



COMILLAS

UNIVERSIDAD PONTIFICIA

ICAI

MÁSTER UNIVERSITARIO EN INGENIERÍA INDUSTRIAL

TRABAJO FIN DE MÁSTER

FORMULACIÓN DE UN ALGORITMO DE FLUJO DE
CARGAS PARABÓLICO

Autor: Alejandro Ruiz Berciano

Director: Francisco Miguel Echavarren Cerezo

Madrid

Julio de 2019

AUTORIZACIÓN PARA LA DIGITALIZACIÓN, DEPÓSITO Y DIVULGACIÓN EN RED DE PROYECTOS FIN DE GRADO, FIN DE MÁSTER, TESIS O MEMORIAS DE BACHILLERATO

1º. Declaración de la autoría y acreditación de la misma.

El autor D. _____ Alejandro Ruiz Berciano _____

DECLARA ser el titular de los derechos de propiedad intelectual de la obra: _____

Formulación de un algoritmo de flujo de cargas parabólico ____, que ésta es una obra original, y que ostenta la condición de autor en el sentido que otorga la Ley de Propiedad Intelectual.

2º. Objeto y fines de la cesión.

Con el fin de dar la máxima difusión a la obra citada a través del Repositorio institucional de la Universidad, el autor **CEDE** a la Universidad Pontificia Comillas, de forma gratuita y no exclusiva, por el máximo plazo legal y con ámbito universal, los derechos de digitalización, de archivo, de reproducción, de distribución y de comunicación pública, incluido el derecho de puesta a disposición electrónica, tal y como se describen en la Ley de Propiedad Intelectual. El derecho de transformación se cede a los únicos efectos de lo dispuesto en la letra a) del apartado siguiente.

3º. Condiciones de la cesión y acceso

Sin perjuicio de la titularidad de la obra, que sigue correspondiendo a su autor, la cesión de derechos contemplada en esta licencia habilita para:

- a) Transformarla con el fin de adaptarla a cualquier tecnología que permita incorporarla a internet y hacerla accesible; incorporar metadatos para realizar el registro de la obra e incorporar “marcas de agua” o cualquier otro sistema de seguridad o de protección.
- b) Reproducir la en un soporte digital para su incorporación a una base de datos electrónica, incluyendo el derecho de reproducir y almacenar la obra en servidores, a los efectos de garantizar su seguridad, conservación y preservar el formato.
- c) Comunicarla, por defecto, a través de un archivo institucional abierto, accesible de modo libre y gratuito a través de internet.
- d) Cualquier otra forma de acceso (restringido, embargado, cerrado) deberá solicitarse expresamente y obedecer a causas justificadas.
- e) Asignar por defecto a estos trabajos una licencia Creative Commons.
- f) Asignar por defecto a estos trabajos un HANDLE (URL *persistente*).

4º. Derechos del autor.

El autor, en tanto que titular de una obra tiene derecho a:

- a) Que la Universidad identifique claramente su nombre como autor de la misma
- b) Comunicar y dar publicidad a la obra en la versión que ceda y en otras posteriores a través de cualquier medio.
- c) Solicitar la retirada de la obra del repositorio por causa justificada.
- d) Recibir notificación fehaciente de cualquier reclamación que puedan formular terceras personas en relación con la obra y, en particular, de reclamaciones relativas a los derechos de propiedad intelectual sobre ella.

5º. Deberes del autor.

El autor se compromete a:

- a) Garantizar que el compromiso que adquiere mediante el presente escrito no infringe ningún derecho de terceros, ya sean de propiedad industrial, intelectual o cualquier otro.
- b) Garantizar que el contenido de las obras no atenta contra los derechos al honor, a la intimidad y a la imagen de terceros.
- c) Asumir toda reclamación o responsabilidad, incluyendo las indemnizaciones por daños, que pudieran ejercitarse contra la Universidad por terceros que vieran infringidos sus derechos e intereses a causa de la cesión.

- d) Asumir la responsabilidad en el caso de que las instituciones fueran condenadas por infracción de derechos derivada de las obras objeto de la cesión.

6º. Fines y funcionamiento del Repositorio Institucional.

La obra se pondrá a disposición de los usuarios para que hagan de ella un uso justo y respetuoso con los derechos del autor, según lo permitido por la legislación aplicable, y con fines de estudio, investigación, o cualquier otro fin lícito. Con dicha finalidad, la Universidad asume los siguientes deberes y se reserva las siguientes facultades:

- La Universidad informará a los usuarios del archivo sobre los usos permitidos, y no garantiza ni asume responsabilidad alguna por otras formas en que los usuarios hagan un uso posterior de las obras no conforme con la legislación vigente. El uso posterior, más allá de la copia privada, requerirá que se cite la fuente y se reconozca la autoría, que no se obtenga beneficio comercial, y que no se realicen obras derivadas.
- La Universidad no revisará el contenido de las obras, que en todo caso permanecerá bajo la responsabilidad exclusiva del autor y no estará obligada a ejercitar acciones legales en nombre del autor en el supuesto de infracciones a derechos de propiedad intelectual derivados del depósito y archivo de las obras. El autor renuncia a cualquier reclamación frente a la Universidad por las formas no ajustadas a la legislación vigente en que los usuarios hagan uso de las obras.
- La Universidad adoptará las medidas necesarias para la preservación de la obra en un futuro.
- La Universidad se reserva la facultad de retirar la obra, previa notificación al autor, en supuestos suficientemente justificados, o en caso de reclamaciones de terceros.


Madrid, a 8 de julio de 2019.

ACEPTA

Fdo.....

Motivos para solicitar el acceso restringido, cerrado o embargado del trabajo en el Repositorio Institucional:

Declaro, bajo mi responsabilidad, que el Proyecto presentado con el título *Formulación de un algoritmo de flujo de cargas parabólico* en la ETS de Ingeniería - ICAI de la Universidad Pontificia Comillas en el curso académico 2018/2019 es de mi autoría, original e inédito y no ha sido presentado con anterioridad a otros efectos. El Proyecto no es plagio de otro, ni total ni parcialmente y la información que ha sido tomada de otros documentos está debidamente referenciada.



Fdo.: Alejandro Ruiz Berciano

Fecha: 01/07/2019

Autorizada la entrega del proyecto

EL DIRECTOR DEL PROYECTO



Fdo.: Francisco Miguel Echavarren cerezo

Fecha: 04/07/2019



COMILLAS

UNIVERSIDAD PONTIFICIA

ICAI

MÁSTER UNIVERSITARIO EN INGENIERÍA
INDUSTRIAL

TRABAJO FIN DE MÁSTER
FORMULACIÓN DE UN ALGORITMO DE FLUJO DE
CARGAS PARABÓLICO

Autor: Alejandro Ruiz Berciano
Director: Francisco Miguel Echavarren Cerezo

Madrid
Julio de 2019

FORMULACIÓN DE UN ALGORITMO DE FLUJO DE CARGAS PARABÓLICO

Autor: Ruiz Berciano, Alejandro

Director: Echavarren Cerezo, Francisco Miguel

Entidad colaboradora: ICAI – Universidad Pontificia Comillas

RESUMEN

La resolución del problema de flujos de cargas resulta fundamental en la operación y análisis de sistemas eléctricos. Partiendo de una red eléctrica y un despacho de energía, la resolución del flujo de cargas permite obtener las condiciones de operación en régimen permanente de un sistema de energía eléctrica para el escenario considerado. De forma más específica, el flujo de cargas proporciona las variables de estado del sistema, es decir, las tensiones de los nudos en módulo y argumento, lo cual permite calcular todas las magnitudes clave de un sistema eléctrico, tales como los flujos de potencia por líneas y transformadores o las pérdidas de la red, entre otros. Además de cómo aplicación independiente, el flujo de cargas es el paso previo a muchos estudios o herramientas como las estimaciones de estado, evaluaciones de contingencias en una red, estudios de cortocircuitos, análisis de protecciones, análisis de seguridad, estudios de estabilidad transitoria, colapso de tensiones, etc.

El sistema de ecuaciones planteado para determinar los balances de las inyecciones de potencia en cada nudo es no lineal, ya que contiene ecuaciones cuadráticas y trigonométricas, de modo que la forma de resolverlo es mediante métodos iterativos. Sin embargo, en problemas mal condicionados pueden aparecer problemas de convergencia que hacen que el algoritmo iterativo de resolución diverja u oscile, de modo que no se pueda obtener una solución al problema. Por ello se requieren métodos de resolución robustos y rápidos.

Actualmente las redes son más complejas que nunca, debido a las nuevas tecnologías que están cambiando el panorama eléctrico, como la generación distribuida, grandes redes interconectadas, redes de alta tensión en corriente continua (HVDC) usadas entre otras cosas para la interconexión de sistemas con diferentes frecuencias o de forma submarina, vehículos eléctricos, dispositivos de almacenaje, etc. Por motivos de eficiencia económica y seguridad, es preciso mejorar la robustez, fiabilidad y rapidez de las herramientas de cálculo existentes.

Durante décadas, diferentes métodos han sido propuestos en la literatura técnica para resolver los flujos de potencia de los sistemas eléctricos, así como para verificar la solvencia del problema y luego, en los casos en los que existe solución, obtenerla. La mayoría de estos trabajos se basan en el método más extendido en la actualidad para la resolución del problema de flujo de cargas, el método de Newton-Raphson (NR). Debido a la no linealidad de sus ecuaciones, todos los métodos de resolución de flujo de cargas desarrollados en la literatura se presentan como procesos iterativos. Gracias a los avances en sistemas computacionales, al desarrollo de las técnicas de matrices dispersas y a la introducción de reformulaciones simplificadas de las ecuaciones, los algoritmos basados en el método de Newton-Raphson de resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones no-lineales son los más comúnmente utilizados por presentar una convergencia más robusta y rápida.

Tanto Newton-Raphson como sus distintas variantes se basan en sustituir las ecuaciones de estado por aproximaciones de primer orden. De este modo, en cada iteración se presentan dichas aproximaciones lineales como las ecuaciones del sistema, y se obtiene a partir de su resolución un vector de actualización de las variables de estado. Este proceso de linealización y actualización de

las variables se repite hasta alcanzar los criterios de convergencia que se hayan establecido. En la mayoría de casos, el método de Newton-Raphson presenta niveles de robustez y rapidez adecuados. Sin embargo, cerca del límite de factibilidad, este método presenta problemas de convergencia.

Este proyecto presenta una reformulación de las ecuaciones de flujo de cargas en las cuales éstas quedan redefinidas en forma de homotopía. Con esta reformulación se obtiene un nuevo sistema de ecuaciones en el que aparece un nuevo parámetro encargado de definir la distancia entre el despacho que corresponde al punto inicial hasta el despacho que se quiere resolver. De esta forma, en el espacio de las variables de estado se origina un conjunto de trayectorias en función del parámetro antes mencionado, que unen los dos puntos antes mencionados. Esta reformulación en forma de homotopía permite obtener derivadas superiores a las de primer orden de las trayectorias de las variables de estado. De este modo se puede formular un algoritmo de flujo de cargas en el que para cada iteración se obtendría la actualización de las variables de estado empleando derivadas de primer y segundo orden de sus trayectorias, acelerando por tanto el proceso de convergencia.

Para ilustrar el rendimiento del algoritmo de resolución del problema de flujo de cargas propuesto, se resolverá un modelo de red de dos nudos, un sistema básico de carga de línea de generador. El algoritmo de segundo orden propuesto se prueba y compara con el método Newton-Raphson tradicional, llevando a los sistemas al límite de colapso de tensiones. Tras probar ambos algoritmos en la resolución del flujo de cargas en una red de dos nudos, para varios factores de potencia de la carga y distintos niveles de potencia activa demandada, se comprueba que el método planteado en este documento requiere el mismo o menor número de iteraciones que el método Newton-Raphson tradicional, en función de la carga, para resolver el problema de flujo de cargas.

El TFM consta de las siguientes secciones. En la sección 1 se introducirá primero la formulación del problema de flujo de cargas. Después, se presenta una revisión de los diferentes métodos para su resolución que la literatura técnica ha propuesto, centrada en el método Newton-Raphson. La sección 2 expone la metodología empleada. La sección 3 presenta los resultados obtenidos en el análisis. Finalmente, la sección 4 contiene las conclusiones del estudio.

SUMMARY

The resolution of the power flow problem is fundamental in the operation and analysis of electrical systems. For a certain electrical network and an energy dispatch, the resolution of the power flow problem provides the steady-state operation point of the power system for the case scenario considered. More specifically, it provides the voltages magnitudes and angles for all the buses of the system, which allows the calculation all the key magnitudes of an electrical system, such as the power flows through lines and transformers or the losses of the network, among others. In addition, as an independent application, the power flow is the previous step to many studies or tools such as state estimations, contingency assessments in a network, short-circuit studies, protection analysis, safety analysis, transient stability studies, collapse of tensions, etc. The basic state variables of the power flow problem are the magnitude and argument of the voltages of the nodes. The system of equations proposed to determine the balances of the power injections in each node is non-linear, since it contains quadratic and trigonometric equations, so that the way to solve it is by iterative methods. However, in problems that are ill-conditioned, convergence problems can arise that cause the iterative resolution algorithm to diverge or oscillate, so that a solution to the problem can not be obtained. That's why robust and fast resolution methods are required.

Currently, networks are more complex than ever, due to new technologies that are changing the electricity landscape, such as distributed generation, large interconnected networks, high voltage direct current (HVDC) networks used inter alia for the interconnection of systems with different frequencies, electric vehicles, storage devices, etc. For reasons of economic efficiency and safety, it is necessary to improve the robustness, reliability and speed of the existing calculation tools.

For decades, different methods have been proposed in the technical literature to solve the power flows of electrical systems, as well as to verify the solvency of the problem and then, in the cases where there is a solution, obtain it. Most of these works are based on the most widespread method for the resolution of the power flow problem, the Newton-Raphson (NR) method. Due to the non-linearity of their equations, all load-flow resolution methods developed in the literature are presented as iterative processes. Thanks to the advances in computer systems, the development of scattered matrix techniques and the introduction of simplified reformulations of the equations, the algorithms based on the Newton Raphson method of solving systems of non-linear equations are the most common used for presenting a more robust and faster convergence.

Both Newton-Raphson and its different variants rely on replacing the state equations with first-order approximations. In this way, in each iteration, these linear approximations are presented as the equations of the system, and an update vector of the state variables is obtained from their resolution. This process of linearization and updating of the variables is repeated until reaching the convergence criteria that have been established. In most cases, the Newton-Raphson method presents adequate levels of robustness and speed. However, near the feasibility limit, this method presents problems of convergence.

This project presents a reformulation of the power flow equations in which they are redefined in the form of homotopy. With this reformulation, a new system of equations is obtained in which a new parameter appears in charge of defining the distance between the dispatch that corresponds to the initial point to the dispatch to be solved. In this way, in the space of the state variables, a set of trajectories originates according to the aforementioned parameter, which unite the two aforementioned points. This reformulation in the form of homotopy allows to obtain derivatives superior to those of the first order of the trajectories of the state variables. In this way, it is possible to formulate a load flow algorithm in which, for each iteration, the state variables will be updated using first and second order derivatives of their trajectories, thus accelerating the convergence process.

To illustrate the performance of the algorithm for solving the proposed power flow problem, a two-node network model, a basic generator line load system, will be solved. The proposed second-order algorithm is tested and compared with the traditional Newton-Raphson method, bringing the systems to the limit of voltage collapse. After testing both algorithms in the resolution of the power flow in a network of two nodes, for several power factors of the load and different levels of active power demanded, it is verified that the method proposed in this document requires the same or lower number of iterations that the traditional Newton-Raphson method, depending on the load, to solve the power flow problem.

The thesis consists of the following sections. In section 1 the formulation of the load flow problem will be introduced first. Afterwards, a review of the different methods for its resolution that the technical literature has proposed, centred on the Newton-Raphson method is presented. Section 2 explains the methodology used. Section 3 presents the results obtained in the analysis. Finally, section 4 contains the conclusions of the study.

Agradecimientos

Pocas veces se tiene en la vida la oportunidad de hacer algo por última vez sabiendo que es la última. Esa clase de ocasiones son un regalo, ya que brindan la oportunidad de hacer las cosas tal y como uno quiere, por ser la última vez. Muchas cosas se hacen en la vida y nunca vuelven a hacerse. Tienen un final, una última ocasión. En realidad, todas las cosas se hacen por última vez en algún momento.

Sin embargo, pocas son recordadas. Estos recuerdos se diluyen en el cosmos de la memoria y seguramente no sean visitados por el sujeto (y bien sujeto) en un futuro. En la mayoría de los casos, esto es resultado del desconocimiento de esta efeméride ya que, ¿acaso sabía la madre que nunca más volvería a levantar a su hijo en brazos, o los amigos aquel atardecer de verano que por última vez bajaban a la calle a jugar al balón después del colegio? Espero que el lector esté de acuerdo conmigo en que no, porque la vida comienza a matar desde el momento en que uno nace, y conduce a las ánimas por sus caminos, no siempre lóbregos, pero a ciegas. No es hasta que el tiempo comienza a pesar demasiado cuando la melancolía devuelve a la conciencia este recuerdo robado, casi por un apremiante sentimiento de escasez y culpa, y el alma se llena de añoranza. Y quizá por ello, cuando se sabe que una ocasión es la última, uno siente que no está siendo conducido por el devenir de la existencia, impotente como el pescador en la tormenta, sino que está aferrado al timón de su navío y marcha hacia la muerte contento, porque capea los farallones como Sísifo empuja su roca, consciente del absurdo en que navega. Y contento porque, aunque nunca volverá a oír el ancla deslizarse por el escobén ni el sonido de las gaviotas, que a pesar de poder volar doquiera deseen acabarán en el mismo suelo, esta vez sabe que es la última. El viento y la marea lo obligan porque él quiere, y usa el viento para impulsar sus velas, y las mareas para virar su bajel. Contaba la mitología nórdica que un gigante engañó al dios Thor, al probarle haciéndole pelear con una anciana a la que no pudo ni mover, porque resultó ser la Vejez misma.

En efecto, hay mareas que te arrastran. Por tanto, sea este proyecto sea mi bandera esta última vez, pues llevo las bodegas repletas de clavo y ron, y como es mi última ocasión, por primera vez no temo nada.

A Dios y a las personas que lo hicieron posible, a Paco a soplar las velas, a mis padres por el wifi, a mis tíos por el pollo y a mis compañeros y amigos del máster y de la vida.

TABLA DE CONTENIDOS

1	FLUJO DE CARGAS EN SISTEMAS DE ENERGÍA ELÉCTRICA	13
1.1	FORMULACIÓN DEL PROBLEMA.....	13
1.2	MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON	16
1.3	REVISIÓN DE MÉTODOS DE RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE FLUJO DE CARGAS	19
2	FORMULACIÓN DE UN MÉTODO DE RESOLUCIÓN DEL FLUJO DE CARGAS BASADO EN APROXIMACIONES DE SEGUNDO ORDEN	27
2.1	REFORMULACIÓN DEL PROBLEMA EN FORMA DE HOMOTOPÍA.....	27
2.2	CÁLCULO DE LAS DERIVADAS DE LAS TRAYECTORIAS $X(\lambda)$	29
2.3	MODELO COMPLETO DE FLUJO DE CARGAS PARABÓLICO	34
3	RESULTADOS.....	37
3.1	RED TIPO DE DOS NUDOS GENERADOR-CARGA	37
4	CONCLUSIONES.....	43
	REFERENCIAS.....	45

Índice de figuras

Figura 1: Ejemplo de función no lineal $g(x)=0$	17
Figura 2: Regiones en el espacio de variables de un sistema de ecuaciones	21
Figura 3: Ejemplo de trayectoria $x(\lambda)$ y sus aproximaciones de primer y segundo orden	28
Figura 4: Esquema del proceso iterativo del método Newton-Raphson tradicional	35
Figura 5: Esquema del proceso iterativo del método propuesto reformulado mediante homotopía	36
Figura 6: Esquema de la red de dos nudos simulada.....	37
Figura 7: Número de iteraciones necesarias para resolver el flujo de cargas en función de la carga con factor de potencia unidad.....	38
Figura 8: Número de iteraciones necesarias para resolver el flujo de cargas en función de la carga con factor de potencia 0,95 inductivo	38
Figura 9: Número de iteraciones necesarias para resolver el flujo de cargas en función de la carga con factor de potencia 0,95 capacitivo	39
Figura 10: Evolución del valor absoluto del desvío de potencia activa con demanda de potencia activa 0.32 p.u. con factor de potencia unidad	39
Figura 11: Evolución del valor absoluto del desvío de potencia reactiva con demanda de potencia activa 0.32 p.u. con factor de potencia unidad	40
Figura 12: Evolución del valor absoluto del desvío de potencia activa con demanda de potencia activa 0.33 p.u. con factor de potencia 0,95 inductivo	40
Figura 13: Evolución del valor absoluto del desvío de potencia reactiva con demanda de potencia activa 0.33 p.u. con factor de potencia 0,95 inductivo.....	41
Figura 14: Evolución del valor absoluto del desvío de potencia activa con demanda de potencia activa 0.61 p.u. con factor de potencia 0,95 capacitivo	41
Figura 15: Evolución del valor absoluto del desvío de potencia reactiva con demanda de potencia activa 0.61 p.u. con factor de potencia 0,95 capacitivo	42

Índice de tablas

TABLA 1 - NÚMERO DE ECUACIONES EN FUNCIÓN DEL TIPO DE NUDO.....	14
TABLA 2 - MATRIZ DE ADMITANCIAS SEGÚN LOS ELEMENTOS DE LA RED.....	15

1 Flujo de cargas en sistemas de energía eléctrica

El problema de flujo de cargas supone la piedra angular sobre la que se asientan la gran mayoría de estudios relacionados con los sistemas de energía eléctrica, tanto de transporte como de distribución. Dentro de la literatura técnica, los algoritmos más extendidos son variaciones del método de Newton-Raphson (NR) para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Éstos por tanto emplean aproximaciones lineales de las ecuaciones para obtener el siguiente punto en el proceso iterativo de convergencia.

El TFM consta de las siguientes secciones. En esta sección se introducirá primero la formulación del problema de flujo de cargas. Después, se presenta una revisión de los diferentes métodos para su resolución que la literatura técnica ha propuesto, centrada en el método Newton-Raphson. La sección 2 expone la metodología empleada. La sección 3 presenta los resultados obtenidos en el proyecto. Finalmente, la sección 4 contiene las conclusiones del estudio.

1.1 Formulación del problema

El problema de flujo de cargas tiene como objetivo conocer el estado de un sistema eléctrico, a partir de sus variables de estado. La solución es el valor de las tensiones (módulo y argumento) en cada nudo de la red.

Para plantear el problema del flujo de cargas, tal y como se expone en [1], se debe establecer el balance entre la potencia neta inyectada por un nudo, teniendo en cuenta su generación y demanda de potencia por un lado, y la potencia inyectada desde el nudo en la red, por otro. En cada nudo podrá haber elementos de generación y/o demanda con consignas de potencia, cuya suma neta será la potencia especificada del nudo. Desde el nudo se inyecta potencia a la red, con sus respectivas líneas, transformadores, elementos shunt, etc. y el resto de nudos. La potencia inyectada es función no lineal de θ y V , donde V son los módulos de los fasores de las tensiones de los nudos, θ los ángulos de estos. El problema de flujo de cargas consiste en igualar la potencia especificada que el nudo inyecta a la red con la potencia calculada que este está inyectando.

Dado que las características técnicas de la red permiten conocer las intensidades inyectadas en función de las tensiones de los nudos, las variables del problema serán las tensiones de cada nudo en módulo y argumento. Estas serán las llamadas variables de estado. Por tanto, se pueden definir los desvíos de potencia en cada nudo como la diferencia en estos entre las potencias especificadas y calculadas, en función de estas variables. Para resolver el problema estos desvíos deben ser nulos. Se define con el subíndice e a la potencia especificada del nudo y con el c a la calculada. Los desvíos (o mismatches) de potencia activa (P) en cada nudo se denotarán como MP y los de reactiva (Q) como MQ .

$$MP = P_e - P_c(\theta, V) = 0 \quad (1)$$

$$MQ = Q_e - Q_c(\theta, V) = 0 \quad (2)$$

Estas ecuaciones representan los balances de potencia activa y reactiva en cada nudo, en función de los módulos y argumentos de las tensiones en estos. Así, existe el mismo número de ecuaciones que de incógnitas, el doble del número de nudos del sistema, $2N$. El sistema es, por tanto, regular, aunque no se puede garantizar que tenga solución. Pero, planteado así, con todas las potencias especificadas en todos los nudos, el problema es infactible. Ciertas ecuaciones y variables deben ser eliminadas de la formulación, en función del tipo de nudo.

La generación total de potencia activa en el sistema debe igualar a la consumida en este. Sin embargo las pérdidas de la red no se conocen de antemano, de modo que es necesario establecer un nudo que absorba estas y que, por tanto, no tenga consigna de generación activa, quedando libre. De este modo, su ecuación de desvío de activa desaparece del sistema. Por otro lado, se necesita una referencia de ángulos de las tensiones, por lo que se fija el ángulo de la tensión en este nudo, que se considera la referencia de tensiones del sistema y queda normalmente fijado a cero. Este nudo se llama nudo slack o swing.

En el caso de la reactiva resulta imposible saber el balance de reactivas en la red, por lo que no se pueden especificar las potencias reactivas en las unidades de generación. Así, desaparecen todas las ecuaciones de desvío de reactiva en los nudos de generación, o nudos PV. Se llaman así porque además de la especificación de activa, para compensar la falta de ecuación de desvío de reactiva, se fija en estos una consigna de tensión que deben mantener utilizando su sistema de excitación (reactiva).

El tercer tipo de nudos son los PQ, nudos de demanda, donde existen ecuaciones de desvío de potencia activa y reactiva, pero en estos no se conoce la tensión del nudo en módulo ni argumento.

Habiendo N nudos y G grupos de generación en la Tabla 1 se muestra el número de ecuaciones según los tipos de nudo:

TABLA 1 - NÚMERO DE ECUACIONES EN FUNCIÓN DEL TIPO DE NUDO

Tipo de nudo	Número de nudos	Ecuación de desvío de potencia activa	Ecuación de desvío de potencia reactiva	Módulo de la tensión	Ángulo de la tensión
Slack/swing	1	No tiene	No tiene	Fijo	Fijo
PV	G-1	Tienen	No tienen	Fijo	Variable
PQ	N-G	Tienen	Tienen	Variable	Variable
Total	N	N-1	N-G	N-G	N-1

De esta tabla se deduce que el problema tiene $2N-G-1$ ecuaciones, $N-1$ desvíos de potencia activa y $N-G$ de reactiva, y también $2N-G-1$ variables, $N-1$ argumentos de tensiones y $N-G$ módulos.

Ante se ha hablado de la relación entre las tensiones y las intensidades. Estas están relacionadas mediante la matriz de admitancias nodales, que multiplicada por el vector de tensiones de los nudos arroja el vector de corrientes netas inyectadas en la red desde los diferentes nudos.

$$\bar{I} = \bar{Y}_{bus} \cdot \bar{V} \quad (3)$$

Esta matriz está construida mediante la superposición de las matrices de cada elemento de la red. Cada uno de ellos añade sus parámetros de su propio modelo a los elementos correspondientes en la matriz Y_{bus} de la red. Las admitancias se pueden expresar como $Y = G + j \cdot B$, siendo G la conductancia y B la susceptancia. En la Tabla 2 se muestran como ejemplos los modelos de admitancias nodales de una línea, un transformador y una reactancia shunt.

TABLA 2 - MATRIZ DE ADMITANCIAS SEGÚN LOS ELEMENTOS DE LA RED

	$\begin{array}{c c} \overline{Y}_{bus_{ii}} \leftarrow \overline{Y}_{bus_{ii}} + \frac{Y_{p\Pi}}{2} + \frac{1}{Z_{s\Pi}} & \overline{Y}_{bus_{ij}} \leftarrow \overline{Y}_{bus_{ij}} - \frac{1}{Z_{s\Pi}} \\ \hline \overline{Y}_{bus_{ji}} \leftarrow \overline{Y}_{bus_{ji}} - \frac{1}{Z_{s\Pi}} & \overline{Y}_{bus_{jj}} \leftarrow \overline{Y}_{bus_{jj}} + \frac{Y_{p\Pi}}{2} + \frac{1}{Z_{s\Pi}} \end{array}$
	$\begin{array}{c c} \overline{Y}_{bus_{ii}} \leftarrow \overline{Y}_{bus_{ii}} + \frac{1}{\bar{t} \cdot (\bar{t})^*} \cdot Z_{cc} & \overline{Y}_{bus_{ij}} \leftarrow \overline{Y}_{bus_{ij}} - \frac{1}{(\bar{t})^*} \cdot Z_{cc} \\ \hline \overline{Y}_{bus_{ji}} \leftarrow \overline{Y}_{bus_{ji}} - \frac{1}{\bar{t}} \cdot Z_{cc} & \overline{Y}_{bus_{jj}} \leftarrow \overline{Y}_{bus_{jj}} + \frac{1}{Z_{cc}} \end{array}$
	$\overline{Y}_{bus_{ii}} \leftarrow \overline{Y}_{bus_{ii}} + jB$

Así, las potencias calculadas solo dependen de las tensiones en los nudos. Las potencias calculadas de cada nudo se obtienen multiplicando las tensiones de nudo por las corrientes netas inyectadas desde la red en estos:

$$\begin{aligned} \overline{S}_{c_i} &= P_{c_i} + j \cdot Q_{c_i} = \overline{V}_i \cdot (\overline{I}_i)^* = \overline{V}_i \cdot \left(\sum_j [\overline{Y}_{bus_{ij}} \cdot \overline{V}_j] \right)^* \\ &= V_i e^{j\theta_i} \cdot \left(\sum_j [(G_{ij} - j \cdot B_{ij}) \cdot V_j e^{-j\theta_j}] \right) \end{aligned} \quad (4)$$

Normalmente se define una variable θ_{ij} equivalente a la diferencia de los ángulos de las tensiones en los nudos i y j .

$$\theta_{ij} = \theta_i - \theta_j \quad (5)$$

$$V_i e^{j\theta_i} \cdot \left(\sum_j (G_{ij} - j \cdot B_{ij}) \cdot V_j e^{-j\theta_j} \right) = \sum_j V_i \cdot V_j \cdot e^{j\theta_{ij}} \cdot (G_{ij} - j \cdot B_{ij}) \quad (6)$$

$$\begin{aligned} &\sum_j V_i \cdot V_j \cdot e^{j\theta_{ij}} \cdot (G_{ij} - j \cdot B_{ij}) \\ &= \sum_j V_i \cdot V_j \cdot (\cos\theta_{ij} + j \cdot \text{sen}\theta_{ij}) \cdot (G_{ij} - j \cdot B_{ij}) \end{aligned} \quad (7)$$

Desarrollando estas ecuaciones se obtienen las expresiones definitivas de los desvíos de potencia activa en los nudos PV y PQ y de reactiva en cada nudo PQ:

$$\begin{aligned}
0 = MP_i &= P_{e_i} - P_{c_i}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{V}) \\
&= P_{e_i} - [V_i^2 \cdot G_{ii} + \sum_{j \neq i} V_i \cdot V_j \cdot (G_{ij} \cdot \cos\theta_{ij} + B_{ij} \cdot \sen\theta_{ij})]
\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
0 = MQ_i &= Q_{e_i} - Q_{c_i}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{V}) \\
&= Q_{e_i} - [-V_i^2 \cdot B_{ii} \\
&\quad + \sum_{j \neq i} V_i \cdot V_j \cdot (G_{ij} \cdot \cos\theta_{ij} - B_{ij} \cdot \sen\theta_{ij})]
\end{aligned} \tag{9}$$

Este sistema de ecuaciones es no lineal, lo que implica que su resolución debe obtenerse mediante métodos iterativos, como los expuestos en la siguiente sección.

1.2 Método de Newton-Raphson

Existe gran cantidad de literatura sobre la revisión del problema de flujo de cargas. Sin embargo, el más utilizado es el método Newton-Raphson. En la literatura se han planteado diversas reformulaciones de este para mejorar alguna de sus características, como se estudiará en la siguiente sección. En esta se abordará el método newton-Raphson tradicional, ya que es aquel con respecto al cual se comparará el funcionamiento de la reformulación presentada en este proyecto.

El método Gauss-Seidel fue el primer método para la resolución del flujo de cargas en corriente alterna mediante computación digital. Suele tardar mucho en converger y se comporta de forma deficiente en sistemas con condiciones poco usuales como ramas de reactancia negativa. Este consiste en seleccionar los voltajes iniciales de cada nudo y en resolver el sistema de ecuaciones que determina el voltaje en cada nudo en función de los voltajes del sistema y las inyecciones e potencia en el nudo hasta que el desvío de las tensiones sea inferior a cierta tolerancia. Cuando este proceso termina, se calculan los flujos de potencia y sus desvíos. Sin embargo, a medida que la computación lo fue facilitando, el método Newton-Raphson fue ganando protagonismo y actualmente la mayoría de métodos utilizados tienen a este como base para la resolución del flujo de cargas.

El método Newton-Raphson, expuesto también en [1], para sistemas de ecuaciones no-lineales es el más extendido actualmente para abordar la resolución del problema de flujo de cargas. Tras estimar una situación inicial de las variables de estado del problema, este consiste en obtener aproximaciones lineales de las ecuaciones del sistema en un punto y sustituir por estas las ecuaciones del sistema original. Este nuevo sistema es lineal y su solución puede obtenerse por factorización. Sin embargo, esta solución no es la del problema original, sino que es un nuevo punto más cercano a esta. Tomando este nuevo punto, el proceso se repite iterativamente hasta alcanzar la solución definitiva.

En la Figura 1 se observa un ejemplo de este aplicado a una única función $g(x)$ que depende de la variable x , con objeto de resolver $g(x) = 0$:

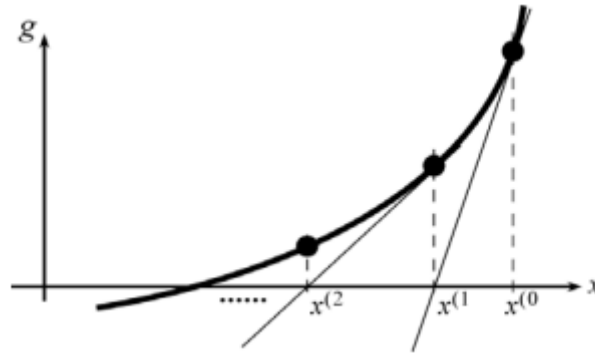


Figura 1: Ejemplo de función no lineal $g(x)=0$

El punto x^0 es la estimación inicial de la variable x . En este punto se linealiza la función g mediante su recta tangente, obteniéndose como solución x^1 . Este nuevo punto se usa para actualizar el estado de la variable x y se linealiza de nuevo la función en él. El proceso iterativo continua hasta llegar a la solución definitiva, el punto en el que $g(x) = 0$.

En cada iteración k se desarrolla la función en serie de Taylor:

$$g(x^k) + \Delta x^k \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^k + \frac{1}{2} (\Delta x^k)^2 \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\right)^k + \dots = 0 \quad (10)$$

$$g(x^k) + \Delta x^k \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^k \approx 0 \quad (11)$$

Así, en cada iteración k se obtiene el nuevo valor de la variable de estado:

$$0 = g(x^k) \approx g(x^{k-1}) + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^{k-1} \cdot (x^k - x^{k-1}) \quad (12)$$

$$x^k = x^{k-1} + \Delta x; \Delta x = -\frac{g(x^{k-1})}{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^{k-1}} \quad (13)$$

El caso del problema de flujo de cargas supone un sistema de ecuaciones no lineales, de modo que a la hora de linealizar en lugar de rectas se utilizan hiperplanos tangentes. Siendo k una iteración, i una ecuación y j una variable de estado:

$$0 = g_i^k \approx g_i^{k-1} + \sum_j \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right)^{k-1} \cdot \Delta x_j \quad (14)$$

Se transforma este sistema en forma de matriz, donde g_x denota la matriz jacobiana del problema y el elemento ij (fila i , columna j) será la derivada de la ecuación g_i respecto a la variable x_j :

$$\mathbf{0} = \mathbf{g}^k \approx \mathbf{g}^{k-1} + \mathbf{g}_x^{k-1} \cdot \Delta \mathbf{x} \quad (15)$$

En el caso del flujo de cargas, las ecuaciones a igualar a cero son los desvíos de potencia activa y reactiva en los nudos, y las variables los módulos y argumentos de las tensiones. El sistema queda planteado, por ende, de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{MP} \\ \mathbf{MQ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \mathbf{MP} \\ \mathbf{MQ} \end{bmatrix}^{k-1} + \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{MP}}{\partial \theta} & \frac{\partial \mathbf{MP}}{\partial V} \\ \frac{\partial \mathbf{MQ}}{\partial \theta} & \frac{\partial \mathbf{MQ}}{\partial V} \end{bmatrix}^{k-1} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \theta \\ \Delta V \end{bmatrix} \quad (16)$$

Después se le aplica al sistema un pequeño cambio. Se multiplica a los elementos de la matriz jacobiana derivados respecto a los módulos de la tensión por estos, dividiendo el incremento del módulo de las tensiones en cada nudo entre el propio módulo, de forma que lo que se obtiene como actualización de variable es un incremento relativo.

$$\frac{\partial \mathbf{MP}}{\partial V} \rightarrow V \cdot \frac{\partial \mathbf{MP}}{\partial V} \quad (17)$$

$$\frac{\partial \mathbf{MQ}}{\partial V} \rightarrow V \cdot \frac{\partial \mathbf{MQ}}{\partial V} \quad (18)$$

$$\Delta V \rightarrow \Delta V/V \quad (19)$$

El sistema final queda formulado como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{MP} \\ \mathbf{MQ} \end{bmatrix}^{k-1} = \begin{bmatrix} J_{P\theta} & J_{PV} \\ J_{Q\theta} & J_{QV} \end{bmatrix}^{k-1} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \theta \\ \Delta V/V \end{bmatrix} \quad (20)$$

Donde la matriz jacobiana se compone de cuatro submatrices, que representan las derivadas de las ecuaciones de potencia respecto a los argumentos y los módulos de las tensiones nodales.

$J_{P\theta}$:

$$J_{P\theta_{ii}} = \frac{\partial P_{c_i}}{\partial \theta_i} = - \sum_{j \neq i} V_i \cdot V_j \cdot (G_{ij} \cdot \text{sen} \theta_{ij} - B_{ij} \cdot \text{cos} \theta_{ij}) = -Q_{c_i} - V_i^2 \cdot B_{ii} \quad (21)$$

$$J_{P\theta_{ij}} = \frac{\partial P_{c_i}}{\partial \theta_j} = V_i \cdot V_j \cdot (G_{ij} \cdot \text{sen} \theta_{ij} - B_{ij} \cdot \text{cos} \theta_{ij}) = J_{QV_{ij}} \quad (22)$$

J_{PV} :

$$\begin{aligned} J_{PV_{ii}} &= V_i \cdot \frac{\partial P_{c_i}}{\partial V_i} \\ &= 2 \cdot V_i^2 \cdot G_{ii} \\ &\quad + \sum_{j \neq i} V_i \cdot V_j \cdot (G_{ij} \cdot \text{cos} \theta_{ij} + B_{ij} \cdot \text{sen} \theta_{ij}) = P_{c_i} + V_i^2 \cdot G_{ii} \end{aligned} \quad (23)$$

$$J_{PV_{ij}} = V_j \cdot \frac{\partial P_{c_i}}{\partial V_j} = V_i \cdot V_j \cdot (G_{ij} \cdot \text{cos} \theta_{ij} + B_{ij} \cdot \text{sen} \theta_{ij}) = -J_{Q\theta_{ij}} \quad (24)$$

$J_{Q\theta}$:

$$J_{Q\theta_{ii}} = \frac{\partial Q_{c_i}}{\partial \theta_i} = \sum_{j \neq i} V_i \cdot V_j \cdot (G_{ij} \cdot \cos \theta_{ij} + B_{ij} \cdot \sen \theta_{ij}) = P_{c_i} - V_i^2 \cdot G_{ii} \quad (25)$$

$$J_{Q\theta_{ij}} = \frac{\partial Q_{c_i}}{\partial \theta_j} = -V_i \cdot V_j \cdot (G_{ij} \cdot \cos \theta_{ij} + B_{ij} \cdot \sen \theta_{ij}) = -J_{PV_{ij}} \quad (26)$$

J_{QV} :

$$\begin{aligned} J_{QV_{ii}} &= V_i \cdot \frac{\partial Q_{c_i}}{\partial V_i} \\ &= -2 \cdot V_i^2 \cdot B_{ii} \\ &\quad + \sum_{j \neq i} V_i \cdot V_j \cdot (G_{ij} \cdot \sen \theta_{ij} - B_{ij} \cdot \cos \theta_{ij}) = Q_{c_i} - V_i^2 \cdot B_{ii} \end{aligned} \quad (27)$$

$$J_{QV_{ij}} = V_j \cdot \frac{\partial Q_{c_i}}{\partial V_j} = V_i \cdot V_j \cdot (G_{ij} \cdot \sen \theta_{ij} - B_{ij} \cdot \cos \theta_{ij}) = J_{P\theta_{ij}} \quad (28)$$

De cara a la convergencia del flujo de cargas resulta fundamental la elección del punto inicial. De esta puede depender que el algoritmo utilizado para su resolución encuentre solución alguna o diverja. Cuanto más alejando este de la solución más iteraciones harán falta hasta alcanzarla. Cuando el flujo de cargas se está realizando a partir de un sistema cuya situación ha cambiado, típicamente resulta un buen punto de partida la situación de operación previa. Si esto no es así, un típico punto de partida es el denominado perfil plano, esto es, fijar las tensiones de los nudos en valor 1 p.u y sus ángulos a cero. Con respecto a la solución final, esta siempre será una aproximación. Se considerará que el proceso iterativo ha finalizado cuando los desvíos de potencia sean menores que cierta tolerancia fijada. Es decir, no serán cero, pero sí muy pequeños (típicamente inferiores a 1 MW y 1 Mvar en redes de transmisión reales).

1.3 Revisión de métodos de resolución del problema de flujo de cargas

Tal y como se ha introducido en la sección anterior, el sistema de ecuaciones del problema de flujo de cargas exige el uso de métodos numéricos para su resolución. Además, dado que el problema consiste en un sistema de ecuaciones no lineales, con funciones parabólicas y trigonométricas, todos los métodos de resolución desarrollados se basan en procesos iterativos. Se tratará en este apartado de recopilar algunos métodos que en la literatura se han propuesto con objeto de hacer este proceso más eficaz, rápido o para afrontar el problema de los flujos de cargas infactible o divergentes.

Tal y como se explica en [2], antes de los ordenadores digitales, las soluciones al flujo de cargas se obtenían utilizando analizadores de red. La primera solución digital automática surge en 1956, en forma de métodos iterativos de matriz de admitancias, con mínimos requerimientos computacionales. Dado que su convergencia era lenta, surgen métodos de la matriz de impedancias, con menor velocidad pero mayor fiabilidad. Después, aparece el método Newton-Raphson, con grandes propiedades de convergencia. Los esfuerzos se centran a partir de este momento en reducir sus requerimientos computacionales.

Así pues, las primeras técnicas para la resolución del flujo de cargas se basaban en el método de Gauss-Seidel (GS) para la resolución de sistemas de ecuaciones no lineales, siendo estas desarrolladas en la década de 1950. No obstante, actualmente la mayor parte de las técnicas de resolución del flujo de cargas están basadas en el método de Newton-Raphson, que se explicará más adelante. Este método se basa en la resolución de la aproximación lineal del sistema de ecuaciones de forma sucesiva, igualándola a cero. Este método es tan utilizado porque su convergencia es más rápida y más robusta que la del GS. Sin embargo, debido al trabajo computacional que supone triangular la matriz jacobiana del problema en cada iteración, este método tardó en hacerse popular. El desarrollo de técnicas de matrices dispersas agilizó este tipo de procesos, con grandes sistemas de ecuaciones lineales cuasi-vacíos y simplificaciones que permitía realizar formulaciones desacopladas, como el método desacoplado rápido, también desarrollado más adelante en este documento. Aun así, la mayoría de métodos se basan en principios similares. Estiman una situación inicial y aplican de forma iterativa actualizaciones a esta estimación para acercarse a la solución.

En [3] se describe un método sencillo, fiable y rápido de solución del problema de flujo de cargas, resultando muy útil para análisis de contingencias sin demasiadas exigencias computacionales. Se basa en desacoplar $MW - \theta$ y $Mvar - V$. El método se basa en el Newton-Raphson en coordenadas polares, realizando el desacoplo. Así, los desvíos de potencia activa dependen de los argumentos de los nudos y los de reactiva de las tensiones. Se eliminan de las ecuaciones de potencia activa los elementos afectados principalmente por flujos de reactiva, las como reactancias shunt, y de las ecuaciones de reactiva los efectos de cambios de ángulo en transformadores. Además se eliminan los efectos de las resistencias en serie de las ecuaciones de activa. Las matrices que relacionan los desvíos de potencia con los errores de estimación de las variables de estado contienen solo admitancias y son constantes. A este método se le pueden aplicar ajustes para hacerlo compatible con cambios de toma de transformadores, intercambios entre áreas, y límites de Q y V en generadores y cargas respectivamente.

Los métodos de resolución del problema han evolucionado buscando siempre mayor robustez y velocidad en la convergencia aunque no siempre se puede garantizar que exista una solución alcanzable. Al tratar de resolver el flujo de cargas puede ocurrir que la solución diverja u oscile en el proceso, ya que la convergencia no tiene por qué darse. Estos casos son aquellos en los que el problema está mal condicionado. De cara a analizar una red eléctrica, esto puede deberse a tensiones de consigna de nudos de generación ajustadas mal, demasiada carga en el sistema, grandes diferencias entre generación y demanda en sistemas interconectados, resistencias muy grandes en las líneas en comparación con las impedancias...

Matemáticamente el origen de este mal condicionamiento del sistema de flujo de cargas es la propia no linealidad de las ecuaciones del problema. Esto hace que el problema pueda ser factible, con dos soluciones reales distintas, o no factible, con dos soluciones complejas diferentes. Estas regiones de factibilidad o infactibilidad se encuentran separadas por una frontera tipo silla-nodo. En esta frontera el problema tiene una solución doble y única, siendo su jacobiano singular. De la distancia a la que se encuentre de esta frontera de factibilidad del punto de operación depende lo grande o pequeño que sea el ratio de convergencia, siendo este mayor cuanto más lejos esté el punto de esta frontera. Así, esta falta de convergencia puede venir causada por la inexistencia de una solución al problema o porque el punto de partida de las iteraciones está fuera del mencionado ratio de convergencia de la solución buscada. De la estimación inicial utilizada para comenzar el proceso iterativo puede depender que se alcance una solución o no, ya que si esta se encuentra fuera del ratio de convergencia, la solución divergirá. Por ello, el ratio de convergencia depende de la propia solución del problema y del método usado para alcanzarla.

En el espacio de parámetros del problema de flujo de cargas se pueden determinar dos regiones diferentes. La región factible (puntos de operación 1, 2 y 3) es aquella en la que un punto de operación del sistema existe y la infactible (punto 4) es aquella en la que no existe operación posible. Las dos regiones están separadas por la llamada frontera de factibilidad. La región factible a su vez estará dividida en diferentes regiones según el punto de operación actual del sistema y su respuesta ante contingencias: la región segura (punto 1), donde se satisface la carga sin superar límite alguno tanto en operación normal como de contingencia; la región de alerta (punto 2), donde en situación de contingencia podrían violarse algunos límites; y la región de emergencia (punto 3) donde algún límite es violado para suministrar la carga necesaria. El objetivo de la resolución del flujo de cargas es buscar la zona segura de operación.

Pueden ocurrir tres situaciones problemáticas para diferentes niveles de carga. El nivel puede estar dentro de la zona factible pero el flujo de cargas no genera una solución, a pesar de que la haya. Esto puede ocurrir por problemas numéricos en un sistema mal condicionado o porque la carga va aumentando sin que la generación también lo haga. En segundo lugar, la carga puede estar en la zona no factible y que no exista ningún punto operativo, algo que puede ocurrir tras grandes perturbaciones en el sistema o enormes aumentos de carga. Además, puede ser que el sistema tenga múltiples soluciones.

Por ello, hacen falta métodos para aumentar la factibilidad de los problemas o para indicar la distancia hasta la frontera de factibilidad si el problema está en la zona infactible. La Figura 2 muestra estas regiones.

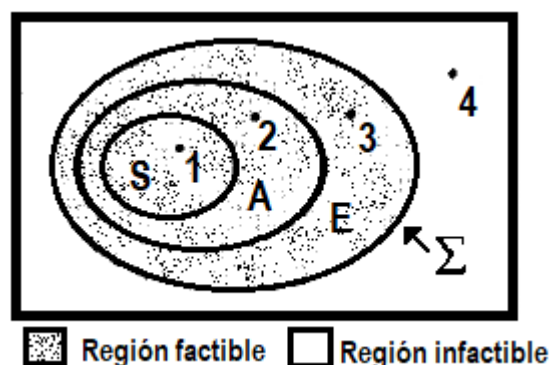


Figura 2: Regiones en el espacio de variables de un sistema de ecuaciones

Para evitar la no convergencia a la hora de resolver este tipo de problemas mediante el método Newton-Raphson estándar, numerosos autores le han introducido a este algunas mejoras.

Clements, et al., incorporan en [4] el llamado “factor de aceleración/deceleración” en el vector de error de las variables de estado al usar el método de Newton-Raphson para la convergencia de las ecuaciones del flujo de cargas. Este factor se ve controlado por los desvíos de potencia a lo largo del proceso iterativo. Otros autores han mejorado este factor con objeto de acelerar la convergencia de la solución y poder utilizarlo como índice de factibilidad del problema. En [5] se propone un método para la resolución del flujo de cargas muy simple y que apenas añade esfuerzo computacional al aplicarlo al Newton-Raphson tradicional. Con este, la solución nunca diverge y es sencillo, partiendo de la estimación inicial, saber si la solución existe.

Dado que cuando una solución diverge u oscila se requiere una forma de saber si no hay solución o si las condiciones iniciales han condicionado que no exista una, aquí se propone un método no divergente de resolución del problema de flujo de cargas, sin aproximaciones matemáticas. Se basa

en el hecho de que las aproximaciones por serie de Taylor se expresan hasta el tercer término, y el término final tiene la misma forma que el primero pero con diferente variable.

El método propuesto aquí se basa en el Newton-Raphson y, una vez calculado el vector de error de las variables de estado, computa el multiplicador óptimo para cada iteración. El nuevo vector de error de las variables de estado será el obtenido multiplicado por este factor. El factor se obtiene multiplicando, en el desarrollo de Taylor de tres términos, el vector de actualización de variables por el multiplicador y minimizando la función igualada a cero. Al derivar respecto a este se obtiene una ecuación cúbica que se resuelve mediante la fórmula analítica de Cardan. Una de las tres raíces del polinomio arrojará el factor óptimo, siendo esta la menor en el caso de que todas sean reales.

A raíz de este trabajo, se presenta en [6] un método de resolución del problema de flujo de cargas mediante un Newton-Raphson de matriz jacobiana constante. Esto hace que el método sea no divergente debido a la aplicación de la teoría del multiplicador óptimo para el control de ajuste del tamaño de paso.

Con el objetivo de saber si un problema de flujo de cargas tiene un punto de operación factible para unas condiciones dadas se han desarrollado métodos basados en la teoría del multiplicador óptimo y los métodos de continuación. Así, se han desarrollado técnicas de Newton-Raphson no divergente mediante multiplicador óptimo y coordenadas rectangulares, métodos de optimización del tamaño de paso en polares o técnicas robustas de continuación para obtener la solución del flujo de cargas en cualquier punto de la curva P-V [7].

En el Newton-Raphson tradicional en cada iteración el sistema de ecuaciones se linealiza en un punto y se obtiene así la actualización de las variables de estado. La idea clave de la teoría del multiplicador óptimo es usar este factor para modificar las iteraciones y mejorar la convergencia. En este documento se propone un método en coordenadas polares, donde la matriz jacobiana se evalúa al principio y se mantiene constante durante el proceso iterativo. Cuando los límites de reactiva de un nudo PV se alcanzan, este se convierte en un nudo PQ. En cada iteración se obtiene el vector de actualización de variables de estado y se transforma a coordenadas rectangulares. Al igual que en el método de [5] se obtienen una serie de vectores que generan una ecuación cúbica, cuya resolución arroja el multiplicador óptimo, aunque estos vectores tienen un cálculo diferente. En cada iteración, las variables de estado se actualizan multiplicando el vector de error de estas por el multiplicador obtenido. Este proceso se desarrolla también para aplicarse en el flujo de cargas desacoplado rápido.

En [8] se desarrolla un análisis crítico de tres métodos de optimización del factor de aceleración/deceleración para la resolución del problema de flujo de cargas en coordenadas polares. Estos se fundamentan en la computación de un multiplicador escalar en cada iteración, que se multiplica por el vector de corrección de voltajes para minimizar el desvío de potencias en forma de función cuadrática.

Existen dos enfoques con respecto a los métodos de flujo de cargas no convencionales. Los primeros son los métodos de continuación. Estos resuelven sistemas de ecuaciones de flujo de cargas parametrizados y un parámetro indica si el sistema tiene o no solución. Otra opción consiste en considerar la solución de las ecuaciones de carga un problema de programación no lineal. Como ya se ha comentado, en [5] se realiza una optimización del tamaño de paso mediante un factor que se computa en cada iteración y se multiplica por el vector de actualización de voltajes para minimizar una función cuadrática de desvío de potencia.

El primer método descrito es el expuesto en [9]. En este caso se considera el problema como uno de programación no lineal. La derivada de la ecuación del factor de optimización de tamaño de

paso tiene en cuenta los módulos y argumentos de las tensiones de nudo en coordenadas polares. La expansión de las ecuaciones de flujo de cargas en serie de Taylor se ejecuta hasta términos de segundo orden. En cada iteración se multiplica el vector de actualización de las variables de estado por un multiplicador de optimización de tamaño de paso, computado para minimizar el desvío cuadrático de potencias. Para sistemas bien condicionados este factor toma valor 1, aproximándose a cero cuando el vector de voltajes no puede ser actualizado para minimizar los desvíos de potencia. Esto es lo mismo que se hace en [5] solo que en coordenadas polares.

El segundo método mencionado es el estudiado en [10]. Su diferencia con el anterior es que en este caso, al obtener el vector de actualización de variables de estado, este se transforma de coordenadas polares rectangulares.

El tercero es el método planteado en [11] que resuelve las ecuaciones del flujo de cargas como un problema de minimización cuya función objetivo es la suma de los cuadrados de los errores, añadiendo el factor de aceleración/deceleración al vector de variables de estado. Obtiene el valor de la función objetivo en tres puntos, siendo estos el inicial y el inicial más/menos un cierto incremento. A partir de estos puntos genera una parábola que es función del mencionado factor. El mínimo de esta parábola arrojará el valor óptimo del factor. Por tanto, la función a minimizar es una aproximación cuadrática elaborada mediante la computación de tres puntos de la original.

El primer método presenta mejores resultados en todo tipo de sistemas, además de mejores eficiencias computacionales. El tercero presenta resultados deficientes en sistemas mal condicionados.

Estos métodos de resolución garantizan que la solución del sistema de ecuaciones del flujo de cargas no diverja, pero en los casos en los que el problema no tiene solución no dan ninguna medida de los cerca o lejos que se está de la región de factibilidad, lo que supone un problema a la hora de operar las redes.

Una metodología para resolver el problema de flujo de cargas y además, en caso de no existir solución, entregar una medida de la infactibilidad del problema se plantea en [12], desarrollando el problema donde la solución será la del problema original o el punto de la frontera de factibilidad más próximo, en caso de no existir solución. Como medida de la infactibilidad del sistema se toma la distancia en el espacio de los parámetros del problema desde el punto de operación deseado y el resoluble más cercano. De la diferencia entre estos dos puntos se derivará el cambio óptimo en los parámetros del sistema. El método está basado en el algoritmo Newton-Raphson, lo que aporta eficiencia computacional y robustez de cálculo.

Como se ha discutido anteriormente, en ocasiones, el punto de operación buscado se encuentra en la zona de no factibilidad. Una forma de mitigar esto es el uso de factores de escala como el multiplicador óptimo o técnicas heurísticas para evitar que el flujo de potencia diverja, garantizando que la suma de los cuadrados de los desvíos de potencia decrece en cada iteración. Este método centra su atención en los casos en los que no solo el problema de flujo de cargas no converge, si no que no tiene solución.

Basándose en [5], aquí también se usa el multiplicador óptimo escalar (μ), de modo que cuando una dirección del vector de actualización de variables es hallada usando el jacobiano y los desvíos de potencia, μ se utiliza para minimizar una función de coste en la dirección hallada. Esta función es la mitad de la norma de las ecuaciones de desvío del flujo de cargas. μ se obtiene sin apenas esfuerzo computacional adicional. El algoritmo de Newton-Raphson se modifica ligeramente para hacer que el vector de actualización de las variables de estado se multiplique por este factor. Así se evita la divergencia de la solución ya que la función de coste decrece en cada iteración, mientras que μ tiende a 1.

Como medida de infactibilidad del problema se toma la distancia en el espacio de parámetros entre el punto de operación sin solución y la frontera de la zona de factibilidad. Si el punto tuviese solución se utilizaría la norma euclidiana, pero en los caso sin solución el proceso es diferente. Se define la función de coste que es mayor que cero siempre y se iguala a cero en el punto solución del problema. En los puntos sin solución del problema existirá un vector de variables de estado correspondiente al mínimo valor de la función de coste. Este punto, donde el jacobiano es singular, se encuentra sobre la frontera de factibilidad. Esto implica que el punto de la frontera más cercano es el correspondiente al vector de variables de estado antes mencionado. Para hallar la dirección óptima de movimiento en el espacio de parámetros con objeto de devolver la factibilidad al sistema se debe tratar de hacer el desvío de potencias en este punto de operación nulo. Formalmente esto implica que este desvío es el autovector izquierdo del autovalor nulo del jacobiano en el punto. La medida de la no factibilidad del problema será la distancia euclidiana del desvío en este punto. El método presentado aquí permite hallar el punto frontera descrito. Se determina la función de coste antes mencionada y se utiliza el multiplicador óptimo para aplicar un algoritmo Newton-Raphson rectangular. El problema sin solución converge hacia cierto punto de jacobiano singular. El punto frontera buscado sería el del sistema con estas variables de estado si la frontera fuese plana en el espacio de parámetros. Si esta no lo es, el punto frontera se determina a partir del punto mencionado y la proyección normalizada del autovector izquierdo del autovalor nulo del jacobiano en este punto. Este método es una aproximación que funcionará mejor cuanto más plana sea la frontera, lo que determinará su ratio de convergencia.

Se deduce, por tanto, que el problema de flujo de cargas no siempre tiene solución. En estos casos la operación o planificación del sistema a estudiar resultara imposible. Cuando en un sistema se da este caso será necesario devolver el problema base a la zona de factibilidad. Para ello, el agente operador del sistema deberá actuar sobre este mediante el control de tensiones (de consigna de generadores, baterías de condensadores/reactancias, regulando tomas de transformadores), redespachando la generación de potencia activa, etc. En los casos de más extrema emergencia se llegará a deslastrar carga del sistema para mantener el equilibrio de frecuencia. Evidentemente, estas acciones deberán llevarse a cabo de la forma más óptima y eficiente posible a la hora de resolver los problemas que puedan darse en la red.

Un método basado en autovectores para devolver la factibilidad a un problema de flujo de cargas es formulado en [13], basado en la localización, a partir del despacho especificado del sistema, del punto factible más cercano en el plano de potencias. El punto hallado pertenece a la frontera de factibilidad y es establecido mediante la norma euclídea, valiendo esta también como medida de la no factibilidad del problema. Esta frontera es, como se ha explicado anteriormente, el lugar geométrico de las bifurcaciones silla-nodo del caso de estudio. Así, utilizando lo expuesto en [12], se busca la dirección óptima para el redespacho, basándose en el autovector izquierdo del autovalor singular del jacobiano en el punto de la zona de factibilidad del sistema más cercano al mencionado despacho consigna.

También basado en la medida euclídea de infactibilidad propuesta en el método anterior se expone en [14] un algoritmo para la devolución del problema de flujo de cargas a la zona de factibilidad con mínimo deslastre de carga. Existen aquí dos opciones a la hora de llevar a cabo las necesarias acciones de control sobre el sistema, para devolverlo a su factibilidad. Una opción es seguir una metodología heurística basada en factores de participación y la capacidad restante de las acciones de control sobre el sistema. Estos factores son calculados a partir de las sensibilidades de la distancia existente a la región de factibilidad del problema a partir de las acciones de control del sistema. Otra opción consiste en utilizar la programación no lineal para minimizar el impacto total de acciones de control utilizadas en base a sus respectivos costes. En este caso las restricciones del

problema obligan a la disminución de la distancia euclídea respecto a la región de factibilidad y los límites de funcionamiento de los elementos de control del sistema.

Cabe mencionar también el caso de [15], donde se desarrolla otro método de devolución de la factibilidad del sistema con mínimo deslastre basándose, en este caso, en técnicas de Flujo de Potencia Óptimo, OPF. Se busca optimizar el problema mediante la minimización de la carga deslastrada, que es la función objetivo del caso, mediante el empleo de técnicas de punto interior y barreras logarítmicas. Este algoritmo controla la carga por medio de un vector de parámetros de escala. Estos representan los diferentes nudos de demanda y sus valores oscilan entre uno, que supone deslastre total en el nudo, y cero, es decir, no se deslastra carga. Como restricciones de igualdad aparecen las ecuaciones del problema de flujo de cargas, y las de desigualdad serán los límites superior e inferior de los parámetros de escala referentes al deslastre. El punto solución de este problema será factible y requerirá el mínimo deslastre de carga. Las variables del problema serán las acciones de control sobre el sistema que puedan llevarse a cabo, referentes a las tensiones especificadas en los grupos generadores, transformadores con regulación en carga, el redespacho de potencia, etc.

En [16] se propone otro algoritmo también basado en OPF. En este caso, se construye la función objetivo del problema a partir de la suma cuadrática de las ecuaciones de balance de potencia en los nodos en los que se encuentre carga susceptible de ser deslastrada. En este caso las restricciones de igualdad serán estas mismas ecuaciones de balance de potencia, pero para el resto de nudos del sistema (nudos con potencia inyectada ≥ 0). Las de desigualdad vendrán dadas por los límites técnicos de los elementos del sistema, esto es, capacidades de las líneas, potencias máximas de generadores... Estas últimas son solo necesarias si se desea que el punto de operación sea, además de factible, seguro para el sistema. Se trata, por tanto, de un problema de optimización no lineal que se resuelve usando el algoritmo de punto interior de [17].

Entre las propuestas más recientes que se encuentran en la literatura técnica, destaca el método de flujo de cargas de incrustación holomorfa (HELM) propuesto en [18]. Aquí se extiende el método de flujo de carga de incrustación holomorfa a sistemas en continua, manteniendo todas las propiedades constructivas que posee en sistemas en corriente alterna. Este método acoge de forma eficiente no-linealidades introducidas en redes de distribución malladas por las curvas I-V de determinados dispositivos, como en el caso de paneles solares. La novedosa técnica HELM es utilizada para analizar el problema del flujo de cargas en corriente alterna. Está basada en una técnica diseñada para tratar con las no linealidades del problema de flujo de cargas. Sin embargo, debido a que aún es un campo incipiente, esta técnica no está muy desarrollada para redes malladas en corriente continua. A este problema se le denomina típicamente análisis no lineal del estado estacionario.

2 Formulación de un método de resolución del flujo de cargas basado en aproximaciones de segundo orden

En esta sección se presenta un método de resolución del problema de flujo de cargas basado en el Newton-Raphson en el que, en cada iteración, se utilizará no solo una aproximación de primer orden de las ecuaciones no lineales del sistema, sino que se empleará también un término de segundo orden. Así, se espera obtener un algoritmo que requiera menor número de iteraciones manteniendo la robustez del Newton-Raphson tradicional.

2.1 Reformulación del problema en forma de homotopía

Como se ha podido comprobar, diversos autores han abordado en la literatura métodos de reformulación del algoritmo Newton-Raphson. La atención de este proyecto se centra en aquellos métodos que emplean la homotopía. Es el objetivo de este proyecto contribuir a la búsqueda de un algoritmo de resolución del problema de flujo de cargas que requiera menor número de iteraciones, que se desarrollará en forma de homotopía.

Esta reformulación consiste en la introducción en el sistema de ecuaciones original una nueva variable λ , dando lugar a un nuevo sistema. Este parámetro sirve para definir la distancia entre el punto inicial del proceso iterativo ($\lambda = 0$) hasta la solución del problema ($\lambda = 1$). Así, en el espacio de las variables de estado se generan un conjunto de trayectorias en función de λ . Obtener los diferentes puntos de dichas trayectorias proporciona finalmente la solución del problema.

La reformulación homotópica se desarrollará en este apartado. El método Newton-Raphson tradicional se basa en utilizar los desvíos de potencia para crear un sistema de ecuaciones no lineales que dependen de las variables de estado. Al comienzo del proceso se estima es estado inicial de las variables de estado del sistema. En cada iteración este sistema de ecuaciones se desarrolla en serie de Taylor y sus ecuaciones se aproximan por su término de primer orden, es decir, se utiliza una aproximación lineal del sistema. Se obtiene la solución de este, que no será la del sistema original. El vector obtenido de error de las variables de estado se utiliza para actualizar la estimación de estas y este proceso se repite las iteraciones necesarias para que los desvíos de potencia sean lo más parecidos a cero posible. En ocasiones, el sistema no tiene solución y la solución no converge u oscila.

Por tanto, la formulación del sistema, cuyas ecuaciones son los desvíos de potencia en cada nudo será:

$$g_i(x) = S_{e_i}(x) - S_{c_i}(x) = 0 \quad (29)$$

Donde S es la potencia aparente inyectada en cada nudo i . Para resolverlo, se parte de una estimación inicial del estado de estas variables x y se aproxima la función por serie de Taylor de primer orden, dado un punto de operación x^0 tal que $|f(x^0)| \neq 0$.

$$g_i(x) = 0 \approx g_i(x^0) + \sum_j \frac{d g(x^0)}{d x_j} \cdot \Delta x_j \quad (30)$$

Escrito en notación matricial y aplicando el Newton-Raphson al problema de flujo de cargas, esta primera iteración sería:

$$\begin{bmatrix} \Delta P(V, \theta) \\ \Delta Q(V, \theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \Delta P(V^0, \theta^0) \\ \Delta Q(V^0, \theta^0) \end{bmatrix}^{k^0} + \left. \begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta P}{\partial \theta} & \frac{\partial \Delta P}{\partial V} \\ \frac{\partial \Delta Q}{\partial \theta} & \frac{\partial \Delta Q}{\partial V} \end{bmatrix} \right|_{V^0, \theta^0} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \theta \\ \Delta V \end{bmatrix} \quad (31)$$

Se aclara aquí que $\left[\frac{\partial x}{\partial g}\right] = \left[\frac{\partial g}{\partial x}\right]^{-1}$. Al linealizar el sistema de ecuaciones, en cada iteración se obtiene un vector de actualización de las variables de estado, mediante la matriz jacobiana del sistema:

$$\Delta x_j = -\Sigma_i \cdot \frac{d x_j}{d g_i(x^0)} \cdot g_i(x^0) \quad (32)$$

Este proyecto abordará el problema de flujo de cargas mediante el método de Newton-Rhapson homotópico, de modo que se utiliza un nuevo sistema de ecuaciones $h_i(x, \lambda) = 0$.

Siendo $g_i(x) = S_e - S_c(x)$, $g_{0i}(x) = S_0 - S_c(x)$, S_e la potencia del despacho especificado y S_0 la potencia en el despacho inicial utilizado para comenzar el proceso iterativo, se propone la reformulación siguiente:

$$h(x, \lambda) = \lambda \cdot g + (1 - \lambda) \cdot g_0 = \dots = [\lambda(S_e - S_0) + S_0] - S_c(x) = 0 \quad (33)$$

De modo que:

- Cuando λ es 0 (Comienzo del proceso de cálculo), obtenemos la solución x^0 , correspondiente con el despacho S_0 .
- Cuando λ es 1 (Solución final) obtenemos la solución correspondiente con el despacho real S_e .

Se genera de este modo una dependencia de las variables de estado respecto a lambda, $x_j = x_j(\lambda)$, de modo que evolucionan desde el punto inicial a la solución final siguiendo una trayectoria concreta en el plano x - λ . Estas trayectorias se representan en la Figura 3.

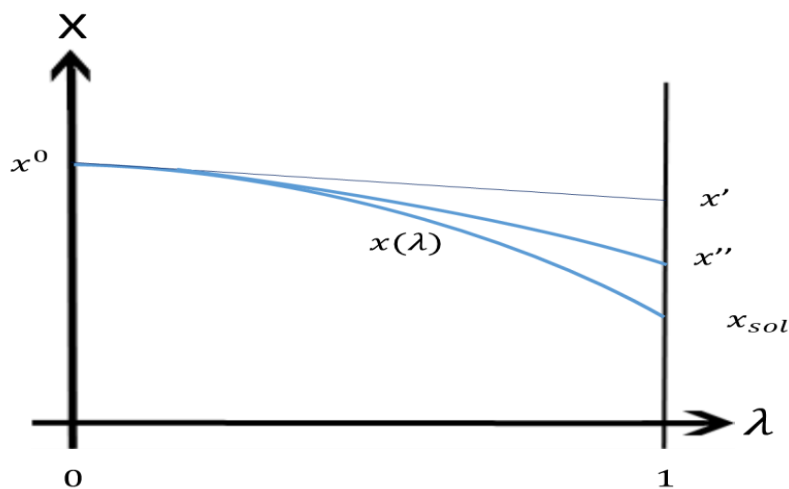


Figura 3: Ejemplo de trayectoria $x(\lambda)$ y sus aproximaciones de primer y segundo orden

Por tanto, se pueden definir las trayectorias de cada variable de estado en función de λ . En cada iteración, cuando $\lambda = 0$, las variables se encuentran en su estimación inicial para esta iteración. Las variables evolucionan en función de λ hasta su valor final, solución del problema.

No obstante, este método se basará en el Newton-Raphson y consistirá en obtener aproximaciones de estas trayectorias para obtener valores más cercanos a la solución final en cada iteración. En el caso de usar aproximaciones lineales de las trayectorias, en cada iteración se partiría de x^0 y se aproximaría la trayectoria por su derivada respecto a λ . Esto arrojaría como solución x' , más cercana a la solución definitiva que x^0 pero aún no la solución definitiva. Para continuar hasta resolver el problema, se toma x' como nueva x^0 en la siguiente iteración y se repite el proceso hasta actualizar las variables de estado x lo suficiente como para que los desvíos de potencia sean suficientemente pequeños.

Sin embargo, se pueden obtener las derivadas $d^n x/d\lambda^n$ del orden deseado para aproximar estas trayectorias. Cuanto mayor sea la cantidad de órdenes utilizados, mayor será la velocidad del proceso, pues se necesitarán menor número de iteraciones para alcanzar la solución final del problema. De hecho, si se utilizasen infinitos órdenes se estaría hallando la propia trayectoria. Sin embargo, esto podría suponer pérdida de eficiencia debido a requerimientos computacionales elevados. En cualquier caso, aunque se podrían obtener las derivadas que se desearan de las trayectorias respecto a λ , esto va más allá del alcance de este proyecto. Por tanto, aunque se dispone de las trayectorias $x(\lambda)$ y para aproximar estas podrían usarse tantas derivadas como se quisiera, en este proyecto se propone un algoritmo en el que se utilizarán la primera y la segunda derivada de las variables respecto al parámetro λ .

Al utilizar también la segunda derivada de las trayectorias en cada iteración, se obtiene x'' , más cercana aún que x' a la solución final, siendo esta una aproximación más exacta y obteniéndose un algoritmo más rápido sin apenas sacrificar esfuerzo computacional.

2.2 Cálculo de las derivadas de las trayectorias $x(\lambda)$

Se puede demostrar que si se emplean solamente aproximaciones de primer orden de estas trayectorias para la resolución del problema la solución obtenida es idéntica a la resultante mediante el empleo del método Newton-Raphson tradicional. Sin embargo, la reformulación en forma de homotopía permite además obtener derivadas superiores a las de primer orden de las trayectorias de las variables de estado. Esto permite formular un algoritmo de flujo de cargas en el que para cada iteración se obtendría la actualización de las variables de estado empleando aproximaciones parabólicas de sus trayectorias, acelerando por tanto el proceso de convergencia. Por tanto, para poder desarrollar el algoritmo propuesto se necesitan las derivadas de primer y segundo orden de las variables de estado con respecto al parámetro λ .

En primer lugar, para obtener la primera derivada respecto a λ hay que tener en cuenta que en cada iteración se cumple que $\Delta\lambda = (1 - 0)$, ya que λ evolucionará entre sus valores 1 y 0. Se desarrolla la trayectoria de $x(\lambda)$ en serie de Taylor, hasta primer orden:

$$\Delta x = x_j^{sol} - x_j^0 \approx \frac{dx_j}{d\lambda} \cdot \Delta\lambda \approx \frac{dx_j}{d\lambda} \cdot (1 - 0) = \left. \left(\frac{dx_j}{d\lambda} \right) \right|_{\lambda=0} \quad (34)$$

Este Δx es el error de estimación que sumado a la estimación inicial x^0 arroja el valor de x' buscado. Para hallar Δx se linealiza $h_i(x, \lambda)$ en el punto inicial de la iteración, donde $(x, \lambda) = (x^0, 0)$.

$$h_i(x, \lambda) = 0 \quad (35)$$

$$dh_i = 0 = \sum_j \frac{\partial h_i}{\partial x_j} \cdot dx_j + \frac{\partial h_i}{\partial \lambda} \cdot d\lambda \quad (36)$$

Por su definición, la derivada del sistema de ecuaciones $h_i(x, \lambda)$ con respecto a λ es el sistema de ecuaciones no lineal original evaluado en la situación inicial de las variables de estado.

$$h_i(x, \lambda) = g_i(x) - (1 - \lambda) \cdot g_i(x^0) \rightarrow \frac{\partial h_i}{\partial \lambda} = g_i(x^0) \quad (37)$$

Además, la derivada del sistema $h_i(x, \lambda)$ respecto a las variables de estado es igual a la del sistema original, ya que el término que contiene λ no depende de las variables de estado, sino de sus valores iniciales en cada iteración.

$$\frac{\partial h_i}{\partial x_j} = \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \quad (38)$$

Y dado que $\Delta\lambda = 1$, se deduce que:

$$dh_i = 0 = \sum_j \frac{\partial h_i}{\partial x_j} \cdot dx_j + \frac{\partial h_i}{\partial \lambda} \cdot d\lambda \rightarrow \frac{dx_j}{d\lambda} = - \sum_i \frac{\partial x_j}{\partial g_i} \cdot g_i(x^0) \quad (39)$$

De lo expuesto anteriormente deducimos que: $\Delta x_j = \frac{dx_j}{d\lambda} \cdot \Delta\lambda$, siendo $\Delta\lambda = (1 - 0)$ y $\frac{dx_j}{d\lambda} = - \sum_i \frac{\partial x_j}{\partial g_i} \cdot g_i(x^0)$.

$$\Delta x_j = - \sum_i \frac{\partial x_j}{\partial g_i} \cdot g_i(x^0) \quad (40)$$

Este es precisamente el resultado que se obtiene en el método tradicional al actualizar las variables de estado. Por ello, queda comprobado que el resultado arrojado es equivalente al Newton-Raphson tradicional, al tratarse de una aproximación de primer orden.

De este modo, se desea en este proyecto comprobar que la aproximación lineal de la trayectoria $x(\lambda)$ alcanzará en mayor número de iteraciones el valor x_{sol} que una aproximación parabólica (de segundo orden). Esto es fácil de intuir gráficamente en el diagrama expuesto en la sección anterior, ya que la parábola que parte del punto inicial intersecará a la recta de $\lambda = 1$ en un punto más cercano a x_{sol} debido a su curvatura.

Dado que podemos obtener las derivadas de $x(\lambda)$ de cualquier orden, se utilizarán para el desarrollo de este algoritmo la primera y la segunda respecto al parámetro λ . Si aproximamos hasta el segundo orden:

$$d^2 h_i = 0 \quad (41)$$

$$d^2 h_i = 0 = \sum_j \frac{\partial h_i}{\partial x_j} \cdot d^2 x_j + \sum_k \sum_m \frac{\partial^2 h_i}{\partial x_n \cdot \partial x_k} \cdot dx_k \cdot dx_m + \sum_k \frac{\partial^2 h_i}{\partial x_k \partial \lambda} \cdot dx_k \cdot d\lambda + \frac{\partial^2 h_i}{\partial \lambda^2} \cdot d\lambda \quad (42)$$

Se sabe que $\sum_k \frac{\partial^2 h_i}{\partial x_k \partial \lambda} \cdot dx_k \cdot d\lambda = 0$ ya que h_i es lineal respecto λ . De la misma forma, $\frac{\partial^2 h_i}{\partial \lambda^2} \cdot d\lambda = 0$. Despejando se obtiene:

$$\frac{d^2 x_j}{d\lambda^2} = - \sum_k \sum_m \sum_i \frac{\partial x_j}{\partial h_i} \cdot \frac{\partial^2 h_i}{\partial x_k \cdot \partial x_m} \cdot \frac{dx_k}{d\lambda} \cdot \frac{dx_m}{d\lambda} \quad (43)$$

Por ende, la aproximación de segundo orden utilizada en cada iteración para resolver el problema de flujo de cargas será:

$$\Delta x_j = \frac{dx_j}{d\lambda} + \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2 x_j}{d\lambda^2} \quad (44)$$

Se aclara aquí que a diferencia de en el método Newton-Raphson tradicional antes expuesto, donde las actualizaciones con respecto a los módulos de la tensión eran en valores relativos a este, ahora las actualizaciones de las variables se hacen de forma directa y en valor absoluto. Como se ha demostrado, $\frac{dx_j}{d\lambda}$ se obtiene como:

$$\Delta x_j = - \sum_i \frac{\partial x_j}{\partial f_i} \cdot g_i(x^0) \quad (45)$$

Es decir, exactamente igual que en el algoritmo Newton-Raphson tradicional. Para obtener la derivada de segundo orden, $\frac{d^2 x_j}{d\lambda^2}$, se deben computar las siguientes derivadas:

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial P_i}{\partial \theta_i} \right)}{\partial \theta_i} = -V_i \cdot \sum_j V_j \cdot (G_{ij} \cdot \cos \theta_{ij} + B_{ij} \cdot \sen \theta_{ij}) \quad (46)$$

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial P_i}{\partial \theta_i} \right)}{\partial \theta_j} = -V_i \cdot V_j \cdot (-G_{ij} \cdot \cos \theta_{ij} - B_{ij} \cdot \sen \theta_{ij}) \quad (47)$$

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial P_i}{\partial \theta_j} \right)}{\partial \theta_i} = V_i \cdot V_j \cdot (G_{ij} \cdot \cos \theta_{ij} + B_{ij} \cdot \sen \theta_{ij}) \quad (48)$$

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial P_i}{\partial \theta_j} \right)}{\partial \theta_j} = V_i \cdot V_j \cdot (-G_{ij} \cdot \cos \theta_{ij} - B_{ij} \cdot \sen \theta_{ij}) \quad (49)$$

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial P_i}{\partial \theta_i} \right)}{\partial V_i} = - \sum_j V_j \cdot (G_{ij} \cdot \sen \theta_{ij} - B_{ij} \cdot \cos \theta_{ij}) \quad (50)$$

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial P_i}{\partial \theta_i} \right)}{\partial V_j} = -V_i \cdot (G_{ij} \cdot \sen \theta_{ij} - B_{ij} \cdot \cos \theta_{ij}) \quad (51)$$

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial P_i}{\partial \theta_j} \right)}{\partial V_i} = V_j \cdot (G_{ij} \cdot \text{sen}\theta_{ij} - B_{ij} \cdot \text{cos}\theta_{ij}) \quad (52)$$

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial P_i}{\partial \theta_j} \right)}{\partial V_j} = V_i \cdot (G_{ij} \cdot \text{sen}\theta_{ij} - B_{ij} \cdot \text{cos}\theta_{ij}) \quad (53)$$

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial P_i}{\partial V_i} \right)}{\partial \theta_i} = \sum_j V_j \cdot (-G_{ij} \cdot \text{sen}\theta_{ij} + B_{ij} \cdot \text{cos}\theta_{ij}) \quad (54)$$

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial P_i}{\partial V_i} \right)}{\partial \theta_j} = V_j \cdot (G_{ij} \cdot \text{sen}\theta_{ij} - B_{ij} \cdot \text{cos}\theta_{ij}) \quad (55)$$

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial P_i}{\partial V_j} \right)}{\partial \theta_i} = V_i \cdot (-G_{ij} \cdot \text{sen}\theta_{ij} + B_{ij} \cdot \text{cos}\theta_{ij}) \quad (56)$$

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial P_i}{\partial V_j} \right)}{\partial \theta_j} = V_i \cdot (G_{ij} \cdot \text{sen}\theta_{ij} - B_{ij} \cdot \text{cos}\theta_{ij}) \quad (57)$$

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial P_i}{\partial V_i} \right)}{\partial V_i} = 2 \cdot G_{ii} \quad (58)$$

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial P_i}{\partial V_i} \right)}{\partial V_j} = (G_{ij} \cdot \text{cos}\theta_{ij} + B_{ij} \cdot \text{sen}\theta_{ij}) \quad (59)$$

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial P_i}{\partial V_j} \right)}{\partial V_i} = (G_{ij} \cdot \text{cos}\theta_{ij} + B_{ij} \cdot \text{sen}\theta_{ij}) \quad (60)$$

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial P_i}{\partial V_j} \right)}{\partial V_j} = 0 \quad (61)$$

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial Q_i}{\partial \theta_i} \right)}{\partial \theta_i} = V_i \cdot \sum_j V_j \cdot (-G_{ij} \cdot \text{sen}\theta_{ij} + B_{ij} \cdot \text{cos}\theta_{ij}) \quad (62)$$

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial Q_i}{\partial \theta_i} \right)}{\partial \theta_j} = V_i \cdot V_j \cdot (G_{ij} \cdot \text{sen}\theta_{ij} - B_{ij} \cdot \text{cos}\theta_{ij}) \quad (63)$$

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial Q_i}{\partial \theta_j} \right)}{\partial \theta_i} = -V_i \cdot V_j \cdot (-G_{ij} \cdot \text{sen}\theta_{ij} + B_{ij} \cdot \text{cos}\theta_{ij}) \quad (64)$$

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial Q_i}{\partial \theta_j} \right)}{\partial \theta_j} = -V_i \cdot V_j \cdot (G_{ij} \cdot \text{sen}\theta_{ij} - B_{ij} \cdot \text{cos}\theta_{ij}) \quad (65)$$

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial Q_i}{\partial \theta_i} \right)}{\partial V_i} = + \sum_j V_j \cdot (G_{ij} \cdot \text{cos}\theta_{ij} + B_{ij} \cdot \text{sen}\theta_{ij}) \quad (66)$$

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial Q_i}{\partial \theta_i} \right)}{\partial V_j} = V_i \cdot (G_{ij} \cdot \text{cos}\theta_{ij} + B_{ij} \cdot \text{sen}\theta_{ij}) \quad (67)$$

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial Q_i}{\partial \theta_j} \right)}{\partial V_i} = -V_j \cdot (G_{ij} \cdot \text{cos}\theta_{ij} + B_{ij} \cdot \text{sen}\theta_{ij}) \quad (68)$$

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial Q_i}{\partial \theta_j} \right)}{\partial V_j} = -V_i \cdot (G_{ij} \cdot \text{cos}\theta_{ij} + B_{ij} \cdot \text{sen}\theta_{ij}) \quad (69)$$

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial Q_i}{\partial V_i} \right)}{\partial \theta_i} = \sum_j V_j \cdot (G_{ij} \cdot \text{cos}\theta_{ij} + B_{ij} \cdot \text{sen}\theta_{ij}) \quad (70)$$

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial Q_i}{\partial V_i} \right)}{\partial \theta_j} = V_j \cdot (-G_{ij} \cdot \text{cos}\theta_{ij} - B_{ij} \cdot \text{sen}\theta_{ij}) \quad (71)$$

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial Q_i}{\partial V_j} \right)}{\partial \theta_i} = V_i \cdot (G_{ij} \cdot \text{cos}\theta_{ij} + B_{ij} \cdot \text{sen}\theta_{ij}) \quad (72)$$

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial Q_i}{\partial V_j} \right)}{\partial \theta_j} = V_i \cdot (-G_{ij} \cdot \cos \theta_{ij} - B_{ij} \cdot \sen \theta_{ij}) \quad (73)$$

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial Q_i}{\partial V_i} \right)}{\partial V_i} = -2 \cdot B_{ii} \quad (74)$$

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial Q_i}{\partial V_j} \right)}{\partial V_j} = (G_{ij} \cdot \sen \theta_{ij} - B_{ij} \cdot \cos \theta_{ij}) \quad (75)$$

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial Q_i}{\partial V_j} \right)}{\partial V_i} = (G_{ij} \cdot \sen \theta_{ij} - B_{ij} \cdot \cos \theta_{ij}) \quad (76)$$

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial Q_i}{\partial V_j} \right)}{\partial V_j} = 0 \quad (77)$$

Una vez determinadas las derivadas aquí presentadas, se requiere construir, además de la matriz jacobiana, el término $\frac{d^2 x_j}{d\lambda^2}$ que se empleará en cada iteración para actualizar las variables de estado.

$$\frac{d^2 x_j}{d\lambda^2} = - \sum_k \sum_m \sum_i \frac{\partial x_j}{\partial h_i} \cdot \frac{\partial^2 h_i}{\partial x_k \cdot \partial x_m} \cdot \frac{dx_k}{d\lambda} \cdot \frac{dx_m}{d\lambda} \quad (78)$$

2.3 Modelo completo de flujo de cargas parabólico

En esta sección se explicará cómo funciona el algoritmo planteado en este proyecto. Como se ha expuesto, este método será muy parecido al Newton-Raphson tradicional, solo que introducirá una nueva variable λ respecto a la cual las variables x seguirán una trayectoria. En cada iteración se utilizará la aproximación parabólica (derivada de segundo orden) de las ecuaciones del problema de flujo de cargas para obtener una actualización de las variables de estado que permita reducir los desvíos de potencia. En la siguiente iteración, este nuevo vector de variables de estado será utilizado como estimación inicial, de manera que partiendo del estado del sistema al final de la iteración anterior se reformula la homotopía. Este proceso se repetirá hasta que los desvíos de potencia en los nudos sean inferiores a cierta tolerancia fijada.

Para el desarrollo del algoritmo se ha elaborado un programa en MATLAB®, que trabaja con magnitudes p.u. A partir de los datos del sistema (nudos, líneas, etc) y una tolerancia para los valores de los desvíos de potencia fijada con valor estándar (cuando ambos desvíos de potencia son inferiores a este valor el algoritmo considera el resultado satisfactorio y finaliza el proceso iterativo), en cada iteración se determinan las potencias generadas en cada nudo. Con estos valores se obtienen los desvíos de potencia especificada con respecto a la calculada, de potencia activa en los nudos PV y los de activa y reactiva en los PQ.

A continuación se obtiene la matriz jacobiana del problema en este punto y se resuelve el sistema, tal y como se hace en el método Newton-Raphson tradicional. Como ya se ha explicado, se obtiene la derivada de segundo orden de las variables de estado respecto a λ , para poder obtener la actualización total de estas. Las variables de estado se actualizan en cada iteración:

$$\mathbf{V}^{k+1} = \frac{dx_j}{d\lambda} + \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2x_j}{d\lambda^2} = \Delta\mathbf{V} + \frac{1}{2} \cdot \Delta\mathbf{V}^{2^\circ \text{ orden}} \quad (79)$$

$$\boldsymbol{\theta}^{k+1} = \frac{dx_j}{d\lambda} + \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2x_j}{d\lambda^2} = \Delta\boldsymbol{\theta} + \frac{1}{2} \cdot \Delta\boldsymbol{\theta}^{2^\circ \text{ orden}} \quad (80)$$

Si los desvíos de potencia siguen siendo mayores que la tolerancia fijada, se actualizan las variables de estado y este nuevo punto de operación se toma como estimación inicial para volver a repetir este proceso en el sistema homotópico.

Cuando se haya alcanzado la solución buscada, se computan los flujos de potencia e intensidades que circulan por las líneas, conociéndose así el estado completo del sistema.

Como valores iniciales de las variables de estado se utiliza el perfil plano de tensiones, donde los módulos valen 1 p.u. y los ángulos son nulos.

Por tanto, el proceso de resolución del problema de flujo de cargas mediante el método Newton-Raphson tradicional es el mostrado en la Figura 4, tal y como se muestra en [19]:

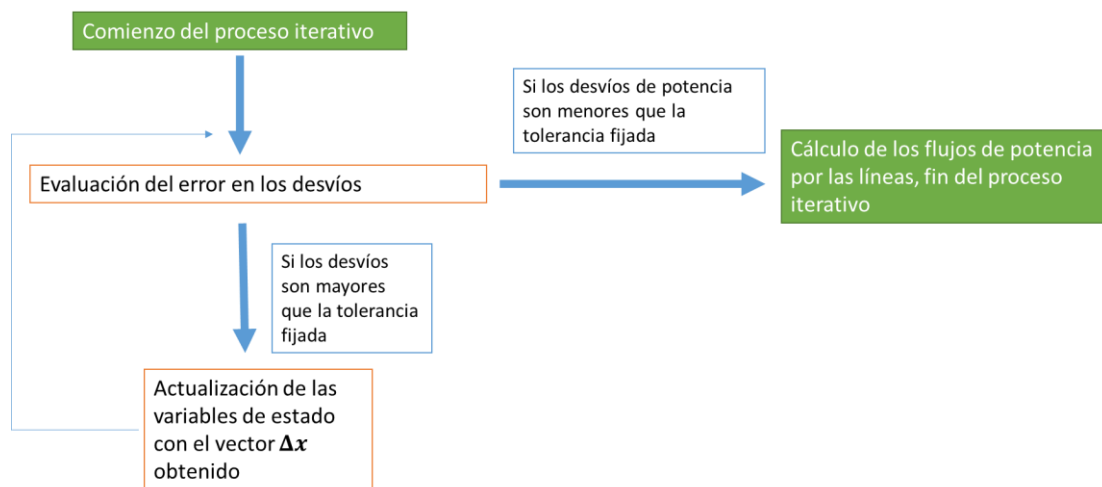


Figura 4: Esquema del proceso iterativo del método Newton-Raphson tradicional

Donde al comienzo del proceso iterativo se estiva el valor de las variables de estado del sistema mediante un perfil plano de tensiones, donde los módulos de estas en los nudos valen 1 p.u. y los ángulos son nulos. Se evalúa el valor de los desvíos de potencia en este estado mediante la matriz jacobiana como se ha explicado en este documento, siguiendo el método Newton-Raphson tradicional. Si estos desvíos son menores que la tolerancia fijada, finaliza el proceso iterativo, pudiendo calcularse todas las variables de la red. Este es el denominado criterio de salida. Si este no se cumple, se deben actualizar las variables de estado, utilizando la primera derivada de las ecuaciones del sistema como aproximación. Estas nuevas variables se utilizan para volver a evaluar los desvíos de potencia, siguiendo así el proceso iterativo hasta que se cumpla el criterio de salida fijado.

Sin embargo, el algoritmo aquí presentado, mediante reformulación homotópica funciona de la manera mostrada en la Figura 5:

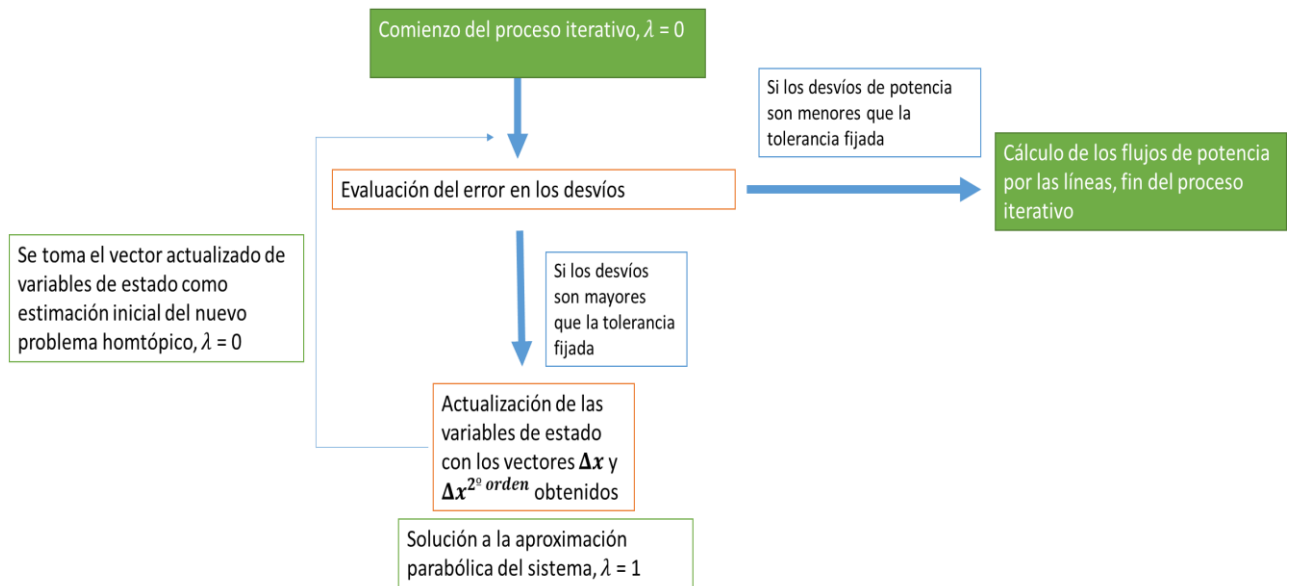


Figura 5: Esquema del proceso iterativo del método propuesto reformulado mediante homotopía

La principal diferencia radica en la forma de actualizar las variables de estado, ya que en este caso se utiliza, como se ha explicado en secciones previas, también la segunda derivada. Ambas derivadas son, en este caso, con respecto al parámetro λ , aunque se ha comprobado que la primera es exactamente la misma que en el caso de utilizar el método Newton-Raphson tradicional. En lugar de obtener la trayectoria de las variables de estado respecto a λ , se obtiene mediante la aproximación descrita una estimación del valor de estas al final de la trayectoria, de modo que se realiza una nueva reformulación tomando estos valores como el nuevo estado inicial cuando $\lambda = 0$.

Por tanto, a nivel práctico, este algoritmo es muy similar al método Newton-Raphson tradicional, ya que solo se diferencia en el cálculo y uso de la derivada de segundo orden de las variables respecto a λ (aproximación parabólica del sistema) para la actualización de las variables de estado en cada iteración. Sin embargo, esto supone una convergencia más rápida (si existe solución del problema) por requerirse menor número de iteraciones. Fuera del alcance de este proyecto queda la posibilidad de utilizar el parámetro λ como indicador de la existencia o no de una solución para el problema de flujo de cargas analizado, o como medida de la infactibilidad de este.

3 Resultados

En esta sección se exponen los resultados obtenidos en este proyecto. El método desarrollado de resolución del problema de flujo de cargas mediante la reformulación homotópica del método Newton-Raphson es comparado aquí con el Newton-Raphson tradicional, basando esta comparación en el número de iteraciones necesarias para resolver diferentes tipos de redes.

3.1 Red tipo de dos nudos generador-carga

En este caso se estudiará el comportamiento del método propuesto en este documento y el del Newton-Raphson tradicional en una red de dos nudos.

Esta red estará modelada de la siguiente manera. Uno de los nudos representará la generación de potencia, siendo un nudo PV. Este nudo generará un p.u. de potencia activa. La línea tendrá una inductancia de 1 p.u. y conectará a este nudo con el nudo de demanda, tipo PQ, que consumirá potencia activa y reactiva. En la Figura 6 se muestra un esquema de esta red.

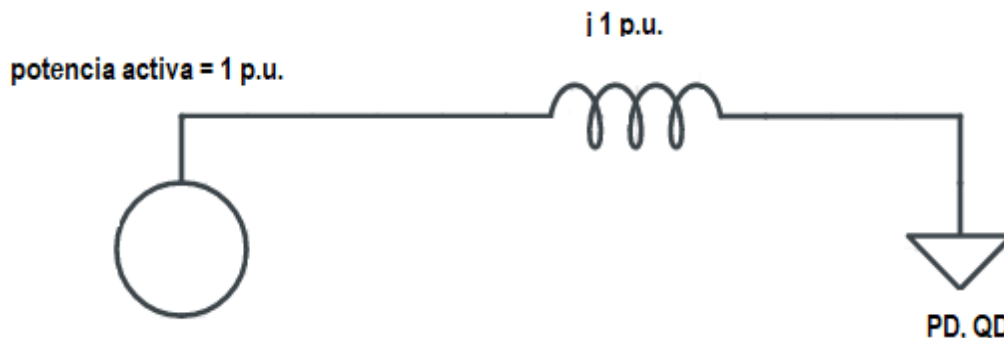


Figura 6: Esquema de la red de dos nudos simulada

Para poder comparar la eficiencia de ambos métodos, se resolverá el flujo de cargas en este circuito mediante ambos, variando la potencia activa de la carga y el factor de potencia de esta para comprobar el número de iteraciones requeridas por cada uno para hallar la solución del problema.

La carga se variará en incrementos de potencia activa desde un valor nulo hasta que el problema deje de tener solución (colapso de tensiones) mediante los dos métodos. Esto se realizará para diferentes factores de potencia. Los resultados obtenidos son los siguientes:

En la Figura 7 se muestra el número de iteraciones requeridas por cada uno de los dos métodos al variar la potencia activa demandada hasta el colapso de tensiones, donde el problema deja de tener solución y el algoritmo diverge. En este caso el factor de potencia es 1, es decir, no hay carga reactiva.

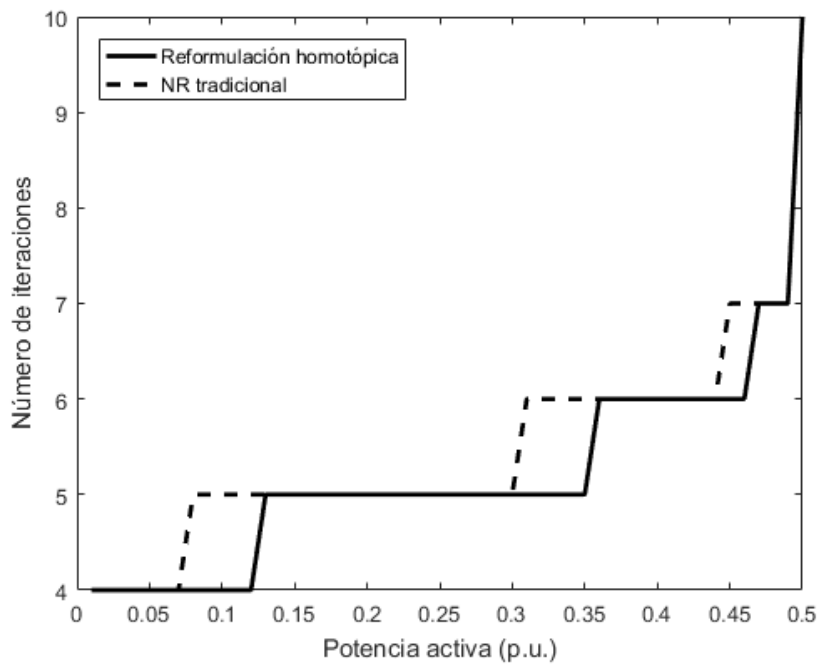


Figura 7: Número de iteraciones necesarias para resolver el flujo de cargas en función de la carga con factor de potencia unidad

A continuación, en la Figura 8 se presenta el resultado del mismo análisis pero para un factor de potencia de 0,95 inductivo, es decir, consumiendo la carga potencia reactiva.

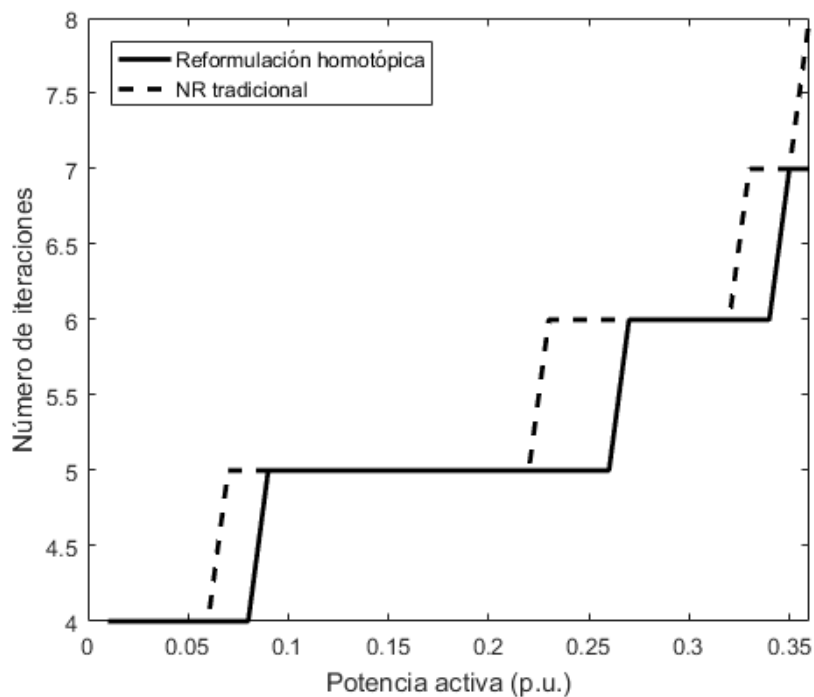


Figura 8: Número de iteraciones necesarias para resolver el flujo de cargas en función de la carga con factor de potencia 0,95 inductivo

La Figura 9 muestra los resultados obtenidos cuando el factor de potencia es 0,95, pero siendo en este caso la carga capacitiva, es decir, generadora de potencia reactiva.

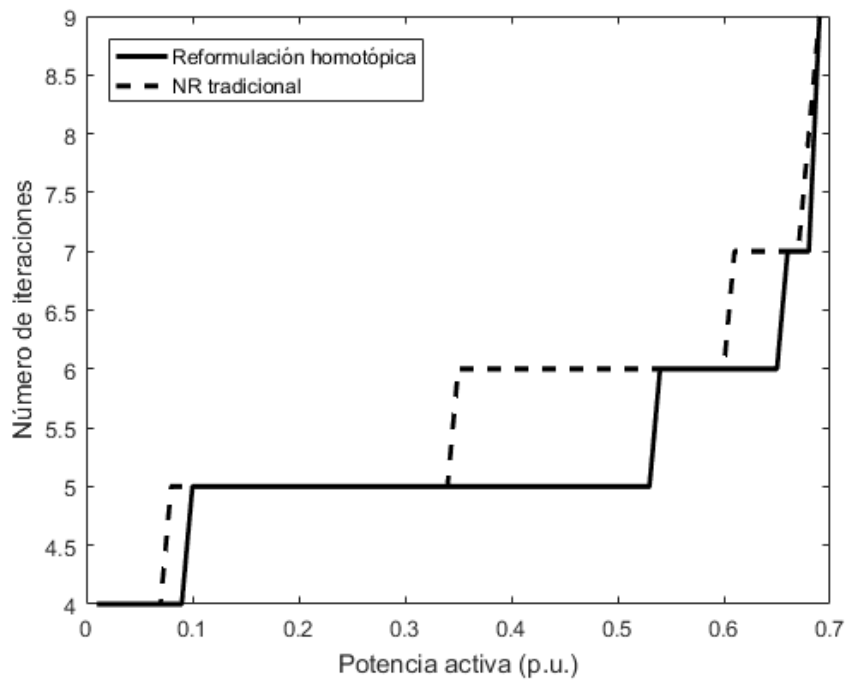


Figura 9: Número de iteraciones necesarias para resolver el flujo de cargas en función de la carga con factor de potencia 0,95 capacitivo

Se comprueba, por tanto, que existen valores de carga para los que el algoritmo aquí presentado presenta un menor número de iteraciones necesarias hasta obtener la resolución del problema. En estos puntos de carga, se puede observar como los desvíos de potencia se reducen por debajo de la tolerancia fijada en menor número de iteraciones. Estos resultados se presentan en las figuras a continuación (Figura 10-Figura 15).

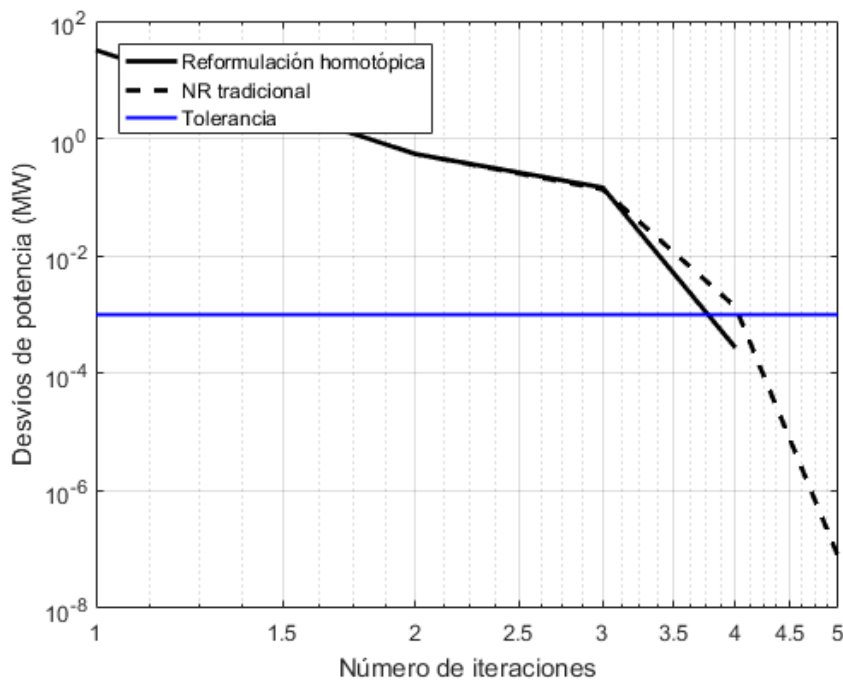


Figura 10: Evolución del valor absoluto del desvío de potencia activa con demanda de potencia activa 0.32 p.u. con factor de potencia unidad

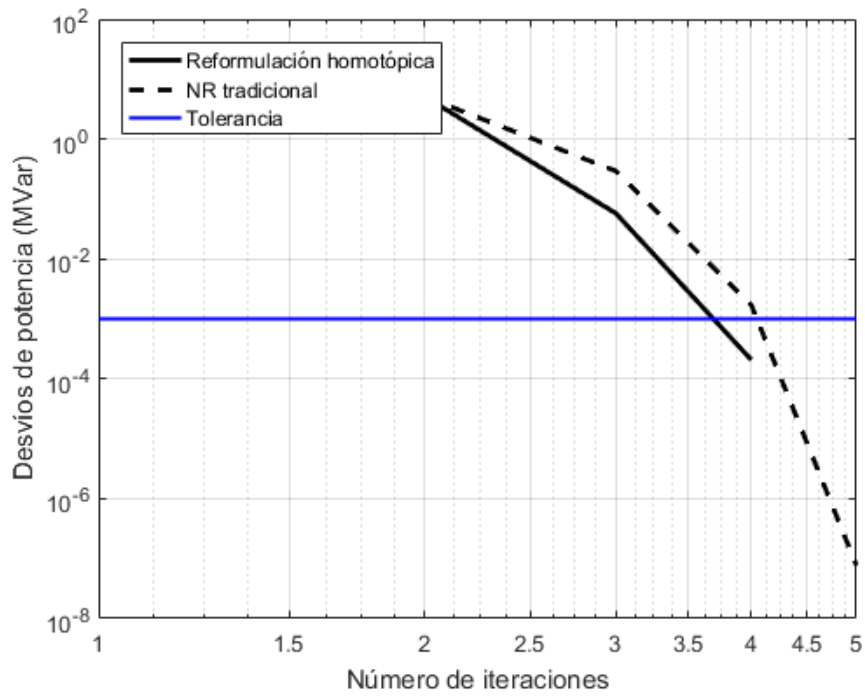


Figura 11: Evolución del valor absoluto del desvío de potencia reactiva con demanda de potencia activa 0.32 p.u. con factor de potencia unidad

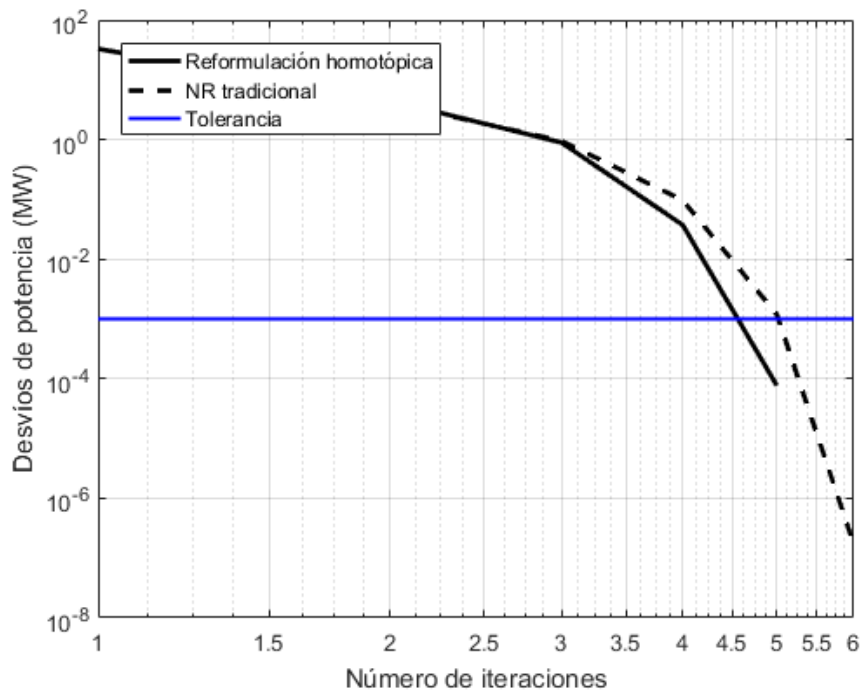


Figura 12: Evolución del valor absoluto del desvío de potencia activa con demanda de potencia activa 0.33 p.u. con factor de potencia 0,95 inductivo

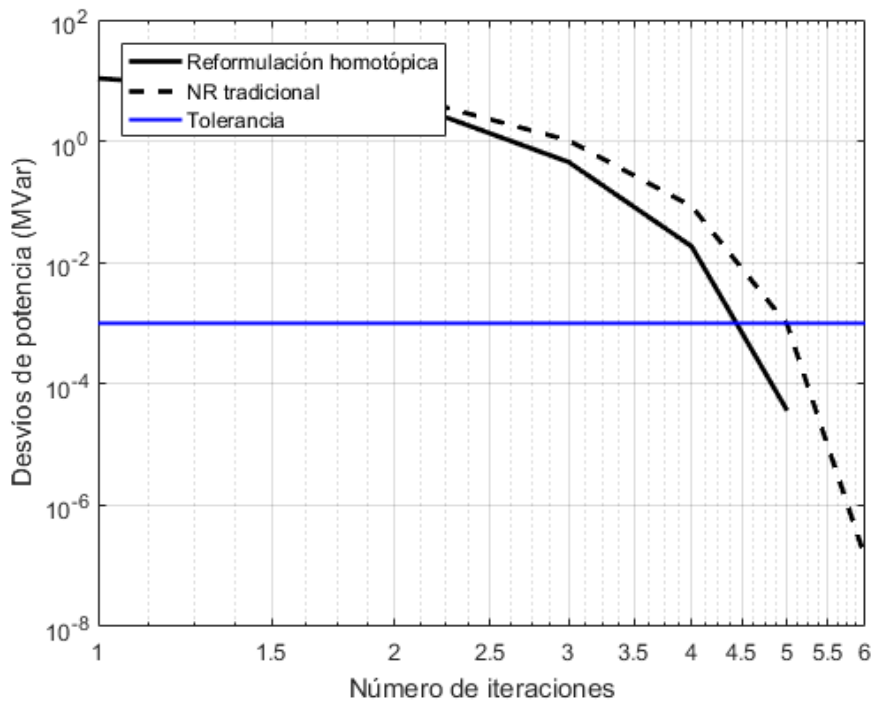


Figura 13: Evolución del valor absoluto del desvío de potencia reactiva con demanda de potencia activa 0.33 p.u. con factor de potencia 0,95 inductivo

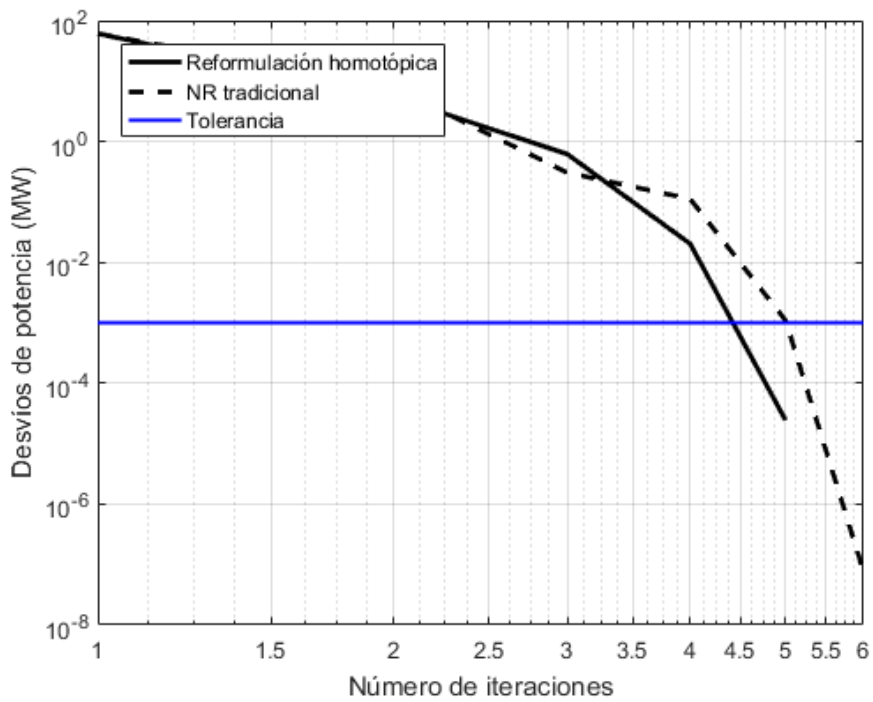


Figura 14: Evolución del valor absoluto del desvío de potencia activa con demanda de potencia activa 0.61 p.u. con factor de potencia 0,95 capacitivo

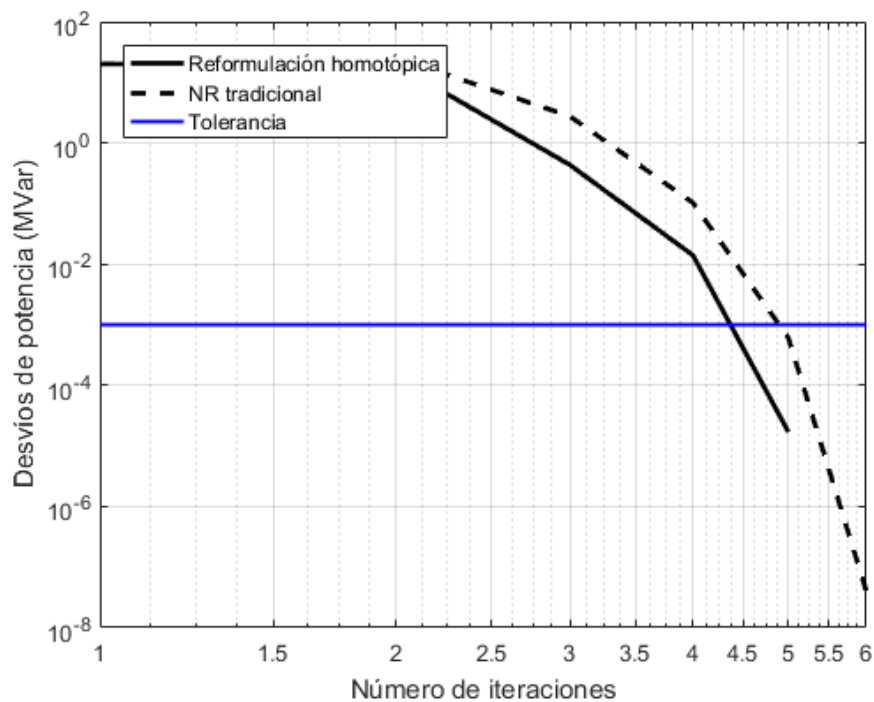


Figura 15: Evolución del valor absoluto del desvío de potencia reactiva con demanda de potencia activa 0.61 p.u. con factor de potencia 0,95 capacitivo

En las gráficas presentadas en esta sección se observa que el algoritmo desarrollado mediante reformulación homotópica objeto del proyecto alcanza los valores de tolerancia buscados en un número de iteraciones menor o igual que el método Newton-Raphson tradicional. Por tanto, el valor absoluto de los desvíos de potencia activa y reactiva alcanzan un valor inferior a la tolerancia fijada al usar el algoritmo desarrollado en este proyecto. En las figuras (Figura 10-Figura 15) se puede observar como los desvíos de potencia se reducen en un menor número de iteraciones utilizando el método desarrollado en este proyecto, para los niveles de carga utilizados.

4 Conclusiones

El problema de flujo de cargas y su resolución es pieza clave en la operación y análisis de sistemas eléctricos. El flujo de cargas proporciona las variables de estado del sistema, es decir, las tensiones de los nudos en módulo y argumento. La solución del flujo de cargas permite calcular todas las magnitudes clave de un sistema eléctrico, tales como los flujos de potencia por líneas y transformadores o las pérdidas de la red, entre otros. Además de cómo aplicación independiente, el flujo de cargas es el paso previo a muchos otros tipos de estudios relacionados con los sistemas de energía eléctrica, tales como estimación de estado, análisis de contingencias, cortocircuitos o estudios de estabilidad transitoria, entre otros.

Entre los diferentes métodos existentes para resolver el flujo de cargas, la mayoría están basados en el método de Newton-Raphson o alguna variante. El método Newton-Raphson formula aproximaciones lineales del sistema de ecuaciones para obtener los valores de actualización de las variables de estado del sistema. Si bien el método de Newton-Raphson presenta una gran eficacia y robustez en la mayoría de los supuestos, también puede oscilar o divergir en situaciones extremas de funcionamiento.

El presente documento presenta una variación del método de Newton-Raphson basado en el uso de derivadas de segundo orden para obtener aproximaciones parabólicas en lugar de lineales. Se implementa una reformulación del método Newton-Raphson en forma de homotopía, introduciendo un nuevo parámetro en el problema, de modo que se pueden definir trayectorias de las variables de estado en función de este parámetro. Al utilizar la primera y segunda derivadas de las variables de estado con respecto a este parámetro, se obtienen aproximaciones mejores de estas trayectorias, obteniendo valores de actualización de las variables de estado del sistema más precisos y requiriendo este método, por tanto, un número menor o igual de iteraciones que el método tradicional hasta alcanzar la solución del problema.

Para ilustrar la eficacia del algoritmo que se presenta se ha realizado un estudio sobre un modelo básico de red en el que se contrasta con el método de Newton-Raphson original. Para diferentes grados de carga y factores de potencia en la demanda, se muestra como el algoritmo propuesto obtiene mejores aproximaciones de las variables en cada iteración. De este modo, se logra que los desvíos de potencia en los nudos se corrijan antes, reduciendo el número de iteraciones necesarias para resolver el problema.

Referencias

- [1] F. M. Echavarren Cerezo y A. D. Díaz Casado, Apuntes sobre flujo de cargas, Universidad Pontificia Comillas, 2016.
- [2] B. Stott, Review of Load-Flow Calculation Method, IEEE, 1974.
- [3] B. Stott y O. Alsac, Fast decoupled load flow, Power Systems Laboratory, University of Manchester Institute of Science and Technology, 1973.
- [4] K. A. Clements, B. P. Lam, D. J. Lawrence, T. A. Mikolinnas, N. D. Reppen, R. J. Reppen, R. J. Ringlee y R. F. Wollwnberg, Transmission System Reliability Methods. Volume 1: Mathematical Models, Computing Methods, and Results, EPRI EL-2526, Volume 1, Final Report, Research Project 1530-1, 1982.
- [5] S. Iwamoto y Y. Tamura, A load flow calculation method for ill-conditioned power systems, IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-100, No. 4, 1981.
- [6] P. R. Bijwe y S. M. Kelapure, Nondivergent Fast Power Flow Methods, IEEE transactions on power systems, Vol. 18, No. 2, 2003.
- [7] V. Ajjarapu y C. Christy, The continuation power flow: A tool for steady state voltage stability analysis, IEEE Trans. Power Syst., Vol. 7, 1992.
- [8] L. M. C. Braz, C. A. Castro y A. F. Murari, A critical evaluation of step size optimization based load flow methods, IEEE transactions on power systems, Vol 15, No. 1, 2000.
- [9] C. A. Castro y L. M. C. Braz, A New Approach to the Polar Newton Power Flow using Step Size Optimization, 29th North American Power Symposium, 1997.
- [10] M. Dehnel y H. W. Dommel, A Method for Identifying Weak Nodes in Nonconvergent Load Flows, IEEE Transactions on Power Systems, vol. 4, nº 2, 1989.
- [11] J. M. Scudder, Step Optimization in a Polar Newton Power Flow, University of Wisconsin, Madison, 1981.
- [12] T. J. Overbye, A power flow measure for unsolvable cases, IEEE transactions on power systems, Vol. 9, No. 3, 1994.
- [13] T. J. Overbye, Computation of a Practical Method to Restore Power flow Solvability, IEEE Transactions on Power Systems, vol. 10, 1995.
- [14] A. G. C. Conceição y C. A. Castro, A new approach to defining Corrective Control Actions in case of Infeasible Operating Situations, 2001 IEEE Porto Power Tech Conference, 2001.
- [15] S. Granville, J. C. O. Mello y A. C. G. Melo, Application of Interior Point Methods to Power Flow Unsolvability, IEEE Transactions on Power Systems, vol. 11, nº 2, 1996.
- [16] L. V. Barboza y R. Salgado, Unsolvability Power Flow Analysis - an Approach based on Interior Point non-linear Optimization Methods, 2001 IEEE Porto Power Tech Conference, 2001.
- [17] Y. C. Wu, A. S. Debs y R. E. Marsten, A Direct Predictor-Corrector Primal-Dual Interior Point Algorithm for Optimal Power Flows, IEEE Transactions on Power Systems, vol. 9, nº 2, 1994.
- [18] A. Trias y J. L. Marín, The holomorphic embedding loadflow method for DC power systems and nonlinear DC circuits, IEEE transactions on circuits and systems-I: Regular Papers, 2012.

- [19] A. J. Wood y B. F. Wollenberg, Power generation, operation and control, John Wiley & sons, INC., 1996.