FACULTAD DE CIENCIAS ECONOMICAS Y EMPRESARIALES

(ICADE)

LA ESTIMACIÓN DE LA VOLATILIDAD EN LOS MODELOS DE VALORACIÓN DE OPCIONES FINANCIERAS

Autor: Álvaro García Blázquez

Tutora: Susana Carabias López

Madrid

Junio

2018

LA ESTIMACION DE LA VOLATILIDAD EN LOS MODELOS DE VALORACIÓN DE OPCIONES FINANCIERAS

INDÍCE

INDÍCE DE GRÁFICOS Y TABLAS

Resumen

Este trabajo analiza la manera a través de la cual en varios modelos de valoración de opciones se estima la volatilidad. Con un enfoque tanto práctico como teórico se intenta ilustrar los procedimientos de cada modelo para estimar dicha variable y su utilización final en el proceso de valoración. En los modelos analizados con más detenimiento, la volatilidad se modeliza como una constante, sin embargo, también se hace mención a aquellos procesos en los que se trata a la volatilidad como una variable estocástica. Así mismo, a partir de los ejemplos prácticos utilizados en el trabajo los resultados implican que, a partir de la estimación de la volatilidad, el modelo Black Scholes se aproxima más al precio de mercado de la opción en comparación con el modelo Binomial.

Palabras clave

Volatilidad, estimación, modelo Black Scholes, modelo Binomial, variable estocástica, modelización, constante, valoración de opciones.

Abstract

This paper analyzes the method throughout which volatility is estimated in various option pricing models. Both with a theoretical and practical perspective, this paper tries to illustrate de different procedures of each model in order to estimate the volatility that will be used in the valuation process. In the models analyzed in this paper, volatility is modelled in such a way that it is used as a constant variable. However, the paper also mentions those processes in which volatility is treated as a stochastic variable. Moreover, based on the practical examples developed, it is implied that the Black Scholes model provides a more accurate estimate of the option value in comparison to the Binomial model.

Key words

Volatility, estimation, Black Scholes model, Binomial model, stochastic variable, modelling, constant variable, option valuation.

1. Introducción

El objetivo principal de este trabajo es el de analizar e ilustrar los métodos de estimación de volatilidad utilizados en los modelos de valoración de opciones. Al mismo tiempo, a través de este trabajo se pretende enfocar también el proceso de valoración de opciones a partir de la volatilidad estimada. Así mismo, se intentará ilustrar y clarificar dicho proceso a través de casos reales valorando una opción call cotizada en el mercado estadounidense y de esta manera observar los distintos resultados obtenidos para compararlos con el valor actual del mercado.

A la hora de llevar a cabo este trabajo se utilizará no sólo una perspectiva teórica, sino también práctica utilizando la plataforma tecnológica financiera Bloomberg para seleccionar las opciones que se analizarán y ciertos parámetros necesarios para el desarrollo práctico de los modelos de valoración. Para comparar los diferentes métodos de estimación de volatilidad, se llevará a cabo la utilización de conceptos y de modelos matemáticos que con el fin de proporcionar una perspectiva técnica. Esto requerirá en ocasiones una breve mención de ecuaciones diferenciales al igual que el desarrollo y análisis de distribución de retornos (Normal y LogNormal), así como conceptos financieros relacionados con las opciones financieras (grado de dinero, precio de ejercicio, prima de la opción).

La importancia de la valorar correctamente las opciones se deriva de la relevancia de su mercado. Con el paso del tiempo, el uso de los derivados financieros, y más concretamente de opciones ha experimentado un crecimiento exponencial convirtiéndose en un mercado en el que en el año 2016 se negociaron 544 trillones de dólares en todo el mundo según la Asociación Internacional de Swaps y Derivados (ISDA por sus siglas en inglés). La razón por la cual dicho mercado es tan extenso es porque hay productos derivados para todas las posibles clases de activos, incluyendo acciones, materias primas, bonos y divisas.

A la hora de valorar opciones se han de tener en cuenta numerosos factores que contribuyen a la obtención de un valor preciso para la opción que se esté observando. Sin embargo, el factor más importante es la volatilidad del activo subyacente (Cvitanik.J, Zapatero.F, 2004). A lo largo de la historia, a través de diferentes modelos de valoración, se ha intentado establecer la manera más precisa y apropiada para estimar la volatilidad.

La variabilidad del rango de precios futuros del activo subyacente, activo del cual deriva el valor de la opción, como medida de la volatilidad, es una de las variables más analizadas en el mundo financiero actual.

Los modelos de medidas de volatilidad han ido evolucionando desde que Louis Bachelier (1900) intentó definir por primera vez la volatilidad desarrollando conceptos como el "coeficiente de nerviosismo" y "coeficiente de inestabilidad". Así mismo, la varianza es una de las medidas clásicas de volatilidad que se utiliza en el modelo de valoración de activos de capital y análisis de cartera (CAPM) de Sharpe (1964), Lintner (1965) y Mossin (1966) y, al mismo tiempo, juega un papel clave en el modelo de valoración de opciones de Black y Scholes (1973), sobre el cual se hará un análisis detallado a lo largo de este escrito.

Posteriormente, se desarrollaron los modelos ARCH por Robert Engle (1982) y GARCH por Tim Peter Bollerslev (1986) que estiman la volatilidad del activo subyacente de tal forma que se trata como una variable aleatoria. Si bien es cierto que dichos modelos requieren un trabajo de modelización más elaborado, los resultados obtenidos tienden a ajustarse más a los precios de mercado debido al mayor peso que se otorga a los datos recientes dentro del modelo.

Para el desarrollo de este trabajo se llevará a cabo la lectura de artículos financieros escritos por los autores de los modelos que se analizarán. El propósito de este método es el de intentar comprender los procesos utilizados por los autores a la hora del desarrollo de los modelos de valoración. Como se observará, a lo largo de este trabajo, se utilizarán referencias bibliográficas que se utilizarán como apoyo para intentar transmitir de una manera más concisa los modelos y procesos de estimación analizados. Cabe destacar el apoyo proporcionado por el libro *Options, Futures, and Other Derivatives* (2012) de John C. Hull en especial en la explicación de la representación gráfica de la volatilidad debido a la claridad y precisión de los ejemplos utilizados.

Por otra parte, la ejemplificación práctica de los modelos analizados se lleva a cabo a través de Microsoft Excel y usando la herramienta de análisis de datos Solver para estimar la volatilidad implícita.

2. Volatilidad y Opciones Financieras

2.1. Concepto de Volatilidad

La volatilidad de un activo como es una acción de una compañía cotizada se refiere a la desviación típica de sus retornos, por lo que mide el nivel de riesgo de dicho activo. (Cvitanic.J, Zapatero.F, 2004). Por lo tanto, la volatilidad hace referencia al movimiento del precio del activo subyacente durante un periodo de tiempo concreto. A partir de este movimiento de precio, se calcula cómo de volátil el activo ha sido en el pasado. De tal forma, una mayor volatilidad implica que el activo tiene un nivel de riesgo mayor ya que su valor se puede distribuir potencialmente entre un mayor rango de precios, lo cual implica que el precio de dicho activo puede cambiar en un corto periodo de tiempo tanto al alza como a la baja.

Una estimación de la volatilidad como es la Beta de una compañía cotizada es un factor fundamental en el modelo CAPM mencionado en la introducción para calcular el coste de capital que se utiliza en la estimación del WACC en diversos modelos de descuentos de flujos de caja. Este valor estima la volatilidad relativa de una acción con respecto al mercado, lo cual implica que es una medida normalizada de la covarianza de un activo especifico con el mercado. De acuerdo con el modelo CAPM, aquellos activos cuyos precios (y consecuentemente sus retornos) son más afectados, y en la misma dirección, por los movimientos del mercado, ofrecerán un retorno esperado mayor que aquellos que son más independientes del mercado, asumiendo que el mercado bate al activo libre de riesgo (bono a 10 años americano). (Cvitanic.J, Zapatero.F, 2004). Para clarificar este concepto, supongamos que la acción de Iberdrola tiene un valor Beta de 0.9, esto implica que dicha acción se ha movido un 90% por cada movimiento del 100% del mercado (en este caso el IBEX 35). A partir de este ejemplo, podemos deducir que Iberdrola es más estable que la media del mercado y por lo tanto es menos volátil y tiene un menor riesgo de inversión.

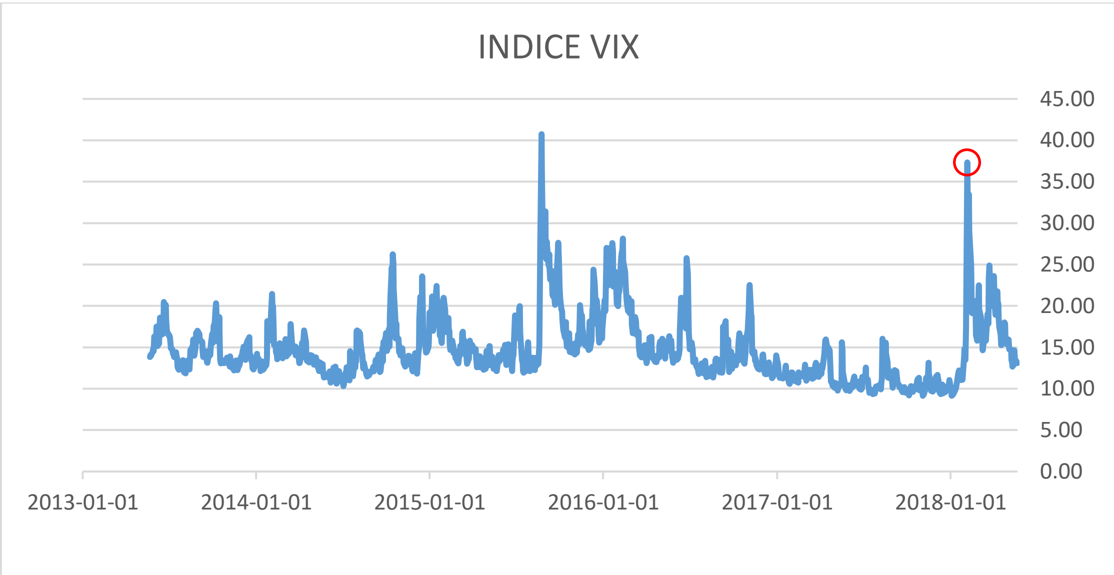
Antes de proceder a analizar de una manera técnica las distintas maneras a través de las cuales se estima la volatilidad en los modelos de valoración de opciones financieras, es importante establecer un enfoque más cualitativo para entender las características que limitan la exactitud de la estimación de la volatilidad de los activos subyacentes.

Dentro de los modelos de valoración la volatilidad se puede observar como una estimación de los distintos posibles rangos de precio sobre los cuales el activo subyacente al cual se refiere la opción se moverá en el futuro. A pesar de los intentos por reducir la incertidumbre dentro de los modelos de valoración, todavía existen factores que no se pueden estimar y que contribuyen a los cambios en el precio de un activo. Dichos factores suponen una limitación para los modelos de valoración ya que su estimación no es posible debido a su naturaleza. Los eventos políticos, económicos, sociales, e incluso naturales que tienen una repercusión sobre los inversores son un claro ejemplo de factores que no se pueden estimar en el proceso de modelización. Dichos eventos pueden tratarse de una decisión de política monetaria por parte del banco central, de la elección de un partido democrático inesperado, tensiones entre países, ataques terroristas o fenómenos naturales como terremotos, o temporales violentos que afectan a países y que tiene repercusiones globales. A este tipo de situaciones o circunstancias dentro de los mercados financieros se los conoce como cisnes negros o "black swans". Independientemente de la naturaleza del evento lo que afecta directamente a los niveles de volatilidad es el factor sorpresa o inesperado que dicho eventos traen consigo. Un ataque terrorista por ejemplo generará nerviosismo en los mercados y afectará en la manera en la que los inversores se comportan, lo que consecuentemente afectará al nivel de precios, y finalmente a la volatilidad.

Para concluir con el concepto de volatilidad y sus limitaciones, es destacable el hecho de que al igual que es imposible predecir eventos repentinos e inesperados, también lo es predecir el comportamiento de los inversores, que comprando y vendiendo son aquello agentes que establecen los precios. Debido a la gran variedad de inversores, es muy difícil llegar a entender y comprender de qué manera reaccionará cada uno en ciertos momentos o a ciertos eventos financieros y económicos. El factor que ciertamente evita que se pueda incluir el comportamiento del inversor en la estimación de la volatilidad son los sentimientos. La gran mayoría de los inversores son irracionales y no tienen unas tendencias de compra o venta definidas, más bien se pueden considerar aleatorias y promovidas por los sentimientos de pánico y avaricia, lo cual hace imposible tenerlas en cuenta y por lo tanto supone una limitación a la hora de definir la volatilidad y el posible rango de precios futuros para el activo subyacente.

Para demostrar dicho argumento, véase cómo en el mes de febrero se pudo observar esta situación con el repunte más alto del índice VIX desde febrero de 2007. El VIX es un índice diseñado por la Chicago Board Options Exchange (CBOE) con el objetivo de mostrar la expectación del marcado para la volatilidad de 30 días. Está construido utilizando las volatilidades implícitas de un amplio rango de opciones financieras que tienen como activo subyacente al índice Standard and Poors 500 o S&P 500. Dicho incremento en el VIX se debió a unos datos sorprendentes revelados por la Agencia de Empleo Americana en los que detallaba que los salarios de los trabajadores americanos habían incrementado más de lo esperado con respecto al año anterior. Inmediatamente se generó el pánico en el mercado ya que una subida en los salarios implicaría que la FED (Reserva Federal de Estados Unidos) subiría los tipos más de lo esperado durante el 2018. Las consecuencias de una subida de tipos son muy significativas para las empresas del S&P 500 ya que el coste de deuda incrementa y por lo tanto los beneficios que generan descienden, afectando así mismo a la rentabilidad de los accionistas. Dichas perspectivas negativas generaron un incremento en la preocupación por las perspectivas económicas futuras y por lo tanto también incertidumbre. En este caso, la publicación de unos datos inesperados y sorprendentes con connotación negativa generaron incertidumbre en los mercados y por lo tanto el repunte en la volatilidad mencionado anteriormente.

Ilustración 1: Repunte del VIX en el mes de febrero



Fuente: CBOE y *Elaboración Propia*

2.2. Concepto de opción financiera

Dado que la finalidad de la estimación de la volatilidad en este trabajo es la de utilizarse para valorar opciones financieras, se debe entender la definición de opción y los distintos tipos que existen

Una opción es un producto financiero que otorga a su poseedor el derecho de comprar o vender un activo subyacente antes o después de la fecha de expiración (dependiendo del tipo de opción), a un precio determinado, llamado precio de ejercicio. (Cvitanic.J, Zapatero.F, 2004). Una vez que la opción expira, pierde todo su valor y deja de existir. (Finan, 2015). Es importante destacar el hecho que, a diferencia de otro tipo de derivados financieros, una opción otorga un derecho de compra o venta y no una obligación, por lo que el poseedor de la opción tiene la posibilidad de decidir.

Así mismo, según su naturaleza, se pueden distinguir dos tipos de opciones. Por un lado, las opciones europeas y por otro las americanas. Una opción americana permite al poseedor de dicha opción ejercer su derecho de compra o venta en cualquier momento durante la vida de la opción. De tal forma, una opción europea solamente permite que se ejecute en la fecha de expiración de la propia opción. Este trabajo se centrará en las opciones europeas, y en los modelos analizados se asumirá que las opciones que se están valorando son de tipo europeo.

A continuación, se procederá a explicar los dos tipos de opciones existentes según el derecho que otorguen a su poseedor, ya sea de compra o de venta.

2.2.1. Opción call y put

Una opción call puede ser definida por tres características principales (Stampfli.J, Goodman.V, 2001):

1. Una opción call otorga al poseedor de esta opción el derecho a pagar al emisor el precio de ejercicio en el momento de vencimiento a cambio del activo subyacente.
2. Para adquirir un call, el comprador debe pagar una comisión llamada prima.
3. En caso de que el poseedor decida ejecutar el contrato, el emisor de la opción call tendrá la obligación de entregar acciones al tenedor a cambio del precio de ejercicio.

A partir de las características mencionadas se obtiene la función de cobros o “payoff” para una opción call es:

$$C\ (S, T) = \text{máx}\ (ST\text{-}K; 0)$$

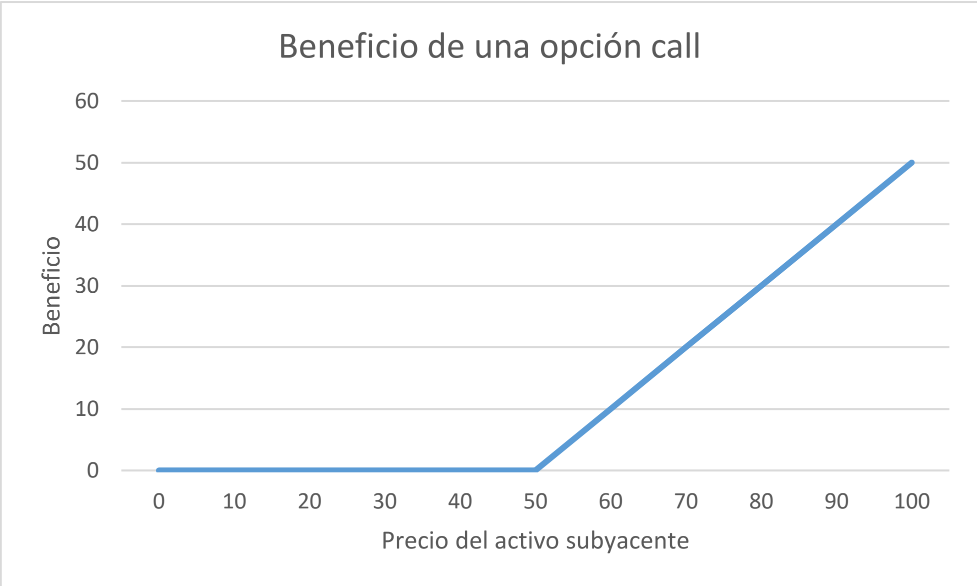
Dónde:

- C (S, T) = Opción call dependiente de S y T

- S = Precio del activo subyacente
- T = Fecha de expiración de la opción
- ST = Precio del activo subyacente a vencimiento
- K = Precio de ejercicio

Para visualizar de una manera más clara, el gráfico inferior representa la función de beneficio a vencimiento para el comprador (sin tener en cuenta la prima de la opción).

Ilustración 2: Representación Gráfica del Beneficio de una Opción Call



Fuente: *Elaboración Propia*

De manera similar al caso de una opción call, se deben entender tres características principales de este tipo de opciones para entender su funcionamiento (Stampfli.J, Goodman.V, 2001):

1. Una opción put otorga al comprador el derecho a vender acciones del activo subyacente al emisor por el precio de ejercicio establecido en la fecha de vencimiento establecida en el contrato.
2. El comprador de la opción deberá pagar una comisión llamada prima.
3. En caso de que el comprador del put decida ejecutar el contrato, el emisor tendrá la obligación de comprarle al tenedor una acción al precio de ejercicio.

De tal forma, las características previas implican que la función de beneficio o payoff de una opción put es la siguiente:

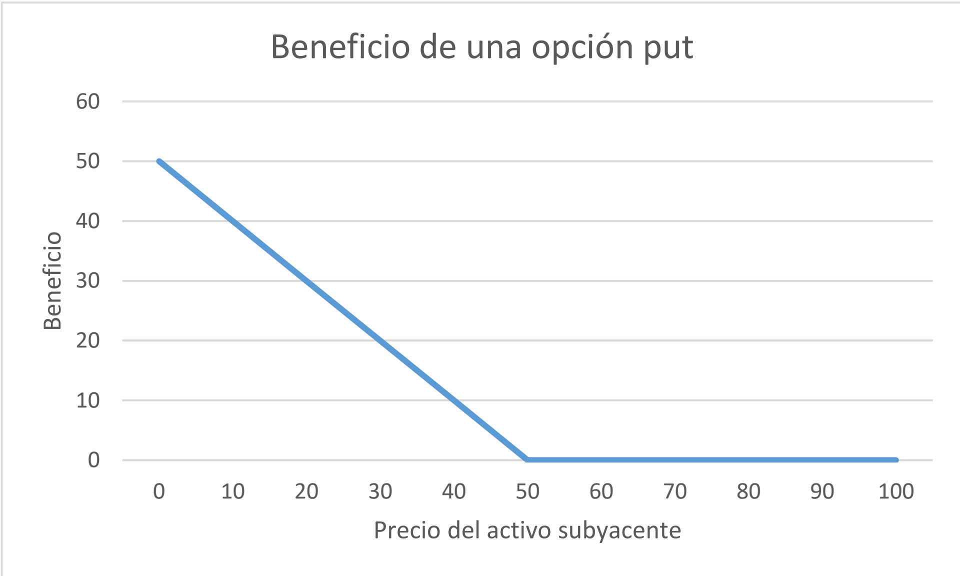
$$P\ (S,\ T) = \text{máx}\ (K\text{-}ST;\ 0)$$

Dónde:

- P (S, T) = El put que es dependiente de S y T
- S = Precio del activo subyacente
- T = Fecha de expiración de la opción
- ST= Precio del activo subyacente a vencimiento
- K = Precio de ejercicio

A continuación, se proporciona la representación gráfica de la función de beneficio a vencimiento para el comprador de una opción put:

Ilustración 3: Representación Gráfica del Beneficio de una Opción Put



Fuente: *Elaboración Propia*

2.2.2. Relevancia de la volatilidad en la prima de una opción

Debido a su naturaleza aleatoria y a la relación directa que la volatilidad tiene sobre los precios de opciones financieras, es una variable que a la hora de determinar el valor de una opción se debe tener en cuenta.

El pago realizado por el inversor para tener el derecho a comprar o vender un activo subyacente en el futuro se denomina prima. (Cvitanic.J, Zapatero.F, 2004). A la hora de negociar esta prima, tanto el comprador como el vendedor realizan valoraciones para estimar que cantidad están dispuesto a pagar o recibir. En estas valoraciones influyen significativamente seis factores principales (Hull.J, 2012):

1. **Volatilidad**: La volatilidad es la variable en la que se centra este trabajo, y como se ha mencionado previamente, se refiere a la variabilidad de la rentabilidad del activo subyacente al cual se refiere la opción. Cabe destacar que tanto como para una put o un call, un incremento de la volatilidad elevará ambas primas ya que la probabilidad de que la opción genere beneficios será mayor y por lo tanto que sea ejecutada por el tenedor. Si bien es el factor más importante, no es el único que afecta a la prima de una opción. A continuación se hace referencia a otros factores que también determinan el precio de una opción.
2. **Precio de Ejercicio:** El precio que se establece para ejecutar la opción en una fecha futura establecida es un factor determinante. En el caso de una opción call, si tienen un precio de ejercicio bajo, la prima será mayor ya que hay más posibilidades de obtener un beneficio. Sin embargo, en el caso de un put, un precio de ejercicio menos supondrá una prima menor.
3. **Precio del Activo Subyacente:** Según se trate de una opción call o un put, las variaciones en el precio del subyacente pueden incrementar la prima o reducirla. En el caso de que la cotización del activo incremente, la prima de una opción call se elevará mientras que la de una opción put será más barata.
4. **Tiempo a Fecha de Vencimiento:** A medida que el contrato se acerca a su fecha de vencimiento, tanto un call como un put pierden valor. Al inicio del contrato las opciones son más valiosas debido a su "valor de volatilidad". Aunque una opción call se encuentre Out-of-the-money actualmente, su valor sigue siendo mayor ya que debido a que hay un tiempo considerable hasta su vencimiento, da lugar a que puedan ocurrir eventos impredecibles que generen volatilidad y que por lo tanto afecten a su precio. (Bodie.Z, Kane.A, J Marcus. A, 2007)
5. **Dividendos:** El efecto de los dividendos en la prima de una opción es indirecto. Esto se debe a que afecta al precio del activo subyacente de tal forma que el pago de dividendos se resta del precio del activo.
6. **Tipos de interés:** En el contexto de modelización financiera cuando se hace referencia al tipo de interés se está refiriendo al tipo de interés libre de riesgo. En el caso de que los tipos de interés se incrementen con el resto de las variables mencionadas constantes, el valor actual de cualquier flujo de caja recibido por el poseedor de la opción se reduce. Por lo tanto, un incremento

en los tipos de interés aumenta la prima de un call y reduce la de un put. (Hull.J, 2012)

2.2.3. Grado de dinero de una opción

El término grado de dinero hace referencia a la relación entre el precio de ejercicio de una opción y el precio de su activo subyacente. Por lo tanto, este concepto describe el valor intrínseco de una opción en el momento actual. Para clarificar este término se tomará como ejemplo un inversor que tiene en posesión una opción call. De tal forma podemos diferenciar tres tipos de situaciones: (Cvitanic.J, Zapatero.F, 2004)

- In-the-Money: Tendrá lugar cuando la opción tenga valor intrínseco. En el caso de una call, el precio de ejercicio deberá estar por debajo del precio de mercado.
- At-the-Money: En esta situación el precio de ejercicio de la opción y el precio de mercado son exactamente iguales, lo cual implica que tenga un valor intrínseco de cero.
- Out-of-the-Money: Como ultimo escenario posible puede ocurrir que la opción no tenga valor intrínseco, y que por lo tanto el precio de ejercicio sea superior al precio actual de mercado.

En el caso de que el inversor estuviese en posesión de una put, la situación sería la opuesta, es decir, la opción estaría In-the-Money cuando el precio de ejercicio es superior al del mercado, y Out-of-the-Money cuando el precio de ejercicio es inferior al que hay en el mercado.

Una vez establecidos los conceptos básicos de opciones financieras al igual que los limites cualitativos de la volatilidad, y su importancia y relevancia dentro de los modelos de valoración de opciones, se procederá a continuación con el análisis del modelo binomial y el procedimiento para estimar la volatilidad en dicho modelo.

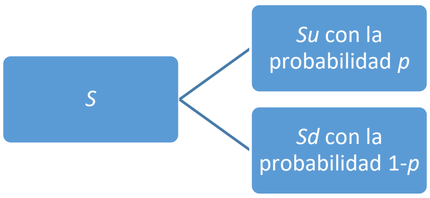
3. Modelo Binomial

3.1. Procedimiento y método de estimación de precios futuros

El modelo binomial de valoración de opciones es planteado por Cox, Ross, y Rubinstein (1979) por primera vez. Dicho modelo se apoya en la construcción de un árbol binomial donde se asume que el precio del activo subyacente sigue un camino aleatorio o “Random Walk” y en el que en cada momento del tiempo “t” tiene una probabilidad concreta de moverse al alza o a la baja. (Hull, J. 2012).

Para la estimación del precio de una opción a través de este modelo aparte de asumir que el precio de una acción sólo puede tomar dos posibles valores en un momento del tiempo, también se ha de asumir que no hay arbitraje en el mercado.

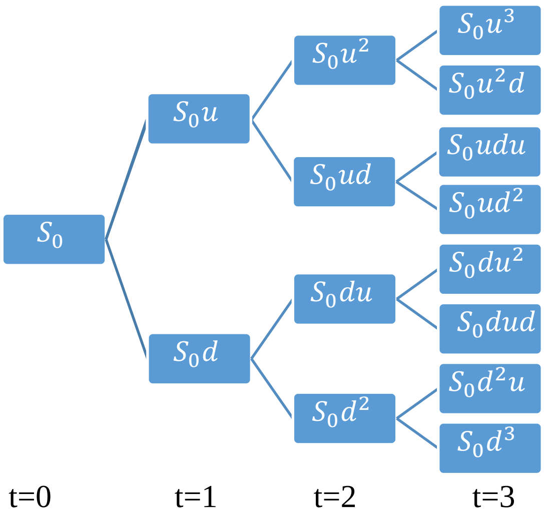
Como se ha detallado en la introducción, el modelo binomial asume que el precio actual del activo subyacente *S* puede incrementar hasta S_u multiplicando por el factor *u>1*, o descender en hasta S_d multiplicando por el factor *d<1*. Así mismo, para obtener los posibles precios futuros, se ha de incorporar una probabilidad a dichos movimientos de precios. Se asigna pues la probabilidad de *p* a un movimiento alcista, y consecuentemente la probabilidad de *q*, que será equivalente a 1-*p*, a un movimiento bajista. Al mismo tiempo, cada posible resultado dentro de la red binomial se denomina nodo. De tal forma se obtiene que:



Por lo tanto se puede establecer:

- $p := P[S(t+1) = uS(t)]$
- $q := 1\text{-}p = P[S(t+1) = dS(t)]$

Si se supone que la vida de la opción que se está intentando valorar es de tres meses, a partir del árbol binomial a un paso, se deduce:

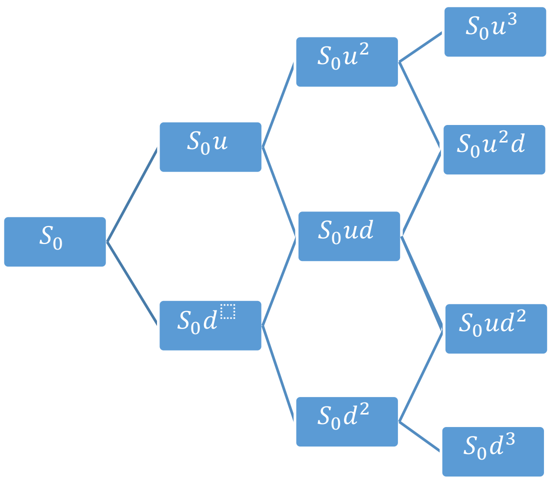


Como se puede observar, en el momento de tiempo t=3 se obtienen ocho posibles precios para el activo subyacente. Sin embargo, debido a que este árbol es recombinante, es decir, que un movimiento al alza seguido por uno a la baja produce el mismo valor que un movimiento a la baja seguido por uno al alza (Cvitanic.J, Zapatero.F, 2004), se puede reagrupar dicho árbol para obtener una red binomial más manejable de cara a la valoración de opciones financieras. Antes de proceder a desarrollarlo, es cabe destacar el concepto de medida y proceso de tipo martingala ya que es el fundamento a través del cual se puede llevar a cabo este proceso de recombinación para obtener la red binomial. Dicho proceso solamente puede ocurrir si los precios futuros del activo subyacente son independientes del camino tomado para obtener el valor. Para establecer la definición de martingala, se considera un proceso X, cuyos valores en el intervalo $[0,s]$ ofrecen información hasta el momento s y se denota E_s la esperanza condicional dada dicha información. Se dice que un proceso es de tipo martingala si:

$$\mathrm{E}_s\left[X_{(t)}\right] = X_{(s)}, \qquad s \leq t$$

Lo cual implica que el valor en un tiempo *t* futuro depende solamente del valor del activo en el momento *t*-1. Por lo tanto, el mejor estimador del precio futuro es el valor actual $X_{(s)}$. Si se observa el proceso de construcción del árbol binomial previo, se aprecia como aplica claramente el concepto de proceso de tipo martingala pues en cada tiempo el valor obtenido depende del valor en el tiempo anterior.

A continuación, se procede a desarrollar la red binomial que será la base sobre la cual se trabajará para explicar y analizar el proceso de valoración de opciones a través de este modelo:



t=0 t=1 t=2 t=3

Ya que la intención de este modelo es la de obtener un valor específico del activo subyacente en cada momento del tiempo *t*, se deberá calcular en cada periodo de tiempo el valor esperado para S_0 (E[S_1], E[S_2], E[S_3]). Prosiguiendo con el ejemplo de una opción con fecha de vencimiento a tres meses, el objetivo final no es otro que el de estimar E[S_3]. Para estimar dicho valor, se ha de multiplicar el valor del precio obtenido por su probabilidad ya sea *p*, en caso de un incremento, o *q*, en caso de un descenso. Para facilitar dicho proceso, a continuación, se muestra una tabla con cada valor y su respectiva probabilidad al igual que sus productos.

TIEMPO	PRECIO	PROBAILIDAD	PRODUCTO
0	S_0	1	S_0
1	S_0u	p	S_0up
1	S_0d	q	S_0dq
2	S_0u^2	p^2	$S_0u^2p^2$
2	S_0ud	pq	S_0udpq
2	S_0d^2	q^2	$S_0d^2q^2$
3	S_0u^3	p^3	$S_0u^3p^3$
3	S_0u^2d	p^2q	$S_0u^2dp^2q$
3	S_0ud^2	pq^2	$S_0ud^2pq^2$
3	S_0d^3	q^3	$S_0d^3q^3$

A partir de la tabla superior, se puede calcular los valores esperados del precio del activo subyacente para cada momento de tiempo. De tal forma, para el momento *t*=1, se obtiene:

$$E[S_1] = S_0up * S_0dq = S_0(up + dq)$$

El término $up + dq$ mide la tendencia del precio del activo subyacente de tal manera que (Stampfli.J, Goodman.V, 2001):

- Para $up + dq > 1$, el precio tiende al alza como resultado
- Para $up + dq < 1$, el precio tiende a la baja como resultado
- Para $up + dq = 1$, el precio carece de tendencia

Si aplicamos al árbol binomial desarrollado este proceso, para calcular el valor esperado en el tiempo t=3 se obtiene:

$$E[S_3] = S_0u^3p^3 + S_0u^2dp^2q + S_0ud^2pq^2 + S_0d^3q^3$$
$$= S_0[(up)^3 + 3dq(up)^2 + 3(dq)^2up + (dq)^3]$$

Lo cual se puede simplificar a:

$$S_0(up + qd)^3$$

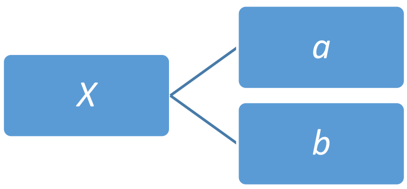
Por lo tanto, se observa un patrón claro a la hora de estimar el valor esperado en cada momento del tiempo *t* de tal forma que:

$$E[S_{t+1}] = S_t(up + qd)^{t+1}$$

El proceso detallado posteriormente ha establecido la base para la valoración de opciones ya que nos permite estimar el valor del precio en al activo subyacente, que, como se ha mencionado en el marco teórico de este trabajo es uno de los factores que más influencia el precio de una opción.

3.2. Procedimiento y método de valoración y estimación de la volatilidad

La red binomial desarrollada previamente permite observar los posibles valores que la acción tomará en cada periodo de tiempo futuro. Sin embargo, lo que realmente se busca con la utilización de este modelo es la de encontrar el valor presente en t=0 de una opción financiera. Dicho esto, el lector puede tener el impulso de pensar que, si el objetivo es encontrar el valor actual, las proyecciones futuras estimadas a través de la red binomial previa no son de utilidad. Sin embargo, con los precios obtenidos para el periodo de vencimiento de la opción se puede invertir el proceso a través de la iteración o inducción a la inversa. Dado el siguiente caso:



Si X es el valor esperado de los valores futuros a y b, entonces:

$$X = pa + qb$$

a lo que cual se denomina regla de iteración. (Stampfli.J, Goodman.V, 2001)

Por lo tanto, si se aplica esta regla, podemos comenzar a partir de los valores estimados en la red binomial y utilizarlos para llegar hasta el periodo de tiempo t=0 y obtener el valor presente. Como se establece en la tabla donde se hace referencia a los valores estimados en cada periodo de tiempo, para t=3 se obtuvieron los siguientes resultados mostrados de mayor a menor:

$$S_0u^3$$

$$S_0u^2d$$

$$S_0ud^2$$

$$S_0d^3$$

Por lo tanto, para los tres posibles valores se obtiene en t=2: (en orden descendente):

$$S_0u^3p + S_0u^2dq = S_0u^2(up + dq)$$

$$S_0u^2dp + S_0ud^2q = S_0ud(up + dq)$$

$$S_0ud^2p + S_0d^3q = S_0d^2(up + dq)$$

Lo que consecuentemente implica que en t=1 se obtienen los siguientes valores:

$$p(S_0u^3p + S_0u^2dq)+ q(S_0u^2dp + S_0ud^2q) = S_0u(up + qd)^2$$

$$p(S_0u^2dp + S_0ud^2q) + q(S_0ud^2p + S_0d^3q) = S_0d(up + qd)^2$$

A partir de estas estimaciones se puede observar que cada entrada tiene la siguiente forma: (Stampfli.J, Goodman.V, 2001)

$$(valor\ de\ la\ acción\ en\ el\ nodo) * (up + qd)^{(número\ de\ columnas\ remanentes)}$$

Dado que el desarrollo completo de la última entrada en el momento t=0 utilizando la regla de iteración sería demasiado extensa, la expresión previa permite deducir que el valor de en dicho periodo de tiempo será:

$$S_0(up + qd)^3$$

Una vez que se ha analizado la aplicación del modelo al precio del activo subyacente se parte pues a detallar como a partir de los procedimientos mencionados en la explicación del modelo binomial, se obtiene el valor o precio de una opción.

Como se menciona en el marco teórico otro de los factores que influencian a la prima de una opción es el precio de ejercicio (K) establecido en el contrato, el cual en el modelo binomial se tiene cuenta. Si se asume que se está analizando una opción call, el cálculo del valor para este caso será equivalente a el precio del activo subyacente en el momento t menos el precio de ejercicio, siempre y cuando se cumpla que St>K. En caso contrario el valor de la opción call será igual a cero.

Por otra parte, para llevar a cabo la iteración con los precios de las opciones se necesitará obtener las probabilidades q (incremento a un precio superior denominado a) y 1-q (descenso de precio a un precio inferior denominado b). Así mismo, una vez se obtenga dicha probabilidad, se deberá utilizar en el proceso de descuento para obtener el valor de la opción que se denominará *x*. De tal forma: (Stampfli.J, Goodman.V, 2001)

$$q = \frac{e^{rt}-d}{u-d}$$

y

$$x = e^{-rt}[qa + (1-q)b]$$

Como se puede observar el factor de descuento es e^{-rt}, es decir, se está descontando el valor esperado de S_1con la tasa libre de riesgo. Consecuentemente, las probabilidades que se calculan a través de la ecuación superior son probabilidades neutrales al riesgo. Por lo tanto, el mundo neutral al riesgo se considera como escenario imaginario donde no existe compensación por comprar un activo arriesgado, lo cual implica que el valor esperado en todos los activos es la tasa libre de riesgo. (Cvitanic.J, Zapatero.F, 2004).

De tal forma, en el universo neutral al riesgo el valor esperado de una acción será:

$$Se^{r\Delta t}$$

Por lo tanto, para igualar el rendimiento promedio del precio de la acción con los valores del árbol binomial se necesita lo siguiente:

$$Se^{r\Delta t} = pSu + (1-p)Sd$$

Por lo tanto, si se retira S de ambos lados de la ecuación:

$$e^{r\Delta t} = pu + (1-p)d$$

Al mismo tiempo, es importante destacar que los rendimientos relativos de la acción X se miden:

$$\frac{\Delta S}{S} = \frac{S_{(t+\Delta t)} - S_{(t)}}{S_{(t)}}$$

Y que sigue una distribución normal:

$$\frac{\Delta S}{S} \approx N(\mu \Delta t, \sigma\sqrt{\Delta t})$$

Implicando que:

- Su media es igual a $\mu \Delta t$
- Su varianza es igual a $\sigma^2 \Delta t$

Por lo tanto, se puede observar que si la varianza de la variable X es $\sigma^2 \Delta t$, en el caso de de la variable 1+X, la varianza será la misma puesto que añadir una constante no cambia la varianza de una variable. Al mismo tiempo:

> *La varianza de una variable Q se define como $E(Q^2) - E(Q^2)$, donde E hace referencia al valor esperado.*

Entonces, si la probabilidad de que 1+X sea *u* es *p*, y la probabilidad de que 1+X sea *d* es *1-p,* se deduce que: (Hull, J. 2008)

$$\sigma^2 \Delta t = pu^2 + (1-p)d^2 - [pu + (1-p)d]^2$$

Una vez que se han ilustrado dichos parámetros y condiciones, en *Option Pricing: A Simplified Approach (*Cox, Ross, y Rubinstein, 1979) establecen adicionalmente que:

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

$$d = \frac{1}{u}$$

Una vez que se alcanzan estos valores, se multiplicaría S_0 por *u* y *d* para obtener *a* y *b* respectivamente, a partir de los cuales se obtiene el precio estimado para la opción que se está valorando.

La explicación en este apartado del modelo binomial se ha centrado en analizar de una manera teórica el proceso de valoración y el tratamiento de las fluctuaciones de precio futuras. Se puede destacar el hecho de que este modelo trata con precios (estimados en función de su volatilidad) futuros, lo cual permite observar el comportamiento del precio del activo subyacente a través del tiempo. Es digno de mención el hecho de que las características de este modelo proporcionan una gran flexibilidad según los requerimientos de cada inversor. Esto se debe a que se puede a ajustar según el periodo de tiempo que se quiera tener en cuenta, ya sean días, horas, o incluso minutos. Finalmente, en cuanto al modelo se refiere, es importante destacar que cada posible valor del precio en un periodo de tiempo específico no tiene el mismo peso a la hora de obtener el valor presente de una opción. Este aspecto es destacable dado que en modelos como Black-Scholes, que se basa en los valores de cinco inputs fijos, el cambio en distintas variables no se puede reflejar.

Para concluir el análisis de este modelo, se informa al lector de que en el apartado 7.2 de este trabajo se realizará un ejemplo práctico para que de esta manera el lector tenga la posibilidad de observar su aplicación y la obtención de un resultado concreto a partir de los procesos tratados en este apartado.

4. Modelo Black-Scholes

En 1969 Fischer Black, Myron Scholes, y Robert Merton, propusieron por primera vez su modelo donde a través de una ecuación parcial diferencial se determina el precio justo que un inversor debe pagar por adquirir una opción. El artículo fue rechazado en dos prestigiosas revistas de la industria como son *Journal of Political Economy* y *Review of Economics.* Sin embargo, en 1973, dicho artículo se modificó atendiendo a ciertas sugerencias especificas detalladas por Merton Miller, y "The Pricing of Options and Corporate Liabilities" fue publicado en el *Journal of Political Economy.*

El modelo publicado tuvo tanta influencia en la manera en la que los corredores de bolsa valoraban y cubrían sus posiciones con derivados, que en el año 1997 su importancia fue reconocida cuando se otorgó a Robert Merton y Myron Scholes el premio Nobel de economía.

4.1. Procedimiento y Método de Estimación de la Volatilidad

Para la obtención de un valor concreto de una opción, el modelo Black Scholes relaciona dicho precio con seis factores principales: (Hull, J. 2012)

- El tipo de interés libre de riesgo
- El precio del activo subyacente

- La volatilidad del precio del activo subyacente
- El precio de ejercicio
- El tiempo hasta la fecha de vencimiento
- El beneficio (en caso de que lo haya) que se espera recibir del activo durante la vida de la opción en forma de dividendos.

En primer lugar, se ha de tener en cuenta que en este modelo se asume que la tasa libre de riesgo es continuamente compuesta. Para entender el concepto de rendimiento continuamente compuesto, si se observa la ecuación del interés compuesto simple:

$$A(t) = P(1 + \frac{r}{m})^{mt}$$

Donde:

- *A(t) = Valor de la inversión en el momento t*
- *r = Tasa Anual Porcentual (TAP)*
- *m = Número de periodos compuestos al año*
- *P = Inversión Inicial*
- *t = Duración en años de la inversión*

Se dice que un rendimiento es continuamente compuesto cuando:

$$\lim_{m \to \infty} A(t) = P(1 + \frac{r}{m})^{mt}$$

De tal forma que se obtiene:

$$A(t) = Pe^{rt}$$

Como se detallará posteriormente, este proceso es uno de los factores que en la ecuación de Black Scholes se utiliza para obtener el valor de una opción financiera.

Al mismo tiempo para un mejor entendimiento del proceso de valoración, es apropiado entender el enfoque de las ecuaciones diferenciales en este modelo. En primer lugar, si se atiende a la descripción de las dinámicas de una inversión en el tiempo, se establece que:

La tasa de crecimiento de una inversión en un momento t es proporcional al valor de la inversión en el momento t con el coeficiente r.

De tal forma, a partir de los parámetros utilizados para la explicación del rendimiento continuamente compuesto, si conocemos el valor de *P* y *r,* y la tasa de crecimiento para $A(t)$ es igual a $A'(t)$, se obtiene:

$$A'^{(t)} = \frac{dA}{dt}$$

Así mismo, si se conoce el valor de dos inversiones *A* y *B*, aplicando el concepto previamente mencionado, se dice que *A* es proporcional a *B* con coeficiente *r:*

$$A = rB$$

Por lo que la ecuación diferencial para $A(t)$:

$$\frac{dA}{dt} = rA(t); \rightarrow \frac{dA}{A} = rdt$$

La cual se puede discretizar para llegar a:

$$\frac{\Delta A}{A} \approx rdt$$

El proceso de discretización consiste en pasar de una forma continua a una forma discreta. Una forma continua es aquella que puede tomar un número infinito de posibles valores. Por ejemplo, el precio de una acción se puede modelizar como una variable continua aleatoria, tomando como valor los números incluido en el intervalo (0, ∞). De tal forma, los valores posibles podrían ser 15.2, 58.3, 2.4,… Sin embargo, una forma discreta, es aquella que solamente puede tomar un número finito de valores.

Prosiguiendo con la ecuación diferencial de $A(t)$, ΔA se refiere a la variación de A en el intervalo $[t, t + \Delta t]$. Lo cual implica que:

$$\Delta A = A(t + \Delta t) - A(t)$$

Y que $\frac{\Delta A}{A}$ hace referencia al rendimiento relativo.

A partir de lo mencionado, si se centra la atención en el modelo Black Scholes, uno de los factores que más complicaciones causó fue la explicación del comportamiento del precio del activo subyacente. Para resolver este problema, se establecen cuatro bases fundamentales:

1. En el largo plazo, el retorno relativo esperado será positivo de tal forma que:

$$\frac{\Delta S}{S} = \frac{S_{t+h} - S_t}{S_t} > 0$$

2. Se incluye un componente aleatorio e impredecible para modelizar la incertidumbre.
3. Deberá ser más complicado predecir con precisión los precios del activo durante periodos de tiempo más largos.
4. Los precios de las acciones no pueden ser negativos

Si se atiende a la formula del retorno relativo y a la ecuación diferencial discretizada previamente mencionada se observa su aplicación al modelo. En lugar de $A(t)$, se utiliza la variable $S(t)$ que hace referencia al precio del activo subyacente en el momento *t*. Por lo tanto, se llega a:

$$\frac{\Delta S}{S} = \frac{S_{(t+\Delta t)} - S_{(t)}}{S_{(t)}}$$

A partir de lo cual se obtiene la Ecuación Diferencial Estocástica (EDE) que describe el comportamiento del precio en el tiempo:

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dX$$

Que se discretiza a:

$$\frac{\Delta S}{S} \approx \mu \Delta t + \sigma \Delta X$$

Siendo:

- μdt: El componente predecible del retorno relativo
  - μ: El valor esperado del retorno
- σdX: El componente impredecible (aleatorio)
  - σ: La volatilidad del precio del activo→ medida de incertidumbre
- dX: Es la variable del modelo que sigue un proceso estocástico de Wiener o un movimiento Browniano.

La variable dX se distribuye Normalmente, lo cual implica que:

$$dX \sim N\left(0, \sqrt{dt}\right)$$

y se puede aproximar de tal forma que:

$$\Delta x \approx N(0, \sqrt{\Delta t})$$

Por lo tanto, se puede concluir que $\frac{\Delta S}{S}$ es una variable aleatoria para cada momento *t* ya que Δx es también una variable aleatoria. Partiendo de lo anterior y, con el objetivo comprender esta variable y su distribución, es apropiado analizar sus parámetros, es decir, la media, varianza, y desviación típica:

$$E\left(\frac{\Delta S}{S}\right) = \sigma E(\Delta x) + \mu\Delta t = 0 + \ \mu\Delta t = \mu\Delta t$$

$$Var\left(\frac{\Delta S}{S}\right) = \sigma^2 Var(\Delta x) = \sigma^2\left(\sqrt{\Delta t}\right)^2 = \sigma^2\Delta t$$

$$Desv. St\left(\frac{\Delta S}{S}\right) = \sqrt{\sigma^2 Var(\Delta x)} = \sigma\sqrt{Var(\Delta x)} = \sqrt{\sigma^2\Delta t} = \sigma\sqrt{\Delta t}$$

Por lo tanto, se llega a que $\frac{\Delta S}{S}$ se distribuye de la siguiente forma:

$$\frac{\Delta S}{S} \approx N(\mu\Delta t, \sigma\sqrt{\Delta t})$$

A partir del elemento dX de la Ecuación Estocástica Diferencial previamente mencionada, la cual sigue un movimiento browniano, entonces, un movimiento Browniano geométrico se define por:

$$S_t = S_0 e^{ut+\ \sigma X_t} = f(t, Xt)$$

Donde $f(t,x) = S_0 e^{ut+\ \sigma x}$

Al mismo tiempo, en el año 1946, el matemático japonés Kiyoshi Itô, desarrolla un proceso estocástico Dicha solución se conoce en el ámbito de las finanzas como *El Lema de Itô*, en el cual establece que:

$$dY = f(X,t)dt + g(X,t)dX$$

Donde:

- $f(X,t)dt$ se refiere al impulso o “drift” que hace referencia a la parte no estocástica.

- $g(X,t)dX$ se refiere a la parte estocástica de la ecuación.

Si se aplica el *Lema de Itô* a la definición de movimiento Browniano geométrico se obtiene que:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \mu f$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sigma f$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \sigma^2 f$$

De tal forma que se llega a:

$$dY = df = \mu f dt + \sigma f dX + \frac{1}{2}\sigma^2 f dt = \left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right) Y dt + \sigma Y dX$$

Por lo tanto, partiendo de esta ecuación se llega a una solución para la Ecuación Diferencial Estocástica (EDE):

$$S_t = S_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma X_t}$$

Siendo:

- S_0: El precio conocido del activo en el momento *t=0*.
- σX_t: La variable aleatoria para cada momento de tiempo *t*.

A partir de la solución basada en el Lema Kiyoshi Itô, se puede llegar a la ecuación para los retornos logarítmicos de un activo. Esta ecuación será de gran importancia para la comprensión del modelo Black Scholes puesto que asume que los retornos son logarítmicos. Por lo tanto, al obtener la ecuación para dichos retornos, se podrá establecer la distribución que siguen.

Partiendo de la solución de Itô, en primer lugar, se dividen ambos lados de la ecuación por S_0, llegando a:

$$\frac{S_t}{S_0} = e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma X_t}$$

Se toman los logaritmos neperianos de ambos lados:

$$ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma X_t$$

Esta ecuación conforma el modelo continuo de precios, el cual es uno de los fundamentos principales que conforman la fórmula final del modelo de Black Scholes para valorar una opción. Sin embargo, lo que se ilustra es que $\frac{S_t}{S_0}$ tiene una distribución lognormal ya que, atendiendo a su definición:

Si se considera una variable aleatoria x, y otra variable aleatoria Y=e^x*, se dice que Y tiene una distribución lognormal si:*

$$lnY = X$$

se observa que dicha condición se cumple. Esto implica que S_t sigue una distribución lognormal y cumple una de las principales bases establecidas incluidas es sus denominadas condiciones ideales. Tal y como aparece en *The Pricing of Options and Corporate Liabilities* (Black y Scholes, 1973: 640):

> *El precio de la acción sigue un camino aleatorio en un tiempo continuo con una tasa de varianza proporcional al cuadrado del precio de la acción. De tal forma, la distribución de posibles precios para la acción al final de un intervalo finito es lognormal y su tasa de varianza es constante.*

Así mismo, al igual que para la Ecuación Diferencial Estocástica (EDE), es apropiado establecer los parámetros de este modelo continuo de precios para obtener así su distribución de probabilidad.

$$E\left(ln\frac{S_t}{S_0}\right) = \sigma E(X_t) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t = 0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t$$

$$Var\left(ln\frac{S_t}{S_0}\right) = \sigma^2 Var(X_t) = \sigma^2 t$$

$$Desv.St\left(ln\frac{S_t}{S_0}\right) = \sqrt{Var\left(ln\frac{S_t}{S_0}\right)} = \sqrt{\sigma^2 t} = \sigma\sqrt{t}$$

Lo cual implica que su distribución de probabilidad es la siguiente:

$$ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right) \sim N\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t, \sigma\sqrt{t}\right)$$

Como se ha mencionado al comienzo de este apartado, la fórmula de Black Scholes depende de seis inputs. Hasta el momento se ha analizado en detalle el comportamiento de los precios del activo subyacente y la tasa libre de riesgo. Sin embargo, de manera implícita también se ha analizado la volatilidad puesto que dentro de los distintos modelos que hacen referencia al comportamiento de los precios, un factor que se incluía era la incertidumbre futura de los precios, lo cual se refiere a la volatilidad.

4.1.1. Volatilidad Histórica

Para estimar la volatilidad histórica de un activo, el precio de dicho activo se ha de observar en intervalos de tiempo fijos y concretos (días, semanas, o meses). Se deben definir las siguientes variables: (Hull.J, 2012)

- n+1: Número de observaciones
- St: Precio del activo al final del periodo t
- τ: Longitud del intervalo de tiempo en años
- Ui: Retorno del activo = ln $\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right)$

A partir de estos parámetros la estimación de *s*, la desviación estándar de Ui se calcula:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(U_i - \bar{U})^2}$$

donde $\bar{U}$ es la media de Ui.

Una vez calculada la desviación típica, para obtener la volatilidad histórica del activo se ha de dividir el resultado obtenido entre la raíz cuadrada de τ. De tal forma que:

$$\sigma = \frac{s}{\sqrt{\tau}}$$

A la hora de estimar la volatilidad histórica de un activo previamente se ha de decidir el número de observaciones que se realizarán. Si bien es cierto que un mayor número de observaciones proporciona a la estimación más precisión, se ha de adaptar al número de periodos para los que se va a usar dicha estimación. Para clarificarlo, si la estimación de la volatilidad histórica se utilizará para obtener el precio de una opción con fecha de vencimiento en seis meses, se utilizarán los precios históricos de los últimos seis meses.

En *Mastering Option Trading Volatility Strategies* (Natenberg.S, 2003) se hace referencia a esta cuestión:

> *Para calcular la volatilidad histórica existen varios métodos posibles, pero la gran mayoría dependen de la elección de dos parámetros, el periodo histórico durante el cual se calcula la volatilidad, y el intervalo de tiempo en el que se miden los cambios en el precio.*
>
> *[…]La elección de periodos más amplios tiende a generar una volatilidad media, mientras que periodos más reducidos pueden revelar extremos poco comunes en la volatilidad.*
>
> *[…]Con respecto a la elección de los intervalos de tiempo, sorprendentemente, no afecta considerablemente al resultado. A pesar de que los precios puedan sufrir amplios cambios de un día a otro y acabar la semana sin alterarse, esto es una clara excepción. Un contrato que es volátil de un día a otro es muy probable que sea volátil de una semana a otra, o de un mes a otro.*

Por otra parte, es importante mencionar el hecho de que dicha estimación no indica la dirección del precio del activo al que se refiere sino cuanto se ha desviado el precio de su media histórica. Por lo tanto, cuando la volatilidad histórica de un activo está incrementando, o es más alta de lo normal, implica que los precios están moviéndose al alza o a la baja más rápido de lo normal, y normalmente suele ser una indicación de expectativas de cambio, o que ya ha cambiado, con respecto al activo. En caso contrario, si la volatilidad histórica desciende, eso implicaría que la situación de los precios del activo subyacente se ha normalizado y ha retomado una estabilidad.

Sin embargo, ¿Cómo ayuda al inversor o profesional financiero esta información a la hora de tomar una decisión? En primer lugar, le permite entender si el precio de una opción está sobrevalorado o infravalorado. El motivo es la relación entre el precio de una opción y la volatilidad. Si los precios del activo subyacente son más volátiles, consecuentemente el precio de la opción será mayor. Esto se debe a que, si hay mayor volatilidad, el rango potencial sobre el cual puede fluctuar el precio del activo subyacente es mayor. Por lo tanto, tanto en caso de una opción call o una opción put, la probabilidad de que el precio del activo en el momento de expiración de la opción esté por encima o por debajo del precio de ejercicio es mayor. Esto implica que hay más probabilidades de que el comprador del call o put haga efectivo su derecho de compra o venta respectivamente para beneficiarse de la diferencia entre el precio de ejercicio y el precio de mercado. Cabe destacar que a este beneficio hay que restarle el precio de la opción para obtener el beneficio neto.

4.1.2. Volatilidad Implícita

Cuando se habla de volatilidad implícita, se está refiriendo a lo que el mercado cree (o implica) que es el valor de la opción. Opuestamente a lo que ocurre con la volatilidad histórica, la cual se puede medir de manera exacta, la volatilidad implícita se podría definir como un indicador de cuanto está dispuesto a pagar el mercado por una opción. Aplicado a Black Scholes, una práctica común es la de observar el precio de mercado de una opción, y a partir de ese precio determinar σ que insertada en la fórmula de Black Scholes, produce, como resultado, el precio observado. (Cvitanic.J, Zapatero.F, 2003). Desafortunadamente, no es posible invertir la fórmula de tal forma que σ sea expresada en función de $S_0, K, r, T, y\ c$. (Hull.J, 2012). Dicho valor se obtiene a través de un proceso de experimentación simple basado en probar distintos valores de σ hasta obtener el precio de mercado, el cual se conoce como *prueba y error,* o *trial and error* en inglés.

Por otra parte, la volatilidad implícita se puede enfocar como el sentido de urgencia que los operadores de bolsa tienen sobre las opciones. Debido a esta urgencia, se reflejará una mayor volatilidad implícita en aquellas opciones que tengan una demanda mayor dentro del mercado. Por definición, cuando el precio de una opción sube y el precio del activo subyacente se mantiene igual, la volatilidad estimada será mayor. En el mercado real, el propietario de la opción se beneficia mientras que el vendedor de la opción se ve perjudicado. (Hull.J, 2012). De tal forma, es el sentimiento de urgencia o la expectación de que el precio del subyacente va a cambiar drásticamente lo que lleva a que los operadores (a través de órdenes de compra) generen presión para que el precio de la opción tienda al alza.

Por lo tanto, una vez mencionado lo anterior, se concluye que la volatilidad implícita es una figura dinámica que cambia en función de la actividad en el mercado de opciones financieras. Como se ha mencionado anteriormente, la volatilidad implícita se expresa como un porcentaje del precio del activo subyacente, indicando un movimiento de una desviación estándar durante el periodo de un año. Si se asume en este caso, que el precio sigue una distribución normal, podemos aplicar el concepto estadístico que establece que el precio de un activo se comprenderá dentro de una desviación estándar de su precio original el 68% de las veces. Supongamos que la acción de Amazon está cotizando a 50$

y que la volatilidad implícita para un contrato de opciones es 20%. Esto implica que hay un consenso en el mercado de que un movimiento de una desviación estándar durante el próximo año será de 10$ en cualquier dirección (dado que el 20% de 50$ es igual a 10$). Por lo tanto, el mercado piensa que hay una probabilidad del 68% de que el precio de Amazon dentro de un año se encuentre comprendido entre 40$ y 60$. Si extendemos este ejemplo práctico, podemos también concluir que solamente hay un 32% de posibilidades de que el precio de Amazon se encuentre fuera de ese rango. El 16% de las veces estará por encima de 60$ y el otro 16% restante estará por debajo de 40$.

4.2. Fórmula de Black Scholes

La fórmula desarrollada para la valoración de opciones a través de este modelo se basa en los procedimientos y bases previamente mencionados. Sin embargo, cabe destacar las siguientes suposiciones teóricas antes de desarrollar la fórmula de valoración:

1. La volatilidad σ es constante (calculada como se detalla en los apartados anteriores)
2. No existe arbitraje en el mercado
3. Los precios de las acciones siguen una distribución lognormal
4. Los mercados tienen liquidez
5. No hay bid-ask spread (diferencia entre el precio que los vendedores están dispuestos a aceptar y el precio que los compradores están dispuestos a ofrecer)
6. No hay costes de transacción
7. Existe la misma tasa de interés libre de riesgo tanto para prestar como para pedir prestado dinero.
8. El tipo de interés *r* es constante

Partiendo de estas suposiciones, en *The Pricing of Options and Corporate Liabilities* (Black y Scholes, 1973: 644) obtienen las siguientes fórmulas para el precio de una opción call y put:

$$C(S_t, t) = S_t N(d_1) - Ke^{-r(T-t)} N(d_2)$$

$$P(S_t, t) = Ke^{-r(T-t)} N(-d_2) - S_t N(-d_1)$$

Donde:

$$d_1 = \frac{ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = \frac{ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

$N(x)$ se refiere a la función de distribución Normal

Dichas fórmulas, son las soluciones más conocidas para la ecuación diferencial de Black-Scholes-Merton:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf$$

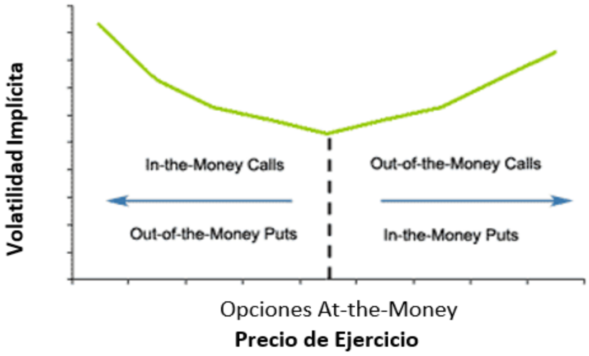
Una de las propiedades fundamentales para el desarrollo de esta ecuación por sus autores, es la valoración neutral al riesgo. Esta propiedad implica que la ecuación diferencial no incluye ninguna variable que se ve afectada por las preferencias de riesgo de los inversores. Como se puede apreciar, las variables que aparecen son el precio actual del activo (S), el periodo de tiempo (t), la volatilidad del precio (σ), y la tasa libre de riesgo (r), y f se considera la variable que representa el precio de una opción contingente en S. De tal forma, el principio de valoración neutral al riesgo establece que el precio justo de una opción es el cobro esperado en la fecha de vencimiento (para el comprador) descontado al presente usando la tasa libre de riesgo r. (Hull.J, 2012).

4.3. Representación Gráfica de la Volatilidad Implícita

La manera a través de la cual se representa la volatilidad es utilizando la sonrisa de la volatilidad. Dicha representación se lleva a cabo utilizando como ejes el precio de ejercicio y la volatilidad implícita de un grupo de opciones con la misma fecha de expiración. Como se ha detallado en el apartado previo, la volatilidad implícita se deriva a partir del modelo Black-Scholes, y la volatilidad se ajustará según la fecha de expiración de la opción y su grado de dinero.

Como se ha explicado previamente, cambios en el precio de ejercicio de una opción afectan directamente a que una opción esté In-the-Money o Out-of-the-Money. En el siguiente gráfico se puede apreciar la relación entre la volatilidad implícita de una opción y su precio de ejercicio, la cual formará la sonrisa de la volatilidad:

Ilustración 4: Ejemplo de la Sonrisa de la Volatilidad



Fuente: XTB Trading

Una vez que se ha representado gráficamente dicha relación, se procederá a explicar las posibles alternativas por las cuales se obtiene esta forma tan particular. En primer lugar, un factor fundamental es la diferencia en la demanda según el precio de ejercicio de una opción con la misma fecha de expiración. Esto ocurre ya que para los corredores de bolsa las opciones que están In-the-Money y Out-of-the-Money son más atractivas en términos de inversión. Con respecto a las primeras, supone una buena oportunidad para un operador que está dispuesto a pagar una prima más alta por una inversión más segura y que tiene la intención de ejecutar su derecho de compra o venta en la fecha de expiración. Por otra parte, en el caso de las segundas, resultan más atractiva para los inversores debido a que las primas que hay pagar para obtener la posesión de la opción son bastante pequeñas por lo que el beneficio potencial que el trader puede obtener es mayor. Sin embargo, hay que tener en cuenta que la posibilidad de que la opción se ejecute es menor. Siguiendo esta explicación, si el precio de una opción incrementa debido a cambios en la demanda, dejando el resto de las variables constantes, la volatilidad implícita del activo subyacente incrementa.

Otra explicación para la sonrisa de la volatilidad se basa en las opciones con precios de ejercicio que se alejan considerablemente del precio actual del activo subyacente y que por lo tanto las hace estar muy In-the-Money o Out-of-the-Money. Este tipo de opciones representa eventos donde puede tener lugar un movimiento repentino en los mercados tanto al alza como a la baja (corrección cíclica, decisión monetaria de los bancos centrales, etc). Dichos movimientos en los mercados se caracterizan por una elevada volatilidad, lo cual haría que el precio de las opciones incremente.

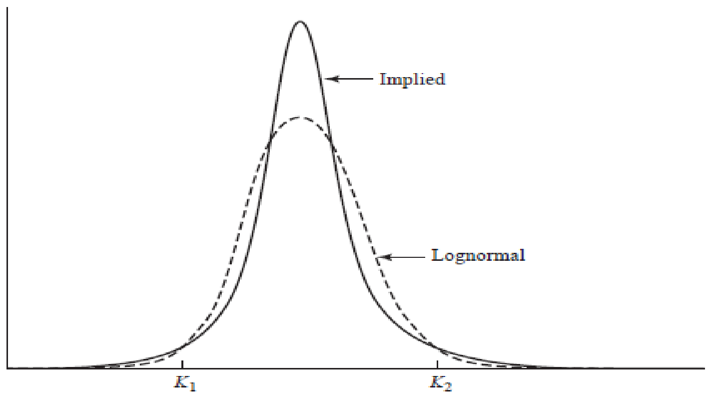
4.3.1. Representación Gráfica de la Volatilidad en Opciones sobre Divisas

La sonrisa de la volatilidad se observa con bastante frecuencia en los mercados de opciones de divisas o FX según sus siglas en inglés. En este caso, la sonrisa se observa como el consenso general de que los retornos no van a seguir una distribución lognormal, sino que van a ser más extremos en la realidad. A partir de la sonrisa de la volatilidad de una opción de divisa con diferentes precios de ejercicio, pero con la misma fecha de expiración se puede determinar la distribución implícita. (Hull.J, 2012). Si dicha distribución se compara con una distribución lognormal con la misma media y desviación estándar, se observaría como las colas de la distribución implícita son más extensas y también su pico es más alto, lo cual implica que tanto movimientos pequeños y grandes en los tipos de cambio son más probables que en la distribución lognormal. Para clarificar esta diferencia, se puede tomar como ejemplo el caso presentado por John C. Hull (2012) en su libro.

En primer lugar, se considera una opción call que está muy out-of-the money y que tiene un precio de ejercicio alto, el cual se denotará como K2. Para que el poseedor de esta opción ejecute su opción de compra, el tipo de cambio deberá estar por encima de K2. Por otra parte, se considera una opción put muy out-of-the-money con un precio de ejercicio bajo, el cual se denomina K1. Para que el propietario ejecute esta opción el tipo de cambio deberá estar por debajo de K1.

Ilustración 5: Ejemplo de Distribución Implícita y Lognormal para opciones sobre divisas

.



Fuente: Options, Futures, and Other Derivatives (1993)

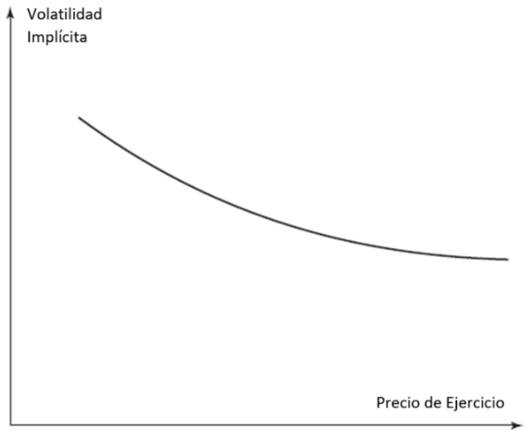
Una vez que se observa gráficamente los dos tipos de distribución se pueden sacar conclusiones con respecto al ejemplo propuesto previamente. En primer lugar, en el caso de la opción call con precio de ejercicio K2, se observa como la probabilidad de que el tipo de cambio sea superior a K2 es mayor para la distribución implícita que para la distribución lognormal. Por lo tanto, se espera que la distribución implícita otorgue un precio relativamente alto para esta opción. Un precio alto conllevaría una volatilidad implícita alta, lo cual se aprecia claramente en el gráfico de la sonrisa de la volatilidad. Por otra parte, en el caso de la opción put con precio de ejercicio K1, se vuelve a observar la misma situación que con la call, ya que la probabilidad de que el tipo de cambio sea menor que K1 es mayor en la distribución implícita que en la distribución lognormal. De la misma manera, la distribución implícita otorgará un precio relativamente alto a esta opción y como consecuencia, su volatilidad implícita será mayor.

Antes de proceder a analizar la función y la relevancia de la volatilidad en los modelos de opciones, es importante mencionar otro tipo de representación gráfica de la volatilidad implícita. Según el tipo de activo subyacente dicha representación obtendrá una forma distinta ya que no siempre se formará la sonrisa de la volatilidad mencionada anteriormente.

4.3.2. Representación Gráfica de la Volatilidad en Opciones sobre acciones

Además de tipos de cambio de divisas, otro de los activos subyacentes más comunes sobre los cuales hay un gran número de opciones, son las acciones, o como se conoce en el mundo anglosajón, "equity". Con respecto a la representación gráfica de la volatilidad en este tipo de opciones, es importante destacar una característica importante. Antes de 1987, para este tipo de opciones la representación de la volatilidad implícita en función del precio ejercicio no tenia tal forma. En octubre de 1987, tuvo lugar un "market crash" el cual cambio la manera en que los inversores pensaban sobre las opciones que tuviesen un activo de renta variable como subyacente. La manera en la que el mercado empezó a valorar este tipo de opciones hace indicar un incremento de la "crash-o-phobia" por parte de los inversores. (Rubinstein.M, 1994). De tal forma, a partir de 1987 la sonrisa de la volatilidad para dichas opciones tomó la siguiente forma:

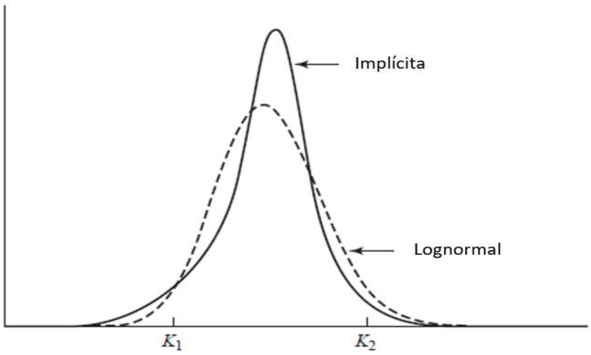
Ilustración 6: Ejemplo de la Sonrisa de la Volatilidad en Opciones sobre acciones



Fuente: Options, Futures, and Other Derivatives (1993)

Como se puede apreciar, la volatilidad desciende a medida que el precio de ejercicio incrementa mientras que cuanto menor es el precio de ejercicio, mayor volatilidad implícita tiene la opción. Al igual que en el caso anterior, es importante entender y visualizar la diferencia entre la distribución implícita y la lognormal para opciones con acciones como activo subyacente. El siguiente gráfico muestra las dos distribuciones:

Ilustración 7: Ejemplo de la Distribución Implícita y Lognormal para opciones sobre acciones



Fuente: Options, Futures, and Other Derivatives (1993)

La distribución implícita que aparece en el gráfico superior corresponde a la sonrisa de la volatilidad para opciones sobre acciones. Por otra parte, la línea discontinua representa una distribución lognormal con una media y desviación típica igual a la distribución implícita. A primera vista se puede observar como la distribución implícita tiene una cola izquierda más pesada y amplia que la distribución lognormal. Por otra parte, en el caso de la cola derecha de la distribución implícita se aprecia como es menos pesada y más inclinada que la distribución lognormal. Al igual que en el caso de las opciones para los tipos de cambio de divisas, es importante entender la relación entre el gráfico 4 y el 5 y demostrar que son consistentes entre sí. Para constatar esta situación se puede hacer referencia a un ejemplo propuesto por John C. Hull (2012).

En primer lugar, se asume que existen dos opciones Out-of-the-Money, una call y un put con precios de ejercicio K2 y K1 respectivamente. En el caso de la opción call, se puede observar como su precio es menor cuando se usa la distribución implícita que cuando se utiliza la distribución lognormal. Como se ha mencionado previamente, una opción call solamente es ejecutada y beneficiosa cuando el precio de mercado es superior al precio de ejercicio. En caso del ejemplo propuesto, la probabilidad de que el precio se sitúe por encima de K2 es menor para la distribución implícita que para la distribución lognormal. De tal forma, tiene sentido que el precio dado por dicha distribución sea relativamente menor y consecuentemente su volatilidad implícita sea también menor. En el gráfico 4 de la sonrisa de la volatilidad se puede observar claramente que esta situación se refleja en la forma de la sonrisa. Prosiguiendo con el ejemplo, con respecto a la opción put que se encuentra Out-of-the-money, la probabilidad de que el precio de mercado sea menor al precio de ejercicio, y que por lo tanto sea ejecutada en la fecha de expiración, es mayor usando la distribución implícita que la distribución lognormal. Como consecuencia, el precio dado será relativamente mayor y su volatilidad implícita superior.

Para concluir este apartado se puede destacar el papel fundamental que las distribuciones implícitas tienen a la hora de determinar los precios de opciones financieras. En el mundo financiero y más concretamente, en el mundo de los derivados financieros, se asume que los retornos de los activos subyacentes siguen una distribución lognormal en lugar de una distribución normal ya que concuerda y es más consistente con la realidad de los mercados financieros en varios aspectos. En primer lugar, la distribución lognormal tiene un límite inferior de cero y la cola derecha más pesada. Como se ha mencionada previamente dicha distribución se usa comúnmente para describir varios activos financieros, como puede ser el precio de una acción. Por las dos características anteriores, la distribución lognormal se ajusta mejor a la realidad de los mercados financieros ya que ningún activo puede tener un precio negativo y teniendo un limite inferior de cero, cumple completamente este requisito. Sin embargo, como se ha podido ver con los dos ejemplos de opciones sobre acciones y tipos de cambio de divisas, en ocasiones la distribución lognormal no representa la realidad actual de los mercados. Esto ocurre ya que dicha distribución al fin y al cabo proporciona y estima un rango de precios posibles para el activo a partir de la media y desviación típica de dicho activo en el pasado. Eventos repentinos o simplemente por la irracionalidad de los inversores (sentimientos de temor o avaricia) causan diferencias entre lo establecido por la distribución lognormal y la realidad del activo reflejada en la distribución implícita.

5. Modelos Alternativos

Los modelos analizados en este trabajo hasta el momento (Binomial y Black Scholes) tratan a la volatilidad como una constante. Sin embargo, existen modelos en los cuales la volatilidad se trata como una variable no constante. A continuación, se procederá a analizar brevemente tres modelos donde la estimación de la volatilidad sigue esta tendencia.

5.1. Modelo ARCH

Los modelos ARCH/GARCH son una clase de modelos que se basan en el análisis econométrico y de series temporales. De hecho, el nombre ARCH es un acrónimo para Modelos Autorregresivos con Heteroscedasticidad Condicional. En este tipo de modelos el rendimiento del activo subyacente se modeliza en términos de la dependencia funcional de los valores actuales en los valores anteriores, más un término aleatorio. (Cvitanic.J, Zapatero.F, 2004).

En primer lugar, estos modelos parten del rendimiento logarítmico diario u_i del activo de tal forma que:

$$u_i = ln \frac{S_i}{S_{i-1}}$$

Luego dadas *n* observaciones, la fórmula para la varianza σ^2, es:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (u_i - \bar{u})^2$$

donde:

$$\bar{u} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} u_i$$

Cabe destacar que u_i puede representar también rendimientos relativos implicando que:

$$u_i = \frac{S_i - S_{i-1}}{S_{i-1}}$$

Así mismo, John C Hull (2012) establece que para el calculo de la varianza en este contexto:

- $\bar{u}$ se asume que es igual a cero debido a que el cambio diario esperado en una variable es muy pequeño en comparación a la desviación estándar de los los cambios.
- $n-1$ se sustituye por *n*.

A partir de estos cambios la fórmula para la varianza se simplifica a:

$$\sigma^2{}_n = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} u^2{}_{n-1}$$

Hasta este momento, el procedimiento de estimación de la volatilidad se asemeja al utilizado en el modelo Black Scholes para la volatilidad histórica, sin embargo, a continuación se detallará el proceso característico de los modelos ARCH.

Como se puede observar, la ecuación anterior otorga el mismo peso a todas las observaciones recogidas en la muestra. Por lo tanto, se considera que a la hora de estimar la varianza se otorgue un mayor peso a las observaciones más recientes para llegar a un modelo que quedaría de la siguiente manera: (Cvitanic.J, Zapatero.F, 2004).

$$\sigma^2{}_n = \sum_{i=1}^{m} w_i u^2{}_{n-1}$$

Donde los pesos $w_i$son positivos y cumplen:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

Si en dicho modelo se incluye la idea de que hay una volatilidad a largo plazo V_L a la cual se deber otorgar un peso para calcular la varianza actual se obtiene el modelo GARCH, el cual fue desarrollado en *Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of UK Inflation* (Engle, R.F. 1982 : 987-1008):

$$\sigma^2{}_n = \alpha V_L + \sum_{i=1}^{m} w_i u^2{}_{n-1}$$

Donde

$$\alpha + \sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

5.2. Modelo GARCH

A partir del modelo ARCH es posible llegar al modelo GARCH. En primer lugar, se ha de cambiar las formas de los pesos de tal forma que:

$$w_i = (1 - \lambda)\lambda^{i-1}$$

Donde λ toma un valor entre cero y uno.

Al mismo tiempo, se puede observar que:

$$w_i = \lambda w_{i-1}$$

De manera que el peso que se otorga a la observación *i-1* es igual al peso otorgado a la observación *i* reducida por el factor λ. (Hull. J, 2012). Consecuentemente, el modelo

$$\sigma^2{}_n = \sum_{i=1}^{m} w_i u^2{}_{n-1}$$

se convierte en:

$$\sigma^2{}_n = (1 - \lambda) \sum_{i=1}^{m} \lambda^{i-1} u^2{}_{n-1}$$

El cual, si se asume que *m* es lo suficientemente de tal forma que el último término es irrelevante se llega a: (Cvitanic.J, Zapatero.F, 2004).

$$\sigma^2{}_n = \lambda\sigma^2{}_{n-1} + (1 - \lambda)\, u^2{}_{n-1}$$

A partir de este modelo, en *Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity* (Bollerslev.T, 1986: 307-327), desarrolla el modelo GARCH donde incorpora, al igual que en el modelo ARCH, la volatilidad a largo plazo para obtener la siguiente ecuación:

$$\sigma^2{}_n = w_1 V_L + w_2 \sigma^2{}_{n-1} + w_3 u^2{}_{n-1}$$

5.3. Modelo EWMA

Dado que el modelo EWMA es un caso específico del modelo GARCH comentado en el subapartado anterior, se hará una breve descripción de este modelo para que de esta manera el lector pueda entender la relación entre ambos y sus diferencias.

En este modelo la característica principal se basa en que los pesos w_i descienden de manera exponencial a medida que las observaciones se alejan atrás en el tiempo.

De tal forma, a partir de la fórmula del modelo GARCH:

$$\sigma^2{}_n = w_1 V_L + w_2 \sigma^2{}_{n-1} + w_3 u^2{}_{n-1}$$

El modelo EWMA establece que:

$$\sigma^2{}_n = \lambda \sigma^2{}_{n-1} + (1-\lambda)\, u^2{}_{n-1}$$

Por lo tanto, es un caso especifico cuando en el modelo GARCH

- $w_1 = 0$
- $w_2 = \lambda$
- $w_3 = (1-\lambda)$

El modelo EWMA está diseñado para seguir los cambios en la volatilidad, de tal forma que cuando se obtiene una observación nueva de la variable del mercado, se puede calcular el nuevo cambio diario porcentual y usar la formula del modelo para actualizar la tasa de volatilidad. (Hull. J, 2012).

Como se puede observar, el valor de λ será determinante para establecer la magnitud de la nueva observación en la nueva estimación de la volatilidad. Cuanto menor sea λ, la observación más reciente tendrá por lo tanto un peso mayor.

6. Ejemplos Prácticos de la Estimación de la Volatilidad en los Modelos Analizados

Con el fin de ofrecer al lector un enfoque no sólo teórico, sino también practico en el proceso de estimación de la volatilidad, a continuación, se ilustrarán los modelos Binomial y Black Scholes, a través de la plataforma Microsoft Excel.

Para la ilustración práctica de ambos, se ha utilizado una opción call europea para la empresa americana Apple (AAPL) con fecha de vencimiento el 21 de septiembre de 2018, y precio de ejercicio de 205$. La recolección de datos tuvo lugar el día 05/06/2018 (a partir de ahora, fecha de observación) por lo cual en ese momento la opción vencía en 75 días laborables. Adicionalmente el precio de una acción de Apple ese mismo día era de 193.31$.

La siguiente imagen fue tomada el día de la recopilación de datos con los datos relevantes del contrato call:

Ilustración 8: Tabla Informativa de la opción de Apple

Apple Inc. Sep 21 2018 205.00 Call(@AAPL 180921C00205000)

Last Sale	3.90	Tick	
Net	0.49	Bid	3.90
Day High	4.15	Ask	3.95
Day Low	3.61	Bid Size	8
Volume	7863	Ask Size	109
Prev Close	3.41	Contract High	6.36999988
Open	3.84	Contract Low	0.569999992
Open Interest	8520	Market	OPRAC

Fuente: Nasdaq

6.1. Ejemplo Práctico en Black Scholes

Como se menciona en el apartado 4.1, en el cual se hace referencia a la estimación de la volatilidad en el modelo Black Scholes, se destaca que la volatilidad que se introduce en el modelo puede ser o bien la histórica o la implícita.

En este ejemplo práctico se valorará la opción de Apple utilizando ambos métodos para que de esta manera se puedan comparar los resultados obtenidos.

En primer lugar se estimará la volatilidad histórica. Para llevar a cabo dicha estimación se han calculado los días laborales desde la fecha de observación hasta la de vencimiento. Como se menciona en la introducción a este apartado, se obtuvieron 75 días laborales. Con el propósito de proporcionar claridad a este ejemplo, el número de observaciones de precios históricos será igual al número de días hasta vencimiento. Para calcular hasta que fecha debemos observar los precios históricos en función de los días laborales, se ha utilizado la siguiente función:

=DIA.LAB((FECHA(2018,6,5)),-75)

La gran utilidad de esta función es que a partir de una fecha establecida por el usuario y el numero de días laborales que se quiera retroceder, se obtiene una fecha exacta. En este caso, la fecha obtenida fue el 20/02/2018. Por lo tanto, se recogen precios históricos de Apple hasta dicha fecha. Cabe destacar que a la hora de obtener los datos históricos hasta la fecha mencionada se obtuvieron 74 observaciones, por lo que para igualar el número de días se realiza una observación adicional del siguiente día laboral, el 16/02/2018.

Una vez que se han recogido los datos requeridos, a través de la función =DESVEST.P, se calcula la desviación estándar *s* de los rendimientos logarítmicos, para obtener un valor de 0.015003. A partir de este resultado, la volatilidad que se utilizará en el modelo se calcula:

$$\frac{s}{\sqrt{\tau}}$$

En dónde *s* es la desviación estándar obtenida, y τ es 1/252 debido a que se están tratando rendimientos diarios. Véase que el denominador no es 365, puesto que, al tratar con días laborales, no sería consistente. Aplicando esta fórmula, se obtiene una volatilidad de 0.238166, es decir 23.82%.

Una vez que se ha estimado la volatilidad histórica, se necesitaría obtener la tasa libre de riesgo apropiada para la opción call de Apple. Dado que el mes de vencimiento es septiembre, y la fecha de observación tiene lugar en junio, una aproximación apropiada para este valor el yield a 3 meses de un bono emitido por el Gobierno de los Estados Unidos. Dado que la opción cotiza en el marcado americano, dicha aproximación es consistente con la opción que se está valorando. De tal forma, a través de la plataforma Bloomberg, se obtiene que dicho valor es de 1.94%.

A partir de los datos obtenidos, se puede proceder a valorar la opción de Apple. A continuación, se muestran los resultados obtenidos:

Ilustración 9: Modelo Black Scholes para la opción call de Apple

Precio del Activo Subyacente	193.31 $
Precio de Ejercicio	205.00 $
Volatilidad histórica	23.82%
Tasa libre de riesgo	1.94%
Tiempo a Vencimiento	75/252
d1	-0.342493481
N(d1)	0.365989775
d2	-0.47242342
N(d2)	0.318312295

Resultados

Precio Obtenido	5.77 $
Precio de Mercado	3.9 $

Fuente: *Elaboración Propia*

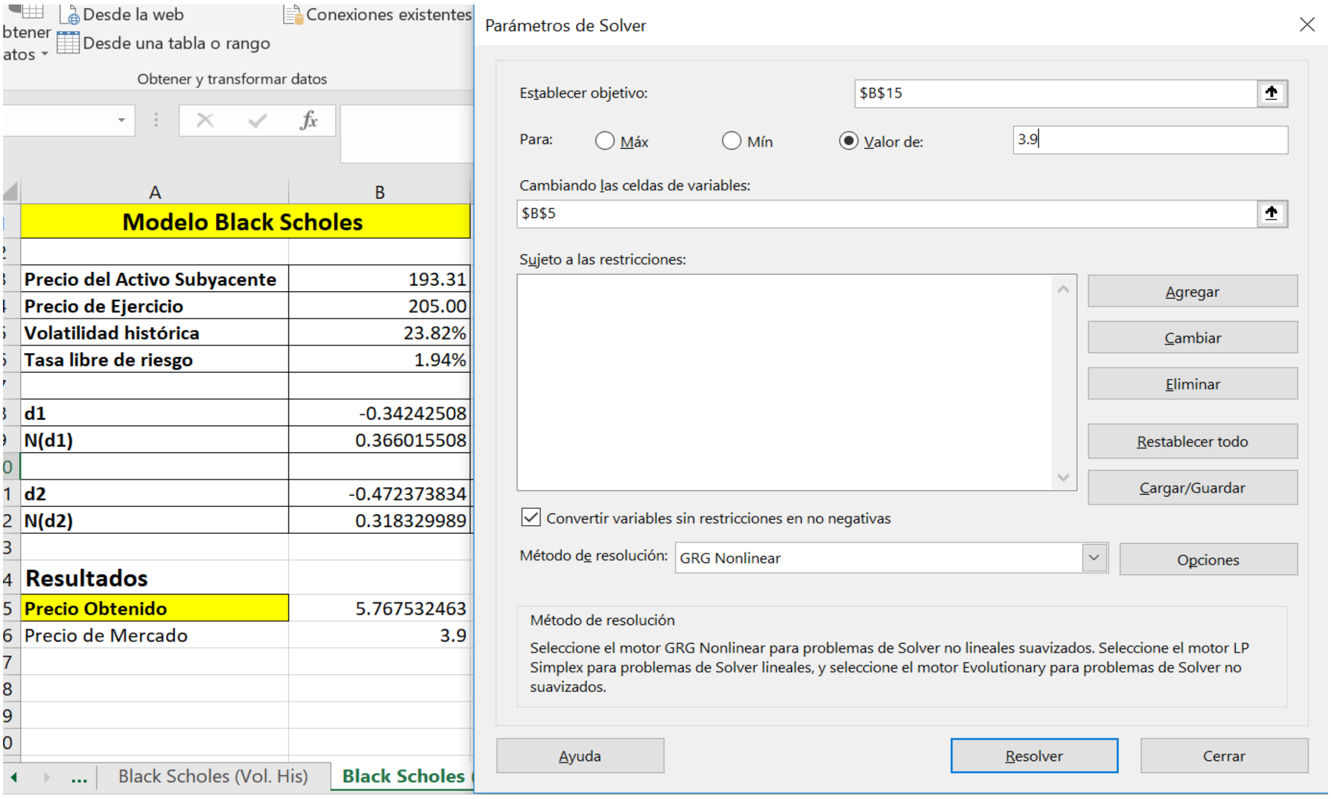
Como se pude observar a partir de los inputs del modelo, se obtiene un valor de 5.77$ para la opción, el cual es superior al que en la fecha de observación cotizaba. A partir de estos resultados se podrían diseñar estrategias de trading para beneficiarse de un posible arbitraje en el mercado, sin embargo, ese no es el propósito de este trabajo.

Por otra parte, el otro método posible es a través de la obtención de la volatilidad implícita. Dado que ya se tienen todos los factores del modelo, a través de una herramienta de análisis de datos disponible en Microsoft Excel se puede calcular la volatilidad implícita para esta opción. Recordar que la volatilidad implícita es aquel valor que al utilizarse en el modelo Black Scholes tiene como resultado el mismo precio del mercado.

Para realizar dicha estimación se utilizará la herramienta SOLVER. Solver trabaja con un grupo de celdas variables que se usan para calcular fórmulas en las celdas objetivo. Solver ajusta los valores de las celdas de variables para que cumplan con los límites de las celdas de restricción y den el resultado deseado en la celda objetivo.

De tal forma, a partir de la Ilustración 9, se utiliza la herramienta SOLVER:

Ilustración 10: Utilización de la herramienta SOLVER para calcular la volatilidad implícita



Fuente: *Elaboración Propia*

Como se puede observar la celda objetivo B15 es la que muestra el valor obtenido por el modelo, de tal forma, se desea que dicha celda sea igual a 3.9, que es el precio de mercado de la opción en el momento de la observación. Al mismo tiempo, la celda variable será la B5, que es la que establece la volatilidad del precio de Apple. Una vez que se tienen dichos parámetros establecidos, se elige la opción "Resolver", y se obtiene un valor de volatilidad implícita de 18.99%, el cual es menor que la volatilidad histórica calculada. Siguiendo el modelo presentado en la Ilustración 9, se corrobora que, con este cambio, el precio obtenido es de 3.9$.

6.2. Ejemplo Práctico en el Modelo Binomial

En el modelo binomial, a partir de la volatilidad histórica estimada se deben obtener los factores de crecimiento y descenso que así mismo se utilizarán para obtener las probabilidades neutrales al riesgo de un movimiento al alza y a la baja. Dado que la volatilidad σ utilizada para obtener dichos factores es la histórica, se utilizará el valor obtenido en Black Scholes, 23.82%.

De tal forma se obtienen los siguientes parámetros para el modelo binomial:

Ilustración 11: Parámetros para el Modelo Binomial

Inputs	
Precio Actual de la Acción	$193.31
Factor de crecimiento *u*	1.14
Factor de descenso *d*	0.88
Tasa libre de riesgo	1.94%
Precio de Ejercicio	$205.00
Tiempo a vencimiento	75/252
Probabilidad de Su (*q)*	0.4898
Probabilidad de Sd (*1-q)*	0.5102

Fuente: *Elaboración Propia*

Donde:

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

$$d = \frac{1}{u}$$

$$q = \frac{e^{rt} - d}{u - d}$$

Una vez que se obtiene estos parámetros, se elabora una red binomial para el precio de la acción posible en los tres siguientes periodos (dado que hay 3 meses hasta la fecha de vencimiento) el cual queda de la siguiente manera:

Ilustración 12: Red Binomial para el precio de Apple

Periodo	**0**	**1**	**2**	**3**
Acción	$193.31	$220.13	$250.67	$285.46
		$169.76	$193.31	$220.13
			$149.07	$169.76
				$130.91

Fuente: *Elaboración Propia*

A partir de los cuatro posibles valores en el periodo 3 se aplica el proceso de iteración para llegar a un valor actual para el precio de la opción de Apple. Antes de estimar el precio de la opción debemos calcular el posible valor de las opciones en el periodo 3, el cual se calcula restando el precio de ejercicio al precio de Apple en ese periodo. Dado que se está valorando una opción call, en caso de que el precio de ejercicio sea mayor al precio del activo subyacente en ese periodo, el valor de la opción será cero. De tal forma, se obtiene:

Ilustración 13: Red Binomial para el precio de la opción call sobre Apple

Periodo	**0**	**1**	**2**	**3**
Opción	$14.94	$26.78	$47.05	$80.46
		$3.62	$7.40	$15.13
			$0.00	$0.00
				$0.00

Fuente: *Elaboración Propia*

Como se puede observar, el valor de la opción obtenido a través del modelo binomial es de 14.94$ siguiendo la regla:

$$x = e^{-rt}[qa + (1 - q)b]$$

Con lo cual, es evidente que el valor obtenido en este modelo difiere considerablemente con el valor de mercado de 3.90$. Una razón para dicha diferencia puede recalar en una de las presunciones de este modelo. Como se ha visto, en el modelo binomial el precio del activo subyacente puede tomar sólo dos posibles valores en el periodo futuro, sin embargo, en la realidad, este no es el caso puesto que los posibles valores de una acción son incontables. Por otra parte, las probabilidades de un movimiento a la baja o al alza utilizadas en el modelo son probabilidades neutrales al riesgo, es decir que se considera que los inversores tienen una actitud indiferente hacia el riesgo de una inversión, y en la realidad este no es el caso dado que hay una gran variedad de perfiles de inversor con distintas preferencias y actitudes.

7. Conclusión

El título de este trabajo establece un claro objetivo, analizar de qué manera se estima la volatilidad en los modelos de valoración de opciones. Como se ha ilustrado a lo largo de este trabajo, la volatilidad se puede considerar como la variable más importante a la hora de determinar el precio de una opción. En el modelo Binomial, la volatilidad del activo es el factor del cual depende la estimación de los valores de crecimiento u y descenso d, que, a su vez, son los factores de los cuales dependen las probabilidades p y q que hacen referencia a movimientos del precio al alza y a la baja respectivamente.

Así mismo, en este trabajo se ha ilustrado cómo en el modelo Black Scholes, la volatilidad no solamente es uno de los cinco parámetros necesarios para valorar una opción, sino que también está presente en la distribución de los precios futuros del activo subyacente. También se ha observado en la ejemplificación práctica de la estimación de la volatilidad en ambos modelos que los resultados difieren con respecto al valor actual del mercado. A partir de dichos resultados, se deduce que el modelo Black Scholes se aproxima más a la situación real del mercado que el modelo Binomial.

Por otra parte, mientras que en los dos modelos previos la volatilidad se modeliza como una constante, existen otro tipo de procedimientos que estiman la volatilidad tratándola como una variable estocástica, como son los modelos ARCH, GARCH, y EWMA, los cuales otorgan un mayor peso a las observaciones más recientes a la hora de estimar la volatilidad.

Desde una perspectiva personal, dado que mi experiencia académica no tiene una base muy profunda de asignaturas cuantitativas, considero que este trabajo puede ser de utilidad para aquellas personas que, con un perfil similar al mío, tengan curiosidad por primera vez hacia la valoración de derivados financieros y el comportamiento de los precios de activos. En base a esta línea de argumentación, considero también que este trabajo podría ser una base inicial de desarrollo para aquellas personas con una mayor experiencia matemática y cuantitativa que deseen analizar en profundidad alguno de los modelos mencionados en este trabajo.

Igualmente, cabe destacar que la mayoría de este trabajo se ha realizado fuera de mi área de confort. Con este apunte pretendo destacar que en términos de aprendizaje y desarrollo mi objetivo principal ha sido mayoritariamente el de trabajar y analizar modelos y conceptos matemáticos con los que no había tratado con anterioridad para poder obtener lo máximo posible de este trabajo.

Finalmente, me gustaría comentar que la motivación por realizar este trabajo surge a partir de una clase de Cálculo Financiero y Valoración de Derivados que tuvo lugar en Boston durante mi periodo de intercambio académico, donde se analizó paso por paso la construcción de diversos modelos de valoración de opciones y el comportamiento del precio de los activos. A partir de ese momento mi curiosidad e intriga por intentar comprender y analizar los derivados financieros ha crecido cada día y me ha llevado a realizar este trabajo con el cual he desarrollado y profundizado mi conocimiento sobre la valoración de derivados financieros a la vez que espero haber podido ilustrar de una manera clara y concisa los distintos procedimientos de valoración y estimación de la volatilidad.

8. Bibliografía

Bachelier, L. (1900). The Theory of Speculation. *Annales scientifiques de l'Ecole Normale Superieure,* 21-86.

Black, F., & Scholes, M. (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy,* 637-654.

Bodie, Z., Kane, A., & Marcus, A. J. (2007). *Essentials of Investments.* Nueva York: McGraw Hill.

Bollerslev, T. (1986). Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 307-327.

Carabias, S. (2016). *Introducción a la Modelización de Mercados Financieros.* Madrid: Universidad Pontificia de Comillas.

Cox, J. C., Ross, S. A., & Rubinstein, M. (1979). Option pricing: A simplified approach. *Journal of Financial Economics,* 229-263.

Cvitanic, J., & Zapatero, F. (2004). *Introduction to the Economics and Mathematics of Financial Markets.* Boston: Massachusetts Institute of Technology.

Engle, R. F. (1982). Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation. *Econometrica,* 987-1007.

Finan, M. B. (2015). *A Basic Course in the Theory of Interest and Derivatives Market.* Arkansas Tech University.

Hull, J. C. (2012). *Options, Futures, and Other Derivatives.* Boston: Pearson.

Hull, J. C. (2012). *Risk Management and Financial Institutions.* Hoboken: Wiley.

International Swaps and Derivatives Association. (2016). *Derivatives - Facts and Figures.* ISDA.

Lintner, J. (1965). The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets. *The Review of Economics and Statistics*, 13-37.

Merton, R. C. (1973). An Intertemporal Capital Asset Pricing Model. *Econometrica*, 867-887.

Mossin, J. (1966). Equilibrium in a Capital Asset Market. *Econometrica*, 768-783.

Natenberg, S. (2003). *Mastering Option Trading Volatility Strategies.* Wiley.

Rubinstein, M. (1994). Implied Binomial Trees. *The Journal of Finance*, 771-818.

Sharpe, W. F. (1964). Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium Under Conditions of Risk. *The Journal of Finance*, 425-442.

Stampfli, J., & Goodman, V. (2001). *Las Matemáticas para finanzas.* Bloomington: Thomson.