FACULTAD DE CIENCIAS EMPRSARIALES

ICADE

EL VaR MITOLÓGICO

Implicaciones empíricas del binomio rentabilidad riesgo en el IBEX

Autor: Pablo Garnica de Juan
Director: Francisco Borrás Palá

Madrid

Abril 2014

ÍNDICE

RESUMEN

Este estudio plantea diversos modelos de volatilidad dinámica partiendo desde el más básico ARCH a el más sofisticado T-GARCH-in-Mean. Se detalla paso a paso cómo se especifica y luego estima cada modelo a la vez que se explica el funcionamiento de ciertos contrastes y estadísticos relacionados. La parte cuantitativa del estudio concluye con la elaboración del indicador de riesgo Value at Risk o VaR para el IBEX 35 con distintos grados de significación. El presente estudio contiene además una parte cualitativa que plantea el interrogante de cómo se considera y trata el riesgo en los mercados. En el discurso se introduce una analogía entre los modelos econométricos y los mitos de forma que se tomen en consideración los primeros con espíritu crítico pero sin menospreciar la utilidad de los segundos, y su función social.

Palabras clave: VaR, ARCH, GARCH, T-GARCH, GARCH-IN-MEAN, volatilidad, heterocedasticidad, varianza condicional, media condicional, clúster, mitología

ABSTRACT

In this study various dynamic volatility models are introduced, from the simpler ARCH model to the more complex T-GARCH-in-Mean. A step-by-step analysis of the procedure is carried out whilst some statistical concepts are expanded upon. The quantitative part of the study concludes with the construction of a VaR index for the IBEX 35, for multiple confidence levels and time horizons. Moreover, there is also an underlying commentary made about the general concept of risk in financial markets and its real meaning. This last aspect is further brought about through the analogy between econometric models and myths, whereby there is a caution to use the former with critical spirit and an urge to not underestimate the usefulness of the latter, nor its role in history and society.

Key words: VaR, ARCH, GARCH, T-GARCH, GARCH-IN-MEAN, volatility, heteroskedasticity, conditional variance, conditional mean, volatility cluster, mythology

INTRODUCCIÓN

SOBRE EL RIESGO

Mas allá del paradigma financiero, el riesgo, como parte no explicada y no controlada de nuestro entorno, condiciona el comportamiento humano en tanto en cuanto el ser humano huye de él. Resulta imposible eliminar o evitar todo riesgo, puesto que el riesgo no sólo existe en cada decisión que se toma de forma activa sino que el riesgo es también algo exógeno que se deriva de nuestra actividad e inactividad, y las decisiones que toman o dejan de tomar otros nos contaminan. A modo de ejemplo se puede imaginar un conductor en un coche, llamémosle Roberto. Al decidir realizar un trayecto en coche, Roberto espera llegar a su destino por una ruta a una cierta hora. Según la ruta que elija (y muchos más factores) asume más o menos riesgo de cara a llegar a la hora esperada, pero, por mucho que elija la ruta más directa y corta para minimizar riesgos, la realización de su expectativa depende también de las decisiones que tomen otros conductores y otros múltiples factores mas allá de su control. Si todos deciden tomar la misma ruta es probable que se congestione dicha ruta y Roberto no cumpla su expectativa de llegada.

Simplificando enormemente podemos tomar como definición genérica de riesgo la probabilidad de no obtener lo esperado. Para su mejor comprensión se puede entender como el grado de incertidumbre latente al tomar una decisión. Dicho grado de incertidumbre dependerá de la capacidad de previsión de; por un lado el comportamiento de los demás agentes de mi entorno (en el caso de Roberto, cuántos conductores van a tomar su misma ruta); por otro lado la capacidad de previsión de otros factores exógenos más allá del poder de estos (como podría ser, en nuestro ejemplo, el estado del asfalto o el tiempo que vaya a hacer en el momento de tomar la ruta); y finalmente, cómo reaccionarán *ex post* los agentes frente a estos factores no previstos (como se verá alterado el comportamiento de los otros conductores frente a imprevistos).

Para concluir esta sección se hará alusión a un concepto ligado al riesgo o incertidumbre, la volatilidad. La volatilidad representa la fragilidad de un estado. Si uno se adentra someramente en el ámbito financiero, se ve que, en conexión con la incertidumbre, la volatilidad no es otra cosa que con qué facilidad un valor cambia en base a una serie de eventos o estímulos. Adelantamos que en el mundo financiero el riesgo se mide en términos de varianza, pues bien la volatilidad, matemáticamente, es la raíz cuadrada de la varianza o lo que es lo mismo la desviación típica. De aquí extraemos que la volatilidad es cuánta dispersión o variación existe (o puede existir en base a datos históricos) respecto de una media. Cuanto más volátil sea un activo más puede alejarse de la media su valor por lo que nuestra expectativa puede incumplirse con mayor contundencia, por lo que más riesgo asumimos al establecer una expectativa de precio.

¿POR QUÉ SE ESTUDIA EN GENERAL?

Con lo dicho sobre el riesgo procede entonces la pregunta de qué interés encierra el estudio del riesgo, sobretodo si ya por definición es algo heterónomo, es decir ajeno a nuestra voluntad y control. Lo cierto es que en numerosas ocasiones decidimos tomar riesgos por el beneficio que podemos recibir a cambio. En finanzas esto se denomina binomio rentabilidad – riesgo. Pero no hay que ir a las finanzas para ver este efecto. El comportamiento financiero-económico no es más que una manifestación del comportamiento y psicología humana en general inherente a todos.

En el caso de Roberto, por ejemplo, si su destino es el mercado, el llegar a tiempo para la apertura supone que podrá elegir primero y por ello llevarse los mejores productos antes de que otro se adelante. Como se ha dicho antes, la ruta más obvia al mercado puede congestionarse rápidamente si otros conductores coinciden en su decisión, por lo que Roberto puede decidir asumir voluntariamente un mayor riesgo cogiendo una ruta más larga, pero quizás menos congestionada, con tal de llegar antes al mercado. Es cierto que si se equivoca puede ser el último en llegar, se habrán acabado todos los productos y habrá hecho el viaje en balde, suponiendo una perdida de tiempo y combustible, pero si en cambio sí llega antes que los demás, que han decidido ir por la vía corta, podrá aprovechar su viaje y llevarse lo mejor del mercado.

El estudio del riesgo por lo tanto permite idear una conducta óptima, de forma que sólo asumimos riesgos que merezcan la pena. En las finanzas como en nuestro día a día uno debe asumir riesgos para recibir recompensas, pero no todo riesgo está igualmente remunerado. Ejercicios como este suponen la valoración o cuantificación de las expectativas de fracaso (pérdidas) frente a las expectativas de éxito (ganancias), donde ambas dos se encuentran en el futuro. Lo que se pretende con el análisis del riesgo es llegar a un punto donde se pueda elaborar un comportamiento óptimo. En otras palabras, un comportamiento que reporte la mayor recompensa con la menor incertidumbre posible.

¿POR QUÉ SE ESTUDIA EN FINANZAS?

En finanzas esto se traduce a la teoría de portfolios, materia ya muy estudiada en el mundo económico y bursátil. Dos de sus máximos exponentes y pioneros fueron Markowitz y Tobin que en 1952 y 1958 respectivamente empezaron a desarrollar la asociación del riesgo financiero con la varianza del valor de un activo financiero o de un portfolio. Más tarde en 1964 Sharpe demostró, o más bien concretó, a través de su teoría de Capital Asset Pricing Model o CAPM la relación que previamente se ha expuesto existe entre recompensa esperada y riesgo, pero especificado en clave financiera como "la relación natural entre rendimientos esperados y varianza". (Sharpe, 1991).

Cabe preguntar después de sacar a colación a estos autores el *por qué* más específico de este estudio. Si ya se ha estudiado y establecido la relación entre riesgo y rentabilidad, ¿qué más se puede aportar en un trabajo de investigación sin que éste sea puramente reiterativo? El interés particular que este estudio encierra se entiende desde la perspectiva de la naturaleza dinámica del riesgo financiero, la varianza y la volatilidad. El que sigue a continuación es un trabajo empírico que va a modelar el riesgo del índice bursátil español para después obtener una medida de riesgo ad hoc (el Value at Risk o VaR).

Tal y como indica Robert Engle cuando expone su trabajo al recibir el premio Nobel de economía: "es lógicamente inconsistente asumir, por ejemplo, que la varianza es constante durante un periodo tan largo como un año que termina hoy y también que es constante para el año que termina el día anterior pero con un valor distinto" (Engle, 2003, p. 327). Esta idea es la precursora de el modelo Autoregresivo Heterocedásticidad Condicional (de aquí en adelante referido como tal a modelo ARCH) y, por ende, esta investigación, pues sirve como petición de principio para la elaboración de una teoría de volatilidades dinámicas. En otras palabras, vamos a intentar trazar un proceso estadístico que explique como el riesgo financiero cambia a lo largo del tiempo.

Mientras que el binomio riesgo - rentabilidad resulta esencial de cara a entender la teoría macroeconómica, sus implicaciones empíricas a menudo pasan desapercibidas al lado de otros efectos dominantes y quedan oscurecidas por la dependencia en datos de poca frecuencia. En el mundo de las finanzas los efectos del binomio adquieren una gravedad crucial y los datos diarios o incluso intra-día (es decir datos de alta frecuencia) están disponibles para el analista a la hora de realizar previsiones de volatilidad.

METODOLOGÍA Y PARTES

Tal y como se ha anticipado la herramienta de investigación escogida es el modelo ARCH desarrollado por el econometrista Robert Engle en 1979 y el modelo GARCH que no es más que una generalización simplificada del primero llevada a cabo por un pupilo del propio Engle, Tim Bollerslev[1]. Los datos usados, como se explicará posteriormente, serán los rendimientos del IBEX 35 calculados a partir de los datos históricos obtenidos de la Comisión Nacional del Mercado de Valores.

[1] (Bollerslev, 1986)

ARCH

En breve, el modelo ARCH, en esencia, produce una previsión de volatilidad usando factores observables en el presente. Lo que propone este modelo es tomar las medias ponderadas de los errores al cuadrado en vez de usar desviaciones típicas de una muestra. Para facilitar su comprensión podemos relacionar este concepto con lo que se decía de riesgo. Si tomamos el "error" como la diferencia entre los esperado en el pasado y lo obtenido (o riesgo realizado por llamarlo de otra forma) quizás resulta más fácil entender que lo que estamos haciendo es predecir una volatilidad futura usando el riesgo que no supimos predecir en el pasado. Engle propone que "Claramente el modelo ARCH era una simple generalización de la varianza muestral[2]" (Engle, 2003, p. 328).

La gran innovación de dicho modelo es que las distintas ponderaciones de los errores podían ser calculados en base a datos históricos aunque nunca se observase la volatilidad real. Engle explica en su estudio que a partir de previsiones realizadas para cada periodo se puede idear una ponderación óptima que se acerque lo máximo posible a la varianza del próximo rendimiento (Engle, 2003). Es un procedimiento análogo al de Máxima Verosimilitud que ofrece de forma sistemática los pesos óptimos para medir la volatilidad en cualquier momento y para estimar su valor en el futuro.

GARCH

Una vez haya elaborado un modelo ARCH, éste se generaliza de forma que pasa de ser un modelo ARCH de varianza puramente autoregresiva a ser un modelo de volatilidad autoregresivo con media móvil. La predicción de un modelo GARCH es producto de una media ponderada de tres previsiones de varianza distintas.

En primer lugar se tiene una media a largo plazo, que ejerce la función de término constante al cual tenderá nuestra predicción según nos alejamos en el futuro. En segundo lugar tenemos la previsión de varianza del periodo inmediatamente anterior al que uno se encuentra y finalmente la tercer previsión representa la información nueva de la que no se

---

[2] $m^2 \equiv \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - m)^2$, $donde\ m = \bar{x}$

disponía al realizar la previsión del periodo previo (el error al cuadrado de la anterior previsión). Las ponderaciones de estas tres previsiones nos permiten establecer por un lado como cambia el riesgo con acceso a información nueva, y por otro lado cuanto tarda en aproximarse a la media a largo plazo o varianza constante.

Tras la especificación de varios modelos, incluyendo extensiones del modelo GARCH, se elegirá el más explicativo y preciso para luego calcular el VaR. La discriminación se realizará en base a la eficacia con la que se rechazan las hipótesis nulas (que los parámetros estimados no son explicativos de la variable dependiente) y los estadísticos derivados de la función de máxima verosimilitud asociado a cada modelo. Solo cuando se haya seleccionado el modelo se procederá a proponer un VaR para el índice objeto de estudio.

VaR

El VaR diario puede estimarse a partir de un modelo GARCH. Una vez seleccionado el modelo, elaborado a partir de datos históricos más adecuados, se calcula la desviación típica de la previsión para el periodo sucesivo. En ese momento se realizan una serie de asunciones sobre la distribución de rendimientos (las cuales se desarrollarán en la sección correspondiente). Esto no significa otra cosa que asignar una probabilidad concreta a los posibles resultados que pueden emanar de un proceso estocástico, siendo éste generador de un conjunto de variables aleatorias.

Dependiendo de la distribución seleccionada[3] multiplicaremos la desviación típica obtenida por el valor crítico asignado al cuantil que estemos observando de la distribución, la praxis dicta que se tome el cuantil del 1% de la distribución de probabilidades. A modo de ejemplo, al seleccionar el cuantil 1%, estaremos calculando el VaR diario del 99%. Traducido a lenguaje más asequible, un VaR diario del 99% nos muestra el número de euros que, como gestores, estamos seguros al 99% que será peor que cualquier pérdida que ocurra al día siguiente. A continuación se presenta un ejemplo numérico:

[3] Se asumirá una condición de normalidad siguiendo la metodología de Engle.

Si mi VaR diario es de 1000€, eso significa asumir que sobre 100 días, solo habrá un día en el que mis pérdidas superen los 1000€; o expresado de otra forma, existe una probabilidad del 1% de que en el periodo de un día pierda más de 1000€, por lo que se espera perder 1000€ un día de cada 100.

El que el VaR sea diario significa que el nivel las pérdidas máximas estimadas se realizarán en el periodo de un día. Cabe la posibilidad de establecer un VaR multi-periódico. Un VaR para 10 días muestra el número de euros que es mayor que las pérdidas realizadas en un periodo de 10 días en un portfolio con una confianza del 99%, asumiendo por supuesto que el portfolio o cartera no varía a lo largo de ese periodo.

Llegado a este punto en el discurso se evidencian los puntos fuertes y débiles de este indicador de cara a una interpretación útil del mismo.

MITOLOGÍA DEL RIESGO

Para acercar al lector a las implicaciones empíricas de riesgo financiero y su naturaleza, se contrapone este concepto a la noción de mito. El objetivo es tratar de crear un puente entre lo cuantitativo y lo cualitativo de forma que se pueda entender mejor el comportamiento humano. La Real Academia Española define el mito como: "Historia ficticia (…) que condensa alguna realidad humana de significación universal." (Real Academia Española, 2001).

Lo que este estudio propone es cambiar la forma en la que uno se aproxima a estudios econométricos de este tipo. Se puede tratar el VaR como un mito si se piensa, siguiendo el esquema de la definición propuesta, que el modelo a partir del cual lo obtenemos no es más una historia ficticia que nos trata de reflejar, a partir de una metáfora estadística, la realidad humana del riesgo y nuestro comportamiento frente a él.

Al final se argumentará que, a nivel de función científica, este campo de estudio es una mitología evolucionada en sí misma puesto que nos presenta con un devenir constante de la historia en el tiempo. En la evolución de los mitos inicialmente en la historia han buscado transmitir conocimiento apelando a la emotividad cuando los recursos para saber eran escasos. Bien es cierto que a medida que el hombre ha ido enriqueciéndose en razón ha desconfiado de esta emotividad inicial y ha comenzado a observar y analizar su entorno. Pero, ¿no es un modelo un proceso según el cuál creamos un proxy para representar la historia? El hecho que un modelo esté compuesto por números no lo hace menos susceptible de invención o ficción, de hecho ¿qué es una asunción en un modelo si no una quimera teórica para simplificar una realidad compleja? La econometría, como los mitos de nuestros antepasados, ofrecen una interpretación de una realidad compleja con el objetivo de educarnos sobre la realidad que tan incierta nos es.

CAPÍTULO 1: VARIABLE Y MUESTRA

En esta primera sección se va a observar con detenimiento los datos que se van a tratar posteriormente. De cara a entender el modelo estadístico, que se va a ir elaborando poco a poco, el objetivo aquí va a ser intentar exprimir toda la información posible de nuestra muestra. Si da pie, se intentará incluso ir más allá para realizar una tentativa de predicción acerca de sus cualidades de riesgo.

En este estudio se va a tratar el conjunto de rendimientos inter-día del índice bursátil español, el IBEX 35, desde el 2-1-1996 hasta el 31-12-2013, en total eso asciende a un tamaño de muestra de 4622 observaciones. Los rendimientos se han calculado de forma manual en base a la siguiente fórmula:

$$r_t = \frac{cot_t - cot_{t-1}}{cot_{t-1}}$$

Donde r_t es el rendimiento en el periodo *t,* que viene dado por la diferencia porcentual entre; cot_t que es la última cotización del periodo *t* y cot_{t-1} que es la última cotización del periodo *t-1.* La serie temporal resultante está representada gráficamente en la Figura 1 a continuación, donde ya se puede apreciar que los rendimientos, a primera vista, parecen aleatorios con un gran número de valores extremos. Lo que va a resultar interesante para el modelo es el hecho que, tanto los valores extremos como los más "silenciosos" parecen acumularse en el tiempo. Por lo tanto tres rasgos que, a priori, podemos atribuir a este conjunto de datos es que son *impredecibles*, tienen un exceso de *kurtosis* y tienen *clústeres de volatilidad*.

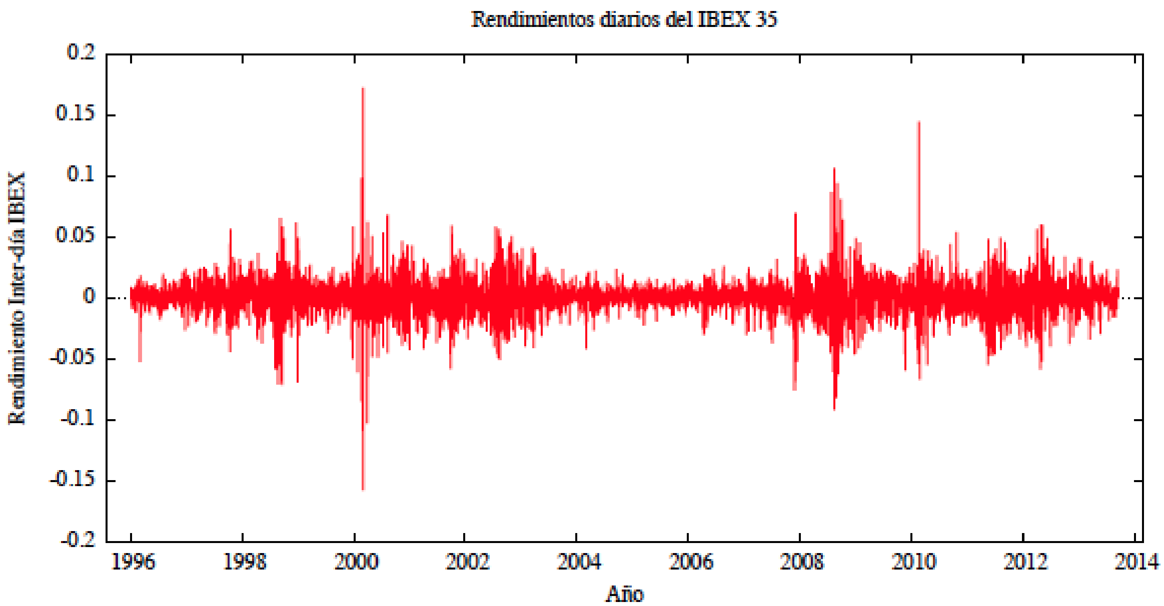


Figura 1: Rendimientos diarios IBEX 35 desde enero 1996 a diciembre 2013

En lo que sigue se va a explicar y elaborar sobre estos tres rasgos, pero como adelanto, con referencia a la Figura 1, vemos que es impredecible por la ausencia de una tendencia clara (esto se verá mejor cuando se tome un rango menor de fechas); el exceso de kurtosis se deja ver en tanto en cuanto vemos un gran número de valores extremos[4]; y los clústeres de volatilidad se pueden ver, por ejemplo desde el año 2000 al año 2002 o desde 2004 a 2008, en el primer caso existe un clúster de volatilidad alta y en segundo se está ante un clúster de volatilidad baja.

Para entender el contexto de estas cualidades estadísticas cabe aclarar que el mercado bursátil depende de dos cosas, por un lado la cantidad de información a disposición de los agentes de mercado y por otro el comportamiento de estos. Volviendo al ejemplo introductorio de Roberto, la primera cualidad (impredecibilidad), en el caso de los viajeros, viene del hecho que existen tantos factores que van a determinar el estado de la carretera que es imposible tenerlos todos en cuenta y también existen tantos viajeros que no hay forma de

[4] Cuando se dice extremo se refiere a extremo respecto de la media muestral. Por ejemplo, en esta muestra la media de rendimiento es de 0.000341767 y la desviación típica es de 0.0159811, por lo que un rendimiento de 0.5 está a más de 31 desviaciones típicas de la media.

saber como van a comportarse. En el caso de la kurtosis excesiva, quizás no se presta tanto a este ejemplo, pero si tomamos como rendimiento el tiempo que tarda a llegar a su destino, se diría que habrá muchos días que llegue muy rápido o a la hora esperada y muchos días que llegue muy tarde. Finalmente el clúster de volatilidad se puede traducir en que las condiciones de la carretera se sostienen en el tiempo, de forma que si la carretera está en mal estado por el estallido de una tuberia (por ejemplo), tardarán días o semanas en reparar la avería por lo que el tiempo hasta el destino será, generalmente, mayor durante ese periodo hasta que se resuelva[5].

1.1 IMPREDECIBILIDAD

Estadísticamente hablando este rasgo es consecuencia de que la variable de rendimiento no sea estacionaria y de la presencia de heterocedasticidad.

No-estacionariedad

Esta cualidad implica que; primero la media de la variable aleatoria (rendimiento) varía en el tiempo; segundo, que la varianza varía en el tiempo; y finalmente que la covarianza entre dos observaciones depende sólo del número de periodos que distan entre las observaciones y no en qué momento o periodo se encuentran[6]. Matemáticamente, la estacionariedad, se expresa de la siguiente forma:

$$E(r_t) = \mu \; (media\ constante);$$
$$var(r_t) = \sigma^2 \; (varianza\ constante);$$
$$cov\ (r_t, r_{t+s}) = cov(r_t, r_{t-s}) = \gamma_s \; (covarianza\ depende\ de\ s, y\ no\ t)^7$$

[5] Esto no tiene por qué ser así, pero se hace el esfuerzo literario de cara a esclarecer algunos conceptos más abstractos, a lo largo del ensayo se irá dejando atrás este ejemplo puesto que el paradigma financiero es muy característico y tiene una cualidades muy concretas

[6] Este rasgo se aprecia mejor usando un correlograma, adjunto como Anexo I.

[7] (Carter Hill, Griffiths, & Lim, 2010 p. 477)

Sucesivamente se hará una aproximación conceptual a las dos primeras condiciones para facilitar la comprensión posterior de los comportamientos de la media y varianza en el modelo.

Se puede comprobar de forma sencilla si la media de la variable varía en el tiempo dividiendo la muestra en distintas sub-muestras y comprobando si las medias de las distintas sub-muestras son iguales. Nótese que esta comprobación no constituye un contraste de hipótesis formal, aunque constituya un indicador conveniente de cara a averiguar si la variable es estacionaria o no[8].

En este caso se divide la muestra en sub-muestras de un año y se compara la media de los tres primeros años, es decir, 1996, 1997 y 1998. Los resultados están reflejados en la Figura 2.

Sub-muestra	1996	1997	1998
Media	0,00173	0,00095	0,00109

Figura 2: Medias de variable rendimiento de para 1996, 1997 y 1998

Se ve claramente a partir de la tabla que la media de rendimiento diario no es constante en el tiempo. Esto se puede explicar diciendo que el rendimiento no "tiende" a adquirir valores similares a una media constante, por ejemplo, uno podría pensar que puesto que hay días que el rendimiento es positivo y otros que el rendimiento es negativo la media constante de la variable aleatoria r es 0, pero no es así. Es susceptible de interpretarse como que el punto de partida de cada periodo varía en base a la información disponible en el mercado. Cuando se entre a realizar el modelo ARCH se va a sugerir una ecuación del comportamiento que genera esta variable.

[8] En el Anexo II se adjunta un contraste aumentado Dickey-Fuller de estacionariedad.

Heterocedasticidad

Pasando a la segunda condición, la situación en la que las varianzas de la variable aleatoria r_t y el error aleatorio e_t son distintas para distintos periodos de la serie se conoce como heterocedasticidad. Esto significa que en un momento *t* el rango de valores que puede tomar *r* es distinto a el rango de valores que puede adoptar *r* en el momento *t+s*.

Una forma de detectar la presencia de este fenómeno es volviendo a la gráfica de la Figura 1 y viendo si el rango de rendimientos varía dentro de un margen constante. De cara a tener una imagen más clara se va a desglosar la gráfica de la Figura 1 en segmentos de tiempo más cortos donde se verá mejor como cambia la volatilidad en distintos periodos.

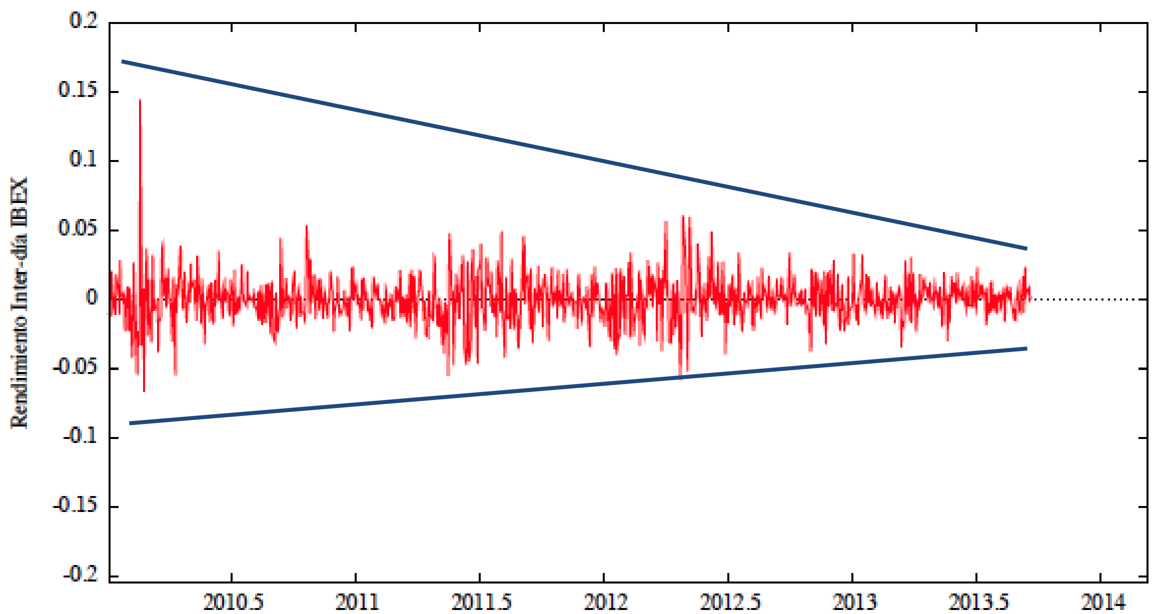


Figura 3: Rendimientos diarios del IBEX 35 desde enero 2010 hasta diciembre 2013

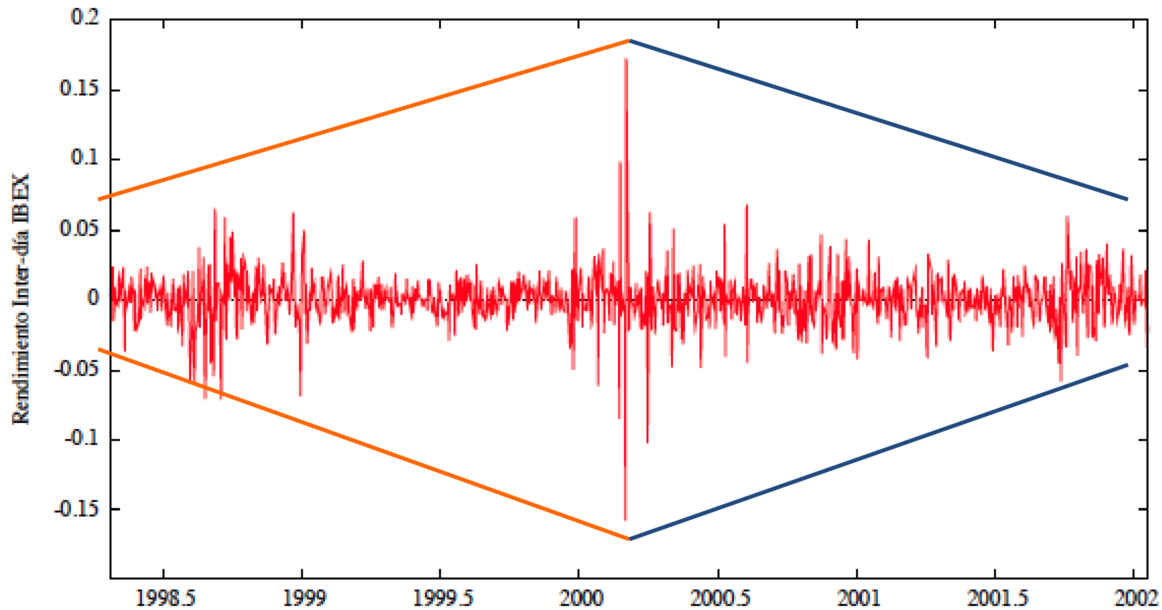


Figura 4: Rendimientos diarios del IBEX 35 desde junio 1998 hasta diciembre 2001

En la Figura 3 se aprecia cómo, en ese periodo, se está experimentando una reducción en varianza (o volatilidad), siguiendo con lo que se ha dicho supra, en este periodo hay una desacumulación o clúster negativo de volatilidad. Pero en la Figura 4 se puede ver incluso mejor, pues se perciben dos tendencias de varianza distintas; en la primera se ve una acumulación de volatilidad hasta principios del año 2000 (aproximadamente), y a partir de entonces la volatilidad de cada periodo sucesivo disminuye. Según se tomen sub-muestras mayores o más pequeñas se pueden percibir infinitas tendencias de volatilidad.

La acumulación (o clúster) de volatilidad está enormemente relacionada con los acontecimientos relevantes que ocurren en cada periodo. A título de ejemplo, en la Figura 4, que muestra el pasado más cercano vemos que, desde el inicio del año hasta el verano de 2012, hubo una acumulación de volatilidad en una época que se ponía en duda la unidad de la Unión Europea, las primas de riesgo estaban a niveles de máximos y el gobierno estaba siendo criticado por su inactividad y por haber una prohibición temporal de posiciones cortas en el mercado de valores. Más tarde hay un punto de inflexión a partir de cuando el presidente del Banco Central Europeo declara explícitamente su respaldo incondicional a la

Eurozona y que tomará las medidas necesarias para su salvaguardia. A partir de este momento se puede decir, con cierta seguridad, comienza una nueva época de estabilidad y optimismo moderado que permite una desacumulación del la volatilidad (riesgo) que había ido creciendo hasta entonces. Esto queda reflejado en la Figura 5.

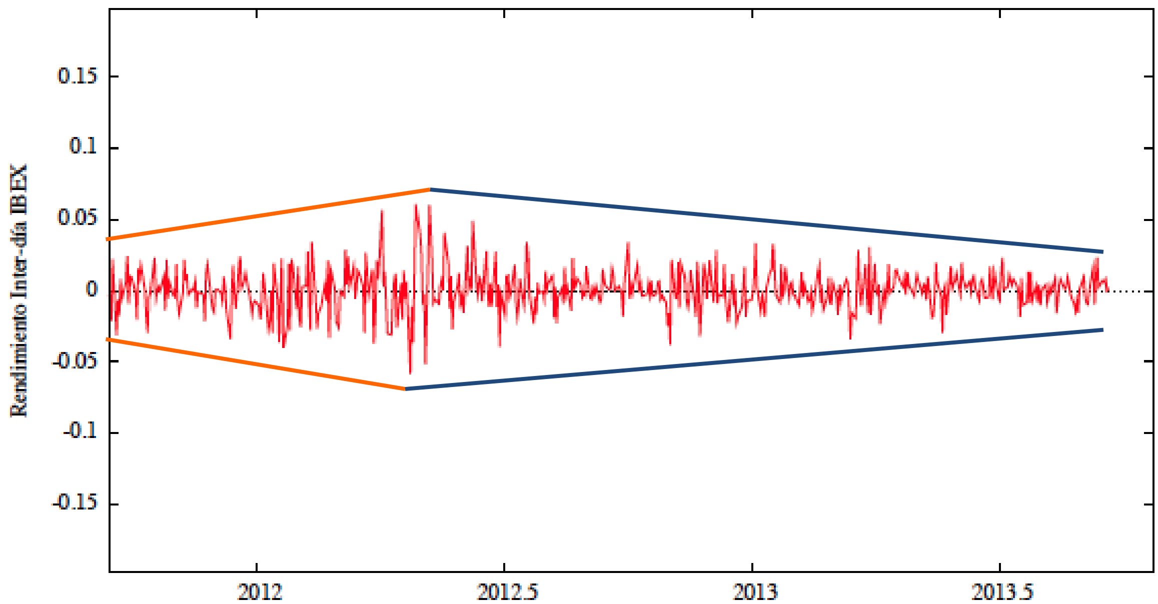


Figura 5: Rendimientos diarios del IBEX 35 desde septiembre 2011 hasta diciembre 2013.

La situación descrita no parece reflejada de forma exuberante en la Figura 5, pero como ya se ha dicho, existen infinidad de factores que influyen en los rendimientos, tanto en el muy corto plazo como en el medio o largo plazo, pero el ejemplo se propone pensando que es un acontecimiento clave en tanto en cuanto afectó (directa o indirectamente) a muchas variables a que a su vez afectan a los rendimientos bursátiles, ya sea a nivel psicológico del inversor o a nivel intrínseco a las empresa. Es por esto que cualquier tendencia sutil en una variable aleatoria no estacionaria resulta significativa o, por lo menos, digna de mención.

Una vez más, aunque resulta muy efectiva a la hora de explicar la presencia de heterocedasticidad en una serie temporal, lo expuesto no constituye un contraste formal para demostrar la no estacionariedad de la varianza. Para ello se aconseja llevar a cabo un contraste con el multiplicador de Lagrange o realizar el contraste de Goldfeld-Quandt.

1.2 KURTOSIS

La palabra kurtosis (o curtosis) tiene su raíz en la palabra griega *kurtos* que significa arqueado o curvo. La kurtosis no es otra cosa que una medida de la forma de una distribución de probabilidad de una variable aleatoria. En este caso se va a medir, en relación a una distribución probabilidades normal, en que medida "las colas"[9]son demasiado pesadas (los valores extremos son más probables de lo *normal)* o demasiado finas (los valores extremos de la variable son menos probables de lo normal). En el primer caso se estaría ante una distribución leptocúrtica .Dicho de otro modo, la curtosis de la distribución de probabilidades de los rendimientos es mayor que la curtosis normal (igual a 3), es decir habría en términos de curtosis un exceso de curtosis respecto de la distribución normal[10]. La segunda situación de colas más "finas" se denominaría platicúrtica, donde el nivel de curtosis es inferior al normal.

Al tratarse de una distribución leptocúrtica esto significa que se está ante un *exceso de curtosis*, donde cambios "medios" son menos habituales, de forma que se esperan cambios más "extremos" (grandes o pequeños) de lo que se esperaría si se tratase de una variable con distribución de probabilidades normal. Esto se debe a que el pico central es más esbelto y las colas son más gruesas y largas[11]. A título de anécdota, Sophia Grene, una periodista financiera hace cuenta de que, por considerarse que muchas variables financieras eran aleatorias, se asumía la hipótesis de distribución normal, lo cual supuso que se subestimase en muchos casos la probabilidad de catástrofe en muchos modelos (Grene).

[9] Técnicamente "las colas" constituyen el cuarto momento de la población si se sigue el método de los momentos de Pearson.

[10] A modo de aclaración, cuanto mayor sea el nivel de curtosis, mayor será la curvatura o apuntamiento de la distribución.

[11] Piénsese así, el área entorno a la media (pico central) se estrechado a expensas del crecimiento de las colas, siendo el área de la distribución la medida de probabilidad.

En la Figura 6 se proporciona el histograma de distribución de probabilidades de la variable aleatoria *r* y, superpuesta, se incluye la distribución normal.

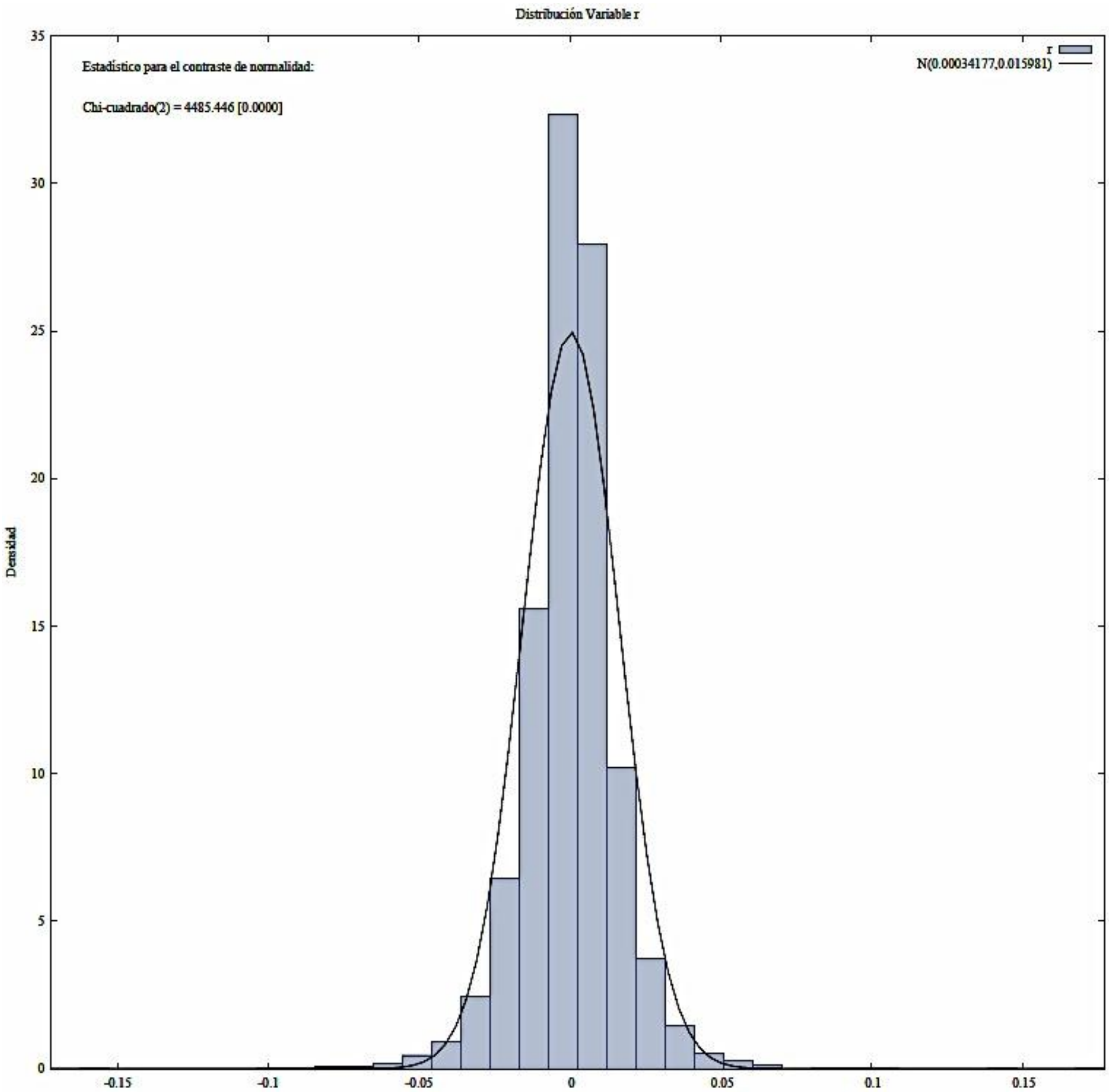


Figura 6: Distribución de probabilidades de *r* frente a distribución normal.

En el histograma se aprecia, primero, que entorno a la media la distribución de probabilidad es más alta de lo normal (nótese como el histograma supera de forma muy significativa la distribución normal); y, segundo, que en torno a las colas, aunque en menor medida que antes, el histograma también supera la distribución normal de probabilidad. Para r esto significa que tanto los cambios extremos como los cambios mínimos son más probables que bajo una distribución normal, y después, entre estos, son notablemente más probables los segundos.

De cara lo que se ha expuesto, se verifica que los cambios extremos son más probables de lo normal. Así, de esta forma también se deduce que, si las características de nuestra variable limitan sus fluctuaciones a ser "muy grandes" o "muy pequeñas", resulta razonable asumir la presencia de heterocedasticidad.

1.3 CLÚSTERES DE VOLATILIDAD

De alguna forma este rasgo ha sido explicado a través de los anteriores apartados, pero en realidad constituye uno de los principales objetos de estudio de los modelos ARCH y GARCH, por lo que cuando se llegue a la sección pertinente se explicará de forma más detallada y técnica.

Sin embargo, de cara a estar familiarizado conceptualmente con lo que significa exactamente se acude a uno de los primeros estudiosos que estudió este fenómeno, Benoît Mandelbrot, que explicó que "cambios grandes tienden estar seguidos de más cambios grandes, de cualquier signo, y los cambios pequeños tienden a estar seguidos de más cambios pequeños" (Mandelbrot, 1963). Este fenómeno se manifiesta de forma cuantitativa en tanto en cuanto que mientras los rendimientos en sí no están correlacionados, Mandelbrot se percató de que los rendimientos tomados como absolutos o al cuadrado muestran una autocorrelación positiva y significativa que se degrada lentamente. Esto, matemáticamente se expresa de la siguiente forma:

$$corr(|r_t|, |r_{t+s}|) > 0;$$

$$donde \text{ "s" } es\ una\ medida\ de\ tiempo$$

Aunque en el presente estudio no se va a explorar esta relación de los rendimientos absolutos, al enunciar esta otra forma de definir rendimientos (y por ende riesgo) se puede añadir una capa adicional de comprensión conceptual. A un nivel más básico, lo que sugiere Benoît Mandelbrot es que la magnitud o tamaño del efecto sí es predecible o explicable (o sea no aleatorio), mientras que la aleatoriedad está en la dirección de esta magnitud o, en otras palabras, de qué forma va a afectar al valor.

CAPÍTULO 2: MODELO ARCH

2.1 HISTORIA DEL MODELO

En ocasiones se subestima el valor educativo de la historia de muchas ciencias cuantitativas, sin embargo, para el objeto de estudio que se trata, su historia es quizás la forma más sencilla de entender su presente. Terry Pratchett, célebre escritor británico, elocuentemente dijo:

"*Es importante que se conozca de donde se viene, porque si no se sabe de donde se viene, entonces no sabes donde se está, y si no se sabe donde se está, no se sabe hacia donde se va. Y si no se sabe hacia donde se va, probablemente se va a donde no es*" (Pratchett, 2010, p. 124)

El modelo ARCH nació de una necesidad. Robert Engle, el artífice de este modelo, se encontraba en Inglaterra en 1979 buscando un modelo capaz de evaluar la tesis formulada por Milton Friedman en 1977. Dicha tesis estipulaba que la impredecibilidad de la inflación es una causa primaria del ciclo de negocio, se basaba en que, no era el nivel de inflación *per se* lo que suponía un problema, sino que la incertidumbre de costes y precios futuros impide a los inversores invertir, dando lugar así a una recesión.

Al explicar su tesitura, Engle aclara que, para que esta tesis fuera cierta, se debía asumir si la incertidumbre variaba en el tiempo, es decir, que hubiese heterocedasticidad. Tras explorar múltiples vías (que van más allá de este estudio) trabajó un contraste para modelos series temporales bilineales que se basaban en la dependencia a lo largo del tiempo de los residuos al cuadrado, aunque los residuos por sí solos no guardasen correlación[12]. Es decir, intentó modelar la parte no explicada de un modelo como si el negativo de una foto se tratase. El

[12] Se hace un inciso para señalar que esto se parece al planteamiento de Mandelbrot, donde en vez de tomar los rendimientos (como hizo Mandelbrot) se toman los residuos de un modelo de serie temporal.

planteamiento, a grandes rasgos, es el siguiente: si una variable aleatoria está formada una parte econométricamente o estadísticamente explicable y otra parte no explicable (su complementario), está segunda viene representada por el error aleatorio residuo. Supone una aproximación complementaria a la variable, que en términos económicos significa intentar modelar el riesgo en vez del rendimiento.

Antes de avanzar en la especificación del modelo, se define brevemente el concepto de modelo bilineal de series temporales. Por lo que aquí concierne son modelos donde, tanto la parte explicativa como la parte explicada, son lineales, cuando cualquiera de las dos venga dada (Granger & Andersen, 1978).

Engle adoptó este concepto, que ya comenzó a gestarse allá por 1963 con Mandelbrot (aunque éste no fuera plenamente consciente de ello) y encontró una solución a su dilema inicial, el modelo ARCH. Su nombre proviene de las siglas en inglés de *Autoregressive Conditional Heteroskedasticity,* que se traduce a heterocedasticidad condicional autoregresiva. Esencialmente, este modelo describe la varianza esperada a partir de términos observables, su funcionamiento se basa en tomar las medias ponderadas de los errores de estimación elevados al cuadrado, donde se puede dar más peso a información más reciente respecto a información más antigua. Engle aclara que "el modelo ARCH era un simple generalización de la varianza muestral[13]" (Engle, 2003, p. 328).

La verdadera innovación, sin embargo, llegó cuando dichas ponderaciones podían estimarse a partir de datos históricos, a pesar de que en ningún momento se observase la volatilidad real. El propio Engle lo explica de la siguiente forma en este extracto de su discurso:

"Se pueden calcular las predicciones para todos los días o todos los periodos. Al examinar estas predicciones con distintos pesos, el conjunto de pesos se puede averiguar de forma que

[13] $\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}{N}$; *donde* $\bar{x}$ *es la media muestral y* N *es el tamaño de la muestra.*

las predicciones se aproximen lo máximo posible a la varianza del próximo rendimiento.” (Engle, 2003, p. 328)

Este proceso se basa en un modelo de máxima verosimilitud y ofrece un procedimiento sistemático para establecer la combinación óptima de ponderaciones. Una vez determinados los pesos de cada predicción, se puede usar este modelo dinámico de volatilidades variables en el tiempo para medir la volatilidad en cualquier momento e incluso predecirla en el futuro.

Fue así como vino a ser el modelo ARCH, y el primer modelo, estrictamente hablando, apareció en 1982 y fue elaborado por Frank Srba con el objetivo de contestar la conjetura de Friedman. El resultado fue que se confirmó la heterocedasticidad de la inflación pero se desmintió que ésta guardase relación con el ciclo de negocios la economía británica.

A modo de conclusión a esta sucinta historia del modelo ARCH, se alude al hecho que, aunque el binomio rentabilidad-riesgo es una premisa esencial de la teoría macroeconómica, sus implicaciones empíricas van siempre revestidas de consecuencias de otros efectos dominantes. El hecho que en el ámbito más macroeconómico las variables utilizadas sean de baja frecuencia (es decir, que se toman periodos largos entre observaciones, por ejemplo la inflación se obtiene cada año o trimestre, y no día a día) hace que sea más difícil discernir la causalidad de tales efectos. Sin embargo en el ámbito más financiero y bursátil, al usar variables de (muy) alta frecuencia, uno se encuentra en un entorno perfecto para desarrollar este tipo de modelo. En esto último yace el por qué de la metodología escogida.

2.2 ESPECIFICACIÓN DEL MODELO ARCH

Sabido de donde se viene, ya se puede proceder hacia el objetivo establecido. La hipótesis nula del modelo será que no existe un proceso ARCH en la serie temporal mientras que la hipótesis alternativa es que sí existe tal proceso, se rechazará la hipótesis nula si el p valor asignado a los parámetros es igual o menor al nivel de significación establecido para el modelo. El p valor, en otras palabras, indica la probabilidad de obtener el resultado del parámetro suponiendo que la hipótesis nula es cierta[14], entonces, si el p valor es menor que el nivel de significación se entiende que dicha hipótesis es falsa[15].

El modelo básico ARCH, sobre el cual se va a elaborar hasta llegar a una medida de riesgo, es el siguiente:

$$r_t = m + e_t;$$

$$e_t | I_{t-1} \sim N(0, h_t);$$

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 e^2{}_{t-1} \quad donde \quad \alpha_0 > 0, \quad 0 \leq \alpha_1 < 1$$

La primera ecuación es la que describe el comportamiento de los rendimientos, *r,* en la serie temporal. Indica en este caso que se espera que la serie temporal varíe de forma aleatoria en torno a su media, en este caso m[16]. En otras palabras, cada observación o término de la serie se obtiene sumando a la media m un error aleatorio e_t en cada periodo *t.* Conste que esta media no es constante (recuérdese su cualidad de no estacionaria), y viene generado por un proceso estocástico (o creador) en el que no se va a indagar, pero en el caso que viniera explicada por variables conocidas, éstos se sustituirían dentro de la ecuación primera.

[14] Suponiendo que no existe un proceso ARCH en nuestro caso.

[15] Cabe mencionar que, aunque sea extremadamente improbable, se puede haber obtenido un resultado atípico y se rechace erróneamente la hipótesis nula. Este error se denomina error de tipo I o error alfa.

[16] Se usa la notación tradicionalmente usada en el mundo financiero.

La segunda ecuación indica que el error de la regresión, e_t, sigue una distribución de probabilidades normal y es heterocedástico. Se explica en tanto en cuento la varianza del error del periodo depende de la información, *I*, revelada o disponible en el momento *t-1,* siendo h_t la varianza del error en el momento *t.* La ecuación por lo tanto se leería de la siguiente forma: *el error del término en el momento t, dada la información del momento t-1, sigue una distribución normal con media 0 y varianza h en el momento t.*

La tercera y última ecuación, en cambio, explica cómo se comporta la varianza del error aleatorio. Es aquí donde vemos que la varianza h_t depende del error (al cuadrado) del periodo anterior, que se ve es una variable explicativa con un parámetro α_1 con valor entre 0 y 1. Con respecto a lo dicho supra, este parámetro constituye el peso óptimo del error periodo anterior. Tanto el parámetro α_1, como la constante de la regresión α_0, deben ser positivos para que haya una varianza positiva del error. La varianza no puede ser nunca negativa puesto que se trata de la suma de cuadrados dividido por el tamaño de la muestra menos uno; los cuadrados no serán nunca negativos, por lo que tampoco lo será nunca su suma.

Pero si se ha dicho antes que se le atribuyen pesos, plural, a los errores previos, ¿por qué aquí sólo se toma el error previo? La respuesta a esta pregunta da pie a la explicación del orden (q) del modelo ARCH.

El orden del modelo ARCH determina cuántos lapsos (en periodos) en el pasado se retrocede a la hora de obtener el error. En el modelo especificado se toma solo u lapso por lo que es un modelo de orden *q=1,* ergo se trata de un modelo ARCH(1). Si se tratara de un modelo ARCH (2) la tercera ecuación sería la siguiente:

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 {e^2}_{t-1} + \alpha_2 {e^2}_{t-2}$$

$$donde \quad \alpha_0 > 0, \qquad 0 \le \alpha_1 < 1, \qquad 0 \le \alpha_2 < 1$$

Se realiza un breve hiato para apreciar cómo esto tiene que ver con la mitología a la que se alude en la introducción. Ya se ha especificado el modelo básico, y en él se han establecido una serie de axiomas o condiciones que definen el paradigma bajo el que va a trabajar. Los mitos en la antigüedad comenzaban con una puesta en escena, una introducción o inmersión en un mundo que, aunque se asemeja al mundo en el que el receptor y narrador viven, no es real, se simplificaban enormemente de cara a desechar lo menos relevante o lo que pudiera confundir al público.

Pues bien, esta es una forma de entender un modelo econométrico, las asunciones realizadas sirven al económetra para acotar el escenario y ensalzar las condiciones de ciertos factores, al igual que en la antigua Grecia los contadores de mitos definían a sus héroes por cualidades concisas sin entrar a divagar sobre el contenido de su persona. Esto, sin embargo, no significa que sea todo una ficción en el sentido que es inventado y por tanto inválido a la hora de esbozar conclusiones sobre el mundo real. Por ejemplo, lo más probable es que los errores aleatorios no sigan una distribución normal, tal y como se asume, pero simplifica la tarea para el investigador a la hora elaborar un proceso o modelo para adquirir conocimiento sobre riesgo financiero.

En un universo que tiende al caos, un error que puede cometer un económetra es pensar que puede llegar a explicar algo en toda su complejidad. Con estados perpetuamente cambiantes, el mundo científico cada vez es más consciente de lo poco que se conoce sobre el funcionamiento de nuestro entorno. Pero eso no significa que no se pueda aprender algo útil de estas simplificaciones de la realidad o abstracciones. Una variable puede ser explicada realizando muchas asunciones y siempre va a haber un error aleatorio. La virtud en esta ciencia yace en intentar cuantificar esa incertidumbre para optimizar el comportamiento; al igual que el público de un mito debe discernir entre la parte más fantástica del contenido de valor para su aprendizaje.

Volviendo a la parte cuantitativa de nuestro estudio, en base a los datos disponibles del IBEX 35, el modelo ARCH(1) obtenido se muestra en la Figura 7 a continuación:

```
Modelo 1: GARCH, usando las observaciones 1996/01/04-2013/09/20 (T = 4622)
Variable dependiente: r
Desviaciones típicas basadas en el Hessiano

             Coeficiente   Desv. Típica     z       Valor p
  ---------------------------------------------------------
  const      0.000607948   0.000213289     2.850   0.0044    ***

  alpha(0)   0.000184380   5.01167e-06    36.79    2.65e-296 ***
  alpha(1)   0.276647      0.0250840      11.03    2.77e-28  ***

Media de la vble. dep.  0.000342   D.T. de la vble. dep.   0.015981
Log-verosimilitud       12790.36   Criterio de Akaike     -25572.72
Criterio de Schwarz    -25546.96   Crit. de Hannan-Quinn  -25563.66

Varianza incondicional del error = 0.000254897
Contraste de razón de verosimilitudes para los términos (G)ARCH:
  Chi-cuadrado(1) = 459.992 [4.82687e-102]
```
Figura 7: Modelo ARCH(1)

En base al resultado el modelo resultante es el siguiente:

$$\widehat{h_t} = 0.000607948 + 0.276647{e^2}_{t-1}$$

Inmediatamente se ve que, en base a los p-valores correspondientes, que los parámetros obtenidos son significativos, es decir, se rechaza la hipótesis nula con un nivel de significación muy bajo en este caso. Más tarde cuando se comparen los distintos modelos que se irán obteniendo se compararán los distintos estadísticos que se proporcionan de cara a evaluar cual es el mejor modelo. A estas alturas basta con saber que según este modelo la varianza del error en el momento *t* está explicado en un 27,7% por el error del periodo anterior al cuadrado (más la constante).

El modelo también ofrece una media estimada de la serie, que en este caso es 0.000607948.

2.3 PREDICCIÓN DE VOLATILIDAD ARCH(1)

Llegado a este punto se puede hacer una predicción de volatilidad de la siguiente forma:

$$\hat{r}_{t+1} = \widehat{m}_0 = 0.000607948;$$

$$\hat{h}_{t+1} = \widehat{\alpha_0} + \widehat{\alpha_1}(r_t - \widehat{m}_0)^2$$

$$\hat{h}_{t+1} = 0.000607948 + 0.276647(r_t - 0.000607948)^2$$

La primera ecuación da el rendimiento estimado que (debido a que no cambia en el tiempo) es tanto el rendimiento medio condicional como el rendimiento medio incondicional. En la segunda ecuación en cambio llama la atención como el error estimado en el periodo *t* viene dado por $r_t - \widehat{m}_0$ y se usa para obtener la varianza condicional. La Figura 8 es un gráfico de la varianza condicional de los errores donde se ve de qué forma varía la varianza en el tiempo[17].

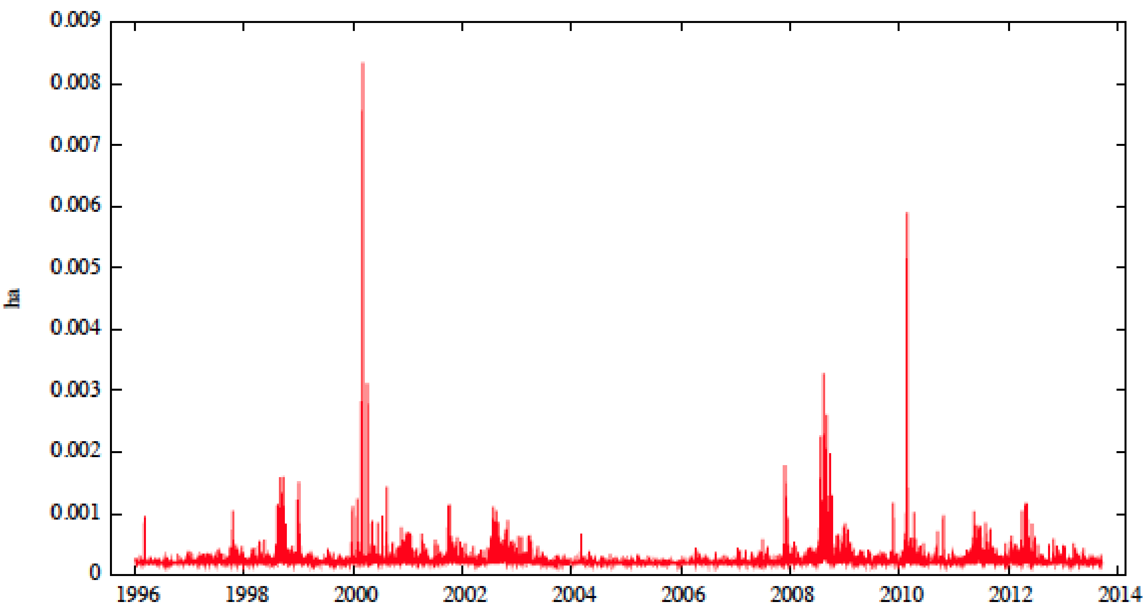


Figura 8: Gráfico de varianzas condicionales

[17] Véase, en relación con la Figura 1, cómo coinciden los periodos de alta varianza condicional con los momentos mucha volatilidad de rendimientos calculados del IBEX 35.

2.4 CONTRASTE DE ARCH ORDEN 1

Para concluir este primer modelo básico se va a realizar un contraste ARCH donde la hipótesis nula va a ser que, efectivamente, no hay efecto ARCH en los errores del modelo especificado. Consecuentemente, la hipótesis alternativa va a ser que sí existe un efecto ARCH de orden 1 en los errores del modelo. Lo que hace este contraste es una regresión a partir de los residuos al cuadrado del modelo con un periodo de retardo.

```
resultado gretl para Pablo Garnica 2014-02-27 13:50 página 1 de 1

Contraste de ARCH de orden 1

             Coeficiente   Desv. Típica   Estadístico t    Valor p
  ----------------------------------------------------------------
  alpha(0)   0.000172393   1.27065e-05        13.57       3.81e-41  ***
  alpha(1)   0.324937      0.0139155          23.35       4.35e-114 ***

  Hipótesis nula: no hay efecto ARCH
  Estadístico de contraste: LM = 487.898
  con valor p  = P(Chi-cuadrado(1) > 487.898) = 4.08431e-108
```

Figura 9: Contraste ARCH(1)

El modelo resultante del contraste es el siguiente:

$$\hat{e}_t = \alpha_0 + \alpha_1 \hat{e}_{t-1} + u_t$$

Se sigue la misma dinámica que con el modelo anterior, una vez más los p valor indican un rechazo de la hipótesis nula puesto que los parámetros son significativos con contundencia y una muy baja probabilidad de error de tipo I. Se aprecia entonces que el error estimado en el periodo *t* está explicado en un 32,49% por el error estimado en el momento *t-1,* siendo u_t el residuo o error aleatorio de la regresión.

CAPÍTULO 3: MODELO GARCH (1,1)

3.1 GENERALIZACIÓN DEL MODELO ARCH

En 1986, Tim Bollerslev, un alumno de Engle, fue autor del desarrollo quizás más importante del modelo ARCH de Engle. Ya hubo antes generalizaciones de esquemas de ponderaciones de los parámetros ARCH, pero a día de hoy el modelo GARCH de Bollerslev es el más utilizado.

Una de las principales desventajas del modelo ARCH (q) es que se tienen que estimar q parámetros más uno (la constante) y en cuanto q es grande se pierde precisión en la estimación. Lo que permite el modelo generalizado es capturar un gran número de retardos con unos pocos parámetros. Se puede entonces explicar de esta forma:

Si un modelo ARCH (q) viene dado por:

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 e^2{}_{t-1} + \alpha_2 e^2{}_{t-2} \ldots + \alpha_q e^2{}_{t-q}$$

Esto se puede reescribir:

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 e^2{}_{t-1} + \beta_1 \alpha_1 e^2{}_{t-2} + \beta_1^2 \alpha_1 e^2{}_{t-3} + \cdots$$

Lo que se ha hecho es aplicar una estructura de retardos geométrico donde ($\alpha_s = \alpha_1 \beta_1^{s-1}$), al cual, si se le resta $\beta_1 \alpha_0$ y se reordena, se obtiene:

$$h_t = (\alpha_0 - \beta_1 \alpha_0) + \alpha_1 e^2{}_{t-1} + \beta_1 (\alpha_0 + \alpha_1 e^2{}_{t-2} + \alpha_2 e^2{}_{t-3} + \cdots)$$

Finalmente como $h_{t-1} = \alpha_0 + \alpha_1 e^2{}_{t-2} + \beta_1 \alpha_1 e^2{}_{t-3} + \beta_1^2 \alpha_1 e^2{}_{t-4} + \cdots$ se puede simplificar lo anterior como:

$$h_t = \delta + \alpha_1 e^2{}_{t-1} + \beta\,{}_t h_{t-1}$$

$$donde\ \delta = (\alpha_0 - \beta_1 \alpha_0)$$

Un modelo GARCH (1,1) resulta sencillo a nivel intuitivo si se ha entendido bien el modelo ARCH. La predicción de varianza del modelo GARCH es una media ponderada de tres predicciones de varianza. Por un lado se tiene una varianza a largo plazo constante (δ), calculada por supuesto a partir de los datos históricos; por otro lado, la segunda predicción es la predicción realizada en el periodo anterior o *t-1* (h_{t-1}); y finalmente el tercer término de la media ponderada es aquél que refleja la información nuevamente disponible ($e^2{}_{t-1}$), información que no se tenía al realizar la predicción anterior. El propio Engle explica este último término diciendo que es “una predicción de varianza basado en un periodo de información” (Engle, 2003, p. 329).

Será la ponderación de estos tres términos la que determinará el ritmo de cambio de varianza a medida que haya nueva información disponible, así como lo “rápido” que la varianza tiende a la media a largo plazo.

En breve, el modelo GARCH generaliza un modelo puramente autoregresivo en un modelo autoregresivo de media móvil. Se asume que los pesos de los errores aleatorios al cuadrado van decreciendo geométricamente a un ritmo determinado que se deduce de los datos históricos, sin nunca llegar a adoptar el valor 0.

Como más tarde se expondrá, existen modelos más específicos que describen mejor ciertas situaciones de incertidumbre y varianza de rendimientos de activos financieros, pero el modelo GARCH es un buen punto de partida. Sin embargo cabe preguntarse cómo un único modelo puede ser utilizado para modelar la dinámica de volatilidad de activos tan heterogéneos en mercados tan distintos. Para explicar esto se citará a Engle una vez más, que en siguiente extracto explica el por qué de la volatilidad de precios en términos generales.

"*Al desarrollar esta teoría, debemos entender primero por qué cambian los precios de activos. Los activos financieros se compran y adquieren en base a pagos futuros esperados. Debido a que estos pagos son inciertos y dependen de eventos futuros desconocidos, el precio justo del activo requerirá la predicción de distribución de estos pagos en base a la mejor información disponible hoy. A medida que el tiempo pasa, obtenemos más información sobre estos eventos futuros y se revalúa el activo. Así pues, a un nivel básico, la volatilidad de precios financieros se debe a la llegada de información nueva. Los clústeres de volatilidad no son más que llegadas de acumulaciones de información*." (Engle, 2003, p. 330)

En cuanto al fenómeno de acumulación de volatilidad, se aprecia esto que explica Engle a un nivel más básico cuando se ve que en los mercados bursátiles, los lunes suelen ser días de, en términos relativos, más volatilidad puesto que la información revelada en los días que el mercado estaba cerrado se ha ido acumulando hasta la apertura del lunes.

3.2 MODELO GARCH (1,1)

Llegados a la especificación del modelo, vista la especificación de un proceso ARCH (1), sirven muchos de los conceptos ya expuestos. Las hipótesis son similares; la hipótesis nula establece que no existe un modelo GARCH en la serie temporal, o que ni el término ARCH ni el término GARCH de la regresión (que más tarde se explican) son significativos a la hora de explicar o determinar la varianza los errores aleatorios. Al contrario, la hipótesis alternativa que se aceptará, si así nos lo indica el p valor obtenido, es que sí existe efectivamente este proceso GARCH en la serie, de forma que, tanto el término ARCH como el término GARCH son explicativos de la volatilidad del rendimiento del activo en última instancia. El modelo GARCH (1,1) es el siguiente:

$$r_t = m + e_t;$$

$$e_t | I_{t-1} \sim N(0, h_t);$$

$$h_t = \delta + \alpha_1 e^2{}_{t-1} + \beta_1 h_{t-1}$$

$$donde \quad \alpha_0 > 0, \quad 0 \leq \alpha_1 < 1, \quad 0 \leq \beta_1 < 1$$

Antes de proseguir, como se hizo en la exposición del modelo ARCH (1), se va a dedicar un instante a explicar el funcionamiento y lógica tras el orden de un modelo GARCH (*p, q*). El modelo GARCH (1,1) se puede considerar a su vez un caso especial de un modelo generalizado de GARCH (*p, q*), donde *p* es el número de retardos de *h*; y *q* es el numero de retardos de e^2. Otra forma de verlo es decir que *p* muestra el número de términos GARCH ($\beta_1 h_{t-1}$) en el modelo mientras *q* establece el número de términos ARCH ($\alpha_1 e^2{}_{t-1}$) en el modelo. A continuación, en la Figura se presenta el modelo concreto obtenido a partir de los datos del IBEX 35:

```
Evaluaciones de la función: 212
Evaluaciones del gradiente: 30

Modelo 2: GARCH, usando las observaciones 1996/01/04-2013/09/20 (T = 4622)
Variable dependiente: r
Desviaciones típicas basadas en el Hessiano

             Coeficiente   Desv. Típica      z      Valor p
  -----------------------------------------------------------
  const      0.000847761   0.000163386      5.189   2.12e-07 ***

  alpha(0)   2.02280e-06   4.19334e-07      4.824   1.41e-06 ***
  alpha(1)   0.0975899     0.00844967      11.55    7.42e-31 ***
  beta(1)    0.898456      0.00822399     109.2     0.0000   ***

Media de la vble. dep.  0.000342   D.T. de la vble. dep.   0.015981
Log-verosimilitud       13392.35   Criterio de Akaike     -26774.71
Criterio de Schwarz    -26742.51   Crit. de Hannan-Quinn  -26763.38

Varianza incondicional del error = 0.000511517
Contraste de razón de verosimilitudes para los términos (G)ARCH:
  Chi-cuadrado(2) = 1663.98 [0]
```

Figura 10: Modelo GARCH (1,1)

Siguiendo la estructura descrita, el modelo obtenido es el siguiente:

$$\hat{r}_t = \widehat{m}_0 = 0.0000847761$$

$$\widehat{h_t} = 2.0228 \times 10^{-6} + 0.0975899{e^2}_{t-1} + 0.898456h_{t-1}$$

Los niveles de los p valor atribuidos a cada parámetro, una vez más, llevan a rechazar con contundencia la hipótesis nula. En este caso la media de rendimientos dada es 0.0000847761, o 0.0085% y la varianza viene explicada: primero, en un 9,76% por información nueva disponible de este periodo; segundo, en un 89,85% por la predicción anterior; y la media a largo plazo de la varianza de la serie dada es 2.0228×10^{-6} (muy próxima a 0).

A primera vista ya se aprecia que la inserción del término GARCH ofrece una explicación más detallada de lo que afecta a la volatilidad de rendimientos del IBEX 35 en base a, primero la magnitud del parámetro, y segundo el p valor de 0,0000. Cuando ya hayan especificado todos los modelos, en base a los estadísticos de contraste obtenidos, se evaluará la precisión y calidad del modelo en general.

En la Figura 11 se ofrece un gráfico mostrando la evolución de la varianza del error en el tiempo según este segundo modelo especificado.

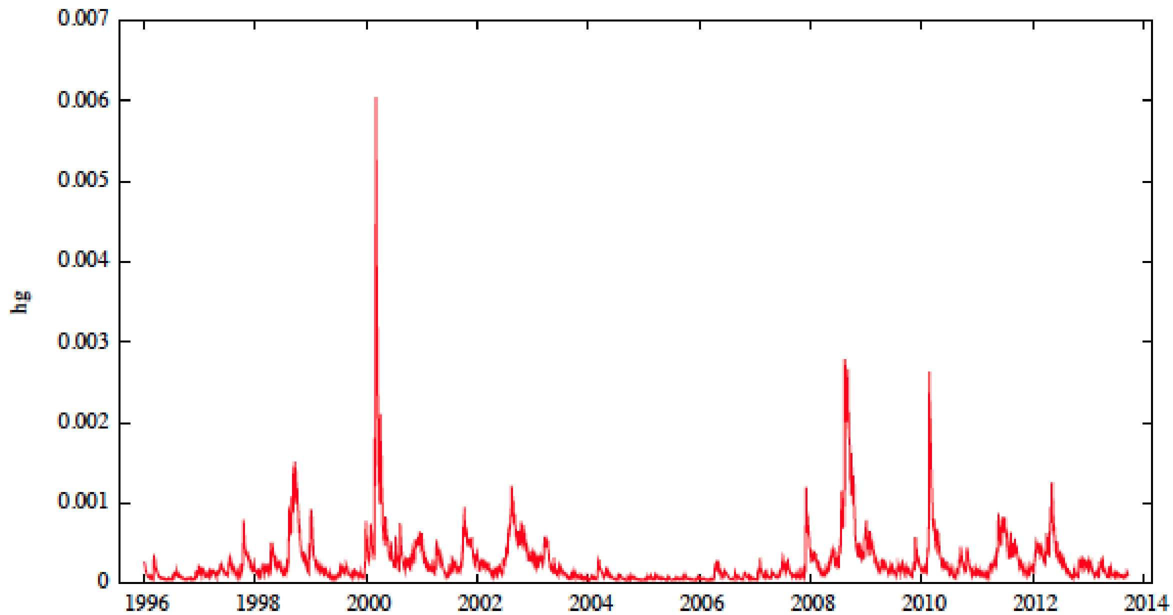
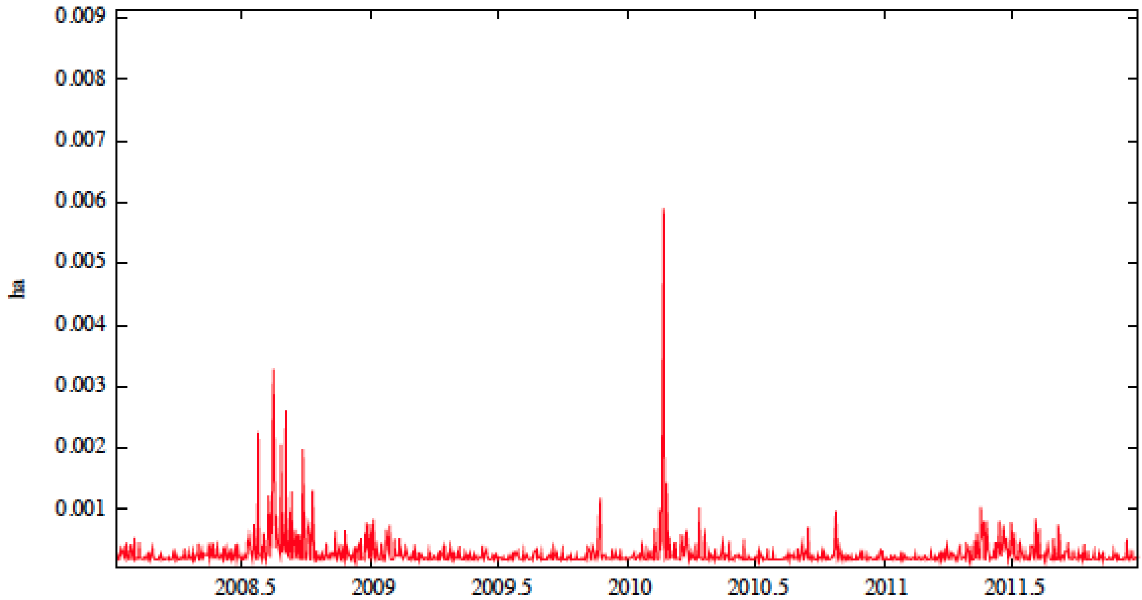
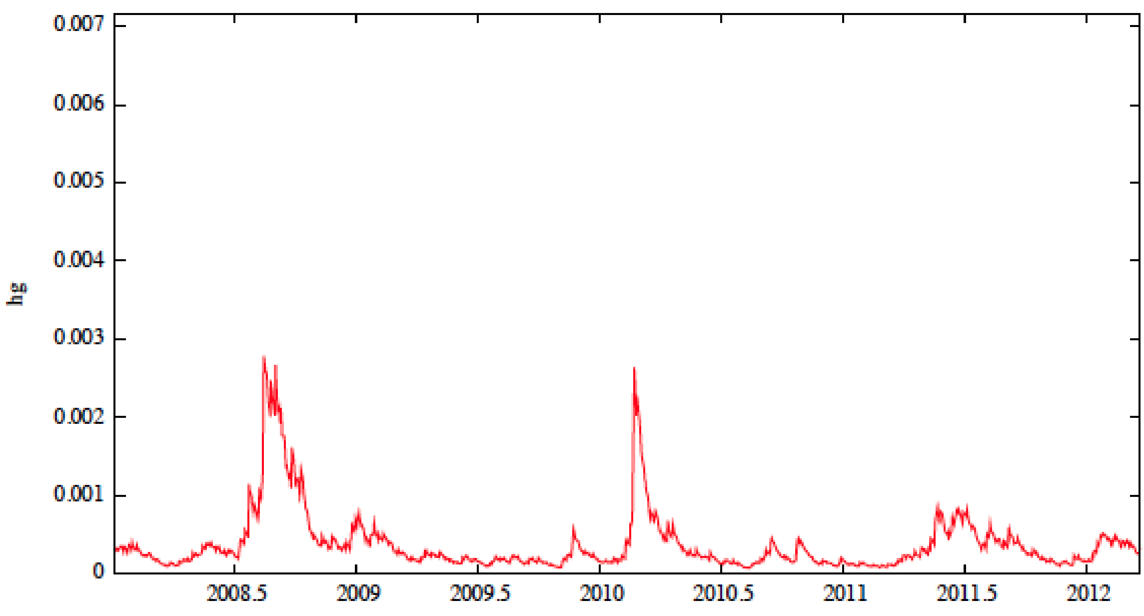


Figura 11: Gráfico de varianzas condicionales GARCH(1,1)

Como era de esperar cuenta con una forma similar a la presente en el gráfico obtenido en la Figura 8 para un modelo ARCH (1), pero sí es cierto que el gráfico de varianzas condicionales obtenido a partir de un modelo GARCH(1,1) muestra menos ruido, en tanto en cuanto se muestra más fluido o más estable. Esto puede ser interpretado como que el modelo GARCH (1,1) ofrece una explicación más clara. A título ilustrativo se incluye en la Figura 12 una contraposición de segmentos más concretos de las Figuras 8 y 11 para dejar patente esto último.



A) $\widehat{h_t} = 0.000607948 + 0.276647{e^2}_{t-1}$



B) $\widehat{h_t} = 2.0228 \times 10^{-6} + 0.0975899{e^2}_{t-1} + 0.898456h_{t-1}$

Figura 12: Comparación de varianzas condicionales de 2008 a 2012.

3.3 PREDICCIÓN DE VOLATILIDAD GARCH(1,1)

Al igual que con el modelo ARCH(1) a continuación se especifica lo que serían las predicciones de rendimientos y volatilidad según los parámetros que se han obtenido usando el modelo GARCH (1,1).

$$\hat{r}_{t+1} = \hat{m}_0 = 0.0000847761;$$

$$\hat{h}_{t+1} = \widehat{\alpha_0} + \widehat{\alpha_1}(r_t - \hat{m}_0)^2 + \beta_1 h_t$$

$$\hat{h}_{t+1} = 02.0228 \times 10^{-6} + 0.0975899(r_t - 0.0000847761)^2 + 0.898456 h_t$$

Nótese que dicha predicción solo podrá realizarse si se cumple que $\alpha + \beta < 1$, y realmente sólo tendrá sentido si $\alpha_0 > 0, \beta > 0 \; y \; \alpha_1 > 0$.

Aunque este modelo esté preparado para estimar para solo un periodo, se puede realizar una estimación de dos periodos, es más, repitiendo este proceso se puede obtener predicciones con horizontes temporales lejanos. A medida que se aumenta el periodo de estimación, la varianza obtenida se aproximará más a la media a largo plazo y la estimación en un horizonte lejano es igual para todos los periodos siempre que se cumpla la ya citada condición de que $\alpha + \beta < 1$. Esta varianza entonces la varianza incondicional, es decir, aquella varianza independiente de la información disponible en el último periodo. Se concluye a partir de estas cualidades del modelo que los modelos GARCH (*p, q)* revierten a la media y son condicionalmente heterocedásticos, pero tienen una varianza incondicional constante.

Trasladando estos hallazgos al mundo financiero se concluye que no toda la volatilidad procede de nuevos hitos que informan el mercado, es decir, que los activos financieros tienen una volatilidad inherente en todo momento.

Otra cuestión es si esta volatilidad incondicional se deriva del activo en sí y sus características o si es una aglomeración de las secuelas de hitos pasados. El modelo no es capaz de aclarar esta cuestión, pero si se tuviera que esbozar una tesis a un nivel más conceptual que cuantitativo se podría decir que es una combinación de las dos. En un entorno económico donde cada vez más se está *comoditizando* los activos financieros, perdiendo la noción del activo subyacente *per se* que dio origen a los mismos, quizás ha llegado el momento de dejar de considerar a los activos como *proxys* de algo tangible y comenzar a pensar en ellos como masas de información que están en cambio constante.

Al final esta tesis es capaz de satisfacer las dos hipótesis postuladas puesto que la varianza incondicional vendría de la información pasada, que a su vez forma parte de lo que puede considerarse parte del activo. La paradoja está en que al ser información ya pasada, la incertidumbre debería desparecer. Aunque sea un modelo muy extendido y útil, no deja de tener sus limitaciones.

CAPÍTULO 4: OTROS MODELOS GARCH

En el capítulo anterior se ha delineado el proceso de generalización del modelo ARCH y descrito la dinámica de un modelo autoregresivo de heterocedasticidad condicional generalizado de orden (1,1). A partir de este punto se va a intentar concretar la dinámica de volatilidad de rendimientos del IBEX 35. En primer lugar se va a ver si modelos GARCH de distinto orden explican mejor o con más contundencia el riesgo.

4.1 MODELO GARCH (2,1)

Se pasa directamente a la especificación del modelo GARCH (2,1) y la exposición de los resultados obtenidos. Esta vez se tendrán dos términos GARCH (o dos retardos de h_t) manteniendo solo un término ARCH (un retardo del error aleatorio al cuadrado del periodo anterior).

$$r_t = m + e_t;$$

$$e_t | I_{t-1} \sim N(0, h_t);$$

$$h_t = \delta + \alpha_1 e^2{}_{t-1} + \beta_1 h_{t-1} + \beta_2 h_{t-2}$$

$$donde \quad \alpha_0 > 0, \quad 0 \leq \alpha_1 < 1, \quad 0 \leq \beta_1 < 1, \quad 0 \leq \beta_2 < 1$$

```
Evaluaciones de la función: 230
Evaluaciones del gradiente: 43

Modelo 4: GARCH, usando las observaciones 1996/01/04-2013/09/20 (T = 4622)
Variable dependiente: r
Desviaciones típicas basadas en el Hessiano

             Coeficiente   Desv. Típica      z       Valor p
  ----------------------------------------------------------
  const      0.000847963   0.000163433    5.188       2.12e-07 ***

  alpha(0)   2.02289e-06   4.95874e-07    4.079       4.51e-05 ***
  alpha(1)   0.0975721     0.0164580      5.929       3.06e-09 ***
  beta(1)    0.898469      0.193302       4.648       3.35e-06 ***
  beta(2)    6.56519e-11   0.178371       3.681e-10   1.0000

Media de la vble. dep.  0.000342   D.T. de la vble. dep.   0.015981
Log-verosimilitud       13392.35   Criterio de Akaike     -26772.71
Criterio de Schwarz    -26734.07   Crit. de Hannan-Quinn  -26759.11

Varianza incondicional del error = 0.000510934
Contraste de razón de verosimilitudes para los términos (G)ARCH:
  Chi-cuadrado(3) = 1663.98 [0]
```
Figura 14: Modelo GARCH (2,1)

El modelo resultante a priori es el siguiente:

$$\hat{r}_t = \hat{m}_0 = 0.0000847963$$

$$\widehat{h_t} = 2.02289 \times 10^{-6} + 0.0975721{e^2}_{t-1} + 0.898469h_{t-1} + 6.56519 \times 10^{-11}h_{t-2}$$

Los resultados obtenidos muestran que un segundo retardo de la varianza estimada no es significativo a la hora de explicar la varianza del periodo presente, con un p valor de 1 se rechaza completamente la hipótesis que este segundo término GARCH sea distinto de 0. De esta forma el modelo definitivo sería:

$$\widehat{h_t} = 2.02289 \times 10^{-6} + 0.0975721{e^2}_{t-1} + 0.898469h_{t-1}$$

Dicho modelo es prácticamente idéntico al modelo GARCH (1,1) excepto que los p valores obtenidos para cada parámetro (es decir, la probabilidad de que se rechace la hipótesis nula para cada parámetro cuando esta en realidad es verdadera) son más contundentes (menores) en el modelo de orden (1,1) que en el modelo (2,1). La otra diferencia que se puede apreciar es que la varianza incondicional del modelo es menor en el modelo de orden (2,1), sin embargo la diferencia no parece ser relevante y puede ser consecuencia de diferencias estructurales del modelo[18]. Aunque luego se verá en más detalle y en relación de los modelos, se puede concluir con un grado razonable de significación que este modelo no supone una mejora sobre el anterior.

En otras palabras, lo que significan estos resultados es que la predicción de hace dos periodos no sirve para intentar predecir o estimar la volatilidad según este modelo.

4.2 MODELO GARCH (1,2)

Se prueba ahora la combinación de un modelo de orden (1,2) es decir, se va a tomar solo un término GARCH y dos términos ARCH (dos retardos autoregresivos del error aleatorio del periodo anterior al cuadrado). El modelo resultante es el siguiente:

$$r_t = m + e_t;$$

$$e_t | I_{t-1} \sim N(0, h_t);$$

$$h_t = \delta + \alpha_1 e^2{}_{t-1} + \beta_1 h_{t-1} + \alpha_2 e^2{}_{t-2}$$

$$donde \quad \alpha_0 > 0, \quad 0 \leq \alpha_1 < 1, \quad 0 \leq \beta_1 < 1, \quad 0 \leq \alpha_2 < 1$$

[18] La varianza incondicional en el modelo GARCH (1,1) se expresa mediante la expresión: $\frac{\alpha_0}{1-\alpha_1-\beta_1}$; mientras que en el modelo GARCH (2,1) la se obtiene desde: $\frac{\alpha_0}{1-\alpha_1-\beta_1-\beta_2}$. La presencia de otro término en el denominador del cociente reduce, necesariamente, su valor sin que haya un motivo subyacente relevante.

```
Evaluaciones de la función: 140
Evaluaciones del gradiente: 23

Modelo 5: GARCH, usando las observaciones 1996/01/04-2013/09/20 (T = 4622)
Variable dependiente: r
Desviaciones típicas basadas en el Hessiano

             Coeficiente   Desv. Típica      z       Valor p
  ----------------------------------------------------------
  const      0.000846831   0.000163430     5.182     2.20e-07 ***

  alpha(0)   2.02433e-06   4.40626e-07     4.594     4.34e-06 ***
  alpha(1)   0.0974171     0.0162358       6.000     1.97e-09 ***
  alpha(2)   0.000233602   0.0189981       0.01230   0.9902
  beta(1)    0.898393      0.00978146     91.85      0.0000   ***

Media de la vble. dep.  0.000342   D.T. de la vble. dep.   0.015981
Log-verosimilitud       13392.35   Criterio de Akaike     -26772.71
Criterio de Schwarz    -26734.07   Crit. de Hannan-Quinn  -26759.11

Varianza incondicional del error = 0.000511721
Contraste de razón de verosimilitudes para los términos (G)ARCH:
  Chi-cuadrado(3) = 1663.98 [0]
```
Figura 15: Modelo GARCH (1,2).

El modelo especificado a priori se corresponde entonces con:

$$\hat{r}_t = \widehat{m}_0 = 0.0000846831$$

$$\widehat{h_t} = 2.02433 \times 10^{-6} + 0.0974171{e^2}_{t-1} + 0.898393h_{t-1} + 0.000233602{e^2}_{t-2}$$

pero cuando se excluyen los parámetros superfluos el modelo se convierte en:

$$\widehat{h_t} = 2.02433 \times 10^{-6} + 0.0974171{e^2}_{t-1} + 0.898393h_{t-1}$$

Una vez más, no presenta una mejora respecto de, tanto GARCH (1,1) como de GARCH (2,1). El nuevo término ARCH no es significativo con un p valor muy próximo a 1 y los p valores de los parámetros preexistentes no son, una vez más, tan contundentes como en el modelo GARCH (1,1). Sin embargo, en estos términos, sí que supone una mejora respecto del modelo GARCH (2,1). Finalmente la varianza condicional no presenta tampoco cambios significativos más allá de las consecuencias derivadas de la inclusión de un parámetro adicional en el modelo.

Lo que nos dice esto es que el error de hace dos periodos no es significante a la hora de determinar o estimar la volatilidad del periodo *t.* Esto, como ocurría en el anterior modelo, es así a nivel estadístico y dentro del campo de este modelo en concreto. Eso no significa que luego en la realidad esto sea así.

En vistas a los resultados de los modelos GARCH de orden (2, 1) y (1, 2) no merece la pena obtener gráficos de sus varianzas en el tiempo puesto que, esencialmente, la parte útil del modelo es la misma que la del modelo de orden (1,1). Tampoco se va a realizar un modelo de orden (2, 2) puesto que ya se ha visto que los segundos términos ARCH y GARCH son superfluos.

CAPÍTULO 5: EXTENSIONES DE MODELO GARCH

Los modelos autoregresivos de heterocedasticidad generalizados son susceptibles de modificación por otras vías que no son la variación de su orden. El esquema básico de GARCH (*p, q*) ha sido tan prolífico en el campo de estudios de datos de alta frecuencia que, por todo el mundo, se han ideado nuevos términos que se pueden incluir en el modelo para satisfacer distintas hipótesis y asunciones.

Para este estudio se van a delinear solo dos de ellos el *Threshold GARCH* (T-GARCH) *GARCH-in-Mean*.

5.1 THRESHOLD GARCH

El término *Threshold* traducido literalmente es umbral, que puede ser definido a su vez como el nivel o punto a partir del cual algo comienza a ocurrir o cambia. Un modelo ARCH o GARCH tradicional trata las "malas noticias"[19] de forma indiferente o simétrica. Esto significa que el efecto sobre la volatilidad (h_t) de las noticias que aparezcan en cada periodo es el mismo (en la medida $\alpha_1 e^2{}_{t-1}$).

Sin embargo, la realidad es que los efectos de cualquier información que aparezca en el periodo van a ser distintos en base a su contenido, es decir si son "buenas" o "malas" noticias. Coloquialmente hablando, el pánico cunde más rápido que el optimismo. Cuando malas noticias llegan al mercado se suele entrar en una fase de turbulencias con volatilidades altas; mientras que las buenas noticias suelen tener un efecto pacificador con volatilidades relativamente bajas. Si se vuelve la mirada al ejemplo ofrecido en el Capítulo 1, más concretamente el apartado de Impredecibilidad, ahí se tiene una prueba empírica de este fenómeno.

[19] Estadísticamente hablando, $e_{t-1} < 0$ son malas noticias y $e_{t-1} > 0$ son buenas noticias.

Este primer modelo extendido T-GARCH[20] lo que hace es añadir un término que refleje esta asimetría de efectos en base a la calidad de la información. En este modelo la especificación de la función de varianza condicional es la siguiente:

$$h_t = \delta + \alpha_1 {e^2}_{t-1} + \gamma d_{t-1} {e^2}_{t-1} + \beta_1 h_{t-1}$$

$$donde, d_t = \begin{cases} 1\ si\ e_t < 0\ (malas\ noticias) \\ 0\ si\ \ e_t \geq 0\ (buenas\ noticias) \end{cases}$$

En este caso γ se conoce como el término de asimetría o el término palanca. Cuando $\gamma = 0$, el modelo, de forma automática se revierte a un modelo GARCH (1,1). Cuando esto no se cumple, en el caso que el estímulo de la información sea positivo el efecto sobre la volatilidad de nuevas información será igual a α_1; mientras que si el estímulo es negativo, el efecto se cuantificaría en $\alpha_1 + \gamma$. Esto hará que los estímulos negativos tengan un mayor efecto sobre h_t que los positivos.

Dicho esto, se reestiman los rendimientos del IBEX 35 con la especificación T-GARCH de forma que:

$$\hat{r}_t = \widehat{m}_0 = 0.000474050$$

$$\widehat{h_t} = 3.40 \times 10^{-6} + 0.0866653 {e^2}_{t-1} + 0.540140 d_{t-1} {e^2}_{t-1} + 0.918374 h_{t-1}$$

[20] Se podría aplicar dicha transformación a un modelo ARCH(*q*), pero dado que en este caso el modelo GARCH (*p, q*) es más significativo a la hora de explicar la volatilidad del IBEX 35, se toma éste.

```
Model: TARCH(1,1) [Zakoian] (Normal)
Dependent variable: r
Sample: 1996/01/04-2013/09/20 (T = 4622), VCV method: Robust

    Conditional mean equation

                 Coeficiente   Desv. Típica     z     Valor p
  -----------------------------------------------------------
  const         0.000474050   0.000181546    2.611   0.0090   ***

    Conditional variance equation

                 Coeficiente   Desv. Típica     z       Valor p
  -------------------------------------------------------------
  omega         3.50464e-06   9.45808e-07     3.705   0.0002    ***
  alpha         0.0866653     0.0127848       6.779   1.21e-11  ***
  gamma         0.540140      0.0728498       7.414   1.22e-13  ***
  beta          0.918374      0.0118745      77.34    0.0000    ***

      Llik:   13429.39797       AIC: -26848.79593
      BIC:   -26816.60302       HQC: -26837.46779
```
Figura 16: Modelo T-GARCH (1,1)

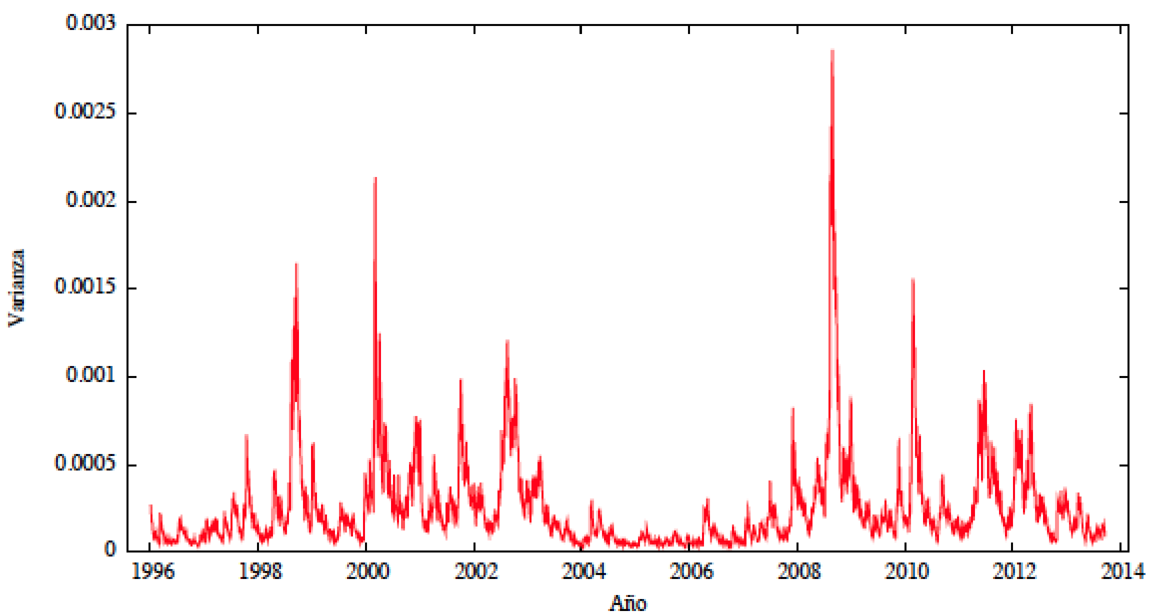


Figura 17: Varianza del modelo T-GARCH

Observando este modelo en términos similares a los que se han usado para evaluar los anteriores se aprecia un rechazo de la hipótesis nula con contundencia con p valores significativamente menores a un nivel de significación del 1%. Se deriva de las estimaciones que desde la estructura T-GARCH que la nueva información del periodo incide en aproximadamente un 8,66% en la varianza condicional cuando las noticias son buenas mientras que si son malas incide en un 62,68%. Esto señala a la existencia de una asimetría aplastante en los efectos de la información.

A nivel psicológico se podría interpretar como que los agentes de mercado son, en su conjunto, escépticos en tanto en cuanto, si se interpreta que el rendimiento del índice viene determinado por las fuerzas de oferta y demanda, cuando hay malas noticias siempre buscan cambiar su posición para protegerse; y cuando hay buenas noticias se mantienen (relativamente) inactivos. Si el comportamiento de los inversores fuera racional, lo lógico sería que los efectos de toda clase de información fuera simétrico puesto que, efectivamente cuando los rendimientos se ven afectados negativamente, lo racional sería deshacer esa postura y constituir otra para compensar o evitar la bajada de rendimientos (ceteris paribus); y cuando los rendimientos se vieran afectados de forma positiva, los inversores, si fueran racionales, aumentaría su posición en ese activo para maximizar su beneficio. Esto es un reflejo de cómo los agentes del mercado no dejan de ser personas y su psicología trasciende de forma muy clara.

Observando la Figura 17 se ve cómo, al representar la varianza estimada a partir de este modelo, hay más picos de volatilidad que en las ilustraciones de los modelos anteriores. La explicación tras este suceso está en que en los otros modelos la información se trataba de forma uniforme, ahora la incidencia de los estímulos negativos se ve ensalzada por un factor adicional gamma (γ).

Un fenómeno relacionado con esto es el efecto asimetría de varianza para rendimientos *multi-periódicos*. Engle explica que aunque los periodos sean uniformes en su distribución (es decir, tienen todos igual duración) los rendimientos de estos siguen una distribución asimétrica. Esto significa que según si el rendimiento aumentó o disminuyó en el periodo "0" la varianza de rendimientos en el periodo "1" será distinta. Engle reitera lo demostrado por el modelo T-GARCH cuando dice que la varianza del periodo "1" será mayor si en el periodo "0" el rendimiento bajó. Según Engle después de dos periodos existen cuatro posibles resultados igualmente probables. Señala Engle que "La distribución es bastante sesgada, puesto que el resultado negativo es mucho peor que si la varianza hubiera sido constante" (Engle, 2003, p. 342).

Para entenderlo mejor se replica el árbol binomial usado por Engle:

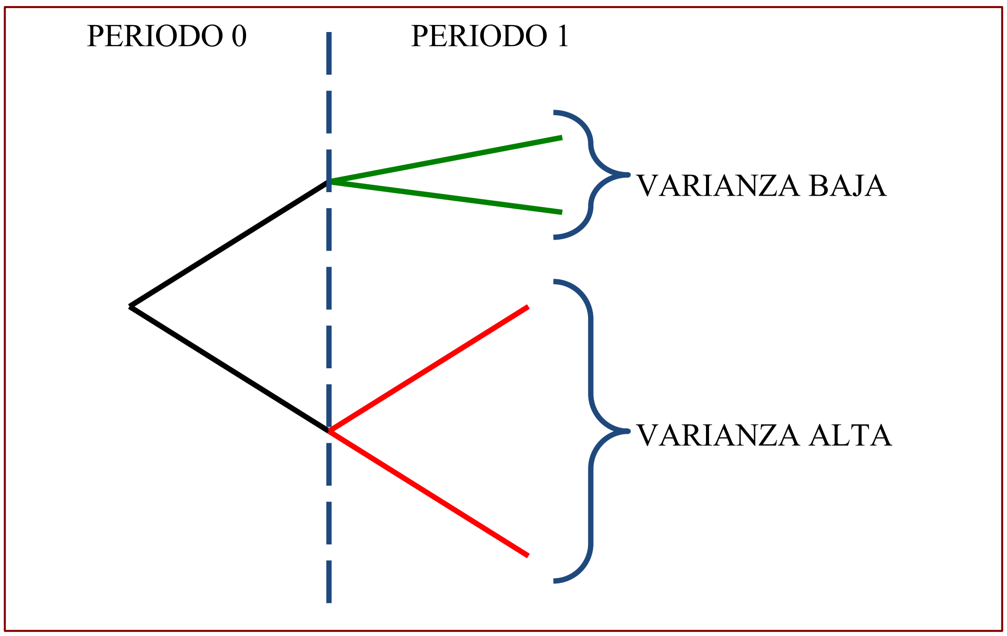


Figura 18: Árbol binomial de dos periodos con volatilidad asimétrica. (Fuente: Adaptado de (Engle, 2003))

Esto último no es más que una consecuencia de lo que explica el modelo T-GARCH aplicado a múltiples periodos. Esto explica que existan "rachas" en los mercados, sobretodo las negativas, y demuestra que la información obtenida en un periodo no se extingue o agota concluido el periodo en el que aparece. Volviendo a la idea propuesta de que los activos son aglomeraciones de información ordenada según las características del activo, las malas noticias entran a formar parte del activo y trasciende a distintos periodos.

Se plantea sin embargo una cuestión que es por qué después de una bajada en el periodo 0, las "buenas" noticias tienen un efecto tan grande (siendo éste simétrico al de una segunda bajada), si en teoría los estímulos positivos tienen un efectos más discreto y la psicología de inversión sería desconfiar en base a la mala experiencia del periodo 0.

5.2 GARCH-IN-MEAN

El último modelo que se va a exponer es el GARCH-In-Mean, un derivado muy popular del modelo heterocedasticidad condicional autoregresiva generalizado. Si se comienza el análisis por su nombre, se puede desglosar como *heterocedasticidad condicional autoregresiva generalizada en la media.* Esto significa que se modelan los cambios de la varianza de los rendimientos medios en el tiempo. Es en este modelo donde se explicita la relación entre rendimiento y riesgo (también conocido como el binomio rentabilidad-riesgo). Como se ha planteado previamente, a medida que el riesgo aumento también lo hace la rentabilidad media. De forma intuitiva se entiende que el rendimiento de activos más arriesgados (más varianza de rendimientos) es más alto para compensar el riesgo asumido por el inversor.

Al inicio se ha hablado de las cualidades de la serie temporal de rendimientos, entre las cuales estaba la *no-estacionariedad* , pero, en los modelos estimados hasta ahora, la ecuación de la media condicional de rendimientos no contenía un término de riesgo. En otras palabras, el rendimiento no venía explicado por la varianza o riesgo. Pues bien, la siguiente novación del modelo va a ser la inclusión de este término de riesgo en la ecuación de la media condicional de rendimientos. El modelo GARCH-In-Mean se especifica de la siguiente forma:

$$r_t = \beta_0 + \theta h_t + e_t$$

$$e_t | I_{t-1} \sim N(0, h_t)$$

$$h_t = \delta + \alpha_1 e^2{}_{t-1} + \beta_1 h_{t-1}$$

$$donde \quad \delta > 0, \quad 0 \leq \alpha_1 < 1, \quad 0 \leq \beta_1 < 1$$

Ahora en la ecuación de la media condicional de rendimientos (la primera) se refleja el efecto de la varianza condicional sobre la variable dependiente (rendimiento). En concreto la varianza h_t afecta a r_t en la medida de su parámetro θ. Las demás ecuaciones permanecen sin cambios. Al aplicar este modelo a los datos los resultados son los siguientes:

```
Model: GARCH(1,1) [Bollerslev] (Normal)*
Dependent variable: r
Sample: 1996/01/04-2013/09/20 (T = 4622), VCV method: Robust

    Conditional mean equation

             Coeficiente   Desv. Típica     z      Valor p
  ---------------------------------------------------------
  const      0.000693643   0.000230092    3.015    0.0026   ***
  hg         1.14279       1.14491        0.9981   0.3182

    Conditional variance equation

             Coeficiente   Desv. Típica     z      Valor p
  ----------------------------------------------------------
  omega      2.02482e-06   6.64122e-07     3.049   0.0023    ***
  alpha      0.0975914     0.0142895       6.830   8.52e-12  ***
  beta       0.898417      0.0140380      64.00    0.0000    ***

       Llik:   13392.85586       AIC: -26775.71171
       BIC:  -26743.51880        HQC: -26764.38357
```
Figura 19: Modelo GARCH-In-Mean

En base a los resultados obtenidos el modelo estimado a priori es el siguiente:

$$\hat{r}_t = \hat{m}_0 = 0.000693643 + 1.14279h_t$$

$$\widehat{h_t} = 2.02 \times 10^{-6} + 0.0975914e^2{}_{t-1} + 0.898417d_{t-1}e^2{}_{t-1} + 0.918374h_{t-1}$$

Observando el p valor del parámetro “*hg”*, que es el nombre atribuido a la varianza del modelo GARCH, se ve que no es significativo pues no se rechaza la hipótesis nula con un grado de significación inferior a $\alpha = 0.3182$ o 31,82%, lo cual, especialmente en el mundo financiero, es inaceptable. Así, en realidad el modelo resultante es:

$$\hat{r}_t = \hat{m}_0 = 0.000693643$$

$$\widehat{h_t} = 2.02 \times 10^{-6} + 0.0975914\hat{e}^2{}_{t-1} + 0.898417d_{t-1}\hat{e}^2{}_{t-1} + 0.918374\hat{h}_{t-1}$$

Así pues para esta serie parece ser que la varianza no es un factor determinante a la hora de explicar la media condicional de rendimientos del IBEX 35, siendo la función de la media una constante con valor de 0.000693643 o un rendimiento medio del 0,069%. Esto contrasta con lo que se venía asumiendo hasta este punto, que existía una fuerte relación entre rentabilidad y riesgo.

5.3 T-GARCH-IN-MEAN

De cara a intentar obtener resultados significativos se va a estimar un modelo T-GARCH-In-Mean, es decir que se va a reespecificar la ecuación de la media condicional T-GARCH de forma que uno de sus regresores sea la varianza condicional estimada a partir de T-GARCH, es decir, con asimetría de efectos de la información. El modelo es el que sigue:

$$r_t = \beta_0 + \theta h_t + e_t$$

$$e_t | I_{t-1} \sim N(0, h_t)$$

$$h_t = \delta + \alpha_1 e^2{}_{t-1} + \gamma_1 e^2{}_{t-1} + \beta_1 h_{t-1}$$

$$donde \quad \delta > 0, \quad 0 \leq \alpha_1 < 1, \quad 0 \leq \gamma_1 < 1, \quad 0 \leq \beta_1 < 1$$

```
Model: TARCH(1,1) [Zakoian] (Normal)
Dependent variable: r
Sample: 1996/01/04-2013/09/20 (T = 4622), VCV method: Robust

    Conditional mean equation

             Coeficiente   Desv. Típica     z      Valor p
  --------------------------------------------------------
  const      0.000375678   0.000206748    1.817    0.0692  *
  htg        0.741926      1.13251        0.6551   0.5124

    Conditional variance equation

             Coeficiente   Desv. Típica      z       Valor p
  -----------------------------------------------------------
  omega      3.67447e-06   3.79693e-07      9.677   3.76e-22  ***
  alpha      0.0867893     0.00405550      21.40    1.32e-101 ***
  gamma      0.539101      0.0430085       12.53    4.82e-36  ***
  beta       0.917279      0.00403086     227.6     0.0000    ***

       Llik:  13429.32782       AIC: -26846.65564
       BIC:  -26808.02414       HQC: -26833.06187
```
Figura 20: Modelo T-GARCH-In-Mean.

Una vez más, ocurre como en el modelo GARCH-In-Mean, donde la varianza condicional no tiene efecto significativo sobre la media condicional. Además, la constante de la ecuación de media condicional ahora solo es significativa a un nivel de significación del 10%. Se reitera el mismo dilema que en el modelo anterior de cómo es que no se detecte una relación significativa entre la volatilidad del IBEX 35 y su rendimiento medio condicional.

5.4 ¿RENTABILIDAD-RIESGO, UN MITO?

En los apartados anteriores se ha llegado a la conclusión que, estadísticamente, la volatilidad no influye de forma significativa en la rentabilidad del IBEX 35. En teoría esto va en contra de una de los principios básicos de la economía y las finanzas. Por ello cabe preguntarse si, en línea con el discurso de este estudio, el binomio rentabilidad-riesgo es un mito en la peor connotación de la palabra. Este es un punto clave en la investigación en el que precipitarse en las conclusiones es muy fácil.

Debe decidirse qué es lo que realmente se ha descubierto, o en otras palabras, qué significa este resultado. La interpretación más intuitiva es la que se viene esbozando hasta este punto; que no existe relación entre rentabilidad y riesgo en el mercado. Las implicaciones de este resultado tendrían consecuencias revolucionarias en la industria, dando a entender que se puede obtener altos rendimientos sin tener que incurrir en el riesgo proporcional que dicta la teoría. Pero antes de saltar a conclusiones, se debe examinar qué es lo que se está haciendo realmente. El presente estudio no es un experimento de física donde se observan las manifestaciones a tiempo real de las leyes de la naturaleza. Estrictamente hablando lo que se está estudiando no es el binomio rentabilidad-riesgo ni la volatilidad en sí, el objeto de estudio es una serie de modelos econométricos *sobre* el riesgo financiero y la volatilidad.

Revisado el objeto de estudio se pasa reevaluar las resultados. Lo que realmente se ha encontrado es que estos modelos (GARCH-in-Mean y T-GARCH-in-Mean) no son capaces de representar la relación entre rentabilidad y riesgo de forma significativa, por lo que siguen una proceso generador distinto al de autoregresión de heterocedasticidad condicional. El académico del Massachusetts Institute of Technology, Andrew W. Lo, muy elocuentemente dice que “De la misma manera que los principios científicos son destilaciones compactas de fenómenos mucho más complejos, los principios económicos (….) capturan un elenco extensivo de fenómenos económicos. Sin embargo, toda virtud puede convertirse en vicio si llevada al extremo, particularmente cuando ese extremo obvia las limitaciones impuestas por la incertidumbre" (Lo, 2010, p. 65). La virtud a la que alude Lo puede desglosarse por tanto en dos cualidades básicas aplicadas a la hora de interpretar estos resultados; en primer lugar perspectiva, para ser capaz de discernir lo que realmente se estudia de lo que no, es decir, no confundir un modelo por algo que no es; y en segundo lugar la capacidad de humildad a la hora de realizar un estudio, especialmente en este campo, donde existe un alto grado de subjetividad y a veces cae en el olvido el hecho que un factor determinante de esta disciplina es el comportamiento humano.

Expresado en términos de mitos, a día de hoy resulta obvio que, a nivel científico, los mitos clásicos que explicaban usados para explicar los fenómenos atmosféricos y meteorológicos eran inconsistentes y, en general, falsos; pero ello no significaba que no amaneciese cada mañana o que no existiera la lluvia. El mito podía ser mito, pero el fenómeno subyacente era real. Llegados a este punto, solo se va a plantear la pregunta que surge necesariamente frente a esta situación de incertidumbre, también planteada por Lo: ¿Se debería responder entonces descartando todo modelo de estimación, o se debería ignorar la existencia de todo aquello que queda fuera de nuestros modelos?

CAPÍTULO 6: SELECCIÓN DE MODELO

En el presente estudio se han elaborado una serie de modelos, todos ellos con distinto grado de precisión y con enfoques en distintos aspectos de la serie temporal de rendimientos. A continuación se va a presentar un resumen de las cualidades que determinan la fiabilidad de cada modelo y sucesivamente, en base a estos, se elegirá un modelo para calcular finalmente el VaR.

ESTADÍSTICO / MODELO	MEDIA CONDICIONAL	VARIANZA INCONDICIONAL	LOGARITMO DE VEROSIMILITUD	CRITERIO DE AKAIKE	CRITERIO DE SCHWARZ
ARCH(1)	0.0006079 (0.0044)[21]	0.0002549	12790.36	-25572.72	-25546.96
GARCH (1,1)	0.0008478 (2.12$\times 10^{-7}$)	0.0005115	13392.35	-26774.71	-26742.51
GARCH (2,1)	0.0008480 (2.12$\times 10^{-7}$)	0.0005109	13392.35	-26772.71	-26734.07
GARCH (1,2)	0.0008468 (2.20$\times 10^{-7}$)	0.0005117	13392.35	-26772.71	-26734.07
T-GARCH (1,1)	0.0004741 (0.0090)		13429.3980	-26848.80	-26816.60
M-GARCH (1,1)	0.0006936 (0.0026)		13392.8559	-26775.71	-26743.52
M-T-GARCH (1,1)	0.0003757 (0.0692)		13429.3278	-26846.66	-26808.02

Figura 21: Tabla de comparación de modelos.

[21] Los valores inferiores son los p valores de la media condicional en cada modelo.

6.1 ESTADÍSTICOS DE CONTRASTE

Antes de entrar a valorar qué modelo explica mejor el fenómeno del riesgo financiero brevemente se va a definir los distintos estadísticos de contraste y cómo se interpretan, así como según cada estadístico cual es el modelo más adecuado.

6.1.1 Logaritmo de Máxima Verosimilitud[22]

El logaritmo de verosimilitud va a ser el principal estadístico de contraste a la hora de evaluar la bondad del ajuste de cada modelo. La base sobre la cual se asienta la construcción de este estadístico es la función de verosimilitud, que es una función de los parámetros de un modelo.

Antes de entrar en la parte más técnica se delineará el significado de esta función. Al hablar de verosimilitud se puede asociar esta idea a la de probabilidad, aunque, estadísticamente hablando, no son equivalentes. Cuando se habla de verosimilitud se entiende la probabilidad de que las observaciones de la variable aleatoria se realicen dados unos valores de los parámetros de un modelo.

En términos matemáticos, si X es un conjunto de datos y θ es el conjunto de parámetros, la expresión:

$$P(X|\theta)$$

es decir, la probabilidad de X dado θ, que puede ser interpretada como;

$$L(\theta|X)$$

Siendo esta la verosimilitud de θ dado X. La interpretación de esta última expresión resulta más sencilla cuando X viene dado y se estima θ, que es variable. Sin embargo, el valor de esta última función por sí solo es fútil.

---

[22] **(Pratt, 1976)**

En el campo de econometría y estadística se ha masificado el uso del logaritmo natural de esta función por ser más conveniente. Esto se debe a que los logaritmos aumentan de forma monotónica[23] y alcanzan su máximo en el mismo punto que la función original, pudiendo funcionar estos (los logaritmos) como sustitutos de ésta.

La interpretación que se va a hacer por tanto es que, cuanto mayor sea el estadístico del logaritmo de máxima verosimilitud, mayor va a ser la probabilidad que dado un conjunto de parámetros θ, se obtenga el conjunto de observaciones *X.* Se deduce de esto que aquél modelo con mayor valor en este estadístico se ajusta mejor a al proceso generador de la serie, replicando así mejor la "realidad" de la variable.

En nuestro caso se ha ido apreciando un aumento de este estadístico a medida que se iba aplicando novaciones a cada modelo hasta llegar al T-GARCH (1,1) donde se ha obtenido el máximo valor para este estadístico (13429.3980)[24]. Así el modelo señalado por este estadístico como más adecuado es el T-GARCH (1,1). A pesar de lo anterior, de cara a seleccionar el modelo más adecuado se van a observar otros estadísticos puesto que se pueden dar situaciones como el sobreajuste, que maximizan la bondad pero de forma artificial por variación del número de parámetros. Por ello se tendrán en cuenta términos penalizadores de esto como son el Criterio de información Bayesiano o el Criterio de información Akaike.

6.1.2 El Criterio de Información Bayesiano o Criterio de Schwarz (BIC)[25]

El criterio en cuestión encuentra su utilidad a la hora discriminar entre un conjunto finito de modelos. Su fundamento se encuentra en la función de probabilidad y está relacionado con otro criterio que se contempla a continuación como es el Criterio de Información de Akaike.

[23] Es decir que nunca disminuye, siempre varía en la misma dirección.

[24] Por muy poco si se compara con el estadístico resultante en el modelo M-T-GARCH (1,1).

[25] (Schwarz, 1978)

El sobreajuste es una práctica estadística mediante la cual se busca mejorar la bondad de ajuste del modelo mediante la inclusión de parámetros adicionales en la estimación. El BIC, al igual que el criterio de información de Akaike, penalizan esta práctica, siendo la penalización mayor en este estadístico que en el de Akaike.

No se va a desglosar la definición matemática de este término más allá de la ecuación básica:

$$-2 \cdot \ln p(x|M) \approx BIC = -2 \cdot \ln L + k \ln(n)$$

Donde x son los datos observados; n es el número de observaciones de *(x)*; k es el número de parámetros en el modelo; $p(x|M)$ es la probabilidad marginal de los datos observados dado el modelo (hipotético) *M;* y L es el valor máximo de la función de verosimilitud del modelo *M*.

Se decidirá entre varios modelos cuál es el que más se ajuste según que modelo tenga el valor más bajo de BIC. En este caso el es el modelo T-GARCH (1,1) es que tiene el estadístico más bajo. Esto demuestra que los parámetros añadidos en los modelos posteriores eran superfluos y no contribuían realmente a la calidad explicativa del modelo.

6.1.3 El Criterio de Información Akaike (AIC)[26]

Este estadístico constituye un indicador relativo de la calidad de un modelo estadístico, de modo que resulta útil solo cuando es comparado con el mismo estadístico de otro modelo que modela la misma serie de datos.

Técnicamente este indicador pondera la bondad del ajuste del modelo a la vez que tiene en cuenta la complejidad del mismo (en términos de parámetros). A partir de un principio de entropía de información[27] este estadístico permite estimar la información que se pierde se utiliza el modelo en cuestión. Este concepto está ligado a lo que se ha venido mencionando hasta ahora que los modelos econométricos no son comprehensivos de toda la realidad sobre una variable. Con lo que se debe tener cuidado a la hora de usar este estadístico es de contrastarlo con otras medidas de bondad del ajuste. Por sí solo este estadístico no indica acerca del sentido absoluto del modelo, es decir, si todos los modelos que se están comparando son incongruentes, este indicador no lo detecta.

La definición de este indicador es la siguiente:

$$AIC = 2k - 2\ln(L)$$

Donde k representa el número de parámetros presentes en el modelo y L es el valor máximo de la función de probabilidad del modelo. Por lo que cuanto mayor sea k, mayor valor tendrá AIC.

A la hora de elegir un modelo en base a este estadístico se toma aquel con el valor de AIC más bajo. Se dice que este estadístico penaliza por cada parámetro libre (o superfluo) que se

---

[26] (Akaike, 1977)

[27] Según la teoría de la información en estadística, entropía es una medida de incertidumbre en la variable aleatoria. También conocida como la entropía de Shannon, cuantifica el valor esperado de información contenido en un mensaje, siendo este una realización específica de la variable aleatoria. En otras palabras, es la incertidumbre media de una variable aleatoria.

estima, por lo que disuade de aumentar el número de parámetros para mejor el ajuste de forma que se sobreajuste el modelo para aumentar la bondad.

En referencia a los modelos de este estudio, representados en la Figura 21, el modelo con el valor de AIC más bajo es T-GARCH (1,1) con un estadístico que asciende a -26848.80. Esto parece lógico a un nivel intuitivo puesto que hasta llegar a esta versión del modelo se ha ido mejorando desde un modelo anterior partiendo desde ARCH (1), sin embargo cabe preguntarse por qué los modelos sucesivos, que, en teoría, son una versión mejorada de éste no tienen un valor menor. Esto se explica en cuanto que los modelos posteriores han añadido parámetros no explicativos y el AIC lo ha penalizado.

Es por todos los motivos expuesto que el modelo a partir del cual se va a calcular el VaR para el IBEX 35, a partir de los datos históricos disponibles, es el modelo T-GARCH (1,1).

CAPÍTULO 7: EL VALUE AT RISK

7.1 ¿QUÉ ES EL VALUE AT RISK, Y CÓMO SE USA?

Calificado por algunos como “la nueva ciencia de gestión de riesgos”. El concepto de Value-at-Risk, en términos muy básicos, representa la probabilidad de perder dinero. La función básica del VaR es responder a la pregunta: ¿Cuánto valor (o dinero) podría perder en un periodo de tiempo dado un nivel de significación (o confianza)?”.

Esta medida de riesgo, para un activo o conjunto de activos determinado, se desglosa en tres componentes: primero un periodo de tiempo, un nivel de confianza y finalmente una cantidad susceptible de pérdida (que puede ser expresado también en porcentaje). A continuación un ejemplo: Si el VaR de un activo es igual a 1000 euros a una semana, con un nivel de confianza del 95%, eso significa que existe un 5% de probabilidad que el valor del activo caiga más de 1000 euros en el periodo de una semana.

Hay quien concreta más la definición de modo que para ellos constituye la perdida potencial causada por el riesgo normal de mercado en vez de considerar riesgo como un todo. En este planteamiento habría que diferenciar entre riesgo anormal de mercado, riesgo normal y el non-market risk (Damodaran, 2007, p. 1). En este estudio no se hace tal distinción.

En cuanto a su uso, el profesor de finanzas, Aswath Damodaran, explica que este indicador de riesgo se puede utilizar para medir la exposición a riesgo de una entidad, aunque, recientemente, su uso se ha extendido entre bancos comerciales y de inversión para obtener las pérdidas potenciales de sus portfolios frente a movimientos adversos del mercado. Si esto último se considera junto con cifras de capital disponible o reservas o caja disponible, en principio, la empresa o entidad puede asumir riesgo de forma controlada, sin arriesgar la propia empresa (Damodaran, 2007, p. 2). Sin embargo este indicador no refleja de ninguna forma el aspecto de la rentabilidad esperada, mientras que el modelo del que deriva sí lo hace.

El proceso llevado a cabo para llegar a este punto es uno de concreción; se ha pasado de una realidad abstracta y compleja a una representación simplificada de esta, que luego se concreta aún más hasta convertirse en una cifra. Por supuesto, se ha ido obviando información que no está presente en la cifra final, pero si uno sigue el proceso de elaboración obtiene una perspectiva, que aunque probable no se corresponda de forma idéntica con la realidad compleja, sí que es susceptible de aportar utilidad e informar el comportamiento en el mercado.

7.2 CÁLCULO DEL VALUE AT RISK

La parte cuantitativa de este estudio concluye con el cálculo del VaR siguiendo las metodología típica usada por los agentes financieros, tal y como la plantea Engle (Engle, 2003, p. 342). Para su cálculo, la primera asunción que se hace es la de distribución normalidad de los rendimientos del IBEX 35, a partir de esto el procedimiento para convertir la cifra de volatilidad del modelo en VaR es el siguiente.

El VaR se determina a partir de tres ejes, nivel de significación (o confianza), horizonte temporal y desviación típica del mejor modelo. El día seleccionado es el 2 de septiembre de 2013.

VaR a un día al 99%

Bajo la asunción de normalidad[28] de distribución de rendimientos, el 1% de la distribución se encuentra a -2.33 desviaciones típicas de 0, por lo que el VaR será 2.33 veces la desviación típica del modelo, que en este caso es el T-GARCH (1,1) estimado, de tal forma que:

[28] Engle en sus estudios ha cuestionado siempre esta condición, ya a un nivel intuitivo donde se ve más a menudo que no rendimientos extremos en el mercado. Para poner a prueba esta idea divide los rendimientos históricos por la desviación típica de su modelo TARCH (1,1) para "devolatilizar" sus rendimientos y medir su distribución. El resultado fue un nivel de curtosis de 6.5, significando un nivel de curtosis muy superior al de la normal (3). Esto significa que el riesgo realmente es mayor que el asumido bajo la condición de normalidad. (Engle, 2003, p. 342).

$$2.33 \times \sigma_t = VaR_{99\%} \ \ a\ un\ día$$

$$2.33 \times \sqrt{h_t} = VaR_{99\%}\ a\ un\ día$$

$$2.33 \times \sqrt{0.0001417} = 2.7735809\%$$

Por lo que el VaR a un día con un 99% de confianza para el periodo del 2 de septiembre de 2013 fue del 2.77% del valor de portfolio.

VaR a 10 días al 99%

Se va a calcular el VaR a 10 días debido a que en el ámbito financiero se suele usar a menudo tanto a nivel interno como de control externo desde que los reguladores piden su cálculo. Por intuición se espera que sea mayor que el de un día, puesto que se puede perder más en 10 días que en uno, pero su cuantía no será 10 veces mayor.

Teniendo en cuenta que la varianza no es constante se debe obtener un multiplicador apropiado para su cálculo. Este multiplicador se obtiene tomando la raíz cuadrada de 10, que luego se aplicará a la desviación típica de un día. Siendo $\sqrt{10}$ igual a 3.16:

$$3.16 \times 2.33 \times \sqrt{h_t} = VaR_{99\%}\ a\ 10\ días$$

$$3.16 \times 2.33 \times \sqrt{0.0001417} = 8.770833\%$$

Consiguientemente el VaR para 10 días al 99% a día 2 de septiembre de 2013 fue del 8.77% de valor de portfolio.

A continuación se presenta una tabla ilustrativa de distintos VaR para el mismo día a medida que varía el nivel de confianza y el horizonte temporal:

α[29] / Días	1%	2%	5%
1	2,77%	2,44%	2,33%
5	6,20%	5,46%	5,22%
10	8,77%	7,72%	7,38%
30	15,19%	13,37%	12,78%

Figura 22: VaR para distintos niveles de confianza y horizontes temporales para el 2 de septiembre de 2013.

Aquí se ve claramente como a un nivel mayor de confianza (o menor α) mayor es el VaR, al igual que pasa con un mayor horizonte temporal (por razones obvias, pues en más tiempo hay más cambios y ya se han visto los efectos asimétricos de la varianza). Es importante destacar que cuando se toma el VaR de más de un periodo se asume que la cartera de la cual se calcula el riesgo no realiza ningún movimiento (es decir, no varía) y las condiciones de mercado se mantienen constantes.

Aunque el VaR se utiliza de forma indiscutida en la industria no es tan representativo como uno pensaría. Con este resultado se pierden dos rasgos básicos de los modelos de volatilidad dinámica que se han visto hasta este punto. En primer lugar, el modelo T-GARCH tiene en cuenta la volatilidad media a largo plazo de forma que según si la volatilidad del periodo está por encima o por debajo de este nivel, el modelo T-GARCH estimará una subida o una bajada tendencial en riesgo cuando se tengan en cuenta más de un periodo. Al calcular el VaR esta perspectiva se pierde.

En segundo lugar, y más trascendente, es la omisión de los efectos asimétricos que se han expuesto supra a través de la contribución de Engle (Figura 18). Teniendo en cuenta que en el

[29] Siendo el nivel de confianza igual a (1- α).

VaR se está tomando el *worst case scenario* si, efectivamente, se tuviese en cuenta esta asimetría el valor en riesgo debería ser mayor del que se determina.

Aludiendo al discurso general de este estudio, visto el proceso de elaboración de la medida generalizada de riesgo usada por profesionales del sector financiero queda patente que no es ni mucho menos una medida comprehensiva o absoluta de riesgo. El VaR, se ha visto que es una simplificación de una simplificación, siendo la simplificación original el modelo de riesgo dinámico obtenido (T-GARCH). En cada simplificación o representación se aplican más asunciones que acumulan sobre las previas cada vez dando mayor peso a éstas frente a la realidad subyacente. Sobre esta idea descansa el título de este estudio, pues como una historia se convierte en mito a medida que se transmite en el tiempo de una persona a otra, este concepto de riesgo se "mitifica" a medida que pasa por las fases delineadas en este estudio; desde una condición psicológica del hombre hasta convertirse en una cifra.

CAPÍTULO 8: CONCLUSIONES

A lo largo de este estudio se ha descrito el proceso de modelación de riesgo que típicamente precede el cálculo del Value at Risk. Las conclusiones que se deducen son reveladoras de los rasgos característicos de las series financieras así como el comportamiento humano en cuanto a lo que respecta el riesgo financiero.

En las diversas fases de especificación y mejora del modelo, partiendo de un esquema básico ARCH (1), se han evidenciado por un lado la complejidad de la variable objeto de estudio, a la vez que se señalaban las carencias de cada modelo.

En un comienzo se apreció como el modelo ARCH (1) operaba bajo una serie de asunciones que, mientras facilitaban la estimación del modelo, también lo alejaban de la realidad. Sin embargo el planteamiento conceptual de este modelo es un punto de partida interesante puesto que el primer término especificado del modelo es el error aleatorio, es decir que el primer paso tomado para intentar adecuar la conducta para el futuro es ver cuánto uno ha errado en el pasado.

Más tarde, viendo las limitaciones que presentaba este único término, se ha incluido la varianza estimada como un regresor más de la función de varianza condicional, obteniendo así un modelo GARCH(1,1). Una vez más se debieron adoptar una serie de asunciones, algunas heredadas del modelo ARCH (1) y otras nuevas, específicas del nuevo término. Los estadísticos de contraste mostraban una clara mejoría del ajuste del modelo al proceso estocástico. Sin embargo en esta etapa, de forma más explicita, se aprecia que hay una fuente de volatilidad ajena a la información disponible en cada periodo, la varianza incondicional. Aunque el modelo cuantifica esta volatilidad no explica de donde proviene por lo que, como ocurría antes mientras por un lado se ganaba precisión, por otro surgían más incógnitas. El modelo GARCH (1,1) resultó ser el de orden más eficiente, pues los GARCH (1,2) y

GARCH (2,1) perdían precisión, y al mismo nivel de confianza los términos adicionales no eran significativos, como confirmaban los estadísticos de Akaike y Schwarz.

Finalmente se prueba a especificar otras variantes de la metodología desarrollada por Engle, y con ellas se revela por un lado cuánto más compleja es la variable estudiada y por otro cuán limitados están los modelos a la hora de explicar el riesgo en toda su complejidad.

El modelo revelador de dicha complejidad, que además ha resultado ser el más ajustado, es el T-GARCH (1,1). Con él se ha descubierto un nuevo rango de posibilidades al comprobar que la varianza reaccionaba de forma distinta según el contenido de la información disponible en el mercado. En retrospectiva, esta posibilidad no había sido sugerida de ninguna forma, lo cual recuerda que los modelos de este tipo no son más que una herramienta para explorar la realidad y no porciones de realidad por sí solas. A pesar de haber abierto toda una nueva dimensión sobre el comportamiento del riesgo y mejorar el ajuste del modelo, este nuevo término también era una señal de lo complejo que en realidad es el riesgo financiero y comienza a esbozar líneas de conexión con el comportamiento humano.

Pero quizás el hito de la investigación donde más patentes han quedado los límites de esta metodología de aproximación al riesgo es en el modelo GARCH-in-Mean (1,1). El objetivo a estas alturas era, con lo que se había descubierto sobre la volatilidad y su comportamiento, cómo se relaciona ésta con los rendimientos del IBEX. El resultado fue contundente, la volatilidad no es significativa a la hora de determinar los rendimientos. La cuestión se plantea sobre si en realidad esta relación no existe o si el modelo estimado debe descartarse.

El estudio del riesgo puede verse como un proceso paradójico en sí mismo dado que a la vez que su objetivo es reducir la incertidumbre, el proceso a través del cual se mide sistemáticamente añade riesgo con cada filtrado de fenómenos de mercado y comportamiento humano. La cifra de VaR obtenida es de poca trascendencia puesto que no se ha calculado mediante procedimiento tradicional y, como se ha ido explicando en esta disertación, por sí sola explica poco.

El interés de este estudio está en la propuesta de cambio de mentalidad respecto a cómo son tratados los modelos estadísticos. Se han dibujado líneas de conexión con el mundo de la mitología entendida como una condensación de una realidad humana de significación universal, sin ánimo de celebración ni castigo. Lo cierto es que todo el mundo, incluso a nivel mental, utiliza modelos de una forma u otra para dar sentido al pasado e intentar anticiparse al futuro. Con esto se quiere explicitar que la relevancia de estas conclusiones no se limita al campo de las finanzas o la econometría.

Depositar confianza o fe en una cifra tal y como la que se ha calculado es una apuesta como cualquier otra. Aludiendo al ejemplo inicial de Roberto, por mucho que compruebe informes meteorológicos antes de salir, no elimina el riesgo de tráfico lento a lo largo de su trayecto. Lo realmente importante es la transparencia del proceso y la consciencia de las limitaciones de las ideas que inspiran un comportamiento.

La presencia de mitos y su enfrentamiento con la ciencia ha llevado en muchas ocasiones a iniciar el proceso crítico de intentar entender mejor nuestro entorno. El mito ha servido al hombre como un baremo de incertidumbre. La propuesta de este estudio es que, como pensadores críticos, se traten los modelos cuantitativos no como una medida de lo que se sabe, sino como una medida de lo mucho que se da por hecho y se desconoce. El debate racional entre modelos estadísticos idealizados y las (duras) realidades empíricas es lo que ha motivado a la mayoría de los autores citados a innovar en el campo de las finanzas y llevarse los más prestigiosos reconocimientos, como es el caso del extensamente citado Robert Engle.

Por lo tanto, de cara al futuro de las finanzas, esto no supone una propuesta de caos e incertidumbre absoluta, sino todo lo contrario. Si se utilizan y elaboran modelos con espíritu crítico se apreciarán mejor las vulnerabilidades de los sistemas y conductas en el mercado. Además supone el primer paso para entender que en muchas ocasiones los retos financieros presentados, tanto a nivel de la economía como a nivel particular, no siempre podrán resolverse desde la elegancia de los números sino que habrá que acudir a veces a incluir "de forma *explícita* el factor humano". (Lo, 2010).

Finalmente, volviendo al interrogante planteado cuando se comprobó que el modelo GARCH-in-Mean (1,1) propuesto no reflejaba un principio básico del comportamiento humano y las finanzas; una respuesta más productiva sería, antes que desechar todo modelo o desmentir todo aquello que un modelo no reconoce, resulta más productivo delimitar la validez de cada modelo para informar nuestra conducta de tal forma que se limite la exposición a aquello se sabe puede ocurrir pero no se puede predecir.

BIBLIOGRAFÍA

Akaike, H. (1977). On entropy maximization principle. (P. Krishnaiah, Ed.) *Applications of Statistics* , 27–41.

Bollerslev, T. (1986). Generalised Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. *Journal of Econometrics* , 307 - 327.

Carter Hill, R., Griffiths, W. E., & Lim, G. C. (2010). *Principles of Econometrics* (Fourth Edition ed.). Melbourne: Wiley.

Damodaran, A. (18 de Abril de 2007). *Value at Risk.* Retrieved 10 de Febrero de 2014 from Damodaran Online: http://people.stern.nyu.edu/adamodar/pdfiles/papers/VAR.pdf

Engle, R. (2001). GARCH 101: The Use of ARCH/GARCH Models in Applied Econometrics. *Journal of Econometric Perspectives , 15* (4), 157-168.

Engle, R. (2003). Risk and Volatility: Econometric Models and Financial Practice. *Nobel Lecture* (pp. 326 - 348). New York: New York University.

Granger, C. W., & Andersen, A. P. (1978). *An introduction to bilinear time series models.* Göttingen: Vandenhoek & Ruprecht.

Grene, S. (n.d.). *Definition of leptokurtosis*. Retrieved 5 de Febrero de 2014 from Financial Times Lexicon: http://lexicon.ft.com/Term?term=leptokurtosis

Lo, A. W. (2010). *WARNING: Physics Envy May Be Hazardous To Your Wealth!* Boston: Massachusetts Institute of Technology.

Mandelbrot, B. (1963). The variation of certain speculative prices. *Journal of Business* (XXXVI), 392 - 417.

Markowitz, H. M. (1990). Foundations of Portfolio Theory. *Nobel Lecture* (pp. 279 - 287). New York: Baruch College, The City University of New York.

Pratchett, T. (2010). *I Shall Wear Midnight.* Harper Collins.

Pratt, J. W. (1976). F. Y. Edgeworth and R. A. Fisher on the Efficiency of Maximum Likelihood Estimation. *The Annals of Statistics , 4* (3), 501-514.

Real Academia Española. (2001). *Real Academia Española*. Retrieved 13 de Marzo de 2014 from Real Academia Española: http://lema.rae.es/drae/?val=mito

Schwarz, G. E. (1978). Estimating the dimension of a model. *Annals of Statistics , 6* (2), 239-472.

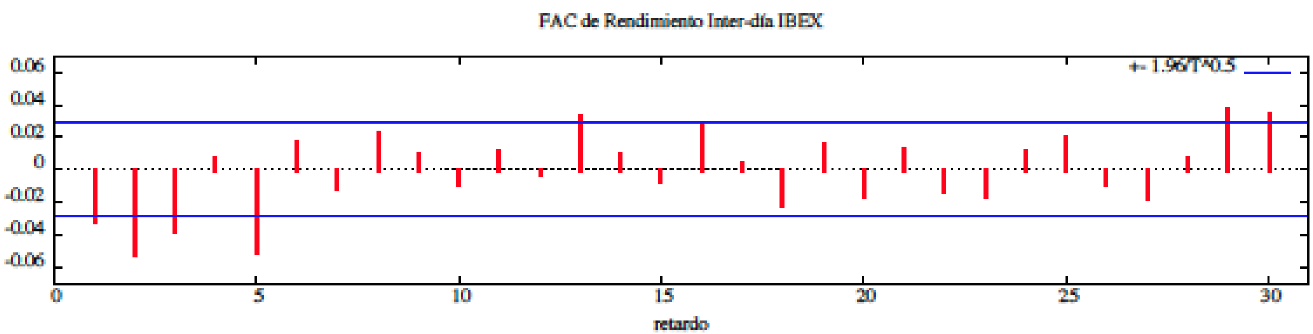
Sharpe, W. F. (1991). Capital Asset Prices with and without Negative Holdings. *The Journal of Finance , 46* (2), 489 - 509.

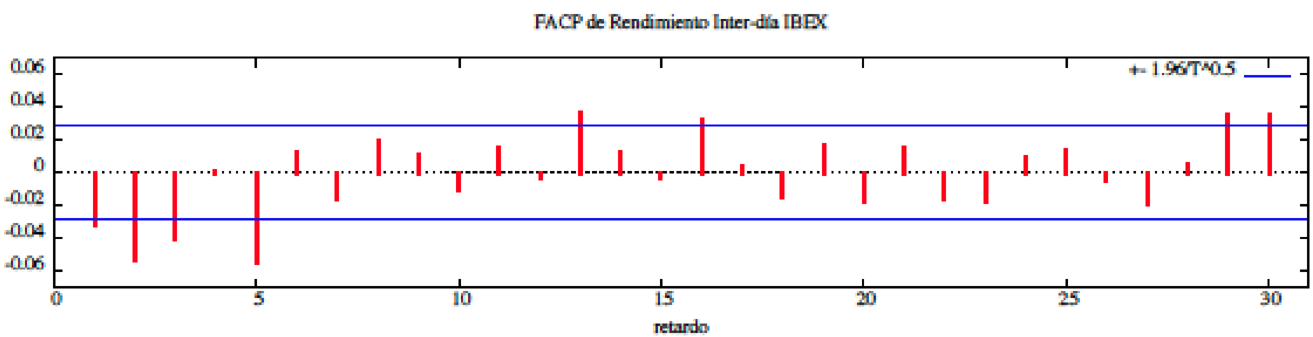
Tobin, J. (1981). Money and Finance in the Macro-economic Process. *Nobel Lecture* (pp. 12 - 47). New Haven: Yale University.

Wu, J. (2010). *Threshold GARCH Model: Theory and Apllication.* The University of Western Ontario. Ontario: The University of Western Ontario.

ANEXO I

CORRELOGRAMA





Función de autocorrelación para Rendimiento Inter-día IBEX

RETARDO	FAC		FACP		Estad-Q.	[valor p]
1	-0.0314	**	-0.0314	**	4.5727	[0.032]
2	-0.0523	***	-0.0533	***	17.2231	[0.000]
3	-0.0375	**	-0.0411	***	23.7300	[0.000]
4	0.0066		0.0011		23.9307	[0.000]
5	-0.0508	***	-0.0550	***	35.8776	[0.000]
6	0.0178		0.0131		37.3486	[0.000]
7	-0.0121		-0.0167		38.0271	[0.000]
8	0.0230		0.0196		40.4795	[0.000]
9	0.0096		0.0112		40.9066	[0.000]
10	-0.0090		-0.0100		41.2828	[0.000]
11	0.0111		0.0152		41.8501	[0.000]
12	-0.0024		-0.0037		41.8776	[0.000]
13	0.0331	**	0.0366	**	46.9624	[0.000]
14	0.0097		0.0131		47.3951	[0.000]
15	-0.0074		-0.0038		47.6508	[0.000]
16	0.0270	*	0.0327	**	51.0329	[0.000]
17	0.0036		0.0043		51.0943	[0.000]
18	-0.0220		-0.0146		53.3479	[0.000]
19	0.0153		0.0167		54.4334	[0.000]
20	-0.0164		-0.0178		55.6780	[0.000]
21	0.0133		0.0151		56.5001	[0.000]
22	-0.0137		-0.0158		57.3710	[0.000]
23	-0.0165		-0.0183		58.6349	[0.000]
24	0.0112		0.0102		59.2205	[0.000]
25	0.0200		0.0135		61.0838	[0.000]
26	-0.0083		-0.0046		61.4075	[0.000]
27	-0.0167		-0.0190		62.7049	[0.000]
28	0.0069		0.0057		62.9260	[0.000]
29	0.0367	**	0.0351	**	69.2063	[0.000]
30	0.0342	**	0.0358	**	74.6385	[0.000]

ANEXO II

CONTRASTE AUMENTADO DE DICKEY FULLER

```
Contraste aumentado de Dickey-Fuller para r
incluyendo 31 retardos de (1-L)r
(el máximo fue 31, el criterio AIC modificado)
tamaño muestral 4590
hipótesis nula de raíz unitaria: a = 1

  contraste con constante
  modelo: (1-L)y = b0 + (a-1)*y(-1) + ... + e
  Coef. de autocorrelación de primer orden de e: 0.000
  diferencias retardadas: F(31, 4557) = 2.434 [0.0000]
  valor estimado de (a - 1): -1.01508
  Estadístico de contraste: tau_c(1) = -11.0337
  valor p asintótico 1.489e-22

  con constante y tendencia
  modelo: (1-L)y = b0 + b1*t + (a-1)*y(-1) + ... + e
  Coef. de autocorrelación de primer orden de e: 0.000
  diferencias retardadas: F(31, 4556) = 2.432 [0.0000]
  valor estimado de (a - 1): -1.02838
  Estadístico de contraste: tau_ct(1) = -11.102
  valor p asintótico 2.074e-24
```