Universidad Pontificia Comilla - ICADE

OPTIMIZACIÓN DE CARTERAS DE INVERSIÓN CON CRIPTODIVISAS

Clave: 201606399

MADRID | Enero 2023

ÍNDICE DE LA MEMORIA

1. RESUMEN Y PALABRAS CLAVE

Las criptodivisas han sido tendencia en el mundo de la inversión durante los últimos años. Sin embargo, son activos poco conocidos por los inversores tradicionales, que cuentan con un alto nivel de riesgo. Por ello, se desea investigar sobre las técnicas empleadas tanto para invertir en criptomonedas, como para gestionar y optimizar las carteras que contienen este tipo de activos.

El principal objetivo consiste en definir que teorías de gestión y optimización de carteras se ajustan más a la inversión en criptodivisas. Además, se pretende analizar las ventajas que dichos activos aportan a la hora de diversificar una cartera.

Para ello, se emplean tres modelos distintos que se basan en la teoría de cartera moderna de Markowitz, la teoría de la opinión del inversor de Black Litterman, y en una combinación de ambas. En cuanto a las carteras que estos tres modelos pretenden optimizar, se emplearán dos distintas: una en la que solo haya criptodivisas, y otra que cuente con activos de características distintas como valores refugio, y valores de renta fija y de renta variable. Esto se hace con el fin de determinar las ventajas de la diversificación.

Tras resolver los problemas de optimización, se concluye que la diversificación es una de las claves del éxito de las carteras de inversión, y que las criptomonedas aportan diversificación a las carteras, puesto que se comportan de forma muy distinta a los activos tradicionales, y por tanto presentan poca relación, o incluso relaciones inversas con ellos.

Por otra parte, en cuanto a las técnicas de optimización de las carteras que contienen criptodivisas, se concluye que lo mejor es combinar métodos teóricos basados en datos históricos, con métodos que tomen en cuenta la opinión del inversor, puesto que el mercado de las criptomonedas es especialmente volátil y susceptible al sentimiento del mercado. La flexibilidad que aporta una técnica más subjetiva, como la de Black Litterman, combinada con el fundamento teórico de otra técnica más objetiva, como la de Markowitz, resulta muy útil a la hora de optimizar carteras de inversión de este tipo de activos, y así se demuestra en este trabajo.

Palabras clave: criptodivisas, riesgo, rentabilidad, ponderaciones, Black Litterman, Markowitz

There has been a huge trend around cryptocurrencies in the investment world in the recent years. However, there is limited information about them, and are very risky in terms of volatility. As a result, this project aims to analyze the investment techniques that are suitable for cryptocurrencies, as well as those used to optimize portfolios that contain them.

The main objective consists on determining which portfolio optimization theories are most suitable for investment in cryptocurrencies. In addition, the project aims to analyze the advantages that this type of asset brings to portfolio diversification.

To do so, three different optimization models are used. The first one is based on Markowitz's modern portfolio theory, the second one on Black Litterman's investor sentiment theory, and the third one on a combination of both. In terms of the portfolios that these three models aim to optimize, two different ones will be used: the first one will consist only of cryptocurrencies, while the second one will also include other assets with different characteristics, such as safe haven securities, fixed income and equity securities, in order to analyze the benefits of diversification.

After solving the optimization problems, it can be concluded that diversification is one of the keys to the success of investment portfolios. Cryptocurrencies are used to diversify portfolios, since they behave very differently from traditional assets, and therefore have little to negative relationship with them.

On the other hand, in terms of the techniques used to optimize portfolios containing cryptocurrencies, it can be concluded that the best solution consists of the combination of theoretical methods based on historical data, with methods that consider investor opinion, since the cryptocurrency market is particularly volatile and susceptible to market sentiment. The flexibility provided by a more subjective technique, such as Black Litterman, combined with the theoretical fundaments of another, more objective technique, such as that of Markowitz, turns out to be very useful when optimizing investment portfolios of this type of asset, as it is demonstrated in this paper.

Keywords: cryptocurrencies, risk, returns, weights, Black Litterman, Markowitz

2. INTRODUCCIÓN

Este trabajo pretende analizar las distintas técnicas de inversión y gestión de carteras basadas en los criptoactivos.

2.1 OBJETIVOS

El principal objetivo de este trabajo es estudiar la inversión en criptomonedas. Para ello, se desea analizar tanto las distintas técnicas de inversión en criptomonedas como las técnicas de optimización de las carteras que las contienen.

Una vez se estudian las técnicas de inversión y de optimización, se desea encontrar el método óptimo de gestión de carteras de criptodivisas.

Por último, se desea evaluar el efecto de la diversificación a la hora de gestionar carteras, puesto que las criptodivisas cuentan con un comportamiento muy distinto al del resto de activos tradicionales.

2.2 METODOLOGÍA

Para cumplir con los objetivos mencionados, en primer lugar se investigará el estado de la cuestión, es decir, se tratará de definir que técnicas emplean los inversores en cuanto a las criptomonedas, y como las integran en las carteras de inversión que gestionan.

Una vez se conozca dicho estado de la cuestión, se emplearán tres modelos distintos de optimización de carteras, que se basarán en dos modelos teóricos conocidos.

- Modelo 1: emplea la teoría de portfolio de cartera moderna de Markowitz
- Modelo 2: emplea la teoría de visión del inversor de Black Litterman
- Modelo 3: integra ambas teorías en el modelo

Para la resolución de los problemas de optimización de cada modelo, se emplearán códigos independientes de Python en Jupyter. Dichos códigos se extraerán de fuentes externas. Los códigos completos se encuentran en los anexos, así como las fuentes de donde se extraen.

Los datos de entrada del problema de optimización serán el histórico de precios y la capitalización de mercado de todos los activos. En cuanto a la visión del inversor para el modelo de Black Litterman, se basará en estos dos datos previos. La forma de calcularlos se explicará más adelante, en el desarrollo del trabajo.

Con los datos de entrada y el código, se obtendrá como resultados, varias carteras de inversión, con su riesgo, rentabilidad, y ponderación de los activos. Éstas se evaluarán en la sección de resultados.

Con el objetivo de analizar las ventajas de diversificación, se resolverá el problema de cada modelo de inversión con dos fuentes de datos distintas, basadas en carteras que cuentan con distintos activos.

1. Cartera de criptodivisas: contará solo con diez criptoactivos
2. Cartera diversificada: contará con los diez criptoactivos previos, el oro como valor refugio, un índice de mercado como valor de renta variable, y un bono del estado como valor de renta fija

De este modo, se obtendrán un total de seis soluciones, una por cartera y por modelo.

Por último, cabe destacar que los datos históricos con los que se resolverá el problema de optimización, comprenderán entre noviembre de 2017 y diciembre de 2022. Se trata de un rango de tiempo muy reducido, dada la naturaleza del mercado de criptodivisas, que es muy nuevo. Además, al modelar hasta 2022, se podrá proyectar la rentabilidad de las carteras obtenidas, con los datos reales, y definir que modelo y que cartera obtiene el mejor resultado.

Con los resultados obtenidos, se podrán analizar las ventajas de la diversificación y se podrá definir cuál de los tres modelos se ajusta mejor a la gestión de carteras basadas en criptodivisas.

2.3 Estado de la Cuestión

2.3.1 Estrategias de Inversión en Criptodivisas

Las estrategias de inversión que se emplean en el mercado de criptomonedas difieren de las habituales, empleadas en los mercados tradicionales con acciones, bonos de estado o activos inmobiliarios. Esto se debe en gran parte a las características tan distintas que presentan dichos activos. Las criptomonedas, a diferencia del resto, carecen de un valor fundamental o tangible, y son muy susceptibles al sentimiento del mercado y corrientes de inversión. Por tanto, surge la necesidad de evaluar métodos de inversión alternativos. Tienen éxito, entre otros:

- HODL, compra y retención: esta estrategia consiste en comprar criptomonedas con la intención de mantenerlas durante un periodo prolongado de tiempo, independientemente de las fluctuaciones de precio a corto plazo. Los inversores creen en el potencial a largo plazo de la criptodivisa y esperan que su valor aumente con el tiempo.
- Promedio de coste en comparación a la divisa local (DCA – dollar-cost averaging): consiste en invertir regularmente una cantidad fija de dinero para comprar criptomonedas a intervalos predeterminados, independientemente del precio actual. Este enfoque ayuda a mitigar el impacto de la volatilidad a corto plazo y permite a los inversores acumular criptodivisas a lo largo del tiempo.
- Especulación y compraventa: en este caso el objetivo de los inversores es beneficiarse de los movimientos de precio a corto plazo, comprando y vendiendo continuamente. Este método requiere análisis técnico, seguimiento del mercado y toma rápida de decisiones. Los inversores emplean diversas estrategias, como el trading intradiario, el *swing trading* y el *scalping*, para aprovechar la volatilidad y fluctuaciones de los precios.
- Posiciones en corto y en largo: algunos inversores se dedican a estrategias de posicionamiento, en las que toman posiciones tanto en largo (comprando), como en corto (venta prestada), en el mercado de criptodivisas. Esta estrategia permite a los inversores beneficiarse tanto de los mercados alcistas como de los bajistas.
- Arbitraje: el arbitraje consiste en aprovecharse de las diferencias de precio entre las distintas bolsas o mercados de criptomonedas. En este caso, los inversores tratan de comprar una criptomoneda a un precio bajo en un mercado y venderla a mayor precio en otro, beneficiándose de la discrepancia de precios. Sin embargo, las oportunidades de arbitraje con limitadas y requieren una ejecución rápida, así como un conocimiento técnico elevado.
- ICO/IEO: las Ofertas Iniciales de Moneda (ICO – *Initial Coin Offering*) y las Ofertas Iniciales de Intercambio (IEO – *Initial Exchange Offering*) son métodos de recaudación de fondos utilizados por proyectos de *blockchain* para recaudar capital. Los inversores pueden participar en estas ofertas comprando tokens o monedas a un precio con descuento antes de que salgan a bolsa. Este método

conlleva mayores riesgos debido a la posibilidad de que se produzcan estafas o proyectos con viabilidad limitada.

- Apuesta (stacking) y cultivo de rendimientos (yield farming): a través del stacking, los inversores acumulan criptomonedas en una cartera o smart-contract, con el fin de sumar nuevos bloques a su cadena blockchain, y así apoyar a las operaciones de la red, obteniendo recompensas por ello. Por otra parte, el Yield Farming, es una forma de financiación descentralizada que consiste en proporcionar liquidez a intercambios descentralizados o a plataformas de préstamo a cambio de recompensas o intereses.
- Inversión en índices y fondos: tanto los fondos indexados, como los fondos cotizados (ETF) de criptodivisas, permiten a los inversores generar una cartera diversificada de criptomonedas. Estos fondos tienen como objetivo seguir el rendimiento de un índice o segmento de mercado específico, proporcionando un enfoque más equilibrado a la inversión en criptodivisas.

2.3.2 Optimización de Carteras de Criptodivisas (Portfolio)

Además de las estrategias de inversión que se emplean en el mercado de las criptodivisas, también existen técnicas de gestión y optimización de las carteras que se ajustan a este mercado. Estas técnicas tienen como objetivo el minimizar los riesgos para un determinado beneficio, o en maximizar el beneficio con un límite de riesgo. Las técnicas difieren tanto en metodología como en los datos de entrada e hipótesis necesarias para definirlos. Los modelos y estrategias que más éxito tienen entre inversores, son las siguientes:

- Modelo de Markowitz MPT (Modern Portfolio Theory): esta teoría se centra en la diversificación de carteras con el objetivo de minimizar el riesgo a través de la combinación de activos con diferentes niveles de riesgo y rentabilidad. Para ello toma en cuenta los datos históricos de beneficio y volatilidad de los activos, en este caso criptomonedas, y la correlación entre todos los activos a gestionar en la cartera.
- Optimización de la varianza media (MVO): es una aplicación específica del modelo de Markowitz que trata de encontrar una cartera que maximice la rentabilidad esperada para un determinado nivel de riesgo (o minimice el riesgo para un determinado nivel de rentabilidad). Tiene en cuenta los beneficios

esperadas, volatilidades y correlaciones de las criptomonedas para determinar la cartera óptima que equilibre riesgo y rentabilidad.

- Paridad de riesgo: la paridad de riesgo tiene como objetivo determinar ponderaciones de cartera basadas en la contribución de riesgo de cada tipo de activo, en lugar de emplear un enfoque tradicional en el que se compra la misma cantidad (en EUR o la moneda de compra) de cada activo. En el contexto de las criptomonedas, la paridad de riesgo asignaría mayor peso a aquellas criptomonedas con menor volatilidad histórica, con el fin de equilibrar y mitigar el riesgo al que se expone el inversor.
- Modelo de Black-Litterman: este modelo combina las hipótesis de equilibrio del mercado con las opiniones de los inversores para la optimización de carteras. Permite a los inversores incorporar sus propias creencias o puntos de vista sobre los rendimientos esperados de las criptomonedas en el proceso de optimización del portfolio.
- Algoritmos y Machine Learning: son técnicas que pueden usarse para generar carteras que maximicen la rentabilidad o minimicen el riesgo en función de objetivos predefinidos basándose en el historial de datos.

Estos modelos se pueden emplear para varios tipos de cartera y en ningún caso son exclusivos para la inversión en criptodivisas. Además, como se ha indicado, se basan en hipótesis y datos históricos, y dada la gran incertidumbre y volatilidad, características del mercado de las criptodivisas, pueden no dar buenos resultados. Por ello, a la hora de emplearlos, se deben tomar en cuenta las limitaciones del mercado que se trata en este estudio.

En primer lugar, el mercado de las criptodivisas es relativamente nuevo en comparación a otros mercados tradicionales, ya que no cobraron relevancia hasta hace cinco años, haciendo que los datos históricos sean limitados. Esto puede tener impacto en la precisión de los análisis de predicción de riesgos y beneficios de los modelos descritos. Además, estos datos históricos demuestran que las criptodivisas cuentan con un grado de volatilidad substancial, y que sus beneficios no se rigen por distribuciones normales, lo cual es una hipótesis en varias de las técnicas listadas.

Por otra parte, los mercados de criptomonedas suelen estar menos regulados y no cuentan con el mismo nivel de transparencia que los mercados financieros tradicionales.

Esto puede dificultar la búsqueda de datos fiables y las estimaciones del riesgo y rentabilidad de las monedas. Además, por sus características, que se definirán en el marco teórico con mayor detalle, las criptomonedas tienen, de forma natural, riesgos únicos intrínsecos, como incertidumbres normativas y regulatorias, vulnerabilidades tecnológicas, fallos de seguridad y manipulación del mercado. Estos riesgos deben tenerse en cuenta e incorporarse al proceso de optimización de la cartera para obtener resultados útiles.

Por último, cabe destacar que este tipo de mercados puede contar con menos liquidez según las corrientes de inversión a las que se enfrente, pudiendo resultar en restricciones en las negociaciones y las órdenes de compraventa. Al fin y al cabo, son mercados que pueden verse muy influidos por las noticias, la opinión de las redes sociales y el sentimiento del mercado, llegando a provocar rápidas oscilaciones de precios y afectar a la eficacia de los modelos de optimización tradicionales que asumen mercados eficientes.

En resumen, el estado de la cuestión de la gestión de carteras de criptomonedas, se centra actualmente, en introducir estos factores limitantes en las técnicas de optimización que se han usado previamente con las carteras de activos tradicionales. Es un requisito indispensable puesto que las criptodivisas cuentan con un comportamiento muy dispar al de estos activos. Por ello, muchos inversores deciden incluirlas en sus carteras con el objetivo de diversificar, puesto que es muy probable que no exista correlación entre el riesgo y los beneficios de las criptomonedas y las acciones, bonos de estado, inmobiliarias, u otros.

3. Marco Teórico

3.1 Criptomonedas

En un contexto histórico, el concepto de la criptografía se remonta a los años 80, durante los cuales surgen las técnicas y conceptos de las criptomonedas. Durante los 90, David Chaum, creador de protocolos criptográficos, intenta crear la primera criptomoneda, denominada Digicash o ecash. A pesar de fracasar en el intento, es él quien sienta las bases de las criptomonedas de hoy en día. Posteriormente, en 2008, el grupo Satoshi Nakamoto publica Bitcoin como una moneda digital descentralizada, creando el primer bloque (Genesis Block) a inicios de 2009. Bitcoin toma relevancia durante los próximos años y en 2011 empiezan a emerger nuevas monedas, las ya mencionadas Altcoins. Sin embargo, el "boom de las criptomonedas" no llega hasta 2017, cuando el precio de Bitcoin se dispara a los $20,000, entre otras fuertes crecidas. Hasta la fecha de hoy, las criptomonedas han ganado aceptación y atención gracias a que instituciones financieras y empresas importantes como PayPal, Square y Tesla han anunciado su apoyo a la divisa. Además, los NFT (non-fungible tokens), han ganado popularidad como activos digitales que representan la propiedad de artículos únicos.

Las criptomonedas son divisas digitales o virtuales que usan la criptografía como fuente de seguridad. Se trata de un tipo de divisa descentralizada, es decir, no está controlada por los bancos centrales de los países ni por sus gobiernos. En su lugar, dependen de una red de ordenadores, denominados nodos, que mantienen la integridad del sistema. Estos nodos, que emplean la tecnología blockchain, registran todas las transacciones en una cadena cronológica de bloques que se enlazan entre sí mediante hashes criptográficos. Esto garantiza la seguridad y la transparencia de las transacciones.

Las criptomonedas permiten a los inversores tener la propiedad y control directo de sus activos virtuales o digitales. Esta propiedad se representa con llaves o claves criptográficas, existe una clave privada, que proporciona acceso a los fondos, y una clave pública, que se emplea para recibirlos.

La mayor parte de las criptomonedas que hay en circulación actualmente, cuentan con una oferta limitada, al igual que las acciones de las empresas. En el caso que se trata, esto se debe a los límites de la minería y a los calendarios de emisión predeterminados. La minería es el proceso mediante el cual se crean unidades nuevas de criptomonedas y se verifican las transacciones. Los mineros utilizan ordenadores y equipos potentes para resolver problemas matemáticos complejos que validan las transacciones, y las añaden a la cadena de bloques. Como recompensa, suelen recibir unidades de las criptomonedas para las cuales programan.

Existen dos pequeñas variaciones de las criptomonedas que se conocen, los Altcoins y los Tokens. Los Altcoins son, como su nombre indica, monedas alternativas, con características diferentes a las criptomonedas, otros casos de uso y/o tecnologías subyacentes. Por otra parte, los tokens se suelen construir sobre plataformas blockchain existentes (como Ethereum) y sirven para el desarrollo de fines específicos dentro de un proyecto o ecosistema.

Las criptomonedas tienen diversos propósitos. Algunas pretenden ser una moneda digital para las transacciones cotidianas, mientras que otras se centran en contratos inteligentes (Smart contracts), aplicaciones descentralizadas o la prestación de servicios específicos dentro de los ecosistemas blockchain.

En cuanto a la inversión en criptomonedas, existen ventajas y desventajas, así como limitaciones. Las criptomonedas han demostrado un potencial de apreciación significativa de sus precios. Algunos inversores, especialmente los pioneros, que supieron predecir el éxito que tendría este tipo de divisa, han logrado beneficios sustanciales. Muchos inversores han apostado por las criptomonedas con el objetivo de diversificar su cartera de inversión. Este tipo de activo tiene una correlación baja con los activos tradicionales, como las acciones o los bonos de estado, y, por tanto, es probable que sus tendencias sean distintas, reduciendo el riesgo de dichas carteras o portfolios. Además, Las criptodivisas se comercializan a nivel mundial en varias bolsas, lo cual permite a sus inversores acceder a mercados y oportunidades que pueden no estar disponibles en su ámbito local. Esta accesibilidad global permite la compra-venta durante las 24 horas del día, 7 días a la semana. Esto presenta una gran ventaja puesto que pueden reaccionar con rapidez a los cambios del mercado.

Por otra parte, se recomienda adquirir cierto grado de conocimiento acerca del tema de las criptodivisas previo a la inversión, ya que cuentan con un alto grado de volatilidad y fluctuación de precios en periodos cortos de tiempo. Como se comentó previamente, esta volatilidad puede dar lugar a ganancias substanciales, pero también conlleva un alto riesgo de pérdidas. Además, el mercado de criptomonedas es relativamente nuevo, y cuenta con menos regulación de los mercados financieros tradicionales. Esto expone a los inversores a ciertos riesgos, como las actividades fraudulentas, los ataques informáticos (hackeo) a carteras, y la falta de protección legal ante estas circunstancias, que sí existe en los mercados regulados por los bancos centrales y gobiernos de los países. Los inversores se enfrentan a un compromiso entre la descentralización de las criptomonedas y la protección que aporta la intervención de los entes públicos en los mercados tradicionales. Esta falta de regulación también da lugar a la manipulación del mercado. La pequeña liquidez que presentan la mayoría de las criptomonedas las hace vulnerables a la manipulación, los esquemas de "bombeo y descarga", en los que ciertos individuos o grupos inflan artificialmente el precio de una criptomoneda y luego venden sus participaciones son muy frecuentes. Sin ir más lejos, la moneda DogeCoin que ahora cuenta con una capitalización de mercado superior a 9000 millones de dólares (USD), es una "memecoin" que se viralizó en redes y creció de forma exponencial por ello.

Por último, cabe destacar que, a diferencia de los activos tradicionales, como las acciones, bonos de estado, o el mercado inmobiliario, las criptomonedas carecen a menudo de valor intrínseco o fundamental. Su valor depende principalmente del sentimiento del mercado, la especulación y las tendencias de adopción, lo que puede hacer que su valoración sea impredecible. Los tecnicismos, terminología y la dinámica del mercado son muy complejos y por ello no se recomienda la inversión a inversores inexpertos o sin una liquidez suficiente que les pueda permita grandes pérdidas.

Resumiendo, aunque las criptomonedas han ganado atención y popularidad, su adopción generalizada y sus casos de uso en el mundo real siguen siendo limitados. La aceptación de las criptomonedas como medio de pago por parte de empresas y particulares sigue siendo relativamente baja. Esta falta de adopción generalizada puede limitar la utilidad y el valor a largo plazo de determinadas criptomonedas.

3.2 Teoría de Cartera Moderna de Markowitz

El modelo de carteras de Markowitz (MPT – Modern Portfolio Theory), es una teoría de inversión desarrollada por el economista Harry Markowitz en la década de 1950, que tiene como principal objetivo encontrar una cartera de inversión óptima teniendo en cuenta el equilibrio entre riesgo y rentabilidad. El concepto fundamental de la teoría se basa en que un inversor pueda hallar la cartera que maximice los beneficios esperados para un determinado nivel de riesgo o que minimice el riesgo para un determinado nivel de beneficios esperados. La teoría destaca la importancia de la diversificación y la relación entre los distintos activos de una cartera. Se basa en la hipótesis de que los inversores son racionales y reacios al riesgo, lo que significa que prefieren carteras con menor riesgo para un nivel determinado de rentabilidad. Markowitz introdujo dos conceptos clave para cuantificar el riesgo y la rentabilidad: la rentabilidad esperada y la varianza (o desviación típica) de la rentabilidad. La rentabilidad esperada, es la rentabilidad media que un inversor puede esperar obtener de una inversión durante un periodo determinado de tiempo. Por otra parte, la varianza mide la dispersión o volatilidad de los rendimientos en base al rendimiento esperado. La teoría trata de demonstrar que, a través de la combinación de activos con diferentes rentabilidades esperadas y varianzas, un inversor puede construir una cartera que logre un equilibrio deseable entre el riesgo y la rentabilidad de la misma.

Markowitz demostró que, diversificando entre activos de diferentes características de riesgo y rentabilidad, es posible reducir el riesgo global de la cartera sin sacrificar la rentabilidad. La diversificación se consigue seleccionando activos que no estén perfectamente correlacionados, es decir, seleccionando activos cuyos precios no se muevan en perfecta sincronía. De este modo, las pérdidas que provoquen ciertas inversiones pueden compensarse con las ganancias que generen otras, lo cual se traduce en un rendimiento global más fluida de la cartera. También introdujo el concepto de frontera eficiente, que representa el conjunto de carteras óptimas que ofrecen la mayor rentabilidad esperada para un determinado nivel de riesgo o el menor riesgo para un determinado nivel de rentabilidad esperada. La frontera eficiente es una curva que ilustra la relación entre riesgo y rentabilidad. Para construir una cartera eficiente, el inversor debe determinar su tolerancia al riesgo y el nivel de rentabilidad deseado. Una vez estos parámetros estén definidos, se pueden usar técnicas matemáticas de optimización, como la optimización de media-varianza, para identificar la cartera que se encuentra en la frontera eficiente y que mejor se ajusta a sus preferencias de riesgo-rentabilidad. A continuación, se muestra un ejemplo de frontera eficiente:

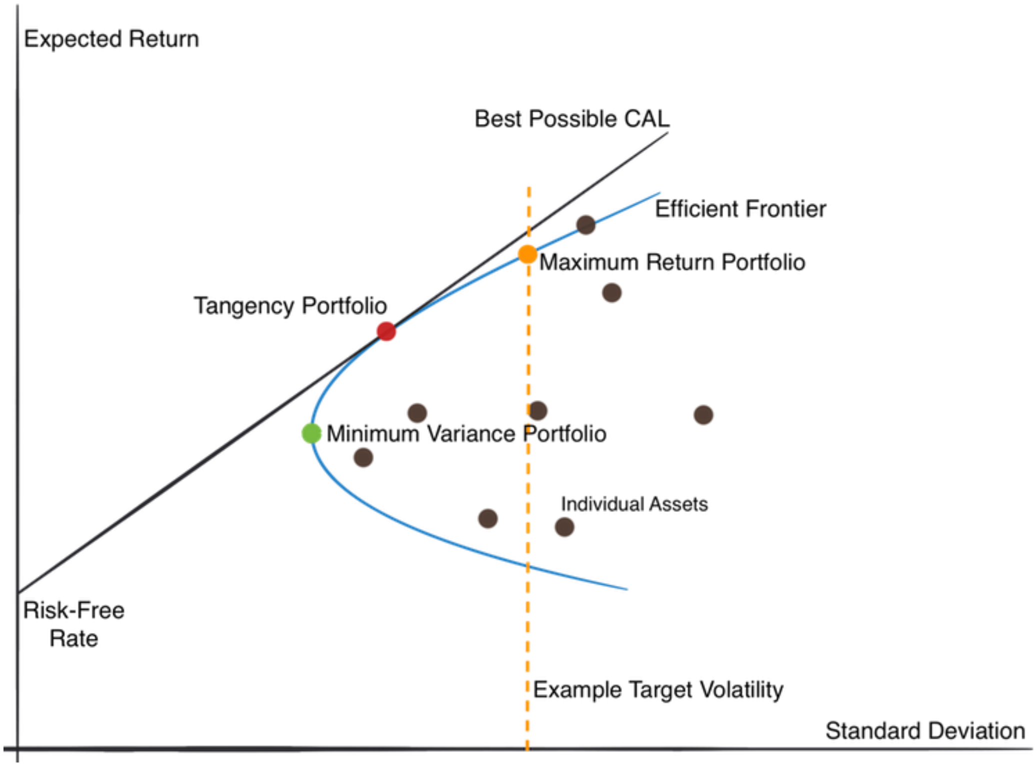

Gráfico 1 – Frontera Eficiente Markowitz

En este caso, el eje y representa la rentabilidad, normalmente con unidades porcentuales de beneficios sobre la inversión inicial. Por otro lado, el eje x representa la volatilidad o riesgo de inversión, en unidades de desviación estándar. Como se mencionó previamente, para generar una cartera de inversión con el modelo de Markowitz, el inversor debe definir el nivel de riesgo que está dispuesto a asumir, esto se representa en el gráfico anterior con la línea naranja "Example Target Volatility". Por otra parte, los puntos negros representan cada uno de los activos que el inversor quiere incluir en su cartera, con sus características de riesgo y rentabilidad que se suelen definir en base a datos históricos de los mismos. Como se recalcó previamente, la curva de la frontera eficiente representa las combinaciones de cartera necesarias para maximizar la rentabilidad dado un nivel de riesgo o minimizar el riesgo dado un nivel de rentabilidad, según el inversor quiera enfocar su cartera. Para posicionar dicha cartera en la frontera eficiente, la teoría de Markowitz, resolviendo el problema de optimización, genera diferentes ponderaciones para las inversiones individuales de cada activo de la cartera. No hay una solución única de cartera, puesto que se trata de una curva, es decir, se generan varias propuestas de cartera, y cada una tendrá sus distintas características.

Dentro de las restricciones que limitan el problema, como puede ser el límite superior de riesgo que el inversor este dispuesto a asumir, existen varios tipos de carteras.

En el gráfico 1 encontramos la cartera de mínima varianza o riesgo en verde, la cartera de máximo rendimiento o beneficio, en naranja, y la cartera tangente, que es aquella que también se encuentra sobre la línea de ponderación de capital óptima (CAL – Capital Allocation Line). Esta línea representa las posibles combinaciones de riesgo y rentabilidad que el inversor puede conseguir asignando fondos entre un activo sin riesgo y la cartera de riesgo. Este activo sin riesgo suele estar representado por los bonos de estado o letras del tesoro de los gobiernos y bancos centrales, puesto que generalmente son los activos que cuentan con menor riesgo en los mercados, sirven de referencia para evaluar la cartera de riesgo. La CAL, en definitiva, es una línea recta que parte de la tasa de rentabilidad sin riesgo y pasa por el punto que representa la cartera de riesgo en la frontera eficiente. Este punto representa la cartera de riesgo óptima que un inversor ha construido en función de sus preferencias de riesgo-rentabilidad. La pendiente de la CAL representa la rentabilidad adicional que un inversor puede esperar por cada unidad adicional de riesgo que asume alejándose del activo sin riesgo e invirtiendo más en la cartera de riesgo. Cuanto más pronunciada sea la pendiente, mayor será la rentabilidad esperada y el riesgo asociado a la cartera. Esta línea ayuda a los inversores a determinar la asignación óptima que se ajuste a sus preferencias de riesgo y al nivel de rentabilidad deseado, teniendo en cuenta las opciones de inversión disponibles en el mercado.

Existe una variación específica de la CAL, denominada CML (Capital Market Line) que deriva de los principios de CAPM (Capital Asset Pricing Model), un modelo que fija el precio de los activos y determina la rentabilidad esperada en base a su riesgo sistemático, también conocido como beta, que mide la sensibilidad del activo a los movimientos del mercado en general. En este caso específico, la pendiente de la CML representa la prima de riesgo de mercado, que es el exceso de rentabilidad que puede esperar un inversor por asumir el nivel medio de riesgo sistemático asociado a la cartera de mercado. Se calcula como la diferencia entre la rentabilidad esperada de la cartera de mercado y el tipo de rentabilidad sin riesgo. La prima de riesgo de mercado es una medida de la compensación que exigen los inversores por asumir un riesgo sistemático.

No se puede decir que la cartera tangente es mejor o peor que la de riesgo mínimo o rentabilidad máxima, ya que esto dependerá estrictamente de la opinión del inversor, y el nivel de riesgo que esté dispuesto a asumir.

En cuanto a la parte técnica de optimización que se emplea en el modelo de Markowitz, está puede ser simple o compleja dependiendo de las restricciones que se apliquen e hipótesis que se quieran dar por válidas. Es decir, puede ser tan simple como un problema de optimización en el que los datos de entrada sean los rendimientos históricos de varios activos, de los cuáles se obtendrán también sus volatilidades o riesgos y el nivel de riesgo máximo dispuesto a asumir por el inversor, y cuyo resultado sea un número de portfolios o carteras en las que se haya asignado diferentes ponderaciones de inversión de capital a cada uno de los activos propuestos. Sin embargo, cabe destacar que con este modelo se ignoran ciertos, que hacen que la teoría moderna de carteras de Markowitz no siempre sea precisa.

En primer lugar, la teoría asume que la rentabilidad de los activos sigue una distribución normal. Sin embargo, los mercados financieros pueden experimentar acontecimientos específicos que resulten en distribuciones de rentabilidad no normales, como colas gruesas o asimetría. En estos casos, el modelo dejaría de reflejar con exactitud el riesgo, ya que no toma en cuenta el asociado a dichos acontecimientos. Por otra parte, el modelo, como se ha explicado, se basa en gran medida en los datos históricos para para estimar los rendimientos esperados, las volatilidades y las correlaciones entre activos. Sin embargo, los datos históricos pueden no ser un indicador fiable de las condiciones futuras del mercado y pueden verse influidos por periodos de tiempo o entornos económicos específicos. Además, el modelo es muy sensible a los datos de entrada, provocando que pequeños cambios en estos supuestos den lugar a asignaciones de cartera y resultados significativamente diferentes.

Otro factor limitante del modelo es que parte del supuesto de que a los inversores sólo les preocupa el riesgo sistemático (medido por la beta) y que pueden diversificar todo el riesgo no sistemático mediante una asignación adecuada de activos. Sin embargo, el riesgo no sistemático, también conocido como riesgo idiosincrático, puede afectar a activos o sectores concretos y no puede eliminarse únicamente mediante la diversificación. También asume que todos los activos relevantes están incluidos en el análisis. No obstante, puede no captar determinados tipos de activos o inversiones, como activos alternativos o derivados específicos, que pueden afectar a la diversificación de la cartera y a las estrategias de gestión del riesgo.

Por otra parte, cabe destacar que tampoco se tienen en cuenta los costes de transacción, como las comisiones o los diferenciales entre precio de compra y de venta, que pueden afectar al rendimiento de la cartera, ni los impuestos, que pueden reducir la rentabilidad, especialmente en el caso de las cuentas de inversión sujetas a impuestos.

Por último, aplicando esta teoría, parte de la base de que los inversores son racionales y se guían únicamente por los rendimientos esperados y el riesgo. Sin embargo, en la práctica, los inversores están sujetos a sesgos de comportamiento, emociones y sentimientos del mercado, que pueden influir en su toma de decisiones y desviarse de los supuestos que se presentan. Por ello, es necesario ahondar en las técnicas de gestión de carteras, incorporando e integrando diferentes modelos, con el fin de gestionar todas las limitaciones que tiene el modelo de Markowitz, y conseguir una evaluación más global de los activos, que resulten en una predicción de rendimiento de la cartera más preciso.

3.3 MODELO BLACK LITTERMAN

El modelo de optimización de carteras de Black-Litterman se basa en la ponderación de activos combinando las ideas del modelo de valoración de activos de capital (CAPM – *Capital Asset Pricing Model*) con la estadística bayesiana. Fue desarrollado por Fischer Black y Robert Litterman en 1992 como una mejora del enfoque tradicional de optimización media-varianza propuesto por Harry Markowitz en su teoría de portfolio moderna (MPT). Como hemos visto en el apartado previo, este modelo cuenta con varias limitaciones, como la sensibilidad de los resultados, el grado de cumplimiento de las hipótesis de entrada y/o la dificultad de estimar con precisión los rendimientos esperados y las covarianzas. El modelo Black-Litterman pretende resolver estos problemas incorporando las opiniones subjetivas de los inversores y mejorando la estimación de los rendimientos esperados.

La metodología a emplear para su implementación es la siguiente:

1. Hipótesis de entrada: se han de especificar varias, incluidos los rendimientos esperados y las covarianzas de los activos que se consideran para la cartera. Estos datos se suelen basar en el histórico de los activos, aunque también se pueden tomar en cuenta las opiniones de expertos y el sentimiento del mercado. Los parámetros necesarios son:
    - Rentabilidades esperadas: obtener los rendimientos esperados para un conjunto de activos a partir de datos históricos u otras técnicas de previsión.

- Matriz de covarianza: se calcula la matriz de covarianza de los rendimientos de los activos, que cuantifica las relaciones entre los distintos activos en función de sus movimientos históricos de precios.
- Coeficiente de aversión al riesgo (λ): se ha de determinar el nivel de aversión al riesgo del inversor, que refleja su disposición a asumir riesgos. Un valor más alto implica un inversor más reacio al riesgo.

2. Cartera de equilibrio del mercado: el modelo Black-Litterman supone que existe una cartera de mercado de equilibrio que representa la opinión consensuada de todos los inversores del mercado. Esta cartera suele derivarse de un índice de referencia, como un índice bursátil amplio. Para hallar dicha cartera, se emplea el modelo de valoración de activos de capital (CAPM – *Capital Asset Pricing Model*), que describe la relación entre la rentabilidad esperada de un activo y su beta (riesgo sistemático) y proporciona una estimación de la rentabilidad esperada de la cartera de equilibrio del mercado.
3. Opinión del inversor: el objetivo principal de este modelo es permitir a los inversores expresar sus opiniones sobre los rendimientos esperados de los activos de forma individual o en relación con la cartera de equilibro de mercado. Estas opiniones pueden basarse en análisis fundamentales, factores macroeconómicos u otra información relevante. Específicamente, se requieren dos parámetros de entrada:
    - Aportaciones del inversor: el inversor proporciona sus propias opiniones sobre los rendimientos esperados de los activos o del mercado en general.
    - Niveles de confianza: nivel de certeza asociado a cada opinión. Esto indica la confianza del inversor en la exactitud de sus opiniones.
4. Rentabilidad implícita: empleando un enfoque bayesiano, el modelo integra las opiniones de los inversores con los rendimientos de equilibrio del mercado (CAPM) para calcular los rendimientos implícitos. El modelo asigna más peso a las opiniones que difieren más del equilibrio del mercado y define así las rentabilidades esperadas actualizadas que reflejan las opiniones del inversor.
5. Ajuste de la covarianza: el modelo también ajusta la matriz de covarianza de los rendimientos de los activos en función de la incertidumbre asociada a las opiniones del inversor. Este ajuste tiene en cuenta los posibles errores en las opiniones y reduce la sensibilidad de la asignación de la cartera a dichas opiniones.

6. Optimización de la cartera: en el caso de Black Litterman, en primer lugar, se usa la optimización inversa para calcular las ponderaciones óptimas de la cartera basándose en los rendimientos esperados ajustados y la matriz de covarianza. Este paso determina la cartera que maximiza los rendimientos esperados dada la aversión al riesgo del inversor.
7. Combinación de carteras: una vez se obtienen las ponderaciones de los activos del problema de optimización inversa, estas se integran con la cartera de equilibrio de mercado hallada a través del CAPM, para generar lo que se llama la cartera o porfolio posterior. La cartera de equilibrio de mercado representa el punto de partida, mientras que las ponderaciones optimizadas inversas reflejan las opiniones y preferencias de riesgo del inversor.
8. Frontera eficiente: el último paso del modelo, consiste en trazar la frontera eficiente, que representa el conjunto de carteras que ofrecen la mayor rentabilidad esperada para un determinado nivel de riesgo. El modelo Black-Litterman pretende generar carteras a lo largo de esta frontera eficiente.

La siguiente figura, ilustra con detalle el flujo de parámetros de entrada, así como la combinación e integración de ambos modelos, que se convierten finalmente en el porfolio posterior.

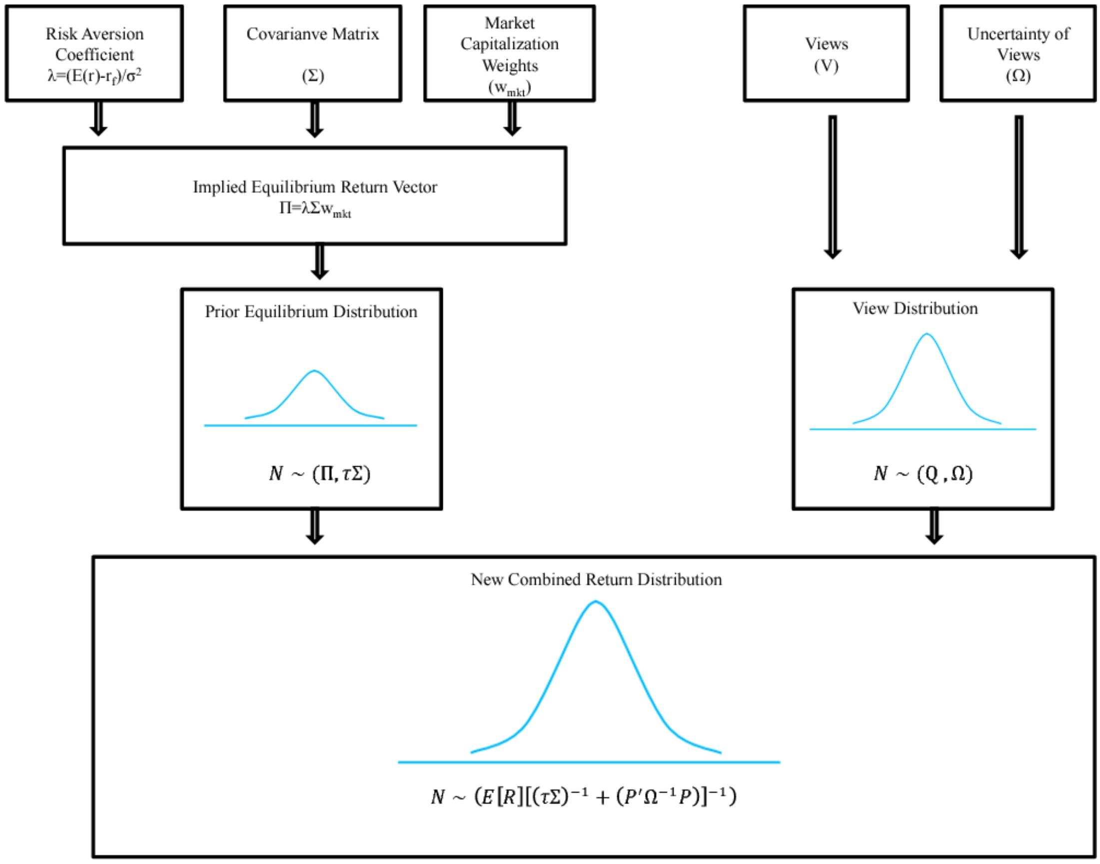

Gráfico 2 – Modelo de Black Litterman

El modelo Black-Litterman se utiliza en el sector financiero como herramienta para la ponderación de activos y la gestión de carteras. Al incorporar opiniones subjetivas y resolver los problemas de estimación de la optimización media-varianza tradicional, ofrece un enfoque más sólido y práctico para la construcción de carteras. Resulta especialmente útil cuando un inversor tiene opiniones subjetivas que difieren del consenso del mercado o cuando los datos históricos son limitados. Al incorporar estas opiniones al proceso de optimización, permite a los inversores personalizar sus carteras en función de sus creencias y preferencias de riesgo.

4. DEFINICIÓN DEL TRABAJO

Como se comentó en apartados previos, el objetivo del trabajo es optimizar una cartera de inversión centrada en las criptomonedas. Tras estudiar el estado de la cuestión en este ámbito de inversión, se han identificado varios modelos que se emplean para optimizar este tipo de carteras, y las limitaciones que cada uno de ellos tiene. Lo que este trabajo pretende, es resolver el problema de optimización empleando los modelos de portfolio moderno de Markowitz, y el de Black – Litterman. Además, con el objetivo de mitigar las limitaciones que presentan ambas teorías, se comprobará si, integrándolas, se obtiene un resultado más certero y preciso.

Para plantear el problema de optimización, se han seleccionado diez criptodivisas distintas, y se han extraído los datos históricos de sus precios en bolsa en base al dólar estadounidense. Como se mencionó en el marco teórico, tanto para el modelo de Markowitz como para el de Black Litterman, son necesarios los datos históricos de los precios de las divisas, puesto que nos proporcionan los beneficios (retornos) y la volatilidad de las mismas. Para la selección de las divisas, se ha decidido incluir las más antiguas, con el fin de contar con una mayor muestra de datos. Concretamente, se han elegido las siguientes criptodivisas:

- BTC-USD: Bitcoin (2009), la primera criptomoneda que se creó, y la líder en todos los mercados de criptodivisas desde entonces, tiene una oferta limitada de 21 millones de monedas, lo cuál la convierte en un activo deflacionista.
- LTC-USD: Litecoin (2011), se creo como una contrapartida de Bitcoin, con el objetivo de que se empleara en transacciones rápidas entre personas (P2P – *peer to peer*), gracias a su rapidez de generación de bloques y uso de un algoritmo hash alternativo al original.
- XRP-USD: Ripple (2012), se trata de un activo digital que se emplea en el protocolo de pago seguro de la empresa tecnológica Ripple, ofrece un método de pago internacional, rápido y económico, tiene como objetivo revolucionar la industria de pagos a nivel mundial.
- DOGE-USD: Dogecoin (2013), surgió y se viralizó a raíz de un meme, cuenta con una gran comunidad de inversores especialmente activos, que se caracterizan por sus acciones benéficas y generosas propinas.

- XLM-USD: Stellar (2014), plataforma de blockchain que se centra en facilitar transacciones internacionales rápidas y económicas, y en proporcionar acceso a servicios financieros a personas sin acceso a cuentas bancarias.
- ETH-USD: Ethereum (2015), una popular plataforma de cadena de bloques (*blockchain)*, introdujo los contratos inteligentes (*smart contracts*), permitiendo el desarrollo de aplicaciones descentralizadas (*dApps*).
- ADA-USD: Cardano (2017), emplea un algoritmo de consenso único llamado Ouroboros, que garantiza la eficiencia energética y la escalabilidad a través de una cadena de bloques (*blockchain*) segura.
- BNB-USD: Binance Coin (2017), es la criptomoneda oficial del broker Binance, se utiliza para pagar sus comisiones de transacción y ofrece diversas funciones de utilidad dentro del su ecosistema.
- LINK-USD: Chainlink (2017), es una moneda que facilita los contratos inteligentes entre las cadenas de bloques y datos externos gracias a su red descentralizada de Oracle.
- TRX-USD: Tron (2017), se trata de una plataforma descentralizada basada en blockchain que pretende crear un ecosistema global de intercambio de contenidos digitales. Su objetivo es permitir a los desarrolladores crear e implementar aplicaciones descentralizadas (DApps) y contratos inteligentes.

Se escogen estas monedas por la disponibilidad de datos históricos, puesto que algunas de las más exitosas actualmente, como Polkadot o Solana, tienen muy poco recorrido y, por tanto, cuentan con datos limitados. En la tabla 1 (Histórico de Datos), en los apéndices, se puede observar la toma de datos de los precios de las diez criptodivisas, en mensualidades, desde diciembre de 2017 hasta mayo de 2023, proporcionando un listado de 67 precios por cada activo.

Antes de comenzar con la optimización de la cartera en base a los activos seleccionados, se estudia su comportamiento. A continuación, se muestra la tendencia normalizada del precio de los activos.

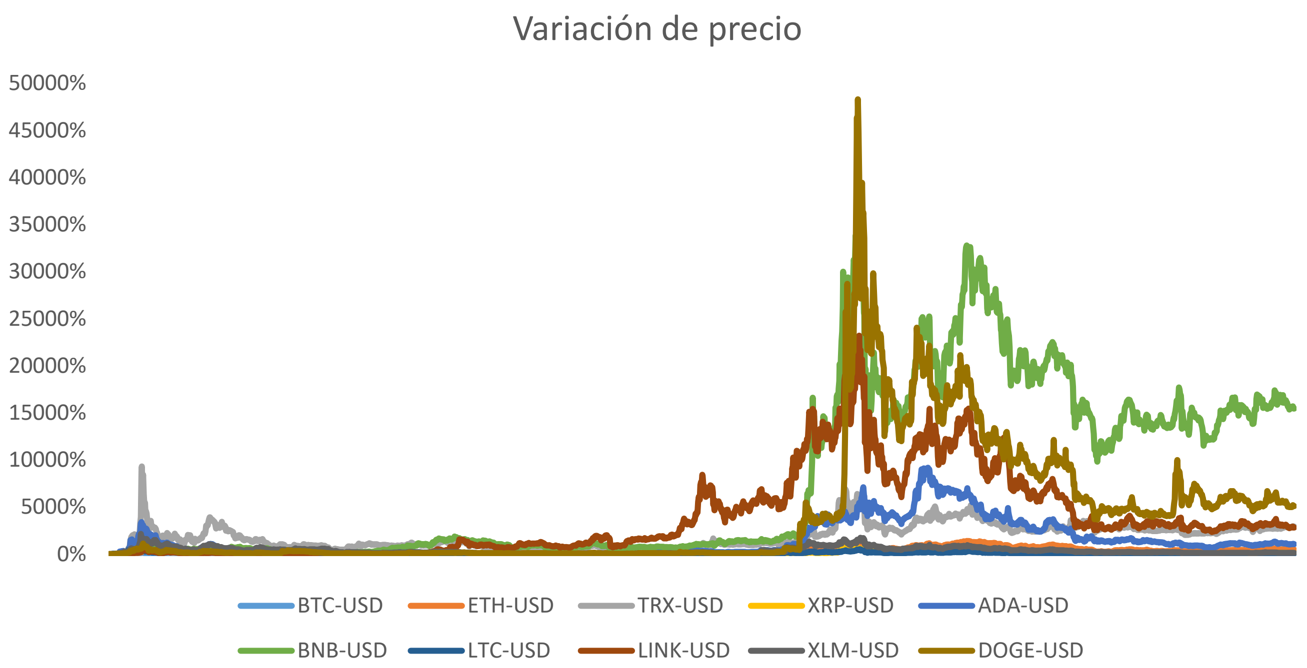

Gráfico 3 – Variación de precio de las criptodivisas

Como se puede observar, todas las criptodivisas siguen una tendencia similar, esto supondrá una limitación a la hora de optimizar la cartera con el modelo de Markowitz puesto que su teoría se basa en la diversificación. Además de la tendencia de precios, se estudia su volatilidad en el tiempo.

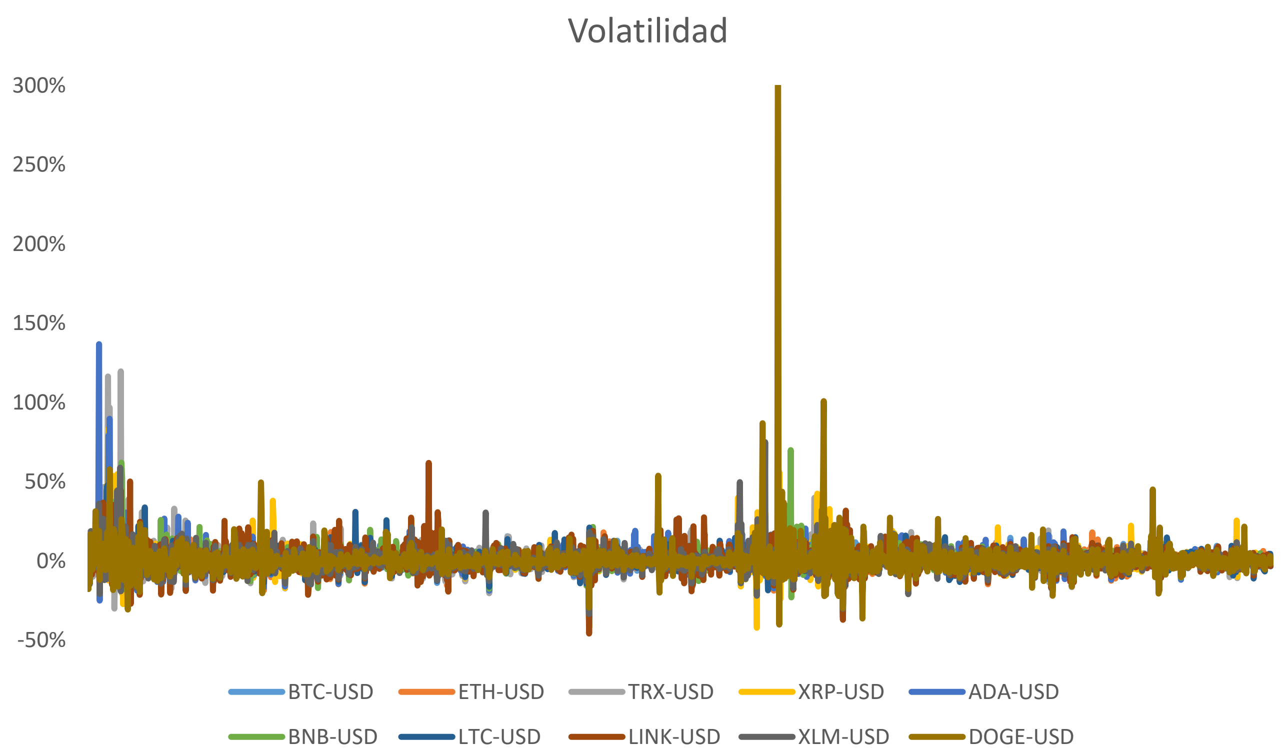

Gráfico 4 -Volatilidad de las criptodivisas

Además de identificar la tendencia común en los precios, también se observan similitudes en la volatilidad de las criptodivisas. Estas similitudes se podrán analizar con mayor precisión con la matriz de covarianza, que se calculará con los retornos esperados al resolver el problema de optimización de Markowitz y de Black Litterman. Con ella se apreciará hasta que punto existe diversificación en la cartera.

Cabe destacar, en cuanto a la volatilidad, que se observan varianzas intermensuales de hasta un 700%. Sin duda las criptomonedas son de los activos más volátiles del mercado, seguidas de las acciones, que suelen rondar en un 10-20% y, por último, los inmuebles y bonos del estado, activos con un carácter más conservador, cuya volatilidad suele estar entre un 3-8%. Por ello, se decide incorporar en última instancia varios activos con diferentes características a la cartera de criptodivisas. Se incorporan en este caso:

- Oro: el oro se considera un refugio seguro, puesto que muestra pequeña correlación con la inflación y suele mantener su valor en el largo plazo. Este tipo de activo se emplea habitualmente con el fin de diversificar la cartera de inversión, puesto que fluctúa al opuesto que activos de renta fija y renta variable.
- Bonos del estado (EEUU): se eligen los *treasury bills* a trece semanas de Estados Unidos para representar la renta fija. Este tipo de activo presenta muy poco riesgo, es decir, es una inversión segura, que generará beneficios, aunque no excesivos.
- S&P 500: este índice se elige con el fin de representar la tendencia del mercado, es decir, la renta variable. La inversión en índices de mercado es característica en gestiones de cartera pasivas.

Integrando las diez criptodivisas con estos otros tres activos, se pretende analizar las ventajas de la diversificación con las mismas técnicas de optimización: Markowitz y Black Litterman. A continuación, se muestra la variación de precios de cada uno de los activos:

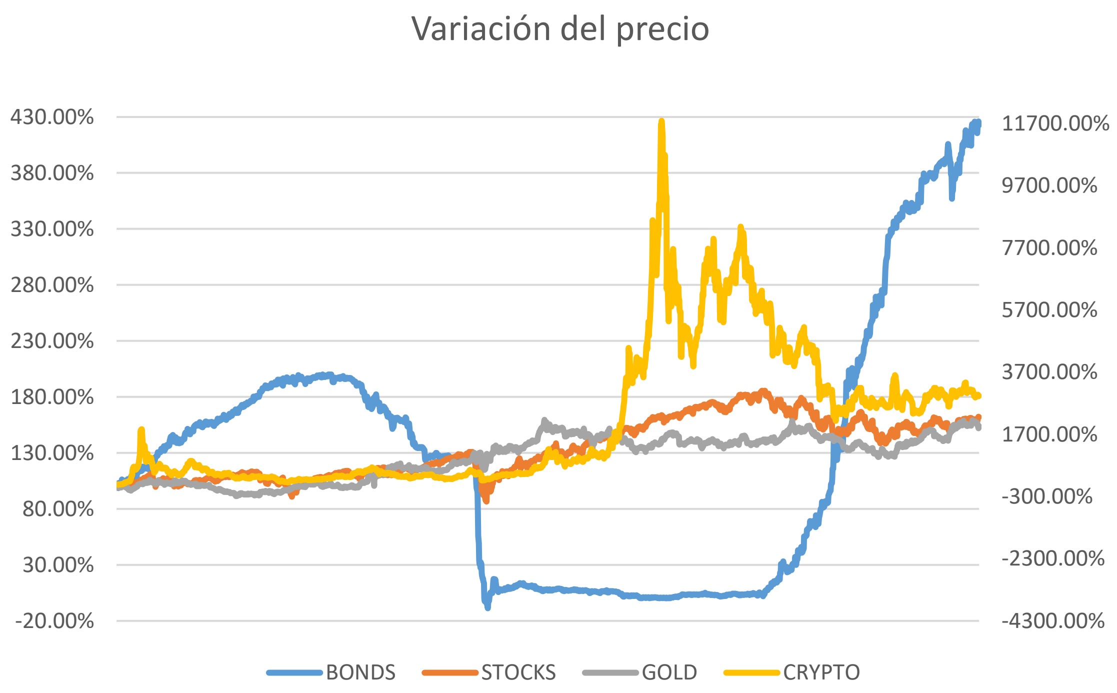

Gráfico 5 – Variación del precio de los cuatro tipos de activos

Cabe destacar que las criptodivisas se han graficado como un solo activo, y que se rigen por el eje secundario (derecha). El resto de activos se rigen por el eje principal a la izquierda. Con este gráfico, se observa con facilidad la diferencia entre el comportamiento de cada activo a lo largo del tiempo. La mayor diferencia se encuentra entre el oro y el resto de activos, especialmente las criptodivisas. Esto, si se cumple la teoría de diversificación, demuestra que, combinando los activos, se encontrará una cartera con mayores retornos a un nivel de riesgo menor.

En los siguientes apartados se tratará de optimizar la gestión de dos carteras de inversión con tres métodos distintos. En una cartera se incluirán las diez criptodivisas, y en la segunda se añadirán el oro, el índice S&P 500 y el bono del estado a 13 semanas de EEUU (IRX). Los modelos a emplear serán el de Markowitz, el de Black-Litterman, y, por último, una integración de ambos.

Con el fin de analizar la validez de cada modelo, se emplearán los datos de los activos desde noviembre de 2017 hasta diciembre de 2021 para resolver el problema de optimización. A posteriori, se evaluarán las carteras obtenidas, contrastando la predicción de los modelos con los datos reales que comprenden entre enero de 2022 y abril de 2023.

A continuación, se explica como se resuelven los problemas de optimización de Markowitz, Black Litterman, y su integración, empleando Python. Se incluye el código en los anexos para ofrecer mayor detalle.

4.1 Optimización de Porfolio MPT

Para resolver el problema de optimización de la cartera con el modelo de portfolio moderno de Markowitz, en primer lugar, se extraen los datos financieros históricos de los activos, es decir, el precio diario de los activos seleccionados: diez criptodivisas, oro, bonos del estado e índice de mercado. En primer lugar, se resolverá el problema de optimización solo con las criptodivisas y luego incluyendo el resto de activos con el fin de analizar el efecto de los mismos en la diversificación de la cartera.

El problema comienza definiendo las variables de precios, la tasa libre de riesgo, en este caso un 0.25%, el nombre de los activos y las fechas a tener en cuenta. A continuación, se calculan los retornos diarios y los esperados, las matrices de correlación y covarianza entre activos, y las volatilidades esperadas.

- Retorno diario: se calcula como la variación porcentual de los precios
- Retorno esperado: se calcula como la media de los retornos diarios multiplicados por 252, el número estándar de días de apertura de mercado. Cabe destacar que las criptomonedas, al ser consideradas divisas, se pueden comprar y vender en cualquier momento, sin necesidad de que abra el mercado, por lo que este número se podría modificar a 365. Sin embargo, con el fin de poder comparar con el portfolio que incluya el oro, los bonos de estado y el índice de mercado, se mantendrá el valor indicado.
- Volatilidad esperada: se calcula como la desviación estándar de los retornos diarios, multiplicado por la raíz cuadrada de 252, con el fin de anualizar el valor.
- Matriz de covarianza y de correlación: también se anualizan multiplicando por 252. Se calculan para analizar la relación entre los activos de la cartera, lo cuál se hará en el apartado de resultados y para resolver el problema de optimización.

Una vez definidas las variables de entrada, se procede a generar 10000 portfolios de forma aleatoria, para los cuales se definen unas ponderaciones que representan el porcentaje de capital que se invertirá en cada activo, por lo que sus valores están restringidos entre 0 y 1, ambos incluidos, y la suma de todas debe ser 1. A continuación, se calculan el riesgo y la retorno de los mismos, así como su ratio de Sharpe.

- Retorno: se calcula como el producto de las ponderaciones y los retornos esperados.
- Volatilidad: se calcula como desviación estándar del producto de las ponderaciones y la matriz de covarianza.
- Ratio Sharpe: mide la rentabilidad ajustada al riesgo. Se calcula como el exceso de rentabilidad de la cartera sobre la tasa libre de riesgo dividido por la volatilidad de la cartera.

Una vez se obtiene la muestra de portfolios, se identifican el de mayor ratio Sharpe, y el de menor riesgo, y sus ponderaciones. A continuación, se resuelve el problema de optimización de la cartera con el modelo de valoración de activos de capital (CAPM), que maximiza la ratio de Sharpe y define las ponderaciones del portfolio tangente, es decir, la cartera que ofrece mayor rentabilidad, ajustada al riesgo. Por otra parte, se resuelve otro problema de optimización que minimiza el riesgo, y que da como resultado el portfolio de riesgo mínimo.

Por último, se calcula la línea de mercado de capitales con diferentes valores de ponderación y las correspondientes combinaciones de rentabilidad y volatilidad basadas en la cartera de máximo ratio de Sharpe.

En resumen, el código resuelve el problema de optimización de carteras calculando la asignación óptima de activos que maximice la ratio de Sharpe o minimice el riesgo. En el apartado de resultados, se evaluarán las matrices de correlación y covarianza, así como las carteras de tangencia y riesgo mínimo, y la frontera eficiente que genera la muestra de porfolios, tanto para la cartera de criptodivisas, como para su combinación con los otros tres activos de renta fija, renta variable y valor refugio.

4.2 Optimización de Porfolio BL

En segundo lugar, se resuelve el problema de optimización con el modelo de Black Litterman. Este modelo, a diferencia del de Markowitz, integra el sentimiento del inversor y la capitalización de mercado de los activos.

El problema de optimización en primera estancia es muy similar al anterior, puesto que se calcula la cartera de tangencia con la frontera eficiente, maximizando la ratio de Sharpe. Sin embargo, la función de optimización toma como variable de entrada unas ponderaciones de asignación de capital de los activos que se basan en los valores de capitalización de mercado de dichos activos. Son una medida del valor de mercado total de las acciones en circulación, se calcula multiplicando el precio de las acciones de la empresa por el número total de acciones en circulación. Las ponderaciones se obtienen dividiendo la capitalización de mercado de cada activo entre la suma del total.

El código, en primer lugar, resuelve el problema de optimización teniendo en cuenta solo los activos con riesgo. Luego resuelve el mismo problema integrando la tasa libre de riesgo, lo cual permite que el inversor tome mejores decisiones considerando la relación riesgo-rentabilidad, aumentando la diversificación y tomando en cuenta su aversión al riesgo. Por último, se resuelve el problema integrando las visión o sentimiento del inversor, que es lo que pretende el modelo de Black Litterman.

Para integrar la visión del inversor en el problema de optimización, se debe recalcular el exceso de rentabilidad, en base al ya ajustado al integrar la tasa libre de riesgo. El primer paso consiste en definir la visión o el sentimiento del inversor, que representa la opinión del mismo sobre la rentabilidad futura esperada, porcentualmente. Para este trabajo en particular, se ha decido calcular este retorno esperado en base al crecimiento del valor de los distintos activos durante el año 2021, puesto que se está modelando a fecha fin de diciembre de 2021. A continuación, se incluyen, en primer lugar, la visión para la cartera de criptomonedas, y, en segundo lugar, la que cuenta con el resto de activos que representan la renta fija, renta variable y valor refugio.

```
views = [('BNB-USD','>','TRX-USD',0.24),
         ('ETH-USD','<','DOGE-USD',0.36),
         ('ADA-USD','>','LTC-USD',0.4)]

views = [('ADA-USD', '>', 'GOLD', 0.63),
         ('BONDS', '<', 'STOCKS', 0.21)]
```

Figura 1 – Visión del inversor de ambas carteras

Esta parte del código indica que, según la visión del inversor, el valor de BNB crecerá un 24% más que el de TRX en el futuro, en base a lo que ha crecido el año previo, e igual con el resto de líneas de código. Una vez se definen estos parámetros, se procede a generar la matriz de enlace, que establece la relación de los retornos de los activos en base a las visiones definidas. Con la matriz de visiones, la matriz de enlace y la matriz de covarianza de los activos, se calcula la matriz de incertidumbre, omega. Con ella, se vuelve a resolver el problema de optimización para hallar la cartera tangente que no sólo maximiza la rentabilidad ajustada al riesgo, sino que también tiene en cuenta las restricciones y la información proporcionada por las opiniones del inversor.

En resumen, el modelo de Black Litterman ajusta los datos históricos de precios a través de la matriz de covarianza en base a la opinión del inversor, consiguiendo así que la frontera eficiente tome una forma más ajustada a su visión, y generando una nueva cartera con distintas ponderaciones. En el apartado de resultados se observará como dichas ponderaciones se ajustan a los datos que aporta el propio inversor, y como varía la cartera, así como su retorno y riesgo esperados. En este caso, se compararán las dos carteras, con y sin los valores del oro, bonos del estado e índice de mercado, así como cada una de las tres soluciones del modelo de Black Litterman, cuyo código se puede encontrar en el anexo:

1. Considera solo los datos históricos y los activos de riesgo
2. Considera solo los datos históricos, los activos de riego y la tasa libre de riesgo
3. Integra los datos históricos con la opinión del inversor, e incluye tanto los activos de riego como la tasa libre de riesgo

4.3 COMBINACIÓN DE MPT Y BL

Como se comentó en la introducción, una de las soluciones a las limitaciones que presenta el método de Markowitz de gestión de carteras a la hora de gestionar criptodivisas, es integrarlo con el modelo de Black Litterman de forma que se aprovechen las ventajas de cada uno de ellos.

Para integrar ambos métodos, en primer lugar, se calcula la matriz de covarianza a partir de los rendimientos de los activos, que se obtienen del histórico de precios de los activos, y se definen las visiones del inversor. En este caso, dichas visiones se integran con un formato distinto al que se empleó resolviendo el problema de optimización con el método de Black Litterman previamente. En este caso, se predefinen unas ponderaciones a raíz de las cuales comenzará a iterar el problema de optimización para definir la cartera de tangencia con la línea de mercado y la frontera eficiente. Se proponen cuatro ponderaciones distintas para todos los activos, basadas en diferentes datos:

1. En base a la capitalización de mercado de cada activo
2. En base al crecimiento del valor de cada activo desde noviembre de 2017 hasta diciembre de 2021
3. En base al crecimiento del valor de cada activo durante el año 2021
4. En base al crecimiento del valor de cada activo durante los últimos tres meses del año 2021

Además de la matriz de visiones, que se crea en base a las especificaciones previas, en este problema también se incluirá una matriz de confianza, en la que se expresa la confianza que tiene el inversor en cada una de las ponderaciones que se incluyen en su matriz de visiones, en unidades porcentuales. Se definirá también una variable de aversión al riesgo.

Una vez se reúne toda la información necesaria para resolver el modelo de Black Litterman, que consiste en un problema de optimización en el que se maximiza la rentabilidad esperada teniendo en cuenta la aversión al riesgo, e incorpora las opiniones subjetivas del mercado a través de los niveles de confianza. Tras iterar, se obtienen como resultado las ponderaciones óptimas para cada activo.

A continuación, se define una función objetivo que minimiza la ratio de Sharpe inverso, para un nivel de riesgo dado. Esta función toma como datos las ponderaciones del modelo de Black Litterman, la matriz de covarianza, los rendimientos esperados, la tasa libre de riesgo y la aversión al riesgo, y con ellos calcula el rendimiento de la cartera, el riesgo y la ratio de Sharpe que maximiza el retorno. The optimization problem aims to find the asset weights that maximize the expected return while accounting for the investor's risk aversion level. El código itera sobre cada coeficiente de aversión al riesgo y realiza la optimización de la cartera para generar varios porfolios y calcular su riesgo, rentabilidad, ponderaciones de cada activo y ratio Sharpe.

Por último, se obtienen las ponderaciones óptimas que maximizan la ratio de Sharpe para cada coeficiente de aversión al riesgo y se procede a definir la línea tangente. Esta línea se calcula con el índice del máximo ratio de Sharpe.

En resumen, este modelo pretende combinar las teorías de gestión de carteras de Markowitz y Black-Litterman para hallar las ponderaciones óptimas de los activos en función de los datos históricos de precios, las opiniones del mercado y las preferencias de riesgo de los inversores.

5. RESULTADOS

El objetivo principal de este trabajo es hallar la mejor manera de optimizar una cartera de inversión basada en criptodivisas. Para ello, se han empleado tres modelos diferentes de optimización, el de la teoría de cartera moderna de Markowitz, el que integra la opinión del inversor de Black Litterman, y, por último, una integración de ambos. A continuación, se evaluarán los resultados que proporciona cada modelo.

5.1 CARTERA DE CRIPTODIVISAS

5.1.1 MARKOWITZ

Como se comentó en la definición del trabajo, el modelo de Markowitz proporciona, como resultado final del problema de optimización, dos carteras importantes a evaluar, la cartera tangente, que se encuentra en el punto tangente entre la frontera eficiente y la línea de mercado de capitales, donde la ratio de Sharpe es máxima, y la cartera de riesgo mínimo. Normalmente, lo que se pretende con el modelo MPT, es hallar una cartera bajo la cual, para un mismo nivel de riesgo, se pueda aumentar la rentabilidad a través de la diversificación de la cartera, y que se pueda, paralelamente hallar una cartera que cuente con menos riesgo que el activo menos volátil de la misma, y con mayor rentabilidad. Sin embargo, si la cartera no cuenta con activos que la diversifiquen, este objetivo puede no llegar a cumplirse. Para analizar la diversificación que presentan los activos de la cartera, se procede a analizar la matriz de correlación y de covarianza de los mismos, que se obtienen a raíz del histórico de precios. A continuación, se muestran ambas matrices.

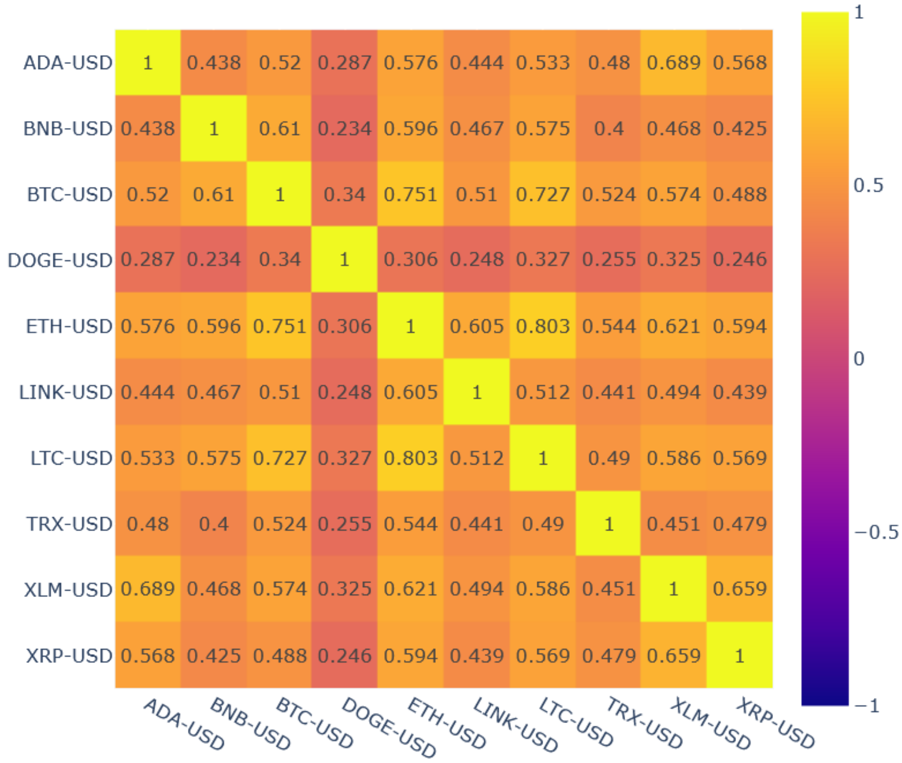

Figura 2 – Matriz de correlación de las criptodivisas

La matriz de correlación proporciona una medida estandarizada de la relación lineal entre variables. Los coeficientes de correlación admiten un rango de -1 a 1, donde -1 indica una relación lineal negativa perfecta, 1 indica una relación lineal positiva perfecta y 0 indica que no hay relación lineal. En términos de inversión, si el objetivo es diversificar la cartera con el objetivo de mitigar el riesgo de la misma y aumentar su rentabilidad, los coeficientes de correlación deberían ser lo más próximos a -1 posible. Esto querría decir que las fluctuaciones de los precios de los activos ocurren de forma asíncrona. En el caso de la matriz de correlación de las criptodivisas, se observa que todos los coeficientes son positivos, y la mayoría superiores a 0.4, indicando que se parte de una base de activos no muy diversos, que dificultan la optimización de la cartera a través de la diversificación. Esto no debe sorprender puesto que se están analizando activos de las mismas características, ya que todos son criptodivisas.

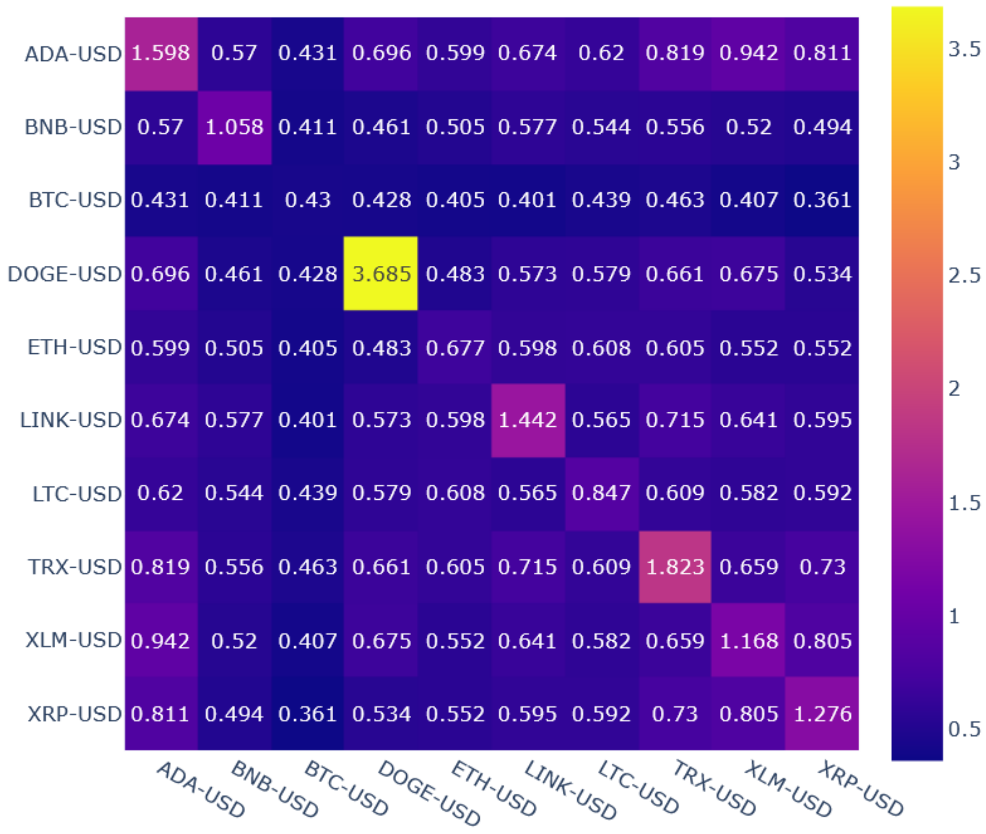

Figura 3 – Matriz de covarianza de las criptodivisas

La matriz de covarianza, por su parte, también mide la relación entre los movimientos de los valores de los activos, aunque, a diferencia de la matriz de correlación, ésta proporciona información sobre la dirección y la magnitud de la relación lineal entre variables, ya que sus valores no se normalizan. Por ello, la diagonal principal, en lugar de estar formada por 1s, cuenta con valores que representan las varianzas de los activos individuales. La varianza de una variable mide la dispersión de sus valores en torno a la media. Una varianza mayor indica una dispersión mayor, mientras que una varianza menor indica una dispersión menor, y siempre es positivo. Bajo esta definición, se puede concluir que la criptodivisa DOGE es la más volátil, contando con mayor riesgo, y Bitcoin, la menos volátil, es decir, la más segura. Esto se ve perfectamente reflejado en el gráfico de la frontera eficiente que nos proporciona el código empleado y que se muestra a continuación.

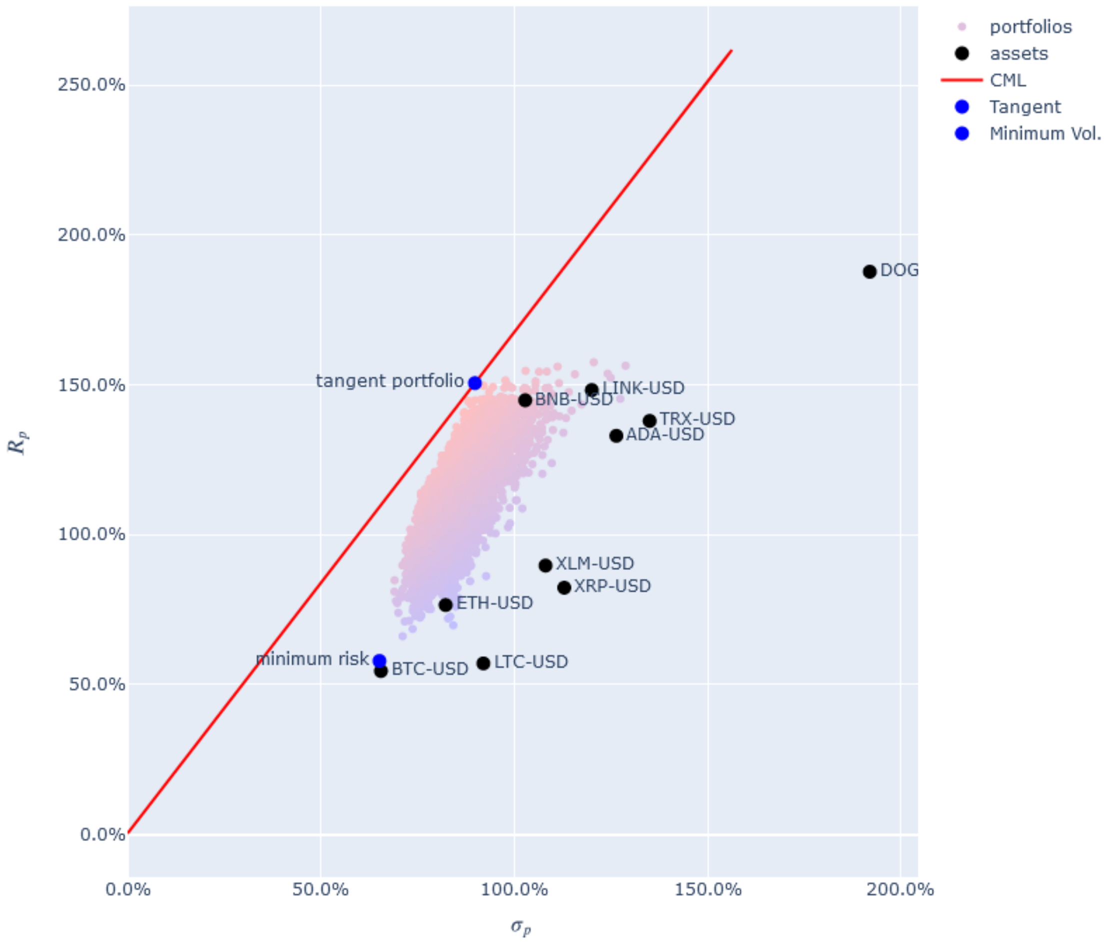

Gráfico 6 – Frontera eficiente de las criptodivisas (MPT)

Este gráfico nos muestra todas las carteras que se han creado en base a distintas ponderaciones asignados a cada activo. Además, se incluyen la cartera tangente y la de riesgo mínimo. Como se puede observar, la curva de la frontera eficiente no sobrepasa por la izquierda al activo más seguro, Bitcoin. Esto sucede por la falta de activos que diversifiquen la cartera. Además, la cartera de riesgo mínimo, cuenta con el mismo riesgo que el activo de riesgo mínimo, y proporciona muy poca diferencia en cuanto a la rentabilidad. El riesgo, rentabilidad y ponderaciones de ambas carteras son los siguientes:

	Markowitz MPT	
	Riesgo Mínimo	Cartera Tangente
Riesgo	**65%**	**90%**
Rentabilidad	**58%**	**151%**
BTC-USD	90%	0%
ETH-USD	3%	0%
TRX-USD	0%	9%
XRP-USD	6%	0%
ADA-USD	0%	8%
BNB-USD	1%	46%
LTC-USD	0%	0%
LINK-USD	0%	23%
XLM-USD	0%	0%
DOGE-USD	0%	15%

Tabla 1 – Carteras de MPT de criptodivisas

Cabe destacar que el problema de optimización se ha resuelto con datos desde noviembre de 2017 hasta diciembre de 2021, con el objetivo de poder medir su eficiencia con los datos de variación de precios hasta mayo de 2023. La evaluación de las carteras se hará con el resto de carteras generadas con los modelos de Black Litterman y de la combinación de ambas teorías.

5.1.2 BLACK LITTERMAN

El problema de optimización en el que se emplea la teoría de Black Litterman obtiene tres resultados. En primer lugar, se resuelve el problema de optimización basándose puramente en los datos históricos, obteniendo la siguiente frontera eficiente:

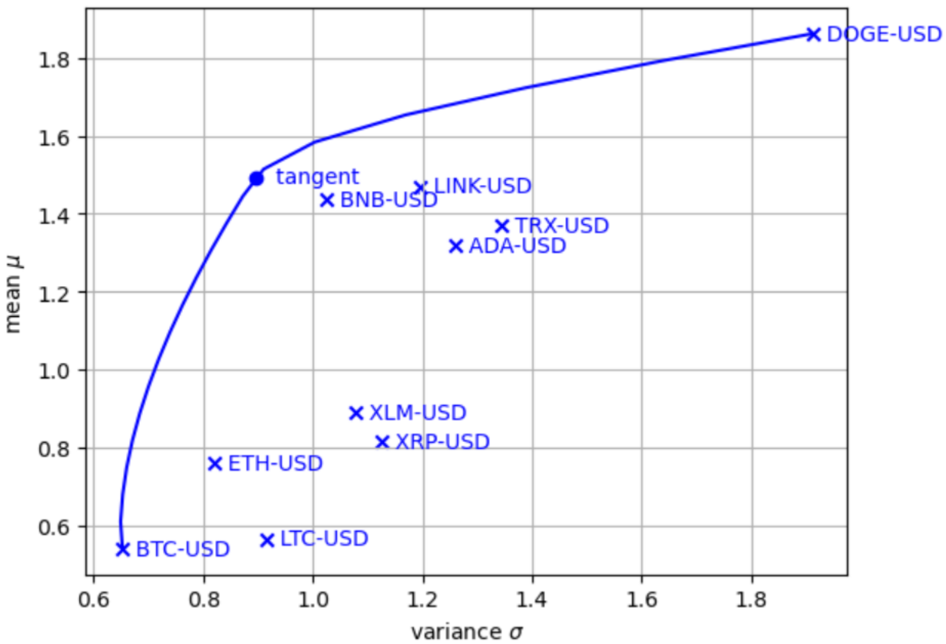

Gráfico 7 – Frontera eficiente de las criptodivisas (BL – histórico)

Como se puede observar, la cartera tangente es la misma que se obtiene con el modelo de Markowitz. Sin embargo, el modelo de Black Litterman pretende integrar tanto el exceso de rentabilidad de equilibrio, como la visión del inversor.

En primer lugar, se integrará el exceso de rentabilidad de equilibrio, que representa la rentabilidad esperada de los activos, ajustada al equilibrio del mercado, y se calcula combinando las capitalizaciones de mercado de los mismos, con los rendimientos de mercado implícitos. El resultado que se obtiene es el siguiente:

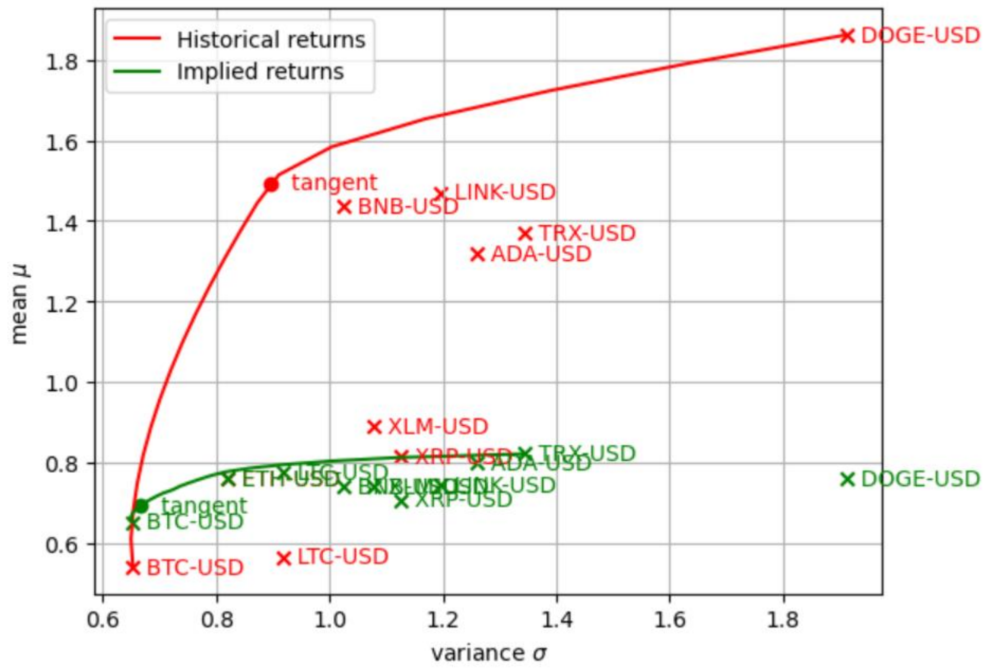

Gráfico 8 – Frontera eficiente de las criptodivisas (BL – equilibrio de mercado)

Al incluir el equilibrio de mercado en el proceso de optimización, la frontera eficiente, se aprecia cómo, tanto el riesgo, como la rentabilidad de las carteras se reducen. Cabe destacar que el equilibrio de mercado se incluye a través de la tasa libre de riesgo. Por ello, al incluirla entre el resto de activos, en este caso, las criptodivisas, que son un tipo de activo conocido por su gran riesgo, las posibles carteras se ven afectadas, reduciéndose el riesgo y, en consecuencia, la rentabilidad. Si la cartera contase con activos de menos riesgo, el cambio no sería tan grande.

Por último, se integra la opinión del inversor. Como se comentó en la definición del trabajo, a la hora de definir dicha opinión, se decidió basarse en el crecimiento del valor de los activos durante el año 2021, es decir, el último año que se incluye entre los datos históricos en el modelo. Además, la visión se integra como una relación entre el crecimiento de los activos, por ejemplo: BNB crecerá un 24% más que TRX ('BNB-USD','>','TRX-USD',0.24). Con estos datos, se modifica la matriz de covarianza y se vuelve a resolver el problema de optimización, y se obtiene la siguiente frontera eficiente:

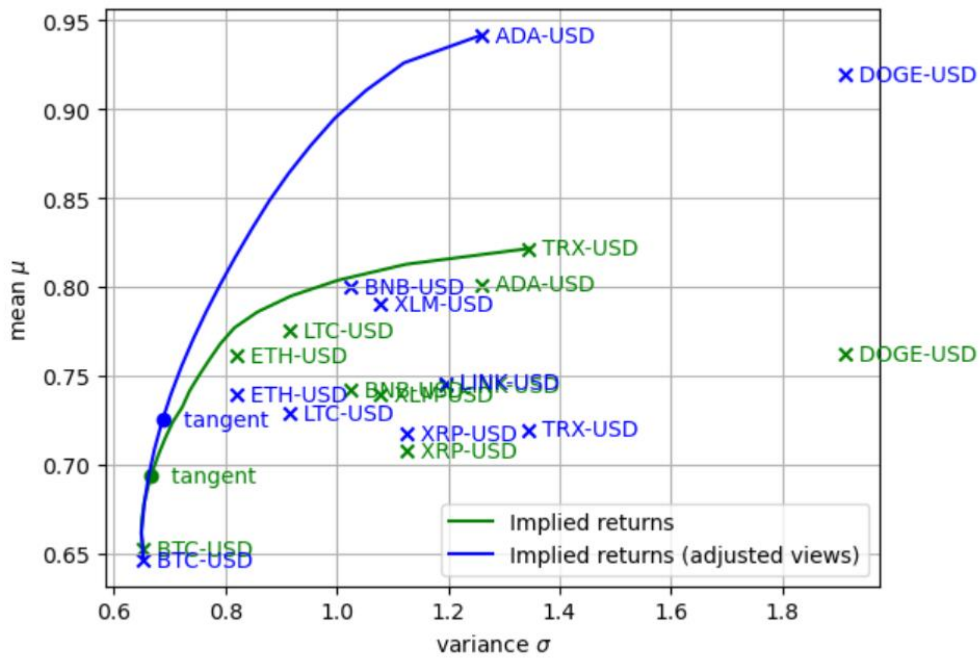

Gráfico 9 – Frontera eficiente de las criptodivisas (BL – visión del inversor)

En este caso, integrando la visión del inversor, la cartera tangente aumenta el retorno sin sacrificar el riesgo en exceso. En resumen, las tres carteras tangentes que proporciona el modelo, se muestran a continuación:

	Black Litterman		
	Histórico	**Equilibrio de mercado**	**Visión del Inversor**
Riesgo	**80%**	**44%**	**47%**
Rentabilidad	**149%**	**69%**	**73%**
BTC-USD	0%	61%	56%
ETH-USD	0%	26%	15%
TRX-USD	9%	1%	0%
XRP-USD	0%	3%	0%
ADA-USD	8%	2%	11%
BNB-USD	46%	6%	12%
LTC-USD	0%	1%	0%
LINK-USD	23%	0%	0%
XLM-USD	0%	0%	0%
DOGE-USD	15%	1%	4%

Tabla 2 – Carteras de BL de criptodivisas

Se evaluará el desempeño de cada cartera junto con el resto.

5.1.3 Markowitz y Black Litterman

El último modelo, como se comentó en el desarrollo del trabajo, integra cuatro visiones distintas del inversor, basadas tanto en la capitalización del mercado, como en el rendimiento de los valores de los activos en distintos rangos temporales y, además, la confianza en cada una de dichas visiones. El resultado de cartera tangente que se obtiene, es el siguiente:

	MPT + BL
	Tangente
Riesgo	**83%**
Rentabilidad	**109%**
BTC-USD	52%
ETH-USD	0%
TRX-USD	7%
XRP-USD	3%
ADA-USD	0%
BNB-USD	24%
LTC-USD	0%
LINK-USD	8%
XLM-USD	0%
DOGE-USD	6%

Tabla 3 – Cartera de MPT + BL de criptodivisas

Si comparamos con el resto de carteras, se puede observar que esta en concreto encuentra un buen balance entre el riesgo y la rentabilidad, para mayor claridad de comparativa, se adjunta la siguiente tabla:

	Markowitz MPT		Black Litterman			MPT + BL
	Riesgo Mínimo	Cartera Tangente	Histórico	Eq. de mercado	Visión	Tangente
Riesgo	**65%**	**90%**	**80%**	**44%**	**47%**	**83%**
Rentabilidad	**58%**	**151%**	**149%**	**69%**	**73%**	**109%**
BTC-USD	90%	0%	0%	61%	56%	52%
ETH-USD	3%	0%	0%	26%	15%	0%
TRX-USD	0%	9%	9%	1%	0%	7%
XRP-USD	6%	0%	0%	3%	0%	3%
ADA-USD	0%	8%	8%	2%	11%	0%
BNB-USD	1%	46%	46%	6%	12%	24%
LTC-USD	0%	0%	0%	1%	0%	0%
LINK-USD	0%	23%	23%	0%	0%	8%
XLM-USD	0%	0%	0%	0%	0%	0%
DOGE-USD	0%	15%	15%	1%	4%	6%

Tabla 4 – Comparativa de carteras de criptodivisas

A pesar de tener datos claros del riesgo y la rentabilidad de cada cartera, su precisión de predicción también es importante a la hora de tomar una decisión de inversión. Por lo tanto, se procede a analizar el rendimiento que cada una de ellas hubiese tenido desde enero de 2022 hasta mayo de 2023 a través de la siguiente gráfica.

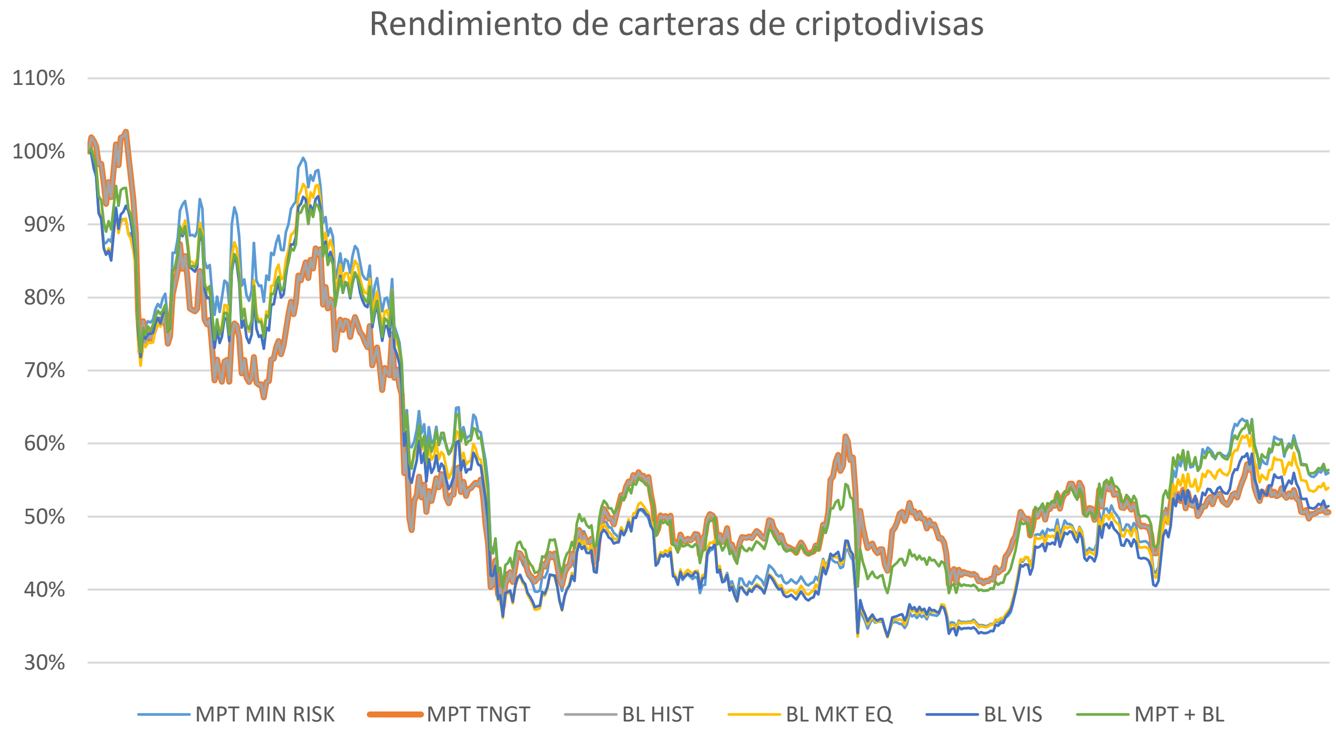

Gráfico 10 – Rendimiento de carteras de criptodivisas

En primer lugar, cabe destacar, como ya se mencionó, que la cartera tangente del modelo de MPT coincide perfectamente con el modelo de BL que se basa puramente en los datos históricos. Esta cartera se caracteriza por ser la más susceptible a las variaciones de los valores de los activos, lo cual concuerda con el nivel de riesgo que tienen.

Por otra parte, se observa como las carteras de Black Litterman que incluyen, tanto el equilibrio de mercado, como la visión del inversor, se asemejan mucho a la de riesgo mínimo del modelo de Markowitz. Esto se debe principalmente a la integración de la tasa libre de riesgo al calcular los excesos de retornos en base al equilibrio del mercado en el modelo de Black Litterman.

Por último, la cartera que se obtiene a raíz de la combinación de ambos modelos, consigue, como ya se había predicho, un equilibrio entre el riesgo y la rentabilidad, y así se aprecia también en la gráfica que proyecta hasta 2023, incluso destacando entre las mejores en las últimas fechas.

A pesar de las pequeñas diferencias entre unas y otras, su tendencia es muy similar. Esto se debe en gran parte a la falta de diversificación entre los activos. Además, a pesar de predecir rendimientos positivos en algunas de las carteras, se observa que todas reducen a la mitad sus retornos. Esto no debe atribuirse a la precisión de los modelos, si no a la ya mencionada falta de diversificación, puesto que no se puede mitigar el riesgo con activos de comportamientos tan similares. Con el fin de remediar esto, surge la idea de introducir activos con distintas características en el abanico de inversión, el oro representando el valor refugio, el índice S&P500 representando el mercado de acciones y la renta variable, y el bono del estado a 13 semanas de EEUU, representando la renta fija. Antes de comenzar con el análisis, cabe destacar que este último activo, a pesar de estar considerado un valor sin riesgo, la fluctuación que ha sufrido durante los años en los que se evalúa, lo convierten en uno de los que presentan mayor riesgo.

5.2 CARTERA DIVERSIFICADA

Una vez se introducen los activos mencionados en la cartera, la diversificación de la misma se ve afectada de forma positiva, y así se refleja en las matrices de covarianza y correlación.

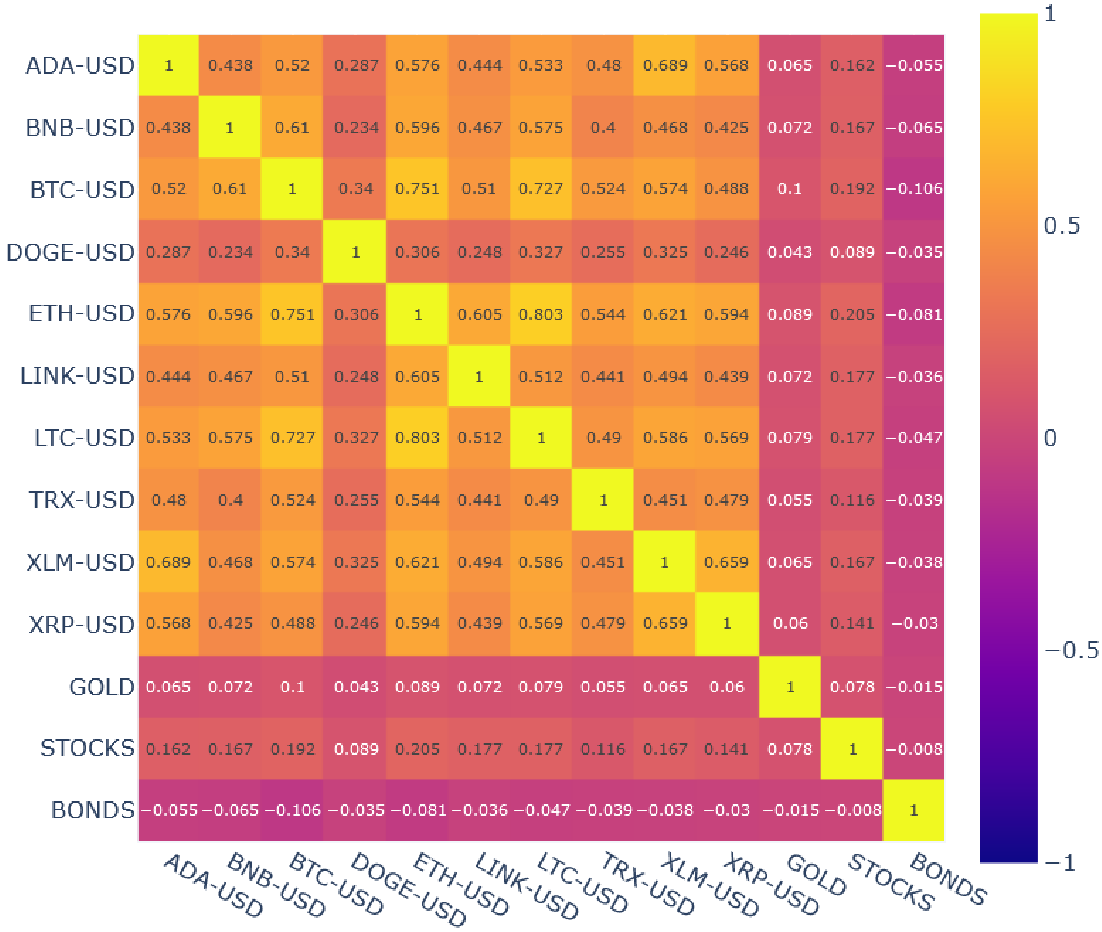

Figura 4 – Matriz de correlación de la cartera diversificada

En este caso, a diferencia del anterior, destacan los coeficientes de correlación de los bonos de estado con el resto de activos, lo cuál aumenta la diversificación de la cartera. Además, a pesar de no ser negativos, los coeficientes que relacionan los activos del oro y los bonos con el resto de activos, son relativamente bajos en comparación con los que relacionan exclusivamente las criptodivisas.

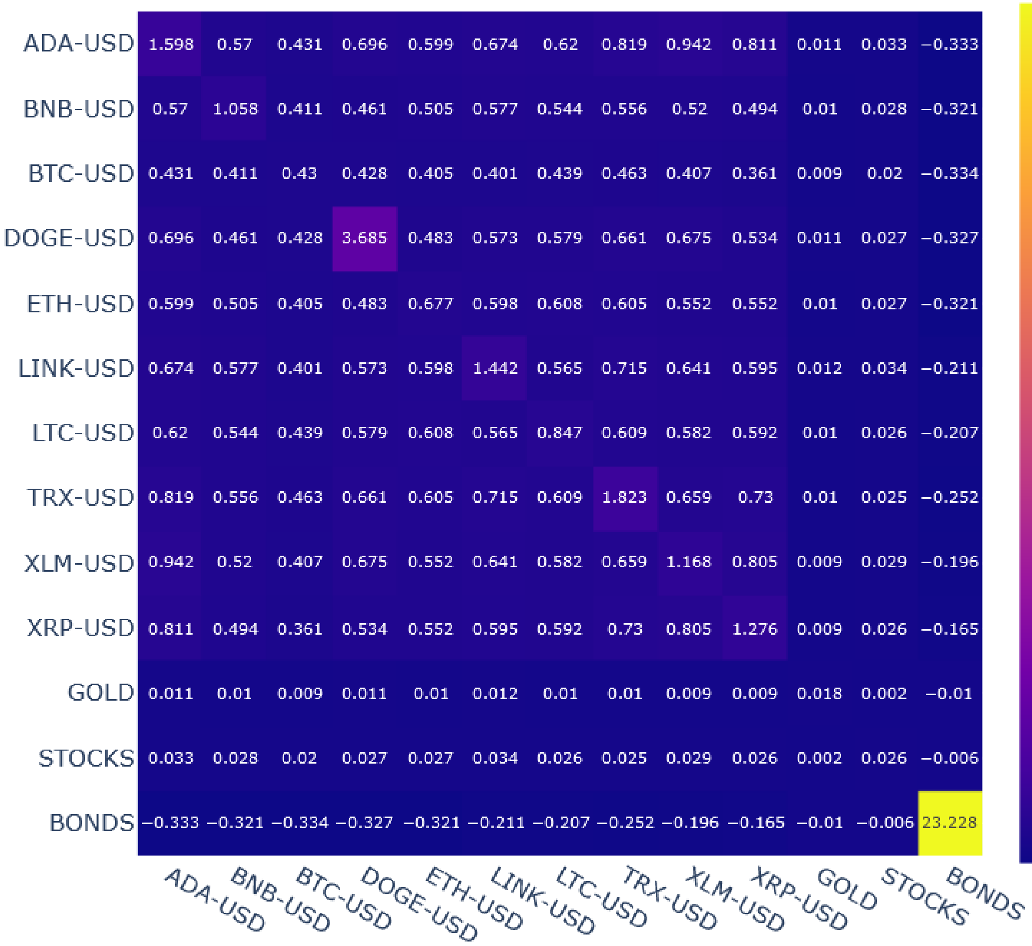

Figura 5 – Matriz de covarianza de la cartera diversificada

En cuanto a las varianzas y las covarianzas, cabe destacar la varianza de lo bonos del estado. Como se ha mencionado previamente, este tipo de activo suele tener como característica su riesgo bajo. Sin embargo, por las fluctuaciones que ha sufrido durante el eje temporal que se está analizando, se trata del activo más volátil, y, por tanto, de mayor riesgo. A la hora de elegir el eje temporal, se debe tener en cuenta que las criptomonedas son muy modernas en comparación al resto de activos. Esto resulta limitante para el resto de activos puesto que las fluctuaciones que sufren durante los 3-4 años que se evalúan, no son tan significantes como los de las criptomonedas. En la gráfica 5, en la que se muestra la variación del precio de los cuatro tipos de activos, se observa esta gran fluctuación.

Por otra parte, en cuanto a la matriz, se observa que las varianzas del oro y del índice de mercado son muy bajos en comparación al resto, es decir, son una apuesta más segura. El aumento en la diversificación debería apreciarse en las fronteras eficientes que resulten de cada uno de los modelos, que se analizan a continuación.

5.2.1 MARKOWITZ

La frontera eficiente y la cartera tangente que se obtienen resolviendo el mismo problema de optimización con el modelo MPT de Markowitz, con la cartera diversificada, se muestran a continuación.

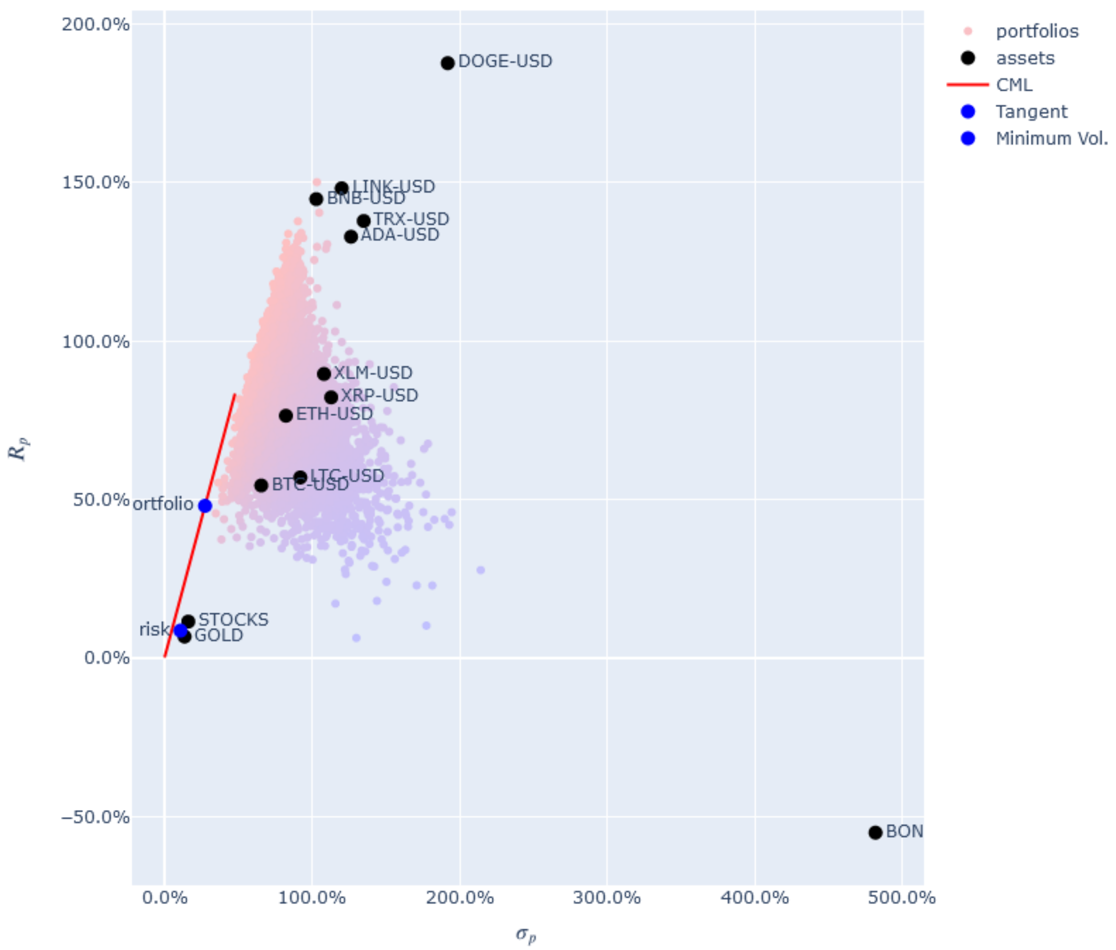

Gráfico 11 – Frontera eficiente de la cartera diversificada (MPT)

	Markowitz MPT	
	Riesgo Mínimo	Cartera Tangente
Riesgo	**11%**	**27%**
Rentabilidad	**9%**	**48%**
BTC-USD	0%	0%
ETH-USD	0%	0%
TRX-USD	0%	3%
XRP-USD	0%	0%
ADA-USD	0%	2%
BNB-USD	0%	13%
LTC-USD	0%	0%
LINK-USD	0%	6%
XLM-USD	0%	0%
DOGE-USD	0%	4%
BONDS	0%	0%
STOCKS	41%	35%
GOLD	59%	37%

Tabla 5 – Carteras diversificada (MPT)

La ventaja que supone incluir los nuevos activos es la significativa reducción del riesgo, que antes tomaba valores del 65% y 90% para cada cartera respectivamente, y ahora cuentan con un 11% y un 27%. Sin embargo, esto también reduce la rentabilidad de las mismas, a un 9% y un 48%, cuando se partía de unos valores de 58% y 151%. Esto es de esperar puesto que siempre existe un compromiso entre el riesgo y la rentabilidad.

Por otra parte, cabe destacar que, aunque se hayan incluido activos que diversifican bastante la cartera, la cartera de riesgo mínimo, sigue teniendo prácticamente el mismo riesgo que el activo de menor riesgo. Es decir, no se esta consiguiendo una frontera eficiente curva que minimice el riesgo para un valor de rentabilidad superior al de dicho activo. Como en el apartado previo, la proyección de las carteras se analizará junto con el resto, al final.

5.2.2 Black Litterman

Como con la cartera de criptodivisas, la primera frontera que produce el modelo de Black Litterman, se basa solo en los datos históricos, y su cartera tangente es muy similar a la del modelo MPT de Markowitz.

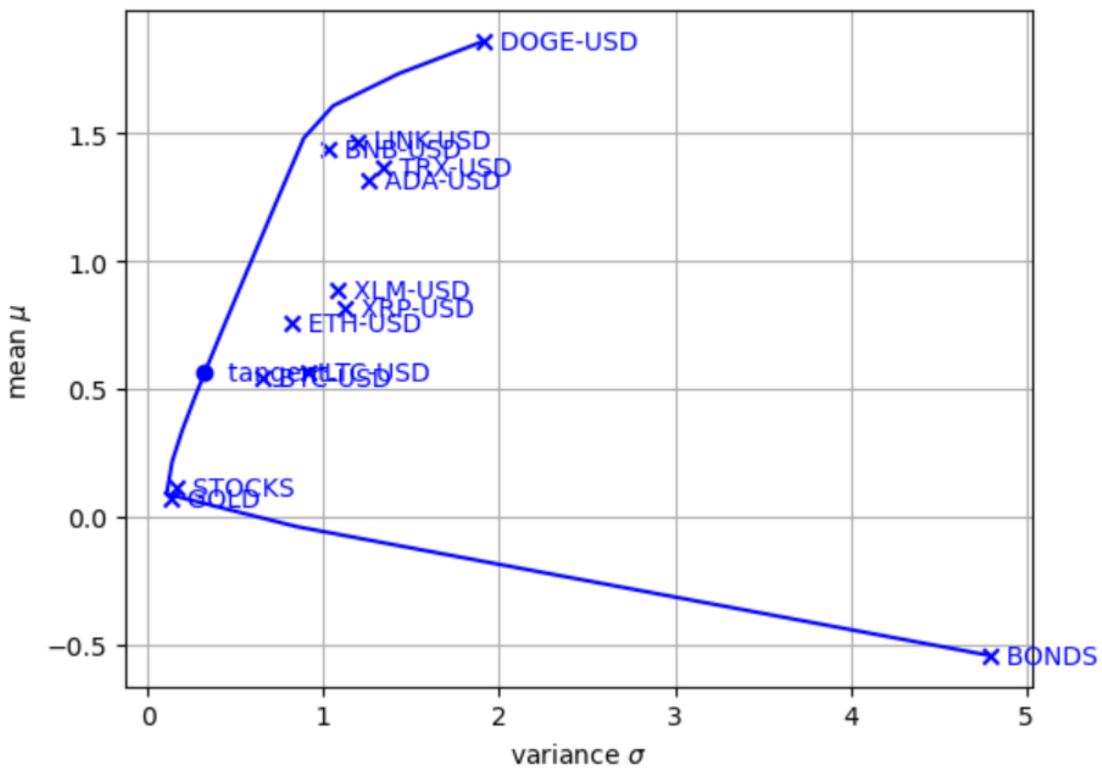

Gráfico 12 – Frontera eficiente de la cartera diversificada (BL – histórico)

Una vez se obtiene la frontera en base al histórico, se procede a añadir la tasa libre de riesgo, así como las capitalizaciones de mercado de los activos para ajustar el modelo al equilibrio de mercado. Esto también provoca, en este caso, que se reduzca el riesgo significativamente, a costa de reducir también la rentabilidad.

Cabe destacar que al tener en cuenta el equilibrio del mercado, se descartan por completo los bonos de estado de la frontera eficiente, por lo que su ponderación será nula para todas las carteras creadas en las iteraciones dado el coeficiente de aversión al riesgo definido.

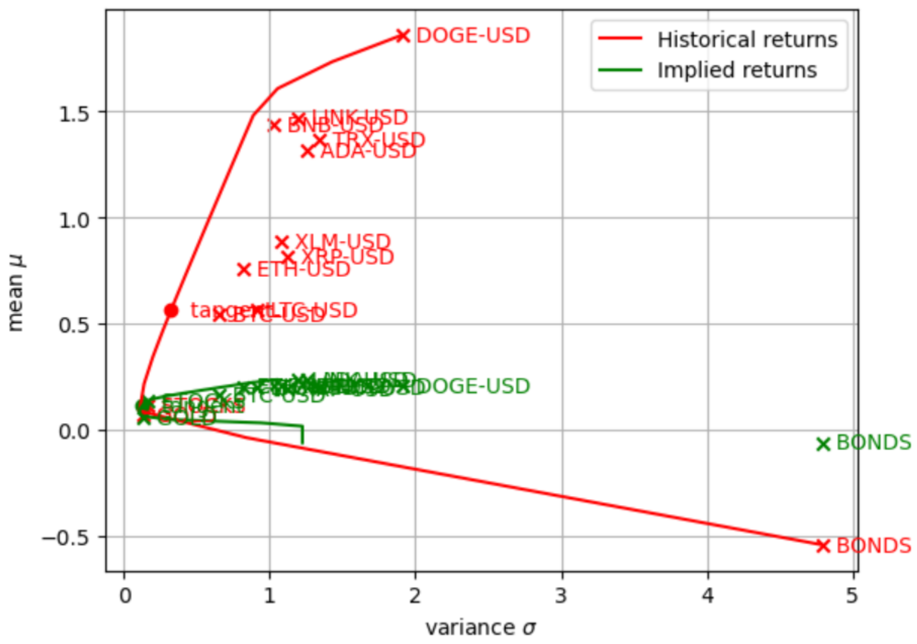

Gráfico 13 – Frontera eficiente de la cartera diversificada (BL – equilibrio de mercado)

Por último, se incorporan las visiones del inversor, que se muestran en la figura 1, siguiendo el mismo criterio que con la cartera de criptodivisas, es decir, en base al crecimiento de los activos durante el año 2021. Esta vez, como se observa en la siguiente figura, se consigue aumentar la rentabilidad de la cartera sin aumentar el riesgo, aunque dicho aumento es muy pequeño. También en este caso se descartan los bonos de estado de todas las posibles carteras.

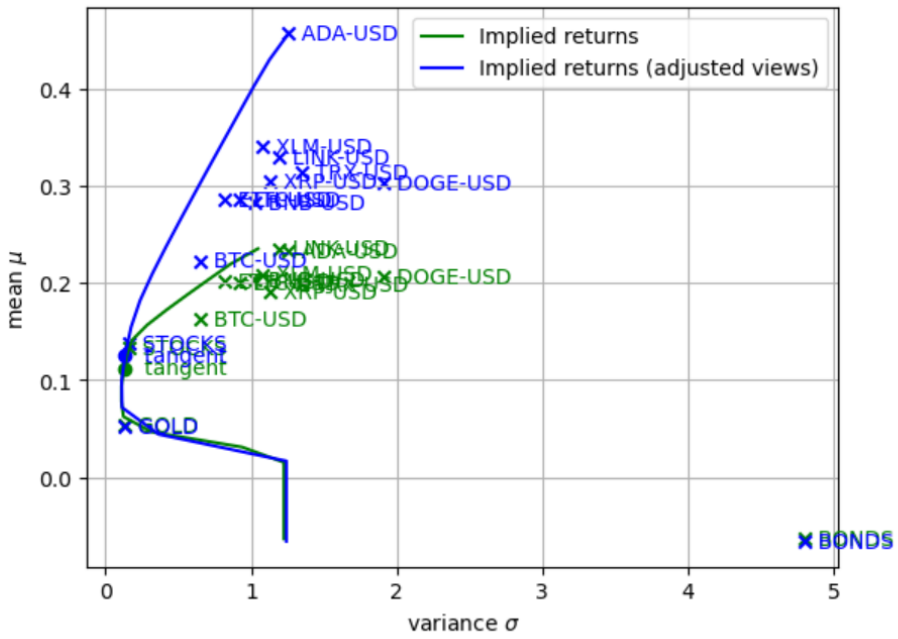

Gráfico 14 – Frontera eficiente de la cartera diversificada (BL – visión del inversor)

Las carteras tangentes de las tres soluciones al problema de optimización son las siguientes:

	Black Litterman		
	Histórico	Equilibrio de mercado	Visión del Inversor
Riesgo	**10%**	**2%**	**2%**
Rentabilidad	**56%**	**11%**	**13%**
BTC-USD	0%	1%	1%
ETH-USD	0%	0%	0%
TRX-USD	3%	0%	0%
XRP-USD	0%	0%	0%
ADA-USD	2%	0%	2%
BNB-USD	15%	0%	0%
LTC-USD	0%	0%	0%
LINK-USD	7%	0%	0%
XLM-USD	0%	0%	0%
DOGE-USD	5%	0%	0%
BONDS	0%	0%	0%
STOCKS	34%	71%	71%
GOLD	32%	27%	25%

Tabla 6 – Carteras diversificadas (BL)

En este caso, al igual que con la cartera de criptodivisas, la cartera que incorpora la visión del inversor no difiere mucho de la que incorpora el equilibrio de mercado. Además, una vez más, se aprecia la reducción significativa del riesgo, en torno a un 90% menor en los tres casos. Sin embargo, la rentabilidad se ve afectada por ello, sobre todo para las dos últimas carteras, para las cuales decrece más de un 80%.

5.2.3 Markowitz y Black Litterman

Por último, se obtiene la siguiente cartera tangente como solución al problema de optimización del modelo que integra las teorías de Markowitz y Black Litterman.

	MPT + BL
	Tangente
Riesgo	**76%**
Rentabilidad	**101%**
BTC-USD	0%
ETH-USD	0%
TRX-USD	7%
XRP-USD	0%
ADA-USD	0%
BNB-USD	20%
LTC-USD	0%
LINK-USD	7%
XLM-USD	0%
DOGE-USD	7%
BONDS	1%
STOCKS	8%
GOLD	51%

Tabla 7 – Cartera diversificada (MPT + BL)

Esta solución, a diferencia de las demás, presenta tanto un riesgo como una rentabilidad bastante elevada, su precisión se evaluará con la proyección a futuro de todas las carteras, que se comparan en la siguiente tabla:

CARTERA CRIPTOMONEDAS

	Markowitz MPT		Black Litterman			MPT + BL
	Riesgo Mínimo	Cartera Tangente	Histórico	Eq. de mercado	Visión	Tangente
Riesgo	**65%**	**90%**	**80%**	**44%**	**47%**	**83%**
Rentabilidad	**58%**	**151%**	**149%**	**69%**	**73%**	**109%**
BTC-USD	90%	0%	0%	61%	56%	52%
ETH-USD	3%	0%	0%	26%	15%	0%
TRX-USD	0%	9%	9%	1%	0%	7%
XRP-USD	6%	0%	0%	3%	0%	3%
ADA-USD	0%	8%	8%	2%	11%	0%
BNB-USD	1%	46%	46%	6%	12%	24%
LTC-USD	0%	0%	0%	1%	0%	0%
LINK-USD	0%	23%	23%	0%	0%	8%
XLM-USD	0%	0%	0%	0%	0%	0%
DOGE-USD	0%	15%	15%	1%	4%	6%

CARTERA DIVERSIFICADA

	Markowitz MPT		Black Litterman			MPT + BL
	Riesgo Mínimo	Cartera Tangente	Histórico	Eq. de mercado	Visión	Tangente
Riesgo	**11%**	**27%**	**10%**	**2%**	**2%**	**76%**
Rentabilidad	**9%**	**48%**	**56%**	**11%**	**13%**	**101%**
BTC-USD	0%	0%	0%	1%	1%	0%
ETH-USD	0%	0%	0%	0%	0%	0%
TRX-USD	0%	3%	3%	0%	0%	7%
XRP-USD	0%	0%	0%	0%	0%	0%
ADA-USD	0%	2%	2%	0%	2%	0%
BNB-USD	0%	13%	15%	0%	0%	20%
LTC-USD	0%	0%	0%	0%	0%	0%
LINK-USD	0%	6%	7%	0%	0%	7%
XLM-USD	0%	0%	0%	0%	0%	0%
DOGE-USD	0%	4%	5%	0%	0%	7%
BONDS	0%	0%	0%	0%	0%	1%
STOCKS	41%	35%	34%	71%	71%	8%
GOLD	59%	37%	32%	27%	25%	51%

Tabla 8 - Comparación de carteras

Esta tabla ilustra claramente el efecto de los nuevos activos en la reducción del riesgo y, consecuentemente, la rentabilidad, al ser estos más seguros que las criptodivisas. En todos los casos existe una bajada significativa menos en la cartera que combina ambos modelos, en los que tan solo hay una pequeña reducción de ambos valores.

Con el fin de analizar el efecto real de la diversificación, se proyectan todas las carteras a futuro, obteniendo lo siguiente:

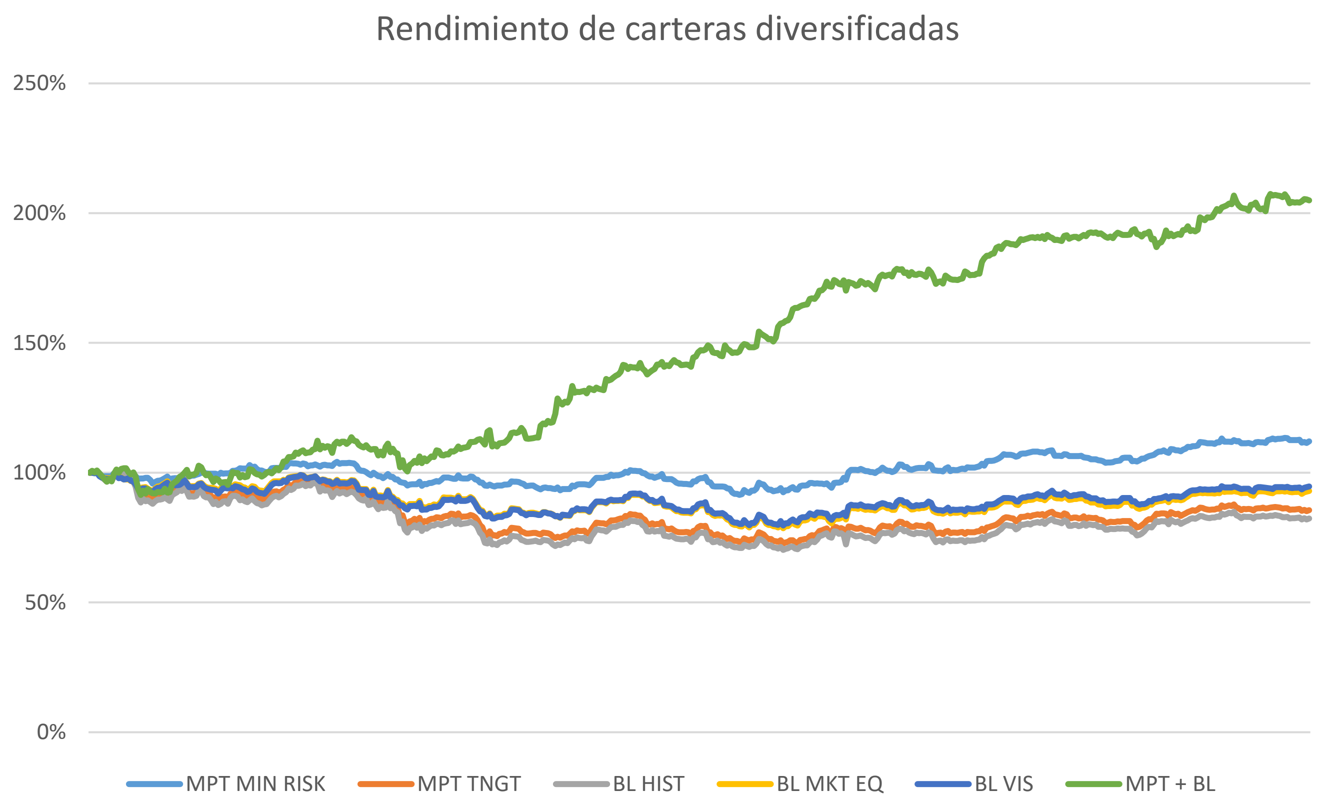

Gráfico 15 – Rendimiento de carteras diversificadas

La primera conclusión clara, es que todas las carteras obtienen mejores resultados que con las criptodivisas. Además, fluctúan mucho menos. En cuanto a su comportamiento, todas siguen el mismo patrón a excepción de la cartera que resulta de la combinación de los dos modelos. No solo el rendimiento es distinto, si no que sus variaciones siguen tendencias distintas. Observando las ponderaciones que se asignan a cada activo en la tabla, se deducen varias diferencias. La cartera que combina los dos modelos:

- Asigna un 40% del capital a las criptodivisas, mientras que el resto asigna menos, llegando incluso al 0%.
- Les da una oportunidad a los bonos de estado, asignando tan solo un 1% del capital, mientras que el resto asignan un 0%.
- Tan solo asigna un 8% al índice de mercado de acciones, mientras que el resto atribuye del 40% al 70%.

Todo ello resulta en un rendimiento del 200%. Del resto de carteras, solo la cartera de riesgo mínimo de Markowitz tiene resultados positivos en cuanto al rendimiento. A pesar de sacar estas conclusiones, cabe destacar que el mercado ha sufrido fuertes fluctuaciones inesperadas y no fundadas tanto en activos de renta fija, como en los de renta variable, y por supuesto en el mercado de criptodivisas, por lo que los resultados que se han obtenido podrían haber sido distintos en la proyección a futuro.

La siguiente gráfica muestra el rendimiento de todas las carteras de forma conjunta.

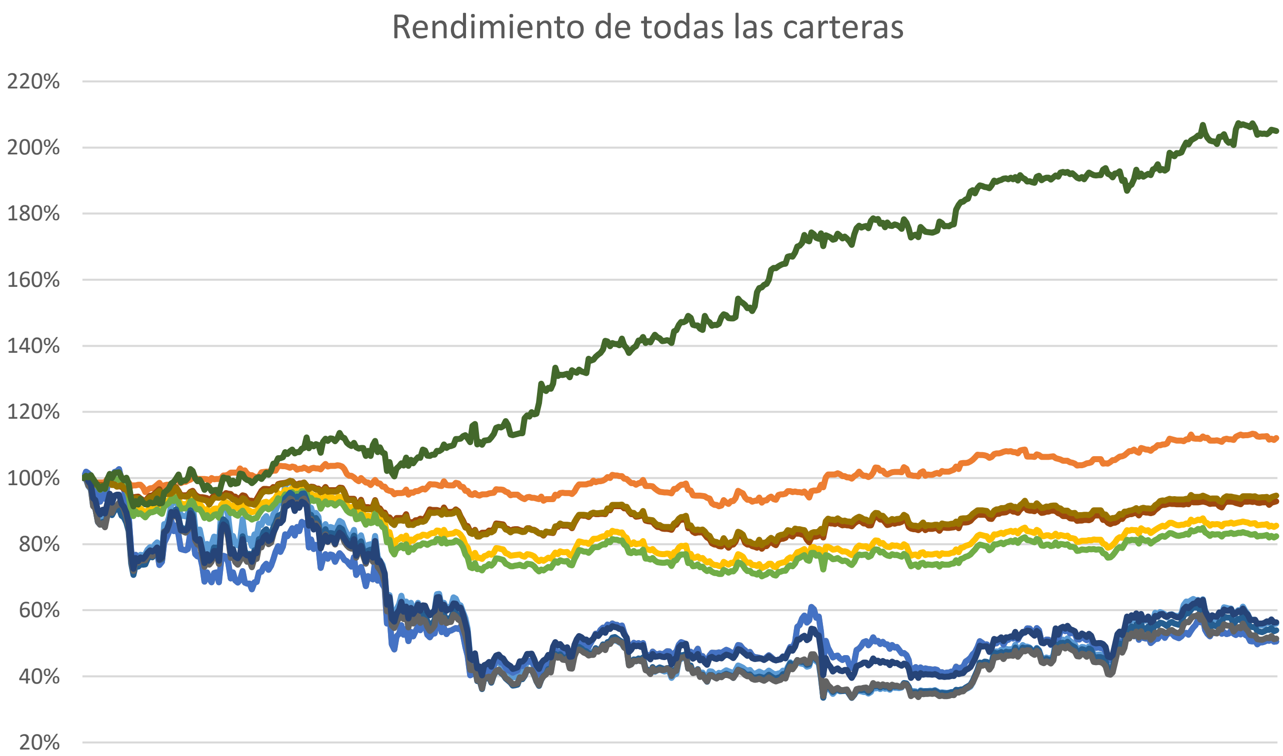

Gráfico 16 – Rendimiento de todas las carteras

6. CONCLUSIONES

En este trabajo se contemplan varios factores a la hora de optimizar carteras de inversión basadas en criptoactivos, y se extraen conclusiones sobre:

1. La naturaleza de los criptoactivos
2. Las técnicas de optimización de carteras basadas en criptoactivos
3. La importancia de la diversificación

En primer lugar, se concluye que en cuanto a los criptoactivos, como las criptomonedas, existen varias ventajas y desventajas. Una de las principales ventajas es el gran potencial de sus rendimientos. Los mercados de criptomonedas han experimentado un crecimiento significativo en los últimos años, y algunos inversores han conseguido beneficios sustanciales. Además, los criptoactivos ofrecen una gran oportunidad de diversificación en una cartera de inversión, ya que tienen una baja correlación con activos tradicionales como las acciones y los bonos. Por otra parte, la naturaleza descentralizada de las criptodivisas elimina la necesidad de intermediarios, lo que reduce los costes de transacción y aumenta la accesibilidad. Sin embargo, es importante tener en cuenta sus posibles riesgos, puesto que son muy volátiles y sus precios suelen experimentar fluctuaciones drásticas. La incertidumbre normativa y las posibles vulnerabilidades de seguridad plantean riesgos adicionales. Además, la falta de supervisión institucional y la limitada liquidez del mercado pueden dificultar la ejecución de operaciones a los precios deseados.

Por otra parte, se ha demostrado que la combinación de la Teoría Moderna de Carteras (MPT) de Markowitz y la teoría de Black-Litterman (BL) ofrece varias ventajas a la hora de optimizar una cartera de inversión basada en criptomonedas. La teoría de Markowitz identifica la asignación óptima de la cartera teniendo en cuenta el compromiso entre el riesgo y la rentabilidad, en base al rendimiento histórico y las correlaciones de los activos. Por otro lado, la teoría BL permite incorporar puntos de vista subjetivos sobre los rendimientos y riesgos esperados, que pueden no ser capturados adecuadamente por los datos históricos. Esto presenta una gran ventaja especialmente en el caso de las criptomonedas, puesto que los datos de mercado pueden ser limitados o volátiles. Al incorporar las opiniones de los inversores, el proceso de optimización de la cartera se vuelve más sólido, ya que combina tanto el análisis cuantitativo como las percepciones cualitativas. Además, la teoría BL permite realizar ajustes dinámicos en las ponderaciones de la cartera en función de los cambios en las condiciones del mercado y las opiniones de los inversores, lo cual se ajusta a la dinámica del mercado de criptoactivos. La capacidad de incorporar el sentimiento cambiante del mercado y ajustar las ponderaciones de los activos, en consecuencia, puede ayudar a capturar oportunidades potenciales o mitigar los riesgos en tiempo real.

Por último, cabe destacar las ventajas de la diversificación a través de la combinación de distintos activos como las criptomonedas, el oro, las acciones y los bonos. Entre otras:

- Mitigación del riesgo: las distintas clases de activos tienen distintos niveles de riesgo y reaccionan de forma diferente a las condiciones del mercado. Al mantener una combinación de acciones, bonos, oro y criptomonedas, se pueden compensar las posibles pérdidas en una clase de activos con las ganancias de otra.
- Ingresos estables y preservación del capital: los bonos suelen asociarse a la renta fija y se consideran menos volátiles que las acciones o las criptodivisas. Incluir bonos en su cartera puede proporcionar un flujo regular de ingresos y actuar como un activo defensivo durante los períodos de volatilidad del mercado, a pesar de que, en este caso, el bono seleccionado no ha tenido dicho perfil durante el periodo de tiempo evaluado. Por otra parte, el oro ha servido históricamente como activo refugio, manteniendo su valor en tiempos de incertidumbre económica.
- Activos alternativos: las criptomonedas representan una clase de activos que puede ofrecer oportunidades únicas de diversificación, debido a su baja correlación con los activos tradicionales.
- Cobertura contra la inflación: el oro y las criptodivisas pueden actuar como cobertura contra la inflación. El oro se ha considerado tradicionalmente un depósito de valor en tiempos de inflación, mientras que las criptomonedas están diseñadas con una oferta limitada, lo que puede proteger contra la depreciación del poder adquisitivo causada por la inflación.

En resumen, para optimizar una cartera basada en criptodivisas, es recomendable emplear técnicas tradicionales y puramente teóricas como puede ser la teoría de portfolio moderno de Markowitz, combinadas con otras técnicas que permitan al inversor ser subjetivo y aportar su propia visión. Esto es especialmente importante en la gestión de criptomonedas dada su alta volatilidad y falta de un fundamento tradicional como puede ser el oro, un inmueble o los resultados financieros de una empresa que cotice en bolsa. Por último, la mejor forma de optimizar una cartera de inversión basada en criptomonedas, es a través de la diversificación, es decir, introduciendo activos tradicionales que se comportan de forma muy distinta y que presentan correlaciones bajas o incluso negativas.

7. BIBLIOGRAFÍA

Alexander, G. J. (2009). From Markowitz to modern risk management. *European Journal of Finance*.

Aliu, F., Bajra, U., & Preniqi, N. (2022). Analysis of diversification benefits for cryptocurrency portfolios before and during the COVID-19 pandemic. *Studies in Economics and Finance*.

Blazsek, S., & Bowen, R. (2023). Score-driven cryptocurrency and equity portfolios. *Applied Economics*.

Bouri, E. (2020). Cryptocurrencies and the downside risk in equity investments. *Finance Research Letters*.

Brauneis, A., & Mestel, R. (2019). Cryptocurrency-portfolios in a mean-variance framework. *Finance Research Letters*.

Chao, X., Tao, X., & Zeng, L. (2019). Application of Markowitz's Portfolio Theory in Obtaining the Best Portfolio in the Stock Market. *Advances in Social Science Education and Humanities Research*.

Chen, S. D., & Lim, A. E. (2020). A Generalized Black-Litterman Model. *Operations Research*.

Chervinski, J. O. (2019). Introduction to blockchain and cryptocurrencies. *Revista Brasileira de Computacao Aplicada*.

Culjak, M., Tomic, B., & Zikovic, S. (2022). Benefits of sectoral cryptocurrency portfolio optimization. *Research in International Business and Finance*.

Fuhrer, A., & Hock, T. (2023). Uncertainty in the Black-Litterman model: Empirical estimation of the equilibrium. *Journal of Empirical Finance*.

Gallego, A. R. (2023). *Practice II: Portfolio Management.* Madrid: Universidad Pontificia Comillas.

Isavnint, A. G. (2019). PORTFOLIO INVESTMENT ANALYSIS ON THE BASIS OF THE BLACK-LITTERMAN MODEL. *Revista Genero & Direito*.

Jia-long, L., Bo-wei, L., & Min, L. (2013). Model Contest and Portfolio Performance: Black-Litterman versus Factor Models. *INTERNATIONAL CONFERENCE ON MANAGEMENT SCIENCE AND ENGINEERING (ICMSE)*.

Kaur, P., & Meena, M. K. (2023). CRYPTOCURRENCY AND STOCK MARKET: INTERDEPENDENCE. *The Journal of Indian Management and Stratgey*.

Ma, Y. (2020). Portfolio optimization in the era of digital financialization using cryptocurrencies. *Technological forecasting and social change*.

Maier-Paape, S., & Zhu, Q. J. (2018). A General Framework for Portfolio Theory-Part I: Theory and Various Models. *Rhein Westfal TH Aachen, Inst Math*.

Martin Angerer, C. H. (2021). Objective and subjective risks of investing into cryptocurrencies. *Finance Research Letters*.

Martinsky, O. (20 de July de 2013). *Mean-Variance Portfolio Optimization.* Obtenido de Quant And Financial: https://www.quantandfinancial.com/2013/07/mean-variance-portfolio-optimization.html

Martinsky, O. (31 de August de 2013). *Portfolio Optimization II : Black-Litterman model .* Obtenido de Quant And Financial: https://www.quantandfinancial.com/2013/08/black-litterman.html

O'Toole, R. (2017). The Black-Litterman model: active risk targeting and the parameter tau. *Journal of Asset Management*.

Pereanez, J. A. (2022). Investing with Cryptocurrencies Between Risk and Profit. *Smart Innovation Systems and Technologies*.

Schellinger, B. (2020). Optimization of special cryptocurrency portfolios. *Journal of Risk Finance*.

Smutny, Z., Sulc, Z., & Lansky, J. (2021). Motivations, Barriers and Risk-Taking When Investing in Cryptocurrencies. *Faculty of Informatics and Statistics, Prague University of Economics and Business*.

Tenkam, H. M. (2022). Optimization and Diversification of Cryptocurrency Portfolios: A Composite Copula-Based Approach. *Applied Sciences-Basel*.

Vaclavik, M., & Jablonsky, J. (2012). Revisions of modern portfolio theory optimization model. *Central European Journal of Operations Research*.

Zivanovic, V., & Vitomir, J. (2022). PORTFOLIO DIVERSIFICATION DURING COVID-19 OUTBREAK: IS GOLD A HEDGE AND A SAFE-HAVEN ASSET? *Prague Economic Papers*.

8. ANEXO

8.1 MARKOWITZ MPT

(Gallego, 2023)

```
from math import sqrt
import pandas as pd
import plotly.express as px
import plotly.graph_objects as go
from plotly.subplots import make_subplots
from scipy.optimize import minimize
from scipy.stats import uniform
import statsmodels.api as sm

all_prices = pd.read_excel('cryptodata.xlsx', index_col=0)

# Risk-free asset (can be changed)
RISK_FREE_RATE = 0.25 / 100

# Assets in YOUR portfolio (can be changed)
PF_ASSETS = ['ADA-USD','BNB-USD','BTC-USD','DOGE-USD','ETH-USD','LINK-
USD','LTC-USD','TRX-USD','XLM-USD','XRP-USD']

# count items in portfolio
PF_NUM_ASSETS = len(PF_ASSETS)

# Dates (can be changed)
PF_SINCE = '20171109'
PF_UNTIL = '20211231'

# Plot configuration (be careful)
PLOT_NUM_PORTFOLIOS = 10000
CML_STEPS = 100
CML_EXCESS = 75
POWER_TRICK = 2

selected_dates = (all_prices.index > PF_SINCE) & (all_prices.index < P
F_UNTIL)
prices = all_prices.loc[ selected_dates, PF_ASSETS ]

daily_returns = prices.pct_change()
daily_returns.head()

expected_returns = 252 * daily_returns.mean()
volatilities = sqrt(252) * daily_returns.std()
cov_matrix = 252 * daily_returns.cov()

covs = cov_matrix.round(3)
fig = px.imshow(covs, text_auto=True, width=600, height=600)
fig.show()

corrs = daily_returns.corr().round(3)
```

```
fig = px.imshow(corrs, text_auto=True, zmin=-1, zmax=+1, width=600, he
ight=600)
fig.show()

def daily_returns(prices):
    return prices.pct_change()

def expected_returns(prices):
    return 252 * daily_returns(prices).mean()

def covariance_matrix(prices):
    return 252 * daily_returns(prices).cov()

def expected_volatilities(prices):
    return sqrt(252) * daily_returns(prices).std()

def portfolio_return(weights, expected_returns):
    return weights @ expected_returns

def portfolio_volatility(weights, cov_matrix):
    return sqrt(weights @ cov_matrix @ weights.T)

def portfolio_sharpe_ratio(portfolio_return, portfolio_volatility, ris
k_free_rate):
    return (portfolio_return - risk_free_rate) / portfolio_volatility

# expected returns
returns = expected_returns(prices)
volatilities = expected_volatilities(prices)
cov_matrix  = covariance_matrix(prices)

# create a weight vector such as [1, 0, 0, 0, ....]
# (this can be changed)
weights = pd.Series(PF_NUM_ASSETS * [0.], index=PF_ASSETS)
weights[0] = 1.0

# function calls to calculate expected return, volatility and sharpe r
atio
pf_ret = portfolio_return(weights, returns)
pf_vol = portfolio_volatility(weights, cov_matrix)
pf_sharpe = portfolio_sharpe_ratio(pf_ret, pf_vol, RISK_FREE_RATE)

# display results
print('For this allocation:')
print(weights)
print(f'\nResulting portfolio:\n return={pf_ret:.2%}\n volatility={pf_
vol:.2%}\n sharpe={pf_sharpe:.2}')

def create_random_portfolios(number, asset_names):
    # create table of random weights
    random_table = uniform.rvs(size=(number, len(asset_names)))
    random_table = random_table ** POWER_TRICK
    portfolios = pd.DataFrame(random_table, columns=asset_names)
```

```
    # enforce each row sums 1.0
    for i in portfolios.index:
        wi = portfolios.loc[i]
        sum_weights = wi.sum()
        portfolios.loc[i] = wi / sum_weights

    return portfolios

portfolios = create_random_portfolios(PLOT_NUM_PORTFOLIOS, PF_ASSETS)
portfolios.tail()

def calculate_metrics(portfolios, asset_names):
    for i in portfolios.index:
        w_i = portfolios.loc[i, asset_names]
        portfolios.loc[i, 'return'    ] = pf_ret = portfolio_return(w_
i, returns)
        portfolios.loc[i, 'volatility'] = pf_vol = portfolio_volatilit
y(w_i, cov_matrix)
        portfolios.loc[i, 'sharpe'    ] = portfolio_sharpe_ratio(pf_re
t, pf_vol, RISK_FREE_RATE)

    return portfolios

portfolios = calculate_metrics(portfolios, PF_ASSETS)
portfolios.tail()

def find_max_sharpe(portfolios):
    idx_max_sharpe = portfolios['sharpe'].idxmax()
    ms_pf = portfolios.loc[idx_max_sharpe]

    max_sharpe_ret     = ms_pf['return']
    max_sharpe_vol     = ms_pf['volatility']
    max_sharpe_weights = ms_pf[prices.columns]

    print('RANDOMLY GENERATED PORTFOLIOS')
    print(f'Max(sharpe): portfolio at index {idx_max_sharpe}, return={
max_sharpe_ret:.2%} volatility={max_sharpe_vol:.2%}')
    print(max_sharpe_weights)

find_max_sharpe(portfolios)

def find_min_risk(portfolios):
    idx_min_risk = portfolios['volatility'].idxmin()
    mr_pf = portfolios.loc[idx_min_risk]

    min_risk_ret     = mr_pf['return']
    min_risk_vol     = mr_pf['volatility']
    min_risk_weights = mr_pf[prices.columns]

    print('RANDOMLY GENERATED PORTFOLIOS')
    print(f'min(risk): portfolio at index {idx_min_risk}, return={min_
risk_ret:.2%} volatility={min_risk_vol:.2%}')
    print(min_risk_weights)
```

```
find_min_risk(portfolios)

def _neg_sharpe_ratio(weights, expected_returns, cov_matrix, risk_free
_rate):
    # negative sharpe ratio

    pf_ret    = portfolio_return(weights, returns)
    pf_vol    = portfolio_volatility(weights, cov_matrix)
    pf_sharpe = portfolio_sharpe_ratio(pf_ret, pf_vol, risk_free_rate)

    return - pf_sharpe


def maximize_sharpe_ratio(expected_returns, cov_matrix, risk_free_rate
):
    # This function maximizes sharpe ratio for given data

    num_assets = len(expected_returns)
    initial_guess = num_assets*[1./num_assets,]
    args = (expected_returns, cov_matrix, risk_free_rate)

    # all weights must add up to 1.0
    constraints = ({'type': 'eq', 'fun': lambda x: x.sum() - 1})

    # bounded by 0 and 1
    bound = (0.0,1.0)
    bounds = tuple(bound for asset in range(num_assets))

    # optimize
    result = minimize(_neg_sharpe_ratio,
                      initial_guess,
                      args=args,
                      method='SLSQP',
                      bounds=bounds,
                      constraints=constraints)

    print(result.message)

    return pd.Series(result.x, index=expected_returns.index).sort_valu
es(ascending=False)

# optimize
max_sharpe_weights = maximize_sharpe_ratio(returns, cov_matrix, RISK_F
REE_RATE)

# calculate return and volatility
max_sharpe_ret = portfolio_return(max_sharpe_weights, returns)
max_sharpe_vol = portfolio_volatility(max_sharpe_weights, cov_matrix)

# print results
print('OPTIMIZATION')
print(f'The tangent portfolio has return={max_sharpe_ret:.1%} and vola
tility={max_sharpe_vol:.1%}')
print('And the following composition:')
```

```
for i in max_sharpe_weights.index:
    print(f'{i}\t{max_sharpe_weights[i]:03.1%}')

# This function minimizes risk for given data
def minimize_risk(cov_matrix):
    num_assets = len(cov_matrix)
    initial_guess = num_assets*[1./num_assets,]
    args = (cov_matrix,)
    # all weights must add up to 1.0
    constraints = ({'type': 'eq', 'fun': lambda x: x.sum() - 1})
    # bounded by 0 and 1
    bound = (0.0,1.0)
    bounds = tuple(bound for asset in range(num_assets))
    result = minimize(portfolio_volatility,
                      initial_guess,
                      args=args,
                      method='SLSQP',
                      bounds=bounds,
                      constraints=constraints)

    print(result.message)
    return pd.Series(result.x, index=cov_matrix.columns).sort_values(a
scending=False)

# optimize
min_risk_weights = minimize_risk(cov_matrix)

# calculate return and volatility
min_risk_ret = portfolio_return(min_risk_weights, returns)
min_risk_vol = portfolio_volatility(min_risk_weights, cov_matrix)

# print results
print('OPTIMIZATION')
print(f'The minimum-risk portfolio has return={min_risk_ret:.1%} and v
olatility={min_risk_vol:.1%}')
print('And the following composition:')
for i in min_risk_weights.index:
    print(f'{i}\t{min_risk_weights[i]:03.1%}')


def calculate_cml(max_sharpe_ret, max_sharpe_vol, risk_free_rate, cml_
steps, cml_excess):

    cml = pd.DataFrame()

    cml['weight'] = range(cml_steps + cml_excess)
    cml['weight'] /= cml_steps
    cml['volatility'] = cml['weight'] * max_sharpe_vol
    cml['return'] = risk_free_rate + (max_sharpe_ret - risk_free_rate)
* cml['volatility']/max_sharpe_vol
    cml['hover'] = [f'<br>{w_i:.1%}' for w_i in cml['weight']]

    return cml
```

```
# calculate CML
cml = calculate_cml(max_sharpe_ret, max_sharpe_vol, RISK_FREE_RATE, CM
L_STEPS, CML_EXCESS)
print(max_sharpe_ret, max_sharpe_vol)

def calculate_capm(prices, asset_list, index_name, risk_free_rate):

    # retrieve data
    capm_daily_rets  = daily_returns(prices)
    capm_exp_rets    = expected_returns(prices)
    capm_daily_rets  = capm_daily_rets.dropna()
    index_exp_return = capm_exp_rets[index_name]
    print(index_exp_return)
    risk_free_rate_daily = risk_free_rate / 252

    # make room for the results
    results = pd.DataFrame(index=asset_list)

    for i, asset_name in enumerate(asset_list):
        # fore each asset in the list

        # Ordinary Least Squares regression (OLS)
        y = capm_daily_rets[asset_name] - risk_free_rate_daily
        X = capm_daily_rets[index_name] - risk_free_rate_daily
        X_cte = sm.add_constant(X)
        model = sm.OLS(y, X_cte)
        regression = model.fit()

        alpha= regression.params[0]
        beta = regression.params[1]
        r2 = regression.rsquared

        # return estimated by CAPM
        capm_return = risk_free_rate + beta * (index_exp_return - risk
_free_rate)

        # store results
        results.loc[asset_name, 'alpha']  = alpha
        results.loc[asset_name, 'beta']  = beta
        results.loc[asset_name, 'beta_pvalue'] = regression.pvalues[1]
        #results.loc[asset_name, 'adj. beta']  = adj_beta
        results.loc[asset_name, 'R2']  = r2
        results.loc[asset_name, 'expected_ret'] = capm_exp_rets[asset_
name]
        results.loc[asset_name, 'capm_ret'] = capm_return

        # one plot per asset
        plot_ols_regression(X,
                            y,
                            f'OLS regression {asset_name} vs. {index_n
ame}')

    return results, index_exp_return
```

```
capm_results, index_exp_return = calculate_capm(prices, PF_ASSETS, 'AD
A-USD', RISK_FREE_RATE)
```

8.2 Black Litterman

(Martinsky, Portfolio Optimization II : Black-Litterman model , 2013)

```
from math import sqrt
import pandas as pd
import numpy as np
import plotly.express as px
import plotly.graph_objects as go
from plotly.subplots import make_subplots
from scipy.optimize import minimize
from scipy.stats import uniform
import statsmodels.api as sm
import matplotlib.pyplot as plt

# Calculates portfolio mean return
def port_mean(W, R):
    return sum(R * W)

# Calculates portfolio variance of returns
def port_var(W, C):
    return np.dot(np.dot(W, C), W)

# Combination of the two functions above - mean and variance of return
s calculation
def port_mean_var(W, R, C):
    return port_mean(W, R), port_var(W, C)

# Given risk-free rate, assets returns and covariances, this function
calculates
# mean-variance frontier and returns its [x,y] points in two arrays
def solve_frontier(R, C, rf):
    def fitness(W, R, C, r):
        # For given level of return r, find weights which minimizes po
rtfolio variance.
        mean, var = port_mean_var(W, R, C)
        penalty = 100 * abs(
            mean - r)  # Big penalty for not meeting stated portfolio
return effectively serves as optimization constraint
        return var + penalty

    frontier_mean, frontier_var, frontier_weights = [], [], []
    n = len(R)  # Number of assets in the portfolio
    for r in np.linspace(min(R), max(R), num=20):  # Iterate through t
he range of returns on Y axis
        W = np.ones([n]) / n  # start optimization with equal weights
        b_ = [(0, 1) for i in range(n)]
        c_ = ({'type': 'eq', 'fun': lambda W: sum(W) - 1.})
        optimized = minimize(fitness, W, (R, C, r), method='SLSQP', co
nstraints=c_, bounds=b_)
```

```
        if not optimized.success:
            raise BaseException(optimized.message)
        # add point to the efficient frontier [x,y] = [optimized.x, r]
        frontier_mean.append(r)
        frontier_var.append(port_var(optimized.x, C))
        frontier_weights.append(optimized.x)
    return np.array(frontier_mean), np.array(frontier_var), frontier_w
eights

# Given risk-free rate, assets returns and covariances, this function
calculates
# weights of tangency portfolio with respect to sharpe ratio maximizat
ion
def solve_weights(R, C, rf):
    from scipy.optimize import minimize
    from scipy.stats import uniform
    def fitness(W, R, C, rf):
        mean, var = port_mean_var(W, R, C)  # calculate mean/variance
of the portfolio
        util = (mean - rf) / sqrt(var)  # utility = Sharpe ratio
        return 1 / util  # maximize the utility, minimize its inverse
value
    n = len(R)
    W = np.ones([n]) / n  # start optimization with equal weights
    b_ = [(0., 1.) for i in range(n)]  # weights for boundaries betwee
n 0%..100%. No leverage, no shorting
    c_ = ({'type': 'eq', 'fun': lambda W: sum(W) - 1.})  # Sum of weig
hts must be 100%
    optimized = minimize(fitness, W, (R, C, rf), method='SLSQP', const
raints=c_, bounds=b_)
    if not optimized.success: raise BaseException(optimized.message)
    return optimized.x


class Result:
    def __init__(self, W, tan_mean, tan_var, front_mean, front_var, fr
ont_weights):
        self.W=W
        self.tan_mean=tan_mean
        self.tan_var=tan_var
        self.front_mean=front_mean
        self.front_var=front_var
        self.front_weights=front_weights

def optimize_frontier(R, C, rf):
    W = solve_weights(R, C, rf)
    tan_mean, tan_var = port_mean_var(W, R, C)  # calculate tangency p
ortfolio
    front_mean, front_var, front_weights = solve_frontier(R, C, rf)  #
calculate efficient frontier
    # Weights, Tangency portfolio asset means and variances, Efficient
frontier means and variances
    print("tangency weights:")
    print(W)
```

```
    print("tan_var",tan_var)
    print("tan_mean",tan_mean)
    return Result(W, tan_mean, tan_var, front_mean, front_var, front_w
eights)

def display_assets(names, R, C, color='black'):
    plt.scatter([C[i, i] ** .5 for i in range(n)], R, marker='x', colo
r=color), plt.grid(True)  # draw assets
    for i in range(n):
        plt.text(C[i, i] ** .5, R[i], '  %s' % names[i], verticalalign
ment='center', color=color) # draw labels

def display_frontier(result: Result, label=None, color='black'):
    from collections import defaultdict
    from IPython.core.display import HTML
    plt.text(result.tan_var ** .5, result.tan_mean, '   tangent', vert
icalalignment='center', color=color)
    plt.scatter(result.tan_var ** .5, result.tan_mean, marker='o', col
or=color), plt.grid(True)
    plt.plot(list(result.front_var ** .5), list(result.front_mean), la
bel=label, color=color), plt.grid(True)  # draw efficient frontier

    table = defaultdict(list)
    for mean, var, weights in zip(result.front_mean, result.front_var,
result.front_weights):
        table['Mean'].append(mean)
        table['Variance'].append(var)
        for name, weight in zip(symbols, weights):
            table[name].append(weight)
    display(HTML(f'<b>Efficient frontier portfolios ({label})</b>'), p
d.DataFrame(table))

# Function loads historical stock prices of nine major S&P companies a
nd returns them together
# with their market capitalizations, as of 2013-07-01

symbols = ['BTC-USD','ETH-USD','DOGE-USD','XRP-USD','ADA-USD','BNB-USD
','LTC-USD','LINK-USD','XLM-USD','TRX-USD']
cap = {'BTC-USD': 520464000000,'ETH-USD': 220499000000,'DOGE-USD': 998
9000000,'XRP-USD': 22089000000,'ADA-USD': 12704000000,'BNB-USD': 48291
000000,'LTC-USD': 5873000000,'LINK-USD': 3363000000,'XLM-USD': 2360398
573,'TRX-USD': 6359749205}
n = len(symbols)
# Dates (can be changed)
PF_SINCE = '20171109'
PF_UNTIL = '20211231'
all_prices = pd.read_excel('cryptodata.xlsx', index_col=0)
selected_dates = (all_prices.index > PF_SINCE) & (all_prices.index < P
F_UNTIL)
prices = all_prices.loc[ selected_dates, symbols ]
n = len(symbols)


import numpy as np
```

```
def assets_historical_returns_and_covariances(prices):
    prices_array = np.array(prices).T
    rows, cols = prices_array.shape

    returns = np.empty((rows, cols - 1))
    for r in range(rows):
        for c in range(cols - 1):
            p0, p1 = prices_array[r, c], prices_array[r, c + 1]
            returns[r, c] = (p1 / p0) - 1

    expreturns = np.array([np.mean(row) for row in returns])
    covars = np.cov(returns.T, rowvar=False)

    expreturns = expreturns*250
    covars = covars * 250

    print("RET")
    print(expreturns)
    print(expreturns.shape)
    print("COV")
    print(covars)
    print(covars.shape)

    return expreturns, covars

values = np.array(list(cap.values()))  # Extract the values from the d
ictionary and convert to NumPy array
total_sum = np.sum(values)  # Compute the sum of the values

W = values / total_sum
R, C = assets_historical_returns_and_covariances(prices)
rf = 0.015


res1 = optimize_frontier(R, C, rf)

display_assets(symbols, R, C, color='blue')
display_frontier(res1, color='blue')
plt.xlabel('variance $\sigma$'), plt.ylabel('mean $\mu$'), plt.show()
display(pd.DataFrame({'Weight': res1.W}, index=symbols).T)



# Calculate portfolio historical return and variance
mean, var = port_mean_var(W, R, C)

lmb = (mean - rf) / var  # Calculate risk aversion
Pi = np.dot(np.dot(lmb, C), W)  # Calculate equilibrium excess returns
print("LMB = ",lmb)
print("Pi =",Pi)

LMB =  1.526920567360944
Pi = [0.63705045 0.74636344 0.74676015 0.69235878 0.78627774 0.7272104
```

```
4
 0.76009679 0.72920398 0.72457301 0.80655097]

res2 = optimize_frontier(Pi+rf, C, rf)

display_assets(symbols, R, C, color='red')
display_frontier(res1, label='Historical returns', color='red')
display_assets(symbols, Pi+rf, C, color='green')
display_frontier(res2, label='Implied returns', color='green')
plt.xlabel('variance $\sigma$'), plt.ylabel('mean $\mu$'), plt.legend(
), plt.show()
display(pd.DataFrame({'Weight': res2.W}, index=symbols).T)

def create_views_and_link_matrix(symbols, views):
    r, c = len(views), len(symbols)
    Q = [views[i][3] for i in range(r)]  # view matrix
    P = np.zeros([r, c])
    nameToIndex = dict()
    for i, n in enumerate(symbols):
        nameToIndex[n] = i
    for i, v in enumerate(views):
        name1, name2 = views[i][0], views[i][2]
        P[i, nameToIndex[name1]] = +1 if views[i][1] == '>' else -1
        P[i, nameToIndex[name2]] = -1 if views[i][1] == '>' else +1
    return np.array(Q), P

views = [('BNB-USD','>','TRX-USD',0.24),
         ('ETH-USD','<','DOGE-USD',0.36),
         ('ADA-USD','>','LTC-USD',0.4)]

Q, P = create_views_and_link_matrix(symbols, views)
print('Views Matrix')
display(pd.DataFrame({'Views':Q}))
print('Link Matrix')
display(pd.DataFrame(P))

tau = .025  # scaling factor

# Calculate omega - uncertainty matrix about views
omega = np.dot(np.dot(np.dot(tau, P), C), np.transpose(P))  # 0.025 *
P * C * transpose(P)
# Calculate equilibrium excess returns with views incorporated
sub_a = np.linalg.inv(np.dot(tau, C))
sub_b = np.dot(np.dot(np.transpose(P), np.linalg.inv(omega)), P)
sub_c = np.dot(np.linalg.inv(np.dot(tau, C)), Pi)
sub_d = np.dot(np.dot(np.transpose(P), np.linalg.inv(omega)), Q)
Pi_adj = np.dot(np.linalg.inv(sub_a + sub_b), (sub_c + sub_d))

res3 = optimize_frontier(Pi_adj + rf, C, rf)

display_assets(symbols, Pi+rf, C, color='green')
display_frontier(res2, label='Implied returns', color='green')
display_assets(symbols, Pi_adj+rf, C, color='blue')
display_frontier(res3, label='Implied returns (adjusted views)', color
='blue')
```

```
plt.xlabel('variance $\sigma$'), plt.ylabel('mean $\mu$'), plt.legend(
), plt.show()
display(pd.DataFrame({'Weight': res3.W}, index=symbols).T)
```

8.3 COMBINACIÓN MPT Y BL

```
import numpy as np
import cvxpy as cp
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.optimize import minimize

# Load historical data for all assets
data = pd.read_excel('cryptodata.xlsx', index_col=0)

# Calculate the monthly returns for each asset
returns = data.pct_change().iloc[1:].values

# Calculate the covariance matrix
cov_matrix = np.cov(returns, rowvar=False)


# Black-Litterman model
# ---------------------
def solve_black_litterman(returns, cov_matrix, market_weights, risk_av
ersion, confidences):
    n_assets = returns.shape[1]

    # Calculate market equilibrium returns
    market_return = risk_aversion * np.dot(cov_matrix, market_weights)

    # Create optimization variables
    weights = cp.Variable(n_assets)

    # Define the objective function
    objective = cp.Maximize(cp.sum(cp.multiply(market_return, weights)
) - risk_aversion * cp.quad_form(weights, cov_matrix))

    # Define the constraints
    constraints = [cp.sum(weights) == 1, weights >= 0]

    # Define the confidence level matrix
    D = np.diag(confidences)

    # Adjust the covariance matrix and market return
    adjusted_cov_matrix = cov_matrix + D
    adjusted_market_return = market_return

    # Solve the optimization problem
    problem = cp.Problem(objective, constraints)
    problem.solve()
```

```
    # Get the optimal asset weights
    optimal_weights = weights.value

    return optimal_weights


# List of market capitalization weights
market_weights_list = [
    np.array([0.610878869432509,0.258804028388128,0.0117242864573944,
              0.0259262952805472,0.0149109355445729,0.0566800998412288
,
              0.0068932560180476,0.0039472194770465,0.0027704463933804
2,
              0.00746456316714451]), # Based on market cap
    np.array([0.915898007613099,0.0662408613398678,3.01655556413839E-0
6,
              1.88149489240733E-05,1.36418052049712E-05,0.013635340200
5757,
              0.00387426559345747,0.000308223234397867,3.9379610774633
7E-06,
              3.89074783166135E-06]), # Based on % growth during the l
ast three months of 2021
    np.array([0.0229431932614409,0.0733828727315276,0.0407318594902209
,
              0.0509451405298982,0.108745819528592,0.19647333600007,
              0.016892553580055,0.0240170437168567,0.029391056304328,
              0.43647712485701]), # Based on % growth during 2021
    np.array([0.0113962261401176,0.0201765024168311,0.056549919447096,
              0.00671871833000413,0.0718633447610259,0.451894355775586
,
              0.00400784193296757,0.153791947827691,0.0117683043735675
,
              0.211832838995113]), # Based on % growth 2017 - 2021
]

# List of confidence levels for each market weight
confidences_list = [
    [0.8, 0.6, 0.7, 0.9, 0.5, 0.8, 0.6, 0.7, 0.9, 0.5],
    [0.7, 0.9, 0.5, 0.8, 0.6, 0.7, 0.9, 0.5, 0.8, 0.6],
    [0.6, 0.7, 0.9, 0.5, 0.8, 0.6, 0.7, 0.9, 0.5, 0.8],
    [0.9, 0.5, 0.8, 0.6, 0.7, 0.9, 0.5, 0.8, 0.6, 0.7]
]

# List to store the optimal asset weights for each risk aversion coeff
icient
optimal_weights_list = []
rf= 0.002

# Generate a range of risk aversion coefficients
risk_aversion = np.linspace(0, 0.5, num=100)

# List to store portfolio risks, returns, and Sharpe ratios for each r
isk aversion coefficient
portfolio_risks = []
```

```
portfolio_returns = []
portfolio_sharpe_ratios = []

# Function to minimize negative Sharpe ratio for a given level of risk
def objective(weights, cov_matrix, expected_returns, risk_free_rate, r
isk_aversion):
    portfolio_return = np.dot(weights, expected_returns)
    portfolio_risk = np.sqrt(np.dot(weights.T, np.dot(cov_matrix, weig
hts)))
    sharpe_ratio = (portfolio_return - risk_free_rate) / portfolio_ris
k
    return -sharpe_ratio + risk_aversion * portfolio_risk

# Perform portfolio optimization for each risk aversion coefficient
for ra in risk_aversion:
    constraints = ({'type': 'eq', 'fun': lambda x: np.sum(x) - 1})  #
Constraint: weights sum to 1
    bounds = [(0, 1) for _ in range(returns.shape[1])]  # Bounds: weig
hts between 0 and 1
    initial_weights = np.ones(returns.shape[1]) / returns.shape[1]  #
Initial weights: equal allocation
    result = minimize(objective, initial_weights, args=(cov_matrix, re
turns.mean(axis=0), rf, ra),
                      constraints=constraints, bounds=bounds)
    optimal_weights = result.x
    portfolio_return = np.dot(optimal_weights, returns.mean(axis=0))
    portfolio_std = np.sqrt(np.dot(optimal_weights.T, np.dot(cov_matri
x, optimal_weights)))
    sharpe_ratio = (portfolio_return - rf) / portfolio_std
    portfolio_returns.append(portfolio_return)
    portfolio_risks.append(portfolio_std)
    portfolio_sharpe_ratios.append(sharpe_ratio)

# Calculate tangent line (highest Sharpe ratio)
max_sharpe_idx = np.argmax(portfolio_sharpe_ratios)
tangent_slope = (portfolio_returns[max_sharpe_idx] - rf) / portfolio_r
isks[max_sharpe_idx]
tangent_line = rf + tangent_slope * np.array(portfolio_risks)

# Print the weights, risk, and return of the tangency portfolio
trading_days_per_year = 252
tangency_weights = optimal_weights
tangency_risk = portfolio_risks[max_sharpe_idx] * np.sqrt(trading_days
_per_year)
tangency_return = portfolio_returns[max_sharpe_idx] * trading_days_per
_year
```