FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y EMPRESARIALES, ICADE

LA EVOLUCIÓN DE LA MODELIZACIÓN DE LA INCERTIDUMBRE EN LA VALORACIÓN FINANCIERA

Análisis de los modelos CAPM, Arrow-Debreu, binomial y Black-Scholes

Autor: Fernando de Vasconcelos Guimarães Alves Machado
Director: Susana Carabias López

Madrid
Junio 2018

Fernando
de Vasconcelos
Guimarães
Alves Machado

LA EVOLUCIÓN DE LA MODELIZACIÓN DE LA INCERTIDUMBRE EN LA VALORACIÓN FINANCIERA

Índice

1. Resumen y *abstract*

a. Resumen

La incertidumbre es una realidad humana innegable y que afecta a muchas ramas del saber. En la economía y en las finanzas son varios los caminos que toman los distintos autores de los modelos de valoración clásicos para enfrentarse al problema que presenta la escasez de información sobre el futuro.

Las ciencias matemáticas ofrecen herramientas que permiten teorizar sobre la naturaleza de los activos y los agentes económicos. El objetivo es obtener de las distintas variables del modelo un valor de parámetro que asigne, por ejemplo, un precio a un activo.

Los modelos financieros se distinguen entre estáticos y dinámicos según haya uno o más periodos temporales a ser considerados, respectivamente. Los modelos estáticos suelen definir un único periodo de equilibrio (CAPM y Arrow-Debreu).

Dentro de los modelos dinámicos nos encontramos con los que presentan la evolución de las variables en tiempo discreto (binomial) y continuo (Black-Scholes). Presentamos intencionalmente un ejemplo para cada tipo de modelo.

Todos ellos guardan similitudes en su forma de modelizar la incertidumbre. Por ejemplo, Arrow y Debreu (1954) presentan las bases teóricas que servirán de estructura a los demás modelos: lo que para un periodo se hace en Arrow-Debreu, se puede hacer para varios periodos en el llamado proceso estocástico.

Se presentan cronológicamente a los modelos, haciendo hincapié no sólo en la forma como los modelos beben de las teorías de unos y otros para exponer sus ideas, pero también en sus peculiaridades.

Todo esto lo acompañamos con un riguroso tratamiento matemático de las ideas, yendo siempre a lo más elemental y explicando de forma intuitiva las ideas de tal forma que una persona que no sea versada en finanzas, pero si en matemáticas, pueda entender a los modelos clásicos de la valoración financiera.

PALABRAS CLAVE: Markowitz, CAPM, riesgo, incertidumbre, valoración, Black-Scholes, binomial, Arrow-Debreu, sigma-álgebra, información, filtración, matemáticas, finanzas, modelización, estocástico.

b. ***Abstract***

Uncertainty is an undeniable human reality that affects many branches of knowledge. In economics and finance, there are many tools that authors use in classical valuation models to tackle the issue that is the lack of information about the future.

Mathematics provides us with the tools that allow us to theorize over the nature of economic agents and assets. The objective of these models is to obtain from its variables a value of a parameter that could indicate, for instance, the price of a financial asset.

Financial models can be either static or dynamic depending on whether we consider one or many time periods. Static models often define one period of equilibrium (CAPM and Arrow-Debreu).

Dynamic models can in turn present the evolution of variables in either a discrete (binomial) or continuous (Black-Scholes) time set. We intentionally present an example for each type.

All these models hold similarities in their ways of interpreting uncertainty. For instance, Arrow and Debreu (1954) present a theoretical basis that will provide structure to other models: what Arrow-Debreu does for a single period can be done for each period of a dynamic model in a so-called stochastic process.

We present these models chronologically, emphasizing not only the way in which they resemble and use each other's ideas, but also the peculiarities that make them unique.

We accompany these ideas with rigorous mathematical language, never leaving even the most elemental concept unexplained, going over the intuition of ideas in such a way that someone who does not have a background in finance, but has the sufficient mathematical knowledge nonetheless, can understand these classical models of financial valuation through this text.

KEYWORDS: Markowitz, CAPM, risk, uncertainty, valuation, Black-Scholes, binomial, Arrow-Debreu, sigma-algebra, information, filtration, mathematics, finance, modelling, stochastic.

2. Introducción

a. Objetivo

Formalmente, el objetivo es poder describir en los modelos más relevantes del mundo empresarial (académico y profesional), como son el CAPM, Arrow-Debreu, el binomial, y Black-Scholes, el acercamiento matemático y estadístico que hace cada uno+ a lo incierto del mundo económico futuro.

Desde la cadena de aminoácidos más simple hasta el ser humano en su capacidad y dimensión intelectual, la complejidad del entorno natural somete a todos sus elementos, incluso a los abióticos y los meramente conceptuales, en un constante, dinámico, y muy a menudo impredecible proceso de cambio y evolución.

Cuando el biólogo observa la motilidad bacteriana, o cuando el físico mide el movimiento de partículas en fluidos, realmente se detienen sobre algo que es intrínseco a los propios objetos en cuestión: su aleatoriedad.

En ciencias donde esta propiedad es el eje en torno al cual gira el objeto de estudio, véase la meteorología o la política, el rigor matemático ha sido capaz de modelizar innúmeros fenómenos empíricos de forma innegablemente útil a la sociedad humana.

En economía, esta incertidumbre no es menos importante ni está menos presente. En el afán de describir el activo financiero, el proceso histórico-económico nos llevó a la reciente elaboración de varios modelos cuya utilización se manifiesta desde el tejido empresarial hasta incluso el más humilde individuo económico con riqueza invertible.

En esta disertación, abordaremos como se enfrentan cada uno de estos modelos al problema central que es la incertidumbre. Buscaremos describir como fue el proceso evolutivo de la modelización de esta incerteza en cada uno de los ejercicios, y como se difiere y se asemeja cada acercamiento académico, respetando su orden cronológico, teniendo en cuenta su objetivo y presente su naturaleza.

En especial, pretendemos con este trabajo resumir las matemáticas más esenciales que cubren los modelos más importantes y más abordados en estudios de ciencias económicas y empresariales en todo el mundo. Creemos que es importante que el alumno de estas ciencias se gradúe con un conocimiento profundo del esqueleto lógico que sostiene estas construcciones utilizadas ampliamente en el mundo empresarial, por lo que tanto la recopilación de información pertinente y nuclear de estos modelos, como su posterior estudio y lectura a lo largo de la carrera profesional, aportarán valor a la ejecución de esta.

Complementamos el estudio puramente financiero con definiciones y abstracciones matemáticas de valor que apoyen y fomenten esta idea de un aprendizaje profundo de los modelos, como es, por ejemplo, la definición matemática pura de algo discreto; o incluso se explica en el trabajo qué es algo binomial en su esencia más abstracta.

También, con esa misma intención, en mente explicamos el trabajo realizado en el mundo académico hasta alcanzar la forma última del modelo, como es el inevitable abordaje al modelo de Markowitz antes de desarrollar el CAPM como tal. En este ámbito, buscamos ofrecer una perspectiva histórica y contextualización a los hechos, incluso curiosidades y referencias culturales, no sólo para completar al entendimiento de los modelos, sino para también amenizar la lectura. Nuestra intención es hacer del trabajo algo que exija una comprensión muy mínima de finanzas, aunque sea conveniente la versación en cálculo, álgebra, y estadística básica.

La opinión del autor es que hay aportación académica en tanto que el trabajo de investigación requirió la recopilación de muchas obras de temas directa o indirectamente relacionados con estos resultados, pero que de todas formas son de alto valor académico e intelectual. Se aporta como contenido una lista bibliográfica que puede ser accedida por cualquier estudioso o interesado en el tema de las finanzas cuantitativas, que tiene a su disponibilidad a través de este trabajo una considerable cantidad de conocimiento (autores y obras), expuesto y compartido de forma práctica y precisa, y acompañados de una cuidada cronología, bastante curiosa.

b. Metodología

El trabajo requiere un riguroso análisis y síntesis de varios artículos, disertaciones, apuntes y en especial libros académicos sobre las matemáticas financieras.

A lo largo del trabajo se han utilizado diversas obras para entender a las matemáticas en que se apoyan los modelos, llegando a utilizarse referencias bibliográficas para lo más puntual. Esto es necesario en un tema donde un libro explica mejor una ecuación que otro por cualquier motivo estilístico o conjetural.

El trabajo requirió no sólo la comprensión teórica de los modelos, ya que esto es lo que realmente exponemos, sino también la realización de ejercicios prácticos propuestos en su mayoría por la tutora con el afán de confirmar dicha comprensión y de ser subsecuentemente capaz de poder traducirlo a palabras propias. Una parte significativa del trabajo, especialmente en el trato de los modelos financieros para derivados, los cuales están tratados pero breve y sutilmente en *Opciones, futuros, y otros derivados* (1988) de Hull, son deducciones del propio autor, que se puso el reto de demostrar algunas ideas de forma autónoma, aunque obviamente las demostraciones estén ampliamente disponibles en fuentes alternativas. Hemos pensado que el trabajo ganaría “personalidad” si el proprio autor tratara de exponer las matemáticas con su propia metodología y razonamiento.

Se utilizó la herramienta Excel simplemente para la realización de algunas gráficas explicativas con simulaciones empíricas.

3. La incertidumbre en los modelos estáticos: el modelo CAPM

a. Definición del tipo de modelo y del modelo ejemplar

En trazos muy generales, la valoración financiera busca modelizar variables económicas que se relacionan entre sí y se manifiestan a menudo en patrones determinados, con el fin último de obtener un precio (o el valor de un parámetro) de uno o más activos para un tiempo presente o futuro, dependiendo de la naturaleza del objeto de estudio. Es una actividad muy relevante para inversores y analistas en actividades de lo más variadas (aseguradoras, analistas de fusiones y adquisiciones, gestores de carteras, entre muchas otras). Requiere tanto un acercamiento científico riguroso, como un sólido nivel de intuición por parte del valorador.

Los primeros modelos en la valoración financiera se caracterizan por su carácter estático. En los modelos estáticos no se considera una evolución temporal de las variables, sino que se estudian sus relaciones cuantitativas para un solo momento de equilibrio.

Un clásico ejemplo de esta práctica es el *Capital Asset Pricing Model* estático usado en la optimización de la relación riesgo-rendimiento para cualquier cartera de un inversor. El CAPM estático se caracteriza por la simplicidad añadida de que se asume que la incertidumbre del rendimiento del activo capital se resume a la desviación típica de sus rendimientos históricos, desarrollada a partir del trabajo de Markowitz y explicada con más detenimiento más adelante. La gran aportación del CAPM en la valoración de acciones es la relevancia del coeficiente de correlación entre el rendimiento del activo y el del mercado general. Normalmente se toma como referencia al mercado un índice bursátil nacional significativo. El principal resultado del modelo es una ecuación que sigue la forma:

$$E(R_i) = r_f + \beta_i * (E(R_M) - r_f)$$

Notemos que aquí las variables aleatorias son los rendimientos del mercado R_M, y del activo R_i. El rendimiento del activo sin riesgo r_f no tiene carácter aleatorio, lo que es lo mismo que decir que la volatilidad es nula y por lo tanto su valor coincide con el de su esperanza. El coeficiente β_i indica en cierta medida, tal y como veremos con más detalle en la sección final de este apartado, la correlación entre el rendimiento del mercado y el del activo i.

b. Contextualización histórica

El modelo CAPM se originó después de que en 1952 Harry Markowitz planteara en su teoría de carteras la importancia de las relaciones entre los activos dentro de una misma cartera. Hasta entonces había sido escaso el planteamiento de esta idea en las finanzas, aunque desde un punto de vista cualitativo, ya se había expresado con bastante anterioridad tal y cómo advierte el refrán popular contra colocar todos los huevos en una misma canasta. Incluso Cervantes (1615: 168) hace referencia a esto cuando en la primera parte de la obra Sancho le advierte al valiente caballero:

> *Señor -respondió Sancho-, que el retirar no es huir, ni el esperar es cordura, cuando el peligro sobrepuja a la esperanza, y de sabios es guardarse hoy para mañana, y no aventurarse todo en un día.*

Los distintos activos financieros disponibles en el mercado responden cada uno a su manera a los cambios y estímulos producidos en ellos por el entorno económico. Se puede sostener, como ejemplo ilustrativo, que un activo como puede ser una acción de una petrolífera suba con el precio de la materia prima, y que a la vez se produzca una pérdida para el inversor en deuda pública de un país importador de esta.

Las diferencias que guardan los riesgos de los activos financieros, que dependen de su propia naturaleza, permite al inversor diversificar su capital invertido en un conglomerado de activos de naturalezas distintas. Las aportaciones de Markowitz y de los protagonistas del CAPM responden a como se mide el riesgo de cada activo y del conjunto de activos llamado cartera.

En el trabajo de Markowitz (1990) es clave la introducción de la desviación típica de los rendimientos históricos de una acción como medida central de su riesgo. En su autobiografía expone:

> *Los conceptos básicos de la teoría del porfolio se me ocurrieron una tarde en la biblioteca mientras leía a la Teoría del Valor de la Inversión de John Burr Williams.*

Williams proponía que el valor de una acción debería ser igual al valor presente de sus dividendos futuros. Dado que los dividendos futuros son inciertos, interpreté la propuesta de Williams de valorar una acción por sus dividendos futuros esperados. Pero si el inversor solo estuviera interesado en los valores esperados de los instrumentos, solo estaría interesado en el valor esperado de la cartera; y para maximizar el valor esperado de una cartera, es necesario invertir en un solo instrumento. Esto, lo sabía, no era la forma en que los inversores debían o deben de actuar. Los inversores se diversifican porque les preocupan tanto el riesgo como el rendimiento. La varianza vino a la mente como una medida de riesgo. El hecho de que la varianza de la cartera dependiera de las covarianzas de seguridad se sumó a la verosimilitud del enfoque. Dado que había dos criterios, riesgo y rentabilidad, era natural suponer que los inversores seleccionaban del conjunto de combinaciones riesgo-rentabilidad óptimas de Pareto.

El concepto revolucionario del modelo CAPM vino a ser la incorporación de esta idea en un modelo de equilibrio en los años 60, en especial por William Sharpe, pero también por Treynor, Lintner y Mossin. Su conclusión fundamental es que, para valorar a un activo, se ha de tener en cuenta su correlación con todo el mercado financiero.

La fama e importancia del modelo se debe a su facilidad estadística (la cual trataremos en seguida) y empírica a la hora de valorar el activo, y por ello ha sido extensamente empleado en el sector financiero desde su creación hasta hoy.

c. La volatilidad en el modelo CAPM estático

i. La desviación típica y la covarianza: estadística del modelo CAPM

Recordemos los siguientes conceptos estadísticos: sea una muestra de precios históricos de un activo A (o bien un índice I) $P = \{P_1, P_2, P_3, \dots P_n\}$, medidos en cualquier divisa, se puede definir un conjunto muestra de rendimientos capitales ordinarios en ausencia de dividendos según:

$$R_i = \frac{P_{1i} - P_{0i}}{P_{0i}}$$

Aquí se hace notar que no hemos empleado el rendimiento logarítmico intencionalmente. Este tiene propiedades como la aditividad en el tiempo, que para un modelo estático no son de particular necesidad. Recordamos la forma de los rendimientos logarítmicos:

$$R_i = \ln\left(\frac{P_{1i}}{P_{0i}}\right)$$

Hay una razón por la cual se ha empleado el rendimiento ordinario frente al logarítmico. Este cumple que el rendimiento de una cartera es la media ponderada de cada uno de los rendimientos de los activos que la componen, tal y como se demuestra al aplicar la definición de rendimiento ordinario al valor de la cartera C:

$$C_{1i} = C_{0i}(1 + R_i)$$

donde C_{1i} es el valor final de la cartera i, C_{0i} el inicial, y R_i su rentabilidad. Sabemos que los valores invertidos en cada título en el momento final $t = 1$ es:

$$C_1 = \sum_{i=1}^{n} C_{1i}$$

Con lo cual tenemos que:

$$C_1 = \sum_{i=1}^{n} C_{0i}(1 + R_i)$$

Teniendo en cuenta que el valor inicial de la cartera C es proporcional a la media ponderada por cantidad invertida en cada título, desarrollamos:

$$C_1 = \sum_{i=1}^{n} w_i C_0(1 + R_i) = C_0 \sum_{i=1}^{n} w_i(1 + R_i) =$$

$$= C_0\left(\sum_{i=1}^{n} w_i + \sum_{i=1}^{n} w_i\, R_i\right) = C_0\left(1 + \sum_{i=1}^{n} w_i R_i\right)$$

donde w_i es el peso de inversión en cada título respecto a la cartera (lógicamente, un porcentaje de todo el capital invertido en dicha cartera). Con lo cual el rendimiento ordinario de la cartera quedará:

$$R_C = \frac{C_1 - C_0}{C_0} = \frac{C_0(1 + \sum_{i=1}^{n} w_i R_i) - C_0}{C_0} =$$

$$= \frac{C_0 + C_0 \sum_{i=1}^{n} w_i R_i - C_0}{C_0} = \frac{C_0 \sum_{i=1}^{n} w_i R_i}{C_0} = \sum_{i=1}^{n} w_i R_i$$

Como medida de riesgo se toma, como dijimos ser clave según Markowitz (1952), a la desviación típica. Se obtiene por lo tanto un conjunto $R = \{R_1, R_2, R_3, \dots R_n\}$ de los rendimientos ordinarios aleatorios medidos en porcentaje (%) y de forma similar se procede con los cambios en los precios históricos del índice bursátil.

Comenzamos por definir la media o esperanza matemática: la media de todos los valores que puede tomar ponderada por la probabilidad de cada valor. Es el valor que mejor representa una variable aleatoria y puede calcular si es conocida la distribución de probabilidad de la variable.

$$E(X) = \sum_{\forall i} x_i * P(X = x_i)$$

Teniendo en nuestras manos como variable aleatoria nuestra rentabilidad, podemos tomar como estimador de su esperanza la media aritmética de la serie histórica obtenida. Esto se debe a que la media aritmética de una muestra es un estimador insesgado y consistente de su población sea cual sea su distribución de probabilidad. Aquí ayuda entender que, como población, se sobreentienden todas las rentabilidades obtenidas (el subconjunto muestra) y por obtener en el futuro.

Tenemos que la estimación de la rentabilidad media del título i a partir de la serie histórica de precios queda:

$$\hat{E}(R) = \frac{\sum_{i=1}^{n} R_i}{n}$$

La desviación típica como sabemos es la raíz cuadrada de la media ponderada de las distancias cuadradas de cada observación con respecto a la media, o lo que es lo mismo, la raíz cuadrada de la varianza de la variable.

$$Var(X) = E[(X-\mu)^2]$$

Podemos usar nuestra estimación de la esperanza, la media aritmética de la muestra, como marco en torno al cual se evalúa la dispersión de la variable. Será también el estimador a su vez una media aritmética.

$$Var(R)^* = E\left[\left(X - \hat{E}(R)\right)^2\right]$$

De acuerdo con esta medida de riesgo, consideramos pues más arriesgado el activo cuyos rendimientos sean más dispersos con respecto a la media que el que cuyos rendimientos se concentren muy alrededor de esta. Esto se debe a que tendríamos, en el caso de la desviación típica baja, un valor $\hat{E}(R)$ que nos indicará con más seguridad y precisión (menos riesgo) el rendimiento que obtendremos en el futuro. En el caso contrario, de alta desviación típica, los rendimientos que como inversores podremos obtener no pueden ser esperados con gran precisión, ya que hay una probabilidad más alta de que diverjan respecto a $\hat{E}(R)$.

$$\sigma(R)^* = \sqrt{Var(R)^*}$$

Tiene la ventaja de que se encuentra en la misma dimensión que la propia media de la variable, en este caso ambas están medidas como porcentaje.

Siguiendo con el glosario que nos llevará a la métrica central de la volatilidad del CAPM, definimos la covarianza entre las dos variables rendimiento bursátil I y del activo A que nos conciernen como medida de correlación. El concepto se utiliza en el ámbito de la estadística para nombrar al valor que refleja el grado de variación conjunta que se registra en dos variables aleatorias tomando como medida sus medias, estableciendo la magnitud de su vínculo de dependencia lineal, el cual también estimamos:

$$Cov(A, I) = \sigma_{ij} = E[(A - E(A)(I - E(I))]$$

ii. La teoría de carteras: el óptimo de Pareto y la frontera de posibilidades

Tal y como indicaba Markowitz en la autobiografía citada, si los inversores de una cartera con una colección de activos determinada se fijasen sólo en el valor esperado de sus rendimientos, concentrarían toda la cartera en el activo que ofrezca el máximo rendimiento esperado. Sin embargo, tal y como ya advertía Sancho Panza, esto es una conducta arriesgada. Es obvio que, al elegir el peso de la inversión en cada activo, se toma también en cuenta el riesgo. Markowitz sostuvo que este riesgo es la varianza del porfolio, una métrica que dependerá de la distribución del capital invertido y de las varianzas y las covarianzas de los n activos que forman la cartera.

$$Var(r_P) = \sum_{i=1}^{n} w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} w_j w_i \sigma_{ij}$$

Donde w son los pesos en porcentaje de cada activo y σ las desviaciones típicas de sus rendimientos históricos; σ_{ij} las covarianzas. Resaltamos que esta expresión es posible dadas las propiedades de los rendimientos ordinarios de cada activo de la cartera descritas y demostradas en el apartado anterior. Tengamos también en cuenta que la parte de la varianza de la cartera atribuida a las varianzas individuales dependerá del número n de activos de forma lineal, mientras que las covarianzas sostienen una relación cuadrática:

$$f(n) = n \; para \; las \; varianzas \; de \; los \; activos$$
$$g(n) = n * \mathrm{m} \; para \; las \; covarianzas$$

Siendo:

$$f = \sum_{i=1}^{n} w_i^2 \sigma_i^2$$

Y:

$$g = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} w_j w_i \sigma_{ij}$$

La importancia relativa de los términos de varianza queda por lo tanto mucho menos relevante al lado de las formas de las covarianzas cuanto mayor sea el porfolio (mayor sea el número n). La conclusión es que las covarianzas constituirán la mayor parte del riesgo de la cartera cuanto mayor sea el número de activos que la compone.

Dado que el inversor siempre va a desear el mínimo riesgo para cada nivel esperado de rentabilidad fijado A, queriendo minimizar la parte del riesgo que si se puede modificar, se da el siguiente programa de optimización según Markowitz (1952) respetando el hecho de que los pesos forman el 100% de la cartera:

$$opt_{mín}\ Covar(P) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} w_j w_i \sigma_{ij}$$

$$s.a\ \ E(A) = \sum_{i=1}^{n} A_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

Por ser un programa de óptimos condicionados con restricciones de igualdad, se aplica el teorema de Lagrange con multiplicadores μ e γ:

$$L = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} w_j w_i \sigma_{ij} - \mu \left(\sum_{i=1}^{n} A_i - E(A) \right) - \gamma \left(\sum_{i=1}^{n} w_i - 1 \right)$$

Se deriva la función lagrangiana con respecto a cada multiplicador y se obtiene:

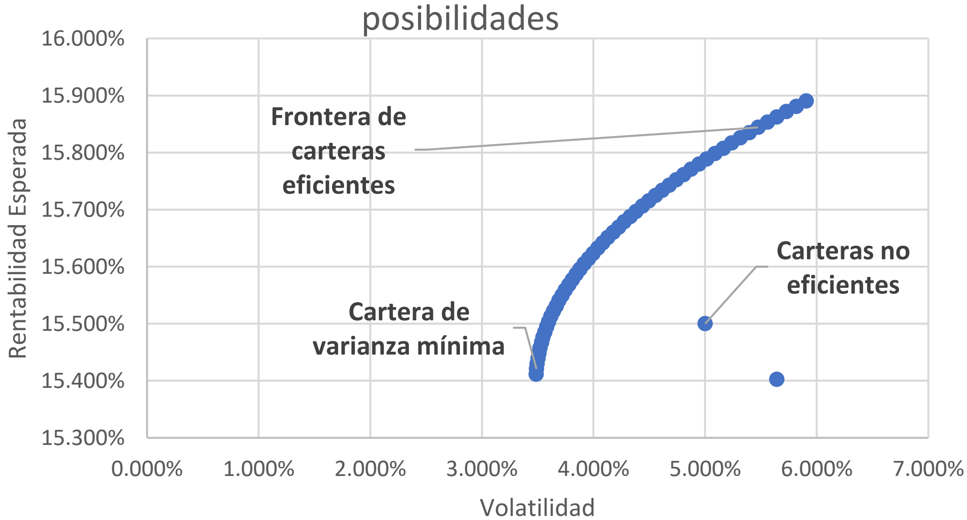
$$\sum_{i=1}^{n} w_i \sigma_i - \mu A - \gamma = 0$$

$$E(A) = \sum_{i=1}^{n} A_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

Tenemos un sistema de $n + 2$ ecuaciones y $n + 2$ incógnitas (los n pesos y los dos multiplicadores). Las soluciones del sistema nos dirán cuánto tendremos que invertir proporcionalmente en cada activo para obtener un rendimiento fijado A eficientemente. Esto describe una parábola en un plano cartesiano formado por la volatilidad en el eje horizontal y el rendimiento en el vertical. El conjunto de todos los puntos de la parte superior de la parábola tendrá una relación rendimiento-riesgo eficiente, a la que llamaremos la frontera eficiente. La frontera eficiente nos ofrece todas las carteras que se pueden formar usando los n activos para cada rendimiento fijado con un mínimo nivel de riesgo.

Figura 1: visualización empírica de la frontera de posibilidades



Fuente: simulación propia

La cartera de varianza mínima será aquella cartera eficiente (contenida en la curva descrita por el programa de optimización) con la mínima varianza de toda la frontera. Aquí es importante mencionar que las varianzas son estimaciones y cada inversor estimará las suyas, no todos compartiendo una frontera necesariamente con la misma estructura y forma.

iii. La introducción del activo sin riesgo de Tobin

Es en 1958 cuando Tobin incluye el activo sin riesgo en el mercado modelizado por Markowitz. Hasta ahora hemos supuesto que todos los activos que podemos incluir en nuestra cartera tienen una varianza superior a cero. Sin embargo, sabemos a un nivel cualitativo que hay muchos activos cuyo riesgo es despreciable dada la estabilidad económica del agente que representa el instrumento. El ejemplo principal es sin duda la deuda pública de los mayores estados, como puede ser la emitida por el gobierno federal de EE. UU., o por el gobierno de España. ¿Qué implicación conlleva la introducción de este elemento en el planteamiento rentabilidad-varianza de Markowitz?

Añadir este nuevo activo, a cuyo tipo el inversor puede pedir prestado o prestar capital, "provoca una degeneración matemática que simplifica en gran manera la forma de la frontera eficiente." (Luenberger, 1998: 165). Esto se observa muy nítidamente en una cartera formada por dos activos, el sin riesgo y otro con riesgo. El activo sin riesgo tendrá rendimiento r_f fijado y cierto y una volatilidad $\sigma_f = 0$. Si tenemos un peso α invertido en el activo con riesgo σ y rendimiento r, la esperanza del rendimiento total y la varianza de ese rendimiento en la cartera serán pues:

$$E(P) = \alpha * r_f + (1 - \alpha) * r$$

$$\sigma(P) = \alpha * \sigma_f + (1 - \alpha) * \sigma = (1 - \alpha) * \sigma$$

Aquí se observa que ambas expresiones tienen una relación lineal con α. Esto implica por sustitución que guardan una relación lineal entre ellas, que en el plano se manifiesta como una línea recta.

En el caso de n activos con riesgo, la inclusión del activo sin riesgo cambia totalmente el conjunto factible del programa, que ahora incluirá infinitas líneas que pasan por el punto de corte con el eje vertical $(0, r_f)$ y todos los activos con riesgo incluidos en la parábola. Se describe pues un conjunto factible comprendido entre dos rectas tangentes a la parábola que se cortan en dicho punto. El punto de tangencia superior es la cartera eficiente construida a partir de una combinación concreta de activos con riesgo. A este punto se le llama F, de fondo. Según el denominado "teorema de un fondo", existe dicho fondo F de activos con riesgo tal que se pueden formar carteras eficientes a partir de las combinaciones de F y el activo sin riesgo para cada inversor. Luenberger (1998: 167) ofrece una corta explicación del teorema:

> *Cuando se hace posible prestar y pedir prestado al tipo sin riesgo, existe un único fondo F de activos con riesgo que es eficiente. Todos los puntos en la frontera eficiente son combinaciones de F y el activo sin riesgo.*

iv. El CAPM como desarrollo de esta teoría y la incertidumbre en el modelo

Es fundamental entender el "teorema de un fondo" porque representa un pilar del modelo CAPM. Este modelo asume el equilibrio económico generado por todos los agentes participantes, en un entorno en el cual todos son inversores de carteras de relación media-varianza eficiente, todos tienen las mismas estimaciones para el valor esperado y la varianza de los rendimientos de los activos con riesgo, y todos tienen acceso al activo sin riesgo. Y es que, según estas premisas, podemos afirmar que:

$$F = I$$

La cual se denomina cartera de mercado y es la suma de todos los activos con riesgo en el mercado (aquí las acciones de patrimonio empresarial). La razón de esta igualdad es que, si todos los agentes invierten en F, cuya suma de las compras llega al total de capital en el mercado, entonces F debe contener acciones en proporción a su representación en el mercado. Esto será I, la cartera óptima en equilibrio.

Se denomina línea del mercado de capitales (en inglés *Capital Market Line* o CML) a la recta que corta con el eje vertical en $(0, r_f)$ y el punto F (o I ya que estamos en equilibrio) y describe el nuevo conjunto eficiente.

$$E(P) = r_f + \frac{I - r_f}{\sigma_I} \sigma_P$$

donde P es el rendimiento de la cartera, I el del mercado, σ_P y σ_I sus respectivas desviaciones típicas y r_f el rendimiento del activo sin riesgo.

Esta expresión del nuevo conjunto eficiente es importantísima, ya que nos ofrece directamente el rendimiento que podemos esperar para un nivel de riesgo específico de una cartera eficiente donde se considera la cartera del mercado I y el activo sin riesgo.

De forma bastante intuitiva (cuánto más rendimiento, más riesgo tendremos que aceptar linealmente), definimos el precio del riesgo como la derivada de la expresión con respecto a σ.

iii. La línea del mercado de valores

Si invertimos α en un activo con riesgo A y lo demás en la cartera de mercado I, obtenemos:

$$r_\alpha = \alpha * A + (1-\alpha) * I$$

$$\sigma_\alpha = \sqrt{\alpha\text{^}2 * \sigma_i^2 + 2\alpha(1-\alpha)\sigma_{iI} + (1-\alpha)^2 * \sigma_I^2}$$

Estos valores describen una curva en el plano que debe estar contenida en el conjunto factible y que es tangente a la línea de mercado de capitales en I, ya que coincide obviamente con este punto cuando no invertimos en el activo con riesgo y ponemos todo nuestro capital en la cartera de mercado. Para que esto se cumpla, la derivada de la curva cuando $\alpha = 0$ debe coincidir con la inclinación de la línea del mercado de capitales. Para $\alpha = 0$:

$$\frac{dr_\alpha}{d\alpha} = A - I$$

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = \frac{\sigma_{iI} - \sigma_I^2}{\sigma_I}$$

Y usando la relación:

$$\frac{dr_\alpha}{d\sigma_\alpha} = \frac{\frac{dr_\alpha}{d\alpha}}{\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha}} \Leftrightarrow \frac{dr_\alpha}{d\sigma_\alpha} = (A-I)\frac{\sigma_I}{\sigma_{iI} - \sigma_I^2}$$

A lo cual sólo hay que igualar a la pendiente de la línea de mercado:

$$(A-I)\frac{\sigma_I}{\sigma_{iI} - \sigma_I^2} = \frac{I - r_f}{\sigma_M}$$

Finalmente, cuando la cartera de mercado I es eficiente, la caracterización de los activos bien valorados de acuerdo con el modelo CAPM toma la siguiente forma al despejar A:

$$E(A_i) = r_f + \frac{I - r_f}{\sigma_I^2}\sigma_{iI} = r_f + \beta * (E(I_i) - r_f)$$

Este el resultado fundamental de toda la teoría desarrollada hasta ahora. La representación gráfica de esta recta revolucionaria toma el nombre de *Security Market Line* o SML, y establece la relación lineal entre el valor esperado de la rentabilidad de un activo y su riesgo.

Según el modelo, todos los activos se posicionarían en esta recta. Sin embargo, en el mundo real, esto no siempre pasa, de tal forma que cualquier activo posicionado por encima de la recta estaría infravalorado respecto a su riesgo según el modelo, dado que su rentabilidad es superior a la media para un nivel de riesgo igual. De modo contrario, cualquier activo que se encuentre por debajo de la SML se considera supervalorado por el modelo, ya que ofrece una rentabilidad inferior a la media por la misma cantidad de riesgo.

vi. El riesgo sistemático

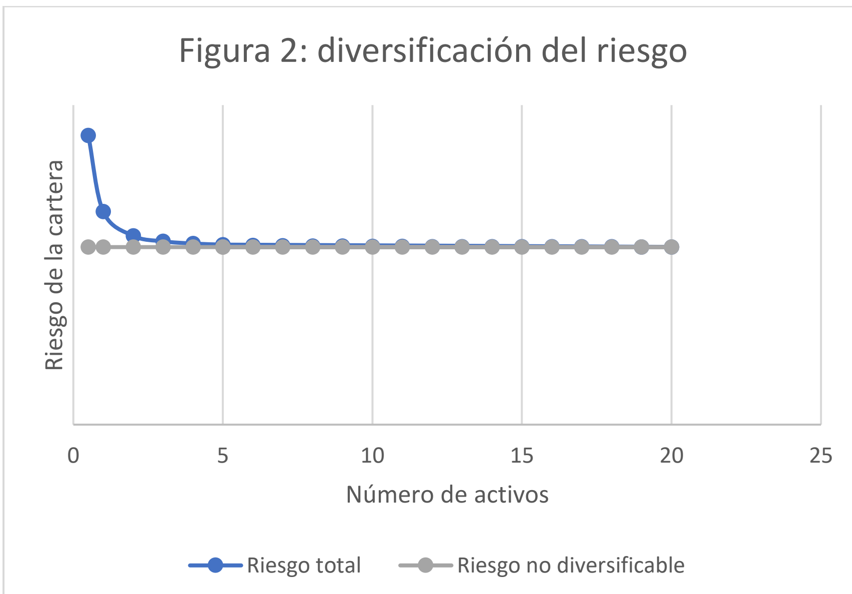
De la SML se saca el coeficiente β:

$$\beta = \frac{\sigma_{iI}}{\sigma_I^2} = \frac{Cov(A, I)}{V(I)}$$

Esta variable resume la definición de riesgo relevante para la valoración en el modelo CAPM al establecer que la derivada de la esperanza del rendimiento del activo A con respeto al rendimiento del índice I o, lo que es lo mismo, cuánto varía el rendimiento del activo en respuesta a un cambio unitario del rendimiento del índice (recordemos que del 1% ya que nuestras variables están en porcentaje), equivale a la proporción de la covarianza de ambos activos (como estos se mueven en conjunto) con respecto a la variación del mercado en general.

La β es hoy en día la medida por excelencia del riesgo sistemático, el que no se puede diversificar encontrando combinaciones óptimas de los activos. Pensemos que todos los activos en la economía, de una manera u otra, están afectados por factores comunes (recesiones, guerras, bancarrotas, etc.), que les influyen. Este riesgo de todo el "sistema" económico (de ahí "sistemático"), el cual trataremos más adelante, será prevalente en la cartera cuánto más ésta esté diversificada, ya que los riesgos individuales se anulan, dando más espacio de dominio a aquel que no desaparece diversificando.

Claro que el riesgo inherente a cada activo individualmente no se puede reducir sin hacer cambios en el propio modelo de negocio o entidad económica por detrás del instrumento, algo mucho más allá del objetivo del inversor. Se visualiza la relación entre riesgo diversificable y no diversificable en la icónica gráfica:



Fuente: simulación propia

Donde la asíntota hacia la cual la curva tiende es el riesgo no diversificable. Es práctica común en la industria financiera el no pasar de los veinte o treinta activos (Greenblatt, 2006), especialmente si estos han sido seleccionados de forma aleatoria, ya que se ha venido a probar de forma empírica que más allá de ese número de títulos es improbable reducir el riesgo de la cartera incluyendo un vigésimo o trigésimo primero.

Analicemos los distintos escenarios de esta medida de la incertidumbre del modelo:

- $Dado\ que\ V(I) \geq 0, \beta \leq 0\ si\ y\ sólo\ si\ Cov(A, I) \leq 0$. Aquí la correlación es inversa, así que A será mayor cuánto peor esté el mercado. Esto es característico de, por ejemplo, los fondos cotizados en bolsa inversa. Los activos que dan rendimientos inversos al mercado también se denominan activos refugio, ya que rinden positivamente en un entorno económico general bajista. Se hace notar que según la valoración por CAPM, estos activos suelen render menos que el activo sin riesgo teniendo riesgo. Sin embargo, su inversión no carece de sentido en tanto que permiten diversificar y neutralizar el riesgo de las carteras de forma eficiente, al ser tan contrarios al comportamiento de todos los demás activos.

- $Cov(A, I) = 0 \iff \beta = 0$. En este caso, como A e I no guardan cualquier correlación:

$$E(A) = r_f$$

Esto es propio de los activos con retornos fijos o de los activos no correlacionados con el mercado. Estos activos carecen totalmente de riesgo sistemático, por lo que su rendimiento de referencia tiene que ser el activo sin riesgo, el único al que es comparable.

- $0 < \beta < 1 \iff 0 < Cov(A, I) < V(I)$. Aquí el activo se mueve con el mercado, pero en menor cantidad. La covarianza es menor que la varianza del mercado. Esto es propio de los activos estables, como acciones de empresas de servicios públicos, denominados activos defensivos.
- $Cov(A, I) = V(I) \iff \beta = 1$. Dicho de otra forma, la beta es uno si y sólo si la covarianza entre los rendimientos del activo con riesgo y los del índice bursátil coincide con la varianza de los rendimientos del índice. A se mueve por lo tanto en la misma dirección y con la misma intensidad que I. Esto es típico de activos que o bien por sus características se mueven muy a la par con el mercado (dependen casi exactamente de su entorno económico), o bien de activos que por su representatividad económica afectan al índice bursátil en gran medida.
- $\beta > 1 \iff Cov(A, I) > V(I)$. Aquí la covarianza de las dos variables es mayor que la varianza del índice. El activo se mueve en la misma dirección que el mercado, pero con más intensidad que este, como es el caso de las acciones de bancos comerciales o de inversión, considerados los activos agresivos.

4. La incertidumbre en los modelos estáticos: Arrow-Debreu

a. El origen del modelo e introducción al concepto: el equilibrio estático

El modelo de Arrow-Debreu se desarrolla por el estadounidense Kenneth Arrow (Premio Nobel en 1972) y por el francés Gerard Debreu (Premio Nobel en 1983) en los años 50. En su trabajo sobre la *Teoría del Equilibrio General bajo incertidumbre* (1954) desarrollan la base del estudio que servirá a los economistas de la segunda mitad del siglo para trabajar el equilibro estático bajo incertidumbre (entre otros, todos los personajes que hemos visto en el modelo anterior). Duffie (1988: 39) nos ofrece una buena definición de este equilibrio:

> *El equilibrio competitivo ocurre con un sistema de precios a los cuales los beneficios de las empresas maximizando decisiones de producción y las decisiones de consumo sostenible de los consumidores individuales igualan la demanda con la oferta. Este concepto ha sido formalizado en el clásico modelo Arrow-Debreu, un punto de referencia para la teoría del comportamiento del mercado de activos.*

En su trabajo, los autores nos introducen al activo Arrow-Debreu (o A-D). La formalización de este concepto es algo elaborada y requiere la comprensión de algunas ideas matemáticas que pasamos a describir, y que serán una novedad para la matemática económica y financiera que tendrá un impacto histórico en la forma de interpretar la evolución de la incertidumbre en modelos futuros.

b. Álgebra y la estructura de la información

Sea $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n\}$ un espacio de Venn de cada uno de los posibles estados ω_i del mercado, F es un conjunto de posibles subconjuntos de Ω tal que:

$$\mathrm{F} = \{\{\omega_1\}, \dots, \{\omega_k\}, \{\omega_1, \omega_2\}, \dots, \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}, \dots, \Omega, \emptyset\}$$

F es un álgebra si y sólo si:

- F es estable por complementación: $\forall A \in F, \Omega - \mathrm{A} \in F$
- F es estable por unión:

$$\forall A_n \in F / \, n \in \mathbb{N} \; de \; F, \text{ tenemos que } \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \in F.$$

- $\Omega \in \mathrm{F}$ ya que si $A \in F \Leftrightarrow \Omega - \mathrm{A} \in F \Leftrightarrow A \cup (\Omega - \mathrm{A}) = \Omega \in \mathrm{F}$
- $\emptyset \in \mathrm{F}$ ya que si $\Omega \in \mathrm{F} \Leftrightarrow \Omega - \Omega = \emptyset \in F$
- F también es cerrada bajo intersecciones contables.

Si el conjunto es infinito, recibe el nombre de σ-álgebra.

Los distintos estados son incompatibles en tanto que el mercado no puede estar en una situación ω_i y ω_j a la vez, tal que: $\omega_i \cap \omega_j \in \Omega = \emptyset$ cuando $\mathrm{i} \neq \mathrm{j}$.

El conjunto de las partes que incluye todos los subconjuntos siempre tiene estructura de álgebra.

Ω representa el conjunto de todos los sucesos que pueden pasar en la economía, según nuestro modelo. Teóricamente, hay un número de posibles estados inabarcable, pero en la modelización siempre simplificamos la realidad. Una forma de hacerlo es por ejemplo dividir la economía en cuatro estados según cuatro intervalos en los cuales es posible estar el PIB del país en el año siguiente: menos de 1 billón de USD, entre 1 y 1,1, entre 1,2 y 1,3, o más de 1,3 billones de USD.

Cada posible evento tiene una probabilidad P asociada. En nuestro ejemplo, el PIB de España en 2019 puede distribuirse en los intervalos uniformemente (25% de probabilidad para cada intervalo). Diremos que si P es una probabilidad sobre (F, Ω), cumple que (Roger, 1991:67):

1. $P(\emptyset) = 0$

2.$(A, B) \in F \times F \Rightarrow se\ contiene\ en\ B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

3. $Si\ A_n\ es\ una\ secuencia\ creciente\ de\ los\ elementos\ de\ F$:

$$\lim_{n \to \infty} P(A_n) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

4. $Si\ A_n\ es\ una\ secuencia\ decreciente\ de\ los\ elementos\ de\ F$:

$$\lim_{n \to \infty} P(A_n) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

5. $\forall A \in F,\ P(\Omega - \mathrm{A}) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{A})$

Queda definido el espacio probabilístico $(\Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P})$. Sobre este triplete se pueden definir variables aleatorias que toman valores según los posibles estados de la naturaleza. Si tenemos la función de probabilidad P asociada a Ω, podemos derivar directamente la distribución de probabilidad de la variable contenida en el espacio. En el ejemplo anterior, en un activo como una acción del IBEX S, su precio sigue una distribución uniforme con 25% de probabilidad para cada estado de la naturaleza (que depende del valor del PIB).

Duffie (1988: 62) aporta:

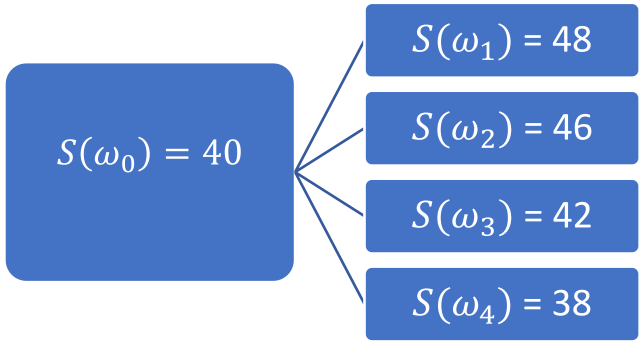
> *Tomamos $L^2(P)$ como el espacio [vectorial de Banach][1] de elecciones para una economía, tratando cada vector x en $L^2(P)$ como una variable aleatoria que describe una cantidad $x(\omega)$ de "consumo recibido en un estado de la naturaleza ω ∈ Ω.*

El vector x representará el pago del activo, y se puede interpretar como el activo en sí.

Una variable aleatoria cuyo valor es un número asociado a los estados de la naturaleza (en el modelo de Arrow-Debreu va a ser el precio del instrumento financiero), tras ser medida en un momento dado, genera un álgebra. Así, si tenemos en un momento t una medición $S(\omega)$, sabremos en qué estado estará el mercado a través de la aplicación.

Cuando un álgebra representa información que implica haber obtenido el valor de una variable, se dice de ella que es medible respecto de esa álgebra. Pongamos nuestro ejemplo. Como tratamos del modelo estático, existe sólo un periodo relevante T (2019), el cual procede de un estado inicial:

[1] Un tipo de espacio vectorial normado (que contiene una norma u operación que define una medida para los vectores contenidos en el espacio) y que a su vez es un tipo de espacio Cauchy (existe para cada escalar mayor que cero un número entero tan grande que cualquier módulo de la diferencia de vectores contenidos en el espacio es menor que dicho número para todo par de vectores de orden mayor que el entero) en el que cada secuencia de Cauchy converge.



El álgebra generada por esta variable sería:

$$\mathrm{X} = \{\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \{\omega_3\}, \{\omega_3\}\}$$

X nos aporta la información que tenemos disponible en 2019. En este caso, sabremos en qué intervalo está el PIB español gracias al valor observado en la variable. Por ejemplo, si la acción del IBEX toma el valor de 38 EUR en 2019, sabremos que el PIB resultó ser menor que 1,1 billones de USD. Esta información que tiene el individuo al final de que se concrete el fenómeno es la partición del conjunto de estados de la naturaleza más fina posible.

El otro ejemplo extremo es el del bono B. Si el precio del bono del Tesoro Público Español es el mismo independientemente del PIB, es decir, es una variable aleatoria cuyo valor es independiente de los estados de la naturaleza, entonces tenemos de

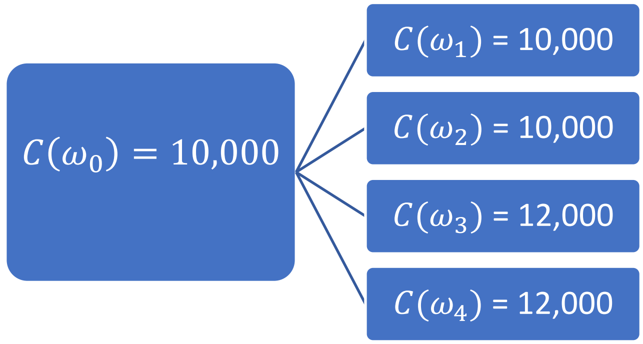
$$B(\omega_1) = B(\omega_2) = B(\omega_3) = B(\omega_4) = 1000$$

que el álgebra que genera es:

$$\mathrm{Z} = \{\Omega\}$$

Esta álgebra no aporta cualquier información sobre el estado de la naturaleza que se ha concretado, siendo por lo tanto la partición más grosera posible.

Un caso intermedio puede ser el valor de una casa, C, que es una variable que depende en menor media del PIB del país, por lo que:



El álgebra que generaría sería:

$$\mathrm{Y} = \{\{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_3, \omega_4\}\}$$

Más grosero que el generado por S, pero más fino que el generado por B. Nótese que:

$$X \subset \mathrm{Y} \subset \mathrm{Z}$$

Concluimos que S, C y B son medibles respecto de X, Y y Z, respectivamente. Cada álgebra generada por cada variable son las álgebras mínimas respecto las cuales puede ser medible cada variable.

c. La incertidumbre en el activo A-D

La incertidumbre en la economía está definida por un conjunto de posibles estados de la naturaleza que pueden suceder al final de un sólo periodo, en el cual nos centramos (de ahí que el modelo no sea dinámico). El modelo de Arrow-Debreu, un estado de la naturaleza está definido por el conjunto de valores que toman las variables, que describen el estado de la economía: tasas de desempleo, desastres naturales, precios de productos básicos, etc. La incertidumbre es cuantificada por una variable aleatoria cuya función de distribución cumulativa que es conocida objetivamente.

El activo denominado Arrow-Debreu asociado a una variable aleatoria comprendida en varios estados ω_k tiene un valor unitario del bien de consumo (el llamado numerario) solamente en un estado especifico $\omega_i \in \omega_k$ y valor nulo en cualquier otro.

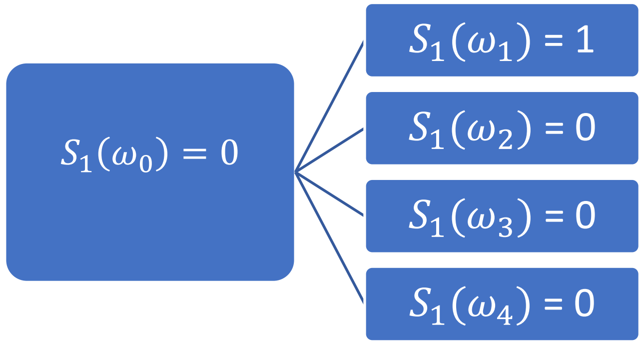
Estos activos se encuentran en un mercado completo, o mercado Arrow-Debreu ya que el modelo originó el concepto, lo que viene a ser una estructura de mercado dónde todos los reclamos contingentes (contratos cuyos pagos dependen del estado de la naturaleza) pueden ser comprados. Si hay k estados de la naturaleza, se pueden comprar reclamos para cada k estado individualmente (propiedad de completitud del mercado).

Esta premisa asume por un lado que hay activos reales en la economía tales que se pueden construir carteras que dupliquen los activos Arrow-Debreu, y por otro lado la información perfecta asume que tantos los consumidores como los productores tienen acceso a información perfecta e instantánea (cuasi-omnisciente, digamos de forma informal) de los precios, utilidad, y costes de todos los activos en el mercado.

Zapatero y Cvitanić (2004: 87) elaboran:

> *La razón por la que la propiedad de la completitud […] es importante es que […] en mercados completos cada contrato financiero tiene un único precio justo (asumiendo ausencia de oportunidades de arbitraje [o AOA]. Esto es crucial para los agentes de los mercados financieros pues les permite poner un precio a todo tipo de contratos complicados de forma consistente, esto es, teniendo en cuenta que los valores de los activos son relativos entre sí.*
>
> *[Definimos dentro de este contexto el reclamo contingente, un contrato con un pago que puede suponer una pérdida o un beneficio. Es contingente pues es aleatorio y dependiente del estado de la naturaleza que acabe ocurriendo.]*
>
> *Decimos que el mercado es completo cuando podamos replicar los reclamos contingentes con mercancías existentes.*

Esta idea se ve de forma más clara bebiendo de la discusión anterior sobre la estructura de la información, sólo que en este caso el activo es Arrow-Debreu y paga su numerario en su respectivo estado:



Si los mercados son completos, quiere decir que existe una familia de cuatro activos $\{S_1, S_2, S_3, S_4\}$ tales que el reclamo contingente es un pago numerario para los otros estados de la naturaleza. Al poder comprar estos cuatro activos, tenemos una base de vectores en el periodo estático:

$$B_c = \{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\} \subset \mathbb{R}^4$$

Esta es la base canónica de $\mathbb{R}^4$, cuyas posibles combinaciones lineales generan a todo el espacio. La interpretación algebraica de esto es que pudiendo comprar cualquiera de los activos en la economía en cualquier cantidad (multiplica el vector por un escalar), se pueden hacer combinaciones lineales que repliquen a cualquier otro activo o cartera (ya que la base canónica es, como dijimos, un sistema generador de vectores linealmente independientes que generan a todo el espacio vectorial).

Zapatero y Cvitanić (2004: 57) elaboran:

> *[En general, l]a mercancía S puede [por lo tanto] ser descrita como un vector K-dimensional* $(s_1, s_2, \ldots, s_k)$ *de pagos en cada respectivo estado, donde todas las componentes del vector son no-negativas. [El activo sin riesgo paga la unidad independientemente del estado, y esto es equivalente a la cartera compuesta por cada una de los K activos Arrow-Debreu. Esta cartera] representa a un bono puro que paga interés determinado por la diferencia del pago de una unidad en* $t = 1$ *y el precio en* $t = 0$.

Este razonamiento empieza en modelo estático en el cual tratamos de un periodo temporal, pero puede ser extendido, como veremos más tarde en el binomial, a varios periodos si tratamos cada periodo individualmente como en este modelo.

Siguiendo con la definición de activo Arrow-Debreu (Luenberger, 1998: 248):

> *Un tipo especial de activo es aquel que ofrece un pago sólo en uno de los estados. Podemos definir las mercancías elementales de estados como e_S = (0, 0, ..., 0, 1, 0, 0, ..., 0). Cuando un conjunto completo de mercancías existe (uno para cada estado), es fácil determinar el precio de cualquier otra mercancía. La mercancía $d = (d^1, d^2, \dots, d^k)$ puede ser expresada como combinación [lineal] de los estados elementales de las mercancías ya que $d = \sum_{S=1}^{S} d^S e_S$, y por lo tanto por linealidad de valoración:*
>
> $$P = \sum_{S=1}^{S} d^S \psi_S$$
>
> *Si las mercancías elementales de los estados no existen, es posible construirlas de forma artificial combinando mercancías que si existen.*

En un mundo perfecto, un individuo puede especificar su consumo en un posible estado de la naturaleza. De hecho, puede desarrollar un "plan" contingente a cada posible estado.

Sea $\pi(s)$ el precio del activo s asociado al estado ω, decimos de $\pi(s)$ que es el precio del estado. Al final de un periodo horizonte, se nos es dado un estado de la naturaleza, ω y los agentes consumen los pagos generados por la liquidez de sus carteras. El problema del inversor con una riqueza r consiste en seleccionar a una cartera Arrow-Debreu que maximice su utilidad esperada bajo la restricción de un presupuesto b (de "budget"). La cartera es representada como la función $c(s)$, lo que equivale simplemente al número de activos Arrow-Debreu comprados (el número de instrumento s). También llamamos a c el nivel de consumición en el estado ω, ya que asumimos que los inversores no tienen otras fuentes de ingresos contingentes que las generadas por sus carteras. La cartera es por lo tanto un plan contingente de consumo.

El programa que nos concierne queda entonces definido como:

$$opt_{max} \sum_{i=1}^{n} p_i \, u(c_i)$$

$$s.a \; \sum_{i=1}^{n} c_i p_i \mu_i = r$$

Donde p_i es la probabilidad del estado ω_i, $c_i = c(s_i)$, $\mu_i = \pi_i / p_i$, y r es la riqueza inicial del inversor. μ es la densidad del precio estado, el precio del activo dividido entre su probabilidad. El valor esperado del rendimiento bruto del activo s_i es inverso a su densidad:

$$\frac{p_i * 1 + (1 - p_i) * 0}{\pi_i} = \frac{p_i}{\pi_i} = \mu_i^{-1}$$

5. La incertidumbre en los modelos dinámicos discretos: modelo Binomial

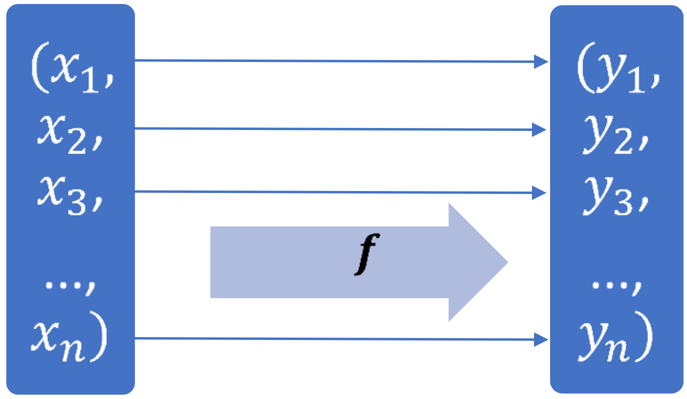
a. Definición de este tipo de modelo y del modelo ejemplar

Los modelos discutidos tenían, como hemos indicado, carácter estático. En ellos no se estudia la evolución de las variables aleatorias a lo largo del tiempo, sino que se recoge información histórica anterior al momento presente, y se hace una estimación puntual con los datos recogidos. Esto se asemeja a la naturaleza del balance contable, en tanto que estamos definiendo para un momento t presente nuestras cifras estimadas basándonos únicamente en los valores de las variables en $t-1, t-2, \dots, t-k$.

Los modelos dinámicos tienen el tiempo incorporado directamente en sus estructuras, ya que se discute ahora la evolución temporal de las variables de los modelos. Normalmente los que están en tiempo continuo lo hacen a través de ecuaciones diferenciales. Recordemos que cuando el físico Newton descubrió el cálculo y lo desarrolló en su *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* (1687), lo hizo por la necesidad de unas matemáticas que relacionaran el movimiento de los cuerpos en el espacio con el tiempo que tardan en recorrerlo. En finanzas, se da el caso de que el precio de un activo, aunque de una forma menos directa que el movimiento de un cuerpo, sostiene relación con el tiempo. Así, la acción de una empresa puede seguir patrones relevantes cuya modelización temporal puede servir de ayuda al empresario o al inversor en su toma de decisiones.

El primer modelo dinámico al que nos referimos es el binomial, un modelo clásico en la valoración de opciones (Cox, Ross y Rubinstein, 1979). Se dice que el modelo es discreto porque realmente la variable temporal toma un conjunto de valores discreto, es decir, un conjunto de números no divisible infinitamente y que tiene la misma cardinalidad que el conjunto de los números naturales. Esto significa que, para cada elemento del conjunto, se puede formar una función inyectiva[2] f entre dicho conjunto y el de los números naturales.

[2] Dicha función es inyectiva si y sólo si para cada elemento del conjunto (que es el dominio) le corresponde un elemento distinto de los números naturales (nuestro codominio). La Real Academia Española ofrece una definición menos matemáticamente rigurosa y más ligera de la palabra “discreto”: “3. adj. Separado, distinto.”



Podemos decir en términos más generales que cuando hablamos de una variable aleatoria discreta, hablamos de una variable que tiene valores distintos entre sí y que no pertenecen a un intervalo continuo de ellos. Veremos cómo exactamente será este conjunto, y quedará claro entonces porque no se puede decir que pertenece a un intervalo infinitamente divisible, como será el caso de los modelos continuos que veremos más adelante.

En la valoración de opciones tanto americanas como europeas se usa el árbol binomial, donde se representa gráficamente todos los posibles caminos que la variable puede tomar dependiendo de si el mercado va al alza o a la baja, siendo que para cada una de las posibilidades del evento dicotómico se le asigna una probabilidad. En la asignación de estas probabilidades, que se caracteriza por tener una distribución adyacente binomial, radicará la modelización de la incertidumbre en el modelo, que discutiremos con más detalle en su sección correspondiente.

b. Contextualización histórica

En álgebra, el binomio es un término que data en antigüedad hasta el siglo XVI y que se define simplemente como la suma de dos términos independientes. El prefijo "bi" es, como sabemos, latín para "dos", mientras que "nomos" procede etimológicamente del griego, significando "porción" o "parte". Todo lo binomial contiene pues dos partes, o es formado por dos porciones. Hacemos referencia al icónico binomio de Newton, que fue desarrollado dos siglos más tarde por el mismo para generalizar la expansión exponencial de la suma algebraica (x + a).

$$(x+a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k a^{n-k}$$

Esta fórmula usa el mismo coeficiente que el contemporáneo Jacob Bernoulli usaría para formalizar la distribución binomial. Este coeficiente en combinatoria se conoce como coeficiente binomial, que es el número de subconjuntos de k elementos escogidos de un conjunto de n elementos.

$$C(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Esto le sirvió a Bernoulli para calcular la probabilidad de que seamos exitosos k veces tras n intentos independientes. Sea K el número de éxitos tomando valores entre $\{0, 1, 2, \dots, n\}$ con una probabilidad $p(K = k)$ de éxito en cada intento, y teniendo en cuenta que esta probabilidad será igual para todos los intentos, tenemos que la probabilidad de que ocurran k sucesos es $p * p * \dots * p_k = p^k$. El mismo raciocinio se hace para el número de fracasos, y teniendo en cuenta las distintas combinaciones de órdenes de sucesos se llega a la clásica distribución binomial:

$$Bin(n,k,p) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

Este es un desarrollo que nos permite estudiar el evento dicotómico, del cual sólo contamos con dos posibilidades (el éxito y el fracaso en la acepción de la distribución de Bernoulli).

Fijémonos ahora en la parte económica que llevó al desarrollo del modelo. Y es que mucho más tarde, a mediados del siglo XIX se produce un fenómeno económico en la ciudad de Chicago que dio origen a los derivados financieros, aquellos contratos estandarizados cuyo valor depende (o se deriva de) un activo financiero conocido como el subyacente. Originalmente, estos contratos servían para unir a los mercaderes con los granjeros, que buscaban estipular con rigor legal la calidad y cantidad de cereales a ser transaccionados. (Hull, 1988). Junto con esta necesidad, y como dice Lorena Marti Gutierrez (2011: 1):

> *[…]como consecuencia de la alta variabilidad del precio de las cosechas (en el otoño, los excedentes provocaban una acentuada caída de precios, y en la primavera, su escasez hacía que los precios crecieran desmesuradamente), los productores empezaron, por tanto, a negociar el precio por adelantado, con la finalidad de evitar las incertidumbres que pudieran afectar al mismo.*

Y se estableció el Chicago Board of Trade, dónde más tarde se empezaron a transaccionar en cantidades crecientes las opciones financieras.

Realmente se puede sostener que el concepto de opción y la transacción de estos contratos se origina mucho antes que en el siglo XX americano. En la Antigua Grecia ya se especulaba sobre el precio del aceite de oliva de forma similar. Para nuestro propósito, sin embargo, nos centramos en los años 20: no en Chicago y Wall Street como inicialmente pensaríamos, sino en Boston, donde el mercante Jesse Livermore especulaba en los infames "*bucket shops*" sobre el precio de acciones de empresas.

Una opción financiera es un contrato que da el derecho a comprar su activo subyacente, el cual suele ser una acción o un número de acciones estipulado de una empresa, en una fecha y a un precio específicos. La opción *call* ofrece a quien la compra pagando su prima el derecho a comprar la acción en dicha fecha. Se dice que un inversor está en una posición larga en una *call* cuando paga la prima y compra este derecho. La posición en la *call* es corta para el inversor que vende el derecho a comprar el activo subyacente, por lo que se compromete a vender el activo en caso de ejecución de la opción. Por otro lado, la opción *put* se trata del derecho a vender el activo subyacente. Se dice que un inversor está largo en una *put* cuando compra este derecho, y corto cuando lo vende.

Después de unirse los rivales Chicago Mercantile Exchange (CME) y el Chicago Board of Trade (CBT), es en el Chicago Board Options Exchange (CBOE) donde más tarde en 1973 se empiezan a transaccionar opciones *call* estándar y ordenadas en acciones de apenas dieciséis empresas distintas. Las opciones *put* empiezan a comercializarse en 1977. (Hull, 1988).

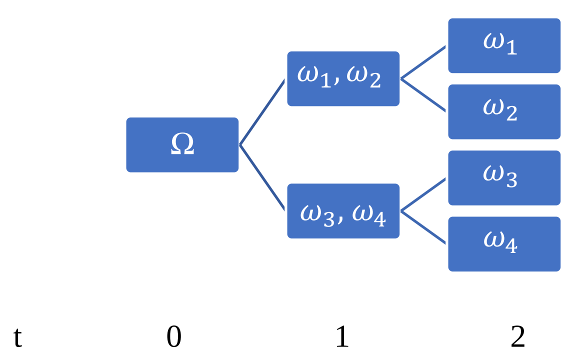
Es finalmente en 1979, apenas dos años después de que se empezaran a comercializar opciones *put* estándar sobre patrimonio, y seis años después de que se publicara la fórmula de Black-Scholes-Merton (1973) de la cual hablaremos más adelante, que Cox, Ross, y Rubinstein (1979) beben de las ideas clásicas del binomio matemático y la naturaleza de las opciones, y desarrollan un modelo que sigue un proceso binomial multiplicativo en periodos de tiempo discretos en su *Valoración de opciones: un acercamiento simplificado* en una colaboración entre las universidades de MIT, Yale, y Berkeley, respectivamente.

Los autores del modelo binomial no se refieren en su acercamiento a la acepción de dicotomía general de la distribución, sino que lo intrínsecamente dicotómico del modelo es el estado del mercado, que puede ir o bien al alza o a la baja. El modelo de Black-Scholes, tal y como describen en la introducción los autores, es sino un caso límite y de alta complejidad matemática del desarrollo de Rubinstein y sus compañeros, quienes sostienen una idea básica y generalizable de la valoración de opciones.

c. La incertidumbre en el modelo

i. La filtración y el proceso binomial

A medida que avanzamos en el tiempo en un modelo dinámico, vamos obteniendo más información de una variable. Al principio del proceso no conocemos nada sobre el estado del mercado. Existen puntos intermedios en los que la información se va añadiendo. Es de este modo que la partición se va haciendo desde más grosera a más fina a medida que avanzamos en el tiempo. Cuánto más fino es el álgebra F, más información hubimos tenido que recibir del mercado.



Recordemos que el tiempo sólo toma valores discretos dada la naturaleza del modelo. En este caso, $\{0,1,2\}$ es un conjunto discreto.

En $t = 0$, tenemos información únicamente del estado inicial del mercado, y el álgebra generado por el valor de la variable es lo más grosero posible. Esto se da en un caso en el cual no hemos pasado ninguna de las bifurcaciones (denominadas nudos) ni hemos obtenido valores de mercado de la variable que permita medir el estado.

$$F_0 = \{\Omega\}$$

En $t = 1$ empezamos a tener más información que en el estado anterior, ya que nos encontramos en un momento en el cual tenemos un precio de nuestra variable que nos indica el estado del mercado, y consecuentemente los únicos estados posibles restantes. Tomamos el ejemplo:

$$F_1 = \{\omega_3, \omega_4\}$$

La partición más fina se obtiene en $t = T$, en este caso 2. Ahí es cuando tenemos un álgebra que contiene la totalidad de la información sobre el camino de la variable y es lo más fina posible. Por ejemplo:

$$F_2 = \{\omega_4\}$$

A todo este proceso dónde la información es cada vez menor y las álgebras más finas se llama filtración. La filtración es una sucesión creciente de álgebras. En nuestro caso se nota que:

$$F_2 \subset F_1 \subset F_0$$

La información se va haciendo por lo tanto más fina a medida que obtenemos valores de las variables. Dothan (2011: 160) formaliza estas definiciones:

> Una filtración de un espacio probabilístico $(\Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P})$ es una familia de sigma-álgebras $\{F_t\}$, $0 \leq t \leq T$ tal que:
>
> 1. Para todo $0 \leq s \leq t \leq T$ tenemos $F_s \subset F_t$
> 2. F_0 contiene a todos los eventos de probabilidad 0

3. Para todo $0 \leq t \leq T$ tenemos que $F_t = \bigcap_{u>t} F_u$

[…]

Un espacio de probabilidad filtrado es la cuádrupla

$$(\Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P}, \{F_t\})$$

donde $(\Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P})$ es un espacio probabilístico y $\{F_t\}$ una filtración de $(\Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P})$.

[…]

Una estructura de información en un espacio probabilístico $(\Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P})$ es una filtración $\{F_t\}$ tal que:

1. A $\in F_0$ si y solo si $P(A) = 0$ o $P(A) = 1$.
2. El final del sigma-álgebra $F_T = F$.

De esta mecánica sacamos dos raciocinios. Si dos estados están en subconjuntos distintos de un álgebra, esto implica que un individuo que sepa el valor de la variable que tome valores en ella sabe distinguir estos estados. Si no lo están, el valor de la variable es igual en esos estados si ella es medible respecto al álgebra que contiene esos conjuntos organizados de tal manera (una condición necesaria y suficiente). El álgebra generada por una variable es pues la mínima álgebra respecto de la cual es medible dicha variable.

Para cada valor del tiempo, habrá una distribución de probabilidad. Cada estado de la naturaleza será asignado con una probabilidad específica. En nuestro caso podemos suponer, por ejemplo, que:

$$P(\omega_1) = P(\omega_2) = P(\omega_3) = P(\omega_4) = \frac{1}{4}$$

El sumatorio de las probabilidades asociadas a los posibles estados de la naturaleza tiene que valer la unidad tal y como indica la definición axiomática de Kolmogorov.

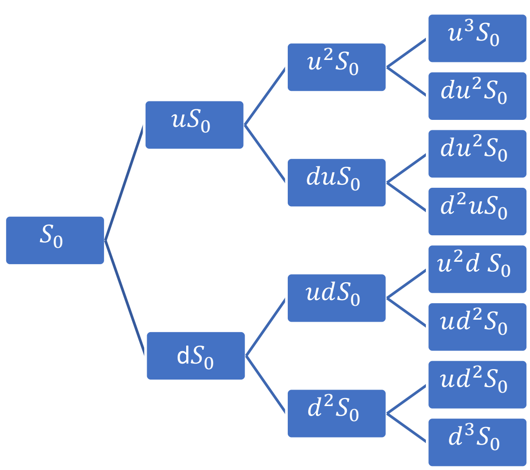
Vemos entonces que en nuestro ejemplo queda perfectamente definida nuestra ya discutida terna $(\Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P})$, llamado el espacio de probabilidad, sobre el cual actúa nuestra variable.

Introducimos ahora el concepto de proceso estocástico, ambivalente en tanto que se puede entender como una sucesión de variables distintas para cada tiempo correspondiente, o bien como una variable cuya magnitud es aleatoriamente variante a lo largo del tiempo tomando trayectorias temporales, una para cada estado de la naturaleza. Formalmente, es la familia de variables aleatorias dependientes del parámetro t que toma valores en un conjunto Λ.

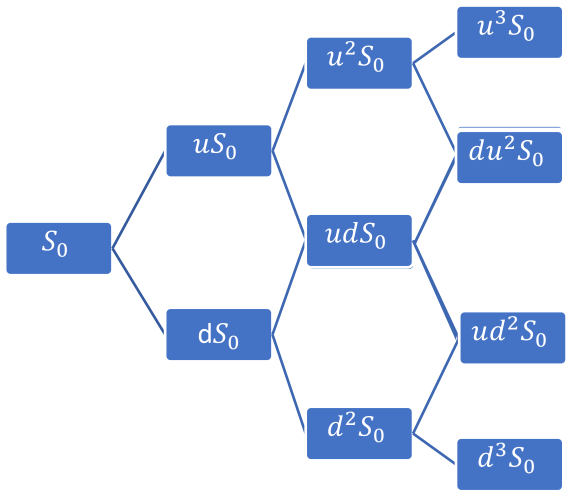
Veamos cómo se adecua el precio del activo subyacente a la opción en el tiempo a la definición de proceso estocástico en el modelo binomial. En este modelo buscamos dividir al periodo de la operación financiera que constituye una opción en intervalos de tiempo de longitud Δt (recordamos también ahora por qué el modelo es discreto de las definiciones anteriores). Aquí suponemos que el valor de la acción subyacente sube o baja según el estado del mercado. Sube con una probabilidad p, en cuyo caso el valor inicial es multiplicado por un factor aumentativo u, o bien baja con una probabilidad $1 - p$, en cuyo caso es descontado por un factor d. De esta forma, tanto la prima de la opción como el precio del activo subyacente empezarán con un precio que subirá o bajará según el estado del mercado o la economía.

ii. El árbol binomial

Veamos cómo queda el proceso en un árbol binomial para el activo subyacente de valor inicial S_0. Tenemos que establecer una longitud de periodo básica, como puede ser un mes. El periodo total del proceso equivale la vida de la opción. Supongamos que esta termina en tres meses.



Se puede observar que, al aplicar la propiedad asociativa de la multiplicación para los valores de la variable en cada tiempo, muchos equivalen. Aquí lo que podemos hacer es recombinar valores de los nudos equivalentes, formando ahora lo que se denomina una red binomial.



Esta recombinación se puede hacer únicamente en el caso de que la evolución futura no dependa de cómo se ha llegado al nudo recombinado, algo que sucede únicamente cuando el valor en un tiempo cualquiera t sólo depende del valor en $t-1$ y no de la trayectoria tomada para llegar al valor. Esto es natural a un tipo de proceso estocástico discreto denominado proceso de Markov, también cadena o modelo de Markov.

La propiedad que hemos descrito también se denomina propiedad de Markov, y formalmente la redactaríamos de la siguiente forma:

$$E(X_{t+1}/F_t) = X_t$$

Donde X es una variable aleatoria medida sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P})$. Al cumplir esta propiedad, X (y en nuestro caso S_0) recibe el nombre de martingala.

Ahora, para cada momento t, queda definida una variable aleatoria con su distribución de probabilidad, lo que viene a ser un paseo aleatorio, una trayectoria definida por sucesivos pasos aleatorios. Tengamos en cuenta que este puede ser o no generado por una regla de variación (puede no tener un patrón descrito como tal); en este caso queda claro que sí lo tiene (se multiplica por u si el mercado va al alza y por d si no).

Observemos ahora que para cada tiempo t, la variable toma valores con una distribución de probabilidad específica y definida. En nuestro caso:

	S_0	$P(S_0)$
Para $t = 0$:	S_0	1
Para $t = 1$:	uS_0 dS_0	p $1-p$
Para $t = 2$:	u^2S_0 udS_0 d^2S_0	p^2 $2*p*(1-p)$ $(1-p)^2$
Para $t = 3$:	u^3S_0 du^2S_0 ud^2S_0 d^3S_0	p^3 $2*p^2*(1-p)$ $2*p*(1-p)^2$ $(1-p)^3$

Para cada tiempo t, la suma de las probabilidades da siempre uno. Esto se ve fácilmente para los primeros dos tiempos, ya que el primer sumatorio es uno directamente y el segundo:

$$p + 1 - p = 1$$

Se puede probar en el tercer tiempo $t = 2$ que para cualquier número real $p \in [0,1]$,

$$p^2 + 2*p*(1-p) + (1-p)^2 = 1$$

Ya que:

$$p^2 + 2*p*(1-p) + (1-p)^2 = p^2 + 2p - 2p^2 + 1 - 2p + p^2 = 1$$

De hecho, se puede probar que el sumatorio es 1 para cualquier tiempo, un proceso tedioso cuando tenemos procesos con muchos periodos temporales. La prueba es inútil si se entiende que esto se debe a que se trata realmente, para cada tiempo, de una distribución de probabilidad, por lo que se puede hablar de una sucesión de variables en el tiempo cada una con su distribución, tal y como lo describíamos en la definición de proceso estocástico. De hecho, este tipo de proceso recibirá su nombre especial de proceso binomial.

iii. La valoración neutra al riesgo en el modelo binomial

Hemos visto que, en el modelo binomial, el precio del activo subyacente a la opción sigue un proceso binomial en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P})$. Introducimos ahora el concepto de valoración neutra al riesgo, importantísimo concepto también en Black-Scholes.

Se trata de un marco teórico general que se aplica sea cual sea la dinámica del subyacente y que se desarrolla a partir de los artículos de Harrison y Kreps (1979) y Harrison y Pliska (1981). Su resultado fundamental es el "teorema de la valoración de activos", el cual afirma que, en un modelo hay ausencia de oportunidades de arbitraje (AOA) si y sólo si existe, al menos, una medida de probabilidad neutral al riesgo.

Bajo esta medida, el precio de todos los activos será el valor de la esperanza matemática de sus pagos descontada al tipo de interés del activo sin riesgo (metodología que se utilizará para valorar al subyacente y a sus derivados).

Las medidas de probabilidad neutrales al riesgo, también denominadas medidas de martingala, tienen carácter teórico: cumplen la axiomática de Kolmogorov, no significando esto que los agentes económicos asignen estas probabilidades a los estados de la naturaleza.

Volviendo a nuestro caso concreto del modelo binomial, en el "mundo sin riesgo" la esperanza de los rendimientos del subyacente serán por lo tanto el tipo sin riesgo, r. Suponiendo que nos proporciona una rentabilidad q, la ganancia capital será $r - q$. El valor esperado del subyacente al final de Δt será su valor descontado continuamente[3] a esta diferencia durante el intervalo:

$$E(S_{\Delta t}) = Se^{(r-q)\Delta t}$$

donde S es el valor inicial del activo. La esperanza matemática del valor de este activo según la distribución binomial estipulada es la media ponderada de las trayectorias según sus probabilidades.

$$E(S_{\Delta t}) = pSu + (1-p)Sd$$

[3] Anexo I

De este sistema de ecuaciones podemos razonar por sustitución que:

$$pSu + (1-p)Sd = Se^{(r-q)\Delta t}$$

De cuya expresión se puede eliminar S para obtener:

$$pu + (1-p)d = e^{(r-q)\Delta t}$$

Recordemos que la varianza de una variable X se puede definir como la media ponderada de las distancias cuadradas respecto a la media y que:

$$E(aX+b) = E(aX) + E(b) = aE(x) + b$$

$$V(aX+b) = V(aX) + V(b) + 2 * Cov(aX, b) = a^2 V(x)$$

Por lo que:

$$\begin{aligned} Var(X) = \ & E\left(X - E(X)\right)^2 = E\big(X^2 + E(X)^2 - 2XE(X)\big) = \\ & = E(X^2) + E(X)^2 - E\big(2XE(X)\big) = E(X^2) + E(X)^2 - 2E\big(XE(X)\big) = \\ & = E(X^2) + E(X)^2 - 2E(X)E\big(E(X)\big) = E(X^2) + E(X)^2 - 2E(X)^2 = \\ & = E(X^2) - E(X)^2 \end{aligned}$$

Sea μ el cambio de porcentaje del precio del activo subyacente en Δt, hay una probabilidad p de que $1 + \mu$ sea u y una probabilidad $1 - p$ de que sea d. Tenemos obviamente que:

$$E(1+\mu) = pu + (1-p)d$$

Aunque se podría demostrar que:

$$E(1+\mu) = E\left(1 + \frac{S_{\Delta t} - S}{S}\right) = E\left(1 + \frac{S_{\Delta t}}{S} - 1\right) = E\left(\frac{S_{\Delta t}}{S}\right) = \frac{E(S_{\Delta t})}{S} = pu + (1-p)d$$

Dado que las probabilidades de los cuadrados de los valores que la variable tiene que tomar son iguales que inicialmente (el cuadrado de la variable tiene la misma distribución de probabilidad que la variable sin elevar al cuadrado):

$$E(1+\mu)^2 = pu^2 + (1-p)d^2$$

Y tenemos también que:

$$\left(E(1+\mu)\right)^2 = \left(E\left(\frac{S_{\Delta t}}{S}\right)\right)^2 = \frac{E(S_{\Delta t})^2}{S^2} = \frac{S^2 e^{2(r-q)\Delta t}}{S^2} = e^{2(r-q)\Delta t}$$

Por lo que podemos deducir de nuestra ecuación anterior que:

$$Var(1+\mu) = pu^2 + (1-p)d^2 - e^{2(r-q)\Delta t}$$

Y como sabemos que la constante 1 no guarda cualquier correlación con µ:

$$Var(1+\mu) = Var(1) + Var(\mu) = Var(\mu) = pu^2 + (1-p)d^2 - e^{2(r-q)\Delta t}$$

Si por otro lado asumimos que los cambios en porcentaje del valor del activo subyacente siguen una distribución gaussiana por el teorema central límite, tenemos que:

$$Var(\mu) = \sigma^2 \Delta t = pu^2 + (1-p)d^2 - e^{2(r-q)\Delta t}$$

Si como dijimos:

$$e^{(r-q)\Delta t} = pu + (1-p)d$$

Multiplicamos $u + d$ por ambos lados para obtener:

$$e^{(r-q)\Delta t}(u+d) = (pu + (1-p)d)(u+d) = pu^2 + pud + (1-p)du + (1-p)d^2 =$$
$$= pu^2 + pud + du - pdu + (1-p)d^2 = pu^2 + (1-p)d^2 + du$$

Podemos sacar de esta expresión que:

$$pu^2 + (1-p)d^2 = e^{(r-q)\Delta t}(u+d) - du$$

Y como dijimos que:

$$pu^2 + (1-p)d^2 - e^{2(r-q)\Delta t} = \sigma^2 \Delta t$$

Entonces por sustitución:

$$e^{(r-q)\Delta t}(u+d) - du - e^{2(r-q)\Delta t} = \sigma^2 \Delta t$$

Imponemos pues dos condiciones en p, u y d:

$$e^{(r-q)\Delta t}(u+d) - du - e^{2(r-q)\Delta t} = \sigma^2 \Delta t$$

$$pu + (1-p)d = e^{(r-q)\Delta t}$$

En *Option Pricing: A Simplified Approach*, (1979) Cox, Ross y Rubinstein utilizan una tercera condición:

$$u = \frac{1}{d}$$

Se simplifica la resolución de este sistema de ecuaciones estipulando que el factor de descuento compuesto será una constante a:

$$e^{(r-q)\Delta t} = a$$

Y poniendo la solución en función de este. El sistema quedaría con las siguientes soluciones:

$$p = \frac{a-d}{u-d}$$

$$u = e^{\sigma \Delta t}$$

$$d = e^{-\sigma \Delta t}$$

Una manera equivalente de llegar a este resultado es expresando la varianza de la variable binomial e igualándola a $\sigma^2 \Delta t$:

$$p * u^2 + (1-p) * d^2 - (p * u + (1-p) * d)^2) = \sigma^2 \Delta t$$

Como el valor esperando del rendimiento del subyacente tiene que coincidir con su valor descontado:

$$p * S * u + (1-p) * d * S = S * e^{r\Delta t}$$

O lo que es lo mismo:

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u-d}$$

Sustituyendo esto en la expresión anterior tenemos:

$$e^{r\Delta t}(u+d) - ud - e^{2r\Delta t} = \sigma^2 \Delta t$$

Con lo cual, para términos en Δt^2 o mayor grado son ignorados, tenemos la misma solución:

$$u = e^{\sigma \Delta t}$$

$$d = e^{-\sigma \Delta t}$$

El hecho de que se mantenga la volatilidad es una ilustración del teorema de Girsanov, el cual reza que, aunque las preferencias de riesgo de los inversores se alteren, la volatilidad se mantiene igual (Hull, 1988).

6. La incertidumbre en los modelos dinámicos continuos: modelo Black-Scholes

a. Definición de este tipo de modelo y del modelo ejemplar

Hasta ahora hemos estudiado sistemas o bien estáticos (parados en un tiempo concreto) o dinámicos pero discretos (donde los valores de la vas variables son contables). Cómo introducción a los modelos dinámicos continuos, hablaremos de uno de los más relevantes no sólo en el mundo académico financiero sino también en la industria.

El modelo Black-Scholes-Merton es, tal como el binomial, un modelo de valoración de opciones. Dada su simplicidad y rapidez en esta valoración, sigue siendo hoy en día el modelo preferido de muchos bancos y empresas que lo utilizan aun teniendo acceso a métodos de valoración de opciones más sofisticados.

Decimos que es un modelo dinámico tal como el binomial porque una vez más hablamos de proceso estocástico, aunque ahora ya no sea realmente un proceso binomial como en el caso anterior. Este nuevo proceso del que hablaremos está definido en tiempo continuo. Recordemos que, para ser considerada discreta, una variable tiene que expresarse en un conjunto de valores cuya cardinalidad es igual a la de los números naturales. En un modelo continuo, la variable tomará valores en un conjunto infinito y de cardinalidad más densa que los números naturales, es decir, ya no se puede formar una función inyectiva entre dicho conjunto y el de los números naturales.[4]

El modelo Black-Scholes será un modelo continuo que, tal como el binomial, se utiliza en la valoración de opciones.

b. Contextualización histórica: el movimiento browniano y el lema de Itô

Los autores del modelo Black-Scholes recibieron el premio Nobel de la Economía en 1997 por su innovadora aportación a la valoración de opciones. Hoy en día sigue siendo un modelo ampliamente utilizado por bancos, aseguradoras, y demás compañías como la principal herramienta de valoración de estos derivados.

[4] Anexo II

Nuestra historia comienza cuando en 1827, el botánico escocés Robert Brown observó el movimiento aleatorio de partículas de polen bajo el microscopio. Este movimiento no obtuvo una formalización matemática hasta mucho más tarde cuando la publicó Einstein en 1905 en su tesis *Investigaciones sobre la teoría del movimiento browniano*, año al que muchos llaman *Annus Mirabilis*, que es latín para "año maravilloso", ya que le acompañaron en la misma fecha más publicaciones importantes del mismo autor, entre otras sobre la famosa teoría de la relatividad.

Más tarde en el siglo XX, el matemático y filósofo Rober Wiener parte de estos hallazgos para describir un proceso estocástico en tiempo continuo que será utilizado de forma amplia en la matemática financiera para describir la evolución en el tiempo de variables como los tipos de interés o los precios de los activos, el cual cumple unas características comúnmente sabidas pero que pasaremos a enumerar. Sea un variable aleatoria W_t, se dice que sigue un proceso de Wiener si y sólo si:

- $W_0 = 0$ (el proceso comienza en un momento 0 y en 0)
- Sigue una distribución gaussiana de media 0 y desviación típica la raíz cuadrada del tiempo:
$$W_t \sim N(0, \sqrt{t})$$
- Tiene incrementos gaussianos independientes, es decir, para cada $t > 0$:
$$W_{t+\Delta t} - W_t \sim N(0, \sqrt{\Delta t})$$
donde cualquier $W_{t+\Delta t}$ es independiente del valor que tome el pasado W_t.
- Las trayectorias W_t para $t \geq 0$ son funciones del tiempo continuas.

Aquí conectamos las ideas de los modelos anteriores. W_t es la variable aleatoria que está en función de los estados de la naturaleza. Es el proceso que genera la estructura de la información en el espacio filtrado $(\Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P}, \{F_t\})$ (Dothan, 1990). Simultáneamente, puede ser interpretada como la posición del paseo aleatorio (trayectoria) ω en el tiempo t. El conjunto de todas las trayectorias posibles en el paseo aleatorio ω_i es el conjunto Ω.

Más tarde, el japonés Kiyoshi Itô desarrolla en su cálculo estocástico una forma de generalizar el proceso de Wiener que ofrece una ecuación diferencial la cual Black, Scholes y Merton utilizarán para describir el movimiento de los precios de las opciones. Si definimos una variable aleatoria X, esta queda según el proceso de Itô sobre la forma:

$$dX = f(X,t)dt + g(X,t)dW_t$$

donde f y g son funciones dependientes de la propia variable X y del tiempo. $f(X,t)dt$ será el impulso o deriva (*drift* en inglés), la parte "no estocástica" o determinística de la ecuación, seguida por $g(X,t)dW_t$, la cual lógicamente, al tener multiplicado a un movimiento browniano, será la parte aleatoria con el nombre de difusión. La varianza será g^2. Juntas forman lo que llamamos una ecuación diferencial estocástica, ya que contiene una componente de naturaleza correspondiente.

El lema de Itô en si demuestra que dada una función $G(X,t)$, se verifica la ecuación diferencial estocástica:

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial X}f + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial X^2}g^2\right)dt + \frac{\partial G}{\partial X}g dW_t$$

Como lo hace es partiendo del principio que G es una función de X y t continua y diferenciable, por lo que, tal y como reza el cálculo básico, sabemos que un incremento de G es:

$$\Delta G \approx \frac{\partial G}{\partial X}\Delta X + \frac{\partial G}{\partial t}\Delta t$$

La serie de Taylor (aquella representación de una función mediante una serie infinita) para la función nos ofrece una aproximación un poco más exacta:

$$\Delta G = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}\frac{\partial^i G}{\partial X^i}\Delta X^i + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}\frac{\partial^i G}{\partial t^i}\Delta t^i + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\partial^{i+1} G}{\partial X^i \partial t^i}\Delta t^i \,\Delta X^i$$

Esta expresión puede resultar abrumadora, pero en el límite cuando ambos incrementos de X y de t tienden a cero, toma la forma:

$$dG = \frac{\partial G}{\partial X}dX + \frac{\partial G}{\partial t}dt$$

ya que los términos de orden mayor que uno son absurdamente pequeños.

Ahora veamos que nuestro resultado original puede ser discretizado. La discretización es el proceso mediante el cual pasamos una forma continua a discreta (ya hemos visto en profundidad qué significan estos términos). De la forma original:

$$dX = f(X,t)dt + g(X,t)dW_t$$

pasamos a su forma discreta:

$$\Delta X = f(X,t)\Delta t + g(X,t)\epsilon\sqrt{\Delta t}$$

donde ϵ es una variable aleatoria que sigue una distribución normal estandarizada. Ahora nótese con atención como tenemos que:

$$\begin{aligned}\Delta X^2 &= f(X,t)^2\Delta t^2 + g(X,t)^2\epsilon^2\Delta t + 2 * f(X,t)\Delta t * g(X,t)\epsilon\sqrt{\Delta t} \\ &= f(X,t)^2\Delta t^2 + \boldsymbol{g(X,t)^2\epsilon^2\Delta t} + 2 * f(X,t) * g(X,t)\epsilon * \Delta t^{\frac{5}{2}}\end{aligned}$$

dónde los términos de Δt mayor orden de 1 se pueden considerar absurdos, pero existe una componente de orden 1 la cual no puede ser desconsiderada numéricamente (la hemos puesto a negrita para que la detecte más fácilmente el lector).

Cómo la varianza de una variable aleatoria que sigue una distribución normal estandarizada es uno, tenemos que (y aquí recuerde las relaciones estadísticas demostradas para el modelo binomial), que:

$$E(\epsilon^2) - E(\epsilon)^2 = 1$$

Cómo la esperanza de esa misma variable aleatoria es cero, tenemos también que:

$$E(\epsilon^2) - 0^2 = 1 \Leftrightarrow E(\epsilon^2) = 1 \Leftrightarrow E(\epsilon^2\Delta t) = \Delta t$$

La varianza de $\epsilon^2\Delta t$ se obtiene a través de la propiedad de la distribución normal:

$$X \sim N(\mu,\sigma) \Leftrightarrow bX \sim N\left(b\mu, \sqrt{b^2\sigma^2}\right)$$

Y del hecho de que una variable aleatoria que siga una distribución normal elevada al cuadrado realmente sigue una distribución chi-cuadrado por lo que:

$$X \sim N(\mu, \sigma) \Leftrightarrow X^2 \sim \chi_1^2\left(\sigma^2, \sqrt{2\sigma^4}\right)$$

con la cual se ve que:

$$V(\epsilon) = 1 \Leftrightarrow V(\epsilon^2 \Delta t) = (\sqrt{2 * 1^4})^{\,2}\, \Delta t^2 = (\sqrt{2}\,)^2 \Delta t^2 = 2\Delta t^2$$

Esto demuestra que es también un absurdo la varianza de $\epsilon^2 \Delta t$, ya que al estar en orden de 2 de Δt, no es siquiera proporcional a la varianza del cambio de una variable estocástica con el incremento en orden 1. Podemos tratar a este componente como no estocástico e igual a su media Δt, tal y como la definimos.

Según la anterior expresión:

$$\Delta X^2 = f(X,t)^2 \Delta t^2 + \boldsymbol{g(X,t)^2 \epsilon^2 \Delta t} + 2 * f(X,t) * g(X,t)\epsilon * \Delta t^{\frac{5}{2}}$$

ΔX^2 pierde su naturaleza estocástica y se queda igual a $g(X,t)^2 dt$ cuando Δt toma valores que se acercan a cero. Todo lo demás se acerca a cero en este caso excepto nuestra componente estudiada $\epsilon^2 \Delta t$, que al asumir según todo nuestro razonamiento que es igual a Δt, en el límite infinitesimal se acerca al diferencial y no a cero como las demás partes de la expresión.

Al tomar los límites que tienden a cero de Δt y ΔX, tenemos que:

$$dG = \frac{\partial G}{\partial X} dX + \frac{\partial G}{\partial t} dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial X^2} g^2 dt$$

Por lo que llegamos al lema. Si lo sustituimos por:

$$dX = f(X,t)dt + g(X,t)dW_t$$

llegamos a:

$$dG = \frac{\partial G}{\partial X}(f(X,t)dt + g(X,t)dW_t) + \frac{\partial G}{\partial t} dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial X^2} g^2 dt$$

Desarrollando paréntesis y simplificando notación:

$$dG = \frac{\partial G}{\partial X} f dt + \frac{\partial G}{\partial X} g dW_t + \frac{\partial G}{\partial t} dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial X^2} g^2 dt$$

Reordenando:

$$dG = \frac{\partial G}{\partial X} f dt + \frac{\partial G}{\partial t} dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial X^2} g^2 dt + \frac{\partial G}{\partial X} g dW_t$$

Sacando factor común:

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial X} f + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial X^2} g^2\right) dt + \frac{\partial G}{\partial X} g dW_t$$

Si ahora comparamos el lema con la primera ecuación podemos ver que realmente mantenemos la misma estructura, aunque a priori parezca haber más complejidad. La deriva aquí es la primera parte de la ecuación multiplicada por dt, y la varianza será todo lo que multiplica a la variable que sigue el proceso de Wiener, pero al cuadrado, es decir:

- Deriva: $\left(\frac{\partial G}{\partial X} f + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial X^2} g^2\right) dt$
- Varianza: $\left(\frac{\partial G}{\partial X}\right)^2 g^2$

Toda esta teoría matemática será de utilidad para el matemático Fischer Black y el economista Myron Scholes, quienes en los años 70 se reúnen en Massachusetts y trabajan nuestro modelo, el cual vamos a explicar en la sección siguiente.

Desafortunadamente, Black no vive para recibir el Nobel en 1997, recibiendo el honor póstumo al contrario de Scholes, quien lo recibe en Estocolmo en ese mismo año.

c. La volatilidad en el modelo

Los economistas utilizan estas matemáticas para construir una forma de valorar la opción financiera, y llegan a la famosa fórmula que permite calcular la prima de una *call* o una *put* de forma inmediata.

El modelo parte de cuatro premisas principales:

1. Hay un rendimiento esperado positivo en el largo plazo:

$$\frac{S(t+h)-S(t)}{S(t)}=\frac{\Delta S}{S}>0$$

2. Una componente aleatoria que modelice la incertidumbre del mercado.

3. Tiene que ser más difícil predecir el precio del activo en periodos de tiempo más largos.

4. No existen precios de acciones negativos.

La idea principal es comenzar con una inversión sin riesgo:

- P – inversión del principal
- r – tipo compuesto continuamente
- $A(t) = Pe^{rt}$ – inversión en un tiempo t
- $A(0) = P$

La ecuación diferencial para $A(t)$ es:

$$\frac{dA}{dt}=rA(t) \Leftrightarrow \frac{dA}{A}=rdt$$

Discretizada:

$$\frac{\Delta A}{A}\approx rdt$$

Dónde $\Delta A = A(t+\Delta t)-A(t)$ por lo que la expresión de arriba es el rendimiento relativo en el intervalo $(t, t+\Delta t)$.

Análogamente, en Black-Scholes, tenemos que:

$$S(t) = precio\ de\ la\ acción\ en\ t$$

$$\frac{\Delta S}{S}=\frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{S(t)}$$

$$\frac{dS}{S}=\mu dt+\sigma dW_t$$

$$\frac{\Delta S}{S} = \mu \Delta t + \sigma \Delta W_t$$

donde:

μdt es un componente predecible del rendimiento relativo
μ es el valor esperado del rendimiento
σdW_t es un componente aleatorio del rendimiento
dW_t es nuestra variable que sigue un proceso de Wiener (o movimiento Browniano):

$$dW_t \sim N\left(0, \sqrt{dt}\right)$$

$$\Delta W_t \sim N\left(0, \sqrt{\Delta t}\right)$$

De todo esto podemos deducir los parámetros de $\frac{\Delta S}{S}$:

$$E\left(\frac{\Delta S}{S}\right) = E(\mu \Delta t + \sigma \Delta W_t) = \mu \Delta t + \sigma E(\Delta W_t) = \mu \Delta t + \sigma * 0 = \mu \Delta t$$

$$V\left(\frac{\Delta S}{S}\right) = V(\mu \Delta t + \sigma \Delta X) = \sigma^2 V(\Delta W_t) = \sigma^2 \Delta t$$

$$\sigma\left(\frac{\Delta S}{S}\right) = \sqrt{V\left(\frac{\Delta S}{S}\right)} = \sigma \sqrt{\Delta t}$$

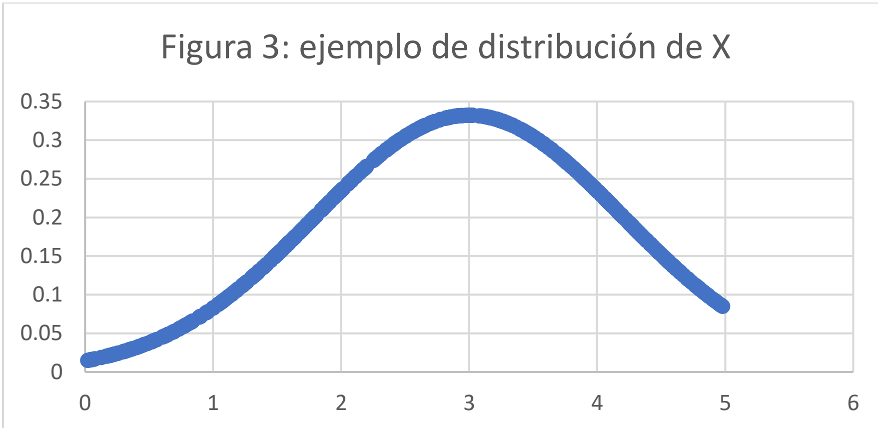
Por lo que la distribución sería

$$\frac{\Delta S}{S} \sim N\left(\mu \Delta t, \sigma \sqrt{\Delta t}\right)$$

En *The Pricing of Options and Corporate Liabilities* (Black y Scholes, 1973: 640), los autores exponen que una de las “condiciones ideales” es que:

> *El precio de la acción sigue un paseo aleatorio en tiempo continuo con una varianza proporcional al cuadrado del precio de la opción. Así, la distribución de posibles precios de acciones seguirá una distribución log-normal.*

Sea X una variable aleatoria que sigue una distribución normal.



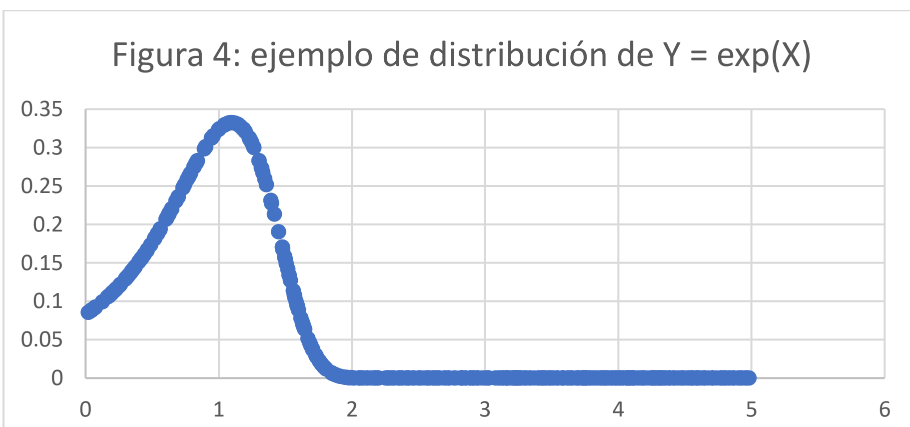
Fuente: simulación propia

Sea

$$Y = e^X$$

Una variable aleatoria descrita por la constante neperiana que hemos descrito en la sección del modelo binomial. Se dice que la variable aleatoria Y sigue una distribución log-normal, ya que:

$$\ln(Y) = X$$



Fuente: simulación propia

La distribución log-normal, como se nota, es sesgada hacia la izquierda con más kurtosis. Esta suposición nos va a permitir trabajar con rendimientos logarítmicos, los cuales presentan la conveniente propiedad de aditividad en el tiempo. Recordemos que cuando dos variables aleatorias que siguen una distribución normal se multiplican, no producen una variable aleatoria que siga la misma distribución. Pero, si estas se suman en vez, el resultado sí es gaussiano.

El rendimiento logarítmico en un tiempo t se define como:

$$\ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right)$$

dónde S_t es el precio del activo en el momento en el cual se mide el rendimiento y S_0 el precio inicial que invertimos.

Ahora es cuando realmente entra el lema de Itô. Necesitamos conocer el proceso estocástico de S_t. Definimos una función:

$$G = \ln(S)$$

Obtenemos las derivadas de G:

$$\frac{\partial G}{\partial S} = S^{-1}$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial S^2} = -S^{-2}$$

$$\frac{\partial G}{\partial t} = 0$$

Recordamos que el lema nos da:

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial X} f + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial X^2} g^2\right) dt + \frac{\partial G}{\partial X} g dW_t$$

Y sabemos también ya que:

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dW_t$$

Con lo cual tenemos que:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW_t$$

Si recordamos la forma general del proceso de Wiener:

$$dX = f(X,t)dt + g(X,t)dW_t$$

tenemos en nuestra notación que:

$$dX = dS$$

$$f(X,t) = \mu S$$

$$g(X,t) = \sigma S$$

Sustituyendo en el lema el valor de las derivadas y el de nuestras funciones de deriva y difusión:

$$dG = \left(\frac{1}{S}\mu S + 0 + \frac{1}{2}(-S^{-2})(\sigma S)^2\right)dt + \frac{1}{S}\sigma S * dW_t$$

Si desarrollamos un poco la expresión simplificando:

$$dG = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma * dW_t$$

Por lo que $G = \ln(S)$ sigue un proceso de Wiener con una deriva de $\mu - \frac{\sigma^2}{2}$ y una varianza igual a σ^2.

Si recordamos:

$$\frac{\Delta S}{S} \sim N(\mu\Delta t, \sigma\sqrt{\Delta t})$$

Y sabemos que al aplicar las propiedades de la distribución normal y de los logaritmos:

$$\ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right) = \ln(S_t) - \ln(S_0) \sim N\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t, \sigma\sqrt{t}\right)$$

entonces:

$$\ln(S_t) \sim N\left(\ln(S_0) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t, \sigma\sqrt{t}\right)$$

Esta es la principal conclusión a la que llegamos en este trabajo. Se recomienda al lector seguir el estudio del modelo, ya que estandarizando esta variable y utilizándola en ecuaciones que provienen de teoría financiera de estos derivados es como luego se llegará a la famosa expresión que dará como resultado una estimación de la prima de las opciones (Hull, 1988).

7. Conclusión

Es indiscutible que la segunda mitad del siglo XX fue la época de mayor relevancia en la modelización financiera de la incertidumbre. La gran base es Arrow-Debreu, cuya teoría general sobre el equilibrio bajo incertidumbre sienta los pilares sobre los cuales se sostienen las demás teorías. Sin embargo, no debemos olvidarnos del trabajo de todos los matemáticos y científicos que desarrollaron las teorías que utilizaron los protagonistas de los propios modelos.

Los modelos financieros clásicos se dividen y subdividen según dos criterios referentes a su naturaleza. La primera distinción se hace basada en si los modelos evalúan a sus variables en un solo momento (estáticos) que suele estar en equilibrio, o si hay una valoración de la evolución temporal de las variables (dinámicos). Los dinámicos a su vez pueden ser discretos o continuos, dependiendo de si la variable temporal toma valores en un conjunto discreto o continuo, respectivamente.

Independientemente de estas diferencias, existen marcos teóricos y formas de estructurar la información que todos los modelos tienen en cuenta, siendo importante el vínculo existente entre ellos para entender de donde vienen muchas de sus expresiones y metodologías. No sólo la ya mencionada teoría del equilibrio bajo incertidumbre, sino el concepto de sigma-álgebra, la replicación, y en los de valoración de derivados la valoración neutra al riesgo.

El modelo CAPM, por ejemplo, es un modelo estático de equilibro. La ecuación inicial que aprendemos en cursos introductorios es el resultado fundamental de varios pasos cronológicamente ordenados y dados por muchos autores. Markowitz (1952) empieza introduciéndonos a la diversificación, a la desviación típica de rendimientos como medida de riesgo de cada activo, al óptimo de Pareto y a la frontera de posibilidades. Pero no es hasta que Tobin (1958) introduce el activo sin riesgo y Treynor, Lintner y Mossin imponen la condición de equilibrio al teorema de un fondo en la década siguiente que nace realmente la famosa expresión de la SML, cuya β nos permite categorizar a los activos según su correlación con el mercado y discernir el riesgo sistemático.

Desde lo estático a lo dinámico, se traducen no sólo las ideas de equilibrio sino también sobre la estructura de la información. Si en un modelo estático sólo hay un periodo, sus ideas se pueden coger y expandir a más tiempos, dando lugar a un hilo lógico visible cuando se desarrollan los modelos haciendo notar las relaciones entre ellos.

La estructura de la información toma la forma de sigma-álgebra. Esta permite visualizar la información que tenemos sobre los estados de la naturaleza según los valores que las variables toman en estos estados. En Arrow-Debreu, esta formalización matemática desemboca en la conclusión de que k activos A-D forman con sus numerarios a la base canónica en el espacio vectorial $\mathbb{R}^k$, pudiendo replicarse cualquier cartera si los mercados son completos.

Como hemos dicho y como muchos de los autores de matemática financiera también indican, esta forma de interpretar el mundo económico no tiene por qué hacerse sólo para un periodo estático. En un modelo dinámico, podemos tratar a cada periodo en la evolución temporal como lo hacen Arrow-Debreu para un solo momento de equilibrio.

Nace de aquí la necesidad de describir el proceso estocástico, el cual tiene una estructura de la información cambiante a medida que avanzamos en el tiempo y obtenemos más información sobre los posibles estados de la naturaleza finales. Las particiones se van haciendo más finas, dando lugar a la filtración del proceso.

En este ámbito, el modelo binomial se caracterizará por un proceso binomial, y Black Scholes por un proceso de Wiener, siendo que ambos beberán de estas ideas para tomar forma (según la valoración neutra al riesgo).

La interpretación de lo incierto también requiere algunas especificidades, tendiendo a adaptarse cuantitativamente a las necesidades de cada modelo y marcando algunas diferencias entre ellos. Por ejemplo, el CAPM adopta rendimientos ordinarios, algo que una de las principales suposiciones que hacen Black y Scholes no les permite hacer, necesitando otras propiedades para este fin. Estos últimos asumen que la variable precio del activo subyacente sigue una distribución log-normal, lo cual no pasa en el binomial, otro ejemplo de las diferencias que los modelos obviamente también guardan.

Entender estos conceptos es una tarea sencilla a la par que imprescindible. No debe uno debruzarse sobre el modelo binomial sin antes entender las matemáticas discretas desarrolladas por Bernoulli, si lo que pretende es utilizar el modelo entendiéndolo desde la más pura base y no sólo aplicar "fórmulas" desconocidas.

La comprensión matemática profunda de los modelos, los cuales a nivel de grado todos aprendemos en las clases incluso más elementales de finanzas en ADE, debería de ser promovida y hacerse sobre ella hincapié. Existe un estigma social, especialmente en facultades de Empresariales, contra el pensamiento lógico y matemático, que es contraproducente al aprendizaje de las ciencias económicas y financieras. En este decadente proceso se incluye el proprio autor, el cual empezó a escribir este trabajo convencido de que el CAPM era una regresión lineal.

Se invita pues como última nota a la comunidad académica a intentar enseñar y aprender estas matemáticas con rigor, compartiéndolas no como un objetivo aborrecido a ser superado en el camino del alumno, sino como una forma de entender qué es lo que realmente está pasando por detrás de las expresiones que se tienden a memorizar sin comprender ni nunca ver la belleza que guardan por detrás de una máscara de falso tedio.

8. Bibliografía

Arrow, K. & Debreu, G. (1954). Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy. *Econometrica*. 22(3), 265-290.

Black F., & Scholes, M. (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy.* (81)3, 637-654.

Campbell, J.Y. (1996). Understanding Risk and Return. *The Journal of Finance.* 104(2), 298-345.

Campbell, J.Y. (2000). Asset Pricing at the Millennium. *The Journal of Finance.* 55(4), 1515-1567.

Carabias, S. (2016). *Introducción a la modelización de mercados financieros. Prácticas de matemáticas para finanzas*. Madrid: Universidad Pontificia Comillas.

Carabias, S., & Serrano, A. (2010). *Métodos matemáticos para el Análisis Dinámico*. Madrid: Mimeo.

Cervantes, M. (1615). *El ingenioso hidalgo Don Quijote de la Mancha.* Quito: Libresa.

Cochrane, J. H. (1997). *Asset Pricing.* Chicago: University of Chicago.

Cox, J.C., Ross, S.A., & Rubinstein, M. (1979). Option Pricing: A Simplified Approach. *Journal of Financial Economics.* 7(3), 229-263.

Cvitanić, J., & Zapatero, F. (2004) *Introduction to the Economics and Mathematics of Financial Markets.* Cambridge: MIT Press.

Debreu, G. (1959). Theory of Value: An Axiomatic Analysis of Economic Equilibrium. New Haven: Yale University Press.

Demange, G., & Laroque, G. (2006). *Finance and the economics of uncertainty*. Hoboken: Blackwell Publishing.

Demange, G., & Rochet, J. (2005). *Méthodes mathématiques de la finance.* Paris: Economica.

Dothan, M. U. (2011). *Prices in financial markets*. Oxford: Oxford University Press.

Dhrymes, P. (2016). *Portfolio constructions, measurement, and efficiency – essays in honor of Jack Treynor.* Berlin: Springer.

Duffie, D. (1988). *Security Markets Stochastic Models*. San Diego: Academic Press.

Einstein, A. (1905). *Investigations on the theory of Brownian movement.* Mineola: Dover Publications.

Fernández Pérez, J.L. (2001). Breve historia de las matemáticas en los mercados financieros. *Zaragoza: Monografías de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas, Químicas y Naturales de Zaragoza.* 1(19), 87-95.

Frey, R. (1997). *Derivative Asset Analysis in Models with Level-Dependent and Stochastic Volatility*. Zurich: ETH Zurich.

Flood, M. D. (1991). *An introduction to complete markets.* St. Louis: Federal Reserve Bank.

Gollier, C. (1999). *The Economics of Risk and Time.* Toulouse: Universidad de Toulouse.

Greenblatt, J. (2006). *The Little Book That Beats the Market.* Hoboken: John Wiley & Sons.

Gutierrez, L. M. (2011). *Mercados oficiales de futuros y opciones*. Madrid: Agencia Estatal de Administración Tributaria.

Harrison, J. M., & Kreps, D. M. (1979). Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets. *Journal of Economic Theory* 20, 381-408.

Harrison, J. M., & Pliska, S. R. (1981). Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading. *Stochastic Processes and their Applications* 11, 215-260.

Hull, J. C. (1988). *Options, futures and other derivatives: global edition.* New York: Pearson Education Limited.

Lawler, G. (2014). *Stochastic Calculus: An Introduction with Applications*. Princeton: Princeton University.

Lomelí, H., & Rumbos, B. (2003). *Métodos dinámicos en economía.* Ciudad de México: Thomson Editores, S. A.

Lozano, F., Monsalve, S., & Villa, E. (1997). El modelo Arrow-Debreu es un modelo estático. *Cuadernos de Economía*. 16(26), 21-46.

Luenberger, D. G. (1998). *Investment Science.* Oxford: Oxford University Press.

Marín, J. M., Rubio, G., & Mas-Colell, A. (2011). *Economía financiera*. Barcelona: Antoni Bosch Editor.

Markowitz, H. (1952). Portfolio Selection. *The Journal of Finance.* 7(1), 77-91.

Markowitz, H. (1990). Les Prix Nobel 1990. Stockholm: Nobel Foundation.

Medina, P. K., & Merino, S. (2003). *Mathematical Finance and Probability. A discrete introduction.* Basel: Birkhäuser Verlag.

Merton, R.C. (1995). Influence of Mathematical Models in Finance on Practice: Past, Present, and Future. *Financial Practice and Education*. 5(1), 7-15.

Rebonato, R. (2004). Volatility and correlation. Chichester: John Wiley & Sons, Ltd.

Roger, P. (1991). *Les outils de la modélisation financière.* Estrasburgo: Universidad Louis-Pasteur.

Shreve, S. E. (2004). *Stochastic Calculus and Finance.* Pittsburgh: Carnegie Mellon University.

Spiegel, M. R. (1977). Probabilidade e Estatística. São Paulo: McGraw-Hill.

Tobin, J. (1958). Liquidity Preference as Behavior Towards Risk. *The Review of Economic Studies.* 25(2), 65-86.

9. Anexo I

Antes de nada, será necesario introducir al lector el concepto de rendimiento continuamente compuesto. Volvemos al matemático prolífero Jacob Bernoulli, que no sólo desarrolló la distribución binomial, sino el rendimiento compuesto continuo. Bernoulli sabía, como los matemáticos y los usureros en general hasta entonces, como cambia el rendimiento compuesto para cada tipo de periodo (día, mes, año, etc.).

El interés compuesto es aquél en el cual los rendimientos de cada periodo se añaden al capital inicial y son invertidos junto con él. Un buen ejemplo de rendimiento compuesto es una cuenta corriente en un banco. Si ganamos 5% en un año de interés, ese dinero es invertido y crecerá al 5% junto con nuestro capital inicial en el siguiente año. Un contraejemplo de interés compuesto es la hipoteca de una casa o un bono, en el cual los pagos de interés se realizan sobre el capital inicial pero aparte y sin afectar o incrementar el siguiente valor a pagar.

Bernoulli se preguntó qué pasaría si en vez de un año, un mes, o un día, invirtiéramos nuestros intereses compuestos a cada segundo que pase ("segundo" siendo realmente una alegoría para cantidad de tiempo infinitesimal). Entonces, si nosotros somos un banco y ofrecemos al lector un interés del 100% sobre un euro invertido anualmente, al final del periodo tendríamos:

$$1€ * \left(1 + \frac{1}{1}\right)^{1} = 2€$$

Si al revés le ofrecemos un interés compuesto bianualmente:

$$1€ * \left(1 + \frac{1}{2}\right)^{2} = 2{,}25€$$

Si le ofrecemos un interés compuesto trimestralmente:

$$1€ * \left(1 + \frac{1}{4}\right)^{4} = 2{,}44€$$

Podemos incluso ofrecer un interés que pague diariamente:

$$1€ * \left(1 + \frac{1}{365}\right)^{365} = 2{,}71€$$

Si ahora queremos ofrecer una inversión compuesta que pague interés a cada periodo de tiempo infinitesimal, de forma absolutamente constante, utilizamos el concepto de límite (del cálculo) para llegar a nuestra respuesta:

$$1€ * \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} = 2{,}7182818\ldots € = e$$

Y he aquí cómo en las matemáticas del siglo XVII se llegó a la constante *e*, también conocida como el número de Euler, ya que el suizo usó esa letra del alfabeto latino en *Meditatio in Experimenta explosione tormentorum nuper instituta* (1727) como notación para la base del logaritmo natural, sin intención de nombrarla en honor a si mismo (o eso se cree). Es curioso pensar que al contrario de las demás constantes como π o $\sqrt{2}$ que son descubiertas a través de la geometría, la constante *e* es descubierta por un matemático que buscaba resolver un problema financiero, y que acaba por descubrir la clave de descripción del crecimiento continuo no sólo para inversiones de capital, sino incluso también para poblaciones de seres vivos y muchos otros ejemplos.

10. Anexo II

Para entender la continuidad, es útil pensar en la recta real. Realmente nuestra variable va a adoptar valores en ℝ, siendo ℝ un conjunto no contable, tal y como lo demostró Cantor por reducción al absurdo, cuya cardinalidad es muchísimo más densa que la de los números naturales. De hecho, Cantor demostró que todos los números reales entre 0 y 1 tienen una cardinalidad más densa que la de los números naturales, puesto que no se puede hacer una función inyectiva entre ambos conjuntos ℕ y $[0,1] \in \mathbb{R}$.

La demostración de Cantor es sencilla. Sabemos que ℕ es un conjunto contable pues podemos hacer una lista:

$$\mathbb{N} = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

De forma parecida se puede decir que los números enteros Z son contables:

$$\mathbb{Z} = 0, 1, -1, 2, -2, \ldots$$

Los números racionales Q también se pueden poner en una lista si hacemos una tabla con los números naturales en vertical y horizontal y contamos el resultado de forma diagonal.

	1	2	3	4	5
1	1/1	1/2	1/3	¼	1/5
2	2/1	2/2	2/3	2/4	2/5
3	3/1	3/2	3/3	¾	3/5
4	4/1	4/2	4/3	4/4	4/5
5	5/1	5/2	5/3	5/4	5/5

Con lo cual ℚ es contable de la siguiente manera:

$$\mathbb{Q} = 1/1, -1/1, 1/2, -1/2, 2/1, -2/1, 1/3, -1/3, 2/2, -2/2, 3/1, -3/1, 1/4, -1/4, \ldots$$

Los números reales, como sabemos, incluyen a los irracionales, aquellos números que no se pueden representar en forma de fracción, como π, $\sqrt{2}$, o incluso nuestro e. Cantor demostró por reducción al absurdo que este conjunto no se puede contar. La reducción al absurdo es el método lógico mediante el cual llegamos a una conclusión partiendo de su contrario, formalmente:

1. A
2. ¬ B
3. B
4. ¬ A

Aquí se parte de la premisa de que la frase A es verdadera. Sin embargo, cuando esto sucede, existe una segunda frase lógica B tal que se manifiesta de forma verdadera y falsa a la vez, dando lugar a una contradicción (o absurdo), el cual nos lleva a la conclusión de que A no podía ser verdadera en el comienzo, por lo que es falsa. Este tipo de razonamiento es muy útil en demostraciones relacionadas con el arbitraje.

Cómo lo hizo Cantor fue partiendo del principio de que si se puede contar $\mathbb{R}$, e hizo una lista infinita arbitraria:

0.00493983578976844895765847403…

3.34867897630893850635730593958…

9.43906309835984780498480213499…

0.00000000000000000000000004444…

…

El absurdo en esta demostración viene a que, en esta lista, podemos coger un número del primer digito el primero del primer número de la lista, de segundo de la segunda cifra del segundo número de la lista:

0.330…

que realmente no está contenido en la lista, por lo que no están todos los números reales, ni nunca se podría hacer una lista de números reales que contenga a todo $\mathbb{R}$.