



FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y EMPRESARIALES
(ICAICADE)

MÉTODOS DE VALORACIÓN DE OPCIONES

Autor: Luis Martín López
Director: Raquel Redondo Palomo

Madrid
Junio 2015

Luis
Martín
López

MÉTODOS DE VALORACIÓN DE OPCIONES



Índice

	Pg.
1.Introducción.....	5
1.1. Motivación del trabajo.....	5
1.2. Objetivos.....	6
1.3. Metodología.....	7
1.4. Estructura.....	8
2. Marco Teórico.....	10
2.1. Opciones.....	10
2.1.1. Opción <i>Call</i>	10
2.1.2. Opción <i>Put</i>	11
2.1.3. La prima de una opción.....	13
2.1.4. Tipos de opciones según su vencimiento.....	16
2.1.5. Otro tipo de opciones.....	17
2.1.6. Usos de opciones.....	17
2.1.7. Breve historia sobre las opciones y otros derivados financieros.....	21

	<i>Pg.</i>
3. Métodos de Valoración de Opciones.....	24
3.1. Árbol Binomial.....	25
3.2. Black – Scholes.....	29
3.2.1. Ecuación en derivadas parciales.....	30
3.2.2. Black – Scholes – Merton <i>pricing formula</i>	35
3.3. Algoritmo de Longstaff – Schartz.....	37
3.3.1. Conceptos matemáticos y probabilísticos previos.....	38
3.3.2. Introducción del algoritmo.....	40
3.3.3. El algoritmo.....	41
3.3.4. Ejemplo numérico.....	46
4. Comparación de Métodos.....	54
5.Conclusiones.....	59
 Apéndice.....	61
Anexos.....	62
Bibliografía.....	71

1. Introducción

1.1. Motivación del trabajo

Un mundo tan globalizado como el actual ya no se rige exclusivamente por lo que dictan los gobiernos. Cada día adquieren mayor relevancia en el panorama global las grandes compañías multinacionales y los mercados financieros. En un sistema con estas características lo que ocurra con un producto en una geografía puede afectar a los precios o a la producción de este en la otra parte del mundo. Y si hay un grupo de productos que ha adquirido especial relevancia en el devenir de los acontecimientos mundiales actuales, a parte de los combustibles fósiles como el petróleo, ese es el de los derivados financieros.

Una definición burda y simple de lo que son los derivados financieros sería decir que son apuestas sobre el precio de acciones, índices, monedas y otros elementos financieros, y cuyo precio se determina por la ley de oferta y demanda. La realidad es que existe mucho desconocimiento acerca de los derivados financieros y cual es su valor real. El desconocimiento y el afán especulativo desmedido que pueden generar estos productos es muy peligroso, ya que pueden poner en peligro todo el sistema financiero global (como se ha visto en 2008 con la crisis de los derivados denominados *subprime*).

La complejidad de estos productos hace que sea muy complicado para gente poco relacionada con las matemáticas, incluso para investigadores noveles, acercarse al tema. Muchos de los métodos de valoración de opciones se han publicado en revistas científicas de impacto internacional y en ellas el nivel de explicación no siempre desciende hasta niveles en los que dichas metodologías resultan comprensibles para personas más o menos iniciadas en el análisis cuantitativo. Por ello hemos estimado

oportuno centrar nuestro trabajo en abordar, de la manera más clara posible y descendiendo a un nivel máximo de explicación y elaboración, uno de los derivados financieros más básicos y antiguos como son las opciones, y los métodos para realizar una valoración certera de estas, intentando no dar nada por supuesto.

1.2. Objetivos

El objetivo último de este trabajo es comprender las opciones financieras y sus principales métodos de valoración. Para ello,

- en primer lugar, haremos una descripción de las opciones financieras, en qué consisten y cuáles son los conceptos fundamentales relacionados con ellas.
- A continuación introduciremos y explicaremos de manera clara los métodos de valoración de opciones de Black – Scholes, Árbol Binomial de Cox-Ross-Rubinstein y el Algoritmo de Longstaff y Schartz. Estos temas en ocasiones acarrearán mucha jerga matemática o estadística que dificultan su comprensión para investigadores noveles, por ejemplo, por ello en este trabajo hemos intentado partir desde una base muy elemental explicando cada concepto presentado que pueda ser novedoso para el lector.
- Para una mejor comprensión de estos métodos de valoración se presenta, además, un caso práctico que supone una simulación de la valoración de distintas opciones, ayudados por una herramienta de cálculo informática (MatLab).
- Todo ello permitirá no solo definir estos tres métodos, sino además, sacar conclusiones acerca del correcto funcionamiento de cada uno y de sus puntos fuertes y débiles para según que tipo de opciones financieras.

1.3. Metodología

Un trabajo como este, con una elevada base matemática y estadística, necesita de mucho estudio previo para comprender los conceptos que se explican en él. Para la parte más introductoria donde se definen las opciones hemos acudido a varios libros de texto de reputados economistas como John C. Hull (*Options, Futures and other Derivatives*. 1997) , Marcel B. Finan (*A course in the Theory of Interest and Derivatives Markets: A Preparation for the Actuarial Exam FM/2*. 2015) o Felipe M. Herranz Martín (*Los Derivados y el Riesgo del Mercado: Fundamentos, Tratamiento Contable y Cálculo de Sensibilidad*. 2001).

Posteriormente una vez introducidos los conceptos básicos pasamos a explicar los métodos de valoración y para ello hemos decidido acudir a la fuente principal, estudiado con detenimiento los artículos originales en los que los autores introdujeron dichos métodos (véase Bibliografía). Hemos complementado dichos trabajos de investigación con otros de postgrado o doctorado referidos al tema, para así intentar abordar el tema desde un punto de vista lo más sencillo posible.

Finalmente, con el objetivo de aportar un valor singular al trabajo, hemos procedido a generar unos códigos validos para el software matemático MatLab con los que poder valorar distintas opciones según distintos métodos, y realizar una comparación tanto con los datos obtenidos como con lo aprendido en el proceso de simulación.

1.4. Estructura

Este trabajo se estructura de la siguiente manera:

1. En primer lugar en el Marco Teórico vamos a definir lo que es una opción y los dos tipos básicos en los que se las diferencian, *call* y *put*, explicando sus características principales. En esta primera parte explicamos también todos los factores relevantes en el precio de una opción (en la prima). Detallaremos también las principales diferencias entre comprar o vender opciones y presentaremos las opciones en las que más nos vamos a basar a la hora de valorar posteriormente. Por último cerramos esta prima parte de Marco Teórico con una breve revisión histórica sobre los derivados financieros.

2. Una vez definidos todos los elementos básicos referentes a opciones necesarios para nuestro trabajo, entraremos en los modelos de valoración más estudiados. No seguiremos un orden cronológico de publicación sino que iremos del más sencillo de comprender al más complejo. Es por ello por lo que comenzamos con el Árbol Binomial de Cox-Ross-Rubinstein.

3. El siguiente método de valoración presentado, el de Black- Scholes, es quizá uno de los más conocidos, por eso hemos querido centrarnos en su formulación para entender paso a paso como fue concebido originalmente por Black, Scholes y Fischer.

4. En el siguiente apartado nos explayamos poco más, en el quizás sea el método más desconocido de los tres, el Algoritmo de Longstaff y Scharz. Dada su aparente complejidad hemos dedicado varios subapartados a este método. Siendo el primero una introducción de conceptos matemáticos y probabilísticos necesarios previos. Mas adelante introducimos el algoritmo y lo explicamos paso a paso respetando la terminología empleada por los profesores Longstaff y Scharz. Hemos querido también desarrollar en este apartado en profundidad el ejemplo numérico que los autores proponen en su *paper*. Explicando además de manera detallada las partes que ellos dan por entendidas.

5. El siguiente paso es una comparación de los tres métodos. Para ello hemos generado unos códigos para el software MatLab que adjuntamos en anexos. Con la soluciones de los códigos y la experiencia propia generándolos llegamos a una serie de conclusiones que comentamos.

7. Por último resumimos todo lo presentado en un apartado de conclusiones finales en relación a estos tres métodos, donde esperamos dar unas pautas sencillas a cerca del uso de los métodos, los resultados que arrojan y sus diferencias.

2. Marco teórico

2.1. Opciones

Una opción es un instrumento financiero derivado que supone un derecho, no necesariamente una obligación, para el poseedor de esta a comprar un activo, a un precio ya determinado en el momento de la firma del contrato (*strike* o precio de ejercicio) hasta una fecha determinada también en el contrato (vencimiento). Este tipo de derivados financieros se comercializa en numerosos mercados como puede ser el de acciones (renta variable), tipos de interés (renta fija), tipos de cambio (“*Foreign Exchange*”), y crédito entre otros (Finan, 2015).

Se puede entrar en el mercado de opciones en dos posiciones: en largo (comprando la opción), o en corto vendiendo la opción (Estas expresiones nos vienen traducidas del inglés de *long position* y *short position*).

Podemos diferenciar entre el tipo de opción en opción *call* u opción *put* según la naturaleza del contrato.

2.1.1. Opcion Call

Una opción *call* otorga a su poseedor el derecho (pero no la obligación) a comprar un activo subyacente a un precio de ejercicio o *strike price* en una fecha previamente determinada. Sin embargo el vendedor de la opción *call* si tiene la obligación de vender el activo subyacente al precio acordado en el caso de que el comprador haga uso de su legítimo derecho a comprar¹ (Morris, 2004).

¹ la estrategia de vender acciones también se conoce como *to write*.

Hay 3 aspectos de una *call option* que debemos tener en cuenta:

1. Comprar una opción *call* es más barato que comprar el activo subyacente.
2. Si el precio del activo subyacente asciende en la Bolsa por encima del *strike Price*, obtendremos unas ganancias iguales al precio del subyacente menos el *strike Price*.
3. Si por el contrario el precio del activo baja a niveles inferiores al *strike Price*, no se producen ganancias al no ejercer la opción. En este caso las pérdidas son conocidas e iguales a la prima de la opción

Teniendo en cuenta esto, la función del *pay-off* de una *call option* es la siguiente:

$$C(S,t) = \text{máx } \{S_t - K; 0\} \quad [1]$$

Dónde:

- $C(S,t)$ = La opción *call* que depende de S y de t
- S = es el *stock Price* o precio del activo subyacente
- K = es el *strike Price* o precio de ejercicio.
- t = es un instante en el tiempo concreto.

2.1.2. Opcion Put

Una opción *put* otorga al poseedor el derecho sin obligación, de nuevo, de vender un activo subyacente, *stock*, a un precio preestablecido, *strike Price*, y en una fecha fijada, *maturity*.

La compra de opciones *put* se utiliza como cobertura (si no entramos en los fines especulativos que siempre se relacionan con los instrumentos financieros), por ejemplo cuando se prevean bajadas de precios en acciones que se poseen. Utilizando la compra de una *put* se fija el precio a partir del cual se gana dinero. Si la acción cae por debajo de ese precio, el inversor gana dinero. Si cae el precio de la acción, las ganancias obtenidas con la opción *put* compensan en todo o en parte la pérdida experimentada por dicha caída en las acciones poseídas (Finan, 2015).

De nuevo hay 3 aspectos de una *put option* que son primordiales:

1. Comprar una opción *put option* es más barato que el activo subyacente.
2. Si el precio del activo subyacente desciende en la Bolsa por debajo del *strike Price*, obtendremos unas ganancias iguales al *strike Price* menos el precio del activo subyacente.
3. Al contrario, si el precio del activo subyacente sube a valores superiores al *strike Price*, no se producen ganancias al no ejercer la opción. En este caso las pérdidas son conocidas e iguales a la prima de la opción.
4. Las ganancias del poseedor de una *put option* al contrario que el de una *call option*, son limitadas y alcanzarían un máximo correspondiente al *strike Price* en el improbable caso de que el precio del activo subyacente se devaluase por completo.

Teniendo en cuenta esto, la función del *pay-off* de una *put option* es la siguiente:

$$P(S,t) = \max \{K - S_t ; 0\} \quad [2]$$

Dónde:

- $P(S,t)$ = La opción *put* que depende de S y de t

2.1.3. La Prima de una Opción

En el mundo financiero el precio que se paga por una opción se conoce como prima. La prima de una opción, como ocurre generalmente con los precios, viene marcada por el juego de oferta y demanda del mercado. Sin embargo estos ofertantes y demandantes realizan estimaciones para considerar el precio que están dispuestos a pagar o recibir por una opción. En estas valoraciones influyen sustancialmente 6 factores (Hull, 1997):

- **Precio del activo subyacente o *stock Price (S)***: El precio de una opción (prima) está directamente relacionado con el precio del activo subyacente a esta. Por lo tanto las variaciones en la cotización del activo suponen variaciones en la prima de la opción.

En general, una subida en la cotización de un activo hace subir la prima de su *call option* y bajar la de su *put option*. Y por el contrario la bajada en el precio del activo supone una bajada en el precio de su *call option* y una subida en la *put option*.

- **Precio de ejercicio o *strike Price (K)***: El precio que se fija de ejercicio es otro factor primordial para determinar la prima de la opción. Las opciones *call* con precio de ejercicio superior tienen una prima menor ya que es más improbable obtener beneficio. Sin embargo con las opciones *put* ocurre al contrario, un precio de ejercicio superior implica una prima mayor.
- **Tiempo a vencimiento o *Time to maturity (T)***: Las opciones, ya sean *call* o *put*, pierden valor (la prima es menor) según se acerca su fecha de vencimiento.

Con opciones se tienen unas pérdidas potenciales conocidas que son iguales al valor de la prima pagada por ella. Por eso cuanto más tiempo queda hasta el vencimiento más incertidumbre hay en el precio del *stock* y más posibilidades hay de conseguir un beneficio.

Las opciones empiezan a perder valor generalmente una vez transcurridos dos tercios de su vida útil inicial.

- **Volatilidad (σ):** La volatilidad es una medida de variabilidad, de tal forma que la volatilidad de una acción es la medida de incertidumbre sobre los precios futuros de esa acción. Si la acción cotizase siempre al mismo precio entonces la volatilidad sería cero. La volatilidad es el factor primordial a la hora de negociar opciones.

Teniendo en cuenta que las pérdidas son fijas y conocidas en caso de no ejercicio, a mayor variabilidad de los precios (o volatilidad) existe mayor probabilidad de que la opción genere beneficios y en consecuencia de que sea ejercida.

El propietario de una *call* se beneficia del aumento de los precios pero tiene un riesgo limitado por la caída de los precios ya que su pérdida máxima es el precio de la opción. Con el propietario de una *put* ocurre lo mismo pero con la bajada de los precios. Este riesgo limitado hace que la relación entre volatilidad y el precio de la opción sea directa (Hull, 1997).

Cuando la volatilidad es alta se dice que la opción esta “cara”. Es recomendable vender una opción cuando la volatilidad sea alta (este “cara”), y comprar la opción cuando la volatilidad sea baja (este “barata”).

- **Dividendos:** Los dividendos no afectan de manera directa a las Opciones. Sin embargo si afectan al activo subyacente. El pago de dividendos se resta directamente del precio de la acción.

Los dividendos, por tanto, afectan negativamente a la prima de una *call option*, y positivamente a una *put option*. Si yo poseo una *call option* desearé que durante

la vida útil de esta, la sociedad no reparta ningún dividendo para que así el valor

del activo subyacente no decaiga. Mientras que si lo que tengo es una *put option*, me favorecerá que la sociedad reparta dividendos y el *Stock Price* baje.

- **Tipo de Interés (r):** El tipo de interés es el factor que menos influye en la prima de una opción. Cuando se habla de tipo de interés nos referimos al tipo de interés libre de riesgo como puede ser el tipo al que están las letras del tesoro por ejemplo. El tipo de interés que influye es el que hay durante la vida útil de la opción.

Una *call option*, tiene más valor cuanto mayor sea el tipo de interés, ya que el valor del precio de ejercicio (lo que pago por ejercitar la opción) será menor cuanto mayor sea el tipo de interés .

Una *put option* ,por el contrario, valdrá menos cuanto mayor sea el tipo de interés, ya que el valor del precio de ejercicio (lo que percibo por ejercitar la opción) descenderá cuando aumente el tipo de interés.

Las relación de las anteriores variables con el valor de la opción queda resumida en la siguiente tabla:

	European <i>Call</i>	European <i>Put</i>	American <i>Call</i>	American <i>Put</i>
Stock Price	+	-	+	-
Strike Price	-	+	-	+
Tiempo a vencimiento	?	?	+	+
Volatilidad	+	+	+	+
Dividendos	-	+	-	+
Tipo de interés	+	-	+	-

Fuente: Elaboración propia basado en *Options, Futures, and Other Derivatives* (Hull, 1997).

Donde ‘+’ indica una relación directa, ‘-’ una relación indirecta y ‘?’ indica una relación incierta.

2.1.4. Tipos de Opciones según su vencimiento

Opción Europea

La característica principal de estas opciones es que solo pueden ser ejercerse en la fecha de vencimiento. Dado su rigidez, las opciones europeas son las más fáciles de valorar ya que solo hay que tener en cuenta lo que ocurre en el momento de vencimiento T . Existen opciones europeas que no son contratadas en un mercado bursátil y se denominan extrabursátiles o OTCs (Herranz, 2001).

Opción Americana

Pueden ser ejercitadas en cualquier momento entre el día de su compra y el día de su vencimiento, ambos inclusive. También cabría remarcar que la prima de estas opciones siempre será mayor (Será comprobado en el ejemplo práctico en el 5.) al de las Europeas, con las mismas características, ya que por su naturaleza otorga al poseedor un derecho mayor (poder ejercer en cualquier instante a lo largo de la vida útil) que el de las opciones Europeas (Hull, 1997).

Opción Bermuda

Estas opciones tienen la particularidad que se pueden ejercer en fechas concretas a lo largo de la vida de la opción. No podrán ejercerse en el periodo intermedio entre estas fechas discretas. Este tipo de opciones también se denomina en ocasiones Opción “de mitad del Atlántico” o Opción cuasi-americana dado que por naturaleza están entre las opciones europeas y las americanas. Estas opciones nos serán muy útiles en momentos de estudiar las opciones americanas ya que una opción bermuda con n momentos de ejercicio se aproxima a una americana para n muy grande.

2.1.5. Otros tipos de opciones

Existen otro tipo de opciones más allá de las opciones denominadas *Vanilla* (Europeas y americanas) o simples, se trata de las opciones “Exóticas”. Se las conoce como la segunda generación de opciones y se diferencian de las opciones *Vanilla* en que dependen de otros factores más allá del *strike Price* y el *stock Price*. Un ejemplo 3 *Asian Options* o *Average Options* que son opciones que dependen de la media del precio del activo subyacente a lo largo de un periodo de tiempo (Weert, 2009).

2.1.6. Usos de Opciones

Existen 2 formas de participar del mercado de opciones, comprarlas o venderlas, y los efectos de cada estrategia varían según se hagan con opciones *put* u opciones *call*. A continuación vemos las situaciones favorables para cada caso

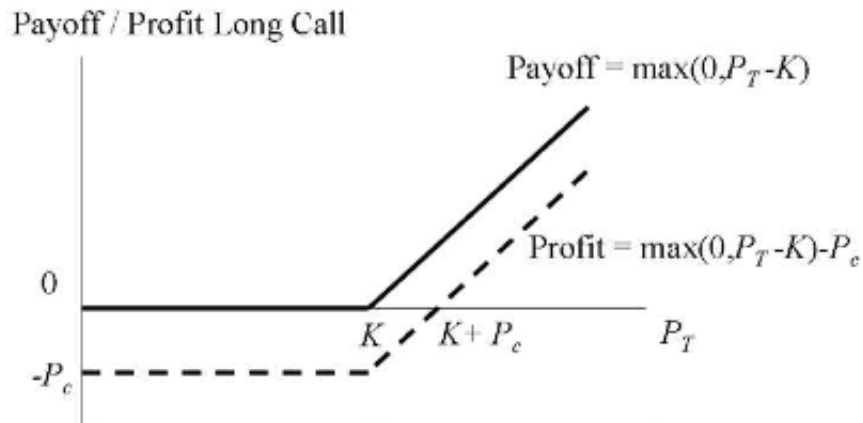
Call

Existen una serie de situaciones en las que la compra de una *call option* sería favorable:

- Si se prevé que una acción va a subir, ya que es más barato que la compra de acciones.
- Si una acción ha subido mucho, y el inversor no ha comprado y piensa que está cara, sin embargo piensa que es probable que pueda seguir con la tendencia alcista. La compra de una *Call* permitirá sacar partido si la acción sigue en ascenso y limitara las pérdidas si la acción por el contrario rebota y cae.
- Si se quiere entrar en el mercado de acciones en un futuro cercano porque se tiene buenas expectativas pero actualmente no se dispone de los fondos necesarios. La opción *Call* permite beneficiarse de las subidas sin la necesidad de comprar las acciones de manera inmediata.

- Si la relación entre el coste de la inversión y el rendimiento (es decir el apalancamiento) es muy elevado. Y por consiguiente se pueden obtener sustanciosas rentabilidades para inversiones pequeñas.

El diagrama *pay-off/profit* de comprar una *call* o *long call*, es el siguiente:



Fuente : *A Basic Course in the Theory of Interest and Derivatives Markets* (Finan, 2015)

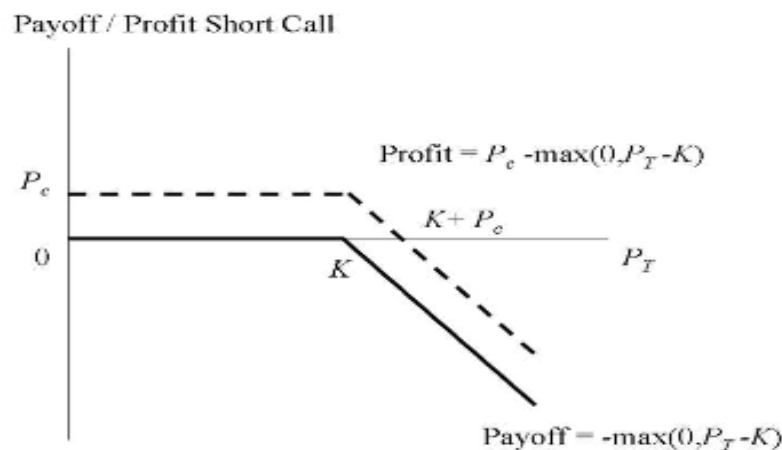
Debemos tener en cuenta que no es lo mismo el *pay-off* que los beneficios, ya que existen las primas, que el comprador tiene que pagar y el vendedor recibe.

En la venta de una opción *call* las reglas del juego cambian, ahora nos encontramos en el lado contrario del contrato. En la venta se recibe la prima o precio de la opción y nos comprometemos (tenemos la obligación) a vender la acción al *Strike Price* o precio de ejercicio siempre que el comprador de la *call* ejerza su opción de compra obteniendo una ganancia de la prima más la posible diferencia del precio fijado y el precio actual. Cabe resaltar que una opción *call* puede venderse sin haberse comprado previamente. Las posibles situaciones favorables para la venta de una *call* podrían ser las siguientes:

- Si se quiere asegurar ingresos extraordinarios una vez que se haya decidido vender las acciones.
- Si no importa vender las acciones a un precio considerado alto y recibir, además, un ingreso extra previo. Se vende la *call* fijando un precio de ejercicio deseado por

encima del precio actual de la acción. Si la acción alcanza ese precio, venderemos la acción a un precio alto (aunque menor que el del mercado) y por supuesto se ingresará el valor de la prima de la opción.

El diagrama *pay-off/ Profit* de venta de una *call* o *short call* se corresponde con el siguiente:



Fuente : *A Basic Course in the Theory of Interest and Derivatives Markets* (Finan, 2015)

Put

Las estrategias a seguir cambian cuando hablamos de opciones de tipo *put*. Existen dos situaciones beneficiosas claras a la hora de comprar opciones *put*:

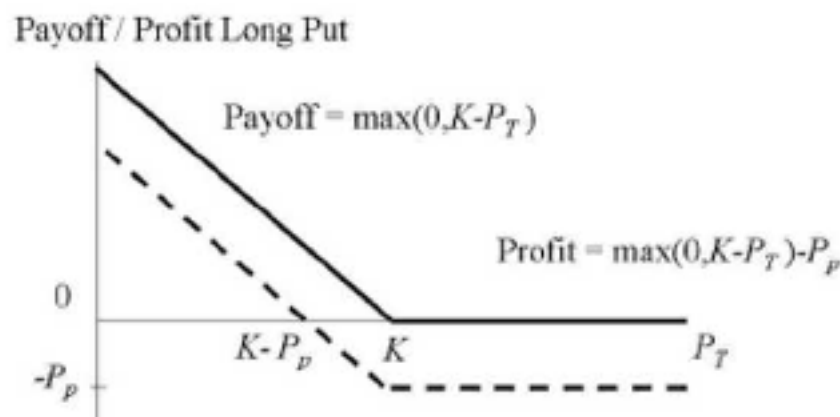
- Si se tienen acciones y piensa que su precio va caerá corto plazo, pero se piensa que el valor tiene una tendencia alcista a largo plazo. Cuando el precio de las acciones caigan por debajo del *Strike Price*, se ejecuta la *put*, recibiendo un pago por las acciones

mayor que su precio actual y con ese pago se cabría la posibilidad de volver a comprar acciones (con un margen de beneficios) ya que se cree en su tendencia es alcista a medio/largo plazo.

- El anterior paso es de prevención ante una bajada que pudiera hacernos perder

dinero. Sin embargo si no poseemos las acciones pero vemos que estás van a caer, podríamos comprar opciones *put* con el único fin de beneficiarnos de esta tendencia bajista. Este caso corresponde más a una actuación especulativa y podría traer consecuencias negativas para el mercado si se realiza en gran volumen.

El diagrama *pay-off/ profit* propio de comprar una *put* o *long put*, será el siguiente:



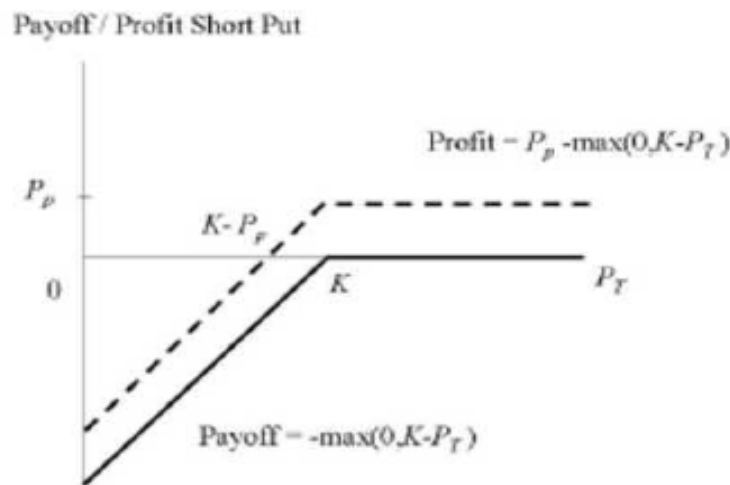
Fuente : *A Basic Course in the Theory of Interest and Derivatives Markets* (Finan, 2015)

Por el contrario, como visto anteriormente con las *call*, el vendedor de una *put* está vendiendo el derecho (contrayendo una obligación) a cambio de una prima. El que vende tendrá la obligación de comprar la acción subyacente en caso de que el poseedor ejerza su derecho a vender.

Por lo que encontramos una posible situación favorable para un vendedor de una *put* podría ser:

- Cuando piensa que el precio de la acción va a entrar en un período de estabilidad, está convencido de que no va a caer y que puede que suba ligeramente. En esta situación se puede fijar un precio a partir del cual se está dispuesto a comprar; y mientras, se ingresa la prima. El precio límite de compra es el precio de ejercicio al que se venderá la *put*.

Por último, el diagrama *pay-off/profit* generado por vender una *put* o *short put* será:



Fuente : *A Basic Course in the Theory of Interest and Derivatives Markets* (Finan, 2015)

2.1.7. Breve Historia sobre las opciones y otros derivados financieros

Es muy difícil datar la aparición de la primera opción ya que en esencia se trata únicamente de un contrato que compromete a dos partes en el futuro. Desde este punto de vista ya podemos ver una muestra de opciones en el S VI a.C. en la antigua Grecia con Tales de Mileto que puso su dinero en garantía para el arriendo de todas las maquinas de prensa de aceite de la ciudad de Mileto y Quíos esperando una subida de la demanda muy superior a la normal en la próxima estación de bonanza. Cuando dicho periodo llego y en efecto la demanda aumento más que considerablemente Tales pudo subarrendar las maquinas al precio que él mismo impusiera².

Existen innumerables ejemplos de estos derivados financieros originarios que no pasaban de acuerdos o contratos, pero no sería hasta el siglo XVI cuando un comerciante, Thomas Greham, decidió invertir parte de su fortuna ,que precisamente había obtenido con contratos de la naturaleza de la opciones, en la construcción del primer mercado propicio para los derivados, la *Royal Exchange de Londres*, que fue

² Este hecho es relatado por Aristóteles en *Política Libro I, Capítulo IV* (S IV a.C.)

inaugurada el 23 de enero de 1571.(Thornbury, 1873. Pgs. 494-499) ³

En 1602 se fundó la Compañía Neerlandesa de las Indias Oriental (VOC), este hecho junto con la creación de la Bolsa de Ámsterdam en 1611 propiciaría la futura supremacía comercial de los Países Bajos. Durante mediados de S XVII se negociaban gran cantidades de opciones tanto de naturaleza *put* como *call* de la Compañía de las Indias Oriental. Cada vez entraban más inversores, no relacionados con las mercancías que se negociaban, en el mercado atraídos por las ganancias y la popularización de la Bolsa de Ámsterdam. Uno de estos mercados en los que se fijaron los inversores fue el de los tulipanes, concretamente el de los bulbos de tulipanes, dando lugar a una enorme burbuja especulativa conocida como tulipomanía (1634 – 1637). Incluso en la Royal Exchange de Londres se llegó a comercializar con opciones y futuro de bulbos de tulipanes de los Países Bajo contribuyendo a la burbuja que llegaría a su fin el 3 de febrero de 1637 extendiéndose los impagos en los contratos (*defaults*) y propiciando una de las mayores crisis financieras de la historia.

El siguiente hecho significativo fue la creación del *Chicago Board of Trade* (CBOT) en 1848 en Chicago. Debido al carácter estacionario del grano principalmente de trigo, los granjeros se encontraban que había momentos que no podían almacenar todo su excedente y momentos en los que no almacenaban absolutamente nada. Se crearon entonces contratos que se denominaba '*to-arrive*' y que a la postre acabaron permitiendo a los inversores asegurar un precio para el grano y así tener una cobertura⁴ contra el movimiento de los precios. Este tipo de contrato acabó siendo estandarizado en 1865 y propició la transformación del CBOT en el primer mercado exclusivo de opciones y futuros (*options and futures clearinghouse*) en 1925. Por otra parte en 1898 se creó sin ánimo de lucro el *Chicago Butter and Egg Board*, un mercado de activos también agrarios, que más tarde se denominaría *Chicago Mercantile Exchange* (CME)⁵.

Estas dos casas se fusionarían posteriormente en 2007 dando lugar a uno de los

³ *Old and new London: A narrative of its history, its people and its places*, Walter Thornbury 1873 (Capítulo XLII p. 494-499)

⁴ En el mundo anglosajón esta estrategia se denomina '*to hedge*', y actualmente esta muy instaurada para cerrar posiciones y minimizar riesgos

⁵ <http://www.cmegroup.com/company/history/>

mercados de opciones y futuros más importantes del mundo, *CME Group Inc* (3113 millones de ingresos totales en 2014) ⁶.

Con la llegada del S XX se extendieron también numerosas estafas relacionadas con los derivados como las llevadas acabo en las denominadas *bucket shops* que eran pequeños operadores de opciones y activos que convencían a clientes poco experimentados para iniciarse en el mundo financiero y llevar a cabo transacciones para después marcharse con el dinero y reabrir el ‘negocio’ en otra parte.

En 1922 Estados Unidos hizo su primer esfuerzo para regular el mercado de derivados y en concreto los futuros con la *Grain Future Act*. Posteriormente en 1936 las opciones sobre futuros fueron prohibidas en Estados Unidos y numerosos países también prohibieron algunos derivados financieros.

En 1973 tuvieron lugar dos hechos que cambiaron el mercado de los derivados financieros y lo propulsaron. Primero la creación del *Chicago Board Options Exchange (CBOE)*, actualmente el mercado de opciones mas grande en Estados Unidos con un volumen record en 2014 de mas de 1200 millones de contratos⁷. El segundo hecho que cambio la industria de derivados fue la publicación por parte de Fischer Black y Myron Scholes de su modelo de valoración de opciones conocido como *Black-Scholes Option Pricing Model*⁸.

Según avanzaba el S XX se fueron desarrollando nuevos productos financieros cada vez más complejos como opciones sobre índices, opciones sobre bonos (*T-bond options*) o la irrupción de los *swaps* en los años 80. Propiciando incluso grandes perdidas a empresas que operaban con ellos o sonadas bancarrotas como las de *Orange County* o *Barings Banks* a finales de los años 90 y la más reciente de *Lehman Brothers* referente a las hipotecas denominadas *subprime* y que generó una de las crisis financieras global que aún persiste.

⁶CME Group 2014 Annual Report

⁷CBOE Holdings News Release (5 de Enero de 2015)

⁸ Entramos en profundidad en este método en el 3.2.

3. Métodos de valoración de opciones.

Con las acciones ocurre como con cualquier producto o servicio estándar que se pueda comercializar. Se paga un precio y en contrapartida se obtiene el producto, en este caso el contrato explicado anteriormente de la opción. Sin embargo cuando se trata de productos con riesgo o riesgosos como puede ser cualquier instrumento financiero y como es en particular las opciones, conviene saber cuál es el valor real de este producto. Es por esto que los estudiosos de las finanzas, y de los derivados han intentado elaborar métodos para asignar precios a unos instrumentos como las opciones.

Como ya hemos dicho antes gran parte del precio de las opciones viene asignado por las leyes de oferta y demanda del mercado. Sin embargo esto no evita que se pueda encontrar unos patrones para extraer el valor actual como hicieron los economistas Fischer Black y Myrion Scholes en 1973 para desarrollar el Modelo Black-Scholes o por Cox, Ross y Rubinstein para desarrollar el modelo conocido como Árbol Binomial, en 1979.

Aunque el modelo de Black - Scholes es anterior, empezaremos por el método del árbol binomial ya que es más sencillo, y nos ayudara a explicar posteriormente el de Black – Scholes.

3.1. Árbol Binomial

Los economistas, y profesores de distinguidas universidades, John C. Cox (MIT y Stanford), Stephen A. Ross (Yale) y Mark Rubinstein (Berkely) propusieron este método en la revista académica *Journal of Financial Economics* en 1979 con su artículo llamado '*Option Pricing: A Simplified Approach*' (este método pasaría a denominarse posteriormente Árbol Binomial Cox-Ross-Rubinstein). Vamos a basarnos principalmente en el artículo de Cox, Ross y Rubinstein para explicar su método.

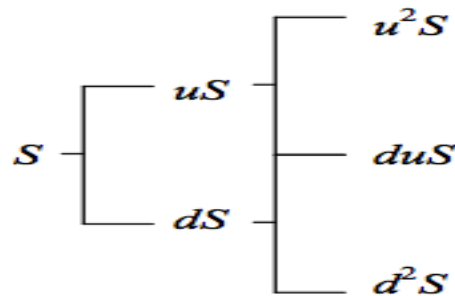
Este método de valoración de opciones es sin duda uno de los más populares y útiles entre otras cosas por su simplicidad que por otra parte hace que no sea siempre recomendable. Consiste en la construcción de lo que se conoce como un árbol binomial, que es un diagrama que viene a representar las posibles trayectorias que podría seguir el activo que subyace a la opción. En cada momento o paso del tiempo el precio tiene una probabilidad de subir por una cantidad de porcentaje y una probabilidad de bajar por una cierta cantidad de porcentaje.

Este método puede ayudar a valorar opciones utilizando los principios básicos de no-arbitraje y valoración neutral al riesgo (Véase Apéndice). Tomamos un activo subyacente cualquiera cuyo precio corriente o *stock Price* es S_0 y la opción que existe sobre dicho activo cuyo precio denotaremos como f . La fecha de expiración de la opción será T . Entendemos que durante la vida de nuestra opción, el precio del activo que subyace puede subir o bajar. En caso de subir lo denotaremos como que sube de S_0 a S_0u (siendo u siempre el factor en caso de subida y por consecuencia $\rightarrow u > 1$) donde el porcentaje de subida del precio se obtiene fácilmente como $u-1$. Si por el caso contrario el precio bajase, lo haría de S_0 a S_0d (siendo d en contra posición el factor de bajada de precio y en consecuencia $\rightarrow d < 1$) y obteniéndose el porcentaje de disminución del precio como $1-d$.

Esto puede parecer muy complicado explicado de forma escrita, pero la verdad es que

es un proceso muy sencillo que explicaron los economistas Cox, Ross y Rubinstein en el 1979 y queda más claramente definido gráficamente (Para representación gráfica de

un ejemplo numérico realizado referirse a Anexos) como vemos a continuación:



Fuente : *Option Pricing: A Simplified Approach* (Cox, Ross, Rubinstein. 1979)

Cuando el precio del activo subyacente cambia, el pago de la opción que tiene en cuenta dicho activo también cambiara obviamente. Por lo tanto pasamos a denotarla con f_u el pago de la opción cuando el activo subyacente sube a S_0u . Si por el contrario el activo subyacente toma el otro camino posible y baja a S_0d entonces diremos que el precio de la opción es ahora f_d .

Esta metodología encuentra el precio de la opción a través de la construcción de una cartera, con la opción y activos subyacentes, que esté libre de riesgo.

Construiríamos una cartera como, hemos dicho, con una posición larga o *long position* en Δ números de activos subyacentes y una posición corta o *short position* en una opción.

El siguiente paso a realizar sería encontrar el valor de Δ para el cual nuestra cartera se encuentra libre de riesgo. Para ello tenemos que calcular el precio de la cartera para las dos posibles hipótesis: que el precio del activo subyacente suba, o que baje.

Si el precio del activo sube, el valor de nuestra cartera será el siguiente:

$$S_0 u \Delta - f_u \quad [3]$$

Si el precio del activo subyacente por el contrario baja, la cartera sería la siguiente:

$$S_0 d \Delta - f_d \quad [4]$$

Debemos ahora encontrar como hemos dicho antes el valor de Δ (número de activos subyacentes en la cartera) para el cual nuestra cartera está libre de riesgo, y eso se da cuando el valor de la cartera es igual tanto si aumenta el precio del subyacente como si disminuye. Por lo tanto formamos la siguiente igualdad:

$$S_0 u \Delta - f_u = S_0 d \Delta - f_d \quad [5]$$

Despejando obtenemos la siguiente ecuación:

$$\Delta = \frac{f_u - f_d}{S_0 u - S_0 d} \quad [6]$$

Ahora obtendríamos ya una cartera libre de riesgo y sin oportunidad de arbitraje⁹. Mirando a la formula anterior se puede ver que Δ expresa la relación al cambiar el precio de la opción ante un cambio en el precio del activo subyacente según avanza en un periodo de tiempo.

El paso final consiste en crear una igualdad entre el valor actual de la cartera y lo que nos cuesta a nosotros armarla en el presente. El valor actual de la cartera será el valor de

la cartera en el futuro descontada a la tasa de interés libre de riesgo que denotaremos

⁹ Resumiendo, el arbitraje es la táctica por la que podemos obtener una rentabilidad libre de riesgo al encontrar un activo con distintos precios en dos o más mercados por ejemplo. En condiciones perfectas de mercado este fenómeno no ocurriría (En apéndices explicamos más en detalle el concepto del arbitraje).

como r^{10} .

El valor actual de la cartera será entonces:

$$(S_0 u \Delta - f_u) e^{-rT} \quad [7]$$

Y el coste de armar la cartera siendo:

$$S_0 \Delta - f \quad [8]$$

El siguiente paso a realizar sería finalmente igualar ambas ecuaciones y obtener el precio de f que es el precio de nuestra opción. (Recordemos que el objetivo era siempre encontrar el precio de la opción):

$$(S_0 u \Delta - f_u) e^{-rT} = S_0 \Delta - f \quad [9]$$

despejando:

$$f = -(S_0 u \Delta - f_u) e^{-rT} + S_0 \Delta \quad [10]$$

Este método lógicamente se puede complicar. Solo hemos explicado lo que ocurre en lo que consideramos como 1 unidad de tiempo, es decir, el activo subyacente solo ha sufrido un cambio de precio el que iría del momento t_0 a t_1 , sin embargo en cálculos

más completos se pueden dar árboles binomiales para muchos más periodos quedando

¹⁰ Recordamos que según las bases de las matemáticas financieras para descontar un valor al momento actual hay que tener en cuenta la tasa de descuento y el tiempo.

el diagrama en forma de árbol en horizontal, de ahí el nombre. Para este modelo no hemos tenido en cuenta la naturaleza de la opción (sea americana o europea) ya que este es un método que no tiene en cuenta la trayectoria anterior del activo subyacente.

El método del Árbol Binomial Cox- Ross- Rubinstein puede llegar a ser demasiado simple para según que tipo de opciones. Otro de los aspectos negativos de este método es que solo se tiene en cuenta dos variaciones de los precios en el primer periodo de tiempo (un método más avanzado como un árbol trinomial recombinante puede asumir una tercera trayectoria, que el precio del activo subyacente no varia) que normalmente se establecen teniendo en cuenta la volatilidad del activo. Este es otro punto en el que este método simplifica demasiado el comportamiento real del precio de los activos.

Es por este problema y por el de no tener en cuenta la trayectoria anterior del activo subyacente por la que no es el método ideal para valorar una opción una vez se entra en niveles más avanzados de matemática financiera y por lo que se consideran a los métodos de Black – Scholes y Longstaff – Schartz como más certeros a la hora de obtener el precio de una opción.

3.2. Black- Scholes

El Modelo Black-Scholes es uno de los más usados actualmente en la valoración de opciones y ha sido uno de los más influyentes¹¹ cuando Fischer Black y Myron Scholes lo propusieron en 1973. Fue en este año cuando ambos economistas publicaron "*The Pricing of Options and Corporate Liabilities*" en la revista académica *Journal of Political Economy*. Posteriormente Robert C. Merton publicó un artículo expandiendo el modelo e introdujo el concepto de '*Black- Scholes Option Pricing Model*'. Más tarde

derivaron la formula ahora conocida como la ecuación Black-Scholes que en adelante

¹¹ La fórmula conllevó una revolución en el intercambio de opciones mundial y sirvió de ayuda para catapultar al CBOE dándole una base científica y legitimándolo (MacKenzie, 2006)

expondremos y explicaremos. Vamos a basarnos principalmente en el artículo de Black, Scholes y en el de Merton para explicar este método.

Scholes y Merton recibieron en 1997 el premio nobel de Economía por: *“La creación de un nuevo método para determinar el valor de derivados”*. Fischer Black no pudo recibir dicho premio ya que falleció en 1995 pero fue reconocido como principal colaborador. Se le reconoció además a su metodología haber facilitado el camino para la valoración económica en muchas áreas, haber generado nuevos tipos de instrumentos financieros y facilitado una mejor administración del riesgo eficientemente en la sociedad¹².

3.2.1 Ecuación en derivadas parciales

El método del árbol binomial es muy cómodo para obtener un valor de la opción aproximado, en ocasiones demasiado impreciso como hemos explicado en el apartado anterior. Sin embargo para acercarnos más a la realidad debemos entender el comportamiento del activo subyacente, que al fin y al cabo tiene gran parte de culpa de lo que ocurra con la opción de este. En este intento de entender la realidad del activo subyacente Black y Scholes en su modelo asumen que dicho activo sigue un movimiento aleatorio que es conocido como proceso browniano¹³, este proceso es ampliamente usado en estadística cuando se estudia funciones de carácter aleatorio (tratar de explicar el proceso browniano en profundidad nos llevaría a campos alejados de nuestro estudio como la física o matemática avanzada). Black y Scholes asumen para su método en *"The Pricing of Options and Corporate Liabilities"* como ellos mismos dicen, unas condiciones del mercado perfectas.

Algunas de estas condiciones son las siguientes:

¹² Conferencia de prensa de *The Royal Swedish Academy of Sciences* (14 de Octubre de 1997. Estocolmo, Suecia)

¹³ El botánico Brown formuló dicho proceso en 1827 tras observar el movimiento aleatorio que realizan ciertas partículas en un fluido. Más tarde Einstein formuló la ecuación correspondiente a dicho movimiento aleatorio.

- La tasa de interés a corto plazo es conocida y constante
- El activo no paga dividendos.
- No existen costes asociados con vender o comprar la opción o el activo subyacente.
- Es posible pedir o prestar cualquier cantidad de dinero, incluso fraccional, a la tasa libre de riesgo
- Es posible comprar o vender cualquier cantidad del activo subyacente o *stock*, incluso fraccional (esto incluye adquirir una posición corta).
- De nuevo, no existe arbitraje.

Bajo estas condiciones ideales del mercado, el precio de la opción solo dependerá del tiempo de esta y del activo subyacente, variables que son constantes.

El proceso real que sigue el subyacente ,mencionado anteriormente, en un mercado de condiciones perfectas como este, sigue el modelo de la siguiente ecuación diferencial:

$$dS = S\mu_s dt + S\sigma_s dW \quad [11]$$

Dónde:

- W Es un proceso de *Wiener* estándar.
- $W \sim \sqrt{dt} N(0,1)$ Es decir, una distribución normal con media cero y desviación típica $\sqrt{dt}$.
- μ_s Representa el retorno esperado del activo con riesgo.
- σ_s La desviación típica del retorno.
- dS Hace referencia a la diferencial de S , del *stock Price*, es decir, la variación del activo subyacente.

- dt Es la diferencial de t , que representa la variación del tiempo.
- dW Es la diferencial de W , o la variación del proceso de *Wiener* estándar.

Como ya mencionado también, la opción dependerá de su activo subyacente y del tiempo, así que una *put option*, por ejemplo, la representaremos de la siguiente manera:

$$P(S_t, t) \text{ ó } P \quad [12]$$

Por definición de una opción de venta o *put option* cuando el *strike price* sea mayor que el *stock price* lo más seguro es que la ejercitemos y por lo tanto obtendremos lo que recibimos (*strike Price*) menos lo que tenemos que pagar para poseer el activo (*stock Price*). Si por el contrario el *strike Price* es inferior al *stock Price*, no ejercitaremos la opción y por tanto expirará sin darnos ningún valor. Esta cualidad de la *put option* la podemos representar de la siguiente manera:

$$P(S_t, t) = \max(K - S_t, 0) \quad [13]$$

Al igual que con el método del árbol binomial, Black y Scholes en su artículo “*The Pricing of Options and Corporate Liabilities*” entendieron que para hallar el precio de una opción tenían que construir una cartera libre de riesgo con una opción y al menos un activo subyacente:

$$V_t = P(S_t, t) - \Delta_t S_t \quad [14]$$

La variación del precio de nuestra cartera vendrá entonces dada por la siguiente ecuación:

$$dV_t = dP(S_t, t) - \Delta_t dS_t \quad [15]$$

A continuación veremos los pasos realizados por Black y Scholes en su artículo para obtener la ecuación en derivadas parciales Black Scholes. Trataremos de explicar los pasos de la forma más fácil posible sin entrar en demasiado detalle matemático ya que eso nos alejaría de nuestro propósito.

El primer paso a realizar tras la obtención de la ecuación de variación del precio de la cartera consiste en aplicar el *lema de Itô* (Explicaremos de forma breve este concepto para no alejarnos demasiado del tema).

El *lema de Itô* dice que si tenemos un proceso modelado con un proceso estocástico (Contiene la variable de *Wiener*, W) y un proceso matemático normal pero dependiente del tiempo, podremos pasar a llamar este proceso como un *proceso de Itô* como es el caso de nuestra ecuación [11] donde la parte izquierda de la ecuación es un proceso matemático con dos variables siendo una el tiempo, y la parte derecha es un proceso estocástico.

El *lema de Itô* sigue, si tenemos cualquiera función dependiente de las mismas variables que nuestro *proceso de Itô* anterior, es decir dependiente de S en nuestro caso y del tiempo; Entonces podremos pasar a decir que la nueva función se comporta de la siguiente manera:

$$dP = \left(\frac{\partial P}{\partial S} \mu S_t + \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} \sigma^2 S_t^2 \right) dt + \frac{\partial P}{\partial S} \sigma S_t dW \quad [16]$$

siendo P realmente $P(S_t, t)$, y obtenemos ahora dP que es un nuevo *proceso de Itô* al constar de un proceso matemático que depende del tiempo y un proceso estocástico que depende de la variable de *Wiener*.

El siguiente paso es realizar una serie de ajustes necesarios¹⁴ que nos eliminan la segunda parte de la ecuación, la asociada a un movimiento aleatorio y con la que no podríamos trabajar más adelante. El resultado de estas operaciones es una ecuación del precio de la *put* mucho más simple y manejable:

$$dP = \frac{\partial P}{\partial S} dS_t + \frac{\partial P}{\partial t} dt + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} S_t^2 dt \quad [17]$$

Para eliminar el riesgo de la cartera elegimos que la variación del tiempo es la ecuación diferencial de la *put* y la *call*:

$$\Delta_t \equiv \frac{\partial P}{\partial S} \quad [18]$$

Reemplazando ahora [18] en la ecuación de la variación del precio de nuestra cartera [15] y despejando obtenemos:

$$dV_t = \left(\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} S_t^2 \right) dt \quad [19]$$

La cartera V_t está localmente libre de riesgo como hemos asumido, y por tanto su precio evoluciona teniendo en cuenta la tasa de interés libre que hemos llamado r :

$$dV_t = V_t r dt \quad [20]$$

La ecuación de derivadas parciales por el método Black-Scholes se obtiene tras sustituir dV_t y V_t de la ecuación [20] con las formulas [19] y [14] respectivamente.

Obtendríamos:

¹⁴ Entre otros procesos se usa la teoría de la media que junto con la naturaleza de los procesos estocásticos nos ayuda a descartar esa parte. No es posible explicar estas operaciones matemáticas sin desarrollar a fondo los procesos estocásticos, lo cual se aleja de nuestro enfoque del trabajo.

$$\left(\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} S_t^2 \right) dt = (P - \Delta_t S_t) r dt \quad [21]$$

que si sustituimos Δ_t por [18] y despejamos, obtenemos una ecuación más simple y la definitiva ecuación por derivadas parciales de Black-Scholes:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial S} S_t r + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} S_t^2 = rP \quad [22]$$

Obtendríamos así el precio de nuestra *put*. Obviamente este modelo se puede complicar mucho dependiendo de la opción, y apenas lo hemos explicado por encima dada la compleja base científica y matemática característica de los modelos estocásticos que por ahora se alejan de nuestro área de estudio. Lo primordial es entender que es un método valido para valorar opciones, pero que no se usa comúnmente debido a su dificultad.

La “*Black-Scholes-Merton pricing formula*” es sin duda la solución más sencilla a la ecuación en derivadas parciales de Black-Scholes y esta mucho más extendida. A continuación expondremos la formula.

3.2.2. Black- Scholes-Merton Pricing Formula

La “*Black-Scholes-Merton pricing formula*” nos ayuda a calcular el precio de una opción europea *put* o *call*. El precio que obtengamos de esta manera será, por supuesto, muy similar al que obtendríamos a partir de la ecuación con derivadas parciales explicada anteriormente.

La fórmula para la *call option* es la siguiente:

$$c = S_0 N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2) \quad [23]$$

Y siendo la formula para la *put option*:

$$p = K e^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1) \quad [24]$$

Dónde:

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r + \sigma^2/2) T}{\sigma \sqrt{T}} \quad [25]$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_0/K) + (r - \sigma^2/2) T}{\sigma \sqrt{T}} \quad [26]$$

Siendo $N(x)$ la manera en la que se representa la probabilidad acumulada de una distribución estandarizada que sigue la forma de una normal (0,1).

Gráficamente la normal queda representada de la siguiente manera:



Fuente: *Options Futures and Other Derivatives* (Hull, 1997)

Dónde el área sombreada es el área sombreada corresponde a $N(x)$.

3.3. Algoritmo de Longstaff-Schwartz

Tras los métodos del árbol binomial y de Black-Scholes llegamos al algoritmo propuesto por Francis A. Longstaff y Eduardo S. Schwartz en 2001 en su artículo '*Valuing American Options by Simulation: A Simple Least Square Approach*'. El algoritmo, conocido también como *Least Square Monte Carlo* (LSM), nos sirve para hallar la estrategia de ejercicio óptimo con opciones de tipo americana que como sabemos otorgan libertad a la hora de elegir el momento de ejercicio y de ahí la dificultad con este tipo de derivados. Vamos a basarnos principalmente en el artículo de Longstaff y Schartz, apoyándonos también en otros trabajos¹⁵ para explicar este método de forma que se entiendan con claridad aquellas partes que Longstaff y Schartz apenas mencionan (como la regresión por mínimos cuadrados).

Este método a diferencia de Black-Scholes se puede aplicar a instrumentos exóticos como las opciones asiáticas, de manera relativamente simple. Y en cuanto al valor añadido que supone frente al árbol binomial cabe mencionar que es un método aplicable cuando la opción sigue un movimiento acorde a la trayectoria del activo subyacente.

Para aplicar este algoritmo aproximamos una opción americana a través de una opción bermuda asumiendo un elevado número de momentos de ejercicio, N suficientemente grande.

¹⁵ Véase Bibliografía

3.3.1. Conceptos Matemáticos y probabilísticos previos

Se asume un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ con un horizonte de tiempo finito representado por T .

Ω es el conjunto de todas las posibles realizaciones de una economía propiamente estocástica entre los instantes de tiempo 0 y T y siendo el elemento ω la representación de cada trayectoria simulada en Ω .

$\mathcal{F}$ es la σ -álgebra de los elementos distinguibles en T , es decir las trayectorias del mercado. Siendo P por ultimo la medida de probabilidad definida sobre los elementos de $\mathcal{F}$.

Definimos $\mathcal{F} = \{ \mathcal{F}_t, t \in [0, T] \}$ como la filtración generada por los procesos del precio de los activos en la economía, es decir la ‘información del mercado’ hasta el momento t . Siendo $\mathcal{F}_0$ la σ -álgebra en el instante inicial cuando no hay información suficiente para discriminar las futuras trayectorias, y $\mathcal{F}_T$ la σ -álgebra formada por todos los conjuntos de trayectorias que se pueden discriminar en T .

Cada trayectoria de ω generará un flujo de caja distinto siempre condicionada a que la opción no haya sido ejercitada con anterioridad. Representaremos dicho flujo de caja como $C(\omega, s; t, T)$ siendo s el momento entre t y T hasta el que llegamos con nuestra estrategia óptima.

Como ya hemos dicho antes para aplicar el algoritmo LSM deberemos aproximarlos a partir de una opción bermuda que puede ejercitarse en N instantes en el tiempo:

$$0 < t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_N = T$$

Y denotando la decisión óptima de ejercicio en el tiempo como t_i . Cuando N es suficientemente grande entendemos que el precio de una opción bermuda se acerca mucho al de una americana ya que así lo hace su comportamiento también.

El poseedor de una opción decide ejercer en el momento T si la opción está *in the money*, produciendo su ejercicio inmediato unos beneficios, y decide dejarla expirar sin ejercerla si se encuentra *out of the money*, no hay beneficios. No obstante, en el momento $t < T$ la situación es más complicada, decidirá ejercer inmediatamente o esperará hasta el siguiente momento de posible ejercicio donde volverá a plantearse. Decidirá entonces ejercer en $t < T$ si el valor del ejercicio inmediato es igual o superior al de los futuros flujos de caja esperados, descontados al momento t , obtenidos por continuar. En el instante t el flujo de caja obtenido por ejercitar la opción es conocido, sin embargo los flujos de caja futuros en caso de esperar son desconocidos.

Asumiendo el paradigma esencial de no arbitraje, se encuentra que el valor actual de los posibles pagos futuros es igual al valor esperado de los futuros flujos de caja descontados a la tasa libre de riesgo con respecto a Q , siendo Q la nueva medida de probabilidad asumida bajo el paradigma de no arbitraje ($Q \sim P$).

El valor de continuar en el momento t_k se calcula como la suma de los precios actuales de los siguientes pagos realizados a partir de t_k , y se denota de la siguiente manera:

$$F(w, t_k) = E^Q \left(\sum_{j=k+1}^k \exp \left(- \int_{t_k}^{t_j} r(w, s) ds \right) C(w, t_j; t_k, T) \mid \mathcal{F}_{t_k} \right) \quad [27]$$

Este cálculo se realiza teniendo en cuenta la información condicionada del mercado $\mathcal{F}_{t_k}$ en el instante t_k .

Y donde $r(\omega, s)$ es la posible tasa de descuento libre de riesgo en s y para la trayectoria determinada ω .

3.3.2. Introducción del algoritmo

La característica principal del algoritmo de Longstaff Scharz es que se implementa hacia atrás en el tiempo ya que los flujos de caja de la opción se definen de forma recursiva.

Otro de los elementos clave del algoritmo de Longstaff Scharz es la utilización de una regresión por mínimos cuadrados para aproximar el valor de la esperanza condicionada de aquellos caminos que estén *in the money* (tiene valor intrínseco), los valores que están *out of the money* o *at the money* (no tienen valor intrínseco) no se tendrán en cuenta para realizar la esperanza condicionada ya que no aportan información adicional y solo conseguirían distorsionar el valor final.

En cuanto al movimiento que sigue el activo subyacente que nos servirá para comprender su comportamiento y para simular los distintos caminos que puede tomar la opción, se toma el movimiento browniano geométrico ya definido anteriormente para Black-Scholes:

$$dS = S \mu_s dt + S \sigma_s dW \quad [28]$$

En t_k se asume que $F(\omega, t_{k-1})$ puede representarse como una combinación lineal base de un conjunto numerable. Una buena combinación base que se ajusta bien a la opción es la familia de polinomios de grado igual o superior a 2. Se pueden también coger otras familias de polinomios más complejos como la familia de polinomios de *Laguerre*.

Sin embargo, Los polinomios de grado 2 se ajustan suficientemente bien al *pay-off* que se obtiene de una opción cuyo subyacente sigue un movimiento geométrico browniano como es el nuestro, y a parte simplificara mucho los cálculos más adelante.

3.3.3. El Algoritmo

El primer paso para valorar una opción según el Longstaff Schartz es determinar la función base que vamos a utilizar, por ejemplo una familia de polinomios de grado 2 o superior.

Necesitaremos posteriormente la matriz de las trayectorias del subyacente $S(n_c, n_p)$ que tendremos que simular. Donde n_c es el número de caminos simulados y n_p el numero de pasos temporales.

En el proceso de simulación seguiremos un movimiento geométrico browniano asumido para el movimiento del activo subyacente y así obtendremos la siguiente matriz:

$$S = \begin{pmatrix} S_0 & S_1(w_1) & \cdots & S_{n_p}(w_1) \\ S_0 & S_1(w_2) & \cdots & S_{n_p}(w_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_0 & S_1(w_{n_c}) & \cdots & S_{n_p}(w_{n_c}) \end{pmatrix} \quad [29]$$

El siguiente paso que tendríamos que realizar es calcular la matriz de flujos de caja en el último instante de tiempo, es decir en $t = T$, ya que el algoritmo se implementara recursivamente. En este momento podemos llegar a dos matrices de flujo de caja dependiendo de si la opción que estamos valorando es una *put option* o una *call option*:

$$\text{Matriz de flujo de caja de una call option } C_{\text{Call}} = \begin{pmatrix} \max(S_{n_p}(w_1) - K; 0) & n_p \\ \max(S_{n_p}(w_2) - K; 0) & n_p \\ \vdots & \vdots \\ \max(S_{n_p}(w_{n_c}) - K; 0) & n_p \end{pmatrix} [30]$$

$$\text{Matriz de flujo de caja de una put option } C_{\text{Put}} = \begin{pmatrix} \max(K - S_{n_p}(w_1); 0) & n_p \\ \max(K - S_{n_p}(w_2); 0) & n_p \\ \vdots & \vdots \\ \max(K - S_{n_p}(w_{n_c}); 0) & n_p \end{pmatrix} [31]$$

Una vez tenemos la matriz de flujos de caja en T cogemos los valores de la opción en su momento anterior, t_i . Realizaremos una matriz con los caminos que estén *in the money* ya que son los que posteriormente vamos a comparar y son los únicos que nos van a aportar información relevante. La matriz formada por los valores de los caminos que estén *in the money* en t_i la multiplicaremos por la familia de polinomios elegidos y la denotaremos como X .

Una vez tenemos esta matriz X tenemos que calcular la matriz que denotaremos como Y . Para generar la matriz Y tenemos que coger los valores en T que se encuentran *in the money* en t_i que es con los que los vamos a comparar. Una vez tenemos estos valores, los descontamos hasta t_i usando la tasa libre de riesgo, de tal manera que Y esta formado por los valores de los caminos útiles descontados hasta t_i .

Estas matrices X e Y son necesarias para calcular el valor esperado por continuar $F_{t_i}(x)$ que compararemos con lo ocurrido en t_i y nos servirá para tomar una decisión en t_i sobre si ejercer la opción o continuar sin ejercer.

El valor esperado por continuar es aproximadamente igual a $E[Y|X]$, es decir a la esperanza condicionada de Y sobre X . Dicha esperanza se podría calcular de muchas

formas pero el método que usan Longstaff y Schartz a la hora de definir su algoritmo es un cálculo por mínimos cuadrados.

El método de regresión por mínimos cuadrados nos dice que dada una variable aleatoria y , se asume que esta variable puede depender de otras variables aleatorias $z_1 \dots z_k$ llamadas variables de regresión. El valor de la variable y puede escribirse de la siguiente manera:

$$y_i = b_0 + \sum_{j=1}^k b_j z_j + e \quad [32]$$

Siendo e el error que se comete en las predicciones. El objetivo es calcular la variable desconocida b y para ello necesitamos que el error que se cometa sea el mínimo posible para nuestras variables. Dicho error también es conocido como el error residual.

Para nuestros cálculos posteriores es más fácil reconsiderar esta ocasión de forma matricial, obteniendo:

$$\vec{y} = Z\vec{b} + \vec{e} \quad [32]$$

Al aplicar el método de mínimos cuadrados lo que hacemos es elevar el error al cuadrado de forma que se minimice la expresión y encontrar el vector $\vec{b}$ desconocido:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m e_i^2 &= (\vec{y} - Z\vec{b})^t (\vec{y} - Z\vec{b}) = \vec{y}^t \vec{y} - 2\vec{b}^t Z^t \vec{y} + \vec{b}^t Z^t Z \vec{b} = \\ &= -2Z^t \vec{y} + 2Z^t Z \vec{b} \end{aligned} \quad [33]$$

Igualando a 0 obtenemos:

$$\vec{b} = (\mathcal{Z}^t \mathcal{Z})^{-1} \mathcal{Z}^t \vec{y} \quad [34]$$

En nuestro caso la regresión múltiple se trata de una regresión polinomial ya que la variable independiente $\mathcal{Z}$ depende de forma polinomial de Y , ya que habíamos asociado al principio del algoritmo una familia de polinomios. Entonces si por ejemplo hubiéramos asociado desde el principio una familia de polinomios de grado 2 la matriz independiente $\mathcal{Z}$ será la siguiente:

$$\mathcal{Z} = \begin{pmatrix} L_0(x_1) & L_1(x_1) & L_2(x_1) \\ L_0(x_2) & L_1(x_2) & L_2(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ L_0(x_n) & L_1(x_n) & L_2(x_n) \end{pmatrix} \quad [35]$$

Los valores $x_1, x_2, \dots, x_n$ son valores que se encuentran en nuestra matriz X generada anteriormente.

Como hemos dicho existen muchas formas de obtener el valor esperado por continuar, pero la manera empleada por Longstaff Schartz es mediante el cálculo por regresión de mínimos cuadrados, y así obtenemos como hemos demostrado que el valor por continuar es:

$$F_{t_i}(x) \approx E[Y|X] = (\mathcal{Z}^t \mathcal{Z})^{-1} \mathcal{Z}^t \vec{y} \quad [36]$$

Una vez tenemos la matriz del valor esperado por continuar, es decir no ejercer en t_i , tenemos que construir la matriz con la que la vamos a construir que se corresponde al valor intrínseco de la opción en t_i .

Para construir dicha matriz de valor intrínseco solo tendremos que obtener el valor de cada camino *in the money* en t_i de acuerdo a la formula del beneficio según sea una *call option* o una *put option*. Siendo para una *call option* y para una *put option* las siguiente matrices:

$$Call\ option\ v.\ intr(t) = \begin{pmatrix} \max(S_{t_i}(w_1) - K; 0) \\ \max(S_{t_i}(w_2) - K; 0) \\ \vdots \\ \max(S_{t_i}(w_{n_c}) - K; 0) \end{pmatrix} \quad [35]$$

$$Put\ option\ v.\ intr(t) = \begin{pmatrix} \max(K - S_{t_i}(w_1); 0) \\ \max(K - S_{t_i}(w_2); 0) \\ \vdots \\ \max(K - S_{t_i}(w_{n_c}); 0) \end{pmatrix} \quad [36]$$

El ultimo paso consiste en tomar una decisión entre al valor intrínseco por ejercer en t y el valor esperado por continuar. Se compara cada camino con su correspondiente, es decir ω_1 con ω_1 y así sucesivamente. Si $v.intr(t_i)$ es mayor que $F_{t_i}(x)$ entonces es recomendable ejercer en t_i , si por el contrario $F_{t_i}(x)$ es mayor que $v.intr(t_i)$ preferimos mantener la opción sin ejercerla.

Si tuviéramos un momento de ejercicio anterior a t_i , llámese t_{i-1} , tendríamos que continuar con la regresión. En este caso como hemos realizado anteriormente tendríamos que generar de nuevo las matrices X e Y.

El proceso de obtener las matrices X e Y se repite con la única complicación que esta vez hay que tener en cuenta las decisiones tomadas en el proceso anterior.

Una vez con nuestra nuevas matrices X e Y para t_{i-1} seguiríamos como ya hemos explicado con antelación calculando la esperanza condicionada y formando las matrices de valor esperado por continuar y valor intrínseco en t_{i-1} para poder tomar decisiones en este momento de ejercicio sobre que hacer con la opción.

Hay que continuar realizando este proceso tantas veces como momentos de decisión de ejercicio tenga la opción, hasta llegar al momento $t = 1$ que se corresponderá con nuestro momento actual. Una vez realizado cada momento de decisión, la matriz de decisión se va actualizando en caso de obtener momentos de decisión más tempranos según avanzamos con el algoritmo. De tal manera que una vez llegada a $t = 1$ tendremos una matriz definitiva de decisión que nos indicará el valor de la opción óptimo para cada camino de esta, y el instante de ejercicio donde se alcanza este valor óptimo.

El último paso para obtener el precio de la opción según el algoritmo de Longstaff Schartz es descontar cada valor de cada camino de la acción a la tasa libre de riesgo, y descontar cada uno el número de periodos necesario hasta llegar a $t = 1$. De esta manera obtendremos el valor actual de esos valores óptimos. Y por último habría que realizar una media con los valores actuales de todos esos caminos (Si hay que tener en cuenta aquellos caminos en los que la acción expire sin ejercerse y por tanto el valor sea 0):

$$\text{Precio} = \sum_{i=1}^{nc} C(i, 1) e^{-r C(i, 2)} \quad [37]$$

3.3.4. Ejemplo numérico

La mejor manera de entender este método de valoración es verlo aplicado a un caso real, es por ello por lo que vamos a desarrollar el siguiente ejemplo numérico. Hemos tenido en cuenta los datos del ejemplo propuesto por Longaff y Schartz en su artículo, ampliando los cálculos y explicaciones en aquellas que obvian, y llegando a la misma solución que estos.

Supongamos que queremos valorar una opción americana de tipo *put* donde el subyacente de dicha opción bajo una premisa neutral al riesgo sigue el siguiente movimiento estocástico browniano:

$$dS = S \mu_s dt + S \sigma_s dW$$

o lo que es lo mismo:

$$\frac{dS}{S} = r dt + \sigma dW$$

Donde W es un movimiento browniano estándar, r es la tasa de interés constante y σ es la volatilidad. Para cada trayectoria del mercado ω y cada instante de tiempo t , el precio del activo subyacente será:

$$S_t(\omega)$$

La opción que vamos a valorar se puede ejercer en tres periodos ($n_p = 3$), el precio inicial del activo subyacente es $S_0 = 1$, la tasa libre de riesgo es $r = 6\%$, y su precio de ejercicio es $k = 1,1$. Por último, consideramos que el activo subyacente no paga dividendos. Vamos a utilizar 8 caminos de simulación para el precio de la opción:

Como se ha mencionado anteriormente una opción de tipo americana se puede ejercer en cualquier momento a lo largo de la vida de la misma. Dicha opción podrá aproximarse a través de una opción de tipo *bermuda* con las mismas características pero ejerciéndose en n_p instantes discretos.

Ahora elegiremos la función base que se ajuste al movimiento de nuestro subyacente, que será la familia de polinomios de grado 2:

$$L_0 = 1$$

$$L_1 = x$$

$$L_2 = x^2$$

En primer lugar se realiza una simulación¹⁶ para obtener la matriz con los 8 caminos en los n_{p+1} momentos de tiempo, incluyendo el momento actual y los momentos de ejercicio:

$$S(\omega, t) = \begin{pmatrix} 1 & 1,09 & 1,08 & 1,34 \\ 1 & 1,16 & 1,26 & 1,54 \\ 1 & 1,22 & 1,07 & 1,03 \\ 1 & 0,93 & 0,97 & 0,92 \\ 1 & 1,11 & 1,56 & 1,52 \\ 1 & 0,76 & 0,77 & 0,90 \\ 1 & 0,92 & 0,84 & 1,01 \\ 1 & 0,88 & 1,22 & 1,34 \end{pmatrix}$$

A partir de la matriz $S(\omega, t)$ hallamos la matriz de flujo en el instante de vencimiento $T=3$, que al ser una *put option* se comporta de la siguiente manera $C(\omega, T) = \max\{K - S(\omega, T); 0\}$:

$$C = \begin{pmatrix} \max\{1,1 - 1,34; 0\} & 3 \\ \max\{1,1 - 1,54; 0\} & 3 \\ \max\{1,1 - 1,03; 0\} & 3 \\ \max\{1,1 - 0,92; 0\} & 3 \\ \max\{1,1 - 1,52; 0\} & 3 \\ \max\{1,1 - 0,90; 0\} & 3 \\ \max\{1,1 - 1,01; 0\} & 3 \\ \max\{1,1 - 1,34; 0\} & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 3 \\ 0,07 & 3 \\ 0,18 & 3 \\ 0 & 3 \\ 0,20 & 3 \\ 0,09 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

¹⁶ Tomamos los valores de la simulación, como ya hemos dicho, empleados por Longstaff y Schartz en su artículo: *Valuing American Options by simulation. A Simple Least-Squares Approach*. Para un ejemplo propio realizado en el 4. el programa MatLab nos generará 1000 trayectorias, por defecto, siguiendo un movimiento browniano geométrico.

La decisión de si ejercer o no debemos realizarla un instante antes del instante de vencimiento, $T = 3$, es decir, en $t = 2$. Para ello necesitamos saber el valor esperado por continuar, F , que calcularemos por mínimos cuadrados una vez tengamos las matrices X e Y .

X es el valor del activo subyacente en $t = 2$, considerando solo los en los que el pago es positivo (opción *in the money*):

$$X(:, t) = S(:, t)$$

Y son los flujos de caja de los mismos caminos descontados a $t = 2$:

$$Y(:, t) = e^{-r} C(:, t)$$

Trayectorias	$X(\omega, 2)$	$Y(\omega, 2)$
1	1,08	$0 \times e^{-0,06} = 0$
2	-----	-----
3	1,07	$0,07 \times e^{-0,06} = 0,0659$
4	0,97	$0,18 \times e^{-0,06} = 0,1695$
5	-----	-----
6	0,77	$0,20 \times e^{-0,06} = 0,1883$
7	0,84	$0,09 \times e^{-0,06} = 0,847$
8	-----	-----

Fuente: Elaboración propia basado en *Valuing American Options by simulation. A Simple Least-Squares Approach*.
(Longstaff, Schartz. 2001)

Ahora tendríamos que hallar la esperanza condicionada de Y sobre X , $E[Y|X]$ que como hemos dicho se aproximará mucho al valor esperado por continuar sin ejercer $F(t)$.

Según lo expuesto en el apartado 3.3.3. , por mínimos cuadrados:

$$E[Y|X] = (Z^t Z)^{-1} Z^t \vec{y}$$

Siendo:

$$Z = \begin{pmatrix} L_0(x_1) & L_1(x_1) & L_2(x_1) \\ L_0(x_2) & L_1(x_2) & L_2(x_2) \\ L_0(x_3) & L_1(x_3) & L_2(x_3) \\ L_0(x_4) & L_1(x_4) & L_2(x_4) \\ L_0(x_5) & L_1(x_5) & L_2(x_5) \\ L_0(x_6) & L_1(x_6) & L_2(x_6) \\ L_0(x_7) & L_1(x_7) & L_2(x_7) \\ L_0(x_8) & L_1(x_8) & L_2(x_8) \end{pmatrix}$$

El resultado nos da una matriz que multiplicaremos por la función base formada por nuestra familia de polinomios de grado 2:

$$E[Y|X] = -1,11 L_0(x) + 3,10 L_1(x) - 1,88 L_2(x)$$

Ahora teniendo en cuenta los valores en $t=2$, sustituimos en la ecuación anterior para obtener $F(2)$ y lo comparamos con el valor intrínseco de $t=2$ y tomamos una decisión acerca del ejercicio en $t=2$, escogiendo el valor óptimo que es aquel que sea mayor:

Trayectoria	V.intr (2)	F(2)	Decisión en $t = 2$
1	$1,1 - 1,08 = 0,02$	0,0382	No ejercemos
2	-----	-----	-----
3	$1,1 - 1,07 = 0,03$	0,0478	No ejercemos
4	$1,1 - 0,97 = 0,13$	0,1223	Si ejercemos
5	-----	-----	-----
6	$1,1 - 0,77 = 0,33$	0,1582	Si ejercemos
7	$1,1 - 0,84 = 0,26$	0,1628	Si ejercemos
8	-----	-----	-----

Fuente: Elaboración propia basado en *Valuing American Options by simulation. A Simple Least-Squares Approach*.

(Longstaff, Schartz. 2001)

Actualizaremos ahora la matriz de caja con los momentos que es óptimo ejercer y su momento exacto así tendremos constancia de las decisiones que vamos tomando:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 3 \\ 0,07 & 3 \\ 0,13 & 2 \\ 0 & 3 \\ 0,33 & 2 \\ 0,26 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Una vez tenemos ya las decisiones tomadas en $t=2$ tendremos que pasar a repetir el procedimiento en el momento anterior, $t=1$, para ello deberemos volver a calcular las nuevas matrices X e Y , y volver a comparar los resultados de ejercer o esperar sin ejercer:

Trayectorias	$X(\omega, 1)$	$Y(\omega, 1)$
1	1,09	$0 \times e^{-0,06 \times 2} = 0$
2	-----	-----
3	-----	-----
4	0,93	$0,13 \times e^{-0,06} = 0,1224$
5	-----	-----
6	0,76	$0,33 \times e^{-0,06} = 0,3107$
7	0,92	$0,26 \times e^{-0,06} = 0,2449$
8	0,82	$0 \times e^{-0,06 \times 2} = 0$

Fuente: Elaboración propia basado en *Valuing American Options by simulation. A Simple Least-Squares Approach*.
(Longstaff, Scharz. 2001)

Lo que descontamos para obtener la matriz Y son los valores óptimos extraídos de la matriz de decisión anterior, vemos como en la trayectoria 1 y en la trayectoria 8 descontamos 2 periodos ya que estos valores se corresponden con el instante $t=3 \rightarrow T$ y se descuenta a $t=1$ (La única trayectoria con valor en T , la tercera, no la hemos usado ya que no se encontraba *in the money* para $X, t=1$).

Repetimos el mismo proceso de obtención de $E[Y|X]$ por mínimos cuadrados realizando las operaciones con nuestras nuevas matrices X e Y :

$$E[Y|X] = 2,12 L_0(x) - 3,47 L_1(x) - 1,41 L_2(x)$$

Ahora sustituimos los valores de $t=1$ en dicha ecuación para obtener $F(1)$ que volvemos a comparar con el valor intrínseco en $t=1$ y tomamos la decisión oportuna para cada trayectoria en este momento:

Trayectoria	V.intr (1)	F(1)	Decisión en $t=1$
1	$1,1 - 1,09 = 0,01$	0,1401	No ejercemos
2	-----	-----	-----
3	-----	-----	-----
4	$1,1 - 0,93 = 0,17$	0,1132	Si ejercemos
5	-----	-----	-----
6	$1,1 - 0,76 = 0,34$	0,2977	Si ejercemos
7	$1,1 - 0,92 = 0,18$	0,1218	Si ejercemos
8	$1,1 - 0,88 = 0,22$	0,1590	Si ejercemos

Fuente: Elaboración propia basado en *Valuing American Options by simulation. A Simple Least-Squares Approach*.
(Longstaff, Schartz. 2001)

Ahora actualizaríamos la matriz de flujos de caja con su momento de decisión, prevaleciendo siempre el momento que sea anterior, es decir, si nos sale que ejercemos

en $t=3$ y después obtenemos que ejercemos en $t=1$, obviamente prevalece la decisión de ejercer en $t=1$ ya que hemos recogido toda la información posterior para llegar a esa decisión:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 3 \\ 0,07 & 3 \\ 0,17 & 1 \\ 0 & 3 \\ 0,34 & 1 \\ 0,18 & 1 \\ 0,22 & 1 \end{pmatrix}$$

Una vez tenemos los valores óptimos que toma la opción para cada trayectoria y el instante en el que lo toman, solo nos queda descontar cada valor al momento actual y sacar la media para obtener el precio de la opción:

$$Put\ Option = \frac{e^{-0,06 \times 3}(0 + 0 + 0,07 + 0) + e^{-0,06}(0,17 + 0,34 + 0,18 + 0,22)}{8} = 0,1144$$

4. Comparación de métodos

Para realizar ejercicios más complejos con opciones necesitamos una simulación que contemple un mayor número de trayectorias (no solo 8 como en el ejemplo anterior) para que así arroje unos resultados más fiables.

Para realizar estos ejercicios más complejos tendremos que crear un código que se ajuste a cada modelo en el programa informático Matlab¹⁷.

Analizaremos los resultados obtenidos para unos mismos datos con Black - Scholes, Árbol Binomial de Cox-Ross-Rubinstein y el Algoritmo de Longstaff y Scharztz, de opciones europeas ya que son un tipo de opciones que los 3 métodos pueden resolver sin ninguna complicación.

Las opciones que vamos a comparar son una *call* y una *put*, ambas con el mismo activo subyacente que tiene un precio o *stock price* de 30 €, un precio de ejercicio o *strike Price* de 35 €, y su duración es de 6 meses, del 1 de Enero de 2015 al 1 de Julio del mismo año. Asumimos a parte un interés libre de riesgo del mercado del 5% y una volatilidad del activo subyacente del 25%.

Con estos datos hemos generado los tres códigos¹⁸ para calcular las opciones según los tres métodos y los resultados obtenidos son los siguientes:

¹⁷ Matlab ©, o MATrix LABoratory© es un software matemático desarrollado por MathWorks ©

¹⁸ Códigos Matlab en Anexos

Árbol Binomial de Cox-Ross-Rubinstein ¹⁹:

0.7288 €	Precio <i>Call</i>
4.8646 €	Precio <i>Put</i>

Black-Scholes:

0.7655 €	Precio <i>Call</i>
4.9014 €	Precio <i>Put</i>

Algoritmo Longstaff – Scharztz:

0.6612 €	Precio <i>Call</i>
4.8941 €	Precio <i>Put</i>

Como podemos ver los tres resultados obtenidos tanto para la opción *Call* como para la *Put* son muy similares. Dada la simplicidad de una opción de tipo europea, podemos emplear casi cualquier método para valorarla (No solo los tres explicados en este trabajo) y obtendríamos resultados muy solidos y fiables.

Con opciones europeas sin duda los tres métodos son viables y fáciles de implementar, aunque el método más empleado para este tipo de opciones es la ecuación de Black - Scholes ya que no necesita de ningún tipo de programa especial para resolverse y se calcula muy rápidamente aplicando la formula vista con anterioridad. Remarcaremos que con Black – Scholes nos salen los precios más elevados de los tres métodos (aunque mínimamente).

¹⁹ Representación gráfica en Anexos

Cuando pasamos a hablar de opciones americanas los cálculos y los métodos se complican, para empezar el modelo de Black – Scholes tal y como lo definieron en su día Black, Scholes y Fischer no es compatible con este tipo de opciones (Hay numerosos modelos que implementan el de Black- Scholes partiendo de sus premisas y que si que sirven para opciones americanas como el modelo Roll-Geske-Whaley).

A continuación hemos calculado el valor de una opción *call* y otra *put* con los mismos datos del ejemplo anterior según el algoritmo de Longstaff y Scharzt y el Árbol binomial de Cox-Ross-Rubinstein:

Árbol Binomial de Cox-Ross-Rubinstein:

0.7288 €	Precio <i>Call</i>
5.1835 €	Precio <i>Put</i>

Algoritmo Longstaff – Scharzt:

0.8367 €	Precio <i>Call</i>
5.2199 €	Precio <i>Put</i>

Como podemos comprobar se corrobora lo que dice la teoría, la opción americana siempre es igual o más cara que la opción europea. Podríamos haber calculado también Black – Scholes si asumimos que el subyacente no da dividendos ya que entonces el valor de la americana se asemejaría mucho al de una europea por Black – Scholes, sin embargo actualmente se prefieren usar otros métodos. En cuanto a los resultados obtenidos con Árbol binomial y con Longstaff Scharzt, el más fiable es siempre el que obtengamos con el algoritmo ya que el árbol binomial no tiene en cuenta el movimiento estocástico browniano que sigue el activo subyacente. Sin embargo realizar el algoritmo de Longstaff y Scharzt para opciones americanas supone un alto coste computacional. MatLab calcula por defecto 1000 trayectorias para valorar la opción pero puede ser implementado con el numero de trayectorias deseado (a mayor numero de trayectorias más certera será la valoración), si un banco ,por ejemplo, quiere valorar cada opción

americana, de las miles que negocia, a través de este algoritmo el coste de simulación que esto supone será desmesurado.

Así que entre los tres métodos se prefiere sin lugar a dudas Black – Scholes para europeas, y Árbol Binomial para americanas si no se quiere incurrir en el evitable coste que supone Longstaff Schartz, y si no tenemos en cuenta las posteriores implementaciones de Black - Scholes. No obstante hay ciertas opciones que no pueden ser calculadas ni por Black – Scholes ni por el árbol binomial, como podría ser una acción exótica asiática. Este tipo de opciones depende de un factor más que no contemplan estos dos métodos, la media del precio del activo subyacente durante un periodo de tiempo. Hemos calculado los valores de una *put* y una *call* con los mismos datos del ejemplo anterior tanto como para una asiática que tenga en cuenta la media aritmética del activo subyacente como la media geométrica:

Algoritmo Longstaff – Schartz para Asiática Aritmética:

0.1219 € Precio *Call*

4.7150 € Precio *Put*

Algoritmo Longstaff – Schartz para Asiática Geométrica:

0.1426 € Precio *Call*

4.6546 € Precio *Put*

Por tanto teniendo en cuenta la teoría de cada modelo junto con las dificultades encontradas en MatLab a la hora de resolver cada ejercicio, hemos determinado que métodos son favorables para según que opciones:

	Árbol Binomial de Cox-Ross-Rubinstein	Black - Scholes	Algoritmo de Longstaff y Scharz
Opción Europea	Válido y eficaz aunque preferimos Black – Scholes.	Válido. El más apropiado y más empleado para este tipo de opciones dada su facilidad y su exactitud.	Válido, aunque no muy común ya que no se propuso con este fin y por su alto coste computacional.
Opción Americana	Válido, pero menos eficaz que el algoritmo dado que no tiene en cuenta el movimiento del activo subyacente.	No válido originalmente aunque con posteriores implementaciones pasaría a ser válido y recomendable ²⁰ .	Válido aunque dado su alto coste computacional preferimos el Árbol Binomial u otros métodos.
Opción Exótica (por ejemplo asiática)	Muy complicado de adaptar e impreciso para la mayoría de opciones exóticas entre otras cosas por que no tiene en cuenta el movimiento del activo subyacente.	No válido.	Válido y muy recomendable para este tipo de opciones que incluyen factores que no tienen en cuenta otros métodos.

Fuente: Elaboración propia a partir de los códigos propios generados en MatLab para el ejemplo propuesto.

²⁰ Como explica Robert Geske y Richard Roll en su artículo *On Valuing American Call Options with the Black – Scholes European Formula* (1984), La formula original de Black - Scholes infravaloraba opciones americanas fuertemente *out of the money* y opciones cerca de vencimiento, mientras que sobrevaloraba aquellas fuertemente *in the money*. Investigadores como MacBeth, Rubinstein, Merville y el propio Black han realizado distintas implementaciones a lo largo de los años (se siguen realizando) para poder valorar opciones americanas con este método. Sin embargo hay algunos factores que hacen que el precio de una Americana se aproxime mucho al de una europea, y por lo tanto sirva la formula original, como aquella que no reparta dividendos.

5. Conclusiones

Se podría decir que las opciones son los productos más básicos o sencillos de una serie de productos muy complejos como son los derivados financieros. No obstante, hay mucha literatura escrita sobre ellas y los métodos para valorarlas.

En este trabajo hemos querido aproximar estos productos y tres de sus principales métodos de valoración a un público más general, mediante una explicación exhaustiva partiendo de la base y finalizando con el desarrollo de unos códigos en MatLab para que se pueda apreciar los resultados que se obtienen de cada método para un ejemplo concreto y las ventajas y desventajas de cada uno.

En la primera parte del trabajo se ha explicado la naturaleza de estos productos financieros, así como sus características y clases, que nos servirían más adelante para comprender los métodos. Después hemos abordado los métodos propuestos desde un enfoque teórico desarrollando paso a paso toda su formulación. Este proceso ayuda a comprender el mecanismo que hay debajo de los códigos desarrollados en la última parte, para así extraer conclusiones sobre cada método.

Gracias a los resultados obtenidos y la experiencia propia con el manejo de los códigos llegamos a la conclusión que el método más recomendable para las opciones más básicas, las europeas, es el método de Black – Scholes dada su exactitud, sencillez de cálculo y posibilidades de implementación (de hecho es considerado por muchos como el método de valoración de opciones más influyente).

Con las opciones europeas preferimos el algoritmo de Longstaff y Scharztz como método más certero y eficaz de los tres, aunque siendo prácticos nos decantaríamos por el Árbol Binomial debido a los altos costes que supone el algoritmo. Black – Scholes entendido como el método original concebido en 1973 no nos sirve para americanas, no entramos

a explicar posteriores implementaciones de otros autores aunque la literatura nos diría que implementaciones como la de Roll-Geske-Whaley sería más recomendada que el Árbol Binomial y no incurriría en los elevados costes del algoritmo de Longstaff y Scharzt.

El método de Longstaff y Scharzt fue propuesto originalmente con la intención de valorar opciones americanas aunque donde verdaderamente adquiere relevancia es valorando algunas de las denominadas opciones exóticas o de segunda generación como las asiáticas. Entre los tres métodos es el de Longstaff y Scharzt el único que puede valorar con eficacia este tipo de opciones.

Por último nos quedaría añadir que estos métodos aquí explicados suponen una base de conocimiento e investigación permitiendo abrir nuevas vías. No obstante, en la práctica, los organismos llamados a valorar constantemente opciones, como puedan ser los bancos de inversión, acaban generando métodos internos (a partir de los citados y muchos otros) que se encuentran bajo una constante implementación según el mercado de derivados y los propios productos van evolucionando.

Apéndice

Arbitraje

Previamente en el trabajo hemos hablado del arbitraje. El arbitraje como una condición que se daba en un mercado con condiciones favorables o “ideales”. ¿Pero de que se trata realmente el arbitraje?

Pues bien el arbitraje es la táctica por la cual se puede tomar ventaja de precios distintos en dos o más mercados diferentes. Si existe arbitraje podremos realizar una serie de transacciones por el cual sacaremos partido de esta diferencia de precios. Gracias a esta diferencia de precios de los mercados podremos obtener una retribución instantánea totalmente libre de riesgo, de forma segura.

En el momento que, gracias a las características del mercado, no se permita una ejecución de arbitraje rentable, estaremos ante lo que se denomina un mercado libre de arbitraje o en equilibrio de arbitraje. Dicho equilibrio se presume siempre actualmente en situaciones de equilibrio económico general.

Algunas de las condiciones que se dan en un entorno con arbitraje incluyen desde que el mismo activo no se venda al mismo precio en distintos mercados, que dos activos que produzcan el mismo flujo de efectivo para el inversor no se vendan al mismo precio, o que un activo con un precio conocido en el futuro no se venda hoy a su precio futuro descontado a la tasa de interés libre de riesgo.

Las situaciones de arbitraje eran más comunes en el pasado, o en mercados poco desarrollados. Hoy en día dado el gran nivel de sofisticación de los mercados y el nivel tecnológico del que constan, en cuanto se da un desfase en los precios que podría indicar algún tipo de arbitraje, queda automáticamente subsanado en apenas milésimas de segundos. Por lo tanto cada vez se hace más complicado poder aprovecharse de alguna situación irregular de arbitraje, hasta llegar al punto de ser casi imposible.

Anexos

Código MatLab Valoración de Opción Europea por Árbol Binomial de Cox-Ross-Rubinstein

```
>> Sigma = 0.25;
AssetPrice = 30;

% Se define la estructura del interés (RateSpec)
>> RateSpec = intenvset('Rates', 0.05, 'StartDates',...
'01-Jan-2015', 'EndDates', '31-Jul-2015', 'Compounding', -1);

% Se define la estructura del stock (StockSpec)
>> StockSpec = stockspec(Sigma, AssetPrice);

% Se define la estructura del tiempo implícito del árbol binomial (TimeSpec)
>> ValuationDate = '01-Jan-2015';
Maturity = '01-Jul-2015';
TimeSpec = crrtimespec(ValuationDate, Maturity, 4);

% Se define el árbol binomial de Cox – Ross – Rubinstein (CRRTree)
>> CRRTree = crrtree(StockSpec, RateSpec, TimeSpec);

% Se genera el gráfico del árbol binomial (Treeviewer)
>> treeviewer(CRRTree)

% Se define la estructura de la opción, put y call (OptSpec)
>> Strike = 35;
>> Settle= '01-Jan-2015';
>> OptSpec = {'Call','put'};
```

% Se define la ecuación de precio según el árbol binomial de Cox – Ross – Rubinstein (optstockbycrr)

```
>> Price = optstockbycrr(CRRTree, OptSpec, Strike, Settle, '01-Jul-2015')
```

Price =

0.7288 % Precio Call

4.8646 % Precio Put

```
>>
```

Código MatLab Valoración de Opción Europea por Black-Scholes

```
>> Strike = 35;
```

```
AssetPrice = 30;
```

```
Sigma = .25;
```

```
Rates = 0.05;
```

```
Settle = 'Jan-01-2015';
```

```
Maturity = 'Jul-01-2015';
```

% Se define la estructura del interés (RateSpec)

```
RateSpec = intenvset('ValuationDate', Settle, 'StartDates', Settle, 'EndDates',...
```

```
Maturity, 'Rates', Rates, 'Compounding', -1);
```

% Se define la estructura del stock (StockSpec)

```
StockSpec = stockspec(Sigma, AssetPrice);
```

% Se define la estructura de la opción, put y call (OptSpec)

```
OptSpec = {'call'; 'put'};
```

% Se define la ecuación de black-scholes

Price = optstockbybls(RateSpec, StockSpec, Settle, Maturity, OptSpec, Strike)

Price =

0.7655 % Precio Call

4.9014 % Precio Put

>>

Código MatLab Valoración de Opción Europea por el algoritmo de Longstaff y Schartz

>> StartDates = 'Jan-1-2015';

EndDates = 'Jul-1-2015';

Rates = 0.05;

>> AssetPrice = 30;

Sigma = 0.25;

% Se define la estructura del interés (RateSpec)

RateSpec = intenvset('ValuationDate', StartDates, 'StartDates', StartDates, ...
'EndDates', EndDates, 'Rates', Rates);

% Se define la estructura del stock (StockSpec)

StockSpec = stockspec(Sigma, AssetPrice);

% Se define la estructura de la opción, put y call (OptSpec)

>> OptSpec = {'call'; 'put'};

Settle = 'Jan-1-2015';

ExerciseDates = 'Jul-1-2015';

Strike = 35;

```
>> Antithetic = true;
```

```
% Se define el algoritmo de Longstaff y Schartz
```

```
Price = optstockbyls(RateSpec, StockSpec, OptSpec, Strike, Settle, ...  
ExerciseDates, 'Antithetic', Antithetic)
```

```
Price =
```

```
0.6612      % Precio Call  
4.8941      % Precio Put
```

```
>>
```

Código MatLab Valoración de Opción Americana por Árbol Binomial de Cox-Ross-Rubinstein

```
>> Sigma = 0.25;  
AssetPrice = 30;
```

```
% Se define la estructura del interés (RateSpec)
```

```
>> RateSpec = intenvset('Rates', 0.05, 'StartDates', ...  
'01-Jan-2015', 'EndDates', '31-Jul-2015', 'Compounding', -1);
```

```
% Se define la estructura del stock (StockSpec)
```

```
>> StockSpec = stockspec(Sigma, AssetPrice);
```

```
% Se define la estructura del tiempo implícito del árbol binomial (TimeSpec)
```

```
>> ValuationDate = '01-Jan-2015';  
Maturity = '01-Jul-2015';  
TimeSpec = crrtimespec(ValuationDate, Maturity, 4);
```

% Se define el árbol binomial de Cox – Ross – Rubinstein (CRRTree)

```
>> CRRTree = crrtree(StockSpec, RateSpec, TimeSpec);
```

% Se genera el gráfico del árbol binomial (Treeviewer)

```
>> treeviewer(CRRTree)
```

% Se define la estructura de la opción, put y call (OptSpec)

```
>> Strike = 35;
```

```
>> Settle= '01-Jan-2015';
```

```
>> OptSpec = {'Call';'put'};
```

% Se define la opción de tipo americana

```
>> AmericanOpt = 1;
```

% Se define la ecuación de precio según el el árbol binomial de Cox – Ross – Rubinstein (optstockbycrr)

```
>> Price = optstockbycrr(CRRTree, OptSpec, Strike, Settle, '01-Jul-2015',  
AmericanOpt)
```

Price =

0.7288 % Precio Call

5.1835 % Precio Put

Código MatLab Valoración de Opción Americana por el algoritmo de Longstaff y Schartz

```
>> StartDates = 'Jan-1-2015';
```

```
EndDates = 'Jul-1-2015';
```

```
Rates = 0.05;
```

```
>> AssetPrice = 30;
```

```
Sigma = 0.25;
```

```
% Se define la estructura del interés (RateSpec)
```

```
RateSpec = intenvset('ValuationDate', StartDates, 'StartDates', StartDates, ...  
'EndDates', EndDates, 'Rates', Rates);
```

```
% Se define la estructura del stock (StockSpec)
```

```
StockSpec = stockspec(Sigma, AssetPrice);
```

```
% Se define la estructura de la opción, put y call (OptSpec)
```

```
>> OptSpec = {'call','put'};
```

```
Settle = 'Jan-1-2015';
```

```
ExerciseDates = 'Jul-1-2015';
```

```
Strike = 35;
```

```
>> Antithetic = true;
```

```
% Se define la opción de tipo americana
```

```
>> AmericanOpt = 1;
```

```
% Se define el algoritmo de Longstaff y Schartz
```

```
Price = optstockbyls(RateSpec, StockSpec, OptSpec, Strike, Settle, ...  
ExerciseDates, 'Antithetic', Antithetic, AmericanOpt)
```

```
Price =
```

```
0.8367      % Precio Call
```

5.2199 % Precio Put

>>

Código MatLab Valoración de Opción Europea por el algoritmo de Longstaff y Scharz

```
>> StartDates = 'Jan-1-2015';
```

```
EndDates = 'Jul-1-2015';
```

```
Rates = 0.05;
```

```
AssetPrice = 30;
```

```
Sigma = 0.25;
```

% Se define la estructura del interés (RateSpec)

```
RateSpec = intenvset('ValuationDate', StartDates, 'StartDates', StartDates, ...  
'EndDates', EndDates, 'Rates', Rates);
```

% Se define la estructura del stock (StockSpec)

```
StockSpec = stockspec(Sigma, AssetPrice);
```

% Se define la estructura de la opción, put y call (OptSpec)

```
OptSpec = {'call'; 'put'};
```

```
Settle = 'Jan-1-2015';
```

```
ExerciseDates = 'Jul-1-2015';
```

```
Strike = 35;
```

% Se define el tipo de media, aritmética y geométrica (AvgType)

```
>> AvgType = {'arithmetic'; 'geometric'};
```


% Se definen los parámetros de simulación (opcional, antes no los definimos)

NumTrials = 1000;

NumPeriods = 200;

% Se definen la estructura del algoritmo Longstaff y Scharz para opciones asiáticas (asianbyls)

PriceAMC = asianbyls(RateSpec, StockSpec, OptSpec, Strike, Settle,...
ExerciseDates,'NumTrials', NumTrials, ... NumPeriods', NumPeriods)

% Price the geometric option

PriceGMC = asianbyls(RateSpec, StockSpec, OptSpec, Strike, Settle,...
ExerciseDates,'NumTrials', NumTrials, ... 'NumPeriods', NumPeriods, 'AvgType',
AvgType(2))

PriceAMC =

0.1219 % Precio Call (media aritmética)

4.7150 % Precio Put (media aritmética)

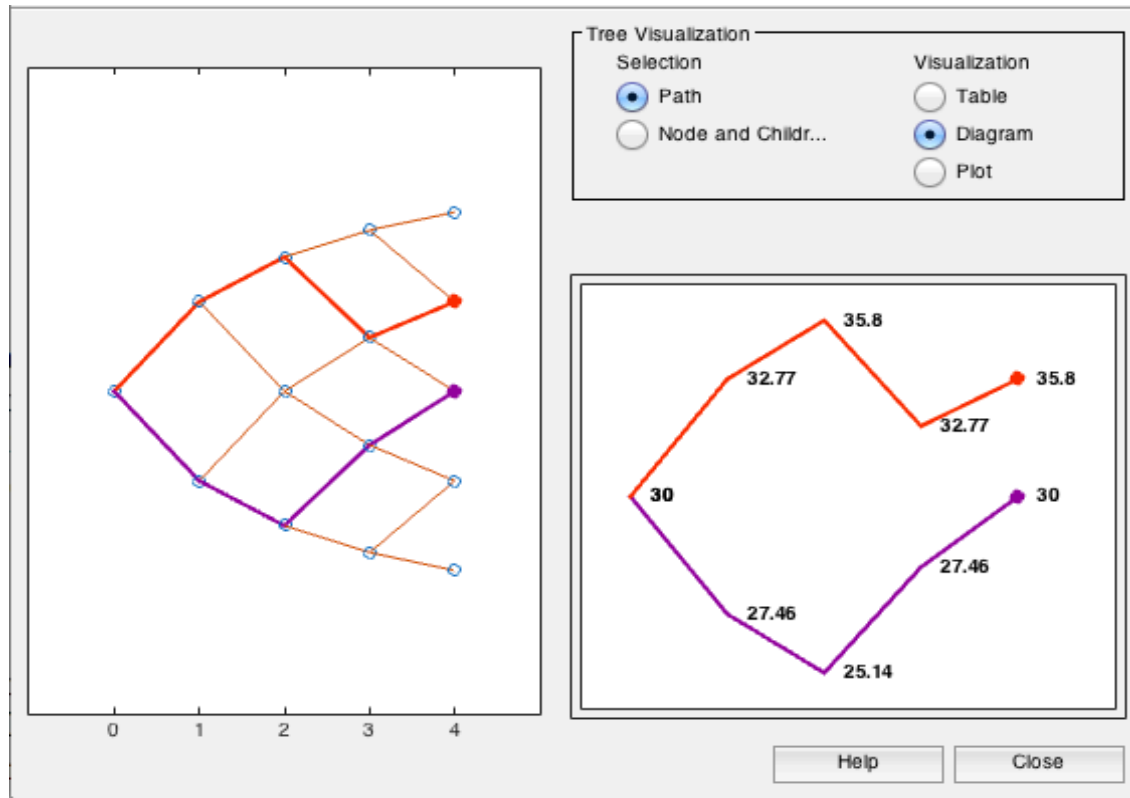
PriceGMC =

0.1426 % Precio Call (media geométrica)

4.6546 % Precio Put (media geométrica)

>>

Representación gráfica del Árbol Binomial de Cox-Ross-Rubinstein y comparación de dos trayectorias



Fuente: Elaboración propia. Generado con la formula *treeview(CRRTree)* en MatLab para el código de Árbol Binomial de Cox-Ross-Rubinstein de el ejemplo propuesto

Bibliografía

Referencias bibliográficas ordenadas alfabéticamente:

BLACK, FISCHER. SCHOLLES, MYRON. (1973) *The Pricing of Options and Corporate Liabilities* . The Journal of Political Economy (Vol. 81)

CBOE News Release 2014. CBOE.

Sitio web:

<http://ir.cboe.com/~media/Files/C/CBOE-IR-V2/press-release/2015/pr-5115.pdf>.

Acceso Abril, 2015.

CME Group 2014 Annual Report. CME Group.

Sitio web:

http://files.shareholder.com/downloads/CME/202572281x0x821372/8EC261CD-961E-4267-B0EA-6AEA8B43DBE8/CME2014_AR_Full_FINAL.pdf.

Acceso Abril, 2015

CME Group Overview. - CME Group.

Sitio web:

<http://www.cmegroup.com/company/history/>.

Acceso Abril, 2015.

COX, JOHN C. ; ROSS, STEPHEN A. ; RUBINSTEIN, MARK. (1978) *Option Pricing: A Simplified Approach* . Journal of Financial Economics (Vol. 79)

FERNÁNDEZ, PABLO. (1997) “Utilización de la formula de Black – Scholes para valorar opciones.” IESE Universidad de Navarra

Sitio web:

<http://web.iese.edu/pablofernandez/docs/FN-0425.pdf>

Acceso Mayo, 2015

FINAN, MARCEL B. (2015). *A course in the Theory of Interest and Derivatives Markets: A Preparation for the Actuarial Exam FM/2* . Russelville, Estados Unidos

GESKE, ROBERT ; ROLL, RICHARD. (1984) *On Valuing American Call Options with Black – Scholes Formula*. The Journal of Finance. (Vol. 39)

HERRANZ MARTIN, FELIPE M. (2001) *Los Derivados y el Riesgo del Mercado: Fundamentos, Tratamiento Contable y Cálculo de Sensibilidad*. Madrid, España: Asociación Española de Contabilidad y Administración de Empresas.

HULL, JOHN C. (1997). *Options, Futures and Other Derivatives*. Nueva Jersey, Estados Unidos: Pearson Education International.

Instituto BME - La Prima. Instituto BME.

Sitio web:

<http://www.institutobme.es/esp/QuienesSomos/Tutoriales/opciones/o3-prima.aspx>.

Acceso Marzo, 2015.

LONGSTAFF, FRANCIS A. ; SCHARTZ, EDUARDO S. (2001) *Valuing American Options by simulation: A Simple Least-Squares Approach*. The Review of Financial Studies (Vol. 14)

MACKENZIE, DONALD.(2006) *An Engine Not a Camera: How Financial Models Shape Markets*. Londres, Inglaterra: Inside Technology.

MASCAREÑAS, JUAN. (1994) *El Método Binomial de Valoración de Opciones*. Madrid, España.

MERTON, ROBERT C. (1973) *The Theory of Rational Option Pricing*. The Bell Journal of Economics and Management Science. (Vol. 4)

MORRIS, VIRGINIA B. (2011) *An Investor's Guide to Trading Options* Nueva York, Estados Unidos: Lightbulb Press.

POITRAS, GEOFFREY. (2008) *The Early History of Options*. Vancouver, Canada.

SAFFIE KATTAN, FELIPE E. (2007) *Eficiencia Real del LSM y Corrección por Instrumentos*. Santiago de Chile, Chile.

SEYDEL, RÜDIGER U. (2006) *Tools for Computational Finance*. Dordrecht. Holanda: Springer.

The Sveriges Riksbank Prize in Economic Sciences in Memory of Alfred Nobel 1997. Nobel Prize.

Sitio web:

http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/economic-sciences/laureates/1997/.

Acceso Abril , 2015.

THORNBURY, WALTER.(1873) *Old and New London: A Narrative of its History, its People and its Places*. Londres, Inglaterra: Cassell, Peter & Galpin.

VELASCO, CARLOS. (2007). *“El modelo de regresión simple.”* Universidad Carlos III de Madrid

Sitio web:

<http://www.eco.uc3m.es/~cavelas/EMEI/tema2.pdf>

Acceso Mayo, 2015

WEERT, FRANS DE.(2009) *Exotic Options Trading* Chichester, Inglaterra: Wiley Finance.

