



UNIVERSIDAD PONTIFICIA DE COMILLAS

# **DATA ENVELOPMENT ANALYSIS: ANÁLISIS DE LA EFICIENCIA DE LOS FONDOS DE INVERSIÓN**

Autor: Pablo Guirado Arechederra  
Director: Mahmoud Aymo

Madrid  
Mayo 2018

Pablo  
Guirado  
Arechederra

**DATA ENVELOPMENT ANALYSIS: ANÁLISIS DE LA EFICIENCIA DE LOS FONDOS DE INVERSIÓN**



## i. Índice

II.	ABSTRACT .....	4
III.	RESUMEN.....	4
1.	INTRODUCCIÓN .....	5
1.1.	OBJETIVOS .....	5
1.2.	METODOLOGÍA .....	5
1.3.	ESTADO DE LA CUESTIÓN .....	6
1.4.	PARTES DEL TFG .....	6
2.	MARCO TEÓRICO .....	8
2.1.	PARTE 1: TEORÍA DE LA GESTIÓN DE CARTERAS.....	8
2.1.1.	<i>Introducción a la selección de carteras.....</i>	8
2.1.2.	<i>Eficiencia: Rentabilidad y volatilidad de las carteras.....</i>	9
2.1.3.	<i>Análisis de la media – varianza en la selección y optimización de carteras.....</i>	9
2.1.4.	<i>Los efectos de la diversificación en carteras con más de dos activos .....</i>	10
2.2.	MODELOS DE SELECCIÓN DE CARTERAS DE VALORES .....	14
2.2.1.	<i>El modelo estándar mean-variance de selección de carteras .....</i>	14
2.2.2.	<i>El modelo de Tobin-Sharpe-Lintner.....</i>	16
2.2.3.	<i>Modelo de Black .....</i>	18
2.2.4.	<i>Fondos de inversión: Concepto y tipologías .....</i>	19
2.3.	PARTE 2: DATA ENVELOPMENT ANALYSIS (DEA).....	21
2.3.1.	<i>Introducción: Frontera eficiente, inputs e outputs.....</i>	21
2.3.2.	<i>Marco histórico del DEA.....</i>	23
2.3.3.	<i>Modelo CCR .....</i>	24
2.3.4.	<i>Aplicación del DEA: fondos de inversión.....</i>	29
3.	MARCO PRÁCTICO .....	32
3.1.	INPUTS Y OUTPUTS DEL MODELO .....	32
3.2.	INFORMACIÓN DEL MODELO .....	35
3.2.1.	<i>Fondos.....</i>	35
3.2.2.	<i>Tipología del modelo.....</i>	35
3.3.	RESULTADOS DEL MODELO.....	36
3.3.1.	<i>Análisis de inputs y outputs de cada uno de los grupos.....</i>	38
3.3.2.	<i>Información adicional obtenida.....</i>	42
4.	CONCLUSIÓN.....	44
5.	ANEXO .....	45
6.	BIBLIOGRAFÍA .....	48

## **ii. Abstract**

*In the allocation of the most efficient securities and portfolios in the market, infinity variables are required to taking into account. In our case, the selection of mutual funds, implies not only to taking into account the traditional variables in the portfolio selection (standard deviation, correlation coefficient and return), showed in the Markowitz books, but also, some indicators related with these financial vehicles. Because of that, in this paper, it is expected to introduce a new alternative tool named Data Envelopment Analysis (DEA) focus on the performance evaluation. In the first place, its inception and application will be showed to the reader in the shape of mathematical optimization programs. In the other hand, its functionality and efficacy are going to be explained by the form of a DEA model applied to a sample of 40 mutual funds. The results obtained, show the percentages in the sample for efficient, almost efficient and inefficient funds of 33%, 27,5% and 37,5% respectively. The data deduced of the model's results, will surprise the reader with another purpose of the DEA related with the market trend analysis.*

**Keywords:** *Data Envelopment Analysis, performance, efficiency, evaluation, mutual fund, input and output.*

## **iii. Resumen**

La selección de los valores o carteras más eficientes en el mercado, es una actividad que requiere tener en cuenta infinidad de variables. En nuestro caso, la selección de fondos de inversión, supone no solo tener en cuenta las variables tradicionales en la selección de carteras (desviación típica, coeficiente de correlación, rentabilidad) expuestas en los libros de Markowitz, sino también, indicadores propios de estos vehículos financieros. Por ello en este documento, se pretende presentar una herramienta alternativa denominada *Data Envelopment Analysis* (DEA) para la evaluación del desempeño. En primera instancia, su origen y aplicación serán presentados al lector en forma de programas de optimización matemática. Por otro lado, su funcionalidad y eficacia se verán explicadas mediante la construcción de un modelo DEA aplicado a una muestra de 40 fondos de Morningstar. Los resultados obtenidos, muestran unos porcentajes en la muestra para los fondos eficientes, casi eficientes e ineficientes de 33%, 27,5% y 37,5% respectivamente. La información extraída de los resultados del modelo, sorprenderá al lector con una segunda funcionalidad del DEA relacionada con el análisis de tendencias en los mercados.

# 1. Introducción

## 1.1. Objetivos

La principal finalidad de este TFG, es analizar el funcionamiento y la eficacia de la herramienta de *Data Envelopment Analysis* en la selección de fondos de inversión para la futura construcción de carteras. Previo a la consecución de este primer objetivo, existen una serie de conceptos que el lector debe interiorizar al final de la primera parte del marco teórico:

- Cartera eficiente
- Volatilidad
- Rentabilidad esperada
- Diversificación
- Covarianza

En definitiva, lo que se pretende demostrar en este documento, es una manera alternativa de seleccionar fondos de inversión mediante 1) el análisis de la información y 2) la matemática concretamente, programas de maximización de la eficiencia de las unidades de decisión, con el fin de alcanzar la mayor eficiencia en las decisiones de inversión. Dicho de otro modo, este documento está orientado a proveer al lector de una herramienta alternativa a las convencionales para medir el desempeño de cualquier tipo de cartera de valores.

## 1.2. Metodología

Previo a la descripción del proceso para la consecución de este objetivo, se presentará una introducción histórica referente a: los modelos usados para seleccionar carteras, el concepto de eficiencia y una breve descripción de los puntos más característicos de los fondos de inversión. Para la elaboración de este primer marco, ha sido necesaria la lectura de *Portfolio selection, Mean-Variance Analysis in Portfolio choice and Capital Markets* de Harry Markowitz e información sobre la naturaleza y tipología de los fondos de inversión que actualmente se encuentran operativos en el mercado. En estas tres fuentes de información, se muestran los principales conceptos en el ámbito de gestión de carteras, los diferentes modelos para gestionar y seleccionar las mismas y un primer acercamiento al término fondo de inversión.

En este documento, se utilizará el método cuantitativo DEA para la medición de la eficiencia de los valores. Se ha considerado este método como el más idóneo para lograr el objetivo propuesto, por su habilidad para detectar no solo unidades de decisión eficientes, sino también, los motivos por los cuales existen otras unidades de decisión que no lo son. Además, este modelo permite tener en cuenta las preferencias del inversor acerca de los inputs y outputs gracias a su flexibilidad. Esta flexibilidad se traduce en que el individuo, puede introducir un número ilimitado de restricciones referentes a las ponderaciones máximas y mínimas que los inputs y outputs deben tener.

El marco práctico de este documento estará sustentado por dos pilares. En primer lugar, se hará uso de una base de datos de fondos de inversión con el objetivo de, extraer la información necesaria referente a los inputs e outputs para la posterior construcción del programa de maximización. En segundo lugar, mencionar que, para el correcto funcionamiento de este modelo, será necesario extraer información relacionada con los diferentes aspectos recogidos en los diversos estudios mencionados en la parte teórica. La lógica bajo este segundo pilar, es el deseo de evitar cometer algún error en la construcción del modelo poco intuitivo aparentemente.

### **1.3. Estado de la cuestión**

Los diferentes atributos que se tienen que tener en cuenta en el momento de realizar una inversión, convierten la toma de decisiones en un concepto complejo. Este aspecto característico en el universo de los fondos, ha llevado a numerosos autores como Nguyen-Thi-Thanh (2005) o Morey & Morey (1999) a emplear el DEA como una herramienta para asistir a los inversores en la selección de fondos. Gracias a la flexibilidad de esta herramienta, el inversor puede construir su programa a optimizar incluyendo sus preferencias referentes a cualquier dimensión de los fondos.

### **1.4. Partes del TFG**

En una primera parte se expondrá un marco teórico dividido en dos apartados: una introducción histórica-práctica de la selección de carteras (incluyendo algunos conceptos relacionados con los fondos de inversión) y una explicación en detalle de la herramienta *Data Envelopment Analysis*. La introducción incluirá no solo conceptos relevantes a tener en cuenta en el análisis de carteras, sino también, los efectos de la diversificación y modelos para seleccionar y en algunos casos gestionar carteras. Esta

primera parte, finalizará con el concepto de fondo de inversión y la explicación tanto de la tipología como la naturaleza del mencionado. El segundo apartado constará de dos partes. La primera parte está compuesta por una explicación teórica detallada de la herramienta *Data Envelopment Analysis*, donde se incluye las definiciones de conceptos relevantes asociados al modelo junto con la explicación de los modelos orientados a los inputs e outputs (modelo CCR). Por otra parte, este segundo apartado del marco teórico incluye también la presentación de diferentes estudios del DEA aplicados a la selección de fondos. Los argumentos en favor de DEA incluidos en la primera parte de este apartado, están basados en los estudios mencionados realizados por autores especialistas en este campo.

La segunda parte de este documento será nombrada como el marco práctico. En él, se pretende mostrar un ejemplo práctico del uso de *Data Envelopment Analysis*, en una muestra formada por fondos de inversión extraída de una base de datos. Se procederá en primer lugar, a comentar las variables (input e outputs) a usar para la construcción del modelo y su origen. Posteriormente, se elaborarán unas tablas y gráficos en donde se reflejen los resultados obtenidos. Esta segunda parte, finalizará con un comentario analítico del resultado final obtenido. Toda información adicional que no se contemplará en un principio, se incluirá en un apartado posterior a el comentario mencionado.

En la tercera parte, se presentarán las conclusiones del estudio con una breve síntesis de todo el trabajo. Esta conclusión final, tratará de resaltar los puntos más importantes del escrito con el fin de que al finalizar la lectura, el lector tenga claras las ideas esenciales.

Por último, el anexo recogerá tres tablas con toda la información utilizada para la elaboración de modelo DEA del marco práctico. Este apartado incluye no solo los inputs y outputs de cada uno de los fondos, sino también, la tipología que tiene cada uno de ellos y su nombre.

## **2. Marco teórico**

### **2.1. Parte 1: Teoría de la gestión de carteras**

En esta primera parte del marco teórico, se hará uso de dos libros escritos por Markowitz. El primer libro *Portfolio Selection* (Markowitz, 1959), se ha utilizado para explicar los principales conceptos relevantes en el análisis de carteras de valores y los efectos de la diversificación en los diferentes tipos de carteras. Tras este primer acercamiento a la selección de carteras, se presentarán diversos modelos que han sido considerados como los más relevantes para la selección de carteras extraídos del libro *Mean-Variance Analysis in Portfolio Choice and Capital Markets* (Markowitz, 2000). Esta primera parte, concluirá con una exposición del concepto de fondo de inversión y sus posibles tipologías. La idea de trasfondo de esta primera parte, es la introducción al mundo de selección de carteras desde una perspectiva histórica-práctica.

#### **2.1.1. Introducción a la selección de carteras**

Antes de elegir cualquier tipo de cartera, es necesario realizar un análisis para identificar los inputs que vamos a usar para seleccionar la cartera más eficiente para nuestro perfil. Este paso previo nos permite enfrentarnos a la incertidumbre tanto económica como no económica. La incertidumbre siempre va a estar presente, pero a través de este análisis de información pasada y futura, podemos hacerla mínima en lo que se refiere a nuestra cartera. Es decir, el análisis de valores nos permite ver la relación que existe entre unos, otros y con respecto al mercado, lo que nos lleva a tener conclusiones fundamentadas (Markowitz, 1959)

Otro factor a tener en cuenta es la correlación que existe entre los valores, concepto determinante en la diversificación del riesgo. Markowitz (1959) analizó que, si esta correlación era perfecta, la diversificación no reduciría el riesgo. Por esta razón, el tener valores con alto nivel de correlación como son los que compartan una misma industria, no es eficiente. Lo óptimo es un portfolio formado por valores poco homogéneos en lo que se refiere a niveles y direcciones de correlación (Markowitz, 1959).

### **2.1.2. Eficiencia: Rentabilidad y volatilidad de las carteras**

El análisis de carteras, comienza por elegir aquellos valores que son eficientes. La eficiencia según Markowitz (1959), se mide en términos de rentabilidad y volatilidad. Antes de definir el concepto de cartera eficiente, es necesario entender cómo se calculan los conceptos de los que depende.

La rentabilidad de una cartera según Markowitz (1959), es una media ponderada en donde las rentabilidades de los valores se multiplican por su porcentaje en la cartera. De tal manera que, la ganancia de la cartera, tenderá a estar próximo a aquel valor con mayor peso en ella.

En un primer momento, Markowitz (1959) decidió medir la variabilidad de la cartera usando el concepto *Greatest lost* que puede llegar a tener la cartera. Más tarde, sustituyó esta medida debido a sus ineficiencias por la actual medida de la volatilidad, la desviación típica estadística.

A diferencia de la rentabilidad, la volatilidad de la cartera, puede ser menor que la media ponderada de las volatilidades de los valores que la conforman. Esto ocurre ya que, este concepto no solo depende de la variabilidad de los valores, sino también depende de la correlación entre los mismos (Markowitz ,1959)

En su libro *Portfolio Selection*, Markowitz (1959) nos muestra como una cartera diversificada tiene mayor rentabilidad y menor variabilidad que una cartera formada por un solo valor de esa cartera. En este ejemplo, Markowitz nos muestra las ventajas de la diversificación en los casos de correlación imperfecta entre los valores.

Tras analizar la rentabilidad, variabilidad de las carteras y su forma de calcularlas, pasamos a definir el concepto de cartera eficiente. Una cartera es eficiente si es imposible mejorar su rentabilidad sin aumentar el riesgo (Markowitz, 1959).

### **2.1.3. Análisis de la media – varianza en la selección y optimización de carteras**

Harry Markowitz (1959) definió la cartera eficiente como aquella que (1) tiene una mínima varianza dada una rentabilidad esperada y (2) tiene una máxima rentabilidad dado un nivel de riesgo.

El inversor elegirá aquella cartera eficiente que satisfaga sus necesidades y preferencias de riesgo. Como consecuencia de este comportamiento, cada inversor elegirá una cartera de valores diferente según su perfil de riesgo (Markowitz, 1959).

Para Markowitz (1959), la selección de carteras a través de un programa de optimización, tiene como objetivo encontrar todas las carteras eficientes. Una vez se hayan identificado, elegiremos aquella que más se adecue al perfil del inversor.

#### **2.1.4. Los efectos de la diversificación en carteras con más de dos activos**

En carteras con más de dos valores, la rentabilidad esperada y la varianza se calculan de la misma forma que hemos mencionado en el anterior punto. Ahora bien, dependiendo de la covarianza que exista entre estos valores, la diversificación podrá ser beneficiosa o no (Markowitz, 1959).

La varianza de una cartera se ve más afectada por la covarianza de los valores que por la propia varianza de cada valor. Esto es así ya que las carteras que están formadas por activos poco volátiles, pero totalmente correlacionados, pueden llegar a ser muy inestables debido a la covarianza entre los valores (Markowitz, 1959).

Previo a analizar el efecto que tiene la diversificación en la varianza de la cartera, asumimos que las rentabilidades de cada uno de los valores se distribuyen como una variable aleatoria.

A continuación, se van a presentar diferentes tipos de carteras y los efectos que tienen en cada una de estas la diversificación.

#### **Tipo 1: Cartera con valores con el mismo peso, correlación cero y rentabilidad esperada e varianza igual**

Asumimos que nos encontramos con una cartera con  $r_1, r_2, r_3 \dots, r_n$  rentabilidades que se distribuyen aleatoriamente. Todos los valores de esta cartera tienen la misma combinación de  $EV$ . Por consiguiente, Markowitz (1959) argumentó lo siguiente:

$$E = E(r_1) = E(r_2) = E(r_3) \dots = E(r_n)$$

$$V = V(r_1) = V(r_2) = V(r_3) = \dots = V(r_n)$$

La rentabilidad esperada  $E$  de una cartera con las características mencionadas es:

$$E \text{ de la cartera} = \sum_{i=1}^n E = NE$$

Donde  $E$  es la rentabilidad esperada de cada valor. A partir de esta fórmula podemos obtener la rentabilidad esperada de la media de las rentabilidades  $\mu$ :

$$E(\mu) = E\left(\frac{NE}{N}\right)$$

$$E(\mu) = E$$

En caso de la varianza, es similar para esta cartera con valores no correlacionados:

$$V \text{ de la cartera} = \sum_{i=1}^N V(r_i) = NV$$

Al contrario que la varianza de la cartera, la varianza de la media de las rentabilidades si disminuye a medida que aumenta el tamaño de la cartera:

$$V(\mu) = V(NV)$$

$$V(\mu) = \frac{NV}{N^2} = \frac{V}{N}$$

Cuanto mayor sea  $N$  más próxima se encontrará  $V(\mu)$  de 0.

## **Tipo 2: Valores con correlación cero, pero varianza y rentabilidad esperada diferente.**

Si asumimos que la rentabilidad esperada de los valores no es la misma para todos ellos, la fórmula de la suma de las rentabilidades esperadas según Markowitz (1959), sería la mostrada a continuación:

$$\text{suma de las } E_i = \sum_{i=1}^n E_i$$

La esperanza matemática de la media de las rentabilidades sería:

$$E(\mu) = \frac{\sum_{i=1}^n E_i}{N}$$

Es decir, rentabilidad esperada de una cartera con tales características, es igual a la media de las rentabilidades esperadas de cada uno de los valores.

Se ha podido apreciar en la cartera tipo que, a medida que aumentamos  $N$ , la incertidumbre de los retornos tiende a ser 0. En lo referente a este hecho, Markowitz (1959) argumentaba que para que la diversificación eliminará casi toda la incertidumbre, era necesario establecer un límite máximo a la varianza  $V^*$ . Por consiguiente, la explicación en la que se basó Markowitz (1959) para defender tal efecto fue la siguiente:

Nos encontramos con una cartera con  $r_1, r_2, r_3 \dots$  rentabilidades que se caracterizan por tener una correlación de 0. La varianza de estas rentabilidades  $V_1, V_2, V_3 \dots$  no pueden exceder un límite máximo  $V^*$ .

$$\text{var}(\text{suma de las } r_i) = \sum_{i=1}^n V_i$$

La  $V_i$  no puede superar  $V^*$  de tal manera que:

$$\text{var}(\text{suma de los } r_i) \leq NV^*$$

Esta restricción también afecta a la varianza de la media de las rentabilidades como se muestra a continuación:

$$\text{var}(\mu) = \left(\frac{1}{N}\right)^2 \text{var}(\text{suma de los } r_i)$$

Aplicando la restricción mencionada anteriormente:

$$\text{var}(\mu) \leq \frac{V^*}{N}$$

Si admitimos esta restricción en nuestra cartera caracterizada por tener rentabilidades no correlacionadas, la alta diversificación nos permitirá eliminar prácticamente toda la incertidumbre de los retornos.

### **Tipo 3: Valores con correlación diferente a cero, varianza y rentabilidad diferente**

Al igual que en el tipo 2, en esta cartera asumimos que las varianzas están limitadas. A pesar de que las varianzas estén limitadas, la varianza de la media es diferente respecto al resto de carteras debido a la existencia de covarianzas distintas a 0.

El número de covarianzas que pueden existir en una cartera se calculan sumando los N-1 valores de la cartera. Por consiguiente, una cartera con 6 valores tendrá 15 distintas covarianzas. El número de covarianzas para N valores será igual a  $((N-1) N) / 2$  es decir, la suma de los N-1 primeros valores.

La media de las covarianzas será igual a:

$$\frac{\textit{suma covarianzas}}{(N - 1)N/2}$$

Ordenando cada uno de los términos obtenemos:

$$\frac{2 \textit{ suma de las covarianzas}}{(N - 1)N}$$

Si despejamos la suma de las covarianzas, obtenemos la siguiente fórmula que nos va a ser de gran ayuda para el cálculo de la varianza de la cartera:

$$\textit{suma de las covarianzas} = \frac{(N - 1)N}{2} \textit{ la media de las covarianzas}$$

El que existan covarianzas distintas a 0, nos lleva a decir que la varianza de la cartera no solo va a estar influida por de la suma de las varianzas, sino también por la suma de las covarianzas. Por consiguiente, la suma de las varianzas es:

$$\textit{var de la cartera} = \textit{suma de las varianzas} + 2 \textit{ suma de las covarianzas}$$

La razón por la cual se multiplican las covarianzas por dos es matemática. Al haber más de dos valores, las covarianzas se representan en forma de matriz. De ahí que, en el momento de calcular la suma de covarianzas, no solo haya que sumar filas sino también columnas.

Como se mencionó al principio de este apartado, la varianza de la media va a diferir del resto de tipos de carteras en cuanto a que, si existen covarianzas, los efectos favorables de la diversificación se diluyen.

$$\textit{var}(\mu) = \left(\frac{1}{N}\right)^2 \textit{ var de la cartera}$$

$$\text{var}(\mu) = \frac{\text{suma de las varianzas}}{N^2} + \frac{(N-1)}{N} \text{ la media de las covarianzas}$$

Esta última fórmula nos muestra dos efectos de la diversificación. El primero es que a medida que N tiende a infinito, la primera fracción de la ecuación tiende a 0. Ahora bien, como consecuencia del segundo efecto, a medida que aumenta N la  $\text{var}(\mu)$  tiende a parecerse al valor de la media de las covarianzas. Esta ecuación es la prueba de la relatividad de los efectos de la diversificación. Por ello a la hora de analizarlos, se deben estudiar teniendo en cuenta el número de valores que conforman la cartera evaluada.

Markowitz (1959) tras el estudio de la última cartera presentada en este documento, argumentó que pese a existir valores muy arriesgados, lo importante no era el valor en sí mismo sino el impacto que tenía este en la cartera. Según el autor, no existen valores perfectos para cualquier cartera ya que todo depende de la forma en que se combinan unos con otros. A través de esta reflexión, Markowitz (1959) quiere hacernos comprender que lo importante a la hora de seleccionar carteras de valores no es una visión individualista centrada en el valor, sino más bien, una visión grupal de combinaciones de valores.

## 2.2. Modelos de selección de carteras de valores

En 1987 Markowitz recopiló varios modelos de selección de carteras en su libro *Mean-Variance Analysis in Portfolio Choice and Capital Markets* basándose en la teoría de la probabilidad.

### 2.2.1. El modelo estándar mean-variance de selección de carteras

Este modelo asume (1) la suma del peso invertido en cada valor  $w' = (w_1 \dots w_n)$  es igual al 100% y (2) el porcentaje invertido en un valor tiene que ser mayor a cero

$$\sum_{i=1}^n w = 1$$

$$w_i \geq 0$$

Por tanto, la rentabilidad de la cartera en un periodo determinado será igual a la suma ponderada de la rentabilidad de los valores  $r_i$  distribuidas aleatoriamente por su peso  $w_i$

$$R = \sum_{i=1}^n w_i r_i$$

Al mismo tiempo, la rentabilidad que se espera obtener con esta cartera es

$$E = \sum_{i=1}^n w_i e_i$$

Donde  $e_i$  es la rentabilidad esperada de cada uno de los valores.

Al igual que la rentabilidad de los valores de la cartera, la varianza de los mismos se distribuye como una variable aleatoria y es

$$V(r_i) = E[(r_i - e_i)]^2$$

La varianza de una cartera estará formada no solo por la suma de las varianzas de los valores sino también, por la suma de sus covarianzas (Markowitz, 1987).

$$V = \sum_i^n w_i V(r_i) + \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n w_i w_j \sigma_{i,j}$$

$$V = \sum_i^n \sum_j^n w_i w_j \sigma_{i,j}$$

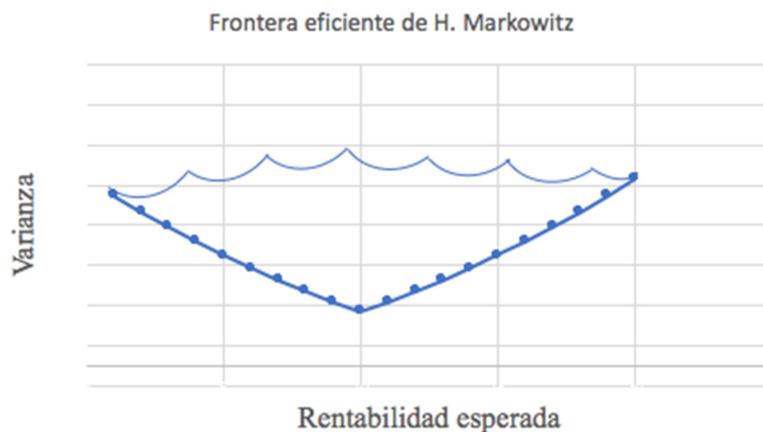
$\sum_i^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_{i,j}$  es la suma de las covarianzas de cada valor con el resto.

Donde la covarianza de  $r_i$  y  $r_j$  es

$$\sigma_{ij} = E((r_i - e_i)(r_j - e_j))$$

Todas aquellas carteras que cumplen las dos primeras ecuaciones, se las denomina carteras eficientes. Este tipo de carteras, representan una combinación de rentabilidad esperada  $E$  y varianza  $V$  que será eficiente si cumple con definición de eficiencia (Markowitz, 1987).

Como se puede ver en el siguiente gráfico, dentro de un mismo grupo de combinaciones existen algunas eficientes y otras ineficientes. Todas las combinaciones de  $EV$  depende de  $e_i$  y  $\sigma_{ij}$  es decir, de la rentabilidad esperada y de la matriz de covarianzas.



**Fuente:** H. Markowitz, 1959

Todas las combinaciones que se encuentran en el arco de abajo a la derecha son eficientes, ya que, no existe otro grupo de combinaciones que tenga una mayor rentabilidad sin tener una mayor varianza.

### 2.2.2. El modelo de Tobin-Sharpe-Lintner

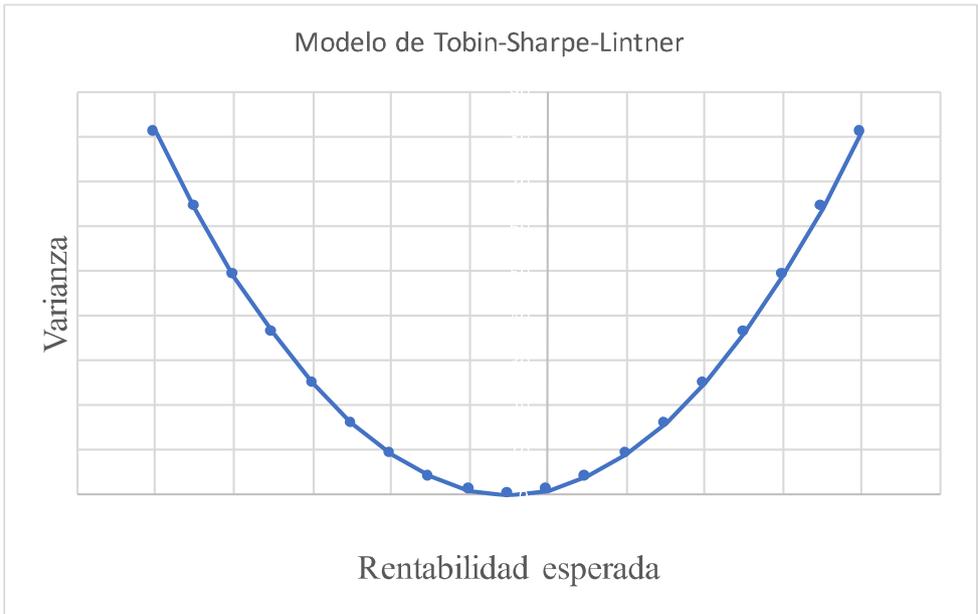
A diferencia del modelo standard, la forma del conjunto de combinaciones de *EV* no tiene límites superiores en este modelo. Además, Tobin (1958), Sharpe (1964) y Lintner (1965) incluyen en las restricciones la cantidad de dinero que se pide prestado o se presta. Por consiguiente, las carteras deben elegirse teniendo en cuenta las siguientes restricciones:

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1 + w_{n+1}$$

$$w_i \geq 0$$

$$w_{n+1} \geq -1$$

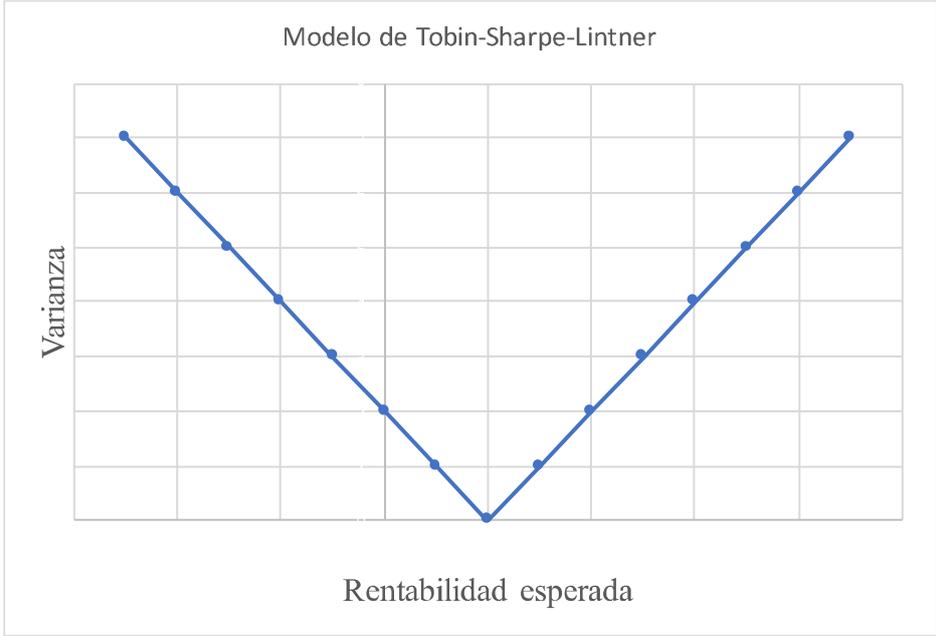
Según Tobin (1958), Sharpe (1964) y Lintner (1965),  $w_{n+1}$  es la cantidad que se pide prestada si es positiva y si es negativa, se refiere a la cantidad que se presta. La  $\sigma_{n+1n+1}$  de  $w_{n+1}$  se asume que es cero y se hace uso de la rentabilidad del activo libre de riesgo como referencia de la rentabilidad esperada de esta variable. De tal manera que, la forma que tendría este modelo sería la mostrada a continuación.



**Fuente:** H. Markowitz, 1959

Al observar el gráfico, vemos como el brazo izquierdo incluye todas las combinaciones *EV* ineficientes. Por el contrario, el brazo derecho representa todas las combinaciones eficientes.

La forma que tendría este gráfico no sería la misma si ilustrásemos combinaciones de  $E\sigma$  en vez de *EV*. Según el modelo de Tobin-Sharpe-Lintner, los límites inferiores en este caso serían dos segmentos con un mismo punto de inicio  $(E, \sigma) = (r_0, 0)$ . Al igual que en la gráfica anterior, en el mostrado a continuación no existen límites superiores.



**Fuente:** H. Markowitz, 1959

### 2.2.3. Modelo de Black

Este modelo se diferencia de los anteriores mencionados en que, a la hora de elegir una cartera, debemos cumplir la siguiente restricción:

$$\sum_{i=1}^n w = 1$$

Esta restricción significa que la suma del peso de los valores en la cartera tiene que ser igual a uno. Ahora bien, este modelo asume la negatividad en las posiciones diferenciando entre posiciones cortas  $w_i < 0$  o posiciones largas  $w_i \geq 0$ . De tal manera, que una posible cartera sería:

$$w_1 = 1001$$

$$w_2 = -1000$$

En este ejemplo vemos como un inversor con uno de equity puede estar en corto 1000 dólares en el valor uno y en largo 1001 en el valor dos.

#### Posiciones vendidas y garantías

En el caso de posiciones vendidas, las restricciones en el modelo de Black cambian debido a la necesidad de garantías por parte del inversor individual. Es decir, un inversor que tiene una posición vendida obtendrá una ganancia o pérdida, dependiendo del precio de mercado del valor en ese momento. El bróker se asegura de que el inversor cubre las pérdidas mediante la garantía. Esta garantía puede adoptar la forma de bono, letra del tesoro o incluso ser un exceso del patrimonio del inversor en la cuenta del bróker. Este proceso puede expresarse en forma de restricciones:

$$\sum_{i=1}^{K+G} w_{iL} \leq A$$

$$\alpha \sum_{i=1}^{K+G} w_{iS} \leq A - \sum_{i=1}^K w_{iL}$$

$$w_{iS} \geq 0$$

$$w_{iL} \geq 0$$

Según la primera ecuación, la suma de todas las posiciones largas  $w_{iL}$  no puede ser mayor que el patrimonio del inversor. Del mismo modo, la suma de todas las posiciones vendidas  $w_{iS}$  por su garantía  $\alpha$ , no puede ser mayor al patrimonio del inversor menos el valor de las posiciones largas que no pueden usarse como garantía  $\sum_{i=1}^K w_{iL}$ . En estas restricciones, a ambas posiciones se las clasifica con signo positivo. Además, se asume la no existencia de la posibilidad de pedir prestado.

Por tanto, las principales limitaciones de este modelo derivan de estas restricciones mencionadas anteriormente.

En primer lugar, en la actualidad se puede pedir prestado para adoptar una posición corta en un activo, realidad que este modelo no incluye. Esta cantidad debe limitarse usando un límite superior

Black tampoco considera que algunas posiciones largas pueden usarse como garantía como los bonos convertibles en acciones. La entrega de este tipo de activos está permitida como garantía para posiciones cortas en acciones.

Por último, en este punto no se tiene en cuenta la variación del valor de la garantía  $\alpha$  como consecuencia de las evoluciones del precio de los activos en corto.

#### **2.2.4. Fondos de inversión: Concepto y tipologías**

La razón que me ha llevado a incluir este punto en el documento, ha sido con la finalidad de facilitar la lectura al lector. En la segunda parte del marco teórico y en el marco práctico, aparecerá este concepto en múltiples ocasiones, de tal manera que, me ha parecido prudencial y sensato el introducir un apartado sobre este tipo de vehículos de inversión.

##### **Concepto**

A la hora de definir este instrumento financiero, debemos tener en cuenta que, un fondo de inversión es un vehículo financiero en el cual se desembolsan una serie de aportaciones con el fin de invertir en renta fija, renta variable etc...

Aquellas instituciones o personas que realizan las prestaciones definidas, se las denomina partícipes del fondo. Los gestores del fondo, es decir, aquellos que deciden que comprar y vender y cuando, cargan una comisión a los partícipes por los servicios

realizados. Todos los gastos en los que incurren los partícipes, quedan reflejados en un indicador llamado *expense ratio*. Esta ratio relaciona el total de gastos de un fondo con la media del total de activos gestionados.

La principal ventaja que un fondo de inversión puede ofrecernos frente a invertir en otros activos, es la diversificación. En España en concreto, el traspaso de fondos de inversión a diferencia de otro tipo de activos, está exento de impuestos.

### **Tipologías de fondos de inversión según el tipo de gestión**

En el caso de hablar de fondos cuyo principal objetivo sea replicar el índice, estaremos ante un ejemplo de gestión pasiva. Es decir, la gestión pasiva de un fondo se caracteriza por tratar de imitar al índice en vez de batirlo. De tal manera que, un inversor de fondos gestionados pasivamente, tiene la certeza de que va a lograr un alto grado de diversificación a muy bajo precio. A diferencia de los fondos de gestión activa, los fondos *benchmark* tratan de tener al mínimo sus posiciones de efectivo.

Al contrario que el anterior tipo de gestión, la gestión activa tiene como finalidad batir al índice mediante el uso de dos técnicas: análisis *top-down* y análisis *bottom-up*. Existen gestores que basan el *asset allocation* de su fondo en la situación macroeconómica actual (analistas *top-down*). Una vez estos tienen claro que porcentaje va a suponer cada sector en el fondo, recurren al análisis fundamental y/o técnico para la selección de los valores más eficientes. Por otro lado, los analistas *bottom-up*, deciden donde invertir y el porcentaje de cada uno de los sectores en el fondo, sin tener en cuenta el panorama económico presente. Es decir, eligen los valores que ellos mismos consideran más eficientes, sin antes realizar un análisis macroeconómico.

### **Tipologías de fondos según el tamaño de las compañías en las que invierten**

En lo referente a los tipos de compañías que existen según el tamaño de su capitalización bursátil, existen tres tipos de organizaciones: *large-cap*, *mid-cap* y *small-cap*. Aquellas empresas con más de 10.000 millones de capitalización se las clasifica como *large-cap*. Si la compañía tiene un *market-cap* dentro del intervalo 2.000 millones y 10.000 millones, se la denomina *mid-cap*. Por último, las *small-caps* incluyen todas aquellas empresas con menos de 2.000 millones y más de 250 millones.

Según el autor Ross (2018), históricamente existe una relación inversa entre el tamaño de la capitalización bursátil y el riesgo. Durante los periodos de alta volatilidad, las empresas con alta capitalización tienden a ser las más atractivas para los inversores por su calidad y estabilidad (Ross, 2018).

### **Tipologías de fondos según el tipo de empresa en las que invierte**

Los fondos *value* se caracterizan por invertir en compañías infra-valoradas, es decir, en empresas cuya cotización se encuentra por debajo de su valor real. En caso de no producirse la apreciación esperada, el fondo cobrará dividendos. Un ejemplo de una empresa *value* sería JP Morgan.

Por otro lado, los fondos *growth* invierten en empresas con expectativas de crecimiento muy elevadas. Generalmente, estas empresas tienen un *pay-out* muy bajo debido a la necesidad de reinversión para crecer. Actualmente la empresa *large-cap* con mayores expectativas de crecimiento es Amazon.

Por último, los fondos *blend* son aquellos que combinan tanto acciones *value* como *growth*. Para diferenciar estos tres tipos de acciones, se utilizan ratios de valoración como el *Price earning ratio* (PER) o *Price to Books* (P/B).

## **2.3. Parte 2: Data Envelopment Analysis (DEA)**

Esta segunda parte del marco teórico está dividida en dos partes. La primera parte, se focalizará en explicar el DEA de la forma más completa posible; empezando con una descripción histórico-teórica de la herramienta en cuestión y finalizando con la exposición del modelo CCR en sus dos vertientes. Consecuente a esta, se expondrá la funcionalidad del DEA en la evaluación del desempeño de los fondos de inversión. La principal finalidad de este segundo apartado, es mostrar el valor que esta metodología puede generar a un gestor de patrimonio en su día a día.

### **2.3.1. Introducción: Frontera eficiente, inputs e outputs**

El objetivo de este análisis es medir la eficiencia de un grupo de entidades llamadas unidades de decisión (DMU). Este proceso detecta la pareja más eficiente a través de una actividad de conversión de inputs a outputs. En este trabajo, este análisis está

enfocado desde el punto de vista de un gestor de carteras al cuál, le interesa saber cuáles son las empresas (fondos) más eficientes en las que invertir.

Desde sus inicios en 1978, el DEA se ha caracterizado por ser una metodología eficaz y fácil orientada a los procesos de modelización operacional en las evaluaciones de desempeño (Cooper, Charnes & Rhodes, 2007). Comparado con los resultados obtenidos a través de los modelos de regresión, el DEA ha supuesto ser más certero en la estimación de fronteras eficientes en diferentes campos de estudio (Zhu 2003<sup>a</sup>, 2009).

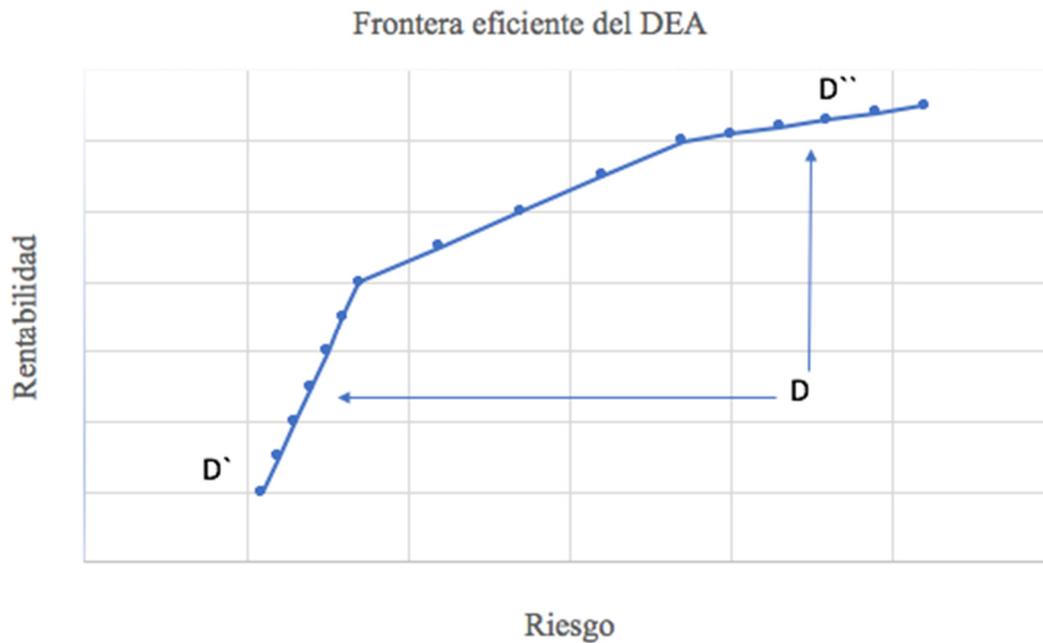
Algunos autores como Charnes, Cooper & Rhodes (1978: 2), clasificaron el DEA como “un modelo de programación matemático orientado a la obtención de estimaciones o correlaciones empíricas, como por ejemplo funciones o posibilidades eficientes de producción”.

Antes de exponer esta metodología de análisis, es importante tener claro el concepto de eficiencia para entender todo el proceso. El significado de eficiencia en el DEA, no es coincidente con la definición convencional o el óptimo de Pareto: una DMU es eficiente si y solo si, ninguno de los inputs e outputs puede mejorar sin empeorar alguno de sus inputs e outputs respectivamente, sino es, la eficiencia relativa. La eficiencia relativa según Cooper et al. (2011: 3) clasifica una DMU como eficiente si y solo si, “la información empírica acerca de las otras DMU nos lleva a pensar que, la mejora de sus outputs o inputs implica el empeoramiento de alguno de los dos”. Si una DMU es relativamente eficiente, significa que no existe ninguna otra DMU del grupo elegido que tenga un output mayor sin tener un input peor e inversamente.

Por tanto, como se puede observar, esta herramienta nos permite medir la eficiencia de una DMU respecto a un grupo de DMUs similar. Por esta razón, es un buen comienzo en la optimización de carteras, ya que, nos permite identificar aquellos valores que se encuentran en la frontera de Markowitz (1959).

La siguiente gráfica nos muestra como es la frontera construida por el DEA. Como podemos observar, los ejes son los representados por Markowitz (1959).

En el caso del DEA, las variables que utilizamos para medir el desempeño de una DMU se denominan inputs e outputs. Hancock (1986) clasificaba los inputs e outputs según su coste para el usuario. De tal manera que, las variables con coste positivo eran inputs y las variables con coste negativo eran outputs. En el caso de esta gráfica, el input es la desviación típica y el output es la rentabilidad de la unidad de decisión.



**Fuente:** G. Gregoriou y J. Zhu, 2005

Como se puede observar en la gráfica, el DEA empuja las DMU ineficientes a ser eficientes mediante una reducción de input o un aumento de output. Esta es la razón por la que existen modelos DEA orientados a reducir los inputs manteniendo los outputs constantes y modelos orientados a aumentar los outputs con los inputs en niveles constantes.

### **2.3.2. Marco histórico del DEA**

En sus orígenes el modelo DEA, se utilizaba para medir la eficiencia de las instituciones públicas, caracterizadas por tener una función de producción desconocida. Esto provocaba que fuera muy difícil medir la eficiencia de estas unidades de decisión, ya que no se tenía una función de partida. Lo que el DEA permitía, era estimar la frontera eficiente a partir del análisis de los inputs y outputs de cada unidad de decisión evaluada. El nivel de eficiencia en el uso de inputs y outputs indicaba la distancia de la unidad de decisión con respecto a la frontera eficiente.

Recientemente, se han incorporado nuevos campos de estudio en donde aplicar esta herramienta con la misma capacidad resolutive. Entre estos ámbitos de estudio, destacan el sistema bancario (Haslem, Scheraga y Bedingfield, 1999) y los fondos de inversión (McMullen y Strong, 1998).

### 2.3.3. Modelo CCR

#### Introducción

El DEA define una unidad de decisión como cualquier concepto o entidad del cual interesa evaluar su capacidad para convertir inputs en outputs. Esta asunción permite la aplicación de este análisis tanto a entidades que operan en el sector privado como en el público, al igual que, a hospitales u otras instituciones no gubernamentales.

Para entender el modelo CCR propuesto por Charnes et al. (1962), es necesario ser consciente de las asunciones que lo sustentan. En primer lugar, este modelo asume que cada  $DMU_j$  con  $j = 1, 2, 3 \dots n$  consume  $m$  diferentes inputs para producir  $s$  outputs, respectivamente. Cada cantidad consumida  $x_{ij}$  del input  $i$  produce  $y_{rj}$  del output  $r$ . Como última asunción, mencionar que ambas cantidades de input e output han de ser positivas.

La eficiencia que se pretende medir a través de este modelo es la relativa, de ahí que Charnes et al. (1994) considerarán la ratio output-input como la herramienta que se debía usar para evaluar la eficiencia relativa de cada una de las  $j$  unidades de decisión. El problema que suscitaba esta ratio, era la complejidad de comparar múltiples outputs con numerosos inputs. Esta situación se simplificó gracias al modelo CCR, que permite solucionar esta limitación mediante un problema de optimización de las ponderaciones de cada output  $u_r$  con  $r = 1, 2, 3 \dots s$  input  $v_i$  con  $i = 1, 2, 3 \dots m$  respectivamente, creando así un único output e input.

$$\text{Output único} = \sum_r u_r y_{ro}$$

$$\text{Input único} = \sum_i v_i x_{io}$$

$$\max \theta(u, v) = \frac{\sum_r u_r y_{ro}}{\sum_i v_i x_{io}}$$

$$u, v \geq 0 \text{ para todo } i \text{ y } r$$

$$\frac{\sum_r u_r y_{rj}}{\sum_i v_i y_{ij}} \leq 1$$

El objetivo que se pretende lograr con este modelo, es obtener los pesos de los inputs y outputs que maximicen la ratio de la DMU observada. El valor máximo que puede alcanzar la eficiencia de una unidad de decisión es 1. Dependiendo de la unidad de decisión que se esté analizando, los pesos óptimos para cada input u output serán diferentes.

La frontera eficiente construida mediante esta herramienta, incluye todas aquellas DMUs cuyo valor máximo de la función a optimizar es igual a 1. Esto nos indica que, la distancia que hay entre una DMU y la frontera eficiente determina el nivel de desempeño de la misma.

### **Modelos orientados a los inputs**

Para realizar la transformación de lo fraccional a lo lineal propuesta por Charnes y Cooper (1962), era necesario asumir las siguientes nuevas restricciones

$$\sum_i v_i x_{ij} = 1$$

$$\sum_r u_r y_{rj} \leq \sum_i v_i x_{ij}$$

Asumiendo estas nuevas limitaciones la función objetivo se convierte en lineal

$$\max \theta = \sum_r \mu_r y_{ro}$$

El ser una función equivalente de la fraccional, nos lleva a decir que las ponderaciones óptimas obtenidas a través de este programa de optimización  $(v, \mu, \theta)^*$ , también son las óptimas para el programa de optimización fraccional  $(v, \mu, \theta)^*$ .

Este modelo fue llamado a ser el modelo CCR en honor a sus creadores Charnes, Cooper & Rhodes (1978). Además, fue el primer modelo DEA orientado a minimizar los inputs manteniendo los outputs constantes.

### **Definición de eficiencia en el primer modelo orientado a los inputs**

Por tanto, una DMU es 100% eficiente si y solo si (1)  $\theta^*=1$  y (2)  $v^*, u^* > 0$ . En caso de no cumplirse alguna de estas condiciones, clasificaremos la DMU como ineficiente. Aquella que haya sido clasificada como eficiente, se convertirá en el punto de referencia para el resto de las unidades de decisión, ya que, esto significará que esta unidad de decisión se encuentra en la frontera eficiente.

Ejemplo de la definición de eficiencia (1 input y 1 output):

DMU	A	B	C
Input	2	3	2
Output	1	3	3

Para da  $DMU_A$  el CCR model sería el siguiente:

$$\max \theta = u$$

$$\text{sujeto a: } 2v_1 = 1$$

$$u \leq 2v_1$$

$$u, v > 0 \text{ para todo } i \text{ y } r$$

Teniendo en cuenta este programa de maximización, la solución óptima ( $v^* = 0,5$ ,  $u^* = 0,5$ ,  $\theta^* = 0,5$ ) no es eficiente ya que no cumple todas las condiciones de eficiencia.

Para alcanzar la frontera eficiente es necesario reducir un 50% la cantidad de input

En el caso de la  $DMU_B$ , el programa lineal sería el mostrado a continuación:

$$\max \theta = 3u_1$$

$$\text{sujeto a: } 3v_1 = 1$$

$$3u_1 \leq 3v_1$$

$$u, v > 0 \text{ para todo } i \text{ y } r$$

La solución de este segundo programa ( $v^* = 0,333$ ,  $u^* = 0,333$ ,  $\theta^* = 1$ ) nos indica que esta unidad de decisión es eficiente ya que cumple todas las condiciones de eficiencia. Por tanto, clasificaremos la unidad de decisión B como el punto que se encuentra en la frontera eficiente.

Este modelo lineal, es el primero orientado a mejorar las características de los inputs para así mejorar la eficiencia de la unidad de decisión. Junto a este primero, se encuentra una segunda perspectiva o lo que se conoce en matemáticas como problema dual. Esta segunda forma de resolver el problema de optimización propuesto por Charnes y Cooper (1962) mediante la minimización y no la maximización, se

caracteriza por definir la eficiencia de la DMU observada basándose en la comparación de esta con una unidad de decisión virtual. Este tercer modelo se define como un modelo más complejo y desarrollado:

$$\min \theta - \varepsilon \left( \sum_{i=1}^m s_i^- + \sum_{r=1}^s s_r^+ \right)$$

sujeto a:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j + s_i^- = \theta x_{io}$$

$$\sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j - s_r^+ = y_{ro}$$

$$\lambda_j, s_i^-, s_r^+ \geq 0$$

La razón por la cual se incluyen  $s_i^-$  y  $s_r^+$  se debe a la necesidad de transformar las restricciones del modelo de Farrel en igualdades. Además de incluir estas variables, este nuevo modelo nos presenta una constante  $\varepsilon > 0$ .

Este tercer modelo presentado como la combinación del modelo de Farrel y la maximización de los slacks, se caracteriza por evaluar la eficiencia de la unidad de decisión observada, a través de una comparación de la misma con una unidad virtual caracterizada por tener inputs y outputs como combinaciones lineales de los propios inputs y outputs de aquel grupo de DMUs con mayor desempeño. Esto significa que esta unidad de decisión virtual garantiza el nivel de output  $y_{ik}$  para cada  $DMU_k$  utilizando la proporción  $\theta x_{ik}$  de input.

En lo referente a la eficiencia relativa en este modelo, Charnes y Cooper (1962) argumentaban que una unidad de decisión podría no ser totalmente eficiente si  $s_i^-$  y  $s_r^+ > 0$ . En dicho caso definían el desempeño de la unidad de decisión observada como vagamente eficiente. De igual modo, todas aquellas unidades de decisión con un  $\theta < 1$  se las considera ineficientes.

Estos dos primeros modelos presentados hasta el momento están orientados a los inputs. Esto significa que, los anteriores programas de optimización se focalizan en cómo mejorar los inputs de una unidad para así hacer esta eficiente.

## Modelos orientados a los outputs

Al igual que se puede construir un modelo CCR maximizando la ratio de eficiencia, también se puede evaluar el grado de eficacia de una unidad de decisión minimizando la ratio inversa de eficiencia. Lo que Charnes y Cooper (1962) pretenden mostrarnos con este juego de perspectivas, son las diferentes maneras de afrontar un problema de decisión mediante el uso de DEA. A continuación, se presenta los dos modelos orientados a los outputs:

$$\min q = \sum_{i=1}^m v_{ij}x_{io}$$

sujeto a:

$$\sum_{r=1}^s u_{rj}y_{ro} = 1$$

$$\sum_{i=1}^m v_{ij}x_{io} - \sum_{r=1}^s u_{rj}y_{ro} \geq 0$$

$$u_r, v_i > \varepsilon > 0$$

$$\max \varphi + \varepsilon \left( \sum_{i=1}^m s_i^- + \sum_{r=1}^s s_r^+ \right)$$

sujeto a:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij}\lambda_j + s_i^- = x_{io}$$

$$\sum_{j=1}^n y_{rj}\lambda_j - s_r^+ = \varphi y_{ro}$$

$$\lambda_j > 0$$

En este caso, el grado de eficiencia de una unidad de decisión viene dado por  $\varphi$ . Esta variable es la equivalente a  $\theta$  en los modelos orientados a los inputs.

En este último modelo, la unidad de decisión observada es eficiente si y solo si  $\varphi = 1$  y  $s_i^-, s_r^+ = 0$  para todo  $i$  y  $r$ . La unidad de decisión es vagamente eficiente si  $\varphi = 1$  y  $s_i^-, s_r^+ \neq 0$  para algún  $i$  y  $r$  (Charnes y Cooper, 1962).

### **2.3.4. Aplicación del DEA: fondos de inversión**

Para llevar a cabo una elección de un fondo con la menor incertidumbre posible, es necesario evaluar un conjunto de atributos. Esto implica que el seleccionar un valor se convierta en un problema en el que existen múltiples criterios a evaluar.

La herramienta *Data Envelopment Analysis* permite identificar aquellos valores que son eficientes teniendo en cuenta todos los atributos a evaluar. Además de eso, facilita la acción a realizar reduciendo el problema de la elección a un programa de optimización. Este programa de optimización está orientado a calcular la eficiencia de cada unidad de decisión en base a sus inputs y outputs. Si el resultado obtenido en el programa indicará que la unidad es ineficiente, el DEA nos muestra cuanta cantidad de input e output se debería reducir o aumentar respectivamente para alcanzar la frontera eficiente.

Esta herramienta nos permite agrupar los fondos de inversión sin hacer uso de ningún índice ya que estos activos se consideran ya índices. Además, el DEA a diferencia de los modelos de regresión, permite a gestores de carteras y fondos analizar diferentes inputs y outputs sin una relación explícitamente definida (Darling et al., 2004). Como se ha mencionado anteriormente, esta metodología no solo determina la eficiencia de las unidades de decisión, sino también identifica las razones que explican el débil desempeño de aquellas que no son llamadas a ser ineficientes. Esta característica permite a los gestores determinar la capacidad del fondo para protegerse ante el riesgo de determinados inputs u outputs (Gregoriou, 2006).

Gregoriou y Zhu (2005) argumentaban que otra de las principales ventajas del DEA respecto a los modelos de regresión, era que no requería hipótesis de partida sobre la función de producción. En vez de partir de una función, el DEA construye una frontera eficiente para los fondos basándose en la información mensual de cada uno de ellos.

Por último, mencionar que, esta nueva metodología nos hace ver que existen múltiples maneras de analizar la eficiencia en la toma de decisiones.

#### **Anteriores estudios realizados**

En el pasado se han realizado determinados estudios que verifican la validez de esta herramienta. Entre estos estudios, destaca el realizado por Haslem y Scheraga (2003) en donde la fuente de información fue la base de datos Morningstar en 1999 y los input y outputs los propuestos por Hancock (1986). Las variables input fueron 1) el porcentaje

de caja, 2) la ratio de gasto, 3) el porcentaje de renta variable, 4) P/E 5) P/B y 6) total de activos del fondo. Por otro lado, el output elegido fue el índice de Sharpe también llamado ratio de Sharpe. Finalmente, Haslem y Scheraga (2003) concluyeron tras la aplicación del DEA, que los fondos habían sido clasificados como eficientes por el valor y no por el crecimiento.

Anteriormente, autores como Murthi, Choi & Desai (1997) o Morey & Morey (1999) mostraban una eficiencia y éxito en el uso de DEA para la clasificación de fondos de inversión.

### **Las dimensiones de las inversiones, inputs y outputs**

Desde un punto de vista teórico, las variables que tiene en cuenta un inversor a la hora de decidir dónde invertir son: la rentabilidad esperada y el riesgo tanto sistemático como no sistemático. El problema que tenía esta teoría tradicional, es que no incluía las preferencias del inversor. Esto ha llevado a determinados autores a evaluar otras dimensiones que los inversores tienen en cuenta como es la asimetría de la distribución de las rentabilidades. Cuanto más asimétrica sea la función, más probabilidad existe de que se den valores extremos.

Arditti (1967) trató de analizar la preferencia que los individuos tenían hacia las carteras con distribuciones más simétricas. El resultado del experimento fue que, la ratio de carteras seleccionadas entre los inversores era mayor en aquellas carteras con una mayor simetría que, en carteras con mayor rentabilidad y asimetría.

A partir de este momento, autores como McMullen & Strong (1998) comenzaron a analizar otras dimensiones que afectaban al proceso de decisión de un inversor como son el horizonte temporal o el componente ético. En lo referente al horizonte temporal decir que, McMullen & Strong (1998), Morey & Morey (1999) y Powers & McMullen (2000) observaron una mayor preferencia por parte de los inversores hacia aquellos fondos que incluyeron información sobre su desempeño en más de un horizonte temporal. La principal razón por la cual los inversores elegían estos fondos era la certidumbre de los mismos frente al resto. En relación con la segunda dimensión mencionada (el componente ético) autores destacados como Murthi, Choi & Desai (1997) defendían la existencia de esta variable categórica como una necesidad ética por parte del inversor.

El que existan preferencias diversas entre los inversores, provoca que cada inversor pondere los inputs y outputs de diferente manera. Por lo que, a la hora de construir un modelo para solucionar un problema multicriterio, es de vital importancia tener en cuenta este concepto de la flexibilidad (Nguyen-Thi-Thanh, 2005). En el caso de DEA, el inversor tiene la posibilidad de construir el modelo de tal manera que se incluyan todas sus preferencias relacionadas tanto con los inputs como los outputs. Estas preferencias se introducen en el modelo incluyendo restricciones relacionadas con las ponderaciones máximas y mínimas de los inputs e outputs.

Basándonos en la definición de input e output de Hancock (1986) diremos que, en el mundo de los fondos de inversión, los outputs son los retornos y los inputs los riesgos. Estos inputs y outputs que el inversor ha decidido tener en cuenta, pueden tener una menor o mayor importancia en el modelo dependiendo del peso que se le dé a cada uno de ellos.

En lo referente a estas dos variables, el DEA solo es posible aplicarlo si los inputs e outputs son positivos o semipositivos (Nguyen-Thi-Thanh, 2005). Si se diera la situación de que alguno de los dos tuviera valores negativos, la solución propuesta por Nguyen-Thi-Thanh (2005) es aumentar el output  $y_{rj}$  o el input  $x_{ij}$  para todas las unidades de decisión de la muestra, mediante la suma de una constante representada por una letra griega. Nguyen-Thi-Thanh considera esta alternativa ya que, Gregoriou & Zhu (2005) argumentaban que el output e input resultantes de esa suma, no modificarían la frontera eficiente obtenida por los valores originales.

### 3. Marco práctico

En esta tercera parte del documento en cuestión, se presentará un ejemplo del DEA aplicado a una muestra formada por fondos de inversión de diversa índole. La muestra, la componen 40 fondos de inversión americanos extraídos de la principal base de datos de este tipo de activos, *Morningstar*. Las razones que me han llevado a elegir este número de fondos han sido puramente operativas, es decir, la carga de datos a mano en el modelo, dificulta la existencia de una muestra de tamaño superior. De igual modo, la elección de fondos americanos se fundamenta en la facilidad para acceder a la información requerida para la construcción de este modelo.

Los fondos pertenecientes al modelo se dividen en cuatro grupos: *large-growth*, *mid-cap growth*, *large value* y *mid-cap value*. El principal motivo de esta división, radica en el análisis de diferencias que se pretende realizar entre los fondos *growth* y los fondos *value* en materia de eficiencia.

#### 3.1. Inputs y outputs del modelo

La selección de inputs y outputs en el modelo que se va a presentar a continuación, se fundamenta en la definición de input e output para Hancock (1986). Es decir, se han considerado como variables que suponen un coste para el inversor los inputs y aquellas que suponen un coste negativo (beneficios) los outputs. Siguiendo este enfoque, el modelo planteado es un modelo orientado a minimizar los inputs manteniendo constantes los outputs (*constant returns of scale*).

Los inputs y outputs de cada uno de los fondos de inversión seleccionados, se han extraído de la fuente de datos *Mutual fund investments* de *Morningstar* el día 18 de febrero del 2018. Los inputs que se han decidido tener en cuenta para el cálculo de la eficiencia de la actividad de cada uno de los fondos, han sido: *expense ratio* (%), desviación típica a 3 años (%), efectivo (%), P/E, la beta de cada fondo y las acciones (%). Por otro lado, los outputs a evaluar son el *sharpe ratio*, la rentabilidad del fondo a 3 años y la rentabilidad del fondo a 5 años.

### **Expense ratio (%)**

Esta variable recoge el porcentaje de gastos operativos de un fondo en relación con la media del total de activos gestionados. Cuanto mayor sea esta ratio, menos rentabilidad recibirá el inversor a cierre de mercado ya que, el valor liquidativo del fondo será menor. Principalmente, los gastos operativos recogen no solo las comisiones de los gestores, sino también, cualquier gasto en el que haya incurrido el fondo para el desempeño de su función. Anteriormente, algunos autores como Hancock (1986) o Haslem y Scheraga (2003) atribuyeron a esta variable la categoría de input.

### **Desviación típica a 3 años (%)**

Desde los principios de la gestión de carteras con Markowitz (1959), la desviación típica ha sido el principal indicador de la volatilidad de cualquier inversión en activo ya que, nos indica como de alejadas están las rentabilidades de un activo en relación a su rentabilidad esperada. Por consiguiente, cuanto menor sea este input, más representativa será la media como indicador de la rentabilidad de un fondo. A diferencia del expense ratio, esta variable no fue incluida en los modelos de Hancock (1986) ni Haslem y Scheraga (2003) pero si por Morey & Morey (1999) para el análisis de la eficiencia de 26 fondos de inversión.

### **Efectivo (%)**

El porcentaje de efectivo en un fondo de inversión, supone incurrir en un coste de oportunidad. Este coste de oportunidad significa que en vez de tener ese dinero invertido en un activo que genera una rentabilidad, el dinero está inmóvil. Las razones por las que un fondo tiene un mayor porcentaje de cash, pueden depender no solo de los activos con los que opere el fondo, sino también, de las expectativas que los gestores tienen acerca del mercado.

### **P/E**

El P/E o PER (*Price Earning ratio*) nos indica cuanto tiempo tardamos en recuperar nuestra inversión. Dicho de otro modo, esta variable nos indica en cuanto el capital del fondo supera las ganancias esperadas. Los fondos *value* tienen un P/E más bajo que los fondos *growth*. De igual modo que Haslem y Sheraga (2003), la elección de esta variable tiene su fundamento en la necesidad de diferenciar la naturaleza de los fondos.

## **Beta**

La beta o el coeficiente de beta, es una medida del riesgo introducida en la gestión de carteras vía el modelo CAPM por el autor Sharpe (1996). Este indicador, proporciona información sobre la sensibilidad que tiene un activo respecto a la volatilidad que tiene el mercado o índice de referencia. En el caso de que este coeficiente sea mayor a la unidad, el activo en cuestión será más sensible y por tanto más agresivo que el *benchmark*. Por el contrario, una beta menor a la unidad es característica de valores defensivos, es decir, activos menos sensibles que el mercado. Generalmente los fondos *growth* tienden a tener una beta mayor que los fondos *value*. Al ser un indicativo de la volatilidad que puede experimentar un fondo, se ha considerado prudente introducirlo en el modelo.

## **Renta variable (%)**

El porcentaje de renta variable que posee un fondo, nos indica como de diversificado está respecto a la renta variable y la renta fija. El que un fondo tenga todo invertido en renta variable, puede no ser interesante para un inversor ya que la diversificación respecto a la naturaleza del activo no existe. Por tanto, para la construcción de este modelo, se ha tenido en cuenta este input al igual que, otros autores como Haslem y Scheraga (2003) en la construcción de su modelo para el análisis de la eficiencia en fondos *large-cap*.

## **Sharpe ratio**

Esta ratio desarrollada por William Sharpe (1966) mide como de rentable es un fondo ajustado a su riesgo. Cuanto mayor sea esta ratio para un fondo, mayor rentabilidad tendrá este fondo por unidad de riesgo. Es decir:

$$\text{Sharpe ratio} = \frac{E(R_f - R_{RF})}{\sigma_f}$$

Donde  $R_f$  es la rentabilidad del fondo,  $R_{RF}$  es la rentabilidad del activo libre de riesgo y  $\sigma_f$  es la desviación típica del fondo que mide la volatilidad del mismo. Por tanto, un Sharpe ratio alto indica que la relación rentabilidad/ riesgo es proporcional o incluso podríamos decir que es óptima.

La principal ventaja de esta variable es que permite comparar todo tipo de fondos ya sean de renta fija o variable. La razón es que, la desviación típica de cualquier fondo se calcula de la misma manera independientemente de la naturaleza del fondo.

Esta ratio también conocida como índice de Sharpe, es comúnmente conocido por ser la principal medida de riesgo-rentabilidad de un fondo. Autores como Haslem y Scheraga (2003) y Hancock (1986), lo introdujeron en sus modelos por la gran cantidad de información que este indicador permitía obtener sobre el desempeño de un fondo.

### **Rentabilidad a 3 y 5 años**

Se ha considerado como una actuación prudencial, el introducir información referente al pasado para analizar la consistencia de los fondos en el tiempo. Gracias a estos dos outputs, se puede ver la rentabilidad que un fondo ha venido obteniendo en un intervalo temporal pasado de 3 y 5 años. Por ello, el análisis de la rentabilidad a 3 y 5 años es la pieza que completa el universo de outputs a evaluar.

## **3.2. Información del modelo**

### **3.2.1. Fondos**

Como se ha mencionado anteriormente, los fondos a evaluar se dividen en 4 grupos. En el punto cinco de este documento, se muestra una tabla en donde se presentan los cuatro diferentes tipos de fondos que se van a estudiar. En la parte derecha de la tabla, se muestra el nombre de cada uno de los fondos.

En esta muestra de 40 fondos, se ha tratado de conseguir una significativa representatividad del mundo de los fondos para el lector incluyendo algunos de los gestores más conocidos en este ámbito. Como se puede observar, la mayoría de ellos se han tratado de incluir en los cuatro grupos con el fin de conseguir la máxima homogeneidad en lo que a análisis se refiere.

### **3.2.2. Tipología del modelo**

Para medir la eficiencia en el desempeño de los 40 fondos mencionados anteriormente, se ha decidido hacer uso de un modelo DEA orientado a los inputs. Este modelo persigue una minimización de los inputs manteniendo los outputs constantes, de ahí que reciba el nombre de *input oriented model with constant return of scales*. Es decir, todas aquellas DMUs que no tengan un  $\theta = 1$  tienen que reducir su input hasta alcanzar la

frontera eficiente. Este aspecto característico de este modelo, fue expuesto en el punto de la introducción de DEA recogido en el marco teórico.

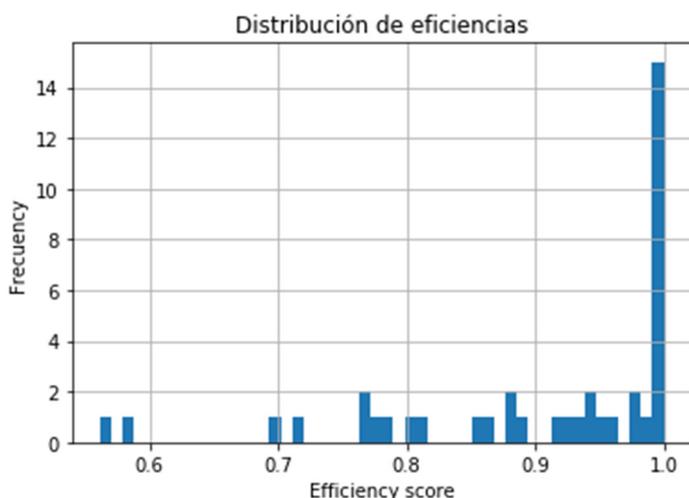
A continuación, se presenta una tabla con todas las variables que se han tenido en cuenta para la construcción de este modelo. Dichas variables corresponden con las inputs y outputs recogidos en el punto previo a este.

Outputs	Sharpe ratio, Rentabilidad a 3 años y 5 años (%)
Inputs	Sharpe ratio, Expense ratio, Desviación típica a 3 años (%), Efectivo (%), P/E, Beta, Stocks(%)

**Fuente:** Elaboración Propia

### 3.3. Resultados del modelo

El modelo DEA nos ha permitido ver que fondos son eficientes y cuáles no lo son. Del total de fondos analizados, solo el 35% son perfectamente eficientes, es decir solo 14 fondos tienen un  $\theta = 1$ . Dentro de este 35%, la tipología de fondo predominante ha sido los fondos *value* con un porcentaje cercano al 60%. En lo referente a los fondos casi perfectos ( $0,999 < \theta > 0,900$ ), estos han supuesto un 27,5% de la muestra total. El porcentaje con mayor dominio en esta franja de eficiencia, corresponde a los fondos *value* con una participación del 55%. Como se puede observar, la diferencia de porcentaje entre los *value* y los fondos *growth* se reduce en este segundo grupo respecto al primero. El último grupo a analizar según la representatividad en la muestra, se caracteriza por estar formado por fondos ineficientes ( $\theta < 0,9$ ). Este grupo representa un 37,5% de la muestra, es decir, el porcentaje más alto de fondos de la muestra. La tipología con mayor porcentaje de fondos ineficientes es la *growth* con un total de 9 fondos ineficientes.



Fuente: Elaboración propia

Fondos eficientes (iota=1)		Fondos casi eficientes (iota entre 0,9-0,99)		Fondos ineficientes (iota <0,9)				
1.000.000	Large-Growth	Fidelity Advisor® Equity Growth I	0,95212	Mid-cap growth	BlackRock Mid-Cap Growth Equity R	0,88753	Large-Growth	Wells Fargo Omega Growth Admin
1.000.000	Large-Growth	JPMorgan Growth Advantage R5	0,93694	Mid-cap growth	BlackRock Mid-Cap Growth Equity Svc	0,7689	Large-Growth	Goldman Sachs Blue Chip A
1.000.000	Large-Growth	BlackRock Large Cap Focus Growth Instl	0,94625	Mid-cap growth	ProFunds Mid Cap Growth Inv	0,86655	Large-Growth	Invesco American Franchise A
1.000.000	Large-Growth	Vanguard US Growth Inv	0,97818	Mid-cap growth	Fidelity® Growth Strategies K	0,85866	Large-Growth	Alger Capital Appreciation B
1.000.000	Large-Growth	American Century Select A	0,98334	Large-Value	Fidelity Advisor® Equity Value A	0,78812	Mid-cap growth	Fidelity® Select Construction & Hsg Port
1.000.000	Mid-cap growth	American Century NT Heritage G	0,94586	Large-Value	Goldman Sachs Large Cp Val Insights A	0,77223	Mid-cap growth	Goldman Sachs Small/Mid Cap Growth A
1.000.000	Large-Value	BlackRock High Equity Income Instl	0,96461	Large-Value	Delaware Value® A	0,81109	Mid-cap growth	JPMorgan Mid Cap Growth R2
1.000.000	Large-Value	Invesco Growth and Income R6	0,97501	Mid-Cap Value	Wells Fargo C&B Mid Cap Value A	0,56175	Mid-cap growth	Morgan Stanley Inst Mid Cap Growth I
1.000.000	Large-Value	JPMorgan Value Advantage A	0,91489	Mid-Cap Value	Fidelity® Value	0,76834	Mid-cap growth	Wells Fargo Enterprise Inst
1.000.000	Large-Value	AllianzGI NFJ Large-Cap Value A	0,92293	Mid-Cap Value	Touchstone Mid Cap Value A	0,8778	Large-Value	American Beacon The London Co Inc Eq A
1.000.000	Large-Value	AB Equity Income A	0,99268	Large-Growth	Prudential Jennison Diversified Gr A	0,58407	Mid-Cap Value	Goldman Sachs Mid Cap Value A
1.000.000	Large-Value	Sterling Capital Equity Income A				0,87747	Mid-Cap Value	Lord Abbett Calibrated Mid Cap Value A
1.000.000	Mid-Cap Value	AllianzGI NFJ Mid-Cap Value A				0,80516	Mid-Cap Value	BlackRock Mid Cap Dividend Institutional
1.000.000	Mid-Cap Value	American Century Mid Cap Value A				0,7012	Mid-Cap Value	MassMutual Select Mid-Cap Value A
						0,71664	Mid-Cap Value	Invesco American Value A

Fuente: Elaboración propia

Para completar este primer acercamiento a los resultados obtenidos, se ha considerado realizar un análisis más profundo teniendo en cuenta no solo si el fondo es *value* o *growth*, sino también, el tamaño de las empresas en las que invierte.

	Large-Value	Large-Growth	Mid-Cap Value	Mid-Cap Growth
Eficientes	6	5	2	1
Casi eficientes	3	1	3	4
Ineficientes	1	4	5	5

**Fuente:** Elaboración Propia

Analizando los 2 tipos de fondos *large*, se observa como de entre los fondos que invierten en empresas con alto capital, los fondos *value* alcanzan la máxima representatividad de fondos eficientes en la muestra. Por el contrario, los fondos *large* con mayor probabilidad de ineficiencia son los *growth*.

En el caso de los fondos *mid-cap*, los fondos *value* siguen teniendo más probabilidad de ser eficientes que los fondos *growth*. Pero a diferencia de la ineficiencia en los *large*, en los *mid-cap* no queda muy claro cuál de los dos fondos tiende a ser más ineficiente.

### 3.3.1. Análisis de inputs y outputs de cada uno de los grupos

Los objetivos de este análisis, son 1) ver en que inputs y outputs en media son más eficientes cada uno de los grupos y 2) analizar las diferencias existentes entre unos y otros. En primer lugar, comenzaremos evaluando a cada uno de los inputs y finalmente completaremos el análisis con los outputs.

	Expense ratio (%)			
	Media	Desviación típica	Máximo	Mínimo
Eficientes	0,91	0,28	1,24	0,39
Casi Eficientes	1,15	0,36	1,78	0,57
Ineficientes	1,13	0,31	1,99	0,72

**Fuente:** Elaboración Propia

En lo referente al expense ratio (%), vemos como el grupo de eficientes tiene el porcentaje menor (0,91%) seguido del grupo de los ineficientes con un 1,13%. Esto nos lleva a decir que el que una unidad de decisión sea más eficiente que otra, no siempre significa que tenga que ser la “mejor” (en media) en todos los aspectos ya que como se puede apreciar, los fondos casi eficientes son los que mayor expense ratio (%) incluyen.

Como era de esperar, el mínimo y máximo mayor se encuentra dentro del grupo de fondos ineficientes.

Desviación típica a 3 años (%)				
	Media	Desviación típica	Máximo	Mínimo
Eficientes	11,13	0,94	12,71	9,52
Casi Eficientes	11,14	1,08	13,03	9,76
Ineficientes	12,41	1,26	14,89	9,28

**Fuente:** Elaboración Propia

El grupo con una volatilidad mayor en su desempeño u, dicho de otra forma, los fondos donde existen una mayor distancia entre la distribución de rentabilidades y la media esperada son los ineficientes (12,41%). A estos le siguen los fondos cuasi eficientes con una desviación típica de media 11,14%. Se puede observar que las diferencias entre los fondos eficientes y los fondos cuasi eficientes, en media son de un 0,01% respectivamente. De tal manera que, en media las desviaciones típicas de ambos grupos y por consiguiente la volatilidad de sus rentabilidades, son casi iguales.

Cash				
	Media	Desviación típica	Máximo	Mínimo
Efcientes	1,41	1,62	4,28	0
Casi Eficientes	1,92	1,66	5,14	0
Ineficientes	1,63	1,78	6,67	0

**Fuente:** Elaboración Propia

Antes de analizar esta variable, comentar que, como se había mencionado en la descripción de los inputs del marco práctico, la razón por la que se considera un input este concepto se debe al coste de oportunidad. El grupo con menor porcentaje de efectivo y, por tanto, con menor coste de oportunidad para el inversor, es el grupo de los fondos eficientes (1,41%). Cabría destacar que todos ellos tienen al menos un fondo que es perfectamente eficiente en lo que a efectivo se refiere. Esta característica no depende tanto de si el fondo es *growth* o *value*, sino más bien, de las expectativas que los gestores tienen acerca del mercado y los tipos de activos que eligen para aplicar sus fondos.

P/E o PER				
	Media	Desviación típica	Máximo	Mínimo
Efcientes	20,92	4,66	27,91	16,04
Casi Eficientes	21,87	5,52	31,81	15,81
Ineficientes	23,48	5,63	39,02	16,93

**Fuente:** Elaboración Propia

En media se puede observar como los tres grupos tienen PERs altos o en términos financieros, parecen ser que los tres grupos están formados por fondos que en media están sobrevalorados. Si es verdad, que los fondos ineficientes tienen una media (23,48%), un máximo (39,02%) y un mínimo (16,93%) por encima del resto de fondos. Esto se debe al porcentaje de fondos *growth* que se incluyen en este grupo (60%), los cuales pueden tener un PER alto por dos motivos: las empresas del fondo están sobrevaloradas o las empresas del fondo tienen una tasa de crecimiento muy alta por encima de su sector.

Beta				
	Media	Desviación típica	Máximo	Mínimo
Eficientes	0,98	0,06	1,13	0,90
Casi Eficientes	0,97	0,07	1,10	0,86
Ineficientes	1,03	0,09	1,19	0,86

**Fuente:** Elaboración Propia

Los grupos de fondos eficientes y cuasi eficientes tienen en media una sensibilidad al mercado o índice de referencia por debajo de la unidad (0,98% y 0,97% respectivamente). Esto significa que son menos sensibles que el mercado ante las subidas o bajadas. Por otro lado, los fondos ineficientes al tener una beta por encima de la unidad (1,03%) se les considera más agresivos que el resto de los grupos. Las pequeñas diferencias porcentuales entre unos fondos y otros, nos puede llevar a pensar que la beta no ha tenido un impacto primordial en el análisis de la eficiencia.

Renta variable (%)				
	Media	Desviación típica	Máximo	Mínimo
Eficientes	96,60	3,32	99,96	86,16
Casi Eficientes	97,13	2,90	99,58	89,60
Ineficientes	97,30	2,40	100,00	89,60

**Fuente:** Elaboración Propia

Al analizar las medias se puede ver que, los fondos de la muestra invierten prácticamente todo su dinero en renta variable. Si es verdad que, en el caso de los fondos eficientes existe una mayor diversificación que en los dos grupos restantes. Por tanto, existen pequeñas diferencias en lo que a diversificación entre unos fondos y otros. Cabría destacar el fondo o los fondos a los que se le atribuye una inversión del 100% en renta variable, es decir, un 0% en diversificación por la naturaleza del activo.

Sharpe ratio				
	Media	Desviación típica	Máximo	Mínimo
Efcientes	1,17	0,16	1,37	0,84
Casi Efcientes	1,08	0,1	1,19	0,84
Ineficientes	0,86	0,2	1,16	0,51

**Fuente:** Elaboración Propia

Los fondos eficientes tienen la relación rentabilidad-riesgo más óptima ya que su *Sharpe ratio* está por encima del resto (1,17%). Por el contrario, los peor valorados en lo que a esta ratio se refiere en los cuatro campos (media, desviación típica, máximo y mínimo) son los fondos ineficientes con una diferencia del 0,31% respecto a los mejor valorados.

En este output, el máximo (1,37%) y el mínimo (0,84%) se incluyen dentro del grupo de los más eficientes.

Rentabilidad a 3 años (%)				
	Media	Desviación típica	Máximo	Mínimo
Efcientes	10,75	2,81	15,14	6,46
Casi Efcientes	9,7	1,99	12,81	6,61
Ineficientes	8,03	2,58	12,07	3,34

**Fuente:** Elaboración Propia

En este segundo output, el grupo eficiente es el que se posiciona en primer lugar en media (10,75%) por delante del grupo de los casi eficientes (9,7%). Si es verdad que la volatilidad o incertidumbre de la media es mayor en los fondos eficientes (2,81%). En este caso, los fondos ineficientes son los que tienen en estos cuatro conceptos las cifras menos favorables.

Rentabilidad a 5 años (%)				
	Media	Desviación típica	Máximo	Mínimo
Efcientes	14,04	2,55	18,68	10,43
Casi Efcientes	13,65	1,95	17,32	11,41
Ineficientes	12,17	2,04	15,84	9,11

**Fuente:** Elaboración Propia

Se puede apreciar que al igual que en la rentabilidad a 3 años (%), los fondos que tienen una mayor rentabilidad a 5 años (%), son aquellos cuyo desempeño es eficiente (14,04%). De nuevo se puede observar, una desviación típica inferior en los casi eficientes respecto al grupo de los eficiente. Las rentabilidades menos atractivas pertenecen a los fondos con un desempeño ineficiente.

### Conclusiones del análisis de inputs y outputs

Los resultados obtenidos en cada uno de los outputs e inputs, permiten apoyar el DEA como una metodología válida para identificar fondos de inversión eficientes. Se ha podido apreciar en el análisis de estos conceptos, que los fondos clasificados como eficientes, son los que tienen las cifras más favorables en casi todos los inputs y outputs a excepción de la beta (un punto básico por encima de los fondos casi eficientes). Por consiguiente, todos los fondos que se encuentran en el grupo de los eficientes, son los que tienen más probabilidades de realizar un desempeño por encima del resto.

A pesar de haber obtenido estos tres diferentes grupos de fondos con sus respectivas cifras, es necesario tener en cuenta que como modelo que es el DEA existe una probabilidad de error en la clasificación por falta de información. Este modelo sería mucho más preciso si hubiéramos introducido otros outputs e inputs como: el alpha de Jensen que permite ver como de bien o mal lo ha hecho un gestor respecto el índice, la diferencia que existe entre la rentabilidad que tiene el fondo y su índice de referencia, el tracking error que nos indica cuanto por encima o por debajo está un fondo respecto a su *benchmark* etc... Las principales razones por las cuales no se han incluido todos los outputs e inputs son dos. La primera de ellas se explica por la dificultad de introducir toda la carga de datos a mano. Por otro lado, la segunda está más relacionada con hacer una simplificación de la realidad que permita entender el funcionamiento y las conclusiones de la metodología propuesta.

### 3.3.2. Información adicional obtenida

Además de las conclusiones mencionadas en el punto anterior, la aplicación del DEA en el análisis de estos fondos ha permitido obtener información adicional.

	Large-Value	Large-Growth	Mid-Cap Value	Mid-Cap Growth
Eficientes	6	5	2	1
Casi eficientes	3	1	3	4
Ineficientes	1	4	5	5

**Fuente:** Elaboración Propia

En este primer análisis de la muestra mostrado antes de analizar los inputs y outputs, se observa como la tipología de fondo más eficiente en lo que a tamaño de empresas

invertidas se refiere, son los *large*. Teniendo en cuenta que para la muestra se han recogido el mismo número de fondos para las cuatro tipologías, esta apreciación me ha llevado a concluir lo siguiente. En una muestra de fondos *mid-cap* y *large*, el que los fondos *large* representen un 78% de los fondos eficientes, puede llevarnos a pensar que, en el universo actual de los fondos, la eficiencia y por tanto los mejores resultados para los inversores, se encuentran en este tipo de fondos. Si en vez de analizar esta tipología de fondos analizamos si el fondo es *value* o *growth*, observamos cómo casi el 60% de los fondos eficientes son *value*. Al igual que la anterior conclusión, este porcentaje podría ser un indicio de que el entorno de fondos más favorable actualmente es el entorno *value*.

Basándome en la observación anterior, considero que el DEA no solo se puede utilizar para detectar los fondos más eficientes, sino también, para detectar tendencias en sectores/mercados/activos/tipologías en donde la eficiencia esté presente para un periodo determinado. Si la muestra se hubiera dividido por sectores, el DEA nos habría permitido determinar en qué sectores es más favorable invertir. De igual modo, una diferenciación por mercados de renta variable, nos proporcionaría información sobre en qué mercados geográficos la inversión viene acompañada de la eficiencia.

Esta nueva información, me ha permitido identificar una nueva función para DEA cuya efectividad dependerá del tamaño de la muestra. Cuanto mayor sea la muestra más representatividad estaremos analizando y, por consiguiente, más certeza tendremos de haber encontrado una tendencia eficiente.

A pesar de no ser objeto de estudio desarrollo de este documento, una apreciación derivada de esta información adicional, es que el DEA puede utilizarse para la asignación de cualquier tipo de activos de una cartera de valores. Es decir, aplicar el DEA a una muestra formada por activos de diferente clase (renta fija, renta variable, NTAC, derivados etc...), nos permite ver que *asset allocation* es el más beneficioso en ese momento.

## 4. Conclusión

Hemos podido ver en este trabajo, como algunas de las antiguas metodologías en la selección de activos como las propuestas por Makowitz (1959) y Sharpe (1966), han encontrado una “competencia directa” en lo que asignación de activos se refiere. Esta nueva herramienta denominada *Data Envelopment Analysis* y construida por Charnes et al. (1994), permite ir más allá del significado de eficiencia convencional llevándonos así a identificar los valores más eficientes en comparación con el resto de valores evaluados.

Por otro lado, destacar que, gracias a su flexibilidad a la hora de incluir inputs y outputs (sin una relación previamente establecida) y la falta de necesidad de una hipótesis sobre la función de producción, el DEA permite construir fronteras eficientes haciendo uso de la información recogida de cada uno de los valores. Además, no necesita de un índice de referencia ya que toma como *benchmark* los activos que son perfectamente eficientes.

La aplicación del DEA en la muestra de fondos propuesta, ha servido para mostrar al lector su utilidad y efectividad en lo que a selección de fondos se refiere. Los resultados obtenidos en este marco, me han permitido identificar los fondos con mayor potencial de rentabilidad y aquellos con menores expectativas de rentabilidad.

Me gustaría destacar dos ideas que he considerado las más relevantes y cuyo origen lo tienen ambas en los resultados obtenidos en el marco práctico:

La primera idea está relacionada con la simplificación y rapidez que aporta el DEA en la selección entre activos con múltiples y complejas características. Gracias al DEA, la acción de elegir entre 40 fondos con infinidad de outputs e inputs, ha supuesto una evaluación sencilla y clara.

La segunda idea deriva de aplicar el DEA no solo con una visión numérica, sino también de mercado. El que el DEA se pueda extrapolar a otros sectores, activos o mercados, permite detectar tendencias en determinados periodos de tiempo como se ha mostrado en el epígrafe de información adicional.

Estas dos últimas ideas me llevan a decir que, a pesar de que ya esté perfectamente trabajado el contenido numérico del DEA, queda aún mucho por investigar en lo que a aplicaciones se refiere. Es por ello necesario el ver este modelo a través de una lente de mercado, que nos permita ver esta herramienta no como un mero programa de optimización, sino como una herramienta de análisis de tendencias eficientes.

## 5. Anexo

Fund name	Ticker
Large-Growth	Fidelity Advisor® Equity Growth I
Large-Growth	Wells Fargo Omega Growth Admin
Large-Growth	Goldman Sachs Blue Chip A
Large-Growth	JPMorgan Growth Advantage R5
Large-Growth	BlackRock Large Cap Focus Growth Instl
Large-Growth	Vanguard US Growth Inv
Large-Growth	Invesco American Franchise A
Large-Growth	Prudential Jennison Diversified Gr A
Large-Growth	American Century Select A
Large-Growth	Alger Capital Appreciation B
Mid-cap growth	BlackRock Mid-Cap Growth Equity R
Mid-cap growth	BlackRock Mid-Cap Growth Equity Svc
Mid-cap growth	Fidelity® Select Construction & Hsg Port
Mid-cap growth	Goldman Sachs Small/Mid Cap Growth A
Mid-cap growth	JPMorgan Mid Cap Growth R2
Mid-cap growth	ProFunds Mid Cap Growth Inv
Mid-cap growth	Morgan Stanley Inst Mid Cap Growth I
Mid-cap growth	Wells Fargo Enterprise Inst
Mid-cap growth	American Century NT Heritage G
Mid-cap growth	Fidelity® Growth Strategies K
Large-Value	BlackRock High Equity Income Instl
Large-Value	Fidelity Advisor® Equity Value A
Large-Value	Goldman Sachs Large Cp Val Insghts A
Large-Value	Invesco Growth and Income R6
Large-Value	JPMorgan Value Advantage A
Large-Value	AllianzGI NFJ Large-Cap Value A
Large-Value	American Beacon The London Co Inc Eq A
Large-Value	AB Equity Income A
Large-Value	Sterling Capital Equity Income A
Large-Value	Delaware Value® A
Mid-Cap Value	Wells Fargo C&B Mid Cap Value A
Mid-Cap Value	Fidelity® Value
Mid-Cap Value	Goldman Sachs Mid Cap Value A
Mid-Cap Value	Lord Abbett Calibrated Mid Cap Value A
Mid-Cap Value	BlackRock Mid Cap Dividend Institutional
Mid-Cap Value	MassMutual Select Mid-Cap Value A
Mid-Cap Value	AllianzGI NFJ Mid-Cap Value A
Mid-Cap Value	Touchstone Mid Cap Value A
Mid-Cap Value	American Century Mid Cap Value A
Mid-Cap Value	Invesco American Value A

**Fuente:** Elaboración Propia

Lota (coeficiente de eficiencia)	Outputs				
	Fund name	Ticker	3 Year(%)	5 Year(%)	Sharpe ratio
1.000.000	Large-Growth	Fidelity Advisor® Equity Growth I	14.14	17.23	1,34
0,887529	Large-Growth	Wells Fargo Omega Growth Admin	12.07	14.52	1,16
0,768903	Large-Growth	Goldman Sachs Blue Chip A	6.79	11.67	0,84
1.000.000	Large-Growth	JPMorgan Growth Advantage R5	14.75	18.68	1,29
1.000.000	Large-Growth	BlackRock Large Cap Focus Growth Instl	15.14	17.81	1,37
1.000.000	Large-Growth	Vanguard US Growth Inv	13.23	16.58	1,28
0,866553	Large-Growth	Invesco American Franchise A	11.74	15.84	1,04
0,992682	Large-Growth	Prudential Jennison Diversified Gr A	12.34	14.89	1,19
1.000.000	Large-Growth	American Century Select A	12.69	15.45	1,33
0,858656	Large-Growth	Alger Capital Appreciation B	11.68	15.17	1,11
0,952119	Mid-cap growth	BlackRock Mid-Cap Growth Equity R	12.42	17.06	1,14
0,93694	Mid-cap growth	BlackRock Mid-Cap Growth Equity Svc	12.81	17.32	1,17
0,788118	Mid-cap growth	Fidelity® Select Construction & Hsg Port	8.96	12.14	0,98
0,77223	Mid-cap growth	Goldman Sachs Small/Mid Cap Growth A	8.88	12.74	0,83
0,811089	Mid-cap growth	JPMorgan Mid Cap Growth R2	9.59	14.55	0,92
0,946253	Mid-cap growth	ProFunds Mid Cap Growth Inv	9.12	11.41	1,03
0,561749	Mid-cap growth	Morgan Stanley Inst Mid Cap Growth I	5.55	10.15	0,51
0,768339	Mid-cap growth	Wells Fargo Enterprise Inst	9.92	13.41	1,02
1.000.000	Mid-cap growth	American Century NT Heritage G	8.15	12.00	0,94
0,978183	Mid-cap growth	Fidelity® Growth Strategies K	9.00	14.32	1,12
1.000.000	Large-Value	BlackRock High Equity Income Instl	6.46	12.35	0,84
0,983337	Large-Value	Fidelity Advisor® Equity Value A	7.10	12.57	0,97
0,945855	Large-Value	Goldman Sachs Large Cp Val Insights A	9.48	13.27	1,09
1.000.000	Large-Value	Invesco Growth and Income R6	10.77	13.39	1,13
1.000.000	Large-Value	JPMorgan Value Advantage A	7.45	11.98	1,02
1.000.000	Large-Value	AllianzGI NFJ Large-Cap Value A	9.06	12.39	1,09
0,877796	Large-Value	American Beacon The London Co Inc Eq A	6.48	11.50	0,99
1.000.000	Large-Value	AB Equity Income A	7.15	11.10	1,03
1.000.000	Large-Value	Sterling Capital Equity Income A	10.30	10.43	1,24
0,964613	Large-Value	Delaware Value® A	8.66	13.07	1,08
0,975012	Mid-Cap Value	Wells Fargo C&B Mid Cap Value A	10.40	12.73	1,1
0,914886	Mid-Cap Value	Fidelity® Value	6.61	11.66	0,84
0,584072	Mid-Cap Value	Goldman Sachs Mid Cap Value A	3.34	9.11	0,54
0,877469	Mid-Cap Value	Lord Abbett Calibrated Mid Cap Value A	5.65	11.10	0,69
0,805164	Mid-Cap Value	BlackRock Mid Cap Dividend Institutional	7.13	10.31	0,81
0,701198	Mid-Cap Value	MassMutual Select Mid-Cap Value A	7.88	10.48	0,89
1.000.000	Mid-Cap Value	AllianzGI NFJ Mid-Cap Value A	11.60	13.73	1,27
0,922934	Mid-Cap Value	Touchstone Mid Cap Value A	8.80	11.90	1,12
1.000.000	Mid-Cap Value	American Century Mid Cap Value A	9.67	13.40	1,21
0,716639	Mid-Cap Value	Invesco American Value A	4.83	9.89	0,57

Fuente: Elaboración Propia

Lota (coeficiente de eficiencia)	Fund name	Ticker	Inputs del modelo					
			Expense ratio (%)	Desviación típica a 3 años (%)	Cash( %)	P/E	Beta	Stocks (%)
1.000.000	Large-Growth	Fidelity Advisor® Equity Growth I	0.76	11.60	2.17	26.13	0.99	86.16
0,887529	Large-Growth	Wells Fargo Omega Growth Admin	1.10	12.51	0.76	28.52	1.10	91.43
0,768903	Large-Growth	Goldman Sachs Blue Chip A	1.17	11.34	1.19	20.11	1.06	98.81
1.000.000	Large-Growth	JPMorgan Growth Advantage R5	0.85	12.71	0.00	25.96	1.08	95.45
1.000.000	Large-Growth	BlackRock Large Cap Focus Growth Instl	0.84	12.50	0.04	27.66	0.95	99.96
1.000.000	Large-Growth	Vanguard US Growth Inv	0.43	11.76	4.28	27.91	0.90	94.56
0,866553	Large-Growth	Invesco American Franchise A	1.06	13.66	0.43	25.02	1.19	99.58
0,992682	Large-Growth	Prudential Jennison Diversified Gr A	1.24	11.75	0.00	23.66	1.01	99.07
1.000.000	Large-Growth	American Century Select A	1.24	11.15	0.29	23.20	0.98	98.56
0,858656	Large-Growth	Alger Capital Appreciation B	1.99	12.52	0.20	27.16	0.95	99.48
0,952119	Mid-cap growth	BlackRock Mid-Cap Growth Equity R	1.65	12.98	4.60	31.81	1.10	89.60
0,93694	Mid-cap growth	BlackRock Mid-Cap Growth Equity Svc	1.29	13.03	0.46	31.81	1.03	98.29
0,788118	Mid-cap growth	Fidelity® Select Construction & Hsg Port	0.79	13.10	0.94	22.38	1.02	99.06
0,77223	Mid-cap growth	Goldman Sachs Small/Mid Cap Growth A	1.29	12.99	2.79	27.57	0.88	97.21
0,811089	Mid-cap growth	JPMorgan Mid Cap Growth R2	1.42	13.06	0.00	24.93	1.07	95.54
0,946253	Mid-cap growth	ProFunds Mid Cap Growth Inv	1.78	10.63	0.00	25.43	0.92	99.58
0,561749	Mid-cap growth	Morgan Stanley Inst Mid Cap Growth I	0.72	14.89	6.67	39.02	1.03	93.33
0,768339	Mid-cap growth	Wells Fargo Enterprise Inst	0.85	12.39	0.47	26.03	1.02	96.01
1.000.000	Mid-cap growth	American Century NT Heritage G	0.58	11.46	0.00	25.71	0.96	99.50
0,978183	Mid-cap growth	Fidelity® Growth Strategies K	0.63	10.02	2.34	22.21	0.86	97.66
1.000.000	Large-Value	BlackRock High Equity Income Instl	0.97	10.91	0.53	16.04	0.97	96.18
0,983337	Large-Value	Fidelity Advisor® Equity Value A	1.08	9.76	2.86	16.01	0.93	97.06
0,945855	Large-Value	Goldman Sachs Large Cp Val Insights A	0.96	11.07	1.17	18.88	1.07	98.83
1.000.000	Large-Value	Invesco Growth and Income R6	0.39	12.02	3.86	16.70	1.13	96.14
1.000.000	Large-Value	JPMorgan Value Advantage A	1.24	10.02	0.00	17.08	0.96	96.56
1.000.000	Large-Value	AllianzGI NFJ Large-Cap Value A	1.02	10.95	0.79	16.56	1.04	99.20
0,877796	Large-Value	American Beacon The London Co Inc Eq A	1.12	9.28	4.23	19.51	0.86	95.77
1.000.000	Large-Value	AB Equity Income A	0.98	9.52	0.00	16.53	0.92	97.98
1.000.000	Large-Value	Sterling Capital Equity Income A	1.03	10.36	1.01	17.98	0.94	98.99
0,964613	Large-Value	Delaware Value® A	0.95	10.33	0.79	18.94	0.97	99.14
0,975012	Mid-Cap Value	Wells Fargo C&B Mid Cap Value A	1.25	11.68	5.14	15.81	0.89	93.18
0,914886	Mid-Cap Value	Fidelity® Value	0.57	11.23	1.52	16.81	1.01	98.33
0,584072	Mid-Cap Value	Goldman Sachs Mid Cap Value A	1.17	11.04	1.22	20.97	0.99	98.78
0,877469	Mid-Cap Value	Lord Abbett Calibrated Mid Cap Value A	0.92	11.64	0.00	17.58	1.06	100.00
0,805164	Mid-Cap Value	BlackRock Mid Cap Dividend Institutional	0.85	12.61	1.04	16.93	1.18	98.96
0,701198	Mid-Cap Value	MassMutual Select Mid-Cap Value A	1.35	11.70	3.04	18.68	1.10	96.96
1.000.000	Mid-Cap Value	AllianzGI NFJ Mid-Cap Value A	1.21	11.08	4.23	16.21	0.96	95.77
0,922934	Mid-Cap Value	Touchstone Mid Cap Value A	1.27	10.10	2.28	19.22	0.91	97.72
1.000.000	Mid-Cap Value	American Century Mid Cap Value A	1.23	9.73	2.60	19.14	0.92	97.40
0,716639	Mid-Cap Value	Invesco American Value A	1.21	13.38	1.47	17.81	0.97	98.53

Fuente: Elaboración Propia

## 6. Bibliografía

Cooper, WW., Seiford, L., & Zhu, J. “Handbook on Data Envelopment Analysis”. *Springer Science & Business Media* (2011), 164, pp. 1-18.

Charnes, A., Cooper, WW., Lewin, A., & Seiford, L. “Data Envelopment analysis: Theory, methodology and applications”. *Springer Dordrecht* (1994), pp. 3-21.

Gregoriou, G. “Performance of Mutual Funds: An International Perspective”. *Springer* (2006), pp. 152-160.

Gregoriou, G., Zhu, J. “Evaluating Hedge Fund and CTA Performance: Data Envelopment Approach”. *John Wiley & Sons* (2005), 279, pp. 1-13.

Hancock, D. “A Model of the Financial Firm with Imperfect Asset and Deposit Elasticities”. *Journal of Banking and Finance* (1986), 10, pp. 37-54.

Haslem, J., Scheraga, C. “Data Envelopment Analysis of Morningstar’s Large-Cap Mutual Funds”. *The Journal of Investing* (2003), 12, pp. 41-48.

Jothimani, D., Shankar, R., & Yadav, S. “Big Data Analytic Framework for Portfolio Optimization”. Delhi: Indian Institute of Technology Delhi (2014).

Markowitz, H.M. “Portfolio selection”. *John Wiley & Sons* (1959), pp. 77–91.

Markowitz, H.M., and Todd, G. “Mean-variance analysis in portfolio choice and capital markets”. *Frank. J. Fabozzi series* (2000), 66, pp. 3-23.

Morningstar (2016). “MorningstarUK”. Disponible en <http://www.morningstar.es/es/news/23618/¿gestión-activa-o-gestión-pasiva.aspx> [23 de marzo de 2018]

Power, J., & McMullen, P. “Using Data Envelopment Analysis to select efficient large market cap securities”. *The Journal of Business and Management* (2000), 7, pp. 31-42.

Premachandra, I.M., Zhu, J., Watson, J., & Galadera, U.A. “Best-performing US mutual fund families from 1993 to 2008: Evidence from a novel two stage DEA model for efficiency decomposition”. *Journal of Banking and Finance* (2012), 36, pp. 3302-3317.

Ross, S (16 de marzo 2018). “Investopedia”. Disponible en <https://www.investopedia.com/articles/markets/022316/small-cap-vs-mid-cap-vs-large-cap-stocks-2016.asp> > [23 de marzo 2018]