



INGENIERÍA EN TECNOLOGÍAS INDUSTRIALES

TRABAJO FIN DE GRADO

**ANÁLISIS Y RESOLUCIÓN DE NUEVOS
MODELOS DINÁMICOS GLUCOSA-
INSULINA Y CÉLULAS β DE ORDEN
FRACCIONARIO CON RETRASO**

Autor: Alberto Martínez de la Riva Muínelo

Directores: Dr. Francisco Javier Rodríguez Gómez y

Alberto Rodríguez Gómez

Madrid

Julio de 2023

Declaro, bajo mi responsabilidad, que el Proyecto presentado con el título
**Análisis y Resolución de Nuevos Modelos Dinámicos Glucosa-Insulina
y Células β de Orden Fraccionario con Retraso**

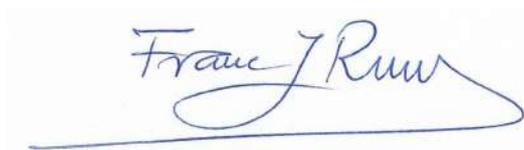
en la ETS de Ingeniería - ICAI de la Universidad Pontificia Comillas en el
curso académico 2022/23 es de mi autoría, original e inédito y
no ha sido presentado con anterioridad a otros efectos. El Proyecto no es
plagio de otro, ni total ni parcialmente y la información que ha sido tomada
de otros documentos está debidamente referenciada.

Fdo.: Alberto Martínez de la Riva Muínelo Fecha: 13/07/2023



Autorizada la entrega del proyecto

LOS DIRECTORES DEL PROYECTO



Fdo.: Dr. Francisco Javier Rodríguez Gómez Fecha: 13/07/2023



Fdo.: Alberto Rodríguez Gómez Fecha: 13/07/2023



INGENIERÍA EN TECNOLOGÍAS INDUSTRIALES

TRABAJO FIN DE GRADO

**ANÁLISIS Y RESOLUCIÓN DE NUEVOS
MODELOS DINÁMICOS GLUCOSA-
INSULINA Y CÉLULAS β DE ORDEN
FRACCIONARIO CON RETRASO**

Autor: Alberto Martínez de la Riva Muínelo

Directores: Dr. Francisco Javier Rodríguez Gómez y

Alberto Rodríguez Gómez

Madrid

Julio de 2023

ANÁLISIS Y RESOLUCIÓN DE NUEVOS MODELOS DINÁMICOS GLUCOSA-INSULINA Y CÉLULAS β DE ORDEN FRACCIONARIO CON RETRASO

Autor: Martínez de la Riva Muinelo, Alberto.

Director: Rodríguez Gómez, Fco. Javier; Rodríguez Gómez, Alberto

Entidad Colaboradora: ICAI – Universidad Pontificia Comillas.

RESUMEN DEL PROYECTO

I. INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS

La diabetes es una enfermedad cuyos números no han parado de crecer en los últimos años. Pese a ser una enfermedad cuyo conocimiento y diagnóstico se remonta incluso antes de la edad cristiana, todavía no tiene cura, y que solo en España afecta a más de 5 millones de personas al año.

Con la realización de este trabajo pretendemos ayudar a los expertos a entender mejor el comportamiento y la manera en la que interaccionan la insulina y la glucosa, y así ayudar a la posible diagnosis de un tratamiento para erradicar la enfermedad.

El objetivo principal del trabajo es presentar un estudio, análisis extenso y desarrollo de los nuevos modelos dinámicos de glucosa–insulina (MDGI) y células β que permiten conocer las concentraciones de glucosa en sangre, de insulina y las células β sanas. Para ello, se hará una descripción de los nuevos modelos matemáticos con retraso del tiempo, un análisis de la estabilidad de los puntos de equilibrio y el estudio de una posible bifurcación de Hopf para los modelos. Y por último se realizarán las simulaciones numéricas pertinentes de los modelos numéricos con el software MATHEMATICA.

Así pues, se presentarán los siguientes objetivos para poder desarrollar el proyecto con éxito:

1. Un capítulo que se centrará en presentar correctamente *las ecuaciones diferenciales de Orden Fraccionario (Systems of Fractional Delay Differential Equations–SFDDs)*, base en torno a la cual se desarrollará todo el proyecto. Para ello se explicará en qué consiste y las diferentes definiciones a partir de las cuales se desarrollan todas sus propiedades y aplicaciones. También se explicarán las propiedades más importantes.
2. El segundo objetivo será describir correctamente el método *Wavelet de Bernouilli* y el método de *Adams -Bahsforth-Moulton* que serán los principales métodos numéricos con los que se resolverán los modelos fraccionarios con sus diferentes variaciones.
3. El tercer objetivo será presentar los diferentes modelos de orden fraccionario de interacción glucosa–insulina que se resolverán con los métodos numéricos que se presentarán más adelante.
4. Se diseñará una aplicación práctica en el lenguaje *Mathematica* que implemente los algoritmos numéricos descritos con las técnicas o métodos *Wavelet* y *Adams -Bahsforth–Moulton*, resolviendo los modelos propuestos.
5. Una vez obtenidos los resultados de la implementación, se compararán los distintos métodos utilizando tanto los números como tablas y gráficos 2D y 3D. Se concluirá cuál o cuales son los más óptimos en función de la precisión y la complejidad.

6. Finalmente, se analizarán líneas de desarrollo futuras y cuáles serán los próximos pasos a seguir en este campo de investigación.

Palabras clave: Ecuaciones Diferenciales Fraccionarias con retraso, métodos numéricos, diabetes, Transformada *Wavelet*, Métodos *Wavelet de Bernouli*, glucosa, insulina, análisis de estabilidad.

II. METODOLOGÍA

En el desarrollo del Proyecto se procederá de la siguiente manera:

- **A)** En un capítulo se llevará a cabo un estudio de las ecuaciones diferenciales de orden fraccionario. Para ello, se estudiarán las diferentes operaciones del cálculo fraccionario, integral y derivada de Riemann-Liouville, la derivada de Caputo, además de todas sus propiedades más importantes.
 - **B)** En el segundo capítulo, se estudiarán los métodos numéricos propuestos y se resolverán los problemas propuestos utilizando dichos algoritmos.
 - **C)** En un tercer capítulo, se introducirán los diferentes modelos fraccionarios de glucosa insulina dando a conocer sus diferentes soluciones y analizando dichos resultados.
 - **D)** Por último, se expondrán los resultados obtenidos y se expondrán los experimentos del cálculo de la frecuencia crítica.
-

III. RESULTADOS

Entre los diversos resultados obtenidos a lo largo de este trabajo, se puede presentar en esta parte introductoria, los resultados obtenidos en diferentes casos para los tres modelos estudiados:

1. El primer modelo a estudiar es conocido como *Modelo de interacción de glucosa e insulina con ordenes inconmensurables* [LEKD19] y sus resultados principales así como su resolución gráfica con el método *Adams-Bashforth-Moulton* se presentan a continuación.

- Sea el sistema de ecuaciones diferenciales fraccionarias con retraso SFDDE que representa el modelo de interacción de glucosa–insulina con órdenes inconmensurables:

$$(P) \equiv \begin{cases} D^{(\alpha_1)} y_1(x) = -b_1 y_1(x) - \frac{b_3 y_1(x) y_2(x)}{b_4 y_1(x)+1} + b_6 & x \in (0, T), 0 < \alpha \leq 1 \\ D^{(\alpha_2)} y_2(x) = -b_2 y_2(x) + b_5 y_1(x - \tau) & \tau \geq 0 \\ y(x) = \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 87 \\ 60 \end{pmatrix} & x \in [-\tau, 0] \\ y(0) = \begin{pmatrix} G_0 \\ I_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 87 \\ 60 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Se presentan el punto de equilibrio $(G^*, I^*) = (y_1^*, y_2^*)$, los puntos de bifurcación τ_0 y la velocidad angular ω_0 además de las soluciones numéricas y su representación para el caso estable $\tau < \tau_0$ e inestable $\tau > \tau_0$

α_1	α_2	G^*	I^*	ω_0	τ_0
1	1	650.59	381.49	0.002825	607.92
0.92	0.92	722.65	359.08	0.001382	1365.60
0.92	0.95	686.41	362.92	0.001469	1285.91
0.92	0.72	1018.09	334.39	0.000903	2089.43

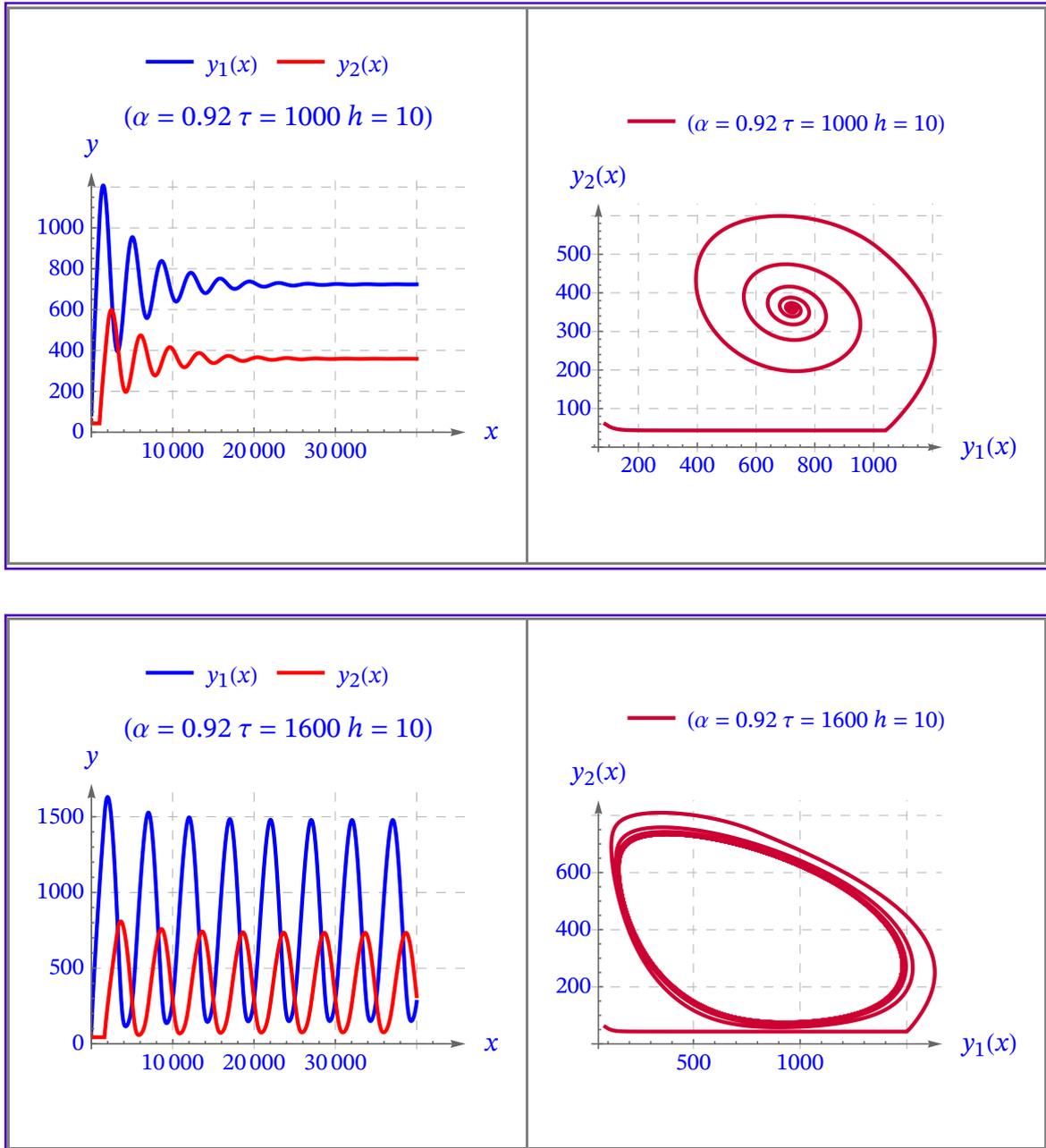


Figura 0.1. Resolución del Modelo e interacción de glucosa e insulina con ordenes inconmensurable con ordenes fraccionarios $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.92$.

■ **Indicación:**

(i) El punto de equilibrio positivo (G^*, I^*) es *asintóticamente estable* cuando $\tau = 1000 < \tau_0 = 1365.60$.

(ii) El punto de equilibrio positivo (G^*, I^*) es *inestable* para $\tau = 1600 > \tau_0 = 1365.60$ y ocurre una bifurcación de Hopf en el punto de equilibrio.

2. El segundo modelo a estudiar se conoce como *Modelo con Retardo Glucosa–Insulina con la Función de las Células β* [ALHU20] y sus resultados principales así como la resolución gráfica del caso de respuesta periódica del sistema resuelto con el método *Adams-Bashforth-Moulton* se presentan a continuación:

■

Sea el modelo regulador Glucosa–Insulina con Retardo del tiempo:

$$(P) \equiv \begin{cases} D^{(\alpha_1)} y_1(x) = r_1 y_2(x - \tau_g) y_3(x - \tau_g) - r_2 y_1(x) - r_3 y_1(x) y_2(x) & x \in (0, T) \\ \quad + c_1 y_3(x - \tau_g) \\ D^{(\alpha_2)} y_2(x) = \frac{R_3 N}{y_3(t)} - R_4 y_1(x - \tau_i) + c_2 \\ D^{(\alpha_3)} y_3(x) = R_5 (y_2(x) - \hat{y})(T - y_3(x)) + R_6 y_3(x) (T - y_3(x)) \\ \quad - R_7 y_3(x) \end{cases}$$

con los parámetros expresados en la Tabla siguiente:

r_1	r_2	r_3	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7	c_1	c_2	\hat{y}	T	N
0.472	0.2275	0.025	0.82	0.6	0.3	0.3	0.2	0.1	0.8	1.42	1.5	1.27

La ecuación característica del sistema viene dada por la expresión:

$$P(\lambda) \equiv a_3 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 + \underbrace{(a_4 \lambda + a_5)}_{a_{e1}} e^{-\lambda \tau_i} + \underbrace{(a_6 \lambda + a_7)}_{a_{e2}} e^{-\lambda(\tau_g + \tau_i)} = 0$$

y la ecuación que determina un par de raíces complejas puras $\lambda = \pm i \beta$ para algún valor del retraso τ es $\psi(\beta) = 0$:

$$\psi(\beta) \equiv \beta^6 + (a_2^2 - 2 a_1) \beta^4 + \beta^2 (-2 a_4 a_6 \cos(\beta \tau_g) + a_1^2 - a_4^2 - a_6^2 - 2 a_0 a_2) - 2 (a_5 a_6 - a_4 a_7) \beta \sin(\beta \tau_g) - 2 a_5 a_7 \cos(\beta \tau_g) + a_0^2 - a_5^2 - a_7^2 = 0$$

siendo los coeficientes a_i los indicados en la siguiente Tabla de coeficientes del modelo:

a_i Coeficientes del Modelo.

$$a_3 \quad 1$$

$$a_2 \quad r_3 (y_2)^* + r_2 - R_6 T_1 - R_5 \hat{y} + R_5 (y_2)^* + 2 R_6 (y_3)^* + R_7$$

$$a_1 \quad \frac{N_1 R_3 R_5 (T_1 - (y_3)^*)}{((y_3)^*)^2} + (r_3 (y_2)^* + r_2) (-R_6 T_1 + R_5 (-\hat{y}) + R_5 (y_2)^* + 2 R_6 (y_3)^* + R_7)$$

$$a_0 \quad \frac{N_1 R_3 R_5 (r_3 (y_2)^* + r_2) (T_1 - (y_3)^*)}{((y_3)^*)^2}$$

$$a_4 \quad -r_3 R_4 (y_1)^*$$

$$a_5 \quad r_3 R_4 (y_1)^* (R_6 T_1 + R_5 \hat{y} - R_5 (y_2)^* - 2 R_6 (y_3)^* - R_7)$$

$$a_6 \quad r_1 R_4 (y_3)^*$$

$$a_7 \quad R_4 (c_1 R_5 (T_1 - (y_3)^*) + r_1 ((y_3)^* (R_7 - R_6 (T_1 - 2 (y_3)^*)) + R_5 (T_1 (y_2)^* - \hat{y} (y_3)^*)))$$

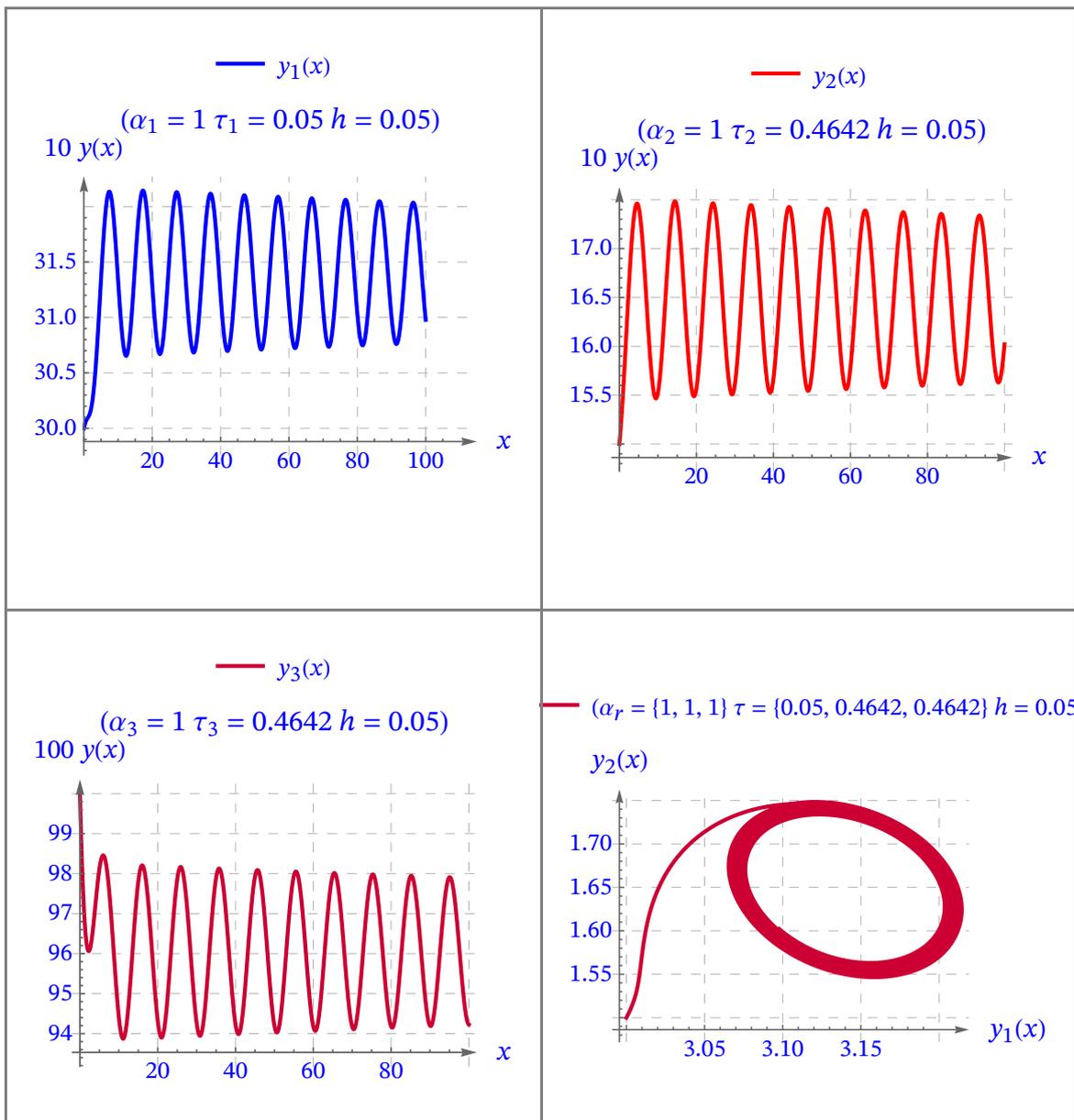
(a) Determinése la ecuación $\psi(\beta) = 0$ para los retrasos $(\tau_i, \tau_g) = (0.05, 0.4642)$, y hállese la raíz β_k , comprobando que coincide con el módulo de las raíces complejas puras $\lambda = \pm i \beta$.

Indicación:

τ_i	τ_g	λ_1	λ_2	λ_3
0.05	0.35	-0.5300075	$-0.01589055 + 0.6417439 i$	$-0.01589055 - 0.6417439 i$
0.05	0.4	-0.5323045	$-0.008819797 + 0.6387846 i$	$-0.008819797 - 0.6387846 i$
0.05	0.464	-0.5352581	$-0.00003173886 + 0.6346646 i$	$-0.00003173886 - 0.6346646 i$
0.05	0.4642	-0.5352674	$0.6346512 i$	$-0.6346512 i$
0.05	0.5	-0.5369259	$0.004774346 + 0.6321953 i$	$0.004774346 - 0.6321953 i$
0.05	0.6	-0.5415806	$0.01757635 + 0.6248250 i$	$0.01757635 - 0.6248250 i$

$\tau_0 = 0.4642.$

$\beta = 0.6346.$



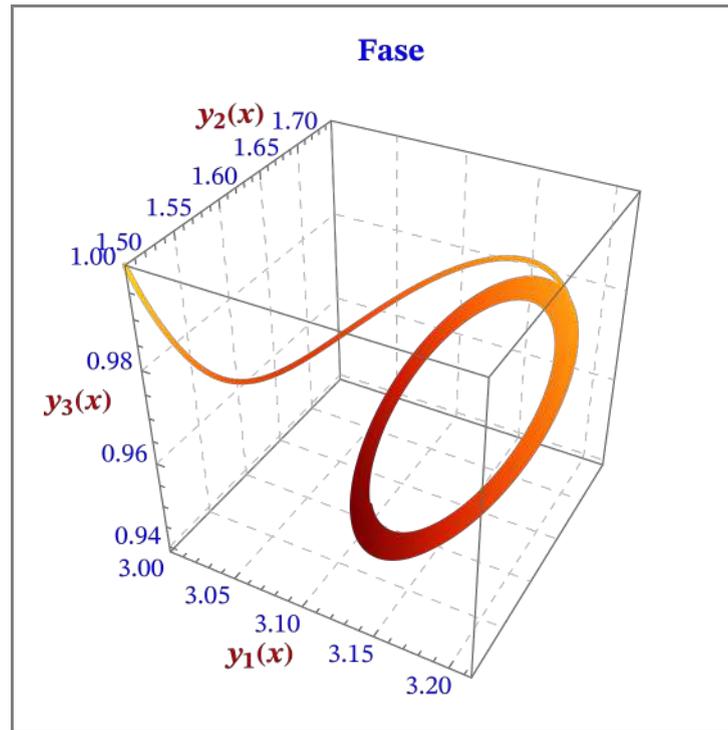


Figura 0.2. Resolución del Modelo con Retardo Glucosa–Insulina con la Función de las Células β cuando su $\tau_g = \tau_0$

3. El tercer modelo a estudiar se conoce como *Sistema Regulator de Glucosa–Insulina Fraccionario No Lineal* [AGRA22] y se presenta la solución gráfica del mismo utilizando el método *Wavelet* de Bernoulli:

- Sea el sistema de ecuaciones diferenciales con retraso SFDDE que representa el modelo regulador Glucosa–Insulina Fraccionario no Lineal:

$(P_1) \equiv$

$$\begin{cases} D^{(\alpha_1)} y_1(x) = -r_1 y_1(x) + r_2 y_1(x) y_2(x) + r_3 y_2(x)^2 + r_4 y_2(x)^3 + r_5 y_3(x) + r_6 y_3(x)^2 + r_7 y_3(x)^3 + r_{20} & x \in (0, T) \\ D^{(\alpha_2)} y_2(x) = -r_8 y_1(x) y_2(x) - r_9 y_1(x)^2 - r_{10} y_1(x)^3 + r_{11} y_2(x) (1 - y_2(x)) - r_{12} y_3(x) - r_{13} y_3(x)^2 - r_{14} y_3(x)^3 + r_{21} \\ D^{(\alpha_3)} y_3(x) = r_{15} y_2(x) + r_{16} y_2(x)^2 + r_{17} y_2(x)^3 - r_{18} y_3(x) - r_{19} y_2(x) y_3(x) \\ \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ y_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.53 \\ 1.31 \\ 1.03 \end{pmatrix} & x = 0 \end{cases}$$

(i) Representétese en una misma gráfica en el intervalo $[0, T]$ la solución del método *Wavelet* BWM.

$$(a) \begin{cases} k = 2 & M = 5 \\ \alpha_i = (1 \ 1 \ 1) & \tau_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{cases} \quad [0, T] = [0, 2].$$

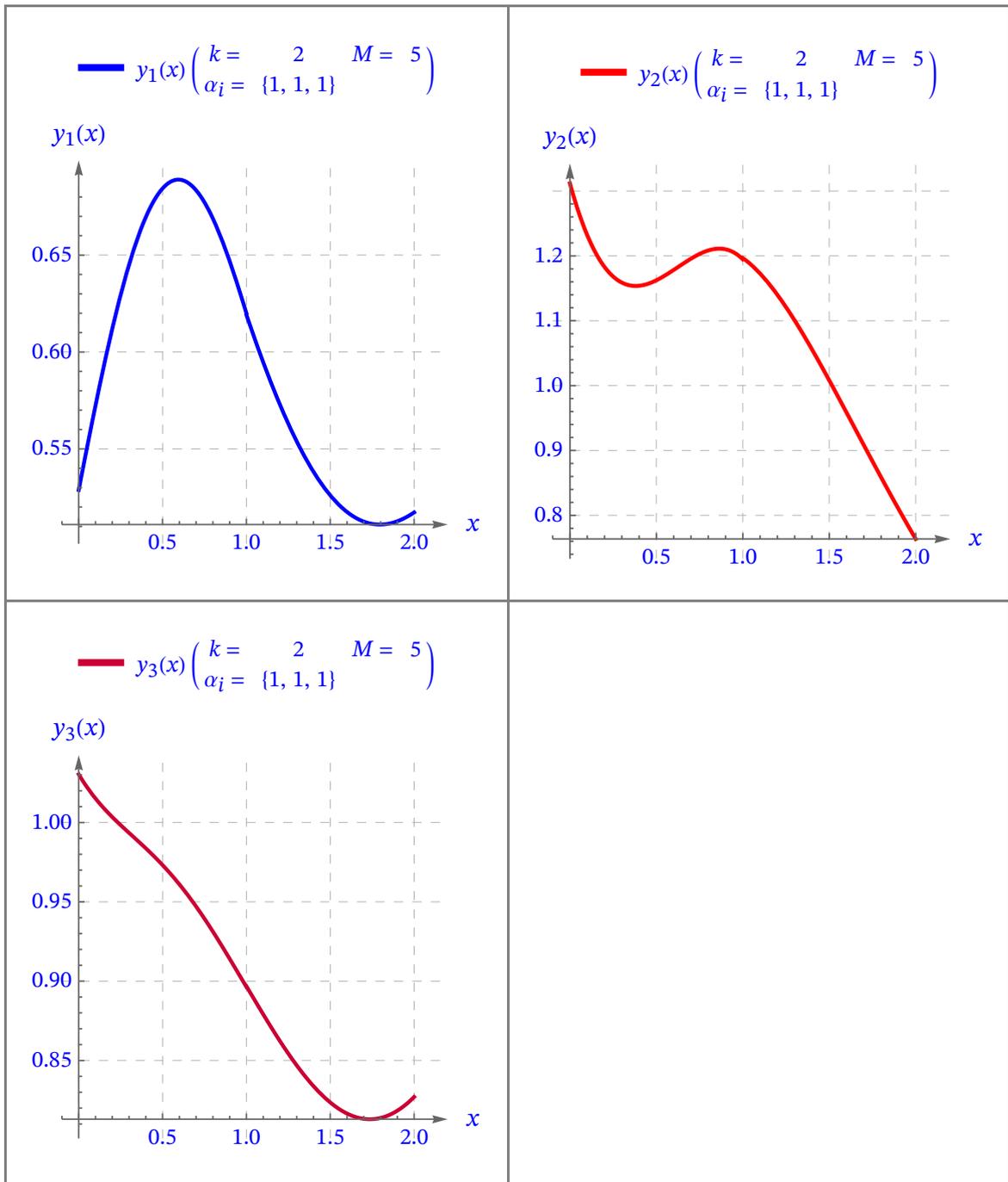


Figura 0.3. Resolución del Sistema Regulador de Glucosa-Insulina Fraccionario No Lineal con $k = 2$ y $M = 5$.

IV. CONCLUSIONES

1. El **Modelo Fraccionario con Retraso Glucosa-Insulina con Órdenes Incomensurables** presenta zonas de estabilidad cuando se utiliza un retardo dentro del intervalo $\tau < \tau_0$ y una zona de estabilidad y caos cuando el retardo supera el retardo crítico. Además la variación de los órdenes fraccionarios afecta al valor que toma ese τ_0 .
2. El **Modelo con Retraso Glucosa-Insulina con la Función de las Células β** introduce en el modelo la función de las células β . También aparece un retardo τ_0 que marcara las zonas de estabilidad del modelo: si el $\tau = \tau_0$ tendremos respuestas periódicas, si $\tau > \tau_0$ el sistema será asintóticamente inestable y si $\tau < \tau_0$ el sistema será asintóticamente estable
3. Finalmente, el **Método Wavelet de Bernoulli (BWM)** con $k = 2$ y $M = 5$ permite obtener una solución numéricamente aproximada para sistemas fraccionarios no lineales cuando los intervalos de tiempo no son muy grandes $[0, 2]$, en cambio cuando los intervalos pasan a tener mayor tamaño las gráficas comienzan a tener ciertas imprecisiones lo que hace pensar que necesitaríamos incrementar la k o la M .

V. FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN

Se reseñan algunas futuras y posibles líneas de investigación:

1. Expandir el *método de Bernoulli* a un intervalo generalizado $[0, T]$ debido a que las soluciones presentadas en este apartado de la presentación son todavía para intervalos de tiempo muy pequeños (unos 6 minutos) y las soluciones no son tan precisas como las obtenidas en el *método de Adams-Bashforth-Moulton*.
2. Estudiar el efecto que tendrían la variación de los órdenes fraccionarios en los modelos de interacción de Glucosa-Insulina con el aporte también del efecto que tienen en el proceso las células β .
3. Parametrizar todas las constantes de los modelos para que el análisis de la interacción entre la glucosa y la insulina pueda ser consultado y estudiado en el campo de la medicina.
4. Explorar los resultados que nos pudiesen dar otros métodos Wavelets para comparar la precisión de las soluciones obtenidas, como el *Método Wavelet de Legendre* o el *Método Wavelet de Haar*.
5. A parte de los *Sistemas Diferenciales Fraccionarios con Retraso (SFDDE)* investigar sobre la posibilidad de realizar nuevos modelos reguladores utilizando ecuaciones diferenciales parciales y sus técnicas de resolución

ANALYSIS AND RESOLUTION OF NEW DYNAMIC MODELS OF GLUCOSE-INSULIN AND FRACTIONAL-ORDER DELAYED β CELLS

Abstract

Author: Martínez de la Riva Muínelo, Alberto.

Director: Rodríguez Gómez, Fco. Javier; Rodríguez Gómez, Alberto

Collaborative Entity: ICAI – Universidad Pontificia Comillas.

PROYECT SUMMARY

I. Introduction and Objectives

Diabetes is a disease whose numbers have not stopped growing in recent years. Despite being a disease whose knowledge and diagnosis dates back even before the Christian era, it still has no cure, and in Spain alone affects more than 5 million people a year.

With the completion of this work we intend to help experts to better understand the behavior and the way in which insulin and glucose interact, and thus help in the possible diagnosis of a treatment to eradicate the disease.

The main objective of the work is to present a study, extensive analysis and development of new dynamic models of glucose-insulin (MDGI) and beta cells that provide insight into blood glucose concentrations, insulin concentrations and healthy beta cells. For this purpose, a description of the new mathematical models with time delay, an analysis of the stability of the equilibrium points and the study of a possible Hopf bifurcation for the models will be made. Finally, the relevant numerical simulations of the numerical models will be performed with MATHEMATICA software.

Thus, the following objectives will be presented in order to successfully develop the project:

1. A chapter that will focus on the correct presentation of Fractional Order Differential Equations (Systems of Fractional Delay Differential Equations "Dash" SFD-DEs), the basis around which the whole project will be developed. For this purpose, we will explain what it consists of and the different definitions from which all its properties and applications are developed. The most important properties will also be explained.
 2. The second objective will be to correctly describe the Bernouilli Wavelet method and the Adams-Bahsforth-Moulton method, which will be the main numerical methods used to solve the fractional models with their different variations.
 3. The third objective will be to present the different fractional order models of glucose-insulin interaction that will be solved with the numerical methods that will be presented later.
 4. A practical application will be designed in Mathematica language that implements the numerical algorithms described with the Wavelet and Adams-Bahsforth-Moulton techniques or methods, solving the proposed models.
 5. Once the results of the implementation are obtained, the different methods will be compared using both numbers and 2D and 3D tables and graphs. It will be concluded which one or ones are the most optimal in terms of accuracy and complexity.
-

6. Finally, future lines of development and next steps in this field of research will be discussed.

Keywords: Fractional Differential Equations with delay, numerical methods, diabetes, Wavelet Transform, Bernoulli Wavelet Methods, glucose, insulin, stability analysis.

II. Methodology

The development of the Project will proceed as follows:

- **A)** In one chapter a study of the differential equations of fractional order will be carried out. For this purpose, the different operations of fractional calculus, integral and Riemann-Liouville derivative, the Caputo derivative, as well as all its most important properties will be studied.
- **B)** In the second chapter, the proposed numerical methods will be studied and the proposed problems will be solved using these algorithms.
- **C)** In a third chapter, the different fractional models of insulin glucose will be introduced, showing their different solutions and analyzing these results.
- **D)** Finally, the results obtained and the critical frequency calculation experiments will be presented.

III. RESULTS

Among the various results obtained throughout this work, it is possible to present in this introductory part, the results obtained in different cases for the 3 models studied:

1. The first model to be studied is known as the *Glucose-Insulin Interaction Model with incommensurable orders* [LEKD19] and its main results as well as its graphical resolution with the Adams-Bashforth-Moulton method are presented below.

■ Let be the system of fractional differential equations with delay SFDDE representing the glucose-insulin interaction model with incommensurable orders:

$$(P) \equiv \begin{cases} D^{(\alpha_1)} y_1(x) = -b_1 y_1(x) - \frac{b_3 y_1(x) y_2(x)}{b_4 y_1(x)+1} + b_6 & x \in (0, T), 0 < \alpha \leq 1 \\ D^{(\alpha_2)} y_2(x) = -b_2 y_2(x) + b_5 y_1(x - \tau) & \tau \geq 0 \\ y(x) = \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 87 \\ 60 \end{pmatrix} & x \in [-\tau, 0] \\ y(0) = \begin{pmatrix} G_0 \\ I_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 87 \\ 60 \end{pmatrix} \end{cases}$$

The equilibrium point $(G^*, I^*) = (y_1^*, y_2^*)$, the bifurcation points τ_0 and the angular velocity ω_0 as well as the numerical solutions and their representation for the stable case $\tau < \tau_0$ and unstable case $\tau > \tau_0$.

α_1	α_2	G^*	I^*	ω_0	τ_0
1	1	650.59	381.49	0.002825	607.92
0.92	0.92	722.65	359.08	0.001382	1365.60
0.92	0.95	686.41	362.92	0.001469	1285.91
0.92	0.72	1018.09	334.39	0.000903	2089.43

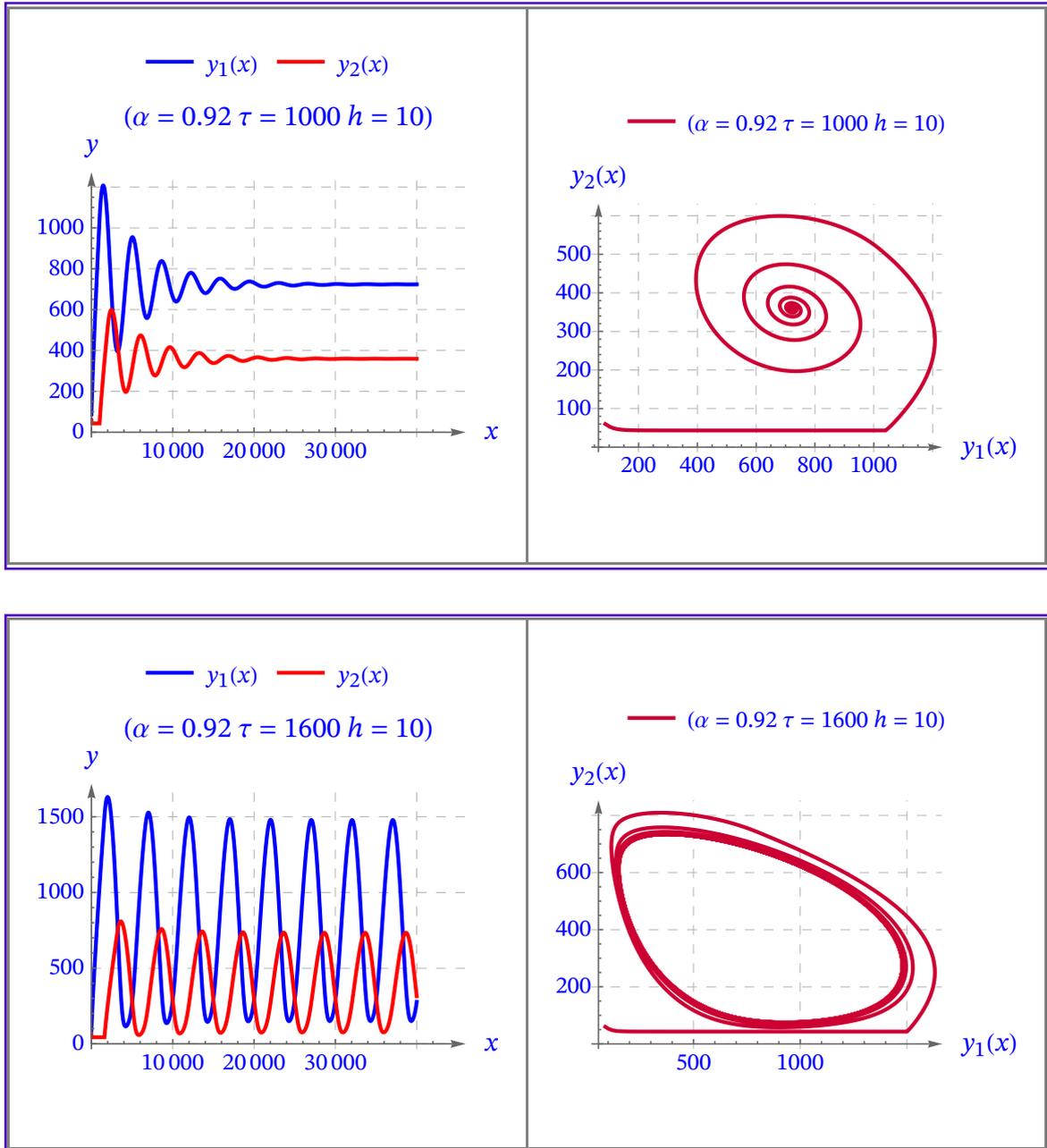


Figura 0.1. Resolution of the glucose-insulin interaction model with incommensurable orders with fractional orders $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.92$.

■ Indication:

- (i) The positive equilibrium point (G^*, I^*) is asymptotically stable when $\tau = 1000 < \tau_0 = 1365.60$.
- (ii) The positive equilibrium point (G^*, I^*) is unstable for $\tau = 1600 > \tau_0 = 1365.60$ and a Hopf bifurcation occurs at the equilibrium point.

2. The second model to be studied is known as *the Glucose-Insulin Delay Model with the β Cell Function* [ALHU20] and its main results as well as the graphical resolution of the periodic response case of the system solved with the Adams-Bashforth-Moulton method are presented below:

■

Be the regulatory model Glucose-Insulin with Time Delay:

$$(P) \equiv \begin{cases} D^{(\alpha_1)} y_1(x) = r_1 y_2(x - \tau_g) y_3(x - \tau_g) - r_2 y_1(x) - r_3 y_1(x) y_2(x) & x \in (0, T) \\ \quad + c_1 y_3(x - \tau_g) \\ D^{(\alpha_2)} y_2(x) = \frac{R_3 N}{y_3(t)} - R_4 y_1(x - \tau_i) + c_2 \\ D^{(\alpha_3)} y_3(x) = R_5 (y_2(x) - \hat{y})(T - y_3(x)) + R_6 y_3(x)(T - y_3(x)) \\ \quad - R_7 y_3(x) \end{cases}$$

with the parameters expressed in the following table:

r_1	r_2	r_3	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7	c_1	c_2	\hat{y}	T	N
0.472	0.2275	0.025	0.82	0.6	0.3	0.3	0.2	0.1	0.8	1.42	1.5	1.27

The characteristic equation of the system follow the following expression:

$$P(\lambda) \equiv a_3 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 + \underbrace{(a_4 \lambda + a_5)}_{a_{e1}} e^{-\lambda \tau_i} + \underbrace{(a_6 \lambda + a_7)}_{a_{e2}} e^{-\lambda(\tau_g + \tau_i)} = 0$$

and the equation that sets the pair of pure complex roots $\lambda = \pm i \beta$ for some delay τ is $\psi(\beta) = 0$:

$$\psi(\beta) \equiv \beta^6 + (a_2^2 - 2 a_1) \beta^4 + \beta^2 (-2 a_4 a_6 \cos(\beta \tau_g) + a_1^2 - a_4^2 - a_6^2 - 2 a_0 a_2) - 2 (a_5 a_6 - a_4 a_7) \beta \sin(\beta \tau_g) - 2 a_5 a_7 \cos(\beta \tau_g) + a_0^2 - a_5^2 - a_7^2 = 0$$

being the a_i coefficients indicated in the following Table:

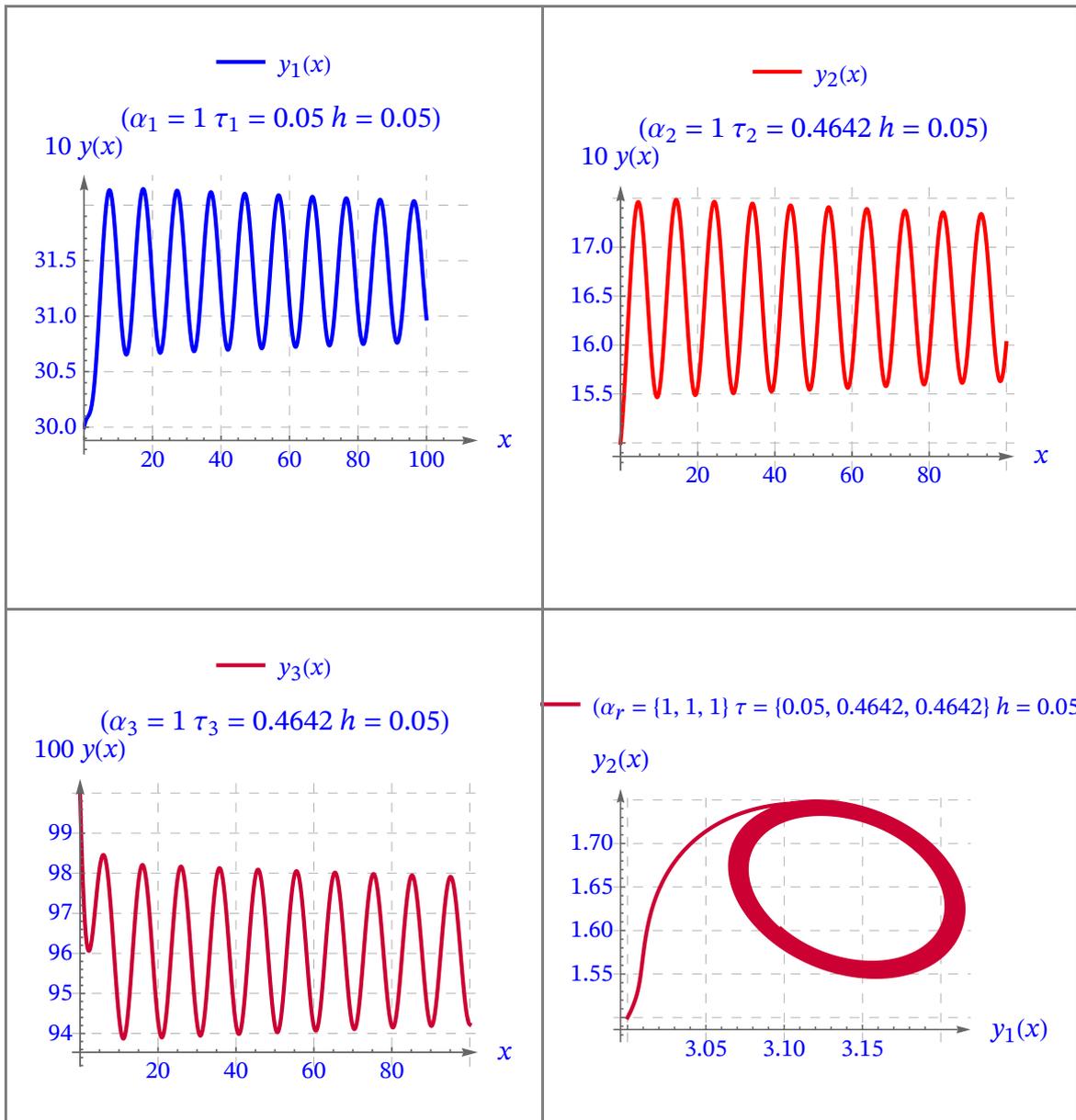
a_i	Model coefficients
a_3	1
a_2	$r_3 (y_2)^* + r_2 - R_6 T_1 - R_5 \hat{y} + R_5 (y_2)^* + 2 R_6 (y_3)^* + R_7$
a_1	$\frac{N_1 R_3 R_5 (T_1 - (y_3)^*)}{((y_3)^*)^2} + (r_3 (y_2)^* + r_2) (-R_6 T_1 + R_5 (-\hat{y}) + R_5 (y_2)^* + 2 R_6 (y_3)^* + R_7)$
a_0	$\frac{N_1 R_3 R_5 (r_3 (y_2)^* + r_2) (T_1 - (y_3)^*)}{((y_3)^*)^2}$
a_4	$-r_3 R_4 (y_1)^*$
a_5	$r_3 R_4 (y_1)^* (R_6 T_1 + R_5 \hat{y} - R_5 (y_2)^* - 2 R_6 (y_3)^* - R_7)$
a_6	$r_1 R_4 (y_3)^*$
a_7	$R_4 (c_1 R_5 (T_1 - (y_3)^*) + r_1 ((y_3)^* (R_7 - R_6 (T_1 - 2 (y_3)^*)) + R_5 (T_1 (y_2)^* - \hat{y} (y_3)^*)))$

(a) Determine the equation $\psi(\beta) = 0$ for the delays $(\tau_i, \tau_g) = (0.05, 0.4642)$ and find the root β_k , checking that it coincides with the modulus of the pure complex roots $\lambda = \pm i \beta$.

τ_i	τ_g	λ_1	λ_2	λ_3
0.05	0.35	-0.5300075	$-0.01589055 + 0.6417439 i$	$-0.01589055 - 0.6417439 i$
0.05	0.4	-0.5323045	$-0.008819797 + 0.6387846 i$	$-0.008819797 - 0.6387846 i$
0.05	0.464	-0.5352581	$-0.00003173886 + 0.6346646 i$	$-0.00003173886 - 0.6346646 i$
0.05	0.4642	-0.5352674	$0.6346512 i$	$-0.6346512 i$
0.05	0.5	-0.5369259	$0.004774346 + 0.6321953 i$	$0.004774346 - 0.6321953 i$
0.05	0.6	-0.5415806	$0.01757635 + 0.6248250 i$	$0.01757635 - 0.6248250 i$

$\tau_0 = 0.4642.$

$\beta = 0.6346.$



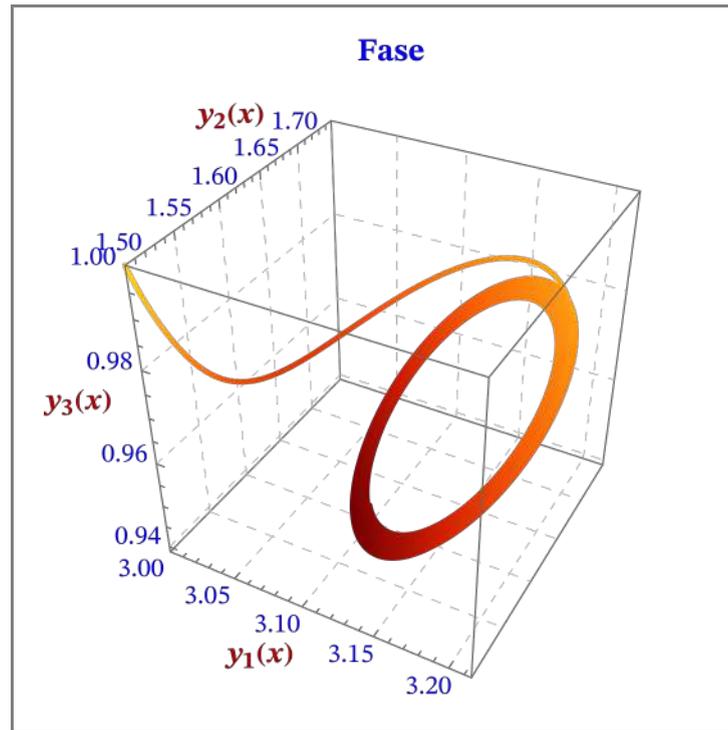


Figura 0.2. Resolution of the Glucose-Insulin Delay Model with the Function of β Cells when their $\tau_g = \tau_0$

3. The third model to be studied is known as *the Fractional Nonlinear Fractional Insulin Glucose Regulatory System* [AGRA22] and its graphical solution is presented using Bernoulli's Wavelet method:

■

Let be the system of differential equations with delay SFDDE representing the nonlinear fractional Glucose-Insulin regulatory model:

$(P_1) \equiv$

$$\begin{cases} D^{(\alpha_1)} y_1(x) = -r_1 y_1(x) + r_2 y_1(x) y_2(x) + r_3 y_2(x)^2 + r_4 y_2(x)^3 + r_5 y_3(x) + r_6 y_3(x)^2 + r_7 y_3(x)^3 + r_{20} & x \in (0, T) \\ D^{(\alpha_2)} y_2(x) = -r_8 y_1(x) y_2(x) - r_9 y_1(x)^2 - r_{10} y_1(x)^3 + r_{11} y_2(x) (1 - y_2(x)) - r_{12} y_3(x) - r_{13} y_3(x)^2 - r_{14} y_3(x)^3 + r_{21} \\ D^{(\alpha_3)} y_3(x) = r_{15} y_2(x) + r_{16} y_2(x)^2 + r_{17} y_2(x)^3 - r_{18} y_3(x) - r_{19} y_2(x) y_3(x) \\ \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ y_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.53 \\ 1.31 \\ 1.03 \end{pmatrix} & x = 0 \end{cases}$$

i) Plot the solution of the Wavelet BWM method on the same graph in the interval $[0, T]$.

$$(a) \begin{cases} k = 2 & M = 5 \\ \alpha_i = (1 \ 1 \ 1) & \tau_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{cases} \quad [0, T] = [0, 2].$$

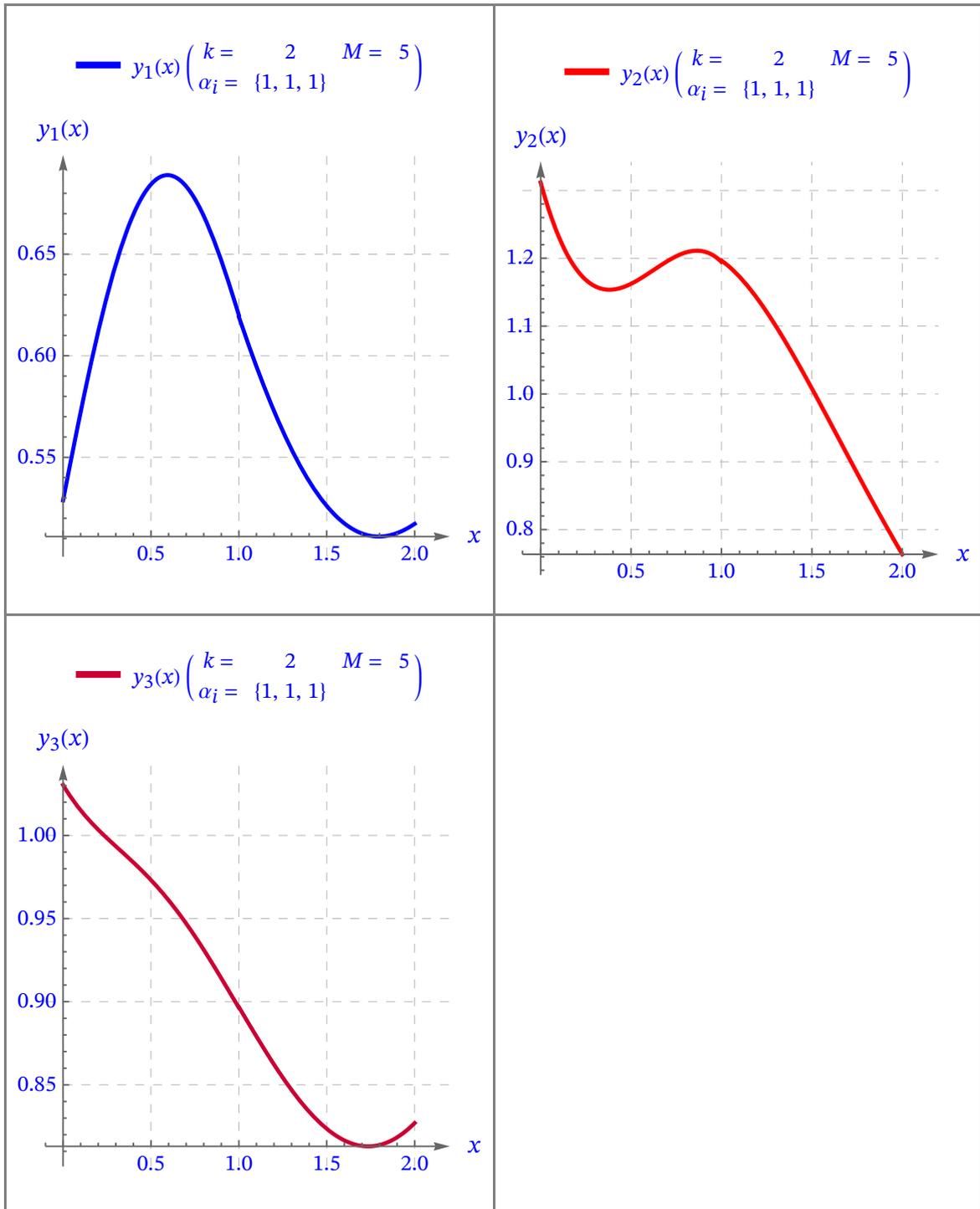


Figure 0.3. Resolution of the Non-Linear Fractional Insulin Fractional Glucose Regulatory System with $k = 2$ and $M = 5$.

IV. Conclusion

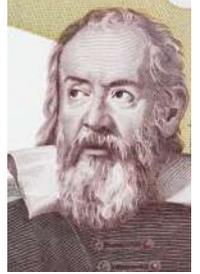
1. The ***Fractional Model with Delayed Glucose-Insulin with Incommensurable Orders*** exhibits zones of stability when a delay within the interval $[0, \tau_0)$ is used and a zone of stability and chaos when the delay exceeds the critical delay. In addition, the variation of the fractional orders affects the value that τ_0 takes.
2. The ***Glucose-Insulin Delay Model with β Cell Function*** introduces the function of beta cells into the model. There is also a delay τ_0 that will mark the stability zones of the model: if $\tau = \tau_0$ we will have periodic responses, if $\tau > \tau_0$ the system will be asymptotically unstable and if $\tau < \tau_0$, the system will be asymptotically stable.
3. Finally, the Bernoulli Wavelet Method (BWM) with $k = 2$ and $M = 5$ allows us to obtain a numerically approximate solution for nonlinear fractional systems when the time intervals are not very large $[0, 2]$, but when the intervals become larger, the graphs begin to have certain inaccuracies, which suggests that we would need to increase k or M .

V. Future Scope

Some future and possible lines of research are outlined:

1. Expand the Bernoulli method to a generalised interval $[0, T]$ because the solutions presented in this section of the presentation are still for very small time intervals (about 6 minutes) and the solutions are not as accurate as those obtained in the Adams-Bashforth-Moulton method.
 2. To study the effect of fractional order variation on the Glucose-Insulin interaction models with the contribution also of the effect that Beta cells have on the process.
 3. Parameterise all the constants of the models so that the analysis of the interaction between glucose and insulin can be consulted and studied in the medical field.
 4. Explore the results that other Wavelet methods could give us to compare the accuracy of the solutions obtained, such as Legendre's Wavelet Method or Haar's Wavelet Method.
 5. Apart from Fractional Delayed Differential Systems (FDDS) investigate the possibility of new regulatory models using partial differential equations and their solution techniques.
-

“Las matemáticas son el idioma que usó Dios para describir el mundo”



Galileo Galilei.

Agradecimientos

A toda mi familia, sobre todo mi madre, a mi padre y hermano, por ser mi gran apoyo durante mis duros pero reconfortantes años de carrera y a mi tío Fernando por enseñarme lo bonita que era la ingeniería y darme la motivación necesaria para estudiarla.

A mis tutores, D. Fco. Javier Rodríguez Gómez, y D. Alberto Rodríguez Gómez por introducirme a este mundo desconocido que es el cálculo fraccionario y por enseñarme que los ingenieros también podemos poner nuestro granito de arena en la medicina.

Aunque lo mejor todavía esta por llegar...

Organización del Proyecto

El presente Proyecto está dividido en varios capítulos cuyo contenido se detalla a continuación.

I. Memoria

- **Capítulo 1.** Se realiza una introducción del trabajo, marcando los objetivos principales una descripción de los contenidos y herramientas necesarias para realizar el trabajo, además de los objetivos de desarrollo sostenible.
- **Capítulo 2.** Se detallan los operadores y las propiedades principales del cálculo fraccionario así como la definición de los sistemas diferenciales fraccionarios, y los sistemas diferenciales fraccionarios con retraso.
- **Capítulo 3.** se explican los dos principales algoritmos que resolverán los modelos matemáticos estudiados: en un primer lugar el algoritmo de *Adams-Bashforth-Moulton*, y el segundo lugar el método *Wavelet* de Bernoulli en el intervalo $[0, 1)$ y el intervalo $[0, T]$.
- **Capítulo 4.** Se desarrollarán los modelos matemáticos fraccionarios relacionados con la interacción de la glucosa y la insulina y se realizará un estudio exhaustivo de sus propiedades, características análisis de estabilidad etc.
- **Capítulo 5.** Se realizan unas conclusiones finales aportando los resultados más relevantes así como las futuras líneas de investigación.

Análisis y Resolución de Nuevos Modelos Dinámicos Glucosa– Insulina y Células β de Orden Fraccionario con Retraso

Índice

Capítulo 1	1
1. Introducción	1
1.1. Introducción	1
1.2. Motivación	1
1.3. Objetivos	1
1.4. Metodología	2
1.4.1. Plan de Trabajo	3
1.5. Recursos	3
1.6. Estado del Arte	3
1.6.1. Modelos Matemáticos sobre la Insulina–Glucosa	3
1.6.2. Modelos Matemáticos de Orden Fraccionario para la Interacción de la Insulina–Glucosa	7
1.6.3. Modelos Matemáticos de Orden Fraccionario con Retraso para la Interacción de la Insulina–Glucosa	9
1.7. Alineación con los Objetivos de Desarrollo Sostenible (ODS)	12
Capítulo 2	15
2. Ecuaciones Diferenciales de Orden Fraccionario	15
2.1. Definiciones del Cálculo Fraccionario	15
2.1.1. Integral Fraccionaria de Orden α	18
2.1.2. Derivada Fraccionaria de Riemann–Liouville	19
2.1.3. Derivada Fraccionaria de Caputo	20
2.1.4. Definición de Grünwald–Letnikov	21
2.2. Propiedades del Cálculo Fraccionario	23
2.2.1. Propiedades del Operador de Riemann–Liouville	24
2.2.2. Propiedades de la Derivada Fraccionaria	24
2.2.3. Ecuaciones Diferenciales de Orden Fraccionario	25
Capítulo 3	27
3. Método Wavelet de Bernoulli SEDR Fraccionarias	27
3.1. Introducción	27

3.2. Introducción a las Wavelets	27
3.2.1. Wavelets de Bernoulli	28
3.2.2. Polinomios de Bernoulli	31
3.2.3. Análisis de Convergencia y Cotas del Error	41
3.3. Matrices Operativas y de Transformación	42
3.3.1. Matriz Operacional Integral Fraccionaria Riemann–Liouville de Orden α	42
3.4. Método Wavelet de Bernoulli para Ecuaciones Diferenciales con Retraso Fraccionarias	59
3.4.1. Sistemas de Ecuaciones Diferenciales con Retraso Fraccionarias (SFDDE)	59
3.5. Método Numérico Adams–Bashforth–Moulton	65
3.5.1. Método Adams–Bashforth–Moulton para Ecuaciones FDDE	65
3.5.2. Método Adams–Bashforth–Moulton para Sistemas FDDE (SFDDE)	67
Capítulo 4	69
4. Modelos Fraccionarios de la Interacción Glucosa-Insulina ..	69
4.1. Modelo Fraccionario con Retraso Glucosa–Insulina con Órdenes Incomensurables	69
4.1.1. Descripción del Modelo de Orden Fraccionario	70
4.1.2. Soluciones no Negativas y Limitadas	71
4.1.3. Resultados Principales	72
4.1.4. Resultados Numéricos y Simulación	73
4.1.5. Resultados Numéricos	74
4.2. Modelo con Retardo Glucosa–Insulina con la Función de las Células β ..	89
4.2.1. Modelo Matemático	89
4.2.2. Análisis de Estabilidad y Análisis de Bifurcación	91
4.2.3. Resultados Numéricos	102
4.3. Sistema Regulador de Glucosa–Insulina Fraccionario No Lineal	117
4.3.1. Descripción del Modelo de Orden Fraccionario	117
4.3.2. Análisis de Estabilidad y Análisis de Bifurcación	118
4.3.3. Resultados Numéricos	121
Capítulo 5	143
5. Conclusiones y Líneas Futuras de Investigación	143
5.1. Conclusiones	143
5.2. Líneas Futuras de Investigación	145
Lista de Acrónimos	149
Bibliografía	151
Referencias Bibliográficas	151

Índice de Figuras

Índice de Tablas

Capítulo 1

1. Introducción

1.1. Introducción

La diabetes ha sido una enfermedad que ha afectado a millones de personas a lo largo de la humanidad. Esta enfermedad era conocida incluso antes de la edad cristiana, ya que en manuscritos como el descubierto por Ebers en Egipto datado del siglo XV AC, ya se habla de enfermedades con síntomas que cuadran con los de la diabetes. Recordemos que esta es una enfermedad para la que, a pesar de todos los esfuerzos realizados, todavía no se ha conseguido descubrir una cura, por lo que los pacientes que la sufren, se tienen que tratar durante toda su vida. Solo en España, la diabetes afecta a más de 5 millones de personas, incrementándose esta cifra alrededor de 400.000 personas por año, y se llega a alcanzar las 25.000 fallecimientos a causa de esta enfermedad.

Es por esto que durante este trabajo se procederá a realizar un análisis y resolución de los modelos dinámicos Glucosa-Insulina y células β de orden fraccionario con retraso, para tratar de ayudar a tratar esta enfermedad que tantas personas sufren en el mundo. Para ello, es necesario estudiar y comprender las diferentes herramientas que nos proporciona el cálculo fraccionario, que resultarán vitales para realizar con éxito el trabajo. Además se hará uso de diferentes métodos de resolución para solucionar los problemas propuestos.

1.2. Motivación

Debido al descuido generalizado que se ha producido en la alimentación por parte de la población mundial a lo largo de estos últimos años, los casos de diabetes no han parado de crecer, y la necesidad de encontrar una solución a esta enfermedad parece más urgente que nunca

Por ello el análisis y el estudio de los modelos dinámicos de Glucosa-Insulina en la sangre pretenden ayudar a intentar encontrar una cura o al menos prevenir la aparición de esta enfermedad.

1.3. Objetivos

El objetivo principal del trabajo es presentar un estudio, análisis extenso y desarrollo de los nuevos modelos dinámicos de glucosa-insulina (MDGI) y células β que permiten conocer las concentraciones de glucosa en sangre, de insulina y las células β sanas. Para ello, se hará una descripción de los nuevos modelos matemáticos con retraso del tiempo, un análisis de la estabilidad de los puntos de equilibrio y el estudio de una posible bifurcación de Hopf para los modelos. y por último se realizarán las simulaciones numéricas pertinentes de los modelos numéricos con el software MATHEMATICA.

Así pues, se presentarán los siguientes objetivos para poder desarrollar el proyecto con éxito:

1. Un capítulo que se centrará en presentar correctamente *las ecuaciones diferenciales de Orden Fraccionario (Systems of Fractional Delay Differential Equations–SFDDs)*, base en torno a la cual se desarrollará todo el proyecto. Para ello se explicará en qué consiste y las diferentes definiciones a partir de las cuales se desarrollan todas sus propiedades y aplicaciones. También se explicarán las propiedades más importantes, [CHEN22], [MUNO20].
2. El segundo objetivo será describir correctamente el método *Wavelet de Bernouilli* y el método de *Adams -Bahsforth-Moulton* que serán los principales métodos numéricos con los que se resolverán los modelos fraccionarios con sus diferentes variaciones [LEKD19], [RAHI17].
3. El tercer objetivo será presentar los diferentes modelos de orden fraccionario de interacción glucosa–insulina que se resolverán con los métodos numéricos que se presentarán más adelante [LEKD19], [ALSH21], [FERN22], y [ALHU20].
4. Se diseñará una aplicación práctica en el lenguaje *Mathematica/MATLAB* que implemente los algoritmos numéricos descritos con las técnicas o métodos *Wavelet y Adams-Bahsforth-Moulton*, resolviendo los modelos propuestos.
5. Una vez obtenidos los resultados de la implementación, se compararán los distintos métodos utilizando tanto los números como tablas y gráficos 2D y 3D. Se concluirá cuál o cuales son los más óptimos en función de la precisión y la complejidad.
6. Finalmente, se analizarán líneas de desarrollo futuras y cuáles serán los próximos pasos a seguir en este campo de investigación.

1.4. Metodología

En el desarrollo del Proyecto se procederá de la siguiente manera:

- **A)** En un capítulo se llevará a cabo un estudio de las ecuaciones diferenciales de orden fraccionario. Para ello, se estudiarán las diferentes operaciones del cálculo fraccionario, integral y derivada de Riemann-Liouville, la derivada de Caputo, además de todas sus propiedades más importantes.
- **B)** En el segundo capítulo, se estudiarán los métodos numéricos *Wavelet* propuestos y se resolverán los problemas propuestos utilizando dichos algoritmos.
- **C)** En un tercer capítulo, se introducirán los diferentes modelos fraccionarios de glucosa insulina dando a conocer sus diferentes soluciones y analizando dichos resultados.
- **D)** Por ultimo, se expondrán los resultados obtenidos y se expondrán los experimentos del cálculo de la frecuencia critica.

1.4.1. Plan de Trabajo

El desarrollo de este proyecto se ajustará al cronograma mostrado en la Figura 1.1, donde se detallan las actividades a realizar y los tiempos a emplear.



Figura 1.1. Cronograma orientativo del TFG.

1.5. Recursos

Se citan los diferentes recursos a emplear en la realización del presente Proyecto/Trabajo:

- Procesador de textos Microsoft Office 2022®.
- Procesador científico del software *Mathematica* 13®.
- Software simbólico y numérico:
Mathematica 13® y *MATLAB* 2022®.
- Software para la creación de gráficos, esquemas, y organigramas: *PowerPoint* 2022®.

1.6. Estado del Arte

En el estado del arte se describen los trabajos e investigaciones realizadas por otros autores sobre el tema objeto de estudio: modelos matemáticos que analizan la dinámica Glucosa–Insulina aplicando diferentes técnicas matemáticas y numéricas para la resolución del tipo de ecuaciones diferenciales propuestos.

1.6.1. Modelos Matemáticos sobre la Insulina–Glucosa

A lo largo de la historia, un gran número de matemáticos, han tratado de describir la relación que existe entre la insulina y la glucosa en los seres humanos. Para ello se realizaron diferentes modelos matemáticos que se limitaban al uso de operaciones integrales ordinarias y de ecuaciones diferenciales con retraso. De todos ellos el más usado a lo largo de estos años es el conocido como el modelo mínimo. Propuesto por Bergman en 1981 [BERG81], el modelo estimaba la sensibilidad de la insulina y la respuesta pancreática a la glucosa en los seres humanos.

Este modelo fue modificado por Gaetano y Arino [GAET00] que incorporaron las dinámicas de la insulina. El modelo modificado se basa en las siguientes tres variables: $G(t)$ que representa la concentración de la glucosa en el plasma con respecto al tiempo t , $I(t)$ que representa la concentración de la insulina en el tiempo t , y $X(t)$ que es una función auxiliar que describe el tejido excitable de la insulina debido a la actividad de la glucosa. Así, el

modelo queda presentado como sigue:

$$\begin{aligned}
 \frac{dG(t)}{dt} &= -(p_1 + X(t)) G(t) + p_1 G_b \\
 \frac{dX(t)}{dt} &= -p_2 X(t) + p_3(I(t) - I_b) \\
 \frac{dI(t)}{dt} &= p_4(G(t) - p_5)^+ t - p_6(I(t) - I_b).
 \end{aligned}
 \tag{1.6.1}$$

con las condiciones iniciales $G(0) = p_0$, $X(0) = 0$, $I(0) = p_6 + I_b$. Además el término $(G(t) - p_5)^+$ será de la forma $(G(t) - p_5)$ siempre que $G(t) > p_5$, si no será 0.

Este modelo se modela para pacientes diabéticos tipo 1 (DT1) durante e layuno. En los gráficos realizados por Cristina Zamarrón en su trabajo de fin de máster [ZAMA20] se puede observar que cuando el paciente realiza una ingesta de comida, sin inyección de insulina previa, se produce un incremento de los niveles de glucosa en sangre, muy por encima de su nivel basal G_b . En cambio, al inyectar la dosis de insulina, se observa cómo se produce un aumento en los niveles de glucosa, pero el efecto de la insulina, hace que se sitúe por debajo del nivel basal y se regulen de forma gradual:

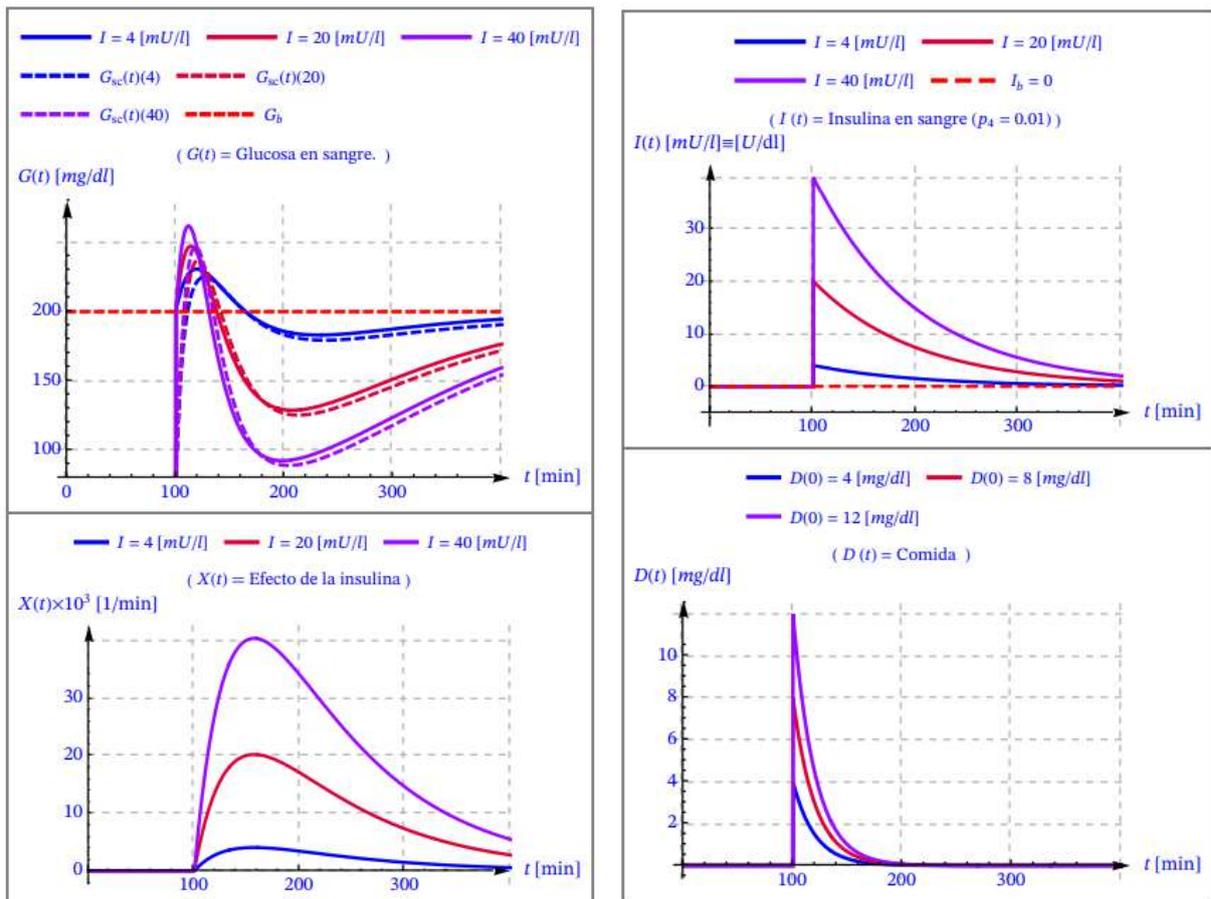


Figura 1.2. Modelo Modificado para pacientes DT1. Concentraciones de glucosa $G(t)$, $X(t)$, $I(t)$ con diferentes inyecciones de insulina $I(t)$ con $I_b = 0$ con ingesta de comida $D(t)$. [ZAMA20].

A pesar de ser el modelo más utilizado, el modelo mínimo presenta tres grandes inconvenientes: la primera gran desventaja del sistema es que no admite un punto de equilibrio y sus soluciones podrían no estar acotadas. Debido a que el modelo no puede realizar un proce-

so de ajuste de parámetros de un solo paso, se producen estimaciones erráticas de la sensibilidad a la insulina. Esta es la segunda gran desventaja del modelo. Por último, el modelo no tiene un tiempo de retardo que impida la acción de la insulina en la glucosa, pero si genera un retardo artificial con la variable $X(t)$. Para tratar de solucionar estos problemas los autores propusieron el modelo dinámico, de la forma:

$$\left| \begin{aligned} \frac{dG(t)}{dt} &= -b_1 G(t) - b_4 I(t) G(t) + b_7 \\ \frac{dI(t)}{dt} &= -b_2 I(t) + \frac{b_6}{b_5} \int_{t-b_5}^t \int G(s) ds \end{aligned} \right. \quad (1.6.2)$$

Que sigue presentando la hipótesis fisiológica mostrada en el modelo mínimo, es decir, la desaparición de la glucosa del plasma está explicado como un proceso de primer orden del ratio, que es dependiente e independiente de la concentración de insulina. Además las condiciones iniciales del modelo anterior son:

$$\left| \begin{aligned} G(0) &= G_b + b_0 & I(0) &= I_b + b_3 b_0 \\ G(t) &\equiv G_b & t &\in [b_5, 0). \end{aligned} \right. \quad (1.6.3)$$

Sin embargo, hay que resaltar que el modelo dinámico tiene en cuenta algunas asunciones que son poco realistas. Las más importantes son el término de interacción $b_4 I(t) G(t)$, que resulta ser demasiado restrictivo y se suele modificar por un término más general y realista $\frac{b_4 I(t) G(t)}{(\alpha G(t)+1)}$, donde el término $\frac{1}{\alpha}$ representa la constante media de saturación, y la manera en la que se presenta el tiempo de retraso que hay en el sistema. Por otra parte, este modelo es siempre asintóticamente estable.

Con el fin de poder incorporar ese retraso en el tiempo de manera realista, para que el modelo pueda tener regímenes permanentes positivos inestables que generen soluciones oscilatorias sostenibles, los científicos Li y Kuang [LI01] propusieron el modelo conocido como modelo conveniente, que es un caso especial de sus modelos diferenciales con retraso de la interacción entre la glucosa y la insulina, y que se presenta como sigue:

$$\left| \begin{aligned} \frac{dG(t)}{dt} &= -a_1 G(t) - \frac{a_3 I(t) G(t)}{(a_4 G(t) + 1)} + a_6 \\ \frac{dI(t)}{dt} &= -a_2 I(t) + a_5 G(t - \tau) \end{aligned} \right. \quad (1.6.4)$$

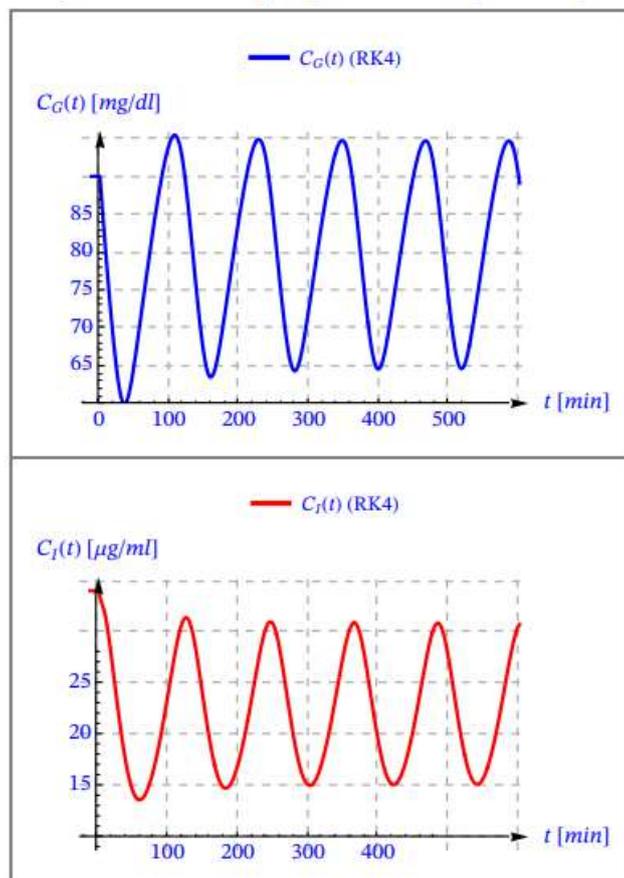
donde $\tau \geq 0$ y sus condiciones iniciales son $G(t) \equiv G_0$ para $t \in [-\tau, 0)$ e $I(0) = I_0$.

Este modelo consiste en dos ecuaciones diferenciales que describen la variación de la concentración de Glucosa en sangre $G(t)$ [mg/dl] y la concentración de insulina en sangre $I(t)$ [μ UI/ml] con sus diferentes parámetros explicados en la siguiente Tabla 1.1:

Tabla 1.1. Parámetros del Modelo DDE de un Retardo de Li y Kuang [LI01].

Parámetros	Descripción
a_1	Constante independiente de la insulina de la tasa de la absorción del tejido de la glucosa.
a_2	Tasa de desaparición aparente de primer orden constante para la insulina.
a_3	Constante midiendo el ratio de desaparición por unidad [pM] de la glucosa insulino – dependiente de la concentración de la insulina en el plasma.
a_4	Constante del grado de saturacion medio de la glucosa en el plasma
a_5	Tasa de liberación de insulina pancreática de segunda fase constante en mg / dl de la concentración media de glucosa plasmática a lo largo de los minutos previos
a_6	Tasa de aumento constante en la concentración de glucosa plasmática debido a la liberación constante de glucosa en el hígado de referencia
τ	Número de minutos del último período cuyas concentraciones de glucosa en plasma influyen en la secreción actual de insulina pancreática

Los resultados de este modelo fueron presentados en [ZAMA20] y se puede observar que las oscilaciones del modelo del sistema regulador de glucosa–insulina son auto–sostenidas, y que los efectos que la insulina genera en la glucosa se producen con un pequeño retraso en el tiempo.



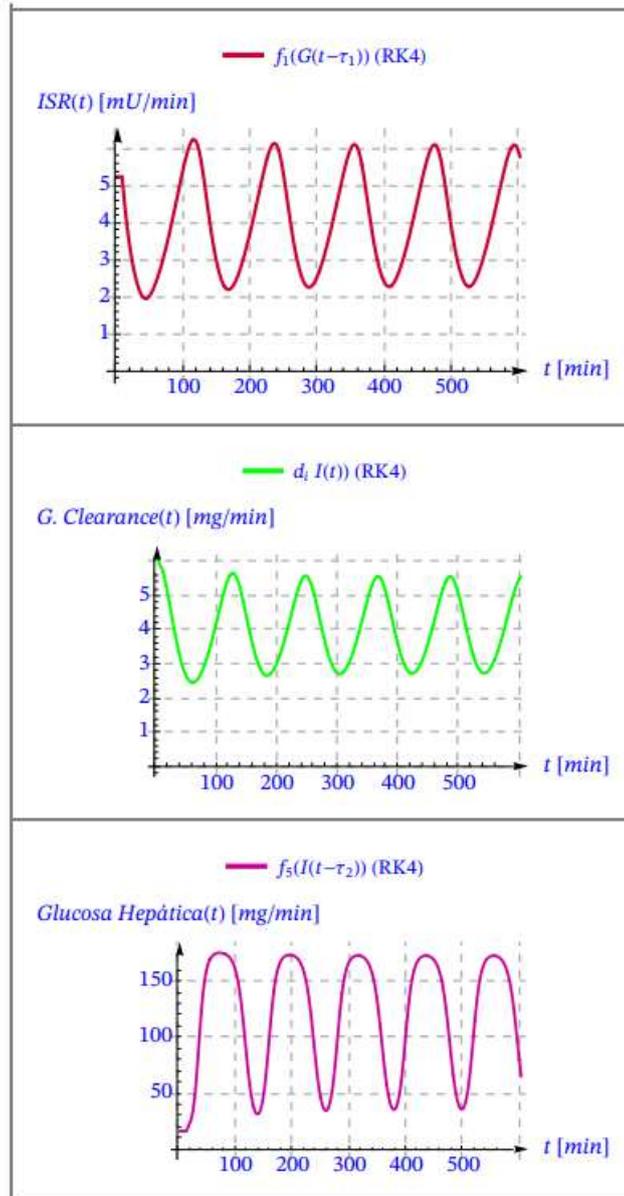


Figura 1.3. Concentración de Glucosa e Insulina, tasa de secreción de insulina (ISR), producción de glucosa hepática y aclaramiento de glucosa insulino dependiente. [ZAMA20].

1.6.2. Modelos Matemáticos de Orden Fraccionario para la Interacción de la Insulina–Glucosa

En los últimos años, el estudio del cálculo fraccionario, que son aplicados en modelos matemáticos con fenómenos complejos, han ido adquiriendo mayor protagonismo en el análisis de los sistemas de interacción de la glucosa y la insulina. Esto se debe a que, principalmente, muchos de los comportamientos de los sistemas biológicos tienen memoria o propiedades hereditarias, que se describen mejor con el uso de derivadas de orden fraccionario. Esto ha quedado demostrado en 2017, cuando un grupo de científicos verificó que los modelos deterministas de orden fraccionario proporcionaron mejores ajustes que los modelos de ecuaciones diferenciales de primer orden a los datos de monitoreo continuo de glucosa de sujetos con diabetes tipo 1 (DT1) [SAMO17].

Es por ello, que muchos matemáticos han adaptado los modelos diferenciales utilizados, a modelos diferenciales fraccionarios utilizando la derivada fraccionaria de Caputo. Por ejemplo, en el artículo [ALSH21] se presenta la forma fraccionaria del modelo mínimo modificado y se realiza un análisis de sus resultados numéricos. El modelo tiene la forma:

$$\begin{cases} D_t^\nu G(t) = -(p_1 + X(t)) G(t) + p_1 G_b & G(0) = p_0 \\ D_t^\nu X(t) = -p_2 X(t) + p_3 (I(t) - I_b) & X(0) = 0 \\ D_t^\nu I(t) = p_4(G(t) - p_5)^+ - p_6 (I(t) - I_b) & I(0) = p_7 + I_b \end{cases} \quad (1.6.5)$$

Además el término $(G(t) - p_5)^+$ será de la forma:

$$(G(t) - p_5)^+ = \begin{cases} G(t) - p_5 & G(t) > p_5 \\ 0 & G(t) \leq p_5 \end{cases} \quad (1.6.6)$$

En cuanto a los resultados numéricos, las resoluciones de la derivada fraccionaria de Caputo son simuladas utilizando el método de Adams–Bashforth–Moulton presentado en la publicación [DIET99] y los parámetros, presentados en la siguiente tabla, fueron obtenidos en [PACI86] utilizando el programa informático llamado MINMOD. El parámetro ν del modelo puede tomar los valores 0.7, 0.75, 0.85, 0.95 y 1.

Tabla 1.2. Parámetros y valores asociados del Modelo Mínimo Modificado Fraccionario [ALSH21].

Parámetros	Valor
p_1	0.03082
p_2	0.02093
p_3	1.062×10^{-5}
p_4	0.3
p_5	94
p_6	0.3349×10^{-2}
G_b	92
I_b	7.3

El comportamiento del modelo queda reflejado en las siguientes gráficas presentadas en [ALSH21] donde se observa el comportamiento de los datos experimentales con respecto a los resultados del modelo para la concentración de la glucosa y de la insulina en sangre. Se puede observar cómo la concentración de glucosa baja de una concentración de 287 (mg/dl) a la concentración deseada de 80 (mg/dl). Además, parece que la exactitud del modelo con respecto a los datos experimentales se incrementa cuanto más cercano a 1 sea el parámetro ν .

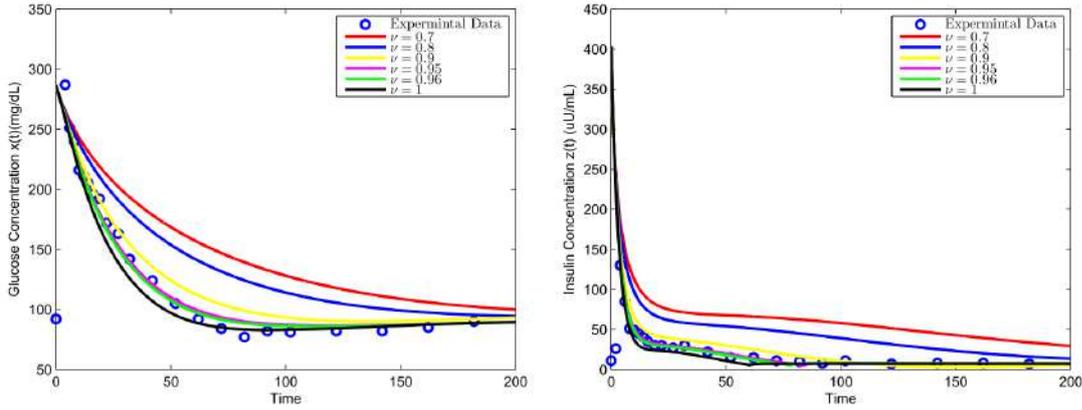


Figura 1.4. Concentración de Glucosa $G(t) \equiv x(t)$ e Insulina $I(t) \equiv z(t)$ para diferentes valores de ν . [ALSH21].

En este trabajo [ALSH21] ha quedado demostrado que el modelo fraccionario descrito presenta soluciones únicas, acotadas y no negativas. Además, como ya se demostraría en [SAKU17] el modelo fraccionario volvió a presentar mejores soluciones que el modelo integral.

1.6.3. Modelos Matemáticos de Orden Fraccionario con Retraso para la Interacción de la Insulina–Glucosa

Con el propósito de aumentar la precisión de los modelos y acercarse más a la manera en la que la enfermedad actúa sobre el nuestro organismo, se han propuesto modelos matemáticos con lapsos de tiempo que describen el control primario de la segregación de la insulina, y del metabolismo de la glucosa por las células β pancreáticas [FERN22].

En primer lugar 2018 el científico Shabestari [SHRA18] analizó el impacto que tenían diferentes retrasos de tiempo en el comportamiento de la insulina. A continuación se presenta una gráfica que muestra el impacto que tiene dicho retraso en el tiempo en la resolución de ecuaciones diferenciales con retraso. En esta gráfica la función ejemplo tiene la forma

$$X' = F(t, X(t), X(t - \tau)):$$

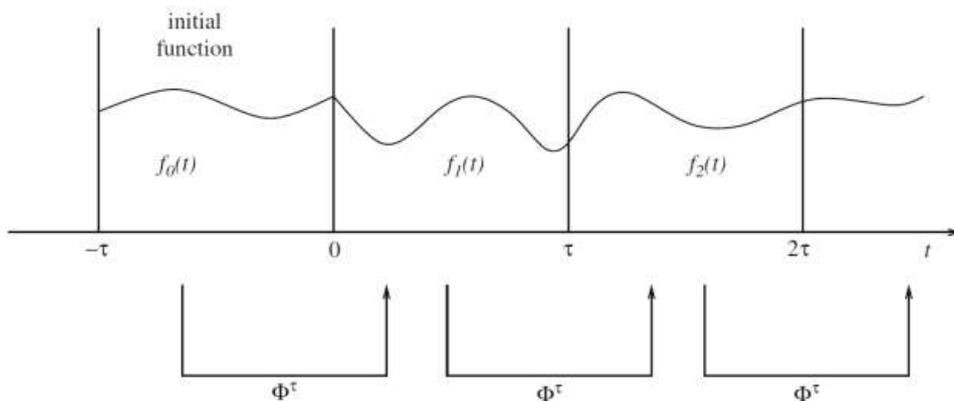


Figura 1.5. Implicación del retraso dependiente del tiempo en la solución de ecuaciones diferenciales con retraso (DDE) ([FERN22]).

Se puede observar que la solución se aproxima a la función inicial en lapsos de tiempo τ . Inspirándose en este hecho en 2018 se presentó el modelo integral de la forma [SHAB18]:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= r_1 y(t - \tau_g) z(t - \tau_g) - r_2 x + c_1 z(t - \tau_g) \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{R_3 N}{z} - R_4 x(t - \tau_i) + C_2 \\ \frac{dz}{dt} &= R_5(y - \hat{y})(T - z) + R_6 z(T - z) - R_7 z \end{aligned} \quad (1.6.7)$$

donde $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ e \hat{y} representan el nivel de insulina, el de glucosa, el número de células β y el metabolismo de la glucosa considerando su estado basal, respectivamente. Los parámetros, que serán explicados más adelante se exponen en la Tabla 1.3:

Tabla 1.3. Parámetros del sistema de orden fraccionario del sistema de regulación metabólica glucosa–insulina [FERN22].

Parámetro	Valor	Parámetro	Valor	Parámetro	Valor
r_1	0.472	r_2	0.25	R_3	0.82
R_4	0.6	R_5	0.3	R_6	0.3
R_7	0.2	\hat{y}	1.42	N	1.27
T	1.5	c_1	0.1	C_2	0.8

Debido a las ventajas que nos proporciona el cálculo fraccionario descritas anteriormente, en el artículo [FERN22] se deriva el modelo integral a un modelo fraccionario utilizando la derivada fraccionaria de Caputo, obteniendo:

$$\begin{aligned} {}^C D_t^q x(t) &= r_1 y(t - \tau_g) z(t - \tau_g) - r_2 x + c_1 z(t - \tau_g) \\ {}^C D_t^q y(t) &= \frac{R_3 N}{z} - R_4 x(t - \tau_i) + C_2 \\ {}^C D_t^q z(t) &= R_5(y - \hat{y})(T - z) + R_6 z(T - z) - R_7 z \end{aligned} \quad (1.6.8)$$

donde q representa el orden de la ecuación fraccionaria.

Para computar las soluciones del sistema, se ha aplicado el algoritmo numérico propuesto por [PETR11]. Una vez más tras un estudio exhaustivo de las diferentes soluciones, se ha probado que el cálculo fraccionario daba una mayor precisión que el cálculo diferencial ordinario.

El algoritmo propuesto por [PETR11] para calcular las soluciones del sistema del modelo fraccionario anterior, consiste en aplicar el método numérico que aproxima la solución numérica de la ecuación diferencial fraccionaria:

$${}_a D_t^q x(t) = f(x(t), t) \quad (1.6.9)$$

mediante la expresión

$$x(t_k) = f(x(t_{k-1}), t_{k-1}) h^q - \sum_{j=1}^k c_j^{(q)} x(t_{k-j}), \quad (1.6.10)$$

con $k = 1, 2, \dots, n$, siendo $n = \frac{T_f}{h}$ y h es el paso de tiempo, y $c_j^{(q)}$ son los coeficientes binomiales dados por

$$c_j^{(q)} = \left(1 - \frac{1-q}{j}\right) c_{j-1}^{(q)}. \quad (1.6.11)$$

Este enfoque se basa en el hecho de que para una amplia clase de funciones, las tres definiciones, de Caputo, Riemann-Liouville y Grünwald-Letnikov son equivalentes.

Con esta aproximación la solución numérica del sistema glucosa-insulina con retardo de tiempo de orden fraccionario aplicando este algoritmo se puede derivar mediante las ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_k &= (r_1 y_{k-1-m_1} z_{k-1-m_1} - r_2 x_{k-1} + c_1 z_{k-1-m_1}) h^q - \sum_{j=1}^k c_j^{(q)} x_{k-j}, \\ y_k &= \left(\frac{R_3 N}{z_{k-1}} - R_4 y_{k-1-m_2} + C_2\right) h^q - \sum_{j=1}^k c_j^{(q)} y_{k-j} \\ z_k &= (R_5(y_{k-1} - \hat{y})(T - z_{k-1}) + R_6 z_{k-1}(T - z_{k-1}) - R_7 z_{k-1}) h^q - \sum_{j=1}^k c_j^{(q)} z_{k-j} \end{aligned} \quad (1.6.12)$$

donde

$$m_1 = \frac{\tau_g}{h} \quad m_2 = \frac{\tau_i}{h} \in \mathbb{Z}^+.$$

Tomando los valores y las condiciones iniciales siguientes:

$$\begin{aligned} h &= 0.01 \quad q = 0.95 \\ \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 6.03 \\ 1.79 \\ 0.82 \end{pmatrix} \quad -\tau_g \leq t \leq 0 \end{aligned} \quad (1.6.13)$$

y los parámetros de la Tabla 1.3 el sistema de la dinámica glucosa-insulina con retraso en el tiempo y de orden fraccionario (1.6.8) conduce a un comportamiento de caos como se indica en la Figura 1.6, donde $[x, y, z]$ representan la glucosa, la insulina, y células β , respectivamente.

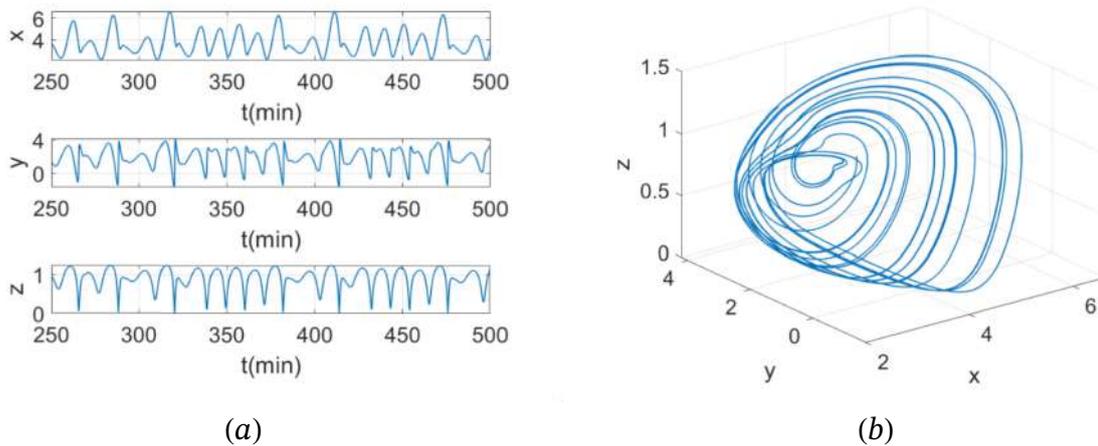


Figura 1.6. (a) Evolución temporal y (b) diagrama de fase del sistema glucosa-insulina con retardo de orden fraccionario ([FERN22]).

1.7. Alineación con los Objetivos de Desarrollo Sostenible (ODS)

A la hora de realizar este proyecto, se considerarán los diversos Objetivos de Desarrollo sostenible (ODS) donde no solo el análisis de modelos dinámicos de glucosa-insulina, si no las herramientas utilizadas para efectuarlo, pueden causar un mayor impacto. A continuación, se presenta una lista con los más representativos:

Salud y bienestar: evidentemente sólo con el análisis de los modelos dinámicos de la glucosa-insulina se puede ayudar con la búsqueda de una cura para la diabetes, enfermedad que a tanta gente afecta en el mundo a día de hoy. Además debido a la capacidad del cálculo fraccionario par reflejar características hereditarias, ayudará al futuro desarrollo de nuevos sistemas biológicos con estas características. Por ultimo el método *Wavelet* tiene un papel fundamental en el análisis de señales, como un electrocardiograma, o un electroencefalograma, ayudando a prevenir numerosas enfermedades.



Industria innovación e infraestructuras. A pesar de que todavía queda mucho por investigar, los diferentes métodos numéricos *Wavelets* combinado con el cálculo fraccionario y todas sus aplicaciones en campos como la Física o la Ingeniería podrían ayudar a abrir líneas de investigación que antes estaban cerradas por la incapacidad de los modelos matemáticos convencionales de resolver los problemas presentados



Capítulo 2

2. Ecuaciones Diferenciales de Orden Fraccionario

En este capítulo se explicará el significado del cálculo fraccionario y las diferentes propiedades que este tiene. Todas las demostraciones explicadas a continuación vienen detalladas en la tesis doctoral de Jorge Losada Rodríguez [RODR18] y de los preliminares del artículo de investigación de Lekdee Natchapon [LEKD19].

2.1. Definiciones del Cálculo Fraccionario

- **Definición 2.1.1. Función Absolutamente Continua.**

Sea $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervalo compacto. Una función f se dice que es absolutamente continua en dicho intervalo si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ de modo que para toda la familia finita de intervalos disjuntos dos a dos $[a_k, b_k] \in [a, b]$ con $k = 1, 2, \dots, n$, tal que:

$$\left| \sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta \right. \quad (2.1.1)$$

se tiene que

$$\left| \sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon \right. \quad (2.1.2)$$

A este espacio de funciones absolutamente continuas en el intervalo $[a, b]$ se denota por $AC([a, b])$.

- ▼ **Proposición 2.1.1. Ecuación Integral de Abel.**

El espacio $AC([a, b])$ coincide con el espacio de las primitivas de las funciones del espacio de Lebesgue $L^1(a, b)$. Así pues:

$$\left| f \in AC([a, b]) \iff f(x) = c + \int_a^x \psi(t) dt \right. \quad (2.1.3)$$

con $\psi \in L^1(a, b)$ y $c \in \mathbb{R}$.

Sea $0 < \alpha < 1$. Se conoce como *ecuación integral de Abel* a la ecuación:

$$\int_a^x \frac{\psi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt = f(x) \quad x \in [a, b] \quad (2.1.4)$$

donde f es conocida y ψ es la función incógnita a determinar.

La ecuación se resolverá siguiendo los siguientes pasos:

- a. Se renombran las variables x y t como las variables t y s respectivamente, y se multiplican por $(x-t)^{-\alpha}$ ambos lados de la ecuación. Además se integra entre a y x obteniendo la siguiente expresión:

$$\int_a^x \frac{1}{(x-t)^\alpha} \int_a^t \frac{\psi(s)}{(t-s)^{1-\alpha}} ds dt = \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha} dt. \quad (2.1.5)$$

- b. Se intercambia el orden de integración del primer miembro:

$$\int_a^x \psi(s) \int_s^x \frac{1}{(x-t)^\alpha (t-s)^{1-\alpha}} dt ds = \Gamma(\alpha) \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha} dt. \quad (2.1.6)$$

- c. Se aplica el cambio de variable $t = s + \tau(x-s)$ al primer miembro de la ecuación y se obtiene el siguiente resultado:

$$\int_s^x \frac{1}{(x-t)^\alpha (t-s)^{1-\alpha}} dt = \int_0^1 \tau^{\alpha-1} (1-\tau)^\alpha d\tau = B(\alpha, 1-\alpha) = \Gamma(\alpha) \Gamma(1-\alpha). \quad (2.1.7)$$

Despejando se deduce:

$$\int_a^x \psi(s) ds = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha} dt \quad (2.1.8)$$

y por tanto:

$$\psi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha} dt. \quad (2.1.9)$$

Así pues la ecuación integral de Abel tiene una única solución y tiene que venir dada necesariamente por una función ψ .

Para estudiar en qué casos la ecuación integral de Abel admite solución se introduce la siguiente notación:

$$f_{1-\alpha}(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha} dt. \quad (2.1.10)$$

▼ **Teorema 2.1.2.**

La ecuación integral de Abel admite solución en el espacio de funciones $L^1(a, b)$ si y solo si:

$$f_{1-\alpha} \in AC([a, b]) \quad y \quad f_{1-\alpha}(a) = 0. \quad (2.1.11)$$

Demostración

(a) Se observa que la integral

$$\int_a^b |f_{1-\alpha}(x)| dx = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^b \left| \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha} dt \right| dx \leq \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^b |f(t)| \left| \int_t^b \frac{(x-t)^{-\alpha} dx dt}{\frac{(b-t)^{1-\alpha}}{1-\alpha}} \right|$$

$$= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_a^b |f(t)| (b-t)^{1-\alpha} dt$$

• $\int_t^b (x-t)^{-\alpha} dx = \frac{(b-t)^{1-\alpha}}{1-\alpha}$

• $\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha) = \Gamma(2-\alpha)$

Por tanto si $f \in L^1(a, b)$ entonces $f_{1-\alpha}(x) \in L^1(a, b)$.

Se supone que la ecuación integral de Abel

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{\psi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt = f(x) \quad x \in [a, b]$$

admite la solución $\psi(x) \in L^1(a, b)$. En tal caso se tiene que

(i) $f \in L^1(a, b) \Rightarrow f_{1-\alpha}(x) \in L^1(a, b)$

(ii) $f_{1-\alpha}(x) \in AC([a, b])$

y en aplicación de la Proposición (Ecuación integral de Abel) se tiene

$$f_{1-\alpha}(a) = 0 \quad \left[f_{1-\alpha}(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha} dt \right].$$

(b) Se parte de la validez de

$$f_{1-\alpha} \in AC([a, b]) \quad \text{y} \quad f_{1-\alpha}(a) = 0$$

de donde se deduce que

$$f'_{1-\alpha} \in L^1(a, b)$$

y la solución $\psi(x)$ está definida en casi todo punto del intervalo (a, b) . Se muestra que la función $f'_{1-\alpha}$ satisface la ecuación integral de Abel:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f'_{1-\alpha}(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt = g(x) \quad x \in (a, b) \quad \text{con} \quad g = f \quad \text{en} \quad L^1(a, b).$$

De esta ecuación integral de Abel se tiene la solución

$$f'_{1-\alpha}(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{g(t)}{(x-t)^\alpha} dt$$

o lo que es equivalente

$$f'_{1-\alpha} = g'_{1-\alpha} \quad \text{en} \quad L^1(a, b).$$

Como

$$f_{1-\alpha} \in AC([a, b]) \quad \Rightarrow \quad g_{1-\alpha} \in AC([a, b])$$

luego $f_{1-\alpha} - g_{1-\alpha} = c$ para cierta constante c .

Por hipótesis $f_{1-\alpha}(a) = 0$, luego $c = 0$. Es decir que

$$f_{1-\alpha}(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha} dt \quad g_{1-\alpha}(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \frac{g(t)}{(x-t)^\alpha} dt$$

$$f_{1-\alpha} - g_{1-\alpha} = c \Leftrightarrow \int_a^x \frac{g(t)-f(t)}{(x-t)^\alpha} dt = c = 0.$$

Se tiene una ecuación integral de Abel, pero como tiene unicidad en la solución, se deduce que

$$f = g \text{ en } L^1(a, b).$$

A continuación se muestra una condición suficiente para la existencia de solución de la ecuación integral de Abel en términos únicamente de la función f :

▼ **Lema 2.1.3.**

Si $f \in AC([a, b])$, entonces $f_{1-\alpha} \in AC([a, b])$ y además:

$$f_{1-\alpha}(x) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \left[\frac{f(a)}{(x-a)^{\alpha-1}} + \int_a^x \frac{f'(t)}{(x-t)^{\alpha-1}} dt \right]. \quad (2.1.12)$$

Demostración

Por ser f una función absolutamente continua en el intervalo $[a, b]$, se puede escribir de la forma

$$f(t) = f(a) + \int_a^t f'(s) ds$$

para cada $t \in [a, b]$.

Por tanto la expresión de $f_{1-\alpha}$ queda

$$f_{1-\alpha}(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \frac{f(a) + \int_a^t f'(s) ds}{(x-t)^\alpha} dt$$

que simplificando resulta:

$$f_{1-\alpha}(x) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \left[\frac{f(a)}{(x-a)^{\alpha-1}} + \int_a^x \frac{f'(t)}{(x-t)^{\alpha-1}} dt \right].$$

Además sabiendo que

$$(x-a)^{1-\alpha} = (1-\alpha) \int_a^x (t-a)^{-\alpha} dt$$

se concluye que $f_{1-\alpha}$ es una función absolutamente continua en $[a, b]$ por ser suma de funciones absolutamente continuas en dicho intervalo.

▼ **Corolario 2.1.4.**

Si $f \in AC([a, b])$, entonces la ecuación integral de Abel admite solución única en $L^1(a, b)$ dada por la expresión:

$$\psi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{f(a)}{(x-a)^\alpha} + \int_a^x \frac{f'(s)}{(x-s)^\alpha} ds \right] \quad x \in [a, b]. \quad (2.1.13)$$

2.1.1. Integral Fraccionaria de Orden α

Sabiendo que para una función $\psi \in L^1(a, b)$. Para la integral iterada n veces, la fórmula de integración reiterada de Cauchy es:

$$\int_a^x \int_a^x \cdots \int_a^x \psi(x) dx = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} \psi(t) dt \quad (2.1.14)$$

Y dado que $\Gamma(n) = (n-1)!$ se puede definir la *integral fraccionaria de Riemann–Liouville* de orden $\alpha > 0$ de la función ψ :

• **Definición 2.1.2. Integral Fraccionaria de Riemann–Liouville.**

Sea $\psi \in L^1(a, b)$ y $\alpha > 0$, se define la integral fraccionaria de *Riemann–Liouville* como la integral:

$$I_a^\alpha \psi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{\psi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt. \quad (2.1.15)$$

2.1.2. Derivada Fraccionaria de Riemann–Liouville

• **Definición 2.1.3. Derivada Fraccionaria de Riemann–Liouville.**

Dada una función f definida en el intervalo $[a, b]$ y $0 < \alpha < 1$, la expresión

$$D_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha} dt \quad (2.1.16)$$

recibe el nombre de *derivada fraccionaria de Riemann–Liouville* de orden α de la función f .

A continuación, se imponen las condiciones suficientes para la derivada fraccionaria de una función:

▼ **Lema 2.1.5.**

Si $f \in AC([a, b])$ entonces $D_a^\alpha f$ existe para todo $x \in [a, b]$ y para todo $0 < \alpha < 1$. Además, $D_a^\alpha f \in L^r(a, b)$ para $1 \leq r < 1/\alpha$ y

$$D_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{f(a)}{(x-a)^\alpha} + \int_a^x \frac{f'(t)}{(x-t)^\alpha} dt \right] \quad (2.1.17)$$

Demostración

La existencia de $D_a^\alpha f$ así como la expresión anteriormente anunciada, siguen el mismo razonamiento que el seguido para la búsqueda de la solución de la ecuación integral de Abel.

Nótese, que a diferencia de la integral fraccionaria, la derivada fraccionaria solo queda definida para un número real comprendido entre $0 < \alpha < 1$.

Además de acuerdo con ambas definiciones, la derivada fraccionaria de una función f

viene dada por la expresión:

$$D_a^\alpha = D^1 I_a^{1-\alpha}.$$

Se emplea la siguiente notación:

$[\alpha] \equiv$ parte entera del número α .

$\{\alpha\} \equiv$ parte fraccionaria del número α , tal que: $\alpha = [\alpha] + \{\alpha\}$.

Se puede definir la derivada fraccionaria de orden $\alpha > 1$ como sigue:

$$D_a^\alpha f = \frac{d^{[\alpha]}}{dx^{[\alpha]}} D_a^{\{\alpha\}} f \quad (2.1.18)$$

O, para $n = [\alpha] + 1$, se tiene que:

$$D_a^\alpha f(x) = \frac{d^{[\alpha]+1}}{dx^{[\alpha]+1}} I_a^{n-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x \frac{f(t)}{(t-x)^{\alpha-n+1}} dt, \quad (2.1.19)$$

esta expresión corresponde con la propiedad explicada más adelante $I_a^\alpha I_a^\beta = I_a^{\alpha+\beta}$.

2.1.3. Derivada Fraccionaria de Caputo

El problema que hoy en día lastran los operadores de Riemann–Liouville es que a la hora de garantizar la existencia y unicidad de solución de problemas de valor inicial sencillos, es preciso indicar las condiciones iniciales de forma de una forma que no tiene una interpretación geométrica ni física clara, y por ello no es plenamente aceptada entre la comunidad matemática.

Por ello, motivado por las limitaciones que presentaba la derivada fraccionaria de Riemann, propuso una definición alternativa y quizás más sencilla para la derivada fraccionaria de Caputo.

• **Definición 2.1.4. Derivada Fraccionaria de Caputo.**

La derivada fraccionaria de Caputo de orden $\alpha > 0$ de una función f dada se define como

$$D_a^{\alpha c} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s) ds \quad t > a \quad (2.1.20)$$

con $n = [\alpha] + 1 \in \mathbb{N}$, esto es, n es la parte entera de α más uno.

Se observa que para definir la derivada fraccionaria de Caputo de orden $\alpha > 0$ de una función f , se asume la existencia de la derivada ordinaria de la función f . Además, conviene señalar que a diferencia de la derivada de Riemann, la derivada fraccionaria de Caputo se obtiene como la integral fraccionaria de la derivada de cierto orden entero de la función.

Considérese el siguiente ejemplo.

■ **Ejemplo 2.1.1.**

Se quiere calcular la derivada fraccionaria de Caputo de la función potencia

$$f(t) = (t - a)^r$$

con $r \geq 0$.

SOLUCIÓN

(a)

• $r \leq n - 1$

En este caso es fácil comprobar que se obtiene la función constantemente nula.

• $r > n - 1$

$$\begin{aligned} D_a^{\alpha} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} \frac{d^n}{ds^n} (s-a)^r ds \\ &= \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r-n+1)\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} (s-a)^{r-n} ds \end{aligned}$$

En esta expresión se aplica el cambio de variable utilizado para resolver la ecuación integral de Abel: $s = a + \tau(t - a)$ y se obtiene:

$$\begin{aligned} D_a^{\alpha} f(t) &= \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r-n+1)\Gamma(n-\alpha)} (t-a)^{r-\alpha} \int_0^1 (1-\tau)^{n-\alpha-1} \tau^{r-n} d\tau \\ &= \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r-n+1)\Gamma(n-\alpha)} (t-a)^{r-\alpha} \mathcal{B}(r-n+1, n-\alpha) \\ &= \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r-\alpha+1)} (t-a)^{r-\alpha} \end{aligned}$$

Por tanto, se concluye:

$$D_a^{\alpha} (t-a)^r = \begin{cases} 0 & r \in \mathbb{N} \wedge r \leq n-1 \\ \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r-\alpha+1)} (t-a)^{r-\alpha} & \alpha > 0 \wedge r > n-1 \end{cases}$$

2.1.4. Definición de Grünwald–Letnikov

La definición de Grünwald–Letnikov se aplica con frecuencia para la evaluación numérica que puede considerarse como una forma general del límite de la definición en cálculo de la derivada entera de una función.

Sea una función continua $f(x)$. De acuerdo con la definición de la derivada de orden entero de la función $f(x)$, la derivada de primer orden de la función viene dada por:

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

que se generaliza y se demuestra por inducción que

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(x - kh)$$

donde $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ es la notación de los coeficientes binomiales.

Por tanto, la expresión del coeficiente binomial para cualquier número α generalizando tiene la forma:

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{k! \Gamma(\alpha + 1 - k)}.$$

Se ofrece la definición de derivada fraccionaria de Grünwald–Letnikov.

• **Definición 2.1.5. Derivada Fraccionaria de Grünwald–Letnikov.**

Sea una función f acotada en $[a, b]$, se define la *derivada fraccionaria de Grünwald–Letnikov* de orden $\alpha \in \mathbb{R}^+$ de f como: ([PODL98])

$$\begin{aligned} {}^{\text{GL}}D_a^\alpha f(x) &:= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{x-a}{h} \rfloor} (-1)^k \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{k! \Gamma(\alpha + 1 - k)} f(x - k h) \\ &\cdot \binom{\alpha}{k} = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{k! \Gamma(\alpha + 1 - k)} \end{aligned} \quad (2.1.21)$$

donde $[x]$ representa la parte entera de x .

En una función definida en el intervalo $[a, b]$ se tiene el lado izquierdo y el derecho. Por tanto las derivadas fraccionarias de Grünwald–Letnikov tienen las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} {}^{\text{GL}}D_a^\alpha f(x) &:= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{x-a}{h} \rfloor} (-1)^k \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{k! \Gamma(\alpha + 1 - k)} f(x - k h) \\ {}^{\text{GL}}D_b^\alpha f(x) &:= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{b-x}{h} \rfloor} (-1)^k \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{k! \Gamma(\alpha + 1 - k)} f(x + k h) \end{aligned} \quad (2.1.22)$$

Si la función $f(x)$ es $\underbrace{(m+1)}_n$ – veces continuamente diferenciable en el interavlo $[a, x]$ para $\alpha > 0$, $\underbrace{m}_{n-1} = [\alpha]$ el límite de la definición anterior es

$$\begin{aligned} \bullet {}^{\text{GL}}D_a^\alpha f(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{x-a}{h} \rfloor} (-1)^k \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{k! \Gamma(\alpha + 1 - k)} f(x - k h) \\ \bullet {}^{\text{GL}}D_a^\alpha f(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a) (x-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(\alpha - \alpha + 1)} + \frac{1}{\Gamma\left(\underbrace{m+1}_n - \alpha\right)} \int_a^x (x-s)^{\underbrace{m-\alpha}_{n-1}} f^{(\underbrace{m+1}_n)}(s) ds \end{aligned}$$

donde $f^{(k)}(a) = b_k$ ($k = 0, 1, \dots, m$) son las condiciones iniciales conocidas.

Observaciones 2.1.1.

(i) La derivada fraccionaria de *Grünwald–Letnikov* y de la *Riemann–Liouville* son dos definiciones equivalentes ([PODL98])

$$\begin{aligned} {}^{\text{GL}}D_a^\alpha f(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a) (x-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-s)^{n-1-\alpha} f^{(n)}(s) ds \\ &= \frac{d^n}{dx^n} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a) (x-a)^{n+k-\alpha}}{\Gamma(n+k-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(2n-\alpha)} \int_a^x (x-s)^{2n-1-\alpha} f^{(n)}(s) ds \right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \left(\int_a^x (x-s)^{n-1-\alpha} f(s) ds \right) = D_a^\alpha f(x) \end{aligned}$$

(ii) Esta equivalencia permite utilizar la técnica de Riemann–Liouville durante la formulación del problema, y luego volver a la definición de Grünwald–Letnikov para obtener la solución numérica.

2.2. Propiedades del Cálculo Fraccionario

• **Definición 2.2.1.**

Sean $1 \leq p < \infty$ y $\alpha > 0$. Se denota por $I_a^\alpha(L^p)$ al conjunto formado por aquellas funciones para las que existe $\psi \in L^p(a, b)$ de modo que $f = I_a^\alpha \psi$.

▼ **Teorema 2.2.1.**

La condición necesaria y suficiente para que $f \in I_a^\alpha(L^1)$ es que:

$$I_a^{n-\alpha} f \in AC^n([a, b]) \quad \text{y} \quad f_{n-\alpha}^{(k)}(a) = 0, \quad \forall 0 \leq k \leq n-1 \quad (2.2.1)$$

siendo $n = [\alpha] + 1$.

• **Definición 2.2.2.**

Dado $\alpha > 0$, se dice que $f \in L_1(a, b)$ si tiene derivada fraccionaria de orden α integrable y si $I_a^{n-\alpha} f \in AC^n([a, b])$ con $n = [\alpha] + 1$.

▼ **Teorema 2.2.2.**

Si ψ es una función integrable, entonces:

$$D_a^\alpha I_a^\alpha \psi(x) = \psi(x) \quad (2.2.2)$$

Si $\psi \in I_a^\alpha(L^1)$ entonces

$$I_a^\alpha D_a^\alpha \psi(x) = \psi(x). \quad (2.2.3)$$

Si $\psi \in L^1(a, b)$ es una función con derivada fraccionaria de orden α integrable, entonces:

$$I_a^\alpha D_a^\alpha \psi(x) = \psi(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{\alpha-k-1}}{\Gamma(\alpha-k)} (I_a^{n-\alpha} \psi)^{n-k-1}(a). \quad n = [\alpha] + 1. \quad (2.2.4)$$

▼ **Corolario 2.2.3.**

Sabiendo que $0 < q \leq 1$. Suponiendo que $f \in [a, b]$ y que $cD_a^q f \in (a, b]$. Si $cD_a^q f(t) \geq 0$ para todo $t \in (a, b)$, entonces la función f es no decreciente y si $cD_a^q f(t) \leq 0$ para todo $t \in (a, b)$ entonces la función f es no creciente.

▼ **Lema 2.2.4.**

Si $x(0) = y(0)$ y $cD_a^q x(t) \leq cD_a^q y(t)$, donde $0 \leq q \leq 1$, entonces $x(t) \leq y(t)$.

2.2.1. Propiedades del Operador de Riemann–Liouville

Las integrales fraccionarias de Riemann-Liouville consideradas anteriormente, pueden ser extendidas o generalizadas para el caso de funciones definidas en toda la recta real. Así, para $\gamma: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ tenemos que la *integral fraccionaria de orden α de Liouville*, que vendría dado para $\alpha > 0$:

$$I_+^\alpha \gamma(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^x \frac{\gamma(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, \quad -\infty < x < \infty. \quad (2.2.5)$$

De forma análoga, tenemos que las derivadas fraccionarias de orden $0 < \alpha < 1$ vendrá dada por:

$$D_+^\alpha \gamma(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, \quad -\infty < x < \infty. \quad (2.2.6)$$

Evidentemente, para órdenes de derivación $\alpha > 0$ tenemos:

$$D_+^\alpha \gamma(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_{-\infty}^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt, \quad -\infty < x < \infty. \quad (2.2.7)$$

con $n = [\alpha] + 1$

2.2.2. Propiedades de la Derivada Fraccionaria

▼ **Lema 2.2.5.**

La transformada de Laplace de la derivada fraccionaria de Caputo de orden $m - 1 < q < m$ es:

$$\mathcal{L}\{cD_a^q f(t)\} = s^q F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{q-k-1} f^{(k)}(a) \quad (2.2.8)$$

donde $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$.

• **Definición 3.2.3.**

La función Mittag Leffler de un solo parámetro viene definida por:

$$E_q(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(q k + 1)}, \quad q > 0. \quad (2.2.9)$$

y la función de Mittag-Leffler viene definida por:

$$E_{q,\beta}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(q k + \beta)}, \quad q, \beta > 0. \quad (2.2.10)$$

▼ **Lema 2.2.6.**

Las transformadas de Laplace para las funciones de Mittag-Leffler vienen dadas por las expresiones:

$$\mathcal{L}\{E_q(-\lambda t^q)\}(s) = \frac{s^{q-1}}{s^q + \lambda} \quad (2.2.11)$$

$$\mathcal{L}\{t^{\beta-1} E_{q,\beta}(-\lambda t^q)\}(s) = \frac{s^{q-\beta}}{s^q + \lambda}. \quad (2.2.12)$$

donde $s > |\lambda|^{\frac{1}{q}}$ y siendo λ un parámetro constante.

2.2.3. Ecuaciones Diferenciales de Orden Fraccionario

Se dan a continuación las definiciones de un sistema de ecuaciones diferenciales de orden fraccionario, (SFDE) así como

• **Definición 3.2.4. Sistema de Orden Fraccionario.**

Sea un sistema de orden fraccionario tal que:

$$cD_a^q X(t) = F(X(t)) \quad (2.2.13)$$

donde $X(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T$, $F(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))^T$, y $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)^T$ con $q_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$.

La solución de equilibrio $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)^T$ del sistema viene definido por:

$$\mathbf{I} \quad F(X^*) = 0. \quad (2.2.14)$$

• **Definición 3.2.5. Sistema de Orden Fraccionario con Retraso.**

Considerando el sistema de orden fraccionario con retraso:

$$\mathbf{I} \quad {}^c D_a^q X(t) = F(X(t), X(t - \tau)), \quad (2.2.15)$$

donde $\tau > 0$ es el tiempo de retraso y $X(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T \in \mathbb{R}^n$.

El punto de equilibrio de X^* del sistema anterior viene dado por la solución de la ecuación:

$$\mathbf{I} \quad F(X^*, X^*) = 0. \quad (2.2.16)$$

El sistema linearizado asociado resulta:

$$\mathbf{I} \quad {}^c D_a^q \mathcal{U}(t) = A \mathcal{U}(t) + B \mathcal{U}(t - \tau) \quad (2.2.17)$$

donde $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

La ecuación característica del sistema es:

$$\mathbf{I} \quad \Delta(s) = \det(s^q I - A - B e^{-s\tau}) = 0 \quad (2.2.18)$$

donde $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz identidad.

Capítulo 3

3. Método Wavelet de Bernoulli SEDR Fraccionarias

3.1. Introducción

Objeto del presente capítulo es el estudio y diseño de un nuevo método numérico basado en los polinomios de Bernoulli y en las *Wavelets* de Bernoulli que permitan resolver Sistemas de Ecuaciones Diferenciales con Retraso Fraccionarias (*Systems of Fractional Delay Differential Equations*–SFDDE).

Así mismo, se detalla el esquema del método Adams–Bashforth–Moulton Predictor–Corrector que resuelve las ecuaciones diferenciales con retraso de orden fraccionario (FDDE).

La derivada fraccionaria de orden entero y de orden variable es considerada en el sentido de Caputo, mientras que el operador integral de Riemann–Liouville se emplea para dar aproximaciones en una función desconocida y sus derivadas de orden variable.

Se introduce la integración fraccionaria de orden variable para las funciones de Bernoulli, y se supone que la solución al problema planteado es lo suficientemente suave que se aproximan las derivadas de orden variable mediante los polinomios y *Wavelets* de Bernoulli. Se derivará la matriz operativa de integración fraccionaria para la aproximación de las funciones y sus derivadas en la base de los polinomios y *Wavelets* de Bernoulli.

Se derivará un algoritmo numérico, método *Wavelet* de Bernoulli, con el enfoque de Galerkin, con estas aproximaciones y los puntos de colocación, que basado en las matrices operativas resuelva un sistema de ecuaciones fraccionarias de orden variable o entero, que reduzca las ecuaciones diferenciales a un sistema de ecuaciones algebraicas no lineales, y estableciendo una estimación de error en la solución [NEMA21].

3.2. Introducción a las Wavelets

Las *Wavelets* constituyen una familia de funciones construidas a partir de una dilatación y una traslación de la función señal llamada la *Wavelet* madre. Cuando el parámetro de dilatación a y el de traslación b varían continuamente, se tiene la siguiente familia de funciones:

$$\psi_{a,b}(t) = |a|^{-\frac{1}{2}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad a, b \in \mathcal{R}, \quad a \neq 0. \quad (3.2.1)$$

Si se restringen los parámetros a y b a valores discretos como $a = a_0^{-k}$, $b = n b_0 a_0^{-k}$, $a_0 > 1$, $b_0 > 0$, donde n y k son constantes integrales positivas, la familia de funciones discretas de *Wavelets* quedan como:

$$\psi_{a,b}(t) = |a_0|^{-\frac{k}{2}} \psi(a_0^k t - n b_0), \quad (3.2.2)$$

donde $\psi_{a,b}(t)$ forma una base de *Wavelet* para $L^2(\mathcal{R})$.

3.2.1. Wavelets de Bernoulli

Las *Wavelets* de Bernoulli $\psi_{n,m}(x) = \psi(k, \hat{n}, m, x)$ están definidas en el intervalo $[0,1)$ por:

$$\psi_{n m}(x) = \begin{cases} 2^{\frac{k-1}{2}} \mathcal{B}_m(2^{k-1} x - (n-1)) & x \in \left[\frac{n-1}{2^{k-1}}, \frac{n}{2^{k-1}} \right) \\ 0 & \text{Resto} \end{cases}$$

$$\mathcal{B}_m(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\frac{(-1)^{m-1} (m!)^2}{(2m)!}}} \mathcal{B}_m(x) & m > 0 \\ 1 & m = 0 \end{cases} \quad (3.2.3)$$

$$\begin{cases} n = 1, \dots, 2^{k-1} & k = 1, 2, \dots \\ m = 0, 1, \dots, M-1 & \text{(grado del polinomio de Bernoulli)} \end{cases}$$

$\mathcal{B}_m(x) \equiv$ polinomios de Bernoulli de grado M
 $B_{2m} \equiv$ número de Bernoulli

donde $k = 2, 3, \dots$, $\hat{n} = 2n - 1$, $n = 1, 2, \dots, 2^{k-1}$, $m = 0, 1, 2, \dots, M-1$, m es el orden de los polinomios de Bernoulli y M es una constante integral positiva. El coeficiente $\frac{(-1)^{m-1} (m!)^2}{(2m)!} B_{2m}$ es por normalización, el parámetro de dilatación es $a = 2^{-(k-1)}$ y el parámetro de traslación $b = \hat{n} 2^{-(k-1)}$.

▼ Teorema 3.1. Base Wavelet de Bernoulli.

Sea el conjunto de *Wavelets* de Bernoulli $\psi_{n m}(x)$, $n = 1, \dots, 2^{k-1}$ y $m = 0, 1, \dots, M-1$, entonces constituyen una base *Wavelet* para $L^2(\mathcal{R})$ donde se define el producto interno como:

$$\langle \psi_{n m}(x), \psi_{n^* m^*}(x) \rangle = \int_0^1 \psi_{n m}(x) \psi_{n^* m^*}(x) dx = \begin{cases} \neq 0 & n = m \text{ y } n^* = m^* \\ 0 & n \neq m \text{ o } n^* \neq m^* \end{cases}$$

■ Aproximación de funciones a través de las *Wavelets* de Bernoulli

Supongamos que tenemos una función $f \in L^2[0, 1]$ entonces, dicha función puede ser expandida en términos de *Wavelets* de Bernoulli como:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} c_{n m} \psi_{n m}(x) \quad (3.2.4)$$

Por simplificación se puede truncar dicha serie de forma:

$$f(x) \simeq \sum_{n=1}^{2^{k-1}} \sum_{m=0}^{M-1} c_{n m} \psi_{n m}(x) = C^T \Psi(x) \quad (3.2.5)$$

donde T indica transposición, C y $\Psi(t)$ tienen son vectores de dimensiones $\hat{m} \times 1$ con

$\hat{m} = 2^{k-1} M$. Por simplicidad se escribirá la expresión anterior como:

$$f(x) \approx \sum_{i=1}^{\hat{m}} c_i \psi_i(x) = C^T \Psi(x) \quad (3.2.6)$$

donde evidentemente $c_i = c_{nm}$ y $\psi_i(t) = \psi_{nm}(x)$. El índice i es determinado por la relación $i = (n-1)M + m + 1$, con $n = 1, 2, \dots, 2^{k-1}$ y $m = 0, 1, 2, \dots, M-1$. Así pues, se tienen las expresiones:

$$C = [c_1, c_2, \dots, c_{\hat{m}}]^T \quad (3.2.7)$$

y

$$\Psi(x) = [\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_M(x) | \psi_{M+1}(x), \dots, \psi_{2M}(x) |, \dots, \psi_{(2^{k-1}-1)M+1}(x), \dots, \psi_{\hat{m}}(x)]^T \quad (3.2.8)$$

con el índice i :

$$i = (n-1)M + (m+1) \quad \begin{cases} n = 1, \dots, 2^{k-1} \\ m = 0, 1, \dots, M-1 \end{cases} \quad (3.2.9)$$

$$i = n + 2^{k-1} m \quad \begin{cases} n = 1, \dots, 2^{k-1} \\ m = 0, 1, \dots, M-1 \end{cases}$$

Para evaluar C se tiene:

$$f_j = \langle f(x), \psi_j(x) \rangle = \int_0^1 f(x) \psi_j(x) dx. \quad (3.2.10)$$

donde $\langle \dots \rangle$ es el producto interno en $L^2([0, 1])$ definido par las dos funciones cualesquiera $f, g \in L^2([0, 1])$ como:

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_0^1 f(x) g(x) dx.$$

Si se sustituye $f(x)$ por la expresión 3.2.5 se deduce:

$$f_j(x) = \sum_{i=1}^{\hat{m}} c_i \int_0^1 \psi_i(x) \psi_j(x) dx = \sum_{i=1}^{\hat{m}} c_i d_{ij}, \quad j = 1, 2, \dots, \hat{m} \quad (3.2.11)$$

donde

$$d_{ij} = \int_0^1 \psi_i(x) \psi_j(x) dx, \quad i = j = 1, 2, \dots, \hat{m} \quad (3.2.12)$$

entonces se tiene la expresión:

$$f_j = C^T [d_{1j}, d_{2j}, \dots, d_{\hat{m}j}]^T, \quad j = 1, 2, \dots, \hat{m} \quad (3.2.13)$$

o

$$F^T = C^T D, \quad (3.2.14)$$

donde D es la matriz de orden $\hat{m} \times \hat{m}$ y viene dada por:

$$D = \langle \Psi(x), \Psi(x) \rangle = \int_0^1 \Psi(x) \Psi(x)^T dx. \quad (3.2.15)$$

Pr tanto utilizando cálculo matricial se tiene:

$$C^T = F^T D^{-1}, \quad (3.2.16)$$

3.2.1.1. Cambio de Intervalo: Wavelets de Bernoulli en $[0, T]$

Se quiere cambiar del intervalo

$$x \in [a, b] \implies \lambda(x) \in [c, d]$$

entonces se define a función lineal:

$$\begin{aligned} x = c &\implies \lambda(x) = a \\ x = d &\implies \lambda(x) = b \end{aligned}$$

donde la ecuación de la recta $\lambda(x)$ tiene la expresión:

$$\frac{x - c}{x - d} = \frac{\lambda(x) - a}{\lambda(x) - b}. \quad (3.2.17)$$

Operando, se tiene la expresión de $\lambda(x)$:

$$\lambda(x) x - \lambda(x) c - b x + b c = \lambda(x) x - \lambda(x) d - a x + a d$$

$$\lambda(x) (d - c) = x(b - a) + a d - b c.$$

El valor de $\lambda(x)$ es:

$$\lambda(x) = \frac{b - a}{d - c} x + \frac{a d - b c}{d - c}. \quad (3.2.18)$$

El cambio del intervalo $[a, b] = [0, 1]$ al intervalo $[c, d] = [0, T]$ requiere la transformación siguiente:

$$\lambda(x) = \frac{1 - 0}{T - 0} x + \frac{0}{T} = \frac{x}{T}. \quad (3.2.19)$$

3.2.2 Polinomios de Bernoulli

Para un mejor entendimiento de las *Wavelets* de Bernoulli se explica a través de ejemplos la obtención de los números de Bernoulli y de sus respectivos polinomios, así como sus propiedades más importantes.

Después se expone un ejemplo práctico del cálculo de diferentes bases de Bernoulli con los parámetros k y m dados.

■ **Ejemplo 3.2.1.**

Los números de Bernoulli b_i se definen por la identidad

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{i=0}^{\infty} b_i \frac{x^i}{i!}.$$

(a) (i) Calcúlense los primeros números de Bernoulli realizando la expansión de la función $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$, y determinando b_i .

(ii) Calcúlense los polinomios de Bernoulli con la expresión:

$$\mathcal{B}_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_{n-k} x^k.$$

SOLUCIÓN

(a)

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} - \frac{x^4}{720} + \frac{x^6}{30\,240} - \frac{x^8}{1\,209\,600} + \frac{x^{10}}{47\,900\,160} + O(x^{11})$$

Números de Bernoulli:
 $\left\{ 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, 0, -\frac{1}{30}, 0, \frac{1}{42}, 0, -\frac{1}{30}, 0, \frac{5}{66} \right\}$

Polinomios de Bernoulli:

$$\left(\begin{array}{c} 1 \\ x - \frac{1}{2} \\ x^2 - x + \frac{1}{6} \\ x^3 - \frac{3x^2}{2} + \frac{x}{2} \\ x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30} \\ x^5 - \frac{5x^4}{2} + \frac{5x^3}{3} - \frac{x}{6} \\ x^6 - 3x^5 + \frac{5x^4}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{42} \\ x^7 - \frac{7x^6}{2} + \frac{7x^5}{2} - \frac{7x^3}{6} + \frac{x}{6} \\ x^8 - 4x^7 + \frac{14x^6}{3} - \frac{7x^4}{3} + \frac{2x^2}{3} - \frac{1}{30} \\ x^9 - \frac{9x^8}{2} + 6x^7 - \frac{21x^5}{5} + 2x^3 - \frac{3x}{10} \\ x^{10} - 5x^9 + \frac{15x^8}{2} - 7x^6 + 5x^4 - \frac{3x^2}{2} + \frac{5}{66} \end{array} \right)$$

■ Propiedades de los Polinomios de Bernoulli

■ Ejemplo 3.2.2. Construcción de los Polinomios de Bernoulli.

Calcúlese los polinomios de Bernoulli hasta el grado $M = 6$ mediante la relación de recurrencia:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} \mathcal{B}_k(x) = (n+1)x^n \quad n = 0, 1, \dots, M.$$

SOLUCIÓN

(a)

• $n = 5$

$$B_0(x) + 6B_1(x) + 15B_2(x) + 20B_3(x) + 15B_4(x) + 6B_5(x) = 6x^5$$

$$B_5(x) \rightarrow x^5 - \frac{5x^4}{2} + \frac{5x^3}{3} - \frac{x}{6}$$

• $n = 6$

$$B_0(x) + 7B_1(x) + 21B_2(x) + 35B_3(x) + 35B_4(x) + 21B_5(x) + 7B_6(x) = 7x^6$$

$$B_6(x) \rightarrow x^6 - 3x^5 + \frac{5x^4}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{42}$$

■ **Ejemplo 3.2.3. Construcción de los Polinomios de Bernoulli.**

Compúebese la propiedad de los polinomios de Bernoulli hasta el grado $M = 4$:

$$\mathcal{B}_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \mathcal{B}_k(0) x^{n-k} \quad n = 0, 1, \dots, M$$

SOLUCIÓN

(a)

$$\begin{pmatrix} \mathcal{B}_k(x) & B_0(0) \binom{0}{0} \\ \mathcal{B}_k(x) & B_0(0) x \binom{1}{0} + B_1(0) \binom{1}{1} \\ \mathcal{B}_k(x) & B_0(0) x^2 \binom{2}{0} + B_1(0) x \binom{2}{1} + B_2(0) \binom{2}{2} \\ \mathcal{B}_k(x) & B_0(0) x^3 \binom{3}{0} + B_1(0) x^2 \binom{3}{1} + B_2(0) x \binom{3}{2} + B_3(0) \binom{3}{3} \\ \mathcal{B}_k(x) & B_0(0) x^4 \binom{4}{0} + B_1(0) x^3 \binom{4}{1} + B_2(0) x^2 \binom{4}{2} + B_3(0) x \binom{4}{3} + B_4(0) \binom{4}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x - \frac{1}{2} \\ x^2 - x + \frac{1}{6} \\ x^3 - \frac{3x^2}{2} + \frac{x}{2} \\ x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30} \end{pmatrix}$$

■ **Ejemplo de Cálculo de Base de Wavelets de Bernoulli en $[0, 1)$.**

■ **Ejemplo 3.2.4. Base Wavelets de Bernoulli.**

Sean las Wavelets de Bernoulli $\psi_{nm}(x)$ dadas por la definición siguiente:

$$\psi_{nm}(x) = \begin{cases} 2^{\frac{k-1}{2}} \mathcal{B}_m(2^{k-1}x - (n-1)) & x \in \left[\frac{n-1}{2^{k-1}}, \frac{n}{2^{k-1}} \right) \\ 0 & \text{Resto} \end{cases}$$

$$\mathcal{B}_m(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\frac{(-1)^{m-1} (m!)^2}{(2m)!}}} \mathcal{B}_m(x) & m > 0 \\ 1 & m = 0 \end{cases}$$

(i) Calcúlense las bases Wavelets de Bernoulli

$$\{\psi_{nm}(x)\} \begin{cases} n = 1, \dots, 2^{k-1} \\ m = 0, 1, \dots, M-1 \end{cases}$$

en el intervalo $[0, 1]$ para los parámetros dados:

$$(b) \quad k = 3 \quad M = 4 \quad \begin{cases} n = 1, 2, \dots, 2^{k-1} = 1, 2, 3, 4 \\ m = 0, 1, \dots, M = 0, 1, 2, 3 \end{cases}$$

SOLUCIÓN

(a)

$$\begin{aligned}
 \psi_{1,0}(x) & \begin{cases} 2 & 0 \leq x < \frac{1}{4} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\
 \psi_{1,1}(x) & \begin{cases} 2\sqrt{3}(8x-1) & 0 \leq x < \frac{1}{4} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\
 \psi_{1,2}(x) & \begin{cases} 2\sqrt{5}(96x^2-24x+1) & 0 \leq x < \frac{1}{4} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\
 \psi_{1,3}(x) & \begin{cases} 8\sqrt{210}x(32x^2-12x+1) & 0 \leq x < \frac{1}{4} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\
 \psi_{2,0}(x) & \begin{cases} 2 & \frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\
 \psi_{2,1}(x) & \begin{cases} 2\sqrt{3}(8x-3) & \frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\
 \psi_{2,2}(x) & \begin{cases} 2\sqrt{5}(96x^2-72x+13) & \frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\
 \psi_{2,3}(x) & \begin{cases} 4\sqrt{210}(64x^3-72x^2+26x-3) & \frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\
 \psi_{3,0}(x) & \begin{cases} 2 & \frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{4} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\
 \psi_{3,1}(x) & \begin{cases} 2\sqrt{3}(8x-5) & \frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{4} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\
 \psi_{3,2}(x) & \begin{cases} 2\sqrt{5}(96x^2-120x+37) & \frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{4} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\
 \psi_{3,3}(x) & \begin{cases} 4\sqrt{210}(64x^3-120x^2+74x-15) & \frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{4} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\
 \psi_{4,0}(x) & \begin{cases} 2 & \frac{3}{4} \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\
 \psi_{4,1}(x) & \begin{cases} 2\sqrt{3}(8x-7) & \frac{3}{4} \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\
 \psi_{4,2}(x) & \begin{cases} 2\sqrt{5}(96x^2-168x+73) & \frac{3}{4} \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\
 \psi_{4,3}(x) & \begin{cases} 8\sqrt{210}(32x^3-84x^2+73x-21) & \frac{3}{4} \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases}
 \end{aligned}$$

■ Ejemplo de Cálculo de Base de Wavelets de Bernoulli en $[0, T]$.

■ Ejemplo 3.2.5. Wavelets de Bernoulli en $[0, T]$.

(i) Calcúlense las expresiones analíticas de las Wavelets de Bernoulli $\psi_{nm}(x)$, definidas en el intervalo $[0, T] = [0, 10]$ para los valores dados de k y M .

(ii) Representéense las gráficas de las *Wavelets* de Bernoulli $\psi_{nm}(x)$.

(a) $k = 3 \quad M = 3$.

Indicación: Cambio de intervalo $x \in [0, 1] \implies \frac{x}{T} = \frac{x}{10} \in [0, 10]$.

SOLUCIÓN

(a)

$$\begin{array}{l}
 k = 3 \quad \psi_{1,0}\left(\frac{x}{10}\right) \quad \begin{cases} 2 & 0 \leq \frac{x}{10} < \frac{1}{4} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\
 k = 3 \quad \psi_{1,1}\left(\frac{x}{10}\right) \quad \begin{cases} 4\sqrt{3}\left(\frac{2x}{5} - \frac{1}{2}\right) & 0 \leq \frac{x}{10} < \frac{1}{4} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\
 k = 3 \quad \psi_{1,2}\left(\frac{x}{10}\right) \quad \begin{cases} 12\sqrt{5}\left(\frac{4x^2}{25} - \frac{2x}{5} + \frac{1}{6}\right) & 0 \leq \frac{x}{10} < \frac{1}{4} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\
 k = 3 \quad \psi_{2,0}\left(\frac{x}{10}\right) \quad \begin{cases} 2 & \frac{1}{4} \leq \frac{x}{10} < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\
 k = 3 \quad \psi_{2,1}\left(\frac{x}{10}\right) \quad \begin{cases} 4\sqrt{3}\left(\frac{2x}{5} - \frac{3}{2}\right) & \frac{1}{4} \leq \frac{x}{10} < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\
 k = 3 \quad \psi_{2,2}\left(\frac{x}{10}\right) \quad \begin{cases} 12\sqrt{5}\left(\left(\frac{2x}{5} - 1\right)^2 - \frac{2x}{5} + \frac{7}{6}\right) & \frac{1}{4} \leq \frac{x}{10} < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\
 k = 3 \quad \psi_{3,0}\left(\frac{x}{10}\right) \quad \begin{cases} 2 & \frac{1}{2} \leq \frac{x}{10} < \frac{3}{4} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\
 k = 3 \quad \psi_{3,1}\left(\frac{x}{10}\right) \quad \begin{cases} 4\sqrt{3}\left(\frac{2x}{5} - \frac{5}{2}\right) & \frac{1}{2} \leq \frac{x}{10} < \frac{3}{4} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\
 k = 3 \quad \psi_{3,2}\left(\frac{x}{10}\right) \quad \begin{cases} 12\sqrt{5}\left(\left(\frac{2x}{5} - 2\right)^2 - \frac{2x}{5} + \frac{13}{6}\right) & \frac{1}{2} \leq \frac{x}{10} < \frac{3}{4} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\
 k = 3 \quad \psi_{4,0}\left(\frac{x}{10}\right) \quad \begin{cases} 2 & \frac{3}{4} \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\
 k = 3 \quad \psi_{4,1}\left(\frac{x}{10}\right) \quad \begin{cases} 4\sqrt{3}\left(\frac{2x}{5} - \frac{7}{2}\right) & \frac{3}{4} \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\
 k = 3 \quad \psi_{4,2}\left(\frac{x}{10}\right) \quad \begin{cases} 12\sqrt{5}\left(\left(\frac{2x}{5} - 3\right)^2 - \frac{2x}{5} + \frac{19}{6}\right) & \frac{3}{4} \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases}
 \end{array}$$

■ **Ejemplo 3.2.6. Expansión en Wavelets de Bernoulli.**

Sea la función definida en el intervalo $[A, B] = [0, 1]$.

(a) $f(x) = e^{-x} \text{sen}(3 \pi x)$.

(i) Determinése la base de Wavelets de Bernoulli

$$\mathcal{B} = \{\psi_{nm}(x)\} \begin{cases} n = 1, 2, \dots, 2^{k-1} \\ m = 0, 1 \dots, M-1 \end{cases} \quad k = 2 \quad M = 4.$$

(b) (i) Hállese la función $\tilde{f}(x) = f_{M,k}(x)$ que aproxima a $f(x)$ mediante el desarrollo en serie de Wavelets de Bernoulli.

(ii) Representéense los coeficientes Wavelets, la función $f(x)$ y su aproximación $\tilde{f}(x)$.

(iii) Créese una tabla con los valores de x , $f(x)$, $\tilde{f}(x)$ y el error absoluto $|f(x) - \tilde{f}(x)|$ cometido en cada punto para $x \in [0, 1]$.

(iii) Créese una tabla de valores en el intervalo $x \in [0, 1]$, con los valores de x , $\tilde{f}(x)$, $f(x)$ y el error absoluto $|\tilde{f}(x) - f(x)|$ cometido en cada punto:

$$x_j, f(x_j) \text{ (CWM)}, \tilde{f}(x_j), |\tilde{f}(x_j) - f(x_j)|.$$

SOLUCIÓN

(a)

<i>Wavelets de Bernoulli</i> ψ_{nm}	
$[A, B] =$	$[0, 1]$
$k =$	2
$M =$	4
$n = 1, \dots, 2^{k-1} =$	$\{1, 2\}$
$m = 0, \dots, M-1 =$	$\{0, 1, 2, 3\}$

(a) Definición de las *Wavelets* de Bernoulli

$$\psi_{nm}(x) = \begin{cases} 2^{\frac{k-1}{2}} \overline{\mathcal{B}_m} (2^{k-1} x - (n-1)) & x \in \left[\frac{n-1}{2^{k-1}}, \frac{n}{2^{k-1}} \right) \\ 0 & \text{Resto} \end{cases}$$

$$\overline{\mathcal{B}_m}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\frac{(-1)^{m-1} (m!)^2}{(2m)!}}} \mathcal{B}_m(x) & m > 0 \\ 1 & m = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} n = 1, 1, \dots, 2^{k-1} & k = 1, 2, \dots \\ m = 0, 1, \dots, M-1 & \text{grado del polinomio} \end{cases}$$

$\mathcal{B}_m(x) \equiv$ polinomios de Bernoulli de grado m

$$\left(\begin{array}{l} \psi_{10}(x) = \begin{cases} \sqrt{2} & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{11}(x) = \begin{cases} 2 \sqrt{6} \left(2x - \frac{1}{2} \right) & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{12}(x) = \begin{cases} 6 \sqrt{10} \left(4x^2 - 2x + \frac{1}{6} \right) & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{13}(x) = \begin{cases} 4 \sqrt{105} (8x^3 - 6x^2 + x) & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{20}(x) = \begin{cases} \sqrt{2} & \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{21}(x) = \begin{cases} 2 \sqrt{6} \left(2x - \frac{3}{2} \right) & \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{22}(x) = \begin{cases} 6 \sqrt{10} \left((2x-1)^2 - 2x + \frac{7}{6} \right) & \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{23}(x) = \begin{cases} 4 \sqrt{105} \left((2x-1)^3 - \frac{3}{2} (2x-1)^2 + \frac{1}{2} \times (2x-1) \right) & \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \end{array} \right)$$

(b)

Desarrollo en serie de *Wavelet* de Bernoulli de la función

$$f(x) = e^{-x} \sin(3\pi x) \quad \text{en} \quad [A, B] = [0, 1]$$

$$f(x) \approx \sum_{n=1}^{2^{k-1}} \sum_{m=0}^{M-1} c_{nm} \psi_{nm}(x) = C \cdot \Psi(x) \quad x \in [0, 1]$$

$$C = \langle f(x), \Psi(x) \rangle \cdot D^{-1} \quad D = \int_0^1 \Psi(x) \Psi^T(x) dx$$

(b) Cálculo de los coeficientes $C = (c_{nm})$ Wavelets de Bernoulli.

$$C = \langle f(x), \Psi(x) \rangle \cdot D^{-1}$$

$$\bullet D = \langle \Psi(x), \Psi(x) \rangle = \int_0^1 \Psi(x) \cdot \Psi^T(x) dx$$

$$\bullet \langle f(x), \Psi(x) \rangle = \int_0^1 f(x) \Psi^T(x) dx$$

(c) Aproximación Wavelet de Bernoulli de $f(x)$:

$$\tilde{f}(x) = f_{M,k}(x) = \sum_{n=1}^{2^{k-1}} \sum_{m=0}^{M-1} c_{nm} \psi_{nm}(x)$$

$$\tilde{f}(x) = f_{M,k}(x) = 0.157931 \left(\begin{cases} \sqrt{2} & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right) +$$

$$0.0450377 \left(\begin{cases} \sqrt{2} & \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right) + 0.120173 \left(\begin{cases} 2 \sqrt{6} \left(2x - \frac{3}{2} \right) & \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right) -$$

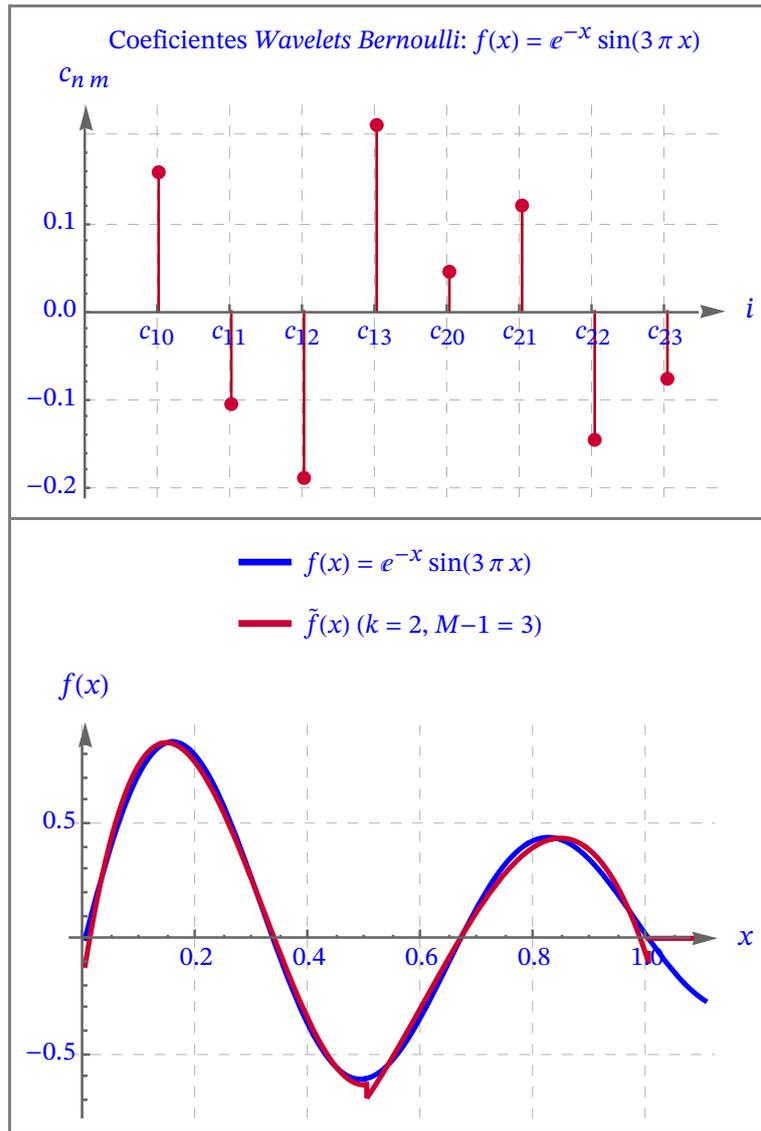
$$0.105267 \left(\begin{cases} 2 \sqrt{6} \left(2x - \frac{1}{2} \right) & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right) -$$

$$0.189153 \left(\begin{cases} 6 \sqrt{10} \left(4x^2 - 2x + \frac{1}{6} \right) & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right) +$$

$$0.21155 \left(\begin{cases} 4 \sqrt{105} (8x^3 - 6x^2 + x) & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right) -$$

$$0.145803 \left(\begin{cases} 6 \sqrt{10} \left((2x-1)^2 - 2x + \frac{7}{6} \right) & \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right) -$$

$$0.0765178 \left(\begin{cases} 4 \sqrt{105} \left((2x-1)^3 - \frac{3}{2} (2x-1)^2 + \frac{1}{2} \times (2x-1) \right) & \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \right)$$



x	$f(x)$	$\tilde{f}(x)$	$ f(x) - \tilde{f}(x) $
0.	0.00000000	-0.11695718	0.11695718
0.1	0.73202885	0.77033886	0.03831001
0.2	0.77865922	0.74621047	0.03244875
0.3	0.22892542	0.22686406	0.00206136
0.4	-0.39400424	-0.37149396	0.02251028
0.5	-0.60653066	-0.69174043	0.08520977
0.6	-0.32258339	-0.28190965	0.04067374
0.7	0.15345330	0.13242048	0.02103281
0.8	0.42733724	0.40070769	0.02662955
0.9	0.32892176	0.37240969	0.04348793

3.2.3. Análisis de Convergencia y Cotas del Error

Se estudian los teoremas que determinan la convergencia y la cota de error en el desarrollo en serie de una función en términos de las funciones *Wavelets* de Bernoulli $\Psi(x) = \{\psi_{nm}\}$ [RAHI17], [BARI20].

Se determinarán una estimación de la norma del error cometido con la aproximación con las *Wavelets* de Bernoulli, y se establecerá que las expansiones convergen uniformemente a $f(x)$.

▼ **Lema 3.2.2. Expansión en Polinomios Bernoulli.** ([RAHI17]).

Sea una función continua $f(x) \in C^M([a, b])$ definida en $[a, b]$ y $f \in L^2[a, b]$ entonces se puede expandir como una serie de *polinomios* de Bernoulli a lo sumo de grado $M - 1$:

$$f(x) \simeq f_{M,k}(x) = \sum_{k=0}^{M-1} c_k \mathcal{B}_k(x) = C \cdot \Phi(x) = C \cdot \mathcal{B}(x) \quad x \in [0, 1]$$

$$C = \langle f(x), \Phi(x) \rangle \cdot D^{-1} \tag{3.2.20}$$

$$C = \langle f(x), \Phi(x) \rangle \cdot \left[\int_0^1 \Phi(x) \Phi^T(x) dx \right]^{-1}$$

y se cumple la siguiente relación:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \|f(x) - f_{M-1}(x)\|_2 = 0. \tag{3.2.21}$$

▼ **Lema 3.2.3. Expansión en Wavelets de Bernoulli.** ([RAHI17]).

Sea una función continua $f(x) \in C^M([0, 1])$ definida en $[0, 1]$ y $f \in L^2[0, 1]$ entonces se puede expandir como una serie de *Wavelets* de Bernoulli

$$f(x) \simeq f_{M,k}(x) = \hat{f}_{m^*}(x) = \sum_{n=1}^{2^{k-1}} \sum_{m=0}^{M-1} c_{nm} \psi_{nm}(x) = C \cdot \Psi(x) \quad x \in [0, 1]$$

$$\begin{cases} n = 1, 2, \dots, 2^{k-1} \\ m = 0, 1, \dots, M-1 \end{cases} \quad m^* = 2^{k-1} M \tag{3.2.22}$$

y se cumple la siguiente relación:

$$\lim_{m^* \rightarrow \infty} \|f(x) - f_{M,k}(x)\|_2 = 0. \tag{3.2.23}$$

3.3. Matrices Operativas y de Transformación

Se pretende demostrar el proceso de obtención de las matrices operacionales de integración fraccionarias.

3.3.1. Matriz Operacional Integral Fraccionaria Riemann–Liouville de Orden α

En esta sección se explicará como obtener la matriz operativa de transformación integral de Riemann-Liouville de orden α , asociadas a las *Wavelets* de Bernoulli. Para alcanzar un mejor entendimiento de dicha matriz, se presentara en primer lugar una observación que dará paso al teorema de integración fraccionaria de *Wavelets* de Bernoulli.

3.3.1.1. Cálculo de la Matriz Operacional Fraccionaria de Riemann–Liouville (Expansión Wavelet de $J^\alpha \left[x^i \mathcal{X}_{\left[\frac{n-1}{2^{k-1}}, \frac{n}{2^{k-1}} \right]}(x) \right]$)

En el teorema siguiente se indica la expresión de la matriz operacional fraccionaria $P^{(\alpha)}$ de Riemann–Liouville de orden α asociada a la base *Wavelets* de Bernoulli obtenida aplicando la expansión de la expresión $J^\alpha \left[x^i \mathcal{X}_{\left[\frac{n-1}{2^{k-1}}, \frac{n}{2^{k-1}} \right]}(x) \right]$ en términos de la base *Wavelets* de Bernoulli $\Psi(x)$ [BARI20].

▼ **Teorema 3.3.1. Matriz Integral Fraccionaria de Riemann-Liouville de Orden α .**

Sea $\Psi(x)$ el vector de *Wavelets* de Bernoulli con los parámetros k, M, n, m de dimensión $m^* = 2^{k-1} (M)$ definido por:

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \vdots \\ \psi_{m^*}(x) \end{pmatrix} \quad \psi_i(x) = \psi_{n,m}(x) \tag{3.3.1}$$

$$\begin{cases} n = 1, \dots, 2^{k-1} & k = 1, 2, \dots \\ m = 0, 1, \dots, M-1 & m^* = 2^{k-1} M \\ i = (n-1)M + (m+1) \end{cases}$$

La matriz operacional integral fraccionaria de Riemann-Liouville de orden α de $\Psi(x)$ definida por

$$J^\alpha [\Psi(x)] \simeq P^{(\alpha)} \cdot \Psi(x) \tag{3.3.2}$$

donde

$$J^\alpha [\psi_i(x)] = J^\alpha [\psi_{n,m}(x)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^x (x-t)^{\alpha-1} \psi_{n,m}(x) dt \right) \mathcal{X}_{\left[\frac{n}{2^k}, \frac{n+1}{2^k} \right]}(x)$$

$$J^\alpha \begin{bmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \vdots \\ \psi_{m^*}(x) \end{bmatrix} \simeq \begin{pmatrix} P_{1,1}^{(\alpha)} & P_{1,2}^{(\alpha)} & \cdots & P_{1,m^*}^{(\alpha)} \\ P_{2,1}^{(\alpha)} & P_{2,2}^{(\alpha)} & \cdots & P_{2,m^*}^{(\alpha)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{m^*,1}^{(\alpha)} & P_{m^*,2}^{(\alpha)} & \cdots & P_{m^*,m^*}^{(\alpha)} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \vdots \\ \psi_{m^*}(x) \end{bmatrix}$$

$$J^\alpha \begin{bmatrix} \psi_{1,0}(x) \\ \psi_{1,1}(x) \\ \cdots \\ \psi_{1,M-1}(x) \\ \psi_{2,0}(x) \\ \psi_{2,1}(x) \\ \cdots \\ \psi_{2,M-1}(x) \\ \vdots \\ \psi_{2^{k-1},0}(x) \\ \psi_{2^{k-1},1}(x) \\ \cdots \\ \psi_{2^{k-1},M-1}(x) \end{bmatrix} \simeq \begin{pmatrix} P_{1,1}^{(\alpha)} & P_{1,2}^{(\alpha)} & \cdots & P_{1,m^*}^{(\alpha)} \\ P_{2,1}^{(\alpha)} & P_{2,2}^{(\alpha)} & \cdots & P_{2,m^*}^{(\alpha)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{m^*,1}^{(\alpha)} & P_{m^*,2}^{(\alpha)} & \cdots & P_{m^*,m^*}^{(\alpha)} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \vdots \\ \psi_{m^*}(x) \end{bmatrix}$$

se deduce aplicando el producto interno y la expansión en términos de la base *Wavelets* de Bernoulli:

$$P^\alpha(i) = P^\alpha(n-1)M + (m+1) = \left(\frac{0 \ 0 \ \cdots \ 0}{(n-1)(M+1)-1} \ C_n \right)$$

$$\begin{cases} n = 1, 2, \dots, 2^{k-1} \\ m = 0, 1, \dots, M-1 \\ i = 1, 2, \dots, 2^{k-1}M \end{cases}$$

$$C_n =$$

$$\begin{cases} \left\langle 2^{\frac{k-1}{2}} J^\alpha \left[\mathcal{X}_{\left[\frac{n-1}{2^{k-1}}, \frac{n}{2^{k-1}} \right]}(x) \right], \Psi_n(x) \right\rangle D_n^{-1} & \begin{cases} n = 1, 2, \dots, 2^{k-1} \\ m = 0 \end{cases} \\ \sum_{i=0}^m \gamma_{i,m} 2^{(k-1)i} F_{n,i} & \begin{cases} n = 1 \\ m = 1, 2, \dots, M-1 \end{cases} \\ \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} \gamma_{i,m} 2^{(k-1)j} (-1)^{i-j} (n-1)^{i-j} F_{n,j} & \begin{cases} n = 2, 3, \dots, 2^{k-1} \\ m = 1, 2, \dots, M-1 \end{cases} \end{cases} \quad (3.3.4)$$

siendo

$$\begin{aligned}
 & \bullet \gamma_{i,m} = \frac{\binom{m}{i} b_{m-i} 2^{\frac{k-1}{2}}}{\sqrt{\frac{(-1)^{m-1} (m!)^2}{(2m)!} B_{2m}}} \quad \bullet D_n = \langle \Psi_n(x), \Psi_n(x) \rangle = \int_0^1 \Psi_n(x) \Psi_n^T(x) dx \\
 & \bullet F_{n,i} = \left\langle J^\alpha \left[x^i \mathcal{X}_{\left[\frac{n-1}{2^{k-1}}, \frac{n}{2^{k-1}} \right]}(x) \right], \Psi_n(x) \right\rangle \cdot D_n^{-1} \\
 & \bullet F_{n,j} = \left\langle J^\alpha \left[x^j \mathcal{X}_{\left[\frac{n-1}{2^{k-1}}, \frac{n}{2^{k-1}} \right]}(x) \right], \Psi_n(x) \right\rangle \cdot D_n^{-1}.
 \end{aligned} \tag{3.3.5}$$

Demostración

$$J^\alpha [\Psi(x)] \simeq P^{(\alpha)} \cdot \Psi(x)$$

(a) Sea la matriz de *Wavelets* de Bernoulli

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \vdots \\ \psi_{m^*}(x) \end{pmatrix} \quad \begin{cases} \psi_i(x) = \psi_{nm}(x) \\ n = 1, 2, \dots, 2^{k-1} & k = 1, 2, \dots \\ m = 0, 1, \dots, M-1 & m^* = 2^{k-1} M \\ i = (n-1)M + (m+1) \end{cases}$$

siendo las funciones $\psi_{nm}(x)$:

$$\bullet \psi_{nm}(x) = \psi_i(x) = 2^{\frac{k-1}{2}} \begin{cases} \mathcal{X}_{\left[\frac{n-1}{2^{k-1}}, \frac{n}{2^{k-1}} \right]}(x) & m = 0 \\ \frac{1}{B_m(2^{k-1}x - (n-1))} \mathcal{X}_{\left[\frac{n-1}{2^{k-1}}, \frac{n}{2^{k-1}} \right]}(x) & m \neq 0 \end{cases}$$

y la integral fraccionaria de Riemann-Liouville de orden α :

$$\bullet J^\alpha[f(x)] := \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt & \alpha > 0 \\ f(x) & \alpha = 0 \end{cases}.$$

Se consideran los siguientes casos:

Caso I: $\bullet n = 1, 2, \dots, 2^{k-1} \quad \bullet m = 0$.

$$(b.1) \quad \text{Caso I: } \begin{cases} n = 1, 2, \dots, 2^{k-1} \\ m = 0 \end{cases}.$$

$$\psi_{nm}(x) = \psi_{n0}(x) = \psi_{(n-1)M+1}(x) = 2^{\frac{k-1}{2}} \mathcal{X}_{\left[\frac{n-1}{2^{k-1}}, \frac{n}{2^{k-1}} \right]}(x).$$

Se halla la integral fraccionaria de Riemann-Liouville de orden α del elemento $\psi_{n,0}(x)$:

$$J^\alpha[\psi_{n,0}(x)] = J^\alpha \left[2^{\frac{k-1}{2}} \mathcal{X}_{\left[\frac{n-1}{2^{k-1}}, \frac{n}{2^{k-1}} \right]}(x) \right] = 2^{\frac{k-1}{2}} J^\alpha \left[\begin{cases} 1 & x \in \left[\frac{n-1}{2^{k-1}}, \frac{n}{2^{k-1}} \right) \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \right]$$

$$J^\alpha[\psi_{n,0}(x)] = \frac{2^{\frac{k-1}{2}}}{\Gamma(\alpha)} \begin{cases} 0 & x \leq \frac{n-1}{2^{k-1}} \\ \left(x - \frac{n-1}{2^{k-1}}\right)^\alpha & \frac{n-1}{2^{k-1}} < x < \frac{n}{2^{k-1}} \\ \left(x - \frac{n-1}{2^{k-1}}\right)^\alpha - \left(x - \frac{n}{2^{k-1}}\right)^\alpha & x \geq \frac{n}{2^{k-1}} \end{cases}$$

Se realiza la expansión en términos de la base *Wavelets* de Bernoulli.

Esta función $J^\alpha[\psi_{n,0}(x)]$ es cero en el intervalo $\left[0, \frac{n-1}{2^{k-1}}\right]$ y por lo tanto, su expansión en *Wavelets* de Bernoulli no contiene aquellos elementos de $\Psi(x)$ que no sean cero en el intervalo $\left[0, \frac{n-1}{2^{k-1}}\right]$, y en consecuencia tiene la forma:

$$J^\alpha[\psi_{n,0}(x)] \simeq \sum_{j=(n-1)M+1}^{2^{k-1}M} c_{n,j} \psi_j(x) = C_n \Psi_n(x)$$

donde

$$\bullet \Psi_n(x) = \begin{pmatrix} \psi_{(n+1)M+1}(x) \\ \psi_{(n+1)M+2}(x) \\ \vdots \\ \psi_{2^{k-1}M}(x) \end{pmatrix} \quad \left\{ \psi_i(x) \quad i = (n+1)M+1, (n+1)M+2, \dots, 2^{k-1}M \right.$$

$$\bullet C_n = \left\langle 2^{\frac{k-1}{2}} J^\alpha \left[\mathcal{X}_{\left[\frac{n-1}{2^{k-1}}, \frac{n}{2^{k-1}}\right]}(x) \right], \Psi_n(x) \right\rangle \cdot D_n^{-1} = B_n \cdot D_n^{-1}$$

$$\bullet D_n = \langle \Psi_n(x), \Psi_n(x) \rangle = \int_0^1 \Psi_n(x) \Psi_n^T(x) dx$$

$$\bullet B_n = \left\langle 2^{\frac{k-1}{2}} J^\alpha \left[\mathcal{X}_{\left[\frac{n-1}{2^{k-1}}, \frac{n}{2^{k-1}}\right]}(x) \right], \Psi_n(x) \right\rangle$$

$$= \int_0^1 \left(2^{\frac{k-1}{2}} J^\alpha \left[\mathcal{X}_{\left[\frac{n-1}{2^{k-1}}, \frac{n}{2^{k-1}}\right]}(x) \right] \right) \Psi_n^T(x) dx$$

De la expresión de $J^\alpha[\psi_{n,0}(x)] \simeq C_n \Psi_n(x)$ se deducen las entradas de la matriz P^α :

$$P^\alpha((n+1)M + (m+1)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & C_n \\ \hline & & & & \end{pmatrix}_{(n-1)M+1-1} \quad \begin{cases} n = 1, 2, \dots, 2^{k-1} \\ m = 0 \end{cases}$$

$$(b.2) \quad \bullet n = 1, 2, \dots, 2^{k-1} \quad \bullet m \neq 0.$$

Se calcula la integral fraccionaria de Riemann-Liouville de orden α del elemento $\psi_{n,m}(x)$:

$$J^\alpha[\psi_{n,m}(x)] = J^\alpha \left[2^{\frac{k-1}{2}} \frac{1}{\sqrt{\frac{(-1)^{m-1} (m!)^2}{(2m)!}} B_{2m}} \mathcal{B}_m(x) (2^{k-1}x - (n-1)) \mathcal{X}_{\left[\frac{n-1}{2^{k-1}}, \frac{n}{2^{k-1}}\right]}(x) \right]$$

$$J^\alpha[\psi_{n,m}(x)] = 2^{\frac{k-1}{2}} \frac{1}{\sqrt{\frac{(-1)^{m-1} (m!)^2}{(2m)!}} B_{2m}} J^\alpha \left[\begin{cases} \mathcal{B}_m(2^{k-1}x - (n-1)) & x \in \left[\frac{n-1}{2^{k-1}}, \frac{n}{2^{k-1}}\right] \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \right]$$

Se considera la expresión analítica del polinomio de Bernoulli

$$\bullet \mathcal{B}_m(x) = \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} b_{m-i} x^i$$

y se tiene

$$J^\alpha[\psi_{n,m}(x)] = 2^{\frac{k-1}{2}} \frac{1}{\sqrt{\frac{(-1)^{m-1} (m!)^2}{(2m)!} B_{2m}}} J^\alpha \left[\begin{cases} \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} b_{m-i} (2^{k-1} x - (n-1))^i & x \in \left[\frac{n-1}{2^{k-1}}, \frac{n}{2^{k-1}} \right] \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \right]$$

Se estudian dos casos:

(b.2) Caso II: $\begin{cases} n = 1 \\ m = 1, 2, \dots, M-1 \end{cases}$.

$$J^\alpha[\psi_{1,m}(x)] = 2^{\frac{k-1}{2}} \frac{1}{\sqrt{\frac{(-1)^{m-1} (m!)^2}{(2m)!} B_{2m}}} J^\alpha \left[\sum_{i=0}^m \binom{m}{i} b_{m-i} (2^{k-1} x)^i \mathcal{X}_{\left[\frac{n-1}{2^{k-1}}, \frac{n}{2^{k-1}} \right]}(x) \right]$$

$$J^\alpha[\psi_{1,m}(x)] = \sum_{i=0}^m \frac{\binom{m}{i} b_{m-i} 2^{\frac{k-1}{2}}}{\sqrt{\frac{(-1)^{m-1} (m!)^2}{(2m)!} B_{2m}}} 2^{(k-1)i} J^\alpha \left[x^i \mathcal{X}_{\left[\frac{n-1}{2^{k-1}}, \frac{n}{2^{k-1}} \right]}(x) \right]$$

$\gamma_{i,m}$

$$J^\alpha[\psi_{1,m}(x)] = \sum_{i=0}^m \gamma_{i,m} 2^{(k-1)i} J^\alpha \left[x^i \mathcal{X}_{\left[\frac{n-1}{2^{k-1}}, \frac{n}{2^{k-1}} \right]}(x) \right] \quad (1)$$

siendo

$$\gamma_{i,m} = \frac{\binom{m}{i} B_{m-i} 2^{\frac{k-1}{2}}}{\sqrt{\frac{(-1)^{m-1} (m!)^2}{(2m)!} B_{2m}}}.$$

La función $J^\alpha \left[x^i \mathcal{X}_{\left[\frac{n-1}{2^{k-1}}, \frac{n}{2^{k-1}} \right]}(x) \right]$ es cero en el intervalo $\left[0, \frac{n-1}{2^{k-1}} \right]$ y en consecuencia, su expansión en *Wavelets* de Bernoulli no contiene aquellos elementos de $\Psi(x)$ que no sean cero en el intervalo $\left[0, \frac{n-1}{2^{k-1}} \right]$, y por tanto tiene la expresión:

$$J^\alpha \left[x^i \mathcal{X}_{\left[\frac{n-1}{2^{k-1}}, \frac{n}{2^{k-1}} \right]}(x) \right] \simeq \sum_{j=(n-1)M+1}^{2^{k-1}M} f_{n,i,j} \psi_j(x) = F_{n,i} \Psi_n(x)$$

$$\bullet F_{n,i} = \left\langle J^\alpha \left[x^i \mathcal{X}_{\left[\frac{n-1}{2^{k-1}}, \frac{n}{2^{k-1}} \right]}(x) \right], \Psi_n(x) \right\rangle \cdot D_n^{-1}$$

$$\bullet D_n = \langle \Psi_n(x), \Psi_n(x) \rangle = \int_{\frac{n-1}{2^{k-1}}}^{\frac{n}{2^{k-1}}} \Psi_n(x) \Psi_n^T(x) dx$$

$$\bullet \left\langle J^\alpha \left[x^i \mathcal{X}_{\left[\frac{n-1}{2^{k-1}}, \frac{n}{2^{k-1}} \right]}(x) \right], \Psi_n(x) \right\rangle = \int_{\frac{n-1}{2^{k-1}}}^{\frac{n}{2^{k-1}}} \left(J^\alpha \left[x^i \mathcal{X}_{\left[\frac{n-1}{2^{k-1}}, \frac{n}{2^{k-1}} \right]}(x) \right] \right) \Psi_n^T(x) dx$$

De donde se deduce la expresión en términos de la base *Wavelet*

$$J^\alpha[\psi_{1,m}(x)] \simeq \underbrace{\sum_{i=0}^m \underbrace{\gamma_{i,m} 2^{(k-1)i} F_{n,i}}_{C_{n,i}} \Psi_n(x)}_{C_n} = C_n \cdot \Psi_n(x)$$

y las correspondientes entradas de P^α :

$$P^\alpha((n+1)M + (m+1)) = \left(\underbrace{0 \ 0 \ \dots \ 0}_{(n-1)M+1-1} \ C_n \right) \begin{cases} n = 1 \\ m = 1, 2, \dots, M-1 \end{cases} .$$

(b.3) Caso III: $\begin{cases} n = 2, 3, \dots, 2^{k-1} \\ m = 1, 2, \dots, M-1 \end{cases} .$

$$J^\alpha[\psi_{n,m}(x)] = 2^{\frac{k-1}{2}} \frac{1}{\sqrt{\frac{(-1)^{m-1} (m!)^2}{(2m)!} B_{2m}}} J^\alpha \left[\sum_{i=0}^m \binom{m}{i} b_{m-i} (2^{k-1}x - (n-1))^i \mathcal{X}_{\left[\frac{n-1}{2^{k-1}}, \frac{n}{2^{k-1}}\right]}(x) \right]$$

Se sustituye en $J^\alpha[\psi_{n,m}(x)]$ el desarrollo de la potencia (Teorema del binomio de Newton)

$$\bullet (2^{k-1}x - (n-1))^i = \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} 2^{(k-1)j} x^j (-1)^{i-j} (n-1)^{i-j} \quad \bullet (2^{k-1}x)^j = (2^{(k-1)j} x^j)$$

y se deduce que

$$J^\alpha[\psi_{n,m}(x)] = 2^{\frac{k-1}{2}} \frac{1}{\sqrt{\frac{(-1)^{m-1} (m!)^2}{(2m)!} B_{2m}}}$$

$$J^\alpha \left[\sum_{i=0}^m \binom{m}{i} b_{m-i} \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} 2^{(k-1)j} x^j (-1)^{i-j} (n-1)^{i-j} \mathcal{X}_{\left[\frac{n-1}{2^{k-1}}, \frac{n}{2^{k-1}}\right]}(x) \right]$$

y simplificando:

$$J^\alpha[\psi_{n,m}(x)] =$$

$$\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^i \underbrace{\frac{\binom{m}{i} b_{m-i} 2^{\frac{k-1}{2}}}{\sqrt{\frac{(-1)^{m-1} (m!)^2}{(2m)!} B_{2m}}}}_{\gamma_{i,m}} \binom{i}{j} 2^{(k-1)j} (-1)^{i-j} (n-1)^{i-j} J^\alpha \left[x^j \mathcal{X}_{\left[\frac{n-1}{2^{k-1}}, \frac{n}{2^{k-1}}\right]}(x) \right]$$

y por tanto:

$$J^\alpha[\psi_{n,m}(x)] = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} \gamma_{i,m} 2^{(k-1)j} (-1)^{i-j} (n-1)^{i-j} J^\alpha \left[x^j \mathcal{X}_{\left[\frac{n-1}{2^{k-1}}, \frac{n}{2^{k-1}}\right]}(x) \right] \quad (2)$$

siendo

$$\gamma_{i,m} = \frac{\binom{m}{i} b_{m-i} 2^{\frac{k-1}{2}}}{\sqrt{\frac{(-1)^{m-1} (m!)^2}{(2m)!} B_{2m}}} .$$

Se sabe que la función

$$J^\alpha \left[x^j \mathcal{X}_{\left[\frac{n-1}{2^{k-1}}, \frac{n}{2^{k-1}}\right]}(x) \right]$$

es cero en el intervalo $\left[0, \frac{n-1}{2^{k-1}}\right]$ y por lo tanto, su expansión en *Wavelets* de Bernoulli no contiene aquellos elementos de $\Psi(x)$ que no sean cero en el intervalo $\left[0, \frac{n-1}{2^{k-1}}\right]$, y en consecuencia tiene la forma:

$$J^\alpha \left[x^j \mathcal{X}_{\left[\frac{n-1}{2^{k-1}}, \frac{n}{2^{k-1}}\right]}(x) \right] \simeq \sum_{v=(n-1)M+1}^{2^{k-1}M} c_{n,j,v} \psi_v(x) = F_{n,j} \Psi_n(x)$$

donde

- $F_{n,j} = \left\langle J^\alpha \left[x^j \mathcal{X}_{\left[\frac{n-1}{2^{k-1}}, \frac{n}{2^{k-1}}\right]}(x) \right], \Psi_n(x) \right\rangle \cdot D_n^{-1}$
- $D_n = \langle \Psi_n(x), \Psi_n(x) \rangle = \int_0^1 \Psi_n(x) \Psi_n^T(x) dx$
- $\left\langle J^\alpha \left[x^j \mathcal{X}_{\left[\frac{n-1}{2^{k-1}}, \frac{n}{2^{k-1}}\right]}(x) \right], \Psi_n(x) \right\rangle = \int_{\frac{n-1}{2^{k-1}}}^{\frac{n}{2^{k-1}}} \left(J^\alpha \left[x^j \mathcal{X}_{\left[\frac{n-1}{2^{k-1}}, \frac{n}{2^{k-1}}\right]}(x) \right] \right) \Psi_n^T(x) dx$

$$\Psi_n(x) = \begin{pmatrix} \psi_{(n+1)M+1}(x) \\ \psi_{(n+1)M+2}(x) \\ \vdots \\ \psi_{2^{k-1}M}(x) \end{pmatrix}$$

De donde se deduce la expresión en términos de la base *Wavelet*:

$$J^\alpha [\psi_{n,m}(x)] \simeq \underbrace{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} \gamma_{i,m} 2^{(k-1)j} (-1)^{i-j} (n-1)^{i-j} F_{n,j}}_{C_n} \Psi_n(x) = C_n \cdot \Psi_n(x)$$

Las entradas de P^α son:

$$P^\alpha((n+1)M + (m+1)) = \left(\underbrace{0 \ 0 \ \dots \ 0}_{(n-1)M+1-1} \ C_n \right) \quad \begin{cases} n = 2, 3, \dots, 2^{k-1} \\ m = 1, 2, \dots, M-1 \end{cases}$$

En resumen,

$$P^\alpha(i) = P^\alpha(n+1)M + (m+1) = \left(\underbrace{0 \ 0 \ \dots \ 0}_{(n-1)M+1-1} \ C_n \right) \quad \begin{cases} n = 1, 2, \dots, 2^{k-1} \\ m = 0, 1, \dots, M-1 \\ i = 1, 2, \dots, 2^{k-1}M \end{cases}$$

$$C_n = \begin{cases} \left\langle 2^{\frac{k-1}{2}} J^\alpha \left[\mathcal{X}_{\left[\frac{n-1}{2^{k-1}}, \frac{n}{2^{k-1}}\right]}(x) \right], \Psi_n(x) \right\rangle \cdot D_n^{-1} & \begin{cases} n = 1, 2, \dots, 2^{k-1} \\ m = 0 \end{cases} \\ \sum_{i=0}^m \gamma_{i,m} 2^{(k-1)i} F_{n,i} & \begin{cases} n = 1 \\ m = 1, 2, \dots, M-1 \end{cases} \\ \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} \gamma_{i,m} 2^{(k-1)j} (-1)^{i-j} (n-1)^{i-j} F_{n,j} & \begin{cases} n = 2, 3, \dots, 2^{k-1} \\ m = 1, 2, \dots, M-1 \end{cases} \end{cases}$$

$$\gamma_{i,m} = \frac{\binom{m}{i} b_{m-i} 2^{\frac{k-1}{2}}}{\sqrt{\frac{(-1)^{m-1} (m!)^2}{(2m)!} B_{2m}}}$$

$$D_n = \langle \Psi_n(x), \Psi_n(x) \rangle = \int_0^1 \Psi_n(x) \Psi_n^T(x) dx$$

$$F_{n,i} = \left\langle J^\alpha \left[x^i \mathcal{X}_{\left[\frac{n-1}{2^{k-1}}, \frac{n}{2^{k-1}} \right]}(x) \right], \Psi_n(x) \right\rangle \cdot D_n^{-1}$$

$$F_{n,j} = \left\langle J^\alpha \left[x^j \mathcal{X}_{\left[\frac{n-1}{2^{k-1}}, \frac{n}{2^{k-1}} \right]}(x) \right], \Psi_n(x) \right\rangle \cdot D_n^{-1}.$$

3.3.1.2. Matriz Integral Fraccionaria de Riemann–Liouville $P^{(\alpha)}$ en $[0, T]$

■ Ejemplo 3.3.1.

Calcúlense las matrices $P^{(\alpha)}$ operacionales de integración fraccionaria de Riemann–Liouville orden α asociadas la matriz $\Psi(x)$ de las *Wavelets* de Bernoulli

$$J^\alpha [\Psi(x)] \simeq P^{(\alpha)} \cdot \Psi(x)$$

empleando el método de expansión de la función $h_i(x)$:

$$h_i(x) = J^\alpha \left[\mathcal{X}_{\left[\frac{n-1}{2^{k-1}}, \frac{n}{2^{k-1}} \right]}(x) \right].$$

(a) $k = 1, M = 2, \alpha = 1 \quad [0, T] = [0, 10].$

(b) $k = 2, M = 2, \alpha = 1/2 \quad [0, T] = [0, 10].$

SOLUCIÓN

(a)

Matriz integral fraccionaria $P^{(\alpha)}$ de Riemann–Liouville de la matriz

Wavelets de Bernoulli $\Psi\left(\frac{x}{T}\right)$

$$J^\alpha \left[\Psi\left(\frac{x}{T}\right) \right] \simeq P^{(\alpha)} \cdot \Psi\left(\frac{x}{T}\right)$$

$$\left(\begin{array}{l} [A, B] = [0, 10] \\ T = 10 \\ k = 1 \\ M = 2 \\ \alpha = 1 \\ n = 1, \dots, 2^{k-1} = \{1\} \\ m = 0, \dots, M-1 = \{0, 1\} \end{array} \right)$$

(a) Polinomios de Bernoulli $\Phi\left(\frac{x}{T}\right)$

$$\Phi\left(\frac{x}{T}\right) = \mathcal{B}\left(\frac{x}{T}\right) = \begin{pmatrix} \mathcal{B}_0(x) = 1 \\ \mathcal{B}_1(x) = \frac{x}{10} - \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(b) *Wavelets* de Bernoulli $\Psi\left(\frac{x}{T}\right)$

$$\Psi\left(\frac{x}{T}\right) = \begin{pmatrix} \psi_{10}\left(\frac{x}{T}\right) = \begin{cases} 1 & 0 \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{11}\left(\frac{x}{T}\right) = \begin{cases} 2\sqrt{3}\left(\frac{x}{10} - \frac{1}{2}\right) & 0 \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \end{pmatrix}$$

$$\Psi\left(\frac{x}{T}\right) = \begin{pmatrix} \begin{cases} 1 & 0 \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \begin{cases} 2\sqrt{3}\left(\frac{x}{10} - \frac{1}{2}\right) & 0 \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \end{pmatrix}$$

(c) Integrales fraccionarias de Riemann–Liouville de las *Wavelets* de Bernoulli $\Psi\left(\frac{x}{T}\right)$

$$J^\alpha\left[\Psi\left(\frac{x}{T}\right)\right] = \begin{pmatrix} \begin{cases} 1 & x > 1 \\ x & \text{True} \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{3}(x-1)x & x \leq 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \end{pmatrix}$$

(d) Cálculo de las filas de la matriz integral fraccionaria $P^{(\alpha)}$.

$$\text{Caso I: } \begin{cases} n = 1, 2, \dots, 2^{k-1} \\ m = 0 \end{cases} .$$

• $n = 1$ $m = 0$

$$\Psi_n\left(\frac{x}{T}\right) = \begin{pmatrix} \begin{cases} 1 & 0 \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \begin{cases} 2\sqrt{3}\left(\frac{x}{10} - \frac{1}{2}\right) & 0 \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \end{pmatrix}$$

$$D_n = \langle \Psi_n\left(\frac{x}{T}\right), \Psi_n\left(\frac{x}{T}\right) \rangle = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \quad D_n^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

$$B_n = \langle 2^{\frac{k-1}{2}} J^\alpha [\mathcal{X}_{\left[\frac{n-1}{2^{k-1}}, \frac{n}{2^{k-1}}\right]} \left(\frac{x}{T}\right)], \Psi_n\left(\frac{x}{T}\right) \rangle = \begin{pmatrix} 50 & \frac{50}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$C_n = B_n \cdot D_n^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & \frac{5}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$P^{(\alpha)}(1) = \begin{pmatrix} 5 & \frac{5}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Caso II: $\begin{cases} n = 1 \\ m = 1, 2, \dots, M-1 \end{cases}$.

• $n = 1$ $m = 1$

$$\Psi_n\left(\frac{x}{T}\right) = \begin{pmatrix} \begin{cases} 1 & 0 \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \begin{cases} 2\sqrt{3}\left(\frac{x}{10} - \frac{1}{2}\right) & 0 \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \end{pmatrix}$$

$$D_n = \langle \Psi_n\left(\frac{x}{T}\right), \Psi_n\left(\frac{x}{T}\right) \rangle = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \quad D_n^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

$$F_{n,i} = \langle J^\alpha \left[\left(\frac{x}{T}\right)^i \mathcal{X}_{\left[\frac{n-1}{2^{k-1}}, \frac{n}{2^{k-1}}\right]} \left(\frac{x}{T}\right) \right], \Psi_n\left(\frac{x}{T}\right) \rangle \cdot D_n^{-1} \quad \gamma_{i,m} = \frac{\binom{m}{i} B_{m-i} 2^{\frac{k-1}{2}}}{\sqrt{\frac{(-1)^{m-1} (m!)^2}{(2m)!}} B_{2m}}$$

$$C_n = \sum_{i=0}^m \gamma_{i,m} 2^{(k-1)i} F_{n,i} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$P^{(\alpha)}(2) = \begin{pmatrix} -\frac{5}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Caso III: } \begin{cases} n = 2, 3, \dots, 2^{k-1} \\ m = 1, 2, \dots, M-1 \end{cases} .$$

(e) Matriz integral fraccionaria $P^{(\alpha)}$ de Riemann–Liouville de orden α

$$J^\alpha \left[\Psi\left(\frac{x}{T}\right) \right] \simeq P^{(\alpha)} \cdot \Psi\left(\frac{x}{T}\right)$$

$$P^{(\alpha)} = \begin{pmatrix} 5 & \frac{5}{\sqrt{3}} \\ -\frac{5}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix}$$

(b)

Matriz integral fraccionaria $P^{(\alpha)}$ de Riemann–Liouville de la matriz

Wavelets de Bernoulli $\Psi\left(\frac{x}{T}\right)$

$$J^\alpha \left[\Psi\left(\frac{x}{T}\right) \right] \simeq P^{(\alpha)} \cdot \Psi\left(\frac{x}{T}\right)$$

$$\left(\begin{array}{l} [A, B] = [0, 10] \\ T = 10 \\ k = 2 \\ M = 2 \\ \alpha = \frac{1}{2} \\ n = 1, \dots, 2^{k-1} = \{1, 2\} \\ m = 0, \dots, M-1 = \{0, 1\} \end{array} \right)$$

(a) Polinomios de Bernoulli $\Phi\left(\frac{x}{T}\right)$

$$\Phi\left(\frac{x}{T}\right) = \mathcal{B}\left(\frac{x}{T}\right) = \left(\begin{array}{l} \mathcal{B}_0(x) = 1 \\ \mathcal{B}_1(x) = \frac{x}{10} - \frac{1}{2} \end{array} \right)$$

(b) *Wavelets* de Bernoulli $\Psi\left(\frac{x}{T}\right)$

$$\Psi\left(\frac{x}{T}\right) = \begin{pmatrix} \psi_{10}\left(\frac{x}{T}\right) = \begin{cases} \sqrt{2} & 0 \leq \frac{x}{10} < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{11}\left(\frac{x}{T}\right) = \begin{cases} 2 \sqrt{6} \left(\frac{x}{5} - \frac{1}{2}\right) & 0 \leq \frac{x}{10} < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{20}\left(\frac{x}{T}\right) = \begin{cases} \sqrt{2} & \frac{1}{2} \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{21}\left(\frac{x}{T}\right) = \begin{cases} 2 \sqrt{6} \left(\frac{x}{5} - \frac{3}{2}\right) & \frac{1}{2} \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \end{pmatrix}$$

$$\Psi\left(\frac{x}{T}\right) = \begin{pmatrix} \begin{cases} \sqrt{2} & 0 \leq \frac{x}{10} < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \begin{cases} 2 \sqrt{6} \left(\frac{x}{5} - \frac{1}{2}\right) & 0 \leq \frac{x}{10} < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{2} & \frac{1}{2} \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \begin{cases} 2 \sqrt{6} \left(\frac{x}{5} - \frac{3}{2}\right) & \frac{1}{2} \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \end{pmatrix}$$

(c) Integrales fraccionarias de Riemann–Liouville de las *Wavelets* de Bernoulli $\Psi\left(\frac{x}{T}\right)$

$$J^\alpha\left[\Psi\left(\frac{x}{T}\right)\right] = \begin{pmatrix} \frac{\begin{cases} 2 \sqrt{2} \sqrt{x} & 2x \leq 1 \\ 2 \sqrt{2} \sqrt{x-2} \sqrt{2x-1} & \text{True} \end{cases}}{\sqrt{\pi}} \\ \frac{\begin{cases} 2 \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{x} (8x-3) & 2x \leq 1 \\ \sqrt{\frac{2}{3}} (16x^{3/2} - 8 \sqrt{4x-2} x - 6 \sqrt{x} + \sqrt{4x-2}) & \text{True} \end{cases}}{\sqrt{\pi}} \\ \frac{\begin{cases} 2 \sqrt{2x-1} & \frac{1}{2} < x \leq 1 \\ 2 \sqrt{2x-1} - 2 \sqrt{2} \sqrt{x-1} & x > 1 \end{cases}}{\sqrt{\pi}} \\ \frac{\begin{cases} \frac{2 \sqrt{2x-1} (8x-7)}{\sqrt{3}} & \frac{1}{2} < x \leq 1 \\ \sqrt{\frac{2}{3}} (-16 \sqrt{x-1} x + 8 \sqrt{4x-2} x + 10 \sqrt{x-1} - 7 \sqrt{4x-2}) & x > 1 \end{cases}}{\sqrt{\pi}} \end{pmatrix}$$

(d) Cálculo de las filas de la matriz integral fraccionaria $P^{(\alpha)}$.

$$\text{Caso I: } \begin{cases} n = 1, 2, \dots, 2^{k-1} \\ m = 0 \end{cases} .$$

• $n = 1 \quad m = 0$

$$\Psi_n\left(\frac{x}{T}\right) = \begin{pmatrix} \begin{cases} \sqrt{2} & 0 \leq \frac{x}{10} < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \begin{cases} 2\sqrt{6}\left(\frac{x}{5} - \frac{1}{2}\right) & 0 \leq \frac{x}{10} < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{2} & \frac{1}{2} \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \begin{cases} 2\sqrt{6}\left(\frac{x}{5} - \frac{3}{2}\right) & \frac{1}{2} \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \end{pmatrix}$$

$$D_n = \langle \Psi_n\left(\frac{x}{T}\right), \Psi_n\left(\frac{x}{T}\right) \rangle = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \quad D_n^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

$$B_n = \langle 2^{\frac{k-1}{2}} J^\alpha[\mathcal{X}_{\left[\frac{n-1}{2^{k-1}}, \frac{n}{2^{k-1}}\right]}]\left(\frac{x}{T}\right), \Psi_n\left(\frac{x}{T}\right) \rangle =$$

$$\left(\frac{40\sqrt{\frac{5}{\pi}}}{3} \quad 8\sqrt{\frac{5}{3\pi}} \quad \frac{80}{3} \times (-1 + \sqrt{2})\sqrt{\frac{5}{\pi}} \quad -16 \times (-4 + 3\sqrt{2})\sqrt{\frac{5}{3\pi}} \right)$$

$$C_n = B_n \cdot D_n^{-1} = \left(\frac{4\sqrt{\frac{5}{\pi}}}{3} \quad \frac{4}{\sqrt{15\pi}} \quad \frac{8}{3} \times (-1 + \sqrt{2})\sqrt{\frac{5}{\pi}} \quad -\frac{8 \times (-4 + 3\sqrt{2})}{\sqrt{15\pi}} \right) \Rightarrow$$

$$P^{(\alpha)}(1) = \left(\frac{4\sqrt{\frac{5}{\pi}}}{3} \quad \frac{4}{\sqrt{15\pi}} \quad \frac{8}{3} \times (-1 + \sqrt{2})\sqrt{\frac{5}{\pi}} \quad -\frac{8 \times (-4 + 3\sqrt{2})}{\sqrt{15\pi}} \right)$$

• $n = 2 \quad m = 0$

$$\Psi_n\left(\frac{x}{T}\right) = \begin{pmatrix} \begin{cases} \sqrt{2} & \frac{1}{2} \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \begin{cases} 2\sqrt{6}\left(\frac{x}{5} - \frac{3}{2}\right) & \frac{1}{2} \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \end{pmatrix}$$

$$D_n = \langle \Psi_n\left(\frac{x}{T}\right), \Psi_n\left(\frac{x}{T}\right) \rangle = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \quad D_n^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

$$B_n = \langle 2^{\frac{k-1}{2}} J^\alpha[\mathcal{X}_{\left[\frac{n-1}{2^{k-1}}, \frac{n}{2^{k-1}}\right]}\left(\frac{x}{T}\right)], \Psi_n\left(\frac{x}{T}\right) \rangle = \left(\frac{40\sqrt{5}}{3} \quad 8\sqrt{\frac{5}{3\pi}} \right)$$

$$C_n = B_n \cdot D_n^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4\sqrt{5}}{3} & \frac{4}{\sqrt{15\pi}} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$P^{(\alpha)}(3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{4\sqrt{5}}{3} & \frac{4}{\sqrt{15\pi}} \end{pmatrix}$$

$$\text{Caso II: } \begin{cases} n = 1 \\ m = 1, 2, \dots, M-1 \end{cases} .$$

• $n = 1 \quad m = 1$

$$\Psi_n\left(\frac{x}{T}\right) = \begin{pmatrix} \begin{cases} \sqrt{2} & 0 \leq \frac{x}{10} < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \begin{cases} 2\sqrt{6}\left(\frac{x}{5} - \frac{1}{2}\right) & 0 \leq \frac{x}{10} < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{2} & \frac{1}{2} \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \begin{cases} 2\sqrt{6}\left(\frac{x}{5} - \frac{3}{2}\right) & \frac{1}{2} \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \end{pmatrix}$$

$$D_n = \langle \Psi_n\left(\frac{x}{T}\right), \Psi_n\left(\frac{x}{T}\right) \rangle = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \quad D_n^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

$$F_{n,i} = \langle J^\alpha \left[\left(\frac{x}{T}\right)^i \mathcal{X}_{\left[\frac{n-1}{2^{k-1}}, \frac{n}{2^{k-1}}\right]} \left(\frac{x}{T}\right) \right], \Psi_n\left(\frac{x}{T}\right) \rangle \cdot D_n^{-1} \quad \gamma_{i,m} = \frac{\binom{m}{i} B_{m-i} 2^{\frac{k-1}{2}}}{\sqrt{\frac{(-1)^{m-1} (m!)^2}{(2m)!}} B_{2m}}$$

$$C_n = \sum_{i=0}^m \gamma_{i,m} 2^{(k-1)i} F_{n,i} =$$

$$\left(-\frac{4}{\sqrt{15\pi}} \quad \frac{4\sqrt{\frac{5}{\pi}}}{7} \quad -8 \times (-3 + 2\sqrt{2}) \sqrt{\frac{2}{15\pi}} \quad \frac{8 \times (-19 + 13\sqrt{2})}{7\sqrt{5\pi}} \right) \Rightarrow$$

$$P^{(\alpha)}(2) = \left(-\frac{4}{\sqrt{15\pi}} \quad \frac{4\sqrt{\frac{5}{\pi}}}{7} \quad -8 \times (-3 + 2\sqrt{2}) \sqrt{\frac{2}{15\pi}} \quad \frac{8 \times (-19 + 13\sqrt{2})}{7\sqrt{5\pi}} \right)$$

$$\text{Caso III: } \begin{cases} n = 2, 3, \dots, 2^{k-1} \\ m = 1, 2, \dots, M-1 \end{cases} .$$

• $n = 2 \quad m = 1$

$$\Psi_n\left(\frac{x}{T}\right) = \begin{pmatrix} \begin{cases} \sqrt{2} & \frac{1}{2} \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \begin{cases} 2\sqrt{6}\left(\frac{x}{5} - \frac{3}{2}\right) & \frac{1}{2} \leq \frac{x}{10} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \end{pmatrix}$$

$$D_n = \langle \Psi_n\left(\frac{x}{T}\right), \Psi_n\left(\frac{x}{T}\right) \rangle = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \quad D_n^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

$$F_{n,i} = \langle J^\alpha \left[\left(\frac{x}{T}\right)^i \mathcal{X}_{\left[\frac{n-1}{2^{k-1}}, \frac{n}{2^{k-1}}\right]} \left(\frac{x}{T}\right) \right], \Psi_n\left(\frac{x}{T}\right) \rangle \cdot D_n^{-1} \quad \gamma_{i,m} = \frac{\binom{m}{i} B_{m-i} 2^{\frac{k-1}{2}}}{\sqrt{\frac{(-1)^{m-1} (m!)^2}{(2m)!}} B_{2m}}$$

$$C_n = \sum_{i=0}^m \gamma_{i,m} 2^{(k-1)i} F_{n,i} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{\sqrt{15\pi}} & \frac{4\sqrt{\frac{5}{\pi}}}{7} \end{pmatrix}$$

$$P^{(\alpha)}(4) = \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{4}{\sqrt{15\pi}} & \frac{4\sqrt{\frac{5}{\pi}}}{7} \end{pmatrix}$$

(e) Matriz integral fraccionaria $P^{(\alpha)}$ de Riemann–Liouville de orden α

$$J^\alpha \left[\Psi\left(\frac{x}{T}\right) \right] \simeq P^{(\alpha)} \cdot \Psi\left(\frac{x}{T}\right)$$

$$P^{(\alpha)} = \begin{pmatrix} \frac{4\sqrt{\frac{5}{\pi}}}{3} & \frac{4}{\sqrt{15\pi}} & \frac{8}{3} \times (-1 + \sqrt{2}) \sqrt{\frac{5}{\pi}} & -\frac{8 \times (-4+3\sqrt{2})}{\sqrt{15\pi}} \\ -\frac{4}{\sqrt{15\pi}} & \frac{4\sqrt{\frac{5}{\pi}}}{7} & -8 \times (-3 + 2\sqrt{2}) \sqrt{\frac{2}{15\pi}} & \frac{8 \times (-19+13\sqrt{2})}{7\sqrt{5\pi}} \\ 0 & 0 & \frac{4\sqrt{\frac{5}{\pi}}}{3} & \frac{4}{\sqrt{15\pi}} \\ 0 & 0 & -\frac{4}{\sqrt{15\pi}} & \frac{4\sqrt{\frac{5}{\pi}}}{7} \end{pmatrix}$$

3.4. Método Wavelet de Bernoulli para Ecuaciones Diferenciales con Retraso Fraccionarias

3.4.1. Sistemas de Ecuaciones Diferenciales con Retraso Fraccionarias (SFDDE)

Se estudia el método numérico que aproxima la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales con retraso de orden fraccionario (*Systems of fractional delay differential equations* –SFDDEs), aplicando el método de las funciones *Wavelets* de Bernoulli.

[MOHA18], [RAHI17], [AVCI21], [RAHI22].

Método BWM. Sistema de Ecuaciones Diferenciales con Retraso de Orden Fraccionario (SFDDE).

Considérense los problemas siguientes constituidos por un sistema de ecuaciones diferenciales con retraso de orden fraccionario SFDDE:

- Retraso constante

(P₁) ≡

$$\left\{ \begin{array}{l} D^{(\alpha_i)} y_i(x) = \begin{array}{l} f_i(x, y_1(x), y_1(x - \tau_{1r_1}), \dots, y_1(x - \tau_{1r_1}), \\ y_2(x - \tau_{2r_2}), \dots, y_2(x - \tau_{2r_2}), \dots, \\ y_n(x), y_n(x - \tau_{nr_n}), \dots, y_n(x - \tau_{nr_n})) \end{array} & x \in [0, 1] \\ y_i(x) = u_i(x) & x \in [-\tau, 0] \\ y_i^{(k)}(0) = \lambda_{ik} & k = 0, 1, \dots, n-1 \end{array} \right. \quad (3.4.1)$$

$i = 1, 2, \dots, n_e$ (número de ecuaciones)

$$\left\{ \begin{array}{l} n-1 < \alpha_i \leq n \\ 0 < \tau_{ij} < 1 \quad j = 1, 2, \dots, r_i \end{array} \right.$$

- Retraso proporcional

(P₂) ≡

$$\left\{ \begin{array}{l} D^{(\alpha_i)} y_i(x) = f_i(x, y_1(x), y_1(\tau_{i1}x), y_2(x), y_2(\tau_{i2}x), \dots, y_{n_e}(x), y_{n_e}(\tau_{in_e}x)) & x \in [0, 1] \\ y_i^{(k)}(0) = \lambda_{ik} & k = 0, 1, \dots, n-1 \end{array} \right. \quad (3.4.2)$$

$i = 1, 2, \dots, n_e$ (número de ecuaciones)

$$\left\{ \begin{array}{l} n-1 < \alpha_i \leq n \\ 0 < \tau_{ij} < 1 \quad j = 1, 2, \dots, r_i \end{array} \right.$$

donde f_i es una función analítica, $n = [\alpha]$, $n - 1 < \alpha_i \leq n$ y $0 < \tau_{ij} < 1$ es el parámetro del retraso, λ_i son las condiciones iniciales de tipo real y $u_i(x)$ es una función continua en $[-\tau, 0]$.

El términos $D^{(\alpha_i)} y_i(x)$ ($n = [\alpha]$), representan la derivada de orden fraccionario en el senti-

do de Caputo de orden α_i e $y_i(x)$ representa la solución del problema por determinar.

1. Se considera que la derivada $D^{(\alpha)} y(x)$ de orden α se puede expresar en términos de las *Wavelets* de Bernoulli $\Psi(x) = \{\psi_{nm}(x)\}$ tomando su aproximación:

$$D^{(\alpha_i)} y_i(x) \simeq \sum_{n=1}^{2^{k-1}} \sum_{m=0}^{M-1} c_{nm} \psi_{nm}(x) = \sum_{i=1}^{m^*} c_i \psi_i(x) = C_i^T \cdot \Psi(x) \quad x \in [0, 1] \quad (3.4.3)$$

$i = 1, 2, \dots, n_e$ (número de ecuaciones)

donde C_i^T es un vector fila y $\Psi(x)$ un vector columna de dimensión $(2^{k-1} M \times 1)$ dados por las expresiones:

$$C_i^T = (C_{i,1} \ C_{i,2} \ \dots \ C_{i,m^*}) \quad i = 1, 2, \dots, n_e$$

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \vdots \\ \psi_{m^*}(x) \end{pmatrix} \quad \begin{cases} \psi_i(x) = \psi_{nm}(x) \\ n = 1, \dots, 2^{k-1} & k = 1, 2, \dots \\ m = 0, 1, \dots, M-1 & m^* = 2^{k-1} M \\ i = (n-1)M + (m+1) & i = 1, 2, \dots, m^* \end{cases} \quad (3.4.4)$$

2. Se aplica el operador J^{α_i} de integración fraccionaria de Riemann–Liouville a ambos lados de la relación $D^{(\alpha_i)} y(x) \simeq C_i^T \cdot \Psi(x)$ y aplicando la matriz operacional de la integral fraccionaria de $\Psi(x)$, se tiene:

$$(P_1) \equiv y_i(x) \simeq \begin{cases} J^{\alpha_i}[C_i^T \cdot \Psi(x)] + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda_{i0}}{i!} x^i = C_i^T \cdot P^{(\alpha_i)} \cdot \Psi(x) + E_i^T \cdot \Psi(x) & x \in [0, 1] \\ u_i(x) & x \in [\tau, 0) \end{cases} \quad (3.4.5)$$

$i = 1, 2, \dots, n_e$

$$\bullet J^{\alpha_i} [\Psi(x)] \simeq P^{(\alpha_i)} \cdot \Psi(x) + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda_{i0}}{i!} x^i \quad \bullet n = [\alpha]$$

siendo E_{1i} el vector de coeficientes *Wavelets* de Bernoulli del polinomio $p_i(x)$:

$$(P_1) \equiv p_i(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda_{i0}}{i!} x^i \simeq E_i^T \cdot \Psi(x).$$

$$(P_2) \equiv y_i(x) \simeq \begin{cases} J^{\alpha_i}[C_i^T \cdot \Psi(x)] + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda_{i0}}{i!} x^i = C_i^T \cdot P^{(\alpha_i)} \cdot \Psi(x) + E_i^T \cdot \Psi(x) & x \in [0, 1] \\ u_i(x) & x \in [\tau, 0) \end{cases} \quad (3.4.6)$$

$i = 1, 2, \dots, n_e$

$$\bullet J^{\alpha_i} [\Psi(x)] \simeq P^{(\alpha_i)} \cdot \Psi(x) + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda_{i0}}{i!} x^i \quad \bullet n = [\alpha].$$

3. Se deducen las aproximaciones del término de retraso $y_i(x - \tau_{ij})$ del problema (P_1) , y del retraso proporcional del problema (P_2) partiendo de la expresión de $y_i(x)$:

$$(P_1) \equiv y_i(x - \tau_{ij}) \simeq \begin{cases} u_i(x - \tau_{ij}) & x \in [0, \tau_{ij}] \\ C_i^T \cdot P^{(\alpha_i)} \cdot \Psi(x - \tau_{ij}) + E_i^T \cdot \Psi(x - \tau_{ij}) & x \in [\tau_{ij}, 1] \end{cases} \quad (3.4.7)$$

$$(P_2) \equiv y_i(\tau_{ij} x) \simeq \begin{cases} C_i^T \cdot P^{(\alpha_i)} \cdot \Psi(\tau_{ij} x) + E_i^T \cdot \Psi(\tau_{ij} x) & x \in [0, 1] \end{cases} \quad (3.4.8)$$

4. Se sustituyen las expresiones de

$$(P_1) \equiv \begin{cases} y_i(x) & D^{(\alpha_i)} y_i(x) \\ y_i(x - \tau_{ij}) \end{cases}$$

en la ecuación SFDDE del problema (P_1) , de donde se deduce un sistema algebraico de ecuaciones:

$$(P_1) \equiv \begin{cases} D^{(\alpha_i)} y_i(x) = & x \in [0, 1] \\ f_i(x, y_1(x), y_1(x - \tau_{11}), \dots, y_1(x - \tau_{1r_1}), \\ y_2(x - \tau_{21}), \dots, y_2(x - \tau_{2r_2}), \dots, \\ y_n(x), y_n(x - \tau_{n1}), \dots, y_n(x - \tau_{nr_n})) \end{cases}$$

$$\bullet \begin{cases} D^{(\alpha_i)} y_i(x) \simeq C_i^T \cdot \Psi(x) \\ y_i(x) \simeq \begin{cases} C_i^T \cdot P^{(\alpha_i)} \cdot \Psi(x) + E_i^T \cdot \Psi(x) & x \in [0, 1] \\ u_i(x) & x \in [\tau, 0] \end{cases} \\ y_i(x - \tau_{ij}) \simeq \begin{cases} u_i(x - \tau_{ij}) & x \in [0, \tau_{ij}] \\ C_i^T \cdot P^{(\alpha_i)} \cdot \Psi(x - \tau_{ij}) + E_i^T \cdot \Psi(x - \tau_{ij}) & x \in [\tau_{ij}, 1] \end{cases} \end{cases}$$

o las expresiones

$$(P_2) \equiv \begin{cases} y_i(x) & D^{(\alpha_i)} y_i(x) \\ y_i(\tau_{ij} x) \end{cases}$$

en la ecuación SFDDE del problema (P_2) , de donde se deduce un sistema algebraico de ecuaciones:

$$(P_2) \equiv \begin{cases} D^{(\alpha_i)} y_i(x) = f_i(x, y_1(x), y_1(\tau_{i1} x), y_2(x), y_2(\tau_{i2} x), \\ \dots, y_{n_e}(x), y_{n_e}(\tau_{in_e} x)) & x \in [0, 1] \end{cases}$$

$$\bullet \begin{cases} D^{(\alpha_i)} y_i(x) \simeq C_i^T \cdot \Psi(x) \\ y_i(x) \simeq \begin{cases} C_i^T \cdot P^{(\alpha_i)} \cdot \Psi(x) + E_i^T \cdot \Psi(x) & x \in [0, 1] \\ u_i(x) & x \in [\tau, 0] \end{cases} \\ y_i(\tau_{ij} x) \simeq \begin{cases} C_i^T \cdot P^{(\alpha_i)} \cdot \Psi(\tau_{ij} x) + E_i^T \cdot \Psi(\tau_{ij} x) & x \in [0, 1] \end{cases} \end{cases}$$

5. Se obtiene un sistema formado por $n_e \times (2^{k-1} M)$ ecuaciones algebraicas en la variable x que contiene n_e vectores C_i de coeficientes desconocidos:

$$(P_1) \equiv \underbrace{C_i^T \cdot \Psi(x)}_{EC_{i,1}(x)} = \underbrace{f_i(x, y_i(x), y_i(x - \tau_{ij}), \dots)}_{EC_{i,2}(x)}$$

$$C_i^T \cdot \Psi(x) = f_i \left(x, \begin{cases} C_i^T \cdot P^{(\alpha_i)} \cdot \Psi(x) + E_i^T \cdot \Psi(x) & x \in [0, 1] \\ u_i(x) & x \in [\tau, 0) \end{cases}, \begin{cases} u_i(x - \tau_{ij}) & x \in [0, \tau_{ij}] \\ C_i^T \cdot P^{(\alpha_i)} \cdot \Psi(x - \tau_{ij}) + E_i^T \cdot \Psi(x - \tau_{ij}) & x \in [\tau_{ij}, 1] \end{cases} \right)$$

$$\bullet C_i^T = (C_{i,1} \ C_{i,2} \ \dots \ C_{i,m^*}) \quad \begin{cases} i = 1, 2, \dots, n_e \\ j = 1, 2, \dots, m^* \quad m^* = 2^{k-1} M \end{cases}$$

$$(P_2) \equiv \underbrace{C_i^T \cdot \Psi(x)}_{EC_{i,1}(x)} = \underbrace{f_i(x, y_i(x), y_i(\tau_{ij}x), \dots)}_{EC_{i,2}(x)}$$

$$C_i^T \cdot \Psi(x) = f_i \left(x, \begin{cases} C_i^T \cdot P^{(\alpha_i)} \cdot \Psi(x) + E_i^T \cdot \Psi(x) & x \in [0, 1] \\ C_i^T \cdot P^{(\alpha_i)} \cdot \Psi(\tau_{ij}x) + E_i^T \cdot \Psi(\tau_{ij}x) & x \in [0, 1] \end{cases} \right) \quad (3.4.10)$$

$$\bullet C_i^T = (C_{i,1} \ C_{i,2} \ \dots \ C_{i,m^*}) \quad \begin{cases} i = 1, 2, \dots, n_e \\ j = 1, 2, \dots, m^* \quad m^* = 2^{k-1} M \end{cases}$$

6. *Método de colocación.* Creación de un sistema algebraico de $n_e \times (2^{k-1} M)$ ecuaciones.

En el problema (P_1) se ha obtenido un sistema (no lineal) de ecuaciones algebraicas con el vector de coeficientes $C_i^T = (C_{i,1} \ C_{i,2} \ \dots \ C_{i,m^*})$, $m^* = 2^{k-1} M$.

En el problema (P_1) se deduce un sistema no lineal de ecuaciones algebraicas con n_e ecuaciones con el vector coeficientes $C_i^T = (C_{i,1} \ C_{i,2} \ \dots \ C_{i,m^*})$ para $i = 1, 2, \dots, n_e$:

$$\begin{aligned} i = 1 & \quad \underbrace{(C_{1,1} \ C_{1,2} \ \dots \ C_{1,m^*}) \cdot \Psi(x)}_{EC_{1,1}(x)} = \underbrace{f_1(x, y_1(x), y_1(x - \tau_{1j}), y_2(x), y_2(x - \tau_{1j}), \dots)}_{EC_{1,2}(x)} \\ i = 2 & \quad \underbrace{(C_{2,1} \ C_{2,2} \ \dots \ C_{2,m^*}) \cdot \Psi(x)}_{EC_{2,1}(x)} = \underbrace{f_2(x, y_1(x), y_1(x - \tau_{2j}), y_2(x), y_2(x - \tau_{2j}), \dots)}_{EC_{2,2}(x)} \\ & \quad \vdots \\ i = n_e & \quad \underbrace{(C_{n_e,1} \ C_{n_e,2} \ \dots \ C_{n_e,m^*}) \cdot \Psi(x)}_{EC_{n_e,1}(x)} = \\ & \quad \underbrace{f_{n_e}(x, y_1(x), y_1(x - \tau_{n_e j}), y_2(x), y_2(x - \tau_{n_e j}), \dots)}_{EC_{n_e,2}(x)} \end{aligned}$$

En el problema (P_2) también se deduce un sistema no lineal de ecuaciones algebraicas con n_e ecuaciones con el vector coeficientes $C_i^T = (C_{i,1} \ C_{i,2} \ \dots \ C_{i,m^*})$ para $i = 1, 2, \dots, n_e$:

$$i = 1 \quad \underbrace{(C_{1,1} \ C_{1,2} \ \dots \ C_{1,m^*}) \cdot \Psi(x)}_{EC_{1,1}(x)} = \underbrace{f_1(x, y_1(x), y_1(\tau_{11}x), y_2(x), y_2(\tau_{12}x), \dots)}_{EC_{1,2}(x)}$$

$$\begin{aligned}
 i = 2 & \quad \underbrace{(C_{2,1} \ C_{2,2} \ \cdots \ C_{2,m^*})}_{EC_{2,1}(x)} \cdot \Psi(x) = \underbrace{f_2(x, y_1(x), y_1(\tau_{21} x), y_2(x), y_2(\tau_{22} x), \cdots)}_{EC_{2,2}(x)} \\
 & \quad \vdots \\
 i = n_e & \quad \underbrace{(C_{n_e,1} \ C_{n_e,2} \ \cdots \ C_{n_e,m^*})}_{EC_{n_e,1}(x)} \cdot \Psi(x) = \underbrace{f_{n_e}(x, y_1(x), y_1(\tau_{n_e 1} x), y_2(x), y_2(\tau_{n_e 2} x), \cdots)}_{EC_{n_e,2}(x)}
 \end{aligned}$$

Se pueden calcular los n_e vectores de coeficientes C_i^T de la siguiente manera:

- a. *Método I.* Se crea un sistema algebraico de ecuaciones con el *método de colocación* considerando como puntos de colocación los ceros de los polinomios de *Legendre desplazados* de orden m^* del intervalo $[0, 1]$:

$$P_{m^*}(x) \equiv \text{polinomio de Legendre de orden } m^* = 2^{k-1} M \quad x \in [-1, 1]$$

$$P_{m^*}(x) = \frac{1}{2^{m^*} m^*!} \frac{d}{dx} (x^2 - 1)^{m^*}$$

$$L_{m^*}(x) \equiv \text{polinomio de Legendre desplazado de orden } m^* = 2^{k-1} M \quad x \in [0, 1]$$

$$x \in [-1, 1] \xrightarrow{x \rightarrow (2x-1)} x \in [0, 1]$$

$$L_{m^*}(x) = P_{m^*}(2x - 1)$$

$$\text{ceros de } L_{m^*}(x) = \{x_1, x_2, \dots, x_{m^*}\} \in [0, 1].$$

Se deduce un sistema no lineal de ecuaciones algebraicas con $n_e \times \underbrace{(2^{k-1} M)}_{m^*}$ ecuaciones con el vector de incógnitas $C_i^T = (C_{i,1} \ C_{i,2} \ \cdots \ C_{i,m^*})$ para $i = 1, 2, \dots, n_e$:

$$i = 1 \quad \begin{cases} EC_{1,1}(x_1) = EC_{1,2}(x_1) \\ EC_{1,1}(x_2) = EC_{1,2}(x_2) \\ \dots \\ EC_{1,1}(x_{m^*}) = EC_{1,2}(x_{m^*}) \end{cases}$$

$$i = 2 \quad \begin{cases} EC_{2,1}(x_1) = EC_{2,2}(x_1) \\ EC_{2,1}(x_2) = EC_{2,2}(x_2) \\ \dots \\ EC_{2,1}(x_{m^*}) = EC_{2,2}(x_{m^*}) \end{cases}$$

⋮

$$i = n_e \quad \begin{cases} EC_{n_e,1}(x_1) = EC_{n_e,2}(x_1) \\ EC_{n_e,1}(x_2) = EC_{n_e,2}(x_2) \\ \dots \\ EC_{n_e,1}(x_{m^*}) = EC_{n_e,2}(x_{m^*}) \end{cases}$$

- i. Se resuelve el sistema no lineal de ecuaciones en $C_i^T = (C_{i,1} \ C_{i,2} \ \cdots \ C_{i,m^*})$ con el método de *Newton-Raphson* o el método *Affine Covariant Newton*.
- ii. La solución aproximada de la ecuación FDDE es

$$\begin{aligned} (P_1) &\equiv y_i^*(x) = C_i^T \cdot P^{(\alpha_i)} \cdot \Psi(x) + E_i^T \cdot \Psi(x) \\ (P_2) &\equiv y_i^*(x) = C_i^T \cdot P^{(\alpha_i)} \cdot \Psi(x) + E_i^T \cdot \Psi(x). \end{aligned} \tag{3.4.11}$$

3.5. Método Numérico Adams–Bashforth–Moulton

3.5.1. Método Adams–Bashforth–Moulton para Ecuaciones FDDE

El esquema del método Adams–Bashforth–Moulton Predictor-Corrector que resuelve las ecuaciones diferenciales con retraso de orden fraccionario (FDDE) viene dado en [BHAL11], [LEKD19].

Considérese el siguiente problema con una ecuación FDDE:

$$(P) \equiv \begin{cases} D^{(\alpha)} y(x) = f(x, y(x), y(x - \tau)) & x \in [0, T] \quad 0 < \alpha \leq n \\ y(x) = g(x) & x \in [-\tau, 0] \\ y(0) = y_0^{(k)} \quad k = 0, 1, \dots, n-1; \alpha \in (n-1, n] \end{cases}$$

El problema es equivalente a la ecuación integral de Volterra, e integrando I^α a ambos miembros de la ecuación diferencial se deduce:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n-1} y_0^{(k)} \frac{x^k}{k!} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t, y(t), y(t-\tau)) dt.$$

Se considera una cuadrícula uniforme de la forma:

$$x \in [-\tau, T] \\ \{x_k = kh\} \quad \begin{cases} k = -i, -(i-1), \dots, -1, 0, 1, 2, \dots, N \quad k, N \in \mathbb{N} \\ h := \frac{T}{N} \quad i = \frac{\tau}{h} \end{cases}.$$

Se denota la aproximación de $y(x_k)$ como $y_h(x_k)$, esto es que $y(x_k) \approx y_h(x_k)$. Se deducen las aproximaciones de $y(x_k)$ en el intervalo $x \in [-\tau, 0]$ y las del término con retraso $y_h(x_k - \tau)$:

$$\begin{aligned} y(x_k) &\approx y_h(x_k) = g(x_k) \quad k = -i, -(i-1), \dots, -1, 0 \quad x \in [-\tau, 0] \\ y(x_k - \tau) &\approx y_h(x_k - \tau) = y_h(kh - ih) = y_h(x_{k-i}) \quad k = 0, 1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

Se calculan las aproximaciones hasta el índice k

$$y(x_j) \approx y_h(x_j) \quad j = -i, -(i-1), \dots, -1, 0, 1, 2, \dots, k \\ i = \tau/h$$

para calcular la aproximación $y_h(x_{k+1})$ por medio de la fórmula de Volterra:

$$y(x_{k+1}) = \sum_{k=0}^{n-1} y_0^{(k)} \frac{x_{k+1}^k}{k!} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{x_{k+1}} (x_{k+1}-t)^{\alpha-1} f(t, y(t), y(t-\tau)) dt.$$

Se utiliza la aproximación $y(x_k) \approx y_h(x_k)$ para determinar la aproximación $y_h(x_k + 1)$

$$y_h(x_{k+1}) \approx \sum_{k=0}^{n-1} y_0^{(k)} \frac{x_{k+1}^k}{k!} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{x_{k+1}} (x_{k+1}-t)^{\alpha-1} f(t, y(t), y(t-\tau)) dt$$

y empleando la regla de cuadratura trapezoidal que aproxima la integral y sustituyendo $y(x_j) \approx y_h(x_j)$, se obtiene la fórmula correctora:

$$\begin{aligned} \bullet y_h(x_{k+1}) &= \sum_{k=0}^{n-1} y_0^{(k)} \frac{x_{k+1}^k}{k!} + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} f(x_{k+1}, y_h(x_{k+1}), y_h(x_{k+1} - \tau)) \\ &+ \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} \sum_{j=0}^k a_{j,k+1} f(x_j, y_h(x_j), y_h(x_j - \tau)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet y_h(x_{k+1}) &= \sum_{k=0}^{n-1} y_0^{(k)} \frac{x_{k+1}^k}{k!} + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} f(x_{k+1}, y_h(x_{k+1}), y_h(x_{k+1-i})) \\ &+ \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} \sum_{j=0}^k a_{j,k+1} f(x_j, y_h(x_j), y_h(x_{j-i})) \end{aligned}$$

donde

$$a_{j,k+1} = \begin{cases} k^{\alpha+1} - (k - \alpha)(k + 1)^\alpha & j = 0 \\ (k - j + 2)^{\alpha+1} + (k - j)^{\alpha+1} - 2(k - j + 1)^{\alpha+1} & 1 \leq j \leq k \\ 1 & j = k + 1 \end{cases}$$

Se aplica la regla del rectángulo del producto en $y_h(x_{k+1})$ para evaluar el siguiente término *predictor*:

$$\begin{aligned} y_h^P(x_{k+1}) &= g(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^k b_{j,k+1} f(x_j, y_h(x_j), y_h(x_j - \tau)) \\ &= g(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^k b_{j,k+1} f(x_j, y_h(x_j), y_h(x_{j-i})) \end{aligned}$$

donde

$$b_{j,k+1} = \frac{h^\alpha}{\alpha} ((k + 1 - j)^\alpha - (k - j)^\alpha).$$

El error de este método tiene la expresión:

$$\max_{j=0,1,\dots,N} |y(x_k) - y_h(x_k)| = O(h^p)$$

$$p = \min(2, 1 + \alpha).$$

En resumen, el método *Adams–Bashforth–Moulton* (ABM) que resuelve numéricamente la ecuaciones FDDE tiene las siguientes ecuaciones:

$$x \in [0, T] \quad \{x_k = kh\} \quad \begin{cases} k = -i, -(i-1), \dots, -1, 0, 1, 2, \dots, N \\ h := \frac{T}{N} \quad i = \frac{\tau}{h} \end{cases}$$

$$y_h(x_{k+1}) = \sum_{k=0}^{n-1} y_0^{(k)} \frac{x_{k+1}^k}{k!} + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} f(x_{k+1}, y_h^P(x_{k+1}), y_h(x_{k+1-i})) \\ + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} \sum_{j=0}^k a_{j,k+1} f(x_j, y_h(x_j), y_h(x_{j-i}))$$

$$y_h^P(x_{k+1}) = \sum_{k=0}^{n-1} y_0^{(k)} \frac{x_{k+1}^k}{k!} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^k b_{j,k+1} f(x_j, y_h(x_j), y_h(x_j - \tau))$$

$$a_{j,k+1} = \begin{cases} k^{\alpha+1} - (k-\alpha)(k+1)^\alpha & j = 0 \\ (k-j+2)^{\alpha+1} + (k-j)^{\alpha+1} - 2(k-j+1)^{\alpha+1} & 1 \leq j \leq k \\ 1 & j = k+1 \end{cases}$$

$$b_{j,k+1} = \frac{h^\alpha}{\alpha} ((k+1-j)^\alpha - (k-j)^\alpha).$$

3.3.2. Método Adams–Bashforth–Moulton para Sistemas FDDE (SFDDE)

El método *Adams–Bashforth–Moulton* (ABM) que resuelve numéricamente un sistema de ecuaciones diferenciales con retraso de orden fraccionario SFDDE se basa en el método para ecuaciones FDDE.

Sea el problema constituido por un conjunto de ecuaciones FDDE [BHAL11], [LEKD19]:

$$(P) \equiv \begin{cases} D^{(\alpha)} y_r(x) = f_r(x, y_1(x), \dots, y_r(x), & x \in [0, T] \quad 0 < \alpha \leq 1 \\ y_1(x-\tau), \dots, y_r(x-\tau)) \\ y_r(x) = g_r(x) & x \in [-\tau, 0] \\ y_r(0) = y_{r0} \end{cases}$$

$$r = 1, 2, \dots, m$$

La solución numérica aportada por el método *Adams–Bashforth–Moulton* (ABM) para un sistema de ecuaciones diferenciales con retraso de orden fraccionario (SFDDE) tiene las ecuaciones siguientes:

$$x \in [0, T] \quad \{x_k = kh\} \quad \begin{cases} k = -i, -(i-1), \dots, -1, 0, 1, 2, \dots, N \\ h := \frac{T}{N} \quad i = \frac{\tau}{h} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y_{r,h}(x_{k+1}) &= g_r(0) + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} f_r(x_{k+1}, y_{1,h}^P(x_{k+1}), \dots, y_{r,h}^P(x_{k+1}), \\ &\quad y_{1,h}(x_{k+1-i}), \dots, y_{r,h}(x_{k+1-i})) \\ &+ \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} \sum_{j=0}^k a_{j,k+1} f_r(x_j, y_{1,h}(x_j), \dots, y_{r,h}(x_j), \\ &\quad y_{1,h}(x_{j-i}), \dots, y_{r,h}(x_{j-i})) \end{aligned}$$

$$y_{r,h}^P(x_{k+1}) = g_r(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^k b_{j,k+1} f_r(x_j, y_{1,h}(x_j), \dots, y_{r,h}(x_j), \\ y_{1,h}(x_j - \tau), \dots, y_{r,h}(x_j - \tau))$$

$$r = 1, 2, \dots, m$$

$$a_{j,k+1} = \begin{cases} k^{\alpha+1} - (k-\alpha)(k+1)^\alpha & j = 0 \\ (k-j+2)^{\alpha+1} + (k-j)^{\alpha+1} - 2(k-j+1)^{\alpha+1} & 1 \leq j \leq k \\ 1 & j = k+1 \end{cases}$$

$$b_{j,k+1} = \frac{h^\alpha}{\alpha} ((k+1-j)^\alpha - (k-j)^\alpha).$$

Capítulo 4

4. Modelos Fraccionarios de la Interacción Glucosa-Insulina

4.1. Modelo Fraccionario con Retraso Glucosa-Insulina con Órdenes Incomensurables

Como ya sabemos del capítulo 1 a lo largo de la historia se ha intentado modelar la interacción que tiene la glucosa con la sangre con el fin de entender la diabetes y aprender a prevenirla.

En este caso el modelo analizado será el conocido como “*Modelo fraccionario con Retraso Glucosa-Insulina con Órdenes Incomensurables*” presentado en 2019 por los científicos Natchapon Lekdee, Sekson Sirisubtawee y Sanoe Koonprasert [LEKD19]. Este modelo está basado en “*El modelo dinámico generalizado*”, modelado y presentado por Li and Kuang [LI01] ya descrito en el primer capítulo.

El artículo, transforma y traslada al campo del cálculo fraccionario el modelo presentado por Li y Kuang. Para ello utiliza la derivada fraccionaria de Caputo, que contendrá la información acumulada de las derivadas ordinarias desde el punto inicial hasta el tiempo presente dependiendo del valor del orden de la derivada fraccionaria. Esto les permitirá utilizar la información acumulada de la tasa de cambio de funciones desconocidas que aparecen en el sistema además de los valores de dichas funciones en el momento actual y el anterior, debido a que como ya sabemos los métodos matemáticos fraccionarios nos permiten expresar efectos de memoria, historia y no locales. Además ya sabemos que el modelo dinámico de primer orden era asintóticamente estable, presentaba soluciones oscilantes que convergían en el régimen permanente, que eran sostenibles cuando los valores del parámetro a_4 y el retraso τ estaban ajustadas. En particular, si $a_4 > 0$ y τ pequeño, entonces, el régimen permanente positivo se volvía estable, mientras que si a_4 era relativamente pequeño y τ grande podrían aparecer soluciones periódicas.

Precisamente por esto, puede resultar de gran interés estudiar una versión con orden fraccionario del “*Modelo dinámico generalizado*” para poder investigar si los órdenes fraccionarios del nuevo modelo son un factor adicional afectando a los retrasos necesarios para la existencia de unas soluciones periódicas estables. Si se consigue variar las regiones de estabilidad del modelo cambiando el orden fraccionario de las ecuaciones, se podría por ejemplo, desde un punto de vista matemático, calcular el tiempo de retraso τ para que las concentraciones de glucosa e insulina en pacientes diabéticos alcancen niveles asintóticamente estables o niveles de oscilación sostenibles. Otra ventaja que supondría este modelo fraccionario, esta vez desde un punto de vista fisiológico, es que este modelo podría influenciar en el retraso de la acción entre la insulina y el plasma y su efecto en la producción de la

glucosa hepática además del rango del periodo de oscilación de la segregación de insulina.

4.1.1. Descripción del Modelo de Orden Fraccionario

A continuación se presenta el modelo dinámico fraccionario con la derivada fraccionaria de Caputo de ordenes $q_1, q_2 \in (0, 1]$:

$$\begin{aligned} {}^c D_a^{q_1} G(t) &= -a_1^{q_1} G(t) - \frac{\beta^{1-q_1} a_3 I(t) G(t)}{(\alpha_4 G(t)+1)} + \beta^{1-q_1} a_6 \\ {}^c D_a^{q_2} I(t) &= -a_2^{q_2} I(t) + \beta^{1-q_2} a_5 G(t - \tau) \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

que por conveniencia se transforma con las variables:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= a_1^{q_1} & \alpha_2 &= a_2^{q_2} & \alpha_3 &= \beta^{1-q_1} a_3 \\ \alpha_4 &= a_4 & \alpha_5 &= \beta^{1-q_2} a_5 & \alpha_6 &= \beta^{1-q_1} a_6 \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

Se obtiene el sistema:

$$(P) \equiv \begin{cases} {}^c D_a^{q_1} G(t) = -\alpha_1 G(t) - \frac{\alpha_3 I(t) G(t)}{(\alpha_4 G(t)+1)} + \alpha_6 \\ {}^c D_a^{q_2} I(t) = -\alpha_2 I(t) + \alpha_5 G(t - \tau) \end{cases} \quad (4.1.3)$$

Se recuerda que $G(t)$ [mg/dl] representa la variación de la glucosa en sangre y $I(t)$ [μ UI/ml] representa la concentración de insulina en sangre. Las condiciones iniciales del sistema son las mismas que las del modelo dinámico fraccionario.

Se puede observar como los nuevos parámetros son dependientes de los órdenes fraccionales q_1 y q_2 y la constante fraccional de tiempo β , que sirve para cuadrar las unidades a ambos lados de la ecuación. Estos parámetros mantienen el mismo significado biológico que del anterior modelo, pero sin embargo, esta vez se puede ir variando dichos valores vía q_1 y q_2 y β . A su vez, los términos β^{1-q_1} y β^{1-q_2} pueden ser considerados fisiológicamente como los parámetros que describen el comportamiento reológico en la mejora de la sensibilidad muscular y hepática a la acción de la insulina.

Una vez obtenido el modelo, para encontrar sus puntos de equilibrio se igualan tanto ${}^c D_a^{q_1} G(t) = 0$ como ${}^c D_a^{q_2} I(t) = 0$ y al resolver las ecuaciones obtenidas, se deduce el resultando:

$$\begin{aligned} G^* &= \frac{\left(\alpha_4 \alpha_6 - \alpha_1 + \sqrt{(\alpha_4 \alpha_6 - \alpha_1)^2 + 4 \left(\alpha_4 \alpha_1 - \frac{\alpha_3 \alpha_5}{\alpha_2} \right) \alpha_6} \right)}{2 \left(\alpha_4 \alpha_1 + \frac{\alpha_3 \alpha_5}{\alpha_2} \right)} \\ I^* &= \frac{\alpha_5}{\alpha_2} G^* \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

4.1.2. Soluciones no Negativas y Limitadas

▼ Teorema 4.1.1.

Todas las soluciones del problema de valor inicial, del sistema (P) con condiciones iniciales $G(t) \equiv G_0$ para $t \in [-\tau, 0]$ e $I(0) = I_0$ para $t > 0$, se mantienen en R_+^2 y son limitadas:

Demostración

Asumimos que existe un tiempo t_1 tal que $G(t_1) = 0$ y ${}^c D_a^{q_1} G(t) \leq 0$. Entonces tendremos que la primera ecuación del sistema:

$${}^c D_a^{q_1} G(t_1) = -\alpha_1 G(t_1) - \frac{\alpha_3 I(t_1) G(t_1)}{(\alpha_4 G(t_1) + 1)} + \alpha_6 = \alpha_6 > 0$$

Lo que contradice la primera asunción y nos muestra que $G(t) > 0$ para todo $t > t_1$ como se demuestra en el corolario 2.2.3.

De manera similar, asumimos que existe un tiempo t_2 tal que $I(t_2) = 0$ y que ${}^c D_a^{q_2} I(t_2) \leq 0$.

Entonces se tiene que la segunda ecuación del sistema:

$${}^c D_a^{q_2} I(t_2) = -\alpha_2 I(t_2) + \alpha_5 G(t_2 - \tau) = \alpha_5 G(t_2 - \tau).$$

Debido a que se sabe que $G(t_2 - \tau) > 0$, indudablemente se llega a la conclusión de que $I(t) > 0$ para todo $t > t_2$ utilizando el corolario 2.2.3.

Por ello queda demostrado que la solución del sistema fraccionario queda comprendido en R_+^2

En cuanto a que la solución queda limitada, se tiene de la primera ecuación

$${}^c D_a^{q_1} G(t_1) \leq -\alpha_1 G(t) + \alpha_6$$

Suponiendo que ${}^c D_a^{q_1} G(t_1) = -\alpha_1 G(t) + \alpha_6$ y que $G_1(0) = G(0)$.

Se considera la siguiente ecuación diferencial fraccionaria:

$${}^c D_a^{q_1} G_1(t_1) = -\alpha_1 G_1(t) + \alpha_6$$

Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación anterior, se deduce:

$$s^{q_1} \mathcal{G}_1(s) - s^{q_1-1} G_1(0) = -\alpha_1 \mathcal{G}_1(s) + \frac{\alpha_6}{s},$$

$$(s^{q_1} + \alpha_1) \mathcal{G}_1(s) = \frac{\alpha_6}{s} + s^{q_1-1} G_1(0),$$

$$\mathcal{G}_1(s) = \frac{\alpha_6}{s(s^{q_1} + \alpha_1)} + G_1(0) \frac{s^{q_1-1}}{s^{q_1} + \alpha_1}$$

Donde $\mathcal{G}_1(s) = \mathcal{L}\{G_1(t)\}$. Haciendo la transformada inversa de la expresión:

$$\begin{aligned} G_1(t) &= \alpha_6 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s^{q_1} + \alpha_1)} \right\} + G_1(0) \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^{q_1-1}}{s^{q_1} + \alpha_1} \right\} \\ &= \alpha_6 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^{-1}}{(s^{q_1} + \alpha_1)} \right\} + G_1(0) \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^{q_1-1}}{s^{q_1} + \alpha_1} \right\} \\ &= \alpha_6 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^{q_1-(q_1-1)}}{(s^{q_1} + \alpha_1)} \right\} + G_1(0) \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^{q_1-1}}{s^{q_1} + \alpha_1} \right\} \end{aligned}$$

Aplicando las ecuaciones 2.2.11 e 2.2.12 a lo anterior tenemos:

$$G_1(t) = \alpha_6 t^{q_1} E_{q_1, q_1+1}(-\alpha_1 t^{q_1}) + G_0 E_{q_1, 1}(-\alpha_1 t^{q_1})$$

Donde $E_{q_1, \beta}(z)$ es la función de dos parámetros Mittag-Leffer definida en 2.2.9 y 2.2.10. Debido al lema 2.2.1 se tiene:

$$0 \leq G(t) \leq G_1(t) = \alpha_6 t^{q_1} E_{q_1, q_1+1}(-\alpha_1 t^{q_1}) + G_0 E_{q_1, 1}(-\alpha_1 t^{q_1}), \quad \forall t > 0.$$

A continuación se lleva los términos $E_{q_1, 1}(-\alpha_1 t^{q_1})$ y $t^{q_1} E_{q_1, q_1+1}(-\alpha_1 t^{q_1})$ a $t \rightarrow \infty$. Así se tiene que considerar el comportamiento asintótico de las funciones anteriores:

$$E_{q_1}(-\alpha_1 t^{q_1}) = E_{q_1, 1}(-\alpha_1 t^{q_1}) \sim - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_1^{-k} (-t)^{-q_1 k}}{\Gamma(1-q_1 k)}$$

$$t^{q_1} E_{q_1, q_1+1}(-\alpha_1 t^{q_1}) \sim -t^{q_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_1^{-k} (-t)^{-q_1 k}}{\Gamma(q_1+1-q_1 k)}.$$

Como se puede observar las funciones cuando $t \rightarrow \infty$ tienden a 0 y a $\frac{1}{\alpha_1}$, respectivamente. Así $G_1(t) \rightarrow \frac{\alpha_6}{\alpha_1}$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Consecuentemente debido a la desigualdad:

$$0 \leq G(t) \leq G_1(t) = \alpha_6 t^{q_1} E_{q_1, q_1+1}(-\alpha_1 t^{q_1}) + G_0 E_{q_1, 1}(-\alpha_1 t^{q_1}), \quad \forall t > 0.$$

se tiene que $G(t) \rightarrow \frac{\alpha_6}{\alpha_1}$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Y por consiguiente existe una constante $M > 0$ tal que $\|G(t)\| \leq M$. Para la segunda ecuación del modelo se tiene que:

$$c D_a^{q_2} I(t) = -\alpha_2 I(t) + \alpha_5 G(t - \tau) \leq -\alpha_2 I(t) + \alpha_5 M.$$

Aplicando el mismo razonamiento que en la primera ecuación se obtiene:

$$0 \leq I(t) \leq I_1(t) = \alpha_5 M t^{q_2} E_{q_2, q_2+1}(-\alpha_2 t^{q_2}) + I_0 E_{q_2, 1}(-\alpha_2 t^{q_2}), \quad \forall t > 0.$$

y

$$I(t) \rightarrow \frac{\alpha_5 M}{\alpha_2} \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

4.1.3. Resultados Principales

En esta sección se explican las condiciones necesarias para que aparezca la bifurcación de Hopf en el modelo fraccionario estudiado.

Para ello se lineariza el sistema originando la ecuación:

$$\begin{cases} c D_a^{q_1} x(t) = -m_1 x(t) - m_2 y(t) \\ c D_a^{q_2} y(t) = -\alpha_2 y(t) - \alpha_5 x(t - \tau) \end{cases} \quad (4.1.5)$$

donde

$$\begin{cases} m_1 = \frac{\alpha_3 I^*}{(\alpha_4 G^* + 1)^2} + \alpha_1 \\ m_2 = \frac{\alpha_3 G^*}{\alpha_4 G^* + 1} \end{cases} \quad (4.1.6)$$

Realizando la ecuación característica del sistema

$$\begin{vmatrix} s^{q_1} + m_1 & m_2 \\ -\alpha_5 e^{-s\tau} & s^{q_2} + \alpha_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (4.1.7)$$

y sustituyendo $s = iw = \omega \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \right)$ como raíz del sistema cuando $\omega > 0$ llegamos a las expresiones:

$$\begin{aligned}\cos(\omega\tau) = G_1(\omega) &= -\frac{\omega^{q_1+q_2} \cos\left(\frac{(q_1+q_2)\pi}{2}\right) + \alpha_2 \omega^{q_1} \cos\left(q_1 \frac{\pi}{2}\right) + m_1 \omega^{q_2} \cos\left(q_2 \frac{\pi}{2}\right) + m_1 b_2}{\alpha_5 m_2} \\ \text{sen}(\omega\tau) = G_2(\omega) &= \frac{\omega^{q_1+q_2} \text{sen}\left(\frac{(q_1+q_2)\pi}{2}\right) + \alpha_2 \omega^{q_1} \text{sen}\left(q_1 \frac{\pi}{2}\right) + m_1 \omega^{q_2} \text{sen}\left(q_2 \frac{\pi}{2}\right)}{\alpha_5 m_2}\end{aligned}$$

de donde despejamos la frecuencia crítica ω_0 que no es más que la solución real de la ecuación:

$$G_1(\omega)^2 + G_2(\omega)^2 = 1. \quad (4.1.9)$$

Por último para calcular el punto de bifurcación τ_0 lo obtendremos a partir de la expresión $\cos\omega\tau = G_1(\omega)$ que despejada:

$$\tau_0 = \frac{1}{\omega_0} (\arccos(G_1(\omega_0))) \quad (4.1.10)$$

Por último obtendríamos la hipótesis de la ocurrencia de la bifurcación de Hopf que viene dada por (H1) $\frac{R_1 R_2 + I_1 I_2}{R_2^2 + I_2^2} \neq 0$ probada en el documento [LEKD19] y en el que se llega a la expresión:

$$\text{Re}\left[\frac{ds}{d\tau}\right]_{\tau=\tau_0, \omega=\omega_0} = \frac{R_1 R_2 + I_1 I_2}{R_2^2 + I_2^2} \neq 0 \quad (4.1.11)$$

con:

$$\begin{aligned}R_1 &= -\alpha_5 m_2 \omega_0^2 \cos(\tau_0 \omega_0) \\ \bullet I_1 &= \alpha_5 m_2 \omega_0^2 \sin(\tau_0 \omega_0) \\ \bullet R_2 &= \\ & q_1 (\omega_0^2)^{\frac{1}{2}(q_1+q_2)} \cos\left(\frac{1}{2} \pi (q_1 + \alpha q_2)\right) + q_2 (\omega_0^2)^{\frac{1}{2}(q_1+q_2)} \cos\left(\frac{1}{2} \pi (q_1 + \alpha q_2)\right) \\ & + q_1 \alpha_2 (\omega_0^2)^{\frac{q_1}{2}} \cos\left(\frac{\pi q_1}{2}\right) - \alpha_5 m_2 \tau \omega_0 \sin(\tau \omega_0) + q_2 m_1 (\omega_0^2)^{\frac{q_2}{2}} \cos\left(\frac{\pi q_2}{2}\right) \\ \bullet I_2 &= q_1 (\omega_0^2)^{\frac{1}{2}(q_1+q_2)} \sin\left(\frac{1}{2} \pi (q_1 + q_2)\right) + q_2 (\omega_0^2)^{\frac{1}{2}(q_1+q_2)} \sin\left(\frac{1}{2} \pi (q_1 + q_2)\right) + \\ & q_1 \alpha_2 (\omega_0^2)^{\frac{q_1}{2}} \sin\left(\frac{\pi q_1}{2}\right) - \alpha_5 m_2 \tau \omega_0 \cos(\tau \omega_0) + q_2 m_1 (\omega_0^2)^{\frac{q_2}{2}} \sin\left(\frac{\pi q_2}{2}\right)\end{aligned} \quad (4.1.12)$$

4.1.4. Resultados Numéricos y Simulación

Con el fin de resolver numéricamente el sistema de ecuaciones diferenciales fraccionarias con retraso (SFDDE) que modeliza el modelo fraccionario del sistema dinámico Glucosa-Insulina propuesto, problema (P), se describe el esquema predictor-corrector de tipo Adams-Bashforth-Moulton que servirá de base en la simulación de los ejemplos propuestos.

4.1.5. Resultados Numéricos

En esta sección se proporcionan varios ejemplos numéricos que permiten ilustrar y verificar los resultados teóricos propuestos.

Se simula el sistema (P) del modelo fraccionario de la dinámica Glucosa-Insulina con el esquema predictor-corrector de tipo Adams-Bashforth-Moulton con el tamaño de paso h y los parámetros indicados en cada caso.

En la Tabla 4.1 se representan los valores de los parámetros b_k y los órdenes de derivación fraccionarios α_1 y α_2 para cada caso.

Tabla 4.1. Parámetros físicos del modelo.

Casos	q_1	q_2	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	$G_0[\text{mg/dl}]$	$I_0[\text{mU/l}]$
I	1	1	0.0001	0.1262	0.0000564	0.01	0.074	1.93	87	60
II	0.92	0.92	0.00020893	0.148927	0.0000564	0.01	0.074	1.93	87	60
III	0.92	0.95	0.00020893	0.139961	0.0000564	0.01	0.074	1.93	87	60
IV	0.92	0.72	0.00020893	0.225301	0.0000564	0.01	0.074	1.93	87	60

A continuación se estudiarán a través de ejemplos, los diferentes casos propuestos en la tabla 4.1.

Aclaración: por comodidad a la hora de realizar el código los parámetros α_i pasan a ser b_i y los órdenes fraccionarios q_i pasan a ser α_i

■ Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Fraccionarias con Retraso (SFDDE)

■ Problema 4.1.1. Modelo de Interacción Glucosa-Insulina con un SFDDE.

Sea el sistema de ecuaciones diferenciales fraccionarias con retraso SFDDE que representa el modelo de interacción de glucosa-insulina con órdenes inconmensurables:

$$(P) \equiv \begin{cases} D^{(\alpha_1)} y_1(x) = -b_1 y_1(x) - \frac{b_3 y_1(x) y_2(x)}{b_4 y_1(x)+1} + b_6 & x \in (0, T), 0 < \alpha \leq 1 \\ D^{(\alpha_2)} y_2(x) = -b_2 y_2(x) + b_5 y_1(x - \tau) & \tau \geq 0 \\ y(x) = \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_0 \\ I_0 \end{pmatrix} & x \in [-\tau, 0] \\ y(0) = \begin{pmatrix} G_0 \\ I_0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Se quiere estudiar el impacto del tiempo de retraso τ en la dinámica del sistema (P) y se requiere calcular el punto de bifurcación τ_0 y la velocidad angular ω_0 empleando varios conjuntos de órdenes fraccionarios α_1 y α_2 .

Calcúlense para cada conjunto de datos dados los siguientes parámetros:

- (i) El punto de equilibrio $(G^*, I^*) = (y_1^*, y_2^*)$.
- (ii) Los puntos de bifurcación τ_0 y la velocidad angular ω_0 .
- (iii) La parte real de la derivada $\frac{ds}{d\tau}$ evaluada en $\tau = \tau_0$ y $\omega = \omega_0$:

$$\operatorname{Re}\left[\frac{ds}{d\tau}\right]_{\tau=\tau_0, \omega=\omega_0} = \left[\frac{M(s)}{N(s)}\right]_{\tau=\tau_0, \omega=\omega_0} = \left[\frac{R_1 R_2 + I_1 I_2}{R_2^2 + I_2^2}\right]_{\tau=\tau_0, \omega=\omega_0} \neq 0.$$

Tabla de valores y fórmulas:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
0.0001	0.1262	0.0000564	0.01	0.074	1.93

Constante de tiempo fraccionaria $\beta = 1$.

$$\begin{cases} b_1 = a_1^{\alpha_1} & b_2 = a_2^{\alpha_2} & b_3 = \beta^{1-\alpha_1} a_3 \\ b_4 = a_4 & b_5 = \beta^{1-\alpha_2} a_5 & b_6 = \beta^{1-\alpha_1} a_6 \end{cases}$$

Casos	α_1	α_2	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6
I	1	1	0.0001	0.1262	0.0000564	0.01	0.074	1.93
II	0.92	0.92	0.0002	0.1489	0.0000564	0.01	0.074	1.93
III	0.92	0.95	0.0002	0.1399	0.0000564	0.01	0.074	1.93
IV	0.92	0.72	0.0002	0.2253	0.0000564	0.01	0.074	1.93

SOLUCIÓN

(a)

α_1	α_2	G^*	I^*	ω_0	τ_0	$\operatorname{Re}\left[\frac{ds}{d\tau}\right]_{\tau=\tau_0, \omega=\omega_0}$
1	1	650.59	381.49	0.002825	607.92	1.69551×10^{-6}
0.92	0.92	722.65	359.08	0.001382	1365.60	3.23853×10^{-7}
0.92	0.95	686.41	362.92	0.001469	1285.91	3.65018×10^{-7}
0.92	0.72	1018.09	334.39	0.000903	2089.43	1.37351×10^{-7}

■ Problema 4.1.2. Modelo de Interacción Glucosa-Insulina con un SFDDE.

Caso I. ([LEKD19])

Sea el sistema de ecuaciones diferenciales fraccionarias con retraso SFDDE que representa el modelo de interacción de glucosa-insulina con órdenes inconmensurables:

$$(P) \equiv \begin{cases} D^{(\alpha_1)} y_1(x) = -b_1 y_1(x) - \frac{b_3 y_1(x) y_2(x)}{b_4 y_1(x)+1} + b_6 & x \in (0, T), 0 < \alpha \leq 1 \\ D^{(\alpha_2)} y_2(x) = -b_2 y_2(x) + b_5 y_1(x - \tau) & \tau \geq 0 \\ y(x) = \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 87 \\ 60 \end{pmatrix} & x \in [-\tau, 0] \\ y(0) = \begin{pmatrix} G_0 \\ I_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 87 \\ 60 \end{pmatrix} \end{cases}$$

(i) Calcúlese la solución numérica mediante el método de *Adams–Bashforth–Moulton fraccionario con retraso* (ABMFR) tomando los valores de los parámetros dados.

(ii) Representétese la solución del método ABMFR en el intervalo $[0, T]$, y el diagrama de fases en el plano $y(x)$, $y(x - \tau)$.

• Punto de equilibrio positivo: $(G^*, I^*) = (650.59, 381.49)$

• Punto de bifurcación: $\tau_0 = 607.92$.

(a) Caso I:

α_1	α_2	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	G_0	I_0	τ
1	1	0.0001	0.1262	0.0000564	0.01	0.074	1.93	87	60	400

$[0, T] = [0, 12\,000]$ min.

(b) Caso I:

α_1	α_2	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	G_0	I_0	τ
1	1	0.0001	0.1262	0.0000564	0.01	0.074	1.93	87	60	700

$[0, T] = [0, 12\,000]$ min.

Indicación:

(i) El punto de equilibrio positivo $(G^*, I^*) = (650.59, 381.49)$ es *asintóticamente estable* cuando $\tau = 400 < \tau_0 = 607.92$.

(ii) El punto de equilibrio positivo $(G^*, I^*) = (650.59, 381.49)$ es *inestable* para $\tau = 700 > \tau_0 = 607.92$ y ocurre una bifurcación de Hopf en el punto de equilibrio.

SOLUCIÓN

(a)

Caso I.

α_1	α_2	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	G_0	I_0	τ
1	1	0.0001	0.1262	0.0000564	0.01	0.074	1.93	87	60	400

Método de *Adams–Bashforth–Moulton Fraccionario con Retraso* (ABMFR) para Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Fraccionarias con Retraso (SFDDE).

$$(P) \equiv \begin{cases} D^{(\alpha)} y_r(x) = f_r(x, y_1(x), \dots, y_r(x), & x \in [0, T] \quad 0 < \alpha \leq 1 \\ y_1(x - \tau), \dots, y_r(x - \tau)) \\ y_r(x) = g_r(x) & x \in [-\tau, 0] \\ y_r(0) = y_{r0} \end{cases}$$

$$r = 1, 2, \dots, m$$

$$(P) \equiv \left(\begin{array}{l} D y_1(x) = -\frac{0.0000564 y_2(x) y_1(x)}{0.01 y_1(x)+1} - 0.0001 y_1(x) + 1.93 \\ D y_2(x) = 0.074 y_1(x - 400) - 0.1262 y_2(x) \\ (y_1(0) = 87 \quad y_2(0) = 60) \end{array} \right) x \in [0, T]$$

$$\left(\begin{array}{l} f_1(x, y_r(x), y_r(x-\tau)) = -\frac{0.0000564 y_2(x) y_1(x)}{0.01 y_1(x)+1} - 0.0001 y_1(x) + 1.93 \\ f_2(x, y_r(x), y_r(x-\tau)) = 0.074 y_1(x - 400) - 0.1262 y_2(x) \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ll} [A, B] = & [0, 12000] \quad (\text{intervalo } x) \\ \{\alpha, n = [\alpha]\} = & \{1, 1\} \\ \tau = & 400 \\ h = & 10 \quad \text{Tamaño del paso} \\ m = & 2 \quad \text{Número de ecuaciones} \end{array} \right)$$

Proceso iterativo.

• $k = 119$

k	x_k	y_{1k}^P	y_{1k}	y_{2k}^P	y_{2k}
119	1190	640.046	653.54	585.56	572.319
120	1200	630.215	643.637	583.615	570.751

• $k = 599$

k	x_k	y_{1k}^P	y_{1k}	y_{2k}^P	y_{2k}
599	5990	658.921	667.541	387.374	371.739
600	6000	658.588	667.213	387.558	371.938

• $k = 1199$

k	x_k	y_{1k}^P	y_{1k}	y_{2k}^P	y_{2k}
1199	11990	650.504	658.963	381.332	365.968
1200	12000	650.512	658.971	381.331	365.967

Tabla de puntos (x_k, y_{rk}^P) y (x_k, y_{rk}) ($r = 1, 2, \dots, m$).

k	x_k	y_{1k}^P	y_{2k}^P
120	1200	643.6365029240	570.7510734660
240	2400	775.0697635110	354.5963309000
360	3600	639.7902245440	328.0533951720
480	4800	639.1416232840	376.5241062750
600	6000	667.2128898670	371.9375953240
720	7200	661.5268987340	362.7784995170
840	8400	656.8535311170	365.6008154580
960	9600	658.9939873940	366.9259562180
1080	10800	659.5262361390	366.0657683760
1200	12000	658.9713981870	365.9668573210

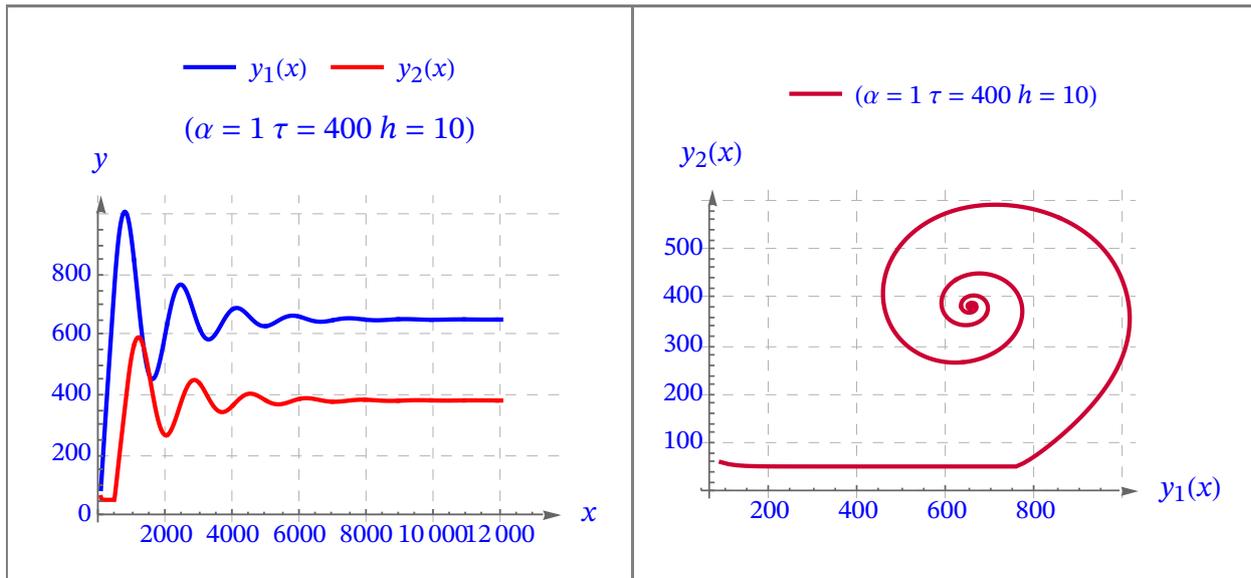
k	x_k	y_{1k}	y_{2k}
0	0	87	60
120	1200	630.2145797070	583.6150714880
240	2400	766.6560214730	374.4815253110
360	3600	632.3004147720	343.0764656150
480	4800	630.4712883040	391.0073153280
600	6000	658.5884398850	387.5579746310
720	7200	653.1398689390	378.2750195430
840	8400	648.4080596460	380.8868704120
960	9600	650.5111586100	382.2810210760
1080	10800	651.0632494390	381.4504375190
1200	12000	650.5121042770	381.3310886060

$$y(12\ 000) \approx y_{1200} = 650.5121042770$$

Solución aproximada del sistema SFDDE

$$y_r(x) \ (h = 10)$$

calculada con el método *Adams–Bashforth–Moulton Fraccionario con Retraso*.



(b)

Caso I.

α_1	α_2	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	G_0	I_0	τ
1	1	0.0001	0.1262	0.0000564	0.01	0.074	1.93	87	60	700

Método de *Adams–Bashforth–Moulton Fraccionario con Retraso* (ABMFR) para Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Fraccionarias con Retraso (SFDDE).

$$(P) \equiv \begin{cases} D^{(\alpha)} y_r(x) = f_r(x, y_1(x), \dots, y_r(x)), & x \in [0, T] \quad 0 < \alpha \leq 1 \\ y_1(x - \tau), \dots, y_r(x - \tau) \\ y_r(x) = g_r(x) & x \in [-\tau, 0] \\ y_r(0) = y_{r0} \end{cases}$$

$$r = 1, 2, \dots, m$$

$$(P) \equiv \left(\begin{array}{l} D y_1(x) = -\frac{0.0000564 y_2(x) y_1(x)}{0.01 y_1(x)+1} - 0.0001 y_1(x) + 1.93 \\ D y_2(x) = 0.074 y_1(x - 700) - 0.1262 y_2(x) \end{array} \right) x \in [0, T] \\ (y_1(0) = 87 \quad y_2(0) = 60)$$

$$\left(\begin{array}{l} f_1(x, y_r(x), y_r(x-\tau)) = -\frac{0.0000564 y_2(x) y_1(x)}{0.01 y_1(x)+1} - 0.0001 y_1(x) + 1.93 \\ f_2(x, y_r(x), y_r(x-\tau)) = 0.074 y_1(x - 700) - 0.1262 y_2(x) \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ll} [A, B] = & [0, 12000] \quad (\text{intervalo } x) \\ \{\alpha, n = [\alpha]\} = & \{1, 1\} \\ \tau = & 700 \\ h = & 10 \quad \text{Tamaño del paso} \\ m = & 2 \quad \text{Número de ecuaciones} \end{array} \right)$$

Tabla de puntos (x_k, y_{rk}^P) y (x_k, y_{rk}) ($r = 1, 2, \dots, m$).

k	x_k	y_{1k}^P	y_{2k}^P
120	1200	1369.4488044300	499.3359153630
240	2400	237.9713805800	265.9135966880
360	3600	1269.2383481400	514.9044153930
480	4800	269.6703745710	244.1358528290
600	6000	1227.5006761900	524.1502124460
720	7200	287.9216452360	230.5584861410
840	8400	1204.2184730000	532.8051219760
960	9600	301.3761347470	219.4403015440
1080	10800	1187.6203125700	541.2864920800
1200	12000	313.0765482270	209.2560245140

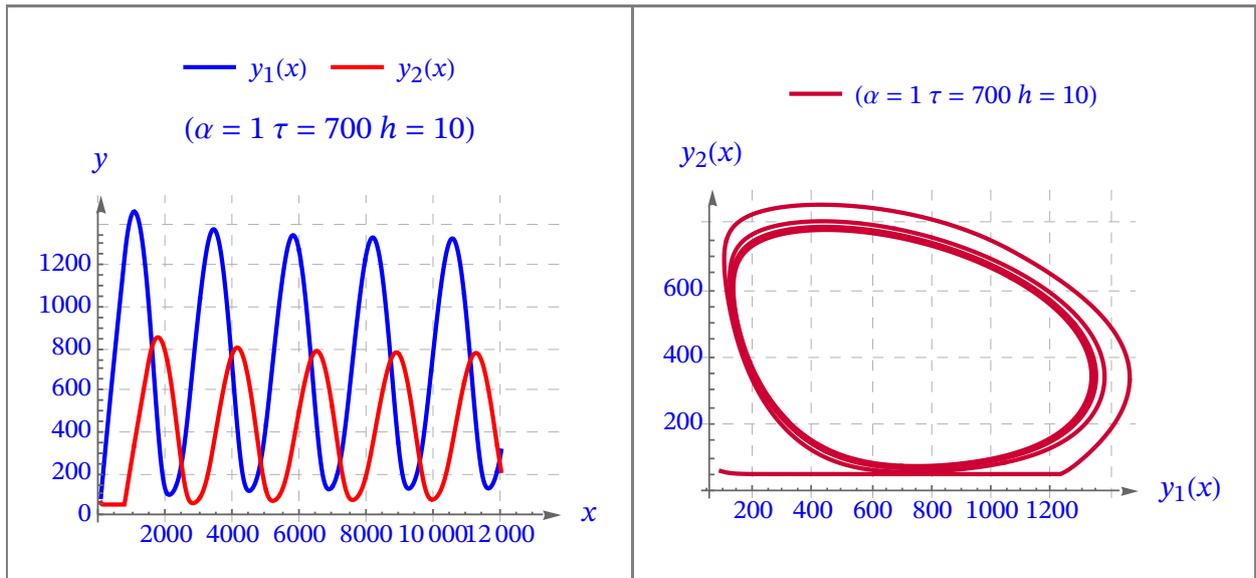
k	x_k	y_{1k}	y_{2k}
0	0	87	60
120	1200	1356.4717634100	527.2792828000
240	2400	233.4030755580	264.7658384920
360	3600	1255.9745774300	542.1485453830
480	4800	265.3439657420	245.2312330290
600	6000	1214.0500255000	550.8638870720
720	7200	283.7826693250	232.5766140750
840	8400	1190.5739854100	559.2455421570
960	9600	297.4096673280	221.9922978770
1080	10800	1173.7783747900	567.5502486320
1200	12000	309.2782308250	212.2094093410

$$y(12\ 000) \approx y_{1200} = 309.2782308250$$

Solución aproximada del sistema SFDDE

$$y_r(x) \ (h = 10)$$

calculada con el método *Adams–Bashforth–Moulton Fraccionario con Retraso*.



■ **Problema 4.1.3. Caso II.** ([LEKD19])

Sea el sistema de ecuaciones diferenciales fraccionarias con retraso SFDDE que representa el modelo de interacción de glucosa-insulina con órdenes incommensurables:

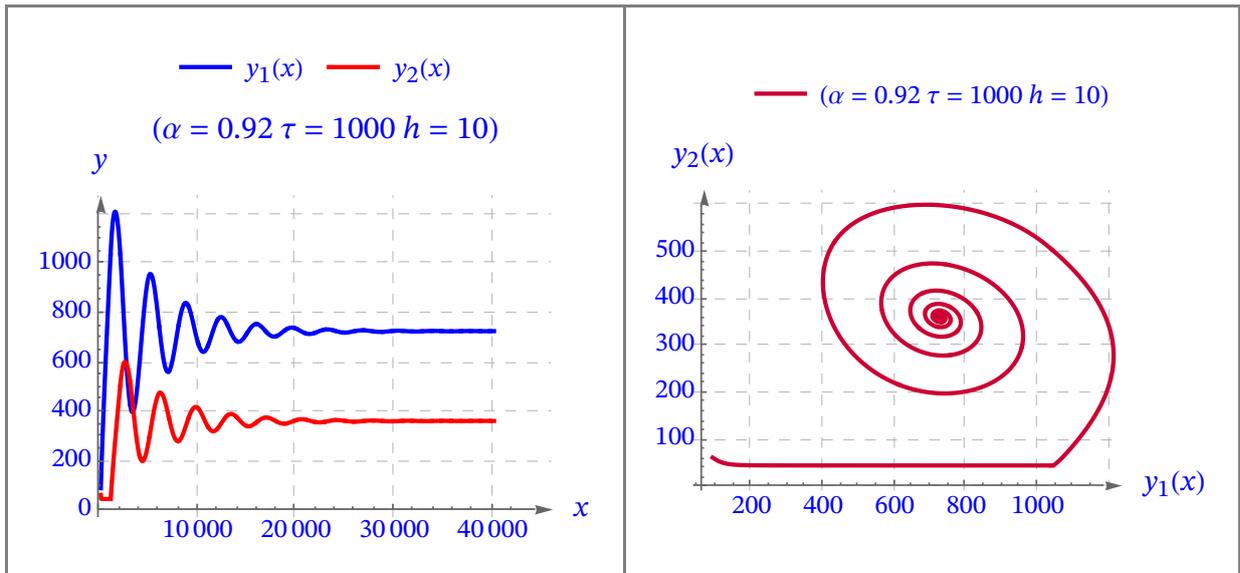
$$(P) \equiv \begin{cases} D^{(\alpha_1)} y_1(x) = -b_1 y_1(x) - \frac{b_3 y_1(x) y_2(x)}{b_4 y_1(x)+1} + b_6 & x \in (0, T), 0 < \alpha \leq 1 \\ D^{(\alpha_2)} y_2(x) = -b_2 y_2(x) + b_5 y_1(x - \tau) & \tau \geq 0 \\ y(x) = \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 87 \\ 60 \end{pmatrix} & x \in [-\tau, 0] \\ y(0) = \begin{pmatrix} G_0 \\ I_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 87 \\ 60 \end{pmatrix} \end{cases}$$

(i) Representétese la solución del método ABMFR en el intervalo $[0, T]$, y el diagrama de fases en el plano $y(x), y(x - \tau)$.

(a) Caso II:

α_1	α_2	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	G_0	I_0	τ
0.92	0.92	0.00020893	0.148927	0.0000564	0.01	0.074	1.93	87	60	1000

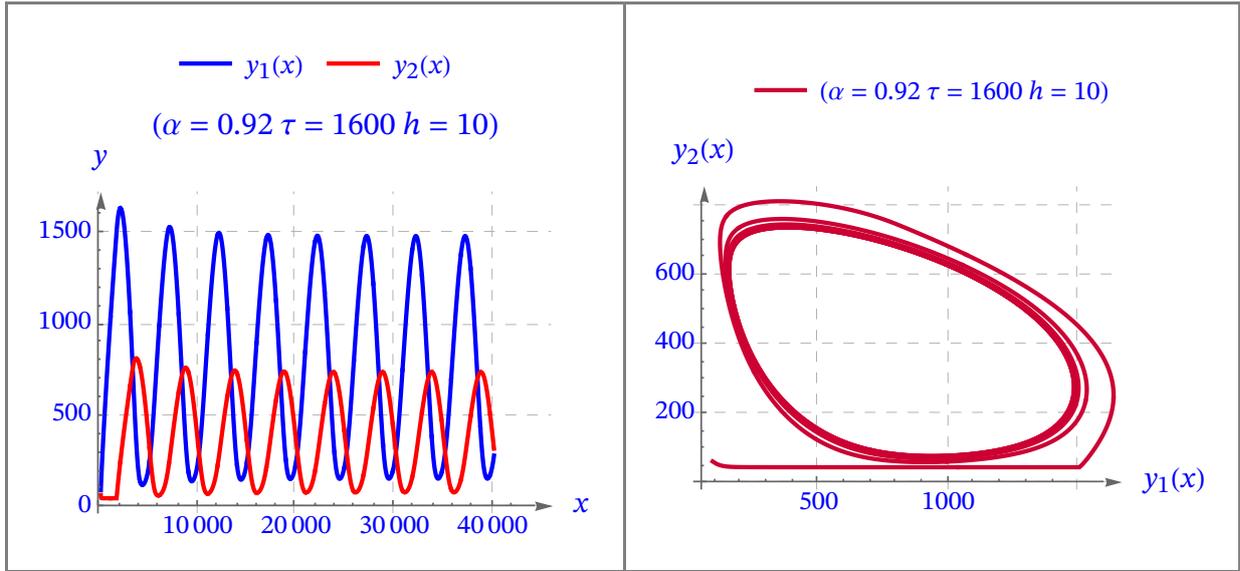
$[0, T] = [0, 40\,000]$ min.



(b) Caso II:

α_1	α_2	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	G_0	I_0	τ
0.92	0.92	0.00020893	0.148927	0.0000564	0.01	0.074	1.93	87	60	1600

$[0, T] = [0, 40\,000]$ min.



Indicación:

- (i) El punto de equilibrio positivo (G^*, I^*) es *asintóticamente estable* cuando $\tau = 1000 < \tau_0 = 1365.60$.
- (ii) El punto de equilibrio positivo (G^*, I^*) es *inestable* para $\tau = 1600 > \tau_0 = 1365.60$ y ocurre una bifurcación de Hopf en el punto de equilibrio.

■ **Problema 4.1.4. Caso III.** ([LEKD19])

Sea el sistema de ecuaciones diferenciales fraccionarias con retraso SFDDE que representa el modelo de interacción de glucosa-insulina con órdenes inconmensurables:

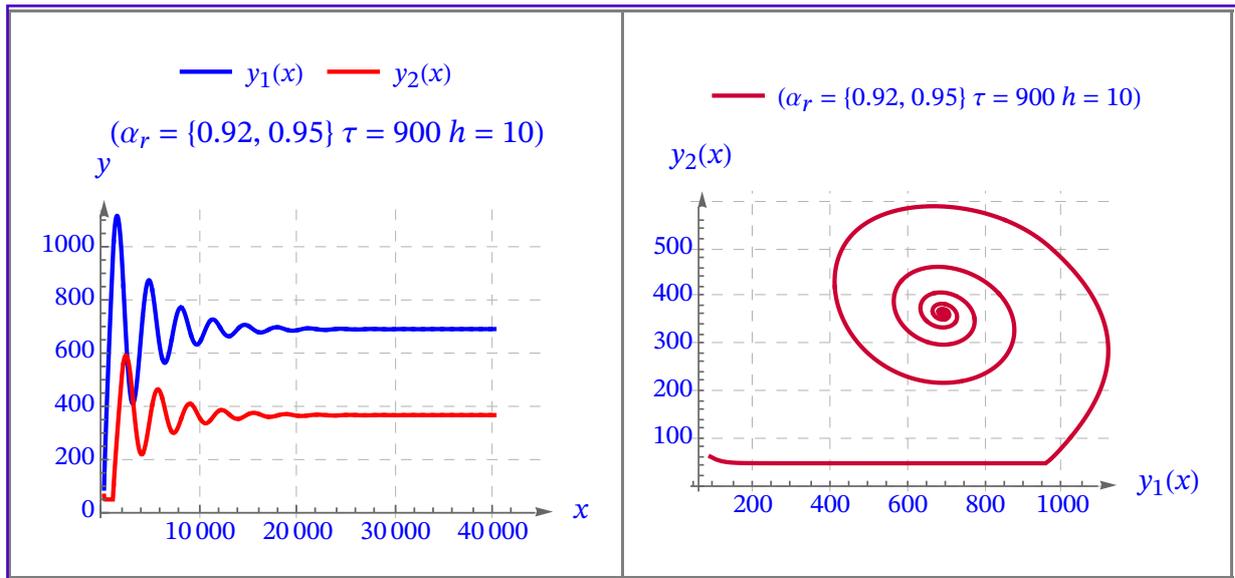
$$(P) \equiv \begin{cases} D^{(\alpha_1)} y_1(x) = -b_1 y_1(x) - \frac{b_3 y_1(x) y_2(x)}{b_4 y_1(x)+1} + b_6 & x \in (0, T), 0 < \alpha \leq 1 \\ D^{(\alpha_2)} y_2(x) = -b_2 y_2(x) + b_5 y_1(x - \tau) & \tau \geq 0 \\ y(x) = \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 87 \\ 60 \end{pmatrix} & x \in [-\tau, 0] \\ y(0) = \begin{pmatrix} G_0 \\ I_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 87 \\ 60 \end{pmatrix} \end{cases}$$

(i) Representétese la solución del método ABMFR en el intervalo $[0, T]$, y el diagrama de fases en el plano $y(x), y(x - \tau)$.

(a) Caso III:

α_1	α_2	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	G_0	I_0	τ
0.92	0.95	0.00020893	0.139961	0.0000564	0.01	0.074	1.93	87	60	900

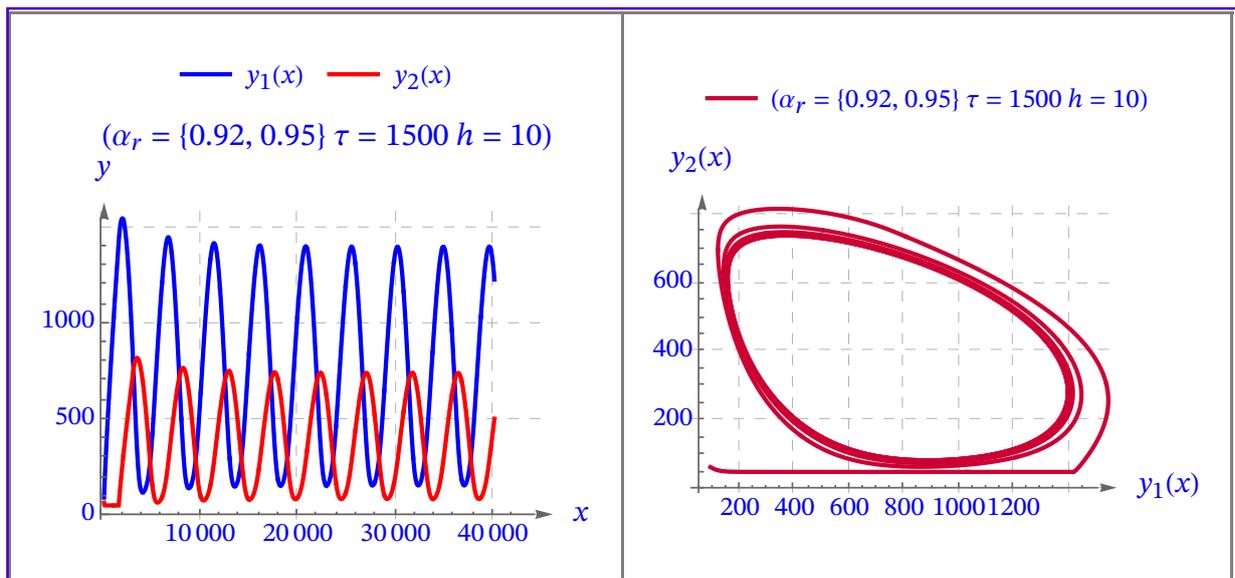
$[0, T] = [0, 40\,000]$ min.



(b) Caso III:

α_1	α_2	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	G_0	I_0	τ
0.92	0.95	0.00020893	0.139961	0.0000564	0.01	0.074	1.93	87	60	1500

$[0, T] = [0, 40\,000]$ min.



Indicación:

(i) El punto de equilibrio positivo (G^*, I^*) es *asintóticamente estable* cuando $\tau = 900 < \tau_0 = 1285.91$.

(ii) El punto de equilibrio positivo (G^*, I^*) es *inestable* para $\tau = 1500 > \tau_0 = 1285.91$ y ocurre una bifurcación de Hopf en el punto de equilibrio.

■ **Problema 4.1.5. Caso IV.** ([LEKD19])

Sea el sistema de ecuaciones diferenciales fraccionarias con retraso SFDDE que representa el modelo de interacción de glucosa-insulina con órdenes inconmensurables:

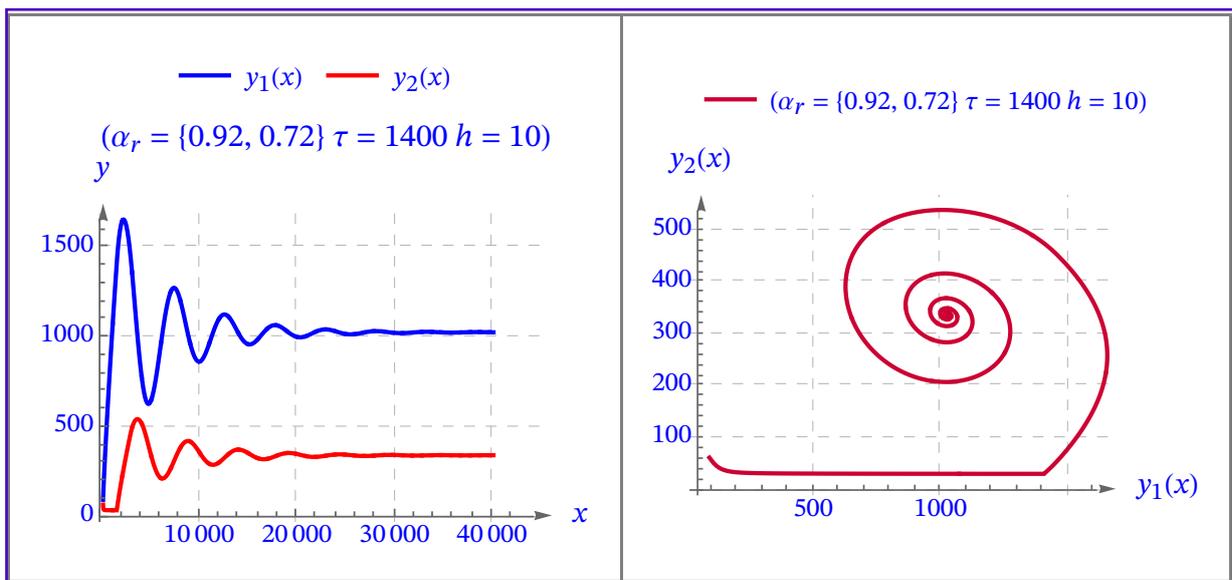
$$(P) \equiv \begin{cases} D^{(\alpha_1)} y_1(x) = -b_1 y_1(x) - \frac{b_3 y_1(x) y_2(x)}{b_4 y_1(x)+1} + b_6 & x \in (0, T), 0 < \alpha \leq 1 \\ D^{(\alpha_2)} y_2(x) = -b_2 y_2(x) + b_5 y_1(x - \tau) & \tau \geq 0 \\ y(x) = \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 87 \\ 60 \end{pmatrix} & x \in [-\tau, 0] \\ y(0) = \begin{pmatrix} G_0 \\ I_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 87 \\ 60 \end{pmatrix} \end{cases}$$

(i) Representétese la solución del método ABMFR en el intervalo $[0, T]$, y el diagrama de fases en el plano $y(x), y(x - \tau)$.

(a) Caso IV:

α_1	α_2	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	G_0	I_0	τ
0.92	0.72	0.00020893	0.225301	0.0000564	0.01	0.074	1.93	87	60	1400

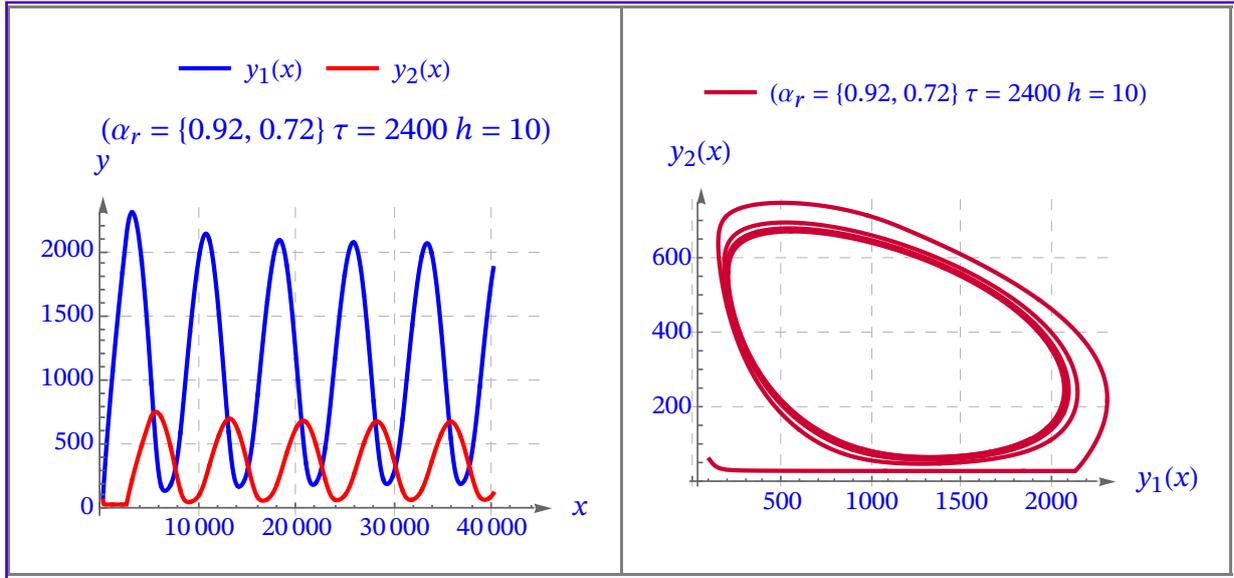
$[0, T] = [0, 40\,000]$ min.



(b) Caso IV:

α_1	α_2	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	G_0	I_0	τ
0.92	0.72	0.00020893	0.225301	0.0000564	0.01	0.074	1.93	87	60	2400

$[0, T] = [0, 40\,000]$ min.



Indicación:

(i) El punto de equilibrio positivo (G^*, I^*) es *asintóticamente estable* cuando $\tau = 1400 < \tau_0 = 2089$.

(ii) El punto de equilibrio positivo (G^*, I^*) es *inestable* para $\tau = 2400 > \tau_0 = 2089$ y ocurre una bifurcación de Hopf en el punto de equilibrio.

■ **Problema 4.1.6.** ([LEKD19])

Sea el sistema de ecuaciones diferenciales fraccionarias con retraso SFDDE que representa el modelo de glucosa-insulina con órdenes inconmensurables:

$$(P) \equiv \begin{cases} D^{(\alpha_1)} y_1(x) = -b_1 y_1(x) - \frac{b_3 y_1(x) y_2(x)}{b_4 y_1(x)+1} + b_6 & x \in (0, T), 0 < \alpha \leq 1 \\ D^{(\alpha_2)} y_2(x) = -b_2 y_2(x) + b_5 y_1(x - \tau) & \tau \geq 0 \\ y(x) = \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{pmatrix} & x \in [-\tau, 0] \\ y(0) = \begin{pmatrix} G_0 \\ I_0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

- Punto de equilibrio positivo: (G^*, I^*)
- Punto de bifurcación: τ_0 .

Se quiere estudiar los efectos de las órdenes fraccionarias α_1 y α_2 respecto del punto de bifurcación τ_0 considerando los valores de los parámetros siguientes en el problema (P):

Tabla de valores y fórmulas:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
0.0001	0.1262	0.0000564	0.01	0.074	1.93

Constante de tiempo fraccionaria $\beta = 1$.

$$\begin{cases} b_1 = a_1^{\alpha_1} & b_2 = a_2^{\alpha_2} & b_3 = \beta^{1-\alpha_1} a_3 \\ b_4 = a_4 & b_5 = \beta^{1-\alpha_2} a_5 & b_6 = \beta^{1-\alpha_1} a_6 \end{cases}$$

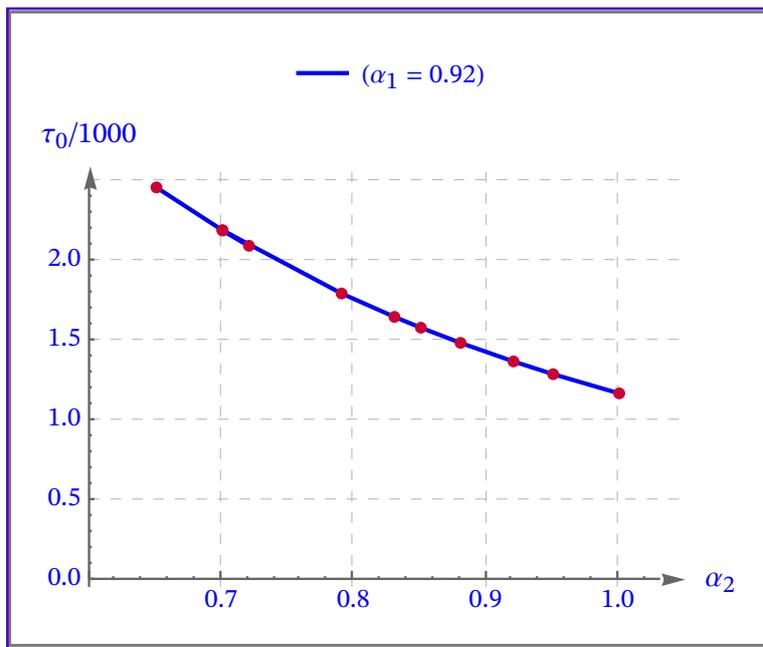
(a) Se establece el orden $\alpha_1 = 0.95$ y se calcula el punto de bifurcación del sistema τ_0 para cada valor del orden fraccionario de α_2 :

$$\alpha_2 = \{0.65, 0.7, 0.72, 0.7, 0.79, 0.83, 0.85, 0.88, 0.92, 0.95, 1.\}$$

(i) Créese la tabla de valores siguiente:

α_1	α_2	G^*	I^*	ω_0	τ_0
0.92					

(ii) Representétese la gráfica de puntos (α_2, τ_0) .



Indicación:

Se comprueba en los datos de tabla de datos como en la gráfica que el punto de bifurcación τ_0 disminuye a conforma que aumenta el orden fraccionario α_2 .

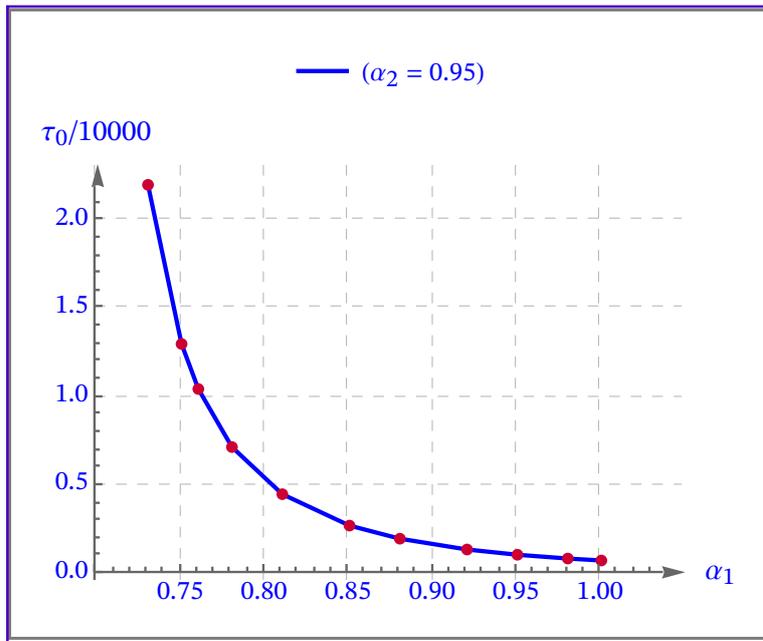
(b) Se establece el orden $\alpha_2 = 0.92$ y se calcula el punto de bifurcación del sistema τ_0 para cada valor del orden fraccionario de α_1 :

$$\alpha_1 = \{0.73, 0.75, 0.76, 0.78, 0.81, 0.85, 0.88, 0.92, 0.95, 0.98, 1.\}$$

(i) Créese la tabla de valores siguiente:

α_1	α_2	G^*	I^*	ω_0	τ_0
0.95					

(ii) Representétese la gráfica de puntos (α_1, τ_0) .



Indicación:

Se observa fácilmente en la tabla de datos como en la gráfica que el punto de bifurcación τ_0 disminuye a medida que aumenta el orden fraccionario α_1 .

Observaciones 4.1.1.

- (i) El modelo del sistema de ecuaciones diferenciales fraccionarias con retraso SFDDE que modeliza la dinámica glucosa–insulina con órdenes inconmensurables tiene un único punto de equilibrio positivo $(G^*, I^*) = (y_1^*, y_2^*)$.
- (ii) Se han establecido las condiciones de estabilidad del punto de equilibrio y la bifurcación de Hopf.
- (iii) En el análisis de estabilidad se ha determinado que el retraso en el tiempo τ del sistema tiene un efecto significativo en la propia estabilidad: las regiones de estabilidad $\tau \in [0, \tau_0)$, se pueden ajustar variando los órdenes fraccionarios α_1 y α_2 .
- (iv) El punto de bifurcación τ_0 se produce prematuramente cuando uno de los órdenes fraccionarios aumenta mientras se mantiene fijo el otro.
- (v) Los resultados numéricos calculados con el método/esquema predictor–corrector de tipo Adams–Bashforth–Moulton verifican los resultados teóricos propuestos.

4.2. Modelo con Retardo Glucosa–Insulina con la Función de las Células β

En modelos anteriores, se estudiaba la interacción que existía entre la glucosa y la insulina con el fin de entender y encontrar una cura para la diabetes. Con el fin de hacer estos modelos, cada vez más ajustados a la realidad y más fieles al proceso metabólico que realiza el cuerpo para estabilizar los niveles de glucosa en sangre.

Con esto en mente los autores de [ALHU20] estudiaron la interacción que existe entre la glucosa pero introduciendo a las células β , células producidas en el sistema endocrino, encargadas de generar la insulina. Para describir este proceso, se propone un estudio de un modelo matemático, constituido por un sistema de ecuaciones diferenciales con retraso ordinarias.

4.2.1. Modelo Matemático

El modelo matemático tiene la forma:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = r_1 y(t - \tau_g) z(t - \tau_g) - r_2 x - r_3 x y + c_1 z(t - \tau_g) \\ \frac{dy}{dt} = \frac{R_3 N}{z} - R_4 x(t - \tau_i) + C_2 \\ \frac{dz}{dt} = R_5(y - \hat{y})(T - z) + R_6 z(T - z) - R_7 z \end{cases} \quad (4.2.1)$$

donde $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ e \hat{y} representan el nivel de insulina, el de glucosa, el número de células β y el metabolismo de la glucosa considerando su estado basal, respectivamente. τ_g es el retraso del tiempo de la secreción de la insulina estimulada por el cambio de nivel de glucosa en el plasma, y τ_i es el retraso del tiempo de la reducción de la glucosa provocada por el incremento de la concentración de la insulina.

Por otra parte, los términos $r_1 y(t - \tau_g) z(t - \tau_g)$ explican los incrementos de la insulina y la glucosa en función de τ_g ; $r_2 x$ representa la velocidad de reducción de la insulina inasociado a la glucosa; $r_3 x y$ representa la degradación de la insulina relacionada con el actual nivel de concentración de la glucosa; $c_1 z(t - \tau_g)$ el incremento de la insulina en función de las células β . Además, la cantidad media de células β viene representado por el término N ; mientras que la cadencia decreciente de la glucosa cuando la insulina es segregada con τ_i viene dada por $R_4 x(t - \tau_i)$. T representa la población total de células β ; $R_5(y - \hat{y})(T - z)$ denota el incremento de las células β divididas con respecto a las no divididas. Por último, $R_6 z(T - z)$ ilustra el incremento de z debido a la sinergia entre las células β divididas y no divididas y $R_7 z$ su disminución.

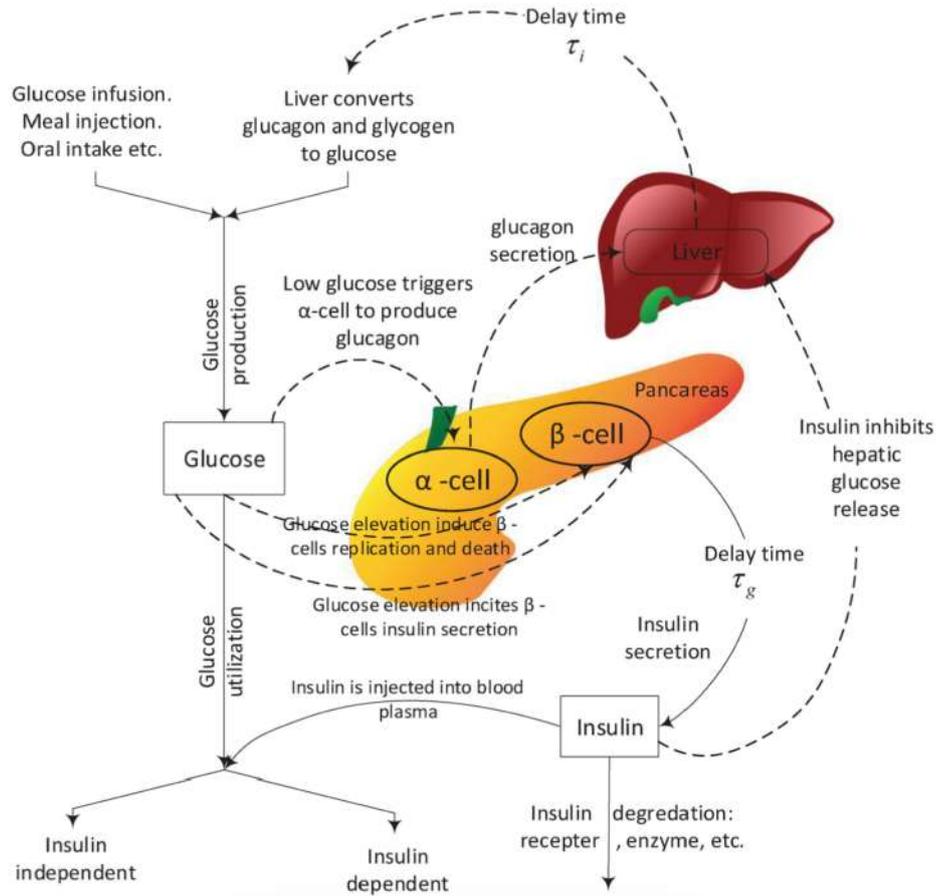


Figura 4.1. Esquema gráfico de la dinámica glucosa-insulina y células β .

El modelo de orden fraccionario es el siguiente:

$$\begin{aligned}
 (P) \equiv & \\
 & \left\{ \begin{aligned}
 D^{(\alpha_1)} y_1(x) &= r_1 y_2(x - \tau_g) y_3(x - \tau_g) - r_2 y_1(x) - r_3 y_1(x) y_2(x) + c_1 y_3(x - \tau_g) \quad x \in (0, T) \\
 D^{(\alpha_2)} y_2(x) &= \frac{R_3 N}{y_3(t)} - R_4 y_1(x - \tau_i) + c_2 \\
 D^{(\alpha_3)} y_3(x) &= R_5 (y_2(x) - \hat{y})(T - y_3(x)) + R_6 y_3(x) (T - y_3(x)) - R_7 y_3(x)
 \end{aligned} \right. \quad (4.2.2)
 \end{aligned}$$

$$\tau = \{\tau_1, \tau_2, \tau_3\} = \{\tau_i, \tau_g, \tau_g\}$$

donde

$$\begin{cases}
 y_1(x) \equiv x(t) \\
 y_2(x) \equiv y(t) \\
 y_3(x) \equiv z(t)
 \end{cases}$$

4.2.2. Análisis de Estabilidad y Análisis de Bifurcación

Se analiza la estabilidad del sistema determinando los puntos de equilibrio de acuerdo con la teoría relacionada con los sistemas no lineales con retardo.

Sea el sistema de ecuaciones diferenciales de orden fraccionario con retraso SFDDE que representa el modelo regulador Glucosa-Insulina con Retardo del tiempo:

$$(P) \equiv \begin{cases} D^{(\alpha_1)} y_1(x) = r_1 y_2(x - \tau_g) y_3(x - \tau_g) - r_2 y_1(x) - r_3 y_1(x) y_2(x) + c_1 y_3(x - \tau_g) & x \in (0, T) \\ D^{(\alpha_2)} y_2(x) = \frac{R_3 N}{y_3(x)} - R_4 y_1(x - \tau_i) + c_2 \\ D^{(\alpha_3)} y_3(x) = R_5 (y_2(x) - \hat{y}) (T - y_3(x)) + R_6 y_3(x) (T - y_3(x)) - R_7 y_3(x) \end{cases}$$

El punto de equilibrio $P = (y_1^*, y_2^*, y_3^*) = (x^*, y^*, z^*)$ verifica que

$$\begin{aligned} Y(x) &= Y(x - \tau_j) = Y^* \\ (y_1(x) \ y_2(x) \ y_3(x)) &= (y_1(x - \tau_1) \ y_2(x - \tau_2) \ y_3(x - \tau_3)) \\ &= (y_1^*(x) \ y_2^*(x) \ y_3^*(x)) \\ D^{(\alpha_j)} y_j(x) &= 0 \quad \Rightarrow \quad F(y_1^*, y_2^*, y_3^*) = 0 \end{aligned}$$

y se calcula configurando el SFDDE con los requisitos:

$$\begin{cases} D^{(\alpha_j)} y_j(x) = 0 \\ \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ y_3(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(x - \tau_1) \\ y_2(x - \tau_2) \\ y_3(x - \tau_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1^* \\ y_2^* \\ y_3^* \end{pmatrix} \\ \begin{cases} F_1 = r_1 y_2^* y_3^* - r_2 y_1^* - r_3 y_1^* y_2^* + c_1 y_3^* & = 0 \\ F_2 = \frac{R_3 N}{y_3^*} - R_4 y_1^* + c_2 & = 0 \\ F_3 = R_5 (y_2^* - \hat{y}) (T - y_3^*) + R_6 y_3^* (T - y_3^*) - R_7 y_3^* & = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} -r_2 (y_1^*) - r_3 (y_2^*) (y_1^*) + c_1 (y_3^*) + r_1 (y_2^*) (y_3^*) = 0 \\ c_2 - R_4 (y_1^*) + \frac{N_1 R_3}{(y_3^*)} = 0 \\ R_5 ((y_2^*) - \hat{y}) (T_1 - (y_3^*)) + R_6 (y_3^*) (T_1 - (y_3^*)) - R_7 (y_3^*) = 0 \end{cases} \end{cases}$$

Un punto de equilibrio trivial es

$$Y^* = \begin{pmatrix} y_1^* \\ y_2^* \\ y_3^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matriz Jacobiana J_0 del sistema SFDDE sin retraso ($\tau = 0$) viene dada por

$$\bullet (J_0)_{i,j} = \left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j} \right) \Bigg|_{\substack{y_j=y_j^* \\ i,j=1,2,\dots,n}} \Rightarrow J_0 = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1(x)} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2(x)} & \frac{\partial F_1}{\partial y_3(x)} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1(x)} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2(x)} & \frac{\partial F_2}{\partial y_3(x)} \\ \frac{\partial F_3}{\partial y_1(x)} & \frac{\partial F_3}{\partial y_2(x)} & \frac{\partial F_3}{\partial y_3(x)} \end{pmatrix}$$

$$J_0 = \begin{pmatrix} -r_2 - r_3 y_2(x) & -r_3 y_1(x) & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{N_1 R_3}{y_3(x)^2} \\ 0 & R_5 (T_1 - y_3(x)) & -R_7 + R_5 (\hat{y} - y_2(x)) + R_6 (T_1 - 2 y_3(x)) \end{pmatrix}$$

$$J_0(y_1^*, y_2^*, y_3^*) = \begin{pmatrix} -r_2 - r_3 (y_2)^* & -r_3 (y_1)^* & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{N_1 R_3}{(y_3^*)^2} \\ 0 & R_5 (T_1 - (y_3)^*) & -R_7 + R_5 (\hat{y} - (y_2)^*) + R_6 (T_1 - 2 (y_3)^*) \end{pmatrix}$$

La matriz jacobiana del sistema J_τ con retrasos τ tiene la expresión

$$\bullet (J_\tau)_{i,j} = \left(\frac{\partial F_i}{\partial y_{\tau j}} \right) \Bigg|_{\substack{y_{\tau j}=y_j^* \\ i,j=1,2,\dots,n}} \Rightarrow$$

$$e^{-\lambda \tau} J_\tau = \begin{pmatrix} e^{-\lambda \tau_1} \frac{\partial F_1}{\partial y_1(x-\tau_1)} & e^{-\lambda \tau_2} \frac{\partial F_1}{\partial y_2(x-\tau_2)} & e^{-\lambda \tau_3} \frac{\partial F_1}{\partial y_3(x-\tau_3)} \\ e^{-\lambda \tau_1} \frac{\partial F_2}{\partial y_1(x-\tau_1)} & e^{-\lambda \tau_2} \frac{\partial F_2}{\partial y_2(x-\tau_2)} & e^{-\lambda \tau_3} \frac{\partial F_2}{\partial y_3(x-\tau_3)} \\ e^{-\lambda \tau_1} \frac{\partial F_3}{\partial y_1(x-\tau_1)} & e^{-\lambda \tau_2} \frac{\partial F_3}{\partial y_2(x-\tau_2)} & e^{-\lambda \tau_3} \frac{\partial F_3}{\partial y_3(x-\tau_3)} \end{pmatrix}$$

$$e^{-\lambda \tau} J_\tau = \begin{pmatrix} 0 & e^{-\lambda \tau g} r_1 y_3(x-\tau_g) & e^{-\lambda \tau g} (c_1 + r_1 y_2(x-\tau_g)) \\ -e^{-\lambda \tau_i} R_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e^{-\lambda \tau} J_\tau(y_1^*, y_2^*, y_3^*) = \begin{pmatrix} 0 & e^{-\lambda \tau g} r_1 (y_3)^* & e^{-\lambda \tau g} (c_1 + r_1 (y_2)^*) \\ -e^{-\lambda \tau_i} R_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz Jacobiana del sistema es

$$J_E = J_0 + e^{-\lambda \tau} J_\tau$$

$$J_E =$$

$$\begin{pmatrix} -r_2 - r_3 y_2(x) & e^{-\lambda \tau_g} r_1 y_3(x - \tau_g) - r_3 y_1(x) & e^{-\lambda \tau_g} (c_1 + r_1 y_2(x - \tau_g)) \\ -e^{-\lambda \tau_i} R_4 & 0 & -\frac{N_1 R_3}{y_3(x)^2} \\ 0 & R_5 (T_1 - y_3(x)) & -R_7 + R_5 (\hat{y} - y_2(x)) + R_6 (T_1 - 2 y_3(x)) \end{pmatrix}$$

$$J_E(y_1^*, y_2^*, y_3^*) =$$

$$\begin{pmatrix} -r_2 - r_3 (y_2)^* & e^{-\lambda \tau_g} r_1 (y_3)^* - r_3 (y_1)^* & e^{-\lambda \tau_g} (c_1 + r_1 (y_2)^*) \\ -e^{-\lambda \tau_i} R_4 & 0 & -\frac{N_1 R_3}{((y_3)^*)^2} \\ 0 & R_5 (T_1 - (y_3)^*) & -R_7 + R_5 (\hat{y} - (y_2)^*) + R_6 (T_1 - 2 (y_3)^*) \end{pmatrix}$$

La ecuación característica asociada a la matriz jacobiana evaluada en el punto de equilibrio Y_i^* del sistema es la siguiente

$$J_E = J_0 + e^{-\lambda \tau} J_\tau \Rightarrow |J_E(y_1^*, y_2^*, y_3^*) - \lambda I| = 0$$

$$P(\lambda) \equiv \lambda^3 + (r_2 - \hat{y} R_5 + R_7 + (r_3 + R_5) (y_2)^* - R_6 (T_1 - 2 (y_3)^*)) \lambda^2$$

$$+ \left(-e^{-\lambda \tau_i} r_3 R_4 (y_1)^* + (r_2 + r_3 (y_2)^*) (R_7 + R_5 ((y_2)^* - \hat{y}) - R_6 (T_1 - 2 (y_3)^*)) + e^{-\lambda (\tau_g + \tau_i)} \right.$$

$$\left. r_1 R_4 (y_3)^* + \frac{N_1 R_3 R_5 (T_1 - (y_3)^*)}{((y_3)^*)^2} \right) \lambda +$$

$$e^{-\lambda (\tau_g + \tau_i)} R_4 (e^{\lambda \tau_g} r_3 (y_1)^* (-R_7 + R_5 (\hat{y} - (y_2)^*) + R_6 (T_1 - 2 (y_3)^*)) +$$

$$c_1 R_5 (T_1 - (y_3)^*) + r_1 ((R_7 - R_6 (T_1 - 2 (y_3)^*)) (y_3)^* + R_5 (T_1 (y_2)^* - \hat{y} (y_3)^*))) +$$

$$\frac{N_1 R_3 R_5 (r_2 + r_3 (y_2)^*) (T_1 - (y_3)^*)}{((y_3)^*)^2} = 0$$

Se considera la siguiente ecuación característica:

$$P(\lambda) \equiv a_3 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 + \frac{(a_4 \lambda + a_5)}{a_{e1}} e^{-\lambda \tau_i} + \frac{(a_6 \lambda + a_7)}{a_{e2}} e^{-\lambda (\tau_g + \tau_i)} = 0$$

siendo los coeficientes de la ecuación característica en λ :

a_i	Coeficientes del Modelo.
a_3	1
a_2	$r_3 (y_2)^* + r_2 - R_6 T_1 - R_5 \hat{y} + R_5 (y_2)^* + 2 R_6 (y_3)^* + R_7$
a_1	$\frac{N_1 R_3 R_5 (T_1 - (y_3)^*)}{((y_3)^*)^2} + (r_3 (y_2)^* + r_2) (-R_6 T_1 + R_5 (-\hat{y}) + R_5 (y_2)^* + 2 R_6 (y_3)^* + R_7)$
a_0	$\frac{N_1 R_3 R_5 (r_3 (y_2)^* + r_2) (T_1 - (y_3)^*)}{((y_3)^*)^2}$
a_4	$-r_3 R_4 (y_1)^*$
a_5	$r_3 R_4 (y_1)^* (R_6 T_1 + R_5 \hat{y} - R_5 (y_2)^* - 2 R_6 (y_3)^* - R_7)$
a_6	$r_1 R_4 (y_3)^*$
a_7	$R_4 (c_1 R_5 (T_1 - (y_3)^*) + r_1 ((y_3)^* (R_7 - R_6 (T_1 - 2 (y_3)^*)) + R_5 (T_1 (y_2)^* - \hat{y} (y_3)^*)))$

4.2.2.1. Soluciones Periódicas

De acuerdo con la teoría de la bifurcación de Hopf para que exista una solución periódica, se requiere que la ecuación característica tenga un par de raíces complejas puras $\lambda = \pm i \beta$ para algún valor del retraso τ .

Se debe cumplir que $P(\lambda) = P(i \beta) = 0$. Entonces se tiene la ecuación:

$$\begin{aligned}
 P(\lambda) &\equiv a_3 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 + (a_4 \lambda + a_5) e^{-\lambda \tau_i} + (a_6 \lambda + a_7) e^{-\lambda(\tau_g + \tau_i)} = 0 \\
 P(i \beta) &\equiv a_3 (i \beta)^3 + a_2 (i \beta)^2 + a_1 i \beta + a_0 + (a_4 (i \beta) + a_5) e^{-(i \beta) \tau_i} \\
 &\quad + (a_6 (i \beta) + a_7) e^{-(i \beta)(\tau_g + \tau_i)} = 0 \\
 &= -a_2 \beta^2 + i(-a_3 \beta^3 + a_1 \beta - a_7 \sin(\beta(\tau_g + \tau_i))) + \\
 &\quad a_6 \beta \cos(\beta(\tau_g + \tau_i)) - a_5 \sin(\beta \tau_i) + a_4 \beta \cos(\beta \tau_i) + \\
 &\quad a_6 \beta \sin(\beta(\tau_g + \tau_i)) + a_7 \cos(\beta(\tau_g + \tau_i)) + a_4 \beta \sin(\beta \tau_i) + a_5 \cos(\beta \tau_i) + a_0
 \end{aligned}$$

Se separa la parte real y la parte imaginaria de la ecuación $P(i \beta) = 0$:

(a) Real

$$\begin{aligned}
 -a_2 \beta^2 + a_6 \beta \sin(\beta(\tau_g + \tau_i)) + a_7 \cos(\beta(\tau_g + \tau_i)) + a_4 \beta \sin(\beta \tau_i) \\
 + a_5 \cos(\beta \tau_i) + a_0 = 0
 \end{aligned}$$

(b) Imaginaria

$$\begin{aligned}
 i(-a_3 \beta^3 + a_1 \beta - a_7 \sin(\beta(\tau_g + \tau_i)) + a_6 \beta \cos(\beta(\tau_g + \tau_i)) - a_5 \sin(\beta \tau_i) \\
 + a_4 \beta \cos(\beta \tau_i)) = 0
 \end{aligned}$$

Se simplifican las expresiones:

(a) Real

$$\begin{aligned}
 a_2 \beta^2 - a_0 = a_6 \beta \sin(\beta(\tau_g + \tau_i)) + a_7 \cos(\beta(\tau_g + \tau_i)) + a_4 \beta \sin(\beta \tau_i) \\
 + a_5 \cos(\beta \tau_i)
 \end{aligned}$$

(b) Imaginaria

$$\begin{aligned}
 a_3 \beta^3 - a_1 \beta = a_6 \beta \cos(\beta(\tau_g + \tau_i)) - a_7 \sin(\beta(\tau_g + \tau_i)) - a_5 \sin(\beta \tau_i) \\
 + a_4 \beta \cos(\beta \tau_i)
 \end{aligned}$$

Se elevan ambos miembros al cuadrado y se suman

$$\begin{aligned}
 (a_2 \beta^2 - a_0)^2 + (a_3 \beta^3 - a_1 \beta)^2 = \\
 [a_6 \beta \sin(\beta(\tau_g + \tau_i)) + a_7 \cos(\beta(\tau_g + \tau_i)) + a_4 \beta \sin(\beta \tau_i) + a_5 \cos(\beta \tau_i)]^2 \\
 + [a_6 \beta \cos(\beta(\tau_g + \tau_i)) - a_7 \sin(\beta(\tau_g + \tau_i)) - a_5 \sin(\beta \tau_i) + a_4 \beta \cos(\beta \tau_i)]^2
 \end{aligned}$$

que simplificando, resulta

$$\begin{aligned}
 a_2^2 \beta^4 - 2 a_1 \beta^4 + a_1^2 \beta^2 - 2 a_0 a_2 \beta^2 + a_0^2 + \beta^6 = \\
 a_4^2 \beta^2 + a_6^2 \beta^2 + 2(a_4 a_6 \beta^2 + a_5 a_7) \cos(\beta \tau_g) \\
 + 2(a_5 a_6 - a_4 a_7) \beta \sin(\beta \tau_g) + a_5^2 + a_7^2
 \end{aligned}$$

De donde se deduce la ecuación en la variable β :

$$\psi(\beta) \equiv \beta^6 + (a_2^2 - 2 a_1) \beta^4 + \beta^2 (-2 a_4 a_6 \cos(\beta \tau_g) + a_1^2 - a_4^2 - a_6^2 - 2 a_0 a_2) - 2 (a_5 a_6 - a_4 a_7) \beta \sin(\beta \tau_g) - 2 a_5 a_7 \cos(\beta \tau_g) + a_0^2 - a_5^2 - a_7^2 = 0.$$

La resolución numérica de la ecuación $P(\lambda) = 0$ proporcionará diferentes autovalores λ_i para los valores del retraso (τ_i, τ_g) . Las raíces complejas puras $\lambda_k = \pm i \beta_k$ dan lugar a un valor del retraso crítico $\tau_0 = \tau_g$.

Las raíces $\beta = \beta_k$ para algún valor del retraso crítico $\tau_0 = \tau_g$ también será solución numérica de la ecuación $\psi(\beta) = 0$. En este retraso crítico y para este autovalor $\lambda_k = \pm i \beta_k$ el sistema tiene una respuesta periódica.

▼ **Teorema 4.2.1.**

Sea la ecuación característica del sistema para el punto de equilibrio positivo Y_j^* y para el retraso (τ_i, τ_g) :

$$P(\lambda) \equiv \frac{a_3}{=1} \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 + (a_4 \lambda + a_5) e^{-\lambda \tau_i} + (a_6 \lambda + a_7) e^{-\lambda (\tau_g + \tau_i)} = 0$$

donde las raíces complejas puras dan lugar a la ecuación $P(\lambda) = P(i \beta) = 0$ y a la ecuación en la variable β para el retraso (τ_i, τ_g) :

$$\psi(\beta) \equiv \beta^6 + (a_2^2 - 2 a_1) \beta^4 + \beta^2 (-2 a_4 a_6 \cos(\beta \tau_g) + a_1^2 - a_4^2 - a_6^2 - 2 a_0 a_2) - 2 (a_5 a_6 - a_4 a_7) \beta \sin(\beta \tau_g) - 2 a_5 a_7 \cos(\beta \tau_g) + a_0^2 - a_5^2 - a_7^2 = 0.$$

La resolución numérica de la ecuación $\psi(\beta) = 0$ proporcionará las raíces $\beta = \beta_k$ para algún valor del retraso crítico $\tau_0 = \tau_g$ en el cual el sistema tenga una respuesta periódica.

(i) Si $\tau_g = \tau_0$ las raíces de $P(\lambda) = 0$ son complejas puras ($\lambda = \pm i \beta_k$), entonces la respuesta del sistema es periódica.

(ii) Si $\tau_g \in [0, \tau_0)$ entonces las raíces de $P(\lambda) = 0$ tienen partes reales negativas y el sistema es *estable asintóticamente* en el punto de equilibrio $Y^* = (y_1^*, y_2^*, y_3^*)$.

(iii) Si $\tau_g > \tau_0$ las raíces $P(\lambda) = 0$ tienen partes reales positivas y el sistema es *inestable* en el punto de equilibrio $Y^* = (y_1^*, y_2^*, y_3^*)$.

■ **Ejemplo 4.2.1.** ([ALHU20])

Sea el sistema de ecuaciones diferenciales con retraso SFDDE que representa el modelo de regulador Glucosa-Insulina de orden fraccionario con retraso del tiempo:

$$(P) \equiv \begin{cases} D^{(\alpha_1)} y_1(x) = r_1 y_2(x - \tau_g) y_3(x - \tau_g) - r_2 y_1(x) - r_3 y_1(x) y_2(x) + c_1 y_3(x - \tau_g) & x \in (0, T) \\ D^{(\alpha_2)} y_2(x) = \frac{R_3 N}{y_3(x)} - R_4 y_1(x - \tau_i) + c_2 \\ D^{(\alpha_3)} y_3(x) = R_5 (y_2(x) - \hat{y}) (T - y_3(x)) + R_6 y_3(x) (T - y_3(x)) - R_7 y_3(x) \end{cases}$$

Caso I.

r_1	r_2	r_3	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7	c_1	c_2	\hat{y}	T	N
0.472	0.2275	0.025	0.82	0.6	0.3	0.3	0.2	0.1	0.8	1.42	1.5	1.27

$\tau = (\tau_i, \tau_g, \tau_g) = (0.05, 0.4642, 0.4642)$

Se pide calcular:

- Los puntos de equilibrio $F(y_1^*, y_2^*, y_3^*) = 0$ reales y complejos.
- Matrices Jacobianas y matrices jacobianas evaluadas en el punto de equilibrio genérico $Y^* = (y_1^*, y_2^*, y_3^*)$.
 - Matriz Jacobiana del sistema sin retraso J_0 ($\tau = 0$).
 - Matriz Jacobiana del sistema con retraso $e^{-\lambda \tau} J_\tau$ ($\tau \neq 0$).
 - y matriz Jacobiana del sistema J_E .
- Ecuación característica en los puntos de equilibrio positivos $Y^* = (y_1^*, y_2^*, y_3^*) > 0$:

$$P(\lambda) = |J_0 + e^{-\lambda \tau} J_\tau - \lambda I|_{Y_1^*, Y_2^*, \dots} = |J_E - \lambda I|_{Y_1^*, Y_2^*, \dots} = 0$$
 y los autovalores λ_i asociados.
- Representación de las funciones características $P_j(\lambda)$ para cada punto de equilibrio real.
- Expresión $\alpha_i > \frac{2}{\pi} \arctg\left(\frac{|\text{Im}(\lambda_i)|}{|\text{Re}(\lambda_i)|}\right)$ para sus autovalores λ_i en los puntos de equilibrio reales Y^* .
- Ecuación polinómica $\psi(\beta) = 0$ evaluada en los puntos de equilibrio Y^* reales y raíces β_k para cada punto de equilibrio.

Indicación:

SOLUCIÓN

(a)

Caso I.

r_1	r_2	r_3	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7	c_1	c_2	\hat{y}	T	N
0.472	0.2275	0.025	0.82	0.6	0.3	0.3	0.2	0.1	0.8	1.42	1.5	1.27

$\tau = (\tau_i, \tau_g, \tau_g) = \{0.05, 0.4642, 0.4642\}$

Sistema SFDDE

(P) \equiv

$$\begin{pmatrix} -0.025 y_2(x) y_1(x) - 0.2275 y_1(x) + 0.472 y_2(x - \tau_g) y_3(x - \tau_g) + 0.1 y_3(x - \tau_g) \\ -0.6 y_1(x - \tau_i) + \frac{1.0414}{y_3(x)} + 0.8 \\ 0.3 (y_2(x) - 1.42) (1.5 - y_3(x)) + 0.3 y_3(x) (1.5 - y_3(x)) - 0.2 y_3(x) \end{pmatrix}$$

(a) Puntos de equilibrio: $F(y_1^*, y_2^*, y_3^*) = 0$.

$$\begin{pmatrix} -0.025 (y_2)^* (y_1)^* - 0.2275 (y_1)^* + 0.472 (y_2)^* (y_3)^* + 0.1 (y_3)^* = 0 \\ -0.6 (y_1)^* + \frac{1.0414}{(y_3)^*} + 0.8 = 0 \\ 0.3 ((y_2)^* - 1.42) (1.5 - (y_3)^*) + 0.3 (y_3)^* (1.5 - (y_3)^*) - 0.2 (y_3)^* = 0 \end{pmatrix}$$

$Y^* = (y_1^*, y_2^*, y_3^*) =$

$$\begin{pmatrix} -1.87392 & 1.78442 & -0.541169 \\ 3.13936 & 1.64772 & 0.961039 \\ 1.99166 + 0.804133 i & -0.0676799 + 0.599517 i & 1.05797 - 1.29229 i \\ 1.99166 - 0.804133 i & -0.0676799 - 0.599517 i & 1.05797 + 1.29229 i \end{pmatrix}$$

(b.1) Matriz Jacobiana del sistema sin retraso ($\tau = 0$).

$$J_0 = \left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j} \right) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{40} y_2(x) - \frac{91}{400} & -\frac{1}{40} y_1(x) & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5207}{5000 y_3(x)^2} \\ 0 & \frac{9}{20} - \frac{3 y_3(x)}{10} & -\frac{3}{10} y_2(x) - \frac{3 y_3(x)}{5} + \frac{169}{250} \end{pmatrix}$$

$$J_0(y_1^*, y_2^*, y_3^*) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{40} (y_2)^* - \frac{91}{400} & -\frac{1}{40} (y_1)^* & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5207}{5000 ((y_3)^*)^2} \\ 0 & \frac{9}{20} - \frac{3 (y_3)^*}{10} & -\frac{3}{10} (y_2)^* - \frac{3 (y_3)^*}{5} + \frac{169}{250} \end{pmatrix}$$

(b.2) Matriz Jacobiana del sistema con retrasos (τ_j).

$$e^{-\lambda \tau} J_{\tau} = e^{-\lambda \tau_j} \left(\frac{\partial F_i}{\partial y_{\tau_j}} \right) =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{59}{125} e^{-\lambda \tau_g} y_3(x - \tau_g) & e^{-\lambda \tau_g} \left(\frac{59}{125} y_2(x - \tau_g) + \frac{1}{10} \right) \\ -\frac{3}{5} e^{-\lambda \tau_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e^{-\lambda \tau} J_{\tau}(y_1^*, y_2^*, y_3^*) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{59}{125} e^{-\lambda \tau_g} (y_3)^* & e^{-\lambda \tau_g} \left(\frac{59 (y_2)^*}{125} + \frac{1}{10} \right) \\ -\frac{3}{5} e^{-\lambda \tau_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b.3) Matriz Jacobiana del sistema:

$$J_E = J_0 + e^{-\lambda \tau} J_{\tau} =$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{40} y_2(x) - \frac{91}{400} & \frac{59}{125} e^{-\lambda \tau_g} y_3(x - \tau_g) - \frac{y_1(x)}{40} & e^{-\lambda \tau_g} \left(\frac{59}{125} y_2(x - \tau_g) + \frac{1}{10} \right) \\ -\frac{3}{5} e^{-\lambda \tau_i} & 0 & -\frac{5207}{5000 y_3(x)^2} \\ 0 & \frac{9}{20} - \frac{3 y_3(x)}{10} & -\frac{3}{10} y_2(x) - \frac{3 y_3(x)}{5} + \frac{169}{250} \end{pmatrix}$$

Matriz Jacobiana del sistema evaluada en el punto de equilibrio:

$$J_E(y_1^*, y_2^*, y_3^*) =$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{40} (y_2)^* - \frac{91}{400} & \frac{59}{125} e^{-\lambda \tau_g} (y_3)^* - \frac{(y_1)^*}{40} & e^{-\lambda \tau_g} \left(\frac{59 (y_2)^*}{125} + \frac{1}{10} \right) \\ -\frac{3}{5} e^{-\lambda \tau_i} & 0 & -\frac{5207}{5000 ((y_3)^*)^2} \\ 0 & \frac{9}{20} - \frac{3 (y_3)^*}{10} & -\frac{3}{10} (y_2)^* - \frac{3 (y_3)^*}{5} + \frac{169}{250} \end{pmatrix}$$

(c) Ecuación característica evaluada en los puntos de equilibrio y autovalores asociados:

• $j = 1$

$$Y_j^* = \{-1.87392, 1.78442, -0.541169\}$$

$$\tau = (\tau_i, \tau_g, \tau_g) = \{0.05, 0.4642, 0.4642\}$$

$$P_1(\lambda) = \lambda^3 - 0.193266 \lambda^2 - 0.153259 e^{-0.5142 \lambda} \lambda + 0.0281088 e^{-0.05 \lambda} \lambda + 2.05084 \lambda + 0.417514 e^{-0.5142 \lambda} - 0.0130812 e^{-0.05 \lambda} + 0.592512 = 0$$

$$\lambda_{ji} = \begin{pmatrix} \lambda \rightarrow -0.50198703 \\ \lambda \rightarrow 0.28604855 + 1.4008246 i \\ \lambda \rightarrow 0.28604855 - 1.4008246 i \end{pmatrix}$$

• $j = 2$

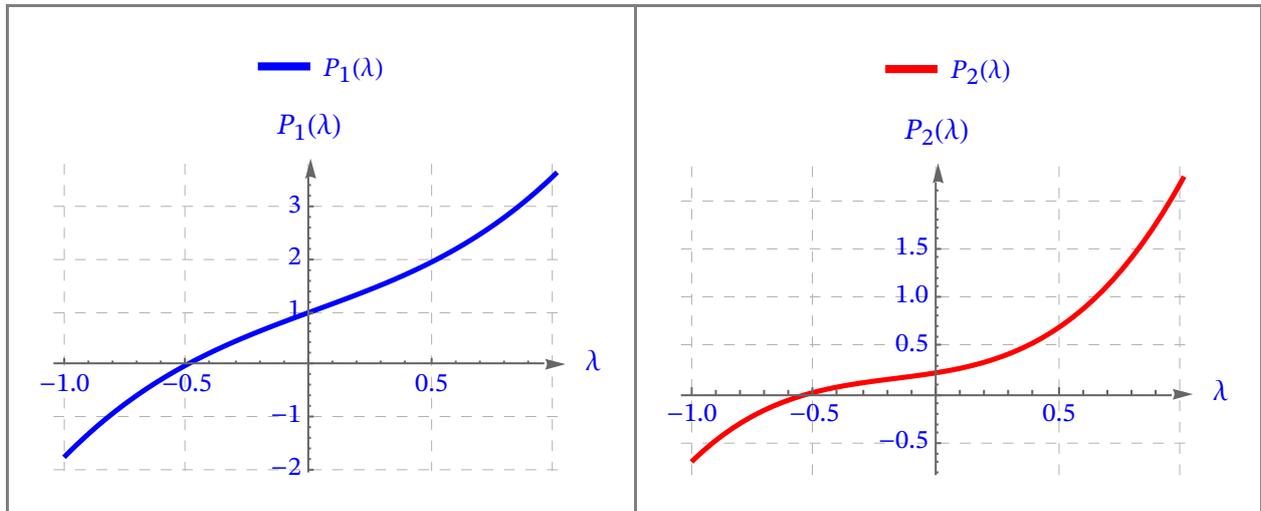
$$Y_j^* = \{3.13936, 1.64772, 0.961039\}$$

$$\tau = (\tau_i, \tau_g, \tau_{\bar{g}}) = \{0.05, 0.4642, 0.4642\}$$

$$P_2(\lambda) = \lambda^3 + 0.663631 \lambda^2 + 0.272166 e^{-0.5142\lambda} \lambda - 0.0470905 e^{-0.05\lambda} \lambda + 0.288429 \lambda + 0.192639 e^{-0.5142\lambda} - 0.0185978 e^{-0.05\lambda} + 0.0489858 = 0$$

$$\lambda_{ji} = \begin{pmatrix} \lambda \rightarrow -0.53526739 \\ \lambda \rightarrow -4.7620910 \times 10^{-6} + 0.63465115 i \\ \lambda \rightarrow -4.7620910 \times 10^{-6} - 0.63465115 i \end{pmatrix}$$

(e) Representación de las funciones características $P_j(\lambda)$.



(f) Orden fraccionario y autovalores:

Puntos de equilibrio del sistema y autovalores:

$$Y_j^* = \{-1.87392, 1.78442, -0.541169\}$$

$$\lambda_{j,i} = \begin{pmatrix} \lambda \rightarrow -0.50198703 \\ \lambda \rightarrow 0.28604855 + 1.4008246 i \\ \lambda \rightarrow 0.28604855 - 1.4008246 i \end{pmatrix}$$

$$\alpha_i > \frac{2}{\pi} \arctg \left(\frac{|\text{Im}(\lambda_i)|}{|\text{Re}(\lambda_i)|} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.87176513 \\ 0.87176513 \end{pmatrix}$$

Puntos de equilibrio del sistema y autovalores:

$$Y_j^* = \{3.13936, 1.64772, 0.961039\}$$

$$\lambda_{j,i} = \begin{pmatrix} \lambda \rightarrow -0.53526739 \\ \lambda \rightarrow -4.7620910 \times 10^{-6} + 0.63465115 i \\ \lambda \rightarrow -4.7620910 \times 10^{-6} - 0.63465115 i \end{pmatrix}$$

$$\alpha_i > \frac{2}{\pi} \arctg \left(\frac{|\text{Im}(\lambda_i)|}{|\text{Re}(\lambda_i)|} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.9999952231375 \\ 0.9999952231375 \end{pmatrix}$$

(g) Ecuación $\psi(\beta) = 0$ para los puntos de equilibrio.

• $j = 1$

$$Y_j^* = \{-1.87392, 1.78442, -0.541169\}$$

$$\tau = (\tau_i, \tau_g, \tau_g) = \{0.05, 0.4642, 0.4642\}$$

• $\psi(\beta) = 0$

$$\psi(\beta) = \beta^6 - 4.06432 \beta^4 + (0.00861586 \cos(0.4642 \beta) + 4.41068) \beta^2 + 0.019462 \sin(0.4642 \beta) \beta + 0.0109231 \cos(0.4642 \beta) + 0.176582 = 0$$

$$\beta_k = \{\}$$

$$\beta_k, (\beta_k > 0) = \{\}$$

• $j = 2$

$$Y_j^* = \{3.13936, 1.64772, 0.961039\}$$

$$\tau = (\tau_i, \tau_g, \tau_g) = \{0.05, 0.4642, 0.4642\}$$

• $\psi(\beta) = 0$

$$\psi(\beta) = \beta^6 - 0.136451 \beta^4 + (0.0256329 \cos(0.4642 \beta) - 0.0581179) \beta^2 - 0.00801955 \sin(0.4642 \beta) \beta + 0.00716534 \cos(0.4642 \beta) - 0.0350562 = 0$$

$$\beta_k = \begin{pmatrix} \beta \rightarrow -0.634648 \\ \beta \rightarrow 0.634648 \end{pmatrix}$$

$$\beta_k, (\beta_k > 0) = \{\beta \rightarrow 0.634648\}$$

4.2.3. Resultados Numéricos

En esta sección se proporcionan problemas numéricos para verificar los resultados teóricos propuestos. Las soluciones numéricas para el sistema (P) se simulan utilizando el esquema predictor–corrector de tipo Adams–Bashforth–Moulton con el tamaño de paso h y los parámetros indicados en cada caso.

En la Tabla 4.2 se representan los valores de los parámetros.

Tabla 4.2. Parámetros del modelo Regulador de Glucosa–Insulina y Dinámica de Células β .

Casos	r_1	r_2	r_3	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7	c_1	c_2	\hat{y}	T	N
I	0.472	0.2275	0.025	0.82	0.6	0.3	0.3	0.2	0.1	0.8	1.42	1.5	1.27

■ **Problema 4.2.1.**

Sea el modelo regulador Glucosa–Insulina con Retardo del tiempo:

$$(P) \equiv \begin{cases} D^{(\alpha_1)} y_1(x) = r_1 y_2(x - \tau_g) y_3(x - \tau_g) - r_2 y_1(x) - r_3 y_1(x) y_2(x) + c_1 y_3(x - \tau_g) & x \in (0, T) \\ D^{(\alpha_2)} y_2(x) = \frac{R_3 N}{y_3(t)} - R_4 y_1(x - \tau_i) + c_2 \\ D^{(\alpha_3)} y_3(x) = R_5 (y_2(x) - \hat{y}) (T - y_3(x)) + R_6 y_3(x) (T - y_3(x)) - R_7 y_3(x) \end{cases}$$

con los parámetros expresados en la Tabla siguiente:

r_1	r_2	r_3	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7	c_1	c_2	\hat{y}	T	N
0.472	0.2275	0.025	0.82	0.6	0.3	0.3	0.2	0.1	0.8	1.42	1.5	1.27

La ecuación característica del sistema viene dada por la expresión:

$$P(\lambda) \equiv a_3 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 + \underbrace{(a_4 \lambda + a_5)}_{a_{e1}} e^{-\lambda \tau_i} + \underbrace{(a_6 \lambda + a_7)}_{a_{e2}} e^{-\lambda(\tau_g + \tau_i)} = 0$$

y la ecuación que determina un par de raíces complejas puras $\lambda = \pm i \beta$ para algún valor del retraso τ es $\psi(\beta) = 0$:

$$\psi(\beta) \equiv \beta^6 + (a_2^2 - 2 a_1) \beta^4 + \beta^2 (-2 a_4 a_6 \cos(\beta \tau_g) + a_1^2 - a_4^2 - a_6^2 - 2 a_0 a_2) - 2 (a_5 a_6 - a_4 a_7) \beta \sin(\beta \tau_g) - 2 a_5 a_7 \cos(\beta \tau_g) + a_0^2 - a_5^2 - a_7^2 = 0$$

siendo los coeficientes a_i los indicados en la siguiente Tabla de coeficientes del modelo:

a_i	Coefficientes del Modelo.
a_3	1
a_2	$r_3 (y_2)^* + r_2 - R_6 T_1 - R_5 \hat{y} + R_5 (y_2)^* + 2 R_6 (y_3)^* + R_7$
a_1	$\frac{N_1 R_3 R_5 (T_1 - (y_3)^*)}{((y_3)^*)^2} + (r_3 (y_2)^* + r_2) (-R_6 T_1 + R_5 (-\hat{y}) + R_5 (y_2)^* + 2 R_6 (y_3)^* + R_7)$
a_0	$\frac{N_1 R_3 R_5 (r_3 (y_2)^* + r_2) (T_1 - (y_3)^*)}{((y_3)^*)^2}$
a_4	$-r_3 R_4 (y_1)^*$
a_5	$r_3 R_4 (y_1)^* (R_6 T_1 + R_5 \hat{y} - R_5 (y_2)^* - 2 R_6 (y_3)^* - R_7)$
a_6	$r_1 R_4 (y_3)^*$
a_7	$R_4 (c_1 R_5 (T_1 - (y_3)^*) + r_1 ((y_3)^* (R_7 - R_6 (T_1 - 2 (y_3)^*)) + R_5 (T_1 (y_2)^* - \hat{y} (y_3)^*)))$

(a) Determinése la ecuación $\psi(\beta) = 0$ para los retrasos $(\tau_i, \tau_g) = (0.05, 0.4642)$, y hállese la raíz β_k , comprobando que coincide con el módulo de las raíces complejas puras $\lambda = \pm i \beta$.

Indicación:

τ_i	τ_g	λ_1	λ_2	λ_3
0.05	0.35	-0.5300075	-0.01589055 + 0.6417439 i	-0.01589055 - 0.6417439 i
0.05	0.4	-0.5323045	-0.008819797 + 0.6387846 i	-0.008819797 - 0.6387846 i
0.05	0.464	-0.5352581	-0.00003173886 + 0.6346646 i	-0.00003173886 - 0.6346646 i
0.05	0.4642	-0.5352674	0.6346512 i	-0.6346512 i
0.05	0.5	-0.5369259	0.004774346 + 0.6321953 i	0.004774346 - 0.6321953 i
0.05	0.6	-0.5415806	0.01757635 + 0.6248250 i	0.01757635 - 0.6248250 i

$\tau_0 = 0.4642, \beta = 0.6346.$

Observaciones 4.2.1.

- (i) Se comprueba que el sistema tiene un conjunto de autovalores λ_{ji} para el punto de equilibrio $Y_j^* = (3.13936, 1.64772, 0.961039)$, donde se verifica:
 - (a) Si $\tau_g = \tau_0 = 0.4642$ las raíces de $P(\lambda) = 0$ son complejas puras ($\lambda = \pm i 0.6346512$) y entonces la respuesta del sistema será periódica.
 - (b) Si $\tau_g \in [0, \tau_0 = 0.4642)$ las raíces de $P(\lambda) = 0$ tienen partes reales negativas y el sistema es estable asintóticamente en el punto de equilibrio Y_j^* .
 - (c) Si $\tau_g > \tau_0 = 0.4642$ las raíces $P(\lambda) = 0$ tienen partes reales positivas y por tanto el sistema será inestable en el punto de equilibrio $Y_j^* = (3.13936, 1.64772, 0.961039)$.
- (ii) En el retraso crítico $\tau_0 = 0.4642$ el autovalor complejo puro $\lambda = \pm i 0.6346512$ coincide en módulo con el cálculo de la variable $\beta = 0.6346$ obtenido mediante la ecuación $\psi(\beta) = 0$.

■ **Problema 4.2.2. Modelo Regulador Glucosa-Insulina con Retardo de Tiempo.**

([ALHU20])

Sea el sistema de ecuaciones diferenciales con retraso SFDDE que representa el modelo de regulador Glucosa-Insulina de orden fraccionario con retraso del tiempo:

$$(P) \equiv \begin{cases} D^{(\alpha_1)} y_1(x) = r_1 y_2(x - \tau_g) y_3(x - \tau_g) - r_2 y_1(x) - r_3 y_1(x) y_2(x) & x \in (0, T) \\ \quad + c_1 y_3(x - \tau_g) \\ D^{(\alpha_2)} y_2(x) = \frac{R_3 N}{y_3(t)} - R_4 y_1(x - \tau_i) + c_2 \\ D^{(\alpha_3)} y_3(x) = R_5 (y_2(x) - \hat{y}) (T - y_3(x)) + R_6 y_3(x) (T - y_3(x)) \\ \quad - R_7 y_3(x) \\ \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ y_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.0 \\ 1.5 \\ 1.0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Caso I.

r_1	r_2	r_3	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7	c_1	c_2	\hat{y}	T	N
0.472	0.2275	0.025	0.82	0.6	0.3	0.3	0.2	0.1	0.8	1.42	1.5	1.27

• Punto de equilibrio: $Y^* = \{3.13936, 1.64772, 0.961039\}$

• Retraso crítico: $\tau_0 = 0.4642$

$$\alpha = (\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3) = (1 \quad 1 \quad 1)$$

(i) Calcúlese la solución numérica mediante el método de *Adams-Bashforth-Moulton fraccionario con retraso* (ABMFR) tomando los valores de los parámetros dados.

(ii) Representése las soluciones aproximadas $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$ del método ABMFR en el intervalo $t \in [0, T] = [0, 100]$, y el diagrama de fases en el plano $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$.

$$[0, T] = [0, 100] \text{ min} \quad h = 0.05.$$

(a) $\tau = (\tau_i, \tau_g, \tau_g) = (0.05, 0.35, 0.35)$ $\tau_g = 0.35 < \tau_0 = 0.4642$ Estable asintóticamente.

(b) $\tau = (\tau_i, \tau_g, \tau_g) = (0.05, 0.4642, 0.4642)$ $\tau_g = 0.4642 = \tau_0$ Sistema periódico.

(c) $\tau = (\tau_i, \tau_g, \tau_g) = (0.05, 0.60, 0.60)$ $\tau_g = 0.60 > \tau_0 = 0.4642$ Inestable.

SOLUCIÓN

(a)

Caso I.

r_1	r_2	r_3	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7	c_1	c_2	\hat{y}	T	N
0.472	0.2275	0.025	0.82	0.6	0.3	0.3	0.2	0.1	0.8	1.42	1.5	1.27

Método de Adams–Bashforth–Moulton Fraccionario con Retraso (ABMFR) para Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Fraccionarias con Retraso (SFDDE) α_r .

$$(P) \equiv \begin{cases} D^{(\alpha_r)} y_r(x) = f_r(x, y_1(x), \dots, y_r(x), y_1(x-\tau), \dots, y_r(x-\tau)) & x \in [0, T] \quad 0 < \alpha \leq 1 \\ y_r(x) = g_r(x) & x \in [-\tau, 0] \\ y_r(0) = y_{r0} \end{cases}$$

$$r = 1, 2, \dots, m$$

$$(P) \equiv \left(\begin{array}{l} D y_1(x) = -0.025 y_2(x) y_1(x) - 0.2275 y_1(x) + 0.472 y_2(x - 0.35) y_3(x - 0.35) + 0.1 y_3(x - 0.35) \\ D y_2(x) = -0.6 y_1(x - 0.05) + \frac{1.0414}{y_3(x)} + 0.8 \\ D y_3(x) = 0.3 (y_2(x) - 1.42) (1.5 - y_3(x)) + 0.3 y_3(x) (1.5 - y_3(x)) - 0.2 y_3(x) \\ (y_1(0) = 3, \quad y_2(0) = 1.5, \quad y_3(0) = 1.) \end{array} \right) x \in [0, T]$$

$$\begin{cases} f_1(x, y_r(x), y_r(x-\tau)) = -0.025 y_2(x) y_1(x) - 0.2275 y_1(x) + 0.472 y_2(x - 0.35) y_3(x - 0.35) + 0.1 y_3(x - 0.35) \\ f_2(x, y_r(x), y_r(x-\tau)) = -0.6 y_1(x - 0.05) + \frac{1.0414}{y_3(x)} + 0.8 \\ f_3(x, y_r(x), y_r(x-\tau)) = 0.3 (y_2(x) - 1.42) (1.5 - y_3(x)) + 0.3 y_3(x) (1.5 - y_3(x)) - 0.2 y_3(x) \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ll} [A, B] = & [0, 100] \quad \text{(intervalo } x) \\ \{\alpha_r, n = [\alpha]\} = & \{1, 1, 1, 1\} \\ \tau = & \{0.05, 0.35, 0.35\} \\ h = & 0.05 \quad \text{Tamaño del paso} \\ m = & 3 \quad \text{Número de ecuaciones} \end{array} \right)$$

Tabla de puntos (x_k, y_{rk}^P) y (x_k, y_{rk}) ($r = 1, 2, \dots, m$).

k	x_k	y_{1k}^P	y_{2k}^P	y_{3k}^P
200	10.0000000000	3.1308872025	1.5653049257	0.9451935996
400	20.0000000000	3.1252803857	1.5819308354	0.9458394013
600	30.0000000000	3.1212468540	1.5963551323	0.9470476763
800	40.0000000000	3.1190155122	1.6087948630	0.9484186040
1000	50.0000000000	3.1181744257	1.6193240604	0.9498527422
1200	60.0000000000	3.1183716113	1.6280701859	0.9512772243
1400	70.0000000000	3.1193137016	1.6351940920	0.9526401667
1600	80.0000000000	3.1207604722	1.6408739902	0.9539067392
1800	90.0000000000	3.1225190232	1.6452935296	0.9550556607
2000	100.0000000000	3.1244378818	1.6486331736	0.9560761562

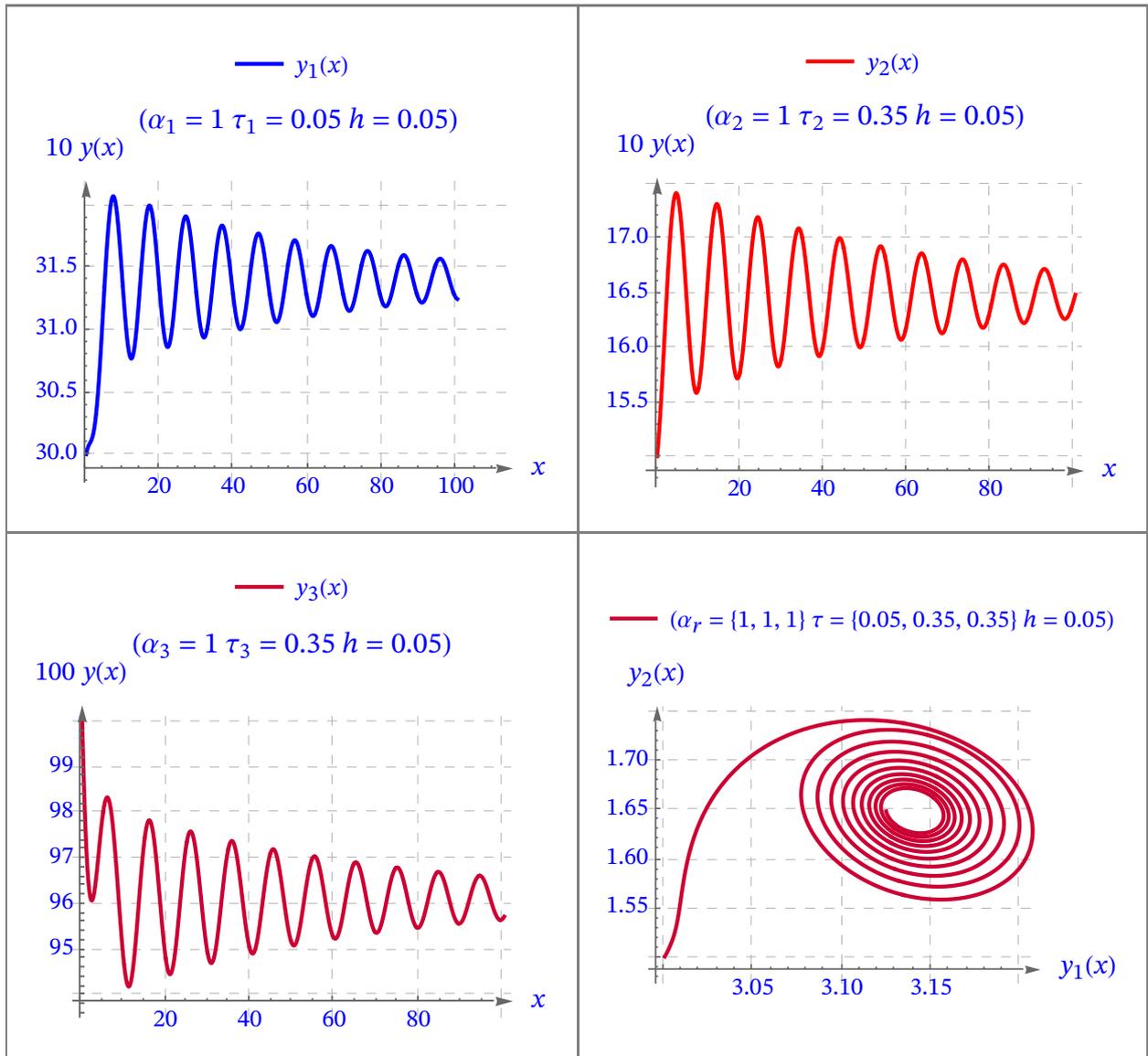
k	x_k	y_{1k}	y_{2k}	y_{3k}
0	0.0000000000	3.0000000000	1.5000000000	1.0000000000
200	10.0000000000	3.1295279480	1.5648408119	0.9459552483
400	20.0000000000	3.1240939284	1.5815345253	0.9466643240
600	30.0000000000	3.1202244885	1.5959866079	0.9479213493
800	40.0000000000	3.1181383717	1.6084222079	0.9493310044
1000	50.0000000000	3.1174233480	1.6189244388	0.9507951020
1200	60.0000000000	3.1177279592	1.6276281588	0.9522420407
1400	70.0000000000	3.1187599105	1.6347001197	0.9536211576
1600	80.0000000000	3.1202804118	1.6403231365	0.9548987543
1800	90.0000000000	3.1220982083	1.6446843595	0.9560545670
2000	100.0000000000	3.1240635662	1.6479668309	0.9570787129

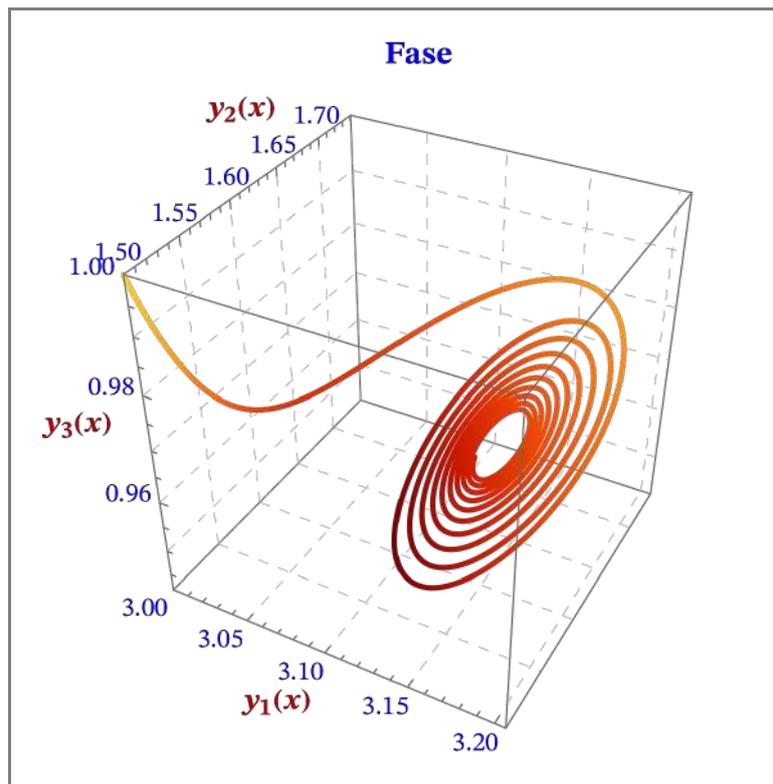
$$y(100) \approx y_{2000} = 3.1240635662$$

Solución aproximada del sistema SFDDE

$$y_r(x) \ (h = 0.05)$$

calculada con el método *Adams–Bashforth–Moulton Fraccionario con Retraso*.





(b)

Caso I.

r_1	r_2	r_3	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7	c_1	c_2	\hat{y}	T	N
0.472	0.2275	0.025	0.82	0.6	0.3	0.3	0.2	0.1	0.8	1.42	1.5	1.27

Método de Adams–Bashforth–Moulton Fraccionario con Retraso (ABMFR) para Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Fraccionarias con Retraso (SFDDE) α_r .

$$(P) \equiv \begin{cases} D^{(\alpha_r)} y_r(x) = f_r(x, y_1(x), \dots, y_r(x), y_1(x-\tau), \dots, y_r(x-\tau)), & x \in [0, T] \quad 0 < \alpha \leq 1 \\ y_r(x) = g_r(x) & x \in [-\tau, 0] \\ y_r(0) = y_{r0} \end{cases}$$

$r = 1, 2, \dots, m$

$$(P) \equiv \left(\begin{array}{l} D y_1(x) = -0.025 y_2(x) y_1(x) - 0.2275 y_1(x) + 0.472 y_2(x - 0.4642) y_3(x - 0.4642) + 0.1 y_3(x - 0.4642) \\ D y_2(x) = -0.6 y_1(x - 0.05) + \frac{1.0414}{y_3(x)} + 0.8 \\ D y_3(x) = 0.3 (y_2(x) - 1.42) (1.5 - y_3(x)) + 0.3 y_3(x) (1.5 - y_3(x)) - 0.2 y_3(x) \\ (y_1(0) = 3, \quad y_2(0) = 1.5 \quad y_3(0) = 1.) \end{array} \right) x \in$$

$$\left(\begin{array}{l} f_1(x, y_r(x), y_r(x-\tau)) = -0.025 y_2(x) y_1(x) - 0.2275 y_1(x) + 0.472 y_2(x - 0.4642) y_3(x - 0.4642) + 0.1 y_3(x - 0.4642) \\ f_2(x, y_r(x), y_r(x-\tau)) = -0.6 y_1(x - 0.05) + \frac{1.0414}{y_3(x)} + 0.8 \\ f_3(x, y_r(x), y_r(x-\tau)) = 0.3 (y_2(x) - 1.42) (1.5 - y_3(x)) + 0.3 y_3(x) (1.5 - y_3(x)) - 0.2 y_3(x) \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{l} [A, B] = [0, 100] \quad (\text{intervalo } x) \\ \{\alpha_r, n = \lceil \alpha \rceil\} = \{1, 1, 1, 1\} \\ \tau = \{0.05, 0.4642, 0.4642\} \\ h = 0.05 \quad \text{Tamaño del paso} \\ m = 3 \quad \text{Número de ecuaciones} \end{array} \right)$$

Proceso iterativo.

Tabla de puntos (x_k, y_{rk}^P) y (x_k, y_{rk}) ($r = 1, 2, \dots, m$).

k	x_k	y_{1k}^P	y_{2k}^P	y_{3k}^P
200	10.0000000000	3.1359218020	1.5525763991	0.9434223604
400	20.0000000000	3.1312302242	1.5571806761	0.9424552825
600	30.0000000000	3.1261079511	1.5619307479	0.9418808685
800	40.0000000000	3.1212656845	1.5670071392	0.9414364731
1000	50.0000000000	3.1167229642	1.5723669889	0.9411188301
1200	60.0000000000	3.1124937002	1.5779665382	0.9409251550
1400	70.0000000000	3.1085894708	1.5837624564	0.9408519541
1600	80.0000000000	3.1050195696	1.5897120979	0.9408950691
1800	90.0000000000	3.1017910478	1.5957737383	0.9410497330
2000	100.0000000000	3.0989087642	1.6019067915	0.9413106281

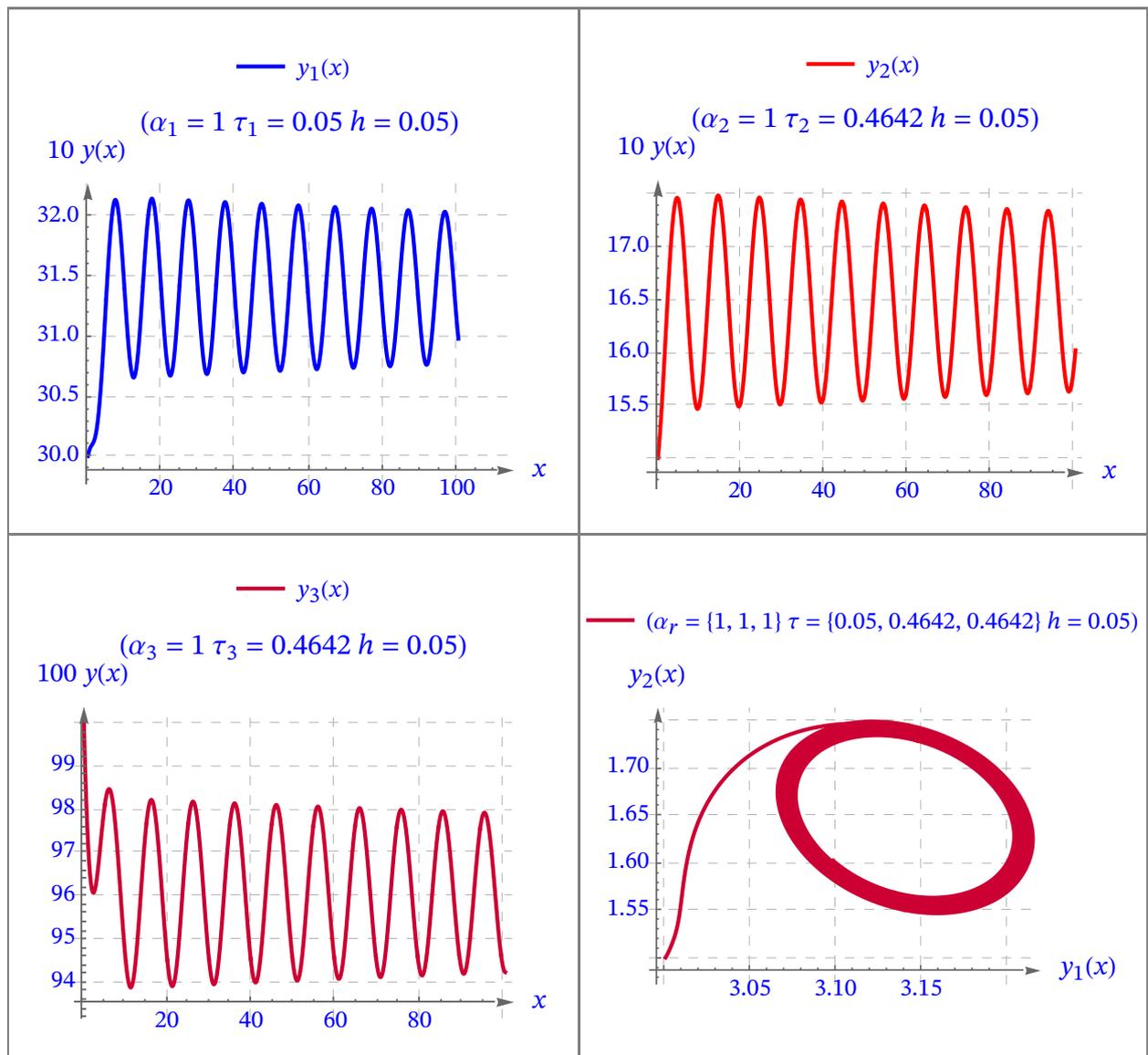
k	x_k	y_{1k}	y_{2k}	y_{3k}
0	0.0000000000	3.0000000000	1.5000000000	1.0000000000
200	10.0000000000	3.1344109786	1.5520862961	0.9441468250
400	20.0000000000	3.1297434743	1.5567895721	0.9432075960
600	30.0000000000	3.1246592543	1.5616338454	0.9426581841
800	40.0000000000	3.1198599967	1.5667965147	0.9422390275
1000	50.0000000000	3.1153647654	1.5722345042	0.9419467007
1200	60.0000000000	3.1111870290	1.5779039142	0.9417782495
1400	70.0000000000	3.1073379195	1.5837613322	0.9417300167
1600	80.0000000000	3.1038262826	1.5897640873	0.9417976884
1800	90.0000000000	3.1006587211	1.5958704836	0.9419763502
2000	100.0000000000	3.0978396479	1.6020400152	0.9422605472

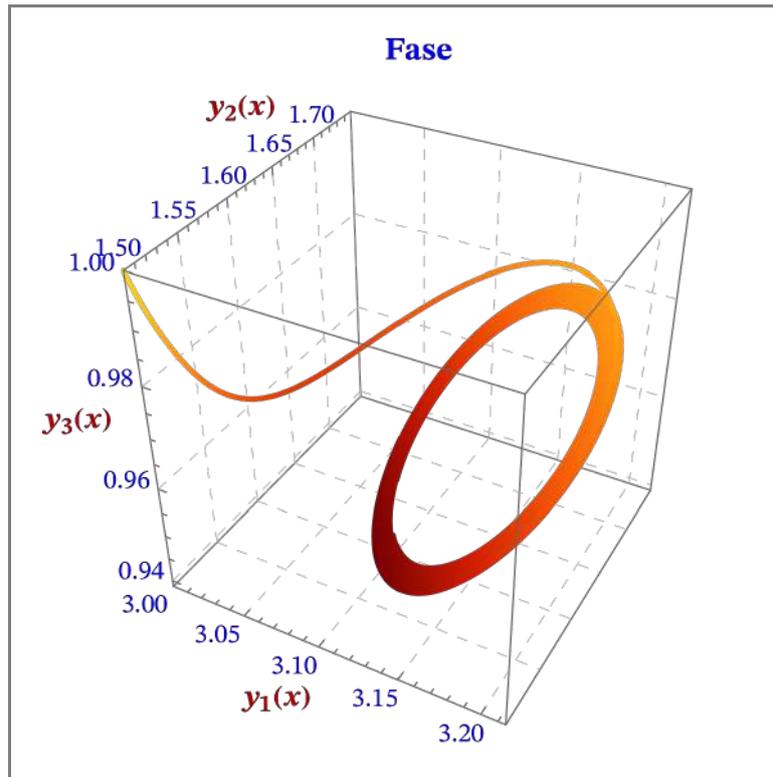
$$y(100) \approx y_{2000} = 3.0978396479$$

Solución aproximada del sistema SFDDE

$$y_r(x) (h = 0.05)$$

calculada con el método *Adams–Bashforth–Moulton Fraccionario con Retraso*.





Las gráficas muestran la correspondiente evolución en el tiempo de la concentración de insulina, por encima de su nivel basal $y_1(x)$, la concentración de glucosa por encima de su nivel basal $y_2(x)$ y el número de células β para $\tau_i = 0.05$ y $\tau_g = 0.4642$. Para estos parámetros se obtiene una solución periódica. En diversas investigaciones se ha observado experimentalmente un comportamiento periódico similar para las variables biológicas de la insulina y la glucosa se ha informado para el sistema metabólico endocrino normal.

El estrecho acoplamiento entre las oscilaciones de glucosa e insulina sugiere lo siguiente:

- Ambas oscilaciones representan una propiedad dinámica del ciclo de retroalimentación glucosa-insulina.
- Las señales moduladas periódicamente son más efectivas que los estímulos constantes, estocásticos o caóticos para producir una respuesta fisiológica sostenida en las células objetivo.

(c)

Caso I.

r_1	r_2	r_3	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7	c_1	c_2	\hat{y}	T	N
0.472	0.2275	0.025	0.82	0.6	0.3	0.3	0.2	0.1	0.8	1.42	1.5	1.27

Método de *Adams–Bashforth–Moulton Fraccionario con Retraso* (ABMFR) para Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Fraccionarias con Retraso (SFDDE) α_r .

$$(P) \equiv \begin{cases} D^{(\alpha_r)} y_r(x) = f_r(x, y_1(x), \dots, y_r(x), & x \in [0, T] \quad 0 < \alpha \leq 1 \\ y_1(x - \tau), \dots, y_r(x - \tau)) \\ y_r(x) = g_r(x) & x \in [-\tau, 0] \\ y_r(0) = y_{r0} \end{cases}$$

$$r = 1, 2, \dots, m$$

(P) \equiv

$$\left(\begin{array}{l} D y_1(x) = -0.025 y_2(x) y_1(x) - 0.2275 y_1(x) + 0.472 y_2(x - 0.6) y_3(x - 0.6) + 0.1 y_3(x - 0.6) \\ D y_2(x) = -0.6 y_1(x - 0.05) + \frac{1.0414}{y_3(x)} + 0.8 \\ D y_3(x) = 0.3 (y_2(x) - 1.42) (1.5 - y_3(x)) + 0.3 y_3(x) (1.5 - y_3(x)) - 0.2 y_3(x) \\ (y_1(0) = 3. \quad y_2(0) = 1.5 \quad y_3(0) = 1.) \end{array} \right) x \in [0, T]$$

$$\left(\begin{array}{l} f_1(x, y_r(x), y_r(x-\tau)) = -0.025 y_2(x) y_1(x) - 0.2275 y_1(x) + 0.472 y_2(x - 0.6) y_3(x - 0.6) + 0.1 y_3(x - 0.6) \\ f_2(x, y_r(x), y_r(x-\tau)) = -0.6 y_1(x - 0.05) + \frac{1.0414}{y_3(x)} + 0.8 \\ f_3(x, y_r(x), y_r(x-\tau)) = 0.3 (y_2(x) - 1.42) (1.5 - y_3(x)) + 0.3 y_3(x) (1.5 - y_3(x)) - 0.2 y_3(x) \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{l} [A, B] = [0, 100] \quad (\text{intervalo } x) \\ \{\alpha_r, n = [\alpha]\} = \{[1, 1, 1], 1\} \\ \tau = \{0.05, 0.6, 0.6\} \\ h = 0.05 \quad \text{Tamaño del paso} \\ m = 3 \quad \text{Número de ecuaciones} \end{array} \right)$$

Tabla de puntos (x_k, y_{rk}^P) y (x_k, y_{rk}) ($r = 1, 2, \dots, m$).

k	x_k	y_{1k}^P	y_{2k}^P	y_{3k}^P
200	10.0000000000	3.1475753182	1.5312672591	0.9408987354
400	20.0000000000	3.1536262477	1.5081098645	0.9375863760
600	30.0000000000	3.1606658388	1.4802994883	0.9340524054
800	40.0000000000	3.1697149878	1.4472544725	0.9299611011
1000	50.0000000000	3.1811582766	1.4080257898	0.9251836348
1200	60.0000000000	3.1953568178	1.3614797025	0.9195278152
1400	70.0000000000	3.2125617644	1.3062497346	0.9126892003
1600	80.0000000000	3.2327387470	1.2406755847	0.9041654239
1800	90.0000000000	3.2552307885	1.1627510572	0.8931010820
2000	100.0000000000	3.2781157652	1.0701756600	0.8780018873

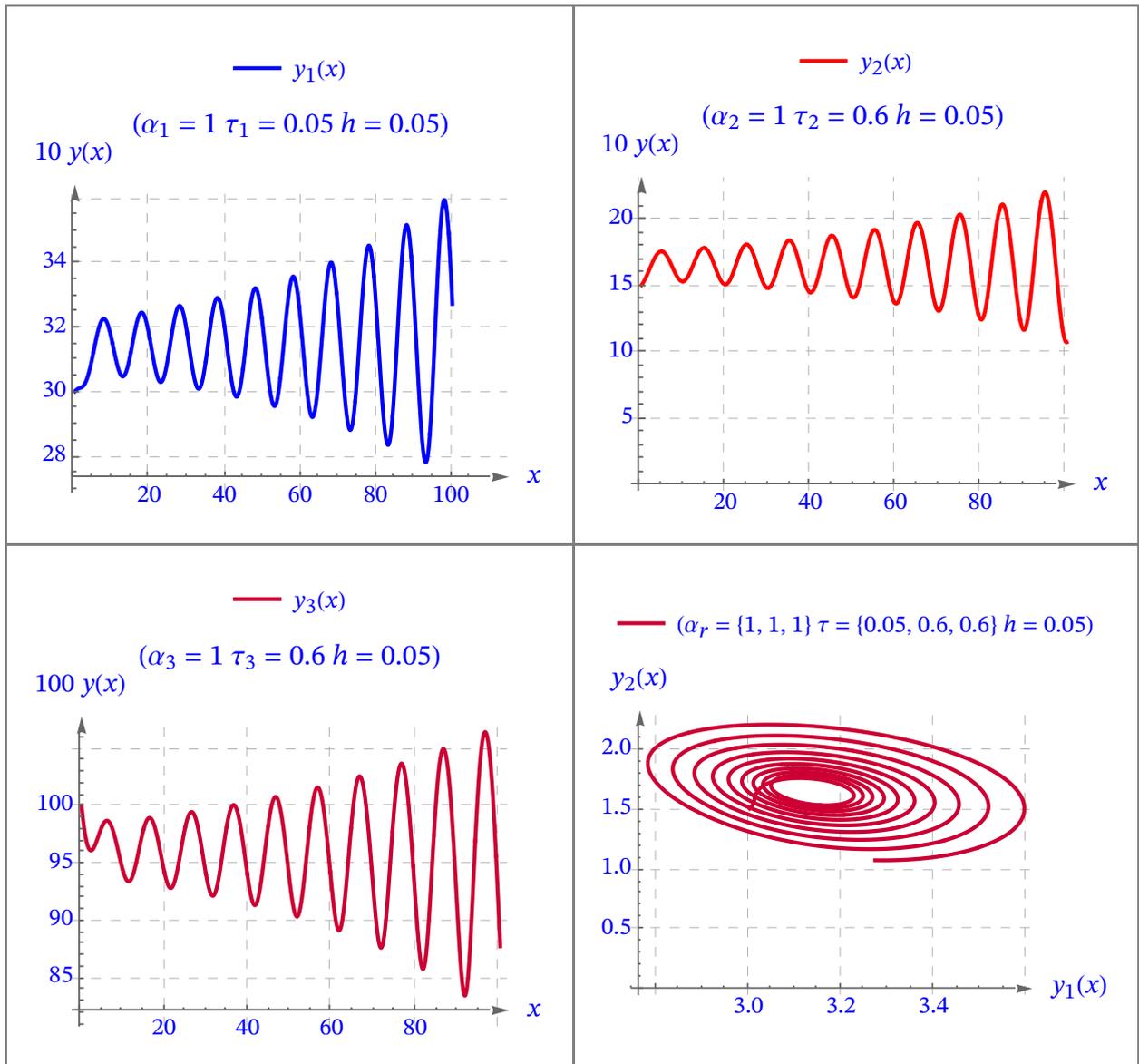
k	x_k	y_{1k}	y_{2k}	y_{3k}
0	0.0000000000	3.0000000000	1.5000000000	1.0000000000
200	10.0000000000	3.1458491212	1.5306733095	0.9415562467
400	20.0000000000	3.1516305616	1.5075189542	0.9381749357
600	30.0000000000	3.1583624146	1.4797035397	0.9345527764
800	40.0000000000	3.1670491038	1.4466401108	0.9303536714
1000	50.0000000000	3.1780650664	1.4073780950	0.9254446745
1200	60.0000000000	3.1917588029	1.3607847336	0.9196286079
1400	70.0000000000	3.2083653329	1.3055000842	0.9125949452
1600	80.0000000000	3.2278291592	1.2398817499	0.9038337368
1800	90.0000000000	3.2494652664	1.1619639996	0.8924798114
2000	100.0000000000	3.2713147694	1.0695313863	0.8770258186

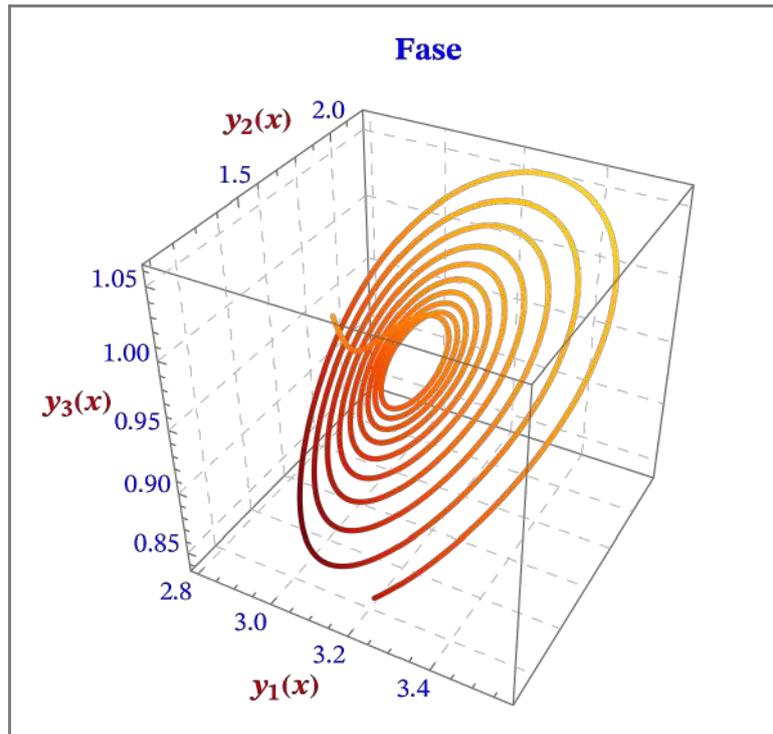
$$y(100) \approx y_{2000} = 3.2713147694$$

Solución aproximada del sistema SFDDE

$$y_r(x) (h = 0.05)$$

calculada con el método *Adams–Bashforth–Moulton Fraccionario con Retraso*.





En las gráficas se muestra la serie temporal donde el comportamiento del sistema es caótico para $\tau_i = 3.5$ y $\tau_g = 0.6$. Los resultados están en línea con las investigaciones anteriores, que revelan que un comportamiento caótico en las formas de onda de glucosa-insulina es un signo de un trastorno existente. Debido al comportamiento caótico, estabilizar el nivel de glucosa en sangre para los sujetos diabéticos es un desafío (el paciente continúa evitando la hipoglucemia y la hiperglucemia). Generalmente, el análisis de las mediciones de la concentración de glucosa en plasma es una de las tareas más cruciales para apoyar el control metabólico de la glucosa. Como consecuencia, el nivel de evolución de la glucosa en sangre de los sujetos diabéticos puede predecirse con un rango de confianza aceptable. Fuera de este rango el proceso es caótico, donde, según la teoría del caos, el sistema es determinista pero impredecible a largo plazo debido a su sensibilidad a las condiciones iniciales.

En los resultados de las simulaciones del modelo se observa:

- En condiciones metabólicas normales, un comportamiento periódico con un pequeño retraso en el tiempo.
- En un estado defectuoso, un comportamiento caótico o un retraso prolongado en el sistema metabólico.

El tiempo de evolución tanto de la glucosa como de la insulina revela un comportamiento oscilatorio con un período de aproximadamente 8 minutos que se encuentra en el rango aceptable (de 5 a 15 minutos), lo que resulta consistente con los resultados reportados en los experimentos biológicos. Además, el modelo exhibe caos, una medida de desorden en el sistema biológico, para otros valores de los parámetros. El principio de extensión y el error acotado inferior se utilizan para probar el estado caótico del modelo en un rango de retardo de tiempo específico.

4.3. Sistema Regulador de Glucosa–Insulina Fraccionario No Lineal

Este modelo explica el sistema regulador de Glucosa-Insulina (*Non-linear Fractional Glucose–Insulin Regulatory Dynamical System–GIRS*). Como se demuestra en la literatura científica el análisis de orden fraccionario puede descubrir nuevos aspectos de sistemas complejos que no eran previamente explorado. Se ha comprobado [AGRA22] que el modelo GIRS es estable en su forma de orden fraccional no lineal.

Cada investigación numérica se deriva con el fin de demostrar la eficacia y aplicabilidad del análisis de orden fraccionario, incluido el método Toufik-Atangana y el método de la matriz integral fraccionaria *Wavelets* de Bernoulli. Un sistema Glucosa–Insulina no regulado provoca una amplia variedad de trastornos biológicos. Estos estudios puede permitir una comprensión más profunda del sistema regulatorio.

4.3.1. Descripción del Modelo de Orden Fraccionario

El modelo de orden fraccionario es el siguiente ([AGRA22])

$$(P) \equiv \begin{cases} D^{(\alpha_1)} y_1(x) = -r_1 y_1(x) + r_2 y_1(x) y_2(x) + r_3 y_2(x)^2 + r_4 y_2(x)^3 + r_5 y_3(x) + r_6 y_3(x)^2 + r_7 y_3(x)^3 + r_{20} \\ D^{(\alpha_2)} y_2(x) = -r_8 y_1(x) y_2(x) - r_9 y_1(x)^2 - r_{10} y_1(x)^3 + r_{11} y_2(x) (1 - y_2(x)) - r_{12} y_3(x) - r_{13} y_3(x)^2 - r_{14} y_3(x)^3 + e_{21} \\ D^{(\alpha_3)} y_3(x) = r_{15} y_2(x) + r_{16} y_2(x)^2 + r_{17} y_2(x)^3 - r_{18} y_3(x) - r_{19} y_2(x) y_3(x) \end{cases} \quad x \in (0, T) \quad (4.3.1)$$

$$\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ y_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.53 \\ 1.31 \\ 1.03 \end{pmatrix} \quad 0 < \alpha_r \leq 1$$

siendo

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ y_3(x) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} I(x) \\ G(x) \\ X(x) \end{pmatrix} \quad (4.3.2)$$

Como en los anteriores modelos $y_1(x)$ representa la concentración de insulina a lo largo del tiempo $y_2(x)$ la concentración de glucosa e $y_3(t)$ la densidad de población de las células β sanas.

Por otra parte el significado biológico de las constantes cuyo valor se presenta en los ejemplos de a continuación, la es el siguiente: en primer lugar, r_1 representa la reducción de la insulina cuando la glucosa no esta presente, r_2 el ratio de propagación de la insulina cuando hay glucosa en el organismo, r_8 el efecto que tiene la insulina en la glucosa y r_{11} el incremento de la glucosa cuando no esta presente la insulina. r_3 y r_4 representan el ratio de incremento que tienen la concentración de la insulina y la glucosa respectivamente y $r_5 - r_7$ la insulina definida por las células β . r_9 y r_{10} representa el efecto de reducción que tiene la insulina en la glucosa, $r_{12} - r_{14}$ representan la efectividad de la insulina salvada por las célu-

las β con la ayuda del incremento de la glucosa, $r_{15} - r_{17}$ el ratio de células β y r_{18} y r_{19} las células β enfermas producidas por el nivel de glucosa.

4.3.2. Análisis de Estabilidad y Análisis de Bifurcación

Se analiza la estabilidad del sistema determinando los puntos de equilibrio Y^* , calculando la matriz Jacobiana del sistema y la ecuación característica mediante un ejemplo práctico, de acuerdo con la teoría relacionada con los sistemas no lineales con retardo.

Sea el sistema de ecuaciones diferenciales de orden fraccionario SFDE que representa el modelo de interacción de glucosa-insulina de orden fraccionario no lineal (P).

■ Ejemplo 4.3.1. ([AGRA22])

Sea el sistema de ecuaciones diferenciales con retraso SFDDE que representa el modelo regulador Glucosa-Insulina Fraccionario no Lineal:

$$(P) \equiv \begin{cases} D^{(\alpha_1)} y_1(x) = -r_1 y_1(x) + r_2 y_1(x) y_2(x) + r_3 y_2(x)^2 + r_4 y_2(x)^3 & x \in (0, T) \\ \quad + r_5 y_3(x) + r_6 y_3(x)^2 + r_7 y_3(x)^3 + r_{20} \\ D^{(\alpha_2)} y_2(x) = -r_8 y_1(x) y_2(x) - r_9 y_1(x)^2 - r_{10} y_1(x)^3 \\ \quad + r_{11} y_2(x) (1 - y_2(x)) - r_{12} y_3(x) - r_{13} y_3(x)^2 - r_{14} y_3(x)^3 + r_{21} \\ D^{(\alpha_3)} y_3(x) = r_{15} y_2(x) + r_{16} y_2(x)^2 + r_{17} y_2(x)^3 - r_{18} y_3(x) \\ \quad - r_{19} y_2(x) y_3(x) \end{cases}$$

Caso I.

r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6	r_7	r_8	r_9	r_{10}	r_{11}	r_{12}
2.04	0.1	1.09	-1.08	0.03	-0.06	2.01	0.22	-3.84	-1.2	0.3	1.37
r_{13}	r_{14}	r_{15}	r_{16}	r_{17}	r_{18}	r_{19}	r_{20}	r_{21}			
-0.3	0.22	0.3	-1.35	0.5	-0.42	-0.15	-0.19	-0.56			

$$\tau = (\tau_g, \tau_i, \tau_g) = (0, 0, 0)$$

Se pide calcular:

- Los puntos de equilibrio $F(y_1^*, y_2^*, y_3^*) = 0$ reales y complejos.
- Matrices Jacobianas y matrices jacobianas evaluadas en el punto de equilibrio genérico $Y^* = (y_1^*, y_2^*, y_3^*)$.
 - Matriz Jacobiana del sistema sin retraso J_0 ($\tau = 0$).
 - Matriz Jacobiana del sistema con retraso $e^{-\lambda \tau} J_\tau$ ($\tau \neq 0$).
 - y matriz Jacobiana del sistema J_E .
- Ecuación característica en los puntos de equilibrio positivos $Y^* = (y_1^*, y_2^*, y_3^*) > 0$:

$$P(\lambda) = |J_0 + e^{-\lambda \tau} J_\tau - \lambda I|_{Y_1^*, Y_2^*, \dots} = |J_E - \lambda I|_{Y_1^*, Y_2^*, \dots} = 0$$
 y los autovalores λ_i asociados.
- Representación de las funciones características $P_j(\lambda)$ para cada punto de equilibrio real.
- Expresión $\alpha_i > \frac{2}{\pi} \arctg\left(\frac{|\text{Im}(\lambda_i)|}{|\text{Re}(\lambda_i)|}\right)$ para sus autovalores λ_i en los puntos de equilibrio reales Y^* .

SOLUCIÓN

(a)

Caso I.

r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6	r_7	r_8	r_9	r_{10}	r_{11}	r_{12}
2.04	0.1	1.09	-1.08	0.03	-0.06	2.01	0.22	-3.84	-1.2	0.3	1.37
r_{13}	r_{14}	r_{15}	r_{16}	r_{17}	r_{18}	r_{19}	r_{20}	r_{21}			
-0.3	0.22	0.3	-1.35	0.5	-0.42	-0.15	-0.19	-0.56			

$\tau = (\tau_i, \tau_g, \tau_g) = \{0, 0, 0\}$

(a) Puntos de equilibrio: $F(y_1^*, y_2^*, y_3^*) = 0$.

$$Y^* = (y_1^*, y_2^*, y_3^*) = \begin{pmatrix} -3.13617 & 2.20411 & 0.723821 \\ -0.897753 & 1.9948 & 1.11877 \\ 0.619984 & -0.366217 & 0.864162 \\ 0.624425 & 0.935374 & 0.876922 \\ 0.805139 & 1.81475 & 1.31936 \end{pmatrix}$$

(b.3) Matriz Jacobiana del sistema:

$$J_E = J_0 + e^{-\lambda \tau} J_\tau = \begin{pmatrix} \frac{y_2(x)}{10} - \frac{51}{25} & -\frac{81}{25} y_2(x)^2 + \frac{109 y_2(x)}{50} + \frac{y_1(x)}{10} & \frac{603}{100} y_3(x)^2 - \frac{3 y_3(x)}{25} + \frac{3}{100} \\ \frac{18}{5} y_1(x)^2 + \frac{192 y_1(x)}{25} - \frac{11 y_2(x)}{50} & -\frac{11}{50} y_1(x) - \frac{3 y_2(x)}{5} + \frac{3}{10} & -\frac{33}{50} y_3(x)^2 + \frac{3 y_3(x)}{5} - \frac{137}{100} \\ 0 & \frac{3}{2} y_2(x)^2 - \frac{27 y_2(x)}{10} + \frac{3 y_3(x)}{20} + \frac{3}{10} & \frac{3 y_2(x)}{20} + \frac{21}{50} \end{pmatrix}$$

Matriz Jacobiana del sistema evaluada en el punto de equilibrio:

$$J_E(y_1^*, y_2^*, y_3^*) = \begin{pmatrix} \frac{(y_2)^*}{10} - \frac{51}{25} & -\frac{81}{25} ((y_2)^*)^2 + \frac{109 (y_2)^*}{50} + \frac{(y_1)^*}{10} & \frac{603}{100} ((y_3)^*)^2 - \frac{3 (y_3)^*}{25} + \frac{3}{100} \\ \frac{18}{5} ((y_1)^*)^2 + \frac{192 (y_1)^*}{25} - \frac{11 (y_2)^*}{50} & -\frac{11}{50} (y_1)^* - \frac{3 (y_2)^*}{5} + \frac{3}{10} & -\frac{33}{50} ((y_3)^*)^2 + \frac{3 (y_3)^*}{5} - \frac{137}{100} \\ 0 & \frac{3}{2} ((y_2)^*)^2 - \frac{27 (y_2)^*}{10} + \frac{3 (y_3)^*}{20} + \frac{3}{10} & \frac{3 (y_2)^*}{20} + \frac{21}{50} \end{pmatrix}$$

(c) Ecuación característica evaluada en los puntos de equilibrio y autovalores asociados:

• $j = 1$

$$Y_j^* = \{0.624425, 0.935374, 0.876922\} \quad \tau = (\tau_i, \tau_g, \tau_g) = \{0, 0, 0\}$$

$$P_1(\lambda) = \lambda^3 + 1.78475 \lambda^2 + 2.80007 \lambda + 16.4165 = 0$$

$$\lambda_{ji} = \begin{pmatrix} \lambda \rightarrow -2.8372133 \\ \lambda \rightarrow 0.52622952 + 2.3471693 i \\ \lambda \rightarrow 0.52622952 - 2.3471693 i \end{pmatrix}$$

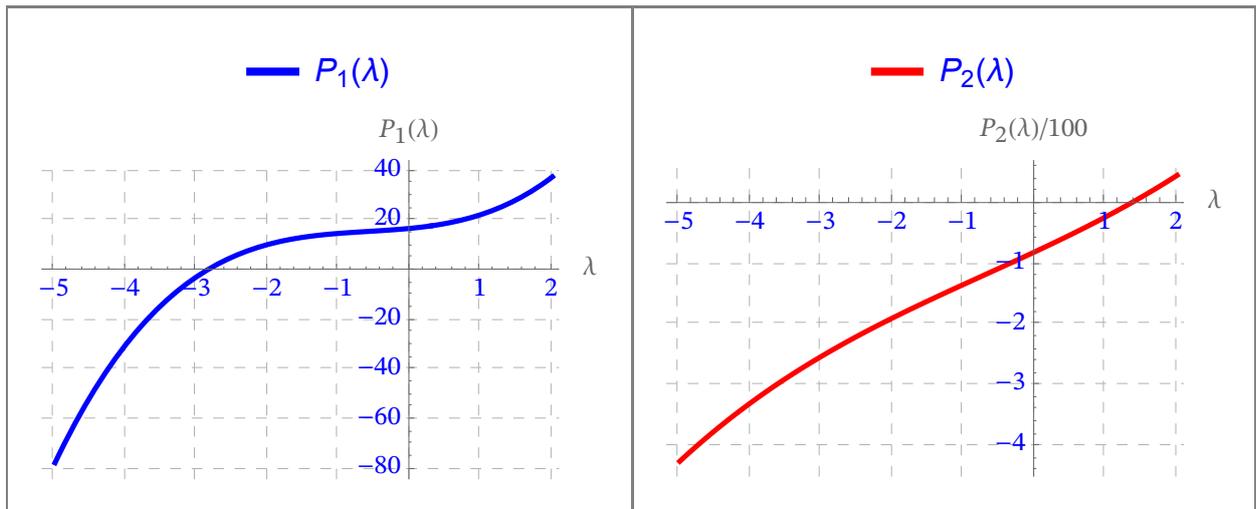
• $j = 2$

$$Y_j^* = \{0.805139, 1.81475, 1.31936\} \quad \tau = (\tau_i, \tau_g, \tau_g) = \{0, 0, 0\}$$

$$P_2(\lambda) = \lambda^3 + 2.13229 \lambda^2 + 54.6215 \lambda - 82.0804 = 0$$

$$\lambda_{j,i} = \begin{pmatrix} \lambda \rightarrow 1.3802106 \\ \lambda \rightarrow 1.3802106 + 1.6163047 \times 10^{-37} i \\ \lambda \rightarrow 1.3802106 - 1.6163047 \times 10^{-37} i \end{pmatrix}$$

(e) Representación de las funciones características $P_j(\lambda)$.



(f) Orden fraccionario y autovalores:

Puntos de equilibrio del sistema y autovalores:

$$Y_j^* = \{0.624425, 0.935374, 0.876922\}$$

$$\lambda_{j,i} = \begin{pmatrix} \lambda \rightarrow -2.8372133 \\ \lambda \rightarrow 0.52622952 + 2.3471693 i \\ \lambda \rightarrow 0.52622952 - 2.3471693 i \end{pmatrix}$$

$$\alpha_i > \frac{2}{\pi} \arctg \left(\frac{|\text{Im}(\lambda_i)|}{|\text{Re}(\lambda_i)|} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.85959319 \\ 0.85959319 \end{pmatrix}$$

Puntos de equilibrio del sistema y autovalores:

$$Y_j^* = \{0.805139, 1.81475, 1.31936\}$$

$$\lambda_{j,i} = \begin{pmatrix} \lambda \rightarrow 1.3802106 \\ \lambda \rightarrow 1.3802106 + 1.6163047 \times 10^{-37} i \\ \lambda \rightarrow 1.3802106 - 1.6163047 \times 10^{-37} i \end{pmatrix}$$

$$\alpha_i > \frac{2}{\pi} \arctg \left(\frac{|\text{Im}(\lambda_i)|}{|\text{Re}(\lambda_i)|} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 7.455178 \times 10^{-38} \\ 7.455178 \times 10^{-38} \end{pmatrix}$$

4.3.3. Resultados Numéricos

En esta sección se proporcionan problemas numéricos para verificar los resultados teóricos propuestos. Las soluciones numéricas para el sistema (P) se simulan utilizando el esquema predictor–corrector de tipo Adams–Bashforth–Moulton con el tamaño de paso h y los parámetros indicados en cada caso.

En la Tabla 4.3 se representan los valores de los parámetros del modelo.

Tabla 4.3. Parámetros del Sistema Glucosa–Insulina Fraccionario en el Modelo No Lineal.

Casos	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6	r_7	r_8	r_9	r_{10}	r_{11}	r_{12}
I	2.04	0.1	1.09	-1.08	0.03	-0.06	2.01	0.22	-3.84	-1.2	0.3	1.37

Casos	r_{13}	r_{14}	r_{15}	r_{16}	r_{17}	r_{18}	r_{19}	r_{20}	r_{21}
I	-0.3	0.22	0.3	-1.35	0.5	-0.42	-0.15	-0.19	-0.56

■ **Problema 4.3.1. Modelo Regulador Glucosa–Insulina no Lineal.** ([AGRA22])

Sea el sistema de ecuaciones diferenciales con retraso SFDDE que representa el modelo regulador Glucosa–Insulina Fraccionario no Lineal:

$$(P_1) \equiv \begin{cases} \begin{cases} D^{(\alpha_1)} y_1(x) = -r_1 y_1(x) + r_2 y_1(x) y_2(x) + r_3 y_2(x)^2 + r_4 y_2(x)^3 \\ \quad + r_5 y_3(x) + r_6 y_3(x)^2 + r_7 y_3(x)^3 + r_{20} \\ D^{(\alpha_2)} y_2(x) = -r_8 y_1(x) y_2(x) - r_9 y_1(x)^2 - r_{10} y_1(x)^3 \\ \quad + r_{11} y_2(x) (1 - y_2(x)) - r_{12} y_3(x) - r_{13} y_3(x)^2 - r_{14} y_3(x)^3 + r_{21} \\ D^{(\alpha_3)} y_3(x) = r_{15} y_2(x) + r_{16} y_2(x)^2 + r_{17} y_2(x)^3 - r_{18} y_3(x) \\ \quad - r_{19} y_2(x) y_3(x) \end{cases} & x \in (0, T) \\ \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ y_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.53 \\ 1.31 \\ 1.03 \end{pmatrix} & x = 0 \end{cases}$$

Caso I.

r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6	r_7	r_8	r_9	r_{10}	r_{11}	r_{12}
2.04	0.1	1.09	-1.08	0.03	-0.06	2.01	0.22	-3.84	-1.2	0.3	1.37
r_{13}	r_{14}	r_{15}	r_{16}	r_{17}	r_{18}	r_{19}	r_{20}	r_{21}			
-0.3	0.22	0.3	-1.35	0.5	-0.42	-0.15	-0.19	-0.56			

$$\tau = (\tau_g, \tau_i, \tau_g) = (0, 0, 0)$$

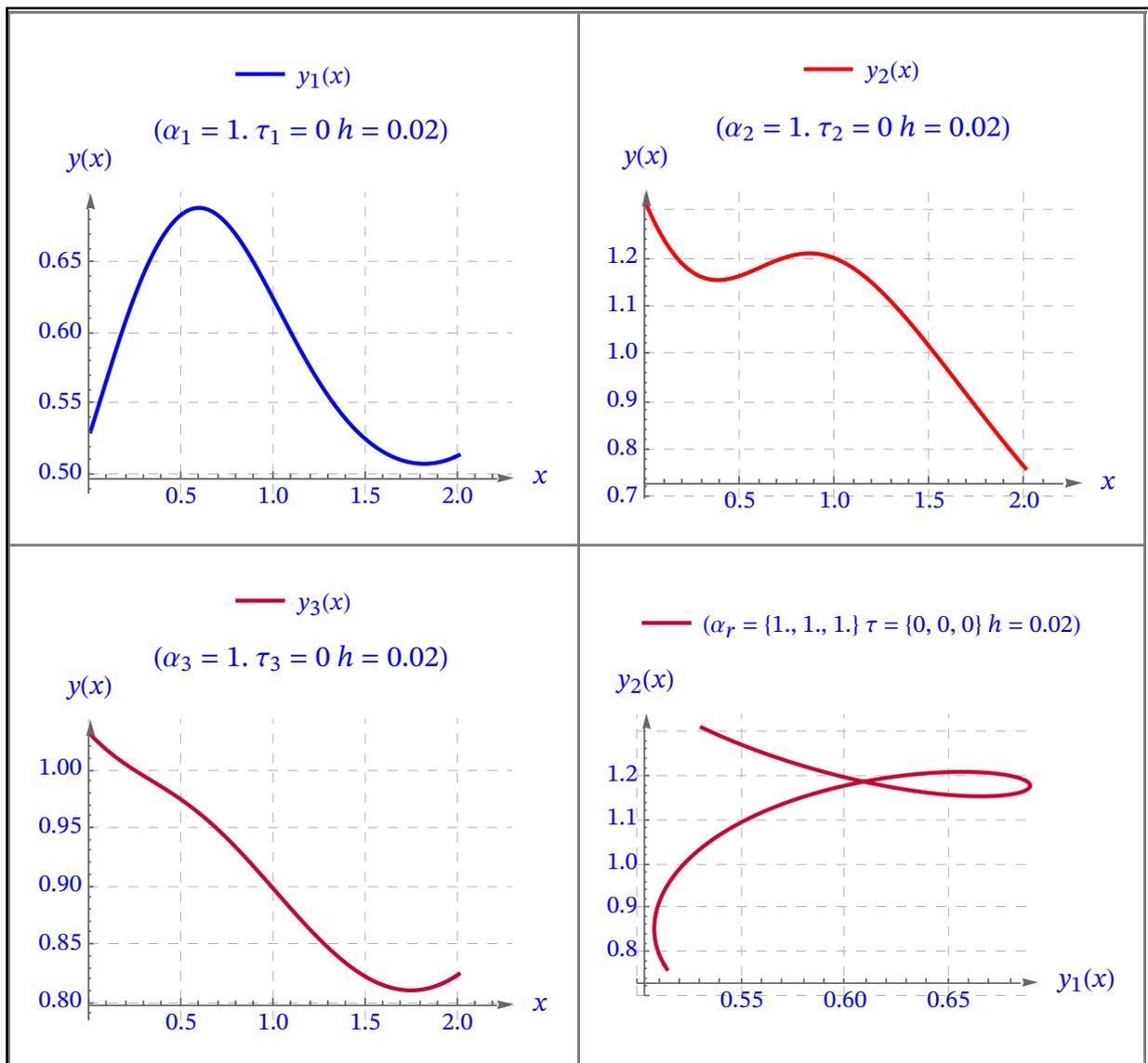
- Punto de equilibrio: $Y_j^* = (0.624425 \ 0.935374 \ 0.876922)$
- Raíz compleja pura (solución periódica): $\beta = 0$.

(i) Calcúlese la solución numérica mediante el método de *Adams–Bashforth–Moulton fraccionario con retraso* (ABMFR) tomando los valores de los parámetros dados.

(ii) Representérese las soluciones aproximadas $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$ del método ABMFR en el intervalo $t \in [0, T]$, y el diagrama de fases en el plano $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$.

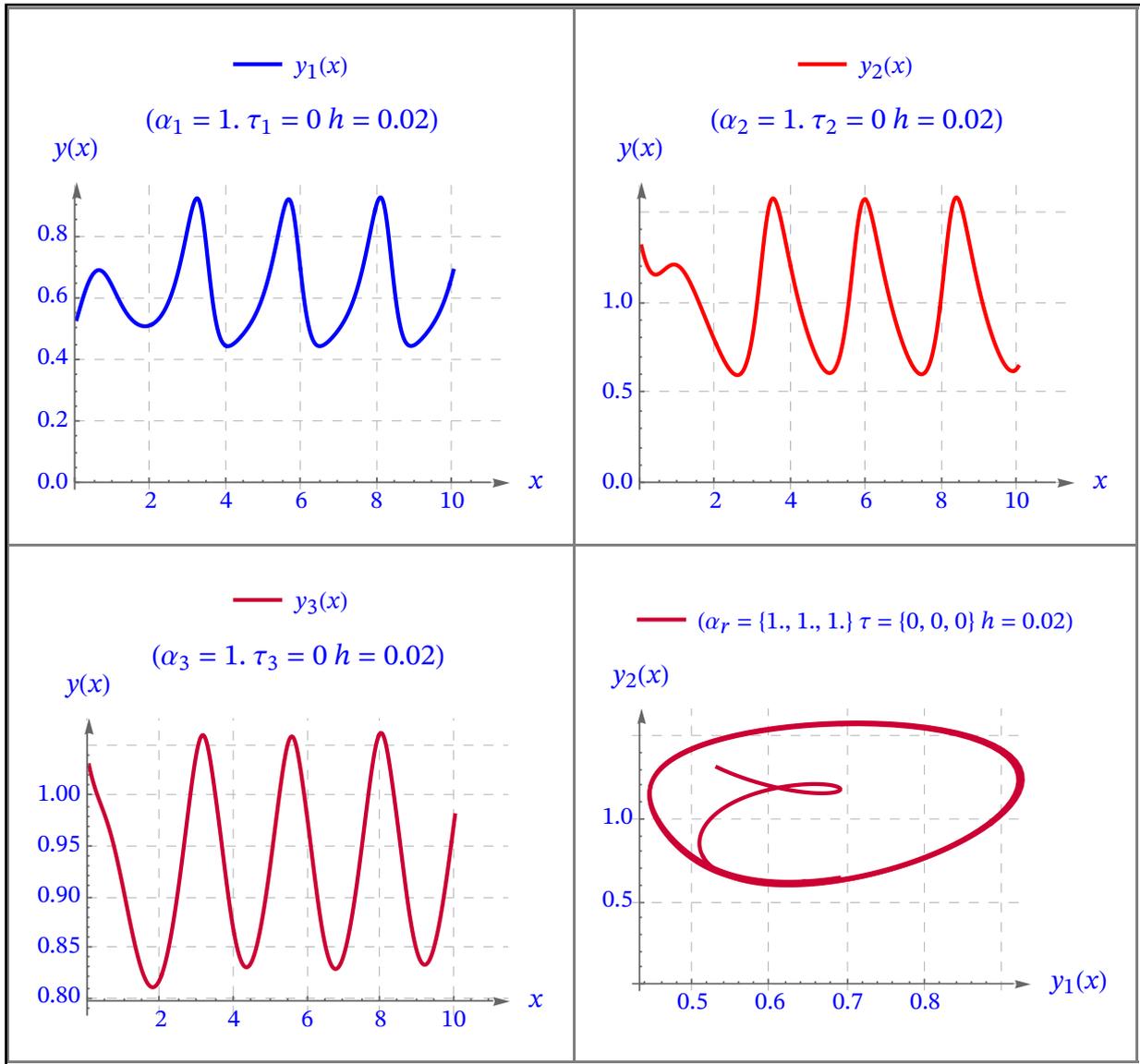
(a) $\alpha = (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3) = (1 \ 1 \ 1) \quad \tau = (\tau_i, \tau_g, \tau_g) = (0, 0, 0)$

$[0, T] = [0, 2] \text{ min} \quad h = 0.02$.



(b) $\alpha = (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3) = (1 \ 1 \ 1) \quad \tau = (\tau_i, \tau_g, \tau_g) = (0, 0, 0)$

$[0, T] = [0, 10]$ min
 $h = 0.02$.



■ **Problema 4.3.2. Modelo Regulador Glucosa-Insulina no Lineal.** ([AGRA22])

Sea el sistema de ecuaciones diferenciales con retraso SFDDE que representa el modelo regulador Glucosa-Insulina Fraccionario no Lineal:

$$(P_1) \equiv \begin{cases} D^{(\alpha_1)} y_1(x) = -r_1 y_1(x) + r_2 y_1(x) y_2(x) + r_3 y_2(x)^2 + r_4 y_2(x)^3 & x \in (0, T) \\ \quad + r_5 y_3(x) + r_6 y_3(x)^2 + r_7 y_3(x)^3 + r_{20} \\ D^{(\alpha_2)} y_2(x) = -r_8 y_1(x) y_2(x) - r_9 y_1(x)^2 - r_{10} y_1(x)^3 \\ \quad + r_{11} y_2(x) (1 - y_2(x)) - r_{12} y_3(x) - r_{13} y_3(x)^2 - r_{14} y_3(x)^3 + r_{21} \\ D^{(\alpha_3)} y_3(x) = r_{15} y_2(x) + r_{16} y_2(x)^2 + r_{17} y_2(x)^3 - r_{18} y_3(x) \\ \quad - r_{19} y_2(x) y_3(x) \\ \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ y_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.53 \\ 1.31 \\ 1.03 \end{pmatrix} & x = 0 \end{cases}$$

(i) Calcúlese la solución numérica mediante el método *Wavelets* de Bernoulli (BWM) con los parámetros k , M , α_i , τ_{ij} dados y en el intervalo $[0, T]$.

(ii) Representése en una misma gráfica en el intervalo $[0, T]$ la solución del método *Wavelet* BWM.

$$(a) \begin{cases} k = 2 & M = 5 \\ \alpha_i = (1 \ 1 \ 1) & \tau_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{cases} \quad [0, T] = [0, 2].$$

SOLUCIÓN

(a)

Método Wavelet de Bernoulli (BWM) para SFDDE en $[0, T]$.
(System Fractional Delay Differential Equation)

$$(P_1) \equiv \begin{cases} D^{(\alpha_i)} y_i(x) = & x \in [0, 1] \\ f_i(x, y_1(x), y_1(x - \tau_{11}), \dots, y_1(x - \tau_{1r_1}), \\ y_2(x - \tau_{21}), \dots, y_2(x - \tau_{2r_2}), \dots, \\ y_n(x), y_n(x - \tau_{n1}), \dots, y_n(x - \tau_{nr_n})) \\ y_i(x) = u_i(x) & x \in [-\tau, 0] \\ y_i^{(k)}(0) = \lambda_{ik} & k = 0, 1, \dots, n-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} n-1 < \alpha_i \leq n \\ 0 < \tau_{ij} < 1 \quad j = 1, 2, \dots, r_i \quad i = 1, 2, \dots, n_e \quad (n^o \text{ de ecuaciones}) \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{lll} [A, B] = & [0, 2] & (\text{intervalo } x) \\ T = & 2 & \\ \{k, 2^{k-1}\} = & \{2, 2\} & (\text{máxima resolución}) \\ M-1 = & 4 & (\text{máx. grado polinomio}) \\ m^* = 2^{k-1}(M) = & 10 & \text{Dimensión } \mathcal{B} = \{\psi_k\} \\ \{\alpha_1, \alpha_2, \dots\} = & \{1, 1, 1\} & \\ \{\tau_{11}, \tau_{12}, \dots\} = & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \\ n_e = & 3 & n^o \text{ ecuaciones} \\ n = [\alpha] = & 1 & \end{array} \right)$$

$$(P_1) \equiv \begin{cases} D^{(1)} y_1(x) = -1.08 y_2(x)^3 + 1.09 y_2(x)^2 + 0.1 y_1(x) y_2(x) + 2.01 y_3(x)^3 - 0.06 y_3(x)^2 - 2.04 y_1(x) + 0.03 y_3(x) - 0.19 \\ D^{(1)} y_2(x) = 1.2 y_1(x)^3 + 3.84 y_1(x)^2 - 0.22 y_2(x) y_1(x) - 0.22 y_3(x)^3 + 0.3 y_3(x)^2 + 0.3 \times (1 - y_2(x)) y_2(x) - 1.37 y_3(x) - \\ D^{(1)} y_3(x) = 0.5 y_2(x)^3 - 1.35 y_2(x)^2 + 0.15 y_3(x) y_2(x) + 0.3 y_2(x) + 0.42 y_3(x) \\ u(x) = \\ (y_1(0) = 0.53 \quad y_2(0) = 1.31 \quad y_3(0) = 1.03) \end{cases}$$

(a) Matriz con los polinomios de Bernoulli $\Phi(x)$ en $[0, 1]$

$$\Phi(x) = \mathcal{B}_n(x) = \begin{pmatrix} \mathcal{B}_0(x) \\ \mathcal{B}_1(x) \\ \mathcal{B}_2(x) \\ \mathcal{B}_3(x) \\ \mathcal{B}_4(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x - \frac{1}{2} \\ x^2 - x + \frac{1}{6} \\ x^3 - \frac{3x^2}{2} + \frac{x}{2} \\ x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30} \end{pmatrix}$$

(b) Matriz con las *Wavelets* de Bernoulli $\Psi(x)$ en $[0, T]$

$\Psi(x) =$

$$\left(\begin{array}{l} \psi_{10}(x) = \psi_1(x) = \begin{cases} \sqrt{2} & 0 \leq \frac{x}{2} < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{11}(x) = \psi_2(x) = \begin{cases} 2 \sqrt{6} \left(x - \frac{1}{2}\right) & 0 \leq \frac{x}{2} < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{12}(x) = \psi_3(x) = \begin{cases} 6 \sqrt{10} \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right) & 0 \leq \frac{x}{2} < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{13}(x) = \psi_4(x) = \begin{cases} 4 \sqrt{105} \left(x^3 - \frac{3x^2}{2} + \frac{x}{2}\right) & 0 \leq \frac{x}{2} < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{14}(x) = \psi_5(x) = \begin{cases} 10 \sqrt{42} \left(x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}\right) & 0 \leq \frac{x}{2} < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{20}(x) = \psi_6(x) = \begin{cases} \sqrt{2} & \frac{1}{2} \leq \frac{x}{2} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{21}(x) = \psi_7(x) = \begin{cases} 2 \sqrt{6} \left(x - \frac{3}{2}\right) & \frac{1}{2} \leq \frac{x}{2} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{22}(x) = \psi_8(x) = \begin{cases} 6 \sqrt{10} \left((x-1)^2 - x + \frac{7}{6}\right) & \frac{1}{2} \leq \frac{x}{2} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{23}(x) = \psi_9(x) = \begin{cases} 4 \sqrt{105} \left((x-1)^3 - \frac{3}{2}(x-1)^2 + \frac{x-1}{2}\right) & \frac{1}{2} \leq \frac{x}{2} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \\ \psi_{24}(x) = \psi_{10}(x) = \begin{cases} 10 \sqrt{42} \left((x-1)^4 - 2(x-1)^3 + (x-1)^2 - \frac{1}{30}\right) & \frac{1}{2} \leq \frac{x}{2} < 1 \\ 0 & \text{True} \end{cases} \end{array} \right)$$

Null

(c) Matrices operacionales integrales fraccionarias $P^{(\alpha_i)}$ de orden $\alpha_i = \{1, 1, 1\}$ en $[0, T]$

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{2\sqrt{15}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{42}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{7}}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{10}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{18\sqrt{7}} & 0 & -\frac{\sqrt{5}}{9} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{2\sqrt{15}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{42}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{7}}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{10}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{18\sqrt{7}} & 0 & -\frac{\sqrt{5}}{9} & 0 \end{pmatrix}$$

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{2\sqrt{15}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{42}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{7}}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{10}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{18\sqrt{7}} & 0 & -\frac{\sqrt{5}}{9} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{2\sqrt{15}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{42}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{7}}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{10}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{18\sqrt{7}} & 0 & -\frac{\sqrt{5}}{9} & 0 \end{pmatrix}$$

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{2\sqrt{15}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{42}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{7}}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{10}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{18\sqrt{7}} & 0 & -\frac{\sqrt{5}}{9} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{2\sqrt{15}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{42}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{7}}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{10}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{18\sqrt{7}} & 0 & -\frac{\sqrt{5}}{9} & 0 \end{pmatrix}$$

(d) Matrices con los coeficientes *Wavelets* de los polinomios $p_i(x)$:

• $i = 1$

$$p_i(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda_{i0}}{i!} x^i = 0.53 \quad p_i(x) \simeq E_i^T \cdot \Psi(x) \quad E_1 = \begin{pmatrix} 0.374767 \\ 0. \\ 0. \\ 0. \\ 0. \\ 0.374767 \\ 0. \\ 0. \\ 0. \\ 0. \end{pmatrix}$$

• $i = 2$

$$p_i(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda_{i0}}{i!} x^i = 1.31 \quad p_i(x) \approx E_i^T \cdot \Psi(x) \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0.92631 \\ 0. \\ 0. \\ 0. \\ 0. \\ 0.92631 \\ 0. \\ 0. \\ 0. \\ 0. \end{pmatrix}$$

• $i = 3$

$$p_i(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda_{i0}}{i!} x^i = 1.03 \quad p_i(x) \approx E_i^T \cdot \Psi(x) \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0.72832 \\ 0. \\ 0. \\ 0. \\ 0. \\ 0.72832 \\ 0. \\ 0. \\ 0. \\ 0. \end{pmatrix}$$

(1) La derivada $D^{(\alpha)}$ $y_i(x)$ se expresa en términos de las *Wavelets* de Bernoulli

$$D^{(\alpha_i)} y_i(x) \approx \sum_{n=1}^{2^{k-1}} \sum_{m=0}^{M-1} c_{nm} \psi_{nm}(x) = \sum_{i=1}^{m^*} C_i \psi_i(x) = C_i^T \cdot \Psi(x) \quad x \in [0, T]$$

$$D^{(\alpha_i)} y_i(x) \approx (C_{i,1} \ C_{i,2} \ C_{i,3} \ C_{i,4} \ C_{i,5} \ C_{i,6} \ C_{i,7} \ C_{i,8} \ C_{i,9} \ C_{i,10}) \cdot \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \psi_3(x) \\ \psi_4(x) \\ \psi_5(x) \\ \psi_6(x) \\ \psi_7(x) \\ \psi_8(x) \\ \psi_9(x) \\ \psi_{10}(x) \end{pmatrix}$$

(2) Se aplica el operador integral J^{α_i} a la relación $D^{(\alpha_i)} y_i(x) \simeq C_i^T \cdot \Psi(x)$

$$y_i(x) \simeq C_i^T \cdot P^{(\alpha_i)} \cdot \Psi(x) + E_i^T \cdot \Psi(x)$$

$$p_i(x) = \lambda_{i,0} \simeq E_i^T \cdot \Psi(x)$$

(3) Se deduce el término de retraso $y_i(x - \tau_{ij})$ del problema (P_1)

$$(P_1) \equiv y_i(x - \tau_{ij}) \simeq \begin{cases} u_i(x - \tau_{ij}) & x \in [0, \tau_{ij}] \\ C_i^T \cdot P^{(\alpha_i)} \cdot \Psi(x - \tau_{ij}) + E_i^T \cdot \Psi(x - \tau_{ij}) & x \in [\tau_{ij}, T] \end{cases}$$

(4) Se substituyen las expresiones de $\begin{cases} y_i(x) & D^{(\alpha_i)} y_i(x) \\ y_i(x - \tau_{ij}) \end{cases}$ en el SFDDE de (P_1)

$$(P_1) \equiv \begin{cases} D^{(\alpha_i)} y_i(x) = & x \in [0, T] \\ f_i(x, y_1(x), y_1(x - \tau_{11}), \dots, y_1(x - \tau_{1r_1}), \dots, y_2(x - \tau_{21}), \\ \dots, y_2(x - \tau_{2r_2}), \dots, y_n(x), y_n(x - \tau_{n1}), \dots, y_n(x - \tau_{nr_n})) \end{cases}$$

$$\bullet \begin{cases} D^{(\alpha_i)} y_i(x) \simeq C_i^T \cdot \Psi(x) \\ y_i(x) \simeq \begin{cases} C_i^T \cdot P^{(\alpha_i)} \cdot \Psi(x) + E_i^T \cdot \Psi(x) & x \in [0, 1] \\ u_i(x) & x \in [\tau, 0] \end{cases} \\ y_i(x - \tau_{ij}) \simeq \begin{cases} u_i(x - \tau_{ij}) & x \in [0, \tau_{ij}] \\ C_i^T \cdot P^{(\alpha_i)} \cdot \Psi(x - \tau_{ij}) + E_i^T \cdot \Psi(x - \tau_{ij}) & x \in [\tau_{ij}, 1] \end{cases} \end{cases}$$

(4.1) Funciones

$$D^{(\alpha_i)}y_i(x) \simeq C_i^T \cdot \Psi(x)$$

$$\begin{aligned}
 D^{(\alpha_1)}y_1(x) \simeq & \left(\begin{array}{cc} \sqrt{2} & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{array} \right) C_{1,1} + \\
 & \left(\begin{array}{cc} \sqrt{6} (2x-1) & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{array} \right) C_{1,2} + \left(\begin{array}{cc} \sqrt{10} (6x^2-6x+1) & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{array} \right) C_{1,3} + \\
 & \left(\begin{array}{cc} 2 \sqrt{105} x (2x^2-3x+1) & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{array} \right) C_{1,4} + \\
 & \left(\begin{array}{cc} \sqrt{\frac{14}{3}} (30x^4-60x^3+30x^2-1) & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{True} \end{array} \right) C_{1,5} + \left(\begin{array}{cc} \sqrt{2} & 1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{True} \end{array} \right) C_{1,6} + \\
 & \left(\begin{array}{cc} \sqrt{6} (2x-3) & 1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{True} \end{array} \right) C_{1,7} + \left(\begin{array}{cc} \sqrt{10} (6x^2-18x+13) & 1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{True} \end{array} \right) C_{1,8} + \\
 & \left(\begin{array}{cc} 2 \sqrt{105} (2x^3-9x^2+13x-6) & 1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{True} \end{array} \right) C_{1,9} + \\
 & \left(\begin{array}{cc} \sqrt{\frac{14}{3}} (30x^4-180x^3+390x^2-360x+119) & 1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{True} \end{array} \right) C_{1,10}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D^{(\alpha_2)}y_2(x) \simeq & \left(\begin{array}{c} \sqrt{2} \quad 0 \leq x < 1 \\ 0 \quad \text{True} \end{array} \right) C_{2,1} + \\
 & \left(\begin{array}{c} \sqrt{6} (2x-1) \quad 0 \leq x < 1 \\ 0 \quad \text{True} \end{array} \right) C_{2,2} + \left(\begin{array}{c} \sqrt{10} (6x^2-6x+1) \quad 0 \leq x < 1 \\ 0 \quad \text{True} \end{array} \right) C_{2,3} + \\
 & \left(\begin{array}{c} 2\sqrt{105}x(2x^2-3x+1) \quad 0 \leq x < 1 \\ 0 \quad \text{True} \end{array} \right) C_{2,4} + \\
 & \left(\begin{array}{c} \sqrt{\frac{14}{3}}(30x^4-60x^3+30x^2-1) \quad 0 \leq x < 1 \\ 0 \quad \text{True} \end{array} \right) C_{2,5} + \left(\begin{array}{c} \sqrt{2} \quad 1 \leq x < 2 \\ 0 \quad \text{True} \end{array} \right) C_{2,6} + \\
 & \left(\begin{array}{c} \sqrt{6}(2x-3) \quad 1 \leq x < 2 \\ 0 \quad \text{True} \end{array} \right) C_{2,7} + \left(\begin{array}{c} \sqrt{10}(6x^2-18x+13) \quad 1 \leq x < 2 \\ 0 \quad \text{True} \end{array} \right) C_{2,8} + \\
 & \left(\begin{array}{c} 2\sqrt{105}(2x^3-9x^2+13x-6) \quad 1 \leq x < 2 \\ 0 \quad \text{True} \end{array} \right) C_{2,9} + \\
 & \left(\begin{array}{c} \sqrt{\frac{14}{3}}(30x^4-180x^3+390x^2-360x+119) \quad 1 \leq x < 2 \\ 0 \quad \text{True} \end{array} \right) C_{2,10}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D^{(\alpha_3)}y_3(x) \simeq & \left(\begin{array}{c} \sqrt{2} \quad 0 \leq x < 1 \\ 0 \quad \text{True} \end{array} \right) C_{3,1} + \\
 & \left(\begin{array}{c} \sqrt{6} (2x-1) \quad 0 \leq x < 1 \\ 0 \quad \text{True} \end{array} \right) C_{3,2} + \left(\begin{array}{c} \sqrt{10} (6x^2-6x+1) \quad 0 \leq x < 1 \\ 0 \quad \text{True} \end{array} \right) C_{3,3} + \\
 & \left(\begin{array}{c} 2\sqrt{105}x(2x^2-3x+1) \quad 0 \leq x < 1 \\ 0 \quad \text{True} \end{array} \right) C_{3,4} + \\
 & \left(\begin{array}{c} \sqrt{\frac{14}{3}}(30x^4-60x^3+30x^2-1) \quad 0 \leq x < 1 \\ 0 \quad \text{True} \end{array} \right) C_{3,5} + \left(\begin{array}{c} \sqrt{2} \quad 1 \leq x < 2 \\ 0 \quad \text{True} \end{array} \right) C_{3,6} + \\
 & \left(\begin{array}{c} \sqrt{6}(2x-3) \quad 1 \leq x < 2 \\ 0 \quad \text{True} \end{array} \right) C_{3,7} + \left(\begin{array}{c} \sqrt{10}(6x^2-18x+13) \quad 1 \leq x < 2 \\ 0 \quad \text{True} \end{array} \right) C_{3,8} + \\
 & \left(\begin{array}{c} 2\sqrt{105}(2x^3-9x^2+13x-6) \quad 1 \leq x < 2 \\ 0 \quad \text{True} \end{array} \right) C_{3,9} + \\
 & \left(\begin{array}{c} \sqrt{\frac{14}{3}}(30x^4-180x^3+390x^2-360x+119) \quad 1 \leq x < 2 \\ 0 \quad \text{True} \end{array} \right) C_{3,10}
 \end{aligned}$$

(4.2) Funciones

$$y_i(x) \simeq \begin{cases} C_i^T \cdot P^{(\alpha_i)} \cdot \Psi(x) + E_i^T \cdot \Psi(x) & x \in [0, 1] \\ u_i(x) & x \in [\tau, 0) \end{cases}$$

$$y_1(x) \simeq$$

$$\begin{aligned} & 0. & x \geq 2 \vee x < 0 \\ & 1.41421 x C_{1,1} - 7.11025 \times 10^{-17} C_{1,4} + x(10.247 x C_{1,4} (1. - 1. x)^2 + & 0 \leq x < 1 \\ & \quad (2.44949 x - 2.44949) C_{1,2} + (x(6.32456 x - 9.48683) + 3.16228) C_{1,3}) + \\ & \left\{ \begin{aligned} & (x((10.8012 - 7.20082 x) x - 3.70328) + 0.0514344) C_{1,5} + 0.53 \\ & 1.41421 C_{1,1} + (1.41421 x - 1.41421) C_{1,6} + (x(2.44949 x - 7.34847) + 4.89898) C_{1,7} + \\ & \quad (x(x(6.32456 x - 28.4605) + 41.1096) - 18.9737) C_{1,8} + \\ & \quad (x(x(x(10.247 x - 61.4817) + 133.21) - 122.963) + 40.9878) C_{1,9} + \\ & \quad (x((32.4037 - 7.20082 x) x - 46.9082) + 21.7568) C_{1,10} + 0.53 \end{aligned} \right. & \text{True} \end{aligned}$$

$$y_2(x) \simeq$$

$$\begin{aligned} & 0. & x \geq 2 \vee x < 0 \\ & 1.41421 x C_{2,1} - 7.11025 \times 10^{-17} C_{2,4} + x(10.247 x C_{2,4} (1. - 1. x)^2 + & 0 \leq x < 1 \\ & \quad (2.44949 x - 2.44949) C_{2,2} + (x(6.32456 x - 9.48683) + 3.16228) C_{2,3}) + \\ & \left\{ \begin{aligned} & (x((10.8012 - 7.20082 x) x - 3.70328) + 0.0514344) C_{2,5} + 1.31 \\ & 1.41421 C_{2,1} + (1.41421 x - 1.41421) C_{2,6} + (x(2.44949 x - 7.34847) + 4.89898) C_{2,7} + \\ & \quad (x(x(6.32456 x - 28.4605) + 41.1096) - 18.9737) C_{2,8} + \\ & \quad (x(x(x(10.247 x - 61.4817) + 133.21) - 122.963) + 40.9878) C_{2,9} + \\ & \quad (x((32.4037 - 7.20082 x) x - 46.9082) + 21.7568) C_{2,10} + 1.31 \end{aligned} \right. & \text{True} \end{aligned}$$

$$y_3(x) \simeq$$

$$\begin{aligned} & 0. & x \geq 2 \vee x < 0 \\ & 1.41421 x C_{3,1} - 7.11025 \times 10^{-17} C_{3,4} + x(10.247 x C_{3,4} (1. - 1. x)^2 + & 0 \leq x < 1 \\ & \quad (2.44949 x - 2.44949) C_{3,2} + (x(6.32456 x - 9.48683) + 3.16228) C_{3,3}) + \\ & \left\{ \begin{aligned} & (x((10.8012 - 7.20082 x) x - 3.70328) + 0.0514344) C_{3,5} + 1.03 \\ & 1.41421 C_{3,1} + (1.41421 x - 1.41421) C_{3,6} + (x(2.44949 x - 7.34847) + 4.89898) C_{3,7} + \\ & \quad (x(x(6.32456 x - 28.4605) + 41.1096) - 18.9737) C_{3,8} + \\ & \quad (x(x(x(10.247 x - 61.4817) + 133.21) - 122.963) + 40.9878) C_{3,9} + \\ & \quad (x((32.4037 - 7.20082 x) x - 46.9082) + 21.7568) C_{3,10} + 1.03 \end{aligned} \right. & \text{True} \end{aligned}$$

(4.3) Función

$$y_i(x) = \begin{cases} u_i(x) & x \in [\tau, 0) \\ u_i(x) = 0 \end{cases}$$

(4.4) Funciones

$$y_i(x - \tau_{ij}) \simeq \begin{cases} u_i(x - \tau_{ij}) & x \in [0, \tau_{ij}] \\ C_i^T \cdot P^{(\alpha_i)} \cdot \Psi(x - \tau_{ij}) + E_i^T \cdot \Psi(x - \tau_{ij}) & x \in [\tau_{ij}, 1] \end{cases}$$

(4.5) Coeficientes *Wavelets* de Bernoulli de las expresiones $y_i(x-\tau_{ij})$

(4.6) Funciones $y_i(x-\tau_{ij})$ expandidas

(5) Sistema algebraico no lineal de ecuaciones del problema (P_1):

$$(P_1) \equiv \left\{ \begin{array}{l} \frac{D^{(\alpha_i)} y_i(x)}{EC_{i1}(x)} = \frac{f_i(x, y_i(x), y_i(x-\tau_{ij}))}{EC_{i2}(x)} \quad x \in [0, 1] \end{array} \right.$$

$$EC_{i1}(x) = EC_{i2}(x)$$

(6) Método de Colocación.

(6a) Creación de un sistema algebraico de ecuaciones con los coeficientes:

$$C_i^T = (C_{i,1} \ C_{i,2} \ \dots \ C_{i,m^*})$$

Los puntos de colocación son los ceros del polinomio de Legendre desplazado.

• Polinomio de *Legendre* en $[-1, 1]$

$$P_{m^*}(x) = \frac{1}{256} \times (46\,189 x^{10} - 109\,395 x^8 + 90\,090 x^6 - 30\,030 x^4 + 3465 x^2 - 63)$$

• Polinomio de *Legendre desplazado* en $[0, T]$ y ceros:

$$L_{m^*}(x) = \frac{1}{256} \times (46\,189 x^{10} - 461\,890 x^9 + 1\,969\,110 x^8 - 4\,667\,520 x^7 + 6\,726\,720 x^6 - 6\,054\,048 x^5 + 3\,363\,360 x^4 - 1\,098\,240 x^3 + 190\,080 x^2 - 14\,080 x + 256) \quad x \in [0, T]$$

$$L_{m^*}(x) = 0 \Rightarrow x_k (k = 1, 2, \dots, m^*) \in [0, T]$$

• Ceros:

$$x_k = \begin{pmatrix} x_1 & 0.0260935 \\ x_2 & 0.134937 \\ x_3 & 0.32059 \\ x_4 & 0.566605 \\ x_5 & 0.851126 \\ x_6 & 1.14887 \\ x_7 & 1.4334 \\ x_8 & 1.67941 \\ x_9 & 1.86506 \\ x_{10} & 1.97391 \end{pmatrix}$$

(6a.i) Resolución del sistema de ecuaciones en los coeficientes

$$C_i^T = (C_{i,1} \ C_{i,2} \ \dots \ C_{i,m^*}) \begin{cases} i = 1, 2, \dots, n_e \\ j = 1, 2, \dots, m^* \end{cases} \quad m^* = 2^{k-1} M \quad e_{c_1} = e_{c_2}$$

• Método *Affine Covariant Newton*:

$$C_{ij} = \begin{pmatrix} C_{1,1} \rightarrow 0.0627412 \\ C_{1,2} \rightarrow -0.148629 \\ C_{1,3} \rightarrow -0.0303008 \\ C_{1,4} \rightarrow 0.0297083 \\ C_{1,5} \rightarrow -0.0234105 \\ C_{1,6} \rightarrow -0.0714865 \\ C_{1,7} \rightarrow 0.0639018 \\ C_{1,8} \rightarrow 0.00971086 \\ C_{1,9} \rightarrow -0.00471606 \\ C_{1,10} \rightarrow 0.0075474 \\ C_{2,1} \rightarrow -0.0802959 \\ C_{2,2} \rightarrow 0.144354 \\ C_{2,3} \rightarrow -0.118985 \\ C_{2,4} \rightarrow -0.00383841 \\ C_{2,5} \rightarrow 0.0337869 \\ C_{2,6} \rightarrow -0.306004 \\ C_{2,7} \rightarrow -0.0550011 \\ C_{2,8} \rightarrow 0.0376363 \\ C_{2,9} \rightarrow -0.00889461 \\ C_{2,10} \rightarrow 0.00142609 \\ C_{3,1} \rightarrow -0.0942253 \\ C_{3,2} \rightarrow 0.000309791 \\ C_{3,3} \rightarrow -0.00495589 \\ C_{3,4} \rightarrow 0.0156329 \\ C_{3,5} \rightarrow 0.00755079 \\ C_{3,6} \rightarrow -0.0492986 \\ C_{3,7} \rightarrow 0.0578756 \\ C_{3,8} \rightarrow 0.0110922 \\ C_{3,9} \rightarrow -0.00452954 \\ C_{3,10} \rightarrow 0.000260595 \end{pmatrix}$$

• Método de *Newton*:

$$C_{ij} = \begin{pmatrix} C_{1,1} \rightarrow 0.0627412 \\ C_{1,2} \rightarrow -0.148629 \\ C_{1,3} \rightarrow -0.0303008 \\ C_{1,4} \rightarrow 0.0297083 \\ C_{1,5} \rightarrow -0.0234105 \\ C_{1,6} \rightarrow -0.0714865 \\ C_{1,7} \rightarrow 0.0639018 \\ C_{1,8} \rightarrow 0.00971086 \\ C_{1,9} \rightarrow -0.00471606 \\ C_{1,10} \rightarrow 0.0075474 \\ C_{2,1} \rightarrow -0.0802959 \\ C_{2,2} \rightarrow 0.144354 \\ C_{2,3} \rightarrow -0.118985 \\ C_{2,4} \rightarrow -0.00383841 \\ C_{2,5} \rightarrow 0.0337869 \\ C_{2,6} \rightarrow -0.306004 \\ C_{2,7} \rightarrow -0.0550011 \\ C_{2,8} \rightarrow 0.0376363 \\ C_{2,9} \rightarrow -0.00889461 \\ C_{2,10} \rightarrow 0.00142609 \\ C_{3,1} \rightarrow -0.0942253 \\ C_{3,2} \rightarrow 0.000309791 \\ C_{3,3} \rightarrow -0.00495589 \\ C_{3,4} \rightarrow 0.0156329 \\ C_{3,5} \rightarrow 0.00755079 \\ C_{3,6} \rightarrow -0.0492986 \\ C_{3,7} \rightarrow 0.0578756 \\ C_{3,8} \rightarrow 0.0110922 \\ C_{3,9} \rightarrow -0.00452954 \\ C_{3,10} \rightarrow 0.000260595 \end{pmatrix}$$

(7) Solución aproximada obtenida:

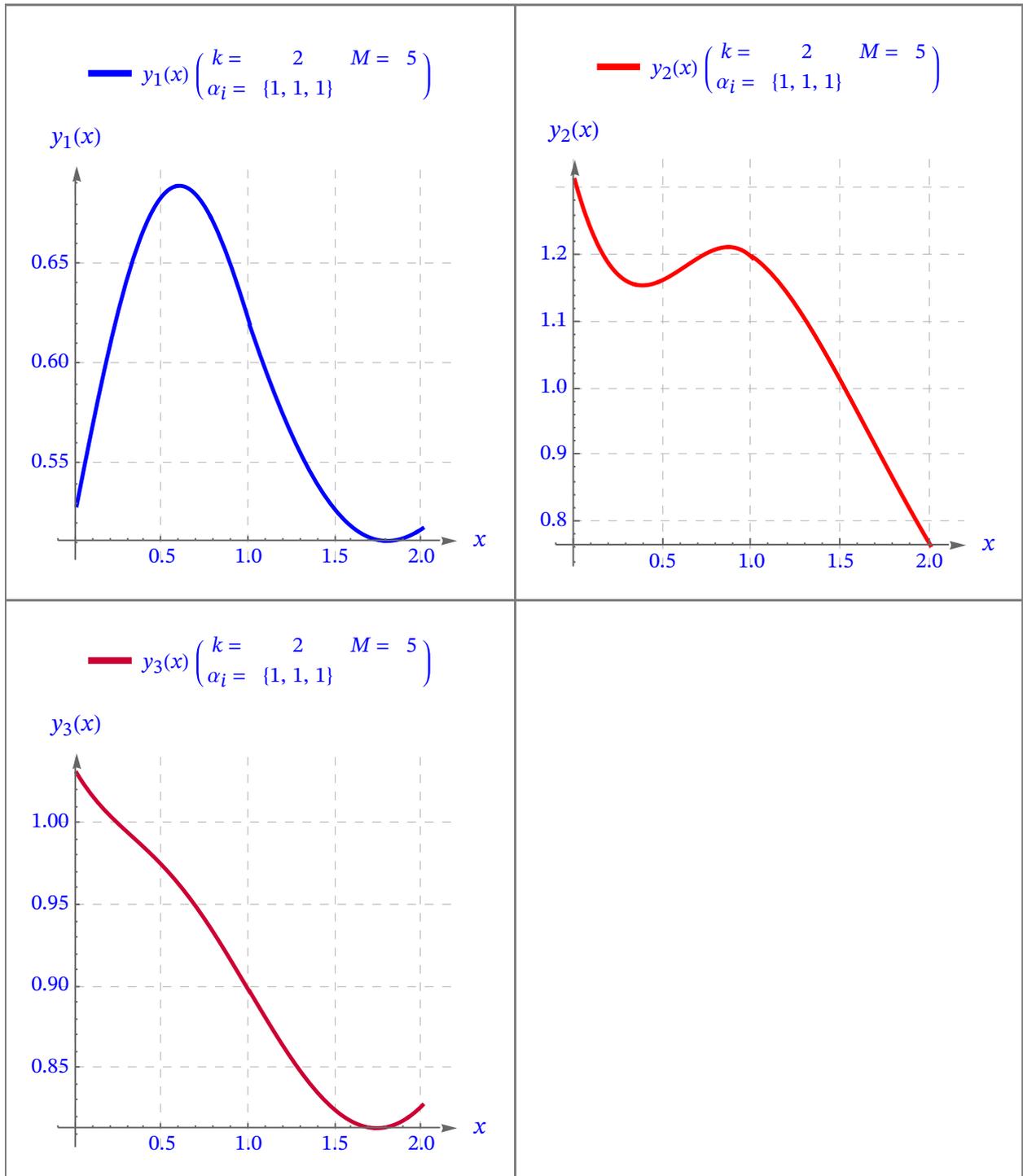
$$y_1(x) = \begin{cases} 0. & x \geq 2 \vee x < 0 \\ -0.0483252 x^4 + 0.297021 x^3 - 0.503513 x^2 + 0.0543993 x + 0.819536 & 1 \leq x < 2 \\ 0.30442 x^4 - 0.631904 x^3 - 0.0250486 x^2 + 0.44367 x + 0.528796 & \text{True} \end{cases}$$

$$y_2(x) =$$

$$\begin{cases} 0. & x \geq 2 \vee x < 0 \\ -0.0911427 x^4 + 0.77462 x^3 - 2.34452 x^2 + 2.54545 x + 0.312108 & 1 \leq x < 2 \\ -0.039332 x^4 - 0.917155 x^3 + 1.80799 x^2 - 0.968535 x + 1.31174 & \text{True} \end{cases}$$

$$y_3(x) =$$

$$\begin{cases} 0. & x \geq 2 \vee x < 0 \\ -0.0464139 x^4 + 0.346761 x^3 - 0.768862 x^2 + 0.505725 x + 0.859549 & 1 \leq x < 2 \\ 0.16019 x^4 - 0.406095 x^3 + 0.289522 x^2 - 0.177648 x + 1.03039 & \text{True} \end{cases}$$



■ Problema 4.3.3. Modelo Regulador Glucosa-Insulina no Lineal. ([AGRA22])

$$(a) \begin{cases} k = 2 & M = 5 \\ \alpha_i = (1 \ 1 \ 1) & \tau_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{cases} \quad [0, T] = [0, 6].$$

SOLUCIÓN

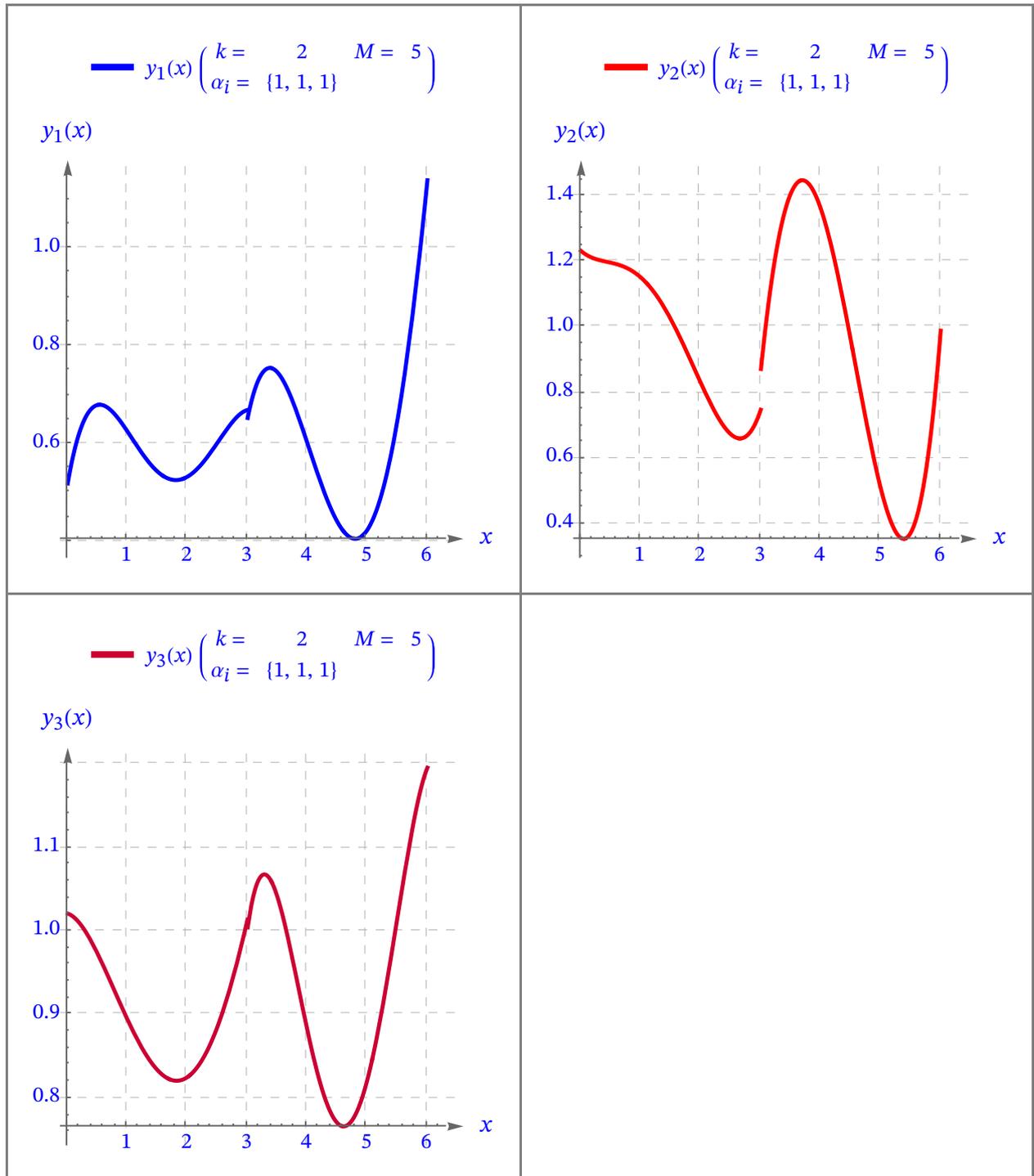
(a)

(7) Solución aproximada obtenida:

$$y_1(x) = \begin{cases} 0. & x \geq 6 \vee x < 0 \\ -0.0603455 x^4 + 0.432995 x^3 - 0.975257 x^2 + 0.708302 x + 0.51609 & 0 \leq x < 3 \\ -0.043765 x^4 + 0.957308 x^3 - 7.30496 x^2 + 23.3219 x - 25.8746 & \text{True} \end{cases}$$

$$y_2(x) = \begin{cases} 0. & x \geq 6 \vee x < 0 \\ 0.0451489 x^4 - 0.366084 x^3 - 0.659278 x^2 + 10.7516 x - 19.229 & 3 \leq x < 6 \\ 0.0592927 x^4 - 0.27529 x^3 + 0.29041 x^2 - 0.155792 x + 1.22901 & \text{True} \end{cases}$$

$$y_3(x) = \begin{cases} 0. & x \geq 6 \vee x < 0 \\ -0.0894684 x^4 + 1.67139 x^3 - 11.3457 x^2 + 33.1121 x - 34.1038 & 3 \leq x < 6 \\ -0.0112634 x^4 + 0.100525 x^3 - 0.193081 x^2 - 0.0236265 x + 1.01966 & \text{True} \end{cases}$$



Observaciones 4.3.1.

- (i) Para el intervalo $[0, 2]$ vemos como las soluciones del método *Wavelet* de Bernoulli se asemejan bastante a las del método de Adams-Bashforth-Moulton que a su vez parecen representar una respuesta que se asemeja bastante al proceso fisiológico regulador de la glucosa y la insulina.
- (ii) En cambio para el intervalo $[0,6]$ del ejemplo de a continuación, encontramos ciertas discontinuidades en las gráficas que si bien se asemejan a los resultados obtenidos con el método de Adams-Bashforth-Moulton nos hace pensar que necesitaríamos aumentar o bien el número de sub-intervalos en el que dividiríamos el intervalo ($k > 2$) o el grado de los polinomios de Bernoulli utilizados ($M > 6$).

Capítulo 5

5. Conclusiones y Líneas Futuras de Investigación

5.1. Conclusiones

La conclusión directa de este trabajo es que el cálculo fraccionario y tanto el método *Wavelet de Bernoulli*, como el método de *Adams-Bashforth-Moulton* tienen mucho que aportar en la investigación y estudio de la interacción que ocurre entre la insulina y la glucosa en nuestro organismo y por ende alcanzar un mejor entendimiento de enfermedades como por ejemplo la diabetes. Para ello, a través de las herramientas mencionadas anteriormente se ha producido un estudio de diferentes modelos matemáticos de los que se saca las siguientes conclusiones, expuestas a continuación:

Modelo Fraccionario con Retraso Glucosa–Insulina con Órdenes Incomensurables

- (i) Se observa un único punto de equilibrio positivo y se cumplen las condiciones de estabilidad de la bifurcación de Hopf.
- (ii) En el análisis del modelo, se estudia el efecto que tiene el retardo en el sistema, observándose un retraso crítico, τ_0 . Este retraso crítico marca el punto en el cual el modelo deja de ser estable ($\tau \in [0, \tau_0]$) y la interacción entre la glucosa y la insulina, pasan a no ser asintóticamente estables con respecto al tiempo.
- (iii) Además, se observa el efecto que tiene la variación del grado fraccionario de las ecuaciones diferenciales en el retraso crítico τ_0 .

Modelo con Retardo Glucosa-Insulina con la Función de las Células β

- (i) Se observa un único punto de equilibrio positivo que también sigue las condiciones de estabilidad de la bifurcación de Hopf.
- (ii) Al igual que en el modelo anterior se calcula un retraso crítico τ_0 que marcará las regiones de estabilidad del sistema.
- (iii) Para un retardo $\tau < \tau_0$ el sistema presentará una respuesta estable asintóticamente y las raíces de su polinomio característico tienen su parte real negativa.
- (iv) Para un retardo $\tau = \tau_0$ el sistema presentará una respuesta periódica y las raíces de su polinomio característico serán complejas puras.
- (v) Para un retardo $\tau > \tau_0$ el sistema presentará una respuesta inestable asintóticamente y las raíces de su polinomio característico tienen su parte real positiva.

Método Wavelet de Bernoulli

- (i) El método *Wavelet de Bernoulli* nos permite obtener soluciones aproximadas de los modelos matemáticos fraccionarios no lineales con gran precisión para intervalos de tiempo pequeños $[0, 2]$ con $k = 2$ y $M = 5$.
- (ii) Sin embargo para intervalos de tiempo mayores con $k = 2$ y $M = 5$ presentan todavía una serie de discontinuidades que nos hace pensar que es necesario incrementar el valor de k o de M para alcanzar una mayor precisión.

5.2. Líneas Futuras de Investigación

En los últimos años el cálculo fraccionario ha ido ganando popularidad en el ámbito científico debido a sus múltiples aplicaciones en campos como la química, la economía, la biología o la medicina. En este trabajo se pretendía mostrar las aplicaciones que tenía este en la resolución de modelos de interacción entre la glucosa y la insulina. A pesar de haber hecho un análisis en profundidad de los modelos matemáticos expuestos, todavía quedan una serie de puntos, en los que se podría profundizar un poco más.

A partir de eso, se reseñan determinadas líneas de investigación:

1. Expandir el método *Wavelet de Bernoulli* a un intervalo generalizado $[0, T]$ debido a que las soluciones presentadas en este apartado de la presentación son todavía para intervalos de tiempo muy pequeños (unos 6 minutos) y las soluciones no son tan precisas como las obtenidas en el *método de Adams-Bashforth-Moulton*.
2. Estudiar el efecto que tendrían la variación de los órdenes fraccionarios en los modelos de interacción de Glucosa-Insulina con el aporte también del efecto que tienen en el proceso las células β .
3. Parametrizar todas las constantes de los modelos para que el análisis de la interacción entre la glucosa y la insulina pueda ser consultado y estudiado en el campo de la medicina.

A parte de esto, el campo de las *Wavelets* es muy extenso, y también resulta interesante mencionar algunos métodos que podrían resolver los modelos estudiados y que nos podrían dar resultados de mayor exactitud y precisión. Cabe destacar:

1. El método *Wavelet de Legendre*: este método es muy similar al estudiado y resultaría interesante probar a resolver los modelos estudiados con este método para comparar su precisión y exactitud con los diferentes métodos presentados.

La base de *Wavelet* de Legendre esta definida en el intervalo $[0,1)$ por:

$$\psi_{n,m}(t) = \begin{cases} \sqrt{m + \frac{1}{2}} 2^{\frac{k}{2}} P_m(2^k t - \hat{n}) & \text{para } \frac{\hat{n}-1}{2^k} \leq t \leq \frac{\hat{n}+1}{2^k} \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

$$P_{m^*}(x) \equiv \text{polinomio de Legendre de orden } m^* = 2^{k-1} M \quad x \in [-1, 1] \quad (5.2.1)$$

$$P_{m^*}(x) = \frac{1}{2^{m^*} m^*!} \frac{d}{dx} (x^2 - 1)^{m^*}$$

$$m = 0, 1, 2, \dots, M - 1$$

$$n = 1, 2, 3, \dots, 2^{k-1}$$

El método de resolución se basa en la misma aproximación utilizada en el método de Bernoulli y que cumplen todas las *Wavelets*:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} c_{nm} \psi_{nm}(x) \quad (5.2.2)$$

que acaban derivando en una matriz operacional y un algoritmo muy similar al utilizado en el método de Bernoulli pero esta vez utilizando los operadores de Legendre.

2. Método *Wavelet de Haar*: las *Wavelets* de Haar son el tipo de *Wavelets* más simples que existen. Están formadas por una función que sólo presentan 3 valores el 0, el 1 y el -1 lo que hace que formen una base ortonormal en el espacio $L_2(0, 1)$ y tienen la forma:

$$h_j(x) = \begin{cases} 1 & x \in [x_1, x_2) \\ -1 & x \in [x_2, x_3) \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

$$\text{donde } x_1 = \frac{k}{m}, \quad x_2 = \frac{k+0.5}{m}, \quad x_3 = \frac{k+1}{m}, \text{ con } m = 2^j.$$

Utilizando este tipo de *Wavelets* se han resultado ecuaciones fraccionarias muy parecidas a los que se han resuelto en el proyecto y resultaría de interés resolver los modelos propuestos utilizando este método debido a su simplicidad y su bajo coste computacional.

Además de diferentes los diferentes métodos que se pueden utilizar en la resolución de las ecuaciones diferenciales fraccionarias con retraso, también es necesario mencionar las ecuaciones diferenciales fraccionarias parciales, un nuevo campo que está empezando a aparecer en los últimos años y que nos podrían dar otro enfoque y aportar mayor precisión y realismo a los modelos matemáticos presentados.

Las ecuaciones diferenciales fraccionarias parciales tienen la forma:

$$D^\beta u(\xi, \tau) + L u(\xi, \tau) + N u(\xi, \tau) = q, (\xi, \tau) \quad \xi, \tau \geq 0, \quad m-1 < \beta \leq m \quad (5.2.4)$$

donde L y N representan operadores lineales y no lineales respectivamente, y la derivada esta expresada según Caputo cuya expresión en forma parcial es:

$$D^\beta u(\xi, \tau) = \frac{du(\xi, \tau)}{d\tau^\beta} = \begin{cases} I^{n-\beta} \left[\frac{du(\xi, \tau)}{d\tau^\beta} \right] & n-1 < \beta < n \\ \frac{du(\xi, \tau)}{d\tau^\beta} & n = \beta \end{cases} . \quad (5.2.5)$$

En cuanto los métodos de resolución cabe destacar 3 opciones:

1. Utilizando el método de descomposición Laplace-Adomian (LADM): este método descrito en [KHAN20] es uno de los métodos más efectivos a la hora de resolver este tipo de ecuaciones ya que alberga tanto las características presentadas en la transformada de Laplace como el método de descomposición de Adomian. Para resolverlo se aplican los siguientes pasos:

a. Primero se aplica la transformada de Laplace a la expresión (5.2.4):

$$s^\beta \mathcal{L}[u(\xi, \tau)] - s^{\beta-1} u(\xi, 0) = \mathcal{L}[q, (\xi, \tau)] - \mathcal{L}[L u(\xi, \tau) + N u(\xi, \tau)] \quad (5.2.6)$$

b. Después aplicando el método ADM se tienen las expresiones:

$$u(\xi, \tau) = \sum_{j=0}^{\infty} u_j(\xi, \tau) \quad (5.2.7)$$

y para el término no lineal:

$$N u(\xi, \tau) = \sum_{j=0}^{\infty} A_j \quad (5.2.8)$$

$$A_j = \frac{1}{j!} \left[\frac{d^j}{d\lambda^j} \left[N \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j u_j \right] \right]_{\lambda=0}, \quad j = 0, 1, 2, \dots,$$

Desarrollando la ecuación (5.2.6) aplicando las expresiones (5.2.7) y (5.2.8) se obtienen las expresiones con las que se resolverán las ecuaciones:

$$\begin{aligned} u_0(\xi, \tau) &= f(\xi) \\ u_{j+1}(\xi, \tau) &= -\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^\beta} \mathcal{L}[L u_{j+1}(\xi, \tau) + A_j]\right] \end{aligned} \quad (5.2.9)$$

2. Método de la transformada de Mohand [■]: este método fue definido por primera vez en 2017 por sus autores Mohand y Mahboub. Este método presenta una nueva transformación llamada transformación de Mohand de donde se deduce la expresión:

$$M \{u^n(\tau)\} = v^n \mathcal{R}(v) - v^{n+1} u(0) - v^n u'(0) - \dots - v^2 u^{n-1}(0) \quad (5.2.10)$$

aplicando esta expresión a la ecuación diferencial fraccionaria parcial:

$$u_{(m+1)}(\xi, \tau) = -M^{-1} \left\{ \frac{1}{v^\beta} M \{D^\beta u(\xi, \tau) + L u(\xi, \tau) + N u(\xi, \tau)\} \right\} \quad (5.2.11)$$

3. Método *Wavelet de Legendre*.

Lista de Acrónimos

Se indican en la siguiente tabla todas las abreviaturas, acrónimos e iniciales utilizadas en este Trabajo.

Acrónimo	Descripción
DT1	Pacientes diabéticos tipo 1.
MDGI	Modelos dinámicos de Glucosa – Insulina.
SFDDE	<i>Systems of Fractional Delay Differential Equations</i> –Sistemas de Ecuaciones Fraccionarias con Retraso.
GIRS	<i>Non – linear Fractional Glucose–Insulin Regulatory Dynamical System</i> – Sistema de ecuaciones regulador de Glucosa – Insulina Fraccionario no lineales
LADM	<i>Laplace Ademonian Decomposition Method</i> – Metodo de descomposicion de Laplace Ademonian
MWB	Metodo Wavelet de Bernoulli.
ODS	Objetivos de Desarrollo Sostenible.

Bibliografía

Referencias Bibliográficas

[AGRA22]

Agrawal, K., Kumar, R., “Bernoulli wavelet method for non-linear fractional Glucose-Insulin regulatory dynamical system”. *Chaos, Solitons and Fractals, Elsevier Journal*, 2022.

[ALHU20]

AL-HUSSEIN, Abdul-Basset A., et al. “A new time-delay model for chaotic glucose-insulin regulatory system”. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2020, vol. 30, no 12, p. 2050178.

[ALSH21]

ALSHEHRI, Mansoor H., et al. “A Caputo (discretization) fractional-order model of glucose-insulin interaction: numerical solution and comparisons with experimental data”. *Journal of Taibah University for Science*, 2021, vol. 15, no 1, p. 26-36.

[AVCI21]

AVCI, İbrahim. “Numerical Simulation of Fractional Delay Differential Equations Using the Operational Matrix of Fractional Integration for Fractional-Order Taylor Basis”. *Fractal and Fractional*, 2021, vol. 6, no 1, p. 10.

[BARI20]

BARIKBIN, Zahra; KESHAVARZ, Elham. “Solving fractional optimal control problems by new Bernoulli wavelets operational matrices”. *Optimal Control Applications and Methods*, 2020, vol. 41, no 4, p. 1188-1210.

[CHOU21]

CHOUHAN, Devendra; MISHRA, Vinod; SRIVASTAVA, H. M. “Bernoulli wavelet method for numerical solution of anomalous infiltration and diffusion modeling by nonlinear fractional differential equations of variable order”. *Results in Applied Mathematics*, 2021, vol. 10, p. 100146.

[FAHE21]

FAHEEM, Mo; RAZA, Akmal; KHAN, Arshad. “Collocation methods based on Gegenbauer and Bernoulli wavelets for solving neutral delay differential equations.” *Mathematics and Computers in Simulation*, 2021, vol. 180, p. 72-92.

[FERN22]

FERNÁNDEZ-CARREÓN, B., et al. “Analysis of a Fractional-order Glucose-Insulin Biological System with Time Delay.” *Chaos Theory and Applications*, 2022, vol. 4, no 1, p. 10-18.

[KESH14]

KESHAVARZ, E.; ORDOKHANI, Y.; RAZZAGHI, M. “Bernoulli wavelet operational matrix of fractional order integration and its applications in solving the fractional order differential equations.” *Applied Mathematical Modelling*, 2014, vol. 38, no 24, p. 6038-6051.

[KHAN19]

R. Shah, H. Khan, U. Farooq, D. Baleanu, P. Kumam and M. Arif, “A New Analytical Technique to Solve System of Fractional-Order Partial Differential Equations,” in *IEEE Access*, vol. 7, pp. 150037-150050, 2019,

[KHAN20]

HASSAN KHAN, R., et al. “Laplace decomposition for solving nonlinear system of fractional order partial differential equations”, *Advanced in difference Equations, Springer Journal* 2020

[LEKD19]

LEKDEE, Natchapon; SIRISUBTAWEE, Sekson; KOONPRASERT, Sanoe. “Bifurcations in a Delayed Fractional Model of Glucose-Insulin Interaction with Incommensurate Orders”. *Advances in Difference Equations*,

Springer Journal, 2019, vol. 2019, no 1, p. 1-22.

[LI01]

LI, Jiayu; KUANG, Yang; LI, Bingtuan. "Analysis of IVGTT glucose-insulin interaction models with time delay". *Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B*, 2001, vol. 1, no 1, p. 103-124.

[RODR18]

RODRÍGUEZ, Jorge Losada. "Ecuaciones diferenciales de orden fraccionario y aplicaciones. "Tesis de Doctorado, Santiago de Compostela: Universidad de Santiago de Compostela, 2018.

[MOHA18]

MOHAMMED, Osama H.; AL-SAFI, Mohammed GS; YOUSIF, Ahmed Ayyoub. "Numerical Solution for Fractional Order Space-Time Burger's Equation Using Legendre Wavelet-Chebyshev Wavelet Spectral Collocation Method." *Al-Nahrain Journal of Science*, 2018, vol. 21, no 1, p. 121-127.

[MOHA19]

MOHAMMED, Isa Ibrahim; ADAMU, Ibrahim Isa; BARKA, Seni James. "Mathematical model for the dynamics of glucose, insulin and β -cell mass under the effect of trauma, excitement and stress." *Modeling and Numerical Simulation of Material Science*, 2019, vol. 9, no 4, p. 71-96.

[NEMA21]

NEMATI, Somayeh; LIMA, Pedro M.; TORRES, Delfim FM. "Numerical solution of variable-order fractional differential equations using Bernoulli polynomials." *Fractal and Fractional*, 2021, vol. 5, no 4, p. 219.

[RAHI17]

RAHIMKHANI, Parisa; ORDOKHANI, Yadollah; BABOLIAN, Esmail. "A new operational matrix based on Bernoulli wavelets for solving fractional delay differential equations." *Numerical Algorithms*, 2017, vol. 74, no 1, p. 223-245.

[RAHI22]

RAHIMKHANI, Parisa; ORDOKHANI, Yadollah; SABERMAHANI, Sedigheh. "Bernoulli wavelet least square support vector regression: Robust numerical method for systems of fractional differential equations." *Research Square* 2022.

[SAKU17]

SAKULRANG, Sasikarn, et al. "A fractional differential equation model for continuous glucose monitoring data." *Advances in Difference Equations*, 2017, vol. 2017, no 1, p. 1-11.

[SHAB18]

SHABESTARI, Payam Sadeghi, et al. "A novel approach to numerical modeling of metabolic system: Investigation of chaotic behavior in diabetes mellitus." *Complexity*, 2018, vol. 2018.

[ZAMA20]

Cristina Zamarrón Sobrinos. *Modelos Matemáticos del Sistema Regulador Glucosa-Insulina en Pacientes diabéticos con retraso del Tiempo*. Trabajo de Fin de Máster, Escuela Técnica Superior de Ingeniería, ICAI, Universidad Pontificia de Comillas, 2020.