



FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y EMPRESARIALES

CREACIÓN DE RETORNO EN CARTERAS DE INVERSIÓN DE RENTA VARIABLE BASADA EN *FACTOR* *INVESTING*

Autor: Aurora Joly Álvarez

Director: Susana Carabias López

Madrid | Junio 2022

RESUMEN

Inicialmente, se desarrolla el modelo de valoración CAPM basado en la relación riesgo-retorno para medir la rentabilidad de un valor. Este modelo ha sido el precursor de los posteriores modelos de valoración planteados, como los modelos multifactoriales, los cuales asumen más de un factor de riesgo. Los investigadores evidencian que tienen un poder predictivo mayor que los modelos unifactoriales, como es el CAPM. Fama y French son los primeros en plantear un modelo multifactorial con 3 factores definidos que maximice la rentabilidad de la cartera de inversión, el cual luego se amplía a un modelo de 5 factores. Así se da lugar al *factor investing*, estrategia basada en factores que históricamente han resultado influir en el precio de una acción, como *value*, tamaño, momentum, *dividend yield*, baja volatilidad y calidad.

Palabras clave: CAPM, riesgo, beta, factores, *factor investing*, inversión, retorno

ABSTRACT

Initially, the CAPM valuation model is developed based on the risk-return relationship to measure the profitability of a security. This model has been the forerunner of subsequent valuation models proposed, such as multifactorial models, which assume more than one risk factor. The researchers show that they have a greater predictive power than unifactorial models, such as the CAPM. Fama and French are the first to propose a multifactorial model with 3 defined factors that maximizes the profitability of the investment portfolio, which is later extended to a 5-factor model. This gives rise to factor investing, a strategy based on factors that have historically influenced the price of a share, such as value, size, momentum, dividend yield, low volatility and quality.

Key words: CAPM, risk, beta, factors, factor Investing, investment, return

ÍNDICE DE CONTENIDO

1. Introducción	6
1.1. Objetivo.....	6
1.2. Metodología	6
2. Modelos de valoración de activos riesgo-retorno	7
2.1. Teoría Moderna de Carteras de Harry Markowitz.....	7
2.2. Modelo CAPM.....	10
2.2.1. Tipos de riesgo	10
2.2.2. Línea del Mercado de Capitales o Capital Market Line	11
2.2.3. Línea del Mercado de Valores o Security Market Line	12
2.2.4. Problemas empíricos del modelo CAPM.....	13
3. Modelos factoriales	16
3.1. Concepto de modelos factoriales	16
3.2. Teoría del Arbitraje.....	17
3.2.1. Validez de la Teoría del Arbitraje.....	21
3.3. Modelos factoriales significativos	22
3.3.1. Modelo de 3 factores de Fama y French.....	23
3.3.2. Modelo de 5 factores de Fama y French.....	27
3.3.1. Modelo de 4 factores de Carhart.....	33
4. Factor Investing	35
4.1. Concepto	35
Fuente: elaboración propia basada en (Bender, Briand, Melas & Subramanian, 2013).....	36
4.2. Smart Beta.....	37
4.3. Evolución de los factores	38
4.3.1. Baja Volatilidad	39
4.3.2. Value	40
4.3.3. Momentum.....	41
4.3.4. Conservador	41
4.3.5. Calidad	42

4.3.6. Dividend yield.....	43
5. Conclusión	44
6. Bibliografía	47

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Relación Retorno-Riesgo.....	8
Figura 2. Frontera de carteras eficientes	9
Figura 3. Capital Market Line.....	11
Figura 3. Línea de Mercado de Activos o Security Market Line.....	13
Figura 4. Cuadro de estilo de inversión de Morningstar.....	27
Figura 5. Desempeño del factor SMB de 1927 a 2021	30
Figura 6. Desempeño del factor HML de 1927 a 2021.....	31
Figura 7. Desempeño del factor RMW de 1964 a 2021	32
Figura 8. Desempeño del factor CMA de 1964 a 2021	33
Figura 9. Desempeño del factor WML de 1927 a 2021.....	35
Figura 10. Factor Investing como tercer método de inversión	36
Figura 11. Hitos Históricos del Factor Investing	39

1. Introducción

A lo largo de la historia, los inversores han tratado de hallar formas de maximizar sus retornos a través de modelos de valoración. Partiendo de la lógica del modelo CAPM, con la que se halla la relación riesgo-retorno en las inversiones, se han desarrollado distintos modelos que han ido evolucionando dado las pruebas empíricas realizadas con este modelo y las anomalías en los mercados de renta variable. Consecuentemente, rompiendo con la teoría de eficiencia del mercado y con el modelo unifactorial, se proponen los modelos factoriales que han derivado en la reconocida estrategia de *factor investing* o inversión basada en factores.

El *factor investing* ha ganado reciente popularidad, especialmente entre los gestores de fondos de inversión y proveedores de índices de mercado, debido a los avances computacionales, la inversión cuantitativa y las críticas a las estrategias de inversión activa y pasiva. Además, después de numerosas investigaciones por parte de los inversores se ha concluido que hay ciertos factores que tienen el mayor poder explicativo para el retorno de una inversión: tamaño, *value*, momentum, baja volatilidad, calidad y *dividend yield*.

1.1. Objetivo

El objetivo principal de esta tesis es estudiar como la estrategia de *factor investing* explica la creación de retorno en carteras de inversión de renta variable cotizada. Para ello, se analizarán los modelos predecesores al *factor investing* y se constatará la conveniencia de planterase este nuevo modelo estudiando evidencias empíricas de los modelos más tradicionales. Además, se observarán los principales factores para determinar la rentabilidad de las inversiones y los motivos de la creciente popularidad de este método de inversión.

1.2. Metodología

Para alcanzar el objetivo principal, se utilizará un enfoque deductivo y una metodología cualitativa, analizando los distintos artículos académicos realizados por inversores como Markowitz (1972), Sharpe (1964), Ross (1976), Fama y French (1993), Carhart (1997) y Fama y French (2014). Además, se analizarán valoraciones de profesionales de gestoras de fondos de inversión como Robeco o Blackstone para estudiar la metodología de *factor investing*.

Por otro lado, se partirá de la base de datos recogida por French (2022) basada en distintas acciones con distintas características desde 1927 hasta 2021 en el mercado estadounidense para

el cálculo de los factores propuestos por Fama y French (1993), Fama y French (2014) y Carhart (1997) que serán representados en gráficas.

2. Modelos de valoración de activos riesgo-retorno

2.1. Teoría Moderna de Carteras de Harry Markowitz

En 1952, el economista Harry Markowitz, conocido como el padre de las finanzas modernas, desarrolla una teoría de selección de carteras en la que se utiliza la optimización de la media y la varianza (Portfolio Selection) (1952). En esta teoría se define un modelo matemático que postula como un inversor puede construir una cartera de inversión tratando de buscar el mínimo nivel de riesgo posible que maximice la rentabilidad esperada. Esta tesis sirvió de base para el desarrollo de la Teoría Moderna de Carteras (Modern Portfolio Theory).

Antes del desarrollo de este modelo, las técnicas de inversión se enfocaban en acciones independientes, en las cuales se encontraban “apuestas seguras”, es decir, títulos que daban un retorno aceptable sin someter al inversor a un riesgo excesivo. Para distinguir estos valores, se utilizaba el VAN (Valor Actual Neto), valorando los títulos descontando flujos de caja. Las acciones que generaban más rentabilidad a mayor ritmo recibían un gran valor.

Sin embargo, Markowitz considera que la teoría del VAN presenta carencias; según este razonamiento, seleccionar la cartera más apropiada supone elegir una sola acción con el VAN esperado más alto. Este planteamiento es arriesgado por naturaleza, y aunque los economistas sabían que una buena cartera era la diversificada, no había ninguna técnica disponible para que los inversores consiguiesen esta diversidad. Por eso, Markowitz utiliza la probabilidad y la estadística para enfocar su método; utilizando la media y la varianza se pueden formar carteras más diversas puesto que el precio de una acción cambia de manera aleatoria (Markowitz, 1952).

Hay que tener en cuenta una serie de premisas y asunciones que Markowitz considera al desarrollar su teoría:

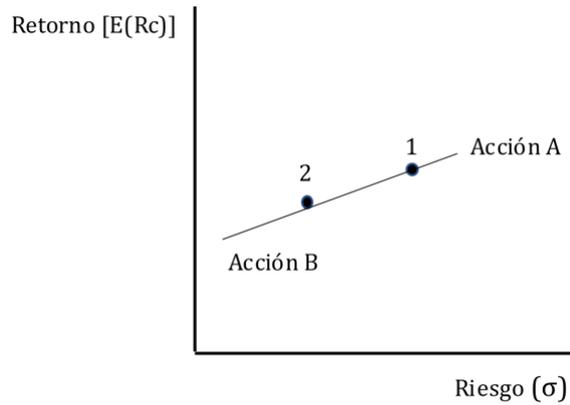
- El mercado es perfecto, es decir, no existen ni costes de transacción ni impuestos, los valores son divisibles y su precio no será repercutido por el inversor.
- El mercado es eficiente y los inversos construyen sus carteras de manera lógica.

- Los inversores tienen aversión al riesgo y buscan el mínimo nivel de riesgo posible que maximice la rentabilidad esperada. Según este supuesto, los inversores sólo aceptarán inversiones de alto riesgo si pueden esperar una mayor recompensa.
- El riesgo de una inversión se mide a través de su desviación típica o varianza. La rentabilidad se mide a través de su esperanza matemática.
- El modelo asume un mismo período de tenencia estandarizado para que los rendimientos de diferentes valores sean comparables.

El riesgo total de una cartera es medido por su varianza en función de las varianzas de los títulos y de las correlaciones entre ellos. Estas correlaciones influyen en el riesgo total de la cartera, generando una menor desviación típica que la que se formularía mediante una media ponderada (Markowitz, 1952). Con este planteamiento, Markowitz elabora un sistema de gestión que transforma el panorama de los procesos de inversión modernos.

La recta de la Figura 1, representa la inversión que combina dos acciones (A y B), con distintos riesgos. En el punto 1, se encuentra la inversión de un individuo con poca aversión al riesgo ya que posiciona la mayor parte del capital invertido en el activo más arriesgado (Acción A). De la misma manera, el punto 2 refleja la inversión de un sujeto con mayor rechazo al riesgo; por lo que el activo menos arriesgado se encuentra en mayor proporción en su cartera (Acción B). La relación retorno-riesgo es positiva ya que cuanto más arriesgado sea el inversor (desviación típica), mayor retorno esperará de la inversión [$E(R_c)$]

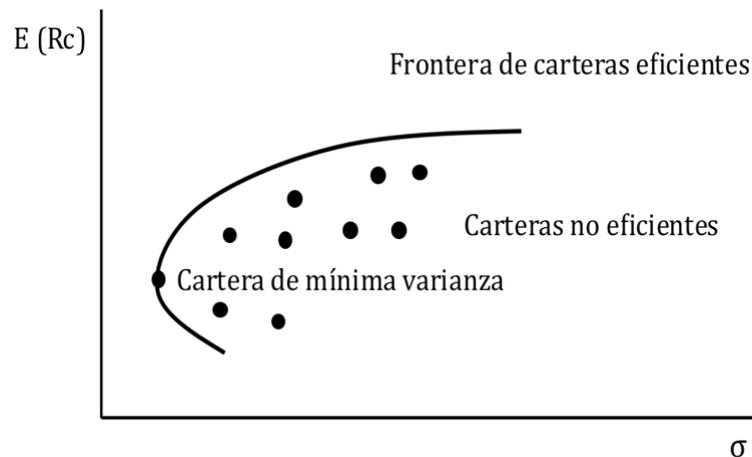
Figura 1. Relación Retorno-Riesgo



Fuente: elaboración propia

En la Figura 2, cada punto representa la combinación de riesgo y rentabilidad de una cartera. Dentro de la frontera eficiente, la cual parte de la cartera de mínima varianza, los inversores pueden crear una cartera que ofrezca el menor riesgo posible, para cada nivel de rentabilidad, y de la misma manera, una combinación de acciones que ofrezca el mayor retorno, para cada nivel de riesgo correspondiente. No existe una Frontera Eficiente única ya que los inversores tienen distintas estimaciones de los parámetros.

Figura 2. Frontera de carteras eficientes



Fuente: elaboración propia

2.2. Modelo CAPM

El Modelo CAPM es un modelo de valoración de activos que es desarrollado por el economista, y posteriormente, Premio Nobel de Economía, William Sharpe (1964) y se basa en la Teoría de la Cartera de Media-Varianza de Markowitz.

A partir de las suposiciones propuestas por Markowitz en la Teoría Moderna de Carteras, el modelo CAPM incorpora las siguientes según Luenberger (1998):

- Los inversores tienen libre acceso a toda la información del mercado sin coste alguno ya que éste es eficiente. Por lo tanto, tienen las mismas expectativas de retorno y volatilidad (media y varianza) para cada título financiero.
- Existe una única tasa libre de riesgo para todos los inversores a la que podrán prestar y pedir prestado de manera ilimitada y sin restricciones.
- El retorno de los activos se basa en una distribución normal y los inversores pueden maximizar la función de utilidad, optimizando la media y la varianza.

2.2.1. Tipos de riesgo

El modelo de Sharpe postula que existen dos tipos de riesgo, sabiendo que este se define como la posibilidad de que un resultado o las ganancias reales de una inversión difieran de un resultado o rendimiento esperado.

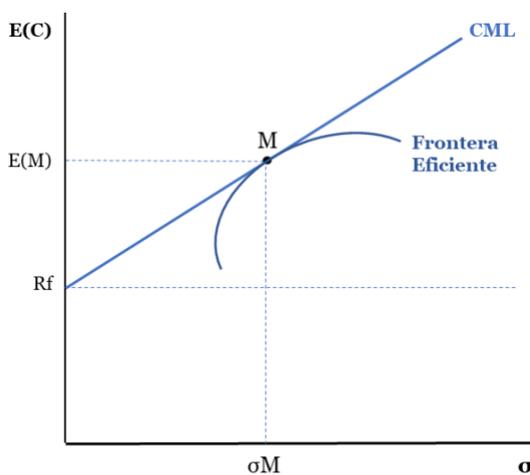
1. Riesgo sistemático: refleja el impacto de factores económicos que afectan a todas las empresas y valores financieros y explica por qué los precios de los títulos se mueven en sintonía. Es aquel riesgo inherente al mercado que no puede minimizarse a través de la diversificación (Ross, Westerfield, Jordan and González Valdés, 2014).
2. Riesgo no sistemático: es el riesgo específico de las acciones individuales, lo que significa que puede eliminarse con la diversificación a medida que se incrementa el número de acciones en la cartera. Por lo que, a diferencia del riesgo sistemático, el mercado no ofrece ningún tipo de retribución a cambio.

2.2.2. Línea del Mercado de Capitales o Capital Market Line

La línea del mercado de capitales (CML) es una función lineal que parte del punto libre de riesgo y pasa por la cartera de mercado mostrando la relación positiva entre la tasa de rendimiento esperada y el riesgo de rendimiento (medido por la desviación estándar) para activos eficientes o cartera de activos. La cartera de mercado incluye todos los activos del mercado de valores por lo que está diversificada y solo posee riesgo sistemático.

La CML se diferencia de la frontera eficiente de Markowitz en que ésta incluye inversiones libres de riesgo ya que los inversores piden prestado y prestan en la tasa libre de riesgo. En el modelo CAPM, los inversores elegirán una posición en la línea de mercado de capitales, con el fin de obtener una cartera eficiente compuesta de activos tanto libres de riesgo como de riesgo. El punto de intersección de la CML y la frontera eficiente da como resultado la cartera de activos con riesgo o la cartera de mercado, denominada cartera de tangencia. La pendiente de la recta se conoce como precio del riesgo ya que indica cuanto debe incrementar el retorno esperado de una cartera si la desviación típica de esta aumenta por 1 unidad (Luenberger, 1998).

Figura 3. Capital Market Line



Fuente: elaboración propia

2.2.3. Línea del Mercado de Valores o Security Market Line

El CAPM establece que existe una relación entre el riesgo sistemático de una inversión y la rentabilidad esperada de un activo individual. Esta relación positiva entre retorno-riesgo se representa gráficamente con la Línea de Mercado de Valores (SML) la cual se diferencia de la CML ya que ésta tiene como variable independiente el riesgo sistemático individual de un activo (β) mientras que la CML tiene como variable independiente el riesgo total de la cartera (σ). La SML responde a la siguiente expresión:

$$E(a) - R_f = \beta_a [E(m) - R_f]$$

dónde:

E(a) = Rendimiento esperado de un valor o el coste de capital de equity de una compañía (Ke)

Rf = Tasa libre de riesgo

E(m) = Rentabilidad esperada del mercado

β_a = El riesgo sistemático

[E(m) - Rf] = Prima del mercado de acciones

$\beta_a [E(m) - Rf]$ = Prima de riesgo

La línea del Mercado de Valores expresa la estructura de riesgo-retorno de los títulos según el modelo CAPM y enfatiza que el riesgo de un valor es una función de su covarianza con el mercado, o de manera equivalente, una función de su beta.

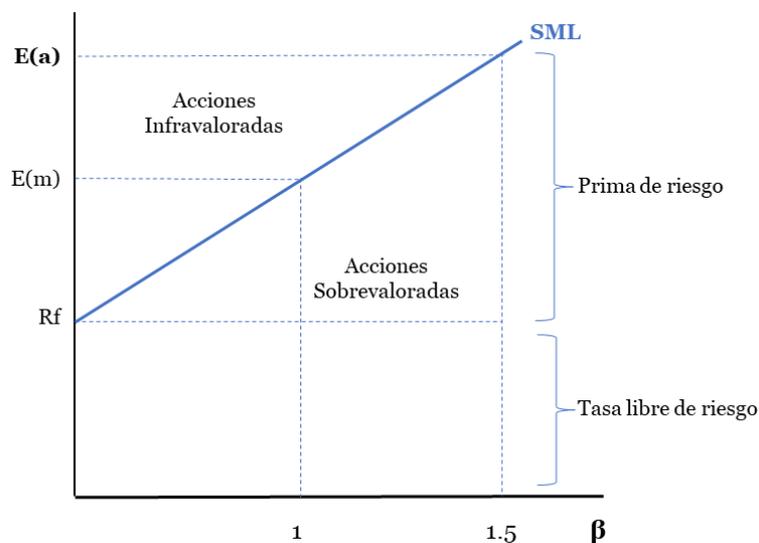
Por otro lado, la prima de riesgo representa el retorno adicional que está por encima de la tasa libre de mercado, que se exige para compensar a los inversores por invertir en valores más arriesgados. Por lo tanto, cuanto más volátil sea un mercado o el título, mayor será la prima de riesgo. Ninguna medida de riesgo no sistemático aparece en la prima de riesgo, ya que en el modelo CAPM la diversificación la ha eliminado. En cambio, los inversores van a exigir una compensación representada por esta prima al asumir el riesgo sistemático de mercado.

La tasa libre de riesgo generalmente suele ser igual al rendimiento de un bono del gobierno de EEUU a 10 años al ser el bono más cotizado y líquido. De todas formas, esta dependerá del país donde se realiza la inversión y de su horizonte temporal, que deberá coincidir con el vencimiento del bono.

La beta mide el riesgo sistemático de una acción, es decir, muestra la variación del precio de un valor comparado con la volatilidad de todo el mercado de valores. Según el modelo, La beta de un valor será 1 si el precio de una acción se mueve exactamente en línea con el mercado, mientras que, si es mayor que 1, el activo tendrá un retorno mayor al del mercado variando de manera más intensa que este. Si la beta estuviese entre 0 y 1, la rentabilidad del título sería menor y este sería menos volátil que el mercado. Si la beta fuese negativa, no iría en línea con el mercado ya que significaría que, por cada inversión agregada a la cartera, se estaría reduciendo el riesgo general de la cartera.

Como indica la figura 3, si una acción está encima de la SML, se considera infravalorada ya que significa que ofrece un mayor rendimiento en relación con el riesgo que presenta. Mientras que los valores que se encuentren debajo de la SML, tienen un precio sobrevalorado al tener una mayor volatilidad inherente al rendimiento esperado.

Figura 4. Línea de Mercado de Activos o Security Market Line



Fuente: elaboración propia

2.2.4. Problemas empíricos del modelo CAPM

El CAPM se considera un modelo atractivo ya que ofrece predicciones intuitivas y simples sobre la relación retorno-riesgo. Sin embargo, se ha evidenciado con diversos estudios que el registro empírico del modelo podría ser pobre, debido a las suposiciones simplificadas que

recoge y las dificultades para implementar pruebas válidas del modelo. A lo largo de la historia, se han realizado diversos estudios empíricos para validar el modelo CAPM:

1. Lintner (1965) realiza una investigación en la que evidencia la aportación del riesgo diversificable de un activo. Para ello, usa la metodología econométrica de corte transversal, en la que añade una nueva variable que mide el riesgo no sistemático, incorporando la varianza de los residuos del Modelo de Mercado. Esta variable resulta ser significativa, lo que contradice al modelo CAPM que postula que este riesgo desaparece con la diversificación de los activos.
2. Black, Jensen y Scholes (1972) analizan NYSE durante un periodo de 35 años dividiendo la cotización en 10 carteras, con componentes con distintas betas. A pesar de que se revela que hay una relación lineal entre la beta de una cartera y su retorno, se determina que el término intercepto no debería de ser la tasa libre de riesgo. Black (1972) prueba un modelo alternativo que asume que los inversores piden prestado a una tasa definida como el rendimiento de una cartera con una beta con valor cero, R_z , en vez de a una tasa libre de riesgo. Esto es equivalente a una cartera que tiene una covarianza igual a cero con la tasa de rendimiento de la cartera de mercado. Este modelo concluye que una cartera con beta cero con un rendimiento esperado, R_z , supera la tasa de interés libre de riesgo, R_f . Consecuentemente, se muestra que algunas compañías con betas pequeñas obtienen un retorno mayor al que obtendrían con el CAPM, y que algunas empresas con betas mayores producen menos rendimiento que el establecido por el modelo.
3. Haugen y Heins (1972) muestran que los títulos menos volátiles han superado consistentemente a los más volátiles durante el período 1929-1971.
4. Roll (1977) hace una crítica al modelo en el que indica que una cartera de mercado diversificada debería incluir todas las inversiones en todos los mercados (incluyendo artículos de colección, materias primas y cualquier título con valor de mercado). Cuando se usa el CAPM, se utiliza simplemente un índice bursátil como indicador del rendimiento del mercado lo cual indica una medida parcial de la verdadera cartera del mercado global. Por lo tanto, no hay una diversificación completa en la cartera. Además, la ecuación que compone el modelo CAPM es muy sensible a los cambios de

sus variables, por lo que un pequeño cambio en la tasa de retorno del mercado tendría un impacto significativo en la solución final de la fórmula.

5. Levy (1978) y Reinganum (1981) consideran la imperfección de los mercados ya que el modelo CAPM asume que los mercados son perfectos. A raíz de esto, realizan por separado un estudio observando el NYSE donde se concluye que cuando hay grandes volúmenes de negociación en los activos, el riesgo sistemático (β) sí sería una buena métrica para determinar el retorno de un título. De todas formas, si los volúmenes de negociación son pequeños, la beta no mide de manera precisa las rentabilidades de las acciones en el mercado de EEUU.
6. Banz (1981) descubre una relación negativa entre el tamaño y el retorno, ya que los rendimientos de las empresas pequeñas son significativamente mayores que los de las empresas de mayor capitalización bursátil y pueden generar mayores retornos que los expuestos en el CAPM.
7. Basu (1977) y Basu (1983) observa una anomalía ya que encuentra que los títulos con ratios P/E bajos consiguen mayores retornos que los títulos con ratios P/E altos. En otras palabras, las acciones con una valoración más baja tienden a conseguir retornos más altos de lo que sugiere el CAPM. Esta investigación es, posteriormente, confirmada por Jaffe, Keim y Westerfield (1989).
8. Bhandari (1988) incorpora el factor apalancamiento en función de las rentabilidades medias ya que cuanto más apalancada esté una compañía, más riesgo tiene por lo que debería de poseer una beta más alta.
9. Jegadeesh (1990) contradice al modelo CAPM argumentando que las acciones que tienen el mejor desempeño durante un período de tres a 12 meses tienden a seguir teniendo un buen desempeño durante los siguientes tres a 12 meses y viceversa, dando lugar al factor momentum.
10. Fama and French (1972) observan que la beta como medición del riesgo sistemático de un activo es pobre ya que en su estudio no define la relación del valor con el mercado

para todas sus observaciones. De todas formas, encuentran que los factores de tamaño (capitalización bursátil) y valor (book-to-market ratio) combinados con la beta podrían explicar gran parte de la rentabilidad en una cartera de acciones diversificadas.

11. Sloan (1996) investiga la anomalía de los *accruals* o de los devengos, la cual es la relación negativa entre los devengos contables y los rendimientos bursátiles posteriores. La teoría relacionada con esta anomalía en particular se basa en la importancia de medir si las ganancias de la empresa (según lo informado por la empresa) se basan en un flujo de efectivo real o prácticas contables cuestionables. Según la investigación, las empresas con bajos niveles de devengo están conectadas con ganancias reales y, por otro lado, las empresas con un alto nivel de devengo podrían ser el resultado de alguna práctica contable que reporta ganancias que podrían no ser sostenibles en el largo plazo. Los inversores prestan demasiada atención a las ganancias reportadas que impulsan el rendimiento de las acciones a corto plazo. De esta manera, se introduce el factor calidad.

3. Modelos factoriales

3.1. Concepto de modelos factoriales

A pesar de que el modelo CAPM es un modelo muy apreciado en el mundo financiero, los distintos estudios realizados por reconocidos economistas han concluido que podría estar sujeto a mejoras y que podría tener en cuenta factores adicionales. Consecuentemente, se han desarrollado nuevos modelos de valoración de activos, los modelos factoriales, que están formados por dos o más variables de riesgo que se correlacionan con las rentabilidades de las inversiones y ayudan a fijar el peso o la importancia de ese factor al calcular el retorno o precio de un activo individual o de una cartera completa (Luenberger, 1998).

De esta manera, nace un nuevo enfoque por parte de los inversores para construir carteras basada en factores o *factor investing*. Estos modelos demuestran que el riesgo de una inversión está sujeto a más de una variable y reflejan el riesgo de mercado de un activo y su rentabilidad esperada a través de una combinación lineal de factores aleatorios. Estos factores representan un riesgo, por lo que los inversores exigirán un retorno mayor.

Adicionalmente, en los modelos factoriales se incluye un término constante α_i y un término de error ϵ_i . A la hora de realizar cálculos con el modelo, se suele asumir que los términos de error no se correlacionan entre ellos ni con los factores (Luenberger, 1998).

En este modelo, para estimar la beta de un factor se utiliza la regresión lineal de las rentabilidades históricas de los activos sobre ese mismo factor, siendo también el riesgo sistemático el punto de mira; sin embargo, este riesgo es explicado por más de un coeficiente beta que hace referencia a un factor de riesgo, a diferencia del modelo CAPM que solo tiene en cuenta un único factor, la prima de riesgo del mercado.

Los factores se diferencian en tres grupos (Connor, 1995):

1. Macroeconómicos: el retorno de un activo se explica con el retorno inesperado de elementos macroeconómicos como el empleo, la inflación y el tipo de interés.
2. Fundamentales: son las finanzas subyacentes de acciones o empresas que ayudan a determinar los cambios en los precios. Los factores fundamentales utilizados son, entre otros, la relación precio-beneficio, la capitalización de mercado y el apalancamiento financiero. Estos modelos usan retornos de títulos y, después de establecer las sensibilidades de las variables, las rentabilidades se calculan ejecutando regresiones.
3. Estadísticos: se emplean para comparar los retornos de diferentes acciones en función de la rentabilidad estadística de cada acción en sí misma. Se suelen emplear datos históricos de rendimientos para explicar las covarianzas en los datos.

Existen muchas opciones a la hora de elegir los factores a incluir en el modelo. El factor más común para escoger es el del retorno de la cartera de mercado, lo cual derivaría en un modelo factorial muy similar al modelo CAPM (Luenberger, 1998).

3.2. Teoría del Arbitraje

A raíz de las argumentaciones e ideas de sus predecesores y de la lógica del modelo CAPM, el economista Stephen Ross (1976) desarrolla la Teoría del Arbitraje o *Arbitrage Pricing Theory* (APT), basada en el modelo factorial para explicar de manera eficiente la relación lineal del

retorno de un activo con los distintos factores (β) que afectan al riesgo de ese activo. De esta manera, se introduce el concepto de inversión por factores o *factor investing*. Ambos modelos, CAPM y APT, determinan la tasa teórica de la rentabilidad de un valor, pero el APT mira más allá de la prima de riesgo de mercado, el cual es el único factor considerado en el modelo CAPM.

Para que la teoría sea útil, los términos de error no deben estar correlacionados entre ellos ni con los factores. De esta manera, los términos de error son diversificados formando combinaciones de múltiples activos. Los coeficientes del modelo factorial deben satisfacer una relación lineal (Luenberger, 1998).

A diferencia del modelo CAPM, el APT no asume que los mercados son perfectamente eficientes ya que a veces pueden presentar anomalías en el precio de las acciones temporalmente, antes de que, eventualmente, el mercado los corrija y los valores vuelvan a su valor razonable. Asimismo, los inversores verán como una oportunidad, a través del APT, cualquier desviación que haya en la valoración razonable de los precios para generar beneficio. El modelo es diseñado para calcular el valor razonable de un título, y si el valor actual wa distinto al hallado, se considera que la acción está sobrevalorada o infravalorada, pudiendo sacar provecho de esta diferencia de precio, basándose en el concepto de “arbitraje”. Cuando las oportunidades de arbitraje no están presentes, los precios en el mercado están en su valor razonable y no habría necesidad de modificaciones en la cartera (Renganum, 1981).

El hecho de seleccionar la cantidad de factores y qué variables en concreto se van a usar para determinar el retorno de una acción o una cartera es una elección subjetiva por parte del inversor, por lo que no todos los retornos serán iguales y se le dará la oportunidad de personalizar la investigación al inversor. Sin embargo, hay una serie de factores que han resultado ser los más aptos para la predicción del valor de un título, entre ellos están los cambios inesperados en la inflación y en los tipos de interés, en el producto interior bruto, los diferenciales en los bonos corporativos, los tipos de cambio y los cambios en la curva de rentabilidad (*yield curve*). Estos factores representan el riesgo sistemático de una cartera, que no se puede reducir con la diversificación (Huberman y Wang, 2005).

Además, según Chen, Ross y Roll (1984), las variables macroeconómicas que han resultado ser las más significativas a la hora de explicar la rentabilidad de los activos son las siguientes:

- Cambios inesperados en los tipos de interés
- Variaciones inesperadas en el CPI
- PIB
- Confianza del consumidor

La teoría se basa en una serie de supuestos:

1. El mercado de capitales es perfectamente competitivo y hay información libre de acceso a los mercados
2. Existe un número infinito de activos y éstos difieren entre sí en formas no triviales. Se podría usar como referencia, por ejemplo, todas las acciones estadounidenses que cotizan en bolsa
3. No hay casos de arbitraje en el mercado y si se presentase alguno, los inversores se aprovecharían de la diferencia del precio actual con el valor razonable (Rengannum, 1981)

La teoría de Ross determina a través de una formulación matemática el desarrollo del modelo factorial para determinar el valor razonable de un título (Ross, 1976):

$$E(R_i) = R_z + E_{i1} \cdot \beta_{i1} + E_{i2} \cdot \beta_{i2} + \dots + E_{in} \cdot \beta_{in}$$

Donde,

- $E(R_i)$: el rendimiento esperado del activo
- R_z : la tasa de retorno del activo libre de riesgo
- E_i : la prima de riesgo asociada al factor i
- β_{in} : la sensibilidad del precio del activo al factor de riesgo macroeconómico i

A pesar de que la APT es un modelo más preciso y flexible, presenta más complejidad que el modelo CAPM ya que el factor de riesgo i (β_i) y la prima de riesgo asociada al factor i (E_i) son complicadas de hallar. Uno de los métodos para calcular la beta de un factor es estudiar como ese factor afectó a índices parecidos, y de esta manera, se podría estimar a través de una regresión como el factor afectó a otros títulos similares a los índices.

A continuación, se presenta un ejemplo básico en el que se aplica la Teoría de Precios del Arbitraje para hallar una ecuación general de la cartera C de acciones bien diversificada, usando los índices bursátiles *S&P 500* y *Dow Jones Industrial Average (DJIA)* como referencia para

determinar la prima de riesgo (E_i) de nuestra cartera C asociada a los factores macroeconómicos de riesgo de inflación (β_1) y PIB (β_2) de los índices.

La tasa de retorno del activo libre de riesgo es del 1%. Las betas de inflación y de PIB en S&P 500 son 0.4 y 3.2, respectivamente. El retorno del S&P 500 es de 11%.

- R_z (la tasa de retorno del activo libre de riesgo) = 1%
- S&P 500:
 - $\beta_{S1} = 0.4$
 - $\beta_{S2} = 3.2$
 - $E(R_{S\&P}) = 11\%$

Las betas de inflación y de PIB en DJIA son 0.9 y 4.6, respectivamente. El retorno del DJIA es de 9%.

- DJIA:
 - $\beta_{D1} = 0.9$
 - $\beta_{D2} = 4.6$
 - $E(R_{DJIA}) = 9\%$

Las datos no representan información real en los mercados. Sólo han sido utilizados con fines demostrativos.

Se hallan las primas de riesgo (E_i) con el modelo de regresión, utilizando las betas de los índices previamente mencionados ya que contienen activos similares a los de nuestra cartera.

$$11\% = 1\% + 0.4E_1 + 3.2E_2$$

$$9\% = 1\% + 0.9E_1 + 4.6E_2$$

$$E_1 = -0.1961$$

$$E_2 = 0.0558$$

Para determinar la rentabilidad esperada de nuestra cartera C, se usan las primas de riesgo asociadas a la inflación y el PIB, previamente calculados con los índices. Por lo tanto, una ecuación general de APT para cualquier cartera C sería la siguiente:

$$ER(C) = 1\% + \beta_1 (-0.1961) + \beta_2 (0.0558)$$

3.2.1. Validez de la Teoría del Arbitraje

La APT se propuso como una teoría alternativa al modelo CAPM, la cual no requiere el supuesto de que los inversores evalúen las carteras en base a la media y la varianza, sino que requiere que cuando la rentabilidad sea segura, los inversores elijan un mayor retorno frente a un menor retorno (Luenberger, 1998). De esta manera, la teoría requiere menos suposiciones que la del CAPM. Sin embargo, desde que se propuso la APT, muchos académicos se han mostrado escépticos y son muchas las investigaciones realizadas para mostrar las evidencias empíricas y la validez de la teoría.

- Shanken (1982) es el primero en realizar una crítica al modelo de Ross (1976), poniendo en duda en su investigación el marco teórico de la proposición de Ross ya que no muestra que haya una relación lineal sólida entre el rendimiento de las acciones y el riesgo en los modelos factoriales. Asimismo, argumenta si las asunciones teóricas sobre el rendimiento de los títulos se pueden verificar de manera práctica a través de una combinación lineal de N factores. Además, hace una crítica a la arbitrariedad empírica de la selección de factores, lo que da lugar a versiones de equilibrio de la teoría como los modelos APT de equilibrio desarrollados por Dybvig (1983), Grinblatt y Titman (1983) y Connor (1984). Son modelos que, de la misma manera que se basan en la intuición del modelo CAPM y lo expanden a mercados grandes de títulos diversificados, no proponen asunciones determinantes sobre la naturaleza de la predilección de los inversores y de la asignación del retorno de los activos.
- Reinganum (1981) utiliza los modelos factoriales para poder explicar la distinción de las rentabilidades entre compañías grandes y pequeñas, explicación la cual el modelo CAPM no es capaz de dar. Su investigación muestra que el rendimiento de las compañías más grandes es menor en un 20% que el de las pequeñas.
- Dhrynes et al (1984) afirma la debilidad del análisis factorial de la APT al incrementar el número de factores relevantes empíricos con el número de acciones que se analizan

factorialmente ya que a medida que el número de acciones incrementa, se requerirán más factores.

- Gilles & LeRoy (1990) juzgan la propuesta de Ross describiéndolo como un modelo de valoración de activos demasiado general, dado que tiene suposiciones débiles al postular que no hay oportunidades de arbitraje en el mercado. Además, mencionan el escepticismo de muchos economistas al no depender, la APT, de la validez de las supuestas limitaciones sobre la predilección y la tecnología.
- Koutmos et al (1993) manifiesta la fragilidad empírica de la APT dada la asunción principal del modelo que postula que no existe el arbitraje y que los retornos de los valores están linealmente correlacionados con un grupo de factores conjuntos no específicos.
- Chen (1983) evidencia que los modelos factoriales basados en el APT, usando 5 factores, tienen más poder predictivo que el CAPM sobre los cambios en las series temporales. Bower et al. (1984) también afirman la precisión del retorno esperado de un activo con el uso de más de un factor de medición del riesgo.
- Cheng (1996) muestra con su estudio empírico de la APT que a pesar de que un factor puede tener un nivel de significación alto en un análisis multivariado, en un modelo invariado no sería significativo. Por lo que, según Paavola (2006) una debilidad del modelo es la multicolinealidad entre los factores económicos. El economista añade que otra desventaja de la propuesta de Ross es el hecho de que no determina los factores comunes ni el número de variables a usar.

3.3. Modelos factoriales significativos

Desde una perspectiva estadística, cuantas más variables independientes se añadan a una regresión, mayor será el poder explicativo del modelo. De esta manera, los modelos factoriales son modelos más predictivos y descriptivos al permitir una atribución más específica del riesgo a los que está expuesto un activo. En este sentido, a pesar de que la intuición de la propuesta

de Sharpe de la relación positiva entre rentabilidad-riesgo es cierta, una de las críticas realizadas al modelo CAPM es que es un modelo unifactorial, por lo que cualquier beta añadida al modelo para medir el riesgo, tiene un poder explicativo nulo (Womack & Zhang, 2003).

Fama y French (2014), después de haber investigado el modelo CAPM, evidencian que, de media, el 70% del retorno esperado de una cartera diversificada puede explicarse por el valor de su β , y el 30% restante, se atribuye a otros factores.

Por otro lado, la Teoría del Arbitraje, al introducir los modelos factoriales, asume un mercado ineficiente que se acerca mas a la realidad que el modelo CAPM (Shanken, 1982). No obstante, los economistas se han mostrado escépticos por la arbitrariedad y falta de consistencia que hay en la selección de los factores. De este modo, la necesidad de desarrollar un modelo de valoración de activos más íntegro seguía en el punto de mira de los economistas Eugene Fama y Ken French (1993) que proponen un nuevo modelo factorial, consiguiendo que la evolución del *factor investing*, en la tesis *Common risk factors in the returns on stocks and bonds*.

3.3.1. Modelo de 3 factores de Fama y French

El premio Nobel Eugene Fama y el investigador Kenneth French, ex profesores de la *University of Chicago Booth School of Business*, amplían el modelo de valoración de activos CAPM al introducir los factores de riesgo: tamaño y valor contable/precio (ratio B/M) de las empresas que cotizan en bolsa en su propuesta de modelo, a parte del ya usado riesgo de mercado en CAPM. Hallan que estos tres factores muestran un nivel de significación más alto que los factores macroeconómicos referidos en la propuesta de Roll, cuando se mide la rentabilidad de los activos.

Los tres factores son referidos por Fama y French de la siguiente manera: **SML** (*Small Minus Big*), **HML** (*High Minus Low*) y **(E(m) – Rf)** (prima de riesgo de mercado).

Los factores propuestos por Fama y French han resultado ser los que mayor poder predictivo tienen sobre los retornos esperados de todos los factores añadidos probados por los investigadores, teniendo un valor de R^2 de 0.95, lo que significa que el modelo explica un 95% de la variabilidad del retorno esperado en torno a su media e indica que la predicción en la cartera de acciones diversificada es muy precisa (Womack & Zhang, 2003).

SML (*Small Minus Big*)

El factor *Small Minus Big* muestra el riesgo relacionado con el tamaño o capitalización bursátil de una compañía. La capitalización de mercado es el resultado de multiplicar el precio de acción de una compañía por el número de acciones que posee. Las empresas con un tamaño menor son las de menor capitalización de mercado, mientras que las más grandes son las de alta capitalización.

Adicionalmente, el factor SML determina el riesgo de tamaño con el exceso histórico de las compañías de baja capitalización bursátil (acciones *small-cap*) sobre las de capitalización alta (acciones *large-cap*). Esto se debe a que Fama y French hallan que las empresas más pequeñas tienden a ver retornos más altos que las empresas más grandes a largo plazo. A este retorno adicional se le conoce como *size premium* o prima de tamaño y es explicado debido a que las compañías más pequeñas son más flexibles y tienen un carácter más dinámico. Por otro lado, las compañías más pequeñas son más sensibles a los factores de riesgo como resultado de su naturaleza relativamente poco diversificada y su capacidad menor para asumir acontecimientos financieros negativos. Una vez identificado el factor SMB, su coeficiente Beta se hallaría a través de una regresión lineal para determinar la sensibilidad que tiene el activo sobre el factor (Fama and French, 1993).

Para determinar el factor SMB de manera mensual en una cartera, se calcularía el retorno promedio del 33% de los valores con menor capitalización bursátil menos el retorno promedio del 33% de los títulos más grandes en ese mes. Un SMB negativo, indica que las acciones con capitalización alta han obtenido mejores rendimientos que las de capitalización baja. En la conferencia “*The cross-section of expected returns*”, French (2003) explicó que el promedio histórico anual de julio de 1926 a julio de 2002 del factor SMB fue de aproximadamente 3.3%, lo que significa que el retorno de las compañías más pequeñas superó al de las más grandes en un 3.3% anualmente (Womack & Zhang, 2003).

De esta manera, la formulación para hallar el factor SMB es la siguiente:

$$\text{SMB} = 1/3 \cdot (\text{SG} + \text{SN} + \text{SV}) - 1/3 \cdot (\text{LG} + \text{LN} + \text{LV})$$

Fama y French desarrollan 6 tipos de carteras construidas de distinta forma, dónde:

SG = empresas *small-cap* con acciones *growth*

SN = empresas *small-cap* con acciones ratio valor contable-precio neutral

SV = empresas *small-cap* con acciones *value*

LG = empresas *large-cap* con acciones *growth*

LN = empresas *large-cap* con acciones con ratio valor contable-precio neutral

LV = empresas *large-cap* con acciones *value*

HML (High Minus Low)

El factor *High Minus Low* explica el riesgo asociado al valor contable/precio o ratio B/M de las empresas, pudiendo ser acciones de valor (*value stocks*) o acciones de crecimiento (*growth stocks*).

El factor HML es una prima de valor que representa la diferencia de retornos entre empresas con un ratio valor contable/precio, conocido también como ratio B/M alto (acciones *value*) y empresas con un ratio bajo (acciones *growth*). Esta prima se debe a que las acciones *value* generarán mayores rendimientos que las acciones *growth* a largo plazo. La lógica detrás de este exceso está en que las empresas con valoraciones más bajas o *growth* son más propensas a obtener peores retornos en situaciones de crisis económica (Fama and French, 1993).

El cálculo del factor HML es muy similar al del SMB explicado previamente. Se determina la diferencia entre el retorno mensual promedio del 50% de los valores con el ratio B/M más alto en la cartera y el retorno promedio del 50% de los valores con el ratio más bajo para ese mes. Si el factor fuese negativo, significa que las acciones *growth* son más rentables en un mes determinado. En la conferencia “*The cross-section of expected returns*”, French (2003) anunció que la prima de valor anual de 1926 a 2002 del factor HML fue de aproximadamente 5.1% (Womack & Zhang, 2003).

La ecuación para hallar el factor HML es la siguiente:

$$\mathbf{HML} = 1/2 (\mathbf{SV} + \mathbf{LV}) - 1/2 (\mathbf{SG} + \mathbf{LG})$$

Construcción del Modelo

El modelo de tres factores de Fama y French se construye a partir de la combinación de la prima de riesgo de mercado y los dos nuevos factores (prima de tamaño y de valor), con la siguiente función lineal para hallar el retorno esperado de un activo:

$$\mathbf{E(R)} - \mathbf{Rf} = \beta_i \cdot (\mathbf{E(m)} - \mathbf{Rf}) + s_i \cdot (\mathbf{SMB}) + h_i \cdot (\mathbf{HML}) + e_i$$

Dónde:

E(R) = Tasa de rendimiento esperada

Rf = Tasa libre de riesgo

β = Sensibilidad y nivel de exposición al riesgo de mercado

si = Sensibilidad y nivel de exposición al riesgo de tamaño

hi = Sensibilidad y nivel de exposición al riesgo de valor

(E(m) – Rf) = Prima de riesgo del mercado

SMB = Exceso de rendimiento histórico de las empresas de pequeña capitalización sobre las empresas de gran capitalización

HML = Exceso de rendimiento histórico de las acciones de valor (ratio valor contable/precio alto) sobre las acciones de crecimiento (ratio valor contable/precio bajo)

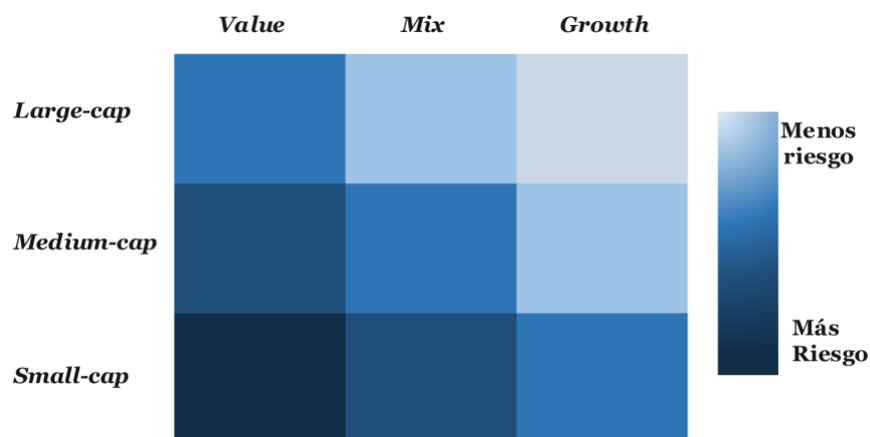
ei = Residual de media cero

La β_1 como medida de exposición que tiene un activo al riesgo de mercado tendrá un valor diferente a la beta en un modelo CAPM debido a los factores agregados.

Una de las principales implicaciones del modelo de tres factores es que los inversores pueden elegir ponderar sus carteras de forma que tengan una mayor o menor exposición a cada uno de los factores de riesgo específicos y, por lo tanto, pueden abordar con mayor precisión diferentes niveles de rentabilidad esperada (Womack & Zhang, 2003). De esta manera, el modelo permite clasificar los fondos de inversión de las gestoras de activos en función de los riesgos de tamaño y valor a los que está expuesta su cartera y, por lo tanto, las primas de rentabilidad esperada de éstos.

La empresa calificadora de *mutual funds*, Morningstar, es un buen recurso para clasificar el estilo de inversión de las gestoras de activos. Los fondos de inversión se separan horizontalmente en tres grupos a través de una clasificación B/M (clasificación *value*). Independientemente, los fondos también se separan verticalmente en función de una clasificación de capitalización de mercado (clasificación de tamaño).

Figura 4. Cuadro de estilo de inversión de Morningstar



Fuente: elaboración propia basada en Morningstar

3.3.2. Modelo de 5 factores de Fama y French

A pesar de que el modelo de tres factores tiene un poder predictivo alto para hallar el retorno esperado de un activo, hay evidencias recientes que sugieren que el modelo podría estar incompleto al no explicar algunas anomalías ni la variación *cross-sectional* de los rendimientos esperados, particularmente relacionados con la rentabilidad y la inversión (ValueWalk, 2015).

Novy-Marx (2013) encuentra que el factor de rentabilidad tiene una fuerte correlación con los retornos promedios de los activos. Por otro lado, Titman et al. (2004) junto con Anderson y García-Feijóo (2006) encuentran que el *growth* junto con el factor de inversión, tiene una relación negativa con los rendimientos de los activos. Adicionalmente, la evidencia de Novy-Marx (2013), Titman, Wei y Xie (2004) y otros dice que es un modelo incompleto para hallar los retornos esperados porque sus tres factores no muestran la variación de los retornos promedio relacionados con los factores de rentabilidad y de inversión. A raíz de estas evidencias, Fama y French (2015) proponen un modelo que amplía el modelo de tres factores con dos factores adicionales: rentabilidad e inversión.

Fama y French parten del *Dividend Discount Model (DDM)* para desarrollar el modelo de cinco factores. DDM evidencia que el precio de una acción es la suma de los dividendos futuros descontados a su valor actual. Basándose en este modelo, desarrollan el modelo de cinco factores con la siguiente ecuación: (Fama and French, 2014).

$$E(\mathbf{R}) - \mathbf{R}_f = \beta_i \cdot (E(\mathbf{m}) - \mathbf{R}_f) + s_i \cdot (\mathbf{SMB}) + h_i \cdot (\mathbf{HML}) + r_i \cdot \mathbf{RMW} + c_i \cdot \mathbf{CMA} + e_i$$

En esta ecuación, **RMW** (*Robust Minus Weak*) es la diferencia entre los retornos de las carteras diversificadas de acciones con rentabilidad operativa robusta y débil, y **CMA** (*Conservative Minus Aggressive*) es la diferencia entre los retornos de las carteras diversificadas de acciones de empresas de baja y alta inversión, a las que llaman conservadoras y agresivas (Fama and French, 2014).

RMW (*Robust Minus Weak*)

El factor RMW se basa en el ratio de rentabilidad operativa, el cual, según Fama y French (2015) se calcula utilizando los números contables a cierre del ejercicio fiscal anterior de la siguiente manera:

$$\text{Rentabilidad Operativa} = \frac{\text{Ingresos} - \text{COGS} - \text{Gastos de ventas, generales y administrativos} - \text{Intereses}}{\text{Patrimonio Neto}}$$

La rentabilidad operativa es un indicador de la rentabilidad de una compañía y la eficiencia con la que genera sus beneficios usando recursos propios. Cuanto más alta sea esta rentabilidad, mayor serán los retornos esperados.

CMA (Conservative Minus Aggressive)

El factor CMA representa la diferencia entre el retorno de empresas con políticas de inversión conservadoras y del retorno de empresas con políticas más agresivas. Según Fama y French (2015) y Hou, Xue y Zhang (2015), el factor de inversión se basa en la siguiente ecuación:

$$\text{Inversión sobre el total de activos} = \frac{\text{Variación anual bruta del inmovilizado material} + \text{Variación anual del inventario}}{\text{Valor en libros del total de activos}}$$

Las empresas con políticas de inversión agresivas son aquellas que tendrán menos aversión al riesgo y buscarán el máximo retorno de mercado maximizando sus inversiones. Según la evidencia de Fama y French (2014), las empresas con políticas de inversión más conservadoras son las que mayor retorno generarán.

Cálculo de los factores

Fama y French (2014) ponen a prueba el desempeño del modelo de cinco factores en el mercado de los EE. UU. Utilizan conjuntos de factores para examinar si los detalles de la construcción de factores tienen un impacto importante en los resultados de la prueba de los modelos de valoración de activos. Sus resultados sugieren que un modelo de cinco factores funciona mejor que el modelo de tres factores de Fama y French (1993). También, muestran que el rendimiento del modelo no se ve afectado por la forma en que se calculan los factores (Jiao & Lilti, 2017).

Para calcular el factor SMB, se usa el rendimiento promedio de las nueve carteras de acciones pequeñas menos el rendimiento promedio de las nueve carteras de acciones grandes ("Kenneth R. French - Description of Fama/French Factors", 2022).

$$\text{SMB}_{(B/M)} = \frac{\text{Small Value} + \text{Small Neutral} + \text{Small Growth}}{3} - \frac{\text{Big Value} + \text{Big Neutral} + \text{Big Growth}}{3}$$

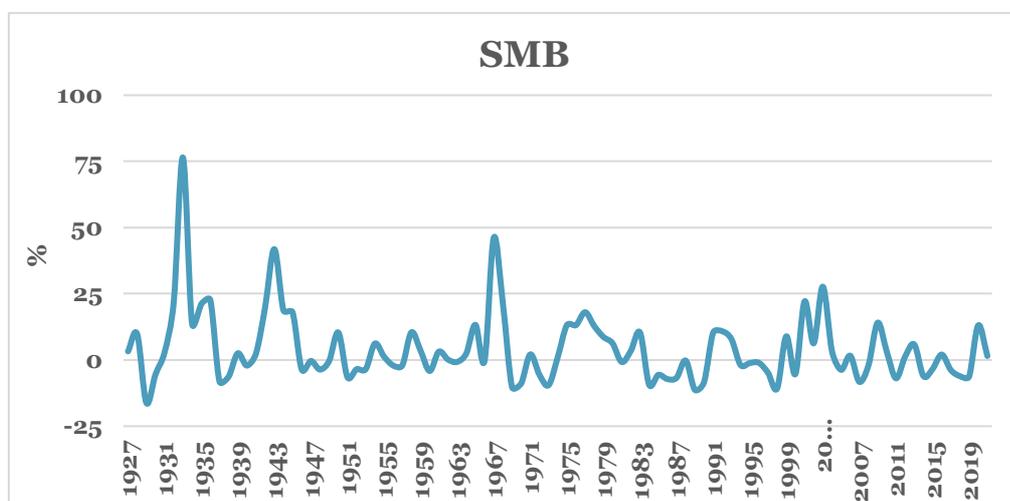
$$\text{SMB}_{(OP)} = \frac{\text{Small Robust} + \text{Small Robust} + \text{Small Weak}}{3} - \frac{\text{Big Robust} + \text{Big Robust} + \text{Big Weak}}{3}$$

$$\text{SMB}_{(INV)} = \frac{\text{Small Conservative} + \text{Small Neutral} + \text{Small Aggressive}}{3} - \frac{\text{Big Conservative} + \text{Big Neutral} + \text{Big Aggressive}}{3}$$

$$\text{SMB} = 1/3 (\text{SMB}_{(B/M)} + \text{SMB}_{(OP)} + \text{SMB}_{(INV)})$$

La figura 5 muestra el desempeño del factor SMB desde 1927 hasta 2021. Los datos se han creado por CMPT_ME_RETS usando la base de datos 202204 CRSP de French (2022). El factor SMB se ha creado utilizando los retornos anuales (de enero a diciembre), usando nueve carteras construidas basadas en su tamaño. Se han empleado tres carteras con el 30% de compañías con capitalización bursátil más pequeña, y otras tres, con el 30% de compañías con capitalización bursátil más alta ("Kenneth R. French - Data Library", 2022).

Figura 5. Desempeño del factor SMB de 1927 a 2021



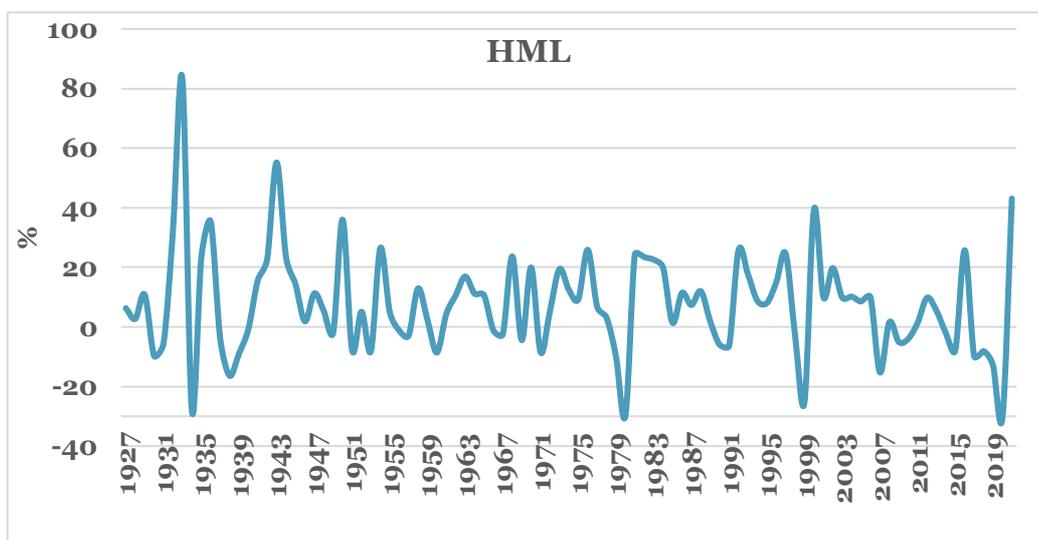
Fuente: elaboración propia

Para el desarrollo del factor HML, se utiliza el rendimiento promedio de dos carteras *value* menos el rendimiento promedio de dos carteras *growth* ("Kenneth R. French - Description of Fama/French Factors", 2022).

$$HML = \frac{\text{Small Value} + \text{Big Value}}{2} - \frac{\text{Small Growth} + \text{Big Growth}}{2}$$

La figura 6, muestra el desempeño del factor HML desde 1927 hasta 2021. Los datos se han creado por CMPT_ME_RETS usando la base de datos 202204 CRSP de French (2022). El factor HML se ha creado utilizando los retornos anuales (de enero a diciembre), usando diferentes carteras construidas basadas en su tamaño y su ratio B/M. Se han empleado dos carteras con un ratio B/M alto y dos carteras con un ratio B/M bajo ("Kenneth R. French - Data Library", 2022).

Figura 6. Desempeño del factor HML de 1927 a 2021



Fuente: elaboración propia

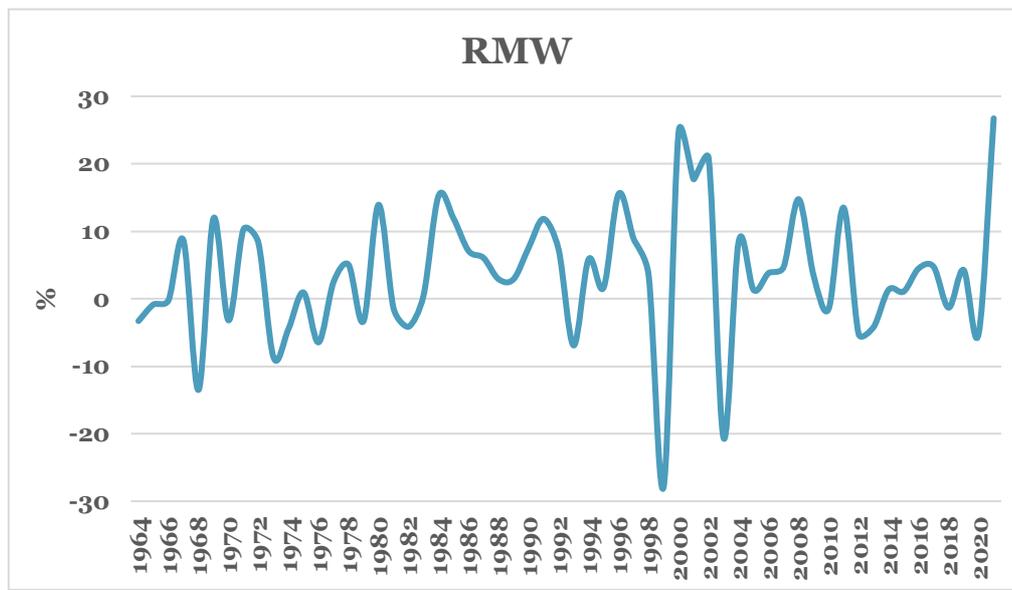
RMW se calcula haciendo la diferencia del rendimiento promedio de dos carteras de rentabilidad operativa robusta y del rendimiento promedio de dos carteras de rentabilidad operativa débil.

$$RMW = \frac{\text{Small Robust} + \text{Big Robust}}{2} - \frac{\text{Small Weak} + \text{Big Weak}}{2}$$

La figura 7 muestra el desempeño del factor RMW desde 1964 hasta 2021. Los datos se han creado por CMPT_ME_RETS usando la base de datos 202204 CRSP de French (2022). El factor RMW se ha creado utilizando los retornos anuales (de enero a diciembre), usando

diferentes carteras construidas basadas en su tamaño y su ratio de rentabilidad operativa. Se han empleado dos carteras con un ratio de rentabilidad operativa alto y dos carteras con un ratio de rentabilidad operativa bajo ("Kenneth R. French - Data Library", 2022).

Figura 7. Desempeño del factor RMW de 1964 a 2021



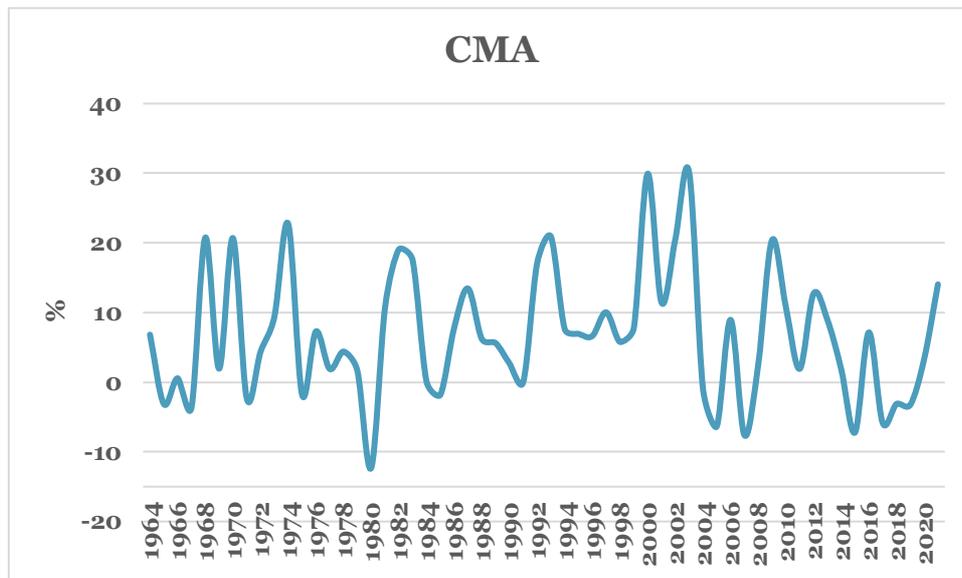
Fuente: elaboración propia

CMA se desarrolla restando el rendimiento promedio de las dos carteras de inversión conservadoras menos el rendimiento promedio de las dos carteras de inversión agresivas.

$$CMA = \frac{\text{Small Conservative} + \text{Big Aggressive}}{2} - \frac{\text{Small Conservative} + \text{Big Aggressive}}{2}$$

La figura 8, muestra el desempeño del factor CMA desde 1964 hasta 2021. Los datos se han creado por CMPT_ME_RETS usando la base de datos 202204 CRSP de French (2022). El factor CMA se ha creado utilizando los retornos anuales (de enero a diciembre), usando diferentes carteras construidas basadas en su tamaño y el grado de inversión. Se han empleado dos carteras con un grado de inversión alto y dos carteras con un grado de inversión bajo ("Kenneth R. French - Data Library", 2022).

Figura 8. Desempeño del factor CMA de 1964 a 2021



Fuente: elaboración propia

Por otro lado, Fama y French (2014), en su estudio, muestran que el factor de valor HML es redundante para describir los rendimientos promedio cuando se han agregado a la ecuación los factores de rentabilidad e inversión. A pesar de que no hay mucha investigación sobre el modelo de cinco factores de Fama-French fuera del mercado estadounidense, Fama y French (2015) realizan las pruebas internacionales del modelo en América del Norte, Europa, Japón y Asia Pacífico. Los rendimientos esperados de las acciones aumentan con la relación B/M y la rentabilidad y disminuyen con la inversión para América del Norte, Europa y Asia Pacífico (Jiao & Lilti, 2017).

3.3.1. Modelo de 4 factores de Carhart

Basándose en el modelo de 3 factores de Fama y French (1993), Carhart (1997) presenta un modelo como herramienta de valoración de *mutual funds*. También, parte de las ideas de Jegadeesh y Titman (1993) quienes descubren una tendencia en los rendimientos buenos y malos de las acciones a la que llaman efecto momentum. De esta manera, Carhart incluye el cuarto factor de momentum a su modelo y, a diferencia de Fama y French, desarrolla un modelo de regresión sobre *mutual funds* en vez de sobre acciones (Rehnby, 2016).

El modelo de Carhart se desarrolla mediante la siguiente formulación matemática:

$$E(\mathbf{R}) - \mathbf{R}_f = \beta_i \cdot (E(\mathbf{m}) - \mathbf{R}_f) + s_i \cdot (\mathbf{SMB}) + h_i \cdot (\mathbf{HML}) + w_i (\mathbf{WML}) + e_i$$

donde:

h_i: Coeficiente de riesgo del factor WML

WML: Exceso de retorno de una cartera de acciones que han tenido un alto rendimiento durante el último año (*winner*s) menos la rentabilidad de una cartera de acciones que han tenido un bajo rendimiento durante el mismo período de tiempo (*loser*s).

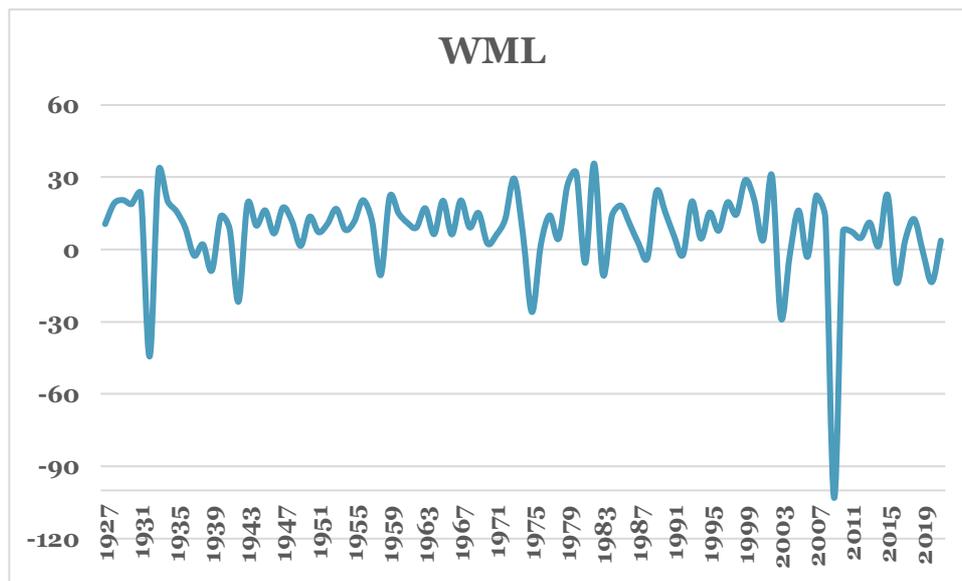
WML (Winners Minus Losers)

WML hace referencia al exceso de rentabilidad que reciben los inversores por invertir en las compañías “ganadoras”. El retorno de las acciones en el último año se ordena de mayor a menor y el percentil 30% superior del total de los datos será considerado que está compuesto por las compañías ganadoras mientras que las perdedoras serán el percentil 30% inferior. De esta manera, la estrategia de inversión sería posicionarse en corto para aquellas acciones que estén en el 30% inferior, y con esas ganancias, comprar las que se encuentren en el 30% superior (Carhart, 1997) (Rehnby, 2016).

Para calcular el factor WML se usa el rendimiento promedio de dos carteras *Winners* menos el rendimiento promedio de dos carteras *Losers*.

La figura 9 muestra el desempeño del factor WML desde 1927 hasta 2021. Los datos se han creado por CMPT_ME_RETS usando la base de datos 202204 CRSP de French (2022). El factor WML se ha creado utilizando los retornos anuales (de enero a diciembre), usando diferentes carteras construidas basadas en su tamaño y la tendencia “ganadora” de las acciones. Se han empleado dos carteras con tendencia “ganadora” en el pasado y dos carteras con tendencia “perdedora” en el mismo periodo de tiempo ("Kenneth R. French - Data Library", 2022).

Figura 9. Desempeño del factor WML de 1927 a 2021



Fuente: elaboración propia

4. Factor Investing

4.1. Concepto

A raíz de la propuesta de Ross (1976) con la APT se introducen los modelos factoriales, surgiendo así un nuevo enfoque para la construcción de carteras basada en la inversión por factores o *factor investing*. Actualmente, es un método de inversión popularmente utilizado por los inversores institucionales que ha evolucionado desde las propuestas y evidencias de Fama y French y otros reconocidos economistas.

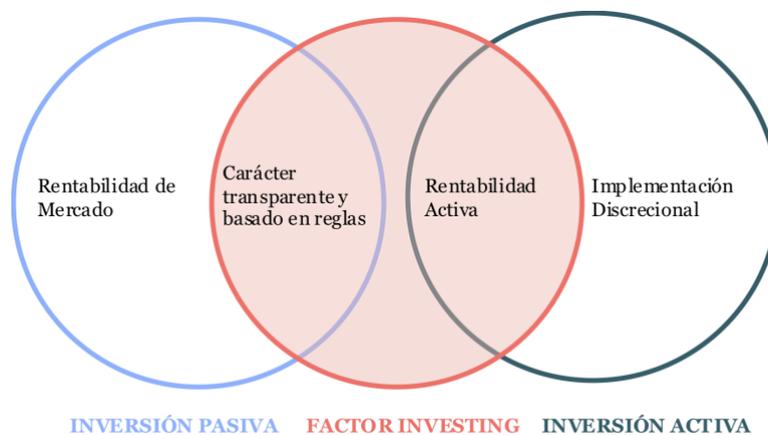
A pesar de que el desarrollo del *factor investing* se remonta a la década de los 70, no es hasta 2009 que se produce su evolución cuando Ang, Goetzmann y Schaefer (2009) publican *Evaluation of Active Management of the Norwegian Government Pension Fund* en el que se analiza el desempeño de uno de los fondos soberanos más grandes del mundo después de haber sufrido pérdidas a raíz de la crisis de 2008. En el análisis se concluye que el desempeño del fondo está explicado por la exposición que tiene a una serie de factores.

La gestora Blackrock (2022) define el concepto de *factor investing* como “un enfoque de inversión que implica abordar los impulsores específicos de rendimiento en todas las clases de activos.” (“What is factor investing? | BlackRock”, 2022). Asimismo, los factores utilizados podrían ser cualquier característica relacionada con un grupo de valores que sea importante para explicar sus rendimientos y riesgos (Bender, Briand, Melas & Subramanian, 2013).

El *factor investing* es un método de inversión cuantitativa que se basa en las primas de los factores para generar retorno. Estas primas han sido investigadas durante cuatro décadas y a pesar de que, inicialmente, fueron diseñadas para la renta variable, también se pueden usar para la mayoría de clases de activos, como la renta fija, las divisas o las materias primas ("The Essentials of Factor Investing", 2022).

Adicionalmente, según la gestora Robeco (2022), los métodos de inversión activa y pasiva han resultado tener una serie de desventajas que han sido claves para la popularidad del *factor investing*. Muchos inversores denominan al *factor investing* una tercera estrategia de inversión, adicional a estas dos, considerándose un híbrido ya que obtiene las ventajas de ambas estrategias. Por un lado, tiene propiedades de la inversión pasiva como su naturaleza transparente y las limitaciones de una serie de reglas determinadas, pero a la vez, su objetivo es superar al mercado como en la inversión activa como se muestra en la Figura 10 ("The Essentials of Factor Investing", 2022).

Figura 10. Factor Investing como tercer método de inversión



Fuente: elaboración propia basada en (Bender, Briand, Melas & Subramanian, 2013)

4.2. Smart Beta

Con el desarrollo del *factor investing* y la evolución tecnológica, viene ligado un nuevo concepto llamado smart beta, el cual hace referencia a una serie de estrategias de inversión por índices que representa una alternativa a los tradicionales índices ponderados por capitalización de mercado basándose en factores de riesgo. Las estrategias Smart beta, como el *factor investing*, se basan en el análisis cuantitativo de datos con una serie de reglas establecidas para crear carteras ("The Essentials of Factor Investing", 2022).

Smart beta tiene como objetivo beneficiarse tanto de las estrategias de inversión activa como pasiva, sobrepasando el retorno de un índice de referencia al mismo tiempo que se mantiene el menor riesgo y volatilidad posible. Asimismo, tratan de seguir de manera pasiva los índices de referencia a la vez que buscan la explotación del desempeño de distintos factores de riesgo diferiendo así de una estrategia de indexación tradicional pasiva ("Alpha, Beta, and Smart Beta - Fidelity", 2022).

Por otro lado, difieren de las estrategias de inversión activa ya que en éstas, los inversores eligen invertir en determinadas acciones individuales con la finalidad de superar al índice de referencia, mientras que las estrategias Smart beta tratan de generar el máximo retorno y reducir el riesgo invirtiendo en índices personalizados o ETF basado en uno o más factores (Lemmon & Kahn, 2015).

La inversión pasiva consiste en seguir los fondos indexados tradicionales de mercado con una beta igual a 1 y son ponderados por la capitalización de mercado. Asimismo, una acción individual que los componga y que tenga una capitalización de mercado grande, representará un gran porcentaje del valor total de ese índice. La diferencia, es que las estrategias Smart Beta no se basan en los índices de mercado estándar como el S&P 500 o el Nasdaq 100, sino que se basan en índices de referencia que se enfocan en áreas del mercado que ofrecen oportunidades de explotación de las primas de distintos factores. De esta manera, los inversores que empleen una estrategia Smart Beta reproducirán el retorno de un índice que se desarrolla basándose en determinados parámetros (Lemmon & Kahn, 2015).

Por ejemplo, un ETF que se basa en una estrategia Smart beta y busca el factor *value* es el índice Vanguard Value Index Fund ETF Shares ETF (VTV) que tiene como índice de referencia a CRSP US Large Cap Value Index. Su índice de referencia establece el factor *value*

basándose en ratios fundamentales de calidad como los ratios B/M, P/E y *dividend yield* ("Vanguard ETF Profile | Vanguard", 2022).

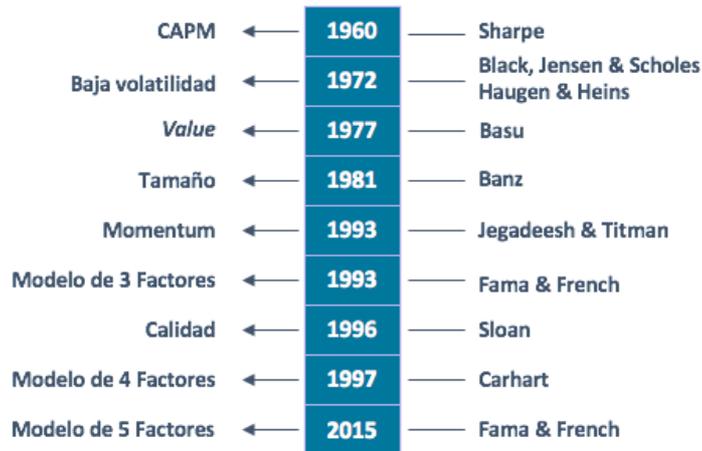
4.3. Evolución de los factores

Las evidencias de los distintos factores que afectan al retorno de un valor han ido evolucionando a lo largo de los años desde sus propuestas. Además, el poder computacional, la capacidad de almacenar y procesar grandes cantidades de datos han revolucionado la manera de funcionar de los mercados financieros. Asimismo, se ha introducido la inversión cuantitativa y el *factor investing* que ha dado lugar a un creciente interés de búsqueda de factores que influyen en el retorno de una inversión. Consecuentemente, se han investigado y evidenciado tantos factores que muchos expertos lo han denominado “un zoo de factores” ya que muchos de éstos están correlacionados entre ellos o simplemente no siempre funcionan en todas las circunstancias (Feng & Giglio, 2017).

Harvey, Liu y Zhu (2016) analizan aproximadamente 300 factores y encuentran que muchos de los factores son “falsos positivos”. Otra investigación realizada por Hou, Xue y Zhang (2018) muestra que muchos de los factores evidenciados en artículos académicos no funcionan siempre como se dice. Según la gestora Robeco (2022), “El problema es que cuando los investigadores analizan muchos conjuntos de datos diferentes, en busca de patrones recurrentes en los rendimientos, es probable que estos patrones surjan por pura casualidad y sigan siendo estadísticamente significativos. Por lo tanto, se necesita cierta precaución.” ("The Essentials of Factor Investing", 2022).

De todas formas, a pesar de que hay varios factores que se podrían considerar, hay unos pocos que han resultado ser los más relevantes y cuya evidencia ha sido de lo más convincente. La figura 11 ilustra la secuencia del planteamiento de los factores más relevantes a lo largo de la historia para renta variable.

Figura 11. Hitos Históricos del Factor Investing



Fuente: elaboración propia basada en Robeco

4.3.1. Baja Volatilidad

El factor baja volatilidad es inicialmente planteado por Black, Jensen y Scholes (1972) y Haugen y Heins (1972), el cual no es incluido en los modelos de Fama y French. Captura el exceso de retorno de las acciones con una volatilidad, beta y/o riesgo idiosincrático inferior al mercado a largo plazo.

Para identificarlo, los inversores se fijan en:

- Desviación estándar baja (1 año, 2 años, 3 años)
- Beta baja

Se considera un factor defensivo al proteger a los inversores de incurrir en grandes pérdidas en los mercados bajistas, a la vez que explota al máximo su potencial en los mercados alcistas al capturar la mayor parte de las ganancias.

Los precios de las acciones que se ajustan al perfil de baja volatilidad tienden a fluctuar menos que el mercado; en otras palabras, dichas acciones tienen una exposición beta baja. A pesar de que la teoría financiera tradicional sugiere que los retornos adicionales existen a raíz de asumir un riesgo adicional, el factor de baja volatilidad contradice esta afirmación. Los analistas suelen nombrar sesgos de comportamiento para explicar esta anomalía. Por ejemplo, una tendencia de

comportamiento de los inversores es la “preferencia de lotería” quienes pagan en exceso sobre oportunidades improbables de ganar cantidades grandes; en otras palabras, prefieren acciones de volatilidad alta lo que hará que éstas estén sobrevaloradas (Neo & Tee, 2019).

4.3.2. Value

El factor *value* es propuesto por Basu (1977), y posteriormente, es incluido en el modelo de tres y cinco factores de Fama y French, al cual se refieren como HML. Captura el exceso de rendimiento de las acciones que tienen precios bajos en relación con su valor fundamental.

A diferencia de lo propuesto por Fama y French (1993), quienes se basan solamente en el ratio valor contable/precio alto, se ha evidenciado que, además de éste, los siguiente parámetros sirven para reflejar este factor:

- P/EPS
- P/Beneficio neto
- P/Dividendos pagados
- EV/Cash Flow Operativo

La base de la inversión *value* es que las acciones con precios “baratos” superan a las acciones más caras a largo plazo. El *value* se clasifica como un factor "procíclico", lo que significa que ha tendido a beneficiarse durante los períodos de expansión económica.

Se espera que las acciones con precios bajos en relación con sus valores fundamentales se aprecien en el futuro para reflejar adecuadamente el valor real de la acción. Muchos inversores utilizan este enfoque para identificar activos que esperan que el mercado se revalorice. Muchas acciones están infravaloradas debido a la reacción exagerada de los inversores ante malas noticias, como un escándalo contable o una pérdida inesperada. Una vez que los inversores se den cuenta de la infravaloración, los precios de las acciones infravaloradas aumentarán y volverán a su valor intrínseco. De esta manera, el inversor habrá comprado la acción a un precio bajo y cuando ésta se revalorice, la podrá vender beneficiándose de la diferencia de precio (Kwag & Whi, 2006).

4.3.3. Momentum

El factor momentum es propuesto por Jegadeesh y Titman (1993), y posteriormente, es incluido en el modelo de 4 factores de Carhart (1997) como WML, el cual utiliza el desempeño de las acciones en periodos anteriores.

Este factor se basa en el supuesto de que las acciones tienden a mantener las tendencias de precios recientes en el futuro, por lo que, si una acción ha generado retorno en el pasado, seguirá haciéndolo más adelante. Asimismo, una estrategia momentum tradicional consiste en que un inversor compre las acciones que más momentum tienen o que siguen una tendencia de buen desempeño y en el futuro deberían de seguir siendo las “ganadoras” manteniendo dicha tendencia. De todas formas, este factor ha evolucionado desde su propuesta y es importante ser consciente del riesgo de cambios de tendencia de una acción y de cómo se puede mitigar ese riesgo (Arnott et al., 2018).

La prima del factor momentum es complicada de capturar por dos cuestiones prácticas. Por un lado, podría ocurrir que la tendencia ganadora de la acción se rompa, como, por ejemplo, por una reversión del mercado ya que la estrategia selecciona acciones con una alta sensibilidad al mercado en un mercado alcista. Por otro lado, los grupos de acciones, incluso con las tendencias más consistentes, pueden cambiar frecuentemente, provocando que el inversor tenga una alta rotación en la cartera. Consecuentemente, se generarán costes de transacción por el volumen de rotaciones y la prima del factor momentum no generará un beneficio adicional al cubrir estos costes ("The Essentials of Factor Investing", 2022).

4.3.4. Conservador

El factor Conservador se remonta al modelo de 5 factores de Fama y French (2015), al cual llaman CMA. La estrategia de inversión conservadora, también llamada inversión defensiva, normalmente tiene como objetivo superar al mercado en términos de rendimiento minimizando el riesgo al obtener un retorno mayor en mercados bajistas y manteniendo el ritmo en general en mercados alcistas. Los inversores conservadores construyen sus carteras en torno a una inversión que garantice una rentabilidad mensual o anual fija y positiva o que al menos asegure una rentabilidad mínima.

Los gestores de fondos de inversión Baltussen (2022) y Van Vliet (2022) examinan el retorno de una estrategia conservadora simple de 1866 a 2021 usando acciones de EEUU y publican

las conclusiones en “*150+ years of conservative investing: winning by losing less*”. Los años anteriores a 1929, en su investigación, presentan distintos ciclos alcistas y bajistas, guerras y periodos de deflación. Muestran en su estudio que las acciones conservadoras brindaron cierta protección contra las caídas durante las etapas de recesión y inestabilidad económica y durante etapas de expansión económica, mantuvieron un buen desempeño. Por otro lado, las acciones más agresivas lo hicieron mejor que las conservadoras durante periodos alcistas, pero esto no compensó las pérdidas durante periodos de mercado bajistas. Es importante tener en cuenta que el índice de éxito de las acciones conservadoras en mercados bajistas fue del 87%, es decir, el 13% generaron peores rendimientos que el mercado en tiempos de mercados bajistas.

4.3.5. Calidad

El factor de calidad fue inicialmente propuesto por Sloan (1996). Sloan postula que cuantos más devengos contables o *accruals* tenga una empresa, peor serán sus rendimientos.

De todas formas, el factor de calidad ha evolucionado y se dice que captura el exceso de rendimiento de las acciones que son caracterizadas por baja deuda, crecimiento estable de las ganancias y otras métricas de "calidad" (Bender, Briand, Melas & Subramanian, 2013).

Para identificar el factor de calidad, los inversores se fijan en que las siguiente métricas sean buenas:

ROE

- Estabilidad de los ingresos
- Estabilidad del crecimiento de los dividendos
- Fortaleza del balance
- Apalancamiento financiero
- Políticas contables
- Fortaleza de los directivos
- Devengos
- Cash flows

El factor de calidad proporciona una fuente independiente de rendimiento y se busca como diversificador junto con otros factores populares debido a su supuesta correlación baja o negativa con otros factores como el *value* (Jurczenko, 2018).

4.3.6. Dividend yield

El factor de *dividend yield* captura el exceso de rendimiento de las acciones que tienen retornos de dividendos superiores a la media. La estrategia se centra en invertir en compañías con rendimientos de dividendos altos (Bender, Briand, Melas & Subramanian, 2013).

El rendimiento de dividendos (proyectado) de una acción es el porcentaje de dividendos que se espera que una empresa pague en proporción al precio de esa acción. Se calcula dividiendo los dividendos anuales estimados por acción (DPS, por sus siglas en inglés) para el año fiscal en curso entre el precio de las acciones de fin de mes más reciente de la compañía. Para las carteras, este punto de datos se calcula tomando un promedio ponderado de activos de los rendimientos de dividendos de todas las acciones en la cartera.

5. Conclusión

El estudio y la investigación realizada de los modelos de valoración más tradicionales ha permitido formular distintas conclusiones acerca de la validez de estos modelos y de la necesidad del desarrollo del *factor investing*.

Por un lado, la Teoría Moderna de Carteras de Markowitz (1952) basada en la media y la varianza, permite la creación de carteras en función de su riesgo y retorno mostrando una relación positiva. Con la frontera de carteras eficientes los inversores pueden crear una cartera que ofrezca el menor riesgo posible, para cada nivel de rentabilidad, y de la misma manera, una combinación de acciones que ofrezca el mayor retorno, para cada nivel de riesgo correspondientes.

A raíz de esta teoría, nace el modelo CAPM y el concepto de riesgo sistemático y no sistemático, el cual es eliminado con la diversificación. El modelo sigue la relación positiva entre retorno y riesgo sistemático, el cual se mide con la beta. Esta relación se representa gráficamente con la SML, la cual parte de la tasa libre de riesgo. La SML incluye la prima de riesgo que representa el retorno adicional que está por encima de la tasa libre de mercado, que se exige para compensar a los inversores por invertir en valores más arriesgados. Por lo tanto, cuanto más volátil sea un mercado o el título, mayor será la prima de riesgo. Además, el modelo asume la eficiencia del mercado.

El CAPM es un modelo popular y atractivo, altamente utilizado, pero a raíz de diversos estudios empíricos se ha hallado que está sujeto a mejoras y podría considerarse pobre al ser un modelo unifactorial. Muchos investigadores evidencian anomalías en el mercado y consideran que hay ciertos factores que deberían tenerse en cuenta a la hora de buscar el retorno de una cartera: Black, Jensen y Scholes (1972) y Haugen y Heins (1972) encuentran el factor de baja volatilidad; Basu (1977) halla el efecto *value*; Banz (1981), el factor tamaño; Jegadeesh y Titman (1993), el factor momentum.

Consecuentemente, nuevos modelos de valoración han sido desarrollados, entre ellos los modelos factoriales que están formados por dos o más variables de riesgo que se correlacionan con las rentabilidades de las inversiones. De esta manera, nace un nuevo enfoque por parte de los inversores para construir carteras basada en factores o *factor investing*. Asimismo, nace la

APT que, a diferencia del CAPM, no asume que los mercados son perfectamente eficientes ya que a veces pueden presentar anomalías en el precio de las acciones temporalmente, antes de que, eventualmente, el mercado los corrija y los valores vuelvan a su valor razonable. Los inversores verán como una oportunidad, a través del APT, cualquier desviación que haya en la valoración razonable de los precios para generar beneficio, basándose en el concepto de “arbitraje”. A pesar de que el APT es un modelo más descriptivo, presenta más complejidad que el modelo CAPM ya que el factor de riesgo i (β_i) y la prima de riesgo asociada al factor i (E_i) son complicadas de hallar. Además, ciertos investigadores como Shanken (1982), Reinganum (1981), Dhrynes et al (1984), Cheng (1996) y otros se han mostrado escépticos por la arbitrariedad y falta de consistencia que hay en la selección de los factores.

La necesidad de desarrollar un modelo de valoración de activos más íntegro seguía en el punto de mira de Fama y French (1993) que proponen el modelo factorial de 3 factores, basado en factores específicos: SML (factor tamaño), HML (factor *value*) y la prima de riesgo del mercado (ya usada en el modelo CAPM). Estos factores han resultado ser los que mayor poder predictivo tienen sobre los retornos esperados de todos los factores añadidos probados por los investigadores, teniendo un valor de R_2 de 0.95. De todas formas, Novy-Marx (2013), Titman et al (2004) y otros encuentran que la inversión y la rentabilidad influye en maximizar los retornos de una cartera. Por lo que Fama y French (2014) proponen el modelo de 5 factores, añadiendo el factor RMW (factor rentabilidad) y CMA (factor de inversión). Aunque, finalmente, muestran que el factor de valor HML es redundante para describir los rendimientos promedio cuando se han agregado a la ecuación los factores de rentabilidad e inversión. Fama y French (2014) ponen a prueba el desempeño del modelo de 5 factores en el mercado de los EE. UU desde 1964 hasta 2021 y concluyen que este modelo es el que tiene el mayor poder predictivo. Carhart (1997) crea un modelo de 4 factores, con los factores propuestos por Fama y French (1993) en el modelo de 3 factores y añade un cuarto factor: WML basado en el factor momentum.

A raíz de estas propuestas y los avances computacionales, la creación de la inversión cuantitativa y el debate entre la inversión activa y pasiva, el *factor investing* empieza a ganar popularidad entre los inversores. Hoy en día, las gestoras de fondos y los desarrolladores de índices se basan en el *factor investing*. Los factores mencionados anteriormente han ido evolucionando y se han propuesto nuevos factores ya que se considera que podría ser cualquier

característica que influya en el retorno de una cartera. Asimismo, muchos inversores lo han llamado “zoo de factores”. Los factores más utilizados y los que han resultado ser más influyentes a base de la experiencia son: baja volatilidad, value, momentum, conservador, calidad y *dividend yield*.

Teniendo todo esto en cuenta, los estudios, evidencias empíricas y la experiencia de los inversores, se concluye que el *factor investing* es la estrategia de inversión más completa y predictiva a la hora de hallar el máximo retorno en carteras de inversión de renta variable.

6. Bibliografía

- All Answers Ltd. (November 2018). Literature Review of Arbitrage Pricing Theory (APT). Retrieved from <https://ukdiss.com/litreview/literature-review-of-arbitrage-pricing-theory.php?vref=1>
- Alpha, Beta, and Smart Beta - Fidelity. (2022). Retrieved 31 May 2022, from <https://www.fidelity.com/learning-center/investment-products/etf/smart-beta>
- Arnott, R. D., Clements, M., Kalesnik, V., & Linnainmaa, J. T. (2018). Factor momentum. SSRN Electronic Journal. <https://doi.org/10.2139/ssrn.3116974>
- Baltussen, G., & Van Vliet, P. (2022). 150+ years of conservative investing: winning by losing less. Robeco.
- Belen Blanco (2012). The use of CAPM and Fama and French Three Factor Model: portfolios selection. *Public and Municipal Finance*, 1(2)
- Bender, J., Briand, R., Melas, D., & Subramanian, R. A. (2013). Foundations of factor investing. Available at SSRN 2543990.
- Carhart, M. (1997). On Persistence in Mutual Fund Performance. *The Journal Of Finance*, 52(1), 57-82. doi: 10.1111/j.1540-6261.1997.tb03808.x
- E. Jay, P. Duvaut, S. Darolles and A. Chrétien, "Multifactor Models," in *IEEE Signal Processing Magazine* Elshqirat, Mohammad. (2019). An Empirical Examination of the Arbitrage Pricing Theory: Evidence from Jordan. 18. 46-67.
- Fama and French the Five Factor Model. (2022). Retrieved 10 June 2022, from https://mba.tuck.dartmouth.edu/pages/faculty/ken.french/data_library.html
<https://blogs.cfainstitute.org/investor/2022/01/10/fama-and-french-the-five-factor-model-revisited/>
- Fama, E. and French, K. (1993). Common risk factors in the returns on stocks and bonds. *Journal of Financial Economics*, 33(1), pp.3-56.
- Fama, E., & French, K. (2003). The Capital Asset Pricing Model: Theory and Evidence. SSRN Electronic Journal. doi: 10.2139/ssrn.440920
- Fama, E., & French, K. (2015). International Tests of a Five-Factor Asset Pricing Model. SSRN Electronic Journal. doi: 10.2139/ssrn.2622782
- Feng, G., Giglio, S., & Xiu, D. (2017). Taming the factor zoo. Fama-Miller Working Paper, 24070.
- Fernández, P. (2017). CAPM: un modelo absurdo. Recuperado de https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=2499455

- Foye, J. (2018). A comprehensive test of the Fama-French five-factor model in emerging markets. *Emerging Markets Review*, 37, 199-222. doi: 10.1016/j.ememar.2018.09.002
- García, Yaiza y García, Juan (2006). Revisión bibliográfica de la evidencia empírica de los modelos multifactoriales de valoración de activos financieros. *Cuadernos de Economía*, v.xxv, n. 44, p197-224. Recuperado de http://www.scielo.org.co/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0121-47722006000100009
- Gilson, R., & Kraakman, R. (1984). The Mechanisms of Market Efficiency. *Virginia Law Review*, 70(4), 549-644. doi:10.2307/1073080
- Gregory Connor (1995) The Three Types of Factor Models: A Comparison of Their Explanatory Power, *Financial Analysts Journal*, 51:3, 42-46, DOI: 10.2469/faj.v51.n3.1904
- Harvey, C., Liu, Y., & Zhu, H. (2015). ... and the Cross-Section of Expected Returns. *Review Of Financial Studies*, 29(1), 5-68. doi: 10.1093/rfs/hhv059
- Huberman, G. and Wang, Z. (2005). Arbitrage Pricing Theory. Staff Report No. 216, Available at SSRN: <https://ssrn.com/abstract=796089>
- Iraizoz Sánchez, P. (2014). ESTUDIO DE LA EVIDENCIA DEL CAPM. Universidad Pontificia Comillas.
- Jensen, M., Black, F., & Scholes, M. (1972). The Capital Asset Pricing Model: Some Empirical Tests
- Jiao, W., & Lilti, J. (2017). Whether profitability and investment factors have additional explanatory power comparing with Fama-French Three-Factor Model: empirical evidence on Chinese A-share stock market. *China Finance And Economic Review*, 5(1). doi: 10.1186/s40589-017-0051-5
- Jurczenko, E. (2018). Factor Investing: From Traditional to Alternative Risk Premia. Elsevier.
- Kenneth R. French - Data Library. (2022). Retrieved 3 June 2022, from https://mba.tuck.dartmouth.edu/pages/faculty/ken.french/data_library.html
- Kenneth R. French - Description of Fama/French Factors. (2022). Retrieved 29 May 2022, from https://mba.tuck.dartmouth.edu/pages/faculty/ken.french/data_library/f_5_factors_2x3.html

- Kwag, S., & Whi, S. (2006). Value investing and the business cycle. *JOURNAL OF FINANCIAL PLANNING-DENVER-*, 19(1), 64.
- Lemmon, M., & Kahn, R. (2015). Smart Beta: The Owner's Manual. *The Journal Of Portfolio Management*, 41 (2) 76-83. doi: 10.3905/jpm.2015.41.2.076
- Lintner, J. (1965). The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets. *The Review Of Economics And Statistics*, 47(1), 13. doi: 10.2307/1924119
- Luenberger, D. G. (1998). *Investment science*. New york, Estados Unidos: Oxford Univ. Press.
- Markowitz, H., 1952. Portfolio Selection. *The Journal of Finance*, 7(1), p.77.
Recuperado de:
https://www.math.hkust.edu.hk/~maykwok/courses/ma362/07F/markowitz_JF.pdf
- Neo, P., & Tee, C. (2019). Low-Volatility Strategy: Can We Time the Factor?. *SSRN Electronic Journal*. doi: 10.2139/ssrn.3441508
- NobelPrize.org. 1990. Harry M. Markowitz Biographical. [online] Available at: <<https://www.nobelprize.org/prizes/economic-sciences/1990/markowitz/biographical/>> [Accessed 11 April 2022].
- Ramírez Galindo, E. (2021). *MODELOS FACTORIALES PARA EL ESTUDIO DE LAS ANOMALÍAS DEL MERCADO RESPECTO DEL CAPM*. Universidad Pontificia Comillas.
- Rehnby, N. (2016). Does the Fama-French three-factor model and Carhart four-factor model explain portfolio returns better than CAPM?:-A study performed on the Swedish stock market.
- Reinganum, M. (1981). A new empirical perspective on the CAPM. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 16(4), 439-462.
- Reinganum, M. (1981). The Arbitrage Pricing Theory: Some Empirical Results. *The Journal of Finance*, 36(2), 313-321. doi:10.2307/2327013
- Reinganum, M. R. (1981). The Arbitrage Pricing Theory: Some Empirical Results. *The Journal of Finance*, 36(2), 313–321. <https://doi.org/10.2307/2327013>
- Ross, S. (1976). The arbitrage theory of capital asset pricing. *Journal of Economic Theory*, 13(3), pp.341-360. Available at: <https://www.top1000funds.com/wp-content/uploads/2014/05/The-Arbitrage-Theory-of-Capital-Asset-Pricing.pdf>

- Ross, S., Westerfield, R., Jordan, B. and González Valdés, M. (2014). Fundamentos de finanzas corporativas. México: McGraw-Hill.
- Smart Beta: La era de los robots. (2022). Retrieved 31 May 2022, from <https://blog.selfbank.es/smart-beta-la-era-de-los-robots/>
- Taneja, Y. (2010). Revisiting Fama French Three-Factor Model in Indian Stock Market. *Vision: The Journal Of Business Perspective*, 14(4), 267-274. doi: 10.1177/097226291001400403
- The Essentials of Factor Investing. (2022). Retrieved 30 May 2022, from <https://www.robeco.com/en/essentials/factor-investing/>
- Vanguard ETF Profile | Vanguard. (2022). Retrieved 31 May 2022, from <https://investor.vanguard.com/etf/profile/VTV>
- What is factor investing? | BlackRock. (2022). Retrieved 29 May 2022, from <https://www.blackrock.com/us/individual/investment-ideas/what-is-factor-investing>
- Womack, K., & Zhang, Y. (2022). Understanding Risk and Return, the CAPM, and the Fama-French Three-Factor Model. Retrieved 26 May 2022, from https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=481881
- Womack, K., Zhang, Y. (2003). Understanding Risk and Return, the CAPM, and the Fama-French Three-Factor Model. Recuperado de <https://ssrn.com/abstract=481881>