Análisis de la estabilidad en una comunidad de mutualistas

Juan P. G. Villaluenga[1], Javier Galeano[2] y Rafael Vida[2]
[1]Departamento de Estructura de la Materia, Física Térmica y Electrónica, Universidad Complutense de Madrid, Spain
[2]Grupo de Sistemas Complejos, Universidad Politécnica de Madrid, Spain

García-Algarra *et al.* [1] estudian una comunidad de mutualistas cuya dinámica de poblaciones está descrita por la ecuación

$$\frac{dX_i}{dt} = X_i \left(r_i - s_i X_i\right), \tag{1}$$

donde el índice i denota la especie i-ésima ($i = 1, \ldots, S$). Los coeficientes r_i y s_i se definen como

$$r_i = r_i^\circ + \sum_{j=1, j\neq i}^{S} b_{ij} X_j, \tag{2}$$

$$s_i = s_i^\circ + c_i \sum_{j=1, j\neq i}^{S} b_{ij} X_j, \tag{3}$$

donde los elementos b_{ij} forman una matriz de dimensiones $S \times S$, cuyos valores caracterizan el tipo de interacción entre especies. La ecuación general puede escribirse de una manera más compacta como sigue

$$\frac{dX_i}{dt} = X_i \left[r_i^\circ - s_i^\circ X_i + (1 - c_i X_i) \sum_{j=1, j\neq i}^{S} b_{ij} X_j \right]. \tag{4}$$

Los puntos fijos del sistema son

$$r_i^\circ - s_i^\circ X_i^* + (1 - c_i X_i^*) \sum_{j=1, j\neq i}^{S} b_{ij} X_j^* = 0, \tag{5}$$

siendo X_i^* un vector de dimensión $S \times 1$. Los elementos de la matriz jacobiana evaluada en el punto de equilibrio son

$$M_{ii} = -X_i^* \left(s_i^\circ + c_i \sum_{j=1, j\neq i}^{S} b_{ij} X_j^* \right), \tag{6a}$$

$$M_{ij} = X_i^* \left(1 - c_i X_i^*\right) b_{ij}. \tag{6b}$$

Para simplificar la notación, definimos

$$\alpha_i = s_i^\circ + c_i \sum_{j=1, j\neq i}^{S} b_{ij} X_j^*, \tag{7}$$

$$B_{ij} = \left(1 - c_i X_i^*\right) b_{ij}. \tag{8}$$

En consecuencia, la matriz jacobiana puede escribirse como

$$M_{ii} = -\alpha_i X_i^*, \tag{9a}$$

$$M_{ij} = B_{ij} X_i^*. \tag{9b}$$

Este resultado sugiere que si se define una variable $Y_i = X_i / X_i^*$ (el punto fijo sería la unidad), la matriz jacobiana resultante A tendría los siguientes elementos

$$A_{ii} = -\alpha_i, \tag{10a}$$

$$A_{ij} = B_{ij}. \tag{10b}$$

Además, si definimos una nueva matriz $N = A/\beta$, donde $\beta = \sqrt{C\sigma^2} = \sqrt{S\,\mathrm{Var}(A_{ij})}$, esta nueva matriz satisfaría los requisitos de Sommers [2], esto es,

$$\mathrm{E}(N_{ij})_{i\neq j} = 0, \tag{11}$$

$$\mathrm{Var}(N_{ij}) = \frac{1}{S}, \tag{12}$$

y podríamos afirmar que los autovalores de N estarían contenidos en una elipse con semieje mayor $a^* = 1 + \tau$ y semieje menor $b^* = 1 - \tau$, donde

$$\begin{aligned} \tau &= \mathrm{E}(N_{ij} N_{ji})_{i\neq j} \\ &= \frac{\mathrm{E}(A_{ij} A_{ji})_{i\neq j}}{\beta^2}. \end{aligned} \tag{13}$$

En consecuencia, los autovalores de A estarían dentro de una elipse con semieje mayor $a = \beta(1 + \tau)$ y semieje menor $b = \beta(1 - \tau)$. Finalmente, el estado de equilibrio sería estable si se cumpliera [3]

$$\sqrt{S\,\mathrm{Var}(A_{ij})} \left[1 + \frac{E(A_{ij} A_{ji})}{\mathrm{Var}(A_{ij})} \right] < d, \tag{14}$$

donde d se calcula como sigue

$$\begin{aligned} d &= \frac{1}{S} \sum_{i=1}^{S} \alpha_i \\ &= \frac{1}{S} \sum_{i=1}^{S} \left(s_i^\circ + c_i \sum_{j=1, j\neq i}^{S} b_{ij} X_j^* \right). \end{aligned} \tag{15}$$

Si la interacción es mutualista, los elementos b_{ij} de la matriz comunitaria pueden calcularse a partir de los valores de una variable aleatoria X con distribución gaussiana. En este caso, se tiene que $\mathrm{E}(b_{ij})_{i\neq j} = 0$, $\mathrm{Var}(b_{ij})_{i\neq j} = C\sigma^2$ y $\mathrm{E}(b_{ij} b_{ji})_{i\neq j} = C\,\mathrm{E}(|X|)^2$. La conectividad C representa la probabilidad de que se produzca la interacción entre dos especies ($C \in [0, 1]$). Una vez generada la matriz comunitaria, conocidos los valores del resto de parámetros del sistema (r_i°, s_i° y c_i), se puede analizar la estabilidad del estado de equilibrio en términos de los parámetros de complejidad.

[1] J. García-Algarra, J. Galeano, J. M. Pastor, J. M. Iriondo, and J. J. Ramasco, Rethinking the logistic approach for population dynamics of mutualistic interactions, J. Theor. Biol. **364**, 332 (2014).

[2] H. J. Sommers, A. Crisanti, H. Sompolinsky, and Y. Stein, Spectrum of large random asymmetric variables, Phys. Rev. Lett. **60**, 1895 (1988).

[3] S. Allesina and S. Tang, Stability criteria for complex ecosystems, Nature **483**, 205 (2012).