variable dicotómica = 0 y dar un valor a la intensidad = λ

El bucle condicional consiste en ir sumando a nuestra variable exponencial nuestra variable Sum y si esta suma es menor a la intensidad (condición) entonces sumamos una unidad a la variable X . Si esto se cumple, obtenemos el generador de Poisson X . Si la condición no se cumple entonces el bucle se para y no hay proceso, en este caso nuestra variable dicotómica es 1. Si se cumple la condición obtenemos el generador de Poisson X .

Fin del bucle

Para generar un proceso de Poisson estándar tenemos que crear un bucle en donde le vayamos sumando a un proceso cualquiera nuestro generador de Poisson con parámetro de intensidad $h\lambda$, donde h es la *discretización* de la trayectoria (i.e. $h = \frac{T}{N}$, donde N es el número de simulaciones que deseamos hacer y T el horizonte temporal del proceso:

Algoritmo para simular un proceso de Poisson estándar

Establecer: N = número de simulaciones, T =horizonte temporal; $h = T/N$, e iniciar (crear) las variables $X = 0$ (un proceso cualquiera), no es que valga cero desde el principio sino que hay que crearla y darle valor inicial para que *informáticamente* tenga sentido, $I = 0$ (nuestro generador de Poisson, con el algoritmo anterior, que lo llamamos *Poissgen*) y dar un valor a la intensidad = λ

El bucle (con j como *iniciador* o *indicador*) desde 1 hasta N

$$I(j) = \text{Poissgen}(h\lambda)$$

$$X(j + 1) = X(j) + I(j)$$

Fin del bucle

Para crear los procesos compensados solo hay que restarle la media, es decir, el algoritmo queda igual que el anterior pero en $X(j + 1) = X(j) + I(j)$ se le resta $h\lambda$, es decir:

$$X(j + 1) = X(j) + I(j) - h\lambda$$

Todo permanece igual.

4.3.2. Proceso de Poisson compuesto

Por ultimo para simular un proceso de Poisson Compuesto, hay que añadirle la distribución que se desea dentro del bucle mediante una condición:

Algoritmo para simular un proceso de Poisson compuesto

Establecer: N = número de simulaciones, T =horizonte temporal; $h = T/N$, e iniciar (crear) las variables $X = 0$, $I = 0$ y dar un valor a la intensidad $= \lambda$. Establecer los parámetros de la función de distribución $F(\cdot) = f$ deseada para los saltos. Por ejemplo, la media y la desviación típica, en el caso de ser una distribución Normal (o Log-Normal).

El bucle (con j como *iniciador* o *indicador*) desde 1 hasta N

$$I(j) = \text{Poissgen}(h\lambda)$$

Sea $F(\cdot) = f$ la distribución deseada

Si $I(j) = 0$, entonces $F(j) = 0$, en caso contrario $F(j) = f$, entonces

$$X(j + 1) = X(j) + F(j)$$

Fin del bucle

Los códigos introducidos en Matlab siguen esta idea.

4.4. Explicación del modelo de difusión con saltos

4.4.1. El modelo de Merton

Un proceso de **difusión con saltos** tiene la forma conocida:

$$(1) \quad \frac{dZ(t)}{Z(t)} = \gamma dt + \sigma dB(t) + d \left(\sum_{n=1}^{N(t)} Y_n - 1 \right)$$

Que la única diferencia con el browniano es la suma del salto de Poisson compuesto.

Resolviendo la ecuación igualmente con el lema de Itô, obtenemos:

$$(2) \quad Z(t) = Z(0) \exp \left[\left(\gamma - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma B(t) \right] \prod_{n=1}^{N(t)} Y_n$$

Donde $N(t)$ es el proceso de Poisson compuesto que *cuenta* los saltos de Z e Y (que representan en si la amplitud de los saltos). Ahora lo que hay que determinar es la distribución de los saltos. En este sentido, el modelo que vamos a utilizar en este trabajo, usaremos el que más práctico implementar dado el objetivo que tiene este trabajo.

En el *modelo de Merton*² (que es el modelo que vamos a implantar), los saltos en los precios logarítmicos se distribuyen como una distribución gaussiana: $Y \sim N(m, \psi)$, permitiéndonos obtener una *distribución de densidad* de $Z(t)$ como una serie rápidamente convergente. Teniendo:

$$(3) \quad p_t(z) = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k! \sqrt{2\pi(\sigma^2 t + k\psi^2)}} \exp \left[-\frac{(z - \gamma t - km)^2}{2(\sigma^2 t + k\psi^2)} \right]$$

Como se puede apreciar, la distribución es de hecho una combinación (una *convolucion*) de a distribución Normal con la distribución de Poisson. Esto tiene su importancia práctica y nos proporciona bastantes ventajas para su aplicación práctica.

Cuya función característica es

$$(4) \quad \varphi(\omega) = \omega \left(\gamma i - \frac{\sigma^2 \omega}{2} \right) + \lambda \left\{ \exp \left[\omega \left(mi - \frac{\sigma^2 \psi}{2} \right) \right] - 1 \right\}$$

Y de forma muy similar podemos obtener su fórmula para valorar una opción muy parecida a la formula cerrada de BS:

$$V(\tau, S) = e^{-r\tau} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda\tau} (\lambda\tau)^n}{n!} H \left\{ S \exp \left[nm + \lambda\tau + \frac{n\psi^2}{2} - \lambda\tau e^{\left(m + \frac{n\psi^2}{2}\right)} \right] \exp \left[r\tau - \frac{\tau\sigma^2 + n\psi^2}{2} + \left(\sigma^2 + \frac{n\psi^2}{\tau} \right) B_\tau \right] \right\}$$

O simplifícadamente:

$$V(\tau, S) = e^{-r\tau} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda\tau} (\lambda\tau)^n}{n!} BS_M^{JD}(\tau, S_M, \sigma_M^2)$$

Donde

$$S_M = S \exp \left[nm + \lambda\tau + \frac{n\psi^2}{2} - \lambda\tau e^{\left(m + \frac{n\psi^2}{2}\right)} \right], \quad \sigma_M^2 = \sigma^2 + \frac{n\psi^2}{\tau}$$

$$BS_M^{JD}(\tau, S, \sigma) \equiv BS(\tau, S, \sigma) = e^{-r\tau} H \{ S \exp[(r + \sigma^2)\tau + \sigma B_\tau] \}$$

Los supuestos del modelo son los mismos que los de BS, excepto que ahora el subyacente se comporta como un proceso descrito con la ecuación (2).

Para acabar este apartado, expondremos en la **Tabla 4.1.** las ventajas que poseen los modelos con saltos frente a los modelos de difusión sin saltos. Es una *ampliación* de la **Tabla 3.6.**

Tabla 4.1. Comparación entre modelos de difusión y modelos con saltos		
Característica	Modelos con saltos	Modelos de difusión
Movimientos bruscos	Lo modeliza	Difícil de modelizar: necesita mucha volatilidad
Colas gruesas/pesadas	Lo modeliza	Necesita volatilidad no lineal
Tipo de distribución	Muy leptocúrtica	Mesocúrtica
¿Cómo se comportan las pérdidas?	Los precios se mueven de forma <i>discontinua</i> , habiendo movimientos bruscos y puede haber grandes pérdida.	Los precios se mueven de forma continua y son <i>gaussianos</i> por lo que no hay movimientos bruscos y no hay grandes perdidas
Fuente: Cont, R., y Tankov, P., (2004), <i>Financial Modelling with Jump Processes</i> , Chapman & Hall/CRC		

² Merton, R.C., (1975), *Option pricing when underlying stock returns are discontinuous*, *Journal of Financial Economics* 3 (1976) 125-144.

4.4.2. *Podemos llamarlo *coherencia estadística*

Podemos exponer y comprobar como toda la modelización tiene su *coherencia estadística*.

En el capítulo anterior, expusimos como la distribución de los rendimientos se ajustaba mejor a una distribución leptocúrtica y precisamente presentamos la distribución t de Student no estandarizada para dicho ajuste. También expusimos que la distribución t de Student no estandarizada se podía obtener combinando una distribución Normal con un parámetro de varianza que se distribuye con una distribución Gamma Inversa. En este capítulo hemos *mencionado*, muy rápidamente, los procesos de Levy. Ahora, lo que expondremos, de manera muy sencilla, es cómo se relacionan todas estas distribuciones entre sí y cómo toda la modelización estadística empieza a presentar coherencia.

Si Z es una variable aleatoria que se distribuye con una distribución Gama Inversa, de parámetro de forma " a " y parámetro de escala " b ", escribimos que $Z \sim IG(a, b)$. Aquí es donde hacemos el *paso a Lévy*. Si $a = \frac{1}{2}$ y $b = \frac{n}{2}, n > 0$ entonces $IG\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}\right) = L(0, n)$, donde $L(0, n)$ es la función de densidad de la distribución de Lévy con parámetro de localización nulo y parámetro de escala n . La distribución Lévy se puede generalizar y encontrar una distribución más compleja que pueda dar origen a muchas otras distribuciones. Esta distribución se llama **distribución Estable o distribución alfa-Lévy**. Sin embargo el paso de Lévy a alfa-Lévy no es tan directo. La función de densidad de la distribución Estable no tiene una representación sencilla, por lo que se suele utilizar su *función característica*³. Si definimos dicha función característica como $\varphi_{AL}(t) \stackrel{\text{def}}{=} AL(i, m, n, \alpha, \beta)$, donde i es la unidad imaginaria, m el parámetro de localización, n el parámetro de escala, β el parámetro de asimetría y α el parámetro de estabilidad, la que le da el nombre a la distribución. Entonces $\varphi_{L(m,n)}(t) = AL\left(i, m, n, \frac{1}{2}, 1\right)$, esto quiere decir que cuando $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = 1$, la distribución alfa-Lévy se distribuye como una Levy. Además, esta distribución define otras distribuciones ya conocidas:

- $AL(i, m, n, 1, 0)$ es la distribución de Cauchy con parámetro de localización m y escala n .
- $AL(i, m, n, 2, 1)$ es la distribución de Normal con parámetro de localización m y escala $2n^2$.

Lógicamente, la distribución Levy o alfa-Levy caracteriza a los procesos de Levy. Y de esta forma hemos relacionado estadísticamente todos los conceptos tratados en este trabajo. Los procesos de Lévy incluyen una riqueza de movimientos estocásticos: los *procesos gamma*, los *procesos de Cauchy*, los *procesos de Laplace* y también está relacionado con distribuciones mucho más complejas como la distribución *varianza-gamma* o la *Normal-Inversa Gamma*. Todos estos conceptos se pueden encontrar en la literatura de modelización financiera. En este trabajo nos centraremos en trabajar con el *modelo de Merton* que le incorpora saltos de Poisson compuesto distribuido como una distribución Normal al movimiento de los precios. Como hemos mencionado antes, los saltos de Poisson compuesto es uno de los procesos de Levy más sencillos y fácil de implementar. Nuestro objetivo es exponer un modelo que logre salvar las limitaciones del proceso geométrico estándar y consideramos que este modelo puede hacerlo.

³ Ver anexo: Cálculo y probabilidad.

4.4.3. Simulación de un modelo con saltos

La simulación de un modelo con saltos es relativamente sencilla ya que es *sumarle* a un proceso de browniano geométrico el proceso con saltos y esto es precisamente lo que se hace. Primero se simula un proceso (por el ejemplo el browniano geométrico, luego se simula el otro (por ejemplo el de saltos) y luego se suman ambos procesos. En esto se basa el algoritmo explicado a continuación.

Algoritmo para simular un modelo de Merton

Establecer: N = número de simulaciones, T =horizonte temporal; $h = T/N$, e iniciar (crear) las variables $X = 0$, $I = 0$ y dar un valor a la intensidad $= \lambda$. Establecer los parámetros de la función de distribución $F(\cdot) = f$ deseada para los saltos. Por ejemplo, la media y la desviación típica, en el caso de ser una distribución Normal (o Log-Normal). Ahora habrá cuatro parámetros que establecer: 2 para el proceso de difusión sin saltos y otros dos para los saltos.

El bucle (con j como *iniciador o indicador*) desde 1 hasta N

Generamos primero el componente del salto

$$I(j) = \text{Poissgen}(h\lambda)$$

Sea $F(\cdot) = f$ la distribución deseada

Si $I(j) = 0$, entonces $F(j) = 0$, en caso contrario $F(j) = f$, entonces

$$F(j) = f[I(j)]$$

Ahora generamos el modelo de difusión en el que le sumamos el salto

$$X(j + 1) = f_B(h) + f[I(j)]$$

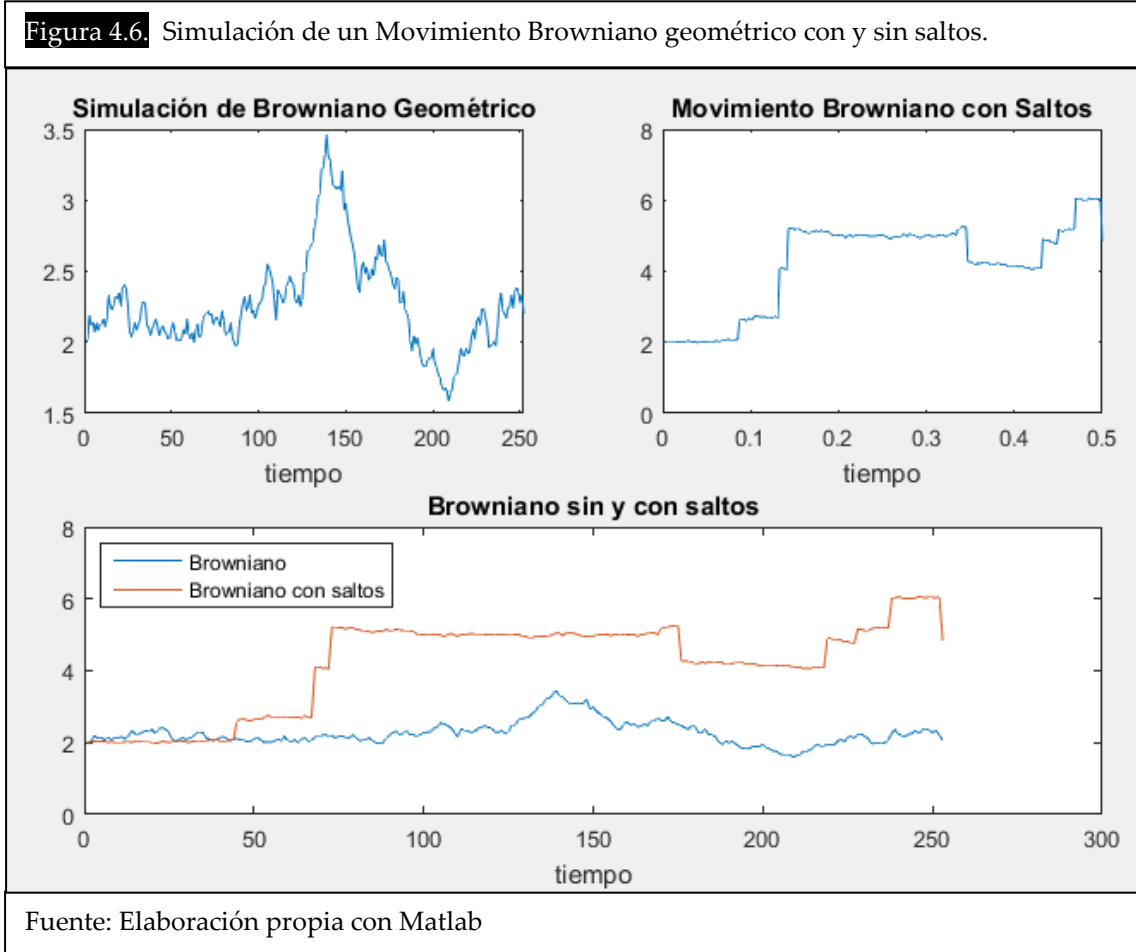
Donde $f_B(h)$ es la parte sin salto del proceso. En nuestro caso está compuesto por la media y desviación típica del proceso.

Fin del bucle

Para más detalles sobre el procedimiento de simulación, ver anexo códigos de Matlab.

4.4.4. Primera comparación entre Browniano geométrico sin saltos y con saltos

Por último, con un objetivo comparativo y para enlazar con el siguiente capítulo, en la **Figura 4.6.** se establece una comparación entre un movimiento browniano geométrico y movimiento browniano geométrico con saltos.



Podemos obtener varias observaciones:

- Lo primero y que puede resultar “sorprendente” es el *engaño de la escala*. Este problema o fenómeno ya lo habíamos mencionada en el capítulo anterior, pero en esta figura se observa claramente. Sin ver el eje de ordenadas, podemos pensar que el movimiento browniano geométrico *da un salto*, pero si vemos los valores, el salto no es significativo, y esto se observa cuando se compara con un movimiento browniano con saltos.
- Lo segundo es lo *brusco* o *violento* que puede resultar el salto, pero esto ocurre de esta manera por el proceso que hemos utilizado y por el tipo de salto que hemos generado. Sin embargo, nuestro objetivo es incorporar picos de volatilidad (*alas del Cisne Negro*) en la modelización de los precios o rendimientos y este tipo de salto se adecua al objetivo. Cuando se utilizan modelos más complejos el salto no es tan brusco.

Capítulo 5: Modelización financiera con movimiento browniano geométrico y con saltos de Poisson. Cálculo del VaR y TailVaR

5.1. Introducción

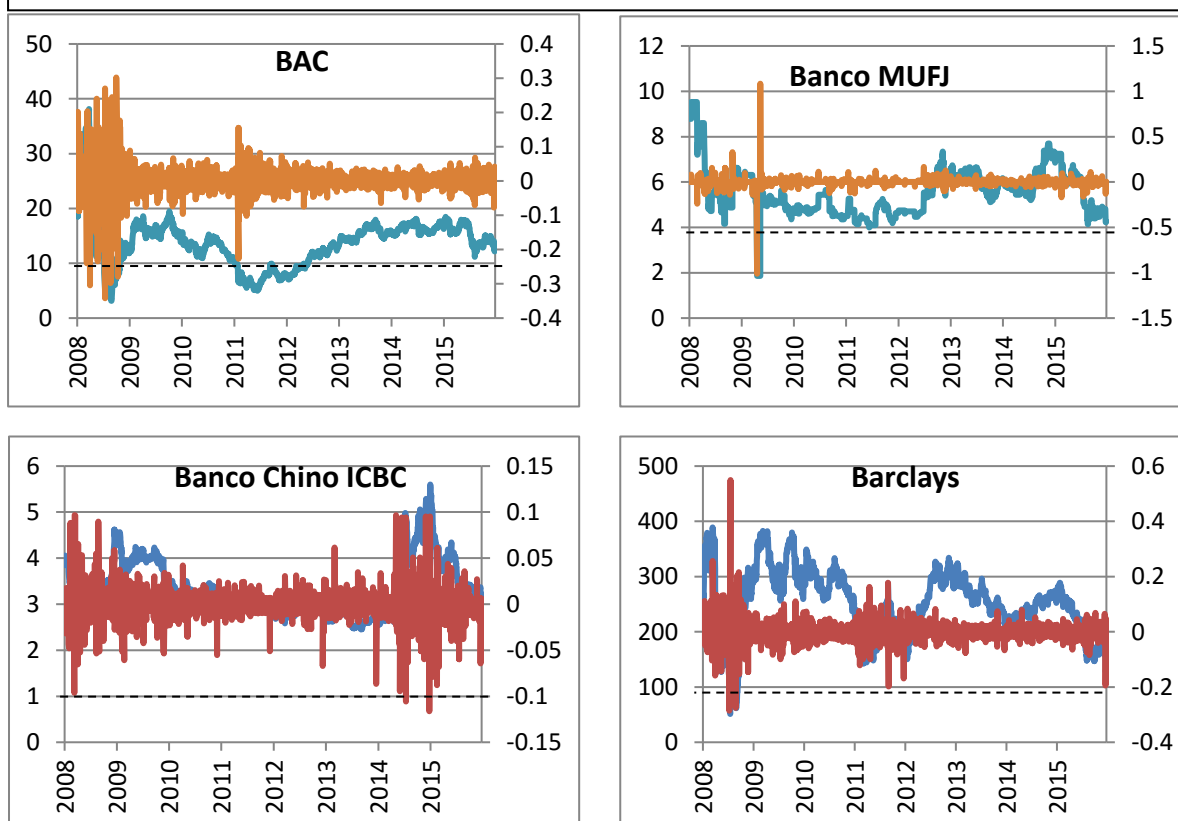
Llegamos ya al final del trabajo. En este capítulo lo que expondremos es la *aplicación práctica* de todo lo explicado en el trabajo. El procedimiento va ser el siguiente: Primero simularemos las series con un movimiento Browniano geométrico¹ con parámetros calculados el tema 3 y comparando la serie con los datos reales. Luego la simularemos el movimiento con saltos y comparando con la realidad y con la serie browniana. Como *métrica de riesgo* calcularemos y compararemos para ambos modelos el VaR y el TailVaR. A continuación presentaremos el cálculo del *backtesting* para cada serie. Finalmente, el tema concluye con una reflexión filosófica sobre la modelización financiera.

5.2. Presentación de los datos y Cisnes Negros

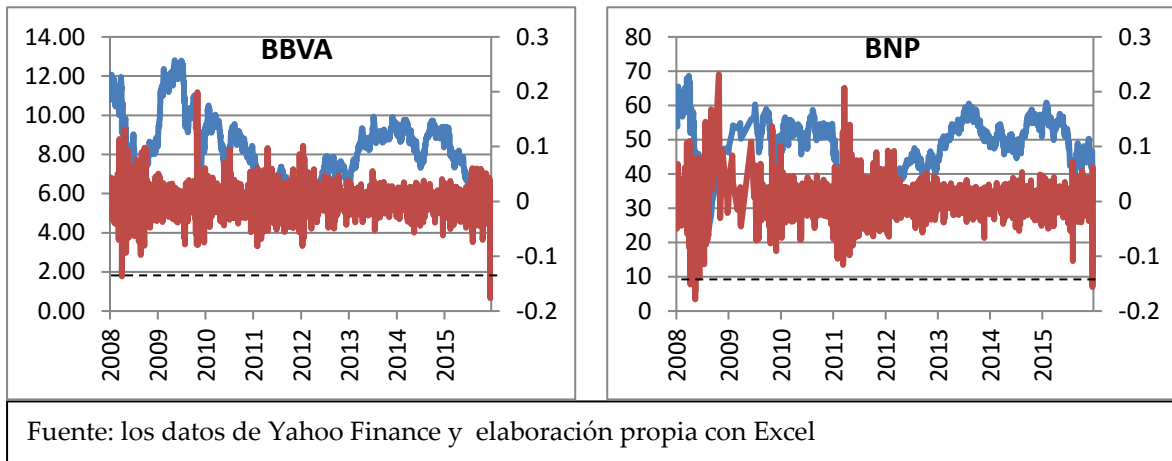
5.2.1. Los precios de cierre y los rendimientos (Bancos)

En la **Figura 5.1.** se presentan las series temporales de los precios de cierre (no ajustados por dividendos) de las acciones de las entidades bancarias y sus rendimientos logarítmicos. Hemos escogido una senda temporal de 8 años.

Figura 5.1. Precios de cierre de los Bancos y rendimientos



¹ En todo el análisis de los capítulos 3, 4 y 5 cuando nos refiramos al movimiento browniano estamos refiriéndonos al movimiento browniano geométrico.

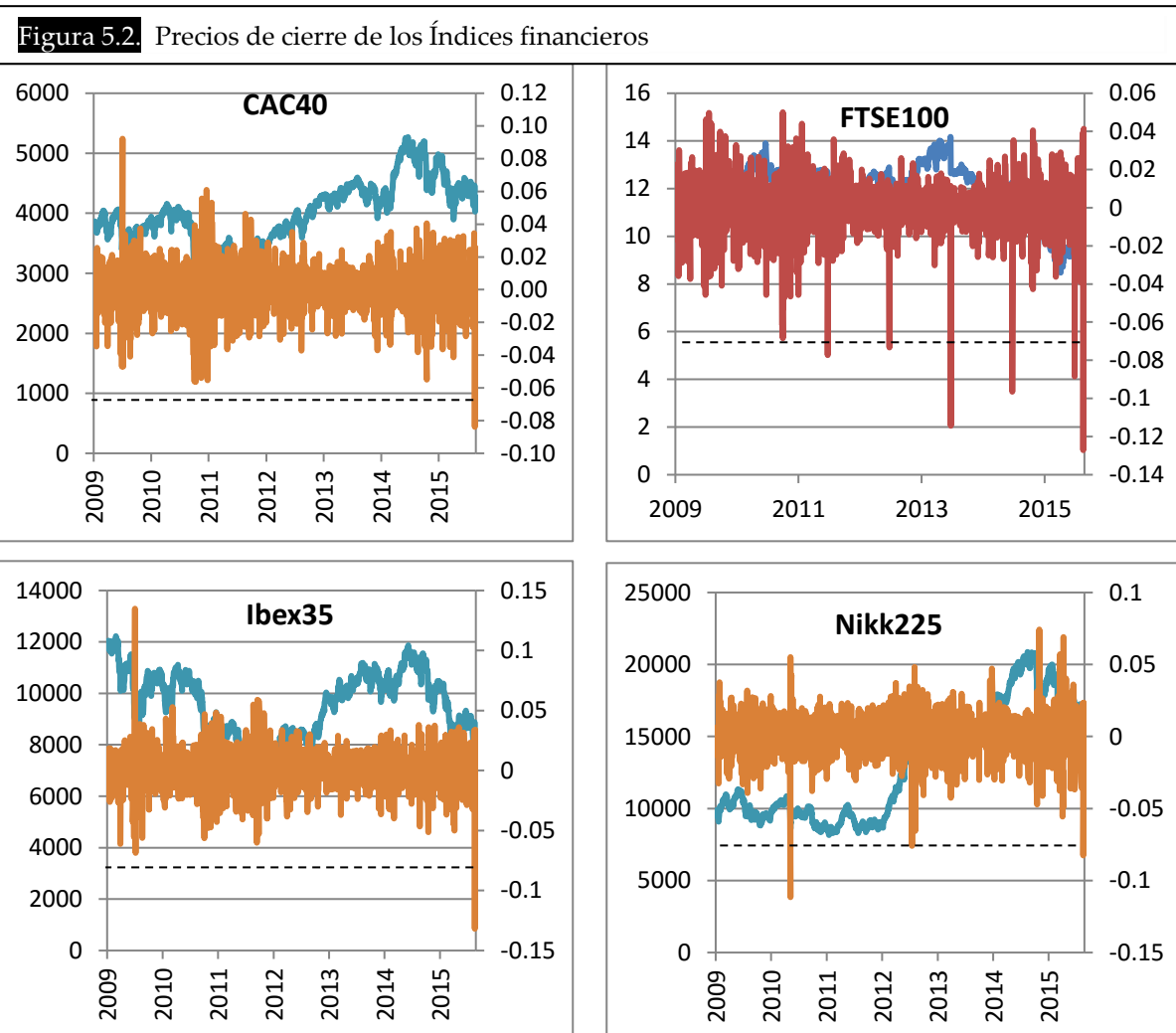


- El **Bank of America** (BAC) es el segundo mayor holding bancario de Estados Unidos por volumen de activos. Su negocio principalmente se centra en la banca minorista, la banca privada y la banca de inversión, esta última reforzada por la adquisición de Merrill Lynch en 2008. Bank of America junto con *JP Morgan Chase*, Citigroup y *Wells Fargo* forman la elite bancaria norteamericana.
- El **Banco Tokio Mitsubishi UFJ** es el mayor banco del Japón originado a partir de la fusión del Banco de Tokio-Mitsubishi Ltd. y el banco UFJ Ltd. Por volumen de activos se encuentra dentro de los 20 bancos más grandes a nivel mundial ofreciendo servicios de banca comercial y banca de inversión. El Banco Tokio Mitsubishi UFJ es uno de los bancos que promueve el uso de las *cripto-monedas* como el *bitcoin* demostrado por su reciente alianza estratégica con *Coinbase* y su intención de lanzar su propia *cripto-moneda* en el año 2017.
- El **Barclays PLC** es una sociedad pública de responsabilidad limitada con sede en Londres y formada por un holding cuyos valores cotizan en la bolsa de Londres, la bolsa de Nueva York y la bolsa de Tokio. Sus productos se dividen en banca comercial, banca de inversión y banca privada. Actualmente se encuentra entre los 30 bancos más grandes por volumen de activos (puesto 27) a nivel mundial y junto con *HSBC Holdings* y *Lloyds Banking Group* lidera el mercado de servicios financieros en Reino Unido.
- El **Industrial and Commercial Bank of China (ICBC)** es el banco comercial más grande de la República Popular de China. Su capitalización bursátil lo sitúa también como uno de los bancos más valiosos del mundo. El banco opera principalmente en banca corporativa, banca personal (depósitos y préstamos principalmente) y tesorería (mercados financieros), entre otros servicios bancarios y financieros. A pesar de ser una entidad financiera comercial, el banco acostumbra a participar en la concesión de préstamos institucionales. ICBC cotiza en las Bolsas de Shanghai y Hong Kong desde el año 2006 y sus principales accionistas son el fondo de inversión gubernamental Huijin y el Ministerio de Finanzas chino.
- **BBVA** es la segunda entidad financiera por volumen de activos en España y la número 29 a nivel mundial. Se encuentra presente en 35 países a nivel mundial con una fuerte presencia en Latinoamérica. Sus beneficios netos reportados en el año 2015 ascienden a 2.6 billones de euros. Forma parte del IBEX 35 además del *Dow Jones Euro Stoxx 50*, que agrupa las 50 empresas más grandes de 12 países de la eurozona.

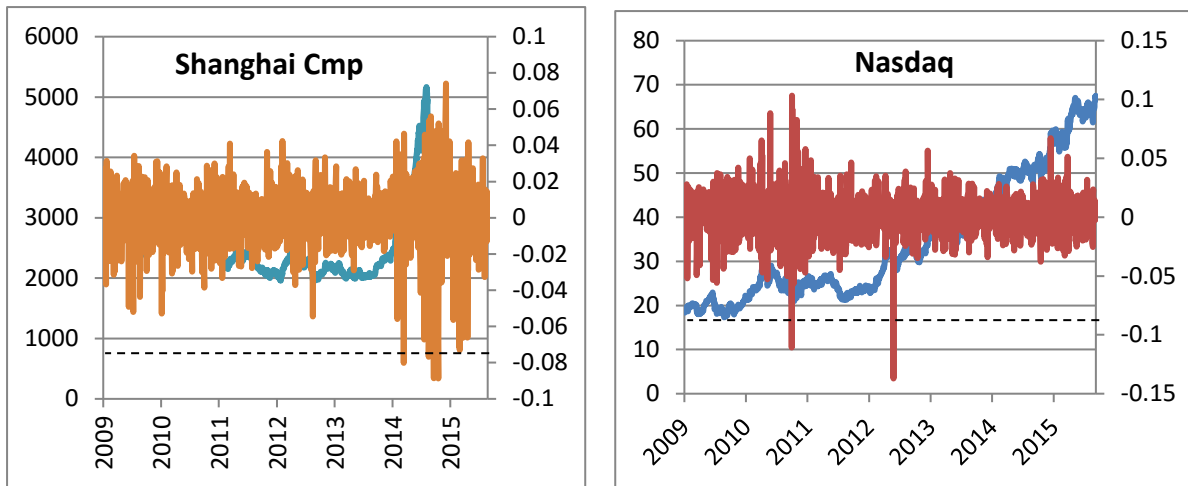
- El **BNP Paribas** es considerado uno de los más grandes bancos a nivel europeo con sede central en París, Francia. Junto con *Société Générale* y *Crédit Lyonnais* lideran el mercado bancario francés. Sus productos ofrecidos se dividen en dos principales sectores, finanzas y seguros. Forma parte del CAC 40 y sus mercados domésticos principales se concentran en Francia, Italia, Bélgica y Luxemburgo.

5.2.2. Los precios de cierre y los rendimientos (Índices financieros)

En la **Figura 5.2.** se presentan las series temporales de los precios de cierre (no ajustados por dividendos) de los índices financieros y sus rendimientos logarítmicos. Hemos escogido una senda temporal de 7 años.



El Ala del Cisne Negro y la Modelización con saltos



Fuente: los datos de Yahoo Finance y elaboración propia con Excel

- El **CAC 40** es un índice bursátil francés negociado dentro de la bolsa de París, el índice es una medida ponderada según capitalización de los 40 valores más significativos entre las 100 empresas más grandes negociadas dentro de la Bolsa de París. Aunque la mayoría de las empresas que componen este índice son de origen francés, el 45% de las acciones de las mismas se localiza en mercados extranjeros, siendo inversores alemanes, japoneses, estadounidenses y británicos los más representativos.
- El **FTSE 100** es el índice publicado por el periódico británico *Financial Times* y agrupa los 100 principales valores de la Bolsa de Londres. La forma de ponderar los valores sigue el criterio de capitalización bursátil. Las 100 empresas que agrupan este índice representan el 70% del valor total de mercado de todos los valores negociados en Londres.
- El **IBEX 35** elaborado por el BME (Bolsas y Mercados Españoles) se constituye con las 35 empresas de mayor liquidez cotizadas en el Sistema de Interconexión Bursátil Español, en donde se agrupan las bolsas de Madrid, Barcelona, Bilbao y Valencia. El comité encargado de evaluar el ingreso o salida de una empresa del índice usa criterios como la liquidez de los títulos, el número de acciones en circulación y el valor de la capitalización bursátil.
- El índice **Nikkei 225** es el más representativo del mercado japonés, el mismo es elaborado por el diario japonés de los negocios (*Nihon Keizai Shinbun*) y agrupa los 225 valores más líquidos de la Bolsa de Tokio. A diferencia de otros índices en donde los valores son ponderados por capitalización, la manera de ponderar los valores del Nikkei 225 es por precio.
- El índice más representativo de la bolsa de Shangai es el **SSE Composite index**, el mismo se divide en acciones tipo A y acciones tipo B. Las acciones tipo A se negocian únicamente dentro de China y no pueden ser compradas por extranjeros debido a la política implantada y las restricciones del gobierno mientras que las acciones del tipo B se negocian en moneda extranjera.
- El **Nasdaq 100** es un índice bursátil que agrupa a los 100 valores más importantes de la industria. Dentro del mismo se incluyen distintos sectores industriales como telecomunicaciones, informática, ventas al por mayor y al por menor e incluso el sector de la industria biotecnológica. Todos los valores que componen este índice están inscritos en la Bolsa de Nueva York.

5.2.3. Identificación de Cisnes Negros

Con el objetivo de *identificar* un Cisne Negro, siguiendo un análisis gráfico, podemos establecer un Cisne Negro en el momento (está indicado con una línea discontinua en los gráficos) en que el rendimiento r_t cumpla que $r_t \geq -[\text{abs}(\hat{\mu}) + 6\hat{\sigma}]$ donde $\hat{\mu}$ es la media *calculada* (ver **Tabla 3.1.**) de la serie en cuestión y $\hat{\sigma}$ es la dispersión.

En Bancos

Como se puede observar hay un gran Cisne Negro en el 2008, que es la crisis financiera, afectando de manera general a todos los bancos expuestos. Luego hay varios picos de volatilidad entre 2010 y 2011 y hay otros dos cisnes negros pero que no afecto a todos:

- El banco chino experimenta uno de sus periodos de más volatilidad, aunque tiene *varios* Cisnes Negros, sin embargo, dado su frecuencia, no podemos considerarlo Cisnes Negros, sino solo los de mayor impacto, como precisamente, en 2015, el 24 de agosto de 2015 tuvo lugar lo que es llamado como el *lunes negro chino*.
- Recientemente, el 24 de junio de 2016, los bancos europeos, a excepción, irónicamente, del Barclays, experimentan un gran día de volatilidad y de incertidumbre financiera debido al denominado *brexite*. Un Cisne Negro totalmente *autentico* debido a su poca probabilidad de ocurrencia que al final acabo ocurriendo.

En los índices financieros

Dado el horizonte temporal, aquí no se incluye la crisis financiera del 2008, sin embargo hay Cisnes Negros entre 2010 y 2011, representados como *picos de volatilidad*. El FTSE100 tiene varios picos de volatilidad pero el más importante es del *brexite*. Y en este los dos Cisnes identificados en los bancos tienen mayor presencia:

- La bolsa de Shanghái experimenta un gran impacto de volatilidad produciendo el *lunes negro chino*.
- En cambio, el *brexite* tuvo más incidencia en los índices, afectando en mayor parte al Ibex35, FTSE100 (un 12-13% en ambos) y al Nikkei225 o CAC40 (un 8% en ambos).

5.3. Calculo del VaR y TailVaR bajo un movimiento Browniano geométrico

Con el único objetivo de calcular ahora nuestro VaR y TailVaR con un proceso Browniano, vamos a simular cada una de las series anteriores con dicho proceso con los parámetros de la media y la varianza ya calculadas.

Luego vamos a calcular (dibujar) su distribución empírica y una distribución normal (ya que sabemos su relación que tiene con el movimiento browniano) con los parámetros de la serie simulada.

Finalmente calcularemos los valores del VaR (sobre la distribución empírica y la distribución Normal, indicado con $\overline{VaR}$) y el TailVar (calculado acorde con la distribución Normal), estarán indicados en las figuras.

5.3.1. Con las entidades bancarias

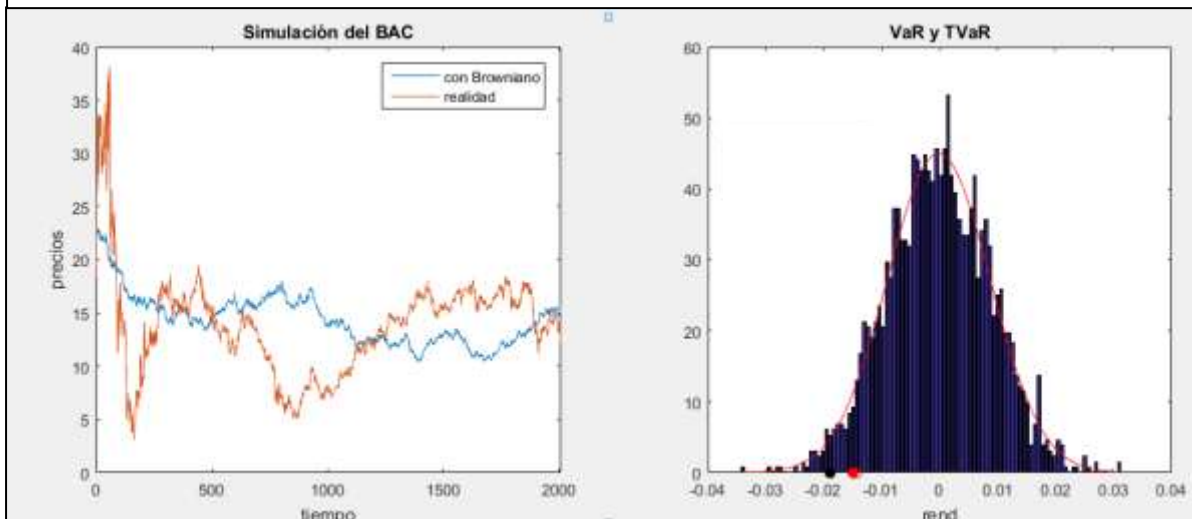
Bank of America (BAC)

Presentamos a continuación los valores del VaR diario al 5% de significación y el TailVar al mismo nivel de significación y senda temporal del *Bank of America* en el periodo establecido.

$$VaR = -0,0143 \quad \overline{VaR} = -0,015 \quad TVaR = -0,0189$$

En la figura 5.3. (a), podemos observar como el movimiento browniano geométrico se mantiene casi invariante a lo largo de todo el horizonte temporal. Mientras que a cotización real actúa con mucha más fluctuación. Donde el browniano geométrico no modeliza de forma adecuada es justamente cuando la cotización da saltos. Este efecto se mantendrá en todas las series que simulemos con movimiento browniano geométrico, por consecuencia solo lo expondremos en esta parte del trabajo y lo consideramos asumido durante el resto del análisis.

Figura 5.3.1. (a) Precios de cierre del BAC con dato real y simulado con un movimiento browniano geométrico, (b) distribución de probabilidad de los rendimientos donde se indica el VaR (punto rojo) y el TVaR (punto negro).



Fuente: Elaboración propia con Matlab

En la figura 5.4. (b), podemos observar como la distribución de probabilidad de los rendimientos es casi idéntica a la distribución Normal y esto es así porque esta generado con un movimiento browniano geométrico. Este efecto se mantendrá en todas las series, por consecuencia solo lo expondremos en esta parte del trabajo y lo consideramos asumido durante el resto del análisis.

Como se puede observar en la **Tabla 5.1.1**, en los rendimientos, el movimiento browniano geométrico redujo todos los estadísticos. Observar la curtosis y la asimetría como son aproximadamente nulas.

Tabla 5.1.1.	Descripción estadística de los precios y rendimientos del <i>Bank of America</i>			
	Cotización real		Cotización simulada	
	Precio	Rend.	Precio	Rend.
Media	13,85956	-0,025%	14,40449	-0,016%
Dispersión	4,777421	4,026%	2,370327	0,887%
Asimetría	1,167788	-0,29916	0,854864	0,002114
Exc. Curtosis	4,39131	16,58878	1,190475	-0,0053

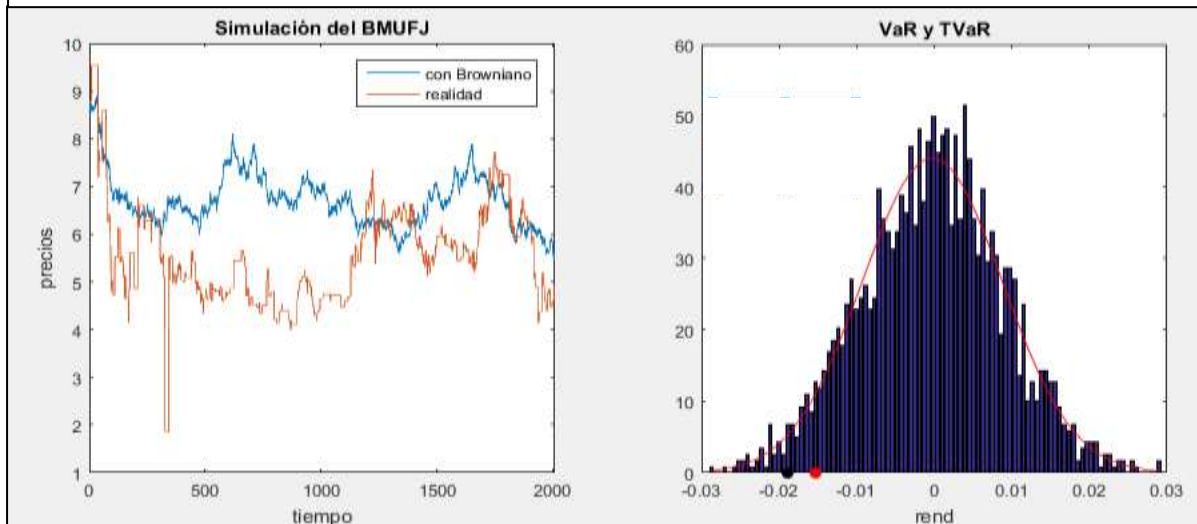
Fuente: Elaboración propia

Banco de Japón MUFJ (BMUFJ)

Presentamos a continuación los valores del VaR diario al 5% de significación y el TailVar al mismo nivel de significación y senda temporal del Banco MUFJ en el periodo establecido.

$$VaR = -0,0153 \quad \overline{VaR} = -0,0153 \quad TVaR = -0,0188$$

Figura 5.3.2. (a) Precios de cierre del BMUFJ con dato real y simulado con un movimiento browniano geométrico, (b) distribución de probabilidad de los rendimientos donde se indica el VaR (punto rojo) y el TVaR (punto negro).



Fuente: Elaboración propia con Matlab

Particularmente, el banco de Japón presenta en su cotización real bastantes saltos, pero esto es producido por la regulación japonesa. Por esta razón, el modelo browniano geométrico modeliza inadecuadamente esta serie. En la distribución de los rendimientos se expresa esta propiedad debido a que la distribución empírica es un poco más leptocúrtica que la Normal. Observemos sus estadísticos.

Como se puede observar en la **Tabla 5.1.2**, en los rendimientos, el movimiento browniano geométrico redució todos los estadísticos. Observar la curtosis y la asimetría como son aproximadamente nulas. El paso de una curtosis de 442,69 a una casi nula implica que la modelización no puede ser la adecuada.

Tabla 5.1.2.	Descripción estadística de los precios y rendimientos del Banco MUFJ			
	Cotización real		Cotización simulada	
	Precio	Rend.	Precio	Rend.
Media	5,544566	-0,0358%	6,694438	-0,0247%
Dispersión	1,074734	4,0608%	3,08231	0,9051%
Asimetría	0,795165	1,921173	1,32807	-0,02372
Exc. Curtosis	2,598698	442,6987	1,259166	-0,08156
Fuente: Elaboración propia				

Por último, recordad que la distribución de probabilidad de los precios simulada por un proceso browniano sigue una distribución logarítmico Normal, de ahí que los *parámetros de forma* (asimetría y curtosis) no sean nulos.

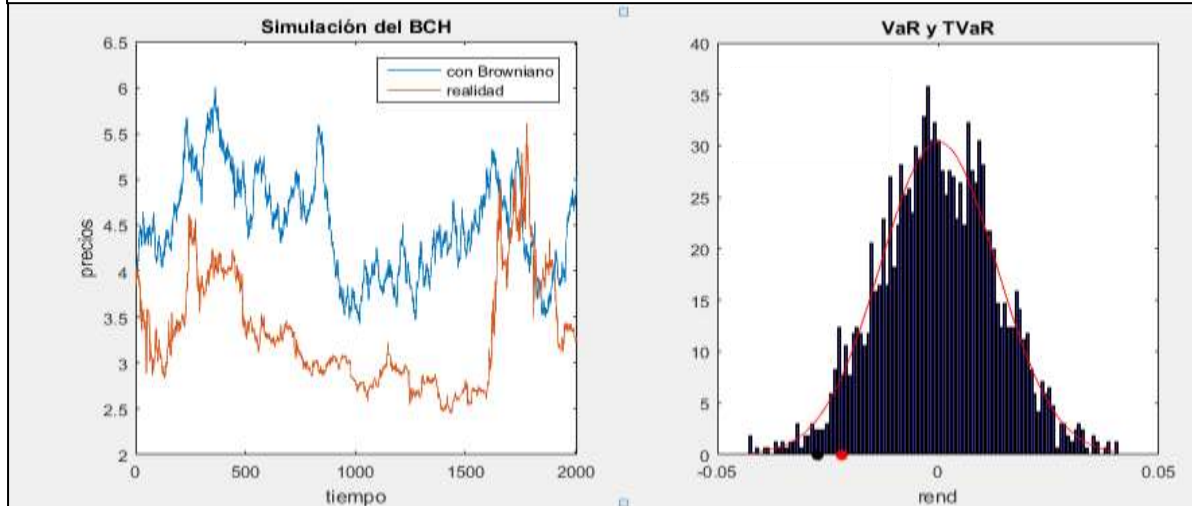
El análisis de los resultados del VaR y TailVaR lo vamos a dejar para el siguiente apartado.

Banco ICBC (BCH)

Presentamos a continuación los valores del VaR diario al 5% de significación y el TailVar al mismo nivel de significación y senda temporal del Banco ICBC en el periodo establecido.

$$VaR = -0,0217 \quad \overline{VaR} = -0,0217 \quad TVaR = -0,0274$$

Figura 5.3.3. (a) Precios de cierre del ICBC con dato real y simulado con un movimiento browniano geométrico, (b) distribución de probabilidad de los rendimientos donde se indica el VaR (punto rojo) y el TVaR (punto negro).



Fuente: Elaboración propia con Matlab

En este caso, el movimiento browniano, *en cuanto al comportamiento*, sí que parece adecuarse a la cotización real, solo que a *otro nivel*, es decir, *esta trasladado hacia arriba*. Con las excepciones del salto que da el movimiento browniano geométrico en la mitad del horizonte temporal y el salto que da la cotización real casi al final del horizonte temporal. En cuanto a la distribución empírica de los rendimientos, tenemos que puede ser un poco más leptocúrtica. Observemos sus estadísticos:

Tabla 5.1.3.	Descripción estadística de los precios y rendimientos del Banco ICBC			
	Cotización real		Cotización simulada	
	Precio	Rend.	Precio	Rend.
Media	3,327004	-0,0113%	4,50479927	0,006644%
Dispersión	0,597530	1,7293%	0,54401019	1,312853%
Asimetría	0,869000	0,123024	0,192416	-0,01988
Exc. Curtosis	0,153798	9,101754	-0,693736	-0,00453

Fuente: Elaboración propia

Igual que en las demás series, en los rendimientos se han reducido los estadísticos y los *parámetros de forma* son ahora nulos.

Presentamos a continuación los valores del VaR diario y el TailVar al 5% de significación del Banco Barclays y del BBVA en el periodo establecido.

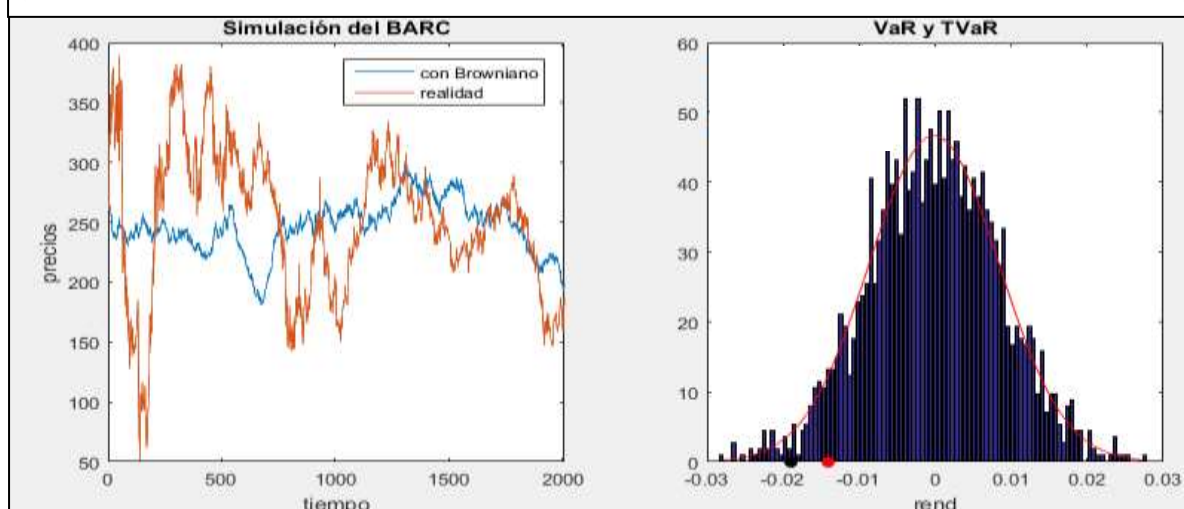
Banco Barclays (BARC)

$VaR = -0,0141$ $\overline{VaR} = -0,0141$ $TVaR = -0,0189$

BBVA

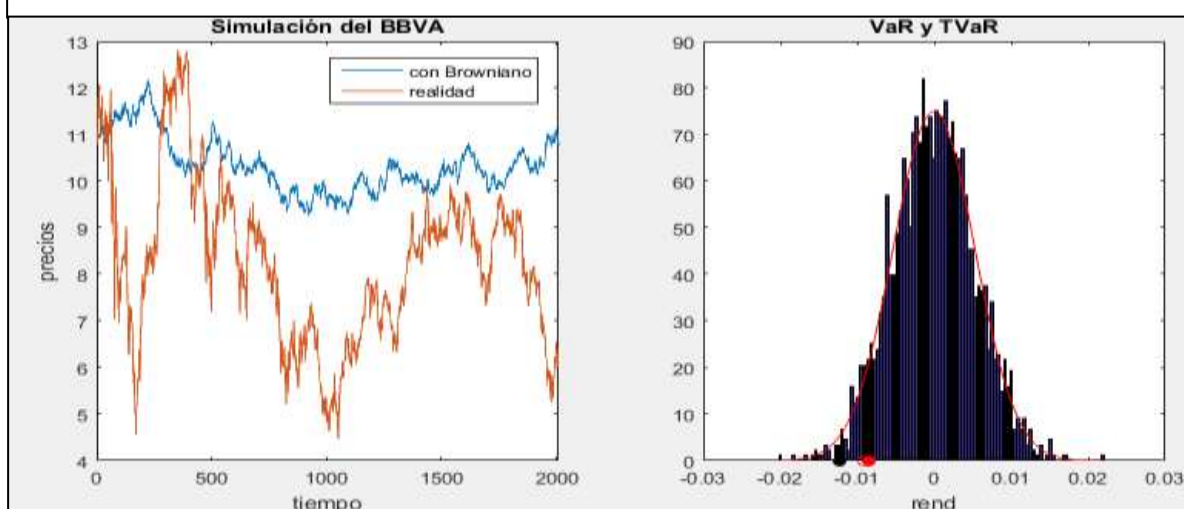
$VaR = -0,0090$ $\overline{VaR} = -0,0086$ $TVaR = -0,0123$

Figura 5.3.4. (a) Precios de cierre del Barclays con dato real y simulado con un movimiento browniano geométrico, (b) distribución de probabilidad de los rendimientos donde se indica el VaR (punto rojo) y el TVaR (punto negro).



Fuente: Elaboración propia con Matlab

Figura 5.3.5. (a) Precios de cierre del BBVA con dato real y simulado con un movimiento browniano geométrico, (b) distribución de probabilidad de los rendimientos donde se indica el VaR (punto rojo) y el TVaR (punto negro).



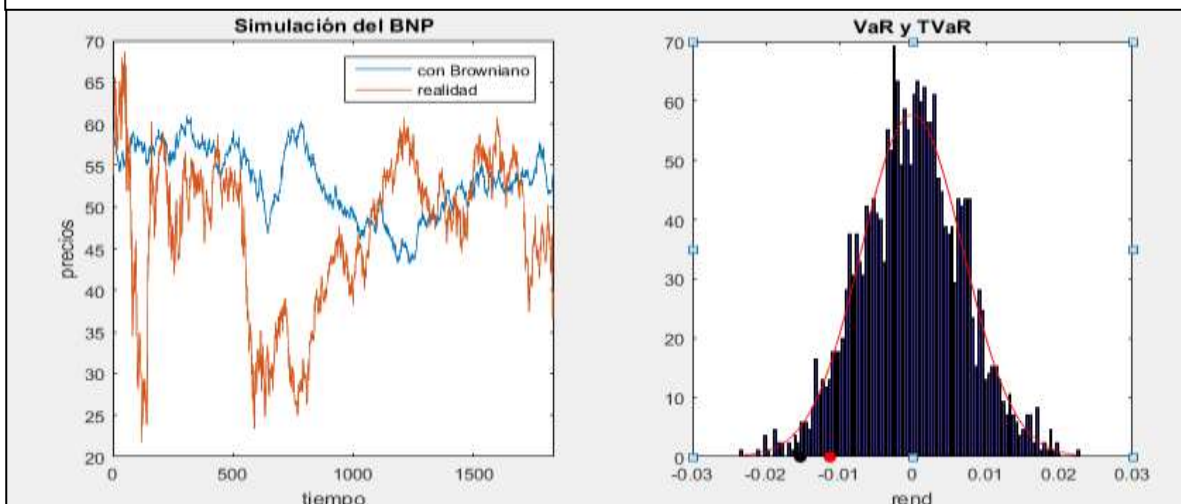
Fuente: Elaboración propia con Matlab

BNP

Presentamos a continuación los valores del VaR y el TailVar diario al 5% de significación:

$$VaR = -0,0113 \quad \overline{VaR} = -0,00113 \quad TVaR = -0,0152$$

Figura 5.3.6. (a) Precios de cierre del BNP con dato real y simulado con un movimiento browniano geométrico, (b) distribución de probabilidad de los rendimientos donde se indica el VaR (punto rojo) y el TVaR (punto negro).



Fuente: Elaboración propia con Matlab

Las últimas tres series presentan las mismas características generales que la primera.

Tabla 5.1.4 Descripción estadística de los precios y rendimientos				
	BARC		BARC simulado	
	Precio	Rend.	Precio	Rend.
Media	250,8816	-0,0311%	246,4757	-0,0148%
Dispersión	60,68353	3,7782%	22,10212	0,8538%
Asimetría	-0,34805	1,068222	-0,41331	-0,027004
Exc. Curtosis	-0,0714	30,34298	0,306579	-0,004439

Tabla 5.1.6 Descripción estadística de los precios y rendimientos				
	BBVA		BBVA simulado	
	Precio	Rend.	Precio	Rend.
Media	8,16932168	-0,037%	10,35	-0,00226%
Dispersión	1,77517746	2,455%	0,581666	0,53110%
Asimetría	0,35445227	0,124352	0,657090	0,034479
Exc. Curtosis	-0,1907744	5,615303	0,034085	0,101860

Tabla 5.1.5 Descripción estadística de los precios y rendimientos				
	BNP		BNP simulado	
	Precio	Rend.	Precio	Rend.
Media	47,04657	-0,0202%	53,088	-0,0025%
Dispersión	9,238523	3,0450%	4,0953	0,6912%
Asimetría	-0,67261	0,273691	-0,332	0,019518
Exc. Curtosis	-0,33608	7,390222	-0,7488	0,020645

Fuente: Elaboración propia

5.3.2. Con los índices financieros

Presentamos a continuación los valores del VaR y el TailVar diario al 5% de significación del CAC40 y del FTSE100 en el periodo establecido.

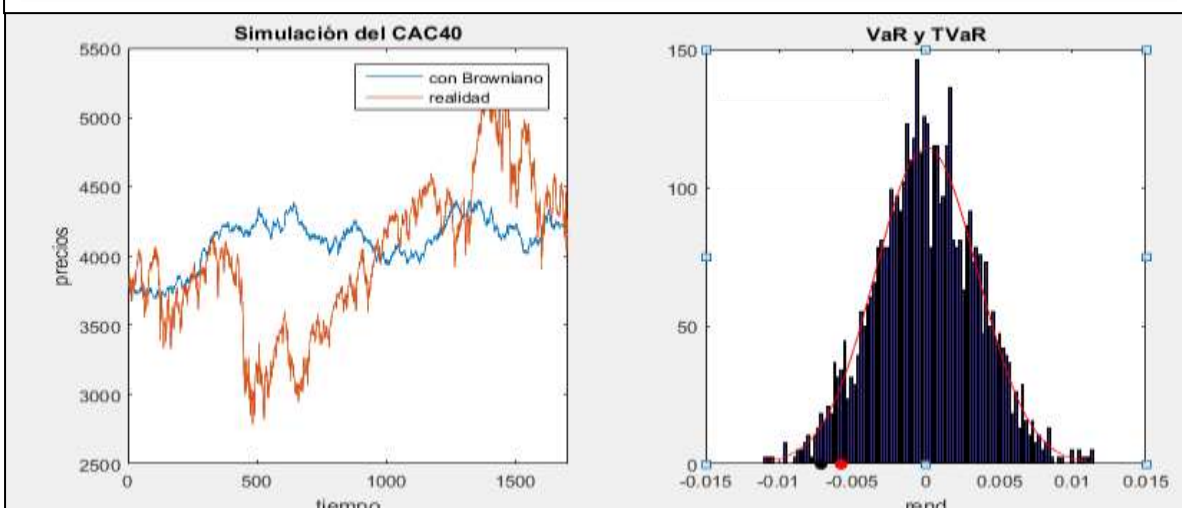
CAC40

$$VaR = -0,0058 \quad \overline{VaR} = -0,0058 \quad TVaR = -0,0071$$

FTSE100

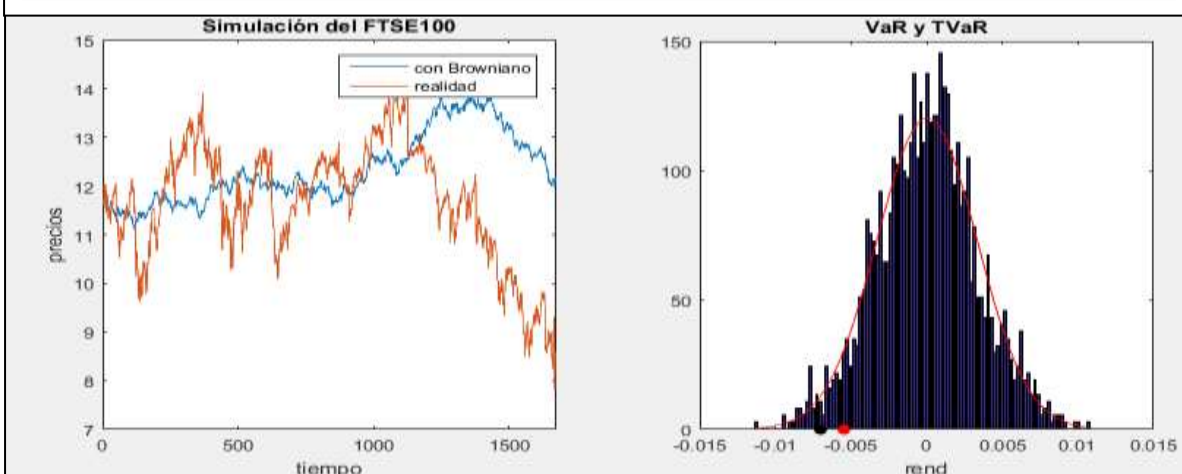
$$VaR = -0,0055 \quad \overline{VaR} = -0,0055 \quad TVaR = -0,007$$

Figura 5.3.7. (a) Precios de cierre del CAC40 con dato real y simulado con un movimiento browniano geométrico, (b) distribución de probabilidad de los rendimientos donde se indica el VaR (punto rojo) y el TVaR (punto negro).



Fuente: Elaboración propia con Matlab

Figura 5.3.8. (a) Precios de cierre del FTSE100 con dato real y simulado con un movimiento browniano geométrico, (b) distribución de probabilidad de los rendimientos donde se indica el VaR (punto rojo) y el TVaR (punto negro).



Fuente: Elaboración propia con Matlab

Presentamos a continuación los valores del VaR y el TailVar diario al 5% de significación del CAC40 y del FTSE100 en el periodo establecido.

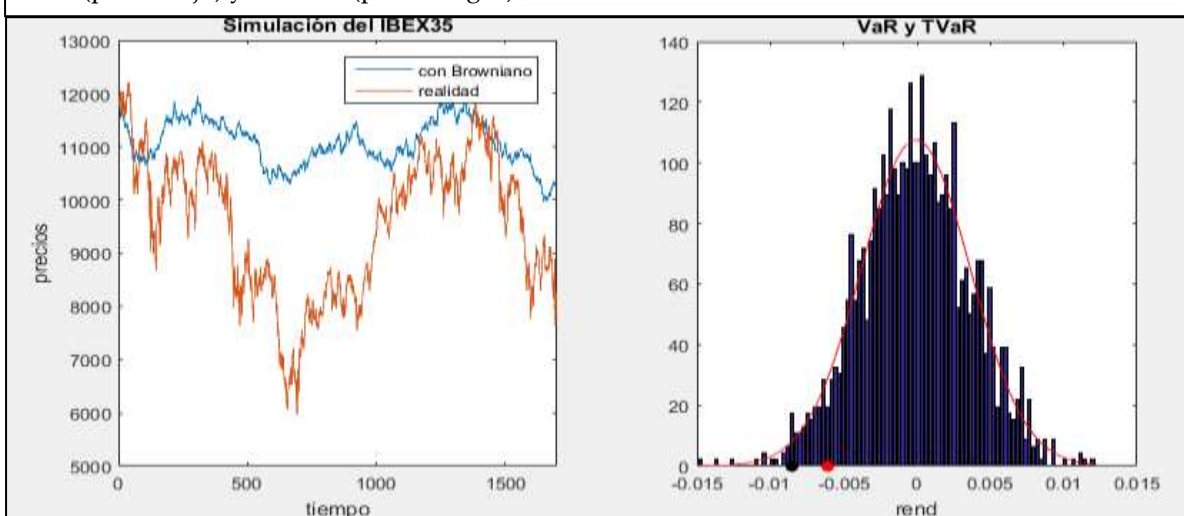
Ibex35

$VaR = -0,0061$ $\overline{VaR} = -0,0061$ $TVaR = -0,0085$

Nikkei225

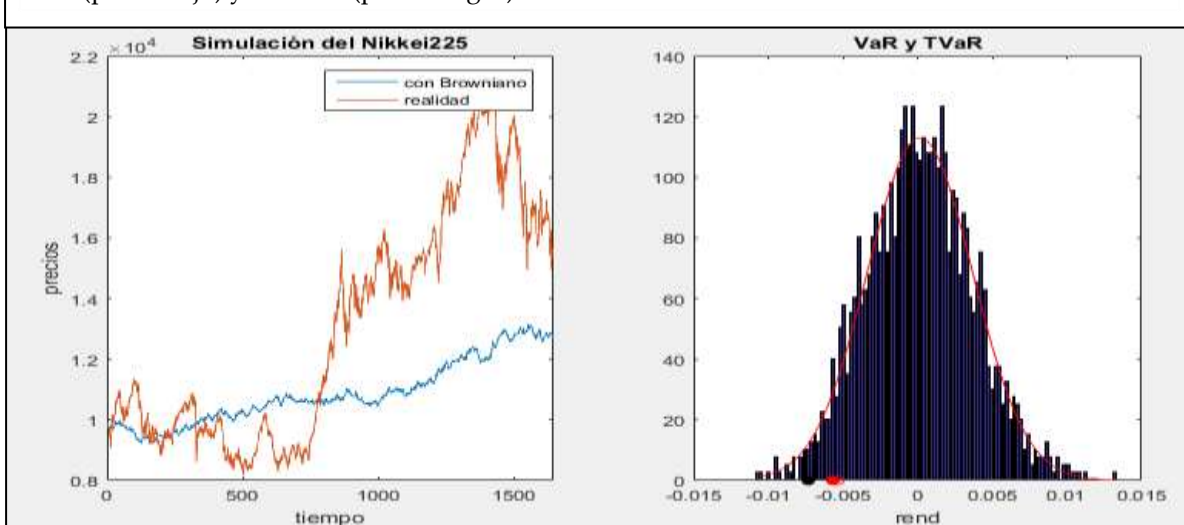
$VaR = -0,0054$ $\overline{VaR} = -0,0056$ $TVaR = -0,0073$

Figura 5.3.9. (a) Precios de cierre del Ibex35 con dato real y simulado con un movimiento browniano geométrico, (b) distribución de probabilidad de los rendimientos donde se indica el VaR (punto rojo) y el TVaR (punto negro).



Fuente: Elaboración propia con Matlab

Figura 5.3.10. (a) Precios de cierre del Nikkei225 con dato real y simulado con un movimiento browniano geométrico, (b) distribución de probabilidad de los rendimientos donde se indica el VaR (punto rojo) y el TVaR (punto negro).



Fuente: Elaboración propia con Matlab

Presentamos a continuación los valores del VaR y el TailVar diario al 5% de significación del Shanghai Comp., y del Nasdaq en el periodo establecido.

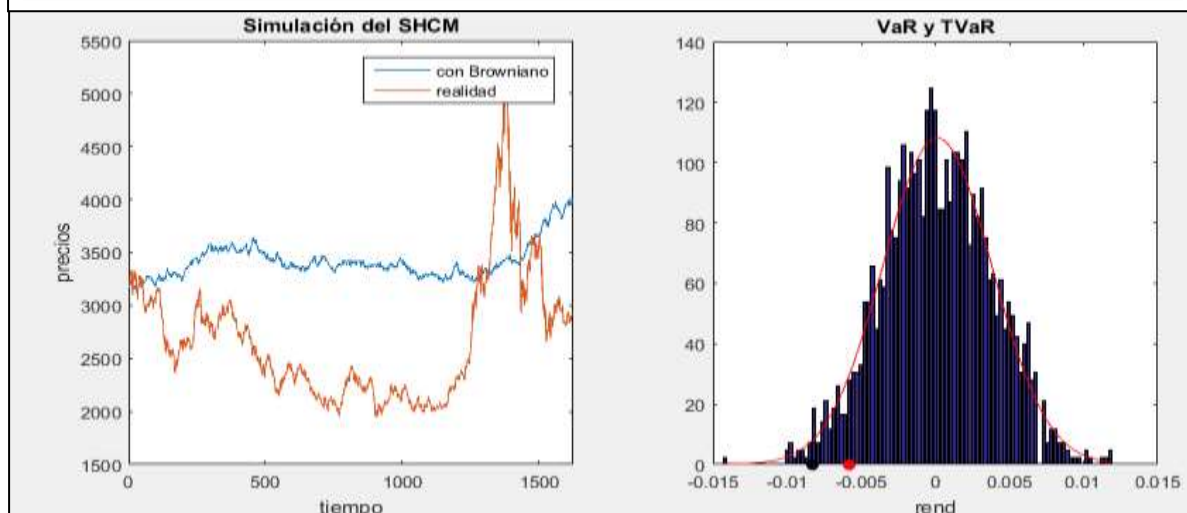
Shanghái Comp. (SHCM)

$VaR = -0,0058$ $\overline{VaR} = -0,0058$ $TVaR = -0,0083$

Nasdaq (NSDQ)

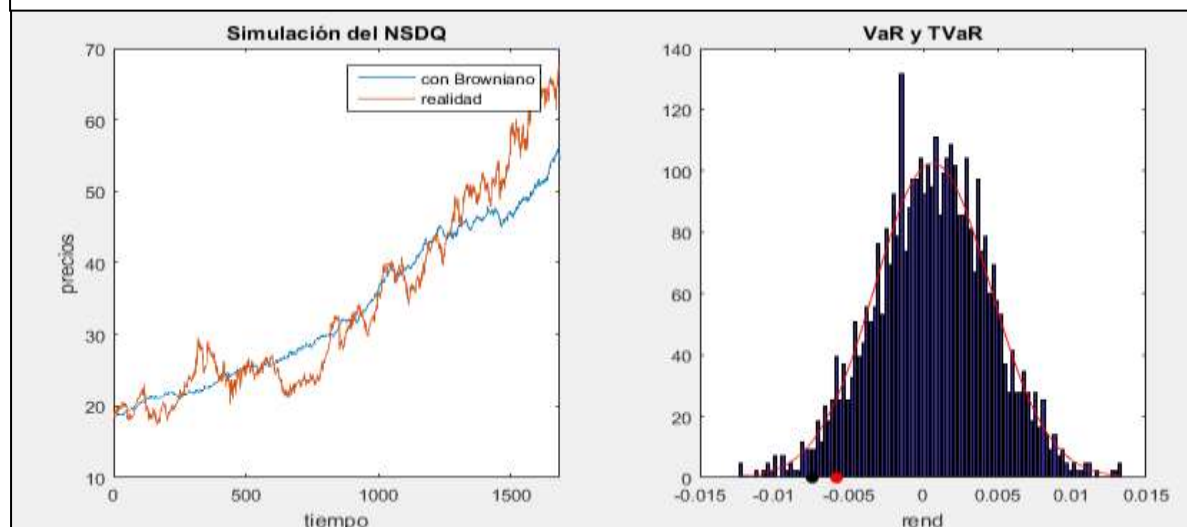
$VaR = -0,0058$ $\overline{VaR} = -0,0058$ $TVaR = -0,0074$

Figura 5.3.11. (a) Precios de cierre del Shanghai Comp., con dato real y simulado con un movimiento browniano geométrico, (b) distribución de probabilidad de los rendimientos donde se indica el VaR (punto rojo) y el TVaR (punto negro).



Fuente: Elaboración propia con Matlab

Figura 5.3.12. (a) Precios de cierre del Nasdaq con dato real y simulado con un movimiento browniano geométrico, (b) distribución de probabilidad de los rendimientos donde se indica el VaR (punto rojo) y el TVaR (punto negro).



Fuente: Elaboración propia con Matlab

El Ala del Cisne Negro y la Modelización con saltos

En términos generales, las últimas series de los índices financieros presentan las mismas características que las series bancarias. Por lo que nos limitaremos a presentar sus estadísticos.

Tabla 5.1.7. (a) Descripción estadística de los precios y rendimientos de los índices seleccionados						
Índices con cotización real	CAC40		Nikkei 225		Shanghai Comp.	
	Precio	Rend.	Precio	Rend.	Precio	Rend.
Media	3990,793	0,00713%	13038,7	0,0285%	2676,555	-0,0049%
Dispersión	537,1656	1,38369%	3785,807	1,4327%	590,4271	1,5285%
Asimetría	0,119032	-0,15518	0,42375	-0,57366	1,333049	-0,850819
Exc. Curtosis	-0,51109	3,32244	-1,18633	4,841618	2,170922	5,211570

Tabla 5.1.8. (a) Descripción estadística de los precios y rendimientos de los índices seleccionados						
Índices con cotización simulada	CAC40		Nikkei 225		Shanghai Comp.	
	Precio	Rend.	Precio	Rend.	Precio	Rend.
Media	4102,80	0,0054%	10865,45	0,0158%	3418,688	0,01380%
Dispersión	175,846	0,3486%	1053,477	0,3531%	165,9323	0,36910%
Asimetría	-0,7592	0,044462	0,57651	0,09366	1,4928	-0,011465
Exc. Curtosis	-0,2377	0,002350	-0,67776	-0,01371	2,445463	-0,082214

Tabla 5.1.7. (b) Descripción estadística de los precios y rendimientos de los índices seleccionados						
Índices con cotización real (cont.)	Nasdaq		Ibex 35		FTSE100	
	Precio	Rend.	Precio	Rend.	Precio	Rend.
Media	34,53646	0,076%	9550,238	-0,0210%	11,65687	-0,0183%
Dispersión	13,80436	1,668%	1319,812	1,5809%	1,203044	1,3759%
Asimetría	0,774509	-0,16176	-0,34997	-0,13571	-0,63841	-1,55704
Exc. Curtosis	-0,59654	6,494706	-0,70116	6,778014	0,008723	11,50458

Tabla 5.1.8. (b) Descripción estadística de los precios y rendimientos de los índices seleccionados						
Índices con cotización simulados (cont.)	Nasdaq		Ibex 35		FTSE100	
	Precio	Rend.	Precio	Rend.	Precio	Rend.
Media	33,4837	0,064%	11071,21	-0,0081%	12,33198	0,00226%
Dispersión	10,6215	0,388%	424,3963	0,37100%	0,72099	0,33213%
Asimetría	0,31674	-0,04219	-0,18294	-0,015095	0,648749	0,005832
Exc. Curtosis	-1,3121	0,071251	-0,67153	0,051621	-0,74676	0,042335
Fuente: Elaboración propia						

La conclusion de este apartado y que representa nuestro punto de partida para la modelizacion con los saltos es el siguiente parrafo:

El movimeinto browniano geométrico se mantiene casi invariante a lo largo de todo el horizonte temporal. Mientras que a cotizacion real actua con mucha más fluctuación. Donde el browniano geométrico no modeliza de forma adecuada es justmaente cuando la cotización da saltos.

5.4. Cálculo del VaR y TailVaR bajo un movimiento Browniano con saltos

Con el único objetivo de calcular ahora nuestro VaR y TailVaR con un proceso Browniano con saltos de Poisson Compuesto, vamos a simular cada una de las series anteriores con dicho proceso con los parámetros de la media, la varianza, tanto del proceso sin salto como la del proceso con salto (que conforman la amplitud del salto) y la intensidad del salto (los daremos en una tabla, **Tabla 5.2**), obtenidos por *máxima verosimilitud* mediante un programa de optimización en R-Lab, cuyo código daremos en el anexo.

Luego vamos a calcular (dibujar) una distribución empírica y una distribución normal (para ver la diferencia entre ambas). Finalmente calcularemos los valores del VaR al 5% de significación con la distribución empírica. Y hemos calculado el $\overline{TVaR}$, al 1% de significación, **que es el TailVaR tomando el promedio del 1% restantes de los rendimientos de la cola izquierda, que son mayores que el VaR** (definición del TailVaR).

A continuación, explicaremos en qué consiste el algoritmo que utilizamos para modelizar el proceso con saltos.

5.4.1. Algoritmo para la modelización de los procesos con saltos

Partiendo de la ecuación (1) del tema anterior:

$$\frac{dZ(t)}{Z(t)} = \gamma dt + \sigma dB(t) + d \left(\sum_{n=1}^{N(t)} Y_n - 1 \right)$$

Seguindo a Beckers (1981) and Honoré (1998), se puede demostrar que la distribución de probabilidad de $Z(t)$ es una combinación infinita de distribuciones gaussianas cuya estimación resulta complicada. Ball y Torous (1983) presentaron una versión simplificada asumiendo que la periodicidad del salto es pequeña y que, por tanto, en un periodo de tiempo pequeño solo ocurre un salto. En este caso, $N(t)$ puede ser aproximado por una variable aleatoria distribuida como una Bernoulli para λdt pequeño; y la función de densidad de $Z(t)$ se puede escribir como:

$$(1) \quad f_{dZ(t)}(z) = (1 - \lambda dt)f_B(z) + \lambda dt(f_B \star f_Y)(z)$$

Donde $f_B(\cdot)$ es la función de densidad de la difusión del proceso (parte sin salto) y $f_Y(\cdot)$ es la función de densidad asumida para los saltos. En dicha ecuación está definida una *convolución*: $(f_B \star f_Y)(z) := \int_{-\infty}^{\infty} f_B(x)f_Y(x-z)dx$. La función de densidad de la difusión es una Normal con media $(\gamma - \frac{\sigma^2}{2})dt$ y varianza $\sigma^2 dt$. Si $f_Y(\cdot)$ posee también una función de densidad Normal, entonces $(f_B \star f_Y)$ es una Normal con media $(\gamma - \frac{\sigma^2}{2})dt + m$ y varianza $\sigma^2 dt + \psi^2$.

Para una serie de rendimientos logarítmicos $\{dz_t\}_{t=1}^T$, la log-verosimilitud de los parámetros del modelo $\theta \stackrel{\text{def}}{=} (\lambda, \gamma, \sigma, m, \psi)$ es obtenido de (1) con:

$$(2) \quad \log[\mathcal{L}(\theta|\{dz_t\}_{t=1}^T)] = \sum_{t=1}^T \log[f_{dZ(t)}(dz_t|\theta)]$$

Y el estimador de máxima verosimilitud $\hat{\theta}$ se obtiene maximizando (2).

Kiefer (1978) demostró que no existe un único parámetro óptimo en esa convolución. Por lo que la estimación es bastante complicada y se necesita un optimizador robusto.

En este sentido, utilizaremos como algoritmo el de *Differential Evolution*, un algoritmo genético desarrollado por Storn y Price (1997). El algoritmo es genético ya que utiliza operaciones inspirada en la biología: como la mutación o cruzamientos y selección en una población con el objetivo de maximizar una función. No tenemos como objetivo detallar cómo funciona el algoritmo y para ello se puede consultar Price (2006) y Storn y Price(1997).

Pondremos como ejemplo la parametrización del Nasdaq, donde hemos considerado, los precios de cierre de dicho índice en el periodo 09/11/2009-01/07/2016, 1674 número de observaciones. Seguidamente se obtienen los rendimientos logarítmicos y es con la variable con la que trabajaremos. Ahora, con el objetivo de obtener el parámetro de máxima verosimilitud vamos a minimizar el valor negativo de la log-verosimilitud. El paquete *DEoptim* de R es ejecutado con parámetros de defecto (200 “generaciones” de amplitud $NP = 50$ y generados con parámetro de escala $F = 0,8$ y una probabilidad de cruzamiento $CR = 0,5$). Entonces, los pasos a seguir en la implantación del algoritmo es: 1) se introducen las funciones de densidad y la ecuación (1), luego la función de log-verosimilitud, para que se maximice, 2) se introducen los datos y luego 3) la función *DEoptim* aplicado a los datos y utilizando la maximización de la función de log-verosimilitud. Tomando como ejemplo el Nasdaq tenemos $\hat{\theta}_{NDQ} = (28.216, 24.93\%, 20.54\%, -0.12\%, 3.19\%)$.

Tabla 5.2 Parámetros del modelo con saltos para cada una de las series seleccionadas					
	λ (intensidad del salto)	γ (media de la parte sin salto)	σ (desviación típica de la parte sin salto)	m (media de la parte del salto)	ψ (desviación típica de la parte del salto)
NSDQ	28,21637	24,93%	20,54%	-0,12%	3,19%
SHCM	52,26183	19,84%	15,40%	-15,40%	2,60%
Nikk225	23,41349	27,01%	18,58%	-0,77%	2,66%
Ibex35	45,08168	8,52%	18,81%	-0,27%	2,50%
FTSE100	51,44002	24,44%	13,36%	-0,55%	2,38%
CAC40	90,68613	23,46%	13,66%	-0,23%	1,81%
BNP	5,51826	-2,40%	40,22%	0,97%	72,62%
BBVA	58,80793	0,23%	26,08%	-0,11%	3,81%
BARC	39,51896	-2,91%	31,77%	0,40%	8,15%
BCH	68,34395	-8,34%	11,49%	0,04%	3,04%
BMUFJ	64,34851	0,00%	0,01%	-0,14%	26,18%
BAC	37,77766	11,38%	30,00%	-0,35%	9,24%
Fuente: Datos obtenidos con el algoritmo expuesto, elaboración propia					

Utilizando estos parámetros vamos a simular los modelos de saltos, además vamos a compáralos con el browniano geométrico del apartado anterior, y finalmente calcular las medidas de riesgo: VaR y TVaR, utilizando la distribución empírica.

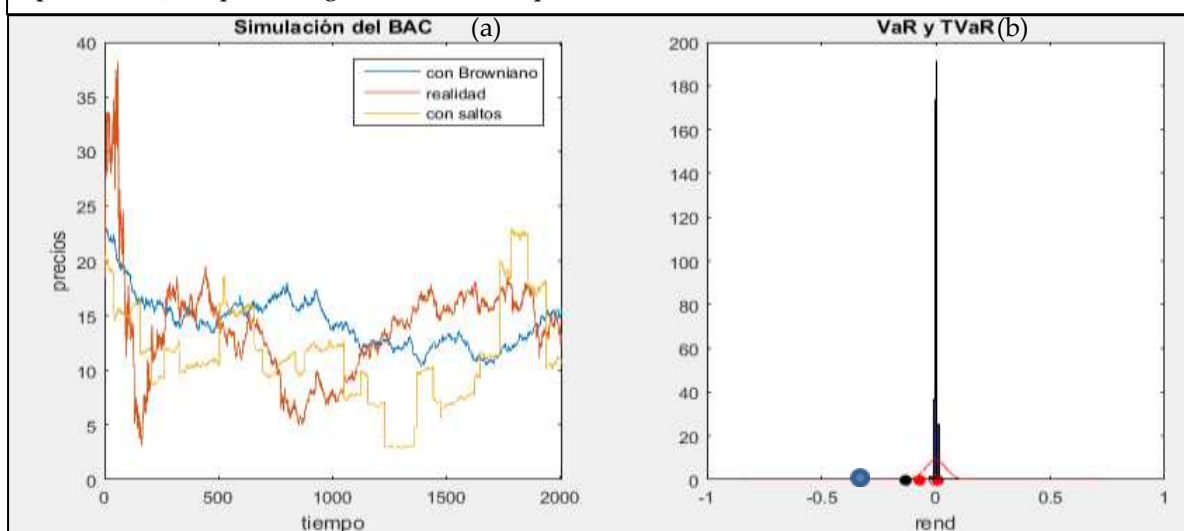
5.4.2. Con las entidades bancarias

BAC

Presentamos a continuación los valores del VaR diario al 5% de significación y el TailVar al 5% y 1% de significación del *Bank of America* en el periodo establecido.

$$VaR = -0,0083 \quad TVaR = -0,0608 \quad \overline{TVaR} = -0,2504$$

Figura 5.4.1. (a) Precios de cierre del *Bank of America* con dato real y simulado con un movimiento browniano geométrico y con movimiento browniano geométrico con saltos, (b) distribución de probabilidad de los rendimientos donde se indica el VaR (punto rojo sin relleno), y el $\overline{TVaR}$ (punto azul). Se pueden ignorar los demás puntos.



Fuente: Elaboración propia con Matlab

En este caso, un modelo de saltos ha funcionado digamos parcialmente ya que ha y periodos que subestimamos los saltos y además no es capaz de modelizar bien los saltos en la cotización (observad el principio del gráfico). Sin embargo, sí que podemos decir que, comparado con el movimiento browniano geométrico, un modelo con saltos tiene más riqueza en su fluctuación, modelizando mejor que el movimiento browniano. Este efecto se puede notar en que el browniano geométrico es casi invariante en toda la senda temporal. Del mismo modo que comparamos los estadísticos reales con los estadísticos simulados, en la siguiente tabla (**Tabla 5.3.1.**) se comparan los estadísticos reales con el simulado con browniano geométrico y con un modelo de saltos.

Tabla 5.3.1.	Descripción estadística de los precios y rendimientos del <i>Bank of America</i>					
	Cotización real		Cotización simulada (browniano geométrico)		Cotización simulada (browniano geom. con saltos)	
	Precio	Rend.	Precio	Rend.	Precio	Rend.
Media	13,85956	-0,025%	14,40449	-0,016%	11,4113	-0,031%
Dispersión	4,777421	4,026%	2,370327	0,887%	4,431186	4,308%
Asimetría	1,167788	-0,29916	0,854864	0,002114	0,445534	-2,15901
Exc. Curtosis	4,39131	16,58878	1,190475	-0,0053	0,179034	170,7755

Fuente: Elaboración propia

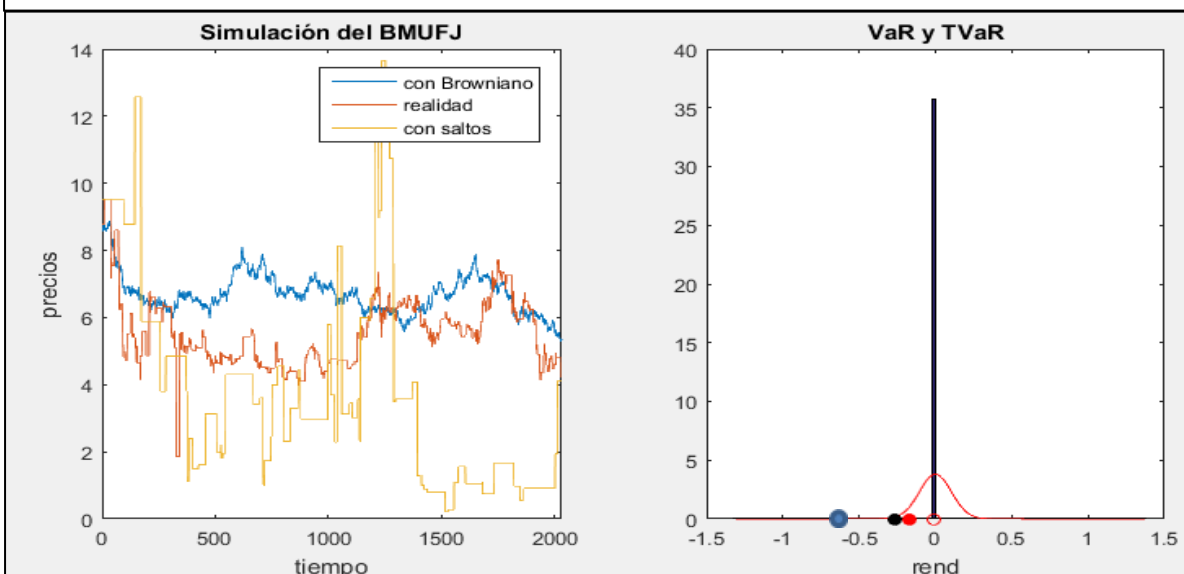
Como se puede observar: subestima el promedio de los precios y sobreestima el promedio de los rendimientos, y una ventaja con respecto al browniano es que acierta con la volatilidad (desviación típica). El único coste que tiene la distribución de los saltos es su alta curtosis. Pero es un coste *necesario* para que la distribución tenga más cola.

Banco MUFJ

Presentamos a continuación los valores del VaR diario al 5% de significación y el TailVar al 5% y 1% de significación del Banco MUFJ en el periodo establecido.

$$VaR = -0,0067 \quad TVaR = -0,1508 \quad \overline{TVaR} = -0,6757$$

Figura 5.4.2. (a) Precios de cierre del Banco MUFJ con dato real y simulado con un movimiento browniano geométrico y con movimiento browniano geométrico con saltos, (b) distribución de probabilidad de los rendimientos donde se indica el VaR (punto rojo sin relleno), y el $\overline{TVaR}$ (punto azul). Se pueden ignorar los demás puntos.



Fuente: Elaboración propia con Matlab

El caso del Banco MUFJ es particular ya que dicha entidad ha estado sometida a bastante regulación y por eso el modelo de saltos se aproxima a la realidad. Dado que dicha trayectoria real no es “natural” no consideramos como acierto que el modelo de saltos aproxime a la realidad. Para que también se observe la *magnitud* de la regulación, ni con un modelos de saltos, donde se aumenta en gran medida el apuntamiento (curtosis) de la distribución, no logramos acercarnos a la de la realidad (ver [tabla 5.3.2](#)).

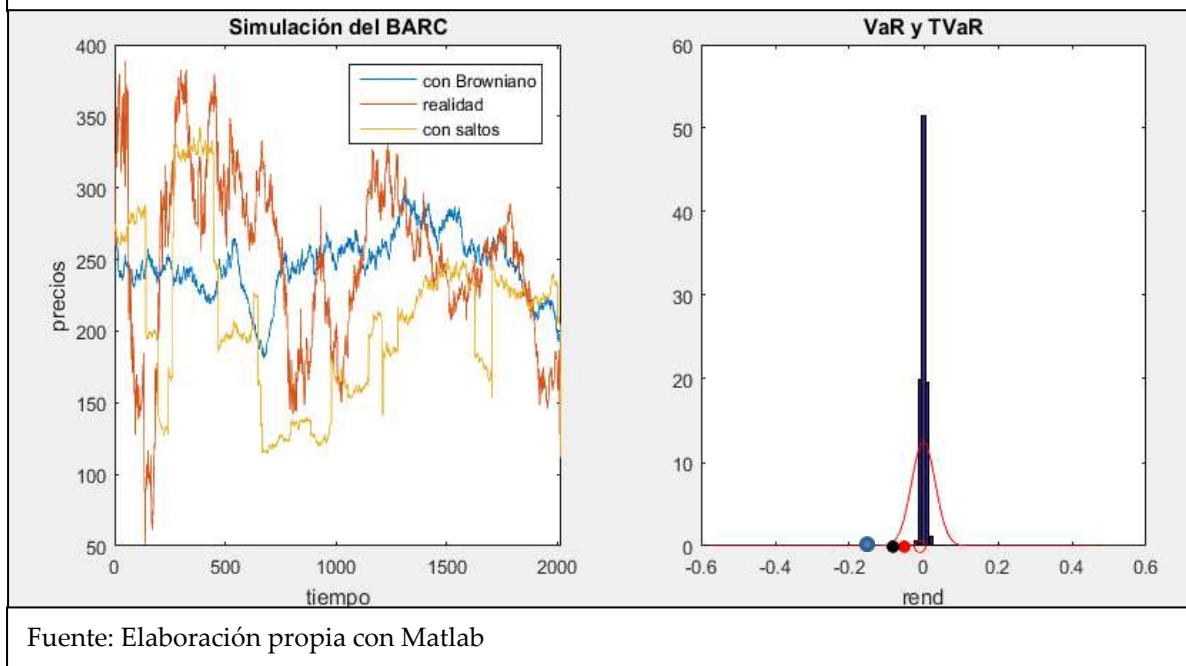
Tabla 5.3.2.	Descripción estadística de los precios y rendimientos del Banco MUFJ					
	Cotización real		browniano geométrico		Browniano geométrico con saltos	
	Precio	Rend.	Precio	Rend.	Precio	Rend.
Media	5,544566	-0,0358%	6,694438	-0,0247%	3,814014	-0,0413%
Dispersión	1,074734	4,0608%	3,08231	0,9051%	0,871257	10,4467%
Asimetría	0,795165	1,921173	1,32807	-0,02372	-0,31475	-0,69857
Exc. Curtosis	2,598698	442,6987	1,259166	-0,08156	-0,40083	87,40176

Barclays

Presentamos a continuación los valores del VaR diario al 5% de significación y el TailVar al 5% y 1% de significación del Banco Barclays en el periodo establecido.

$$VaR = -0,0073 \quad TVaR = -0,0468 \quad \overline{TVaR} = -0,1811$$

Figura 5.4.3. (a) Precios de cierre del Barclays con dato real y simulado con un movimiento browniano geométrico y con movimiento browniano geométrico con saltos, (b) distribución de probabilidad de los rendimientos donde se indica el VaR (punto rojo sin relleno), y el $\overline{TVaR}$ (punto azul). Se pueden ignorar los demás puntos.



Fuente: Elaboración propia con Matlab

El Banco Barclays es uno de los bancos en donde el modelo con saltos ha aproximado bastante bien a la trayectoria de los precios. En la mayoría de los saltos y alza y bajadas de la cotización, el modelo con saltos se ha comportado de la misma forma. Lo que faltó posiblemente fue una mayor amplitud ya que en la mayoría de la senda temporal el modelo con saltos se encuentra trasladado hacia abajo, subestimando el salto. En sus estadísticos podemos observar el comportamiento del BAC: se aproxima muy bien los primeros momentos muestrales mientras que la curtosis en los rendimientos es el triple de su valor real.

Tabla 5.3.3 :	Descripción estadística de los precios y rendimientos del Barclays					
	Cotización real		Cotización simulada (browniano geométrico)		Cotización simulada (browniano geom. con saltos)	
	Precio	Rend.	Precio	Rend.	Precio	Rend.
Media	250,8816	-0,0311%	246,4757	-0,0148%	208,13908	-0,04%
Dispersión	60,68353	3,7782%	22,10212	0,8538%	57,061173	3,17%
Asimetría	-0,34805	1,068222	-0,41331	-0,027004	0,3651543	-2,3214
Exc. Curtosis	-0,0714	30,34298	0,306579	-0,004439	-0,345087	151,5093

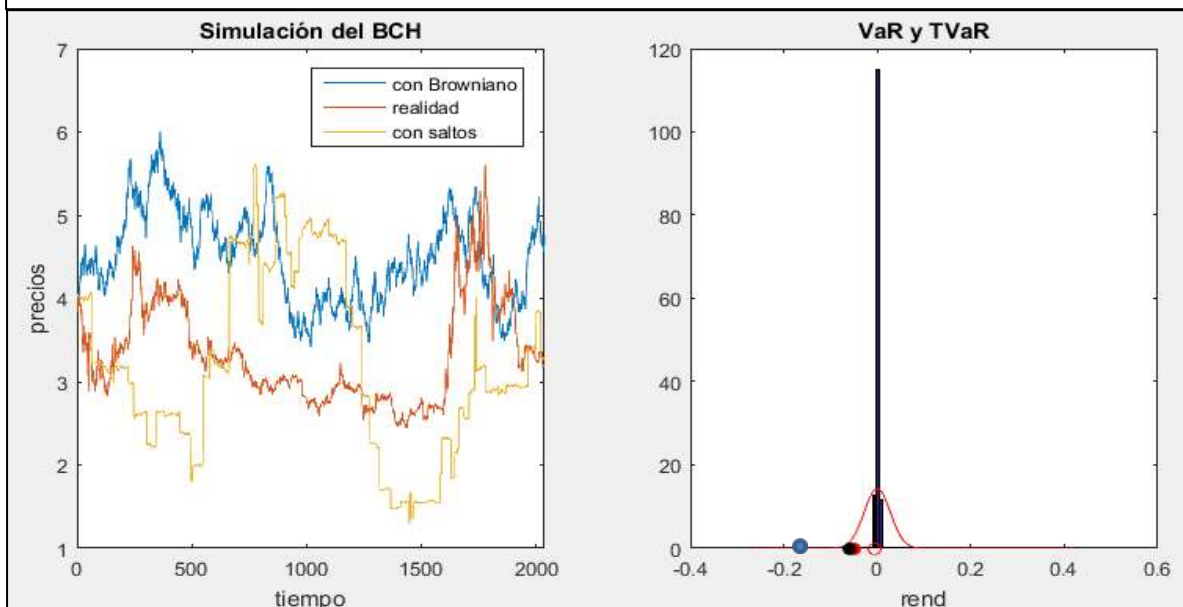
Fuente: Elaboración propia

Banco ICBC

Presentamos a continuación los valores del VaR diario al 5% de significación y el TailVar al 5% y 1% de significación del Banco ICBC en el periodo establecido.

$$VaR = -0,0075 \quad TVaR = -0,0438 \quad \overline{TVaR} = -0,1765$$

Figura 5.4.4. (a) Precios de cierre del Banco ICBC con dato real y simulado con un movimiento browniano geométrico y con movimiento browniano geométrico con saltos, (b) distribución de probabilidad de los rendimientos donde se indica el VaR (punto rojo sin relleno), y el $\overline{TVaR}$ (punto azul). Se pueden ignorar los demás puntos.



Fuente: Elaboración propia con Matlab

El banco ICBC no es buen ejemplo donde el modelo con saltos haya funcionado correctamente. De hecho el movimiento browniano parece comportarse mejor que el de los saltos exceptuando el salto que da la serie casi al final de la senda temporal y que el modelo con saltos tampoco pudo replicar. Replicando un salto enorme a la mitad de la senda temporal donde la cotización real no presenta ningún salto. Observando sus estadísticos, el promedio lo aproxima correctamente, pero la desviación típica la sobreestima. El modelo con saltos estima, además, una curtosis multiplicada por diez. En conclusión, en este caso este modelo parece que le falta complejidad para modelizar la entidad china.

Tabla 5.3.4.	Descripción estadística de los precios y rendimientos del Banco ICBC					
	Cotización real		Cotización simulada (browniano geométrico)		Cotización simulada (browniano geom. con saltos)	
	Precio	Rend.	Precio	Rend.	Precio	Rend.
Media	3,327004	-0,0113%	4,50479927	0,006644%	3,18587921	-0,010353%
Dispersión	0,597530	1,7293%	0,54401019	1,312853%	1,07747686	2,780553%
Asimetría	0,869000	0,123024	0,192416	-0,01988	0,2376028	2,268033283
Exc. Curtosis	0,153798	9,101754	-0,693736	-0,00453	-0,9351632	90,62807548

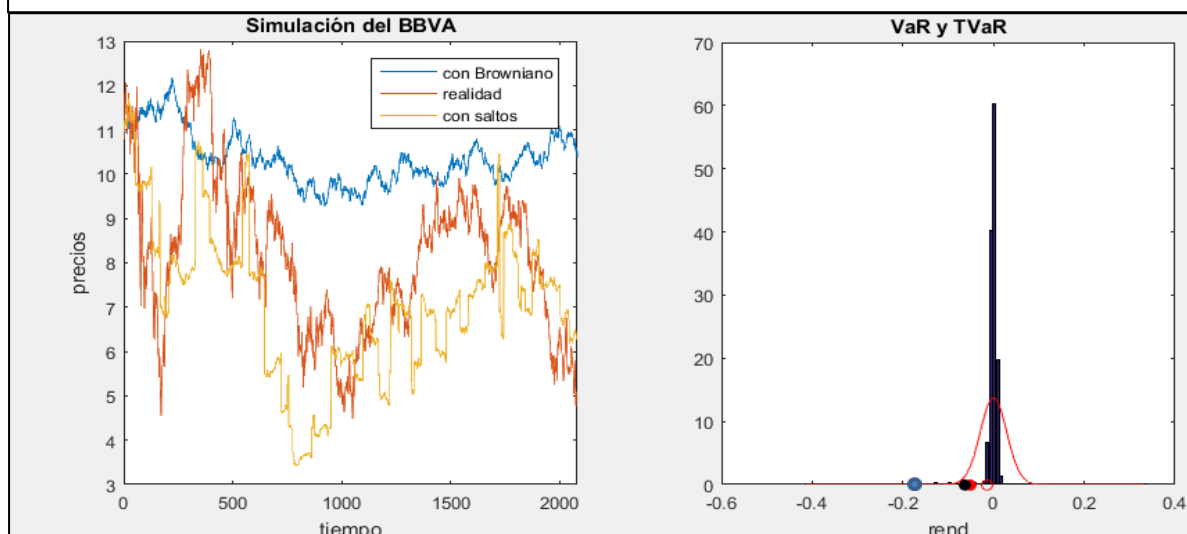
Fuente: Elaboración propia

BBVA

Presentamos a continuación los valores del VaR diario al 5% de significación y el TailVar al 5% y 1% de significación del Banco BBVA en el periodo establecido.

$$VaR = -0,0058 \quad TVaR = -0,0518 \quad \overline{TVaR} = -0,1764$$

Figura 5.4.5. (a) Precios de cierre del BBVA con dato real y simulado con un movimiento browniano geométrico y con movimiento browniano geométrico con saltos, (b) distribución de probabilidad de los rendimientos donde se indica el VaR (punto rojo sin relleno), y el $\overline{TVaR}$ (punto azul). Se pueden ignorar los demás puntos.



Fuente: Elaboración propia con Matlab

Con el banco BBVA, el modelo con saltos parece modelizar correctamente. Al igual que con el Barclays, en la mayoría de los saltos y alza y bajadas de la cotización, el modelo con saltos se ha comportado de la misma forma. Lo que faltó posiblemente fue una mayor amplitud ya que en la mayoría de la senda temporal el modelo con saltos se encuentra trasladado hacia abajo, subestimando el salto.

De la misma manera, los estadísticos muestran como el modelo con saltos aproxima bien el promedio y la varianza de los rendimientos al coste de aumentar en gran medida la curtosis.

Tabla 5.3.5 :	Descripción estadística de los precios y rendimientos del BBVA					
	Cotización real		Cotización simulada (browniano geométrico)		Cotización simulada (browniano geom. con saltos)	
	Precio	Rend.	Precio	Rend.	Precio	Rend.
Media	8,16932168	-0,037%	10,35	-0,00226%	7,06	-0,03%
Dispersión	1,77517746	2,455%	0,581666	0,53110%	1,703158	2,89%
Asimetría	0,35445227	0,124352	0,657090	0,034479	0,152932	-0,49405
Exc. Curtosis	-0,1907744	5,615303	0,034085	0,101860	0,131659	82,18307

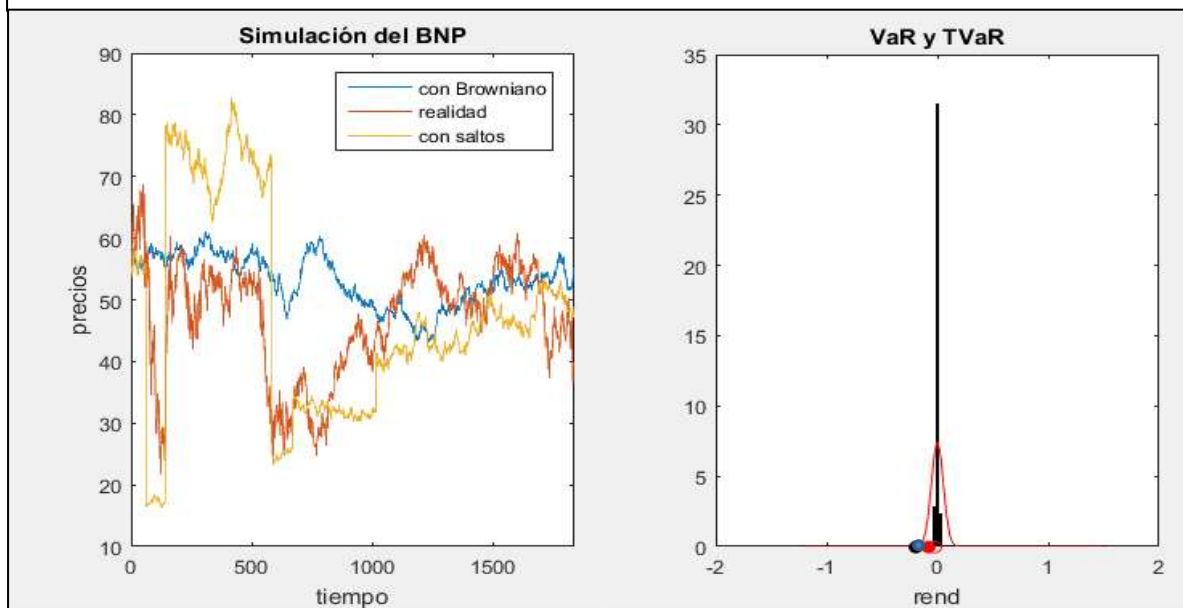
Fuente: Elaboración propia

Banco BNP

Presentamos a continuación los valores del VaR diario al 5% de significación y el TailVar al 5% y 1% de significación del Banco BNP en el periodo establecido.

$$VaR = -0,0062 \quad TVaR = -0,0438 \quad \overline{TVaR} = -0,1494$$

Figura 5.4.6. (a) Precios de cierre del BNP con dato real y simulado con un movimiento browniano geométrico y con movimiento browniano geométrico con saltos, (b) distribución de probabilidad de los rendimientos donde se indica el VaR (punto rojo sin relleno), y el $\overline{TVaR}$ (punto azul). Se pueden ignorar los demás puntos.



Fuente: Elaboración propia con Matlab

Junto con el banco Barclays y el banco BBVA, la simulación del BNP con un modelo browniano con saltos parece comportarse correctamente. En la mayoría de los saltos y alza y bajadas de la cotización, el modelo con saltos se ha comportado de la misma forma. Lo que faltó posiblemente fue una mayor amplitud ya que en la mayoría de la senda temporal el modelo con saltos se encuentra trasladado hacia abajo, subestimando el salto. Exceptuando el salto al principio de la senda temporal en la cual el modelo con saltos sobreestima es salto. En este caso los estadísticos no se estimaron de forma tan correcta como los demás bancos, de hecho sobreestima la varianza y la curtosis es más de 80 veces su valor real.

Tabla 5.3.6 :	Descripción estadística de los precios y rendimientos del BNP					
	Cotización real		Cotización simulada (browniano geométrico)		Cotización simulada (browniano geom. con saltos)	
	Precio	Rend.	Precio	Rend.	Precio	Rend.
Media	47,04657	-0,0202%	53,088	-0,0025%	47,679431	-0,008%
Dispersión	9,238523	3,0450%	4,0953	0,6912%	16,722822	5,314%
Asimetría	-0,67261	0,273691	-0,332	0,019518	0,3571986	1,982648
Exc. Curtosis	-0,33608	7,390222	-0,7488	0,020645	-0,745723	590,8145

Fuente: Elaboración propia

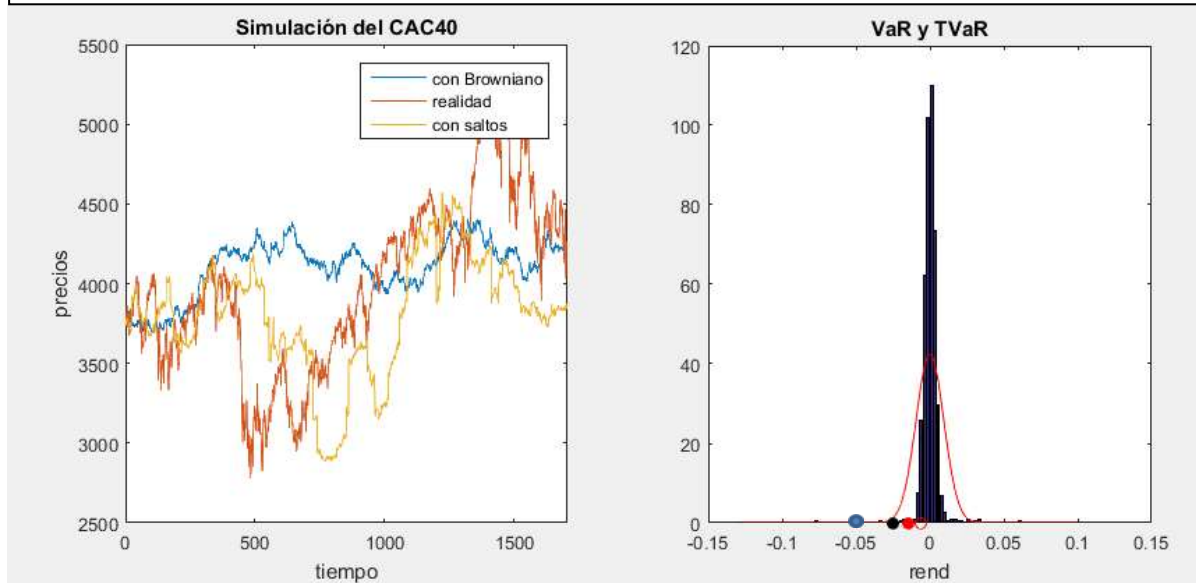
5.4.3. Con los índices financieros

Con el CAC 40

Presentamos a continuación los valores del VaR diario al 5% de significación y el TailVar al 5% y 1% de significación del CAC 40 en el periodo establecido.

$$VaR = -0,0158 \quad TVaR = -0,0195 \quad \overline{TVaR} = -0,0596$$

Figura 5.4.7. (a) Precios de cierre del CAC40 con dato real y simulado con un movimiento browniano geométrico y con movimiento browniano geométrico con saltos, (b) distribución de probabilidad de los rendimientos donde se indica el VaR (punto rojo sin relleno), y el $\overline{TVaR}$ (punto azul). Se pueden ignorar los demás puntos.



En las series financieras la modelización, haciendo un análisis gráfico, parece aproximarse mucho mejor que los bancos. En este caso, la traslación hacia abajo no es tan evidente ya que hay momentos muy pequeños en que se sobreestima el salto. En términos generales el modelo de saltos para una simulación del CAC 40 parece bastante adecuado que una modelización con un movimiento browniano geométrico sin saltos. En los estadísticos subestima el promedio y la volatilidad de los rendimientos. La curtosis sigue siendo bastante alta, pero esto sigue siendo necesario para la mejor modelización de la cola de la distribución.

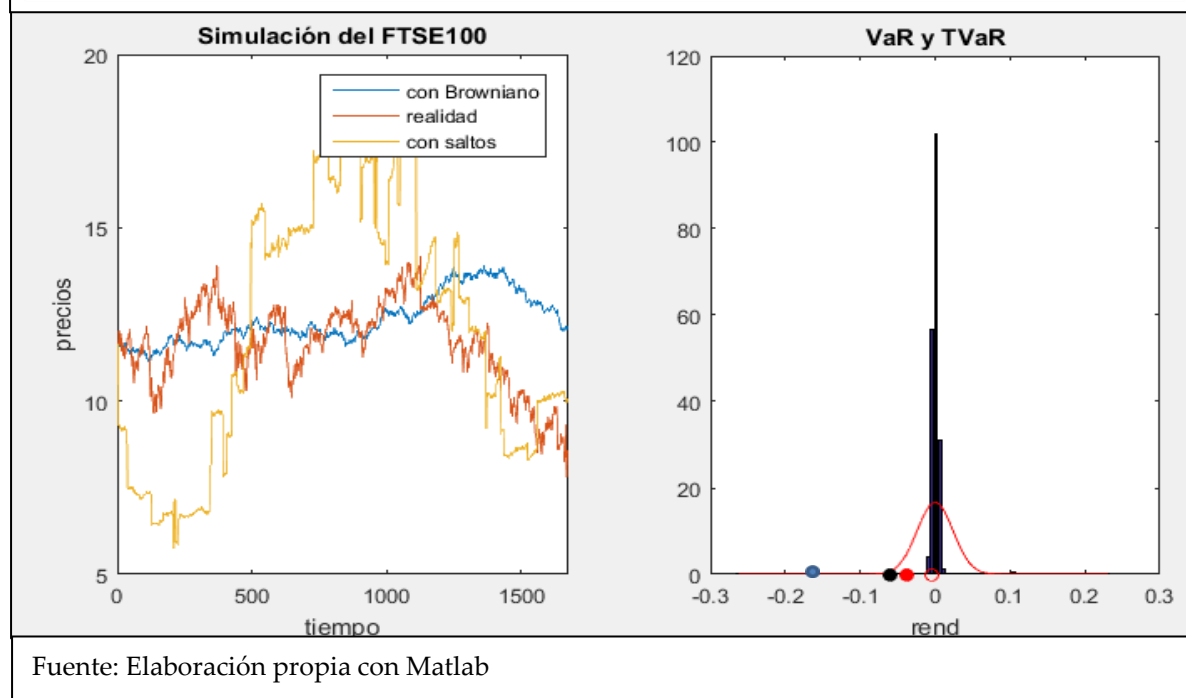
Tabla 5.3.7.	Descripción estadística de los precios y rendimientos del CAC40					
	Cotización real		Cotización simulada (browniano geométrico)		Cotización simulada (browniano geom. con saltos)	
	Precio	Rend.	Precio	Rend.	Precio	Rend.
Media	3990,793	0,00713%	4102,80	0,0054%	3802,549	0,0014%
Dispersión	537,1656	1,38369%	175,846	0,3486%	367,5763	0,9360%
Asimetría	0,119032	-0,15518	-0,7592	0,044462	-0,54838	-2,42497
Exc. Curtosis	-0,51109	3,32244	-0,2377	0,002350	0,249490	65,66192
Fuente: Elaboración propia						

FTSE100

Presentamos a continuación los valores del VaR diario al 5% de significación y el TailVar al 5% y 1% de significación del FTSE100 en el periodo establecido.

$$VaR = -0,010 \quad TVaR = -0,0431 \quad \overline{TVaR} = -0,1639$$

Figura 5.4.8. (a) Precios de cierre del FTSE100 con dato real y simulado con un movimiento browniano geométrico y con movimiento browniano geométrico con saltos, (b) distribución de probabilidad de los rendimientos donde se indica el VaR (punto rojo sin relleno), y el $\overline{TVaR}$ (punto azul). Se pueden ignorar los demás puntos.



En este caso tenemos en medio de la senda una sobreestimación de los saltos que produce una sobreestimación de la volatilidad del modelo con saltos con respecto al original. También al principio, el modelo produce un salto negativo que no ocurre en la realidad y provocando ese gran salto en el medio de la senda temporal. En esta serie el modelo de saltos no fue del todo apropiado. Y los estadísticos van en cierto sentido a asegurar dicha suposición.

Tabla 5.3.8. :	Descripción estadística de los precios y rendimientos del FTSE100					
	Cotización real		Cotización simulada (browniano geométrico)		Cotización simulada (browniano geom. con saltos)	
	Precio	Rend.	Precio	Rend.	Precio	Rend.
Media	11,65687	-0,018%	12,33198	0,0026%	12,01523	-0,0088%
Dispersión	1,203044	1,3759%	0,72099	0,3213%	3,723194	2,39103%
Asimetría	-0,63841	-1,55704	0,648749	0,005832	0,035781	-1,46567
Exc. Curtosis	0,008723	11,50458	-0,74676	0,042335	-1,323916	55,90677

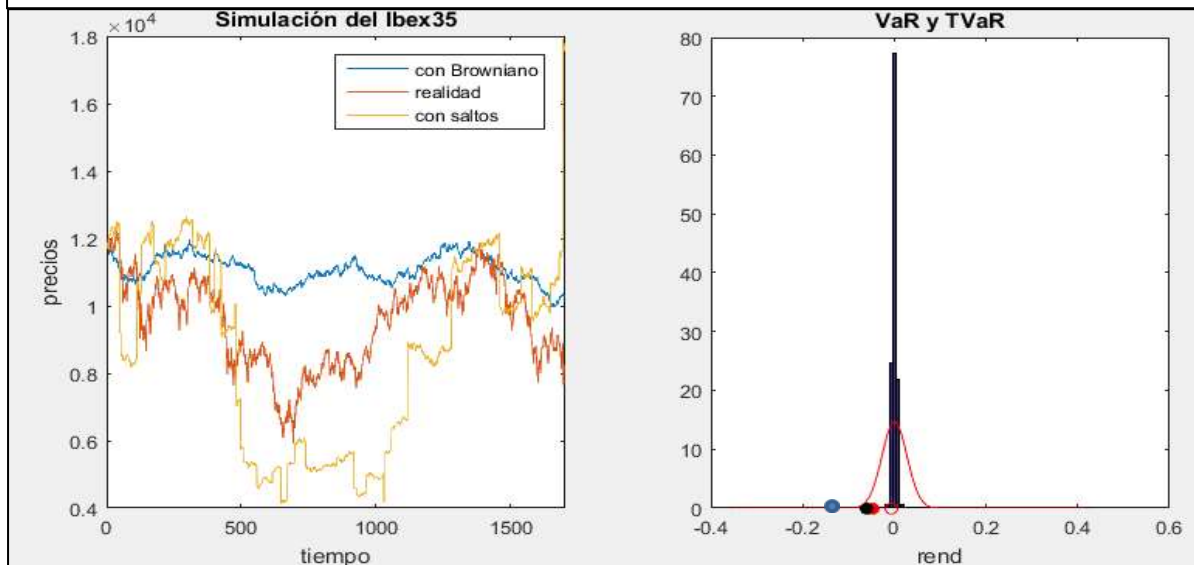
Fuente: Elaboración propia

Ibex 35

Presentamos a continuación los valores del VaR diario al 5% de significación y el TailVar al 5% y 1% de significación del Ibex 35 en el periodo establecido.

$$VaR = -0,011 \quad TVaR = -0,0406 \quad \overline{TVaR} = -0,1671$$

Figura 5.4.9. (a) Precios de cierre del Ibex 35 con dato real y simulado con un movimiento browniano geométrico y con movimiento browniano geométrico con saltos, (b) distribución de probabilidad de los rendimientos donde se indica el VaR (punto rojo sin relleno), y el $\overline{TVaR}$ (punto azul). Se pueden ignorar los demás puntos.



Fuente: Elaboración propia con Matlab

El Ibex35 es uno de las series donde la simulación con un modelo browniano geométrico con saltos parece bastante adecuada. En la mayoría de los saltos y alza y bajadas de la cotización, el modelo con saltos se ha comportado de la misma forma. Lo que faltó posiblemente fue una mayor amplitud ya que en la mayoría de la senda temporal el modelo con saltos se encuentra trasladado hacia abajo, subestimando el salto. La modelización con un movimiento browniano con saltos es posiblemente mejor que una modelización con un movimiento browniano solo. Los estadísticos sobreestiman la volatilidad debido a la subestimación de los saltos. Para ello observar el salto que da el modelo en la mitad de la senda temporal: El Ibex en la realidad reaccionó bastante rápido ante el bajón de ese periodo, mientras que el modelo con saltos siguió en valores muy bajos y luego da el salto. La sobreestimación u subestimación de los saltos es un efecto característico de estos modelos y que se corrige utilizando saltos más complejos o con amplitud distinta.

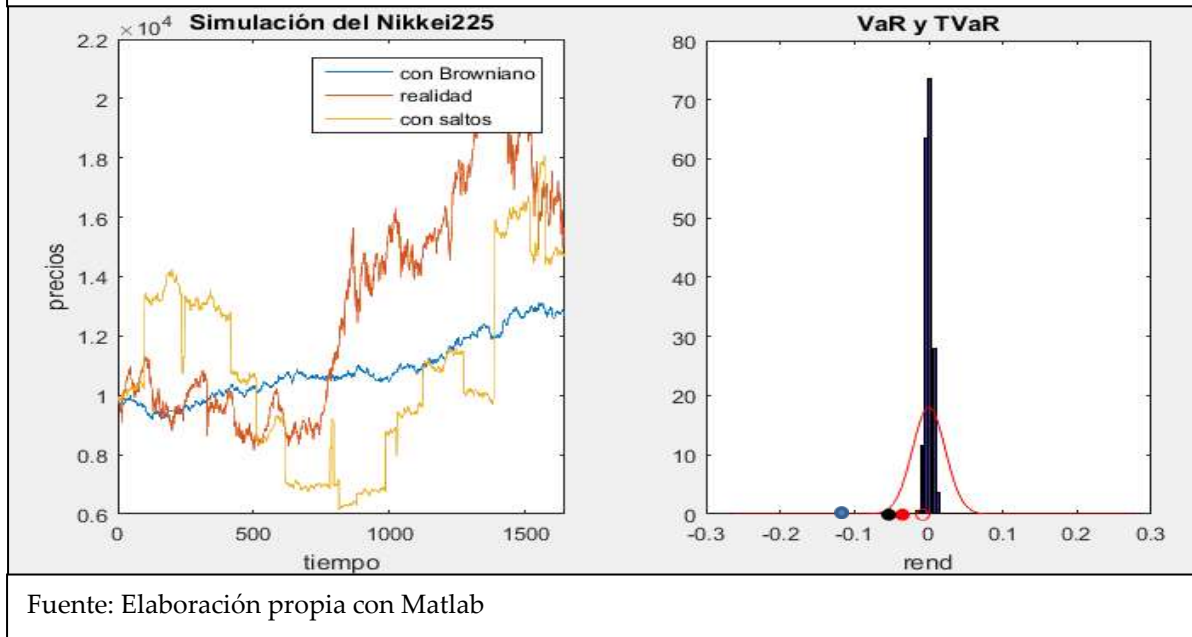
Tabla 5.3.9.	Descripción estadística de los precios y rendimientos del Ibex35					
	Cotización real		Cotización browniana		browniana con saltos	
	Precio	Rend.	Precio	Rend.	Precio	Rend.
Media	9550,238	-0,021%	11071,21	-0,0081%	8656,567	0,02401%
Dispersión	1319,812	1,5809%	424,3963	0,37100%	2861,192	2,70487%
Asimetría	-0,34997	-0,13571	-0,18294	-0,015095	-0,033648	0,806832
Exc. Curtosis	-0,70116	6,778014	-0,67153	0,051621	-1,125585	102,3259

Nikkei 225

Presentamos a continuación los valores del VaR diario al 5% de significación y el TailVar al 5% y 1% de significación del Nikkei 225 en el periodo establecido.

$$VaR = -0,0046 \quad TVaR = -0,03 \quad \overline{TVaR} = -0,1130$$

Figura 5.4.10. (a) Precios de cierre del Nikkei 225 con dato real y simulado con un movimiento browniano geométrico y con movimiento browniano geométrico con saltos, (b) distribución de probabilidad de los rendimientos donde se indica el VaR (punto rojo sin relleno), y el $\overline{TVaR}$ (punto azul). Se pueden ignorar los demás puntos.



De la misma manera que los demás índices, el movimiento browniano con saltos para el Nikkei225 se comporta mucho mejor que el movimiento browniano geométrico sin saltos. Se comporta presentando las mismas características: sobreestimación y subestimación del salto en un primer momento de la senda temporal y luego a la mitad de la senda temporal, respectivamente. A partir de la mitad de la senda temporal el movimiento con saltos se encuentra trasladado hacia abajo, por lo que un aumento de la amplitud del salto probablemente aproxime mejor al comportamiento real. Debido a la sobreestimación y subestimación de los saltos, la volatilidad en el modelo con saltos debe ser mayor que la cotización real. Y para modelizar la cola de la distribución de probabilidad y tener *pérdidas extremas*, necesitamos bastante curtosis (ver **Tabla 5.3.10**).

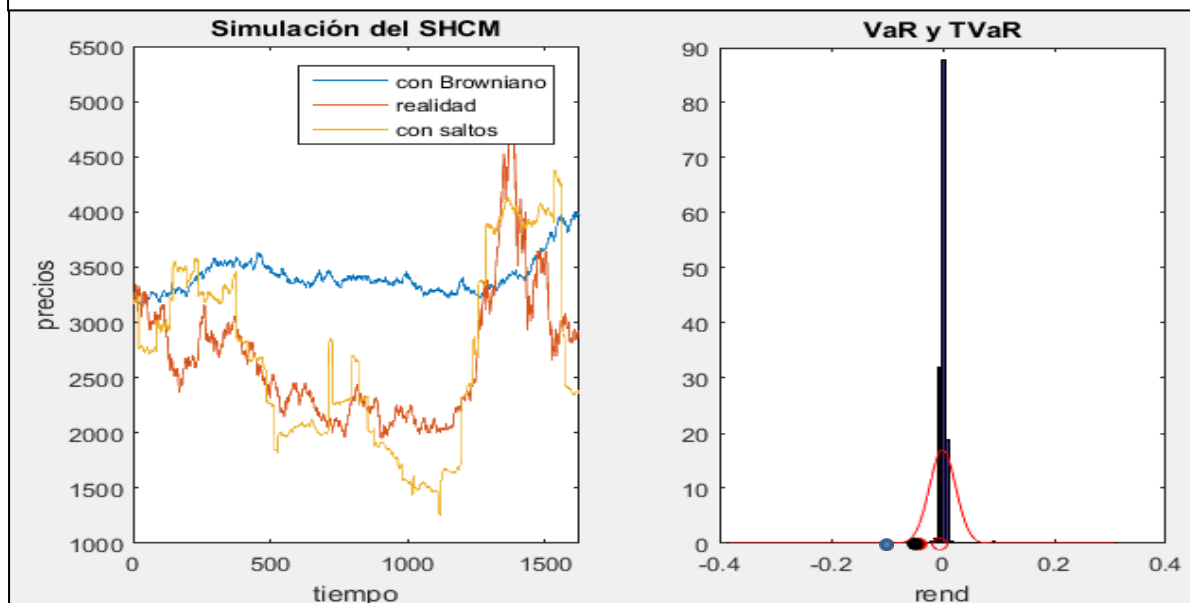
Tabla 5.3.10.	Descripción estadística de los precios y rendimientos del Nikkei 225					
	Cotización real		Cotización simulada (browniano geométrico)		Cotización simulada (browniano geom. con saltos)	
	Precio	Rend.	Precio	Rend.	Precio	Rend.
Media	13038,7	0,0285%	10865,45	0,0158%	10801,56	0,0241%
Dispersión	3785,807	1,4327%	1053,477	0,3531%	3008,935	2,2065%
Asimetría	0,42375	-0,57366	0,57651	0,09366	0,261203	0,5839820
Exc. Curtosis	-1,18633	4,841618	-0,67776	-0,01371	-0,88046	93,749101

Shanghái Comp.

Presentamos a continuación los valores del VaR diario al 5% de significación y el TailVar al 5% y 1% de significación del Shanghái Comp., en el periodo establecido.

$$VaR = -0,0000158 \quad TVaR = -0,0371 \quad \overline{TVaR} = -0,1397$$

Figura 5.4.11. (a) Precios de cierre del Shanghai Comp., con dato real y simulado con un movimiento browniano geométrico y con movimiento browniano geométrico con saltos, (b) distribución de probabilidad de los rendimientos donde se indica el VaR (punto rojo sin relleno), y el $\overline{TVaR}$ (punto azul). Se pueden ignorar los demás puntos.



Fuente: Elaboración propia con Matlab

En el SSE Composite index de Shanghai un modelo browniano con saltos modeliza correctamente su comportamiento. De hecho, desde el punto visto gráfico, podemos comprobar como es capaz de replicar el salto que se produce casi al final de la senda temporal y al principio de la senda temporal podemos ver que primero sobreestima el salto pero luego desciende casi a la par con la cotización real. En este caso la traslación hacia abajo no es tan evidente ya que el modelo evoluciona casi a la par con la cotización real. Desde el punto de vista estadístico, la volatilidad la sobreestima y la curtosis es 22 veces su valor real. Insistimos en la necesidad de tener bastante apuntamiento para poder obtener perdidas extremas y valorar acontecimientos como Cisnes Negros.

Tabla 5.3.11.	Descripción estadística de los precios y rendimientos del Shanghái Comp.					
	Cotización real		Cotización simulada (browniano geométrico)		Cotización simulada (browniano geom. con saltos)	
	Precio	Rend.	Precio	Rend.	Precio	Rend.
Media	2676,555	-0,0049%	3418,688	0,01380%	2695,880	-0,0177%
Dispersión	590,4271	1,5285%	165,9323	0,36910%	821,5630	2,32287%
Asimetría	1,333049	-0,850819	1,4928	-0,011465	0,254775	-0,771852
Exc. Curtosis	2,170922	5,211570	2,445463	-0,082214	-1,12262	112,8691

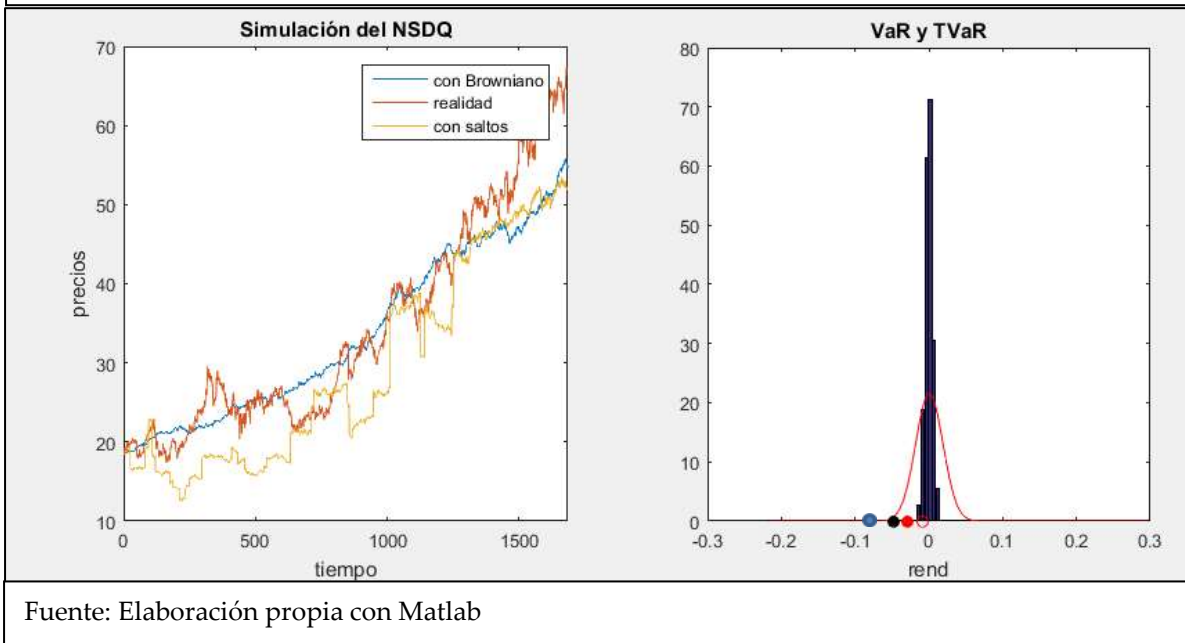
Fuente: Elaboración propia

Nasdaq

Presentamos a continuación los valores del VaR diario al 5% de significación y el TailVar al 5% y 1% de significación del Nasdaq en el periodo establecido.

$$VaR = -0,011 \quad TVaR = -0,0252 \quad \overline{TVaR} = -0,0856$$

Figura 5.4.12. (a) Precios de cierre del Nasdaq con dato real y simulado con un movimiento browniano geométrico y con movimiento browniano geométrico con saltos, (b) distribución de probabilidad de los rendimientos donde se indica el VaR (punto rojo sin relleno), y el $\overline{TVaR}$ (punto azul). Se pueden ignorar los demás puntos.



Fuente: Elaboración propia con Matlab

El Índice Nasdaq es uno de los más de difícil de modelizar debido a su fluctuación pero en tendencia creciente. El movimiento browniano puede modelizar su crecimiento pero no su fluctuación. Para modelizar la fluctuación, podemos utilizar nuestro modelo de saltos. Sin embargo, como se puede observar, el movimiento con saltos subestima los saltos y no es capaz de replicar todo el crecimiento de la serie. Ambos modelos, al final, están por debajo de la cotización real. A pesar de esto, un modelo con saltos parece replicar mucho mejor el movimiento de este índice. Como se puede comprobar, desde el punto de vista estadístico, el promedio y la volatilidad el rendimiento fue aproximado adecuadamente por el modelo de saltos. Como es de esperar y necesario, la curtosis es 16 veces su valor real.

Tabla 5.3.12. :	Descripción estadística de los precios y rendimientos del Nasdaq					
	Cotización real		Cotización simulada (browniano geométrico)		Cotización simulada (browniano geom. con saltos)	
	Precio	Rend.	Precio	Rend.	Precio	Rend.
Media	34,53646	0,076%	33,4837	0,064%	29,32096	0,062%
Dispersión	13,80436	1,668%	10,6215	0,388%	12,82736	1,840%
Asimetría	0,774509	-0,16176	0,31674	-0,04219	0,510206	2,872986
Exc. Curtosis	-0,59654	6,494706	-1,3121	0,071251	-1,27315	98,69592

Fuente: Elaboración propia

5.5. Descripción de los resultados

5.5.1. VaR y TailVaR

En la **Tabla 5.4.**, hemos recopilado todos los valores del VaR y TVaR calculados para que su comparación sea más sencilla.

Valores del VaR y del TailVaR al 5% y 1% de significación de las variables seleccionadas							
Tabla 5.4.	Con Movimiento browniano geométrico				Con Movimiento browniano geométrico con saltos		
Serie	VaR(5%)	$\overline{VaR}(5\%)$	TVaR (5%)	$\overline{TVaR}$ (1%)	VaR (5%)	TVaR(5%)	$\overline{TVaR}$ (1%)
NSDQ	-0,58%	-0,58%	-0,74%	-1,009%	-1,179%	-2,52%	-8,56%
SHCM	-0,58%	-0,58%	-0,83%	-0,939%	-0,0015%	-3,71%	-13,97%
Nikk225	-0,54%	-0,56%	-0,73%	-0,887%	-0,4694%	-3,00%	-11,30%
Ibex35	-0,61%	-0,61%	-0,85%	-1,006%	-1,1991%	-4,06%	-16,71%
FTSE100	-0,55%	-0,55%	-0,70%	-0,865%	-1,0866%	-4,31%	-16,39%
CAC40	-0,58%	-0,58%	-0,71%	-0,898%	-1,5824%	-1,95%	-5,96%
Promedio (índices)	-0,57%	-0,58%	-0,76%	-0,93%	-0,920%	-3,26%	-12,15%
dispersión (índices)	0,03%	0,02%	0,06%	0,06%	0,526%	0,92%	4,34%
BNP	-1,13%	-1,13%	-1,52%	-1,851%	-0,6257%	-4,38%	-14,94%
BBVA	-0,90%	-0,86%	-1,23%	-1,432%	-0,5824%	-5,18%	-17,64%
BARC	-1,41%	-1,41%	-1,89%	-2,349%	-0,7569%	-4,68%	-18,11%
BCH	-2,17%	-2,17%	-2,74%	-3,582%	-0,7330%	-4,38%	-17,65%
BMUFJ	-1,53%	-1,53%	-1,88%	-2,371%	-0,6797%	-15,08%	-67,57%
BAC	-1,43%	-1,50%	-1,89%	-2,338%	-0,8321%	-6,08%	-25,04%
Promedio (bancos)	-1,43%	-1,43%	-1,86%	-2,32%	-0,7017%	-6,63%	-26,83%
Dispersión (bancos)	0,43%	0,44%	0,51%	0,76%	0,0832%	4,52%	20,24%
Promedio (total)	-0,96%	-0,96%	-1,26%	-1,63%	-0,811%	-4,94%	-18,98%
Dispersión (total)	0,53%	0,54%	0,67%	0,87%	0,409%	3,39%	15,92%

Fuente: Elaboración propia

LEYENDA

	Primer puesto: serie con el mayor valor dentro de su categoría (banco o serie)
	Segundo puesto
	Tercer puesto

Las primeras cuatro columnas son los resultados del VaR y el TailVaR, al 5% y al 1% de significación de las variables seleccionadas con un movimiento browniano. La primera columna es el VaR que podríamos llamar “muestral” ya que no se obtiene asumiendo ninguna distribución. Mientras que en la segunda columna es un VaR en el que se asume una distribución Normal y la tercera y cuarta columna son el TVaR, al 5% y al 1%. Calculado asumiendo una distribución.

Las otras tres columnas son los resultados del VaR y el TailVaR, al 5% y al 1% de significación de las variables seleccionadas con un movimiento browniano con saltos. La primera columna es el VaR digamos “muestral” ya que no se obtiene asumiendo ninguna distribución. Las otras dos columnas son TVaR, calculados tomando el promedio a la cola izquierda de los rendimientos con el movimiento browniano con saltos, tanto al 5% como al 1%, con el objetivo de poder compararlo con el Browniano sin saltos.

Con el movimiento browniano, las pérdidas máximas, al 95% de confianza, son menos que el 1% para el VaR y de 1,26% para el TVaR, una pérdida promedio que siguen los índices pero que los bancos superan por 0.5%. Sin embargo, al 99%, el TVaR ya proporciona pérdidas de más de 2% de promedio para los bancos y de menos de 1% para los índices.

Dentro de los índices el que más pérdida tiene es el Ibex35 y en los bancos el ICBC. Al 95%, tenemos 0,61% (0,85%) en el VaR (TVaR) y 2,17%(2,74%) en el VaR (TVaR), respectivamente. Al 99%, el TVaR le cede el primer puesto al Nasdaq (pero por muy poco, con respecto al Ibex), y en los bancos sigue siendo el ICBC. *Estos valores están indicados con un color rojo. El segundo puesto está indicado con un color morado. Y de tercer lugar con verde.* En segundo y tercer lugar, en general, están entre el índice y el banco japonés y norteamericano.

Una de las razones por la cual sean justamente estas dos series las que presentan más pérdidas se puede encontrar en los dos Cisnes Negros que hemos explicado. El lunes negro chino tuvo un impacto bastante negativo en el banco ICBC, como podemos apreciar en la figura 5.1., y para que veamos la coherencia en el Cisne Negro, la segunda serie donde hubo más pérdida fue en la serie Shanghai Comp. Por otra parte, fue justamente en el Ibex35 donde el *brexít* afectó con un mayor impacto. En el segundo puesto en los bancos tenemos al banco MUFJ, pero este es un caso particular que no tomaremos en cuenta. Por lo que en los bancos nos vamos al tercer puesto, indicado con un color verde, teniéndolo el *Bank of America* y siendo coherente con la serie ya que el Nasdaq está en tercer puesto de los índices con más pérdidas.

Es momento de dar un *choque de realidad*. El movimiento browniano sin saltos nos proporciona pérdidas de *a lo sumo* de 3% y de promedio total la mitad en el TVaR (al 99%). Sin embargo, las pérdidas reales están muy lejos del 2-3%. En el lunes negro chino, Shanghai tuvo una caída del 8,49%, la Bolsa de París un 5,35%, la Bolsa de Londres perdió 4,67% y el mismo Ibex 35, cerró con una baja de 5,01%. Esto se debe a que el movimiento Browniano tiene la limitación de no valorar toda la cola de la distribución de probabilidad de los rendimientos, dando pérdidas alrededor de la media y no teniendo en cuenta *pérdidas extremas*. En este sentido tenemos los modelos con saltos para salvar esta limitación.

Un aspecto curioso es observar las pérdidas proporcionadas por el VAR al 5% de ambos modelos. Si comparamos, comprobamos que para el movimiento browniano con saltos las pérdidas son muy parecidas al browniano geométrico sin saltos, incluso en algunos casos son menores. ¿Cómo es esto posible? ¿No se supone que el movimiento browniano con saltos da una pérdida más exacta o real? Este hecho tiene su explicación “estadística” ya que para ello utilizaremos una comparación gráfica de las dos distribuciones (**Figura 5.5.**) que estamos comparando: una Normal y otra no Normal, leptocúrtica y asimétrica negativa.

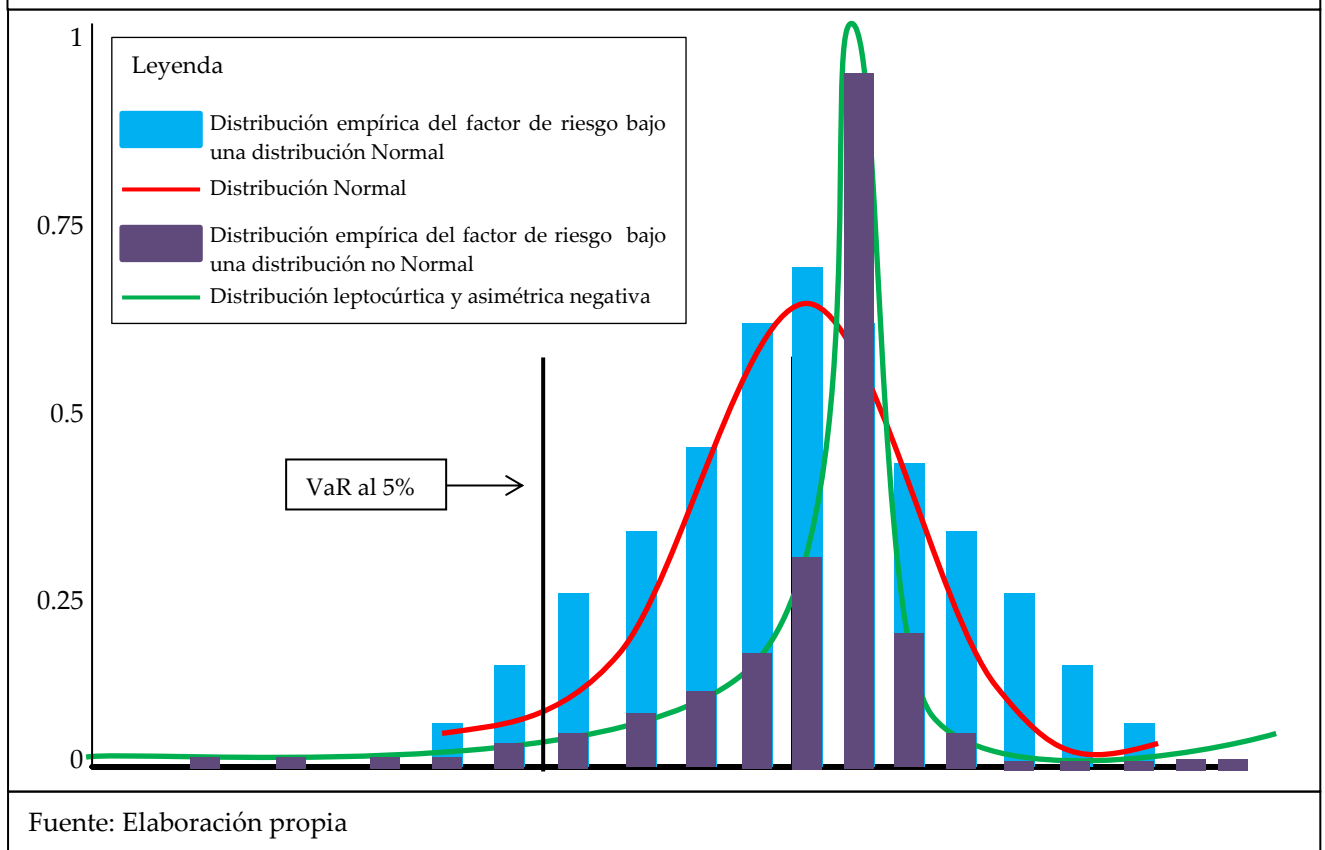
Observando la figura podemos apreciar que una distribución leptocúrtica, tiene una cola más larga que la distribución Normal, dando la ventaja de poder modelizar sucesos poco probables, pero que ocurren, como un Cisne Negro.

Además la utilización de distribuciones leptocúrticas en contra de utilizar distribuciones acampanadas es, precisamente, que le da cierta probabilidad de ocurrencia a fenómenos bastante alejado de la media (tanto a la derecha como a la izquierda, dependiendo de la asimetría de la distribución), donde hay mucha densidad acumulada pero mucho menor que las distribuciones acampanadas. La razón por la cual los valores del VaR de ambos procesos sean muy parecidos o incluso menores para el movimiento con saltos, es por la *forma* de la distribución. En una distribución leptocúrtica, al 95% de la densidad de distribución se “llega” mucho antes que para la Normal. Sin embargo para las distribuciones Normales la diferencia entre el VaR o el TVaR, no es muy significativa debido a su falta de cola.

Esta es precisamente la diferencia con la distribución Normal, *la distribución leptocúrtica tiene mucho más cola para alejarse* y de ahí que se puedan generar bastante diferencia entre los valores de la cola de la distribución de ambas distribuciones. De hecho eso es lo que ocurre (ver los valores de los TVaR de ambas distribuciones). La observación grafica puede ayudar a observar lo expuesto.

En la segunda parte de la tabla, con el movimiento browniano con saltos, como se puede observar, hay una diferencia promedio total de 17% de un TVaR del 1% con un movimiento browniano con saltos al movimiento browniano sin saltos. Los valores de pérdida dados por el TVaR al 1% en un modelo con saltos son mucho más coherentes con la realidad.

Figura 5.5. VaR bajo una comparación entre distribución Normal y no Normal



El Ala del Cisne Negro y la Modelización con saltos

En este modelo las pérdidas están en promedio al 18%, los índices pierden 13% y los bancos el doble. El que tiene más pérdida en los índices es, otra vez, el ibex35 (ya explicamos probablemente por qué) y es de un 16%. Siendo coherente con la realidad ya que el 24 de junio de 2016 (día del *Brexit*) se registraron a lo largo del día bajadas del 14%.

Dentro de los bancos, el que posee más pérdidas es el banco MUFJ, sin embargo dado que es un banco que sido sometido a regulación, vamos a tomar en cuenta el segundo puesto, que lo tiene Bank of America siendo consistente con el resultado del Browniano en escoger quien tiene más pérdida a cierto horizonte temporal y nivel de significación. El tercer puesto en los bancos es el ICBC; siendo consistente con el tercer puesto en los índices ya que es el Shanghai Comp.

De esta forma hemos llegado a uno de los objetivos del trabajo, que era valorar la incorporación de saltos al cálculo del VaR y el TVaR con la motivación de comprobar que dicho modelo proporciona valores de pérdidas más coherentes a la realidad que el movimiento browniano geométrico sin saltos. Como comprueban los datos de la tabla, el movimiento browniano con saltos proporciona valores de pérdidas (extremas) más coherentes con la realidad. El siguiente paso es hacer el correspondiente *Backtesting* para el VaR y TVaR.

5.5.2. Cálculo del Backtesting

5.5.2.1. Backtesting del VaR

En la **Tabla 5.5.** tenemos los resultados de los distintos test para el backtesting del VaR bajo el movimiento browniano geométrico.

Tabla 5.5.	Backtesting del VaR										
	Movimiento Browniano geométrico										
	N	n optimo	n*	Φ	φ^*	K	Ktuff	H	H*		Vc (H)
BAC	85,00	100,550	10,62	4,227%	0,528%	2,666	180,072	13408,67	296,873		113,14
BMUFJ	100,00	101,550	12,50	4,924%	0,615%	0,025	206,273	13182,02	291,855		124,34
BCH	103,00	101,800	12,87	5,059%	0,632%	0,015	162,984	13119,51	276,965		124,34
BARC	101,00	100,800	12,62	5,010%	0,626%	0,000	54,904	13470,39	298,240		124,34
BBVA	110,00	103,950	13,75	5,291%	0,661%	0,364	154,562	12655,17	280,190		124,34
BNP	93,00	91,800	11,62	5,065%	0,633%	0,016	14,273	11628,86	257,467		113,14
CAC40	87,00	85,200	12,42	5,106%	0,729%	0,040	14,273	11018,39	243,951		113,14
FTSE100	84,00	83,650	12,00	5,021%	0,717%	0,002	35,689	10539,68	233,353		101,87
IBEX35	90,00	85,050	12,85	5,291%	0,756%	0,298	19,015	10381,34	229,847		113,14
NIKKEI225	78,00	82,300	11,14	4,739%	0,677%	0,240	19,015	10737,92	237,742		101,87
SHCM	86,00	81,150	12,28	5,299%	0,757%	0,300	121,783	9928,565	219,822		113,14
NSDQ	90,00	84,150	12,85	5,348%	0,764%	0,419	19,015	10752,24	238,059		113,14
Prom. Bancos	98,667	100,075	12,33	4,929%	0,616%						↑
Prom. Índices	85,833	83,583	12,26	5,134%	0,733%						
Prom. Total	92,250	91,829	12,29	5,032%	0,675%						
		αT	12,75	Valor critico (Vc)	Alfa (5%)	$\chi^2_{1,0,05} = 3,841$					$\chi^2_{n,0,05}$

Fuente: Elaboración propia

El backtesting más básico es contar el número de días en el que el factor de riesgo (los rendimientos) excedió el VaR calculado (es a lo que llamamos excepciones, n). Para este cálculo, hemos utilizado como VaR el $\overline{VaR}$ de la tabla 5.4. Como se puede observar, con el movimiento browniano, tenemos un promedio de 92 excepciones en los bancos, donde BBVA, con 110 excepciones se lleva el primer puesto. Y para los índices, un promedio de 86 excepciones, donde el primer puesto lo tienen el Nasdaq y el Ibex35. Dado que para los bancos hay en general un poco más de 2000 observaciones y para los índices en torno a 1700 observaciones, el número que debería haber de excepciones es $2000 \times 0,05 = 100$ excepciones para los bancos y 85 para los índices. En este sentido, el VaR que hemos calculado, bajo el movimiento browniano tiene un buen Backtesting.

Incluso, si de forma muy simple, llevamos esas excepciones a términos anuales (dividiendo por 8 años para bancos y 7 para índices), obtenemos la columna con n^* , y un promedio de 12 excepciones. Estando dentro del número óptimo que debería aparecer: $n = \alpha T = 0,05 \cdot 255 = 12,75$. El ratio de fallo $\varphi := \frac{n}{T}$ de la muestra tiene un valor promedio del 5% que es igual al nivel de significación del VaR que le estamos haciendo el Backtesting, $\alpha = 5\%$

Los test de Kupiec (K), acepta la hipótesis (ya que todos los valores $K_i \ll \chi_{1,0,05}^2 = 3,84$), siendo coherente con $\varphi \approx \alpha$. Sin embargo, Kupiec-Tuff (Ktuff) y el Kupiec Mixto (H)² y el test Kupeic mixto *ajustado anualmente* (H*) rechazan la hipótesis nula. El test de Kupiec-Tuff depende principalmente de cuando ocurra la primera excepción, si esta excepción ocurre muy pronto, el test tendrá un valor bajo. Si, en cambio, la excepción ocurre muy tarde el test o tiene un número muy elevado o incluso puede dar una indeterminación matemática (ver tabla 5.7., en los casos en que ponemos n.p.c.). El test de Kupiec mixto, depende fundamentalmente de las diferencias que halla entre las excepciones, si esta es unitaria, da error y habría que hacer el cálculo con el test Christoffersen (en este caso, pusimos en 0 en dicha suma), en cambio, si esta es muy elevada, el test daba indeterminación (en cuyo caso también pusimos un 0). Un test muy elevado indica que las excepciones están dispersas y no agrupadas, indicando cierta independencia entre excepciones. El test no se puede hacer cuando hay pocas excepciones.

El test de Kupiec Mixto en ningún momento se acepta la hipótesis nula debido al número de excepciones que había que sumar (entre 93 excepciones, que además están muy dispersas entre sí) y no se puede hacer un cálculo coherente con la n^* ya que el criterio para escoger qué valores sumar (que serían sólo 12) sería totalmente arbitrario; siendo, por tanto, inaceptable desde el punto de vista empírico.

Observemos qué ocurre con un movimiento browniano con saltos. Observamos la **Tabla 5.6.**

Dado que el VaR no cambiaba mucho de valor de un movimiento browniano a otro, el número de excepciones tampoco varían mucho. Se queda en 99 y 84 para bancos e índices. El test de Kupiec sigue aceptando la hipótesis ya que todos los valores $K_i \ll \chi_{1,0,05}^2 = 3,84$, siendo coherente con $\varphi \approx \alpha$. De forma general, el backtesting del VaR para ambos movimientos es casi idéntico.

² Ver capítulo 1.

El Ala del Cisne Negro y la Modelización con saltos

Tabla 5.6.	Backtesting del VaR									
	Movimiento Browniano geométrico con saltos									
	n	n*	Φ	φ^*	K	Ktuff	H	H*		Vc (H)
BAC	100	12,50	4,973%	0,622%	0,0032	10,1183	12813,78	283,7020		124,34
BMUFJ	101	12,62	4,961%	0,620%	0,0031	90,6893	12365,25	273,7714		124,34
BCH	102	12,75	5,010%	0,626%	0,0004	n.p.c	12871,02	284,9693		124,34
BARC	101	12,62	5,010%	0,626%	0,0004	0,4210	13364,43	295,8936		124,34
BBVA	97	12,12	4,666%	0,583%	0,4998	n.p.c	13446,77	297,7165		124,34
BNP	91	11,37	4,956%	0,620%	0,0074	54,9038	11725,10	259,5983		124,34
CAC40	85	12,14	4,988%	0,713%	0,0005	n.p.c	10617,86	235,0834		101,87
FTSE100	83	11,85	4,961%	0,709%	0,0053	6,7720	10722,86	237,4083		101,87
IBEX35	85	12,14	4,997%	0,714%	0,0000	6,7720	10826,05	239,6928		101,87
NIKKEI225	83	11,85	5,043%	0,720%	0,0063	206,272	10011,84	221,6660		101,87
SHCM	82	11,71	5,052%	0,722%	0,0093	113,837	10252,01	226,9834		101,87
NSDQ	85	12,14	5,051%	0,722%	0,0090	129,833	10527,84	233,0903		101,87
Prom. Bancos	98,667	12,33	4,929%	0,616%						↑
Prom. Índices	83,833	11,97	5,015%	0,716%						
Prom. Total	91,250	12,15	4,972%	0,666%						
		12,75	Valor crítico (Vc)	Alfa (5%)	$\chi^2_{1,0,05} = 3,841$					$\chi^2_{n,0,05}$

Fuente: Elaboración propia

Tabla 5.7.	Backtesting del TVaR				
	Movimiento Browniano geométrico		Browniano geométrico con saltos		
	Test 1 (Z _i)	TEST 2 (Z ₂)	Test 1 (Z _i)	TEST 2 (Z ₂)	p
BAC	-0,00087818	0,15390706	-0,00806437	-0,00255034	-0,00031
BMUFJ	-0,00847764	0,00691518	-0,01979991	-0,01427662	-0,000413
BCH	0,0209483	0,00940742	-0,00875524	-0,01073708	-0,000103
BARC	0,0535277	0,05164978	-0,00736552	-0,00936426	-0,0004
BBVA	0,13251967	0,04865072	0	-0,000481	-0,0003
BNP	0,06612325	0,05391571	-0,01404327	-0,0052063	-0,00008
CAC40	0,01100761	-0,0098866	-0,00802517	-0,00565891	0,000014
FTSE100	0,0077176	0,0035658	-0,0312745	-0,02326101	-0,000088
IBEX35	0,09766545	0,04514862	-0,0095727	-0,00897919	0,0002401
Nikkei225	0,05266242	0,10215879	-0,00909971	-0,01768258	0,000241
SHCM	0,10998803	0,0567957	0	-0,01047443	-0,000177
NSDQ	0,00505369	-0,0641137	0	-0,01010101	0,00062

Fuente: Elaboración propia

LEYENDA³

	Se acepta la hipótesis
	Se rechaza la hipótesis

³ Leyenda valida también para las dos tablas anteriores.

5.5.2.2. Backtesting del TailVaR

Observando la Tabla 5.7, podemos observar que bajo el movimiento browniano, la hipótesis que establece el test de Acerbi no aceptada, concluyendo que la distribución Normal no es una distribución adecuada para realizar un backtesting. Dado que nuestro TVaR fue calculado al 95%, nuestro valor crítico es el -0,11 para el test 1 y -0,7 para el test 2 (ver Tabla 5.8.). Para que se acepte la hipótesis, el valor de los test tiene que ser menores a al valor crítico. Con el movimiento browniano geométrico sin saltos, ningún test se acepta y esto se debe a la consecuencia ya explicada en el trabajo. Sin embargo, los Test tienen valores próximos y nulos, Acerbi establece que bajo esas distribuciones las excepciones están bien calculadas (esto viene del hecho de que el Backtesting del VaR ha sido bastante bueno).

Para los valores críticos de los test del movimiento browniano, utilizaremos la Tabla 5.8.:

Tabla 5.8.	Valores críticos (p) (para el movimiento browniano)				
	Test 1		Test 2		
α	5%	10%	0.01%	5%	10%
Normal	-0,11	-0,08	-1,8	-0,7	-0,53
Fuente: Acerbi					

Para el movimiento browniano con saltos, para el cálculo del p-valor haría falta hacer simulaciones y realizar los siguientes pasos. Sin embargo como se podrá observar, el p-valor que se debe calcular es un tipo de promedio de las simulaciones realizadas.

Sin entrar en dificultades técnicas hemos considerado que un valor crítico bastante adecuado (sin mucho error) puede ser precisamente el promedio de los rendimientos de cada serie que ya hemos simulado dicha serie. No hace falta hacer otra simulación ya que estamos trabajando con una serie simulada. Los pasos para calcular el p-valor son los siguientes:

- Simular T veces el factor de riesgo X_t bajo la distribución que se quiere hacer la hipótesis.
- Calcular los test con el factor de riesgo simulado: $Z^i = Z(\bar{X}^i), \forall i = 1, 2, \dots, T$
- Estimar

$$p = \sum_{i=1}^T \frac{[Z^i < Z(\bar{X}^i)]}{T}$$

Consideramos el promedio de los rendimientos ya simulados como una buena aproximación de esta última estimación. Usando este valor crítico, tenemos que rechazar la hipótesis en todos los casos del test 2 y aceptar todos los casos en el test 1. Vamos a comprar los test entre cada proceso. Dicha comparación nos lleva a un par de observaciones:

La diferencia evidente entre los test para un movimiento browniano y otro con saltos. En el primero todos excepto dos, con valores de 0, se aceptan la hipótesis. En el test 2, todos aceptan la hipótesis. Dado que el movimiento browniano con saltos permite modelizar la cola de la distribución, tiene sentido que los TVaR tengan un buen backtesting. También, como se puede observar, el test 2 es mucho mejor que el test 1 en el movimiento con saltos. Significándose esto que posiblemente se esté modelizando mucho mejor la cola de la distribución de pérdidas (propiedades del test 2).

Esta diferencia nos puede ayudar a concluir que un backtesting para el TVAR bajo un modelo browniano con saltos es mucho más exacto que un backtesting para un modelo browniano geométrico y esto se debe

Y por último, es coherente que un backtesting del TVaR obtengamos en nuestro modelo resultados como los que obtuvimos. Bajo un movimiento browniano, el TVaR calculado lo más probable es que estuviese subestimado (me refiero en *cuantía*) y el TVaR bajo un movimiento browniano con saltos lo más probable es que nos apareciese que esta sobreestimado (en *cuantía*). Esto tiene coherencia con nuestro objetivo del trabajo. En el mismo, nunca buscamos conseguir una pérdida *normal* ya que nos interesaba más las *pérdidas extremas* o aunque sea *pérdidas* cuando había mucha volatilidad en el mercado.

Nuestro objetivo es comprobar que con el movimiento browniano con saltos se podían obtener pérdidas más realistas en el momento de mucha volatilidad o en las alas del Cisne Negro o incluso en el Cisne Negro. El Ala del Cisne Negro y el Cisne Negro no son lo mismo. El Ala son los picos de volatilidad que pueden haber en ciertos momentos y no es algo que ocurra con mucha frecuencia, pero si con más frecuencia de la que los participantes del mercado creen y mucho más frecuente que el Cisne Negro. Por esta razón, las pérdidas del Ala o del Cisne Negro solo se pueden detectar en un TVaR, y no en VaR. En este sentido, estamos totalmente de acuerdo en que la regulación utilice el TVaR en vez del VaR para la medición de capital regulatorio para riesgo de mercado.

A pesar de la poca frecuencia que tenga el ala del Cisne Negro o el mismo Cisne Negro debemos ser conscientes de su existencia. Con esta reflexión conecto con mi reflexión filosófica, ya para finalizar el trabajo.

5.5.3. Una reflexión filosófica

Desde el punto de vista metodológico hemos hecho una comparación entre dos tipos de modelos. Un modelo browniano y un modelo browniano en el que le hemos añadido un componente de salto.

El modelo browniano, tal como se expuso, tiene ventajas matemáticas desde el punto de vista de tratamiento e implantación del modelo. Tiene propiedades bastante convenientes e interesantes para la modelización financiera. Sin embargo, tal como se expuso, desde un punto de vista financiero, es un modelo con ciertas limitaciones, principalmente el que denominamos **problema de la volatilidad**, y que empíricamente y escépticamente, desde mi punto de vista, es un problema grave que tiene el mercado.

Una de las maneras en que se puede solucionar dicho problema de volatilidad es precisamente haciendo que la volatilidad se comporte estocásticamente. Para ello se proponen modelos de volatilidad estocástica (SVM, por sus siglas en ingles).

En este trabajo expusimos una ecuación muy general de cómo se modelizaría dicho modelo y expusimos en el anexo el modelo de Heston. También, como es lógico, a los SVM se le pueden añadir todo tipo de modificaciones como saltos en el mismo proceso del subyacente (modelo de Bates) o con saltos también en la volatilidad (SVJJ, por sus siglas en ingles).

Hasta ahora esto es lo que hemos hecho y lo que hemos expuesto. Sin embargo, y aunque tal vez se de esta impresión, el objetivo de este trabajo nunca fue del todo exponer de forma cuantitativa del tema a exponer. Nos parece más importante dar un punto de vista “filosófico” y epistemológico (la *epistemología* es la ciencia que estudia el conocimiento).

Mandelbrot (1924-2010), matemático franco estadounidense de origen polaco, tiene en su libro *The (Mis)Behavior of Markets* (2004, 2008), una de las mejores frases que quiero destacar para esta reflexión filosófica:

“Unfortunately, the world has not been designed for the convenience of mathematicians”

Benoît Mandelbrot

Pudiendo modificar esta cita con: *las matemáticas (los modelos), por desgracia, no están para explicar el mundo, sino para “intentar” entenderlo*. Desde este punto de vista, y pareciendo lo contrario, hay que aprender a ver los modelos por lo que son: aproximaciones de la realidad.

Los modelos nunca son perfectos y jamás nos proporcionarían todo el comportamiento de la variable de estudio con toda precisión y exactitud. Un modelo nos puede ayudar a entender el funcionamiento general de un proceso. En nuestro caso, nuestro objetivo es ver como se ajusta un modelo de saltos a los precios o rendimientos financieros.

Con esto lo único que pretendemos es utilizar una aproximación más compleja de la que se usaba tradicionalmente como el Browniano geométrico. Y por consecuencia de ello, vimos una dicha limitación: las *“curvas de campana se utilizaron en los lugares equivocados”* (Taleb).

Pero el cambio de un modelo a otro modelo tampoco es lo importante ya que sigue siendo un aspecto metodológico: lo que cambia es la ecuación. Eso no nos interesa. Las ecuaciones, los números (la información), cambian constantemente, es inevitable y necesario. Lo que nos interesa y es lo importante es el *cambio epistemológico*. Que mientras vayan cambiando la información y mientras el mundo se vuelva más complejo, podamos evolucionar junto a él.

El mundo está cada vez más globalizado y la información es cada vez es más compleja y los modelos y la estadística de hace dos siglos ahora no funciona. Metiéndome otra vez en lo cuantitativo, la distribución Normal, el browniano geométrico aplicado a los precios financieros, la ecuación de BS, son modelos y ecuaciones totalmente potentes e increíbles, matemáticas como C.F. Gauss, Bachelier y Black-Scholes tienen y tendrán su trono en la historia. Sin embargo, los reinados se renuevan y hay que dar paso a nuevas herramientas más potentes.

Hoy en día, como es lógico, no hay modelos de referencia además de los utilizados por regulación. Sin embargo, de nuevo, no nos interesan los modelos más allá de un estudio empírico del tema. Insistimos en el *sentido epistemológico* del tema. A pesar de que el trabajo es totalmente cuantitativo, lo que se pretende es dar alguna evidencia empírica pero nos interesa más introducir la idea del *cambio epistemológico* o *“de forma de pensar”*.

Esta *incorporación de un salto* no es más que el intento de una *modificación epistemológica*. Debemos, con esta idea, de ser capaz de observar la idea subyacente del trabajo.

No queremos quedarnos *sólo* con la idea de que el VaR o el TailVaR de un modelo con saltos es mayor que el del otro modelo y que un modelo de saltos salva las limitaciones que posee el movimiento browniano geométrico. Me interesa la *implicación epistemológica del trabajo*: la capacidad de intentar percibir el mundo más allá de lo que diga una ecuación o un modelo. Los modelos no son perfectos, de hecho se equivocan.

En este sentido, aparecen *Cisnes Negros*. En un sentido más amplio que un suceso inesperado de gran impacto financiero. Hay variables inesperadas que nunca podremos modelizar, como la volatilidad. A pesar de que propusimos soluciones a este problema, como la incorporación de saltos al proceso estocástico o modelos de volatilidad estocástica. Estos modelos se encuentran con el mismo problema intrínseco de la modelización: los modelos se equivocan y además, con la volatilidad, se introduce el *problema de la irracionalidad de la volatilidad*.

La volatilidad es la manera cuantitativa en que los inversores manifiestan sus miedos y el miedo es irracional. En este sentido, *los mercados son movidos por miedo*. Y esta variable, difícil de cuantificar, puede producir Alas del Cisne Negro y Cisne Negros en su totalidad, bastante peligrosos y con un gran impacto: pueden hundir mercados.

Ahora entra en juego otro *problema epistemológico* en el sentido, tal como expone Taleb, de que tendemos a ignorar dichos sucesos debido a su poca probabilidad y cuando ocurren intentamos explicar dicho suceso desde un punto vista racional cuando dicho suceso se pudo haber producido por un hecho irracional. Lo que intentamos en este trabajo es hacer ese cambio de mentalidad, intentar aumentar la capacidad de percepción de existencia de estos *sucesos raros* que cada vez son menos raros. No intentamos ni predecir ni explicarlos, sino ser consciente de su existencia y que nos pueden impactar.

Como ejemplo, tenemos la caída de las bolsas del 24 de agosto de 2015 debido a la caída de la Bolsa de Shanghái. Sin embargo preferimos uno más reciente, el 23 de junio 2016 se hizo el referéndum en Reino Unido con la intención y votación de permanecer o no en la Unión Europea (el famoso *Brexit*). El mismo 23 de junio los mercados reaccionaron de forma *bajista* pero luego dada la *expectativa* y los resultados por sondeos que se daban de la votación, el mercado volvió a su situación *normal* con tendencia *alcista*: el mercado tenía la expectativa de que Reino Unido se quedaría dentro de la UE. Al día siguiente *inesperadamente* los resultados expusieron otra situación. Con un resultado de 52-48% a favor de no permanecer dentro UE. Reino Unido había producido un Cisne Negro, un suceso *inesperado, casi imposible*, pero que ocurrió. Y cumpliendo además lo del gran impacto: todas las bolsas europeas tuvieron un descenso del 5 al 8% y la más perjudicadas: España e Italia con caídas de cierre del 12%. En España fue particularmente impactante ya que es la mayor caída del Ibex35 de su historia (incluyendo la crisis del 2008).

Este hecho pone en énfasis la importancia de los Cisnes Negros y su importancia de tomarlos en cuenta e *intentar* introducirlo en los modelos. Sin embargo, hay que considerar no la parte del cambio epistemológico sino de nuestro *“escepticismo empírico”*. Reiteramos, los modelos se equivocan, los números se equivocan, el ser racional se equivoca. Un modelo en la mayoría de los casos nunca va poder modelizar con mucha precisión un Cisne Negro, debido precisamente a que desconocemos su mecanismo racional y exacto de generación.

Añadamos más problemas de modelización. De nuevo, la volatilidad (desde nuestro punto de vista el problema más grave a los que se enfrenta el mercado día a día) no es observable y podemos calcularla *localmente*, sin embargo es muy estocástica. *La volatilidad de la volatilidad* es lo que los modelos deberían intentar modelizar, pero es demasiado complejo de implementar y difícil de interpretar. Aquí entra en juego lo que denominamos *dualidad o paradoja de la modelización*: hay escoger entre dificultad y capacidad, se suele escoger *no* dificultad, por lo que se renuncia a capacidad.

Sin embargo y dificultando la labor de hacer modelos, si existiese ese *modelo perfecto*, tememos exponer que ese modelo dejó de ser perfecto al acabar de formularse. Tal como expuso Keynes y lo vuelve a *exponer* Mandelbrôt: ante el mercado, *somos animales en busca de patrones*. El mercado se mueve por esos *animales* y es bastante complicado modelizar el comportamiento *irracional* que caracteriza el comportamiento del mercado.

Este componente irracional es precisamente producido por nuestra *forma de pensar*: la expectativa (o el miedo), es la forma elegante de exponer *como creemos que se van a desarrollar los acontecimientos*, un intento de predicción pero sin ninguna metodología. Incluso teniendo esa metodología ¿Por qué me voy a fiar de ese modelo? ¿Esa ecuación de verdad me dice cómo se comporta o se comportara la variable? Hay veces en que actuamos con cierto escepticismo y a veces está bien hacerlo.

Sumándole al problema de la irracionalidad, tenemos también el hecho de que *no somos conscientes de lo estocástico del entorno financiero*. En este sentido, esta forma pensar intrínseca es lo que Taleb expresa con *“vivimos en Extremistan (donde hay Cisnes Negros), pero pensamos como si viviésemos en Mediocristan (donde no hay Cisnes Negros)”*. En nuestra opinión, a pesar que no podremos, posiblemente nunca, modelizar en totalidad el comportamiento de una variable, a veces preferimos “no complicarnos” que a “complicarnos” (preferimos sencillez a capacidad). Y esto es lo primero que hay que *cambiar en nuestra forma de pensar y salir de Mediocristan*: ser realista y aceptar la realidad estocástica en que la nos movemos; existen los Cisnes Negros y son cada vez más frecuentes. Recordad también que introducíamos el concepto de *Ala del cisne negro*, que es el pico de volatilidad que precede al Cisne y luego se manifiesta *todo* el Cisne Negro. Tal vez podamos utilizar un modelo para intentar modelizar el ala del Cisne Negro. Aunque sea para tener *algo* que nos pueda ayudar a movernos por nuestro entorno.

Como conclusión de esta reflexión tenemos entonces:

- Posiblemente nunca podamos modelizar racionalmente el movimiento del mercado por la propia razón intrínseca de nuestra forma de pensar. En unos casos, todos podemos ser muy racionales, pero también muchas veces podemos ser muy irracionales y es en ese momento donde *pueden* ocurrir Cisnes Negros
- Una solución puede ser implementar modelos que aunque sabemos que no son perfectos, nos *puedan dar* la capacidad para aproximarnos a la realidad de forma más adecuada pero siempre desde el punto de vista *preventivo*.

En esto consiste esa *incorporación de un salto al movimiento browniano*, pretendemos una *modificación epistemológica* para tener en cuenta el *Ala del Cisne Negro* (o el Cisne completo) y en esto concluye *El Ala del Cisne Negro y la modelización con saltos*.

Capítulo 6: Conclusión y futuras líneas de investigación

6.1. Conclusión

La primera ley de la gestión de los riesgos financieros es: el riesgo más importante, y peligroso, es el que no se identifica.

El riesgo de mercado es la incertidumbre en la posibilidad de pérdidas económicas por un comportamiento adverso de las variables del mercado, llamados factores de riesgo: como el tipo de cambio o los rendimientos financieros de las cotizaciones de las empresas. Las métricas para la medición del riesgo de mercado han tenido una larga evolución y actualmente las medidas más conocidas son las métricas del VaR y TailVar.

El Valor en Riesgo (VaR), es una métrica sencilla de calcular e interpretar, pero con la limitación de no poseer ciertas características deseables de las medidas coherentes de riesgo, como la subaditividad. La propiedad de subaditividad es bastante importante ya que la interpretación financiera de esta propiedad es la idea de diversificación y si una métrica de riesgo no cumple esta propiedad sería una métrica que tendría poca utilidad. Existen varios métodos de cálculo del VaR, cada uno con sus ventajas y desventajas. En este trabajo hemos utilizado una simulación Montecarlo debido a la *potencia* que proporciona. Para dicho cómputo, se requiere modelizar la evolución de las variables financieras aleatorias con un proceso estocástico. La elección de un proceso adecuado determina la calidad de la estimación.

Por otro lado y ante las limitaciones del VaR, se ha formulado el TailVaR, que, además de ser una medida coherente de riesgo, es una métrica que nos permite calcular las pérdidas extremas que se encuentran en la cola de la distribución, otra limitación que tiene el VaR. Su cálculo requiere un cálculo a priori del VaR ya que es un promedio de la cola de la distribución *después* que el VaR es alcanzado.

El cálculo del VaR o TailVaR debe estar acompañado de su correspondiente *Backtesting* ya que sin este cálculo, el cómputo del VaR o TailVaR no tendría ninguna validez. El backtesting es una prueba de exactitud (*accuracy*) y se puede realizar incondicionalmente (como el Test de Kupiec) o condicionalmente (como el test mixto de Kupiec). La diferencia entre uno y otro es si se toma en cuenta *cuando* ocurren las *excepciones*, que son los días en que la pérdida excedió al VaR calculado. Recientemente se ha implantado, por regulación, el backtesting del TailVaR y en este trabajo hemos realizado dicho backtesting.

Uno de los procesos estocásticos más famosos y que se utilizan en la modelización financiera es el movimiento Browniano geométrico. Es un movimiento totalmente aleatorio y que tiene de trasfondo la distribución Normal (o Log-Normal). Y esta fue la razón de su utilización, es un movimiento *complejo* pero sencillo de interpretar e implementar.

Uno de las medidas de incertidumbre más importantes y que es el factor clave en el riesgo de mercado es la volatilidad. La volatilidad, estadísticamente la *dispersión* de la variable a estudiar, es una de las medidas más difícil de *estimar* y de darle un valor “real”.

La volatilidad, es la razón por la cual la distribución Normal tiene ciertas limitaciones en la modelización financiera. Las colas pesadas de las distribuciones de probabilidad de los rendimientos y la no linealidad de la volatilidad con respecto al precio de los productos financieros (las *smiles* de volatilidad), o simplemente el comportamiento estocástico de la volatilidad, son características “problemáticas” en el momento de modelizar los rendimientos financieros.

De todos estos problemas, el problema de las colas gruesas es el que más desarrollamos estadísticamente en el trabajo. A través de un contraste de bondad de ajuste tanto *gráfico* como cuantitativo, comprobamos como las distribuciones de probabilidad de los precios de las variables seleccionadas no se ajustan a la distribución Log-Normal y, equivalentemente, la distribución de rendimientos de las mismas no se ajustaban a la distribución Normal. La descripción estadística de las variables seleccionadas nos proporcionó la necesidad de distribuciones bastante apuntadas o leptocúrticas. Para ello, comprobamos, mediante un contraste de bondad de ajuste gráfico y cuantitativo, que la distribución *t* de *Student no estandarizada* se adecuaba a la modelización de los rendimientos debido a su cola gruesa.

Por otra parte, en el mercado financiero, frecuentemente se producen los llamados Cisnes Negros, sucesos inesperados de gran impacto. El *brexiteo* del 24 de junio de 2016 fue un Cisne Negro *auténtico* y tuvo gran impacto en los índices financieros europeos, principalmente en el español, el Ibex 35. Los Cisnes Negros pueden ser interpretados como una posible explicación a los problemas de la modelización debido a que, por definición, son aquellos sucesos difíciles de modelizar. Por esta razón, en este trabajo introducimos el concepto de Ala del Cisne Negro, que puede ser interpretado como un *pico de volatilidad*, cuya modelización si es posible.

Para corregir el problema de la volatilidad, se utilizan modelos financieros más complejos en el que se consideran formulaciones del proceso browniano geométrico al que se le añaden “más movimientos”: como permitir que la volatilidad tenga su propio proceso estocástico (modelos de volatilidad estocástica) o incorporarle saltos al proceso. Nosotros desarrollamos la segunda alternativa.

Haciendo un análisis a los distintos tipos de procesos de saltos, los saltos de Poisson, constituyen una buena elección para la modelización financiera. Esto se debe a que son uno de los procesos con saltos menos complejos y fáciles de implementar. Además, el hecho de que su *salto* sea bastante *brusco*, nos puede ayudar a la modelización del ala del Cisne Negro. La distribución de probabilidad de los saltos puede ser cualquier distribución. El modelo de Merton utiliza saltos de Poisson compuesto y la distribución Normal para los saltos del proceso. Este fue el modelo que utilizamos en nuestro análisis.

Finalmente, procediendo con la simulación de ambos procesos estocásticos: el movimiento browniano geométrico y el movimiento con saltos, calculamos el VaR y el TailVaR diario al 95% y el TailVaR al 99% de nivel de confianza, con ambos procesos.

En la simulación de los procesos y comparándolo con el comportamiento real de las variables seleccionadas pudimos comprobar como el movimiento browniano geométrico fluctuaba *erráticamente* pero alrededor del promedio y se presentaba totalmente invariante ante cambios de escala.

Además, cuando la cotización real *daba saltos* el movimiento browniano geométrico no modelizaba dichos saltos. El VaR y el TailVaR calculado bajo esta distribución proporcionaba valores muy bajos, y esto se debe a que bajo el movimiento browniano geométrico, dado que *de fondo* tiene una distribución Normal, no hay pérdidas extremas, no hay Cisnes Negros, la pérdida va estar en torno al promedio del proceso ya que esto es lo que establece la distribución Normal: la probabilidad de alejarse del promedio es cada vez más pequeña.

La realidad de los mercados financieros es distinta. Existen los Cisnes Negros, hay pérdidas extremas. Aunque la probabilidad sea pequeña, ocurren hechos de alta volatilidad y que la distribución Normal no puede modelizar. Ante esta limitación, los modelos de saltos pudieron generar pérdidas extremas y valores más coherentes con la realidad. Como ejemplo podemos mencionar al Ibex 35; este índice financiero sufrió una pérdida del 14% el día del *brexit* (un Cisne Negro autentico). En nuestro modelo obtuvimos una pérdida máxima en el TailVar al 99% de confianza de 16,71%. Para esa misma serie, con el browniano geométrico sin saltos, calculaba pérdidas el 1%. En nuestra opinión, el modelo con saltos *parece más exacto*, y además hay que tener en cuenta que este modelo está sobreestimando y subestimando los saltos debido a lo brusco que puede resultar el salto. Con esto hemos concluido uno de los objetivos del trabajo, parece que la incorporación de saltos en la modelización proporciona pérdidas más coherentes con la realidad.

Sin embargo, el cálculo del VaR y TailVaR no está completo sin el cómputo de su correspondiente Backtesting. La evaluación de los resultados nos permitió comprobar que el número de excepciones estaba bien calculado ya que el test de Kupiec nos permitió no rechazar dicha hipótesis. El backtesting de TailVaR nos permitió comprobar que el movimiento browniano geométrico rechazaba la hipótesis de que dicho proceso se distribuía como *se debía distribuir* de acuerdo a las excepciones calculadas (esto es porque la distribución Normal no tiene cola gruesa). En cambio, con el modelo con saltos no se rechazaba dicha hipótesis, el proceso se distribuía como se debía distribuir de acuerdo con las excepciones calculadas (esto es porque la distribución que nos proporciona el modelo con saltos tiene cola gruesa). Obteniendo, así un buen backtesting. Así acababa nuestra modelización con saltos.

Por último, acabábamos el trabajo con una reflexión filosófica. Dicha reflexión exponía principalmente que no pretendíamos con este trabajo una simple explicación cuantitativa y quedarnos con la idea de que un modelo de saltos *puede ser más adecuado que el movimiento sin saltos para la modelización, puede ser así o no*. Esa no era la idea. Nos interesaba más el cambio epistemológico, ver la incorporación del salto como un cambio en la *“forma de pensar”*, comprender la necesidad de nuevas herramientas. Comprender lo estocástico del mundo financiero y la necesidad de evolucionar junto a él.

Y también entender que los modelos no son tampoco la solución a todos problemas y que solo son una ayuda. La ayuda puede ser positiva o negativa. Los modelos no son perfectos y se equivocan.

Hay variables que son muy difíciles de modelizar, como la volatilidad. Probablemente nunca podremos modelizarla adecuadamente del todo. Es una variable bastante estocástica y que expresa, a veces, la *irracionalidad* del mercado. Por esto pueden surgir los Cisnes Negros, y se inician con el Ala del Cisne Negro. Los modelos nos pueden ayudar a modelizar dichos sucesos pero siempre tener en cuenta con un Cisne Negro *auténtico* es muy difícil e improbable de predecir o modelizar. Por eso, el fin de los modelos tiene que ser más *preventivo* que *predictivo* y con cierta *utilidad histórica* (para comprender en qué podemos o debemos mejorar).

Y así concluye *El Ala del Cisne Negro y la Modelización con saltos*.

6.2. Futuras líneas de investigación

El tema de la modelización con saltos se ha utilizado principalmente para la valoración de las opciones. En este tema hay bastante bibliografía disponible. No solo con saltos de Poisson sino saltos mucho más complejos. Se pueden utilizar saltos utilizando procesos de Levy más potentes como los saltos con distribución de probabilidad Gamma (procesos Varianza-Gamma) o con distribución Normal Inversa gaussiano (NIG). Utilizando este tipo de saltos, se podría volver a analizar si estos saltos modelizan las series de forma más precisa que los saltos de Poisson y comprobar las pérdidas que se obtienen con dicho modelo.

Por otra parte, consideramos que hace falta más documentación bibliográfica para el backtesting del TailVaR. Los test de Acerbi, son test muy potentes, pero consideramos que se tienen que ampliar el tipo de distribuciones que se le pueda hacer el Backtesting sin tener la necesidad de simular por Montecarlo los valores críticos.

Estas son las principales futuras líneas de investigación. De forma secundaria, enfocándonos en este trabajo, se puede ampliar el horizonte temporal de las series utilizadas y comprobar si a más largo plazo, el modelo con saltos es más preciso o menos preciso. También, y por último, se puede ampliar el número de series utilizadas para tener un comportamiento más global.

Bibliografía

- [1] Acerbi, C., Szekely, B., (2014), *Testing Expected Shortfall*, MSCI Inc.
- [2] Alexander, C., (2008), *Market Risk Analysis, Volume III, Pricing, Hedging and Trading Financial Instruments*. Wiley Finance Series.
- [3] Alexander, C., (2008), *Market Risk Analysis, Volume IV, Value-at-Risk Models*, Wiley Finance Series.
- [4] Alexander Eriksson, (2015), *Measuring Risk for WTI Crude Oil. An application of Parametric Expected Shortfall*. Lund University.
- [5] Ardia D., Ospina, J., Giraldo, G., (2010), *Jump-Diffusion Calibration using Differential Evolution*, MPRA Paper No. 26184, Munich Personal RePEc Archive (<https://mpra.ub.uni-muenchen.de/26184/>).
- [6] Brandimarte, P., (2006), *Numerical Methods in Finance and Economics A MATLAB-Based Introduction*, Second Edition, Wiley Finance Series.
- [7] Cont, R., y Tankov, P., (2004), *Financial Modelling With Jump Processes*, Chapman & Hall
- [8] Craine, R., Lochstoer, L., A., Syrtveit, K., (2000), *Estimation of a Stochastic-Volatility Jump-Diffusion Model*, University of California at Berkeley.
- [9] Cvitanić, J., Zapatero, F. (2004), *Introduction to the Economics and Mathematics of Financial Markets*, MIT Press.
- [10] Deville, D., (2008), *On Lévy Processes for Option Pricing: Numerical Methods and Calibration to Index Options*, Università Politecnica delle Marche.
- [11] Dowd, K., (2002), *Measuring Market Risk*, Wiley Finance
- [12] Fernández, P., (2010), *Ecuaciones de derivadas parciales. La ecuación de calor y la ecuación de Black-Scholes*. AFI, Escuela de Finanzas Aplicadas.
- [13] Franco A., L. C., Franco, C., L., E., (2005), *El valor en riesgo condicional CVaR como medida coherente de riesgo*, Revista Ingenierías Universidad de Medellín.
- [14] Franke, J., Härdle, W., F., Hafner, C., M., (2015), *Statistics of Financial Markets. An Introduction*. Fourth Edition. Springer Series.
- [15] Galiotos, V., (2008), *Stochastic Volatility and the Volatility Smile*. Uppsala University.
- [16] Hanson, F., B., (2007), *Applied Stochastic Processes and Control for Jump-Diffusions: Modeling, Analysis and Computation*. University of Illinois. Chicago, Illinois, USA.
- [17] Hull, J.C. (2012), *Options, Futures, and Other Derivatives*. Eighth Edition. Prentice-Hall.
- [18] Hull, J.C. (2015), *Risk Management and Financial Institutions*. Fourth Edition. Wiley.
- [19] Huynh, H. T., Lai, V. S., Soumaré, I., (2008), *Stochastic simulation and applications in finance with MATLAB programs*, Wiley Finance.
- [20] Jorion, P., (2010), *Financial Risk Manager Handbook*, 5th Edition, Wiley Finance Series.
- [21] Joshi, M., S., (2003), *The Concepts and Practice of Mathematical Finance*, Second Edition, Cambridge University Press.
- [22] Kienitz J., Wetterau D., (2012), *Financial Modelling: Theory, Implementation and Practice with MATLAB Source*, Wiley Finance Series.
- [23] Klebaner F. C., (2005), *Introduction to stochastic calculus with applications*, Second edition, Imperial College Press.
- [24] Kroese, D., P., Taimre, T., Botev, Z., I., (2011), *Handbook of Monte Carlo Methods*. Wiley Series in Probability and Statistics.
- [25] Lamothe, P., Somalo, M., (2003), *Opciones Financieras y Productos Estructurados*, segunda edición, McGraw Hill.

- [26] Martin P., F.J., Ruiz M., L., (1995), *Estadística I: Probabilidad*. Editorial AC.
- [27] Merton, R.C., (1975), *Option pricing when underlying stock returns are discontinuous*, *Journal of Financial Economics* 3 .125-144.
- [28] Moodley N., (2005), *The Heston Model: A Practical Approach with Matlab Code*. University of the Witwatersrand.
- [29] *Model Risk Management. Aspectos cuantitativos y cualitativos e la gestión del riesgo de Modelo* (2014). Informe de Management Solutions.
- [30] Nieppola, O., (2009), *Backtesting Value-at-Risk Models*, Helsinki school of economics.
- [31] Oksendal, B., (2000), *Stochastic Differential Equations. An Introduction with Applications*, Fifth Edition, Springer Series.
- [32] Pavliotis, G., A., (2009), *Applied Stochastic Processes*.
- [33] Peña, I., Rubio, G., y Serna, G. (1999): *Why do we smile? On the determinants of the implied volatility function*. *Journal of Banking and Finance*, vol. 23.
- [34] Poklewski-Koziell, W. (2012), *Stochastic Volatility Models: Calibration, Pricing and Hedging*, University of the Witwatersrand.
- [35] Privault, N., (2013), *Notes on Stochastic Finance*.
- [36] Salsa, S., (2008), *Partial Differential Equations in Action. From Modelling to Theory*. Springer.
- [37] Schoutens, W., (2003), *Lévy Processes in Finance*, Wiley Finance Series.
- [38] Sereda E., N., Bronshtein, E., M., Rachev, S., T., Fabozzi, F., J., Sun, W., Stoyanov, S., (2010), *Distortion Risk Measures in Portfolio Optimization*.
- [39] Shreve, S., (1996), *Stochastic Calculus and Finance*.
- [40] Taleb, N., (2007), *El Cisne Negro. El impacto de lo altamente improbable*.
- [41] Van Handel, R. (2007), *Stochastic Calculus, Filtering, and Stochastic Control*

Páginas Web

- [42] Página para realizar trabajos de finanzas, como, por ejemplo, elaborar *Smiles* de volatilidad en Excel (<https://financetrainingcourse.com/education/all-courses/>)
- [43] Página para realizar análisis de la volatilidad para series financieras (<http://ibexvolatility.blogspot.com.es/p/que-es-la-volatilidad.html>)
- [44] Base de datos de información financiera, que incluye, por ejemplo, *Yahoo finance*. Permite que su descarga sea fácil y para Excel o Matlab (<https://www.quandl.com/>)
- [45] Página donde se encuentran trabajos cuantitativos de finanzas con Matlab o Python (<http://www.quantatrisk.com/>)
- [46] Página (oficial) de trabajos con Matlab (<http://es.mathworks.com/>)
- [47] Página para realizar trabajos de finanzas, como por ejemplo, elaborar superficies de volatilidad en Excel (<https://www.tradestation.com/education/labs/analysis-concepts/>)

Anexos

A) Probabilidad y Cálculo

La **teoría de procesos estocásticos** puede ser introducida como una ampliación de la teoría de probabilidad. Para construir un modelo probabilístico necesitamos:

Lo primero y principal; definir ¿Cuáles son todos los sucesos posibles que pueden ocurrir?

Para ello definimos lo que llamamos *espacio muestral* (que se denota en la literatura con Ω) por ejemplo, el comportamiento aleatorio de una partícula en un fluido si queremos definir un movimiento estocástico $\Omega = C([0, \infty); \mathbb{R}^2)$.

La segunda pregunta es sobre la información que tenemos de ese espacio, las preguntas (las más simples, las de respuesta sí o no) que se pueden resolver con el espacio muestral.

Para ello definimos lo que llamamos *campo o conjunto (muestral) o algebra de conjuntos* $\mathcal{F}$. Definimos *conjunto sobre* Ω si se cumple que:

- $\emptyset, \Omega \in \mathcal{F}$. Donde $\emptyset$ denota el *conjunto vacío*.
- Si $A \in \mathcal{F}$ entonces $\bar{A} \in \mathcal{F}$. Donde A es un (conjunto de) *suceso(s)* y $\bar{A} := 1 - A$ es el (conjunto) complementario de A .
- Si $A \in \mathcal{F}$ y $B \in \mathcal{F}$ entonces $A \cup B \in \mathcal{F}, A \cap B \in \mathcal{F}, A \setminus B \in \mathcal{F}$. Donde $\cup, \cap$ y $\setminus$ designan las operaciones de **unión, intersección y diferencia de conjuntos**, respectivamente.

Algunos ejemplos “clásicos” de conjuntos son los siguientes

- $\mathcal{F}_0 \equiv \{\emptyset, \Omega\}$ es llamado *conjunto trivial*.
- $\mathcal{F}_A \equiv \{\emptyset, \Omega, A, \bar{A}\}$ es llamado *conjunto generado por A*.
- $2^\Omega \equiv \{A: A \subseteq \Omega\}$ es llamado *conjunto potencia*: el que contiene todos los subconjuntos de Ω .
- **σ -algebra**. Definida a continuación.

Un conjunto o **σ -algebra** es un conjunto *cerrado* con respecto a operaciones de uniones e intersecciones finitas entre sus miembros, es decir, son los subconjuntos de Ω que satisfacen las siguientes propiedades:

- $\emptyset, \Omega \in \mathcal{F}$.
- Si $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{F}$. El subconjunto A se llama *conjunto medible*.
- Si $\{A_i\}_{i=1}^n \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{F}$ (también $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{F}$).

Añadimos una definición: el par $(\Omega, \mathcal{F})$ se llama **espacio medible**.

Un **Conjunto σ de Borel** es el ejemplo más importante de los conjuntos σ que es utilizado en la teoría de funciones y de probabilidad. Consideremos el conjunto $\mathcal{B}$ en $\mathbb{R}$ ($\Omega = \mathbb{R}$) generado por intervalos (abiertos) en $\mathbb{R}$ (que se convierte es un *espacio topológico*). El conjunto de Borel se obtiene juntando (con uniones e intercesiones) los intervalos y luego todos los conjuntos formados y luego sus complementarios y juntando otra vez los conjuntos, etc..

Se demuestra que el proceso termina obteniendo el conjunto σ más pequeño que contiene todos los intervalos. **La intersección de todos los conjuntos σ (más pequeña) que contiene todos los intervalos es un conjunto de Borel.**

La tercera pregunta es sobre la probabilidad que se tiene de obtener el suceso.

Una *medida de probabilidad* P en el espacio $(\Omega, \mathcal{F})$ es una función $P: \mathcal{F} \mapsto [0,1]$ tal que satisface:

- $P(\emptyset) = 0, P(\Omega) = 1$
- (Aditividad σ). Para $\{A_i\}_{i=1}^n \in \mathcal{F}$ con $A_j \cap A_m, \forall m \neq n \Rightarrow P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.
- La propiedad anterior es equivalente a la siguiente formulación: aditividad y continuidad de probabilidad: si $A_i \supseteq A_n \supseteq A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_i) = P(A)$.

Añadimos una definición: el triplete $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ se llama **espacio (de) probabilidad**.

Es necesario añadir que asignar probabilidades a los conjuntos de $\mathcal{F}$ directamente tiene cierta dificultad ya que, en general, no conocemos como son los conjuntos de $\mathcal{F}$. Para resolver este problema definimos el siguiente teorema:

Teorema de extensión de Carathéodory: Si una función P es definida en $\mathcal{F}$ y satisface $P(\Omega) = 1$ y $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ y es aditivo (contablemente), entonces existe una única *extensión* de P para el conjunto σ generado por $\mathcal{F}$. Dicho de otra forma, definimos la probabilidad en el conjunto que genera el conjunto σ y luego la extendemos pro todo el conjunto σ . Una aplicación directa de este teorema es lo que se llama *medida de Lebesgue*.

Como consecuencia no es necesario especificar $P(A_i), \forall A_i \in \mathcal{F}$ ya que usualmente es suficiente especificar la medida a un conjunto más pequeño y si ese conjunto lo suficientemente extenso entonces existe una única medida que es consistente con la información dada.

Cuando Ω es continua la idea anterior también se puede aplicar pero tenemos que escoger una medida cuidadosamente. Para el caso en que $\Omega = \mathbb{R}$ y $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, tenemos como resultado el siguiente teorema.

Sea P una medida de probabilidad en $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, entonces la función $F(x) = P([-\infty, x])$ es creciente, continua hacia la derecha, $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$. Contrariamente, para cualquier función con las propiedades anteriores existe una única medida de probabilidad P en $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, tal que $F(x) = P([-\infty, x])$. Para el lector familiarizado con conceptos de probabilidad, dicha función con esas características tiene nombre propio en probabilidad: *es la función distribución* (cumulativa, FDC), la marca de identidad de las variables aleatorias. Por lo que este teorema relaciona conceptos de probabilidad con espacios medibles.

Variables Aleatorias

El siguiente paso en la elaboración del modelo probabilístico es definir las variables aleatorias. Si el triplete $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ describe todo el “mundo probable como un conjunto”, entonces las variables aleatorias describen sucesos concretos que podemos encontrar en el mundo probable. A continuación definiremos varios conceptos relacionados.

Función $\mathcal{F}$ -medible: Si estamos en $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, entonces la función $Y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ (el espacio muestral es un espacio topológico) es $\mathcal{F}$ -medible (o simplemente *medible*) si $Y^{-1}(U) := \{\omega \in \Omega; Y(\omega) \in U\} \in \mathcal{F}, \forall U \subset \mathbb{R}^n$, donde U son conjuntos abiertos o borelianos.

σ -álgebra generada. Si $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ es cualquier función, entonces el $\mathcal{H}_X$, σ -álgebra generada por X , es la σ -álgebra más pequeña en Ω que contiene todos los conjuntos $X^{-1}(U)$ donde U son conjuntos abiertos o borelianos. Y $\mathcal{H}_X = \{X^{-1}(B); B \in \mathcal{B}\}$.

Lema de Doob-Dynkin: Si $X, Y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ son dos funciones cualesquiera, entonces Y es $\mathcal{H}_X$ -medible si y solo si existe una función medible boreliana $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $Y = g(X)$.

Una **variable aleatoria** X en $(\Omega, \mathcal{F})$ es una función medible $X: (\Omega, \mathcal{F}) \mapsto (\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Esto quiere decir que para cualquier conjunto de Borel $B \in \mathcal{B}$, el conjunto $\{\omega: X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$. En vez de verificar la definición para todos los conjuntos borelianos, es suficiente tener $\{\omega: X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}, \forall x \in \mathbb{R}$. En otras palabras, para cada variable aleatoria podemos asignarles probabilidades y la medida $\mu_x(B) = P[X^{-1}(B)]$ es llamada *distribución de X* .

Introduzcamos algo de Cálculo

Teniendo en mente la idea de función medible (o sencillamente función o función de distribución) ahora introduciremos algunas **nociones de cálculo** necesario para entender el desarrollo posterior.

Diferenciabilidad y continuidad. Una función $g(x)$ es *continua* si $\forall x_i$ de $g(x)$, el incremento en intervalos pequeños es pequeño: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta g(x) := g(x) - g(x_i) = 0$. Una función $g(x)$ es *diferenciable* si $\forall x_i$ de $g(x)$ se cumple $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g(x)}{\Delta x_i} = C$, donde C es una constante. *Diferenciabilidad implica continuidad, pero el inverso no es cierto.*

Es importante distinguir entre continuidad a la derecha o izquierda: $\lim_{x \rightarrow x_i^+} g(x) = g(x_i)$ ó $\lim_{x \rightarrow x_i^-} g(x) = g(x_i)$. Cuando en un punto el valor de estos límites existe pero son distintos entonces decimos que hay un *punto de salto o discontinuidad de primer orden*. Cualquier otro tipo de discontinuidad es llamada de *segundo orden*.

Las funciones que consideramos en cálculo estocástico son funciones sin discontinuidades de segunda clase, es decir, tienen límites a la derecha e izquierda en cualquier punto de su dominio. Este tipo de funciones se llaman *funciones regulares*. Las funciones continuas hacia la derecha y definidas en el intervalo $[0, \infty)$ se llaman *funciones càdlàg*. Este tipo de funciones también son funciones diferenciables (en matemáticas se designan estas funciones con $\mathcal{C}^k$, donde k es el orden de la derivada que además es una función continua en su dominio).

Integral de Riemann. La integral de Riemann de la función $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ es definida como

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\gamma_i^n)(x_i^n - x_{i-1}^n) \quad \delta = \max_{1 \leq i \leq n} (x_i^n - x_{i-1}^n) \quad x_{i-1}^n < \gamma_i^n < x_i^n$$

Donde x_i^n son particiones del intervalo: $a = x_0^n < x_1^n < \dots < x_n^n = b$. Tenemos la relación entre diferenciar e integrar (que son operaciones contrarias entre sí) en el **teorema fundamental de cálculo**.

Teorema fundamental del cálculo. Si $f(x)$ es diferenciable en $[a, b]$ y $f'(x)$ – su derivada – es integrable (en el sentido de Riemann) entonces:

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$$

Otros temas de probabilidad y cálculo

Relacionamos el cálculo y la probabilidad con la siguiente definición.

Función de distribución. $F(x)$ – llamada función de distribución– es una función continua y estrictamente creciente que viene dada por la integral de Lebesgue $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$, donde $f(\cdot)$ es llamada *función de densidad* de X y por definición tenemos que $P(a \leq X \leq b) \equiv F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$. Tal como dijimos, la función distribución es la marca de identidad de las variables aleatorias. En la **Tabla A.1**, hemos recopilado varias distribuciones.

Es necesario definir “medidas” para las distribuciones. Consideramos que la mejor medida de “caracterización” de una función distribución es justamente la *función característica* ya que a partir de ella se pueden sacar todas las medidas de la distribución. Pero ya que la función característica incluye un valor esperado, es necesario definirle. Dejaremos, sin embargo, todas estas medidas para el anexo.

Esperanza matemática. Sea una variable aleatoria X . Se llama valor esperanza matemática o valor esperado o media al *estadístico* (es un número o un parámetro designado con $E[X]$) que formaliza el concepto de *valor medio* de dicha variable.

* Funciones de Distribución de Probabilidad

Sin entrar en mucho detalle, este apartado está dedicado a mencionar los tipos de distribuciones que existen. Expondremos sus “medidas” más importantes. Pero antes definiremos la función característica.

Función característica. Sea una variable aleatoria X , la función característica se define como el valor esperado de e^{itX} , donde $i = \sqrt{-1}$ es la unidad imaginaria y t es el argumento de la función.

$$\varphi(t) := E[e^{itX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)dx$$

La función característica es la *transformada de Fourier – Stieltjes* de la función de densidad.

Propiedades de $\varphi(t)$. Sin entrar en mucho detalle, la función característica tiene sus ventajas frente a otras “medidas”: es una función siempre existente, real uniformemente continua y absolutamente acotada.

Es importante mencionar el **teorema de Levy-Cramer**, estableciendo que una sucesión de funciones de distribución $\{F_i(x)\}_{i=1}^n$ converge hacia una función de distribución $F(x)$ si la sucesión de funciones características $\{\varphi_k(t)\}_{k=1}^n$ de las $F_i(x)$ converge para $n \rightarrow \infty$ hacia una función $\varphi(t)$ continua en $t=0$. En este caso, $\varphi(t)$ es la función característica de $F(x)$ y las $\varphi_k(t)$ convergen hacia $\varphi(t)$ en todo intervalo finito.

Además de esto, una de las mejores propiedades de la función característica es que se puede utilizar para obtener los **momentos** – respecto al origen– (que los denotamos con α_k) de la distribución de la variable aleatoria (siempre que existan).

Solo es necesario derivar la función característica:

$$E[X^k] \equiv \alpha_k = \frac{1}{i^k} \left| \frac{\partial^k \varphi(t)}{\partial t^k} \right|_{t=0}$$

- El momento de orden 1 es, por definición, **la media** (denotada en literatura como μ) o esperanza matemática: $\mu \equiv \alpha_1 := E[X]$.
- Definimos la **varianza**, designada con $V[\xi]$ y en la literatura con σ^2 , como el **momento de orden 2 respecto a la media** (μ_2). La **dispersión** o **desviación típica** (llamada en las finanzas: *volatilidad* o estocásticamente: *difusión*) es la raíz cuadrada de la varianza.

$$\sigma^2 \equiv V[\xi] = \mu_2 := E(\xi - E[X])^2 \Leftrightarrow V[\xi] = \alpha_2 - (E[X])^2$$

- Gracias al *binomio de Newton* tenemos la siguiente relación entre los momentos respecto al origen y respecto a la media:

$$\mu_k = \sum_{r=0}^k (-1)^k \binom{k}{r} \mu^r \alpha_{k-r} \text{ donde } \binom{k}{r} := \frac{k!}{r!(k-r)!} \Rightarrow \begin{cases} \mu_3 = \alpha_3 - 3\alpha_2\alpha_1 + 2\alpha_1^3 \\ \mu_4 = \alpha_4 - 4\alpha_3\alpha_1 + 6\alpha_2\alpha_1^2 - 3\alpha_1^4 \end{cases}$$

- Por ultimo tenemos las medidas de **asimetría** (γ_1) y **exceso de curtosis** (γ_2), que ya fueron definidas en el tema 3.

Tabla A.1. Funciones de densidad de distintas distribuciones probabilidad

Función de densidad	Funcion característica	Medidas
Binomial $B(n; p)$: $P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$	$\varphi(t) = (q + pe^{it})^n$	$E(X) = np$ $V(X) = npq$ $\gamma_1 = \frac{1-2p}{\sqrt{npq}}$ $\gamma_2 = \frac{1-6pq}{pq}$
Poisson $P(\lambda)$: $P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$	$\varphi(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$	$E(X) = V(X) = \lambda$ $\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ $\gamma_2 = \frac{1}{\lambda}$
Normal (μ, σ) $f(x) = \frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}}$	$\varphi(t) = e^{it\mu - \frac{t^2\sigma^2}{2}}$	$E(X) = \mu$ $V(X) = \sigma^2$ $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$

Log-Normal (μ, σ) $f(x) = \frac{e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}}}{x\sigma\sqrt{2\pi}}$	$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} e^{n\mu + n^2 \frac{\sigma^2}{2}}$	$E(X) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$ $V(X) = (e^{\sigma^2} - 1)e^{2\mu + \sigma^2}$ $\gamma_1 = \sqrt{(e^{\sigma^2} - 1)(e^{\sigma^2} + 2)}$ $\gamma_2 = e^{4\sigma^2} + 2e^{3\sigma^2} + 3e^{2\sigma^2} - 6$
Cauchy (α, λ) $f(x) = \frac{\lambda}{\pi[\lambda^2 + (x - \alpha)^2]}$	$\varphi(t) = e^{ixt - \lambda t }$ Se calcula utilizando el teorema de residuos y la teoría de la integral de Cauchy	$E(X) = \nexists$ $V(X) = \nexists$ $\gamma_1 = \nexists$ $\gamma_2 = \nexists$
Pareto (δ, θ) $f(x) = \frac{\delta\theta^\delta}{x^{\delta+1}}$	$\varphi(t) = \delta(-it\theta)^\delta g(-\delta, -it\theta)$ Donde $g(s, x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_x^\infty t^{s-1} e^{-t} dt$ Es la función gamma incompleta superior.	$E(X) = \frac{\delta\theta}{\delta - 1}$ $V(X) = \left(\frac{\theta}{\delta - 1}\right)^2 \frac{\delta}{\delta - 2}$ $\gamma_1 = \frac{2(1 + \delta)}{\delta - 3} \sqrt{\frac{\delta - 2}{\delta}}$ $\gamma_2 = \frac{6(\delta^3 + \delta^2 - 6\delta - 2)}{\delta(\delta - 3)(\delta - 4)}$
Gamma (α, β): $f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}$ Cuando $\alpha = 1$ y $\beta \equiv \lambda$, obtenemos $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ que es la distribución exponencial. Similarmente si $\alpha = \frac{v}{2}$ y $\beta = \frac{1}{2}$ obtenemos $f(x) = \frac{1}{2^{\frac{v}{2}} \Gamma(\frac{v}{2})} x^{\frac{v}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}$ que es la distribución χ^2 con v grados de libertad.	$\varphi(t) = \left(\frac{\beta}{\beta - it}\right)^\alpha$	$E(X) = \frac{\alpha}{\beta}$ $V(X) = \frac{\alpha}{\beta^2}$ $\gamma_1 = \frac{2}{\sqrt{\alpha}}$ $\gamma_2 = \frac{6}{\alpha}$
Weibull (k, λ) $f(x) = \frac{k}{\lambda} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k}$	$\varphi(t) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(it\lambda)^r}{r!} \Gamma\left(1 + \frac{r}{k}\right)$	$\alpha_r = \lambda^r \Gamma\left(1 + \frac{r}{k}\right)$
t de Student (n) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{n}B\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$ La función de distribución $f\left(\frac{x-m}{s}\right)$, es la distribución t no estandarizada, con parámetro de localización m y de escala s.	$\varphi(t) = \frac{K_{\frac{n}{2}}(\sqrt{n} t)(\sqrt{n} t)^{\frac{n}{2}}}{2^{\frac{n}{2}-1} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$	$E(X) = \gamma_1 = 0$ $E\left(\frac{X-m}{s}\right) = m$ $V(X) = \frac{n}{n-2}$ $V\left(\frac{X-m}{s}\right) = \frac{s^2 n}{n-2}$ $\gamma_2 = \frac{6}{n-4}$
Lévy (μ, c) $f(x) = \sqrt{\frac{c}{2\pi}} \frac{e^{-\frac{c}{2(x-\mu)}}}{\sqrt{(x-\mu)^3}}$	$\varphi(t) = e^{i\mu t - \sqrt{-2ict}}$	$E(X) = \infty$ $V(X) = \infty$ $\gamma_1 = \nexists$ $\gamma_2 = \nexists$

Gamma inversa (α, β) $f(x) = \frac{\beta^\alpha x^{-\alpha-1} e^{-\frac{\beta}{x}}}{\Gamma(\alpha)}$	$\varphi(t) = \frac{2(-i\beta t)^{\frac{\alpha}{2}}}{\Gamma(\alpha)} K_\alpha(\sqrt{-4i\beta t})$	$E(X) = \frac{\beta}{\alpha - 1}$ $V(X) = \frac{\beta}{(\alpha - 1)^2(\alpha - 2)}$ $\gamma_1 = \frac{4\sqrt{\alpha - 2}}{\alpha - 3}$ $\gamma_2 = \frac{30\alpha - 66}{(\alpha - 3)(\alpha - 4)}$
Estable o Alfa-Levy (μ, c, α, β)	Donde $\varphi(t) = \exp[it\mu - ct ^\alpha(1 - i\beta \operatorname{sgn}(t) \Upsilon)]$ $\Upsilon = \begin{cases} \tan \frac{\pi\alpha}{2}, \alpha \neq 1 \\ -\frac{2}{\pi} \ln t , \alpha = 1 \end{cases}$	

*Desigualdades y Normas

Conocido el concepto de esperanza matemática, se pueden desarrollar muchos conceptos relacionados de distinta complejidad: desde la *desigualdad de Jensen* hasta el *teorema de Fubini* en un producto de espacios.

Lo primero que veremos son las **desigualdades**. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ el espacio de probabilidad y X una variable aleatoria y $g(\cdot)$ una función de ella. $\forall K > 0$, tenemos las siguientes desigualdades:

- Jensen: $E[g(X)] \geq g(E[X])$
- Markov:

$$P[g(X) \geq K] \leq \frac{E[g(X)]}{K}$$

- Chernoff

$$P[e^{tX} \geq e^{ta}] \leq \frac{E[e^{tX}]}{e^{ta}}$$

- Chebyshev:

$$P[(\xi - \mu)^2 \geq K\sigma] \leq \frac{1}{K^2}$$

Pensando en la idea de los momentos, se nos puede ocurrir que significado tendría la esperanza del valor absoluto de la variable aleatoria potenciada, i.e., $E[|X|^p]$, aunque parezca extraño sí que tiene significado, de hecho llamamos **norma** a $\|X\|_p \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt[p]{E[|X|^p]}$, y definimos a las variables aleatorias como *integrable* si $\|X\|_1 < \infty$ y con $\|X\|_2 < \infty$, tenemos *cuadrado integrable*.

Llamamos al espacio $\mathcal{L}^p \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, P) = \{X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}; \|X\|_p < \infty\}$ **espacio de Lebesgue**, que a la vez es un **espacio de Banach**. $\mathcal{L}^2$ es un **espacio de Hilbert**, que incluye los espacios euclídeos.

Ahora podemos definir **más desigualdades** que incluyen espacios de Lebesgue:

- **Desigualdad de Hölder** (si $p = q = 2$, estamos ante el caso de *Cauchy-Schwarz*):

$$|E[XY]| \leq \|X\|_p \|Y\|_q ; \quad X \in \mathcal{L}^p, Y \in \mathcal{L}^q, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

- **Desigualdad de Minkowsky** (generalización de la *desigualdad triangular*)

$$\|X + Y\|_p = \|X\|_p + \|Y\|_p$$

Producto de espacios

Usando el concepto de *independencia de sucesos*, i.e, una sucesión de sucesos $\{A_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{F}$ en el espacio usual se dicen que son independientes si $P(\cap_{i=1}^n A_i) = \prod_{i=1}^n P(A_i)$. Entonces la “manera” de construir espacios independientes es multiplicando los espacios. Y es esta la idea de productos de espacios:

Producto de espacios y σ -álgebras. Dado dos espacios medibles $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$ y $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$, definimos *producto de espacios* $\Omega_1 \times \Omega_2 \equiv \{(\omega_1, \omega_2) : \omega_i \in \Omega_i, i = 1, 2\}$. El *producto de álgebras* en $\Omega_1 \times \Omega_2$ es definido como $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2 \equiv \sigma(\rho_1, \rho_2)$ donde $\rho_i : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \Omega_i$ son las funciones $\rho_i : (\omega_1, \omega_2) \rightarrow \omega_i$. Sean dos espacios probabilísticos $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$ y $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$ y $\rho_i : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \Omega_i$ sus funciones correspondientes.

Tenemos lo siguiente:

- Existe una única medida de probabilidad $P_1 \times P_2$ en $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$, llamado *medida del producto (de espacios)*, donde la ley (o distribución) de ρ_i es P_i y el par (Ω_i, ρ_i) son independientes entre sí y la construcción de este espacio es única. Estos teoremas se utilizan para la construcción del Movimiento browniano con el procedimiento del *teorema de extensión de Kolmogorov*.
- Si $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$ es $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ -medible entonces $f(\omega_1, \cdot) : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$ es $\mathcal{F}_2$ -medible y $f(\cdot, \omega_2) : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}$ es $\mathcal{F}_1$ -medible para $\forall \omega_i, i = 1, 2$.
- **Teorema de Fubini.** Sean $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$ y $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$ y $P_1 \times P_2$ su medida del producto. El teorema de Fubini establece que si $f(\omega_1, \omega_2)$ es $P_1 \times P_2$ -integrable, queriendo decir que es $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ -medible y que

$$\|f(\omega_1, \omega_2)\|_1 < \infty \Leftrightarrow \int_{P_1 \times P_2} |f(\omega_1, \omega_2)| P_1(d\omega_1) P_2(d\omega_2) < \infty$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \int_{P_1 \times P_2} f(\omega_1, \omega_2) P_1 P_2 d\omega_1 d\omega_2 &= \int_{P_1} \left[\int_{P_2} f(\omega_1, \omega_2) P_2(d\omega_2) \right] P_1 d\omega_1 \\ &= \int_{P_2} \left[\int_{P_1} f(\omega_1, \omega_2) P_1(d\omega_1) \right] P_2 d\omega_2 \end{aligned}$$

O de forma simplificada:

$$E_{P_1 \times P_2}(f) = E_{P_1}(f) \cdot E_{P_2}(f) = E_{P_2}(f) \cdot E_{P_1}(f)$$

- El **teorema de Tonelli** es idéntico al de Fubini solo que la condición de que $\|f(\omega_1, \omega_2)\|_1 < \infty$ es remplazada por la condición $f(\cdot) \geq 0$.

Procesos Estocásticos

Los procesos estocásticos son una generalización de las variables aleatorias cuando se manifiestan como función de un parámetro real.

So denotamos por $Y(\xi, \theta)$ una función (llamada *función aleatoria*) de dos argumentos: por una parte ξ variable aleatoria definida en el espacio probabilístico $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P)$ y el parámetro θ , que, frecuentemente es el tiempo t , que puede ser continuo o discreto. Cuando no se fija ninguno de los dos argumentos (pudiendo variar estos en los campos donde estén definidos) se dice que es un proceso estocástico. Sin embargo, si fijamos el tiempo, obtenemos el *estado del proceso* estocástico. Cuando se especifica el resultado de la variable aleatoria ξ dejando variar el tiempo, obtenemos la *realización o trayectoria del proceso*.

B) Ecuaciones diferenciales

Las ecuaciones diferenciales son para el cálculo lo que los procesos estocásticos son para la teoría de probabilidad. Una **ecuación diferencial** es una ecuación que involucra una función desconocida y sus derivadas.

Desde los primeros pasos en el cálculo diferencial, dada una función $y = f(t)$, su derivada $\frac{dy}{dt} = f'(t)$ es también una función que se puede encontrar mediante ciertas reglas. El problema al que nos enfrentamos ahora no es el de calcular derivadas de funciones; más bien, el problema consiste en: si se da una ecuación como $\frac{dy}{dt} = f'(t)$, hallar de alguna manera una función $y = f(t)$ que satisfaga dicha ecuación. En una palabra, se desea resolver ecuaciones diferenciales. La forma de ecuación diferencial más sencilla que puede pensarse es esa misma, $\frac{dy}{dt} = f'(t)$. Resolverla consiste en encontrar una función cuya derivada sea $f(t)$, es decir, encontrar las primitivas (integrales indefinidas) de $f(t)$. Por tanto, podemos decir que los métodos de resolución de ecuaciones diferenciales constituyen una generalización del cálculo de primitivas o de cálculo de integrales.

Si la ecuación contiene derivadas respecto a una sola variable independiente entonces se dice que es una ecuación diferencial ordinaria; y si contiene las derivadas parciales respecto a dos o más variables independientes se llama ecuación en derivadas parciales.

Existen varias técnicas para solucionar ecuaciones diferenciales desde algo tan simple como una integral hasta métodos más complejos como la **transformada de Laplace o de Fourier** y métodos simples pero con limitaciones: *separación de variables* o el de *ecuaciones exactas*. En mi opinión el **método de variación de parámetros**, es un método muy general que proporciona casi siempre la *solución total a cualquier ecuación diferencial* (siempre y cuando la integral a resolver tenga una expresión “calculable”).

Una **ecuación diferencial ordinaria** lineal (en la variable dependiente) y de primer orden (es decir, una derivada en la variable dependiente):

$$\frac{dy}{dt} + a(t)y = k(t)$$

Se resuelve, bajo el método de variación de parámetros con la siguiente formula:

$$y(t) = e^{-\int a(t)dt} \left[\int e^{\int a(t)dt} k(t)dt + C \right]$$

Donde C es la constante de integración.

Lógicamente hay ecuaciones diferenciales de orden mayor a uno y con no linealidad en los coeficientes y con todas las complejidades posibles, sin embargo no es objetivo de este apéndice exponer esos temas.

Las **ecuaciones diferenciales parciales** (EDPs) surgen cuando las funciones implicadas dependen de dos o más variables: por ejemplo, tiempo y varias coordenadas en el espacio. Igual que las ecuaciones diferenciales ordinarias, las EDPs tienen un orden (la derivada superior) pero en este caso la condición de linealidad tiene que ser en la variable dependiente y sus derivadas parciales. Las EDPs más conocidas e importantes se dan en problemas físicos.

Algunas ecuaciones diferenciales parciales lineales de segundo orden importantes son la ecuación de onda y la ecuación de calor.

- La ecuación unidimensional de onda:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Describe la propagación de una variedad de ondas, como las ondas sonoras, las ondas de luz y las ondas en el agua. Las *ecuaciones de ondas electromagnéticas* (por ejemplo utilizadas en las ecuaciones de Maxwell) o la misma *ecuación de Schrödinger*, que describe la evolución temporal de una partícula subatómica provienen de esta ecuación.

- La ecuación unidimensional de calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Describe la distribución del calor (o variaciones de la temperatura) en una región a lo largo del transcurso del tiempo. Sus métodos de resolución (como la utilización de la *transformada de Fourier*, con la que obtenemos el *kernel de calor*) son los que se utilizan para derivar la ecuación de Black-Scholes (ya que, en origen, es una ecuación de calor pero “más compleja”). Es una de las EDPs más utilizadas en *finanzas cuantitativas* dada su relación con los *procesos de difusión*.

Las EDP de segundo orden se clasifican dentro de 3 tipos de EDPs. Si se tiene la ecuación diferencial de segundo orden:

$$A \frac{\partial u}{\partial^2 x} + 2B \frac{\partial u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial u}{\partial^2 y} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + F = 0$$

Con estos coeficientes se monta la siguiente matriz:

$$Q = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

En función del determinante de Q , la ecuación:

- Es *elíptica* si la matriz Q tiene un determinante mayor a 0.
- Es *parabólica* (ecuación de calor) si la matriz Q tiene un determinante igual a 0.
- Es *hiperbólica* (ecuación de onda) si la matriz Q tiene un determinante menor a 0.

Cada tipo ecuación tiene sus métodos de resolución y cada ecuación puede tener su “propio” método de resolución. El estudio de las EDPs es una rama del cálculo diferencial bastante compleja y extensa.

C) Demostraciones del Browniano

Por teorema, *el movimiento browniano $B(t)$ es una martingala*, consecuencia directa de los incrementos independientes, tenemos que:

$$\begin{aligned} E[B(t)|\mathcal{F}_s] &= E[B(s) + (B(t) - B(s))|\mathcal{F}_s] = E[B(s)|\mathcal{F}_s] + E[(B(t) - B(s))|\mathcal{F}_s] \\ &= B(s) + E[B(t) - B(s)] = B(s) \quad \forall s < t. \end{aligned}$$

Ya que $B(t) \sim N(0, t) \Rightarrow E(B(t)) = 0 < \infty$ (condición de integrabilidad). Por lo que $B(t)$ es una martingala ■.

También tenemos pendiente demostrar que *el movimiento Browniano $B(t)$ es un proceso de Markov*. Utilizando su función generadora de momentos $E[e^{\theta B(t)}]$, vamos a demostrar que $P[B(t+s) \leq y | \mathcal{F}_t] = P[B(t+s) \leq y | B(t)]$, es decir que

$$E[e^{\theta B(t+s)} | \mathcal{F}_s] = e^{\theta B(t)} E[e^{\theta [B(t+s) - B(t)]} | \mathcal{F}_t] = e^{\theta B(t)} E[e^{\theta [B(t+s) - B(t)]}]$$

Ya que $e^{\theta [B(t+s) - B(t)]}$ es independiente de $\mathcal{F}_t$ y ya que $e^{\theta [B(t+s) - B(t)]}$ es independiente de $B(t)$, entonces:

$$e^{\theta B(t)} E[e^{\theta [B(t+s) - B(t)]}] = e^{\theta B(t)} E[e^{\theta [B(t+s) - B(t)]} | B(t)] = E[e^{\theta [B(t+s)]} | B(t)]$$

Por lo que $B(t)$ es un proceso de Markov ■.

Por ultimo demostraremos que $P(B(x) \text{ tenga al menos un } 0 \text{ entre } 0 \text{ y } t) = \frac{|x|}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t \frac{du}{\sqrt{u^3} e^{\frac{x^2}{2u}}}$

para ello, si denotamos por $\{B^x(t)\}$ al movimiento browniano con origen en x , entonces si $x < 0$, por continuidad:

$$\begin{aligned}
 P(B(x) \text{ tenga al menos un } 0 \text{ entre } 0 \text{ y } t) &= P\left(\max_{0 \leq s \leq t} B^x(t) \geq 0\right) \equiv P\left(\max_{0 \leq s \leq t} B(t) + x \geq 0\right) \\
 &= P\left(\max_{0 \leq s \leq t} B(t) \geq -x\right) = 2 P(B(t) \geq -x) := P(T_A \leq t) \equiv \int_0^t f_{T_A}(u) du \\
 &= \frac{-x}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t \frac{du}{\sqrt{u^3} e^{\frac{x^2}{2u}}}
 \end{aligned}$$

Para $x > 0$, la prueba es muy similar, solo que se hace con un mínimo, por lo que:

$$P(B(x) \text{ tenga al menos un } 0 \text{ entre } 0 \text{ y } t) = \frac{|x|}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t \frac{du}{\sqrt{u^3} e^{\frac{x^2}{2u}}} \quad \blacksquare$$

Estas son todas las demostraciones del movimiento browniano que expondremos, para más demostraciones y teoría sobre movimientos brownianos, ver Klebaner F. C., (2005), *Introduction to stochastic calculus with applications*, Second edition, Imperial College Press.

D) Derivación de la ecuación de Black-Scholes

Para derivar la solución a la ecuación diferencial de BS, es decir, obtener:

$$C(S, K, T, t, d_1, d_2) = S\Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2)$$

Donde $\Phi(x)$ es la función de distribución de la $N(0,1)$: $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\left(\frac{y}{2}\right)^2} dy$, buscado en las *tablas*. Y d_1 y d_2 representan las probabilidades de estar en entornos alcistas o bajistas:

$$d_j = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - q + (-1)^{j-1} \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t)}{\sigma\sqrt{(T - t)}} \quad j = 1, 2$$

A través de:

$$V_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} + rSV_S - rV(t) = 0$$

Necesitamos transformarla en una ecuación de calor para poder utilizar el *kernel* o *núcleo de calor*:

$$v(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{-\left(\frac{x-y}{2\sqrt{t}}\right)^2} dy$$

Para ello hagamos los siguientes cambios de variable $(S, t) \rightarrow (x, \tau)$:

$$S = Ke^x; \quad t = T - \frac{2\tau}{\sigma^2}; \quad w(x, \tau) \equiv V\left(Ke^x, T - \frac{2\tau}{\sigma^2}\right)$$

Si derivamos (usando la regla de la cadena) obtenemos:

$$V_t = -\frac{\sigma^2 w_\tau}{2} ; \quad w_x = V_S K e^x = V_S S \Rightarrow V_S = \frac{w_x}{S}$$

$$V_{SS} = \frac{w_{xx} - w_x}{S^2}$$

Entonces:

$$-\frac{\sigma^2 w_\tau}{2} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{w_{xx} - w_x}{S^2} + rS \frac{w_x}{S} - rw = 0$$

$$-\frac{\sigma^2 w_\tau}{2} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{w_{xx} - w_x}{S^2} + \frac{rw_x}{S} - rw = 0$$

$$w_\tau - w_{xx} - (c - 1)w_x + cw = 0 \quad \text{Donde } c \equiv \frac{2r}{\sigma^2}$$

Dado que es una ecuación de calor no homogénea, podemos hallar su solución primero construyendo familias de soluciones al problema de Cauchy homogéneo y luego hallar la solución general (*método de Duhamel*).

Para ello buscaremos h, k tales que $v(x, \tau) = w(x, \tau)e^{hx+k\tau}$ sea solución de la ecuación de calor $v_\tau - v_{xx} = 0$. Tenemos:

$$v_\tau = w_\tau e^{hx+k\tau} + wk e^{hx+k\tau}$$

$$v_x = w_x e^{hx+k\tau} + wh e^{hx+k\tau} \rightarrow v_{xx} = w_{xx} e^{hx+k\tau} + 2hw_x + wh^2 e^{hx+k\tau}$$

Entonces:

$$w_\tau e^{hx+k\tau} + wk e^{hx+k\tau} = w_{xx} e^{hx+k\tau} + 2hw_x e^{hx+k\tau} + wh^2 e^{hx+k\tau}$$

$$\Leftrightarrow w_\tau e^{hx+k\tau} = e^{hx+k\tau} [w_{xx} + 2hw_x + w(h^2 - k)]$$

$$\Leftrightarrow w_\tau = w_{xx} + 2hw_x + w(h^2 - k)$$

Igualando coeficientes, obtenemos que:

$$2h = c - 1 \Rightarrow h = \frac{c - 1}{2}$$

$$(h^2 - k) = -c \Rightarrow k = \frac{(c + 1)^2}{4}$$

Entonces tenemos las siguientes equivalencias:

$$v(x, \tau) = w(x, \tau) e^{\frac{c-1}{2}x + \frac{(c+1)^2}{4}\tau} \Leftrightarrow v(x, \tau) = V\left(Ke^x, T - \frac{2\tau}{\sigma^2}\right) e^{\frac{c-1}{2}x + \frac{(c+1)^2}{4}\tau}$$

$$\Leftrightarrow V(S, t) = \exp\left\{-\left[\frac{c-1}{2}\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \frac{(c+1)^2}{4}\frac{\sigma^2(T-t)}{2}\right]\right\} v\left[\ln\left(\frac{S}{K}\right), \frac{\sigma^2(T-t)}{2}\right]$$

Ahora, si le aplicamos las condiciones de contorno e iniciales para la Call, teniendo las condiciones:

- (1) $C(S, T) = \max(S - K, 0) \equiv (S - K)^+ \geq 0$
- (2) $C(0^+, t) = 0$.
- (3) $C(\infty^-, t) = S$

El problema anterior para $C(S, T)$ es equivalente a encontrar $v(x, \tau)$ que satisface la ecuación del calor y las condiciones de contorno equivalentes.

$$C(S, t) = e^{-(hx+k\tau)}v(x, \tau)$$

Con la condición de pago (la condición (1)), que es equivalente a imponer que $t=T$ ó $\tau = 0$:

$$g(x) \equiv v(x, 0) = e^{hx}C(Ke^x, T) := e^{hx}C(Ke^x - K)^+ \equiv \begin{cases} K(e^{(h+1)x} - e^{hx}), & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Utilizando pues el kernel de calor:

$$v(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_0^\infty K(e^{(h+1)y} - e^{hy}) e^{-\left(\frac{x-y}{2\sqrt{\tau}}\right)^2} dy$$

$$v(x, \tau) = \frac{K}{\sqrt{4\pi\tau}} \left[\int_0^\infty e^{(h+1)y} e^{-\left(\frac{x-y}{2\sqrt{\tau}}\right)^2} dy - \int_0^\infty e^{hy} e^{-\left(\frac{x-y}{2\sqrt{\tau}}\right)^2} dy \right]$$

Utilizando la técnica de completar el cuadrado:

$$v(x, \tau) = \frac{K}{\sqrt{4\pi\tau}} \left\{ \int_0^\infty e^{\left[-\left(\frac{x-y}{2\sqrt{\tau}} + (h+1)\sqrt{\tau}\right)^2 + (h+1)x + (h+1)^2\tau\right]} dy - \int_0^\infty e^{\left[-\left(\frac{x-y}{2\sqrt{\tau}} + h\sqrt{\tau}\right)^2 + hx + h^2\tau\right]} dy \right\}$$

$$v(x, \tau) = \frac{K}{\sqrt{4\pi\tau}} \left[e^{(h+1)x + (h+1)^2\tau} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-y}{\sqrt{2\tau}} + (h+1)\sqrt{2\tau}\right)^2} dy - e^{hx + h^2\tau} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-y}{\sqrt{2\tau}} + h\sqrt{2\tau}\right)^2} dy \right]$$

Haciendo el cambio $\frac{x-y}{\sqrt{2\tau}} + (h+1)\sqrt{2\tau} = z$, e igualmente $\frac{x-y}{\sqrt{2\tau}} + h\sqrt{2\tau} = z$ tenemos:

$$v(x, \tau) = \frac{K\sqrt{2\tau}}{\sqrt{4\pi\tau}} \left[e^{(h+1)x + (h+1)^2\tau} \int_0^{\frac{x}{\sqrt{2\tau}} + (h+1)\sqrt{2\tau}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz - e^{hx + h^2\tau} \int_0^{\frac{x}{\sqrt{2\tau}} + h\sqrt{2\tau}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \right]$$

Por definición $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\left(\frac{y}{2}\right)^2} dy$

$$v(x, \tau) = K e^{(h+1)x + (h+1)^2 \tau} \left[\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2\tau}} + (h+1)\sqrt{2\tau}\right) - e^{(-1-2h)\tau} \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2\tau}} + h\sqrt{2\tau}\right) \right]$$

Ahora para obtener el valor de la Call aplicamos: $C(S, t) = e^{-(hx+k\tau)} v(x, \tau)$, tenemos en cuenta que $k^2 = h$, de manera que:

$$C(S, t) = K \left[e^x \Phi\left(\frac{x + 2(h+1)\tau}{\sqrt{2\tau}}\right) - e^{-(2h+1)\tau} \Phi\left(\frac{x + 2h\tau}{\sqrt{2\tau}}\right) \right]$$

Que si deshacemos los cambios hechos:

$$x = \ln\left(\frac{S}{K}\right), \quad 2(h+1)\tau = \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t), \quad 2h\tau = \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t), \quad (2h+1)\tau = -r(T-t)$$

Finalmente:

$$C(S, t) = S \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sqrt{\sigma^2(T-t)}}\right) - K e^{-r(T-t)} \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sqrt{\sigma^2(T-t)}}\right)$$

$$\Rightarrow C(S, K, T, t, d_1, d_2) = S \Phi(d_1) - K e^{-r(T-t)} \Phi(d_2) \quad \blacksquare$$

La versión con dividendos y la fórmula para la opción Put se derivan de forma muy parecida.

E) Modelo de Heston

El modelo de Heston (1993) es uno de los modelos de volatilidad estocástica más utilizado a día de hoy, debido a su relativa implementación y robustez con respecto a otros modelos de volatilidad estocástica. El modelo se formaliza de la siguiente manera (hemos hecho un cambio de nomenclatura por simplicidad):

$$dS_t = \mu dt S_t + v \sqrt{V_t} S_t dB_t^{(1)}$$

$$dV_t = \kappa(\theta - V_t)dt + \sigma \sqrt{V_t} dB_t^{(2)}$$

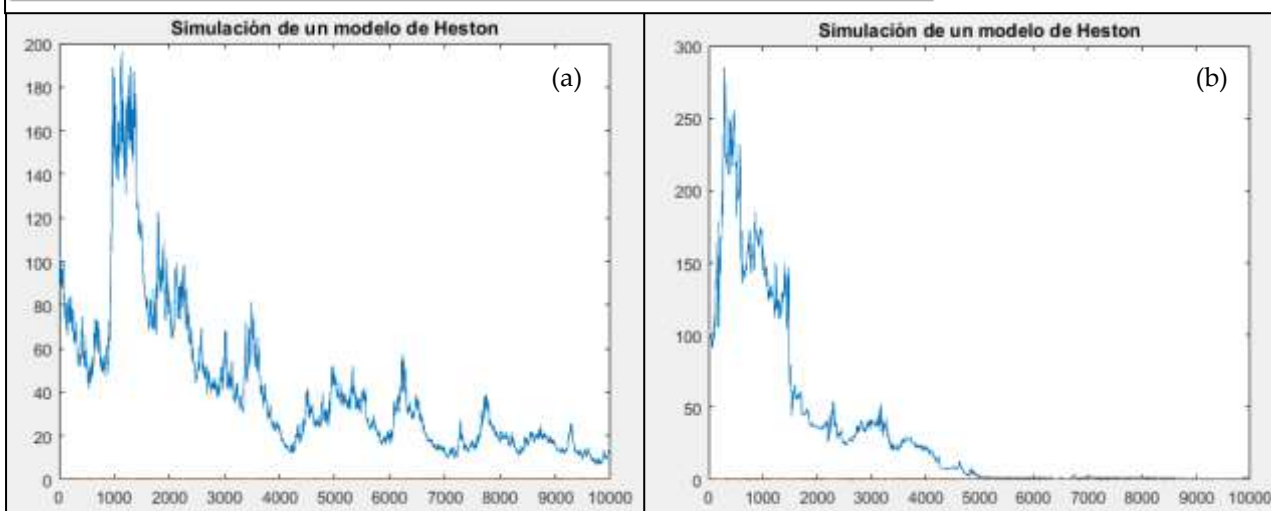
$$\xi \left[dB_t^{(1)}, dB_t^{(2)} \right] = \rho dt$$

Ahora V_t representa la volatilidad, que es un proceso estocástico radical reversible a la media donde: θ es la volatilidad esperada en el largo plazo, κ es la velocidad (*coeficiente de reversión* o una clase de *amortiguador*) a la cual la volatilidad tiende hacia su media de largo plazo, σ es la *volatilidad de la volatilidad* y ρ es la correlación de los movimientos Brownianos $B_t^{(1)}$ y $B_t^{(2)}$.

Como se puede concluir, dada su *aleatoriedad*, el comportamiento de este proceso no se va comportar de forma gaussiana. En la figura se muestra distintas trayectorias del proceso cambiando los parámetros (figura A.1), al igual que sus distribuciones (figura A.2).

Figura A.1. Simulación de Modelo de Heston con los siguientes parámetros.

	S_t	μ	ν	κ	θ	σ	ρ
(a)	100	0.02	0.04	1.5	0.08	0.30	0.80
(b)	100	0.02	0.04	1.5	0.08	0.80	0.30

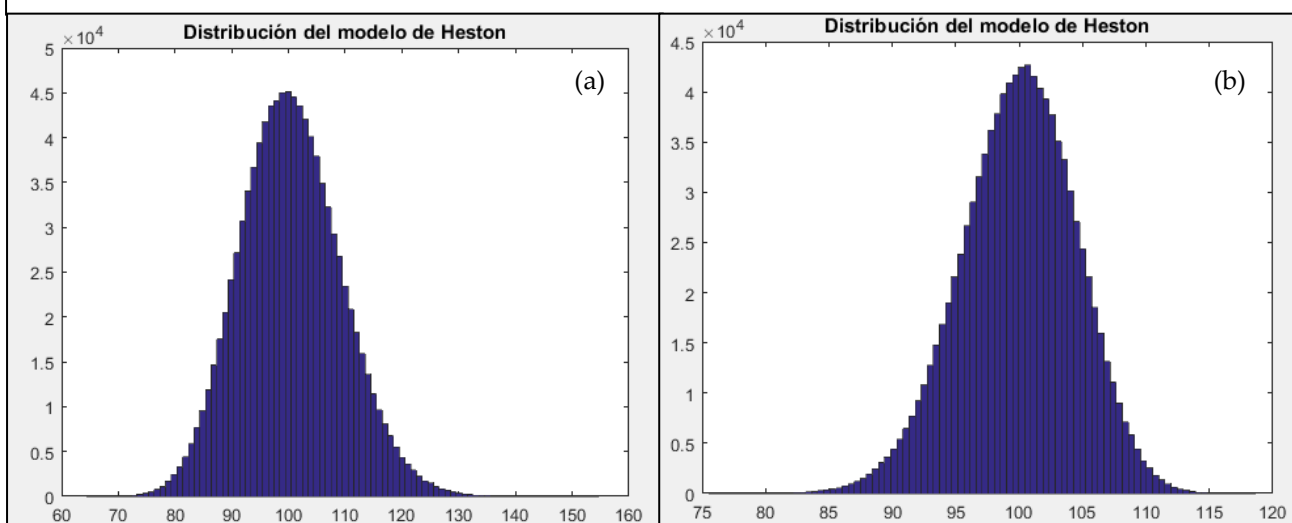


Fuente. Elaboración propia con Matlab

Figura A.2. Distribución del Modelo de Heston con los siguientes parámetros.

	S_t	μ	ν	κ	θ	σ	ρ
(a)	100	0.1	0.8	2	0.3	0.8	0.8
(b)	100	0.1	0.2	3	0.4	0.4	-0.8

Como se puede notar, el coeficiente de correlación ρ actúa como un coeficiente de simetría.



Fuente. Elaboración propia con Matlab

Sin entrar mucho en cálculo y derivaciones, vamos a exponer la ecuación diferencial parcial del movimiento que se obtiene al aplicar el lema de Itô al proceso:

$$\frac{VS^2F_{SS}}{2} + \rho\sigma VSF_{SV} + \frac{v\sigma^2VF_{VV}}{2} + rSF_S + [\kappa(\theta - V) - Y(S, V, t)\sigma\sqrt{V}]F_V - rF + F_t = 0$$

Donde $Y(S, V, t)$ es el precio de mercado de la volatilidad, considerado constante al nivel de volatilidad, es decir: $Y(S, V, t)\sigma\sqrt{V} \equiv k\sigma V \equiv \lambda(S, V, t)$.

Finalmente expondremos la fórmula para valorar una opción Call europea que no paga dividendos.

$$C(S, t) = S_t P_1 - K e^{-r(T-t)} P_2$$

$$P_j = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \Re \left(\frac{e^{-i\eta \ln(K)} \exp[C(T-t, \eta) + D(T-t, \eta)V_t + i\eta \ln(S_t)]}{i\eta} \right) d\eta$$

$$C(T-t, \eta) = r\eta i(T-t) + \frac{\kappa\theta}{\sigma^2} \left[(b_j - \rho\sigma\eta i + d)(T-t) - 2 \ln \left(\frac{1 - g e^{dr}}{1 - g} \right) \right], \quad b_1 = \kappa + \lambda - \rho\sigma, \quad b_2 = b_1 + \rho\sigma$$

$$D(T-t, \eta) = \frac{b_j - \rho\sigma\eta i + d}{\sigma^2} \left(\frac{1 - e^{dr}}{1 - g e^{dr}} \right), \quad b_j = \frac{(-1)^j}{2}, \quad j = 1, 2$$

$$g = \frac{b_j - \rho\sigma\eta i + d}{b_j - \rho\sigma\eta i - d}, \quad d = \sqrt{(\rho\sigma\eta i - b_j)^2 - \sigma^2\eta(2u_j i - \eta)}$$

El parámetro λ representa el premio al riesgo por volatilidad como función del precio del activo, el tiempo, la volatilidad. En cuya derivación se incluye *ecuaciones diferenciales de tipo Riccati* y la **utilización de la transformada de Fourier**. La integral de la ecuación, sin embargo, causa problemas para la solución debido a los límites de la integral (requiere calcular dos integrales complejas, de ahí que este $\Re[\cdot]$, que indica *parte real*) puede ser evaluada en forma exacta, es por esto, que su solución se puede aproximar por métodos numéricos: la transformada de Fourier (**Carr y Madan**), siendo este método uno de los más recientes y métodos de integración numérica: dentro de los cuales se pueden destacar el *método de Simpson adaptativo*, *método Gauss Adaptativo* e *integración Gaussiana-Legendre* o *Gaussiana-Lobatto*.

F) La función gamma

La **función Gamma**, denotada como $\Gamma(x)$ y llamada *Integral Euleriana de 2ª clase*, es una función que extiende el concepto de factorial a los números complejos. Que se define, para los valores de $x \in \mathbb{N}^*$, como una integral impropia de primera especie:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt, \quad \forall t > 0$$

Que posee propiedades interesantes, rápidamente demostrables:

a) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

Demostración:

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \int_0^\infty t^x e^{-t} dt \Rightarrow \left. \begin{aligned} u &= t^x \rightarrow du = xt^{x-1} \\ dv &= e^{-t} \rightarrow v = -e^{-t} \end{aligned} \right\} \\ &\Rightarrow -t^x e^{-t} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty -xt^{x-1} e^{-t} dt = x \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \equiv x\Gamma(x) \quad \blacksquare\end{aligned}$$

b) $\Gamma(x+1) = x!$

Demostración, calculando sus valores:

$$\begin{aligned}\Gamma(1) &= \int_0^\infty e^{-t} dt = e^{-t} \Big|_0^\infty = e^{-\infty} - e^{-0} = 1 \\ \left. \begin{aligned} \Gamma(2) &= 1\Gamma(1) = 1 = 1! \\ \Gamma(3) &= 2\Gamma(2) = 2 = 2! \\ \Gamma(4) &= 3\Gamma(3) = 6 = 3! \\ \Gamma(5) &= 4\Gamma(4) = 24 = 4! \\ \Gamma(6) &= 5\Gamma(5) = 120 = 5! \end{aligned} \right\} \Gamma(x+1) = x! \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Uno de los valores más conocidos e interesantes de esta función es:

c) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

Demostración rápida: Haciendo el cambio de variables $t = u^2 \rightarrow dt = 2udu$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) := \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = 2 \int_0^\infty e^{-u^2} du$$

Entonces hay que demostrar que $\int_0^\infty e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, sin embargo utilizando la *integral de Gauss*

$$\int_0^\infty e^{-au^2} du = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad [\text{que tiene su demostración matemática, una de nuestras demostraciones}$$

matemáticas favoritas, ver § 7.5. (página 218), Stefanica D., (2011), *A Primer For The Mathematics Of Financial Engineering, Second Edition, Financial Engineering Advanced Background Series*] con $a = 1$, el resultado se obtiene rápidamente ■.

d) Relación con la función Beta

La **función beta**, llamada integral euleriana de primera especie, es definida como la integral impropia de segunda especie:

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt, \quad \forall x, y > 0$$

Si la queremos relacionar con la función gamma, podemos hacerlo de la siguiente forma:

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

La función gamma funciona también con más valores no enteros para lo que se utiliza una variación de la *fórmula de duplicación de Legendre*:

$$\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) = \frac{2z!}{4^z z!} \sqrt{\pi} \quad \text{ó} \quad \Gamma\left(\frac{1}{2} - z\right) = \frac{(-4)^z z!}{2z!} \sqrt{\pi}$$

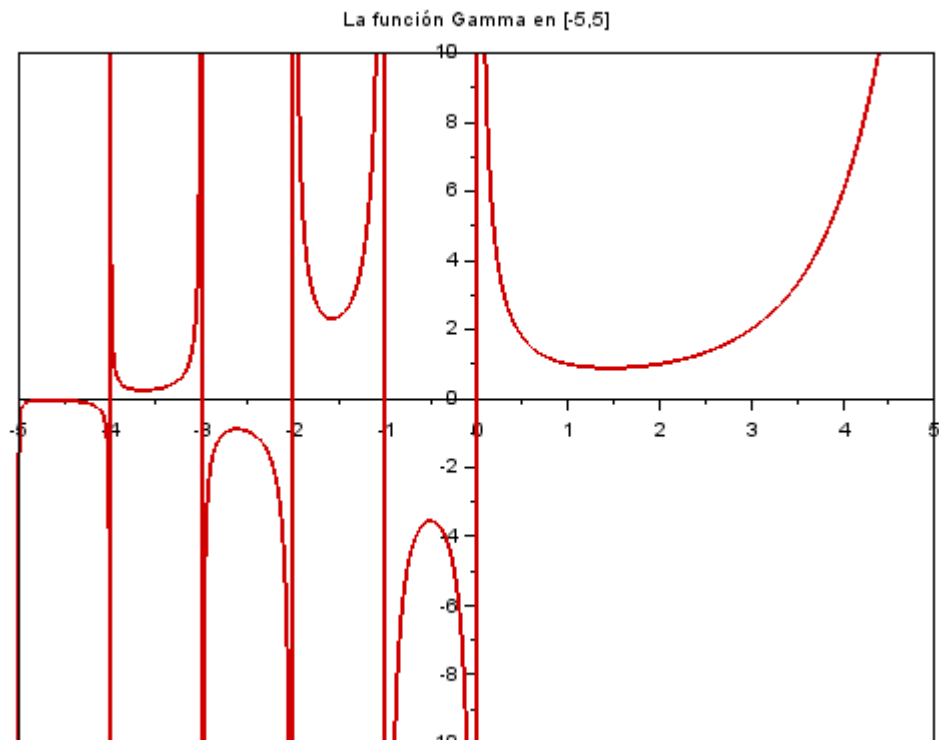
Con las que se demuestran valores interesantes como:

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi}$$

Por otra parte se debe notar que (con la formulas anteriores) la función gamma diverge para valores enteros negativos y el cero (figura A.3.), es decir:

$$\Gamma(x) = \infty \quad \forall x \in \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$$

Figura A.3. Función Gamma



Fuente. Elaboración propia con Scilab

G) La función de Bessel modificada de segundo tipo

La función de Bessel modificada de segundo tipo es una modificación de la *función de Bessel*, que es la solución a la ecuación diferencial ordinaria no lineal $x^2 y'' + xy' + (x^2 - \alpha^2) = 0$, donde se le ha ampliado el dominio para que pueda incluir el *dominio complejo*, quedando la *función de Bessel modificada*: $x^2 y'' + xy' - (x^2 - \alpha^2) = 0$, una función exponencialmente decreciente (convergente a 0, **figura A.4**). Y cuya *expresión integral* la podemos expresar como:

$$\mathfrak{B}_a(x) := \int_0^\infty e^{-x \cosh(t)} \cosh(at) dt$$

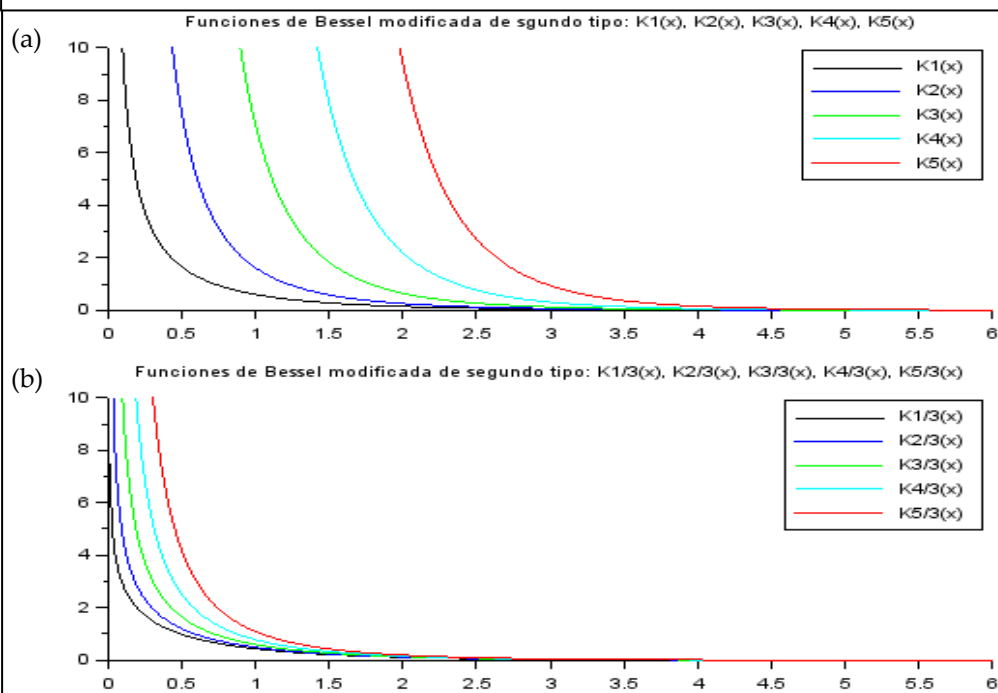
O con la función Gamma:

$$\mathfrak{B}_a(x) := \frac{\Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right) (2x)^a}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{\cos t dt}{\sqrt{(t^2 + x^2)^{2a+1}}}$$

Utilizada para valores complejos.

Figura A.4. Función de Bessel modificada de segundo tipo (a) para valores enteros

Y (b) para valores no enteros



Fuente. Elaboración propia con Scilab

H) Códigos

```
%movimiento browniano% (figura 2.1.)
function BM=BrowMot(T1,N)
randn('state', N) %Establecemos la aleatoriedad
dt = T1/N;
dW = zeros(1,N); % colocamos nuestra columna de variables
W = zeros(1,N);
dW(1) = sqrt(dt)*randn; %hacemos una primera aproximación fuera del bucle
W(1) = dW(1); %condición inicial
%generamos el bucle
for j = 2:N
dW(j) = sqrt(dt)*randn;
W(j) = W(j-1) + dW(j);
end
subplot(2,2,1)
plot([0:dt:T1],[0,W], 'r') %Representamos gráficamente
ylabel('B(t)'), xlabel('tiempo'), title('Movimiento Browniano')
subplot(2,2,2)
histfit(W,40), title('distribución del proceso Browniano')
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
%movimiento browniano geométrico% (figura 2.2.)
function SPaths=AssetPaths(S0,mu,sigma,T,NSteps,NRep1)
SPaths=zeros(NRep1,1 + NSteps);
SPaths(:,1)=S0;
dt = T/NSteps;
nudt=(mu-0.5*sigma^2)*dt;
sidt=sigma*sqrt(dt) ;
for i=1:NRep1
for j=1: NSteps
SPaths(i,j+1)=SPaths(i,j)*exp(nudt + sidt*randn);
end
end
paths=assetpath(100,0.2,0.3,1,252,3);
subplot(2,2,1)
plot(1:length(paths), paths), title ('Simulación de Browniano Geométrico'), xlim([0 252]),
xlabel('tiempo'), ylabel('precios')
Y=paths(1,:);
Y=Y';
subplot(2,2,2)
histfit(Y,40, 'lognormal'), title ('distribución de la primera simulación'),xlim([70 170])
X=paths(2,:);
X=X';
subplot(2,2,3)
histfit(X,40, 'lognormal'),title ('distribución de la segunda simulación'),xlim([70 170])
Z=paths(3,:);
Z=Z';
subplot(2,2,4)
histfit(Z,40, 'lognormal'),title ('distribución de la tercera simulación'), xlim([70 170])
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
%cambio de escala% (figura 3.7.)
paths=assetpath(15000,0.22,0.44,1,1271,1); % Se genera un movimiento browniano geométrico
con características similares a la serie%
ibex35=xlsread('ibex35.xls'); %se lee el Excel con los datos, en nuestro caso el Ibex35%
precios=ibex35(:,1);
path=paths';
subplot(2,1,1)
plot(precios), title('Ibex35'), axis([0 200 0 16500])% con esto se puede ir cambiando la escala del
Ibex35 (o de cualquier serie)%
subplot(2,1,2)
plot(path), title('simulación browniano'), axis([0 200 0 17500])
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
%bondad de ajuste (rendimientos)% (gráficos de la tabla 3.4. y estadísticos de la tabla 3.5)
clear all
data = rend
subplot(2,2,1)
histfit(rend,40,'normal'), title('Ajuste a una distribución Normal')
dist1=fitdist(rend,'normal') % se parametriza la dist. Normal%
dist2=fitdist(rend,'tlocationscale'), % se parametriza la t de Student no estandarizada%
subplot(2,2,2)
histfit(rend,40,'tlocationscale'),title('Ajuste a una distribución t')
subplot(2,2,3)
qqplot(rend), title('qqplot para distribución Normal')
subplot(2,2,4)
qqplot(rend,dist2), title('qqplot para distribución t')
[h1,p1,adstat1,cv1] = adtest(rend,'Distribution',dist1)
[h2,p2,ksstat2,cv2] = kstest(rend,'CDF',dist1)
[H3, pValue3, CvMstat3, criticalValue3] = cmtest(rend,'CDF',dist1) %hace falta bajárselo%
[h4,p4,adstat4,cv4] = adtest(rend,'Distribution',dist2)
[h5,p5,ksstat5,cv5] = kstest(rend,'CDF',dist2)
[H6, pValue6, CvMstat6, criticalValue6] = cmtest(rend,'CDF', dist2)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
Para los precios se cambian las distribuciones:
dist1=fitdist(prices,'lognormal')
dist2=fitdist(prices,'weibull')
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
%bondad de ajuste de rendimientos (caso BMUFJ)%
Y=xlsread('bankjapan2008-2016.xls');
rend=Y(:,9);
subplot(1,2,1)
histfit(rend,40,'normal'), title('Ajuste a una distribución Normal'),
subplot(1,2,2)
qqplot(rend), title('qqplot para distribución Normal')
dist2=fitdist(rend,'tlocationscale')
%se obtienen los parámetros de dist2 y se generan números aleatorios con ellos%
sigma = 1.01354e-06; mu = -3.88574e-08; nu = 0.203018; r=sigma*trnd(nu,2032,1)+mu;
subplot(1,2,1)
hist(rend,40),title('distribución de rendimientos')
subplot(1,2,2)
hist(r,40), title('distribución de números simulados')
```

```
%Smiles de Volatilidad% (figura 3.2.)
sigma=0.25; r=0;
rho=0.0; %correlación entre brownianos
k=2; %amortiguador a la varianza a largo plazo"
theta=0.2; % varianza a largo plazo%;
lamda=0; %"precio a mercado de la volatilidad"
smax=90; vmax=1;
dt=0.001;
T=0.5; K=30; m=30; n=80;
ds=smax/m;
dv=vmax/n;
u=zeros(m+1,n+1,T/dt+1);
for i=1:m+1
for j=1:n+1
for t=T/dt+1
if (i-1)*ds<K
u(i,j,t)=0;
else
u(i,j,t)=(i-1)*ds-K;
end
end
end
end
for t=T/dt:-1:1
for i=2:m
u(i,1,t)=(1-k*theta*dt/dv)*u(i,1,t+1)+(k*theta*dt/dv)*u(i,1,t+1);
end
for i=2:m
for j=2:n
u(i,j,t)=dt*(u(i,j,t+1)*(1/dt-(j-1)*dv*((i-1)*ds)^2/(ds)^2-(j-1)*dv*sigma^2/(dv)^2-r)+u(i+1,j,t+1)*((j-1)*dv*((i-1)*ds)^2/(2*ds^2)+r*(i-1)*ds/(2*ds))+u(i-1,j,t+1)*((j-1)*dv*((i-1)*ds)^2/(2*ds^2)-r*(i-1)*ds/(2*ds))+u(i,j+1,t+1)*(sigma^2*(j-1)*dv/(2*dv^2)+(k*(theta-(j-1)*dv)-lamda)/(2*dv))+u(i,j-1,t+1)*(sigma^2*(j-1)*dv/(2*dv^2)-(k*(theta-(j-1)*dv)-lamda)/(2*dv))+rho*sigma*(i-1)*ds*j*dv/(4*ds*dv)*(u(i+1,j+1,t+1)-u(i-1,j+1,t+1)-u(i+1,j-1,t+1)+u(i-1,j-1,t+1)));
end
end
for j=1:n
u(m+1,j,t)=u(m,j,t)+ds;
end
for i=2:m+1
u(i,n+1,t)=u(i,n,t);
end
end
F=zeros(m+1,1);
for i=1:m+1
F(i,1)=blsimpv((i-1)*ds,K,r,T,u(i,33,1));
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

Para la explicación de este algoritmo, ver Galíotos, V., (2008), *Stochastic Volatility and the Volatility Smile*. Uppsala University.

```
## Comparación de funciones de densidad de distintas distribuciones Log-Normal-Weibull, y
Normal- Cauchy (código en R) ## (Figura 3.6.)
ddcompdensities<-function(N,a,b,c,d,e,f,g,h){
# N: número de simulaciones
# a, b: parametro de escala y forma de la dist. Weibull
# c, d: promedio y desviacion tipica de la dist. Log-Normal
# e, f: parametro de localización y de escala de la dist. Cauchy
# g, h: promedio y desviacion tipica de la dist. Normal
install.packages("fitdistrplus")
library(fitdistrplus)
w<-rweibull(N,a,b) ## se crean N números aleatorios de una distribución Weibull##
l<-rlnorm(N,c,d) ## se crean N números aleatorios de una distribución Lognormal##
y<-fitdist(l,"lnorm")
x<-fitdist(l, "weibull")
par(mfrow=c(1,2))
plot.legend <- c("lognormal", "weibull")
denscomp(list(y, x), legendtext = plot.legend)
c<-rcauchy(N,e,f) ## se crean N números aleatorios de una distribución Cauchy##
n<-rnorm(N,g,h) ## se crean N números aleatorios de una distribución Normal##
z<-fitdist(n,"norm")
q<-fitdist(n,"cauchy")
plot.legend <- c("normal", "cauchy")
denscomp(list(z, q), legendtext = plot.legend)
}
#####
```

```
%Proceso de Poisson “estandar”% (figura 4.2.)
function poisson=poisson(L, Tmax)
X(1)=exprnd(1/L); % generamos el primer evento
i=1;
while X(i) < Tmax; % el bucle while acumula los eventos a en el intervalo [0,Tmax)
X(i+1)=X(i)+exprnd(1/L);
i=i+1;
end
X(i)=Tmax;
poisson=X(i)
% grafico del proceso
stairs(X(1:i), 0:(i-1)),title('proceso de Poisson de intensidad = L')
end
%%%%%%%%%
```

```
%Generador de Procesos Poisson%
function pssrnd1=pssrnd1(lambda)
X = 0;
Sum = 0;
flag = 0;
while flag == 0
E = -log(rand);
Sum = Sum + E;
if Sum < lambda
X = X + 1;
else
flag = 1;
end
pssrnd1=X
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
%Proceso de Poisson Compensado% (figura 4.3.)
function poisscomp=poisscomp(L,T,N)
h = T/N; t = (0:h:T);
I = zeros(N,1);
X = zeros(N+1,1); X(1) = 0;
for i = 1:N
I(i) = pssrnd1(h*L);
X(i+1) = X(i) -L*h + I(i);
end
plot(t,X)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
%Proceso de Poisson Compuesto con saltos gaussianos% (figura 4.4.)
function poisscoump=poisscoump(L,T,N)
h = T/N; t = (0:h:T);
I = zeros(N,1);
X = zeros(N+1,1); X(1) = 0;
F = zeros(N+1,1);
for i = 1:N
I(i) = pssrnd1(h*lambda);
if I(i) == 0;
F(i) = 0;
else F(i) = randn;
end
X(i+1) = X(i)+ F(i);
end
plot(t,X)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
%comparación de procesos con saltos% (figura 4.5.)
function poissvs=poissvs(L1,T1,N1,L2,T2, N2)%para una comparación exacta los parámetros
L1,T1,N1 deberían ser iguales a L2, T2, N2)%
h1 = T1/N1; t = (0:h1:T1);
I1 = zeros(N1,1);
X = zeros(N1+1,1); X(1) = 0;
for i = 1:N1
    I1(i) = pssrnd1(h1*L1);
    X(i+1) = X(i) -L*h1 + I1(i);
end
subplot(2,2,1)
plot(t,X), title('Proceso de Poisson Compensado')
h2 = T2/N2; t = (0:h2:T2);
I2 = zeros(N2,1);
Y = zeros(N2+1,1); Y(1) = 0;
F1 = zeros(N2+1,1);
for i = 1:N2
    I2(i) = pssrnd1(h2*L2);
    if I2(i) == 0;
        F1(i) = 0;
    else F1(i) = randn;
    end
    Y(i+1) = Y(i)+ F1(i);
end
subplot(2,2,2)
plot(t,Y), title('Proceso de Poisson Compuesto')
subplot(2,2,[3,4])
plot(t,X,'b',t,Y,'g'), title('Compensado y Compuesto'), legend('Poisson Compensado','Poisson
Compuesto','Location','southwest')
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
function Merton=mertonmodel(T,N,A,B,mu,sigma,L)
h = T/N; t = (0:h:T);
I = zeros(N,1);
X = zeros(N+1,1); X(1) = 0;
F = zeros(N+1,1);
for i = 1:N
    I(i) = pssrnd1(h*L);
    if I(i) == 0;
        F(i) = 0;
    else F(i) = A*I(i) + sqrt(B)*sqrt(I(i))*randn;
    end
    X(i+1) = X(i) + mu*h + sigma*sqrt(h)*randn + F(i);
end
plot(t,X)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```



```
%%Simulación de un Movimiento Browniano geométrico con y sin saltos (figura 4.6.)%%
%geometricbrow%
paths=assetpath(2,0.4,0.5,1,252,1); % se pueden "jugar" con los parámetros%
subplot(2,2,1)
plot(1:length(paths), paths), title ('Simulación de Browniano Geométrico'), xlim([0 252]),
xlabel('tiempo')
%jumpmertonmodel%
A=0.40; B=0.4; mu=0.5; sigma=0.5; lambda=10; T = 0.5; N = 252; h = T/N; t = (0:h:T);
I = zeros(N,1);
X = zeros(N+1,1); X(1) = 2;
F = zeros(N+1,1);
for i = 1:N
I(i) = pssrnd1(h*lambda);
if I(i) == 0;
F(i) = 0;
else F(i) = A*I(i) + sqrt(B)*sqrt(I(i))*randn;
end
X(i+1) = X(i) + mu*h + sigma*sqrt(h)*randn + F(i);
end
subplot(2,2,2)
plot(t,X),title('Movimiento Browniano con Saltos'),xlabel('tiempo')
subplot(2,2,[3,4])
plot(1:length(paths), paths,1:length(X),X), title('Browniano sin y con saltos'),
legend('Browniano','Browniano con saltos','Location','SouthEast'),xlabel('tiempo')
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
%cálculo del VaR al 95% y TVaR%
retdata=diff(log(data)) % data = simulación browniano o con browniano con saltos%
[H,h]=hist(retdata,100);
hist(retdata,100);
sum=0;
for i=1:length(H)-1
sum=sum+(H(i)*(h(i+1)-h(i)));
end
H=H/sum;
bar(h,H)
% Calcula el VaR 95% en la distribución empírica%
sum=0;
i=1;
while (i<length(H))
sum=sum+(H(i)*(h(i+1)-h(i)));
if(sum>=0.05)
break;
end
i=i+1;
end
VaR=h(i)
hold on; plot(h(i),0,'ro'); % marcamos el VaR en el grafico%
% ajusta a la distribución Normal%
[muhat,sigmahat] = normfit([retdata]);
Y = normpdf(h,muhat(1),sigmahat(1));
```

```

hold on; plot(h,Y,'r-'); % y dibujamos la distribución%
% calculamos el valor del VaR 95% ajustado por la Normal%
sum=0;
i=1;
while (i<length(h))
sum=sum+(Y(i)*(h(i+1)-h(i)));
if(sum>=0.05)
break;
end
i=i+1;
end
VaR_fit=h(i)
hold on; plot(h(i),0,'ro','markerfacecolor','r') %marcamos el VaR_fit%
ivar=i;
% Calculamos el TVaR basado en la distribución normal%
sum=0;
i=1;
while (i<=ivar)
sum=sum+(h(i)*Y(i)*(h(i+1)-h(i)));
i=i+1;
end
ES_fit=sum/0.01
hold on; plot(ES_fit,0,'ko','markerfacecolor','k'); title('VaR y TVaR'), xlabel('rend')
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

#Estimación de un proceso de difusión con saltos en R con el paquete DEoptim# (tabla 5.3.)

```

#### baja los paquetes####
library("tseries")
library("DEoptim")
#### funciones de densidad y verosimilitud ####
fdy <- function(dy, dt, lambda, mu, sigma, muq, sigmaq) {
mu1 <- (mu - sigma^2 / 2) * dt
mu2 <- (mu - sigma^2 / 2) * dt + muq
sig1 <- sigma * sqrt(dt)
sig2 <- sqrt(sigma^2 * dt + sigmaq^2)
pdf1 <- dnorm(dy, mean = mu1, sd = sig1)
pdf2 <- dnorm(dy, mean = mu2, sd = sig2)
pdf <- (1 - lambda * dt) * pdf1 + (lambda * dt) * pdf2
return(pdf)
}
#### función de log-verosimilitud ####
negloglik <- function(theta, dy, dt) {
L <- fdy(dy = dy, dt = dt, lambda = theta[1],
mu = theta[2], sigma = theta[3],
muq = theta[4], sigmaq = theta[5])
nll <- -sum(log(L))
if (is.nan(nll) | is.na(nll) | is.infinite(nll)) {
nll <- 1e10
}
return(nll)
}

```

DATOS

La forma más simple de introducir los datos en R es guardar el Excel como un documento tipo CSV delimitados por comas, y realizar en R lo siguiente:

```
Data<-read.table (choose.file(), sep=",") ## te permite buscar el fichero en tu ordenador e introducirlo a R##
```

```
X = t(t(data)) ## convertimos el texto en un vector columna ##
```

Rendimientos logarítmicos

```
dy <- diff(log(X))
```

```
## asumimos 255 dias en un año (trading days)
```

```
dt <- 1 / 255
```

estimación con DEOPTIM

```
set.seed(1234)
```

```
outDE <- DEoptim(negloglik,
```

```
lower = c( 1, -10, 1e-4, -10, 1e-4),
```

```
upper = c(100, 10, 10, 10, 10),
```

```
control = list(itermax = 500, NP = 100), dt = dt, dy = dy)
```

```
summary(outDE)
```

```
#####
```

%Simulación de un proceso de Heston% (figura A1).

```
function x = simHeston(n,s0,v0,mu,kappa,theta,sigma,rho,delta,no)
```

```
%%la dimension de no(:,1) debe ser igual a n/delta%%
```

```
% Construimos el vector%
```

```
t = 0:ceil(n/delta);
```

```
sizet = length(t);
```

```
x = zeros(sizet,2);
```

```
% Construimos la matrix de correlación%
```

```
C = reshape([1 rho rho 1],[2 2]);
```

```
% Calculamos numeros aleatorios pseudo normal correlacionados para los precios (Euler scheme) y el proceso de volatilidad%
```

```
u = normalcorr(C,no) * sqrt(delta);
```

```
if (method == 0)
```

```
% Usamos el enfoque exponencial cuadratico%
```

```
% Iniciamos x con log(s0) y v0%
```

```
x(1,:) = [log(s0) v0];
```

```
% Inicamos phiC (phiC in [1,2])%
```

```
phiC = 1.5;
```

```
% Calculamos x para cada t%
```

```
for i=2:sizet
```

```
m = theta + (x(i-1,2)-theta)*exp(-kappa*delta);
```

```
s2 = x(i-1,2)*sigma^2*exp(-kappa*delta)/kappa*(1-exp(-kappa*delta))+theta*sigma^2/(2*kappa)*(1-exp(-kappa*delta))^2;
```

```
phi = s2/m^2;
```

```
gamma1 = 0.5;
```

```
gamma2 = 0.5;
```

```
K0 = -rho*kappa*theta/sigma*delta;
```

```
K1 = gamma1*delta*(kappa*rho/sigma-0.5)-rho/sigma;
```

```
K2 = gamma2*delta*(kappa*rho/sigma-0.5)+rho/sigma;
```

```

K3 = gamma1*delta*(1-rho^2);
K4 = gamma2*delta*(1-rho^2);
if (phi <= phiC)
b2 = 2*phi^(-1)-1+sqrt(2*phi^(-1))*sqrt(2*phi^(-1)-1);
a = m/(1+b2);
% Calculamos el valor de la volatilidad del proceso%
x(i,2) = a.*(sqrt(b2)+no(i-1,2)).^2;
else
p = (phi-1)/(phi+1);
beta = (1-p)/m;
if (0<=cdf('norm',no(i-1,2),0,1) && cdf('norm',no(i-1,2),0,1)<=p)
x(i,2) = 0;
else
if (p<cdf('norm',no(i-1,2),0,1) && cdf('norm',no(i-1,2),0,1)<=1)
%Calculamos de Nuevo la volatlida del proceso%
x(i,2) = beta^(-1)*log((1-p)/(1-cdf('norm',no(i-1,2),0,1)));
end
end
end
% Calculamos el proceso de los precios
x(i,1) = x(i-1,1) + mu*delta + K0 + K1*x(i-1,2) + K2*x(i,2) + sqrt(K3*x(i-1,2) + K4*x(i,2))*no(i-1,1);
end
end
%obteniendo finalmente nuestra trayectoria de los precios%
x(:,1) = exp(x(:,1));
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

```

%Distribución del Proceso de Heston% (figura A2)
function Hestondist=hestondist(N, S0, V0, r, k, theta, sigma, delT, rho)
i = 1:N;
NormRand1 = randn(1,N);
NormRand2 = randn(1,N);
S = zeros(1,N);
V = zeros(1,N);
V(i) = V0 + k*(theta - V0)*delT + sigma*sqrt(V0)* ...
(rho*NormRand1 + sqrt(1- rho^2)*NormRand2)*sqrt(delT);
V = abs(V); %previene volatilidad negativa%
S(i) = S0 + r*S0*delT + S0*V.^(0.5).*NormRand1*sqrt(delT);
hist(S(i),90), title('Distribución del modelo de Heston')
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```