



MÁSTER EN INGENIERÍA INDUSTRIAL

TRABAJO FIN DE MÁSTER

MODELADO Y VALIDACIÓN DE PÉRDIDAS AC EN IMÁN SUPERCONDUCTOR DE ALTA TEMPERATURA

Autor: Javier Orea Rufino

Director: Carlos José Hernando López de Toledo

Co-Director: Javier Munilla López

Madrid

Declaro, bajo mi responsabilidad, que el Proyecto presentado con el título
**MODELADO Y VALIDACIÓN DE PÉRDIDAS AC EN IMÁN SUPERCONDUCTOR
DE ALTA TEMPERATURA**

en la ETS de Ingeniería - ICAI de la Universidad Pontificia Comillas en el

curso académico 2023/2024 es de mi autoría, original e inédito y

no ha sido presentado con anterioridad a otros efectos.

El Proyecto no es plagio de otro, ni total ni parcialmente y la información que ha sido

tomada de otros documentos está debidamente referenciada.

Fdo.: Javier Orea

Fecha: 06 / 08 / 2024



Autorizada la entrega del proyecto

LOS DIRECTORES DEL PROYECTO

Fdo.: Carlos Hernando López de Toledo

Fecha: 06 / 08 / 2024



Fdo.: Javier Munilla López

Fecha: 06 / 08 / 2024





MÁSTER EN INGENIERÍA INDUSTRIAL

TRABAJO FIN DE MÁSTER

MODELADO Y VALIDACIÓN DE PÉRDIDAS AC EN IMÁN SUPERCONDUCTOR DE ALTA TEMPERATURA

Autor: Javier Orea Rufino

Director: Carlos José Hernando López de Toledo

Co-Director: Javier Munilla López

Madrid

MODELADO Y VALIDACIÓN DE PÉRDIDAS AC EN IMÁN SUPERCONDUCTOR DE ALTA TEMPERATURA

Autor: Orea Rufino, Javier.

Director: Hernando López de Toledo, Carlos José & Munilla López, Javier

Entidad Colaboradora: Cyclomed Technologies

RESUMEN DEL PROYECTO

En este proyecto, se ha desarrollado un programa validado con COMSOL Multiphysics para calcular las pérdidas AC en sistemas SMES durante transitorios eléctricos. Destaca por su precisión, rapidez y facilidad para definir la geometría y el transitorio a simular, agilizando así el diseño óptimo de la geometría del sistema.

Palabras clave: SMES, superconductor, pérdidas, AC, HTS.

1. Introducción

Un sistema SMES (Superconducting Magnetic Energy Storage) es un sistema de almacenamiento de energía en forma de campo magnético [1]. Este sistema está compuesto por una bobina superconductora por la que se hace circular una corriente continua. Si se conecta la bobina en cortocircuito una vez está circulando una intensidad, la corriente no disminuirá con el tiempo dada la resistividad nula del superconductor. De este modo, se habrá almacenado energía en forma de campo magnético.

Un inconveniente de estos sistemas es que necesitan operar a temperaturas extremadamente bajas para que el superconductor mantenga sus propiedades superconductoras [1]. Además, durante los periodos de carga y descarga se generan pérdidas en el superconductor debido a efectos como la histéresis [2]. Esto implica que la bobina debe contar con un sistema de crio-refrigeración de alta potencia, uno de los principales costes del sistema.

Por lo tanto, en la fase de prediseño de la geometría del sistema SMES, las pérdidas generadas durante los transitorios eléctricos juegan un papel crucial, ya que afectan al dimensionamiento del sistema de crio-refrigeración. En esta fase, es necesario realizar numerosas simulaciones con distintas geometrías y transitorios. Por eso, resulta conveniente disponer de una herramienta que permita definir fácilmente cualquier geometría y transitorio y que calcule de manera rápida y con cierta precisión las pérdidas generadas.

2. Definición del Proyecto

En este proyecto se ha desarrollado un programa para calcular las pérdidas generadas en una bobina superconductora con una geometría arbitraria durante cualquier transitorio eléctrico. Los resultados obtenidos han sido validados con COMSOL Multiphysics.

El objetivo del programa es agilizar el proceso de prediseño de la geometría óptima de un sistema SMES.

3. Descripción del problema

Para validar el programa se ha definido una geometría de un posible sistema SMES junto con un transitorio arbitrario.

La geometría de este sistema SMES se muestra en la Ilustración 1.

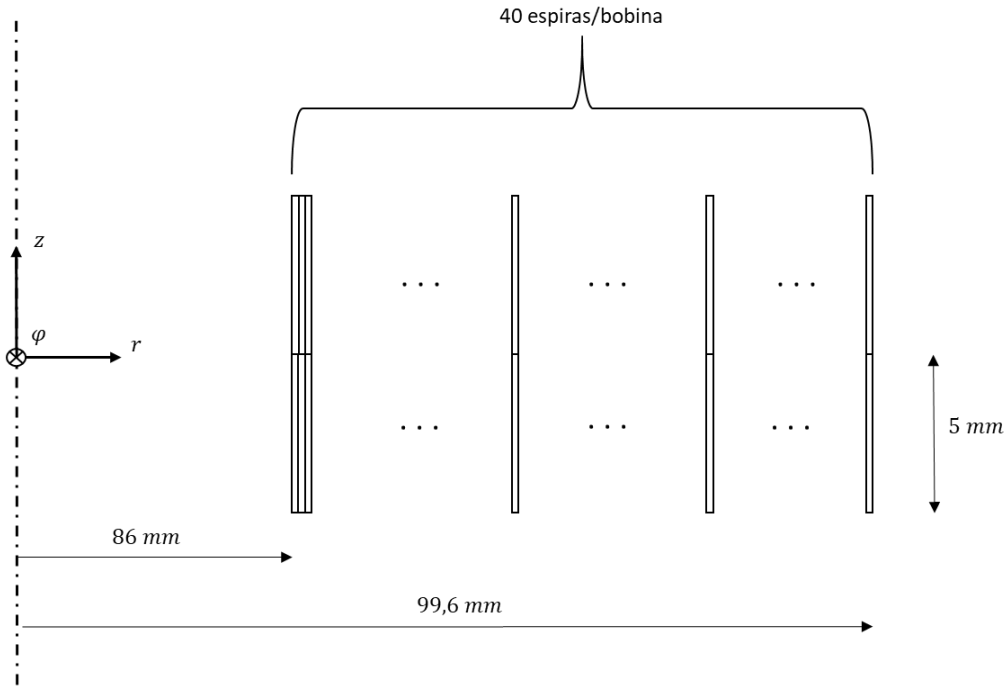


Ilustración 1. Geometría del sistema SMES

La geometría consta de dos bobinas conectadas en serie en formato doble pancake. Cada bobina tiene 40 vueltas de cinta superconductora, con una altura de 5 mm, un radio interno de 86 mm y un radio externo de 99,6 mm.

El transitorio a simular se ha definido como una intensidad sinusoidal con un valor de pico de 700 A con una frecuencia de 1 Hz. El tiempo de la simulación se ha limitado a 1 segundo. Además, el programa permite definir la resistividad del superconductor mediante la siguiente expresión:

$$\rho = \frac{E_c}{J_c} \cdot \left| \frac{\mathbf{J}}{J_c} \right|^{n-1}$$

Donde \mathbf{J} , E_c , n y J_c son la densidad de corriente, el campo eléctrico crítico, el exponente del superconductor y la densidad de corriente crítica respectivamente. El programa permite introducir una dependencia de J_c con respecto al módulo del campo magnético $|\mathbf{B}|$ y su orientación respecto a la superficie del superconductor θ . Por tanto, se tiene que:

$$J_c = f(|\mathbf{B}|, \theta)$$

4. Resultados

El programa permite calcular la distribución espacial del calor acumulado a lo largo del tiempo. Este resultado se calcula a partir de la distribución de densidad de corriente, que se ha obtenido con una precisión entre el 98% y el 99% respecto a la obtenida en COMSOL Multiphysics. El exponente n del superconductor utilizado ha sido de 40. Cuanto mayor sea el exponente, mayor será la sensibilidad de las pérdidas. En este caso el error de las pérdidas totales es de aproximadamente el 80%, dada la elevada no linealidad del problema. El tiempo de ejecución mínimo de este modelo es de 6 horas, mientras que el del programa desarrollado es de aproximadamente 13 minutos.

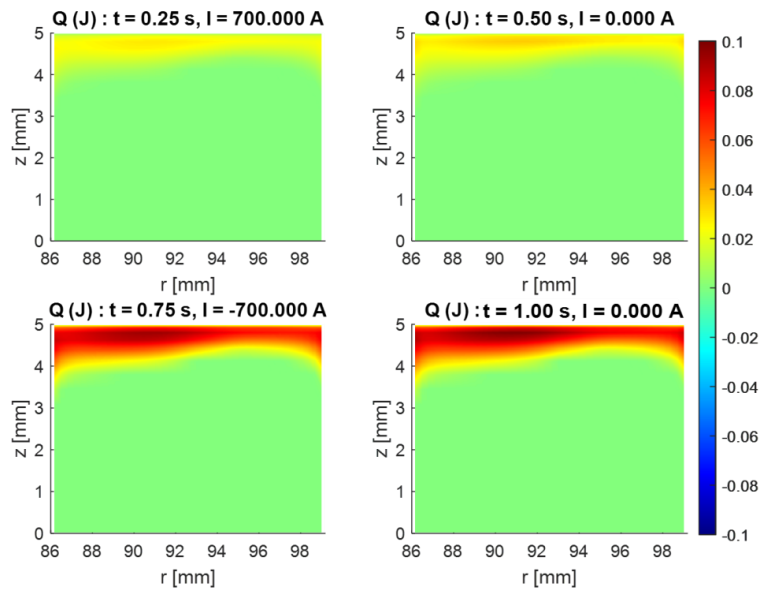


Ilustración 2 – Distribución del calor generado de la bobina superior a lo largo del tiempo

5. Conclusiones

El programa desarrollado permite definir fácilmente cualquier geometría y transitorio de un sistema SMES para calcular de manera rápida y con suficiente precisión las pérdidas generadas. Estas características hacen que el programa sea ideal para ser utilizado en la fase de prediseño de la geometría de un sistema SMES, donde deben hacerse numerosas simulaciones con diversas geometrías y transitorios en las que un resultado orientativo de las pérdidas es suficiente.

6. Referencias

- [1] Samuel C. Johnson, F. Todd Davidson, Joshua D. Rhodes, Justin L. Coleman, Shannon M. Bragg-Sitton, Eric J. Dufek, Michael E. Webber, Chapter Five - Selecting Favorable Energy Storage Technologies for Nuclear Power.
- [2] Zhang, H.; Grilli, F.; Wen, Z.; Gyftakis, K.; Mueller, M. Alternating Current Loss of Superconductors. Encyclopedia. Available online: <https://encyclopedia.pub/entry/9252> (accessed on 05 May 2024).

MODELING AND VALIDATION OF AC LOSSES IN HIGH TEMPERATURE SUPERCONDUCTING MAGNETS

Author: Orea Rufino, Javier.

Supervisor: : Hernando López de Toledo, Carlos José & Munilla López, Javier.

Collaborating Entity: Cyclomed Technologies

ABSTRACT

In this project, a program validated with COMSOL Multiphysics has been developed to calculate AC losses in SMES systems during electrical transients. It is notable for its precision, speed, and ease of defining the geometry and the transient to be simulated, thus streamlining the optimal design of the system's geometry.

Keywords: SMES, superconductor, losses, AC, HTS.

1. Introduction

A SMES (Superconducting Magnetic Energy Storage) system is an energy storage system in the form of a magnetic field [1]. This system consists of a superconducting coil through which a direct current is passed. If the coil is short-circuited once the current is flowing, the current will not decrease over time due to the zero resistivity of the superconductor. In this way, energy is stored in the form of a magnetic field.

A drawback of these systems is that they need to operate at extremely low temperatures for the superconductor to maintain its superconducting properties [1]. Additionally, during charging and discharging periods, losses occur in the superconductor due to effects such as hysteresis [2]. This means that the coil must be equipped with a high-power cryogenic cooling system, which is one of the main costs of the system.

Therefore, during the pre-design phase of the SMES system's geometry, the losses generated during electrical transients play a crucial role, as they affect the sizing of the cryogenic cooling system. At this stage, it is necessary to perform numerous simulations with different geometries and transients. Hence, it is useful to have a tool that allows for easy definition of any geometry and transient, and that calculates the generated losses quickly and with a certain level of precision.

2. Project definition

In this project, a program has been developed to calculate the losses generated in a superconducting coil with an arbitrary geometry during any electrical transient. The results obtained have been validated with COMSOL Multiphysics.

The aim of the program is to streamline the pre-design process of the optimal geometry for an SMES system.

3. Description of the problem

To validate the program, a geometry of a potential SMES system has been defined along with an arbitrary transient.

The geometry of this SMES system is shown in Illustration 1.

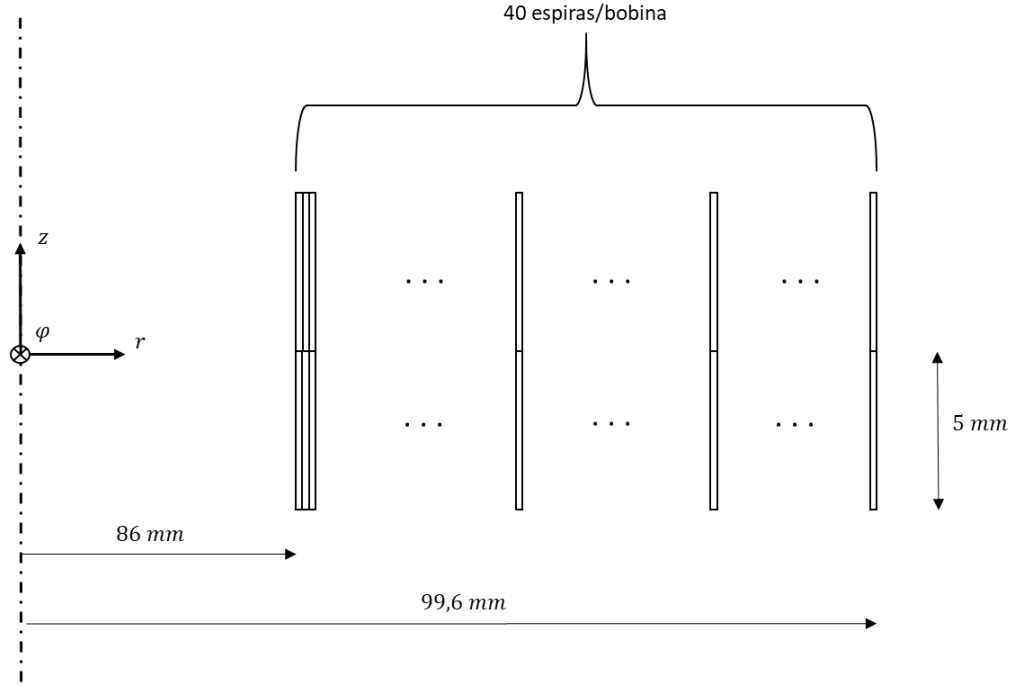


Illustration 1. Geometry of the SMES system

The geometry consists of two coils connected in series in a double pancake format. Each coil has 40 turns of superconducting tape, with a height of 5 mm, an inner radius of 86 mm, and an outer radius of 99.6 mm.

The transient to be simulated is defined as a sinusoidal current with a peak value of 700 A and a frequency of 1 Hz. The simulation time is limited to 1 second. Additionally, the program allows for defining the resistivity of the superconductor using the following expression:

$$\rho = \frac{E_c}{J_c} \cdot \left| \frac{\mathbf{J}}{J_c} \right|^{n-1}$$

where \mathbf{J} , E_c , n and J_c are the current density, critical electric field, superconductor exponent, and critical current density, respectively. The program also allows for the introduction of a dependence of J_c on the magnitude of the magnetic field $|\mathbf{B}|$ and its orientation relative to the surface of the superconductor θ . Therefore, it is given by:

$$J_c = f(|\mathbf{B}|, \theta)$$

4. Results

The program allows for calculating the spatial distribution of accumulated heat over time. This result is derived from the current density distribution, which has been obtained with an accuracy of between 98% and 99% compared to the distribution obtained in COMSOL Multiphysics. The exponent n of the superconductor used is 40. The higher the exponent, the greater the sensitivity of the losses. In this case, the error in the total losses is approximately 80% due to the high nonlinearity of the problem. The minimum execution time for this model is 6 hours, whereas the developed program's execution time is approximately 13 minutes.

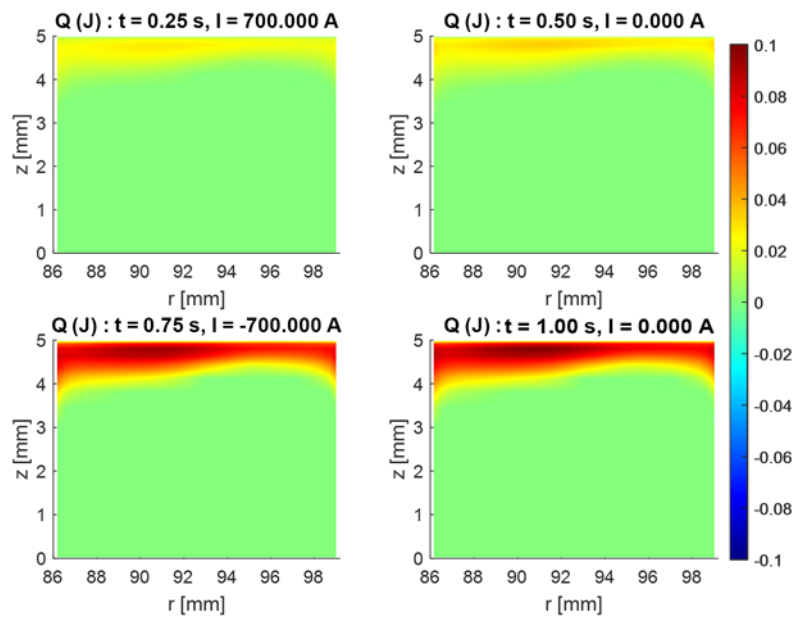


Illustration 2 – Heat distribution generated by the upper coil over time

5. Conclusions

The developed program allows for easy definition of any geometry and transient of an SMES system to quickly and accurately calculate the generated losses. These features make the program ideal for use in the pre-design phase of an SMES system's geometry, where numerous simulations with various geometries and transients are required, and a preliminary estimate of the losses is sufficient.

6. References

- [1] Samuel C. Johnson, F. Todd Davidson, Joshua D. Rhodes, Justin L. Coleman, Shannon M. Bragg-Sitton, Eric J. Dufek, Michael E. Webber, Chapter Five - Selecting Favorable Energy Storage Technologies for Nuclear Power.
- [2] Zhang, H.; Grilli, F.; Wen, Z.; Gyftakis, K.; Mueller, M. Alternating Current Loss of Superconductors. Encyclopedia. Available online: <https://encyclopedia.pub/entry/9252> (accessed on 05 May 2024).

Índice de la memoria

1. Introducción	7
2. Descripción de las Tecnologías	10
3. Estado de la Cuestión	12
Formulación H:	12
Formulación T-A:	13
4. Definición del Trabajo	15
Justificación	15
Objetivos	16
Metodología	16
5. Definición del problema a simular	17
Propiedades de la cinta superconductora	17
Propiedades de la geometría	20
Propiedades del transitorio	21
6. Modelo de COMSOL Multiphysics	22
Definición de la geometría	22
Definición de la física	24
Obtención de resultados	25
7. Modelo simplificado (1)	28
Cálculo del campo magnético	29
Transformación de la geometría	32
Cálculo de pérdidas y evaluación del modelo	35
8. Modelo simplificado (2)	38
Cálculo del campo magnético y de Jc	38
Planteamiento y resolución del problema	39
Análisis de resultados y evaluación del modelo	44
9. Modelo definitivo	52

Planteamiento del problema.....	52
Análisis y evaluación de resultados	56
10. Conclusiones y trabajos futuros.....	71
Conclusión	71
Trabajos futuros	71
11. Bibliografía.....	77
ANEXO. Alineación con los Objetivos de Desarrollo Sostenible	81

Índice de figuras

FIGURA 1. ESQUEMA DE LOS COMPONENTES DE UN SISTEMA SMES [11].	9
FIGURA 2. EJEMPLO DE LAS CAPAS DE UNA CINTA SUPERCONDUCTORA.	17
FIGURA 3. SUPERFICIE DE CORRIENTE CRÍTICA [15].	19
FIGURA 4. GEOMETRÍA DEL SISTEMA SMES	20
FIGURA 5. TRANSITORIO ELÉCTRICO A SIMULAR	21
FIGURA 6. GEOMETRÍA DEFINIDA EN COMSOL MULTIPHYSICS	23
FIGURA 7. AMPLIACIÓN DE LA GEOMETRÍA DEFINIDA EN COMSOL MULTIPHYSICS	23
FIGURA 8. PRECISIÓN PARA IMPONER LA INTENSIDAD QUE DEBE CIRCULAR EN CADA ESPIRA EN COMSOL MULTIPHYSICS	26
FIGURA 9. CONDICIONES DE CONTORNO EN UNA ESPIRA	30
FIGURA 10. GEOMETRÍAS SENCILLAS PARA LAS QUE EXISTEN EXPRESIONES ANALÍTICAS	32
FIGURA 11. TRANSFORMACIÓN DE UNA ESPIRA EN UNA CINTA INFINITA	33
FIGURA 12. ESQUEMA DE ENTRADAS Y SALIDAS DE LA FUNCIÓN	39
FIGURA 13. ELEMENTO FINITO EN UNA ESPIRA	40
FIGURA 14. PRECISIÓN PARA IMPONER LA INTENSIDAD QUE DEBE CIRCULAR EN CADA ESPIRA.	45
FIGURA 15. EVOLUCIÓN DEL CAMPO MAGNÉTICO RADIAL OBTENIDO CON MATLAB	46
FIGURA 16. EVOLUCIÓN DEL CAMPO MAGNÉTICO RADIAL OBTENIDO CON COMSOL MULTIPHYSICS	46
FIGURA 17. EVOLUCIÓN DEL CAMPO MAGNÉTICO AXIAL OBTENIDO CON MATLAB	48
FIGURA 18. EVOLUCIÓN DEL CAMPO MAGNÉTICO AXIAL OBTENIDO CON COMSOL MULTIPHYSICS	48
FIGURA 19. CURVAS DE POTENCIA DEL MODELO DE MATLAB Y DE COMSOL MULTIPHYSICS	49
FIGURA 20. PRECISIÓN PARA IMPONER LA INTENSIDAD QUE DEBE CIRCULAR EN CADA ESPIRA.	57
FIGURA 21. EVOLUCIÓN DEL CAMPO MAGNÉTICO RADIAL OBTENIDO CON MATLAB	58
FIGURA 22. EVOLUCIÓN DEL CAMPO MAGNÉTICO RADIAL OBTENIDO CON COMSOL MULTIPHYSICS	58
FIGURA 23. EVOLUCIÓN DEL CAMPO MAGNÉTICO AXIAL OBTENIDO CON MATLAB	59
FIGURA 24. EVOLUCIÓN DEL CAMPO MAGNÉTICO AXIAL OBTENIDO CON COMSOL MULTIPHYSICS	59
FIGURA 25. EVOLUCIÓN DE LA DENSIDAD DE CORRIENTE NORMALIZADA OBTENIDA CON MATLAB.	60
FIGURA 26. ESTUDIO DE LA CONVERGENCIA DEL MODELO.	62
FIGURA 27. CURVAS DE POTENCIA PARA DISTINTO NÚMERO DE ELEMENTOS FINITOS.	63
FIGURA 28. CURVAS DE POTENCIA DEL MODELO DE MATLAB Y DE COMSOL MULTIPHYSICS	64
FIGURA 29. CAMPO ELÉCTRICO EN FUNCIÓN DE LA DENSIDAD DE CORRIENTE NORMALIZADA	65
FIGURA 30. CURVAS DE POTENCIA PARA DIVERSOS ERRORES EN LA DENSIDAD DE CORRIENTE	66
FIGURA 31. DISTRIBUCIÓN DEL CALOR ACUMULADO.	67

FIGURA 32. CALOR GENERADO EN CADA ESPIRA	67
FIGURA 33. MÓDULO DE LA INTENSIDAD DE CAMPO MAGNÉTICO EN TESLAS PARA EL INSTANTE DE 0.1 SEGUNDOS	76
FIGURA 34. CURVA DE HISTÉRESIS DEL HIERRO	76

Índice de tablas

TABLA 1. CARACTERÍSTICAS GEOMÉTRICAS DE LA CINTA SUPERCONDUCTORA.....	18
TABLA 2. PROPIEDADES DE LA CAPA SUPERCONDUCTORA	18

1. INTRODUCCIÓN

Un sistema SMES (Superconducting Magnetic Energy Storage) es un sistema de almacenamiento de energía en forma de campo magnético [1]. Este sistema está formado por una bobina superconductora por la que se hace circular una corriente continua. Esta corriente continua es la responsable de crear el campo magnético en la bobina.

El funcionamiento del sistema es el siguiente: primeramente, la bobina sin un estado de carga completo, se conecta a la red para hacer aumentar la corriente que circula por la misma. Después, una vez está circulando una determinada intensidad, la bobina se conecta en cortocircuito. Dada la resistividad nula del superconductor, la corriente no disminuirá con el tiempo, habiendo almacenado energía en forma de campo magnético. Para suministrar la energía almacenada, basta con conectar de nuevo la bobina a la red para que funcione como generador.

Las aplicaciones de estos sistemas son numerosas. Pueden utilizarse, por ejemplo, para mejorar el comportamiento de plantas de generación de energía fotovoltaica o de energía eólica [2]. Estas formas de energía tienen el inconveniente de utilizar una fuente de energía aleatoria e intermitente que resulta en grandes fluctuaciones en la potencia generada que se introduce a la red.

La incorporación de sistemas SMES en el funcionamiento de estas plantas puede reducir de manera suave la fluctuación de la potencia generada que se introduce a la red [3]. Además, los sistemas de generación eólica que utilizan sistemas SMES pueden operar de manera más estable [4].

Otra aplicación interesante de los sistemas SMES es su utilización como baterías complementarias en buques militares o civiles. Estos medios de transporte presentan elementos que requieren una gran cantidad de potencia eléctrica, lo que implica aumentar la electrificación de su red. Por este motivo cuentan con sistemas de almacenamiento de alta densidad de energía como baterías químicas. Sin embargo, en fluctuaciones de carga de

elevada frecuencia, estos sistemas son incapaces de actuar debido a sus limitaciones provocando una aceleración de su deterioro [5]. Una de las ventajas de los sistemas SMES es su rápida respuesta ($<100\text{ms}$) y su capacidad para cargar y descargar grandes cantidades de energía en poco tiempo [1]. Esto resulta ideal para utilizarse como baterías complementarias en aquellos momentos donde la fluctuación de carga sea elevada y deba darse una respuesta rápida de potencia a la red (por ejemplo, en los arranques de grandes equipos eléctricos).

Durante el funcionamiento de estos sistemas, la bobina superconductora debe permanecer a temperaturas muy bajas. En efecto, para que el material superconductor mantenga sus propiedades superconductoras, este debe permanecer por debajo de su temperatura crítica. Según el valor de esta temperatura, los superconductores se pueden clasificar en superconductores de baja temperatura (LTS) y de alta temperatura (HTS). Estos últimos presentan una temperatura crítica mayor de 77 K [6].

Actualmente, se están empezando a utilizar superconductores HTS en la fabricación de sistemas SMES debido a su mayor desarrollo. Su utilización facilita el enfriamiento de estos sistemas en comparación con los que utilizan LTS [7]. Como se puede intuir, una de las principales desventajas de estos sistemas es que deben disponer de un sistema de refrigeración de elevada potencia para mantener el superconductor por debajo de su temperatura crítica [1].

En efecto, la bobina superconductora se encuentra en el interior de un criostato que es operado gracias a un sistema de refrigeración que utiliza nitrógeno o helio líquido como refrigerante (ver Figura 1).

Por otra parte, durante los transitorios eléctricos del sistema SMES (periodos de carga y descarga) se genera calor dentro del superconductor (pérdidas AC). Esto es debido a la aparición de efectos como la histéresis, que no ocurren en corriente continua [8]. La predicción de las pérdidas AC durante los transitorios eléctricos es una variable importante a la hora de diseñar el sistema de refrigeración del sistema SMES. Sobredimensionar demasiado el sistema de refrigeración puede suponer que no sea rentable utilizar un sistema

SMES, ya que supone uno de los mayores costes del sistema. Por eso es importante conocer el calor generado que se debe de evacuar.

En este proyecto se estudiará la generación de pérdidas AC durante los transitorios eléctricos de un posible sistema SMES pensado para operar como batería complementaria en grandes embarcaciones. El proyecto ha sido realizado en colaboración con la empresa Cyclomed Technologies, que está apostando por el diseño y la construcción de estos sistemas [9]. Cabe destacar que este proyecto no queda relegado al marco teórico, sino que las herramientas desarrolladas contribuirán al desarrollo de sistemas SMES reales por parte de la empresa Cyclomed Technologies.

A lo largo del proyecto se explican tres modelos desarrollados en Matlab para calcular las pérdidas AC en un sistema SMES con una geometría arbitraria sometido a un transitorio cualquiera. Estos modelos van aumentando su complejidad hasta llegar a un modelo definitivo que ha sido validado con COMSOL Multiphysics [10]. Se ha incluido la explicación de los modelos previos al definitivo porque se considera que tienen puntos de vista interesantes, aunque no generen resultados suficientemente precisos. Además, el modelo definitivo surge de mejorar los modelos anteriores de manera progresiva, por lo que su explicación ofrece un mejor entendimiento de cómo y por qué se ha llegado finalmente al modelo final.

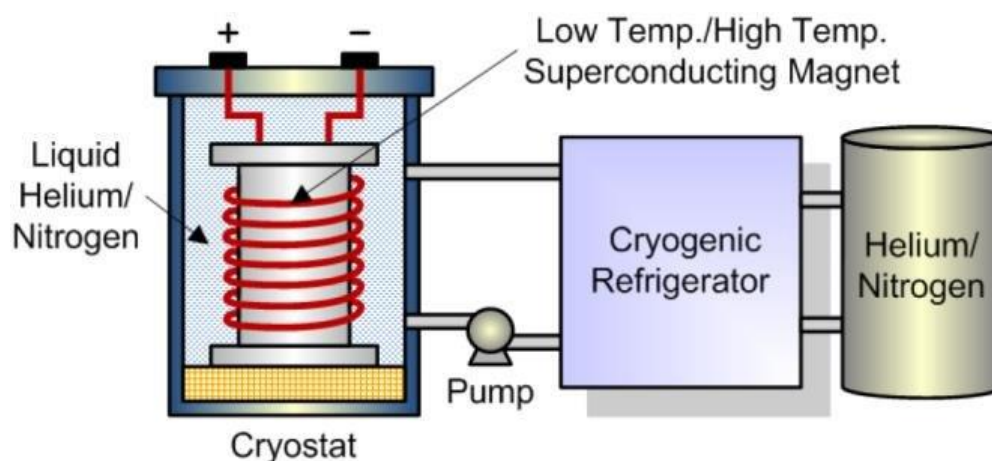


Figura 1. Esquema de los componentes de un sistema SMES [11].

2. DESCRIPCIÓN DE LAS TECNOLOGÍAS

En este capítulo se describirán los fundamentos teóricos sobre superconductividad y electromagnetismo que se han utilizado para desarrollar el proyecto con el objetivo de facilitar su lectura y comprensión. Para ello, se describirán las ecuaciones más generales que gobiernan el problema de la generación de pérdidas AC en una bobina superconductora.

En primer lugar, los transitorios eléctricos a los que está sometido un sistema SMES no presentan una frecuencia lo suficientemente elevada como para considerar la aparición de corrientes de desplazamiento.

Por tanto, se puede considerar que todo el espacio de interés está gobernado por las ecuaciones de Maxwell de cuasi magneto-estática. Estas ecuaciones son generalmente válidas para una gran cantidad de aplicaciones de superconductividad [12]. Aplicadas a medios materiales son:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = q \tag{E. 1}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{E. 2}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{E. 3}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \tag{E. 4}$$

donde, \mathbf{D} es el desplazamiento eléctrico, \mathbf{B} es el campo magnético, \mathbf{E} es el campo eléctrico, \mathbf{H} es la intensidad de campo magnético, \mathbf{J} es la densidad de corriente, y q es la densidad de carga. Adicionalmente, se deben imponer las siguientes ecuaciones constitutivas:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \cdot \mathbf{E} \tag{E. 5}$$

$$\mathbf{B} = \mu \cdot \mathbf{H} \tag{E. 6}$$

$$\mathbf{E} = \rho \cdot \mathbf{J} \quad (E. 7)$$

Donde ε es la permitividad, μ es la permeabilidad y ρ la resistividad del material. En este caso, para el cálculo de pérdidas AC no es necesario definir la permitividad. Además, la permeabilidad del superconductor puede definirse igual a la del aire [13]. En las regiones superconductoras la propiedad más importante es la resistividad, que viene definida por:

$$\rho = \frac{E_c}{J_c} \cdot \left| \frac{\mathbf{J}}{J_c} \right|^{n-1} \quad (E. 8)$$

Esta expresión ha sido comprobada en numerosos experimentos y es ampliamente utilizada en el modelado de la superconductividad [12]. El parámetro J_c se conoce como densidad de corriente crítica y se define como la densidad de corriente para la cual aparece un campo eléctrico crítico E_c . El exponente n , al igual que los valores de J_c y de E_c , dependen del material y por tanto definen el comportamiento del superconductor.

La densidad de corriente crítica es la densidad de corriente que puede conducir una corriente eléctrica sin disipación de energía [14]. Esta depende de la temperatura T , del módulo del campo magnético $|\mathbf{B}|$ y del ángulo de incidencia del campo magnético respecto a la superficie del superconductor θ [15]. Por tanto, se tiene que:

$$J_c = f(T, |\mathbf{B}|, \theta) \quad (E. 9)$$

El carácter altamente no lineal del superconductor plantea un desafío a la hora de predecir el calor generado, el cual se puede calcular evaluando la siguiente expresión:

$$Q = \int_0^t \left(\iiint_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \cdot dV \right) dt \quad (E. 10)$$

Donde Q es el calor total generado en el volumen V del superconductor desde el instante inicial hasta el tiempo t . Actualmente existen distintos métodos para resolver numéricamente este problema. En la siguiente sección, se introducen algunos de ellos.

3. ESTADO DE LA CUESTIÓN

El cálculo de pérdidas AC en superconductores HTS es un problema complejo que, en general, requiere un alto coste computacional y de tiempo. Hoy en día existen diversos métodos para el cálculo de pérdidas AC en superconductores, cada uno con sus ventajas y sus inconvenientes. En este capítulo, se introducen algunas de las formulaciones más utilizadas.

FORMULACIÓN H:

En el estudio realizado por B. Shen, F. Grilli y por T. Coombs se utiliza la formulación \mathbf{H} para calcular las pérdidas en una única cinta y en una doble bobina superconductora para distintos valores pico de intensidad de 50 Hz [13]. La formulación se basa en expresar el problema general planteado en el capítulo anterior en función de las variables \mathbf{H} y \mathbf{J} , que serán las incógnitas del problema. Reagrupando las ecuaciones de Maxwell se tiene que:

$$\frac{\partial(\mu\mathbf{H})}{\partial t} + \nabla \times (\rho \nabla \times \mathbf{H}) = 0 \quad (E. 11)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (E. 12)$$

A estas ecuaciones habría que añadir las condiciones de frontera específicas del problema y algunas restricciones. Por ejemplo, si se quiere imponer que a través de una superficie debe circular una corriente I , se debe añadir la siguiente restricción [12]:

$$I = \oint_{\partial S} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} \quad (E. 13)$$

Donde ∂S hace referencia al contorno de la superficie y $d\mathbf{l}$ a un elemento diferencial de su longitud.

Las principales ventajas de la formulación \mathbf{H} son que ofrece buenos resultados en las pérdidas AC en comparación con los resultados experimentales y su fácil implementación en COMSOL Multiphysics, lo que la convierte en un método ampliamente utilizado [13].

Sin embargo, tiene algunos inconvenientes como su lentitud frente a otros métodos, lo cual impone limitaciones en el número de cintas superconductoras que se pueden simular [16].

FORMULACIÓN T-A:

Otro método utilizado consiste en utilizar una formulación $\mathbf{T} - \mathbf{A}$. Este método se basa en despreciar el espesor de la cinta superconductora. Consiste en aplicar las siguientes ecuaciones en el dominio superconductor [17]:

$$\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{T} \quad (E. 14)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (E. 15)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (E. 16)$$

$$\mathbf{E} = \rho \cdot \mathbf{J} \quad (E. 17)$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \mu \cdot \mathbf{J} \quad (E. 18)$$

$$\mathbf{J}_e = \mathbf{J} \cdot \delta \quad (E. 19)$$

Donde \mathbf{T} es el vector potencial de corriente, \mathbf{A} es el vector potencial magnético, \mathbf{J}_e es la densidad de corriente externa superficial aplicada y δ el espesor de la cinta. Al igual que en el planteamiento anterior, deberán imponerse las condiciones de contorno propias del problema a resolver, así como las correspondientes restricciones. Por ejemplo, en el caso de que se quiera imponer que a través de una superficie S deba circular una determinada intensidad, se debe añadir la siguiente restricción:

$$I = \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\partial S} \mathbf{T} \cdot d\mathbf{l} \quad (E. 20)$$

Donde $d\mathbf{S}$ hace referencia a un diferencial de la superficie S . En el trabajo realizado por Edgar Berrospe-Juarez se aplica esta metodología junto con la formulación \mathbf{H} para predecir el comportamiento de una bobina superconductora cuando es sometida a una corriente sinusoidal de 50 Hz [18]. Las conclusiones del estudio fueron que la formulación $\mathbf{T} - \mathbf{A}$ demostró ser más eficiente para modelar sistemas hechos de cintas HTS. Sin embargo, cabe destacar que esta teoría está limitada a aquellos casos donde el espesor de la cinta HTS no sea significativo.

Además de estas formulaciones basadas en la utilización de elementos finitos también existen otros métodos que utilizan enfoques variacionales o integrales. Por último, existe la posibilidad de combinar las formulaciones existentes en un mismo problema, aplicando cada una a la región del espacio de interés donde mejor se adapte [12].

4. DEFINICIÓN DEL TRABAJO

JUSTIFICACIÓN

Aunque cada uno de los métodos expuestos anteriormente tengan sus ventajas y sus inconvenientes, estos ofrecerán unos resultados adecuados de las pérdidas AC cuando se implementen en programas como COMSOL Multiphysics. Sin embargo, de manera general el proceso de resolución supone un coste computacional alto, un elevado tiempo de ejecución y una mayor dificultad para modificar la geometría del problema en caso de que se quiera simular otra distinta.

Por otro lado, en la fase preliminar del diseño de un sistema SMES se deben decidir los parámetros geométricos del sistema (número de bobinas, radio interno de las bobinas, número de espiras...). La determinación de la geometría del sistema SMES es un proceso delicado ya que supone un compromiso entre numerosos aspectos. Entre ellos destacan: la energía magnética máxima de almacenaje, las elevadas fuerzas magnéticas que se originan, el peso del sistema o las pérdidas AC generadas durante los transitorios eléctricos.

Por tanto, el proceso de determinación de la geometría requiere la realización de numerosas simulaciones con distintas geometrías y transitorios para encontrar el compromiso óptimo entre los numerosos aspectos.

Es por eso que, durante la fase de prediseño del sistema SMES interesa utilizar una herramienta de cálculo de pérdidas AC que permita modificar fácilmente la geometría y que ofrezca rapidez en la generación de resultados con un nivel adecuado de precisión. Nótese que en esta fase no se pretende obtener un resultado extremadamente preciso de las pérdidas, sino un resultado orientativo que permita entender qué geometrías son menos eficientes y por cuáles se debería apostar.

Este proyecto está orientado a desarrollar un programa que cumpla con las características descritas anteriormente con el objetivo de agilizar la determinación de la geometría óptima de un sistema SMES.

OBJETIVOS

En esta sección se explicarán los objetivos del proyecto. Destacan los siguientes:

- Desarrollo de un programa para calcular las pérdidas AC en una bobina superconductora con una geometría y un transitorio arbitrarios.
- Validación de los resultados del programa utilizando un modelo idéntico de COMSOL Multiphysics.
- El programa desarrollado debe tener un mejor desempeño que el modelo de COMSOL Multiphysics. En concreto, además de ofrecer buenos resultados de las pérdidas, el programa debe tener un menor tiempo de ejecución y una mayor facilidad para cambiar la geometría del sistema SMES.

METODOLOGÍA

Para cumplir los objetivos descritos anteriormente se seguirá la siguiente metodología:

- Adquisición de los conocimientos necesarios sobre superconductividad y electromagnetismo.
- Desarrollo del programa de cálculo de pérdidas AC. Para ello, se utilizará Matlab [19] y QuickField [20]. La metodología seguida para cumplir este punto se basa en empezar a calcular pérdidas AC utilizando teorías simplificadas de superconductividad y geometrías sencillas (una cinta recta infinita, por ejemplo). Después, tras comprobar que se obtienen resultados razonables (por ejemplo, validándose con expresiones analíticas ya existentes), se aumentará la complejidad del modelo incluyendo geometrías más complejas (por ejemplo, una cinta curva) y/o un comportamiento más preciso del superconductor.
- Desarrollo del modelo de COMSOL Multiphysics para validar los resultados del programa desarrollado.
- Análisis de resultados para determinar si el programa desarrollado cumple con los requisitos impuestos por los objetivos del proyecto.

5. DEFINICIÓN DEL PROBLEMA A SIMULAR

En esta sección se describen las propiedades de la cinta superconductora, la geometría del sistema SMES y el transitorio eléctrico que definen el problema a simular para validar el cálculo de las pérdidas AC generadas.

PROPIEDADES DE LA CINTA SUPERCONDUCTORA

La cinta superconductora está formada por distintas capas de materiales y solo una pequeña capa es superconductora. La capa superconductora se ha establecido que se encuentra en la mitad de la cinta. La cinta superconductora se compra a un fabricante y por tanto sus propiedades vienen fijadas.

En el cálculo de pérdidas AC solo se tendrá en cuenta la naturaleza de la capa superconductora, ya que en la práctica es por donde circula mayoritariamente la intensidad. Sin embargo, no hay que olvidar que el resto de materiales de la cinta pueden tener su propia naturaleza conductora, así como estar aislados entre ellos. Esto significa que, en la realidad, se inducirán corrientes en el resto de capas durante los transitorios eléctricos debido a que están sometidas a un campo magnético variable y pueden tener una resistividad no nula. Dado que estos efectos se consideran poco significativos, las capas no superconductoras se tratarán como si tuvieran las propiedades electromagnéticas del aire y se asumirá que no transportan corriente. En la Figura 2 se muestra un ejemplo de una cinta superconductora, donde se aprecia su composición de distintas capas de materiales.

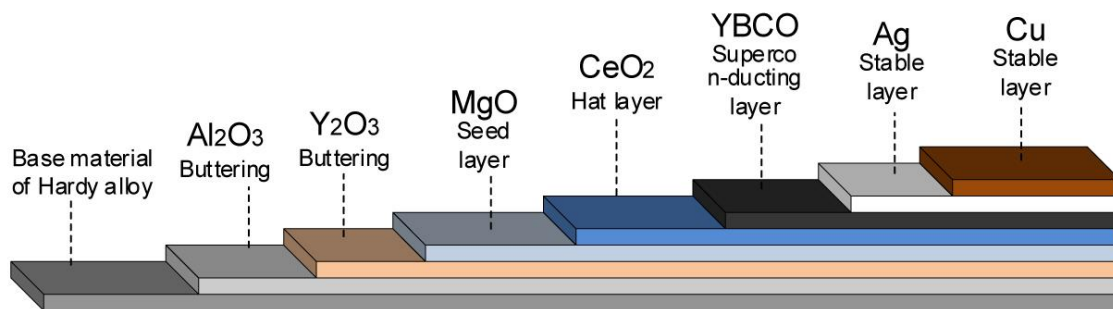


Figura 2. Ejemplo de las capas de una cinta superconductora

Teniendo en cuenta estas consideraciones, se definen a continuación las características geométricas y superconductoras de la cinta de estudio:

Las características geométricas de la cinta superconductora que se utilizará son:

Propiedades de la cinta HTS	Valor
Altura de la cinta h	5 mm
Espesor de la capa superconductora δ	$12 \text{ }\mu\text{m}$
Espesor total de la cinta	$340 \text{ }\mu\text{m}$

Tabla 1. Características geométricas de la cinta superconductora

Las propiedades de la capa superconductora de la cinta son:

Propiedades de capa superconductora	Valor
Exponente del superconductor n	40
Campo eléctrico crítico E_c	0.1 mV/m
Densidad de corriente crítica J_c	$f(\mathbf{B} , \theta) \text{ A/m}^2$

Tabla 2. Propiedades de la capa superconductora

Como se puede observar, se desprecia la dependencia de J_c con la temperatura y solo se tiene en cuenta su dependencia con el campo magnético y con el ángulo de incidencia. La temperatura se considera constante en todo el problema e igual a 4.2 K . Esta consideración se basa en dos razones.

En primer lugar, se asume que el sistema de refrigeración es lo suficientemente potente como para no permitir incrementos de temperatura considerables durante los transitorios eléctricos.

En segundo lugar, considerar la temperatura como una variable supone la resolución de un problema de transmisión de calor completamente acoplado con el problema electromagnético. Además, supone definir la dependencia térmica de las propiedades de cada capa de la cinta superconductora, las cuales se desconocen. Aun así, en el caso de que se conociesen, resolver este problema en Matlab elevaría considerablemente la complejidad y produciría una mayor lentitud en la generación de resultados para obtener una mayor precisión, que alejaría el equilibrio entre rapidez y precisión que se aspira a conseguir.

Para tener en cuenta la dependencia de J_c con $|\mathbf{B}|$ y θ se dispone de una base de datos calculada experimentalmente para la cinta superconductora del fabricante que posee Cyclomed Technologies. Por otra parte, en el trabajo desarrollado por D K Hilton, A V Gavrilin y U P Trociewitz se muestra una expresión analítica que muestra la dependencia de J_c con el campo magnético y el ángulo de incidencia para una determinada cinta. Esta expresión ha sido calculada experimentalmente para una temperatura de 4.2 K y se ha comprobado que ofrece buenos resultados [15]. Esta expresión viene dada por:

$$I_c = \frac{k_0}{(|\mathbf{B}| + \beta_0)^{\alpha_0}} + \frac{k_1}{(|\mathbf{B}| + \beta_1)^{\alpha_1}} \cdot [(\omega_1^2 \cdot \cos^2(\theta - \varphi_1) + \sin^2(\theta - \varphi_1))]^{-1/2} \quad (E. 21)$$

Siendo:

$$\omega_1 = c \left[|\mathbf{B}| + \left(\frac{1}{c}\right)^{\frac{5}{3}} \right]^{3/5} \quad (E. 22)$$

Donde I_c es la intensidad crítica de la cinta superconductora. Para calcular la densidad de corriente crítica, la intensidad crítica debe dividirse por la sección de la cinta. Los parámetros k_0 , k_1 , β_0 , β_1 , α_1 , φ_1 y c se calculan experimentalmente. En este caso, se han ajustado a la base de datos de intensidad de corriente crítica de la cinta que se posee. En la Figura 3 se muestra la superficie de la corriente crítica dada por la expresión analítica junto con los datos obtenidos de manera experimental (puntos rojos) de la cinta utilizada en [15].

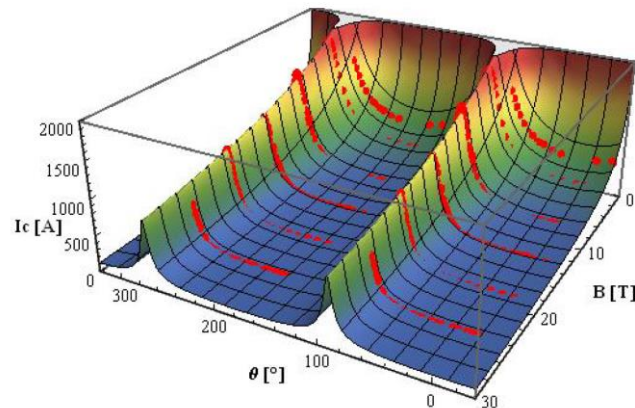


Figura 3. Superficie de corriente crítica [15].

PROPIEDADES DE LA GEOMETRÍA

La geometría escogida cuenta con dos bobinas conectadas en serie colocadas una encima de otra, en formato doble pancake. Las bobinas están formadas por varias vueltas de cinta superconductora.

A continuación, se muestra una representación sin escala de la geometría del sistema SMES a simular. La línea punteada indica el eje de simetría de revolución.

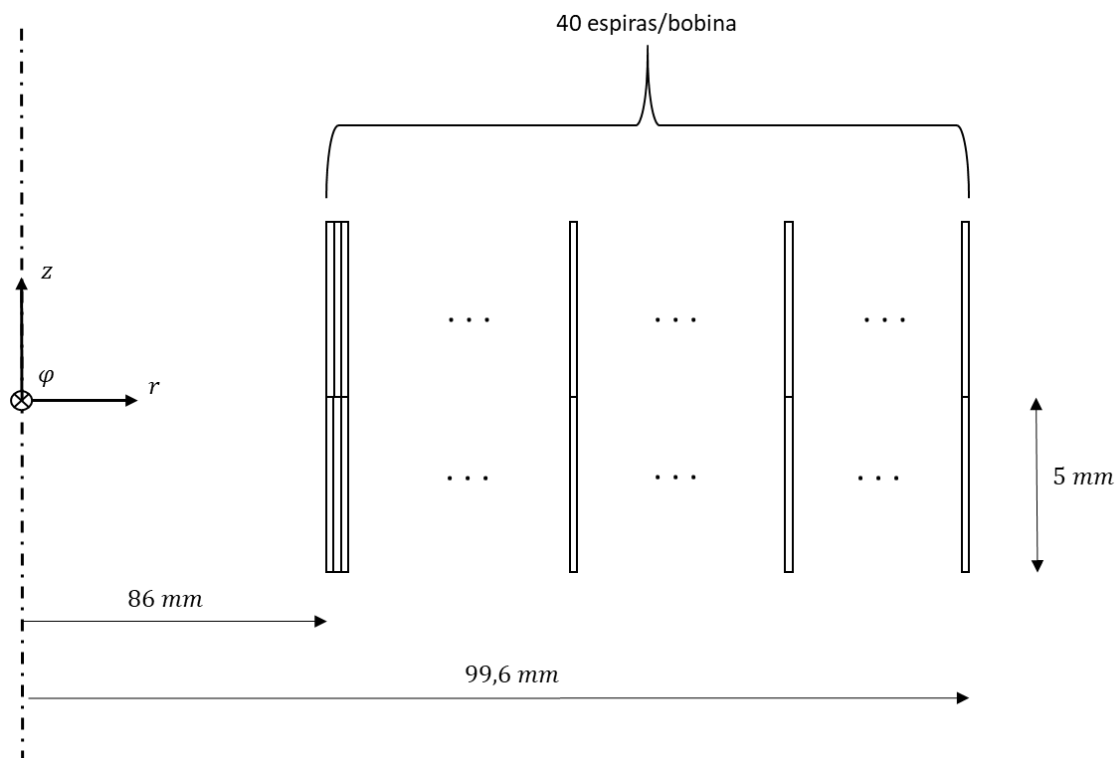


Figura 4. Geometría del sistema SMES

Cada bobina tiene un radio interno de 86 mm y 40 vueltas de cinta superconductora. Dado que el espesor de la cinta son 340 μm , se deduce fácilmente que el radio externo de cada bobina es de 99,6 mm. Por otra parte, dado que ambas bobinas están conectadas en serie, la intensidad que circula a través de cualquier sección transversal de la cinta siempre será la misma para todo instante de tiempo.

Se ha escogido esta geometría porque se considera que tiene una complejidad suficientemente elevada y unas dimensiones que se adaptarían a un posible diseño real. Sin embargo, se podría haber escogido cualquier otra.

PROPIEDADES DEL TRANSITORIO

Por otra parte, se ha decidido simular un transitorio de 1 s compuesto por una senoide con una frecuencia de 1 Hz y un valor de pico de 700 A. Se ha escogido esta evolución de la intensidad porque se considera que es lo suficientemente compleja para analizar la evolución de las pérdidas AC. Sin embargo, se podría haber escogido cualquier otra.

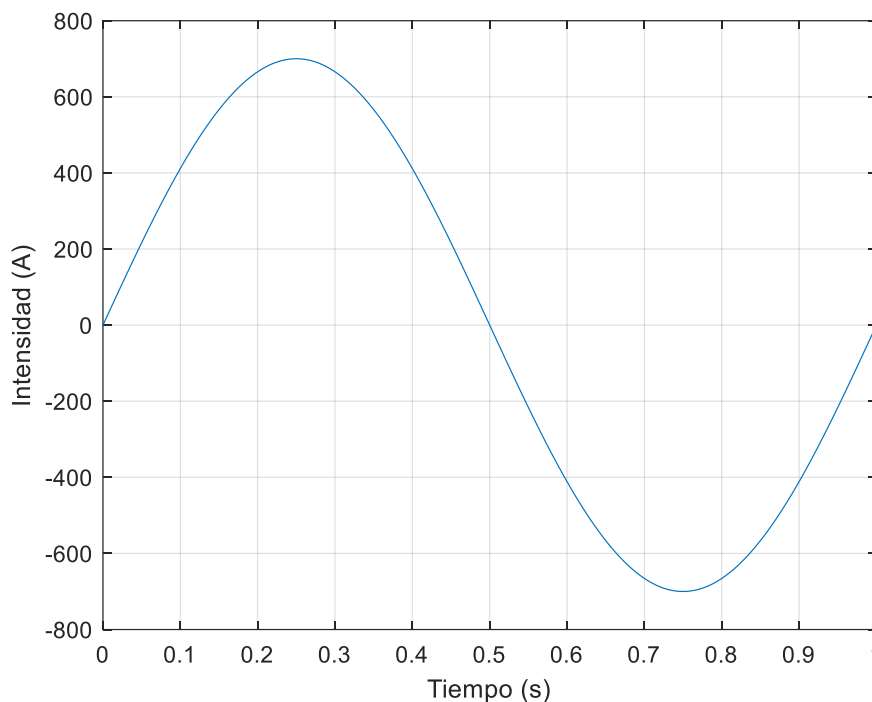


Figura 5. Transitorio eléctrico a simular

Una vez definido el problema a simular, en los siguientes capítulos se presentarán diversos modelos para predecir las pérdidas AC generadas. Cabe destacar que todos los modelos que se desarrollen en Matlab se resolverán con un ordenador cuyas características son:

- Procesador: 13th Gen Intel(R) Core(TM) i7-1355U 1.70 GHz.
- RAM instalada: 16GB.
- Tipo de sistema: Sistema operativo de 64 bits, procesador basado en x64.
- Disco SSD del sistema: 278 GB.

En cambio, como se detallará más adelante, el modelo de COMSOL Multiphysics será ejecutado en un ordenador más potente.

6. MODELO DE COMSOL MULTIPHYSICS

En esta sección se explicará cómo se ha resuelto el problema definido en la sección anterior utilizando COMSOL Multiphysics. Los resultados de este modelo servirán de referencia para validar los modelos desarrollados en Matlab.

DEFINICIÓN DE LA GEOMETRÍA

En primer lugar, para construir la geometría se ha utilizado un entorno de definición de problemas con simetría de revolución, dada la simetría del problema. De esta manera, el problema se reduce a un problema en dos dimensiones.

En la geometría del problema se han identificado dos dominios claramente diferenciados en el espacio:

- Dominio superconductor: está formado por todas las secciones superconductoras de todas las espiras.
- Dominio de aire: está formado por las zonas donde se encuentran el resto de materiales no superconductores de cada espira y por el espacio que rodea a todo el sistema SMES.

En la Figura 6 y Figura 7 se muestra la geometría del sistema SMES y ambos dominios. El dominio de aire se representa en gris mientras que el dominio superconductor se representa en azul. Este último se aprecia mejor en la Figura 7, que corresponde a una ampliación de la esquina superior izquierda de la Figura 6.

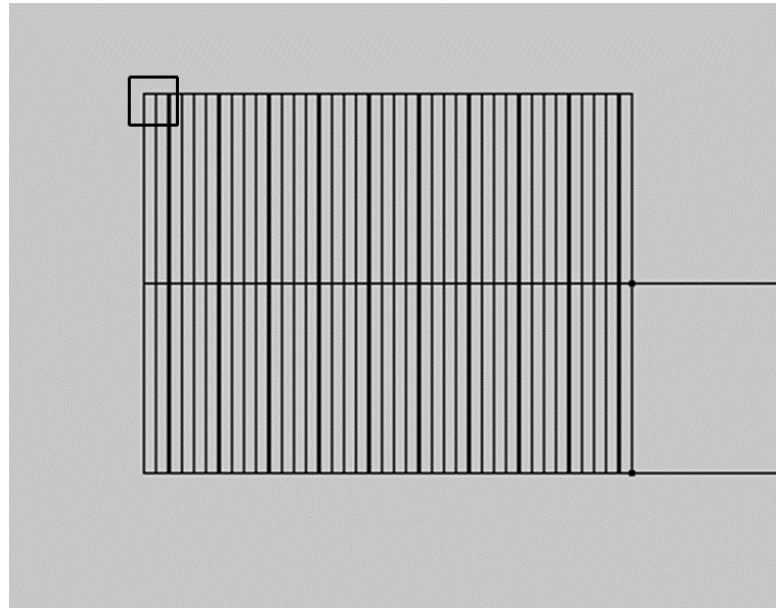


Figura 6. Geometría definida en COMSOL Multiphysics

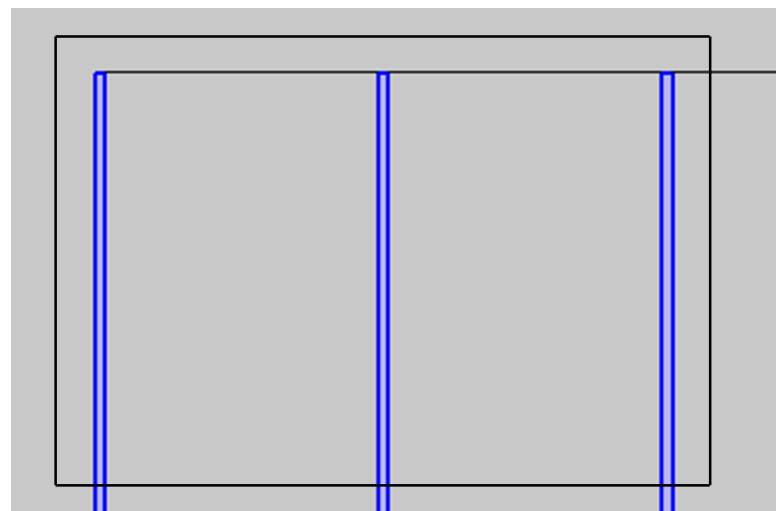


Figura 7. Ampliación de la geometría definida en COMSOL Multiphysics

En el dominio del superconductor se ha establecido una malla rectangular extremadamente fina, mientras que en el dominio del aire se ha definido una malla triangular. El objetivo de establecer un mallado detallado es obtener resultados precisos de las pérdidas generadas.

A continuación, se explicarán las interfaces de electromagnetismo asignadas a cada dominio para resolver el problema electromagnético.

DEFINICIÓN DE LA FÍSICA

En la zona superconductor se ha aplicado la interfaz de “*formulación de campo magnético*”. En esta interfaz la variable incógnita que se resuelve es la intensidad de campo magnético \mathbf{H} y permite definir la resistividad del superconductor en función de la densidad de corriente. Además, permite incluir la expresión analítica de J_c en función del campo magnético y del ángulo de incidencia.

En la zona de aire, se ha empleado la interfaz de “*campos magnéticos sin corrientes*”. En esta interfaz la variable incógnita que se resuelve es el potencial escalar magnético y se asume que la densidad de corriente es nula en todo el dominio. Esta interfaz permite definir el valor del potencial escalar magnético en cualquier punto. Se aprovechará esta posibilidad para imponer la circulación del transitorio por la bobina.

En efecto, para imponer la condición de que por cada capa superconductor debe circular la intensidad impuesta (definida por el transitorio), se ha seguido el siguiente planteamiento: la densidad de corriente solo tiene componente azimutal, por lo que el campo eléctrico también. Matemáticamente se puede demostrar que esto implica que el potencial escalar magnético ϕ es uniforme en cada una de las secciones superconductoras. Sin embargo, en cada sección se tendrá un valor distinto ya que entre ellas existe una diferencia de potencial eléctrico [12].

Para imponer la circulación de una determinada intensidad a través de una sección superconductor con un contorno ∂S , se debe cumplir la siguiente condición:

$$\oint_{\partial S} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = - \oint_{\partial S} \nabla \phi \cdot d\mathbf{l} = \phi(s2) - \phi(s1) = I \quad (E. 23)$$

Donde $s1$ y $s2$ son dos puntos de la superficie de dos secciones superconductoras adyacentes.

Como se puede observar, la imposición de una discontinuidad en el potencial escalar magnético entre secciones implica la circulación de una determinada intensidad a través de ellas. Por tanto, se ha definido en cada sección superconductor un valor de ϕ tal que su

discontinuidad suponga la circulación del transitorio por cada sección. Adicionalmente, es necesario definir una referencia del potencial escalar magnético para que el sistema de ecuaciones resultante sea compatible determinado. En este caso, se ha definido un valor nulo a un punto muy alejado del sistema SMES.

Por último, para acoplar ambas interfaces físicas, se ha impuesto que en las superficies de contacto entre ambos dominios (contorno de todas las secciones superconductoras) se debe cumplir la apropiada continuidad del campo \mathbf{B} y \mathbf{H} . Es decir:

$$(\mathbf{B}_s - \mathbf{B}_{ns}) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (E. 24)$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_s - \mathbf{H}_{ns}) = 0 \quad (E. 25)$$

Donde \mathbf{n} es el vector normal de superficie entre el dominio superconductor y el no superconductor, ambos indicados por los subíndices s y ns respectivamente. Nótese que se ha impuesto la continuidad de la componente tangencial de \mathbf{H} al no existir una densidad de corriente de superficie.

Por último, se ha resuelto el problema utilizando un solucionador del tipo “*dependiente del tiempo*” completamente acoplado, para que las interfaces definidas se resuelvan acopladas para cada instante de tiempo.

OBTENCIÓN DE RESULTADOS

La simulación del problema ha sido realizada con un ordenador con las siguientes características:

- Procesador: Intel(R) Xeon(R) Gold 5218 CPU @ 2.30GHz 2.29 GHz.
- RAM instalada: 256 GB.
- Tipo de sistema: Sistema operativo de 64 bits, procesador basado en x64.
- Disco SSD del sistema: 893 GB.

A continuación, se discutirá el desempeño del modelo y algunos de los resultados.

Así, se ha calculado el error obtenido al imponer que por cada espira debe circular la intensidad impuesta por el transitorio. En la Figura 8 se muestra la evolución del error a lo largo del tiempo, el cual se ha definido como la media del valor absoluto de la diferencia entre la intensidad del transitorio I y la intensidad que circula por cada espira I_e . Es decir:

$$Error = \sum_{e=1}^E \frac{|I - I_e|}{E} \quad (E. 26)$$

Donde el subíndice e hace referencia a una espira y E al número de espiras totales (80). Como se puede observar, el error cometido es mínimo, por lo que se consigue imponer con una elevada precisión la circulación de la intensidad del transitorio a lo largo del tiempo.

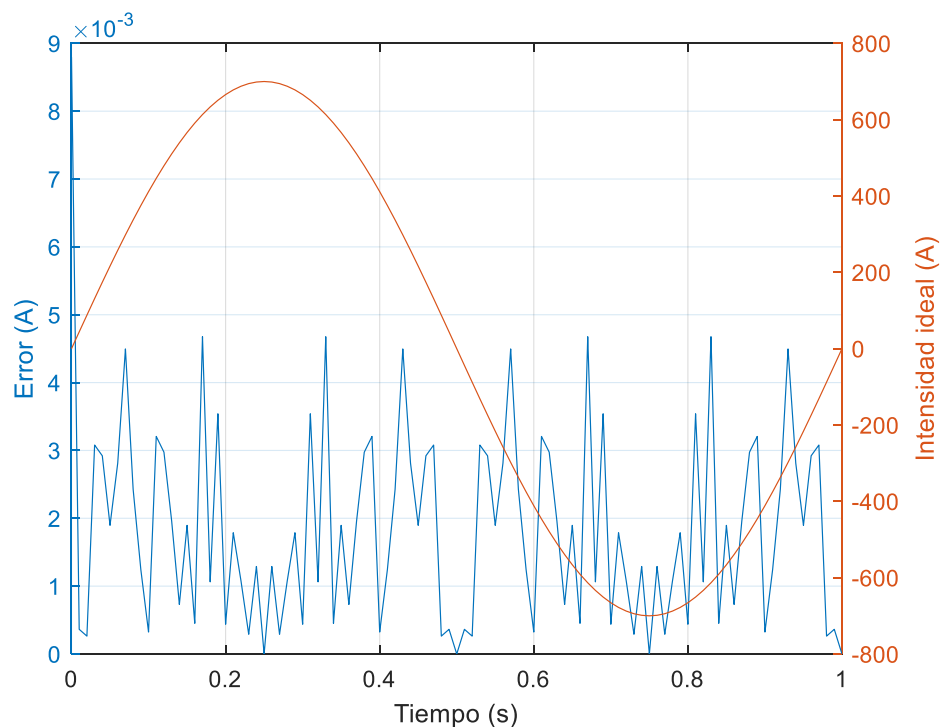


Figura 8. Precisión para imponer la intensidad que debe circular en cada espira en COMSOL Multiphysics

Por otra parte, el tiempo de resolución ha sido aproximadamente de 1 día y 12 horas, generando un fichero de 15 GB. Sin embargo, este tiempo es muy posible que esté sobredimensionado, ya que la calidad de la malla es extremadamente fina. Se ha probado a hacer otras simulaciones con un menor número de elementos finitos, dando lugar a tiempos

de ejecución de alrededor de 6 horas. Aun así, comparando los resultados de ambas simulaciones se podían observar ciertas diferencias en las pérdidas AC generadas.

Los resultados de la simulación de 1 día y 12 horas han sido comparados con los obtenidos por una simulación aún más precisa y se observó que los resultados eran idénticos. Por tanto, se concluye que esta primera simulación ofrece unos resultados de las pérdidas AC precisos. No se ha realizado un estudio sobre el mallado óptimo que garantiza la convergencia de las pérdidas, ya que el objetivo del modelo de COMSOL Multiphysics es ofrecer unos resultados con una alta precisión de las pérdidas AC sin importar el tiempo de ejecución.

Por tanto, en este caso se garantiza que el mallado óptimo supondrá tiempos de ejecución elevados entre 6 horas y más de 1 día.

Los resultados electromagnéticos obtenidos se mostrarán y se compararán más adelante junto con los resultados obtenidos por el resto de modelos desarrollados.

Cabe destacar que la formulación electromagnética utilizada ha sido implementada por otros autores en COMSOL Multiphysics para estudiar la generación de pérdidas en otros problemas. Más concretamente, en [21] se ha implementado esta formulación para el cálculo de pérdidas en bobinas de un solo pancake, en filamentos superconductores entrelazados y sin entrelazar. Los resultados se ajustan de manera precisa con los obtenidos al aplicar la formulación ***H***.

Por tanto, se considera que la formulación electromagnética aplicada ofrece una alta precisión en el cálculo de pérdidas AC cuando se utiliza en COMSOL Multiphysics. Por eso, este modelo se utilizará como referencia para evaluar la precisión y el desempeño del resto de modelos.

7. MODELO SIMPLIFICADO (1)

En esta sección se describe un método simplificado para calcular las pérdidas AC. Está basado en las siguientes simplificaciones:

1. *Cualquier campo eléctrico en el superconductor por muy pequeño que sea generará una densidad de corriente crítica.*
2. *El campo magnético generado por la distribución de corriente en la bobina al circular una intensidad se puede aproximar al campo que generaría esa intensidad si la densidad de corriente se distribuyese de manera uniforme.*

A continuación, se explicará el origen y las consecuencias de las premisas anteriores.

La primera simplificación surge de asumir que el exponente n de la expresión de la resistividad del superconductor se considera lo suficientemente elevado como para considerarlo infinito. Matemáticamente esta idea se puede expresar como:

$$|J| = \begin{cases} J_c & \forall |E| > 0 \\ |J| < J_c & \forall |E| = 0 \end{cases} \quad (E.27)$$

$$J = |J| \cdot \frac{E}{|E|}$$

Esta simplificación es la forma más general de la teoría CSM (Critical State Model), que ha sido ampliamente utilizada para llegar a expresiones analíticas en el cálculo de pérdidas AC [22]. La idea detrás de considerar esta simplificación pasa por transformar la geometría compleja de la bobina en una composición de geometrías más sencillas para las que existen expresiones analíticas de las pérdidas AC.

Por otra parte, la segunda premisa permite desacoplar el problema en tantos como espiras haya en la bobina. En efecto, al conocer a priori la intensidad en la bobina, es posible calcular también a priori el campo magnético en cada punto del espacio durante todo el transitorio eléctrico, asumiendo que la intensidad circula uniformemente. Por tanto, el problema queda

reducido a calcular las pérdidas generadas por una espira superconductora sometida a un campo magnético variable conocido.

La metodología para calcular las pérdidas una vez definida la geometría de la bobina y la intensidad es la siguiente:

1. Cálculo del campo magnético en el contorno de cada espira para todo instante de tiempo. Para ello se utilizará el software Quickfield. Después, se traspasarán los valores a Matlab para su procesado.
2. Transformación de la geometría de la bobina en geometrías más sencillas.
3. Cálculo de pérdidas AC.

En los siguientes subapartados se desarrollarán en detalle cada uno de estos puntos.

CÁLCULO DEL CAMPO MAGNÉTICO

Para calcular el campo magnético en el espacio a lo largo del tiempo, se ha construido la geometría del problema en QuickField. Después, se ha resuelto el problema de magnetoestática al imponer que por la geometría circula la intensidad pico del transitorio eléctrico. Las espiras se han tratado como una única espira por la que circula toda la corriente de manera uniforme. Se ha aprovechado la simetría del problema para resolver solo el pancake superior.

Dado que la permeabilidad del aire y del superconductor son constantes, el campo magnético en cada punto será proporcional a la intensidad. Por tanto, para calcular el campo magnético a lo largo del tiempo basta con resolver un instante.

El traspaso de los valores de campo calculados con QuickField a Matlab es un proceso lento computacionalmente. El número de valores a exportar debe escogerse con cuidado. Se ha decidido para cada espira del pancake superior exportar 3 valores:

- Para $z = 0 \text{ mm}$: el campo magnético en z (B_{z0}).
- Para $z = 5 \text{ mm}$: el campo magnético en z (B_{z1}) y en r (B_{r1}).

Nótese que el campo magnético en r para $z = 0$ es 0 por la simetría del problema.

Los valores de campo intermedios comprendidos entre $z = 0$ y $z = 5 \text{ mm}$ pueden calcularse por interpolación lineal aprovechando que el campo evoluciona de manera prácticamente lineal en la dirección z . Además, se ha considerado que, dado que la espira tiene un espesor pequeño, el contorno interno y externo de cada espira perciben el mismo campo externo.

Por último, para calcular los valores de campo para el resto de instantes de tiempo, se debe emplear la expresión de la intensidad aplicada y la relación constante que existe en cada punto entre el campo y la intensidad. Por tanto, se tiene que cada espira está sometida a las siguientes condiciones de contorno:

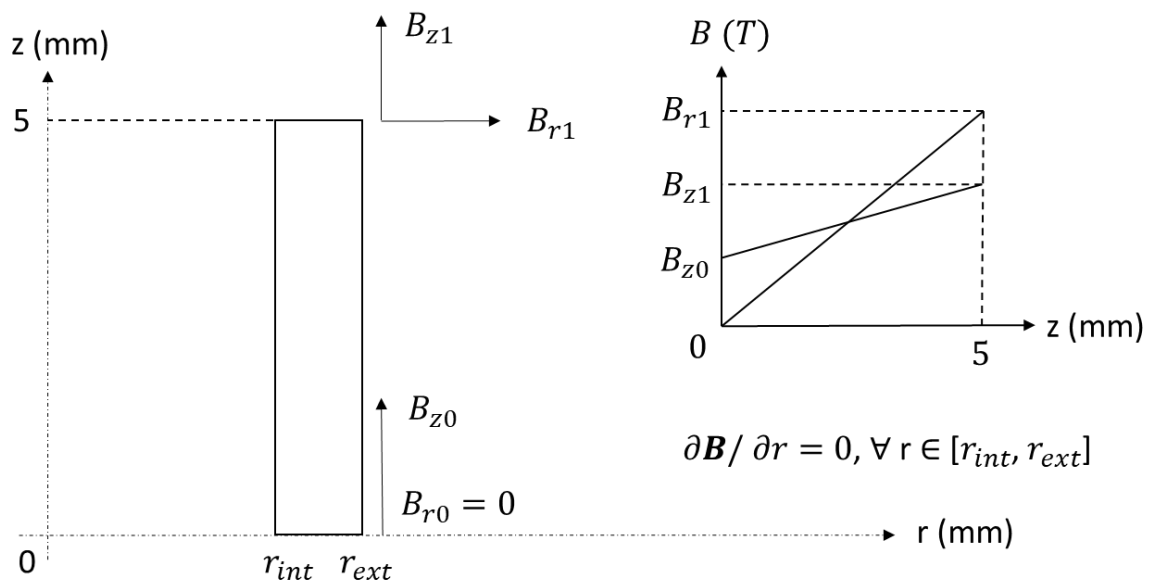


Figura 9. Condiciones de contorno en una espira

Donde los subíndices 0 y 1 en la Figura 9 indican que el punto donde se está evaluando la componente del campo magnético corresponde al extremo inferior y superior de la cinta respectivamente.

El hecho de asumir que el valor de campo apenas varía de la cara interna a la externa de la espira, supone una pérdida de precisión importante a la hora de establecer que por cada espira

debe circular la intensidad impuesta. Esta condición viene dada para todo instante de tiempo por:

$$\oint_{\partial S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I \quad (E. 28)$$

Donde ∂S es el contorno de la espira. En efecto, si se desprecia la variación de B_z en r , se estaría teniendo en cuenta únicamente la contribución del campo B_r a lo largo del contorno de la espira para calcular la intensidad circulante.

Sin embargo, se ha comprobado que cuanto mayor es el número de espiras de la bobina, el campo magnético al que se ve sometido cada espira es debido en mayor medida al campo que generan el resto de espiras y no debido al campo auto inducido por la propia espira.

Esto se ha podido confirmar en QuickField para la geometría de estudio comparando los valores de campo cuando se simulan todas las espiras a cuando se simula solo una. En general, en este caso, el campo auto inducido representa el 10% del módulo del campo total que se generaría en el caso en el que se simulasen todas las espiras.

Esto quiere decir que las pérdidas generadas en cada espira serán principalmente debido al hecho de estar sometidas a un campo magnético variable irrotacional, por lo que la pérdida de precisión en la condición de la intensidad no debería tener un efecto importante.

TRANSFORMACIÓN DE LA GEOMETRÍA

La aplicación de la teoría CSM en geometrías sencillas ha permitido obtener expresiones analíticas para el cálculo de pérdidas AC cuando estas son sometidas a un campo magnético variable y/o al circular por ellas una intensidad. Caben destacar los siguientes casos, los cuales se muestran en la Figura 10.

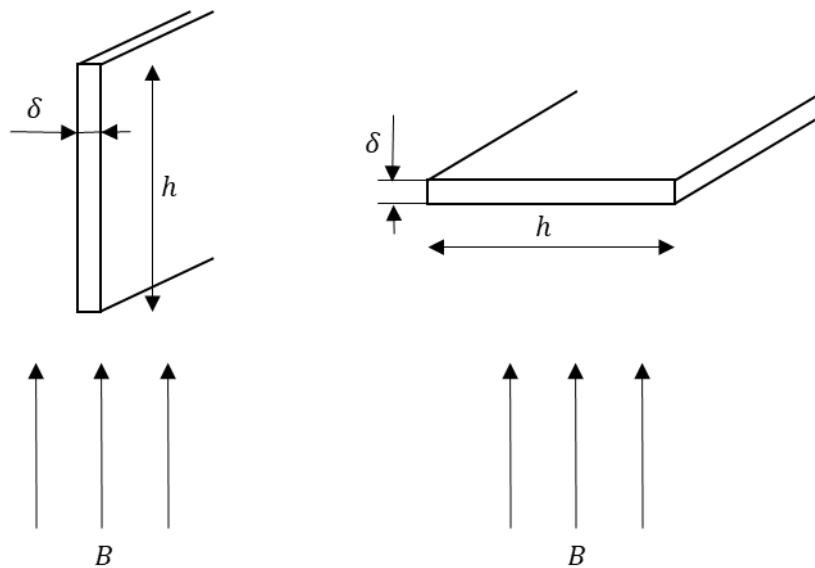


Figura 10. Geometrías sencillas para las que existen expresiones analíticas

Como se observa, en la Figura 10 se muestran los casos de una cinta infinitamente larga sometida a un campo magnético variable uniforme cuando actúa perpendicular o paralelo al espesor. No existen expresiones analíticas para las pérdidas debido a la aplicación de campos oblicuos a una cinta. Estas expresiones analíticas se desarrollan asumiendo que $L \gg \delta$.

Por otro lado, la geometría de la bobina de estudio cumple que el radio interno de cada espira es mucho mayor que su espesor, lo que sugiere poder despreciar la curvatura de la cinta y tratarla como una cinta recta.

Por otra parte, también se cumple que la altura de la cinta es mucho mayor que su espesor, por lo que la cinta podría tratarse como una cinta infinita no solo en la dirección azimutal, sino también en la dirección z.

Por último, dado que las expresiones analíticas solo trabajan con campos uniformes, es necesario trabajar con un valor de campo magnético uniforme equivalente que produzca las mismas pérdidas que el real. Para su cálculo se ha utilizado el valor medio del campo calculado como aproximación. En la Figura 11 se muestran de manera esquemática estas implicaciones sobre una espira de radio R .

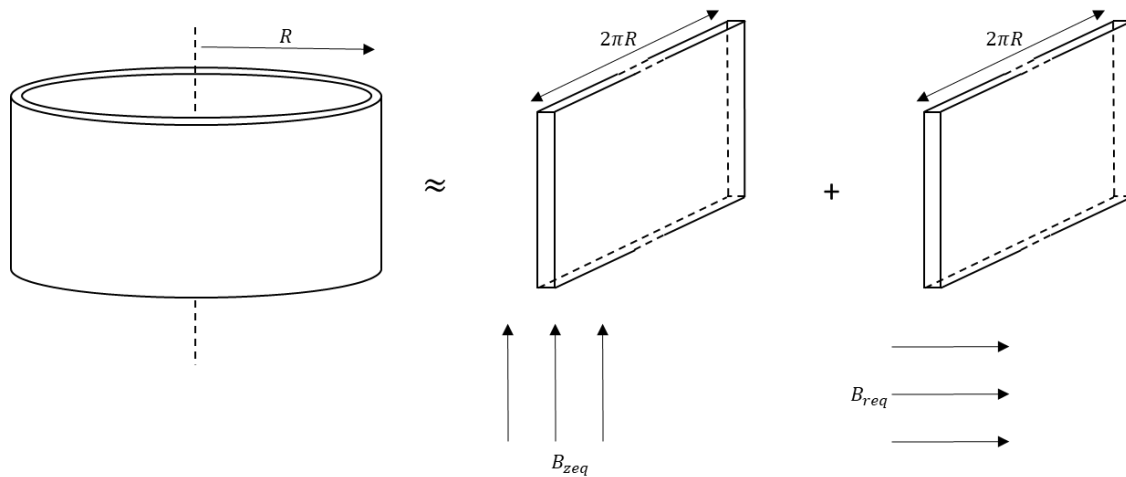


Figura 11. Transformación de una espira en una cinta infinita

Donde B_{zeq} y B_{req} son el campo magnético equivalente en z y en r respectivamente al que está sometida la cinta infinita. Dada la evolución lineal del campo magnético en el espacio se tiene que B_{zeq} y B_{req} son simplemente:

$$B_{zeq} = \frac{B_{z1} + B_{z0}}{2} \quad (E. 29)$$

$$B_{req} = \frac{B_{r1}}{2} \quad (E. 30)$$

Por tanto, se deduce que una cinta curva sometida a un campo oblicuo no uniforme puede tratarse como una cinta recta infinita sometida a un campo magnético uniforme paralelo y perpendicular. Las expresiones analíticas que se utilizarán serán referidas a estos casos.

Dado que la intensidad por la bobina tiene forma sinusoidal, el campo magnético equivalente al que se somete cada espira tiene la siguiente secuencia:

$$0 \rightarrow H_m \rightarrow 0 \rightarrow -H_m \rightarrow 0 \quad (E. 31)$$

Donde H_m es el valor máximo de intensidad de campo magnético equivalente que se alcanza. En base a esta secuencia se tiene que la expresión de las pérdidas AC por unidad de volumen generadas en una cinta infinitamente larga debido a un campo paralelo es [22]:

$$e_{pa} = \begin{cases} \frac{2\mu_0 H_m^3}{3 H_p} & (0 \leq H_m \leq H_p) \\ 2\mu_0 H_p H_m \left(1 - \frac{2H_p}{3H_p}\right) & (H_m \geq H_p) \end{cases} \quad (E. 32)$$

Donde:

$$H_p = \frac{J_c \delta}{2} \quad (E. 33)$$

Por otra parte, la expresión de las pérdidas AC por unidad de volumen generadas en una cinta infinitamente larga debido a un campo perpendicular es [22]:

$$e_{per} = \mu_0 H_p H_m \left(\frac{h}{\delta}\right) \left[\frac{2H_p}{H_m} \ln \left(\cosh \left(\frac{H_m}{H_p} \right) \right) - \tanh \left(\frac{H_m}{H_p} \right) \right] \quad (E. 34)$$

Donde:

$$H_p = \frac{J_c h}{2} \quad (E. 35)$$

Cabe destacar que estas expresiones han sido deducidas asumiendo que J_c es constante. El valor de J_c que se ha utilizado en cada espira ha sido el correspondiente al módulo del campo magnético equivalente y al valor medio de su ángulo de orientación.

CÁLCULO DE PÉRDIDAS Y EVALUACIÓN DEL MODELO

La naturaleza no lineal del problema no permite calcular las pérdidas generadas por una cinta sometida a un campo oblicuo como la suma de las pérdidas debido a las componentes del campo por separado (paralela y perpendicular).

Sin embargo, se ha hecho una estimación del valor de las pérdidas para valores de orientación del campo intermedios aprovechando que se conocen las expresiones de las pérdidas generadas por un campo paralelo y perpendicular respectivamente. En efecto, siendo θ el ángulo de incidencia del campo respecto al superconductor, se pueden definir varias maneras de estimar las pérdidas por unidad de volumen para un campo oblicuo:

$$e_0 = e_{pa} + \frac{2(e_{per} - e_{pa})}{\pi} \theta \quad (E. 36)$$

$$e_0 = e_{pa} \cos(\theta) + e_{per} \sin(\theta) \quad (E. 37)$$

En ambas formulaciones se cumple que para un campo paralelo donde θ es nulo, el valor de las pérdidas es e_{pa} mientras que para un campo perpendicular donde θ es $\pi/2$, el valor de las pérdidas es e_{per} . Nótese que el dominio de θ es $[0, \pi/2]$ por lo que cualquier orientación que escape de este intervalo deberá transformarse en su dirección equivalente del primer cuadrante.

Finalmente, para calcular el calor generado en la bobina debe evaluarse la siguiente expresión:

$$Q = \sum_{\text{espiras}} e_o 2\pi R_e \delta h \quad (E. 38)$$

Donde el sumatorio abarca todas las espiras y R_e representa el radio de cada espira.

A continuación, se discutirán las ventajas y desventajas del modelo para llegar a una conclusión sobre su desempeño:

Entre las principales ventajas destacan:

- Cálculo rápido de pérdidas AC (pocos segundos).
- Fácil definición de la geometría.
- Código simple y fácil de manipular.

Entre las principales desventajas destacan:

- Cálculo impreciso de pérdidas AC.
- No ofrece información sobre la evolución de las pérdidas a lo largo del tiempo (no es posible calcular la potencia a lo largo del tiempo).
- Poca flexibilidad a la hora de definir otros transitorios: Las expresiones analíticas están calculadas basadas en una secuencia de variación de campo determinada. En caso de que se quieran probar otras secuencias, estas pueden no existir en la literatura. En caso de que existan, requiere modificar el código.
- Utilización de la teoría CSM para modelar naturaleza del superconductor. No se tiene en cuenta la naturaleza exponencial del campo eléctrico del superconductor. El exponente n puede jugar un papel importante en las pérdidas generadas.
- No se tiene en cuenta la variación tanto espacial como temporal de J_c para cada espira.
- No se tiene en cuenta el efecto borde de las espiras por el hecho de no ser infinitas.
- No se tiene en cuenta la influencia de la distribución de corriente en el campo magnético generado.
- La versión estudiantil del software QuickField, que es la que se está utilizando, establece un número máximo de elementos finitos de 255. Esto supone trabajar como punto de partida con valores de campo con ciertos errores de precisión, ya que la cantidad de elementos no es lo suficientemente grande.
- Numerosas simplificaciones basadas en interpolaciones, utilización de valores medios o en grandes diferencias de órdenes de magnitud.

Las escasas ventajas del modelo en comparación con el número y la gravedad de las desventajas suponen que este modelo no sea adecuado para el cálculo de pérdidas AC en

geometrías complejas, lo que supone que no merezca la pena discutir los resultados obtenidos.

En el siguiente capítulo, se desarrollará un enfoque distinto para mejorar el modelo anterior e intentar resolver los inconvenientes más graves.

8. MODELO SIMPLIFICADO (2)

En este modelo se buscará tener en cuenta la naturaleza exponencial de la resistividad del superconductor, aumentar la flexibilidad de los transitorios que se puedan simular y calcular la evolución de las pérdidas a lo largo del tiempo.

Para ello, se prescindirá de la utilización de expresiones analíticas ya existentes, para apostar por dividir el problema en elementos finitos y resolverlo numéricamente.

La metodología que se seguirá para construir este nuevo modelo está basada en los siguientes pasos:

- Cálculo del campo magnético y de J_c en el contorno de cada espira a lo largo del tiempo con QuickField.
- Planteamiento y resolución del problema mediante su división en elementos finitos.
- Análisis de resultados y evaluación del modelo.

A continuación, se explicarán en detalle estos puntos.

CÁLCULO DEL CAMPO MAGNÉTICO Y DE J_c

Al igual que en el modelo anterior, el campo magnético se calcula en el contorno de cada espira asumiendo que la intensidad circula de manera uniforme por todas las espiras. La metodología para calcular el campo magnético es idéntica a la del modelo anterior. Por tanto, se tiene que las condiciones de contorno para cada espira son idénticas a las mostradas en la Figura 9.

Para calcular las pérdidas AC de manera numérica, como se verá más adelante, es necesario conocer para cada espira, para cualquier posición de su contorno z y para cualquier instante de tiempo t , los valores de campo magnético y de J_c . Para ello ha sido necesario construir una función en Matlab que interpole tanto en el tiempo como en el espacio los valores de campo magnético importados de QuickField.

El esquema del funcionamiento de esta función se representa en la Figura 12:

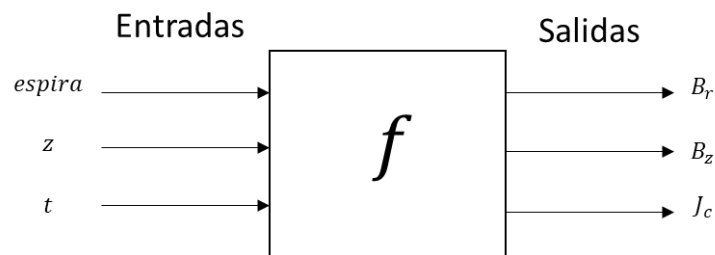


Figura 12. Esquema de entradas y salidas de la función

Nótese que la función no tiene como entrada la coordenada r de la espira. Esto es debido al hecho de considerar que el espesor de la cinta es lo suficientemente pequeño como para asumir que no existe una variación significativa de campo magnético ni de J_c en esa dirección.

PLANTEAMIENTO Y RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA

El planteamiento utilizado para resolver el problema numéricamente está basado en el trabajo desarrollado por Simon Otten y Francesco Grilli [23], donde se propone un método rápido para calcular pérdidas AC. Este modelo ha sido validado para un caso sencillo de una barra superconductora sometida a un campo magnético uniforme variable en el tiempo.

A continuación, se explicará este planteamiento con las adecuadas modificaciones para resolver la geometría de estudio. En primer lugar, es necesario dividir cada espira en elementos finitos. En este caso, dada la simetría del problema cada espira se ha dividido en elementos finitos con simetría de revolución de sección rectangular, tal y como muestra la Figura 13.

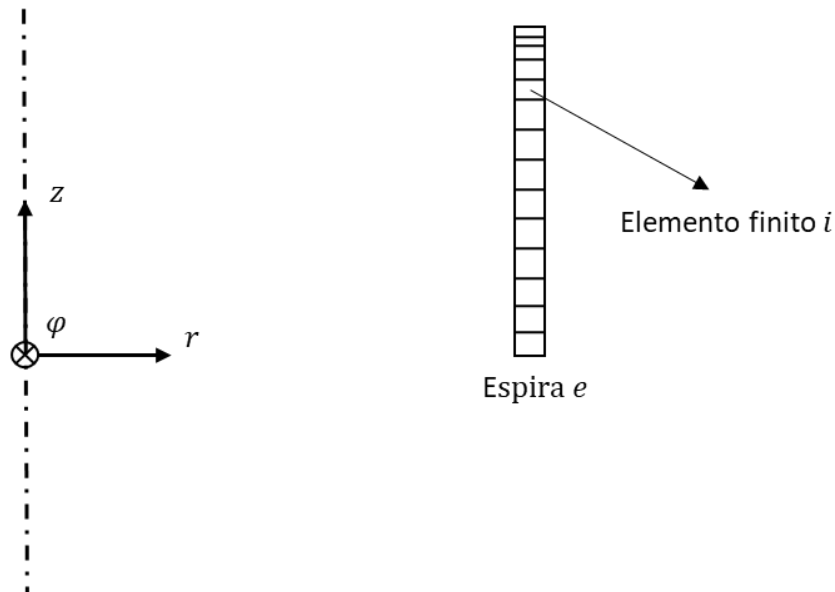


Figura 13. Elemento finito en una espira

Cada espira se ha dividido en el mismo número de elementos finitos a lo largo de la dirección z . Dado el pequeño espesor de la cinta, se ha decidido no dividir la cinta a lo largo de la dirección r . El número de elementos finitos en los que se ha dividido cada espira se denotará por N . Para denotar un elemento finito dentro de una espira e se utilizarán los subíndices i o j . Por tanto, el dominio de estos subíndices abarca los valores enteros desde 1 hasta N inclusive. Los elementos finitos se han construido de tal manera que van siendo cada vez más pequeños a medida que están más cerca de los bordes externos, tal y como se muestra en la Figura 13. El objetivo es predecir con mayor precisión el efecto borde de las espiras.

En cada elemento finito se ha aplicado la ecuación general de electromagnetismo que relaciona el potencial vector magnético \mathbf{A} con el campo eléctrico \mathbf{E} y el potencial escalar eléctrico $\nabla\phi$:

$$\frac{\partial \mathbf{A}_{ind}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathbf{A}_{ext}}{\partial t} - \mathbf{E} - \nabla\phi \quad (E. 39)$$

Donde el vector potencial magnético se ha dividido en dos términos (\mathbf{A}_{ind} y \mathbf{A}_{ext}).

Dado un elemento finito i en una espira e , \mathbf{A}_{ind} representa el potencial vector magnético inducido por todos los elementos de esa espira (incluido el que se está evaluando).

El término \mathbf{A}_{ext} , en cambio, representa el vector potencial magnético en el elemento finito i de la espira e debido a todos los elementos finitos del resto de espiras.

Por otra parte, desarrollando las ecuaciones de Maxwell de magneto-estática se puede llegar a la siguiente solución del potencial vector magnético en el espacio:

$$A(r)\hat{\phi} = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{J\hat{\phi}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV \quad (E. 40)$$

Donde V representa el volumen de todo el espacio, \mathbf{r}' el vector posición desde el sistema de coordenadas a un punto dentro del volumen V , $\hat{\phi}$ el vector unitario azimutal y \mathbf{r} el vector posición donde se quiere evaluar el potencial vector magnético. Nótese que el potencial vector magnético solo tiene una componente azimutal debido a la simetría del problema (\mathbf{J} solo tiene esa componente).

Por otra parte, se puede demostrar que el potencial escalar eléctrico en una espira por la que circula una corriente solo varía en la dirección de la intensidad [12]. Para garantizar que por cada espira de la bobina circule la intensidad del transitorio, se debe definir un $\nabla\phi$ adecuado que sea común a todos los elementos finitos de una misma espira.

En [23] se ha propuesto una expresión de $\nabla\phi$ para imponer esta condición que se ha visto que ofrece buenos resultados. Aplicada a la geometría de estudio se tiene que:

$$\nabla\phi_e = \gamma \left(I(t) - \sum_{i=1}^N J_{ei} dS_{ei} \right) \quad (E. 41)$$

Donde el subíndice e en el término $\nabla\phi_e$ se ha utilizado para indicar el potencial escalar eléctrico referente a la espira e . Por otra parte, dS_{ei} representa el área de la sección del elemento finito i en la espira e mientras que $I(t)$ es la intensidad en función del tiempo t

que se quiere imponer. De manera similar, el término J_{ei} representa la densidad de corriente del elemento finito i perteneciente a la espira e .

Por último, γ es una constante que se debe establecer lo suficientemente grande para que el término entre paréntesis se haga prácticamente nulo durante la resolución. Este término representa el error entre la intensidad que se quiere imponer y la que realmente circula por la espira. Por tanto, cuanto más cercano se encuentre a 0 mejor.

Agrupando estas ecuaciones y junto con la expresión exponencial del campo eléctrico del superconductor se tiene que:

$$\sum_{j=1}^N \left(K_{eij} \frac{dJ_{ej}}{dt} \right) = - \left(\frac{\partial A_{extei}}{\partial t} + E_c \frac{J_{ei}}{J_{cei}} \left| \frac{J_{ei}}{J_{cei}} \right|^{n-1} + \gamma \left(I(t) - \sum_{i=1}^N J_{ei} dS_{ei} \right) \right) \quad (E. 42)$$

Esta expresión es la ecuación final que se aplicará a cada elemento finito i para cada espira e . Al llevarlo a cabo, se llega a un sistema de ecuaciones diferenciales con un número de ecuaciones igual al de incógnitas, las cuales son las densidades de corriente de cada elemento de cada espira (J_{ei}). Nótese que el hecho de que el campo magnético se sepa con anterioridad, supone que cada espira puede resolverse de manera independiente teniendo en cuenta sus particulares condiciones de contorno. Esto es especialmente importante ya que permite desacoplar el sistema de ecuaciones global en tantos subsistemas independientes como espiras se tenga.

Sin embargo, se deben destacar los siguientes puntos:

1. Los términos K_{eij} vienen dados por:

$$K_{eij} = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_{V_{ej}} \frac{1}{|\mathbf{r}_{ei} - \mathbf{r}'_{ej}|} dV \quad (E. 43)$$

Donde V_{ej} es el volumen del elemento finito j perteneciente a la espira e , \mathbf{r}_{ei} es el vector posición desde el sistema de coordenadas hasta el punto medio del elemento i de la espira e y \mathbf{r}'_{ej} es el vector posición desde el sistema de coordenadas a cualquier

punto en el interior del volumen V_{ej} . Como se aprecia, K_{ej} son términos que dependen exclusivamente de la geometría del problema. Estas integrales triples se han calculado en Matlab de manera numérica de la siguiente manera:

En primer lugar, se ha integrado de manera analítica respecto a la coordenada axial. Después, dado que el intervalo de integración a lo largo de la coordenada radial es muy pequeño, su integración se ha realizado analíticamente empleando la regla de 1/3 de Simpson [24]. Finalmente, es necesario integrar numéricamente a lo largo de la coordenada azimutal.

En los casos donde \mathbf{r}_{ei} es muy similar a \mathbf{r}'_{ej} , pueden aparecer problemas de convergencia o valores complejos. El tratamiento en estos casos se ha analizado de manera independiente para asegurar la convergencia de la integral. En efecto, para estos casos particulares, se ha integrado numéricamente tanto radial como acimutalmente imponiendo una menor tolerancia relativa en el error de integración.

2. El término $\partial A_{ext_{ei}}/\partial t$ es una función que depende del tiempo y se conoce a priori, ya que se conoce el campo magnético en el contorno de cada espira a lo largo del tiempo. Representa la derivada temporal del vector potencial magnético externo al que se ve sometido el elemento finito i de la espira e . Dado que QuickField no proporciona la solución del vector potencial magnético, se han calculado numéricamente $A_{ext_{ei}}$ teniendo en cuenta la definición general del vector potencial magnético. Esta relación viene dada por:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (E. 44)$$

3. Por otra parte, se deduce que la variable J_{ei_c} representa la densidad de corriente crítica para un elemento i de la espira e . Al igual que con el vector potencial magnético externo, este valor se conoce a priori (depende del campo magnético) y depende del tiempo exclusivamente.

Por tanto, el sistema de ecuaciones a resolver es un sistema de ecuaciones de la forma:

$$[K] \frac{d[J]}{dt} = f(t, [J]) \quad (E. 45)$$

Donde $[K]$ representa la matriz de términos K_{eij} y $[J]$ la matriz de incógnitas compuesta por las densidades de corriente de cada elemento. Este tipo de sistema de ecuaciones se ha resuelto en Matlab utilizando un solucionador ODE.

ANÁLISIS DE RESULTADOS Y EVALUACIÓN DEL MODELO

A continuación, se presentan los resultados obtenidos al resolver el sistema de ecuaciones dividiendo cada espira en 30 elementos finitos. Se ha elegido este valor porque se ha comprobado que el resultado de las pérdidas AC es el mismo para un número mayor de elementos finitos. Es decir, dividiendo las espiras en más elementos finitos, no se conseguirá una mayor precisión significativa en los resultados.

Los resultados que se proporcionan ofrecen información acerca de la precisión del modelo para imponer que por cada espira debe circular la intensidad impuesta, la evolución del campo magnético y la potencia generada a lo largo del tiempo.

Así, en la Figura 14 se representa, al igual que en el modelo de COMSOL Multiphysics, la media del valor absoluto de la diferencia entre la intensidad del transitorio y la intensidad de cada espira a lo largo del tiempo.

Por otra parte, junto con el error cometido, se representa la intensidad ideal que debería circular por cada espira. Se aprecia que el error cometido en cada instante de tiempo es insignificante. Esto indica que por cada espira está circulando con gran precisión la intensidad ideal que debería circular.

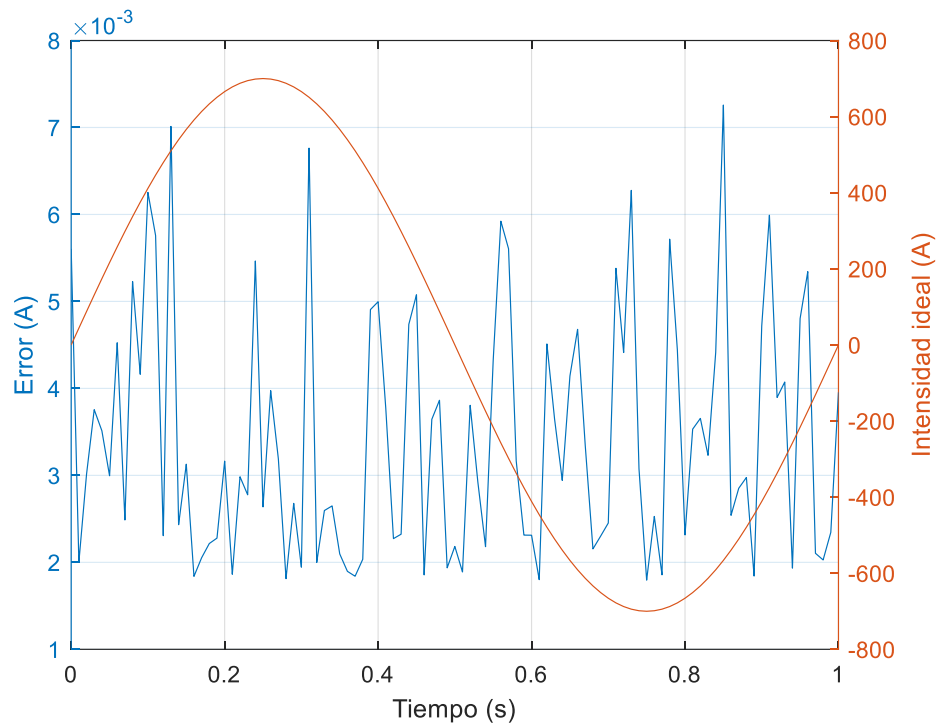


Figura 14. Precisión para imponer la intensidad que debe circular en cada espira

A continuación, se representará la evolución del campo magnético a lo largo del tiempo para para las 40 espiras de la bobina superior de la geometría de estudio dada la simetría del problema. Para ello, primero se muestra el campo magnético en la dirección radial para 0.25 , 0.5 , 0.75 y 1 segundo. Inmediatamente después se representa el campo obtenido por el modelo de COMSOL Multiphysics. Los valores de campo se representan en teslas (T).

De la misma manera, se mostrará el campo magnético en la dirección axial junto con los resultados obtenidos por el modelo de COMSOL Multiphysics.

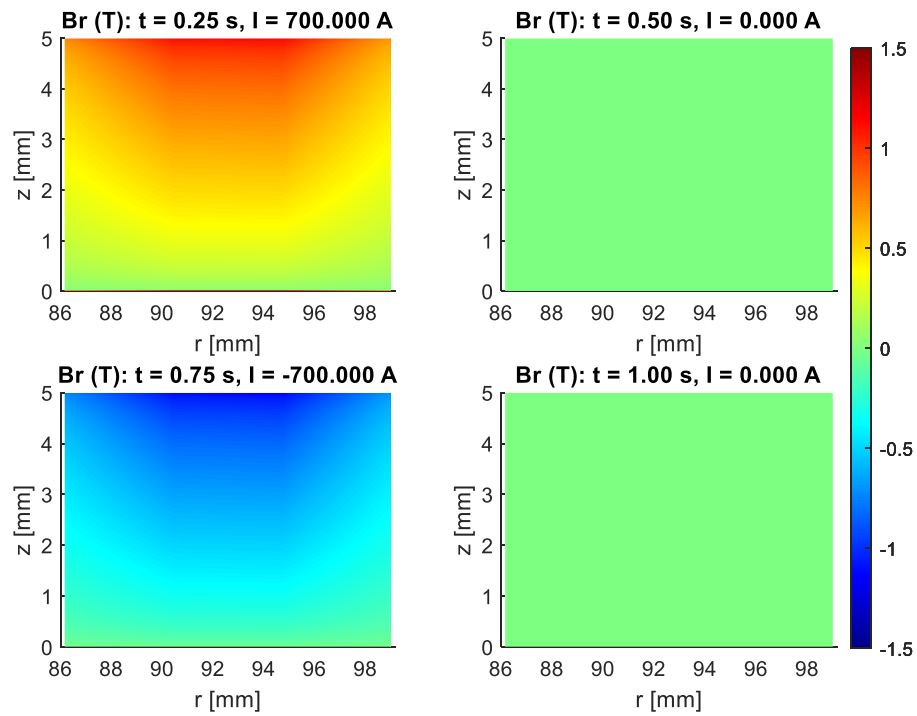


Figura 15. Evolución del campo magnético radial obtenido con Matlab

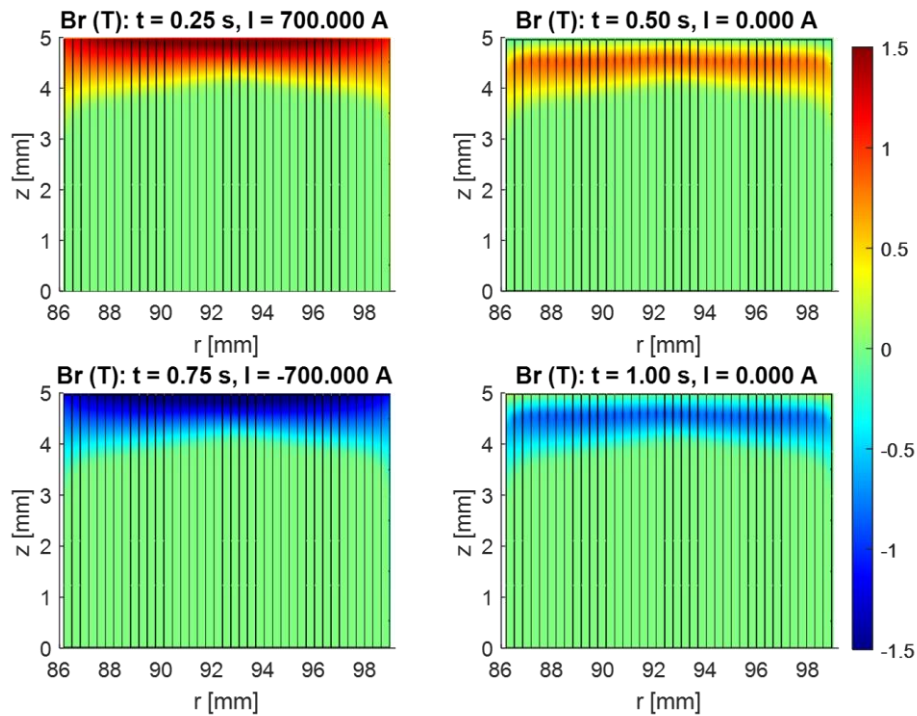


Figura 16. Evolución del campo magnético radial obtenido con COMSOL Multiphysics

Se aprecia que la evolución del campo magnético radial en el modelo de Matlab es lineal a lo largo de la dirección axial en cada espira; empezando en 0 hasta alcanzar su valor máximo o mínimo.

Dado que se ha calculado teniendo en cuenta que la distribución de corriente se distribuye de manera uniforme, el campo se hace nulo en todos los puntos cuando la intensidad neta que circula es nula.

Sin embargo, es interesante analizar que para los instantes de 0.5 o 1 segundos, en el modelo de COMSOL Multiphysics existen zonas donde el campo magnético radial no es nulo a pesar de que por las espiras está circulando una intensidad nula. Este resultado es debido a la aparición de corrientes remanentes en las espiras por la magnetización del superconductor. Es decir, por cada espira existe una distribución de densidad de corriente que, si bien de manera neta supone una intensidad nula por la cinta, de manera local puede no serlo. Como consecuencia, aparece un campo magnético no nulo en ciertas zonas del espacio en estos instantes. Este fenómeno se estudiará más en detalle en el siguiente modelo.

A continuación, se presentan los resultados del campo magnético en la dirección axial:

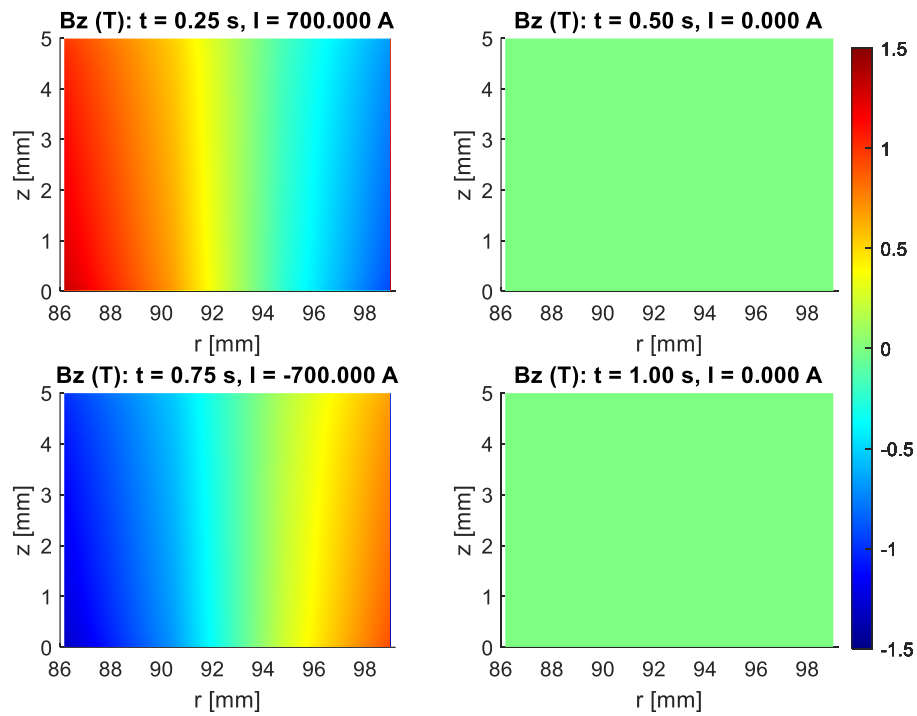


Figura 17. Evolución del campo magnético axial obtenido con Matlab

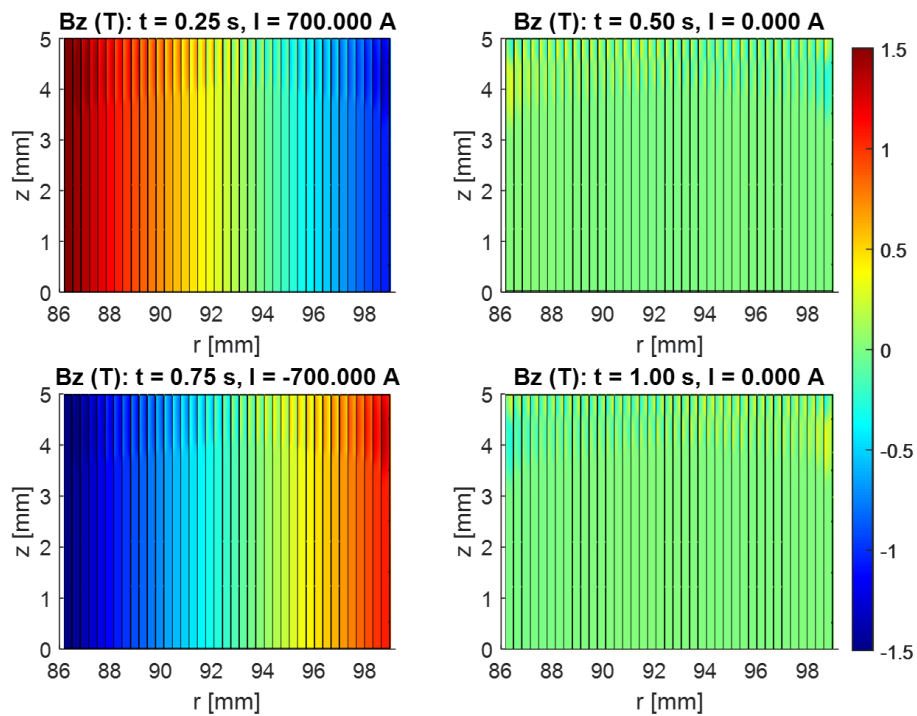


Figura 18. Evolución del campo magnético axial obtenido con COMSOL Multiphysics

En los resultados obtenidos se aprecia que la distribución del campo magnético axial del modelo de Matlab es similar a la obtenida con el modelo de COMSOL Multiphysics. En efecto, puede verse que en el modelo de COMSOL Multiphysics el perfil de campo presenta una naturaleza lineal en la dirección axial, al igual que en el modelo de Matlab. Además, su evolución en la dirección radial es similar en ambos modelos.

Por otra parte, es interesante destacar que, a diferencia de lo que ocurriría con el campo radial, la distribución de densidades de corriente remanentes no genera un campo magnético axial cuando la intensidad neta que circula es nula. Este fenómeno, al igual que el comportamiento de la distribución de densidad de corriente, se discutirá en detalle en el modelo definitivo.

Por último, en la Figura 19 se muestra la evolución temporal de la potencia generada del sistema en W .

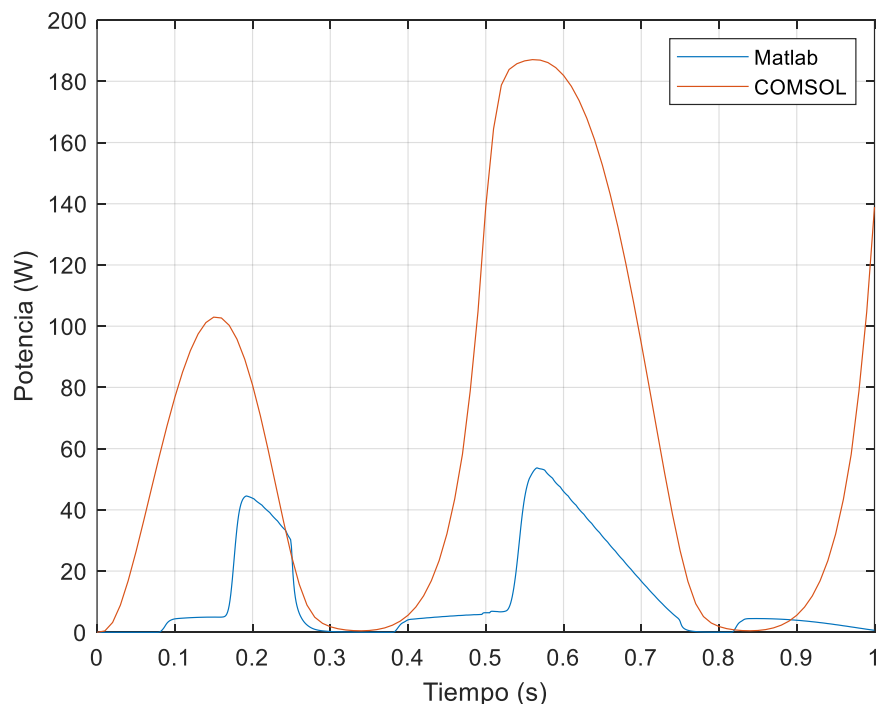


Figura 19. Curvas de potencia del modelo de Matlab y de COMSOL Multiphysics

Se observa que la evolución real de las pérdidas consta de dos máximos claramente diferenciados, junto con un crecimiento significativo al final. El modelo de Matlab ha sido

capaz de proporcionar una cierta intuición acerca de esta evolución, ya que la curva obtenida consta también de dos picos diferenciados, aunque no presenta el crecimiento del final.

Sin embargo, se observa un error a la hora de predecir en qué momentos empiezan y acaban estos picos. También existe una diferencia importante en su forma y orden de magnitud. En vista de estos resultados, se analizarán las ventajas y desventajas del modelo y se elaborará una conclusión acerca de su efectividad.

Entre las principales ventajas destacan:

- Intuición acerca de la forma de la evolución de la potencia generada a lo largo del tiempo.
- Tiempo de ejecución pequeño. El tiempo de ejecución ha sido menor de 5 minutos.
- Flexibilidad a la hora de definir la intensidad del transitorio eléctrico a simular.
- Flexibilidad a la hora de definir la geometría a simular.
- El modelo tiene en cuenta la naturaleza exponencial del superconductor, así como la variación de J_c a lo largo del espacio y del tiempo en función del módulo y orientación del campo magnético.
- Se tiene en cuenta el efecto borde de las espiras por el hecho de no ser infinitas.
- Se han reducido algunas de las simplificaciones respecto al modelo anterior basadas en interpolaciones, la utilización de valores medios o en grandes diferencias de órdenes de magnitud.

Entre las principales desventajas destacan:

- Imprecisión al predecir los instantes que delimitan los picos de potencia, así como su orden de magnitud.
- La utilización de QuickField para el cálculo del campo magnético sigue introduciendo errores en su distribución debido a sus limitaciones.
- No se está teniendo en cuenta la forma de la distribución de corriente en cada espira.
- Existen diferencias entre la distribución obtenida de campo magnético respecto a la calculada en COMSOL Multiphysics, especialmente en la dirección radial.

Se aprecia que este modelo incorpora grandes ventajas frente al modelo anterior. También se deduce que es una buena opción en caso de que se quiera obtener una intuición rápida acerca de la forma que tendría la curva de potencia generada a lo largo del tiempo. Sin embargo, no resulta un modelo eficiente para calcular las pérdidas generadas.

El análisis de resultados deja entrever que la premisa inicial de que “*el campo magnético generado por la distribución de corriente en la bobina al circular una intensidad se puede aproximar al campo que generaría esa intensidad si la densidad de corriente se distribuyese de manera uniforme*” no ofrece una precisión lo suficientemente buena. Esto supone que la distribución de corriente en las espiras no solo juega un papel importante en la distribución del campo, sino también en el valor de las pérdidas. En el siguiente modelo, se tendrá en cuenta este efecto para intentar conseguir mejores resultados.

9. MODELO DEFINITIVO

Tal y como se explicó anteriormente, en este modelo se calcularán las pérdidas AC teniendo en cuenta la forma de la distribución de corriente en cada espira. Tener en cuenta este efecto aumenta notablemente la complejidad y la resolución del problema, ya que supone resolver un sistema de ecuaciones donde todas las espiras están acopladas entre sí.

Por otra parte, requiere calcular el campo magnético en cada elemento finito, debido a la distribución de corriente de todo el sistema en cada instante. Esto implica prescindir de la utilización de QuickField, ya que el campo debe calcularse de manera analítica.

La metodología que se seguirá para construir el modelo está basada en los siguientes pasos:

- Modificación del planteamiento matemático del problema anterior.
- Resolución, análisis y evaluación de los resultados del modelo.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Al igual que en el modelo anterior, la geometría del problema se ha dividido en elementos finitos y en cada uno de ellos se ha aplicado la expresión que se utilizó en el modelo anterior. A modo de recordatorio, esta expresión es:

$$\sum_{j=1}^N \left(K_{eij} \frac{dJ_{ej}}{dt} \right) = - \left(\frac{\partial A_{extei}}{\partial t} + E_c \frac{J_{ei}}{J_{cei}} \left| \frac{J_{ei}}{J_{cei}} \right|^{n-1} + \gamma \left(I(t) - \sum_{i=1}^N J_{ei} dS_{ei} \right) \right) \quad (E. 46)$$

Sin embargo, para tener en cuenta la distribución de densidad de corriente, se debe sustituir la derivada temporal del vector potencial magnético externo por el que generaría la distribución de corriente del resto de espiras sobre el elemento finito i contenido en la espira e . Es decir, matemáticamente esta idea se expresa como:

$$\frac{\partial A_{ext_{ei}}}{\partial t} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq e}}^E \sum_{j=1}^N \left(K_{eikj} \frac{dJ_{kj}}{dt} \right) \quad (E. 47)$$

Donde E es el número de espiras totales. Sustituyendo esta relación en la expresión anterior y reorganizando términos se tiene que:

$$\sum_{k=1}^E \sum_{j=1}^N \left(K_{eikj} \frac{dJ_{kj}}{dt} \right) = - \left(E_c \frac{J_{ei}}{J_{c_{ei}}} \left| \frac{J_{ei}}{J_{c_{ei}}} \right|^{n-1} + \gamma \left(I(t) - \sum_{i=1}^N J_{ei} dS_{ei} \right) \right) \quad (E. 48)$$

Esta es la expresión definitiva que se aplicará a cada elemento finito de la geometría, resultando en un sistema con un número de ecuaciones igual al de incógnitas. Al igual que antes, las incógnitas del problema son los términos J_{ei} . Por otro lado, los términos K_{eikj} se definen de manera similar a los términos K_{eij} del modelo anterior. En efecto, se define K_{eikj} como:

$$K_{eikj} = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_{V_{kj}} \frac{1}{|\mathbf{r}_{ei} - \mathbf{r}'_{kj}|} dV \quad (E. 49)$$

Donde V_{kj} es el volumen del elemento finito j perteneciente a la espira k , \mathbf{r}_{ei} es el vector posición desde el sistema de coordenadas hasta el punto medio del elemento i de la espira e y \mathbf{r}'_{kj} es el vector posición desde el sistema de coordenadas a cualquier punto en el interior del volumen V_{kj} . De manera similar al modelo anterior, los términos K_{eikj} dependen exclusivamente de la geometría del problema.

Se aprecia que el sistema de ecuaciones está completamente acoplado, por lo que no se puede dividir en subsistemas más sencillos de resolver.

Por otra parte, es necesario calcular el vector campo magnético en cada elemento, ya que la densidad de corriente crítica en cada punto depende del mismo.

Para ello, se ha empleado la solución general del campo magnético en el espacio generado por una distribución de densidad de corriente arbitraria. La solución viene dada por la ley de

Biot-Savart y se obtiene al resolver de manera general las ecuaciones de Maxwell de magneto-estática [25]. Esta ley resulta útil para expresar el campo magnético en un elemento generado por otro por el que circula una densidad de corriente. En efecto, se tiene que:

$$\mathbf{B}_{eikj} = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_{V_{kj}} \mathbf{J}_{kj} \times \frac{(\mathbf{r}_{ei} - \mathbf{r}'_{kj})}{|\mathbf{r}_{ei} - \mathbf{r}'_{kj}|^3} dV \quad (E. 50)$$

Donde \mathbf{B}_{eikj} es el vector campo magnético en el elemento i perteneciente a la espira e generado por el elemento j perteneciente a la espira k . El término \mathbf{J}_{kj} es la densidad de corriente que circula a través del volumen V_{kj} , siendo el volumen del elemento finito j perteneciente a la espira k . Los términos \mathbf{r}_{ei} y \mathbf{r}'_{kj} se definen de la misma manera que en la ecuación (E. 49).

Por tanto, se deduce que el campo magnético total en el elemento i de la espira e se puede expresar como:

$$\mathbf{B}_{ei} = \sum_{k=1}^E \sum_{j=1}^N \mathbf{M}_{eikj} \mathbf{J}_{kj} \quad (E. 51)$$

Donde:

$$\mathbf{M}_{eikj} = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_{V_{kj}} \hat{\boldsymbol{\phi}} \times \frac{(\mathbf{r}_{ei} - \mathbf{r}'_{kj})}{|\mathbf{r}_{ei} - \mathbf{r}'_{kj}|^3} dV \quad (E. 52)$$

Estas integrales triples se han calculado numéricamente en Matlab de manera similar a como se calcularon los términos K_{eikj} . Se ha prestado atención a aquellos términos donde \mathbf{r}_{ei} coincide con \mathbf{r}'_{kj} , ya que para estos casos la ley de Biot-Savart no es válida. En estos casos, se ha establecido un valor nulo como aproximación.

La expresión del campo magnético en función de todas las densidades de corriente del sistema debe utilizarse para calcular los valores de $J_{c_{ei}}$ para cada punto empleando la expresión presentada en *Propiedades de la cinta superconductora*.

Posteriormente, del mismo modo que en el modelo anterior, se llega a un sistema de ecuaciones igual al número de incógnitas cuya forma es del tipo:

$$[K] \frac{d[J]}{dt} = f(t, [J]) \quad (E. 53)$$

donde $[K]$ representa la matriz de términos K_{eikj} y $[J]$ la matriz de incógnitas compuesta por las densidades de corriente de cada elemento.

Finalmente, se ha resuelto el sistema de ecuaciones con un solucionador de tipo ODE.

ANÁLISIS Y EVALUACIÓN DE RESULTADOS

A continuación, se presentan los resultados obtenidos al resolver el sistema de ecuaciones dividiendo cada espira en 30 elementos finitos. Al igual que en el modelo anterior, se mostrará la precisión del modelo para imponer que por cada vuelta de cinta debe circular la intensidad impuesta, la evolución del campo magnético y la potencia generada a lo largo del tiempo.

Adicionalmente, se ha realizado un estudio de la convergencia y del tiempo de ejecución del modelo en función del número de elementos finitos por espira. Además, se ha mostrado información acerca de la distribución de densidad de corriente para distintos instantes de tiempo.

Así, en la Figura 20 se muestra, al igual que en los modelos previos, la media del valor absoluto de la diferencia entre la intensidad del transitorio y la intensidad de cada espira a lo largo del tiempo.

Además, se compara con la intensidad ideal impuesta. Se deduce que el error cometido es mínimo, por lo que el modelo garantiza de manera excelente que por cada espira circula la intensidad del transitorio.

Por otra parte, aunque no sea un aspecto importante, es curioso observar la forma suave que tiene la curva del error, a diferencia de la curva del error del modelo anterior. Se deduce que el error tiende a hacerse mayor cuando la intensidad que se quiere imponer es más pequeña.

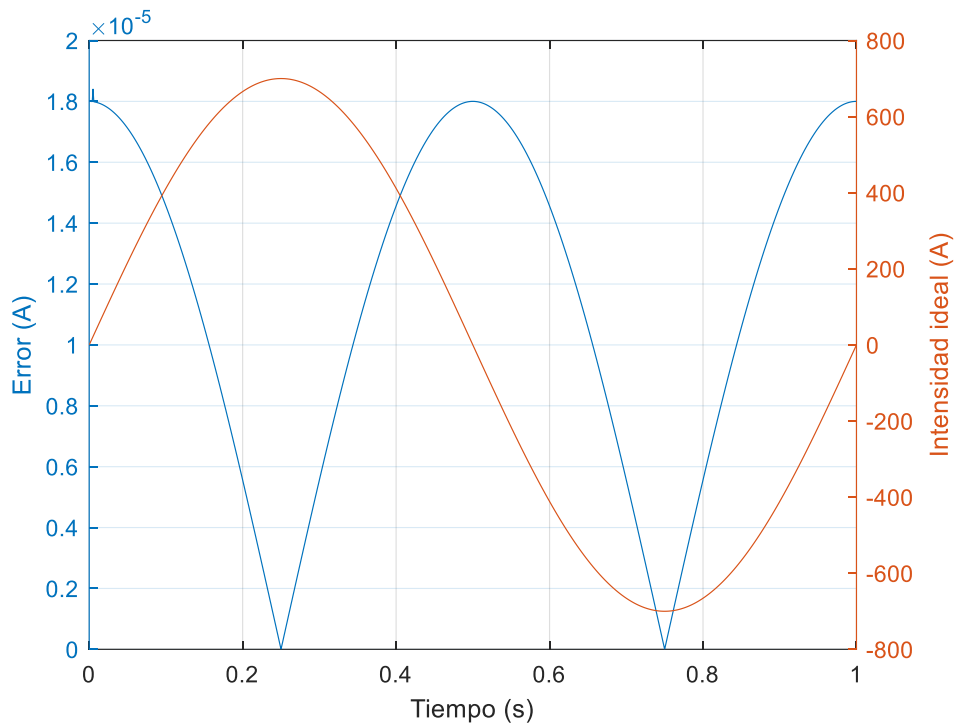


Figura 20. Precisión para imponer la intensidad que debe circular en cada espira

Por otro lado, se muestra a continuación la evolución del campo magnético obtenido en la dirección radial y axial. Al igual que en el modelo anterior, se representan solo los valores de campo de la bobina superior del sistema SMES, dada la simetría del problema.

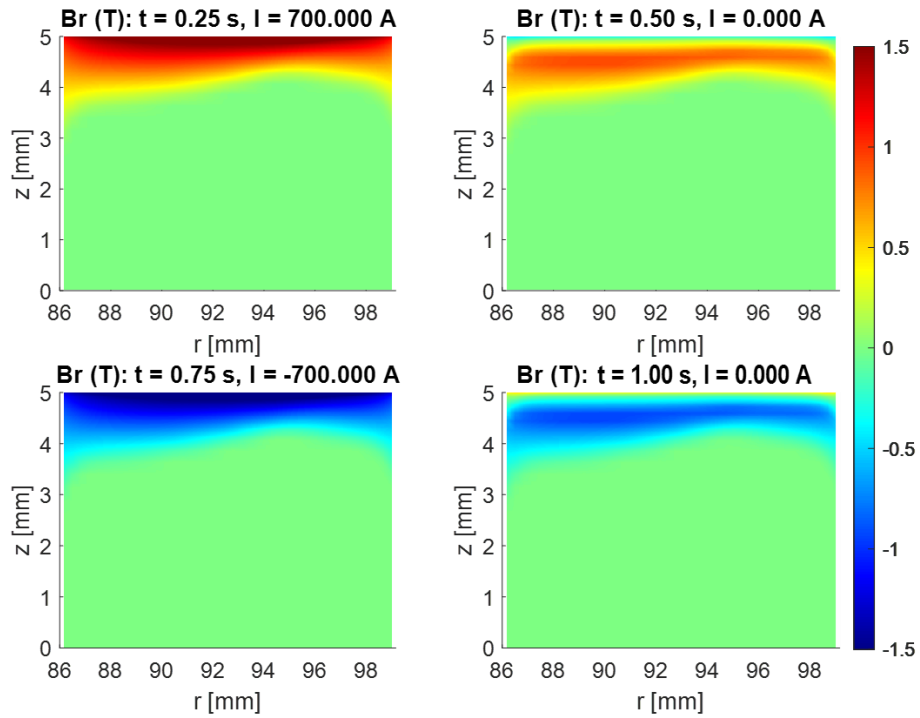


Figura 21. Evolución del campo magnético radial obtenido con Matlab

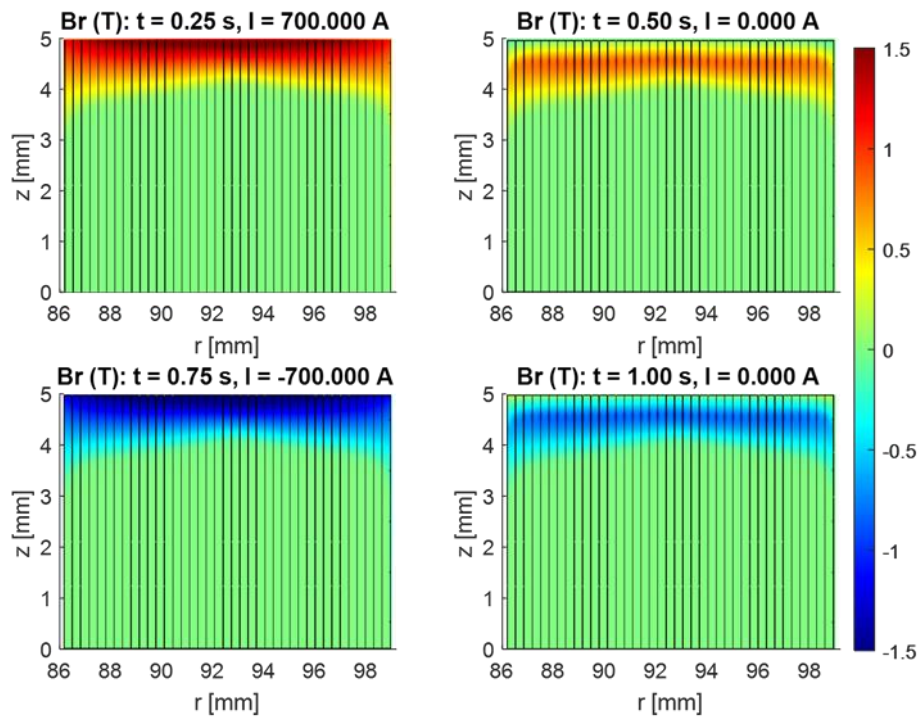


Figura 22. Evolución del campo magnético radial obtenido con COMSOL Multiphysics

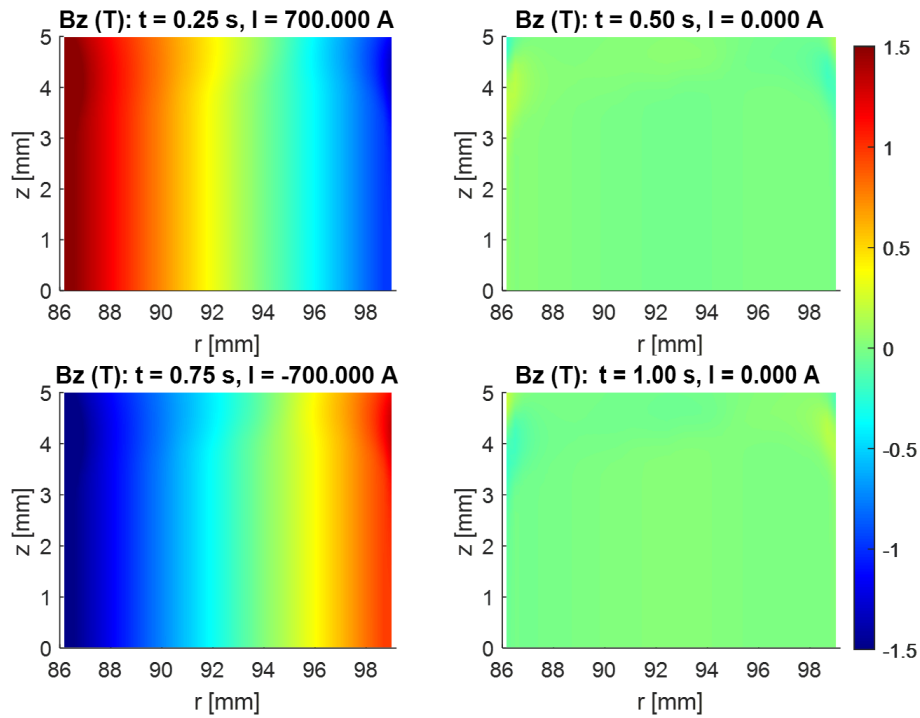


Figura 23. Evolución del campo magnético axial obtenido con Matlab

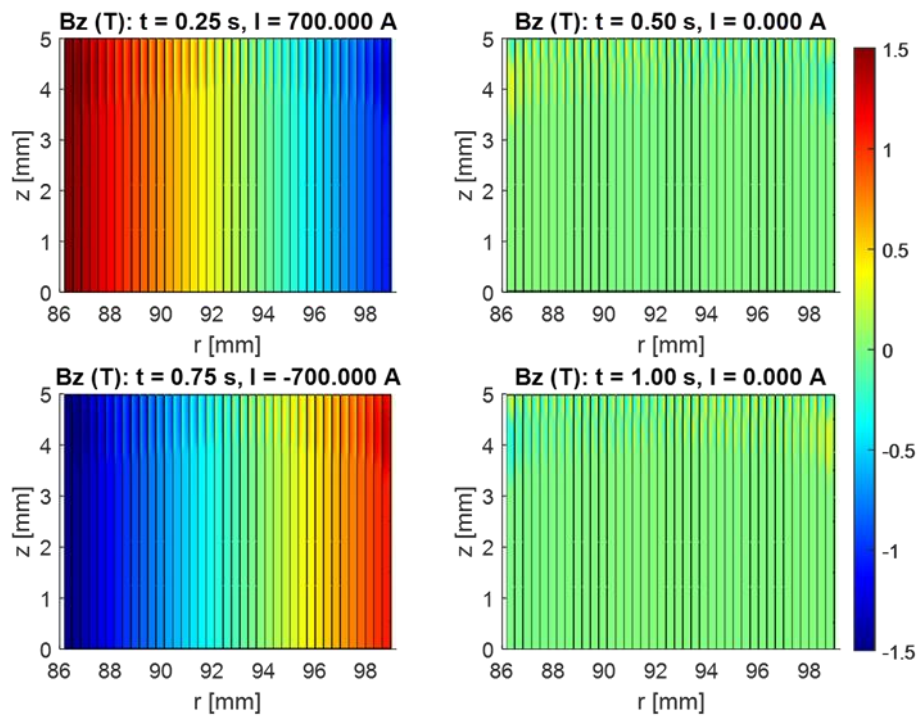


Figura 24. Evolución del campo magnético axial obtenido con COMSOL Multiphysics

En vista de los resultados, se deduce que el modelo es capaz de predecir de manera excelente la evolución del campo magnético en el espacio para los distintos instantes de tiempo. Esto indica que el modelo es capaz de calcular adecuadamente la distribución de corriente a lo largo del tiempo.

En la Figura 25, se muestra la distribución de la densidad de corriente normalizada con la densidad de corriente crítica en la bobina superior para distintos instantes de tiempo.

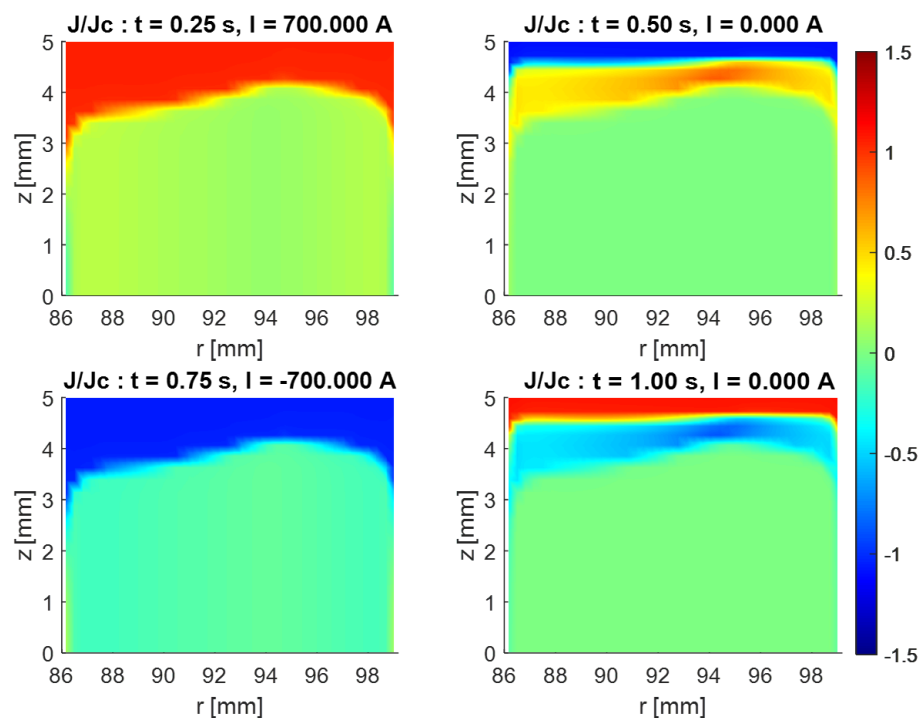


Figura 25. Evolución de la densidad de corriente normalizada obtenida con Matlab

A partir de los resultados, se aprecia que la densidad de corriente tiende a concentrarse en los bordes externos de las espiras y tiende a ser nula en el interior.

Se deduce que, ante un cambio en la intensidad, la densidad de corriente empieza a cambiar en los bordes externos y poco a poco va penetrando hacia el interior de las espiras.

A continuación, se explicará de manera más detallada este comportamiento de la distribución de corriente a lo largo del transitorio:

1. Partiendo de las espiras vírgenes, se empieza a aumentar la intensidad por la bobina. Como consecuencia, la densidad de corriente aumenta en los bordes externos de las espiras y va penetrando a medida que la intensidad aumenta. Este efecto puede verse en la figura correspondiente al instante de 0.25 segundos.

2. Cuando la intensidad comienza a disminuir, empiezan a aparecer densidades de corrientes negativas en los bordes externos que comienzan a penetrar hacia el interior, compensando las densidades positivas ya existentes para, de forma global, disminuir la intensidad. Este efecto puede verse en la figura correspondiente al instante de 0.5 segundos.

Este fenómeno supone la aparición de densidades de corrientes remanentes en el interior del superconductor derivando en situaciones en las que a pesar de que la corriente que circula es nula, existen zonas donde la distribución de corriente no lo es.

En efecto, en este instante se aprecia como en cada espira existen densidades de corriente negativas y positivas. Como es de esperar, estas se compensan unas con otras de manera que la intensidad neta que circula por cada espira es nula.

- 3 Finalmente, la distribución en los instantes de 0.75 segundos y 1 segundo se puede deducir fácilmente una vez entendido el comportamiento de la densidad de corriente en los instantes anteriores.

Resulta interesante reflexionar sobre el motivo por el cual la densidad de corriente y el campo magnético tienen ese comportamiento:

En primer lugar, el hecho de que el flujo magnético que atraviesa la superficie lateral de cada espira es debido al campo magnético radial. Por tanto, las densidades de corriente que aparecen en cada espira pretenderán minimizar la variación temporal de esa componente por la ley de Lenz. Dada la baja resistividad del superconductor, existe una alta sensibilidad entre la variación de flujo y las densidades de corriente inducidas. Dado que la componente radial del campo será elevada en los bordes por la geometría de la bobina, es de esperar que sea en estas zonas donde se induzcan las densidades de corriente más altas. Además, esto supone que el campo radial tiende a hacerse nulo en el interior de las espiras de manera abrupta, dado que la variación de flujo debe ser limitada al verse restringida por la circulación de una determinada intensidad.

A continuación, se muestra un estudio sobre la convergencia del modelo en función del número de elementos finitos en los que se ha dividido cada espira. Este estudio es importante, ya que a mayor número de elementos, mayor será el tiempo de ejecución. Es interesante encontrar el número de elementos mínimos que ofrecen un resultado preciso de las pérdidas, con el objetivo de minimizar el tiempo de ejecución.

Para ello, se han realizado numerosas simulaciones variando el número de elementos. Los resultados obtenidos se muestran la Figura 26, donde se representa el tiempo de ejecución del programa y el calor generado frente al número de elementos. Paralelamente, en la Figura 27 se han representado las curvas de potencia para alguno de estos casos.

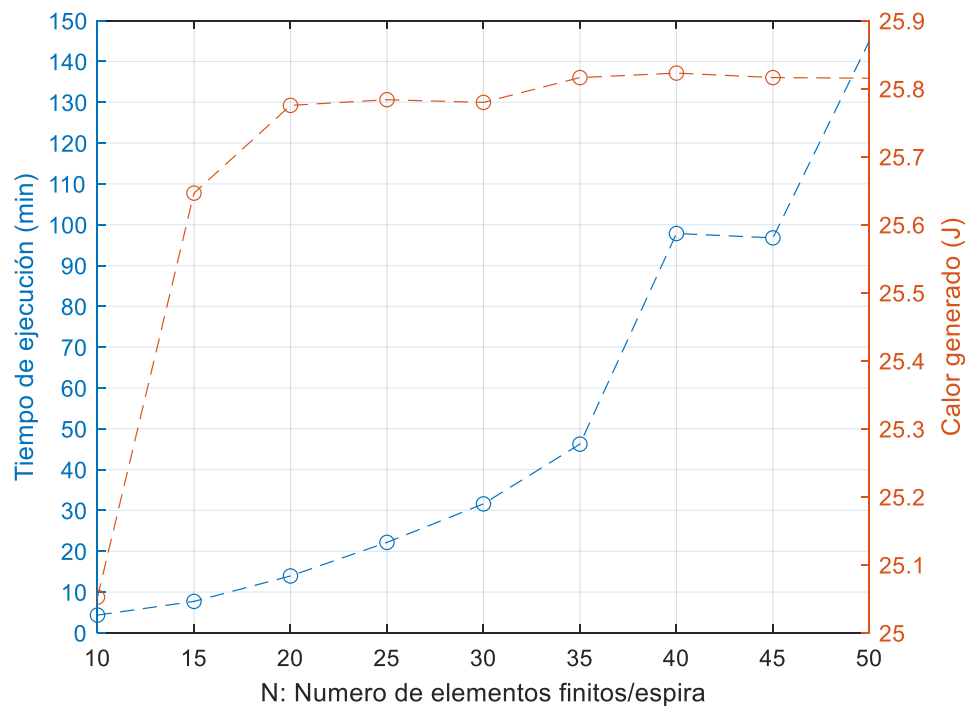


Figura 26. Estudio de la convergencia del modelo

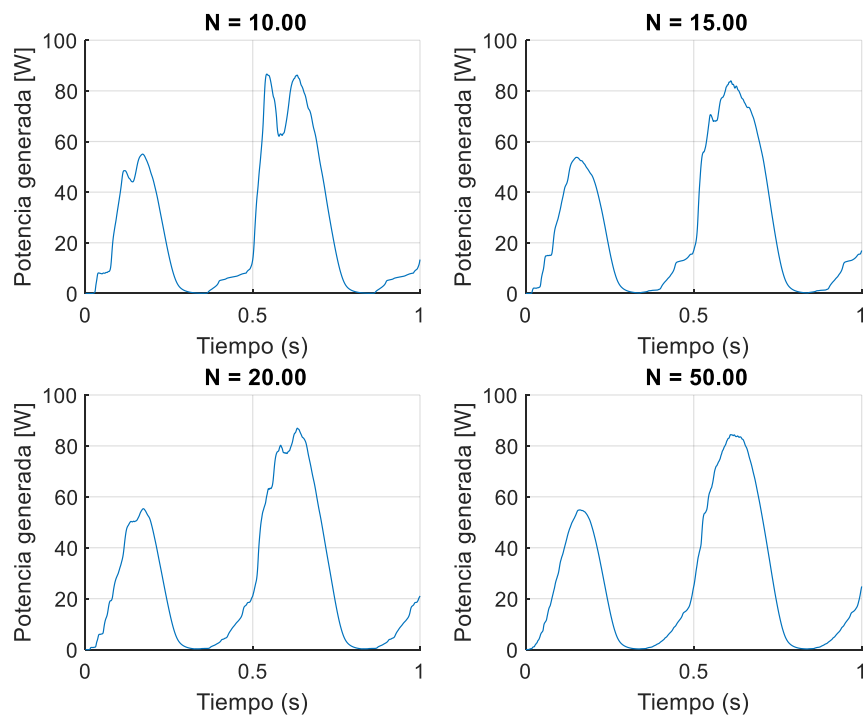


Figura 27. Curvas de potencia para distinto número de elementos finitos

En vista de los resultados, se deduce que un N de 10 ofrece un resultado de las pérdidas con un error de aproximadamente un 3%. Sin embargo, se pierde precisión en el cálculo de la forma de los picos de la curva de potencia, tal y como muestra la Figura 27. Esto sugiere la aparición de ciertos errores de precisión en el cálculo de la distribución de densidad de corriente y del campo magnético en esos instantes. Por ello, en caso de que además de las pérdidas AC quieran calcularse otros resultados (como, por ejemplo, las fuerzas de Lorentz), es más apropiado tratar con un número de elementos finitos mayor.

Un número de elementos finitos igual a 20 supone un buen equilibrio entre el tiempo de ejecución, la precisión del calor generado y la precisión de la forma de la curva de potencia. En efecto, este número de elementos corresponde con el final del codo de la curva del calor generado, ofreciendo una precisión del 99.96%. Además, supone un tiempo razonable de ejecución de 13.93 minutos y una buena precisión en la curva de potencia. Se espera que este número de elementos ofrezca buenos resultados en otras geometrías con otros transitorios.

Por último, no es adecuado trabajar con un número de elementos menor de 10, ya que el solucionador ODE puede no ser capaz de llegar a una solución para todos los instantes de tiempo.

Por otra parte, en la Figura 28 se ha representado el resultado de la curva de potencia obtenida al dividir cada espira en 20 elementos. Paralelamente, se ha representado el resultado del modelo de COMSOL Multiphysics para comparar los resultados.

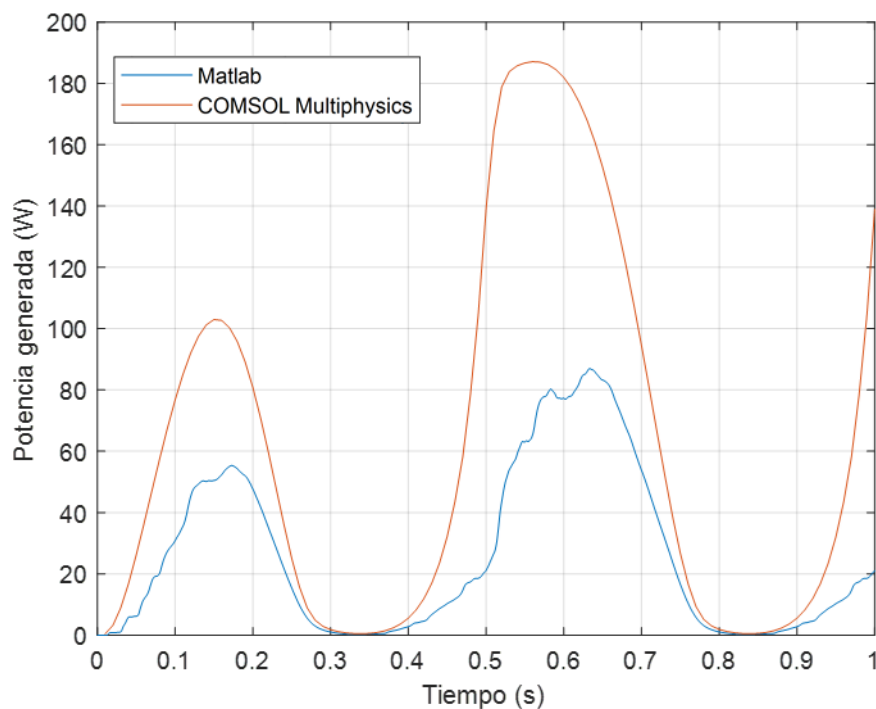


Figura 28. Curvas de potencia del modelo de Matlab y de COMSOL Multiphysics

Se aprecia que el modelo de Matlab predice correctamente la forma de la curva de potencia. Existe una concordancia entre los instantes en los que empiezan y acaban los picos de potencia, así como su forma suave. Además, se ha predicho el crecimiento final de la curva de potencia.

Sin embargo, a primera vista, la diferencia en el orden de magnitud de los picos parece ser elevado. Esto se debe a la gran sensibilidad del campo eléctrico, fruto de su naturaleza exponencial. Para ilustrar este efecto, se ha representado en la Figura 29 la evolución del campo eléctrico del superconductor en función de la densidad de corriente normalizada.

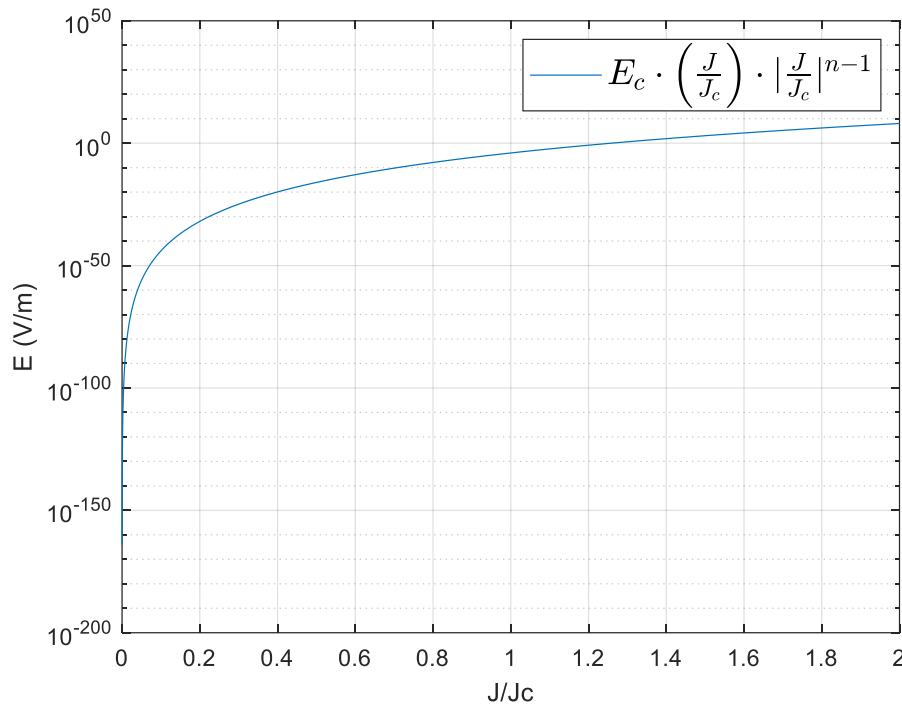


Figura 29. Campo eléctrico en función de la densidad de corriente normalizada

Se observa claramente la alta sensibilidad que tiene el campo eléctrico para variaciones en la densidad de corriente. Por ejemplo, suponiendo que en un punto se tiene que J/J_c es 1, el valor del campo eléctrico en el superconductor es E_c . Si se cometiese un error de sobredimensionamiento de un 1% o de un 2% en J/J_c , el error cometido en el campo eléctrico sería aproximadamente del 49% y del 120% respectivamente. Estos resultados muestran claramente la gran dificultad de predecir de manera precisa las pérdidas generadas en superconductores.

A continuación, se muestran las curvas de potencia resultantes al sobredimensionar la densidad de corriente del modelo de Matlab en un 1% y en un 2%. Además, se muestra la curva de potencia original junto con la obtenida en COMSOL Multiphysics.

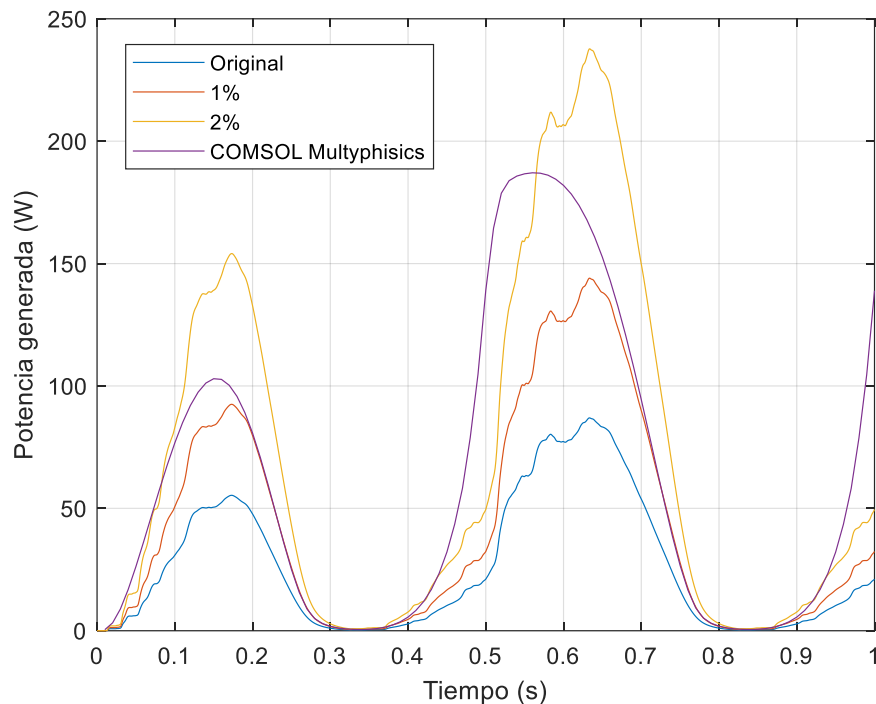


Figura 30. Curvas de potencia para diversos errores en la densidad de corriente

Se observa que la curva de potencia obtenida con COMSOL Multiphysics se encuentra entre las curvas de potencia con un error del 1% y del 2% respecto a la de Matlab.

Esto sugiere que el modelo de Matlab es capaz de predecir la distribución de la densidad de corriente con una precisión entre el 1% y el 2%. La imprecisión cometida se debe principalmente a la aproximación en la integración del cálculo de los términos K_{eikj} y M_{eikj} . También influye la alta rigidez del sistema de ecuaciones y las limitaciones de los solucionadores ODE disponibles en Matlab.

El conocimiento de la distribución de densidad de corriente a lo largo del tiempo permite conocer la distribución de potencia generada en la bobina a lo largo del tiempo. Esta información es crucial, ya que revela las áreas donde la bobina se calentará más fácilmente.

A continuación, se muestra la distribución del calor total generado en la bobina para distintos instantes de tiempo, así como el calor total generado por cada espira.

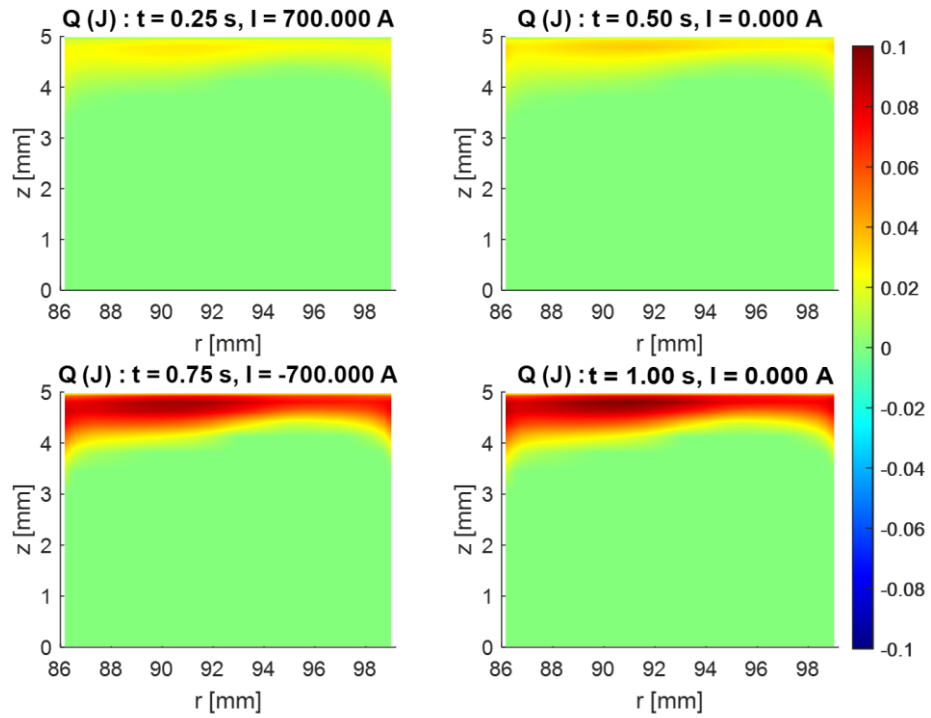


Figura 31. Distribución del calor acumulado

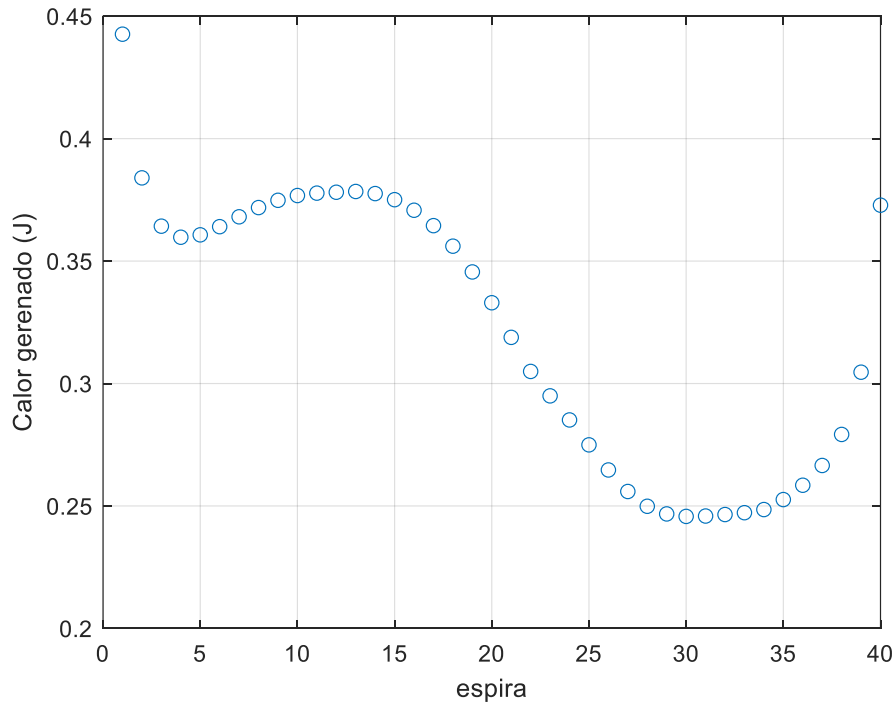


Figura 32. Calor generado en cada espira

Como era de esperar, el calor se genera en los bordes externos de las espiras al concentrarse ahí la distribución de corriente. Por otra parte, se deduce que la generación de calor aumenta en los extremos de la bobina. En el centro de la misma, las espiras con menor radio tienden a generar un calor mayor que las que poseen un radio mayor.

Por último, una vez analizados los resultados, se evaluarán las ventajas y desventajas del modelo construido.

Entre las principales ventajas destacan:

- Permite predecir la distribución de densidad de corriente a lo largo del tiempo con exactitud (precisión en torno al 98% o al 99%).
- Buenos resultados en la predicción de la distribución del campo magnético a lo largo del tiempo. Estos resultados pueden ser útiles para calcular las fuerzas generadas en la bobina.
- Buenos resultados a la hora de predecir la forma de la curva de potencia generada.
- Posibilidad de conocer la distribución de potencia a lo largo del tiempo.
- Tiempo de ejecución razonable. El tiempo de ejecución ronda los 13 minutos. Este tiempo es debido principalmente al cálculo de los términos de la matriz $[K]$ que dependen exclusivamente de la geometría. Por lo tanto, si se quiere simular otro transitorio con la misma geometría, el tiempo de cálculo será únicamente el asociado a resolver el solucionador ODE. Esta es una gran ventaja respecto al modelo de COMSOL Multiphysics.
- Flexibilidad a la hora de definir la intensidad del transitorio eléctrico a simular.
- Flexibilidad a la hora de definir la geometría a simular.
- El modelo tiene en cuenta la naturaleza exponencial del superconductor, así como la variación de J_c a lo largo del espacio y del tiempo en función del módulo y orientación del campo magnético.
- Se tiene en cuenta el efecto borde de las espiras por el hecho de no ser infinitas.

Entre las principales desventajas destacan:

- Necesidad de sobredimensionar la distribución de corriente para conseguir una curva de potencia con un error pequeño en comparación con la obtenida por el modelo de COMSOL Multiphysics. Se ha comprobado que esto ocurre para simulaciones con otros transitorios.

Sin embargo, en la realidad existen otros efectos que afectan a la generación de pérdidas AC y que no se han tenido en cuenta tanto en el modelo de Matlab como en el modelo de COMSOL Multiphysics. A continuación, se muestran algunos de ellos:

Dependencia de la temperatura: El calor generado en un punto del espacio tiende a propagarse hacia zonas del espacio adyacentes. El estudio de la propagación del calor es un problema complejo por varias razones:

- Necesidad de conocer las propiedades térmicas en función de la temperatura de cada uno de los materiales de los cuales está compuesta la cinta superconductora.
- Necesidad de incluir una expresión de J_c más completa que tenga en cuenta la temperatura.
- Necesidad de imponer condiciones de contorno adecuadas sobre la temperatura a la que está sometida la superficie más externa de la bobina.

Deformación de la geometría: Debido al intenso campo magnético generado, aparecen fuerzas magnéticas importantes que deforman la geometría. Además, la variación local de temperatura también contribuye a esta deformación.

Fenómenos electromagnéticos: El hecho de que la cinta superconductora tenga otros materiales no superconductores hará que se induzcan corrientes en ellos al estar sometidos a un campo magnético variable en el tiempo. Por otra parte, al hacer circular una intensidad por la cinta, una pequeña parte de la intensidad circulará por otras capas que no son la superconductora. Tener en cuenta estos efectos supone conocer la resistividad en función de la temperatura de los diversos materiales de la cinta.

Otros efectos: Algunos de ellos son, por ejemplo:

- Influencia de objetos externos metálicos en el campo magnético de la bobina al poder magnetizarse.
- Variabilidad de la permeabilidad magnética de los materiales de la cinta.
- Fenómenos microscópicos del superconductor.
- Dificultad a la hora de predecir de manera experimental la dependencia de J_c [15].

Todos estos efectos tienen una repercusión de carácter secundario sobre la distribución de campo magnético y densidad de corriente. Tener en cuenta estos efectos en un modelo a simular puede no ser una opción adecuada, ya que podría no representar un equilibrio óptimo entre el tiempo de ejecución, la complejidad y la precisión de los resultados.

Conocer la distribución de campo magnético y de densidad de corriente con cierta precisión es suficiente para orientar el diseño que debe tener la geometría del sistema SMES.

Esto sugiere que, en la práctica, una vez realizada una simulación de una geometría puede asumirse que existe un error de, por ejemplo, un 3% en la densidad de corriente, debido a no tener en cuenta los efectos anteriores con el fin de situarse en una zona de seguridad.

10. CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

CONCLUSIÓN

En vista de los resultados del modelo definitivo, se concluye que se ha desarrollado un modelo capaz de resolver el problema electromagnético de un sistema SMES sometido a un transitorio eléctrico.

El modelo permite calcular la evolución de las pérdidas generadas con una precisión suficiente como para ser utilizado en la fase de prediseño del sistema SMES. En efecto, en esta fase no se pretende obtener un resultado extremadamente preciso de las pérdidas, sino un resultado orientativo que permita entender qué geometrías son menos eficientes y por cuáles se debería apostar.

Además, los resultados se obtienen de manera rápida. Por último, el modelo permite definir de manera fácil otras geometrías, así como otros transitorios.

En consecuencia, las características de este modelo cumplen los objetivos de este proyecto.

TRABAJOS FUTUROS

Como es de esperar una de las características más importantes de un sistema SMES es la energía magnética que puede almacenar. La introducción de materiales ferromagnéticos como el hierro en el diseño del sistema suponen una opción interesante para aumentar el campo magnético creado en el espacio y por tanto la energía magnética que se puede almacenar.

Un trabajo futuro interesante podría ser el estudio de la generación de pérdidas AC en bobinas superconductoras cuando se incluye un núcleo de hierro. En tal caso, habría que estudiar no solo las pérdidas que se generarían en el superconductor, sino también las que se generarían en el hierro.

A continuación, se presenta una posible idea para resolver el problema. La idea consiste en implementar la formulación del último modelo, pero incluyendo en cada elemento finito la presencia de un campo magnético externo debido a la magnetización del hierro.

Por tanto, se debe aplicar a cada elemento finito de cada espira la siguiente expresión:

$$\sum_{k=1}^E \sum_{j=1}^N \left(K_{eikj} \frac{dJ_{kj}}{dt} \right) = - \left(\frac{\partial A_{hexte_i}}{\partial t} + E_c \frac{J_{ei}}{J_{cei}} \left| \frac{J_{ei}}{J_{cei}} \right|^{n-1} + \gamma \left(I(t) - \sum_{i=1}^N J_{ei} dS_{ei} \right) \right) \quad (E. 54)$$

Esta expresión es idéntica a la del modelo anterior aunque se observa que se ha incluido el término $\partial A_{hexte_i} / \partial t$ que representa la derivada temporal del vector potencial magnético que genera el hierro en el elemento finito i perteneciente a la espira e .

El origen de este término es debido a la aparición de dos tipos de densidades de corriente en el hierro. Por un lado, una densidad de corriente eléctrica y por otro lado una densidad de corriente de magnetización.

Por tanto, se tiene que:

$$\frac{\partial A_{hexte_i}}{\partial t} = \sum_{l=1}^{N^h} K_{eil} \left(\frac{dJ_l^h}{dt} + \frac{dJ_l^{hm}}{dt} \right) \quad (E. 55)$$

Donde J_l^h y J_l^{hm} representan la densidad de corriente eléctrica y de magnetización en un elemento finito l del hierro respectivamente. El término N^h del sumatorio hace referencia al número total de elementos finitos en los que se divide el hierro. El superíndice h indica simplemente que las variables están asociadas al hierro.

Por otro lado, en cada elemento finito del hierro debe aplicarse:

$$\sum_{n=1}^{N^h} \left(K_{ln} \frac{dJ_n^h}{dt} \right) = - \left(\frac{\partial A_{sext_l}}{\partial t} + p^h J_l^h \right) \quad (E. 56)$$

$$\frac{\partial A_{s\text{ext}l}}{\partial t} = \sum_{k=1}^E \sum_{j=1}^N \left(K_{lkj} \frac{dJ_{kj}}{dt} \right) \quad (E. 57)$$

Donde p^h representa la resistividad del hierro y $\partial A_{s\text{ext}l}/\partial t$ la derivada del vector potencial magnético en un elemento l del hierro debido a la distribución de densidad de corriente de todas las espiras superconductoras.

Los términos K_{ln} y K_{lkj} se definen como:

$$K_{ln} = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_{V_n} \frac{1}{|\mathbf{r}_l - \mathbf{r}'_n|} dV \quad (E. 58)$$

$$K_{lkj} = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_{V_{kj}} \frac{1}{|\mathbf{r}_l - \mathbf{r}'_{kj}|} dV \quad (E. 59)$$

Donde \mathbf{r}_l es el vector posición desde el sistema de coordenadas hasta el punto medio del elemento de hierro l , \mathbf{r}'_n es el vector posición desde el sistema de coordenadas a cualquier punto en el interior del volumen V_n perteneciente al elemento de hierro n .

De manera similar, \mathbf{r}'_{kj} es el vector posición desde el sistema de coordenadas a cualquier punto en el interior del volumen V_{kj} del elemento superconductor j perteneciente a la espira k .

Por otro lado, se debe de incluir la naturaleza de la curva $\mathbf{B}-\mathbf{H}$ del hierro. Para ello, una buena opción es emplear el modelo de Jiles-Atherton, que es un modelo ampliamente extendido para modelar la curva de histéresis de materiales ferromagnéticos. Este modelo ofrece una expresión del tipo [26]:

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = f \left(\mathbf{H}, \mathbf{M}, \text{sign} \left(\frac{d\mathbf{H}}{dt} \right) \right) \quad (E. 60)$$

Donde \mathbf{M} es el vector magnetización del hierro. La dependencia del signo de la derivada temporal de \mathbf{H} es importante para incluir el efecto de la histéresis magnética.

Por otro lado, se tiene que:

$$\nabla \times \mathbf{M} = J_m \hat{\phi} \quad (E. 61)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{M} + \mathbf{H}) \quad (E. 62)$$

Combinando las ecuaciones anteriores, se puede llegar a un sistema de ecuaciones compuesto por varios subsistemas acoplados del tipo:

$$[K] \frac{d[J]}{dt} = f(t, [J], [M_r], [M_z]) \quad (E. 63)$$

$$\frac{d[M_r]}{dt} = g\left([J], [M_r], \frac{d[J]}{dt}, \text{sign}\left(\frac{d[J]}{dt}\right)\right) \quad (E. 64)$$

$$\frac{d[M_z]}{dt} = h\left([J], [M_r], \frac{d[J]}{dt}, \text{sign}\left(\frac{d[J]}{dt}\right)\right) \quad (E. 65)$$

Donde las variables incógnita son los vectores $[J]$, $[M_r]$ y $[M_z]$ correspondientes a las densidades de corriente de todos los elementos (hierro y superconductor) y la magnetización en la dirección r y z de los elementos del hierro.

Este sistema de ecuaciones se ha construido en Matlab, pero no se ha podido resolver utilizando solucionadores ODE convencionales debido a la complejidad del problema. La metodología que se aplicó fue resolver mediante iteración cada instante de tiempo. Para ello, se incluyó un solucionador ODE que utilizase a su vez otro solucionador para converger cada instante.

En la mayoría de los casos existían graves problemas de convergencia debido a la rápida saturación del hierro.

Por eso, se sugiere considerar el hierro como un único elemento finito con valores de magnetización medios con tal de simplificar el problema. De esta manera, no existirían corrientes de magnetización volumétricas, sino solo superficiales.

Además, dado que en la práctica se utilizaría un hierro laminado para disminuir las corrientes de Foucault, puede asumirse que las pérdidas en el hierro serán principalmente debido al efecto de la histéresis.

A pesar de que la incorporación del hierro supone un aumento de dificultad importante a la hora de predecir las pérdidas generadas, es posible estimar las pérdidas por histéresis que se producirán teniendo en cuenta la alta intensidad magnética a la que se somete el hierro. En efecto, en la Figura 33 se muestra la distribución del módulo de la intensidad de campo magnético en el espacio para el instante correspondiente a 0.01 debido a las espiras superconductoras. Para este instante, por cada espira circula aproximadamente una intensidad de 40 A. Además, se muestra el espacio donde se incorporaría el núcleo de hierro (recuadro negro) donde aparece una intensidad de campo en torno a 20000 A/m.

Por otra parte, en la Figura 34 se muestra un posible ciclo de histéresis del hierro utilizando el modelo de Jiles-Atherton con valores reales [26]. Se aprecia que los límites de la intensidad de campo que hacen que el hierro se sature son aproximadamente -600 y 600 A/m.

Esto sugiere que, por ejemplo, en el caso del transitorio de naturaleza sinusoidal estudiado, el calor generado por ciclo en cada elemento será proporcional al área de la curva de histéresis.

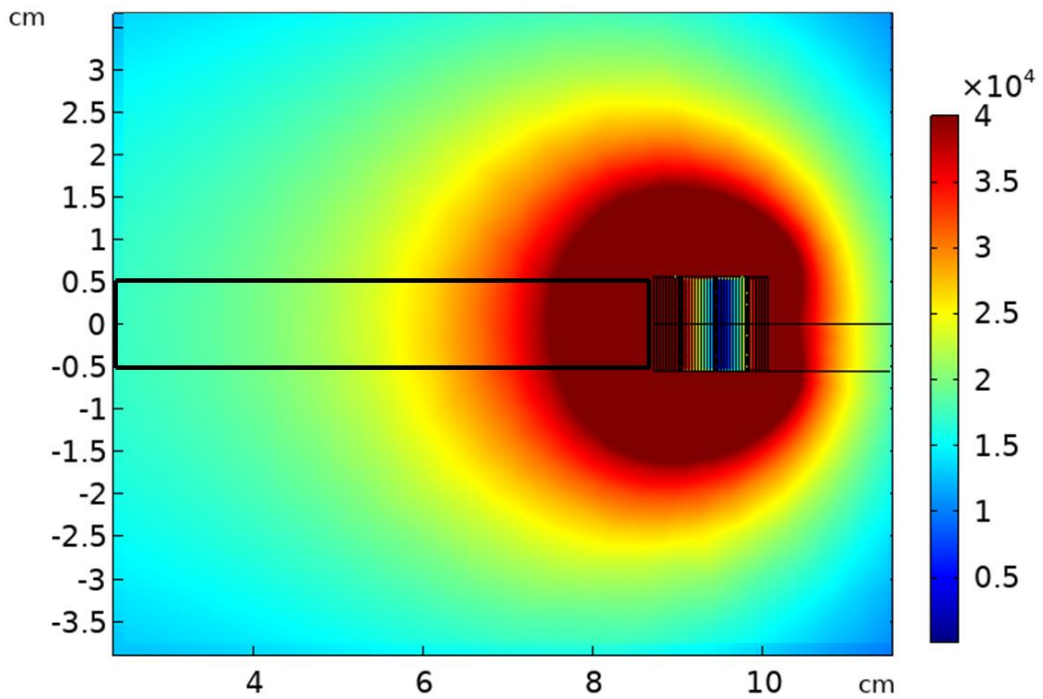


Figura 33. Módulo de la intensidad de campo magnético en teslas para el instante de 0.1 segundos

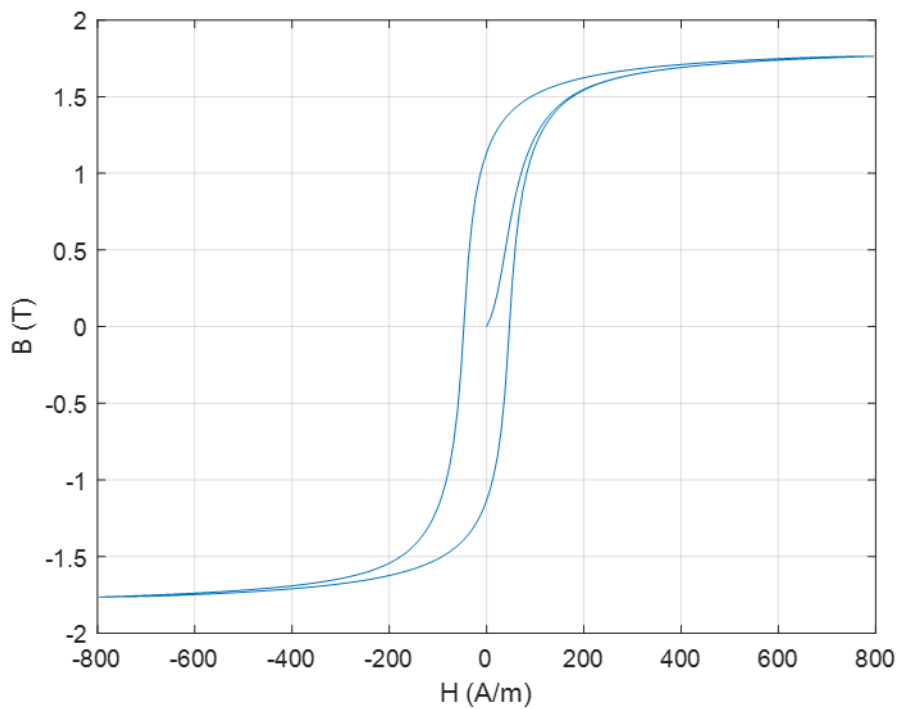


Figura 34. Curva de histéresis del hierro

11. BIBLIOGRAFÍA

- [1] Samuel C. Johnson, F. Todd Davidson, Joshua D. Rhodes, Justin L. Coleman, Shannon M. Bragg-Sitton, Eric J. Dufek, Michael E. Webber, Chapter Five - Selecting Favorable Energy Storage Technologies for Nuclear Power.
- [2] Yuyao Huang et al 2021 J. Phys.: Conf. Ser. 2108 012038.
- [3] J.X. Jin, J. Wang, R.H. Yang, T.L. Zhang, S. Mu, Y.J. Fan, Y.Q. Xing, A superconducting magnetic energy storage with dual functions of active filtering and power fluctuation suppression for photovoltaic microgrid, Journal of Energy Storage 38 (2021).
- [4] S. Said, M. Aly, B. Hartmann, A robust SMES control for enhancing stability of distribution systems fed from intermittent wind power generation, Turkish Journal of Electrical Engineering & Computer Sciences 27(5) (2019) 3883-3898.
- [5] C. Hernando, J. Munilla, L. García-Tabarés and G. Pedraz, "Optimization of High Power SMES for Naval Applications," in IEEE Transactions on Applied Superconductivity, vol. 33, no. 5, pp. 1-5, Aug. 2023.
- [6] DOE, «Office of SCIENCE,» [En línea]. Available: <https://www.energy.gov/science/doe-explains-superconductivity>.
- [7] D. P. N. C. D. B. Matthew J. Superczynski, Advanced Power Electronics and HTS Technology for SMES:.

- [8] Zhang, H.; Grilli, F.; Wen, Z.; Gyftakis, K.; Mueller, M. Alternating Current Loss of Superconductors. Encyclopedia. Available online: <https://encyclopedia.pub/entry/9252> (accessed on 05 May 2024)..
- [9] “Energy Storage Systems,” Cyclomed. <https://www.cyclomed.tech/energy-storage-systems/> (accessed May 05, 2024).
- [10] «“COMSOL Multiphysics® Modeling Software,” Comsol.com, 2019. <https://www.comsol.com/>,» [En línea].
- [11] Nadeem, Furquan & Hussain, Suhail & Tiwari, Prashant & Goswami, Arup & Ustun, Taha Selim. (2019). Comparative Review of Energy Storage Systems, Their Roles and Impacts on Future Power Systems. IEEE Access. 7. 4555-4585. 10.1109/ACCESS.2018.2888497..
- [12] E. Pardo y F. G. , Electromagnetic Modeling, 2023.
- [13] «B. Shen, F. Grilli and T. Coombs, "Overview of H-Formulation: A Versatile Tool for Modeling Electromagnetics in High-Temperature Superconductor Applications," in IEEE Access, vol. 8, pp. 100403-100414, 2020, doi: 10.1109/ACCESS.2020.2996177.».
- [14] S.-G. Jung, «High critical current density and high-tolerance superconductivity in high-entropy alloy thin films,» *Nature Communications*, 2022.
- [15] D K Hilton et al 2015 Supercond. Sci. Technol. 28 074002.
- [16] «L. Quéval, V. M. R. Zermeño, and F. Grilli, “Numerical models for AC loss calculation in large-scale applications of HTS coated conductors,» Supercond. Sci. Technol., vol. 29, no. 2, Feb. 2016, Art. no. 024007.».
- [17] «Felix Huber et al 2022 Supercond. Sci. Technol. 35 043003».

- [18] «Edgar Berrospe-Juarez et al 2021 Supercond. Sci. Technol. 34 044002».
- [19] «“MATLAB - MathWorks,” [nl.mathworks.com. https://nl.mathworks.com/products/matlab.html](https://nl.mathworks.com/products/matlab.html),» [En línea].
- [20] «Tera Analysis Ltd.- QuickField software providers for electromagnetic, heat transfer and stress analysis. Main design applications: electrical machines, transformers, actuators, magnet systems. (n.d.). QuickField support site.,» [En línea]. Available: QuickField.com. <https://quickfield.com/>.
- [21] A. Arsenault, B. d. S. Alves and F. Sirois, "COMSOL Implementation of the $H-\phi$ - Formulation With Thin Cuts for Modeling Superconductors With Transport Currents," in IEEE Transactions on Applied Superconductivity, vol. 31, no. 6, pp. 1-9, Sept. 2021.
- [22] Y. Iwasa, Case Studies in Superconducting Magnets Design and Operational Issues, Springer, 2009.
- [23] S. Otten and F. Grilli, "Simple and Fast Method for Computing Induced Currents in Superconductors Using Freely Available Solvers for Ordinary Differential Equations," in IEEE Transactions on Applied Superconductivity, vol. 29.
- [24] «Cuemath, “Simpson’s Rule - What is Simpson’s Rule Formula? Derivation,” Cuemath. <https://www.cuemath.com/simpsons-rule-formula/>,» [En línea].
- [25] Electromagnetism (2nd Edition), I.S. Grant, W.R. Phillips, Manchester Physics, John Wiley & Sons, 2008, ISBN 978-0-471-92712-9.
- [26] Xue, G.; Bai, H.; Li, T.; Ren, Z.; Liu, X.; Lu, C. Numerical Solving Method for Jiles-Atherton Model and Influence Analysis of the Initial Magnetic Field on Hysteresis. Mathematics 2022.

- [27] Timmer, John (May 2011). "25 years on, the search for higher-temp superconductors continues". *Ars Technica*. Archived from the original on 4 March 2012. Retrieved 2 March 2012.

ANEXO. ALINEACIÓN CON LOS OBJETIVOS DE DESARROLLO SOSTENIBLE

La predicción de pérdidas AC en superconductores es uno de los elementos clave para el diseño del sistema de refrigeración de un sistema SMES. Su correcta predicción supone la posible viabilidad de poder incorporar estos sistemas en buques operando como baterías complementarias a las de litio ya existentes. Por ello, los principales ODS con los que estaría alineado este proyecto son:

Energía asequible y no contaminante: La energía almacenada en forma de campo magnético es una energía no contaminante, ya que el sistema SMES no utiliza componentes químicos para almacenar energía que puedan ser dañinos para los ecosistemas.

Trabajo decente y crecimiento económico: La viabilidad de crear estos sistemas de almacenamiento de energía supone la creación de nuevos puestos de trabajo, fomentando así el crecimiento económico.

Producción y consumo responsables: El mejor desempeño del sistema SMES frente a ciertos transitorios supone que las baterías de litio convencionales alarguen su vida útil. Como consecuencia, se reducirá el mantenimiento, la frecuencia de recambios y la demanda de baterías de litio utilizadas en los buques.

Acción por el clima: La apuesta por el almacenamiento de energía de manera limpia y la reducción de otras alternativas de almacenamiento de energía más contaminantes supone un beneficio para el medio ambiente.