

UNIVERSIDAD PONTIFICIA COMILLAS DE MADRID

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA

**DESARROLLO DE UN ELEMENTO
COHESIVO PARA LA SIMULACIÓN
NUMÉRICA DEL CONTACTO Y
FRICCIÓN**

Eva Arenas Pinilla

Tesis Doctoral



Madrid 2003

A mis padres y hermanos

Índice general

Índice de figuras	V
Índice de tablas	X
Agradecimientos	XI
1. Introducción	1
2. Consideraciones sobre el efecto de la fricción entre caras de grieta	7
2.1. Conceptos generales de la mecánica de la fractura	7
2.1.1. Mecánica de la fractura elástica lineal	9
2.1.2. Mecánica de la fractura elastoplástica	12
2.1.2.1. Apertura en punta de grieta (δ_t)	12
2.1.2.2. Integral J	13
2.1.2.3. Factor de intensidad de deformación plástica (Γ_{III})	16
2.1.3. Crecimiento de grietas por fatiga	17
2.2. Características del modo III de fractura	20
2.3. Estado del arte del estudio de la fractura en modos II y III	24

3. Descripción del modelo cohesivo de fractura	37
3.1. Introducción	37
3.2. Descripción de la ley cohesiva utilizada	40
3.2.1. Ecuaciones generales para cuerpos con superficies cohesivas . . .	41
3.2.2. Formulación de la ley cohesiva	43
3.2.3. Ley de Smith-Rose-Ferrante	46
3.3. Crecimiento de grietas por fatiga	49
3.4. Implementación de la ley cohesiva en el método de los elementos finitos .	51
3.4.1. Proceso de carga (OA en la figura 3.12)	54
3.4.2. Proceso de descarga (AB en la figura 3.12)	55
4. Modelos de contacto y fricción	59
4.1. Tratamiento de los problemas de contacto	59
4.2. Modelos micromecánicos de contacto	61
4.2.1. Inicios del estudio del contacto entre dos cuerpos	61
4.2.2. Análisis de las superficies reales	63
4.2.3. Contacto normal entre cuerpos metálicos	67
4.2.4. Contacto elástico o contacto plástico	74
4.2.5. Modelo plástico de rigidez normal de Song y Yovanovich	77
4.3. Modelos de fricción	81
4.3.1. Teorías recientes	87
4.3.2. Modelo de Kragelskii	87
5. Descripción del modelo de contacto y fricción desarrollado	91
5.1. Formulación del problema general de contacto y fricción	91
5.1.1. Notación	91

5.1.2.	Leyes de comportamiento en la interfaz de contacto	92
5.1.2.1.	Ecuaciones en la dirección normal	93
5.1.2.2.	Ecuaciones en la dirección tangencial (fricción)	94
5.1.3.	Problema de contorno global	97
5.2.	Tratamiento numérico del problema	99
5.2.1.	Regularización de las restricciones	99
5.2.2.	Ley de comportamiento propuesta: dilatación	100
5.2.3.	Formulación débil del problema	103
5.2.4.	Resolución del problema	104
5.2.4.1.	Integración temporal	104
5.2.4.2.	Linealización de las ecuaciones	106
5.2.4.3.	Discretización espacial	109
5.2.4.4.	Matrices de rigidez y vectores de fuerzas	111
5.2.4.5.	Resumen del algoritmo	113
6.	Resultados	117
6.1.	Descripción de las probetas utilizadas	117
6.2.	Cálculo del coeficiente de intensificación de tensiones en modo III (K_{III}) .	123
6.3.	Curvas de resistencia a la fractura	127
6.4.	Variación de K_{III} con el ángulo medio de las asperezas	131
6.5.	Variación de K_{III} efectivo frente a K_{III} aparente	136
7.	Conclusiones	141
7.1.	Contribuciones realizadas	142
7.2.	Aplicaciones del modelo desarrollado	142
7.3.	Desarrollos futuros	143

A. Conceptos sobre plasticidad	145
A.1. Modelo de plasticidad fenomenológico	145
A.1.1. Relaciones cinemáticas. Configuración intermedia local	146
A.1.1.1. Motivación micromecánica. Plasticidad en monocristales	146
A.1.1.2. Relaciones cinemáticas asociadas con la configuración intermedia	146
A.1.2. Teoría de flujo J_2	149
A.1.2.1. Respuesta tensional	150
A.1.2.2. Condición de fluencia	151
A.1.2.3. Regla de flujo asociativa	151
A.1.2.4. Ley de endurecimiento isotrópico y condiciones de carga- descarga	151
A.1.2.5. Modelo de endurecimiento cinemático	152
B. Relaciones geométricas de parámetros de superficies reales	155
Referencias	162

Índice de figuras

2.1. Modos de fractura según el tipo de carga aplicada: a) modo I, modo de apertura; b) modo II, modo de cortadura; c) modo III, modo de desgarramiento.	8
2.2. Tensiones en torno a la punta de la grieta.	10
2.3. Tensiones y zona plástica en la punta de la grieta.	11
2.4. Definición de la apertura en la punta de la grieta (δ_t).	13
2.5. Contorno de integración para la integral J	14
2.6. Criterio de dominio de J	16
2.7. Dimensiones para la zona plástica y definición de diferentes radios en probetas cilíndricas con entalla circunferencial.	17
2.8. Curva típica de velocidad de crecimiento de grieta.	19
2.9. Estado tensional de un eje sometido a torsión cíclica.	21
2.10. Variación de las velocidades de crecimiento de grieta de modo III y modo I en acero 4340 como función de los desplazamientos en punta de grieta de modo III (ΔCTD_{III}) y de modo I (ΔCTD_I), respectivamente. (Ritchie et al. [1982]).	25
2.11. Velocidad de crecimiento en modo III como función de la longitud de la grieta, c , para distintos valores constantes de ΔK_{III} : 30, 40, 50 y 60 $\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$ (Tschegg [1982]).	27
2.12. Velocidad de crecimiento en modo III como función de ΔK_{III} para diferentes valores de longitud de grieta, c (Tschegg [1982]).	28

2.13. Fractografía de una superficie de fractura típica de modo III puro sometido a un valor constante de $\Delta K_{III} = 50 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$ (Tschegg [1982]).	29
2.14. Velocidades de crecimiento de grieta en modo III $(\Delta c/\Delta N)_{III}$ frente a ΔK_{III} , con carga superpuesta $K_I = 10 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$, para acero AISI 4340, templado y revenido a 400°C, R=-1.	31
3.1. a) Descripción de un modelo cohesivo de fractura. b) Proceso de fractura dúctil.	38
3.2. Leyes cohesivas. a) Ley cohesiva reversible. b) Ley cohesiva irreversible.	39
3.3. Descripción de la configuración inicial	41
3.4. Definición de la apertura, δ	43
3.5. Sistema de referencia en la superficie cohesiva.	44
3.6. Ley de Smith-Rose-Ferrante	46
3.7. Procesos de carga y descarga en la ley cohesiva.	48
3.8. Proceso cíclico de carga.	49
3.9. Proceso de formación de la grieta.	50
3.10. Geometría del elemento cohesivo de 8 nodos.	51
3.11. Disposición de elementos sólidos y cohesivos en el mallado.	52
3.12. Proceso de carga-descarga.	54
4.1. Sólidos en contacto según el modelo de Hertz.	62
4.2. Perfiles de probetas de acero después de tres tratamientos superficiales. (a) Superficie original. (b) Superficie pulida ligeramente. (c) Superficie lijada con lija de 600. Greenwood y Williamson [1966].	64
4.3. Área real (A_r) y aparente (A).	65
4.4. Geometría de un perfil de una superficie rugosa.	65
4.5. Distribución de alturas $\phi(y)$	66
4.6. Definición de d , distancia entre planos medios de las superficies reales.	66

4.7. Modelos de superficies que contienen asperezas a diferentes escalas de tamaño. Las relaciones entre el área real de contacto (A_r) y la carga normal N son: (a) $A_r \propto N^{4/5}$; (b) $A_r \propto N^{14/15}$; (c) $A_r \propto N^{44/45}$. (Archard [1974]).	68
4.8. Relación entre la distancia entre planos medios de las superficies en contacto y la carga. La curva muestra el valor esperado de la carga para una separación dada, suponiendo una distribución gaussiana de las alturas de las asperezas. Greenwood y Williamson [1966].	69
4.9. Relación entre el área real de contacto y la carga. La línea sólida, correspondiente a un área aparente de 10 cm^2 , y la línea a trazos, a un área de 1 cm^2 , muestran que el área real de contacto es independiente del área aparente.	70
4.10. Relación entre área real y área aparente frente a carga adimensional. Se muestra la recta de ajuste por mínimos cuadrados de los resultados experimentales de seis ensayos de diferentes autores. Woo y Thomas [1980]	72
4.11. Separación adimensional frente a carga adimensional. La línea de regresión se basa en los resultados experimentales de siete ensayos de diferentes autores. Woo y Thomas [1980]	72
4.12. Efecto del deslizamiento en el índice de plasticidad. Se representa el comportamiento de tres probetas de acero deslizándose sobre una matriz metálica de acero inoxidable a 100 m/s bajo una carga de 1.5 kg . \bullet y \circ tienen un ψ inicial de 9; \times un ψ inicial de 3 (Greenwood y Williamson [1966]).	76
4.13. Componente de fricción de rayado.	86
5.1. Notación y configuración de los cuerpos.	92
5.2. Definición del concepto de penetración ($g_N(\mathbf{x}^{(2)})$).	93
5.3. Modelo de rozamiento de Coulomb.	96
5.4. Método de la penalización.	100
5.5. Relación de d , distancia entre planos medios, con ξ , distancia inicial y con g_N , función penetración.	100

5.6. Dilatación.	101
5.7. Geometría del elemento utilizado.	110
5.8. Algoritmo de la subrutina del elemento de contacto.	115
6.1. Geometría de las probetas utilizadas por Tschegg y Suresh [1988].	118
6.2. Modelo de la probeta de grieta inicial $c = 0.2$ mm.	120
6.3. Modelo de la probeta de grieta inicial $c = 1.23$ mm.	121
6.4. Condiciones de contorno del modelo.	122
6.5. Carga aplicada.	122
6.6. Curva de carga de Smith-Rose-Ferrante (ley cohesiva).	124
6.7. Coeficiente de intensificación de tensiones K_{III} analítico y numérico para modelo sin rozamiento (grieta de 0.2 mm).	125
6.8. Coeficiente de intensificación de tensiones K_{III} analítico y numérico para modelo sin rozamiento (grieta inicial de 1.23 mm).	126
6.9. Proceso de aplicación del par (Tschegg y Suresh [1988]).	127
6.10. Coeficiente de intensificación de tensiones K_{III} en función del avance de grieta, para la grieta inicial de $c = 1.23$ mm y $c = 0.2$ mm. (Tschegg y Suresh [1988]).	129
6.11. Coeficiente de intensificación de tensiones K_{III} aparente y efectivo en función del avance de grieta, para la grieta inicial de $c = 1.23$ mm.	130
6.12. Coeficiente de intensificación de tensiones K_{III} aparente y efectivo en función del avance de grieta, para la grieta inicial de $c = 0.2$ mm.	132
6.13. Coeficiente de intensificación de tensiones K_{III} en función del par aplicado y de la longitud de la grieta, para la grieta inicial de 0.2 mm.	133
6.14. Coeficiente de intensificación de tensiones K_{III} en función del par aplicado y de la longitud de la grieta, para la grieta inicial de 1.23 mm.	134
6.15. Coeficiente de intensificación de tensiones efectivo K_{IIIef} en función del coeficiente de intensificación de tensiones aplicado K_{IIIap} , para diferentes ángulos medios de rugosidades y para la grieta inicial de 0.2 mm.	137

6.16. Coeficiente de intensificación de tensiones efectivo K_{IIIef} en función del coeficiente de intensificación de tensiones aplicado K_{IIIap} , para diferentes ángulos medios de rugosidades y para la grieta inicial de 1.23 mm. 138

A.1. Aspectos micromecánicos de la deformación en un cristal. F^p mueve al material a través de la malla por el movimiento de las dislocaciones. F^e gira y distorsiona la malla cristalina. 147

B.1. Área aparente A , y áreas de contacto reales, A_{ri} 155

B.2. Número de intersecciones para $y = Y$ en un perfil de superficie típico. . . 158

Índice de tablas

6.1. Dimensiones de las probetas.	119
6.2. Valores de magnitudes mecánicas del material utilizado (AISI 4340) . . .	123
6.3. Resultados obtenidos para el modelo de grieta inicial $c = 0.2$ mm.	124
6.4. Resultados obtenidos para el modelo de grieta inicial $c = 1.23$ mm.	125
6.5. Valores de los diferentes parámetros utilizados en el módulo de contacto y fricción.	129
6.6. Valores de K_{III} aparentes, efectivos según el ensayo de Tschegg y Suresh [1988] y efectivos calculados según el modelo propuesto.	130
6.7. Valores de K_{III} aparentes (ensayo de Tschegg y Suresh [1988]) y efectivos calculados según el modelo propuesto.	131

Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a la Universidad Pontificia Comillas la oportunidad que se me brindó al concederme la beca bajo la cual se ha desarrollado este trabajo y sin la que habría sido imposible llevarlo a cabo.

Quiero agradecer también al Dr. Ángel de Andrés Martínez por su confianza en mí a la hora de desarrollar el trabajo y por sus consejos durante el mismo.

A los profesores Dr. Peter Wriggers y Dr. Giorgio Zavarise por adentrarme en el mundo del tratamiento numérico de la mecánica del contacto. Gracias al Dr. José Luis Pérez Aparicio por promover la estancia en Hannover que supuso el inicio de la tesis.

A mis compañeros del Departamento de Ingeniería Mecánica y del Área de Diseño en Ingeniería del Instituto de Investigación Tecnológica, por los constantes y fructíferos intercambios de ideas a lo largo de estos años de lucha común.

A mis compañeros de Talgo, por sus ánimos y estímulos para la conclusión de la tesis.

Y por último a mi familia y a mis amigos, por estar siempre ahí.

Capítulo 1

Introducción

La existencia de pequeñas grietas o discontinuidades de material en cualquier pieza o estructura es un hecho. Y, a medida que aumentan las restricciones económicas en los procesos de fabricación, se exigen diseños con menores márgenes de seguridad. Por lo tanto, se necesitan cálculos cada vez más precisos de la tolerancia a los defectos o grietas de piezas o estructuras, para la prevención del fallo en cualquier componente sometido a carga. Pero ésto no ha sido siempre así. Tradicionalmente, se han utilizado procedimientos un tanto conservadores, desde la etapa de diseño, desarrollando piezas o componentes con formas tales que evitaran grandes concentraciones de tensiones, hasta la etapa de mantenimiento, realizando reparaciones inmediatas o retiradas del servicio de componentes que presentaban grietas. Sin embargo, se abandonaron esas estrategias cuando se juntaron dos factores importantes:

1. La aparición y el posterior desarrollo de los ensayos no destructivos, que permitieron descubrir defectos y grietas que antes pasaban desapercibidos.
2. La aceptación del hecho de que la presencia de una grieta en una estructura no significa necesariamente que esté al final de su vida útil.

A partir de esas consideraciones se ha desarrollado el concepto de tolerancia al daño, cuyas bases se encuentran en la mecánica de la fractura tradicional. La tolerancia al daño parte del hecho de que las grietas existen en el interior de una pieza y trata de calcular

en qué condiciones de carga y durante cuánto tiempo puede seguir la pieza realizando la función para la que ha sido diseñada, sin que la seguridad y el rendimiento se vean afectados.

En este trabajo se pretende introducir una mejora en los actuales métodos de cálculo de parámetros de grietas y de crecimiento de éstas, mediante la utilización de un algoritmo de cálculo de rozamiento entre las caras de la grieta. Este algoritmo se ha acoplado al de cálculo del problema de fractura, de tal manera que se resuelve el problema global.

En los últimos años, se ha desarrollado en el grupo de trabajo del departamento de ingeniería mecánica de la Universidad Pontificia Comillas, un modelo de fractura basado en teorías cohesivas, que ha sido ampliamente probado y utilizado principalmente aplicado al cálculo de crecimiento de grietas por fatiga (de Andrés et al. [1999b], de Andrés et al. [1999a], López [2002], Fernández [2003]). Las leyes cohesivas de fractura ofrecen, entre otras ventajas, la independencia de la ley constitutiva utilizada para el material (elástico, elastoplástico, etc.), y la total compatibilidad con discretizaciones por elementos finitos, lo que ha hecho que sea éste el método numérico elegido para la resolución de los problemas de fractura llevados a cabo. Uno de los primeros trabajos realizados consistía en estudiar el crecimiento de grietas en ejes sometidos a cargas de torsión (de Andrés [1997]). Ya en ese trabajo se vio la necesidad de mejorar el modelo de fractura, ya que la carga de torsión es un tipo de carga en el que las superficies de fractura permanecen en contacto en todo momento, y, puesto que en el modelo que se utilizaba no se tenía en cuenta de ninguna manera la interacción entre las caras de la grieta, fue necesario realizar los cálculos aplicando una pequeña carga axial para que el contacto no se produjera. De igual forma se han llevado a cabo todos los cálculos de torsión en los que se ha utilizado el modelo cohesivo de fractura (López et al. [1998], Fernández [2003]).

Así surgió la necesidad de profundizar en el estudio de los efectos que el contacto y el rozamiento entre las caras de la grieta pueden provocar en los parámetros de la fisura y en su propagación.

En la mayoría de los análisis habituales, las grietas se modelan como discontinuidades constituidas por superficies lisas y sin rozamiento. Para cargas de modo I, esa suposición (superficies lisas y sin rozamiento) es bastante satisfactoria, pero para cargas de modo II o modo III puede llevar a resultados erróneos si las superficies de la grieta son rugosas y ofrecen resistencia al deslizamiento.

En diferentes investigaciones llevadas a cabo sobre la fatiga en modo III, se ha llegado a la conclusión de que la rugosidad de las superficies de fractura tiene un gran efecto tanto en los parámetros de la fractura como en el modo en el que se produce ésta. El mecanismo que se ha sugerido como el causante de ese efecto se ha denominado “dilatación” y consiste en que, a la vez que las caras de la grieta se desplazan relativamente entre sí, las asperezas (rugosidad) de las superficies de la grieta, al chocar y deformarse, producen una apertura de ésta. Esa apertura (“dilatación”) es resistida por fuerzas normales que, a su vez, dan lugar a una fuerza de rozamiento que actúa contraria a la fuerza exterior aplicada y que hace que el par efectivo en la punta de la grieta sea menor que el aplicado. El efecto final es que se produce un retraso en el inicio de la fractura y una menor velocidad de crecimiento de grieta, comparado con lo que se produciría en modo I a igualdad de carga.

Por lo tanto, en esas condiciones, los efectos de la fricción deben ser tenidos en cuenta para capturar la física del problema y para calcular correctamente cualquier parámetro de fractura.

El método que se ha elegido para introducir el rozamiento entre las caras de la grieta es utilizar, en paralelo con el elemento cohesivo de fractura, una ley constitutiva en la interfaz de contacto. Esa ley incorpora el efecto de la rugosidad y el rozamiento mediante el uso de modelos de contacto y fricción micromecánicos. Esta ley constitutiva actúa cuando las cargas son tales que la grieta se ha abierto y se han creado superficies libres, y además, éstas están en contacto. Se ha considerado, que, puesto que es un fenómeno muy localizado, la mejor manera de recoger la física del problema es acudir a este tipo de modelos. Las leyes utilizadas han sido desarrolladas por diferentes investigadores para otros campos de la ingeniería, principalmente para el cálculo de resistencias de contacto en problemas de transmisión de calor, y son leyes ampliamente probadas y contrastadas. Además, la ley constitutiva contiene implícitamente el acoplamiento entre las componentes tangencial y normal del desplazamiento de un punto de la interfaz, para recoger el fenómeno de la dilatación.

El desarrollo de ese trabajo se describe en este documento, que se ha dividido en varios capítulos.

En el **capítulo dos** se hace una descripción de los principales conceptos de la mecánica de la fractura tanto elástica como elastoplástica. También se repasan las principales ca-

racterísticas del modo III de fractura, así como una revisión bibliográfica de los diferentes trabajos (experimentales y analíticos o numéricos) desarrollados para estudiar el efecto de la interacción entre las caras de la grieta.

El modelo cohesivo de fractura utilizado se describe en el **capítulo tres**, haciendo un resumen de las ecuaciones constitutivas en las que se basa y describiendo su implementación numérica en un código de elementos finitos.

En el **cuarto capítulo** se hace una revisión de los modelos existentes en la literatura para el estudio del contacto y el rozamiento mediante la micromecánica y la geometría de las superficies. Es la base para la construcción del modelo propuesto, que se describe detalladamente en el **capítulo quinto**, desde las ecuaciones generales del problema de contacto hasta su implantación numérica utilizando el método de los elementos finitos.

En el **capítulo seis** se presentan los resultados obtenidos con el modelo propuesto, utilizando las condiciones, las geometrías de probeta y los resultados comparativos de un ensayo publicado.

En el **capítulo séptimo**, se hace un resumen de las conclusiones del trabajo desarrollado y de las propuestas para trabajos futuros.

Además, se han incluido dos apéndices. En el primero se describen las leyes constitutivas elastoplásticas que contiene el elemento sólido utilizado en los cálculos. En el segundo apéndice se obtienen varias relaciones geométricas entre los parámetros más significativos de las superficies reales, que sirven de base para la formulación de las ecuaciones de la ley constitutiva de contacto en la dirección normal.

Capítulo 2

Consideraciones sobre el efecto de la fricción entre caras de grieta

En este capítulo se hace un resumen y un análisis de los diferentes estudios y experimentos encontrados en la bibliografía, significativos con respecto a la investigación de la influencia que sobre diferentes parámetros de la mecánica de la fractura tiene la interacción (contacto y fricción) entre las caras de una grieta, cuando ésta está sometida a modos de fractura de deslizamiento (II ó III). Además se incluyen diferentes consideraciones teóricas sobre el modo III de fractura, que es sobre el que se centra el presente trabajo. Como introducción a todo ello, se ha incluido un primer apartado en el que se hace un breve repaso de algunos conceptos generales de la mecánica de la fractura, tanto elástica como elastoplástica, que serán utilizados posteriormente.

2.1. Conceptos generales de la mecánica de la fractura

La mecánica de la fractura es la disciplina de la ingeniería que trata de cuantificar las condiciones bajo las que un cuerpo sometido a una carga puede fallar por el crecimiento de una grieta en su interior. La presencia de grietas dentro de un sólido hace que la mecánica de medios continuos tradicional no sea aplicable, al no ser válida la hipótesis de un continuo homogéneo. Por ello, dentro de la mecánica de la fractura, las ecuaciones

constitutivas son modificadas con respecto a las de la mecánica del sólido, dando lugar a campos de tensiones y de deformaciones singulares en torno a la punta de la grieta.

Según la orientación de la grieta y la dirección de los desplazamientos relativos entre sus caras, se definen los tres modos de fractura que se muestran en la figura 2.1.

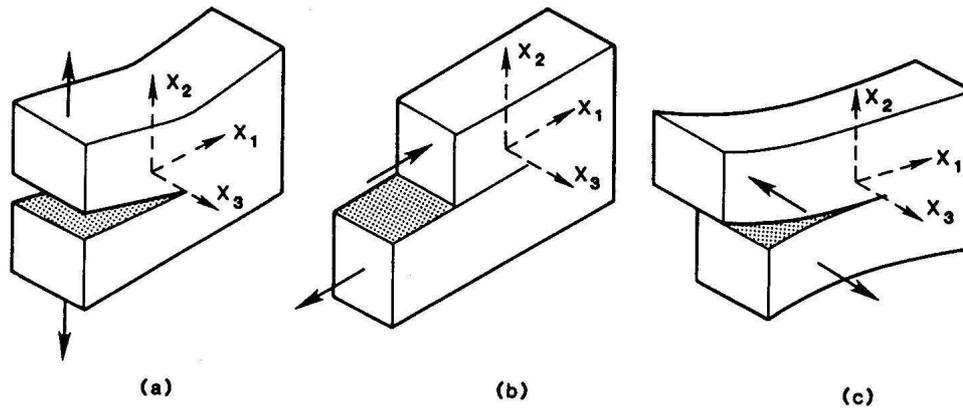


Figura 2.1: Modos de fractura según el tipo de carga aplicada: a) modo I, modo de apertura; b) modo II, modo de cortadura; c) modo III, modo de desgarramiento.

Las tensiones normales a la grieta dan lugar al llamado modo de apertura o modo I. En este modo, los desplazamientos de las superficies de fractura son perpendiculares al plano de la grieta. El modo II es el modo de cortadura y en él las caras de la grieta se desplazan en su mismo plano, en la dirección perpendicular al frente de grieta. El modo III es el modo de desgarramiento, y en él las caras se desplazan en su mismo plano y en la dirección paralela al frente de grieta. En general, los modos II y III se pueden denominar *modos de deslizamiento*, puesto que en ambos casos las caras de la grieta se desplazan paralelamente entre sí.

En la mecánica de la fractura se distinguen dos grandes disciplinas, con dos campos de acción bien diferenciados: la mecánica de la fractura elástica lineal y la mecánica de la fractura elastoplástica. A continuación se describen resumidos los principales parámetros utilizados dentro de ambos campos y de las condiciones para la aplicación de una u otra disciplina.

2.1.1. Mecánica de la fractura elástica lineal

Aunque la mecánica de la fractura se ha desarrollado sobre todo a partir de 1955, una de las ecuaciones básicas fue ya establecida por Griffith [1921], que formuló un criterio para el crecimiento de una grieta en un sólido frágil. Postuló que una grieta se propaga si la energía liberada en su proceso de formación es suficientemente elevada como para formar una nueva superficie libre. Llamando G a la *energía elástica liberada en la fractura* por unidad de longitud de grieta y R a la energía consumida en la propagación de la grieta (*resistencia a la fractura*), la condición propuesta por Griffith es que $G \geq R$ para que el crecimiento pueda tener lugar. Si R es una constante (lo que se traduce en que la energía requerida para producir una grieta es la misma para cada Δc , siendo Δc el avance de la grieta), ello implica que G debe superar un valor crítico G_c , característico de cada material.

Al desarrollar su teoría sobre materiales frágiles, Griffith supuso que la energía consumida en la propagación de la grieta (R) era únicamente la energía requerida para formar la nueva superficie (energía de superficie). Sin embargo, en materiales dúctiles (metales) existe deformación plástica en la punta de la grieta. Y como esta zona plástica tiene que producirse antes del crecimiento de la grieta y la energía que se requiere para su formación es elevada, puede considerarse ésta como la energía requerida para la propagación. Esto implica que para metales, R es principalmente energía plástica; la energía de superficie es tan pequeña que puede ser despreciada (Irwin [1948], Orowan [1955]).

Irwin [1957], usando los métodos analíticos desarrollados por Westergaard [1939], calculó los campos de tensiones cerca de la punta de la grieta para un comportamiento lineal elástico, en función del llamado *coeficiente de intensificación de tensiones* (K):

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) + \dots \quad (2.1)$$

donde σ_{ij} son las tensiones que existen a una distancia r de la punta de la grieta y a un ángulo θ con respecto al plano de la grieta (ver figura 2.2), y $f_{ij}(\theta)$ son funciones de θ conocidas. El subíndice I de K se refiere al modo I de fractura. De igual forma se pueden obtener los campos de tensiones para los otros modos de carga, utilizando los valores de coeficiente de intensificación de tensiones K_{II} y K_{III} y las funciones $f_{ij}(\theta)$ adecuadas.

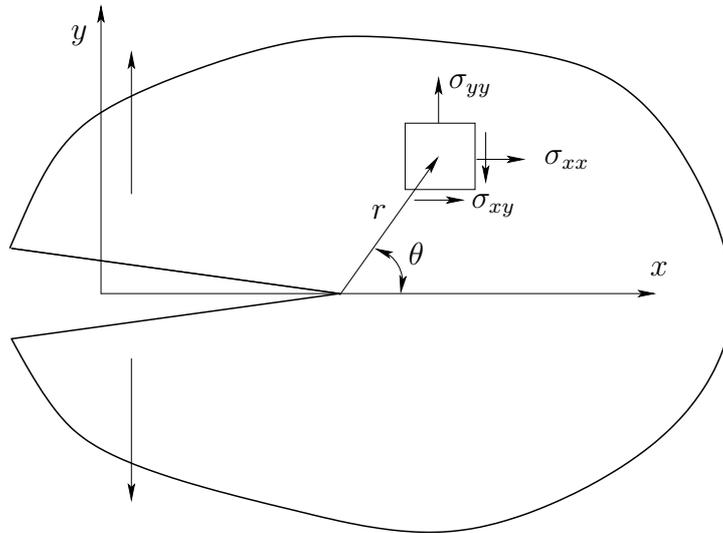


Figura 2.2: Tensiones en torno a la punta de la grieta.

El coeficiente de intensificación de tensiones, como su nombre indica, es una medida de la intensidad de los campos de tensiones cerca de la punta de la grieta para condiciones lineales y elásticas. Es función de la geometría del cuerpo, de las condiciones de contorno, del tipo de carga y de la longitud de la grieta. Su expresión general es:

$$K = \beta \sigma \sqrt{\pi c}$$

donde β es un factor adimensional que depende de la geometría del cuerpo, σ es la tensión aplicada lejos de la punta de la grieta y c es la longitud de la grieta.

Utilizando el concepto anterior, se define el término de *tenacidad* o *coeficiente de intensificación de tensiones crítico*, K_{Ic} , como el valor que toma aquél en el momento de la fractura. Por convención, al hablar de tenacidad, normalmente se hace referencia al coeficiente de intensificación de tensiones crítico medido en modo I y en condiciones de deformación plana. Es un parámetro característico del material.

Dentro de la mecánica de la fractura elástica lineal, el criterio de coeficiente de intensificación de tensiones crítico (K_{Ic}) y el criterio de energía crítica de Griffith (G_c) son semejantes y pueden ser utilizados indistintamente para la predicción de crecimiento de grietas.

Volviendo a la ecuación (2.1), dicha ecuación representa los campos asintóticos para $r \rightarrow 0$ (punta de la grieta) y el término que se muestra en esa ecuación es el primer término de la expansión de la expresión del campo de tensiones en torno a la punta de la grieta. Eso implica que la ecuación sólo es válida para una zona limitada cercana al frente de la grieta, llamada zona de dominio de K .

Además, debido al carácter singular del campo de tensiones elástico en torno a la punta de la grieta ($r = 0$), existe una zona plástica rodeándola, que es donde tienen lugar los procesos de propagación de la fractura dúctil (nucleación, crecimiento y coalescencia de microhuecos). Irwin [1960] realizó un cálculo estimado del tamaño de la zona plástica en torno a la punta de la grieta, considerándola como la zona en la que la tensión equivalente de Von Mises supera a la tensión de fluencia, σ_Y . Para modo I, esa zona plástica se extiende hasta:

$$r_Y = \frac{1}{3\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_Y} \right)^2, \quad \text{para deformación plana}$$

$$r_Y = \frac{1}{\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_Y} \right)^2, \quad \text{para tensión plana}$$

En la figura 2.3, se muestra un esquema de las tensiones y de la zona plástica en la punta de la grieta.

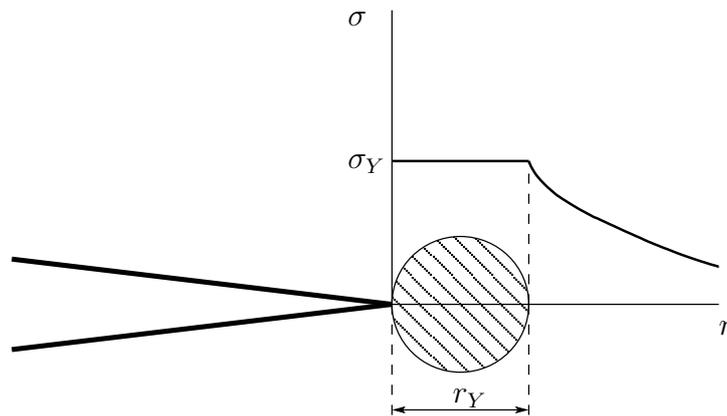


Figura 2.3: Tensiones y zona plástica en la punta de la grieta.

Dentro de la zona plástica, la solución elástica lineal no es válida. Las situaciones en las que r_Y es pequeño comparado con la zona de dominio de K o con cualquier otra dimensión geométrica de la pieza, se consideran como situaciones de plasticidad a pequeña escala y para ellas es válido el uso de la mecánica de la fractura elástica lineal.

2.1.2. Mecánica de la fractura elastoplástica

Para algunos materiales y en algunos casos de carga es virtualmente imposible satisfacer las condiciones de aplicación de la mecánica de la fractura elástica lineal, ya que hay situaciones en las que hay una gran deformación plástica antes de la propagación de la grieta. En esos casos, se aplica la mecánica de la fractura elastoplástica, en la que los dos parámetros más significativos son la *apertura en punta de grieta* (δ_t) y la integral J . Se ha añadido además la definición del factor de intensidad de deformación plástica en modo III (Γ), por ser un parámetro utilizado en los desarrollos posteriores.

2.1.2.1. Apertura en punta de grieta (δ_t)

En las situaciones en las que prácticamente toda la sección del plano de la grieta ha plastificado, la tensión en la punta de la grieta apenas se incrementa (si no hay endurecimiento por deformación). En ese caso, la condición de fractura se alcanza al llegar a un valor de deformación plástica suficientemente grande. Para caracterizar ese valor de deformación plástica en la punta de la grieta se ha utilizado el concepto de *apertura en punta de grieta* (δ_t o el término inglés *CTOD*, *crack tip opening displacement*).

Wells [1963], utilizando los cálculos de Irwin del tamaño de la zona plástica, propuso, para una tensión externa aplicada σ^∞ muy inferior a la tensión de fluencia σ_Y una expresión para δ_t :

$$\delta_t = \frac{K_I^2}{\sigma_Y E}$$

donde E es el módulo elástico del material. Posteriormente surgieron expresiones más precisas y mejor fundamentadas. Por ejemplo, Tracy [1976] definió la apertura en punta de grieta como la distancia entre dos puntos situados en la parte superior e inferior de las

caras de la grieta, definidos por la intersección entre cada cara y dos líneas simétricas que salen a 45° desde la punta de la grieta (figura 2.4).

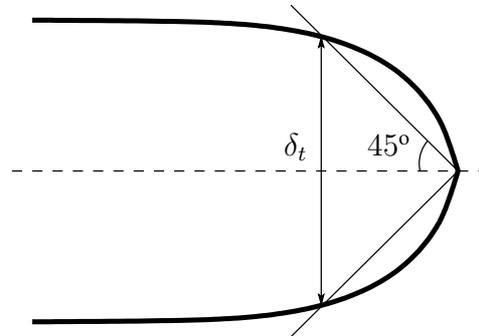


Figura 2.4: Definición de la apertura en la punta de la grieta (δ_t).

Con esa definición, la expresión que se obtiene para δ_t es:

$$\delta_t = d_n \frac{J}{\sigma_Y}$$

donde d_n es un parámetro que depende de n (coeficiente de endurecimiento por deformación) y de σ_Y/E y varía desde 0.3 a 0.8.

La condición para el inicio de la fractura puede establecerse como $\delta_t = \delta_{tc}$, donde δ_{tc} es la apertura de grieta crítica característica del material bajo estudio.

Una ventaja que ofrece el uso de este parámetro es que proporciona una escala física de longitud para la fractura, a veces necesaria para relacionar los procesos de fallo microscópicos con la tenacidad (valor macroscópico).

2.1.2.2. Integral J

Rice [1968b] propuso el uso de la integral J (definida por primera vez por Eshelby [1956]) en la mecánica de la fractura. Es una integral independiente del camino de integración, que juega un papel muy importante tanto en la mecánica de la fractura elástica no lineal, como en la mecánica de la fractura elastoplástica.

La integral J se define como

$$J = \int_{\Gamma} \left(W dy - \mathbf{T} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} ds \right)$$

donde \mathbf{u} es el vector desplazamiento, y es la distancia a lo largo de la dirección normal al plano de la grieta, s es la longitud del arco a lo largo del contorno Γ , \mathbf{T} es el vector de fuerzas perpendicular al contorno ($T_i = \sigma_{ij} n_j$), W es la densidad de energía de deformación ($W(\varepsilon_{ij}) = \int_0^\varepsilon \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}$) y Γ es cualquier contorno que rodee la punta de la grieta (ver figura 2.5). Para un material elástico lineal o no lineal, la integral J es independiente del contorno Γ elegido para realizar la integración.

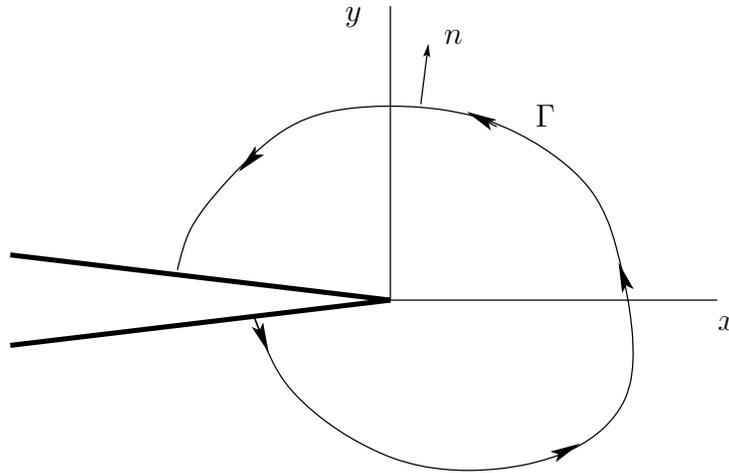


Figura 2.5: Contorno de integración para la integral J .

Rice mostró que J es igual a la variación de energía potencial (Π) con respecto al avance de grieta (c), para un sólido elástico:

$$J = - \frac{d\Pi}{dc}$$

Por lo tanto, para un sólido elástico lineal, siendo ν el coeficiente de Poisson, se cumple que:

$$J = G = \frac{(1 - \nu^2) K_I^2}{E} = \sigma_Y \delta_t$$

Además, J , G , K_I y δ_t son parámetros de la mecánica de la fractura equivalentes cuando se cumplen las condiciones de plasticidad a pequeña escala. Así, cuando uno de ellos llega a su valor crítico, el resto también lo hace simultáneamente.

La integral J describe la intensidad del campo de tensiones en la punta de la grieta de forma única. Hutchinson [1968] y Rice y Rosengren [1968] obtuvieron los campos de tensiones y deformaciones (llamados desde entonces campos HRR) para un material caracterizado por la ley de Ramberg-Osgood, cuyo comportamiento se representa con la ecuación:

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_Y} = \frac{\sigma}{\sigma_Y} + \alpha \left(\frac{\sigma}{\sigma_Y} \right)^n$$

donde ε_Y es la deformación de fluencia, n es el exponente de endurecimiento por deformación y α es una constante adimensional del material.

Para un material con esa ley de comportamiento, el campo de tensiones (campo HRR) se calcula como:

$$\sigma_{ij} = \sigma_Y \left(\frac{J}{\alpha \sigma_Y \varepsilon_Y I_n r} \right)^{\frac{1}{n+1}} f_{ij}(\theta, n)$$

donde I_n es un factor que depende de n .

Así, como J es una medida de la intensidad de los campos en la punta de la grieta, puede utilizarse el concepto de un valor J crítico, J_c , que define cuándo se producirá la propagación de la grieta. Al igual que para K , se definen unas condiciones de dominio de J , que deben cumplirse para que esta integral pueda ser utilizada para caracterizar la fractura en sólidos dúctiles.

La primera condición es que el comportamiento plástico del material debe poder ser representado correctamente mediante la teoría de deformación plástica total (teoría de Hencky). Eso se cumple sólo cuando no hay descargas y además se sigue un proceso de carga proporcional. En realidad, el comportamiento plástico de un sólido responde a una teoría incremental, donde la deformación plástica es función de la historia de cargas. Así pues, las teorías incremental y de deformación total (Hencky), coinciden formalmente cuando las cargas aplicadas son proporcionales y monótonas crecientes. La equivalencia entre las

dos teorías es una condición necesaria pero no suficiente para que la aplicación del criterio de la integral J sea válida.

Además, en un material elastoplástico existirá una región con grandes deformaciones (zona de radio P en la figura 2.6) donde la solución HRR no sea válida. Si se define A como el radio de la zona de dominio de J , se puede suponer que siempre que P sea pequeño comparado con A , cualquier proceso que ocurra dentro de la región A debe estar controlado por el parámetro J . Por lo tanto, cuando se dan esas circunstancias se puede esperar que tanto la iniciación como el crecimiento de la grieta dependan de J .

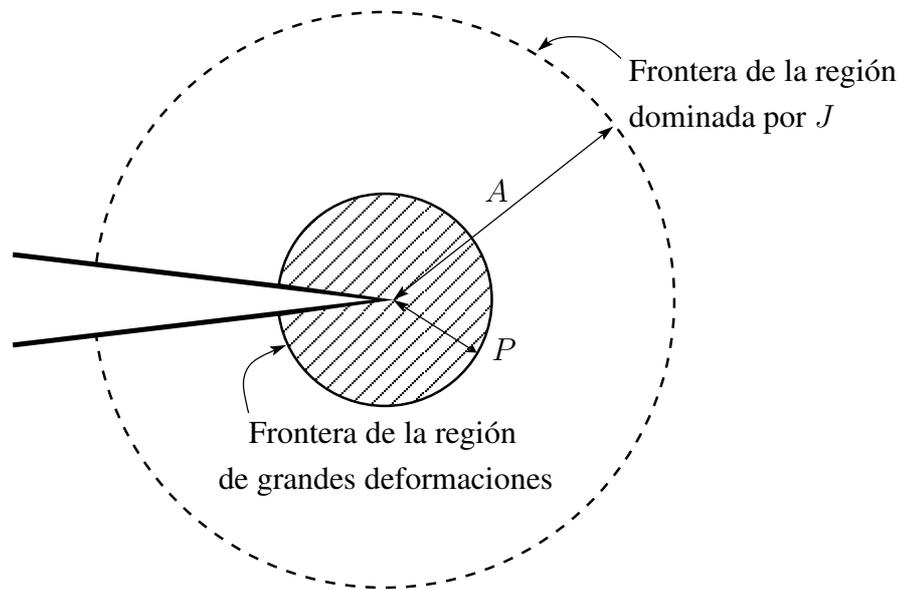


Figura 2.6: Criterio de dominio de J .

2.1.2.3. Factor de intensidad de deformación plástica (Γ_{III})

Las soluciones analíticas para la distribución de las deformaciones en un sólido cilíndrico de un material elástico perfectamente plástico con una entalla circunferencial y con un par exterior aplicado, indican que la distribución de la deformación plástica en el plano de la grieta es (Walsh y Mackenzie [1959]):

$$\gamma = \frac{k}{G} \left(\frac{r}{r_p} \right)^2 \left(\frac{r_N - r_p}{r_N - r} \right)$$

donde γ es la deformación plástica a cortadura, k es la tensión de fluencia a cortadura y G es el módulo elástico a cortadura; r , r_N y r_p son radios definidos en torno a la punta de la grieta, según se muestra en la figura 2.7. Aunque la deformación plástica es infinita en la punta de la grieta ($r = r_N$), el parámetro $\gamma(r_N - r)$ es finito y además define la intensidad de la deformación plástica de cortadura en el plano de la grieta:

$$\Gamma_{III} = \gamma(r_N - r)|_{r \rightarrow r_N} = \frac{k}{G} \frac{(1 - r_p/r_N)}{(r_p/r_N)} r_N$$

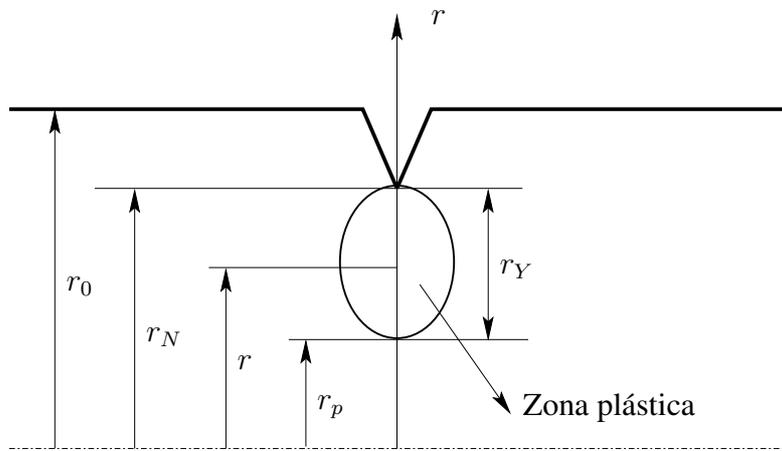


Figura 2.7: Dimensiones para la zona plástica y definición de diferentes radios en probetas cilíndricas con entalla circular.

Γ_{III} es un parámetro que ha sido propuesto para el estudio de propagación de grietas en modo III en la presencia de plasticidad extendida a todo el plano de la grieta (Nayeb-Hashemi et al. [1982]).

2.1.3. Crecimiento de grietas por fatiga

Bajo condiciones de carga cíclica, el inicio del crecimiento de una grieta a partir de un defecto puede ocurrir a valores de coeficiente de intensificación de tensiones que estén bastante por debajo de la tenacidad de ese material. Para condiciones de plasticidad a pequeña escala, Paris et al. [1961] señalaron que el crecimiento de una grieta bajo carga cíclica estaba gobernado por la ley:

$$\frac{dc}{dN} = C \Delta K^m \quad (2.2)$$

donde dc/dN es el aumento de longitud de la grieta (c) por ciclo de carga (N), y ΔK es el rango del coeficiente de intensificación de tensiones, definido como:

$$\Delta K = K_{max} - K_{min}$$

K_{max} y K_{min} son, respectivamente, los coeficientes de intensificación de tensiones máximo y mínimo, correspondientes a la máxima carga, P_{max} (o máxima tensión nominal σ_{max}) y a la mínima carga, P_{min} (o mínima tensión nominal σ_{min}). Los términos C y m son constantes empíricas que son funciones de las propiedades del material y de la microestructura, de la frecuencia de la fatiga, de la tensión media aplicada, del modo de carga, del cociente de esfuerzos, del estado de tensiones y de la temperatura. La ley empírica de crecimiento de grieta (ec. 2.2) es la forma más extendida de caracterizar la velocidad de crecimiento por fatiga. Además representa una de las aplicaciones más útiles de la teoría de la mecánica de la fractura elástica lineal.

Dentro de los parámetros que influyen en C y m , el cociente de esfuerzos R se ha reconocido como uno de los más decisivos. Se define como $R = \sigma_{min}/\sigma_{max}$. En concreto, numerosos estudios han llegado a la conclusión de que al aumentar R se produce un aumento en la velocidad de crecimiento de la grieta. La ecuación de Forman de la velocidad de crecimiento de grieta tiene en cuenta ese efecto:

$$\frac{dc}{dN} = \frac{C (\Delta K)^m}{(1 - R)K_c - \Delta K}$$

Observando esa ecuación, hay dos limitaciones para ΔK :

1. Si ΔK es muy grande, ocurrirá el fallo porque K_{max} habrá superado la tenacidad a fractura K_c o bien ΔK habrá superado $(1 - R)K_c$.
2. Por el contrario si ΔK es muy pequeño, la grieta no se propagará. Hay un valor umbral ΔK_0 tal que, para que la grieta crezca, es necesario que $\Delta K > \Delta K_0$.

Esas dos condiciones se resumen como:

$$\frac{dc}{dN} \rightarrow 0 \quad \text{si } \Delta K - \Delta K_0 \rightarrow 0$$

$$\frac{dc}{dN} \rightarrow \infty \quad \text{si } K_c - K_{max} \rightarrow 0$$

En la figura 2.8 se muestra una curva típica de crecimiento de grieta, en la que se pueden observar las limitaciones de ΔK .

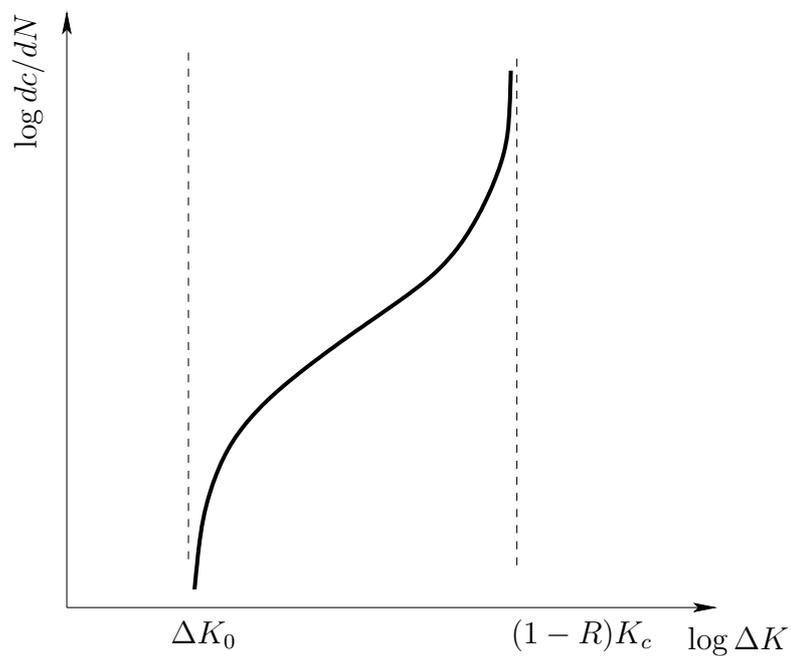


Figura 2.8: Curva típica de velocidad de crecimiento de grieta.

Teniendo en cuenta esas restricciones, se podría reescribir la ecuación de Forman como:

$$\frac{dc}{dN} = \frac{C (\Delta K)^m}{(1-R)(K_c - K_{max})}$$

o

$$\frac{dc}{dN} = \frac{C (\Delta K - \Delta K_0)^m}{(1 - R)K_c - \Delta K}$$

2.2. Características del modo III de fractura

Desde los inicios de la mecánica de la fractura, casi todos los esfuerzos se han centrado en el estudio del comportamiento de las grietas cargadas según el modo de apertura (modo I), a pesar de que hay muchos casos prácticos de carga de modo de desgarramiento (modo III). Algunos ejemplos de aplicaciones donde este modo de fractura es de particular importancia son:

- diferentes componentes usados en automoción (tales como sistemas de transmisión),
- ejes de turbinas y alternadores de centrales eléctricas y,
- en general, en cualquier sistema mecánico que transmita par.

Por lo tanto, el comportamiento de las grietas bajo carga de modo III es interesante no sólo desde un punto de vista científico sino también desde un punto de vista económico. Sólo a partir de principios de los años 80 se han empezado a investigar a fondo las particularidades que presenta el modo III de fractura.

El ejemplo más sencillo y el más utilizado al realizar estudios y ensayos de fractura en modo III es un eje cargado a torsión, como el que se muestra en la figura 2.9. En esa figura se muestra el estado tensional en el que se encuentra el eje cuando se le aplica un par alternativo. Excepto los realizados por Wright y Queeney [1982] y Pook [1985], todos los ensayos de modo III de fractura han sido llevados a cabo por medio de la aplicación de una carga de torsión a una probeta cilíndrica circular con una entalla en el plano perpendicular al eje del cilindro. A partir de esa entalla se ha producido, mediante un mecanismo de fatiga, una grieta inicial circunferencial.

El modo de fractura al que estará sometido el eje es esencialmente función de la amplitud de la carga aplicada y del material en sí. A bajas amplitudes de carga (típicamente para

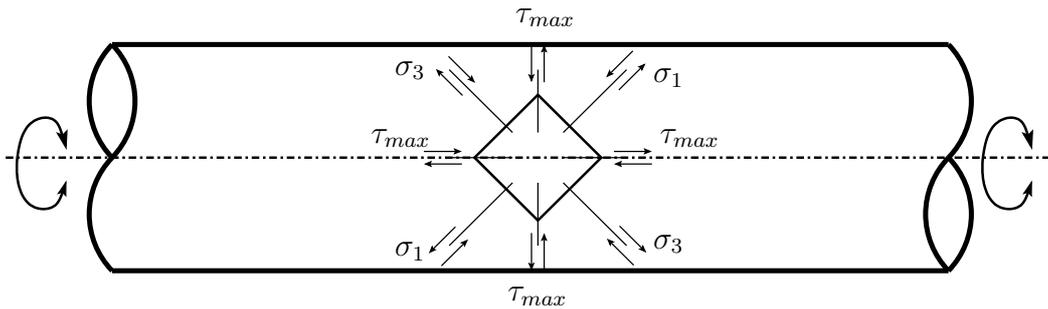


Figura 2.9: Estado tensional de un eje sometido a torsión cíclica.

valores de tensión aplicada τ menor del 70 % de la tensión de fluencia a cortadura, k), las grietas que se forman lo hacen a lo largo de los planos de máxima tensión principal (a 45° con respecto al eje del cilindro), y crecen en modo de apertura (modo I), originando la formación de la llamada apariencia de “tejado de fábrica” (“factory roof”) en la superficie de la grieta. Cuando las amplitudes de carga son altas (valores de tensión aplicada mayores del 85 % de la tensión de fluencia de cortadura), las grietas tienden a formarse a lo largo de los planos cortantes (transversal o longitudinal), creciendo en modo torsional puro, con la característica de que la morfología de la superficie de fractura es macroscópicamente plana.

En el caso concreto de ejes de turboalternadores, se citan en la bibliografía varios casos de fallos por fatiga, debidos a transiciones del par al que están sometidos por diferentes eventos en las líneas de distribución (Quay y Placek [1976], Walker et al. [1975], etc.). Los ejes de los turbogeneradores están sujetos a cargas de flexión a la frecuencia de un ciclo por vuelta y están ocasionalmente sometidos a cargas torsionales de varias amplitudes y frecuencias. Se propone como origen del fallo de estos ejes el que durante uno de los transitorios de torsión (sobrecarga) se inicie una grieta en un plano de máximo cortante. Ésta continuará creciendo en modo de desgarramiento (modo III) durante los transitorios de torsión subsiguientes. El eje se considera que ha fallado (como criterio de diseño), cuando las grietas de desgarramiento se hacen lo suficientemente grandes para crecer en modo I por las cargas de flexión. La predicción de vida de un eje de un turbogenerador, por lo tanto, requiere un estudio detallado y, como se verá, queda lejos de la aplicación de la mecánica de la fractura tradicional, al formar parte de los mecanismos que aparecen en

el crecimiento de grieta un fenómeno tan complejo como es el rozamiento entre sus caras.

La resistencia a la fractura de sólidos dúctiles y frágiles en condiciones de carga de modo I ha sido caracterizada con éxito mediante las leyes y teorías de la mecánica de la fractura lineal elástica y elastoplástica. En ese caso de carga, los parámetros críticos de fractura se obtienen sin ambigüedad porque K_I y la integral J caracterizan de forma única los campos cercanos a la punta de la grieta bajo condiciones lineales elásticas y elastoplásticas, respectivamente. Por lo tanto, los valores de resistencia a la fractura en modo I son generalmente independientes de la geometría de la pieza siempre que se cumplan las condiciones de dominio de K o J . En fractura en modo III, sin embargo, el concepto de similitud implícito en el uso de la mecánica de la fractura puede no funcionar por la presencia de un fenómeno de abrasión entre las superficies de fractura creadas durante el crecimiento estable. Debido a esta limitación, la iniciación crítica de la fractura y la resistencia al crecimiento, que son independientes de la geometría de la grieta y de la pieza, no pueden ser definidos de forma única para fractura torsional usando ningún parámetro característico.

En modo III, el tamaño de la zona plástica de la punta de la grieta tiene forma circular, de diámetro:

$$r_Y = \frac{1}{\pi} \left(\frac{K_{III}^2}{\tau_Y^2} \right)$$

donde τ_Y es el límite de fluencia a cortadura. Se observa que el tamaño de la zona plástica delante de la punta de una grieta torsional es mayor que la de una grieta de modo I para valores similares de K_I y K_{III} . Por ello, es difícil mantener condiciones de plasticidad a pequeña escala en las probetas utilizadas habitualmente en condiciones de laboratorio y el uso de K_{III} para describir el modo III de fractura tiene validez limitada. Pero aún así, los análisis que han surgido teniendo en cuenta la plasticidad en la punta de la grieta en torsión (considerando los parámetros característicos del régimen elastoplástico J_{III} o Γ_{III}) dan lugar también a medidas no únicas de la resistencia debido a la abrasión de las superficies de fractura. En concreto, J_{III} ha sido usado como parámetro para la caracterización elastoplástica del fallo a torsión por analogía con la integral J en modo I, pero su validez se pone en duda a la vista del rozamiento presente en las superficies de fractura. Limitaciones similares pueden encontrarse en el caso del parámetro Γ_{III} .

Aunque ya se habían hecho algunos estudios teóricos sobre el modo III de fractura a finales de los años 50 (por ejemplo, McClintock [1956] y Walsh y Mackenzie [1959]), hasta principios de los 80 no se empezó a estudiar en profundidad el tema, publicándose las primeras curvas de crecimiento de grieta en modo III por Hurd y Irving [1982] y por Ritchie et al. [1982]. Fue tras estos primeros ensayos cuando se estudió por primera vez de una forma cuantitativa (Tschegg [1982]) el efecto de la interacción entre las caras de las grietas sobre la fractura y el crecimiento de grietas por fatiga en modo III, aunque ya era conocido que ese efecto daba lugar a fenómenos como la abrasión y el rozamiento entre las caras. Anteriormente, Adams [1972] había observado la influencia de las superficies no planas de las grietas en la velocidad de crecimiento de éstas, y, Trebules et al. [1973], hicieron un ensayo de fatiga puliendo las superficies de fractura y mostraron que cuando las caras de la grieta son suaves, la velocidad de crecimiento de la grieta aumenta.

En efecto, la influencia del contacto y el rozamiento entre las caras de la grieta sobre la fractura y su propagación es fundamental en el análisis de diversos mecanismos de modos de fallo; y no sólo en las grietas de modo III, que son las que aquí nos ocupan, sino en cualquier caso en el que la grieta permanezca cerrada o parcialmente cerrada durante un proceso de carga a cortadura. Aparte de las grietas en ejes a torsión, otros ejemplos pueden ser las grietas por fatiga superficiales o subsuperficiales inducidas por contacto rodante y las grietas entre las interfaces de los materiales compuestos.

La principal consecuencia de la presencia del rozamiento entre las caras de una grieta sometida a un proceso de fatiga en modo cortante (II ó III), es la menor velocidad de crecimiento de ésta comparada con la velocidad de crecimiento en modo I. Ésto tiene lugar porque, debido a la presencia del rozamiento, las cargas efectivas soportadas por la grieta son diferentes de las nominales, siendo aquéllas mucho menores. La reducción de la carga depende de parámetros como la longitud de la grieta y la morfología de la superficie de fractura. En concreto, mientras una grieta sometida a carga en modo III se propaga mucho más lentamente que una grieta en modo I, en los mismos rangos de coeficiente de intensificación de tensiones nominales, la velocidad real de crecimiento de grieta obtenida en modo III cuando se elimina la interferencia de las superficies, es de hecho mayor que en grietas sometidas a carga de modo I.

Esta atenuación en los modos II y III producida por la interacción de las superficies de fractura fue denominada por Tschegg *cierre de grieta por modo de deslizamiento*. Si se

compara con el cierre de grieta por modo I, el cierre por modo de deslizamiento es mucho más significativo ya que las superficies de las grietas están en contacto durante todo el tiempo de aplicación de la carga.

2.3. Estado del arte del estudio de la fractura en modos II y III

A finales de la década de los 50, algunos investigadores desarrollaron varios modelos analíticos para el estudio de la fractura en modo III, debido a que los campos de tensiones y deformaciones pueden describirse matemáticamente de una forma concisa (Walsh y Mackenzie [1959]). Así mismo, se empezaron a realizar ensayos sobre este modo de crecimiento (McClintock [1956]), aunque no se llegó a profundizar en el tema hasta la década de los 80, cuando, en paralelo, Hurd e Irving [1982] y Ritchie et al. [1982] publicaron las primeras curvas de crecimiento de grieta en modo III. En ambos casos las velocidades de crecimiento encontradas fueron muy bajas comparadas con las de modo I. En sus ensayos, Hurd e Irving [1982] utilizaron acero EN16 (acero de aleación Mn-Mo) con diferentes temperaturas de templado y representaron la velocidad de crecimiento como función de ΔK_{III} , el coeficiente de intensificación de tensiones en modo III, para relaciones de carga diferentes, y para un par de amplitud constante y sin carga axial. Ritchie et al. [1982] hicieron sus ensayos con acero AISI 4340 (acero de aleación CrNiMo), templado y revenido a 650°. Correlacionaron las medidas de crecimiento de grieta con los desplazamientos en punta de grieta ΔCTD_{III} obteniendo la gráfica que se muestra en la figura 2.10. Resultó una relación de velocidad de crecimiento (dc/dN) con respecto a ΔCTD_{III} de 10^{-3} , frente a una relación del orden de 10^{-1} en modo I (ΔCTD_I). Aunque en estos estudios se suponía que una posible explicación para ese fenómeno era el contacto y el consiguiente rozamiento entre las superficies de fractura, no se hicieron estudios cualitativos ni cuantitativos.

Nayeb-Hashemi et al. [1982] midieron la velocidad de crecimiento de grieta en modo III para diferentes valores de par aplicado en un acero AISI 4140 (acero de aleación CrMo), y mostraron que no es una función única del ΔK aplicado. Propusieron que la falta de similitud estaba relacionada con los efectos del rozamiento. También señalaron que el

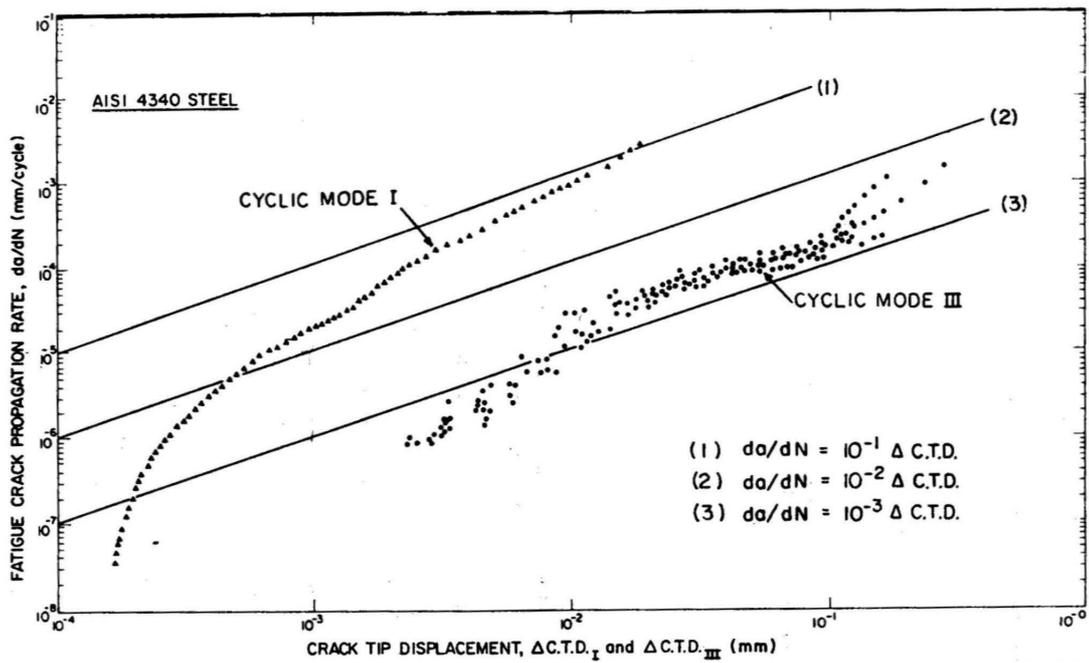


Figura 2.10: Variación de las velocidades de crecimiento de grieta de modo III y modo I en acero 4340 como función de los desplazamientos en punta de grieta de modo III (ΔCTD_{III}) y de modo I (ΔCTD_I), respectivamente. (Ritchie et al. [1982]).

criterio de plasticidad a pequeña escala no se cumplía en las condiciones que tenían los datos obtenidos, lo que indicaría que la metodología de la mecánica de la fractura elástica lineal no era apropiada para representar sus resultados. Para intentar subsanar éso, sugirieron que el factor de intensidad de deformación plástica, Γ_{III} , desarrollado por Walsh y Mackenzie [1959], era más apropiado para describir el crecimiento de grietas por fatiga en modo III bajo condiciones de carga elastoplásticas. Pero, al volver a representar gráficamente los datos del crecimiento de grieta en función de Γ_{III} siguió sin haber correlación entre dc/dn y $\Delta\Gamma_{III}$, aunque la dispersión era menor. Fue al aplicar una carga axial superpuesta a la carga torsional, cuando se logró obtener una relación única entre la velocidad de crecimiento y $\Delta\Gamma_{III}$.

Tschegg [1982] fue el primero en mostrar claramente la importancia de la fricción en el crecimiento de grietas en modo III. Realizó medidas de la velocidad de crecimiento de una grieta en un eje sometido a torsión bajo ΔK_{III} constante como función de la longitud de la grieta (figura 2.11). Encontró que la velocidad de crecimiento de grieta bajo carga de modo III, no sólo dependía de la amplitud de K aplicada (ΔK_{III}), sino que también dependía de la longitud de la grieta. Para un valor de ΔK_{III} aplicada constante, al crecer la grieta la velocidad de crecimiento decrece, debido al efecto de la interacción entre las caras. La explicación que se dio a este fenómeno fue que, debido al rozamiento de las superficies de fractura (macroscópicamente planas, pero microscópicamente rugosas) la carga aplicada se reduce de su valor nominal a una pequeña fracción que es la que realmente actúa en la punta de la grieta (valor efectivo). La reducción es mayor cuanto mayor es la longitud de la grieta. Es un fenómeno similar al efecto de cierre de grieta en modo I de fractura. En las figuras 2.11 y 2.12 se muestran los resultados que obtuvo.

En la figura 2.11 se observa cómo la velocidad de crecimiento decrece al aumentar la longitud de la grieta. Esas curvas deberían ser líneas horizontales, si no existiera el efecto del rozamiento entre las caras. Además se remarca en ese trabajo el cambio de modo de fractura que se observa al llegar a una velocidad de crecimiento en torno a $5 \cdot 10^{-4}$ mm/ciclo. En todos los casos, en un primer momento la grieta crecía en modo III (con superficie de fractura macroscópicamente plana) cambiando a partir de esa velocidad a superficie de fractura de tipo de tejado de factoría. En ese último modo de fractura, debido a la mayor rugosidad de la superficie (más que rugosidad habría que hablar de superficie no plana), la velocidad de crecimiento decrece aún más rápidamente e incluso parece que

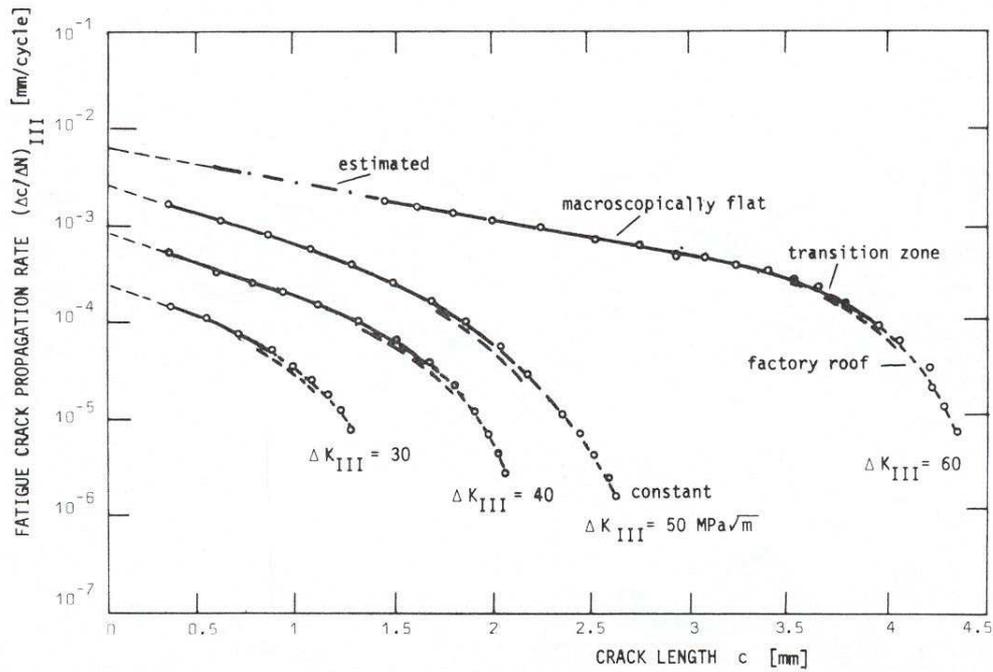


Figura 2.11: Velocidad de crecimiento en modo III como función de la longitud de la grieta, c , para distintos valores constantes de ΔK_{III} : 30, 40, 50 y 60 $\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$ (Tschegg [1982]).

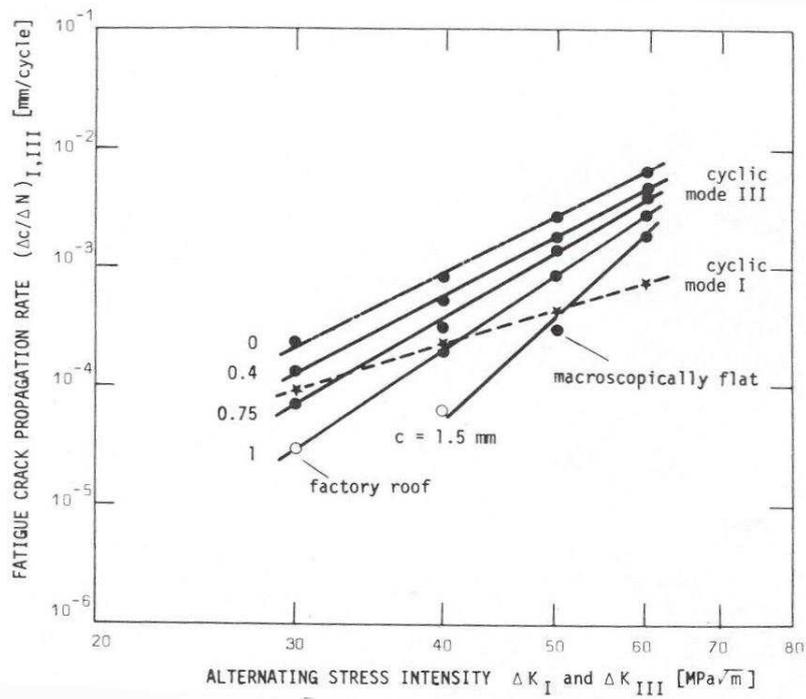


Figura 2.12: Velocidad de crecimiento en modo III como función de ΔK_{III} para diferentes valores de longitud de grieta, c (Tschegg [1982]).

llega un momento en el que la grieta deja de crecer. En la figura 2.13 se muestra una fotografía donde se aprecia con claridad la morfología de la superficie correspondiente a cada modo de fractura. Si se hace una extrapolación de las curvas de $\Delta c/\Delta N$ a $c = 0$, se obtienen los máximos valores de crecimiento. Estos valores caracterizan las velocidades de crecimiento que no están influenciadas por el rozamiento de las superficies.

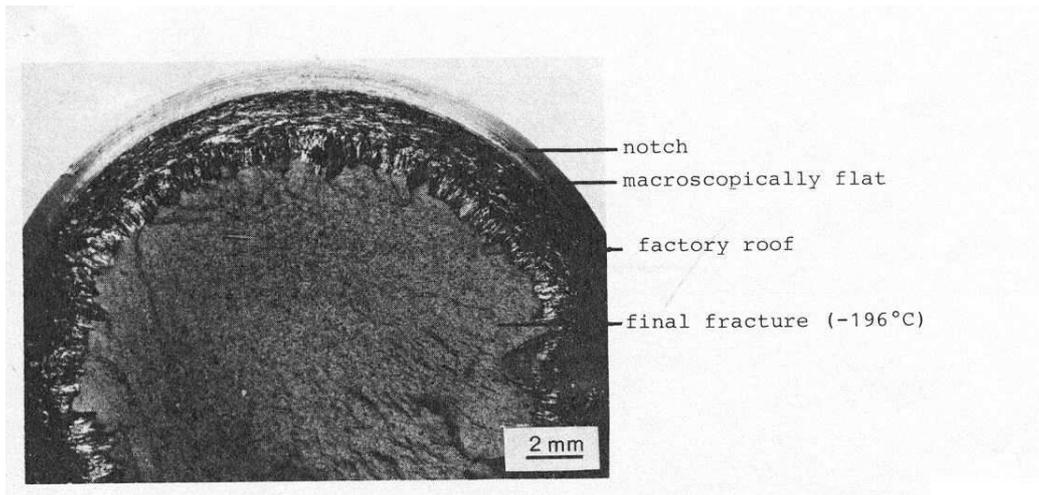


Figura 2.13: Fractografía de una superficie de fractura típica de modo III puro sometido a un valor constante de $\Delta K_{III} = 50 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$ (Tschegg [1982]).

En la figura 2.12 se representa la velocidad de crecimiento frente a ΔK_{III} para diferentes longitudes de grieta. Además se añaden los valores de crecimiento en modo I obtenidos en condiciones comparables y para el mismo material. Se puede apreciar cómo la velocidad de crecimiento en modo I es inferior a la de modo III para longitudes de grieta menores de 0.4 mm, siendo mayor para longitudes mayores.

McClintock dio una explicación al hecho de que cuanto mayor es ΔK_{III} la velocidad de crecimiento decrece menos comparado con valores menores de ΔK_{III} . Según su experiencia, cuando la carga aplicada es grande, se crean grandes zonas plásticas que generan grandes aperturas de grieta que reducen considerablemente la fricción entre las superficies.

Tschegg [1983] definió un valor de velocidad de propagación de grieta intrínseca en modo III, tratando de eliminar la influencia del rozamiento en el modo III de fractura. Para ello

determinó la variación de dc/dN en modo III como función de la longitud de la grieta para diferentes valores de fuerza nominal ΔK_{III} . Cada una de esas curvas, se extrapoló a longitud de grieta cero para obtener la velocidad de crecimiento de grieta en ausencia de cualquier interacción entre sus caras. Con esta técnica se ilustra con gran claridad cómo la velocidad de crecimiento de la grieta disminuye al aumentar la superficie de interacción entre las caras. Mostró que la velocidad de crecimiento intrínseca en modo III, obtenida de esta forma, es algo superior a la velocidad correspondiente a modo I para un rango idéntico de carga. Esto implica que la razón principal para la aparentemente superior resistencia a la fractura en modo III, comparado con modo I, es la interacción entre las caras de la grieta.

Los valores de crecimiento de grieta en los trabajos de Hurd e Irving [1982] y de Ritchie et al. [1982], se basan en los valores nominales de ΔK_{III} que, por el efecto del rozamiento, son mucho mayores que los valores efectivos. Hurd e Irving [1982] presentan valores muy altos de umbral de modo III comparados con los de modo I. Pook y Sharples [1979] llegaron a la conclusión de que el umbral en modo III es mayor que el de modo I en un factor de sólo 1.35. Ya que los resultados de Hurd e Irving se refieren a valores nominales de ΔK_{III} y los resultados de Pook y Sharples se refieren a valores efectivos, la discrepancia entre esos resultados es comprensible.

Siguiendo con Tschegg [1982], se señala que es de gran importancia saber cuál es la reducción en el par aplicado que se hace efectivo en la punta de la grieta. Para esto no hay ninguna diferencia si el crecimiento de grieta se considera función de ΔK_{III} , del desplazamiento en la punta de la grieta ΔCTD_{III} o de Γ_{III} . Sólo el valor efectivo que actúa en la punta de la grieta determina la propagación de la grieta resultante.

En Tschegg et al. [1983], se hace un ensayo en el que se mide la propagación de una grieta en un eje con entalla circunferencial y con carga en modo III. Se sometía al eje a un proceso de carga en el que se aplicaba un ΔK_{III} inicial, se reducía y se aumentaba de nuevo hasta el valor original, encontrando que no se obtenía el mismo valor de velocidad de crecimiento que al inicio de la prueba (figura 2.14). La velocidad de crecimiento iba decreciendo al aumentar la longitud de la grieta, para un valor constante de ΔK_{III} .

Además en ese estudio se señalaba que para grietas cortas (valores de $c < 0.4$ mm), los efectos del rozamiento entre las caras son mínimos y los valores de la velocidad de crecimiento de grieta en modo I y en modo III son comparables.

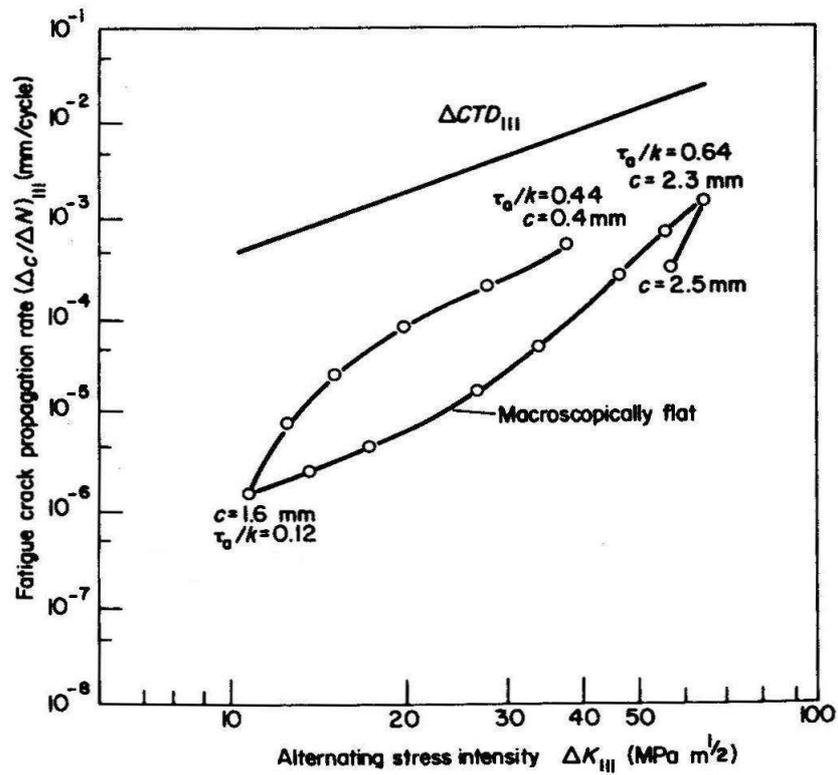


Figura 2.14: Velocidades de crecimiento de grieta en modo III $(\Delta c/\Delta N)_{III}$ frente a ΔK_{III} , con carga superpuesta $K_I = 10 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$, para acero AISI 4340, templado y revenido a 400°C , $R=-1$.

Posteriormente, Tschegg y Suresh [1988] estudiaron el efecto de la interferencia entre las superficies de fractura en modo III de una manera más sistemática. Para ello, crearon grietas circunferenciales de diferentes profundidades en barras cilíndricas con entallas. Midió para cada probeta K_{IIIc} (coeficiente de intensificación de tensiones crítico de modo III) y encontraron que K_{IIIc} aumenta con la longitud de grieta inicial. Los resultados son coherentes con el hecho de que al aumentar el tamaño de la grieta inicial, la superficie de fractura es mayor y por tanto mayor el rozamiento. Un incremento de la longitud de la grieta inicial en un factor de 6 resulta en un incremento del 50 % de K_{IIIc} . En ese mismo estudio se hace un análisis del uso del coeficiente de intensificación de tensiones K_{III} o de la intensidad de deformación plástica Γ_{III} . Representan los resultados de resistencia a la fractura frente a K_{III} y a Γ_{III} , obteniendo los mismos resultados cualitativos. Este estudio será tratado con más detalle posteriormente, puesto que al ser uno de los más significativos de los encontrados en la bibliografía, sus resultados han sido utilizados para contrastar el modelo propuesto en el presente trabajo.

Además de los resultados experimentales comentados hasta ahora, también han sido propuestos varios modelos para el estudio de los efectos de la fricción en los modos de fractura cortante.

Uno de los primeros modelos teóricos desarrollados fue el de Ballarini y Plesha [1987]. Señalaron que en los modelos de cálculo disponibles hasta entonces para obtener los coeficientes de intensificación de tensiones las grietas eran consideradas como si tuvieran las caras lisas y sin rozamiento posible. Y, si bien para modo I es una suposición bastante acertada, en cargas de modo II o modo III puede llevar a errores. Propusieron un modelo en el que las superficies de fractura se suponen globalmente lisas, y la rugosidad y la fricción se incorporan mediante una ley constitutiva entre las caras de la grieta. Esta ley contiene implícitamente el acoplamiento entre los desplazamientos tangencial y normal de un punto de la superficie de la grieta (por el fenómeno conocido como *dilatación*). Suponen las asperezas de la superficie rígidas, y aplican el modelo al cálculo de coeficientes de intensificación de tensiones en modo II a materiales diversos como acero, materiales cerámicos y hormigón.

Gross y Mendelsohn [1988] propusieron un modelo que predice la magnitud de los efectos de la fricción provocados por la rugosidad de las superficies de fractura en modo III. Señalaron que rugosidades del orden de micras o menores son suficientes para provocar

el retardo en la velocidad de crecimiento de modo III para longitudes de grieta crecientes. También describieron el mecanismo que produce el rozamiento entre las caras: las asperezas de las superficies de fractura provocan una pequeña apertura al desplazarse las caras lateralmente una con respecto a la otra. Esa pequeña apertura, da lugar a fuerzas normales en la superficie de la grieta, que generan fuerzas de rozamiento que se oponen a la tensión cortante aplicada (*dilatación*). Su modelo se basa en calcular la tensión normal que existe entre las caras de la grieta, y a partir de ese valor, utilizando un modelo de rozamiento de Coulomb, obtener el par resistente que habría actuando en sentido contrario al nominal. Así, obtienen un coeficiente de intensificación de tensiones efectivo (K_{IIIef}) como diferencia entre el nominal y el resistente. Utilizando ese K_{IIIef} , se cumple la relación $dc/dN = C(\Delta K_{III})^n$. En Gross y Mendelsohn [1989], siguiendo el trabajo de Ballarini y Plesha [1987], completaron su modelo anterior, añadiendo el cálculo del coeficiente de intensificación de tensiones de modo I (K_{Ii}) inducido por la interacción de las asperezas de las caras de la grieta. Supusieron, como lo hacían Ballarini y Plesha, que las asperezas son rígidas. Ese valor de K_{Ii} era calculado a partir de los desplazamientos de apertura en la punta de la grieta (CTOD).

Mendelsohn et al. [1995] utilizaron un perfil medido en una superficie de una grieta real para, sometiendo a desplazamientos en la dirección tangencial, calcular cuál sería el desplazamiento normal producido. A partir de ahí calcularon el coeficiente de intensificación de tensiones en modo I inducido. El coeficiente de intensificación de tensiones de modo II (puesto que este modo es el que se estudia) lo obtenían por medio de la ley de Coulomb de rozamiento.

Hsia et al. [1997] pusieron de manifiesto un fenómeno interesante observado experimentalmente en componentes sometidos a contacto rodante, como rodamientos o engranajes. Cuando no hay lubricante presente, una grieta superficial (que experimenta un modo mixto I-III de fractura) puede no crecer o crecer lentamente, pero cuando hay lubricante, la grieta crece mucho más rápidamente. Se apunta a la reducción del rozamiento entre las caras de la grieta por la presencia del lubricante como posible causa de ese fenómeno. Para estudiar ese efecto en materiales cerámicos, se desarrolla un modelo usando la mecánica de la fractura. Centran el estudio en el efecto de la fricción en caras de grieta, la influencia de la microestructura del material y el efecto del lubricante en el comportamiento de la fractura en sólidos frágiles.

En Mendelsohn et al. [1998] presentaron los resultados de una técnica para estimar la distribución de tensiones de contacto en las superficies rugosas de una grieta cuando ésta es sometida a modo de fractura cortante. Utilizaron como datos iniciales medidas de desplazamientos de deslizamiento y de apertura de punta de grieta obtenidas por medio de un método de interferometría speckle de diferencia de fase, en una probeta sometida a carga en modo cortante. Mediante un modelo numérico, obtuvieron a partir de esos desplazamientos, las tensiones de contacto correspondientes.

Yu y Abel [1999], desarrollaron un modelo para representar el efecto de la interferencia entre las superficies de fractura para cuerpos sometidos a cargas cortantes cíclicas. Además de las interacciones entre las asperezas, tuvieron en cuenta los efectos de las tensiones residuales considerando como tales las tensiones de compresión que existen entre las caras de la grieta cuando no hay carga exterior aplicada ni hay desplazamientos tangenciales. Esas tensiones residuales son debidas a la presencia de zonas plásticas o de partículas de desgaste en la interfaz.

Capítulo 3

Descripción del modelo cohesivo de fractura

En este capítulo se describe el modelo de fractura utilizado en el presente trabajo. Es un modelo cohesivo basado en la ley de Smith-Rose-Ferrante, ampliamente probado y utilizado en los últimos años, como se indica en las referencias bibliográficas que se acompañan. Dado que no se ha añadido nada nuevo a la formulación de este elemento, se hace un resumen de las ecuaciones en las que se basa, de sus propiedades y de su implementación en un código de elementos finitos. Para una descripción más detallada del elemento cohesivo utilizado se recomienda la lectura de los trabajos de de Andrés [1997], de Andrés et al. [1999b], López [2002] y especialmente de Fernández [2003], donde se describe ampliamente la formulación matemática, generalizándola mediante el uso de formas diferenciales y se propone un modelo de elemento cohesivo con histéresis.

3.1. Introducción

Los modelos cohesivos de fractura surgieron a partir de los estudios de Dugdale [1960], Barenblatt [1962] y Rice [1968a], que consideraron la fractura como un fenómeno gradual. Así, la separación que supone la formación de la grieta tiene lugar en una zona a partir de la punta de ésta, o zona cohesiva, y esa separación es resistida por fuerzas cohesivas o de cierre. De esta manera, la fractura se plantea como una pérdida progresiva de

cohesión en el material que culmina con la separación total y la formación de la nueva superficie de fractura. En la figura 3.1.a se representan las bases de un modelo cohesivo. En ella, t representa la fuerza cohesiva y δ representa la separación o apertura de las caras de la grieta. La zona de la grieta donde en la figura 3.1 están representadas las fuerzas de cierre t es la que se denomina zona cohesiva. Se sabe que en los procesos de fractura dúctil, la formación y avance de la grieta se produce mediante la creación de microhuecos que van creciendo y uniéndose unos a otros. De esta manera, el material va perdiendo resistencia progresivamente hasta que, finalmente, se produce la grieta macroscópica (figura 3.1.b). Como se puede apreciar, existe bastante analogía entre este proceso de fractura dúctil y la forma en la que los modelos cohesivos consideran el fenómeno de la fractura.

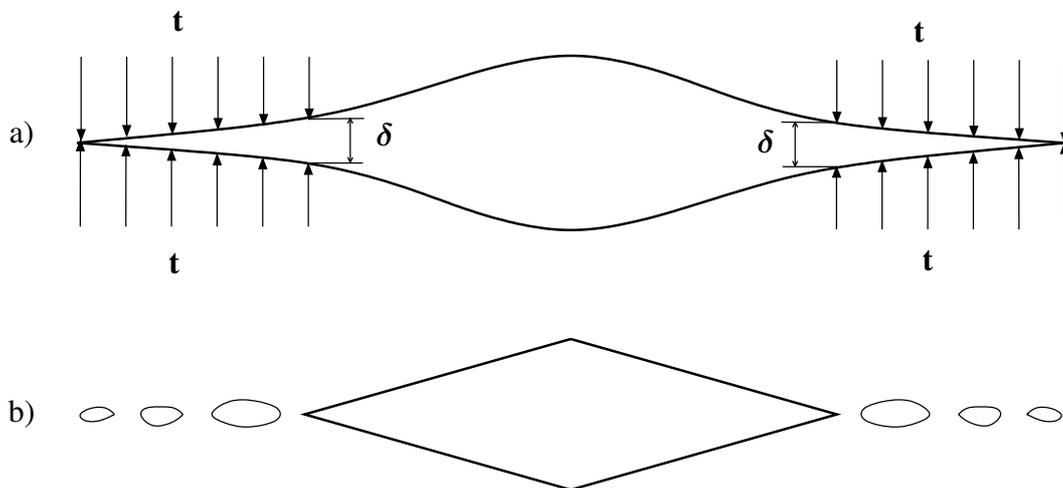


Figura 3.1: a) Descripción de un modelo cohesivo de fractura. b) Proceso de fractura dúctil.

Una ley cohesiva es, por tanto, una ley que relaciona la apertura en cualquier punto de la zona cohesiva con la fuerza que ésta soporta y que se opone a la separación. Siguiendo la línea empezada por los ya citados Dugdale, Barenblatt y Rice en la década de los 60, Rose et al. [1981], Needleman [1987], Ortiz [1988], Rice [1992] y Ortiz y Suresh [1993] han propuesto diferentes leyes cohesivas. Esas leyes son reversibles e independientes de la historia de cargas, lo que supone que las fuerzas cohesivas siguen en todo momento la curva fuerza-apertura, independientemente de que el proceso sea de carga o de descarga. Ese comportamiento no es real, ya que la mayoría de los procesos de decohesión

macroscópicos implican cierto grado de irreversibilidad. Needleman et al. [1992] y Camacho y Ortiz [1996] han propuesto leyes cohesivas que sí son irreversibles, suponiendo una descarga al origen. Esta irreversibilidad en el proceso de descarga es la que lleva a la acumulación de daño. En la figura 3.2, se muestran las diferencias entre una ley cohesiva reversible e irreversible.

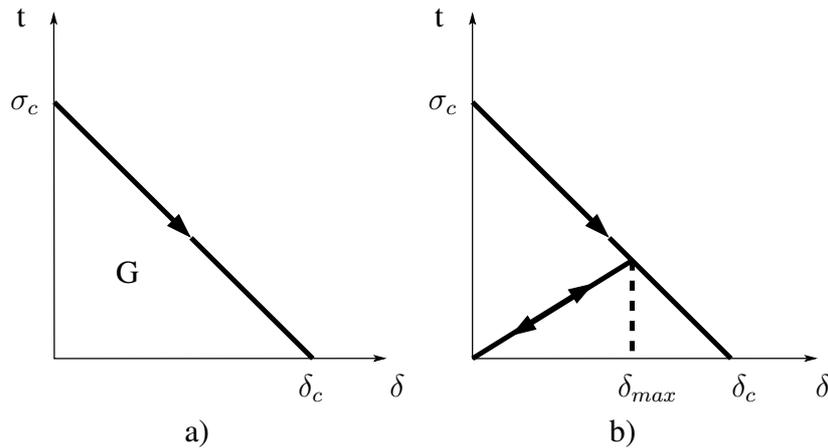


Figura 3.2: Leyes cohesivas. a) Ley cohesiva reversible. b) Ley cohesiva irreversible.

En la primera ley (3.2.a), la carga y la descarga siguen el mismo camino. Se puede observar que para apertura cero (material totalmente cohesionado, virgen), la fuerza que se opone a la decohesión (fuerza cohesiva) es máxima. A medida que la apertura va aumentando, esa fuerza va disminuyendo, hasta que aquélla llega a su valor máximo, momento en el que las superficies de fractura se consideran totalmente abiertas, y la fuerza cohesiva desaparece. El área bajo la curva que representa la ley cohesiva, es la energía de fractura.

En la segunda ley (3.2.b), la ley irreversible, el camino seguido cuando la carga aplicada es positiva es el mismo que para la ley reversible. La descarga, sin embargo, sigue una línea al origen.

Una ley cohesiva se puede definir utilizando, como mínimo, tres parámetros, y se cumple que dos cualesquiera de ellos son suficientes para caracterizar el proceso de fractura, pudiendo el tercero calcularse como función de los otros dos a partir de la ley cohesiva. Estos parámetros son la *fuerza cohesiva máxima* σ_c , la *apertura característica* δ_c y la *energía de fractura* G_c , energía necesaria para abrir la grieta, que coincide con el área

bajo la curva fuerza-desplazamiento.

La ley cohesiva utilizada en este trabajo es una ley basada en la de Smith-Rose-Ferrante (Rose et al. [1981]), que será tratada más adelante.

Hay dos formas diferentes de implementación de las leyes cohesivas en el método de los elementos finitos: mediante condiciones de contorno mixtas como han hecho Hillerborg et al. [1976], Needleman [1987], Xu y Needleman [1993], Planas et al. [1994] o Tvergaard y Hutchinson [1993], o bien introduciendo las leyes directamente como leyes constitutivas en elementos finitos cohesivos, como han hecho William [1989], Ortiz y Suresh [1993], Xu et al. [1994] o de Andrés et al. [1999b]. La gran ventaja que tiene esta segunda implementación es que esos elementos cohesivos son compatibles con discretizaciones de elementos finitos sólidos, incluyendo aquellas que tienen en cuenta plasticidad y grandes deformaciones. Los elementos cohesivos rigen la separación de las caras de la superficie de acuerdo con la ley cohesiva, lo que permite modelar el proceso de formación y crecimiento de la grieta, mientras que los elementos sólidos son responsables del comportamiento del resto del material. Otra ventaja que tiene este método es que no se presupone ni la velocidad de crecimiento de grieta, ni el tamaño ni la forma de la zona plástica, sino que por el contrario, éstos son resultados directos de los cálculos.

Entre las aplicaciones en las que se han utilizado modelos cohesivos en la bibliografía, aparecen el estudio de la decohesión de superficies (Needleman [1990], Needleman et al. [1992], Tvergaard y Hutchinson [1993]), crecimiento de grietas (Tvergaard y Hutchinson [1996], Xu y Needleman [1996], Zhang y Gross [1994], Hohe et al. [1996], Ortiz y Pandolfi [1999]), soluciones de problemas no locales (Planas et al. [1994]), estudios de impacto (Camacho y Ortiz [1996]) y crecimiento de grietas por fatiga (de Andrés [1997], de Andrés et al. [1999b], Nguyen et al. [2001], Fernández [2003]).

3.2. Descripción de la ley cohesiva utilizada

Según los modelos cohesivos de fractura, como ya se ha comentado en la sección anterior, la creación de una nueva superficie de fractura es el resultado final de un proceso de pérdida gradual de resistencia en el material. La ley cohesiva determina el trabajo de separación, o energía de fractura, requerido para la completa formación de las nuevas

superficies. A continuación, se presentan las ecuaciones constitutivas para cuerpos con superficies cohesivas.

3.2.1. Ecuaciones generales para cuerpos con superficies cohesivas

En la figura 3.3 se muestra un cuerpo que inicialmente ocupa una configuración $B_0 \subset \mathbb{R}^3$. Debido al sistema de cargas aplicadas, el cuerpo describe un movimiento caracterizado por la aplicación deformación $\varphi : B_0 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3$, donde $[0, T]$ es el intervalo de tiempo de interés. Se supone que el cuerpo contiene una superficie cohesiva denominada S_c , que es la superficie a través de la cual la grieta podría propagarse. Si se orienta S_c según el vector normal unitario \mathbf{N} , la superficie cohesiva dividirá al cuerpo en dos subcuerpos B_0^\pm , en los lados positivo y negativo de S_c .

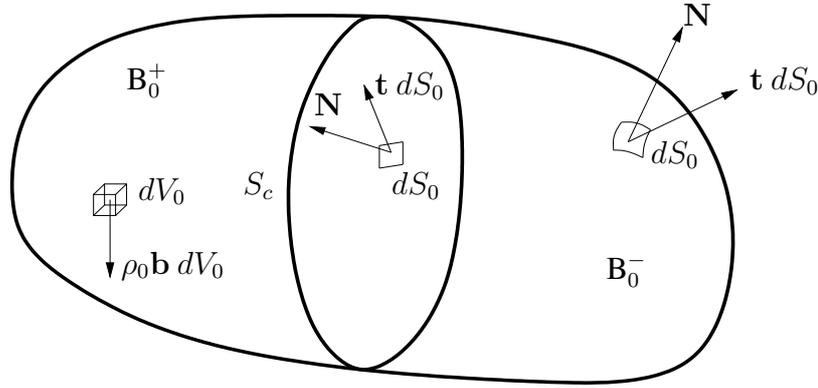


Figura 3.3: Descripción de la configuración inicial

Si se supone que el cuerpo está sometido a unas fuerzas volumétricas $\rho_0 \mathbf{b}$ y a unas fuerzas \mathbf{t} en el contorno, llamando \mathbf{P} al primer tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff, el equilibrio de momentos se puede escribir como:

$$\int_{\partial B_0^\pm} \mathbf{P} \cdot \mathbf{N} dS_0 + \int_{B_0^\pm} \rho_0 \mathbf{b} dV_0 = \int_{B_0^\pm} \rho_0 \ddot{\varphi} dV_0$$

de donde, aplicando el teorema de la divergencia, se obtiene:

$$\nabla_0 \cdot \mathbf{P} = \rho_0 (\ddot{\varphi} - \mathbf{b}), \text{ en } B_0^\pm \quad (3.1)$$

donde $\nabla_0 \cdot$ representa la divergencia en B_0 .

Por la propia definición del tensor de Piola-Kirchhoff:

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{N} = \mathbf{t}, \text{ en } \partial B_0^\pm \quad (3.2)$$

$$[[\mathbf{P} \cdot \mathbf{N}]] = [[\mathbf{t}]], \text{ en } S_0^\pm \quad (3.3)$$

$[[\cdot]]$ es un operador definido entre las caras de la superficie cohesiva. Se denomina operador de salto, y aplicado a una función f , ésta resulta: $[[f]] = f^+ - f^-$.

Por otro lado, la energía por unidad de tiempo (potencia) que el sistema de cargas comunica al cuerpo es:

$$\dot{W} = \sum_{\pm} \int_{B_0^\pm} \rho_0 \mathbf{b} \cdot \dot{\varphi} dV_0 + \sum_{\pm} \int_{\partial B_0^\pm} \mathbf{t} \cdot \dot{\varphi} dS_0$$

donde la suma está extendida a los dos subcuerpos B_0^\pm delimitados por la superficie cohesiva y los subíndices 0 se refieren a la configuración inicial. La energía cinética acumulada en el cuerpo es:

$$K = \sum_{\pm} \int_{B_0^\pm} \frac{1}{2} \rho_0 |\dot{\varphi}|^2 dV_0$$

La potencia de deformación, o sea, la parte de la potencia aportada al cuerpo y que no se emplea en aumentar su energía cinética es, por tanto:

$$P^D = \dot{W} - \dot{K} = \sum_{\pm} \int_{\partial B_0^\pm} \rho_0 (\mathbf{b} - \ddot{\varphi}) \cdot \dot{\varphi} dV_0 + \sum_{\pm} \int_{\partial B_0^\pm} \mathbf{t} \cdot \dot{\varphi} dS_0 \quad (3.4)$$

Introduciendo (3.1) en (3.4), aplicando el teorema de la divergencia y utilizando (3.2) y (3.3), se obtiene:

$$P^D = \sum_{\pm} \int_{B_0^\pm} \mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{F}} dV_0 + \int_{S_0} \mathbf{t} \cdot [[\dot{\varphi}]] dS_0$$

donde \mathbf{F} es el gradiente de la deformación.

Esta expresión es la generalización del concepto convencional de potencia de deformación a cuerpos que contienen superficies cohesivas. El primer término es el que se encuentra habitualmente en sólidos convencionales, y representa el trabajo del primer tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff \mathbf{P} sobre el gradiente de deformación \mathbf{F} en el sólido. El segundo término aparece como consecuencia de la presencia de una superficie cohesiva en el sólido y representa el trabajo de las fuerzas cohesivas \mathbf{t} sobre los desplazamientos. Se define

$$\delta = \llbracket \varphi \rrbracket$$

que representa la apertura de la superficie cohesiva (figura 3.4).

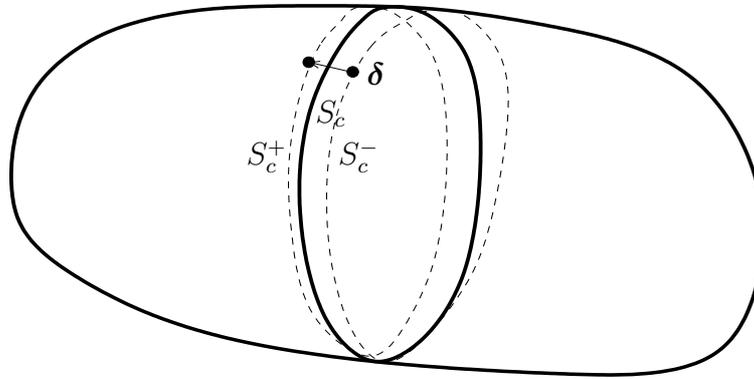


Figura 3.4: Definición de la apertura, δ .

En este desarrollo teórico, la apertura δ juega el papel de la deformación en las formulaciones tradicionales, mientras que las fuerzas cohesivas \mathbf{t} hacen el papel de las tensiones conjugadas. Cuando el cuerpo sufre un movimiento de sólido rígido, δ es cero, al representar un desplazamiento relativo entre las dos caras de la superficie cohesiva; es un requisito requerido para que sea una medida de deformación adecuada.

3.2.2. Formulación de la ley cohesiva

Con el propósito de formular la ley cohesiva la atención se centrará ahora en un punto en la superficie cohesiva S_c . Se supondrá que, en general, el comportamiento de la ley cohesiva será diferente en la dirección normal que en la tangencial. Por tanto, para poder

diferenciar entre esas direcciones, se define una base local ortonormal $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ tal que \mathbf{e}_3 coincide con la normal \mathbf{N} a la superficie S_c y $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ definen el plano tangente (figura 3.5). Si se proyecta la apertura δ en las direcciones que definen los vectores de esa base local, se obtendrán δ_3 (apertura en la dirección normal), δ_1 y δ_2 (aperturas en el plano tangente). De igual forma, t_3 es la fuerza cohesiva normal, y t_1 y t_2 son las fuerzas cohesivas en el plano tangente (cortantes).

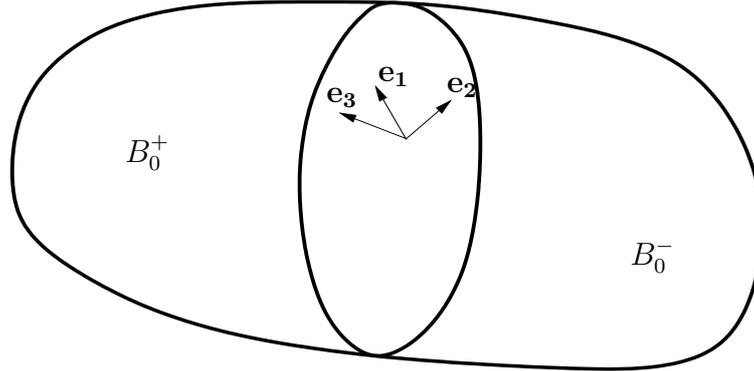


Figura 3.5: Sistema de referencia en la superficie cohesiva.

Se hace la hipótesis de que existe una densidad de energía libre ϕ en la superficie cohesiva por unidad de área de la configuración inicial (sin deformar) de la forma general:

$$\phi = \phi(\delta, \theta, \mathbf{q})$$

donde θ es la temperatura local y \mathbf{q} es un conjunto de variables internas adecuadas que describen el proceso de la decohesión. A partir de aquí, se supondrán procesos isotérmicos y por tanto se suprime la dependencia de la temperatura θ . Siguiendo el método de Coleman y Noll, utilizando el segundo principio de la termodinámica, se demuestra que la ley cohesiva toma la forma:

$$\mathbf{t} = \frac{\partial \phi}{\partial \delta} \quad (3.5)$$

Una de las ventajas de esa estructura potencial es que la ley cohesiva se reduce de las tres funciones independientes $\mathbf{t}(\delta, \mathbf{q})$ a la función escalar $\phi(\delta, \mathbf{q})$. Como se señala en

Fernández [2003], esa relación es válida si se trabaja en un espacio euclídeo y con un sistema de coordenadas cartesiano, que es el caso que aquí se estudia. En ese trabajo, además, se generaliza el cálculo de la fuerza cohesiva \mathbf{t} , a otros sistemas de coordenadas y a otras métricas.

La evolución de las variables internas \mathbf{q} se regirá por un conjunto de relaciones cinemáticas de la forma general:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\delta}, \mathbf{q})$$

Para simplificar la formulación de la ley cuando aparecen modos mixtos de fractura se introduce el término *apertura efectiva*, δ_{eff} , tal y como propusieron Camacho y Ortiz [1996]. Esta apertura efectiva se define como:

$$\delta_{eff} = \sqrt{\beta^2 (\delta_1^2 + \delta_2^2) + \delta_3^2} = \sqrt{\boldsymbol{\delta}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\delta}} \quad (3.6)$$

donde

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \beta^2 & 0 & 0 \\ 0 & \beta^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El parámetro β permite asignar diferentes pesos a los desplazamientos de apertura en el plano normal y en el plano tangencial.

Se puede obtener un modelo cohesivo simple suponiendo que la energía potencial ϕ depende de $\boldsymbol{\delta}$ únicamente a través de la apertura efectiva δ_{eff} :

$$\phi = \phi(\delta_{eff}, \mathbf{q})$$

Así, la ley cohesiva (3.5) se reduce a

$$\mathbf{t} = \frac{\partial \phi(\boldsymbol{\delta}, \mathbf{q})}{\partial \delta_{eff}} \frac{\partial \delta_{eff}}{\partial \boldsymbol{\delta}} = \frac{t_{eff}}{\delta_{eff}} \mathbf{C} \boldsymbol{\delta}$$

donde

$$t_{eff} = \frac{\partial \phi(\boldsymbol{\delta}, \mathbf{q})}{\partial \delta_{eff}}$$

es una fuerza efectiva (escalar). Por semejanza con la definición de apertura efectiva, se puede definir la fuerza cohesiva efectiva como:

$$t_{eff} = \sqrt{\mathbf{t}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{t}} = \sqrt{\beta^{-2}(t_1^2 + t_2^2) + t_3^2} \quad (3.7)$$

En esa relación se observa que β define la relación entre la fuerza cortante y la fuerza normal críticas.

Cuando la grieta está cerrada, las superficies cohesivas están en contacto, y se produce entre ellas un fenómeno de contacto y fricción. En este trabajo, se va a considerar que el contacto y la fricción son fenómenos independientes del proceso de fractura, y, por lo tanto se formularán fuera de la ley cohesiva.

3.2.3. Ley de Smith-Rose-Ferrante

Como ya se ha indicado anteriormente, el elemento cohesivo utilizado en este trabajo se basa en la ley de Smith-Rose-Ferrante, que se representa en la figura 3.6.

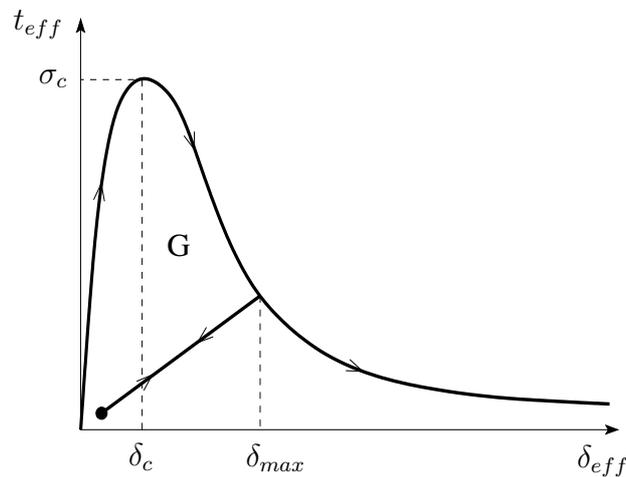


Figura 3.6: Ley de Smith-Rose-Ferrante

La irreversibilidad de la ley se manifiesta en la descarga y es en ésta cuando se acumula daño, lo que lleva a la formación de la superficie de fractura. Se elige como variable interna para describir el proceso irreversible de decohesión el valor máximo que ha alcanzado la apertura hasta un determinado momento, δ_{max} .

El proceso de carga está caracterizado por las condiciones: $\delta_{eff} = \delta_{max}$ y $\dot{\delta}_{eff} \geq 0$. Y se considerará que la superficie cohesiva sufre un proceso de descarga cuando no sufre carga ($\delta_{eff} < \delta_{max}$, $\dot{\delta}_{eff} < 0$). La ley universal de Smith-Rose-Ferrante se muestra en la figura 3.6 y se formula como:

$$t_{eff} = e\sigma_c \frac{\delta_{eff}}{\delta_c} e^{-\delta_{eff}/\delta_c}, \text{ si } \delta_{eff} = \delta_{max} \text{ y } \dot{\delta}_{eff} \geq 0$$

donde σ_c es la fuerza cohesiva máxima y δ_c es una apertura característica. El potencial asociado a esa fuerza es, teniendo en cuenta la ec. (3.5):

$$\phi = e\sigma_c \delta_c \left[1 - \left(1 + \frac{\delta_{eff}}{\delta_c} \right) e^{-\delta_{eff}/\delta_c} \right]$$

Al suponer una descarga al origen, la ecuación que sigue el proceso de descarga es:

$$t_{eff} = \frac{t_{max}}{\delta_{max}} \delta_{eff}, \text{ si } \delta_{eff} < \delta_{max} \text{ y } \dot{\delta}_{eff} < 0$$

Las relaciones cinemáticas son:

$$\dot{\delta}_{max} = \begin{cases} \dot{\delta}_{eff}, & \text{si } \delta_{eff} = \delta_{max} \text{ y } \dot{\delta}_{eff} \geq 0 \quad (\text{carga}) \\ 0, & \text{en caso contrario} \quad (\text{descarga}) \end{cases} \quad (3.8)$$

Para ilustrar las leyes de carga y de descarga en la ley cohesiva en la figura 3.7 se muestra un proceso en el que el sólido se carga hasta δ_{max} . Seguidamente se descarga al origen y se inicia de nuevo la carga rebasando el valor de δ_{max} anterior.

Para materiales elásticos, se puede establecer una relación entre G_c (energía liberada en la fractura) y la ley cohesiva, utilizando el concepto de integral J . Por simplicidad, se supone que las superficies cohesivas son planas, que e_1 apunta en la dirección de propagación de la grieta y que e_3 coincide con la normal unitaria \mathbf{N} (ver figuras 3.3 y 3.5). Si se elige para la evaluación de la integral J un contorno Γ que rodee la zona cohesiva se obtiene:

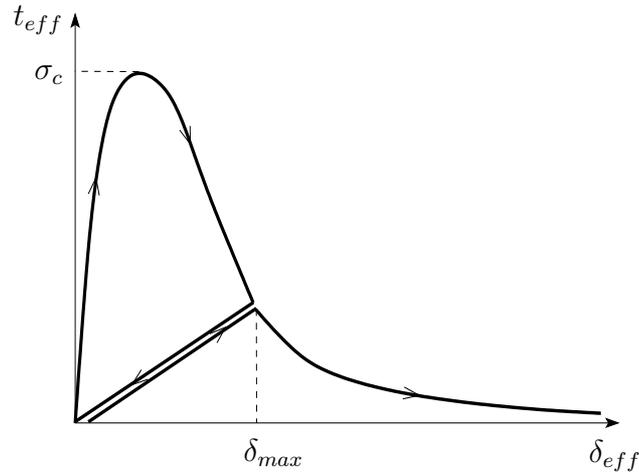


Figura 3.7: Procesos de carga y descarga en la ley cohesiva.

$$G_c = \int_0^R \mathbf{t} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\delta}}{\partial x_1} dx_1 = \int_0^R t_{eff} \frac{\partial \delta_{eff}}{\partial x_1} dx_1 \quad (3.9)$$

donde R es la longitud de la zona cohesiva y se ha hecho uso de (3.6) y de (3.7). Un cambio de variable permite escribir (3.9) como

$$G_c = \int_0^\infty t_{eff} d\delta_{eff} = \phi_\infty$$

donde ϕ_∞ es la energía libre para $R = \infty$. Introduciendo en esa ecuación la ley cohesiva de Smith-Rose-Ferrante, se obtiene:

$$G_c = e\sigma_c\delta_c$$

que relaciona σ_c y δ_c con la energía de fractura G_c . En concreto, G_c es el área bajo la curva de Smith-Rose-Ferrante. Para tener una medida de la extensión de la decohesión, se introduce un parámetro de daño:

$$D = \frac{\phi(\delta_{max})}{G_c}$$

Se observa que el rango de D está entre 0 y 1. El caso de $D = 0$ se corresponde con la

situación de sólido sin grieta (material virgen) y cuando $D = 1$, la grieta está totalmente abierta en el punto considerado. Además, de (3.8) se sigue que:

$$\dot{D} \geq 0$$

como cabía esperar por el carácter irreversible de la variable daño.

3.3. Crecimiento de grietas por fatiga

A continuación se muestra un ejemplo que permite observar cómo se calcula el crecimiento de grietas por fatiga utilizando la ley cohesiva.

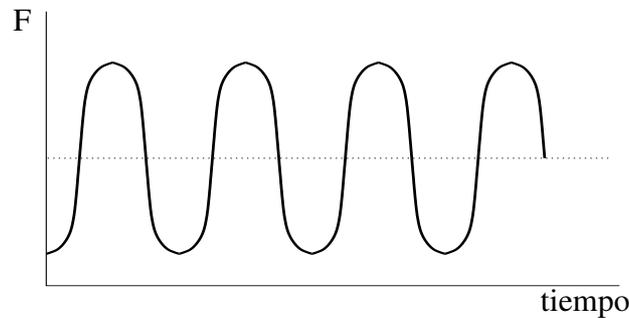


Figura 3.8: Proceso cíclico de carga.

Si se tiene un proceso de carga cíclica como el que se muestra en la figura 3.8, y se considera un punto de la zona cohesiva en la punta de la grieta, la parte creciente de la curva de carga (1-2) (figura 3.9) originará una apertura de la superficie cohesiva δ_{max1} (3.9a). En el proceso de descarga (2-3), se producirá una descarga al origen según se muestra en (3.9b). En la siguiente carga (3-4), se alcanza de nuevo la zona de carga de la ley cohesiva, se supera la apertura provocada por el ciclo anterior, llegando a $\delta_{max2} > \delta_{max1}$ y se acumula más daño (3.9c). Después de un número suficiente de ciclos, la superficie cohesiva pierde su integridad completamente y se forma una nueva superficie, con el consiguiente crecimiento de la grieta.

Con la formulación tradicional del elemento cohesivo se observó que, transcurrido un número determinado de ciclos de fatiga, la acumulación de daño se paralizaba y la grieta

no progresaba. Este problema fue solucionado por Fernández [2003], que desarrolló una nueva formulación del elemento cohesivo que incorpora un proceso de carga-descarga con ciclo de histéresis.

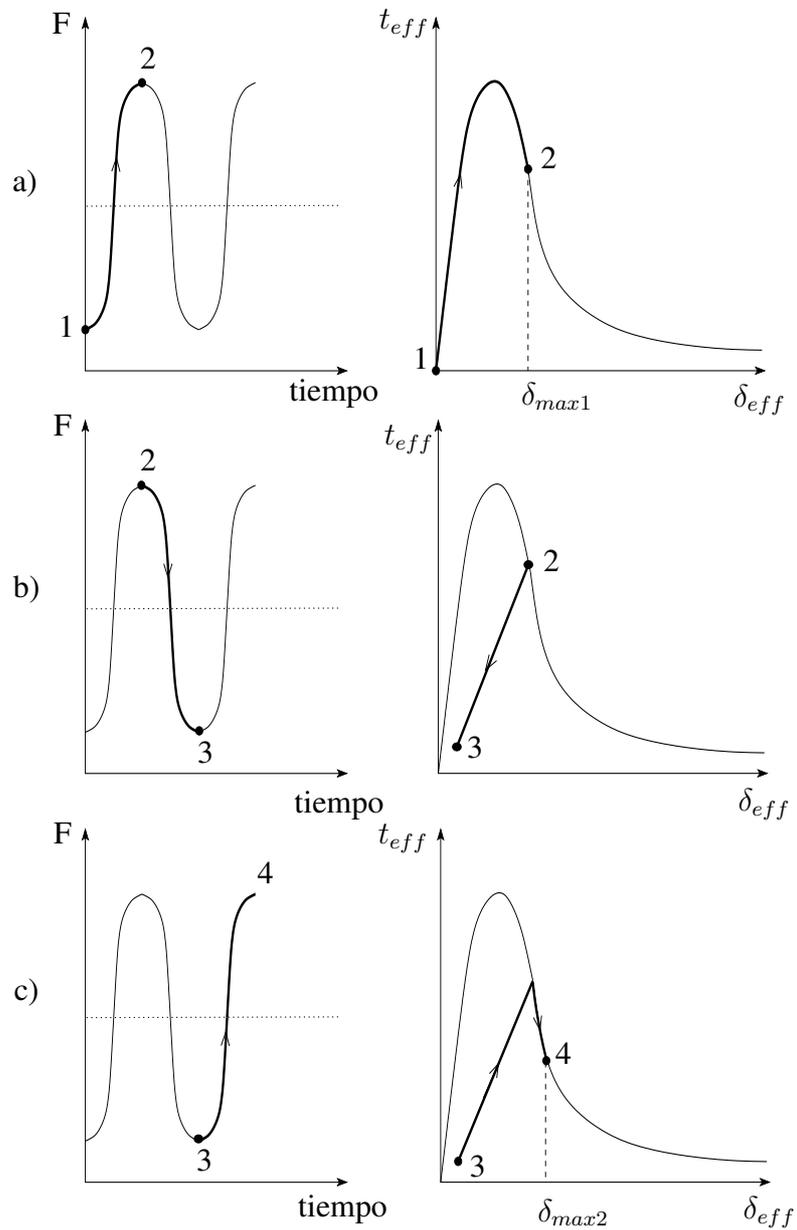


Figura 3.9: Proceso de formación de la grieta.

3.4. Implementación de la ley cohesiva en el método de los elementos finitos

Una de las ventajas que ofrecen las leyes cohesivas es que se pueden adaptar fácilmente al método de los elementos finitos. Como ya se señalaba en la introducción, las leyes cohesivas se pueden implementar de dos formas en ese método: mediante condiciones de contorno o como elementos en sí. En este trabajo se ha seguido la segunda opción y directamente se ha utilizado la ley cohesiva como ley constitutiva en un elemento finito, dando lugar a lo que comúnmente se ha llamado *elemento cohesivo*.

La geometría del elemento que se ha utilizado puede verse en la figura 3.10. Es un elemento de 8 nodos, de espesor cero, en el que pueden considerarse dos caras, que representan, una vez que la grieta se ha formado, las superficies de ésta.

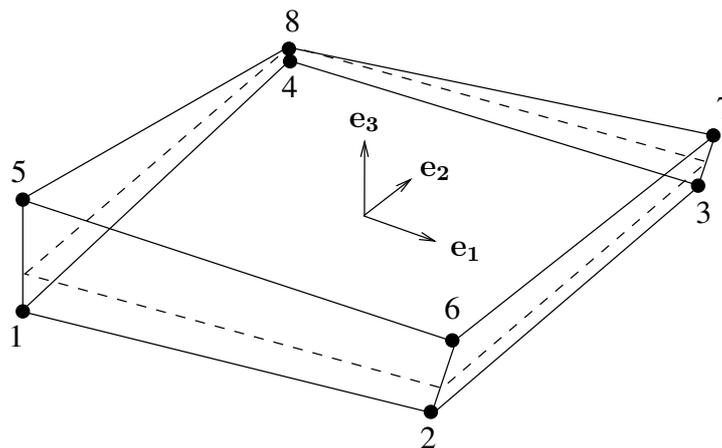


Figura 3.10: Geometría del elemento cohesivo de 8 nodos.

A partir de las aperturas experimentadas por cada pareja de nodos, se calcula por interpolación bilineal el valor de la apertura de cualquier punto dentro del elemento. Este elemento es totalmente compatible con elementos sólidos de 8 nodos, por lo que se puede hacer cualquier cálculo de fractura o de fatiga en un sólido, sin más que añadir una superficie de elementos cohesivos intercalados entre elementos sólidos en el plano en el que la grieta se va a desarrollar, de la manera que se muestra en la figura 3.11. Los elementos sólidos que se utilicen pueden contener cualquier ley constitutiva, por lo que pueden

realizarse con gran facilidad análisis elastoplásticos, simplemente utilizando elementos sólidos elastoplásticos. Se pueden encontrar ejemplos de validación que muestran la precisión y convergencia de estos elementos en de Andrés [1997], de Andrés et al. [1999b] y Fernández [2003].

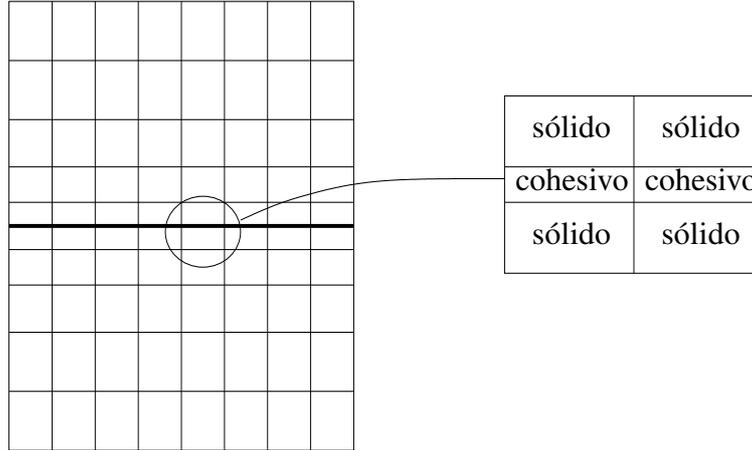


Figura 3.11: Disposición de elementos sólidos y cohesivos en el mallado.

Si se considera el caso cuasiestático, y se sigue la formulación del método de los elementos finitos en desplazamientos, utilizando el principio de los trabajos virtuales para formular la forma débil del equilibrio, se obtiene:

$$\sum_{\pm} \int_{B_0^{\pm}} [\mathbf{P} \cdot \nabla_0 \boldsymbol{\eta} - \rho_0 \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\eta}] dV_0 + \int_{S_0} \mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\eta} dS_0 - \sum_{\pm} \int_{\partial B_{0,\sigma}^{\pm}} \bar{\mathbf{t}} \cdot \boldsymbol{\eta} dS_0 = 0 \quad (3.10)$$

donde $\boldsymbol{\eta}$ es un desplazamiento arbitrario que satisface las condiciones de contorno homogéneas en el contorno de desplazamientos $\partial B_{0,d}^{\pm}$ y $\bar{\mathbf{t}}$ son las fuerzas aplicadas sobre el contorno $\partial B_{0,\sigma}^{\pm}$.

Por simplicidad, el resto de la formulación se restringirá a la cinemática lineal. En concreto, no se considerará la rotación de la normal a la superficie cohesiva. Esta aproximación es suficiente en la mayoría de las aplicaciones de crecimiento de grietas por fatiga, donde las amplitudes de los ciclos de deformación son pequeñas.

La numeración local de los nodos del elemento se muestra en la figura 3.10, tomando los

nodos del lado negativo S_c^- los valores 1-4 y los del lado positivo S_c^+ los valores 5-8. Como ya se ha señalado, las aperturas en un elemento cohesivo e se interpolan a partir de los desplazamientos nodales \mathbf{u}_a^e de la forma:

$$\delta^e = \sum_{a=1}^8 \mathbf{u}_a^e N_a^e \quad (3.11)$$

donde N_a^e , $a = 1, \dots, 8$ son las funciones de forma bilineales, que cumplen:

$$N_a = -N_{a+4}, \quad a = 1, \dots, 4$$

Si se sustituye la interpolación (3.11) en (3.10), se llega a la ecuación habitual de equilibrio, más un término que es un vector de fuerzas internas, que aparece en la formulación debido a la presencia de la superficie cohesiva. Este vector adicional es:

$$f_{ia} = \sum_e \int_{\Sigma_0^e} t_i N_a^e dS_0 \quad (3.12)$$

donde Σ_0^e es el dominio del elemento cohesivo e y la suma sobre e se extiende a todos los elementos cohesivos. Igualmente, la superficie cohesiva contribuye con un término adicional a la matriz de rigidez tangente, que se obtiene a partir de una linealización consistente de (3.12). Este término es:

$$K_{iakb} = \frac{\partial f_{ia}}{\partial u_{kb}} = \sum_e \int_{\Sigma_0^e} S_{ik} N_a^e N_b^e dS_0$$

donde

$$\mathbf{S} = \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \mathbf{u}}$$

En el siguiente apartado se detallan los valores del vector de fuerzas y de la matriz tangente.

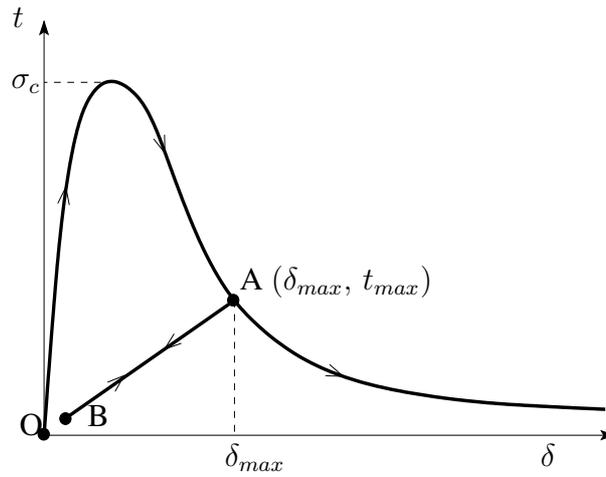


Figura 3.12: Proceso de carga-descarga.

3.4.1. Proceso de carga (OA en la figura 3.12)

En el plano $t_{eff} - \delta_{eff}$ (plano efectivo), la fuerza cohesiva en el proceso de carga se obtiene según la ley de Rose-Smith-Ferrante:

$$t_{eff} = A \delta_{eff} e^{-\frac{\delta_{eff}}{\delta_c}}$$

Teniendo en cuenta las definiciones de los valores efectivos (3.6, 3.7) y que:

$$\phi' = \frac{\partial \phi}{\partial \delta_{eff}} = t_{eff}$$

$$\phi'' = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \delta_{eff}^2} = \frac{\partial t_{eff}}{\partial \delta_{eff}}$$

se obtienen las componentes del vector de fuerzas, al proceder de un potencial:

$$t_i = \frac{\partial \phi}{\partial \delta_i}$$

Vector de fuerzas:

$$t_i = \frac{\partial \phi}{\partial \delta_i} = \frac{\partial \phi}{\partial \delta_{eff}} \frac{\partial \delta_{eff}}{\partial \delta_i} = \frac{t_{eff}}{\delta_{eff}} C_{ij} \delta_j$$

y en notación intrínseca:

$$\mathbf{t} = \nabla_{\delta} \phi = \frac{t_{eff}}{\delta_{eff}} \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\delta}$$

Matriz de rigidez:

La matriz de rigidez representa la variación del vector de fuerzas con respecto al vector apertura:

$$K_{ij} = \frac{\partial t_i}{\partial \delta_j} = \frac{\phi'}{\delta_{eff}} C_{ij} + \left(\phi'' - \frac{\phi'}{\delta_{eff}} \right) \frac{1}{\delta_{eff}^2} C_{ik} \delta_k C_{jl} \delta_l$$

y en notación intrínseca:

$$\mathbf{K} = \nabla_{\delta} \mathbf{t} = \frac{t_{eff}}{\delta_{eff}} \mathbf{C} + \left(\phi'' - \frac{\phi'}{\delta_{eff}} \right) \frac{1}{\delta_{eff}^2} \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\delta} \otimes \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\delta}$$

3.4.2. Proceso de descarga (AB en la figura 3.12)

En el plano $t_{eff} - \delta_{eff}$ (plano efectivo), al considerar la descarga al origen:

$$t_{eff} = \frac{\phi'_{max}}{\delta_{max}} \delta_{eff}$$

Vector de fuerzas:

$$t_i = \frac{\partial \phi}{\partial \delta_i} = \frac{\partial \phi}{\partial \delta_{eff}} \frac{\partial \delta_{eff}}{\partial \delta_i} = \frac{t_{max}}{\delta_{max}} C_{ij} \delta_j$$

y en notación intrínseca:

$$\mathbf{t} = \nabla_{\delta} \phi = \frac{t_{max}}{\delta_{max}} \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\delta}$$

Matriz de rigidez:

$$K_{ij} = \frac{\partial t_i}{\partial \delta_j} = \frac{\phi'_{max}}{\delta_{max}} C_{ij}$$

y en notación intrínseca:

$$\mathbf{K} = \nabla_{\delta} \mathbf{t} = \frac{\phi'_{max}}{\delta_{max}} \mathbf{C}$$

Capítulo 4

Modelos de contacto y fricción

Para representar los fenómenos que tienen lugar entre las caras de una grieta, se ha acudido a los estudios realizados sobre mecánica del contacto, con el objeto de utilizar un modelo de contacto y fricción que recoja con bastante precisión la física del problema y aplicarlo a las dos superficies que genera la grieta al propagarse. En este capítulo se hace una revisión de los posibles tratamientos que se pueden aplicar a un problema de mecánica de contacto. En primer lugar se señalan los tipos de formulación posibles para un problema de contacto según la precisión requerida. A continuación se hace un resumen de los modelos existentes en la bibliografía para estudiar el contacto normal entre dos superficies, considerando la microgeometría de las superficies en contacto. Y por último, se recogen las principales teorías existentes para el cálculo del rozamiento entre dos superficies.

4.1. Tratamiento de los problemas de contacto

Los problemas de mecánica de contacto son de gran importancia en muchas aplicaciones industriales. El rango de aplicación incluye procesos de conformado, problemas de rodamientos, análisis de choques de vehículos, estudios de neumáticos en transportes, el contacto rueda-carril en la industria del ferrocarril o la refrigeración de dispositivos electrónicos. En algunos casos, esos problemas se combinan con grandes deformaciones elásticas o inelásticas que incluyen respuestas dependientes del tiempo e incluso en las

aplicaciones de refrigeración es necesario un acoplamiento termomecánico. Sin embargo, muy pocos problemas de contacto pueden ser solucionados analíticamente, especialmente cuando la geometría es complicada o lo es el proceso en sí, por lo que se han desarrollado métodos numéricos para resolverlos aplicados a casi todas las aplicaciones industriales. Por ello la resolución de problemas de contacto utilizando el método de los elementos finitos tiene una historia relativamente larga.

Existen dos planteamientos diferentes a la hora de tratar el problema del comportamiento mecánico entre dos superficies de contacto en la dirección normal, según la precisión requerida.

La primera formulación se usa, en general, en problemas donde no se requiere gran precisión en el contacto sino que la necesidad más esencial es el cumplimiento correcto de las restricciones geométricas de impenetrabilidad, como es el caso de problemas de choques o de procesos de conformado de metales. En estos casos, debido a las altas no linealidades presentes en los procesos físicos modelados, es muy complicado especificar las relaciones constitutivas en las superficies de contacto. Por esa razón, la formulación se reduce a relacionar la presión normal de contacto con la reacción en el área de contacto, pudiendo obtenerse ese valor de la ecuación de impenetrabilidad. Este procedimiento es el modo clásico de formular las condiciones de los problemas de mecánica del contacto por lo que ha sido utilizado por numerosos investigadores.

Sin embargo, existen otros problemas de contacto en los que el conocimiento de la micromecánica de las superficies es esencial para un apropiado tratamiento de los fenómenos físicos que tienen lugar en ellas. Para esos casos de, llamémosles, problemas con contacto de alta precisión, es necesario utilizar ecuaciones constitutivas para representar el comportamiento de las superficies. Para ello se hace uso de los numerosos estudios llevados a cabo sobre el comportamiento micromecánico de las superficies. El comportamiento micromecánico depende, en general, de parámetros del material como la dureza y de parámetros geométricos como la rugosidad superficial. Hay que señalar que los fenómenos micromecánicos reales son extremadamente complejos. Los modelos que se emplean tratan de capturar los fenómenos más importantes y suponen deformaciones (elásticas o plásticas) de las asperidades que realmente están en contacto en la superficie.

Debido a que el contacto que tiene lugar entre las caras de una grieta es un contacto entre superficies rugosas, es necesario utilizar leyes micromecánicas para representar su com-

portamiento de una forma adecuada. En los siguientes apartados, se ofrece un resumen de los diferentes estudios existentes sobre la micromecánica del contacto entre superficies rugosas.

4.2. Modelos micromecánicos de contacto

4.2.1. Inicios del estudio del contacto entre dos cuerpos

El primer análisis de la deformación y presión de contacto entre dos sólidos elásticos se debe a Hertz [1896], problema que ha pasado a conocerse como contacto hertziano. Hasta entonces, todos los estudios llevados a cabo sobre el contacto entre dos cuerpos habían supuesto un comportamiento rígido entre ellos (Da Vinci, Amontons, Newton, Coulomb).

El estudio de Hertz se basaba en las siguientes consideraciones:

1. Las superficies son continuas, suaves y no conformes.
2. Las deformaciones son pequeñas.
3. Cada sólido se debe considerar como un espacio-medio elástico en una región cercana al punto de contacto.
4. No hay fricción.

Hertz estudió la deformación elástica entre dos esferas de radios R_1 y R_2 sometidas a una carga normal N (figura 4.1). Calculó el radio de la zona de contacto, resultando:

$$a = \left(\frac{3NR}{4E'} \right)^{1/3}$$

donde E' es el *módulo elástico efectivo* y R es el *radio efectivo*. El módulo elástico efectivo se define como

$$E' = \left(\frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right)^{-1}$$

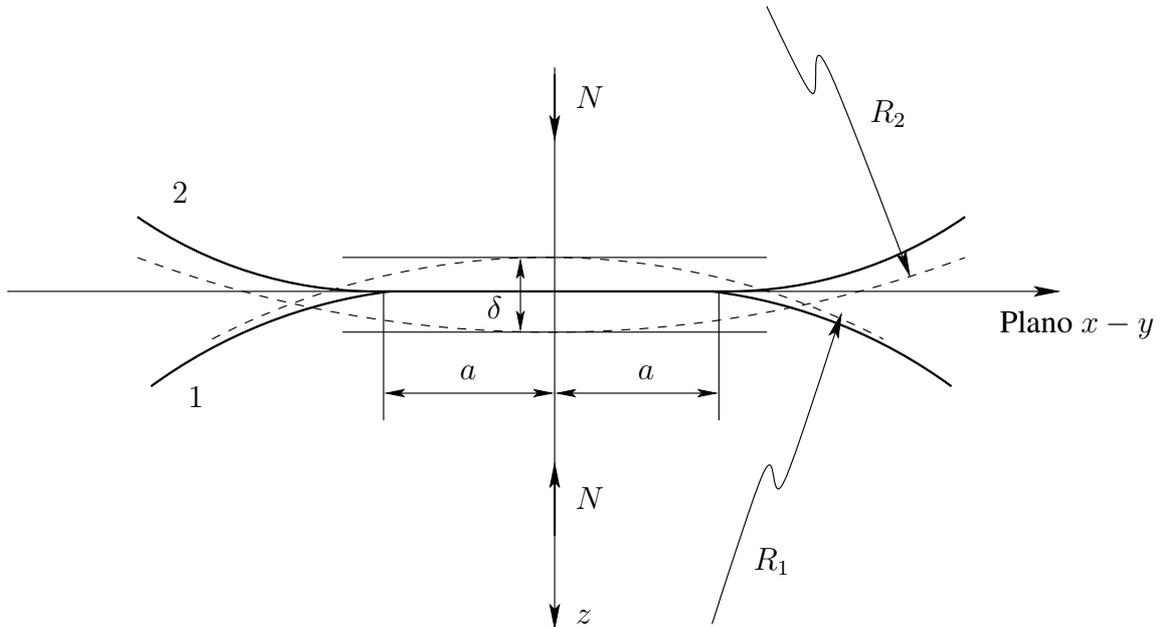


Figura 4.1: Sólidos en contacto según el modelo de Hertz.

siendo E_1 y E_2 los módulos elásticos de las dos superficies en contacto y ν_1 y ν_2 sus coeficientes de Poisson.

El radio efectivo, R , se define como

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

También propuso las expresiones para el grado de aproximación normal entre las esferas, generalmente conocido como interferencia total:

$$\delta = \frac{a^2}{R} = \left(\frac{9N^2}{16RE'^2} \right)^{1/3}$$

y la presión máxima:

$$p_0 = \left(\frac{6NE'^2}{\pi^3 R^2} \right)^{1/3} = \frac{3}{2} p_m$$

donde p_m es la presión media.

Hay un gran salto cualitativo entre las formulaciones de Hertz y las que posteriormente surgieron, basándose en la micromecánica de las superficies. Aun así, hay muchas aplicaciones en la ingeniería donde los estudios de Hertz siguen prevaleciendo, por no necesitar de más precisión en el estudio del contacto e incluso muchos de los modelos micromecánicos que consideran un comportamiento elástico de las asperezas, aplican las ecuaciones de Hertz al contacto de cada aspereza.

4.2.2. Análisis de las superficies reales

Existen en la bibliografía diferentes aproximaciones para representar los mecanismos de contacto microscópicos. Las formulaciones disponibles se basan o bien en ajustes de curvas a resultados experimentales o bien en análisis teóricos de superficies rugosas a escala microscópica.

Whitehouse y Archard [1970] señalaron:

“Todas las superficies son rugosas. Este es el punto de partida desde el que han evolucionando las ideas actuales sobre rozamiento, desgaste y otros fenómenos que tienen lugar entre superficies en contacto.”

Hoy día, es un hecho de sobra conocido que cualquier superficie, incluso estando pulida, no es perfectamente plana. Cuando se examina una superficie con un microscopio, se observa que contiene ondulaciones formadas por crestas y valles cuyas dimensiones son grandes en comparación con las dimensiones moleculares. A esas desviaciones del plano se les conoce con el nombre de *asperezas*. Dependiendo del método de producción de la superficie, la altura de los picos puede variar entre 0.05 y 50 μm , mientras que el espacio entre ellos oscila entre 0.5 y 5 mm (figura 4.2). La pendiente media de las asperezas normalmente es pequeña, tomando valores del orden de 5 a 20°.

Una de las consecuencias de la presencia de esa rugosidad en todas las superficies es que el área real de contacto (A_r) es mucho menor que el área aparente o nominal (A) (figura 4.3). Como resultado, el área real de contacto puede a veces soportar presiones tan grandes que sean del orden de la resistencia del material de los cuerpos. Las leyes de contacto micromecánicas pretenden caracterizar la respuesta de la interfaz de contacto

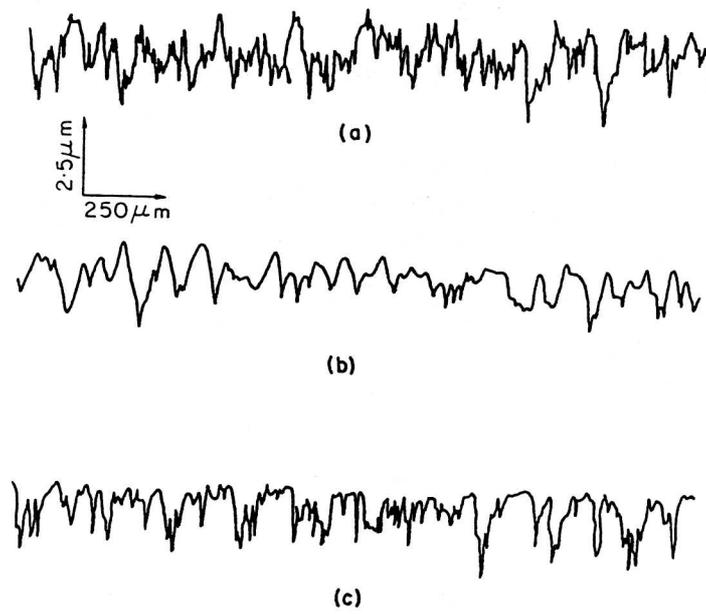


Figura 4.2: Perfiles de probetas de acero después de tres tratamientos superficiales. (a) Superficie original. (b) Superficie pulida ligeramente. (c) Superficie lijada con lija de 600. Greenwood y Williamson [1966].

lo largo de la superficie y L la longitud total de medida (ver figura 4.4), se define el valor RMS de la superficie como:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{L} \int_0^L y^2 dx}$$

Estadísticamente se suele considerar a las superficies de contacto como una población aleatoria de asperezas, cuyas alturas siguen una distribución de tipo gaussiana (figura 4.5)

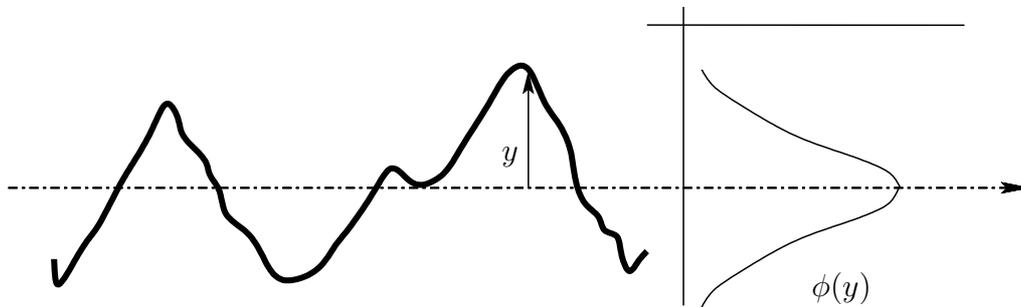


Figura 4.5: Distribución de alturas $\phi(y)$.

La *separación entre las superficies* o *distancia entre planos medios* (d) se representa en la figura 4.6. Permite cuantificar el acercamiento de las superficies al estar sometidas a una carga normal, debido a la deformación de las asperezas.

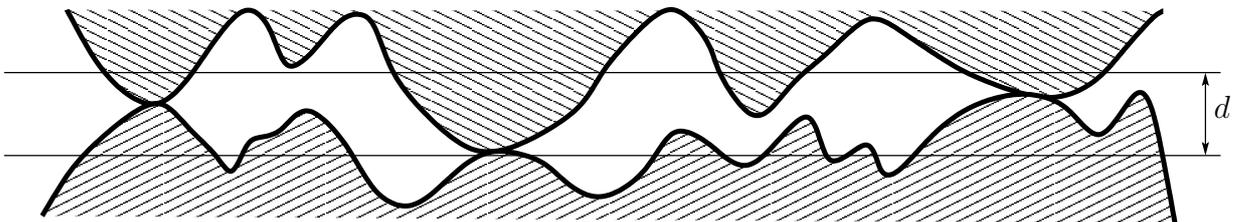


Figura 4.6: Definición de d , distancia entre planos medios de las superficies reales.

4.2.3. Contacto normal entre cuerpos metálicos

Las dos preguntas fundamentales que surgen en el estudio del comportamiento de una superficie ante una carga normal son:

1. ¿Cuál es la rigidez en la dirección normal entre dos superficies cuando se presiona una contra otra?
2. ¿Cuál es el área real de contacto?

A continuación se hace un resumen de los métodos y las soluciones a esas preguntas que distintos autores han aportado en el estudio del contacto normal entre dos cuerpos metálicos desde la aparición de las primeras teorías.

Bowden y Tabor [1939] sugirieron que las presiones que aparecen en el área real de contacto siempre son lo suficientemente grandes para que el material plastifique. Las regiones en contacto se deforman plásticamente hasta que el área real de contacto tiene un tamaño suficiente como para ser capaz de soportar la carga aplicada N . Por lo tanto, propusieron que el área real de contacto es directamente proporcional a la carga aplicada ($A_r \propto N$) e independiente del área aparente.

Unos años después, Archard [1957] y Archard [1974] rebatió el concepto de la deformación plástica de las asperezas. Según este autor, aunque es razonable suponer flujo plástico durante los primeros contactos de un cuerpo sobre otro, no lo es tanto el suponerlo para elementos de máquinas que pueden hacer millones de contactos durante sus vidas. Demostró que, a medida que se van produciendo contactos sucesivos, las superficies, tras la deformación plástica inicial de las asperezas más sobresalientes, tienden a soportar la misma carga sufriendo sólo deformación elástica. Archard demuestra también que, aunque la teoría elástica de Hertz no predice la proporcionalidad entre A_r y N , un modelo generalizado en el que se considere que cada aspereza está formada por microasperezas, y cada microaspereza por micro-microasperezas, da aproximaciones cada vez más cercanas a la ley $A_r \propto N$, tanto más cuanto más niveles se descienda (figura 4.7).

Archard añadió que la parte esencial del modelo no es la elección del comportamiento de las asperezas, sino el saber si un incremento en la carga lleva a crear nuevas áreas de contacto o a incrementar el tamaño de las áreas ya existentes. Llegó a la conclusión de

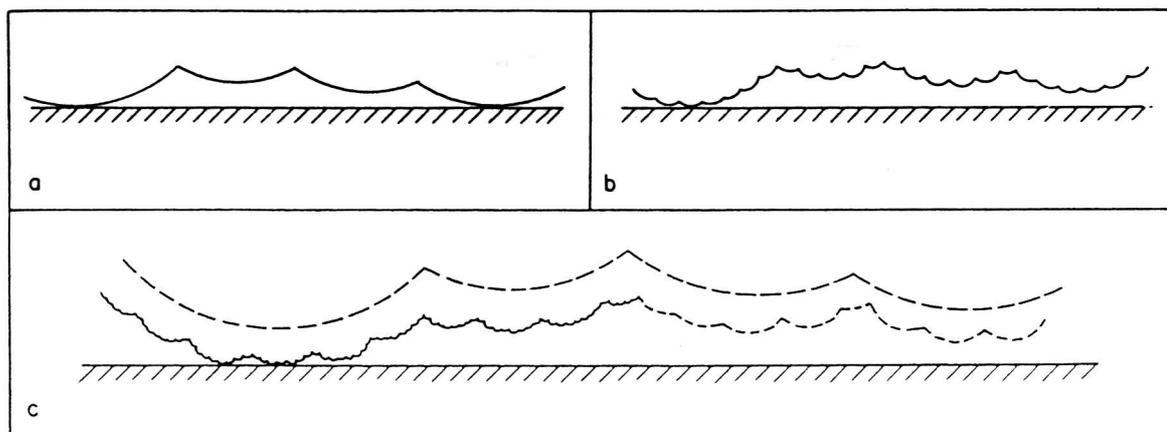


Figura 4.7: Modelos de superficies que contienen aspersiones a diferentes escalas de tamaño. Las relaciones entre el área real de contacto (A_r) y la carga normal N son: (a) $A_r \propto N^{4/5}$; (b) $A_r \propto N^{14/15}$; (c) $A_r \propto N^{44/45}$. (Archard [1974]).

que en cualquier modelo elástico en el que el número de puntos de contacto permanece constante, se cumple que $A_r \propto N^{2/3}$; pero si lo que sucede es que el número de contactos se incrementa, permaneciendo constante su tamaño medio, entonces $A_r \propto N$.

Los modelos de Archard fueron muy importantes en su momento, ya que mostraron la admisibilidad de la hipótesis de deformación elástica de las aspersiones y el efecto de la superposición sobre la superficie de aspersiones de tamaños y escalas muy diferentes.

El siguiente paso vino con el desarrollo de modelos de superficies basados en el estudio de su topología real.

Greenwood y Williamson [1966] demostraron que, para muchas superficies, la distribución de alturas de las aspersiones es muy próxima a ser gaussiana.

Además, propusieron un modelo en el que suponían que las aspersiones son esféricas de radio constante. Describieron la topografía de la superficie por medio de tres parámetros: σ , que es la *desviación típica de la distribución de las alturas de las aspersiones*, R , el *radio medio de curvatura de las puntas de las aspersiones* (constante en el modelo), y η , la *densidad superficial de aspersiones*. Whitehouse y Archard [1970] demostraron

posteriormente que no son parámetros independientes entre sí.

Suponían deformación elástica de las asperidades, siguiendo las ecuaciones básicas de Hertz. Y con todas esas hipótesis y la aplicación de las ecuaciones estadísticas derivadas de la distribución gaussiana de las asperidades, llegaron a la conclusión de que la separación entre planos medios de las asperidades de las dos superficies (d) disminuye de forma aproximadamente proporcional al incremento del logaritmo de la carga normal (figura 4.8), y de que el área real de contacto es aproximadamente proporcional a la carga normal (figura 4.9).

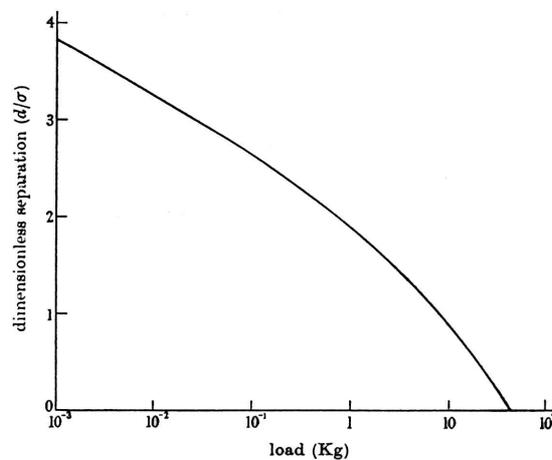


Figura 4.8: Relación entre la distancia entre planos medios de las superficies en contacto y la carga. La curva muestra el valor esperado de la carga para una separación dada, suponiendo una distribución gaussiana de las alturas de las asperidades. Greenwood y Williamson [1966].

Cooper et al. [1969] desarrollaron un modelo estadístico, suponiendo una distribución gaussiana de las alturas de las asperidades, para el contacto de superficies rugosas bajo la hipótesis de deformación plástica de las asperidades. Este modelo será el utilizado en el presente trabajo y será desarrollado en los siguientes apartados.

Whitehouse y Archard [1970] utilizaron el hecho de que si el perfil de una superficie es totalmente aleatorio, puede ser completamente definido en sentido estadístico, por dos características: la densidad de probabilidad de la distribución de alturas y la función de autocorrelación.

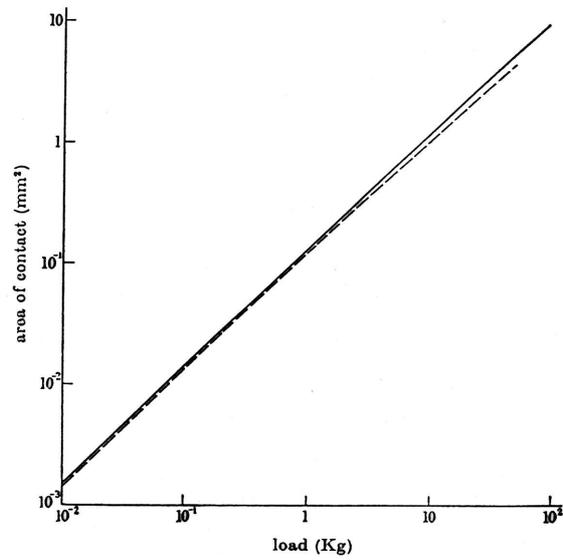


Figura 4.9: Relación entre el área real de contacto y la carga. La línea sólida, correspondiente a un área aparente de 10 cm², y la línea a trazos, a un área de 1 cm², muestran que el área real de contacto es independiente del área aparente.

Nayak [1971] desarrolló un modelo en el que la altura de una superficie rugosa $y = y(x, z)$ se considera una variable aleatoria bidimensional, siendo las coordenadas cartesianas x y z las variables independientes.

Bush et al. [1975] desarrollaron un modelo basado en la teoría anterior con la hipótesis adicional de que la punta de cada asperidad se reemplaza por un paraboloide que tiene la misma altura y curvaturas principales que la punta de la asperidad. La deformación de las asperidades es considerada elástica (hertziana). Los autores concluyen que, para grandes separaciones entre las superficies, el área de contacto es proporcional a la carga y , para pequeñas separaciones, esa proporcionalidad es sólo aproximada.

Woo y Thomas [1980] realizaron un estudio recopilando los resultados de diferentes experimentos llevados a cabo por autores y métodos diferentes (simulación por ordenador, métodos ópticos, refracción de luz, métodos de conducción térmica y eléctrica, etc.), para compararlos con los obtenidos por los modelos analíticos anteriores más relevantes. Representando gráficamente la relación entre el área real y el área aparente en ordenadas (A_r/A), y en abcisas la fuerza adimensional P/H , donde P es la presión normal (denominada p en las figuras 4.10 y 4.11) y H la dureza de la superficie, los resultados coinciden en una misma línea. Esa línea aparece como una recta, en una escala doblemente logarítmica, hasta valores de P/H del orden de 0.1 (figura 4.10). Por encima de esta carga los efectos de la interacción de las asperidades empiezan a manifestarse y la pendiente de la línea decrece. Lo más importante de esa línea recta es que su pendiente es menor que uno. Para hallar la pendiente por regresión se considera que la curva toma la forma

$$\frac{A_r}{A} = \left(\frac{P}{H} \right)^n \quad (4.1)$$

donde $n = 5/6$. Esa es la conclusión más importante de este estudio: el área real no es proporcional a la carga como universalmente se creía previamente.

Si se representan gráficamente la separación adimensional d/σ frente a la carga adimensional P/H utilizando una escala lineal-logarítmico, se observa que d/σ disminuye proporcionalmente al logaritmo de P/H (figura 4.11).

Debido a que las hipótesis sobre la rugosidad de las superficies y su comportamiento mecánico son diferentes, las relaciones que implican el área de contacto, la carga y la separación son también diferentes y en algunos casos, difíciles de comparar. Sin embargo,

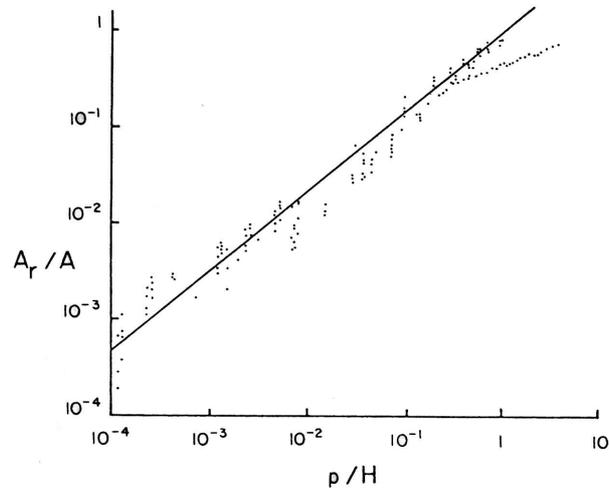


Figura 4.10: Relación entre área real y área aparente frente a carga adimensional. Se muestra la recta de ajuste por mínimos cuadrados de los resultados experimentales de seis ensayos de diferentes autores. Woo y Thomas [1980]

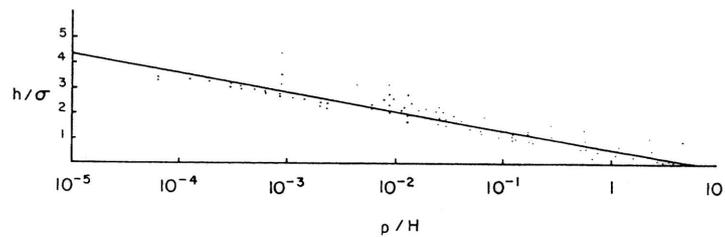


Figura 4.11: Separación adimensional frente a carga adimensional. La línea de regresión se basa en los resultados experimentales de siete ensayos de diferentes autores. Woo y Thomas [1980]

comparando las predicciones teóricas de los modelos citados con los resultados experimentales presentados, en general se pueden llegar a varias conclusiones:

- Los factores esenciales que afectan el modo de deformación de una superficie rugosa son las propiedades materiales (E , H) y el acabado superficial. La carga normal se espera que tenga poca influencia en el modo de deformación.
- Para la mayoría de los materiales utilizados en ingeniería el contacto inicial de las superficies se espera que sea plástico, incluso para cargas pequeñas.
- El proceso cíclico carga-descarga-carga en las superficies de los metales produce cambios en la forma de las asperezas. Esos cambios llevan a una posterior deformación elástica, si el desgaste se evita durante el proceso de deslizamiento.
- Para pequeñas penetraciones (grandes separaciones), la rigidez de las superficies rugosas es muy pequeña.
- La rigidez de una superficie es inversamente proporcional a su rugosidad.
- La presión normal aumenta aproximadamente como una función exponencial de la penetración (o lo que es lo mismo, la separación disminuye proporcionalmente al aumento del logaritmo de la carga).
- Para cargas pequeñas, la carga normal es aproximadamente proporcional a la potencia, en el rango de $1/0.5$ a $1/0.3$, de la penetración.
- Para la misma carga normal, la rigidez durante la primera carga es menor que la rigidez durante la descarga y las posteriores cargas. Eso es debido a la deformación plástica que ocurre durante la primera carga.
- La mayoría de los modelos estadísticos desarrollados predicen, tanto para contacto elástico como para plástico, una proporcionalidad entre área real de contacto y carga normal.
- Los resultados experimentales muestran que el área real de contacto aumenta con una potencia de la carga normal que es menor que uno, incluso para cargas pequeñas.

4.2.4. Contacto elástico o contacto plástico

Como se ha visto en el resumen anterior, una característica importante en el desarrollo de un modelo de contacto es la consideración de si las asperezas se van a deformar de forma elástica o plástica. A continuación se describen cuáles son las circunstancias que sugieren el uso de un modelo u otro.

A causa de la rugosidad de las superficies, cuando dos cuerpos entran en contacto, éste tiene lugar primero entre las asperezas más altas, lo que hace que el área real de contacto sea mucho menor que el área aparente. Bajo presiones de contacto normales, la relación entre el área real y el área aparente es muy baja, de tal manera que la presión media sobre el área real de contacto es mucho mayor que la presión nominal aplicada, y surge la pregunta de si el comportamiento del material en ese instante es elástico o plástico. Algunos análisis han usado la teoría del contacto elástica de Hertz, pero esto no es aplicable si hay flujo plástico.

Los estudios llevados a cabo de manera independiente por Mikic y Rohsenow [1966] y Greenwood y Williamson [1966] sugieren que, incluso bajo cargas exteriores moderadas, pocos contactos permanecen elásticos. Ambos estudios suponen que las asperezas pueden representarse por superficies esféricas en contacto, y que las alturas de las asperezas de las superficies siguen una distribución gaussiana.

Mikic y Rohsenow [1966] emplearon el análisis hertziano (elástico) para determinar las tensiones como función de la distancia entre planos medios de asperezas. También dedujeron el valor que tendría que tomar esa distancia para que las deformaciones dejen de ser elásticas, de tal manera que su comportamiento pase a ser plástico. Aplicando ese análisis a superficies típicas de interés práctico, hallaron que menos del 1 % del área de contacto está en estado elástico.

Esta conclusión fue apoyada también por Greenwood y Williamson [1966]. Utilizaron su modelo topográfico de superficie para estudiar los límites de las deformaciones elásticas en superficies rugosas. Aunque su modelo suponía contacto elástico, lo usaban para estudiar las primeras etapas de crecimiento de áreas de contacto plásticas según aumentaba la carga. El criterio para el inicio de flujo plástico al nivel de las asperezas lo basaron en el análisis de ensayos de dureza. El límite de comportamiento elástico lo establecieron por la relación entre el área de contacto plástica y el área de contacto real total. *Para valores*

de esa relación mayores que 0.02, no se consideraba ya que existiera comportamiento elástico. Definieron un parámetro denominado *índice de plasticidad* (ψ) con el que es posible predecir el modo de deformación de las superficies (elástico o plástico) y que se calcula como:

$$\psi = \frac{E'}{H} \sqrt{\frac{\sigma}{R}}$$

donde E' es el módulo de elasticidad efectivo y σ es la rugosidad RMS, definidos anteriormente, H es la dureza del material, y R es el radio medio de las asperidades. Cuando ψ es menor que 0.6, sólo puede tener lugar contacto plástico si las superficies se someten a presiones muy grandes; por el contrario, cuando ψ es mayor que 1.0, se producirá contacto plástico incluso a presiones muy pequeñas. Una de las conclusiones que se puede obtener es que la carga tiene poco efecto en el modo de deformación de la superficie. Los factores esenciales son las propiedades del material (E'/H) y el acabado superficial $(\sigma/R)^{1/2}$. Como para la mayoría de los materiales en ingeniería y acabados superficiales generan un valor de $\psi > 1$, se puede concluir que durante el contacto inicial la deformación será principalmente plástica incluso bajo cargas pequeñas. Sin embargo, la repetición carga-descarga-carga de la superficie de los metales produce cambios en la forma de las asperidades (decrece (σ/R)) y la deformación se vuelve elástica. Observaron que la producción de partículas de desgaste puede invertir esa tendencia y puede hacer que ψ no llegue al rango elástico. En la figura 4.12 se muestra el efecto en el índice de plasticidad del deslizamiento de dos superficies metálicas, bajo condiciones en las que se evitó el daño severo en las superficies y por lo tanto la producción de partículas de desgaste. Se observa que, a medida que transcurre el tiempo y por tanto la forma de las asperidades se va modificando, el valor de ψ desciende a valores que corresponden a deformaciones elásticas de las asperidades.

Por lo tanto, se puede concluir de modo general que, cuando el contacto tiene lugar por primera vez o cuando tiene lugar de forma repetida (fatiga) y se generan partículas de desgaste que no se eliminan, el modelo de contacto debe ser plástico. Por el contrario, cuando hay fatiga y no hay partículas de desgaste, el modelo debe ser elástico.

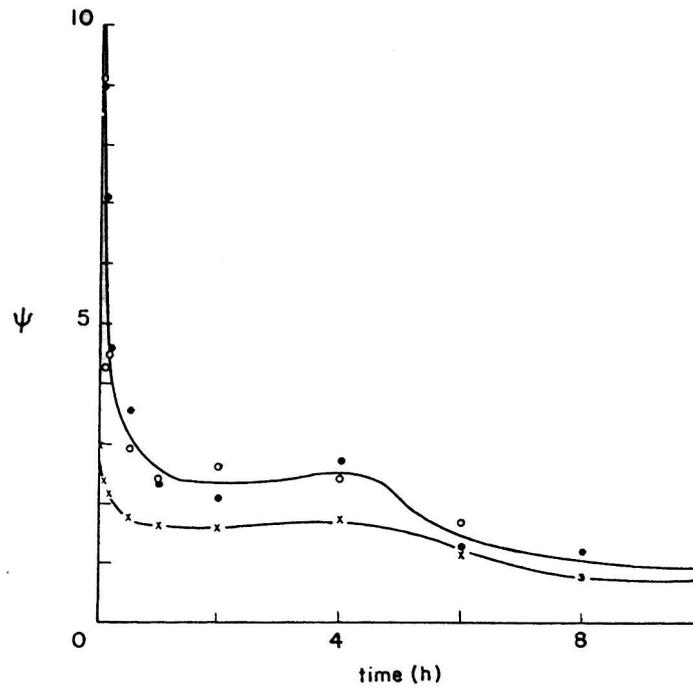


Figura 4.12: Efecto del deslizamiento en el índice de plasticidad. Se representa el comportamiento de tres probetas de acero deslizando sobre una matriz metálica de acero inoxidable a 100 m/s bajo una carga de 1.5 kg. ● y ○ tienen un ψ inicial de 9; × un ψ inicial de 3 (Greenwood y Williamson [1966]).

4.2.5. Modelo plástico de rigidez normal de Song y Yovanovich

El comportamiento de la rigidez en la dirección normal utilizado en este trabajo se ha extraído del modelo propuesto por Yovanovich [1981], basado en estudios de Cooper et al. [1969], y posteriormente modificado por Song y Yovanovich [1987]. Desarrollaron estudios de transmisión de calor, proponiendo modelos para calcular las resistencias de contacto entre dos superficies. Para ello necesitaron obtener las ecuaciones que relacionan la presión de contacto con la morfología de la superficie y su deformación. Esas son las ecuaciones que se han utilizado en este trabajo. Se ha utilizado este modelo por ajustarse sus características a las propiedades de las superficies de las grietas y por ser un modelo ampliamente aceptado.

El comportamiento de la rigidez normal se basa en la descripción estadística de la microgeometría de la superficie y en la hipótesis de comportamiento plástico de las asperidades.

Un análisis geométrico detallado de las superficies rugosas en contacto (ver apéndice B) lleva a los siguientes resultados:

- Área real relativa de contacto:

$$\varepsilon^2 = \frac{A_r}{A} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(x) \quad (4.2)$$

- Densidad de puntos de contacto:

$$n = \frac{1}{16} \left(\frac{m}{\sigma} \right)^2 \frac{\exp(-2x^2)}{\operatorname{erfc}(x)}$$

- Radio medio de los puntos de contacto:

$$a = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \frac{\sigma}{m} \exp(x^2) \operatorname{erfc}(x) \quad (4.3)$$

donde $x = \frac{d}{\sqrt{2}\sigma}$, m es la *pendiente efectiva absoluta de la asperidades*, d es la separación relativa entre planos medios y σ es la rugosidad superficial efectiva RMS, ya definidos. Los valores efectivos de σ o m se calculan como:

$$\sigma = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$$

y

$$m^2 = m_1^2 + m_2^2$$

siendo los valores con subíndice 1 los correspondientes a la superficie de contacto 1 y los de subíndice 2 los de la superficie 2.

Supusieron que en cada contacto la presión es la máxima que puede ser soportada por el más blando de los dos materiales cuando se deforma plásticamente. Esa presión puede relacionarse con la presión bajo el indentador de un ensayo de dureza. Algunos trabajos han usado diferentes valores para varios tamaños de contacto, debido a que la presión desarrollada bajo el indentador depende de su tamaño y de su forma. Sin embargo, los autores de este modelo señalan que es no es necesario tal refinamiento y adoptaron la hipótesis de Holm [1958], según la cual la presión media bajo los puntos de contacto es H , conocida con el nombre de *microdureza de contacto*, y obtenida de ensayos de dureza de indentaciones de tamaño comparable a los puntos de contactos.

Por lo tanto utilizan la ecuación:

$$\frac{P}{H} = \frac{A_r}{A}$$

donde P es la *presión aparente* o aplicada a la superficie.

Uniendo esa ecuación con la ecuación (4.2) se obtiene:

$$\frac{P}{H} = \frac{A_r}{A} = \varepsilon^2 = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(x)$$

y si se sustituye x por su equivalencia:

$$\frac{d}{\sigma} = \sqrt{2} \operatorname{erfc}^{-1} \left(\frac{2P}{H} \right) \quad (4.4)$$

ecuación que relaciona la distancia entre los planos medios de las dos superficies en contacto con la presión aparente aplicada.

El término $\operatorname{erfc}^{-1}\left(\frac{2P}{H}\right)$ puede aproximarse (Yovanovich [1981]) por la expresión:

$$\operatorname{erfc}^{-1}\left(\frac{2P}{H}\right) \simeq 0.9638 \left[-\ln\left(5.589\frac{P}{H}\right) \right]^{1/2} \quad (4.5)$$

Esta aproximación es válida (con un error máximo de hasta un 2 %) en el rango de $10^{-6} \leq \frac{P}{H} \leq 2 \cdot 10^{-2}$.

La *presión relativa de contacto* se define como P/H y es la relación entre la presión aparente aplicada y la microdureza de contacto.

Físicamente, la relación P/H controla tres elementos importantes:

- la densidad de puntos de contacto
- el radio medio de los puntos de contacto
- la separación de los planos medios de las superficies en contacto.

Además, la microdureza H depende de varios parámetros:

- la rugosidad media de la superficie
- la pendiente media absoluta de las asperidades
- el tipo de materiales
- el método de acabado de la superficie
- la presión aplicada.

Se puede conseguir suficiente información sobre las características de dureza de las superficies mediante las correlaciones de la dureza Vickers en un rango de presiones. Los tests de dureza Vickers se hacen para un rango de diagonales de indentación. Los resultados se pueden ajustar de la forma:

$$H_v = c_1 d_v^{c_2}$$

donde H_v es la dureza Vickers (MPa), d_v es la indentación media medida en diagonal (μm) y c_1 y c_2 son los coeficientes de correlación. Para obtener el valor de la microdureza de contacto H , se supone que es igual a la microdureza Vickers:

$$H = c_1 d_v^{c_2} \quad (4.6)$$

y

$$d_v = \sqrt{2\pi} \cdot 10^6 a_c \quad (4.7)$$

donde a_c es el radio medio de las zonas de contacto (m). Ese radio, además, está relacionado con la separación entre planos medios, d/σ (ec. 4.3):

$$a_c = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \frac{\sigma}{m} \exp\left(\frac{d}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2 \operatorname{erfc}\left(\frac{d}{\sqrt{2}\sigma}\right) \quad (4.8)$$

Las ecuaciones (4.4), (4.5), (4.6), (4.7) y (4.8) se pueden combinar para obtener la siguiente expresión, en la que se obtiene la presión relativa de contacto, P/H :

$$\frac{P}{H} = \left[\frac{P}{c_1 \left(\frac{1.62 \cdot 10^6 \sigma}{m}\right)^{c_2}} \right]^{\frac{1}{1+0.071c_2}}$$

válida para $10^{-6} \leq \frac{P}{H} \leq 2 \cdot 10^{-2}$. La ecuación anterior muestra la dependencia cuantitativa de la presión relativa de contacto sobre los parámetros geométricos y mecánicos (σ , m , c_1 , c_2 y P) y su importancia reside en la posibilidad de relacionarlos con la distancia entre los planos medios y la presión de contacto:

$$\frac{A_r}{A} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{d}{\sqrt{2}\sigma}\right) = \left[\frac{P}{c_1 \left(\frac{1.62 \cdot 10^6 \sigma}{m}\right)^{c_2}} \right]^{\frac{1}{1+0.071c_2}} \quad (4.9)$$

La ecuación (4.9) es la que se utilizará en el modelo que se propone en este trabajo para caracterizar el comportamiento en la dirección normal del contacto entre las dos caras de una grieta. Ésta se modificada incorporando la relación entre área real y área aparente debida a Woo y Thomas.

Para una superficie típica, los rangos entre los que se encuentran los parámetros anteriores son:

$$10^{-5} < P/H < 10^{-2}$$

$$4.26 < d/\sigma < 2.34$$

$$0.2\mu m < \sigma < 4\mu m$$

$$0.03 < m < 0.35$$

El modelo no tiene en cuenta las variaciones de los parámetros σ y m que describen la geometría de la superficies, por lo que no puede usarse en el caso de que el cambio de forma original de las asperezas sea muy significativo.

4.3. Modelos de fricción

La fricción o rozamiento es la resistencia que se encuentra un cuerpo cuando se desplaza tangencialmente sobre otro con el que está en contacto. El trabajo empleado contra esa resistencia generalmente se disipa en forma de calor. Por ello, en la mayor parte de los diseños el objetivo es mantener las fuerzas de rozamiento tan pequeñas como sea posible. Sin embargo, hay ocasiones en las que la fricción es esencial para el buen funcionamiento de un sistema como puede ser en la transmisión de potencia por rozamiento (neumáticos, ruedas de ferrocarril), o en frenos o embragues tradicionales.

De nuestra práctica de la vida diaria es fácil observar algunas leyes cualitativas de la fricción. Por ejemplo, es mucho más fácil deslizar un objeto ligero sobre una superficie horizontal que un objeto pesado. Pero es también evidente que no sólo la masa es importante, sino el material del que estén hechos los cuerpos. Así, un bloque de hielo sobre el suelo desliza mucho más fácilmente que un bloque de madera del mismo peso.

Esos hechos fueron observados por Leonardo da Vinci (1462-1519), quien fue el primero en estudiar la fricción de una forma sistemática. Se dio cuenta de la importancia que ese fenómeno tiene en el funcionamiento de las máquinas. Estableció las dos leyes básicas

del rozamiento 200 años antes de que Newton definiera el concepto de *fuerza*. Da Vinci simplemente estableció que:

- Si el peso de un objeto se duplica, el rozamiento también lo hace.
- Las áreas de contacto no tienen influencia en el rozamiento.

Nunca publicó sus teorías, por lo que pasó tiempo hasta que se retomó el tema, pero se han encontrado numerosos estudios entre su amplia colección de escritos.

Esas dos leyes sobre la fricción fueron redescubiertas por Guillaume Amontons (1663-1705), y se conocen por su nombre. La primera ley de Amontons establece que la *fuerza de rozamiento* F entre dos superficies es proporcional a la fuerza normal N que soportan: la fuerza tangencial requerida para desplazar un bloque sobre una superficie es proporcional al peso del bloque. La constante de proporcionalidad entre F y N es universalmente conocida como *coeficiente de rozamiento*, μ .

$$F = \mu N$$

La segunda ley de Amontons afirma que la fuerza de rozamiento entre dos sólidos es independiente del área aparente de contacto (A) entre ellas. Volviendo al ejemplo de los bloques, es un hecho que la fuerza de rozamiento es independiente de si el bloque apoya sobre un lado o sobre otro más pequeño.

Cuando Amontons presentó sus leyes a la Real Academia Francesa de las Ciencias, la primera ley fue aceptada sin cuestionarla, pero la segunda fue acogida con gran escepticismo y tuvo que repetir sus experimentos para que finalmente la aceptaran.

Respecto al origen del rozamiento, Amontons supuso que las superficies con las que estaba tratando no eran completamente lisas y postuló que las fuerzas de rozamiento existen por el trabajo que hay que realizar en levantar el cuerpo para que deslice por encima de las asperidades.

Algunos años después, John Desaguliers (1683-1744) criticó esta explicación de las rugosidades de las superficies, ya que observó que cuando las superficies se hacían muy lisas, no sólo no disminuía el rozamiento, sino que a menudo aumentaba. Atribuyó este comportamiento a la adhesión entre las dos superficies de contacto.

Leonhard Euler Euler [1748] estudió el problema de un bloque deslizando por un plano inclinado. Ante el hecho de que la fuerza requerida para iniciar el movimiento de un sólido apoyado sobre una superficie es mayor que la necesaria para mantener el posterior deslizamiento, realizó, por vez primera la distinción entre el coeficiente de rozamiento estático μ_e y el dinámico μ_d .

Más tarde, Charles de Coulomb [1785] consideró la idea de la adhesión como causa del rozamiento, pero la desechó, explicando que si así fuera, la fricción debería ser proporcional al área de contacto. Por ello siguió las teorías de Amontons, postulando que la fricción se debe al trabajo hecho en subir las asperezas una sobre otra. El trabajo de Coulomb ha sido muy relevante en los estudios de tribología, con su publicación *Theorie des machines simples*. Inventó el tribómetro, con el que midió el coeficiente de rozamiento de distintos pares de materiales. Además añadió a las leyes de Amontons la independencia entre la fuerza de rozamiento y la velocidad de deslizamiento.

Según Bowden y Tabor [1939, 1950], el principal defecto de esas primeras teorías es que los modelos propuestos son no disipativos y el rozamiento es un fenómeno que, ciertamente, lo es. Su aportación a los estudios sobre el rozamiento son muy reconocidos y sus teorías han sido las más aceptadas en las últimas décadas. Atribuyeron las fuerzas de fricción entre cuerpos metálicos a dos causas: la formación y el corte de uniones metálicas entre las asperezas de la superficie (adhesión) y la deformación plástica de la superficie más blanda por las asperezas más duras (rayado). Como consecuencia, el coeficiente de rozamiento se puede representar como la suma de dos componentes que recogen esos efectos:

$$\mu = \mu_a + \mu_p$$

donde μ_a resulta de la adhesión (soldadura) y μ_p resulta de la deformación plástica (rayado). A continuación se describen esas dos componentes, según las teorías de Bowden y Tabor.

Componente de adhesión de fricción

La teoría de la adhesión del rozamiento supone que, debido a que el contacto real tiene lugar únicamente en las puntas de las asperezas, incluso a niveles bajos de cargas, las

presiones reales son suficientemente altas como para generar un proceso de flujo plástico entre ellas. El área real de contacto es entonces proporcional a la fuerza normal:

$$A_r = \frac{N}{H}$$

donde H es la dureza del material más blando de los que están en contacto.

Como consecuencia de estas deformaciones plásticas, se generan fuertes uniones entre las asperezas y, antes de que se produzca un desplazamiento tangencial entre ellas, habría que romperlas. La fuerza de rozamiento es entonces igual a la fuerza F requerida para romper las uniones formadas. Si τ_i es la resistencia media a cortadura de las uniones, entonces:

$$F = A_r \tau_i = \left(\frac{\tau_i}{H} \right) N$$

o dividiendo entre N :

$$\mu_a = \frac{\tau_i}{H}$$

Debido a la plasticidad y al endurecimiento, la unión entre las asperezas formadas es tan resistente o más que el material sin deformar. Por esta razón, la resistencia media a cortadura de las uniones (τ_i), puede suponerse igual a la resistencia a cortadura del material más blando de los que entran en contacto (τ). Por lo tanto:

$$\mu_a = \frac{F}{N} = \frac{\tau}{H}$$

Las leyes de Amontons se verifican: la fuerza de rozamiento es proporcional a la carga normal y es independiente del área aparente de contacto. Para la mayoría de los materiales, τ es del orden de $0.2H$. Por tanto, para un modelo simplificado,

$$\mu_a \simeq 0.2$$

Sin embargo, para metales limpios pueden obtenerse valores muy grandes de μ (en un rango de 10 a 100). De acuerdo con los mismo autores, esta discrepancia puede resol-

verse si se considera que, debido a la combinación de las cargas normal y tangenciales, tiene lugar un crecimiento de las uniones. El criterio de plastificación supuesto para esta situación es de la forma:

$$p_r^2 + \alpha s_r^2 = H^2 = \alpha \tau^2 \quad (4.10)$$

donde p_r y s_r son las tensiones normal y tangencial en cada asperidad (las tensiones medias reales en el área real de contacto) y α es una constante del orden de 10.

El criterio anterior predice que cuando una asperidad, inicialmente con carga puramente normal, tiene su punta deformada plásticamente, se verifica que:

$$p_r = H$$

Cuando se aplica además una tensión tangencial s_r , como la ecuación (4.10) debe seguir cumpliéndose, p_r disminuirá. Si la carga normal es la misma, el área de las uniones debe crecer. Si $A_{r0} = \frac{N}{H}$ es el área real inicial de contacto, debida únicamente a la carga normal, la ecuación que rige el incremento del área real de contacto con la carga tangencial es:

$$1 + \alpha \left(\frac{F}{N} \right)^2 = \left(\frac{A_r}{A_{r0}} \right)^2$$

Con superficies reales al aire, este proceso de formación de uniones no llega a avanzar mucho a causa de la presencia de capas de contaminantes, que son más débiles que el material en sí. Si $\tau_i = K\tau$ (con $K < 1$) es la tensión crítica cortante de esas capas, el crecimiento de las uniones terminará cuando la tensión tangencial en la interfaz alcance el valor τ_i . Entonces tiene lugar el deslizamiento y se verifica que:

$$p_r^2 + \alpha \tau_i^2 = \alpha \tau^2$$

La componente de adhesión de fricción es, por tanto:

$$\mu_a = \frac{A_r \tau_i}{A_r p_r} = \frac{1}{\alpha^{1/2} (K^{-2} - 1)^{1/2}}$$

- Para $K \rightarrow 1$, $\mu_a \rightarrow \infty$; esta condición corresponde a superficies perfectamente limpias de metales muy dúctiles, donde las uniones crecen indefinidamente.
- Con un pequeño debilitamiento de la interfaz ($K=0.95$) el coeficiente de rozamiento se reduce a valores razonables (del orden de la unidad).
- Para una interfaz muy débil ($K < 0.2$) el crecimiento de las uniones es muy pequeño. Esta situación corresponde a la presencia de un buen lubricante o de una capa fina de un metal más débil. Por esta razón se puede afirmar con suficiente precisión que

$$\mu_a = \frac{K}{\sqrt{\alpha}} = \frac{\tau_i}{H}$$

Toda esta teoría se basa en la proporcionalidad $A_r \propto N$, relación que se obtiene sin la suposición de deformación plástica, como demostró Archard [1957].

Componente de rayado

Si la adhesión es pequeña, una parte de la fricción se debe al rayado de las asperezas de la superficie más dura sobre la más blanda. Esa componente puede estimarse usando el modelo simplificado de una aspereza cónica dura avanzando sobre una superficie blanda (ver figura 4.13). Suponiendo que la plastificación es isótropo, la componente de rayado es:

$$\mu_p = \frac{2}{\pi} \tan \theta$$

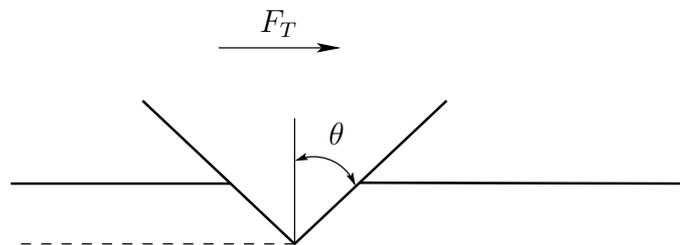


Figura 4.13: Componente de fricción de rayado.

Debido a la pequeña pendiente de las asperezas, esta expresión lleva a valores comprendidos en el rango de 0.07 a 0.2. Como consecuencia de esos pequeños valores, la contribución de la componente de rayado de fricción será despreciable a no ser que la adhesión sea pequeña.

4.3.1. Teorías recientes

A pesar de la amplia aceptación de la teoría de Bowden y Tabor y de su efectividad al explicar las leyes básicas de la fricción, se han hecho varias críticas y algunas teorías alternativas.

Unas críticas surgen del hecho de que, al aire, la mayoría de los sólidos están cubiertos con varias películas que previenen el contacto atómico entre los materiales de los dos cuerpos. Como consecuencia, la fuerza requerida para separar dos cuerpos en contacto es, en la vida diaria, cero. Además, de acuerdo con Bikerman [1976], la formación de capas de adsorción es tan rápida que todos los efectos asociados con el deslizamiento son comparativamente muy pequeños. Con esos hechos y la revisión crítica de varias observaciones sobre experimentos de adhesión y fricción, Bikerman concluye que la importancia de la adhesión en los fenómenos de fricción es despreciable, mientras el término *fricción* sea usado en el sentido de una fuerza que es reproducible y que es una función definida de la carga normal.

Se han desarrollado otras teorías por autores especialmente interesados en el estudio de la evolución del rozamiento durante un deslizamiento prolongado así como en la interacción entre el rozamiento y el desgaste de las superficies.

Rigney y Hirth [1979] desarrollaron un modelo en el que, para calcular la fuerza de rozamiento, suponen que procede de la deformación plástica en la región cercana a la superficie e igualan el trabajo de la fuerza de rozamiento al trabajo de deformación plástica del volumen bajo la superficie.

4.3.2. Modelo de Kragelskii

Kragelskii et al. [1982] propusieron un modelo para la fricción, basado en numerosos resultados experimentales, que considera el rozamiento a escala microscópica. Las fuerzas

tangenciales en el área de contacto se relacionan con las presiones de contacto reales por medio de la ecuación:

$$\tau_r = \tau_0 + \beta p_r$$

donde τ_0 es el máximo esfuerzo tangencial sin presión normal y β es un coeficiente de proporcionalidad que se obtiene de forma experimental. Esa ecuación se conoce con el nombre de *ley binomial de la fricción* y es la que se ha utilizado en el modelo de contacto entre caras de grietas propuesto en este trabajo.

Con ese modelo, el coeficiente de rozamiento se expresa como:

$$\mu = \frac{\tau_r}{p_r} = \frac{\tau_0}{p_r} + \beta \quad (4.11)$$

Se puede apreciar cómo la ec. (4.11) predice una disminución del coeficiente de rozamiento al aumentar la presión de contacto.

Capítulo 5

Descripción del modelo de contacto y fricción desarrollado

En este capítulo se desarrolla el modelo que se propone en este trabajo para representar los fenómenos de contacto y rozamiento entre las caras de una grieta. En la primera parte, se describen la formulación teórica y las características del modelo. En la segunda parte, se desarrollan esas ecuaciones para adecuarlas al método de los elementos finitos, método elegido para resolver el problema global. Este modelo será utilizado en paralelo con el elemento cohesivo, de la manera que se describe en la última parte del capítulo.

5.1. Formulación del problema general de contacto y fricción

5.1.1. Notación

Se consideran dos cuerpos en el espacio tridimensional, definidos en los conjuntos $\Omega^{(1)}$ y $\Omega^{(2)}$ con fronteras $\partial\Omega^{(1)}$ y $\partial\Omega^{(2)}$ y pertenecientes a $\mathbb{R}^{n_{ds}}$, donde n_{ds} es el número de dimensiones espaciales. Se denominan $\mathbf{X}^{(1)} \in \overline{\Omega}^{(1)}$ y $\mathbf{X}^{(2)} \in \overline{\Omega}^{(2)}$ (donde $\overline{\Omega}^{(i)} = \Omega^{(i)} \cup \partial\Omega^{(i)}$, es decir el cuerpo y su frontera), a las posiciones de los puntos de ambos cuerpos en la configuración de referencia. Los cuerpos, debido al sistema de cargas al que están some-

tidos, experimentan los movimientos $\varphi^{(1)}$ y $\varphi^{(2)}$ durante un tiempo $t = [0, T]$ (figura 5.1). Los movimientos se representan como:

$$\varphi^{(i)} : \bar{\Omega}^{(1)} \times t \rightarrow \mathbb{R}^{n_{ds}}, i = 1, 2$$

Se denomina $\varphi_t^{(i)}$, $i = 1, 2$ a la configuración que representa a cada cuerpo en un instante cualquiera t tras ese movimiento, y $\mathbf{x}^{(i)}$ los puntos que ocupan ambos cuerpos en esa configuración. Así, $\mathbf{x}^{(i)} = \varphi_t^{(i)}(\mathbf{X}^{(i)})$.

Se denomina superficie de contacto $\Gamma^{(i)} \subset \partial\Omega^{(i)}$ a la parte de la frontera del cuerpo $\Omega^{(i)}$ que contiene a todos los puntos en los que es posible que se produzca el contacto en algún instante t . Sus puntos homólogos en la configuración espacial son $\gamma^{(i)}$.

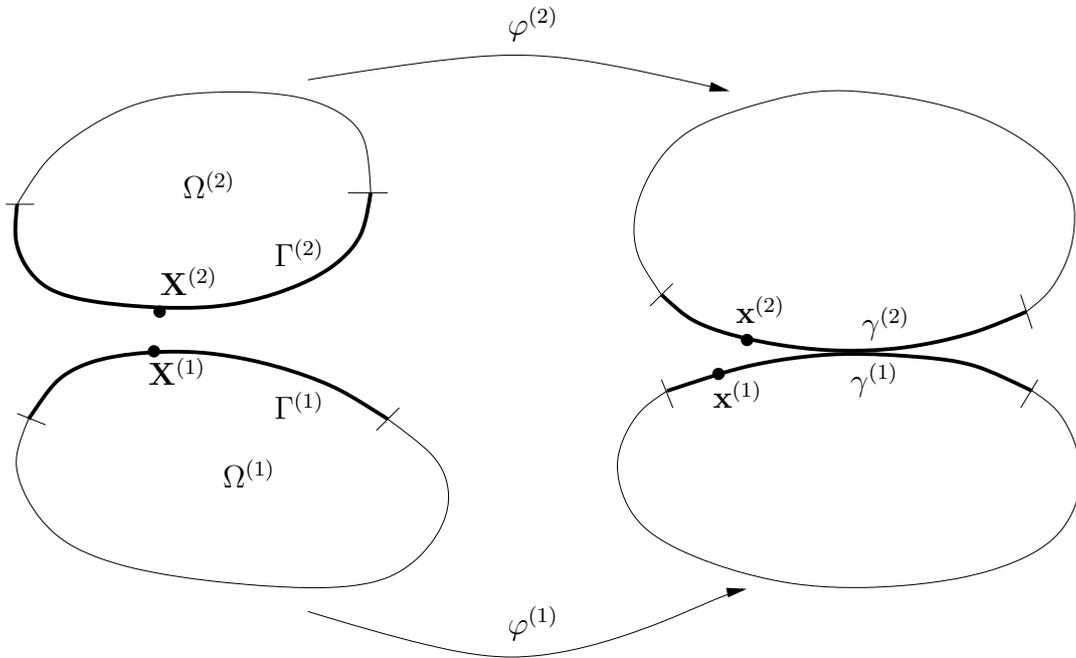


Figura 5.1: Notación y configuración de los cuerpos.

5.1.2. Leyes de comportamiento en la interfaz de contacto

Las ecuaciones que rigen el comportamiento de la interfaz de contacto entre los dos cuerpos se dividen en la dirección normal y en la dirección tangencial, por ser de naturaleza

diferente una y otra.

5.1.2.1. Ecuaciones en la dirección normal

Suponiendo que hay contacto entre las dos superficies, y considerando un punto $\mathbf{x}^{(2)} \in \gamma^{(2)}$, denominando $\mathbf{x}^{(1)} \in \gamma^{(1)}$ al punto proyectado sobre la superficie opuesta, se puede definir la función *penetración* $g_N(\mathbf{x}^{(2)})$, como :

$$g_N(\mathbf{x}^{(2)}) = (\mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(1)})\mathbf{n}$$

donde \mathbf{n} es el vector normal a la superficie $\gamma^{(1)}$ y \mathbf{t} es el vector tangente (figura 5.2).

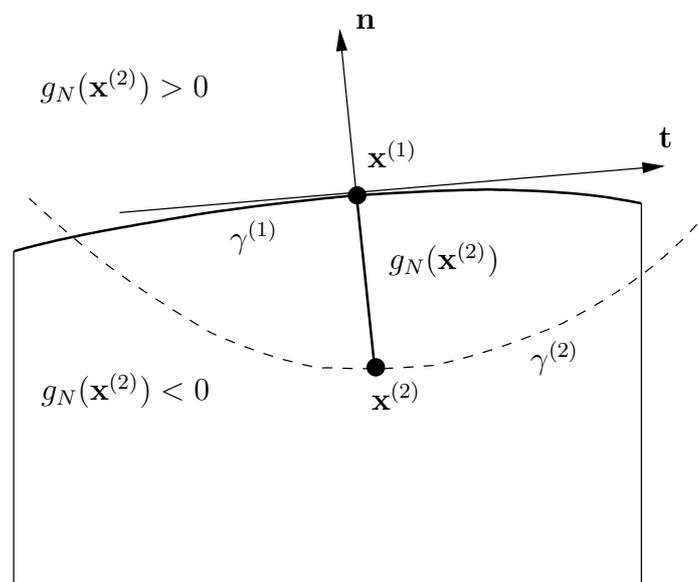


Figura 5.2: Definición del concepto de penetración ($g_N(\mathbf{x}^{(2)})$).

La función g_N toma valores positivos si no hay contacto entre las superficies, y negativos si se produce penetración (contacto) entre ellas. Por lo tanto una de las ecuaciones que se debe satisfacer es:

$$g_N(\mathbf{x}) \geq 0$$

que se conoce con el nombre de *condición de impenetrabilidad*.

Según esa condición, se producirá el contacto entre dos superficies cuando $g_N(x^{(2)}) = 0$. En ese instante, aparecerá una fuerza de contacto entre ellas, igual y opuesta:

$$\mathbf{t}^{(1)} = -\mathbf{t}^{(2)} = \mathbf{t} = t_N \mathbf{n} + t_T \mathbf{t}$$

Teniendo en cuenta ahora únicamente la componente normal, ésta tendrá siempre que ser negativa (de compresión). Las ecuaciones en la dirección normal se pueden resumir en:

$$g_N \geq 0 \quad (5.1)$$

$$t_N \leq 0 \quad (5.2)$$

$$t_N g_N = 0 \quad (5.3)$$

$$t_N \dot{g}_N = 0 \quad (5.4)$$

conocidas con el nombre de *condiciones de Kuhn-Tucker*. Las ecuaciones (5.1), (5.2) y (5.3) representan las condiciones de impenetrabilidad, de presión normal de compresión y de que la presión sea distinta de cero únicamente cuando $g_N = 0$. La ecuación (5.4) es una condición de persistencia que representa que cuando la presión toma un valor distinto de cero, la velocidad de separación de las superficies de contacto (\dot{g}_N) debe ser cero.

5.1.2.2. Ecuaciones en la dirección tangencial (fricción)

Se define el desplazamiento tangencial producido por el deslizamiento entre las superficies de dos cuerpos como:

$$\mathbf{g}_T = \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}$$

donde $\mathbf{u} = (\mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(1)})$, siendo $\mathbf{x}^{(i)} \in \gamma^{(i)}$ (figura 5.1), y \mathbf{n} es el vector normal, ya definido.

Las leyes de la fricción indican que, al intentar hacer deslizar un cuerpo sobre otro, permanecerá en reposo hasta que se alcance en la zona de contacto el valor máximo de esfuerzo cortante. Por lo tanto, se puede dividir el problema en dos etapas: la primera de ellas es

la anterior al deslizamiento (estado de adhesión ('stick')), y la segunda es en la que tiene lugar el deslizamiento en sí. De la misma forma, el deslizamiento tangencial \mathbf{g}_T se divide en dos partes:

$$\mathbf{g}_T = \mathbf{g}_T^e + \mathbf{g}_T^p$$

El primer sumando, \mathbf{g}_T^e , refleja la primera etapa. Representa la parte elástica del deslizamiento y se corresponde con la deformación elástica de las asperidades, teniendo un valor muy pequeño, hasta el punto de que es habitual considerar que es cero. El segundo término, \mathbf{g}_T^p o deslizamiento plástico, corresponde con el valor del deslizamiento entre las superficies.

La primera etapa se caracteriza, por tanto, por la adhesión entre las superficies o la deformación de las asperidades, por lo que se cumple que:

$$\mathbf{g}_T^e = 0 \quad (5.5)$$

ecuación que supone una restricción semejante a la expresada por la condición de impenetrabilidad en la dirección normal, o bien

$$\mathbf{t}_T = k_T \mathbf{g}_T^e$$

donde k_T representa la rigidez lateral de las asperidades y \mathbf{t}_T es la fuerza de rozamiento. Ambas formulaciones son equivalentes si se utiliza el método de la penalización para regularizar el problema de contacto.

Una vez que se ha alcanzado el valor máximo de esfuerzo cortante, los cuerpos empiezan a deslizarse y esa ecuación ya no es válida, teniendo que considerar una ley diferente. En el presente desarrollo esa ley es la ley clásica de Coulomb, utilizando el valor de coeficiente de rozamiento según la ley binomial de Kragelskii et al. [1982]:

$$\mathbf{t}_T = -\mu t_N \frac{\mathbf{g}_T}{\|\mathbf{g}_T\|}$$

$$\|\mathbf{t}_T\| = \mu t_N$$

donde μ es el valor que se señala en la ecuación (4.11). Esa ley da el valor del esfuerzo tangencial en el momento en que empieza el deslizamiento, por lo que es el valor máximo que puede tomar dicho esfuerzo. Así, la condición de deslizamiento puede expresarse como:

$$\Phi = \|\mathbf{t}_T\| - \mu t_N = \|\mathbf{t}_T\| - \alpha |t_N|^n - \beta |t_N| \leq 0 \quad (5.6)$$

siendo

$$\alpha = \frac{A\tau_0}{(AH)^n}$$

Para obtener la ecuación (5.6) se ha hecho uso de la ley binomial de Kragelskii (ec. (4.11)) y de la relación de área real y área aparente de Woo y Thomas (ec. (4.1)).

El problema de la fricción, con las dos etapas comentadas anteriormente, se asemeja al problema de plasticidad correspondiente al comportamiento rígido-perfectamente plástico (figura 5.3), por lo que se utiliza dicha analogía para formular las ecuaciones.

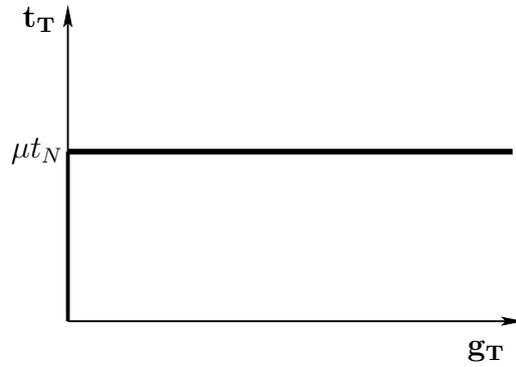


Figura 5.3: Modelo de rozamiento de Coulomb.

Así, se puede postular una regla de deslizamiento asociada que indica que la dirección de deslizamiento está definida por el gradiente de la condición de deslizamiento:

$$\dot{g}_N^p = \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial t_N}, \quad \dot{\mathbf{g}}_T^p = \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{t}_T} \quad (5.7)$$

Siguiendo la analogía de la plasticidad, Φ ocuparía el lugar del criterio de fluencia y $\dot{\mathbf{g}}_T^p$ el de la parte desviadora de la deformación. Sin embargo, la ec. (5.7) llevaría a desplazamientos en la dirección normal que producirían disipación negativa. Por lo tanto, según indicaron Michalowski y Mroz [1978], en la formulación del problema de la fricción es necesario acudir a una regla de deslizamiento no asociada en combinación con (5.6):

$$\dot{g}_N^p = 0, \quad \dot{\mathbf{g}}_T^p = \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{t}_T} = \lambda \frac{\mathbf{t}_T}{\|\mathbf{t}_T\|}$$

Uno de los inconvenientes de esta formulación es que al desarrollar las ecuaciones para incluirlas en un código de elementos finitos, se llega a una matriz de rigidez no simétrica. Eso puede solucionarse o bien utilizando un método de resolución no simétrico, o bien usando algún algoritmo previo a la fase de solución que haga simétrica esa matriz.

Con todo lo anterior, las ecuaciones que rigen el problema de contacto en la dirección tangente cuando el fenómeno de fricción está presente son:

$$\Phi = \|\mathbf{t}_T\| - \alpha |t_N|^n - \beta |t_N| \leq 0$$

$$\dot{\mathbf{g}}_T^p = \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{t}_T}$$

$$\lambda \geq 0$$

$$\lambda \Phi = 0 \tag{5.8}$$

La ecuación (5.8) indica que únicamente puede haber deslizamiento cuando $\Phi = 0$, es decir, cuando $\|\mathbf{t}_T\| = \alpha |t_N|^n + \beta |t_N|$. Si $\|\mathbf{t}_T\| < \alpha |t_N|^n + \beta |t_N|$, entonces se estaría en la fase de adhesión y $\mathbf{g}_T = \mathbf{g}_T^e$.

5.1.3. Problema de contorno global

Si se supone que cada cuerpo está sometido a unas fuerzas másicas \mathbf{f} y a unas fuerzas $\bar{\mathbf{t}}$ en el contorno, el problema global que hay que resolver consta de la ecuación de equilibrio (para cada cuerpo i):

$$\operatorname{div} \sigma^{(i)} + \mathbf{f}^{(i)} = 0 \quad \text{en } \Omega^{(i)} \quad (5.9)$$

sometida a las condiciones de contorno

$$\sigma^{(i)} \mathbf{n}^{(i)} = \bar{\mathbf{t}}^{(i)} \quad \text{en } \Gamma_\sigma^{(i)} \quad (5.10)$$

$$\mathbf{u}^{(i)} = \bar{\mathbf{u}}^{(i)} \quad \text{en } \Gamma_u^{(i)} \quad (5.11)$$

siendo $\Gamma_\sigma^{(i)} \cup \Gamma_u^{(i)} \cup \Gamma = \partial\Omega^{(i)}$ y $\Gamma_\sigma^{(i)} \cap \Gamma_u^{(i)} = \emptyset$. Además, σ es el tensor de tensiones de Cauchy, \mathbf{n} es el vector normal saliente en la superficie $\Gamma_\sigma^{(i)}$ y $\bar{\mathbf{u}}$ es el vector de desplazamientos prescritos en $\Gamma_u^{(i)}$.

Esas condiciones son las que se encuentran en un problema tradicional de mecánica del sólido. Las condiciones que hay que añadir debido a la presencia del contacto son, como se ha visto en la descripción de la interfaz de contacto:

$$g_N \geq 0, \quad t_N \leq 0, \quad t_N g_N = 0, \quad t_N \dot{g}_N = 0 \quad (5.12)$$

$$\Phi = \|\mathbf{t}_T\| - \alpha |t_N|^n - \beta |t_N| \leq 0 \quad (5.13)$$

$$\dot{\mathbf{g}}_T = \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{t}_T} \quad (5.14)$$

$$\lambda \geq 0 \quad (5.15)$$

$$\lambda \Phi = 0 \quad (5.16)$$

La ec. (5.12) representa el comportamiento en la dirección normal (condiciones de Kuhn-Tucker). Las ecuaciones (5.13)-(5.16) representan el comportamiento en la dirección tangencial (fricción).

Se admite que la ley de comportamiento a la que obedece el material, es decir, la relación entre σ y \mathbf{u} (o ε) puede ser cualquiera, ya que las ecuaciones de contacto se refieren

únicamente a la superficie misma de contacto y la ley de comportamiento del material no afecta al tratamiento del problema de contacto.

El problema se basa en encontrar un campo de desplazamientos \mathbf{u} tal que se satisfagan todas las ecuaciones (5.9-5.16). Para ello se utiliza el método de los elementos finitos, por lo que es necesario reformular el problema para tener las ecuaciones en una forma adecuada para la aplicación de ese método.

5.2. Tratamiento numérico del problema

5.2.1. Regularización de las restricciones

La presencia de desigualdades en las condiciones de Kuhn-Tucker, hacen complicado su tratamiento numérico. Para su resolución numérica, es necesario transformar esas desigualdades en igualdades equivalentes, para lo que hay tres formas diferentes de hacerlo: el método de la penalización, el de los multiplicadores de Lagrange y el de las leyes de comportamiento.

El método más habitual y sencillo es el de la penalización. Consiste en suponer una relación:

$$t_N = f(g_N) = k_N g_N$$

donde k_N es una constante y se denomina penalizador. Para que, en el caso de que haya contacto, se cumpla exactamente la condición (5.3), k_N tendría que tomar un valor infinito. Como ésto no es posible, a k_N se le da un valor tan grande como sea posible ($10^6 - 10^{10}$). No puede alcanzar un valor demasiado elevado porque al llegar a determinados valores el problema se vuelve mal acondicionado y no se logra la convergencia. Físicamente, el método de la penalización se puede interpretar como la existencia de una rigidez muy elevada entre las dos superficies de contacto, siendo k_N el valor de esa rigidez (figura 5.4).

Sin embargo, el método más completo y en el que se incorpora la física de las superficies

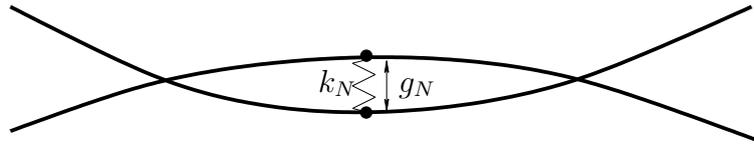
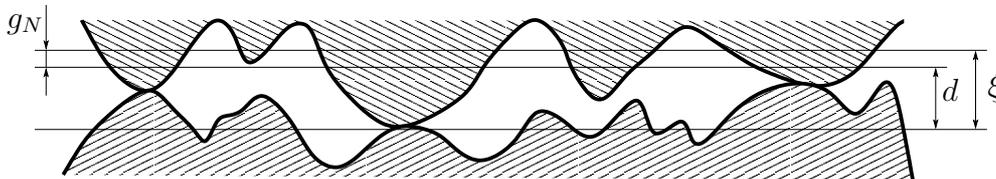


Figura 5.4: Método de la penalización.

es el de las leyes de comportamiento. En él, mediante una ley de forma general

$$t_N = f(d) \quad \text{o} \quad d = h(t_N) \quad (5.17)$$

se relaciona la presión de contacto con la distancia entre los planos medios de las dos superficies que entran en contacto (figura 5.5), teniendo en cuenta la deformación de sus asperezas. Utilizando la relación $g_N = \xi - d$, siendo ξ la distancia inicial entre planos medios, se puede considerar g_N como el acercamiento entre esos planos medios causado por la deformación de las asperezas. Mediante esa relación se puede aplicar el método de las leyes de comportamiento a la formulación arriba indicada.

Figura 5.5: Relación de d , distancia entre planos medios, con ξ , distancia inicial y con g_N , función penetración.

La mayoría de las leyes de comportamiento de una interfaz pueden escribirse en la forma (5.17).

5.2.2. Ley de comportamiento propuesta: dilatación

Antes de pasar a describir el modelo propuesto, se hace un resumen de las consideraciones tenidas en cuenta para su formulación. Como ya se ha comentado en el capítulo 2, en los procesos de fractura en modos de deslizamiento (modos II ó III) se produce el fenómeno

conocido como *dilatación*, que es simplemente la presencia de una fuerza normal entre las caras de la grieta, provocada por la presencia de la rugosidad, al haber un deslizamiento entre ellas. Los análisis típicos de grietas cerradas suponen superficies de las caras planas y la resistencia al deslizamiento de las caras de la grieta se modelan con la ley de Coulomb aplicada a las superficies en contacto. Este tratamiento tiene una pega fundamental al ser aplicado en casos de modos II ó III. En esos casos, donde no exista carga normal aplicada (por ejemplo, un eje trabajando a torsión), el uso de la ley de Coulomb no llevaría a nada, puesto que al ser la fuerza de rozamiento proporcional a la fuerza normal y no existir ésta, la fuerza de rozamiento sería cero. Existen otros modelos en la bibliografía (ver capítulo 2) que han incorporado la dilatación, pero lo han hecho suponiendo las asperidades rígidas y una ley de Coulomb entre las superficies de las asperidades (Figura 5.6). Así, relacionan el desplazamiento en la dirección tangente (u_x) con el de la dirección normal por medio del ángulo medio de las asperidades (θ), y a partir de ahí calculan la fuerza normal y la fuerza de rozamiento de Coulomb que le correspondería a cada asperidad.

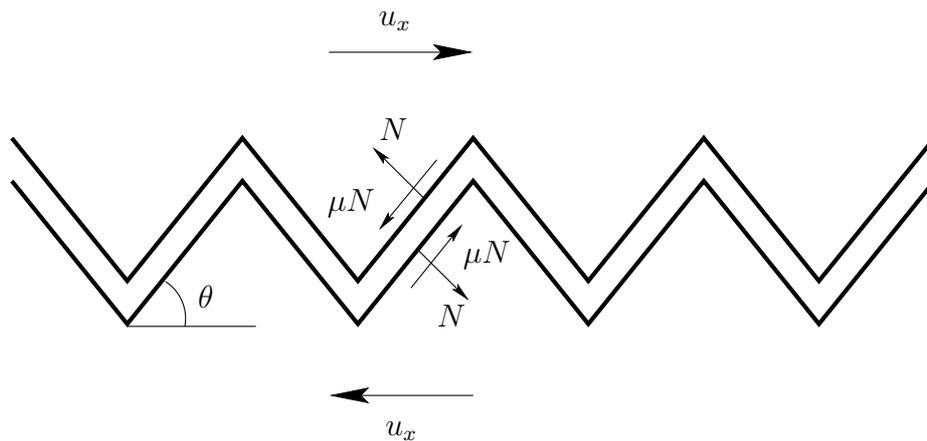


Figura 5.6: Dilatación.

En el modelo que aquí se propone, sin embargo, se caracteriza la interfaz con sus propiedades mecánicas y se tienen en cuenta las deformaciones de las asperidades en los cálculos.

Como ya se ha indicado, se ha utilizado como ley de comportamiento en la dirección normal la ley de Song y Yovanovich [1987] (ec. (4.9)), de igual forma que en Zavarise et al. [1992a], Zavarise et al. [1992b] y en Wriggers y Zavarise [1993]. Esta ley se ha

modificado según ya hizo Cantizano [2003], para incluir la relación obtenida por Woo y Thomas entre el área real y el área aparente de contacto:

$$\frac{A_r}{A} = \left(\frac{P}{H} \right)^n$$

donde $n = 5/6$. Así, la fuerza normal de contacto, t_N , se obtiene como función del acercamiento entre planos medios de la forma:

$$t_N = AP = Ac_1 \left(1617646.152 \frac{\sigma}{m} \right)^{c_2} \frac{\exp \left[-(\xi - g_N)^2 \frac{1+0.071nc_2}{(1.363\sigma)^2} \right]}{5.589^{(1+0.071nc_2)/n}}$$

donde g_N se muestra en la figura 5.5.

Denominando:

$$K_1 = \frac{c_1 \left(1617646.152 \frac{\sigma}{m} \right)^{c_2}}{5.589^{(1+0.071nc_2)/n}}$$

$$K_2 = -\frac{1 + 0.071nc_2}{(1.363\sigma)^2}$$

se puede escribir la ecuación anterior de forma simplificada como:

$$t_N = AK_1 \exp [K_2 (\xi - g_N)^2] = f(g_N) \quad (5.18)$$

Debido a la función de correlación introducida (ec. (4.5)), la ley de comportamiento obtenida puede aplicarse sólo a un rango de valores de P/H ($10^{-5} < P/H < 10^{-2}$). Fuera de ese rango, la ley se completa con dos dependencias lineales.

En la formulación tradicional, g_N representa la deformación en la dirección normal debida a las cargas externas a las que los cuerpos están sometidos. En el caso que nos ocupa, donde se contempla el fenómeno de la dilatación, no sólo contiene esa deformación sino que también la que se deriva de un desplazamiento tangencial. Así, g_N se puede definir como:

$$g_N = g_{Ne} + g_{Nd}$$

donde g_{Ne} es el desplazamiento normal debido a las cargas externas y g_{Nd} el debido a la dilatación. Se ha supuesto en este modelo que g_{Nd} y el desplazamiento tangencial están relacionados mediante la pendiente media de las asperidades m , de la siguiente forma:

$$g_{Nd} = g_T m = \|\mathbf{g}_T\| m$$

Físicamente, el valor de g_{Nd} está limitado. La deformación en la dirección normal nunca podrá superar el valor inicial de la distancia entre planos medios (ξ):

$$g_{Nd} \leq \xi \quad (5.19)$$

En adelante, para la derivación de la formulación, se supondrá que $g_{Ne} = 0$. En otras palabras, que g_N está formado sólo por la aportación debida al desplazamiento tangencial (dilatación), puesto que la formulación para la situación en la que $g_{Ne} \neq 0$ es la habitual y puede encontrarse en la bibliografía.

5.2.3. Formulación débil del problema

El problema que se ha formulado en el apartado 5.1.3 debe ser reformulado, utilizando el principio de los trabajos virtuales, para adecuarlo al método de los elementos finitos.

Sea V el conjunto de los desplazamientos admisibles. Cualquier miembro v de V es suficientemente suave para que todas las operaciones matemáticas necesarias estén bien definidas. Al considerar los desplazamientos admisibles, también se incluye la condición de impenetrabilidad ($g_N \geq 0$). Si \mathbf{u} es la solución al problema, $\mathbf{u} \in V$. Sea σ la tensión producida por \mathbf{u} y $\delta\mathbf{u}$ un desplazamiento virtual admisible definido como $\delta\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{u}$. Entonces, el principio de los trabajos virtuales se formula como:

$$\begin{aligned} G^{(i)}(\mathbf{u}^{(i)}) &= \int_{\Omega^{(i)}} \sigma^{(i)} \cdot \text{grad}(\delta\mathbf{u}^{(i)}) d\Omega - \int_{\Omega^{(i)}} \mathbf{f}^{(i)} \cdot \delta\mathbf{u}^{(i)} d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma^{(i)}} \bar{\mathbf{t}}^{(i)} \cdot \delta\mathbf{u}^{(i)} d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma^{(i)}} \left(-t_N^{(i)} \delta u^{(i)} - \mathbf{t}_T^{(i)} \delta \mathbf{u}^{(i)}_T \right) d\Gamma \end{aligned}$$

Únicamente se van a tratar los términos del contacto (término de la derecha), ya que el tratamiento de las ecuaciones de los sólidos es el habitual. Al considerar el contacto entre los dos cuerpos:

$$\begin{aligned}
 G(\mathbf{u}) &= G^{(1)}(\mathbf{u}^{(1)}) + G^{(2)}(\mathbf{u}^{(2)}) = \int_{\Gamma} \left[-t_N^{(1)} \delta(u^{(1)} - u^{(2)}) - \mathbf{t}_T^{(1)} \delta(\mathbf{u}^{(1)}_T - \mathbf{u}^{(2)}_T) \right] d\Gamma = \\
 &= \int_{\Gamma} [-t_N \delta g_N - \mathbf{t}_T \delta \mathbf{g}_T] d\Gamma
 \end{aligned} \tag{5.20}$$

junto con las restricciones:

$$t_N = f(g_N) \tag{5.21}$$

$$\Phi = \|\mathbf{t}_T\| - \alpha |t_N|^n - \beta |t_N| \leq 0 \tag{5.22}$$

$$\dot{\mathbf{g}}_T - \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{t}_T} = \frac{1}{k_T} \dot{\mathbf{t}}_T \tag{5.23}$$

$$\lambda \geq 0 \tag{5.24}$$

$$\lambda \Phi = 0 \tag{5.25}$$

donde la ecuación (5.21) es la ley de comportamiento en la dirección normal (ec. (5.18)) y k_T es el valor de la rigidez de las asperidades en la dirección tangencial, en la fase de adhesión o “stick”. En ese caso, $\lambda = 0$.

5.2.4. Resolución del problema

5.2.4.1. Integración temporal

Se trata de resolver el problema (5.20), donde t_N y \mathbf{t}_T están definidos por las ecuaciones (5.21-5.25). El problema hay que resolverlo de forma incremental a lo largo del intervalo

de tiempo de definición del problema:

$$[0, T] = \bigcup_{n=1}^N [t_n, t_{n+1}]$$

En cada incremento de tiempo, se empieza con la ecuación (5.20) satisfecha en el instante de tiempo t_n y se busca cumplirla en t_{n+1} sujeta a la ley de evolución (5.23). Para integrar esas ecuaciones se utiliza el método de *Euler hacia atrás* combinado con el algoritmo de *return mapping*. Ambos son métodos muy utilizados en la teoría de la plasticidad. Dentro de cada intervalo de tiempo, el sistema de ecuaciones se resuelve utilizando el método de Newton-Raphson.

La ecuación a resolver es:

$$G(\mathbf{u}_{n+1}, \delta \mathbf{u}) = \int_{\Gamma} [-t_{N_{n+1}} \delta g_N - \mathbf{t}_{T_{n+1}} \cdot \delta \mathbf{g}_T] d\Gamma$$

donde $\{\mathbf{u}_{n+1}, t_{N_{n+1}}, \mathbf{t}_{T_{n+1}}\}$ corresponden a $t = t_{n+1}$.

En la dirección normal (ec. 5.21):

$$t_{N_{n+1}} = f(g_{N_{n+1}})$$

Para la dirección tangencial, se parte de un estado de “prueba” inicial de adhesión (“trial”). En ese caso $\lambda = 0$ y la fuerza de rozamiento es, según la ecuación (5.23):

$$\mathbf{t}_{T_{n+1}}^{trial} = \mathbf{t}_{T_n} + k_T (\mathbf{g}_{T_{n+1}} - \mathbf{g}_{T_n}) \quad (5.26)$$

donde el subíndice n se refiere al paso de tiempo anterior.

Una vez obtenido el valor de la fuerza de rozamiento de “prueba”, se calcula la condición de deslizamiento:

$$\Phi_{n+1}^{trial} = \|\mathbf{t}_{T_{n+1}}^{trial}\| - \alpha |t_{N_{n+1}}|^n - \beta |t_{N_{n+1}}|$$

Si $\Phi_{n+1}^{trial} \leq 0$, realmente los cuerpos se encuentran en el estado de adhesión, no existe deslizamiento, y el cálculo estimado del esfuerzo tangencial es correcto:

$$\mathbf{t}_{T_{n+1}} = \mathbf{t}_{T_{n+1}}^{trial}$$

Si, por el contrario, $\Phi_{n+1}^{trial} > 0$, significa que no existe adhesión, por lo que hay que rectificar la estimación hecha. Por tanto, al haber deslizamiento, la fuerza de rozamiento es:

$$\mathbf{t}_{T_{n+1}} = (\alpha |t_{N_{n+1}}|^n + \beta |t_{N_{n+1}}|) \frac{\mathbf{t}_{T_{n+1}}^{trial}}{\|\mathbf{t}_{T_{n+1}}^{trial}\|} \quad (5.27)$$

5.2.4.2. Linealización de las ecuaciones

El método de Newton-Raphson se puede resumir en:

$$DG(\mathbf{u}^i)\Delta\mathbf{u}^{i+1} = -G(\mathbf{u}^i)$$

$$\mathbf{u}^{i+1} = \mathbf{u}^i + \Delta\mathbf{u}^{i+1}$$

El operador D implica la derivada direccional del vector $G(\mathbf{u}^i)$, que da lugar a la matriz tangente $K_T(\mathbf{u}^i) = DG(\mathbf{u}^i)$. El término $-G(\mathbf{u}^i)$ es el vector de fuerzas, o residuo. El superíndice i representa el número de iteración dentro del bucle del método de Newton-Raphson.

Sólo se indica aquí la linealización de la parte correspondiente al elemento de contacto y en concreto la que se tiene cuando sólo existe dilatación ($g_N = g_{Nd} = \|\mathbf{g}_T\| m$):

$$\Delta \left[\int (t_N \delta g_N + \mathbf{t}_T \delta \mathbf{g}_T) d\Gamma \right] = \sum [\Delta (t_N \delta g_N + \mathbf{t}_T \delta \mathbf{g}_T)] A$$

donde A es el área del elemento y

$$\mathbf{t}_T \delta \mathbf{g}_T = t_{T_1} \delta g_{T_1} + t_{T_2} \delta g_{T_2} = t_{T_i} \delta g_{T_i}$$

Linealización del término de la dirección normal

$$\Delta(t_N \delta g_N) = \frac{\partial t_N}{\partial g_N} \Delta g_N \delta g_N + \frac{\partial t_N}{\partial g_{T_i}} \Delta g_{T_i} \delta g_N + t_N \Delta \delta g_N$$

El tercer término puede ser despreciado, por ser de orden superior. Debido al límite existente para el valor de g_{Nd} (ec. (5.19)), hay que diferenciar la linealización en dos tramos: para $g_{Nd} < \xi$ y para $g_{Nd} = \xi$. Teniendo en cuenta (5.18):

- $g_{Nd} < \xi$. En este caso:

$$\frac{\partial t_N}{\partial g_N} = 0$$

$$\frac{\partial t_N}{\partial g_{T_i}} = -2K_1 K_2 m \frac{g_{T_i}}{\|\mathbf{g}_T\|} (\xi - \|\mathbf{g}_T\| m) \exp(K_2 (\xi - \|\mathbf{g}_T\| m)^2) \quad (5.28)$$

Por lo que el término linealizado es:

$$\Delta(t_N \delta g_N) = -2K_1 K_2 m \frac{g_{T_i}}{\|\mathbf{g}_T\|} (\xi - \|\mathbf{g}_T\| m) \exp(K_2 (\xi - \|\mathbf{g}_T\| m)^2) \Delta g_{T_i} \delta g_N \quad (5.29)$$

- $g_{Nd} = \xi$. En este caso:

$$\frac{\partial t_N}{\partial g_N} = \frac{\partial t_N}{\partial g_{T_i}} = 0 \quad (5.30)$$

y

$$\Delta(t_N \delta g_N) = 0$$

Linealización del término de la dirección tangencial

En lo que sigue se utilizan los subíndices $i, j = 1, 2$ para hacer referencia a las dos direcciones en el plano tangente, $n + 1$ representa el instante de tiempo actual y n representa el anterior instante de tiempo.

El desarrollo de la linealización es:

$$\Delta (t_{T_i} \delta g_{T_i}) = \frac{\partial t_{T_i}}{\partial g_N} \Delta g_N \delta g_{T_i} + \frac{\partial t_{T_i}}{\partial g_{T_j}} \Delta g_{T_j} \delta g_{T_i} + t_{T_i} \Delta \delta g_{T_i} \quad (5.31)$$

donde el último término puede despreciarse por ser de orden superior.

- Estado de adhesión:

Teniendo en cuenta (5.26):

$$\frac{\partial t_{T_i}}{\partial g_N} = 0$$

$$\frac{\partial t_{T_i}}{\partial g_{T_j}} = k_T \Delta g_{T_j} \delta g_{T_i}$$

Por lo que queda:

$$\Delta (t_{T_i} \delta g_{T_i}) = k_T \Delta g_{T_j} \delta g_{T_i} \quad (5.32)$$

- Estado de deslizamiento:

En este caso hay que volver a tener en cuenta los dos tramos de g_{Nd} :

- $g_{Nd} < \xi$. Utilizando las ecuaciones (5.26) y (5.27), queda:

$$\frac{\partial t_{T_i}}{\partial g_N} = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial t_{T_i}}{\partial g_{T_j}} &= \frac{\partial t_{T_i}}{\partial t_{T_j}^{trial}} \frac{\partial t_{T_j}^{trial}}{\partial g_{T_j}} = (\alpha n t_{N_{n+1}}^{n-1} + \beta) \frac{\partial t_{N_{n+1}}}{\partial g_{T_j}} d_i + \\ &+ (-1)^{i+j} (\alpha t_{N_{n+1}}^n + \beta t_{N_{n+1}}) k_T \frac{d_{i+1} d_{j+1}}{\left\| \mathbf{t}_{T_{n+1}}^{trial} \right\|} \end{aligned} \quad (5.33)$$

donde $d_i = \frac{t_{T_{n+1}}^{trial}}{\|t_{T_{n+1}}^{trial}\|}$, que representa la descomposición de la fuerza de rozamiento en las dos direcciones del plano tangente. Por lo tanto la ecuación linealizada queda

$$\Delta(t_{T_i} \delta g_{T_i}) = \left[(\alpha n t_{N_{n+1}}^{n-1} + \beta) \frac{\partial t_{N_{n+1}}}{\partial g_{T_j}} d_i + (-1)^{i+j} (\alpha t_{N_{n+1}}^n + \beta t_{N_{n+1}}) k_T \frac{d_{i+1} d_{j+1}}{\|t_{T_{n+1}}^{trial}\|} \right] \Delta g_{T_j} \delta g_{T_i} \quad (5.34)$$

- $g_{Nd} = \xi$. En este caso:

$$\frac{\partial t_{T_i}}{\partial g_N} = 0$$

$$\frac{\partial t_{T_i}}{\partial g_{T_j}} = \frac{\partial t_{T_i}}{\partial t_{T_j}^{trial}} \frac{\partial t_{T_j}^{trial}}{\partial g_{T_j}} = (\alpha t_{N_{n+1}}^n + \beta t_{N_{n+1}}) k_T \frac{d_{i+1} d_{j+1}}{\|t_{T_{n+1}}^{trial}\|} \quad (5.35)$$

Por lo tanto la ecuación linealizada es

$$\Delta(t_{T_i} \delta g_{T_i}) = (\alpha t_{N_{n+1}}^n + \beta t_{N_{n+1}}) k_T \frac{d_{i+1} d_{j+1}}{\|t_{T_{n+1}}^{trial}\|} \Delta g_{T_j} \delta g_{T_i} \quad (5.36)$$

5.2.4.3. Discretización espacial

La geometría del elemento utilizado se representa en la figura 5.7. Se puede observar que es la misma geometría del elemento cohesivo, por lo que es perfectamente compatible con él.

El algoritmo de contacto se aplica a los pares de nodos 1-5, 2-6, 3-7 y 4-8, a la vez que se aplica la ley cohesiva.

Para la determinación de las matrices de rigidez y los vectores de fuerzas, se definen los siguientes vectores a nivel del elemento:

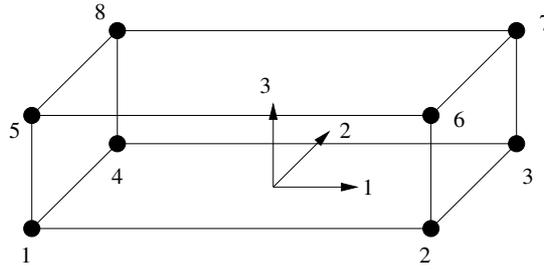


Figura 5.7: Geometría del elemento utilizado.

$$N = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad T_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y para cada pareja de nodos (en este caso aplicado al par 1-5):

$$U = \begin{bmatrix} X_1 + u_1 \\ Y_1 + v_1 \\ Z_1 + w_1 \\ X_5 + u_5 \\ Y_5 + v_5 \\ Z_5 + w_5 \end{bmatrix},$$

donde (u_i, v_i, w_i) representa el vector de desplazamientos correspondiente al nodo i y (X_i, Y_i, Z_i) representa las coordenadas de referencia del nodo i . La estructura de los cuatro vectores es semejante: las tres primeras componentes representan las tres direcciones del espacio en la superficie inferior del elemento (nodos 1, 2, 3 y 4), y las tres últimas también pero en la superficie superior (nodos 5, 6, 7 y 8). El vector U representa la posición actual de los nodos 1 y 5. El vector N es la normal al elemento, y T_1 y T_2 los vectores tangentes.

5.2.4.4. Matrices de rigidez y vectores de fuerzas

Matriz de rigidez en la dirección normal

Según la definición de g_{Nd} y con la discretización especificada, la deformación normal se calcula como:

$$g_N = g_{Nd} = m\sqrt{g_{T_1}^2 + g_{T_2}^2} = m\sqrt{(U^T T_1)^2 + (U^T T_2)^2}$$

Y la variación de esa penetración:

$$\delta g_N = \frac{m}{\|\mathbf{g}_T\|} (U^T T_i \delta U^T T_i)$$

Sustituyéndolo en la ec. (5.29), se obtiene:

$$\Delta (t_N \delta g_N) = \frac{\partial t_N}{\partial g_{T_i}} \frac{m}{\|\mathbf{g}_T\|} \Delta U^T T_i (U^T T_j \delta U^T T_j)$$

$$\Delta (t_N \delta g_N) = \Delta U^T \left(\frac{\partial t_N}{\partial g_{T_i}} \frac{m}{\|\mathbf{g}_T\|} T_i (U^T T_j T_j^T) \right) \delta U$$

Por lo que la matriz de rigidez y el vector del residuo son:

$$K_N = \frac{\partial t_N}{\partial g_{T_i}} \frac{m}{\|\mathbf{g}_T\|} T_i (U^T T_j T_j^T)$$

$$R_N = AK_1 \exp [K_2 (\xi - g_N)^2] N$$

donde los valores de $\frac{\partial t_N}{\partial g_{T_i}}$ se han desarrollado en las ec. (5.28) y (5.30).

Matriz de rigidez en la dirección tangente

El deslizamiento y su variación se calculan como:

$$g_{T_i} = U^T T_i$$

$$\delta g_{T_i} = \delta U^T T_i$$

Como ya se vio anteriormente, se tienen que distinguir entre dos posibles estados: el de adhesión y el de deslizamiento. Y dentro del estado de deslizamiento se tiene que distinguir entre $g_N < \xi$ o $g_N = \xi$.

- Estado de adhesión:

Sustituyendo los valores de deslizamiento y su variación en la ecuación linearizada (5.32):

$$\Delta (t_{T_i} \delta g_{T_i}) = k_T \Delta g_{T_j} \delta g_{T_i} = k_T \Delta U^T T_j \delta U^T T_i = \Delta U^T (k_T T_j T_i^T) \delta U$$

la matriz de rigidez queda:

$$K_T^{adh} = A k_T T_j T_i^T$$

y el residuo:

$$R_T^{adh} = A \left[t_{T_{i_n}} + k_T (g_{T_{i_{n+1}}} - g_{T_{i_n}}) \right] T_i$$

- Estado de deslizamiento:

La ecuación (5.34) queda:

$$\begin{aligned} \Delta (t_{T_i} \delta g_{T_i}) &= \frac{\partial t_{T_i}}{\partial g_{T_j}} \Delta U^T T_j \delta U^T T_i \\ &= \Delta U^T \frac{\partial t_{T_i}}{\partial g_{T_j}} T_j T_i^T \delta U^T \end{aligned}$$

Y por tanto la matriz es:

$$K_T^{desl} = \frac{\partial t_{T_i}}{\partial g_{T_j}} T_j T_i^T$$

donde los valores de $\frac{\partial t_{T_i}}{\partial g_{T_j}}$ se han mostrado en las ecuaciones (5.33) y (5.35)

El vector del residuo es:

$$R_T^{desl} = (\alpha |t_{N_{n+1}}|^n - \beta |t_{N_{n+1}}|) d_i T_i$$

5.2.4.5. Resumen del algoritmo

El algoritmo de contacto se resume a continuación (ver figura 5.8). Para cada elemento cohesivo y para cada pareja de nodos:

1. $t = 0$. Establece valores iniciales.
2. $t = t + \Delta t$; $i = 0$
 - a) Chequea si hay contacto. Si no ($g_N > 0$) va a 4.
 - b) Comprueba el estado del material. Si es material sin dañar va a c). Si es parte de la grieta, va a d).
 - c) Aplica un contacto normal clásico (método de la penalización) para evitar la penetración entre nodos de material sólido. Calcula K_N^{pen} y K_N^{pen} . Va a i).
 - d) Calcula el desplazamiento tangencial y normal.
 - e) Entra en la fase de prueba del cálculo del rozamiento. Calcula la fuerza tangencial de prueba.
 - f) Comprueba la condición de deslizamiento, Φ . Si $\Phi \leq 0$ va a g). Si no, va a h).
 - g) Fase de adhesión. Calcula K_T^{adh} y R_T^{adh} . Va a i).
 - h) Fase de deslizamiento. Calcula K_T^{desl} y R_T^{desl} . Va a i).
 - i) Solución del sistema de ecuaciones, método de Newton-Raphson:

$$K(\mathbf{u}^i) \Delta \mathbf{u}^{i+1} = -G(\mathbf{u}^i) \quad (5.37)$$

j) Actualiza la solución:

$$\mathbf{u}^{i+1} = \mathbf{u}^i + \Delta\mathbf{u}^{i+1} \quad (5.38)$$

k) Chequea la tolerancia:

Si $E^i = \Delta\mathbf{u}^i G(\mathbf{u}^i) > \text{TOL}$, va a i). Si no, va a 3. (TOL es la tolerancia que se le quiera dar al error de la solución).

3. Siguiendo paso de tiempo, guarda variables históricas, va a 2.

4. Fin.

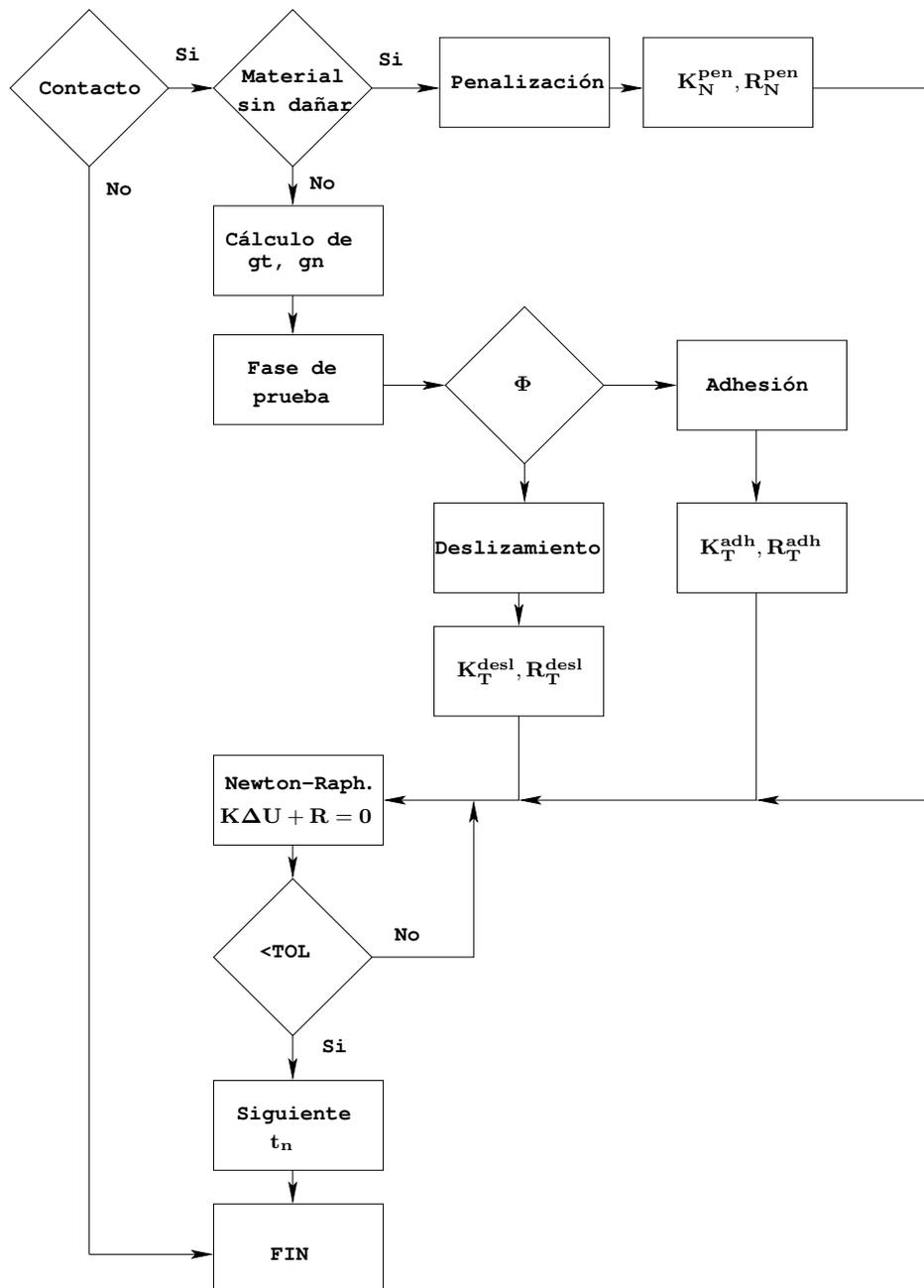


Figura 5.8: Algoritmo de la subrutina del elemento de contacto.

Capítulo 6

Resultados

En este capítulo se presentan los resultados de todas las pruebas realizadas con el elemento desarrollado. Ante la imposibilidad de llevar a cabo ensayos con medios propios para la validación de su comportamiento, se ha decidido buscar en la bibliografía algún ensayo fácilmente reproducible mediante métodos numéricos y en el que se pueda verificar el funcionamiento del modelo. Debido a que los ensayos de fatiga añaden complejidad y laboriosidad al problema, se ha elegido un ensayo en el que la carga se aplica en un único paso, y del que se disponía de todos los datos del material y de la geometría de las probetas utilizadas. En particular, el ensayo escogido fue realizado por Tschegg y Suresh [1988] y en él se pone de manifiesto la importancia del efecto de la interacción entre las caras de una grieta cuando existen condiciones de modo III de fractura. Tomando siempre como referencia ese ensayo, se han modelado dos probetas siguiendo el método de los elementos finitos, con las geometrías de las probetas del ensayo, y se les ha aplicado las cargas correspondientes al ensayo, con el propósito de reproducir los resultados.

6.1. Descripción de las probetas utilizadas

Con objeto de estudiar el efecto que produce la interferencia entre las caras de una grieta sobre la curva de resistencia de un material, Tschegg y Suresh [1988] realizaron una serie de ensayos de ejes a torsión utilizando varios tipos de probeta.

Las probetas eran cilindros con una entalla circunferencial en su sección central, como se muestra en la figura 6.1, y con las dimensiones que se representan en la tabla 6.1. Se utilizaron cinco geometrías diferentes de probeta, que se obtuvieron como se describe a continuación. Partiendo de cinco probetas iguales, se mecanizó cada una de ellas con una profundidad de entalla diferente, de tal forma que el ligamento central quedaba con $d_i = 7.9, 8.0, 8.38, 9.5$ y 9.96 mm respectivamente. Tras conseguir esa configuración, las probetas fueron sometidas a un proceso de carga de torsión cíclica ($R=-1$), bajo un par de amplitud constante, de $M = \pm 10$ a 40 Nm, con un número de ciclos de fatiga diferente en cada probeta. Este proceso generó un crecimiento de grieta a partir de la entalla, de $c = 0.2, 0.24, 0.44, 1$ y 1.23 mm respectivamente, en cada una de las cinco probetas. Después de la aparición de las grietas especificadas, las cinco probetas tenían **el mismo diámetro de ligamento central**, $d_i = 7.5$ mm, pero una **longitud de grieta inicial diferente**. Este procedimiento permite estudiar el efecto de la interferencia entre las caras de la grieta (en función de la longitud de la grieta inicial) bajo condiciones comparables de carga inicial, ya que el diámetro del ligamento central es el mismo para todas las probetas. La forma en la que se llevaron a cabo los ensayos, junto con los resultados obtenidos, se describen en el apartado 6.3.

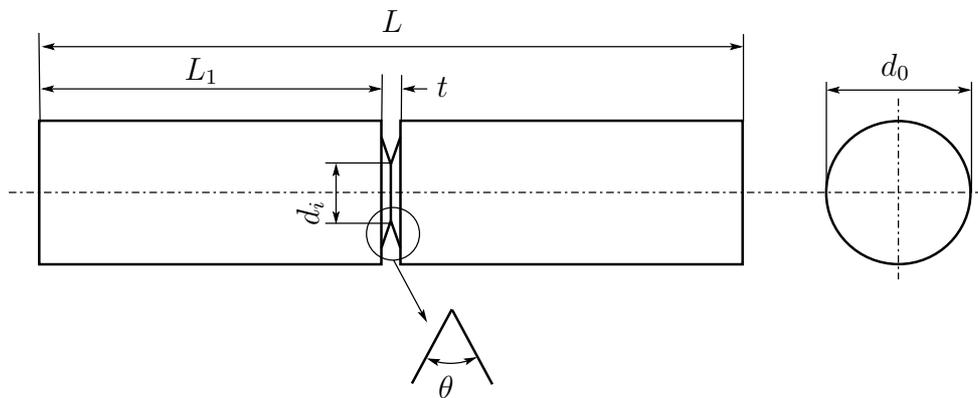


Figura 6.1: Geometría de las probetas utilizadas por Tschegg y Suresh [1988].

Para reproducir estos ensayos utilizando el modelo de fractura con fricción en las caras de la grieta propuesto en este trabajo, se han construido dos mallas de elementos finitos, equivalentes a las probetas de Tschegg de grieta inicial de 0.2 y 1.23 mm. El mallado de

$L = 142.5 \text{ mm}$
$L_1 = 70 \text{ mm}$
$t = 2.5 \text{ mm}$
$d_0 = 19.05 \text{ mm}$
$d_i = 7.5 \text{ mm}$
$\theta = 60^\circ$

Tabla 6.1: Dimensiones de las probetas.

las probetas estudiadas ha sido realizado con el programa de elementos finitos ANSYS.

En la figura 6.2 se muestran diferentes detalles del mallado correspondiente a la probeta de grieta inicial $c = 0.2 \text{ mm}$, y en la figura 6.3 el correspondiente a la probeta de grieta inicial $c = 1.23 \text{ mm}$. El mallado ha sido realizado siguiendo la forma tradicional de mallado cuando se utiliza el elemento cohesivo de fractura (ver capítulo 3); ésto es, el grueso de la probeta se ha mallado con elementos sólidos (en este caso se han utilizado elementos isoparamétricos elastoplásticos de ocho nodos) y el plano donde se producirá la propagación de la grieta (ligamento central) se ha mallado con elementos cohesivos. En las figuras 6.2 y 6.3 los elementos elastoplásticos aparecen en color rojo y los elementos cohesivos en color amarillo. La ley constitutiva del elemento elastoplástico utilizado se describe en el apéndice A.

Las condiciones de contorno que se han impuesto a las probetas en los cálculos realizados son las que se muestran en la figura 6.4. Los nodos pertenecientes al eje de simetría del cilindro tienen restringido su movimiento en el plano 1-2, pudiendo desplazarse únicamente a lo largo del eje 3. Además, los nodos pertenecientes a la cara extrema izquierda del cilindro, no pueden desplazarse en la dirección 3; sólo pueden hacerlo en su mismo plano 1-2.

Las condiciones de carga en todos los casos ha sido la misma: par aplicado en las dos caras del cilindro (figura 6.5).

El material empleado ha sido el que Tschegg empleó en sus ensayos, acero AISI 4340, típicamente utilizado para la construcción de ejes, tanto de vehículos de transporte como de componentes de centrales eléctricas (turbinas, alternadores). Algunas de las características de este material son citadas por Tschegg y Suresh [1988] y otras han sido conseguidas en la bibliografía. Los valores de las características usadas en los cálculos realizados se

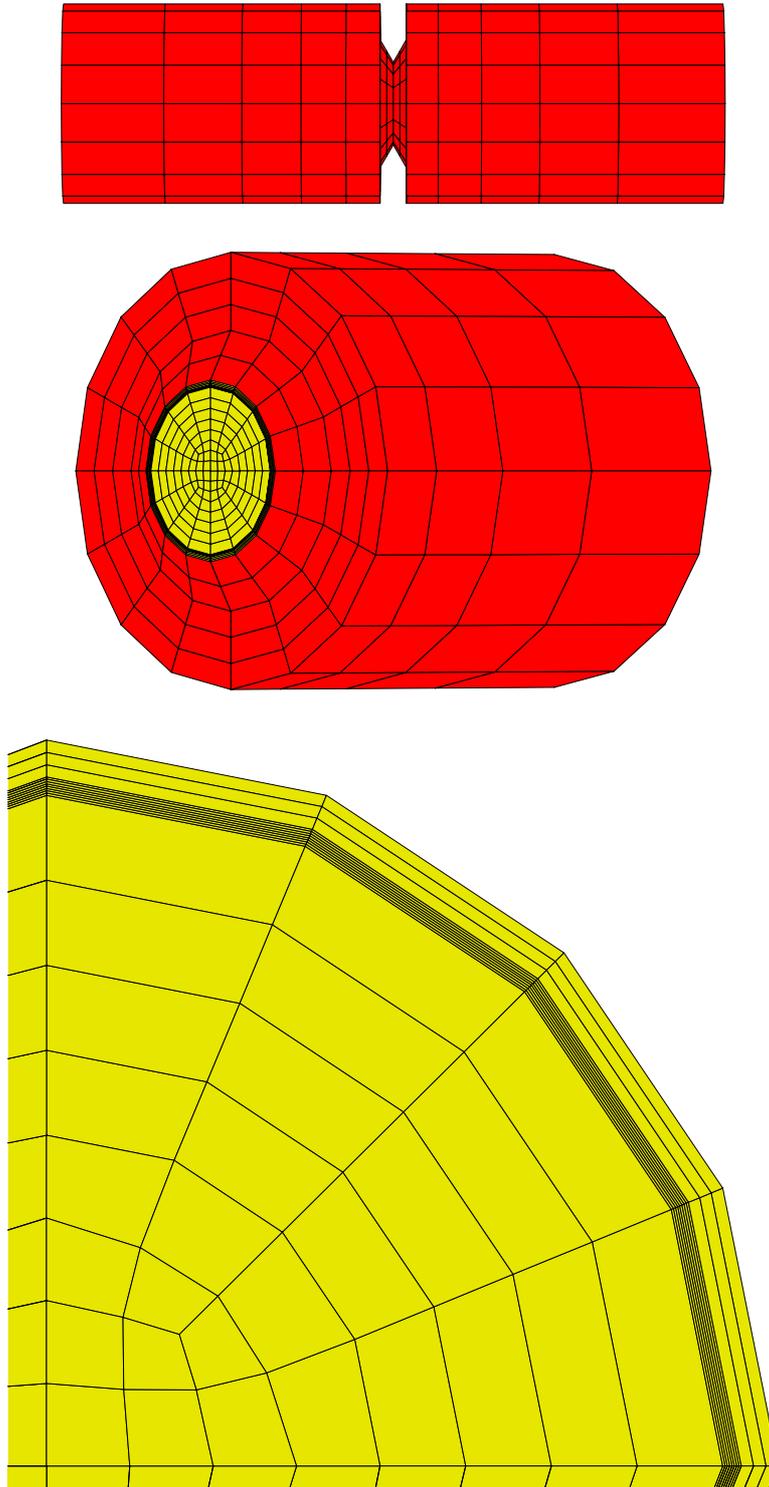


Figura 6.2: Modelo de la probeta de grieta inicial $c = 0.2$ mm.

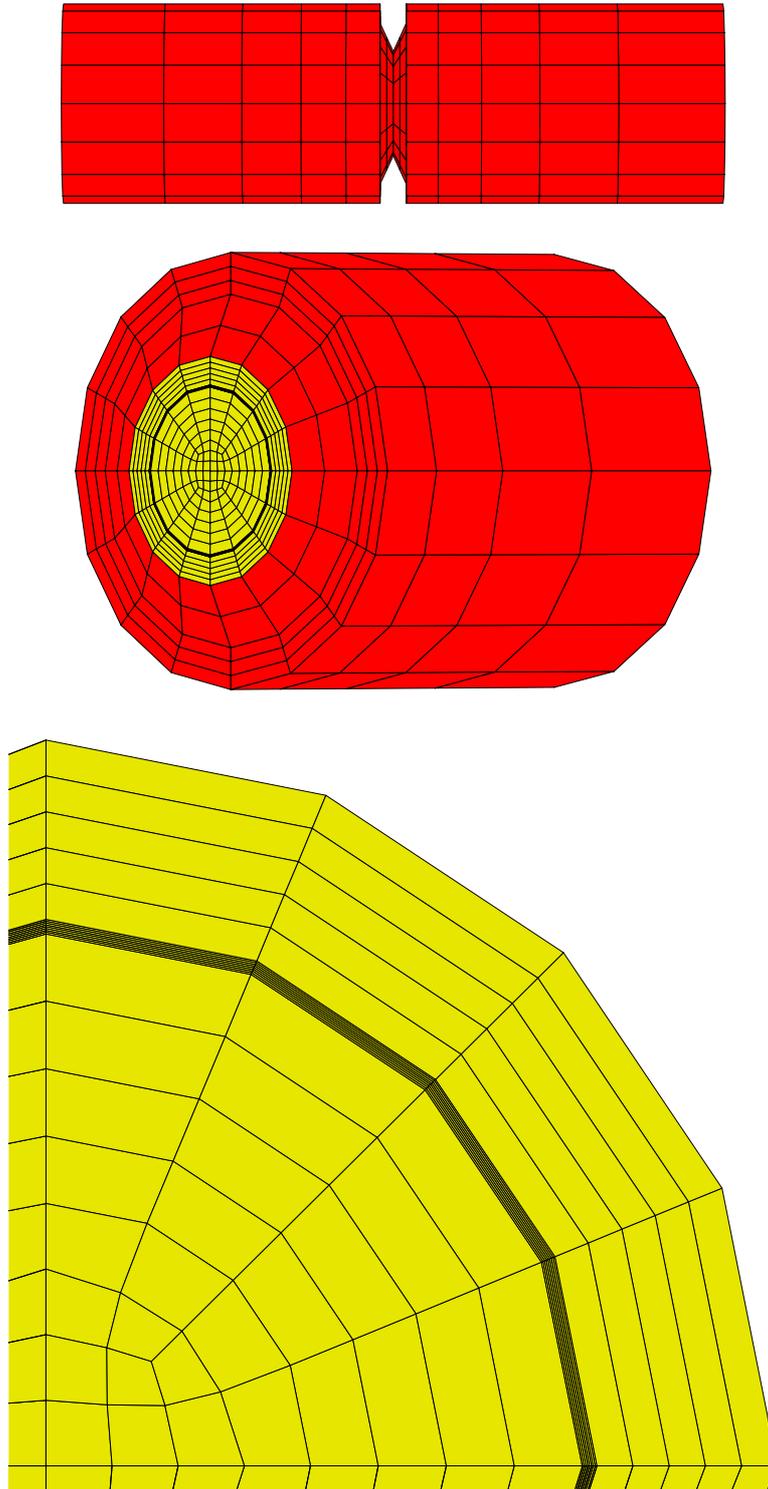


Figura 6.3: Modelo de la probeta de grieta inicial $c = 1.23$ mm.

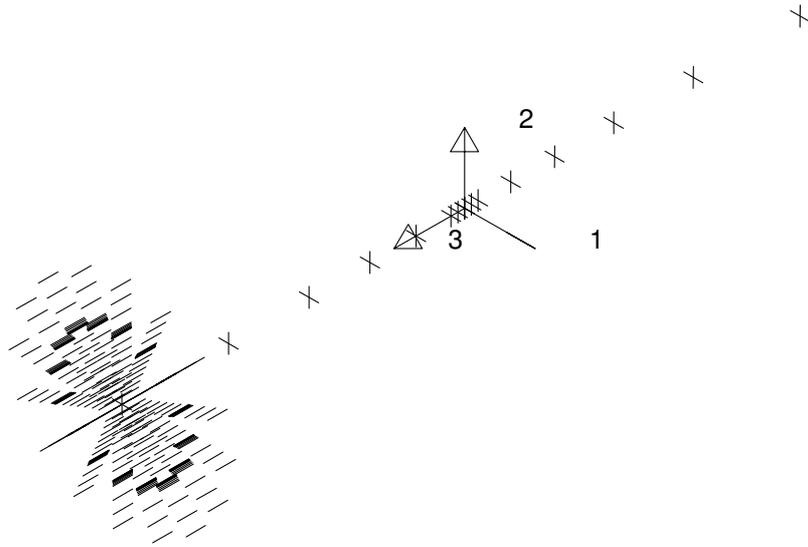


Figura 6.4: Condiciones de contorno del modelo.

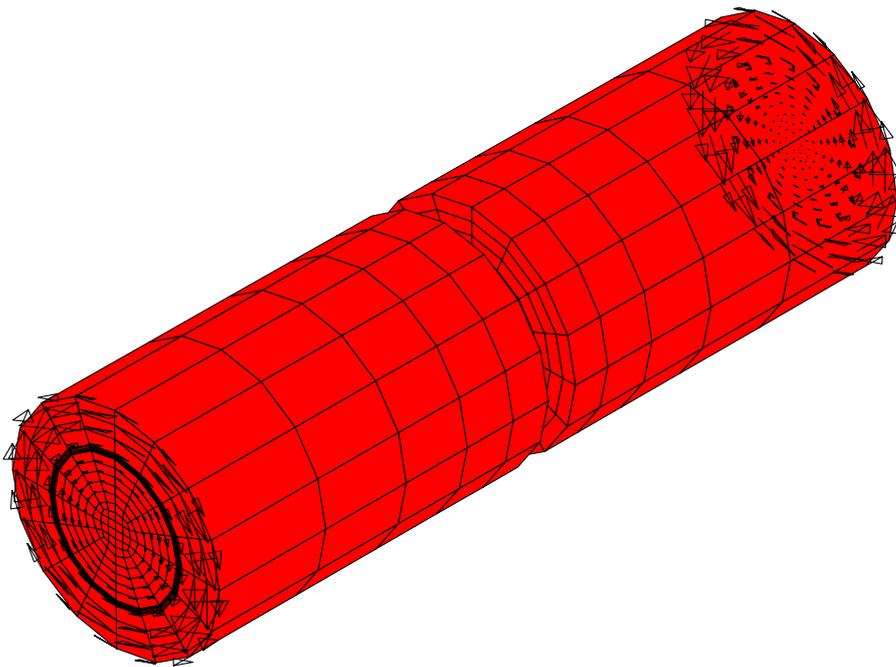


Figura 6.5: Carga aplicada.

resumen en la tabla 6.2.

Material elastoplástico	Elemento cohesivo
$E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$	$\sigma_c = 2105 \text{ MPa}$
$\nu = 0.3$	$G_c = 35 \text{ MPa mm}$
$\sigma_Y = 1625 \text{ MPa}$	$\beta = 0.6$
$\sigma_u = 2105 \text{ MPa}$	

Tabla 6.2: Valores de magnitudes mecánicas del material utilizado (AISI 4340)

6.2. Cálculo del coeficiente de intensificación de tensiones en modo III (K_{III})

Como punto de partida de los resultados que se presentarán posteriormente, se muestra a continuación una validación del cálculo del coeficiente de intensificación de tensiones, para las dos probetas que se han descrito en el apartado anterior y para diferentes valores de par aplicado. Como el objetivo es comparar los valores calculados numéricamente con los valores analíticos, no se tiene en cuenta el rozamiento entre las caras de la grieta.

El valor teórico del coeficiente de intensificación de tensiones en modo III para una geometría similar a la de las probetas que se utilizan en este trabajo (cilindros con entalla y grieta circunferencial) fue obtenido por Suresh [1991]:

$$K_{IIIa} = \frac{6M}{\pi d_i^3} \left(\frac{\pi d_i}{2} (1 - D) \right)^{1/2} (1 + 0.5D + 0.375D^2 + 0.3125D^3 + 0.273D^4 + 0.208D^5)$$

donde M es el par aplicado y $D = \frac{d_i}{d_0}$, la relación entre el diámetro del ligamento central y el diámetro exterior (figura 6.1). Se ha denominado K_{IIIa} , coeficiente de intensificación de tensiones analítico.

El valor de K_{III} numérico ($K_{III n}$, calculado por elementos finitos) se ha obtenido a partir de los resultados del elemento cohesivo, ya que el trabajo realizado durante el proceso de formación de la grieta, J (figura 6.6) se puede expresar como:

$$J = \frac{K_{IIIIn}^2}{2\mu}$$

donde $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ es el módulo de elasticidad a cortadura.

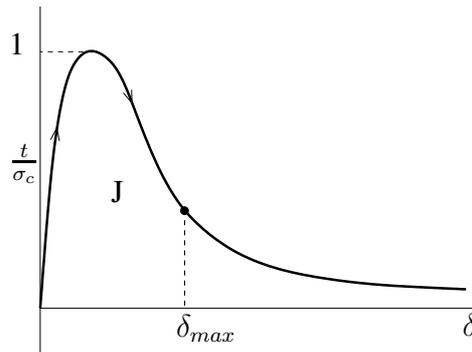


Figura 6.6: Curva de carga de Smith-Rose-Ferrante (ley cohesiva).

En la tabla 6.3 y en la figura 6.7, se muestran los resultados obtenidos para el modelo de grieta inicial $c = 0.2$ mm.

M (Nm)	K_{IIIa} (MPa \sqrt{m})	K_{IIIIn} (MPa \sqrt{m})	Error (%)
20	9.81	8.57	12.6
35	17.70	15.60	11.8
50	24.53	22.77	7.2
70	34.35	33.25	3.2
80	39.25	38.77	1.2

Tabla 6.3: Resultados obtenidos para el modelo de grieta inicial $c = 0.2$ mm.

En la tabla 6.4 y en la figura 6.8, se muestran los resultados obtenidos para el modelo de grieta inicial $c = 1.23$ mm.

Como se puede ver, los resultados numéricos reproducen con suficiente precisión los valores analíticos.

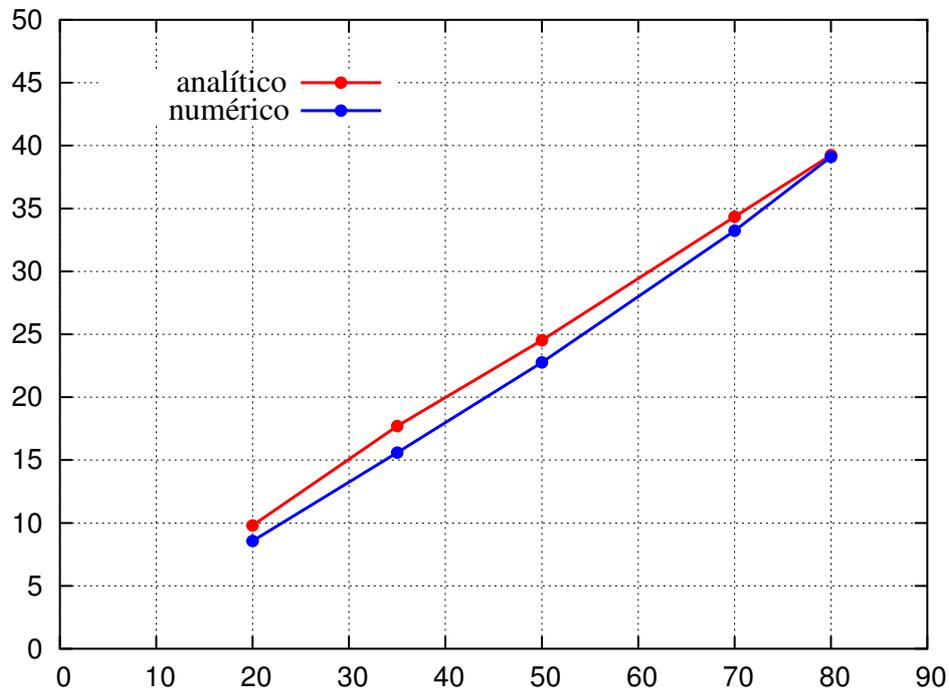


Figura 6.7: Coeficiente de intensificación de tensiones K_{III} analítico y numérico para modelo sin rozamiento (grieta de 0.2 mm).

M (Nm)	K_{IIIa} (MPa \sqrt{m})	K_{IIIn} (MPa \sqrt{m})	Error (%)
20	9.81	9.29	5.3
35	17.70	16.54	6.5
50	24.53	24.15	1.5
70	34.35	35.20	2.5
80	39.25	41.40	5.5

Tabla 6.4: Resultados obtenidos para el modelo de grieta inicial $c = 1.23$ mm.

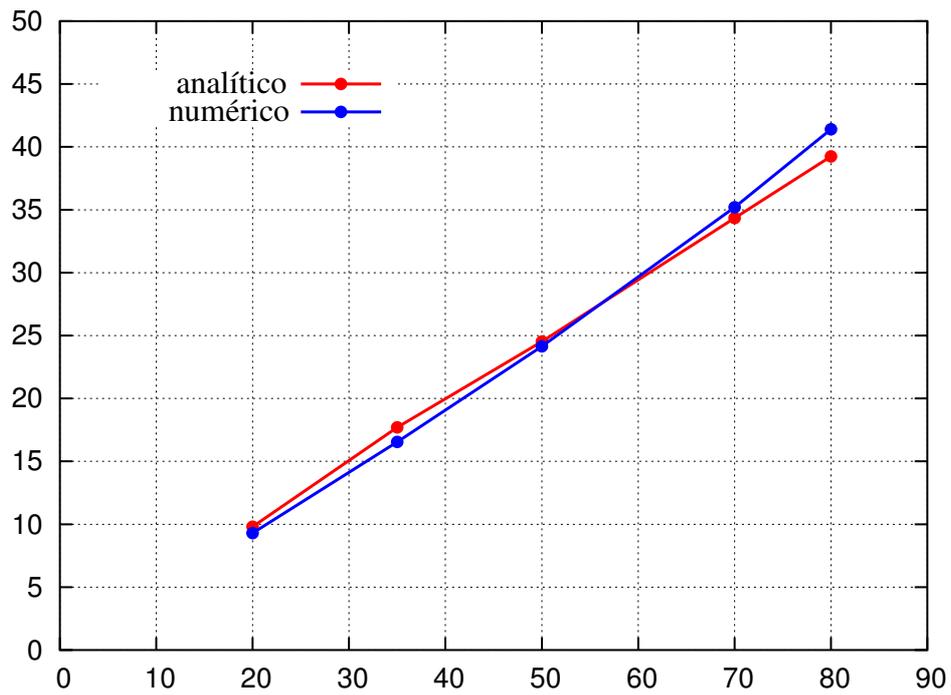


Figura 6.8: Coeficiente de intensificación de tensiones K_{III} analítico y numérico para modelo sin rozamiento (grieta inicial de 1.23 mm).

6.3. Curvas de resistencia a la fractura

Los ensayos que llevaron a cabo Tschegg y Suresh [1988] se realizaron de la forma que se describe a continuación. Cada una de las cinco probetas con grietas iniciales diferentes, fueron sometidas a un par, sin aplicación de carga axial superpuesta, por lo que las caras de la grieta estaban en contacto en todo momento. En las etapas iniciales la carga se aplicaba siguiendo un control de par, mientras que al final se seguía un control de ángulo de rotación. Una vez llegado al punto de par/ángulo deseado, se dejaba de aplicar el par y se aplicaba en su lugar una pequeña carga axial. Por efecto de esta pequeña carga axial, las caras de la grieta se separaban ligeramente, permitiendo una medida precisa de la longitud de la grieta por el método de caída de potencial, sin causar ninguna fractura adicional. Una vez que se había medido el avance de la grieta, se retiraba la fuerza axial y se volvía a aplicar el par. El proceso se repetía hasta que la grieta alcanzara una extensión de 0.06 a 0.1 mm. En la figura 6.9 se muestra un ejemplo del proceso de carga llevado a cabo.

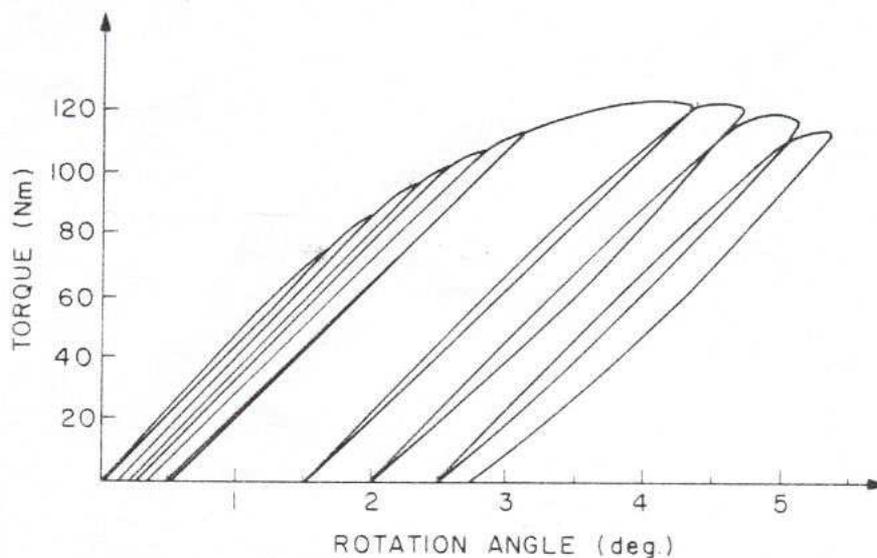


Figura 6.9: Proceso de aplicación del par (Tschegg y Suresh [1988]).

A partir de los valores de par aplicados y de las longitudes de grieta medidas, obtuvieron las curvas de resistencia a la fractura para cada geometría de probeta. En la figura 6.10, se

muestran los resultados que obtuvieron con las probetas de grieta inicial $c = 1.23$ mm y $c = 0.2$ mm. Esos resultados serán utilizados para la validación del modelo aquí propuesto.

Los valores de K_{III} que registraron Tschegg y Suresh [1988] son valores aparentes, obtenidos a partir del par aplicado y la longitud de la grieta alcanzada. Como se ha visto en el capítulo 2, son valores muy diferentes a los efectivos, que son los que realmente se encuentran en la punta de la grieta y los responsables del crecimiento de ésta. Teniendo en cuenta que la grieta inicial de $c = 0.2$ mm es muy pequeña, se ha supuesto que los valores de K_{III} aparentes coinciden con los efectivos en la probeta que la contiene. Así, la figura 6.10 se puede interpretar como la relación que existe, para un avance de grieta dado, entre el K_{III} aparente (curva roja) y el efectivo K_{IIIef} (curva verde). Esa hipótesis se basa en las conclusiones obtenidas en Tschegg et al. [1983]. En ese artículo se señala que para grietas menores de 0.4 mm, los efectos de la interacción entre las caras de la grieta son mínimos y las velocidades de crecimiento para modo I y modo III son comparables.

Con el modelo propuesto de fractura con fricción en caras de grieta, es posible calcular los valores de K_{III} efectivos en punta de grieta a partir de los valores de energía liberada que toman los elementos cohesivos situados en esa posición (ver sección 6.2). Por lo tanto, se han utilizado los resultados experimentales anteriores para validar el modelo.

Los parámetros de material necesarios para el modelo de contacto y fricción que se han utilizado se recogen en la tabla 6.5. Los valores referentes a la geometría de la superficie de la grieta (rugosidad RMS, σ , y pendiente media de las asperidades, m) se han elegido coherentes con el proceso de formación de la grieta, siguiendo indicaciones encontradas en la literatura (Kragelskii et al. [1982], Mikic y Rohsenow [1966]). Como la grieta ha sido formada por torsión a fatiga, se habrá producido una abrasión entre las caras que ha provocado que la rugosidad no sea muy elevada. Se ha elegido un valor de $\sigma = 0.001$ mm y m correspondiente a un ángulo medio de asperidades (α) de 12° ($m = 0.21$).

Los valores de K_{IIIef} calculados para la probeta de grieta inicial $c = 1.23$ mm se muestran en la tabla 6.6, para cada avance de grieta y junto con el valor de K_{III} aparente y el efectivo según el ensayo.

En la figura 6.11 se han representado gráficamente estos valores. Se puede apreciar un buen comportamiento del modelo propuesto con respecto a los valores efectivos medidos en el ensayo.

$c_1 = 6271 \text{ MPa}$
$c_2 = -0.229$
$\sigma = 0.001 \text{ mm}$
$m = 0.21$
$k_T = 10^6$
$\beta = 0.3$

Tabla 6.5: Valores de los diferentes parámetros utilizados en el módulo de contacto y fricción.

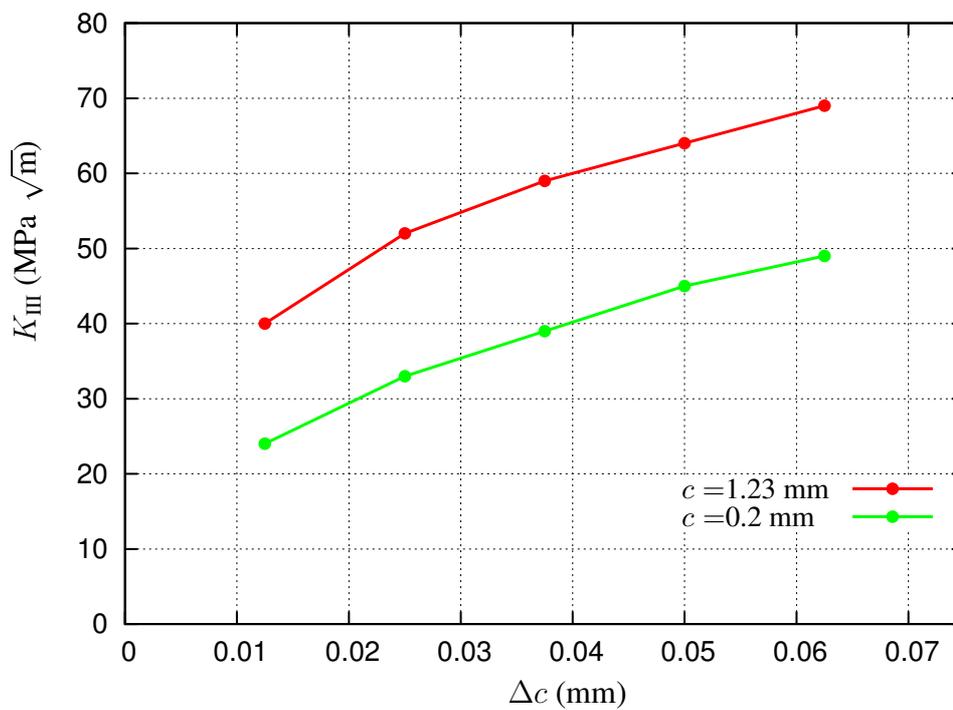


Figura 6.10: Coeficiente de intensificación de tensiones K_{III} en función del avance de grieta, para la grieta inicial de $c = 1.23 \text{ mm}$ y $c = 0.2 \text{ mm}$. (Tschegg y Suresh [1988]).

Δc (mm)	K_{IIIap} (MPa \sqrt{m})	$K_{IIIef-ensayo}$ (MPa \sqrt{m})	$K_{IIIef-calc}$ (MPa \sqrt{m})	Error (%)
0.0125	40	24	26	8.3
0.25	52	33	33.9	2.7
0.375	59	39	38.8	0.5
0.5	64	45	42.8	4.8
0.625	69	49	45.3	7.5

Tabla 6.6: Valores de K_{III} aparentes, efectivos según el ensayo de Tschegg y Suresh [1988] y efectivos calculados según el modelo propuesto.

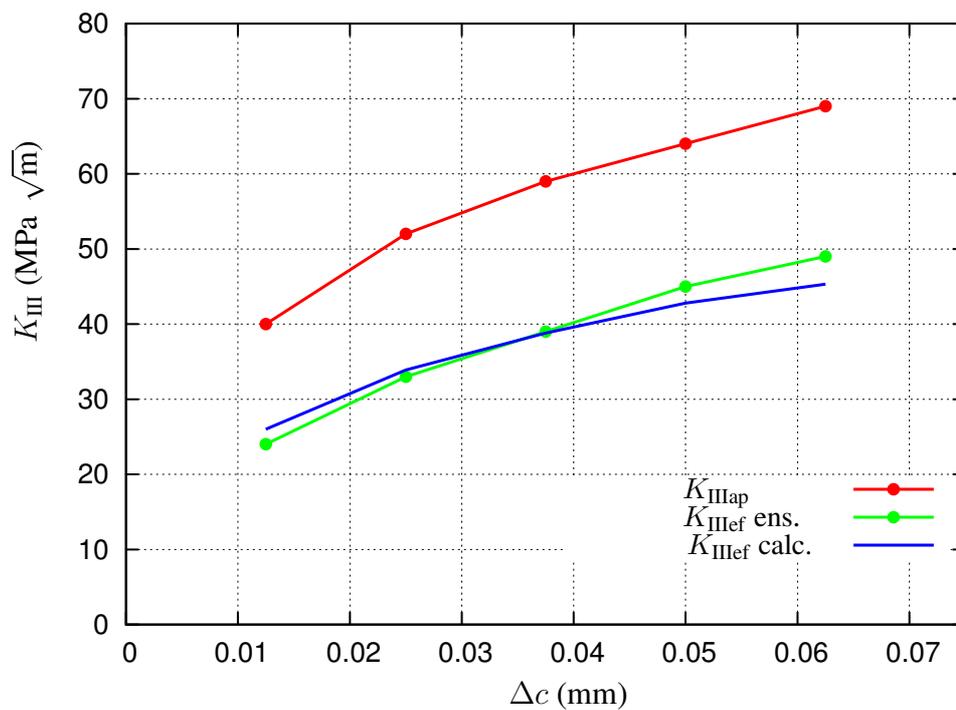


Figura 6.11: Coeficiente de intensificación de tensiones K_{III} aparente y efectivo en función del avance de grieta, para la grieta inicial de $c = 1.23$ mm.

Hasta ahora se ha supuesto que para la probeta de grieta inicial $c = 0.2$ mm los valores de K_{III} aparentes son iguales a los efectivos. Esta hipótesis se puede verificar calculando cuáles serían los valores efectivos para esa probeta. Los resultados se muestran en la tabla 6.7 y en la figura 6.12.

Δc (mm)	K_{IIIap} (MPa \sqrt{m})	$K_{IIIef-calc}$ (MPa \sqrt{m})	Error (%)
0.0125	24	22.2	7.5
0.25	33	31.5	4.5
0.375	39	38	2.5
0.5	45	44.7	0.6
0.625	49	48	2

Tabla 6.7: Valores de K_{III} aparentes (ensayo de Tschegg y Suresh [1988]) y efectivos calculados según el modelo propuesto.

Como se puede observar por los valores obtenidos, la suposición de que los valores aparentes son iguales a los efectivos se puede aceptar como válida.

6.4. Variación de K_{III} con el ángulo medio de las aspersiones

A continuación se presentan los resultados obtenidos con las dos probetas utilizadas en los apartados anteriores, siguiendo las pruebas realizadas por Ballarini y Plesha [1987] con el modelo que fue propuesto en ese artículo (modelo de rozamiento en caras de grieta aplicado a modo II de fractura). En concreto se hace un análisis de la influencia que tiene sobre el coeficiente de intensificación de tensiones el ángulo medio de las aspersiones, en función de la carga aplicada. Se ha observado (Ballarini y Plesha [1987], Mendelsohn et al. [1995]) que el ángulo medio de las aspersiones es el factor de la geometría de las superficies que más influencia tiene en el desarrollo del rozamiento entre caras de grieta.

Para la probeta de grieta inicial $c = 0.2$ mm se muestran los resultados en la figura 6.13 y para la grieta inicial de $c = 1.23$ mm en la figura 6.14.

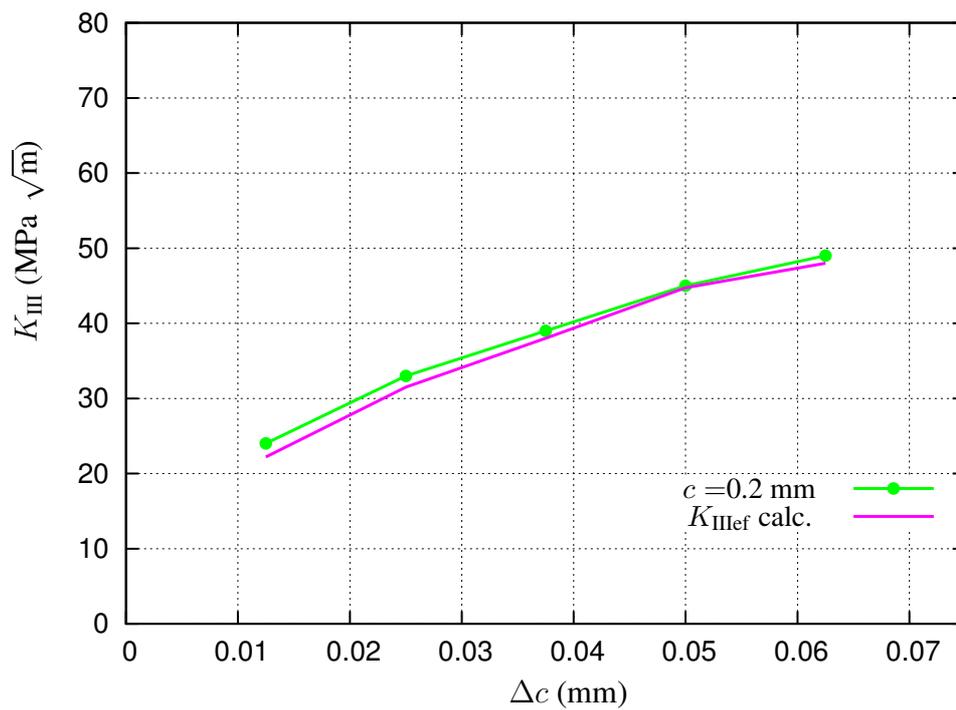


Figura 6.12: Coeficiente de intensificación de tensiones K_{III} aparente y efectivo en función del avance de grieta, para la grieta inicial de $c = 0.2$ mm.

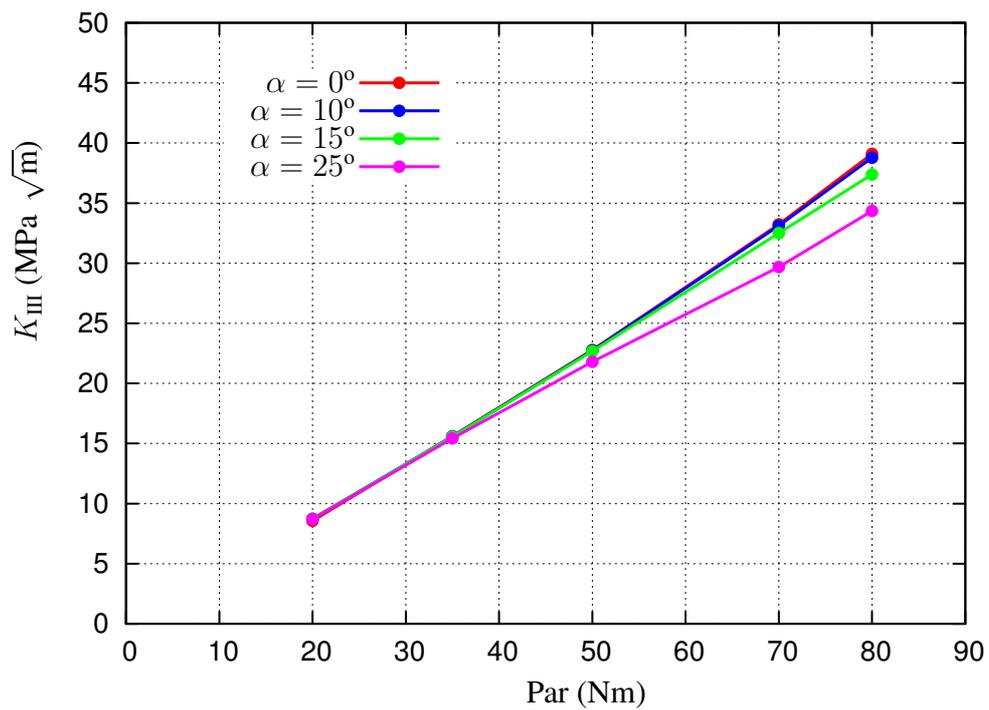


Figura 6.13: Coeficiente de intensificación de tensiones K_{III} en función del par aplicado y de la longitud de la grieta, para la grieta inicial de 0.2 mm.

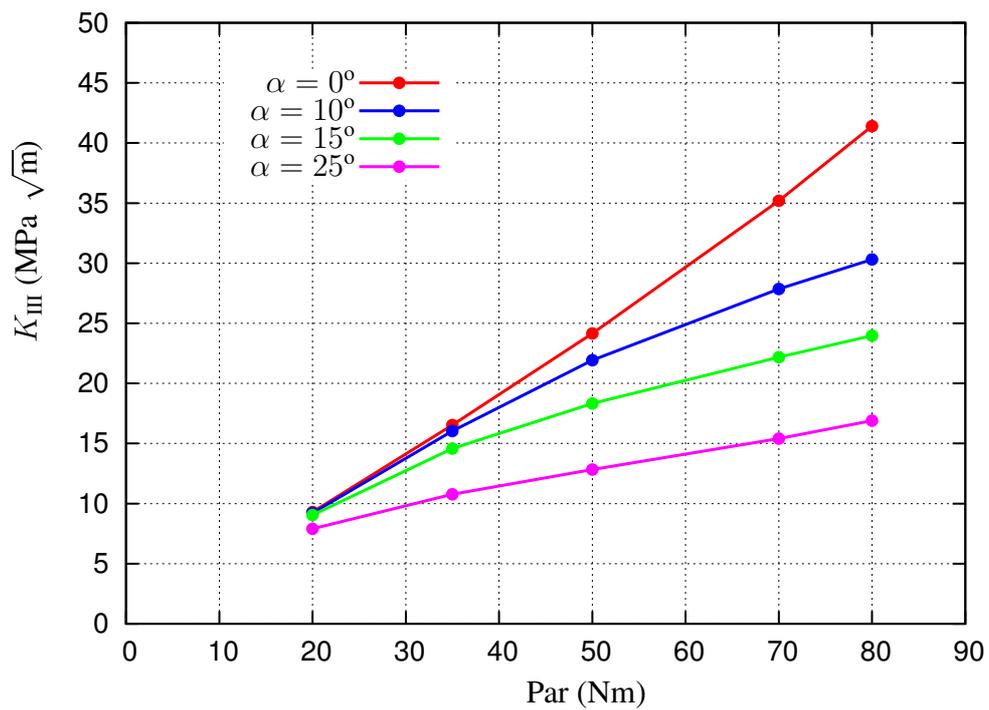


Figura 6.14: Coeficiente de intensificación de tensiones K_{III} en función del par aplicado y de la longitud de la grieta, para la grieta inicial de 1.23 mm.

Se puede observar, como era de esperar, que el efecto del rozamiento en las caras de la grieta es mucho más notable cuanto mayor es la grieta inicial. Así, en la probeta de grieta inicial $c = 0.2$ mm, sólo para valores de ángulo mayores de 15° y para pares aplicados altos, los valores del coeficiente de intensificación de tensiones empiezan a verse afectados por la existencia del rozamiento. Eso vuelve a confirmar la hipótesis del apartado anterior, en la que se consideraba que en esa probeta los efectos de la interacción de las caras de la grieta son mínimos, para cualquier valor físicamente aceptable de la rugosidad. Sin embargo, en la probeta de grieta inicial $c = 1.23$ mm el efecto es muy importante, tanto mayor cuanto mayor es el par aplicado. Se debe remarcar aquí, que los valores de ángulo medio de las aspersiones esperados en una grieta real se encuentran entre 5 y 20° . Se ha introducido el cálculo para $\alpha = 25^\circ$ simplemente por motivos didácticos.

6.5. Variación de K_{III} efectivo frente a K_{III} aparente

A continuación se muestran para las dos probetas utilizadas en los cálculos anteriores, el coeficiente de intensificación de tensiones efectivo en punta de grieta, K_{IIIef} , en función del coeficiente de intensificación de tensiones aplicado, K_{IIIap} (el que habría si no existiera el efecto de rozamiento en las caras de la grieta). En la figura 6.15 se muestran los resultados correspondientes a la probeta de grieta inicial $c = 0.2$ mm y en la figura 6.16 los correspondientes a la de grieta inicial $c = 1.23$ mm. Se muestra, además, en cada gráfica, el efecto que tiene el valor del ángulo medio de las asperidades. Estos cálculos y la manera de presentar estos resultados han sido observados en Gross y Mendelsohn [1989]. Son muy relevantes porque normalmente es el valor del coeficiente de intensificación de tensiones aplicado, K_{IIIap} el que se utiliza en estudios de crecimiento de grieta, mientras que es el valor efectivo, K_{IIIef} , el que realmente provoca la propagación. Se observa de nuevo como la mayor influencia aparece en la probeta de grieta inicial de mayor longitud. En la probeta de grieta inicial $c = 0.2$ mm, para valores razonables del ángulo medio de las asperidades, los valores de K_{IIIef} y K_{IIIap} son prácticamente coincidentes.

Nota

El programa utilizado para realizar los cálculos por elementos finitos y en el que se ha implementado el módulo de fricción entre caras de grieta es el programa FEAP v.7.1 (Finite Element Analysis Program), programa de código abierto desarrollado por el Prof. Robert Taylor de la Universidad de Berkeley (EEUU) y cedido por el autor a la Universidad Pontificia Comillas.

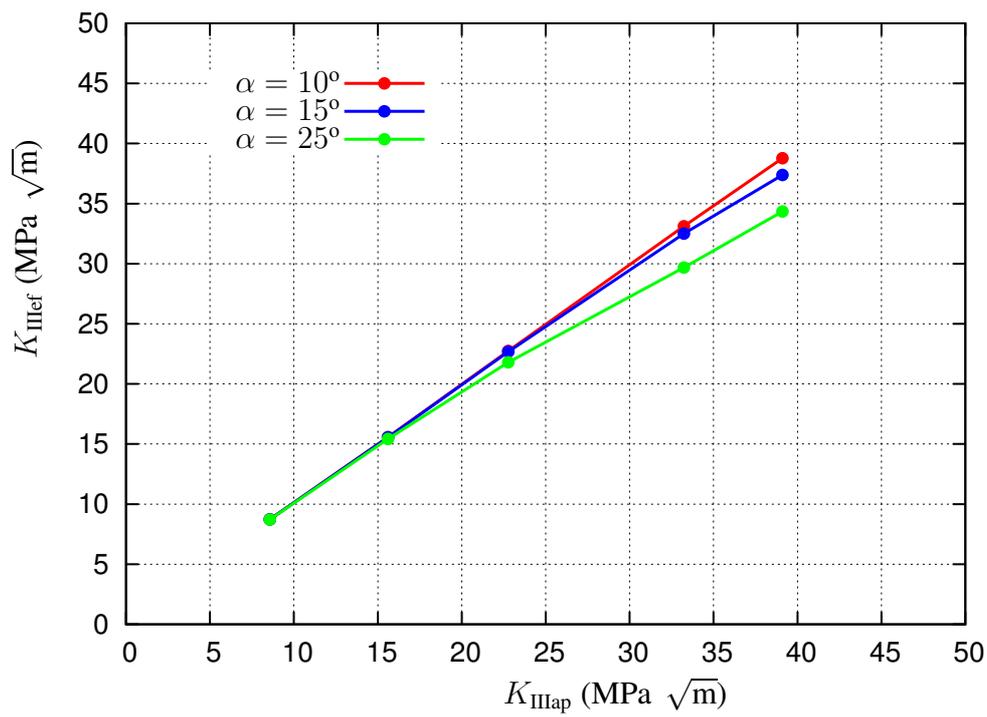


Figura 6.15: Coeficiente de intensificación de tensiones efectivo K_{IIIef} en función del coeficiente de intensificación de tensiones aplicado K_{IIIap} , para diferentes ángulos medios de rugosidades y para la grieta inicial de 0.2 mm.

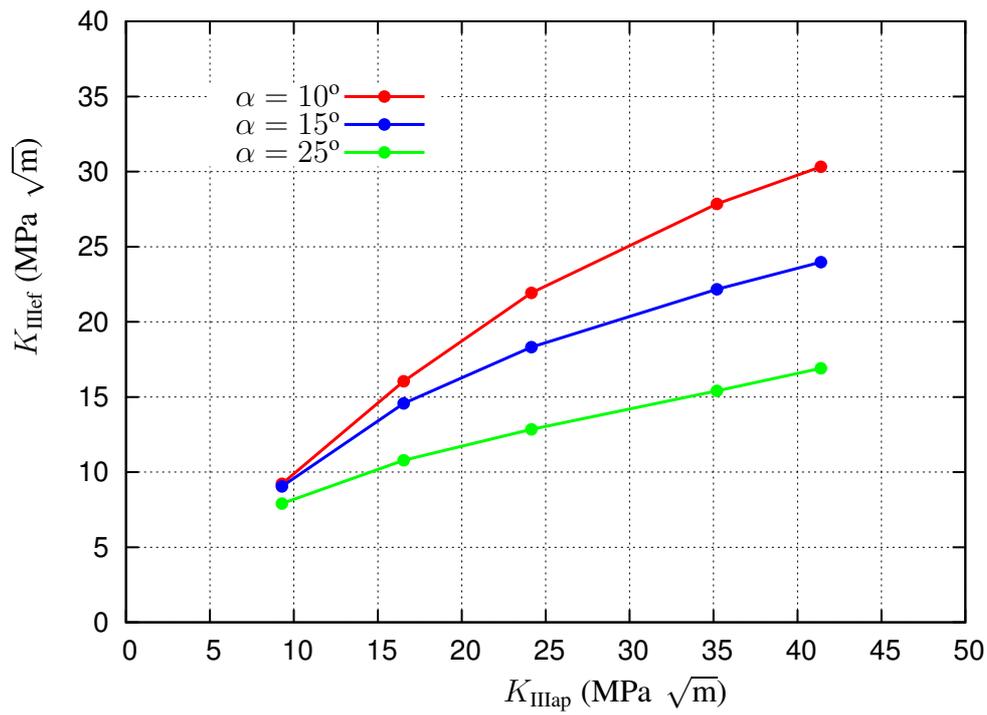


Figura 6.16: Coeficiente de intensificación de tensiones efectivo K_{IIIef} en función del coeficiente de intensificación de tensiones aplicado K_{IIIap} , para diferentes ángulos medios de rugosidades y para la grieta inicial de 1.23 mm.

Capítulo 7

Conclusiones

Se ha desarrollado un modelo de contacto y fricción utilizando leyes micromecánicas, que se ha acoplado a un elemento con una ley cohesiva de fractura con el objeto de modelar el efecto que tiene el rozamiento entre las caras de la grieta cuando éstas se encuentran en contacto. En el caso de modos de fractura de deslizamiento (modos II y III), ese contacto es permanente, de ahí la importancia de este fenómeno.

Se han elegido leyes micromecánicas tanto para el contacto como para la fricción debido a que al ser un proceso muy localizado y de dimensiones pequeñas (del orden del tamaño de la grieta), la física del problema debe ser capturada de una manera precisa. Estas leyes han sido desarrolladas fundamentalmente para el cálculo de resistencias térmicas de contacto y se han seleccionado las ecuaciones que relacionan las áreas de contacto reales con la presión normal existente en la interfaz. Son leyes ampliamente utilizadas y verificadas experimentalmente.

El modelo desarrollado se ha programado en un código de elementos finitos y se ha aplicado a un ejemplo de eje a torsión. Debido a la imposibilidad de realizar ensayos con medios propios, se han utilizado resultados de ensayos publicados para la validación del modelo. Se ha evitado realizar pruebas de fatiga, por su mayor complejidad y por ser el objetivo el comprobar el modelo de una forma simple. Así, se ha utilizado un ensayo en el que la carga se aplica en un solo paso. Los valores procedentes del ensayo se han comprobado mediante el modelo propuesto, calculando con éste los valores de K_{III} efectivos en la punta de la grieta que corresponderían a los nominales o aplicados. Los resultados

obtenidos han sido muy satisfactorios.

7.1. Contribuciones realizadas

Las aportaciones que suponen el trabajo realizado son:

- Incorporación de un módulo de contacto a un elemento cohesivo de fractura. Hasta este momento, en los cálculos realizados en los que previsiblemente las caras de la grieta iban a estar en contacto, se aplicaba una pequeña carga axial que hiciera que éstas se separaran ligeramente para evitarlo. Con la incorporación del modelo de contacto, se reproduce la física del problema fielmente.
- Incorporación del cálculo del rozamiento dentro de un elemento cohesivo de fractura. En casos de fractura bajo modos de deslizamiento es imprescindible tener en cuenta la fricción que se produce entre las superficies libres, de cara a evaluar la tensión efectiva en la punta de la grieta que es la responsable de la propagación de ésta.
- Utilización de modelos micromecánicos de contacto y fricción para el estudio de la interacción entre las caras de una grieta. Los modelos propuestos hasta ahora eran modelos más simples en los que se utilizaba un coeficiente de rozamiento tradicional con una ley de Coulomb en la superficie de cada aspereza (suponiéndolas rígidas).

7.2. Aplicaciones del modelo desarrollado

El modelo que se ha desarrollado se ha validado, mediante varios ensayos de un eje a torsión. Pero eso no implica que sea su única aplicación. Este modelo se debe utilizar en cualquier problema de fractura en el que las caras de la grieta permanezcan en contacto, es decir, en todos los problemas de modos II y III de fractura o modos mixtos I/II ó I/III. Entre otros, algunos ejemplos podrían ser las grietas por fatiga superficiales o sub-superficiales inducidas por contacto rodante y las grietas entre interfaces de contacto en materiales compuestos.

Además, el modelo va a ser muy útil en los cálculos de crecimiento de grieta por fatiga, debido a la influencia que tiene la interacción entre las caras de la grieta en su velocidad de crecimiento. Su aplicación a cálculos de crecimiento de grieta por fatiga es inmediata.

7.3. Desarrollos futuros

Existen diferentes desarrollos que se deben realizar para mejorar y ampliar el modelo propuesto.

- Utilización del modelo desarrollado junto con el algoritmo de extrapolación aplicado al crecimiento de grietas por fatiga creado por Fernández [2003], en paralelo a este trabajo. La unión de ambos trabajos es inmediato y se espera que con su utilización se prediga, de una forma más efectiva y más real, la vida de un elemento que trabaja a fatiga y que contenga grietas bajo modos de deslizamiento.
- Evolución de la rugosidad: actualmente los parámetros geométricos de las superficies (rugosidad RMS (σ) y m , pendiente media de las asperidades), se consideran constantes en todo el proceso. Esto es cierto si las partículas de desgaste no escapan de la grieta y así, al quedarse en la interfaz de contacto, se regenera de alguna forma la rugosidad. En caso de que las partículas no permanecieran en la grieta, la superficie de ésta se iría suavizando, disminuyendo, por tanto, los parámetros característicos de las superficies y por tanto también el rozamiento entre ellas.
- Relación entre los parámetros del elemento cohesivo y la fuerza de rozamiento. El parámetro β del elemento cohesivo controla la relación entre las fuerzas cohesivas normales y tangenciales. Habría que investigar en detalle la función de ese parámetro, intentando relacionarlo con la fricción micromecánica, para representar sólo con el elemento cohesivo el comportamiento global en la interfaz.
- Introducción de los procesos térmicos en la interfaz de contacto. Debido a que el rozamiento es un proceso de degradación de energía, sería conveniente añadir un módulo en el que toda esa energía generada por rozamiento se transformara en un aumento de temperatura en las caras que están en contacto. No se ha encontrado

ningún estudio en la literatura referente a este tema, por lo que sería interesante explorarlo.

Apéndice A

Conceptos sobre plasticidad

A.1. Modelo de plasticidad fenomenológico

La formulación del elemento elastoplástico utilizado se basa en estudios micromecánicos de plasticidad de monocristales metálicos. Estos estudios se pueden ver en detalle en Taylor [1938], Hill [1966], Hill y Rice [1972], Asaro y Rice [1977], Asaro [1979, 1983]. Una característica esencial de esta descripción es la introducción de una *configuración intermedia local*, relativa a la cual se describe la respuesta elástica del material. La presencia de esa configuración lleva a una descomposición multiplicativa local del gradiente de las deformaciones de la forma:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{F}^e(\mathbf{X}, t)\mathbf{F}^p(\mathbf{X}, t) \quad (\text{A.1})$$

donde \mathbf{F} actúa sobre cada punto \mathbf{X} de la configuración de referencia del cuerpo B considerado.

Se han utilizado descomposiciones multiplicativas de este tipo en numerosos trabajos. Destacan los de Simo y Ortiz [1985] y Simo [1988].

A.1.1. Relaciones cinemáticas. Configuración intermedia local

En este apartado se introduce la noción de la configuración intermedia y se resumen algunas relaciones cinemáticas básicas necesarias para los desarrollos posteriores.

A.1.1.1. Motivación micromecánica. Plasticidad en monocristales

Desde un punto de vista micromecánico, el flujo plástico en la plasticidad cristalina puede considerarse como un flujo de material a través de la malla cristalina mediante el movimiento de las dislocaciones. Para un cristal con un sistema de deslizamiento único denominado $\{\mathbf{s}, \mathbf{m}\}$ con $\mathbf{m} \cdot \mathbf{s} = 0$ y $\|\mathbf{s}\| = \|\mathbf{m}\| = 1$, las consideraciones del flujo plástico llevan a la descripción micromecánica que se muestra en la figura A.1. Los vectores unitarios $\{\mathbf{s}, \mathbf{m}\}$ están fijados a la malla cristalina y el flujo plástico se caracteriza por el tensor \mathbf{F}^p que se define como:

$$\mathbf{F}^p = \mathbf{1} + \gamma \mathbf{s} \otimes \mathbf{m}$$

donde γ es la deformación plástica en el sistema cristalográfico definido por $\{\mathbf{s}, \mathbf{m}\}$ y $\mathbf{1}$ es el tensor unitario. La deformación total del cristal se descompone, por tanto, en:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^p$$

donde \mathbf{F}^e es la deformación debida al estiramiento o contracción y a la rotación de la malla cristalina y \mathbf{F} es el gradiente de la deformación.

A.1.1.2. Relaciones cinemáticas asociadas con la configuración intermedia

Según la descomposición multiplicativa (A.1), la configuración intermedia local, definida por $\mathbf{F}^{e^{-1}}$ es una configuración libre de tensiones.

Tensores de deformación lagrangiano y euleriano

Siguiendo la nomenclatura tradicional de la mecánica de los medios continuos, se define el tensor derecho de Cauchy-Green en la configuración de referencia del cuerpo como:

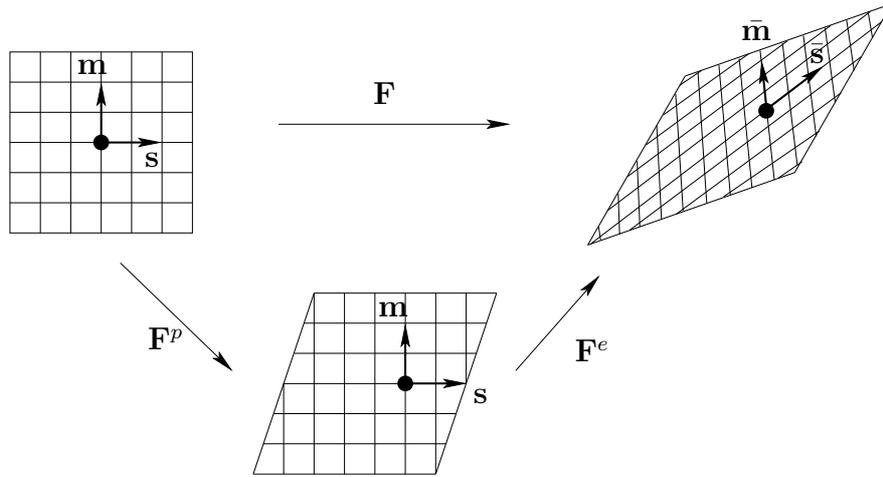


Figura A.1: Aspectos micromecánicos de la deformación en un cristal. F^p mueve al material a través de la malla por el movimiento de las dislocaciones. F^e gira y distorsiona la malla cristalina.

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}, \text{ y } \mathbf{C}^p = \mathbf{F}^{pT} \mathbf{F}^p \quad (\text{A.2})$$

Los tensores de deformación lagrangianos asociados son:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} [\mathbf{C} - \mathbf{1}], \text{ y } \mathbf{E}^p = \frac{1}{2} [\mathbf{C}^p - \mathbf{1}]$$

donde $\mathbf{1}$ es el tensor unitario simétrico con componentes δ_{AB} en un sistema de referencia cartesiano.

De forma similar, los tensores eulerianos, asociados con la configuración actual, son:

$$\mathbf{b} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T, \text{ y } \mathbf{b}^e = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^{eT} \quad (\text{A.3})$$

llamados tensores izquierdos de Cauchy-Green total y elástico, respectivamente. Sus tensores inversos tienen el nombre de tensores de deformación de Finger:

$$\mathbf{c} = \mathbf{b}^{-1} = \mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^{-1}, \text{ y } \mathbf{c}^e = \mathbf{b}^{e-1} = \mathbf{F}^{e-T} \mathbf{F}^{e-1}$$

Finalmente, los tensores de deformación eulerianos toman la forma:

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \mathbf{c}), \quad \text{y} \quad \mathbf{e}^e = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \mathbf{c}^e) \quad (\text{A.4})$$

donde $\mathbf{1}$ es el tensor simétrico unitario en la configuración actual con componentes δ_{ij} .

La siguiente relación tiene un papel fundamental en la formulación que sigue. De (A.1) y (A.3.b):

$$\mathbf{b}^e = \mathbf{F}\mathbf{F}^{p-1}\mathbf{F}^{p-T}\mathbf{F}^T = \mathbf{F} \left[\mathbf{F}^{pT}\mathbf{F}^p \right]^{-1} \mathbf{F}^T$$

que, junto con (A.2) se obtiene:

$$\mathbf{b}^e = \mathbf{F}\mathbf{C}^{p-1}\mathbf{F}^T \quad (\text{A.5})$$

Velocidades de deformación

El tensor de velocidad de deformación total es:

$$\mathbf{d} = \mathbf{F}^{-T} \left[\frac{1}{2} \dot{\mathbf{C}} \right] \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{F}^{-T} \dot{\mathbf{E}} \mathbf{F}^{-1} \quad (\text{A.6})$$

Ahora, de (A.3) y (A.4):

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \mathbf{F}^T [\mathbf{1} - \mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^{-1}] \mathbf{F} = \mathbf{F}^T \mathbf{e} \mathbf{F} \quad (\text{A.7})$$

Y combinando (A.6) y (A.7) se obtiene:

$$\mathbf{d} = L_v \mathbf{e} = \mathbf{F}^{-T} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{F}^T \mathbf{e} \mathbf{F}] \right\} \mathbf{F}^{-1} \quad (\text{A.8})$$

donde el operador L_v es la derivada de Lie. Para una revisión de ese concepto, se recomienda la referencia Marsden y Hughes [1983]. Por analogía con la ecuación (A.8), a partir de la ecuación (A.5) se obtiene:

$$L_v \mathbf{b}^e = \mathbf{F} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{F}^{-1} \mathbf{b}^e \mathbf{F}^{-T}] \right\} \mathbf{F}^{-T} = \mathbf{F} \dot{\mathbf{C}}^{p-1} \mathbf{F}^T$$

Descomposición multiplicativa desviadora y volumétrica

Dentro del contexto de la teoría infinitesimal, el tensor de deformaciones $\boldsymbol{\varepsilon}$ se descompone en las partes volumétrica y desviadora, de acuerdo con la expresión:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \text{dev} [\boldsymbol{\varepsilon}] + \frac{1}{3} \text{tr} [\boldsymbol{\varepsilon}] \mathbf{1}$$

donde

$$\text{dev} [\boldsymbol{\varepsilon}] = \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{3} \text{tr} [\boldsymbol{\varepsilon}] \mathbf{1} \Rightarrow \text{tr} [\text{dev} [\boldsymbol{\varepsilon}]] = 0$$

Esta descomposición aditiva, aunque formalmente válida, pierde completamente su sentido físico en la teoría no lineal. La descomposición correcta es la siguiente, denominada descomposición multiplicativa.

Sea $\bar{\mathbf{F}}$ la parte del gradiente de deformaciones que conserva el volumen ($\det [\bar{\mathbf{F}}] = 1$) y sea $J = \det [\mathbf{F}]$ el cambio de volumen local. Entonces:

$$\bar{\mathbf{F}} = J^{-1/3} \mathbf{F} \implies \det [\bar{\mathbf{F}}] = 1 \text{ y } \mathbf{F} = J^{1/3} \bar{\mathbf{F}}$$

y

$$\bar{\mathbf{C}} = \bar{\mathbf{F}}^T \bar{\mathbf{F}} = J^{-2/3} \mathbf{C} \implies \det [\bar{\mathbf{C}}] = 1$$

A.1.2. Teoría de flujo J_2

Se supone en toda la formulación que la respuesta tensional es isotrópica. Además, según las hipótesis habituales en plasticidad de metales, se supone que el flujo plástico es isócoro:

$$\det \mathbf{F}^p = \det \mathbf{C}^p = 1 \implies J = \det \mathbf{F} = \det \mathbf{F}^e$$

A.1.2.1. Respuesta tensional

De acuerdo con la suposición de isotropía y con la definición de configuración intermedia sin tensiones, se caracteriza la respuesta tensional mediante una función de la energía almacenada de la forma:

$$\begin{aligned} W &= U(J^e) + \bar{W}(\bar{\mathbf{b}}^e) \\ \bar{\mathbf{b}}^e &= J^{e2/3} \mathbf{F}^e \mathbf{F}^{eT} = J^{e2/3} \mathbf{b}^e \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

donde $U : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ es una función convexa de J . $U(J^e)$ y $\bar{W}(\bar{\mathbf{b}}^e)$ son las partes volumétrica y desviadora de W , respectivamente. Para concretar:

$$\begin{aligned} U(J^e) &= \kappa \left[\frac{1}{2} (J^e - 1)^2 - \ln J^e \right] \\ \bar{W}(\bar{\mathbf{b}}^e) &= \frac{1}{2} \mu (\text{tr} [\bar{\mathbf{b}}^e] - 3) \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

donde $\kappa > 0$ y $\mu > 0$ se interpretan como el módulo de elasticidad longitudinal y el módulo de elasticidad a cortadura respectivamente.

Si ahora se supone una energía de la forma $W = U(J^e) + \hat{W}(\hat{\mathbf{C}}^e)$, según la ecuación (A.10.b), se obtiene el tensor de tensiones de Kirchhoff por medio de la expresión general:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= 2\mathbf{F}^e \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}^e} \mathbf{F}^{eT} = J^e U'(J^e) \mathbf{1} + \mathbf{s} \\ \mathbf{s} &= 2\text{dev} \left[\bar{\mathbf{F}}^e \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{\mathbf{C}}^e} \bar{\mathbf{F}}^{eT} \right] \end{aligned}$$

La energía almacenada definida en (A.9), al estar desacoplada, da lugar a relaciones tensión-deformación desacopladas en su parte volumétrica y desviadora. Resumiendo las ecuaciones anteriores, queda:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= Jp\mathbf{1} + \mathbf{s} \\ p &= U'(J^e) = \kappa \left[J^e - 1 - \frac{1}{J^e} \right] \\ \mathbf{s} &= \text{dev} [\boldsymbol{\tau}] = \mu \text{dev} [\bar{\mathbf{b}}^e] \end{aligned}$$

A.1.2.2. Condición de fluencia

Se considera la condición de fluencia clásica de Mises-Huber, formulada en términos del tensor de tensiones de Kirchhoff como

$$f(\boldsymbol{\tau}, \alpha) = \|\boldsymbol{\tau}\| - \sqrt{\frac{2}{3}} [\sigma_Y + K\alpha] \leq 0 \quad (\text{A.11})$$

donde σ_Y es el límite elástico, $K > 0$ es el módulo de endurecimiento isotrópico y α el parámetro de endurecimiento. En esa formulación se pueden introducir fácilmente leyes de endurecimiento no lineales en las que $K(\alpha)$ sea una función no lineal del parámetro de endurecimiento.

A.1.2.3. Regla de flujo asociativa

Igual que en la teoría infinitesimal, conocidas la función de energía almacenada y las condiciones de fluencia, la forma funcional de la regla de flujo asociativa correspondiente se determina de forma única mediante el principio de máxima disipación plástica (Simo [1988]). En esa referencia, se muestra cómo la regla de flujo toma la forma:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{C}}^{p-1} &= -\frac{2}{3}\dot{\gamma} \text{tr}[\mathbf{b}^e] \mathbf{F}^{-1} \mathbf{n} \mathbf{F}^{-T} \\ \mathbf{n} &= \frac{\mathbf{s}}{\|\mathbf{s}\|} \\ \mathbf{s} &= \text{dev}[\boldsymbol{\tau}] \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

A.1.2.4. Ley de endurecimiento isotrópico y condiciones de carga-descarga

Igual que en la teoría lineal, se supone que la evolución de la variable de endurecimiento (α) se rige por la ecuación:

$$\dot{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\gamma} \quad (\text{A.13})$$

donde $\dot{\gamma}$ es el parámetro de consistencia sujeto a las condiciones de carga-descarga de Kuhn-Tucker habituales:

$$\dot{\gamma} \geq 0, \quad f(\boldsymbol{\tau}, \alpha) \leq 0, \quad \dot{\gamma} f(\boldsymbol{\tau}, \alpha) = 0$$

que junto con la condición de consistencia

$$\dot{\gamma} \dot{f}(\boldsymbol{\tau}, \alpha) = 0$$

completan la formulación del modelo.

A.1.2.5. Modelo de endurecimiento cinemático

Además de la ley de endurecimiento isotrópico considerada en el apartado anterior, se pueden incorporar otros tipos de endurecimiento en el modelo, introduciendo variables internas adicionales cuya evolución esté regida por ecuaciones de variación apropiadas. En concreto, se utiliza una extensión de la ley de endurecimiento cinemático de Prager-Ziegler a deformaciones finitas.

Las ecuaciones de evolución para la regla de flujo y la ley de endurecimiento son:

$$\begin{aligned} L_v \bar{\mathbf{b}}^e &= -\dot{\gamma} \frac{2}{3} \text{tr} [\mathbf{b}^e] \mathbf{n} \\ L_v \bar{\mathbf{q}} &= \dot{\gamma} \frac{2}{3} \bar{H}' \text{tr} [\mathbf{b}^e] \mathbf{n} \\ \mathbf{n} &= \frac{(\mathbf{s} - \bar{\mathbf{q}})}{\|\mathbf{s} - \bar{\mathbf{q}}\|} \end{aligned}$$

donde \bar{H}' es el módulo de endurecimiento cinemático y \bar{q} es el término correspondiente al *back stress*. Como en la teoría lineal, la condición de fluencia de Mises-Huber (A.11) se modifica para incorporar el endurecimiento cinemático. Sea $q = -\sqrt{\frac{2}{3}} k \alpha$, donde α es la variable de endurecimiento isotrópico con ecuación de evolución (A.13). Entonces, en términos de las variables de endurecimiento $\mathbf{q} = \{q, \bar{\mathbf{q}}\}$, la condición de fluencia se convierte en:

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{\tau}, q) &= \|\boldsymbol{\tau} - \bar{\mathbf{q}}\| + q - \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_Y \leq 0 \\ \dot{q} &= -\frac{2}{3} K' \dot{\gamma} \\ \dot{\gamma} &\leq 0 \end{aligned}$$

Las ecuaciones anteriores junto con las relaciones tensión-deformación y las condiciones de Kuhn-Tucker completan la formulación del modelo.

Apéndice B

Relaciones geométricas de parámetros de superficies reales

Se considera un área A (área aparente) en la que se definen una serie de subregiones interiores cuyas áreas son $A_{r1}, A_{r2}, \dots, A_{rm}$, (áreas reales de contacto) siendo m el número de regiones que existen (número de puntos de contacto en el área considerada) (figura B.1).

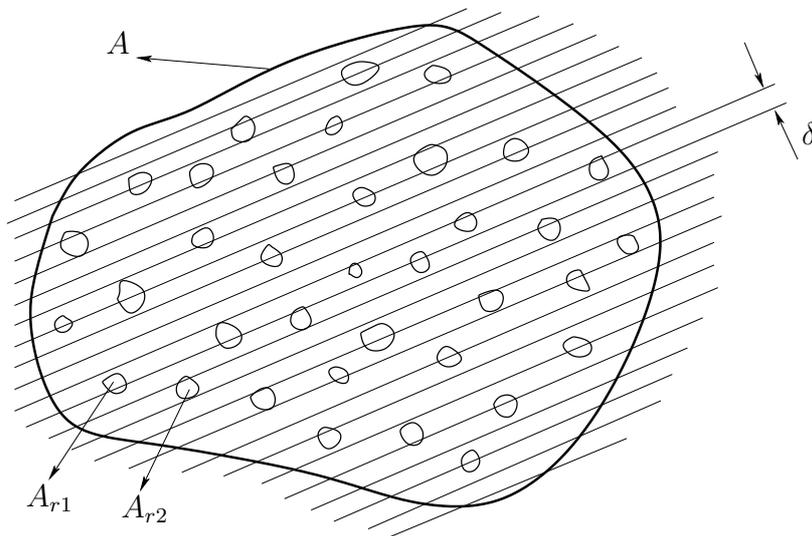


Figura B.1: Área aparente A , y áreas de contacto reales, A_{ri}

Si se dibuja una línea que atraviese el área A , cortará a s de las subregiones. Se denominan a éstas $A_{rp}, A_{rq}, \dots, A_{rr}$ y las longitudes de las líneas en $A, A_{rp}, A_{rq}, \dots, A_{rr}$ respectivamente $L, l_{cp}, l_{cq}, \dots, l_{cr}$. Se define:

$$A_r = A_{r1} + A_{r2} + \dots + A_{rm}$$

$$\Sigma l_c = l_{cp} + l_{cq} + \dots + l_{cr}$$

Se considera ahora una familia de líneas paralelas a la línea original, espaciadas en una distancia δ pequeña comparada con las dimensiones de A y de todas las A_{ri} . La longitud total de todas esas líneas dentro de A es aproximadamente, A/δ , y la longitud total de todas las líneas dentro de cualquier A_{ri} es aproximadamente, A_{ri}/δ . Sumando la longitud total de todas esas líneas en todas las A_{ri} , el resultado es aproximadamente A_r/δ . En todas esas aproximaciones, el error que se comete tiende a cero cuando δ tiende a cero. Así, para todas esas líneas, la longitud media de línea dentro de los A_{ri} por unidad de longitud de línea en A es:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{A_r/\delta}{A/\delta} = \frac{A_r}{A}$$

y, por tanto:

$$\frac{\Sigma l_c}{L} = \frac{A_r}{A} \quad (\text{B.1})$$

Si se representa cada subregión A_{ri} por un círculo de radio c_i y si δ es pequeño comparado con c_i , entonces el número de líneas que intersectan A_{ri} es, aproximadamente, $2(c_i/\delta)$. De esta manera, el número total de intersecciones de todos los A_{ri} por líneas es $2(c_1 + c_2 + \dots + c_m)/\delta$. Así, para todas esas líneas, el número medio de intersecciones por unidad de longitud de la línea en A es:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{2(c_1 + c_2 + \dots + c_m)/\delta}{A/\delta} = \frac{2(c_1 + c_2 + \dots + c_m)}{A}$$

y por tanto, en promedio:

$$\frac{s}{L} = \frac{2(c_1 + c_2 + \dots + c_m)}{A} \quad (\text{B.2})$$

Si el valor de c_i no varía mucho, de modo que la media de c_i es aproximadamente igual al valor RMS de c_i , entonces:

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{s}{L} \right\}_{\text{promedio}} &= \frac{2(c_1 + c_2 + \dots + c_m)}{A} = 2m \frac{\{c_i\}_{\text{promedio}}}{A} \\ &= 2m \frac{\text{RMS}\{c_i\}}{A} = \frac{2m}{A} \sqrt{\frac{c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_m^2}{m}} \\ &= \frac{2m}{A} \sqrt{\frac{A_{r1} + A_{r2} + \dots + A_{rm}}{m\pi}} = \sqrt{\frac{4}{\pi} \frac{m}{A} \frac{A_r}{A}} \\ &= \sqrt{\frac{4n}{\pi} \frac{A_r}{A}} \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

donde n es el número de contactos por unidad de área.

Para cada una de las superficies de contacto se supone que el perfil es un proceso aleatorio $y(x)$ (figura B.2.a) y que la distribución de las alturas de dicho perfil es gaussiana:

$$p(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right) \quad (\text{B.4})$$

donde y se mide desde la línea media del perfil y σ representa la desviación típica de las alturas. Ésta se calcula como:

$$\sigma^2 = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \int_0^L y^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 p(y) dy$$

En un perfil tal como el de la figura B.2.a, se quiere calcular el número de picos por unidad de longitud del perfil que están por encima de un nivel Y , ya que se considera que el contacto tendrá lugar en los puntos en los que $y > Y$. El problema se resuelve usando el método de contar funcionales sugerido por Middleton [1960].

Sea $u(s)$ la función escalón que tiene las siguientes propiedades:

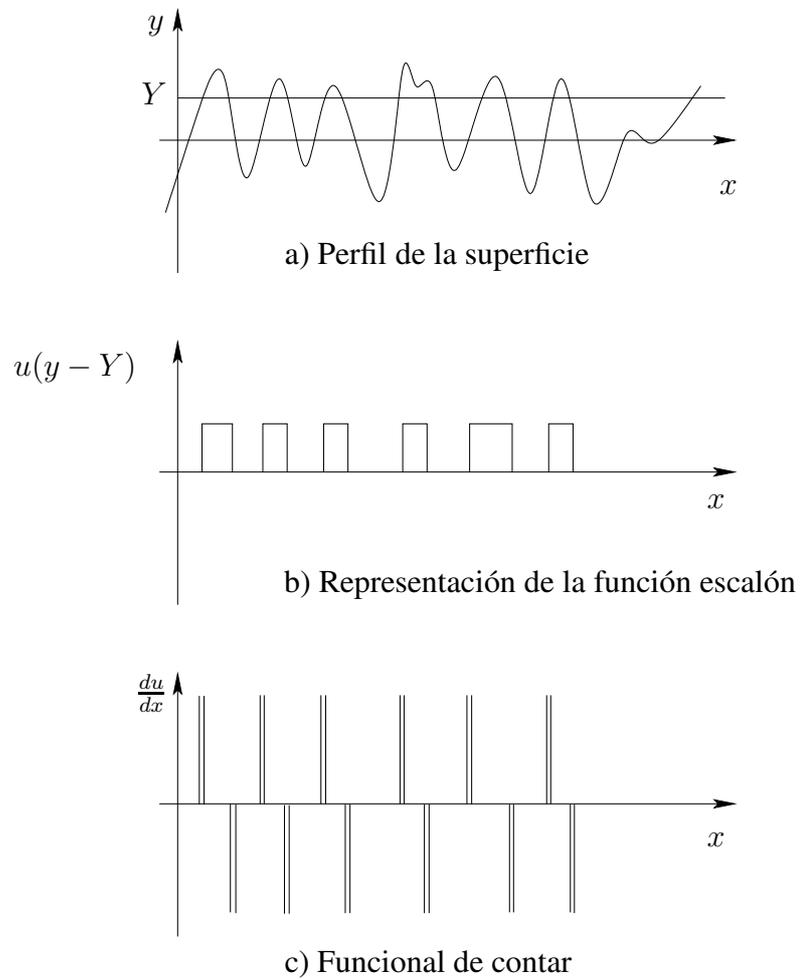


Figura B.2: Número de intersecciones para $y = Y$ en un perfil de superficie típico.

$$u(s) = 1 \text{ para } s > 0$$

$$u(s) = 0 \text{ para } s < 0$$

Entonces $u(y(x) - Y)$ tiene la forma que señala la figura B.2.b . Diferenciando $u(y - Y)$ se puede obtener el funcional capaz de contar picos (figura B.2.c) que es:

$$\frac{d}{dx} [u(y - Y)] = y' \delta(y - Y)$$

siendo $y' = \frac{dy}{dx}$, y $\delta(y - Y)$ es la delta de Dirac, que se hace cero en todos los puntos excepto en $y = Y$ y tiene la propiedad:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(y - Y) dy = 1$$

Por lo tanto,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \delta(y - Y) dy = f(y) \quad (\text{B.5})$$

También, si para $x_1 < x < x_2$, $y(x)$ toma el valor de Y una sola vez, entonces

$$\int_{x_1}^{x_2} |y'| \delta(y - Y) dx = 1$$

Por lo tanto, el número de picos con $y > Y$ por unidad de longitud del perfil es:

$$\frac{s}{L} = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2L} \int_0^L |y'| \delta(y - Y) dx$$

y es igual al número de puntos de contacto s por unidad de longitud. Aplicando la ecuación (B.5) y suponiendo que la distribución de las alturas del perfil es independiente de la distribución de las pendientes del perfil

$$\frac{s}{L} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |y'| \delta(y - Y) p(y) p'(y') dy dy' = \frac{p(Y)}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |y'| p'(y') dy'$$

Sustituyendo en la ecuación (B.4), la ecuación anterior queda:

$$\frac{2\sigma s/L}{m} = \frac{\exp(-Y^2/2\sigma^2)}{\sqrt{2\pi}} \quad (\text{B.6})$$

donde

$$m = \int_{-\infty}^{+\infty} |y'| p'(y') dy' = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \int_0^L |y'| dx$$

es la pendiente media de los picos del perfil.

Sustituyendo la ecuación (B.2) en (B.6) se obtiene la expresión de la suma de todos los radios de los puntos de contacto por unidad de área:

$$\frac{\Sigma c_i}{A} = \frac{1}{4} \frac{m}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp(-Y^2/2\sigma^2)$$

La fracción de la longitud del perfil en contacto $\Sigma l_c/L$ puede obtenerse, por medio de la definición de $p(y)$ como:

$$\frac{\Sigma l_c}{L} = \int_Y^{\infty} p(y) dy$$

Por otro lado, mediante la ecuación (B.1) se puede obtener el valor de la relación entre el área real y el área aparente:

$$\frac{A_r}{A} = \int_Y^{\infty} p(y) dy = \frac{1}{2} \text{erfc}\left(Y/\sqrt{2}\sigma\right)$$

donde $\text{erfc}(x)$ es la función error y se define como:

$$\text{erfc}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x \exp^{-u^2} du$$

Si se consideran las dos superficies que forman el par de contacto en su conjunto, con los planos medios separados una distancia Y , y con perfil aleatorio y distribución gaussiana de las alturas de las asperidades, el contacto tendrá lugar en cualquier punto donde $y_1 + y_2 >$

Y . Por lo tanto, las ecuaciones anteriores serán válidas si se interpreta $y(x)$ de la figura B.2.a como $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ e Y como la distancia entre los planos medios de las superficies en contacto. El valor RMS para la distribución $y_1(x) + y_2(x)$ es:

$$\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

Y si las pendientes están distribuidas normalmente también:

$$m = \sqrt{m_1^2 + m_2^2}$$

El número de puntos de contacto por unidad de área aparente se puede obtener a partir de la ecuación (B.3), de donde:

$$n = \frac{\pi}{4} \frac{A}{A_r} \left(\frac{s}{L} \right)^2 = \frac{1}{16} \frac{m^2}{\sigma^2} \operatorname{erfc}^{-1} \left(\frac{Y}{\sqrt{2}\sigma} \right) \exp \left(-\frac{Y^2}{\sigma^2} \right)$$

El radio medio de las zonas de contacto por unidad de área aparente, es:

$$c = \frac{\Sigma c_i / A}{n} = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \frac{\sigma}{m} \exp \left(\frac{Y^2}{2\sigma^2} \right) \operatorname{erfc} \left(\frac{Y}{\sqrt{2}\sigma} \right)$$

El área real de contacto también por unidad de área aparente, es entonces:

$$A_r = n\pi c^2 = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{Y}{\sqrt{2}\sigma} \right)$$

Referencias

- N. Adams. Fatigue crack closure at positive stresses. *Engineering Fracture Mechanics*, 4:543–554, 1972.
- J. Archard. Elastic deformation and the laws of friction. pages 190–205, 1957.
- J. Archard. Surface topography and tribology. *Tribology International*, pages 213–220, 1974.
- R. Asaro. Geometrical effects in the inhomogeneous deformation of ductile single crystals. *Acta Metallurgica*, 27:445–453, 1979.
- R. Asaro. Micromechanics of crystals and polycrystals. *Advances in Applied Mechanics*, 23, 1983.
- R. Asaro y J. Rice. Strain localization in ductile single crystals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 25:309–338, 1977.
- R. Ballarini y M. Plesha. The effects of crack surface friction and roughness on crack tip stress fields. *International Journal of Fracture*, 34:195–207, 1987.
- G. Barenblatt. The mathematical theory of equilibrium of cracks in brittle fracture. *Advances in Applied Mechanics*, 7:55–129, 1962.
- J. Bikerman. Adhesion in friction. *Wear*, 39:1–13, 1976.
- F. Bowden y D. Tabor. The area of contact between stationary and between moving surfaces. 169:391–413, 1939.
- F. Bowden y D. Tabor. *The friction and lubrication of solids*. Clarendon Press, Oxford, 1950.

- A. Bush, R. Gibson, y T. Thomas. The elastic contact of a rough surface. *Wear*, 35: 87–111, 1975.
- G. Camacho y M. Ortiz. Computational modelling of impact damage in brittle materials. *International Journal of Solids and Structures*, 33:2899–2938, 1996.
- A. Cantizano. *Simulación numérica de mapas de mecanismos de desgaste*. PhD thesis, Universidad Pontificia Comillas, Madrid, 2003.
- M. Cooper, B. Mikic, y M. Yovanovich. Thermal contact conductance. 12:279–300, 1969.
- C. Coulomb. *Théorie des machines simples*. Mémoire de Mathématique et de Physique de l'Académie Royale, 1785.
- A. de Andrés. *Fatiga multiaxial en ejes de gran par*. PhD thesis, Universidad Pontificia Comillas, Madrid, 1997.
- A. de Andrés, O. López, y J. Pérez. Aplicación de un algoritmo de extrapolación al crecimiento de grietas por fatiga. *Métodos numéricos en ingeniería*. SEMNI, 1999a.
- A. de Andrés, J. Pérez, y M. Ortiz. Elastoplastic finite element analysis of three-dimensional fatigue crack growth in aluminium shafts subjected to axial loading. *International Journal of Solids and Structures*, 36:2231–2258, 1999b.
- D. Dugdale. Yielding of steel sheets containing slits. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 8:100–104, 1960.
- J. Eshelby. The continuum theory of lattice defects. *Progress in Solid State Physics*, 3: 79–144, 1956.
- L. Euler. *Histoire de l'Académie Royale à Berlin*. 1748.
- F. Fernández. *Aplicación de un algoritmo de extrapolación automático al crecimiento de grieta por fatiga*. PhD thesis, Universidad Pontificia Comillas, Madrid, 2003.
- J. Greenwood y J. Williamson. Contact of nominally flat surfaces. *Proceedings of the Royal Society of London*, pages 300–318, 1966.

- A. Griffith. The phenomena of rupture and flow in solids. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A*, A 221:163–197, 1921.
- T. Gross y D. Mendelsohn. An analysis of frictional effects on cylindrical mode III fatigue crack propagation specimens. *Fatigue of Engineering Materials and Structures*, 11: 167–178, 1988.
- T. Gross y D. Mendelsohn. Mode I stress intensity factors induced by fracture surface roughness under pure mode III loading: application to the effect of loading modes on stress corrosion crack growth. *Metallurgical Transactions*, 20A:1989–1995, 1989.
- H. Hertz. On the contact of elastic solids. *Miscellaneous papers*, 90:90–243, 1896.
- R. Hill. Generalized constitutive relations for incremental deformations of metal crystals by multislips. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 14:95–102, 1966.
- R. Hill y J. Rice. Constitutive analysis of elastic-plastic crystals at arbitrary strain. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 20:401–413, 1972.
- A. Hillerborg, M. Modeer, y P. Petersson. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. *Cement Concrete Research*, 6:773–782, 1976.
- J. Hohe, H. Baaser, y D. Gross. Analysis of ductile crack growth by means of a cohesive damage model. *International Journal of Fracture*, 81:99–112, 1996.
- R. Holm. *Electric contacts handbook*. Springer-Verlag, 1958.
- K. Hsia, T.-L. Zhang, y D. Socie. Effects of crack surface morphology on fracture behavior under mixed mode I/III loading. *Fatigue and Fracture Mechanics*, 1296:152–174, 1997.
- N. Hurd y P. Irving. Factors influencing propagation of mode III fatigue cracks under torsional loading. *Design of fatigue and fracture resistant structures*, 761:212–223, 1982.
- J. Hutchinson. Singular behaviour at the end of a tensile crack in a hardening material. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 16:13–31, 1968.

- G. Irwin. Fracture dynamics. pages 147–166, 1948.
- G. Irwin. Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate. *Journal of Applied Mechanics*, 24:361–364, 1957.
- G. Irwin. Plastic zone near a crack and fracture toughness. *Proc. 7th. Sagamore Conf.*, pages 63–78, 1960.
- I. Kragelskii, M. Dobychin, y V. Kombalov. *Friction and wear: calculation methods*. Pergamon Press, Oxford, 1982.
- O. López. *Teoría de superficies cohesivas y su aplicación a la predicción de vida en componentes estructurales*. PhD thesis, Universidad Pontificia Comillas, Madrid, 2002.
- O. López, A. de Andrés, y J. Pérez. Aplicación de un modelo cohesivo de daño al crecimiento de grietas por fatiga. *Anales de mecánica de la fractura*, 15:57–62, 1998.
- J. Marsden y T. Hughes. *Mathematical foundations of elasticity*. Prentice-Hall Englewood Cliffs, New Jersey, 1983.
- F. McClintock. The growth of fatigue cracks under plastic torsion. *Proc. Int. Conf. Fatigue Metals (IMEchE)*, pages 538–542, 1956.
- D. Mendelsohn, T. Gross, R. Goulet, y M. Zhouc. Experimental-computational estimation of rough fracture surface contact stresses. *Materials Science and Engineering*, 249:1–6, 1998.
- D. Mendelsohn, T. Gross, y Y. Zhang. Fracture surface interference in shear-i. a model based on experimental surface characterizations. *Acta Metallurgica et Materialia*, 43 (3):893–900, 1995.
- R. Michalowski y Z. Mroz. Associated and non-associated sliding rules in contact friction problems. *Acta Metallurgica*, 30:259–276, 1978.
- D. Middleton. *An introduction to statistical communication theory*. McGraw Hill, New York, 1960.
- B. Mikic y W. Rohsenow. Thermal contact resistance. *M.I.T. Rep. No. 4542-41*, 1966.

- P. Nayak. Random process model of rough surfaces. *Journal of Lubrication Technology*, 93:398–407, 1971.
- H. Nayeb-Hashemi, F. McClintock, y R. Ritchie. Effects of friction and high torque on fatigue crack propagation in mode III. *Metallurgical Transactions*, 13A:2197–2204, 1982.
- A. Needleman. A continuum model for void nucleation by inclusion debonding. *Journal of Applied Mechanics*, 54:525–531, 1987.
- A. Needleman. An analysis of tensile decohesion along an interface. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 38:289–324, 1990.
- A. Needleman, V. Tvergaard, y J. Hutchinson. *Void growth in plastic solids*, chapter 4, pages 145–178. Springer-Verlag, 1992.
- O. Nguyen, E. Repetto, M. Ortiz, y R. Radovitzky. A cohesive model of fatigue crack growth. *International Journal of Fracture*, 110:351–369, 2001.
- E. Orowan. Energy criteria of fracture. *Welding Journal*, 34:1575–1605, 1955.
- M. Ortiz. Microcrack coalescence and macroscopic crack growth initiation in brittle solids. *International Journal of Solids and Structures*, 5:213–250, 1988.
- M. Ortiz y A. Pandolfi. Finite-deformation irreversible cohesive elements for three dimensional crack-propagation analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 44:1267–1282, 1999.
- M. Ortiz y S. Suresh. Statistical properties of residual stresses and intergranular fracture in ceramic materials. *Journal of Applied Mechanics*, 60:77–84, 1993.
- P. Paris, M. Gomez, y W. Anderson. A rational analytic theory of fatigue. *The trend in engineering*, 13:9–14, 1961.
- J. Planas, M. Elices, y G. Guinea. *Cohesive cracks as a solution of a class of nonlocal problems*. Fracture and damage in quasibrittle structures, 1994.
- L. Pook. The fatigue crack direction and threshold behaviour of mild steel under mixed mode I and III loading. *International Journal of Fracture*, 7:21–30, 1985.

- L. Pook y J. Sharples. The mode III fatigue crack growth threshold for mild steel. *International Journal of Fracture*, 15:223–226, 1979.
- R. Quay y R. Placek. Cyclic fatigue of turbine generator shafts. *IEEE Power Eng. Society*, pages 12–21, 1976.
- J. Rice. Mathematical analysis in the mechanics of fracture. *Fracture, vol.2, Academic Press*, pages 191–311, 1968a.
- J. Rice. A path independent integral and the approximate analysis of strain concentrations by notches and cracks. *Journal of Applied Mechanics*, 35:379–386, 1968b.
- J. Rice. Dislocation nucleation from a crack tip: an analysis based on the peierls concept. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 40:239–271, 1992.
- J. Rice y G. Rosengren. Plain strain deformation near a crack tip in a power law hardening material. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 16:1–12, 1968.
- D. Rigney y J. Hirth. Plastic deformation and sliding friction of metals. *Wear*, 53:345–370, 1979.
- R. Ritchie, F. McClintock, H. Nayeb-Hashemi, y M. Ritter. Mode III fatigue crack propagation in low alloy steel. *Metallurgical Transactions*, 13A:101–110, 1982.
- J. Rose, J. Ferrante, y J. Smith. Universal binding energy curves for metals and bimetallic interfaces. *Physical Review Letters*, 47:675–678, 1981.
- J. Simo. A framework for finite strain elastoplasticity based on maximum plastic dissipation and the multiplicative decomposition. part i: Continuum formulation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 66:199–219, 1988.
- J. Simo y M. Ortiz. A unified approach to finite deformation elastoplasticity based on the use of hyperelastic constitutive equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 49:221–245, 1985.
- S. Song y M. Yovanovich. Explicit relative contact pressure expression: Dependence upon surface roughness parameters and vickers microhardness coefficients. *AIAA Journal*, 1987.

- S. Suresh. *Fatigue of materials*. Cambridge University Press, 1991.
- G. Taylor. *Analysis of plastic strain in a cubic crystal*. McMillan, 1938.
- D. Tracy. Finite element solutions for crack-tip behaviour in small scale yielding. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 98:146–151, 1976.
- V. Trebules, R. Roberts, y R. Hertzberg. *ASTM STP 536*, page 115, 1973.
- E. Tschegg. A contribution to mode III fatigue crack propagation. *Materials Science and Engineering*, 54:127–136, 1982.
- E. Tschegg. Mode III and mode I fatigue crack propagation behaviour under torsional loading. *International Journal of Fracture*, 18:1604–14, 1983.
- E. Tschegg, R. Ritchie, y F. McClintock. On the influence of rubbing fracture surfaces on fatigue crack propagation in mode III. *International Journal of Fatigue*, pages 29–35, 1983.
- E. Tschegg y S. Suresh. Mode III fracture of 4340 steel: effects of tempering temperature and fracture surface interference. *Metallurgical Transactions A*, 19A:3035–3044, 1988.
- V. Tvergaard y J. Hutchinson. The influence of plasticity on mixed mode interface toughness. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 41:1119–1135, 1993.
- V. Tvergaard y J. Hutchinson. Effect of strain dependent cohesive zone model on predictions of interface crack growth. *Journal de Physique IV*, pages 165–172, 1996.
- D. Walker, C. Bowler, R. Jackson, y D. Hodges. Results of subsynchronous resonance at Mohave. *IEEE Trans. Power Appar. Syst.*, 94:1878–89, 1975.
- J. Walsh y A. Mackenzie. Elastic-plastic torsion of a circumferentially notched bar. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 7:247–257, 1959.
- A. Wells. Application of fracture mechanics at and beyond general yielding. *British Welding Research Ass. Rep.*, M13, 1963.
- H. Westergaard. Bearing pressures and cracks. *Journal of Applied Mechanics*, 61:49–53, 1939.

- D. Whitehouse y J. Archard. The properties of random surfaces of significance in their contact. *Proceedings of the Royal Society of London*, 316:97–121, 1970.
- K. William. *Simulation issues of distributed and localized failure computations*. Cracking and damage. Elsevier Science, 1989.
- K. Woo y T. Thomas. Contact of rough surfaces: A review of experimental work. *Wear*, 58:331–340, 1980.
- P. Wriggers y G. Zavarise. Application of augmented lagrangian techniques for non-linear constitutives laws in contact interfaces. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 9:815–824, 1993.
- R. Wright y R. Queeney. Mode III fatigue crack propagation-rates in 6061-t6 aluminum. *International Journal of Fracture*, 5:27–30, 1982.
- G. Xu, A. Bower, y M. Ortiz. An analysis of non-planar crack growth under mixed mode loading. *International Journal of Solids and Structures*, 31:2167–2193, 1994.
- X. Xu y A. Needleman. Void nucleation by inclusion debonding in a crystal matrix. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, 1:111–132, 1993.
- X. Xu y A. Needleman. Numerical simulations of dynamic crack growth along an interface. *International Journal of Fracture*, 74:289–324, 1996.
- M. Yovanovich. Thermal contact correlations. *AIAA Journal*, paper 81-1164:83–95, 1981.
- X. Yu y A. Abel. Modelling of crack surface interference under cyclic shear loads. *Fatigue of Engineering Materials and Structures*, 22:205–213, 1999.
- G. Zavarise, B. Schrefler, y P. Wriggers. Consistent formulation for the thermomechanical contact based on microscopic interface laws. *Proceedings of COMPLAS*, pages 349–360, 1992a.
- G. Zavarise, P. Wriggers, E. Stein, y B. Schrefler. Real contact mechanisms and finite element formulation-a coupled thermomechanical approach. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 35:767–785, 1992b.

- C. Zhang y D. Gross. Ductile crack analysis by a cohesive damage zone model. *Engineering Fracture Mechanics*, 47:237–248, 1994.