COMILLAS
UNIVERSIDAD PONTIFICIA

Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales
ICADE

Resolución analítica de la ecuación diferencial de Black Scholes. Aplicación al estudio de activos financieros.

Autor: Álvaro Pereña Rego
Director: Cristina Sardón Muñoz

MADRID | junio de 2024

Resumen

Este trabajo consiste en una revisión sistemática de los métodos de integración analíticos de la ecuación de Black Scholes dando una breve introducción sobre la historia de la ecuación, su formulación original, algunas de las más importantes variaciones que ha ido sufriendo a lo largo de los años, y su aplicación en el mundo de las finanzas. Para ello se resolverá la ecuación mediante el método de transformada de Fourier y mediante el método de descomposición en polinomios de Adomian. Finalmente, sacaremos las respectivas conclusiones respecto a las soluciones obtenidas y al impacto que sigue teniendo esta ecuación en el mundo financiero a día de hoy.

Lista de símbolos y abreviaturas

BS	Black Scholes
EBS	Ecuación de Black Scholes
BSM	Black Scholes Merton
EC	Ecuación de Calor
MDA	Método de descomposición en Polinomios de Adomian
PA	Polinomios de Adomian
EDE	Ecuación diferencial estocástica
EDP	Ecuación diferencial parcial

Índice general

Resumen **c**

Lista de símbolos y abreviaturas **d**

1. Introducción **1**
1.1. Introducción al trabajo 1
1.2. Descripción de los términos de la Ecuación de Black Scholes 8

2. Resolución analítica de la ecuación diferencial de Black Scholes **11**
2.1. Transformación de la ecuación de Black Scholes a una ecuación diferencial parábolica 11
A. Resolución de la ecuación de Black Scholes mediante el método de la Transformada de Fourier 14
2.2. Resolución mediante Polinomios de Adomian 21

Conclusiones **28**

Bibliografía **32**

Capítulo 1

Introducción

1.1. Introducción al trabajo

El presente trabajo busca resolver de forma analítica la ecuación diferencial de Black-Scholes (BS) ampliamente utilizada para calcular el valor de opciones financieras. Antes de entrar a comentar sobre la ecuación debemos hablar sobre los antecedentes históricos que permitieron dar lugar a esta ecuación en 1973. Para ello, primero de todo debemos remotarnos a 1900, cuando Louis Bachelier publicó su tesis “Teoría de la especulación” [1] . Aquí fue donde se definió por primera vez lo que era un proceso estocástico, algo que como sabemos hoy en día es un proceso que evoluciona de forma aleatoria a medida que va avanzando el tiempo, como vemos en [2]. Como dice Lawler (1995) “más precisamente, un proceso estocástico es una colección de variables aleatorias X_t indexadas por el tiempo” (p.1) [2]. Es decir, son aquellos procesos que se describen mediante modelos matemáticos y que incorporan un componente de incertidumbre inherente, lo que resulta en un comportamiento que no puede preverse en su totalidad.

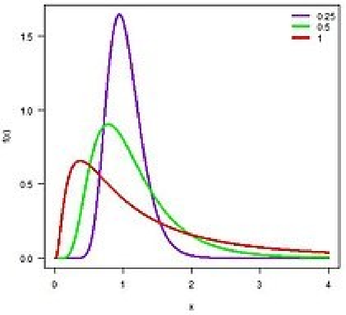

Figura 1.1: Distribución Log normal

Bachelier propuso que los valores de los activos financieros de los mercados se regían por un proceso estocástico, esta proposición realizada por el matemático francés utilizará de la definición del movimiento browniano realizada por el biólogo Robert Brown en 1827. Bachelier argumenta que las leves fluctuaciones en los precios de las acciones a lo largo de breves periodos de tiempo son independientes del valor preciso de la acción en un instante determinado de tiempo t_0; y que además, estas fluctuaciones son independientes del pasado comportamiento del activo. Con estas dos hipótesis, Bachelier deduce que los precios de las acciones son independientes y que tienen una distribución log normal 1.1. Es decir, Bachelier introdujo los estudios de Brown sobre la vibración de granos de polen en el agua para así modelizar el comportamiento de los activos financieros. Brown observó que los movimientos de las partículas de polen en el agua realizaban movimientos erráticos concluyendo que esto se debía a un proceso físico. Pero fue Albert Einstein quien en 1905 con su artículo “Sobre el movimiento de partículas suspendidas en líquidos estacionarios bajo el prisma de la teoría cinética” quién explicó que los movimientos erráticos que Brown había observado podían ser el resultado del choque entre las partículas de polen y las moléculas del agua [3].

El problema de partir del movimiento browniano es que no es diferenciable en niguna parte (es decir, que no tiene derivada definida en ningún punto de su dominio), y es ahí donde entra en juego el análisis estocástico. El movimiento browniano no es diferenciable porque su trayectoria, al estar impulsada por colisiones aleatorias de moléculas, es muy irregular y llena de fluctuciones como se puede ver en la 1.2b. El movimiento browniano lo podríamos definir cómo:

Definición 1.1. Un proceso estocástico $X(t)$ es un movimiento browniano estándar o proceso de Wiener si cumple que:

1. $X(0) = 0$
2. El proceso tiene incrementos independientes t_n, es decir, que para cualquier incremento $t_0 \leq t_1 \leq s_2 ... s_n \leq t_n$ los incrementos $X(t_n) - X(t_{n-1})$ son independientes
3. Para todo $t > 0$ los incrementos $X(t_n) - X(t_{n-1})$ tienen una distribución normal.

Por lo que el movimiento browniano estándar es un proceso con distribución normal, de media 0 y $\sigma^2 = 1$ [2].

Veamos entonces por qué el movimiento browniano no es diferenciable. Si definimos el browniano como una función respecto del tiempo t tal que $B(t)$ tendríamos que su derivada sería:

$$\frac{dB}{dt} = \lim_{h \to 0} \frac{B(t+h) - B(t)}{h}.$$

Para calcular el límite $\lim_{h \to 0} \frac{B(t+h)-B(t)}{h}$, donde h representa una variación en t, vamos a calcular la varianza de la función $\frac{B(t+h)-B(t)}{h}$. A dicha función la vamos a renombrar como X:

$$V[X] = V\left[\frac{B(t+h) - B(t)}{h}\right] = \frac{1}{h} V[B(t+h) - B(t)] = \frac{1}{h}.$$

Como además el browniano es un proceso de media 0 y distribución normal [2, 4]. X tiene también dichas propiedades y la podemos expresar como su desviación estándar por una variable z con distribución normal estándar:

$$X = \frac{1}{\sqrt{h}} z,$$

quedando el límite como $\lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{h}} z$. En el límite, donde $h \to 0$, sabemos que con probabiliad 1, X es mayor que cualquier número arbitrario k, y nos queda entonces que:

$$P[|X| > k] = P[|z| > \sqrt{h}k] = 1.$$

Si evaluamos el límite cuando $h \to 0$, nos queda que:

$$\lim_{h \to 0} P[|X| > k] = P[|z| > \sqrt{h}k] = P[|z| > 0],$$

que es igual a decir cuál es la probabilidad de que una variable con distribución normal estándar, tome valores mayores de 0, lo cuál obviamente es 1, y $P[|z| > 0] = 1$. Por tanto, con probabilidad 1, el $\lim_{h\to 0} X$, siendo $X = \frac{1}{\sqrt{h}}z$, toma valores de ∞ y por tanto el límite (tanto superior como inferior) no existe, y por ende la función no es diferenciable.

Y así, lo que hace Bachelier es llevar al límite un *random walk*, como podemos ver en la sección *New Determination of the probability Law* de [1], donde considera la probabilidad de distintos precios en función del tiempo, y deriva dicha probabilidad considerando el proceso de precios como el límite de un *random walk*. Un *random walk* no es más que el estudio de las propiedades estadísticas de las sumas de números arbitrarios de variables aleatorias. Por ejemplo, en el artículo de David Fraser (1973) podemos ver el estudio de convergencia de un *random walk* al movimiento browniano, definiendo al primero como "una secuencia de variables aleatorias independientes expresada en forma de suma"(p.1) [5]. Para entender mejor cómo se puede construir un *random walk*, podemos considerar el juego de la ruina del jugador que propone [6]. De ese modo podemos observar como las trayectorias discretas de 1.2a pueden llegar a las trayectorias continuas de 1.2b. El juego consiste en que el jugador tiene la misma porbabilidad de ganar $P = \frac{1}{2}$, que de perder. Además, este empieza con una fortuna inicial de S_0, si gana recibe un euro, y si pierde entrega dicho euro. Podemos definir entonces que la fortuna final del jugador al cabo de n tiradas será:

$$S_n = S_0 + \sum_{i=1}^{n} X_i$$

donde X_i son las variables independientes aleatorias, que pueden tomar un valor de $+1$ con probabilidad p, o de -1 con probabilidad $1-p$. Si reducimos el tiempo entre apuestas llevamos al límite las trayectorias que se irán haciendo cada vez más cortas dando lugar a movimiento browniano 1.2b.

(a) Gráfica de *random walk*

(b) Gráfica de movimiento browniano

La idea principal en la formulación de precios de Bachelier era que la transacción debía ser un juego de suma cero. Un juego de suma cero implica que las ganancias y pérdidas netas de los particpantes sumadas es cero, es decir, que los recursos o puntos en juego son fijos y se redistribuyen entre los distintos jugadores que participan.

Bachelier fue uno de lor primeros matemáticos que consiguió realizar el paso de esquemas discretos a continuos. Su idea de que el verdadero precio del activo era aquel que no proporcionaba ningún retorno al inversor, combinada con la propiedad de falta de memoria, daba lugar a que el precio verdadero fuera una martingala.

Definición 1.2. Una martingala es una secuencia de variables aleatorias en la que la esperanza condicionada futura del valor actual de la variable, dado el conocimiento del pasado, es igual al valor de la variable en el tiempo presente. En otras palabras, una martingala es un proceso estocástico que, en promedio, no cambia en el tiempo, dada la información disponible hasta el momento actual. Si consideramos un proceso estocástico $X(t), t \geq 0$ diremos que es una martingala si para todo conjunto de momentos:

$$t_1 < t_2 < t_3 ... < t_n < t_{n+1}$$

$$E[X(t_{n+1})|X(t_1)...X(t_n] = X(t_n),$$

donde cada t es un momento en el tiempo que conforman una secuencia creciente, y donde E es la esperanza, o valor esperado condicionado por la información actual y pasada de la que disponemos.

Esto es clave, ya que a pesar de que Bachelier no hiciera uso del término (el término no se definiría en el campo matemático hasta varios años después) sí que sentó las bases para la definición de la propiedad de martingala.

Para llegar a su idea de que la transacción debía de ser un juego de suma cero, Bachelier combinó la propiedad de la pérdida de memoria o propiedad de Markov, las martingalas y la ecuación de calor. Algunos de estos términos no se definirían hasta años más tardes en las matemáticas, pero fue Bachelier quién intuyó que todos estos elementos combinados podían llevar a la modelización de los mercados financieros y a la correcta valoración de activos financieros. Al tener un gran conocimiento del mercado, lo que Bachelier definió era que, en todo *trade* hay dos partes, uno que compra y uno que vende, y como no existe ningún prejuicio en favor de uno o de otro, el precio al cual se vende el activo hoy debe ser igual al valor esperado del activo en una fecha concreta en el futuro al que se vende, exactamente la propiedad de martingala. Despúes de que Bachelier hubiera obtenido que las variaciones en los precios de los activos eran aleatorias e independientes, usó la propiedad de falta de memoria para llegar a lo que ahora se conoce como la ecuación de Chapman-Kolomgórov [1], que describe cómo evoluciona la probabilidad de transición entre estados en un proceso de Markov en intervalos sucesivos.

Definición 1.3. Una cadena de Markov es un tipo de proceso estocástico que exhibe la propiedad de falta de memoria, lo que significa que la probabilidad de moverse de un estado a otro depende únicamente del estado actual y no del camino seguido para llegar a ese estado. Formalmente, una cadena de Markov es una secuencia de variables aleatorias x_0, x_1, x_2... Donde, cada x_n representa el estado del sistema en un momento dado n y que además cumple la propiedad de Markov. La propiedad de Markov puede expresarse matemáticamente de la siguiente forma:

$$P(X_{n+1} = j|x_0 = i, x_1 = i_1, ..., x_n = i) = P(x_{n+1} = j|x_n = i)$$

Esto significa que la probabilidad de transición al estado j en el siguiente paso, dado el historial completo de estados anteriores, es igual a la probabilidad de pasar al estado j en el siguiente paso, dado solo el estado actual. Es decir, que el futuro es independiente del pasado, dado el presente.

La propiedad de falta de memoria sería entonces:

$$P_{i,j}^{(n+m)} = \sum_k P_{i,k}^{(n)} P_{k,j}^{(m)}$$

- $P_{i,j}^{(n+m)}$: es la probabilidad de transición de estar en el estado i en el tiempo 0 al estado j en el tiempo $n+m$.
- $P_{i,k}^{(n)}$: es la probabilidad de transición de estar en el estado i en el tiempo 0 al estado k en el tiempo n.
- $P_{k,j}^{(m)}$: es la probabilidad de transición de estar en el estado k en el tiempo n al estado j en el tiempo $n+m$.

Al desarrollar esta ecuación, Bachelier intuyó que existía una relación con la ecuación de calor, pero no desarrolló está relación de forma matemática y rigurosa, esta relación no llegaría hasta muchos años después con la llegada del matemático nipón Kiyoshi Itô. De la ecuación de calor hablaremos más adelante pues es uno de los ejes para la resolución analítica de BS. La propiedad de falta de memoria que utilizó Bachelier es conocida ahora como la propiedad de Markov, y fue formalizada por el matemático ruso Andréi Markov en 1906 cuando estudiaba sistemas con variables aleatorias conectadas en cadena. Estos procesos se llaman a día de hoy cadenas de Markov en su honor, y son las que hemos definido en 1.3.

Pero el paso definitivo para poder llegar a la ecuación de Black-Scholes (EBS) no se dió hasta la decada de los cuarenta con el matemático Kiyoshi Itô. La puerta de entrada para poder comprender el lema de Itô es saber lo que es la diferencial de una función.

Definición 1.4. La diferencial de una función proporciona una aproximación lineal al cambio en el valor de la función debido a un cambio en su variable independiente. Por ejemplo, si f es una función de x, la diferencial de $f(df)$, representa el cambio en la función f, a raíz de un cambio infintesimal dx en la variable x. Geométricamente, la diferencial de una función $f(x)$ en el punto x_0, se puede interpretar como la pendiente de de la recta tangente a la gráfica de la función en ese punto. En el caso de que sea una función con dos variables, x e y por ejemplo, la diferencial pasa a ser un plano tangente a la gráfica de la función en un punto dado (x_0, y_0). En ese plano tangente las derivadas parciales de la función, representan las pendientes del plano en los ejes x e y, y los diferenciales dx y dy son los vectores directores del plano [7]. Matematícamente su definición sería: Sea f: $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable entonces se tiene que:

$$df = \frac{\delta f}{\delta x}dx + \frac{\delta f}{\delta y}dy.$$

Esto es relevante ya que el lema de Itô extiende la noción del diferencial de una función al cálculo estocástico, cuando las funciones dependen de un proceso aleatorio en concreto (conocidos como procesos de Itô). Para definir estos procesos, Itô pensó en el comportamiento de una partícula que seguía un proceso de Markov y así formuló las ecuaciones diferenciales estocásticas que regían los caminos de los procesos de Markov [9]. “Observé que una partícula markoviana realizaría un proceso diferencial homogéneo en el tiempo para el futuro infinitesimal en cada instante, y llegué a la noción de una ecuación diferencial estocástica que rige las trayectorias de Markov" (Itô, 1987) [9].

Definición 1.5. Un proceso de Itô se define como un proceso aleatorio con una cierta deriva (parte determinista) y una parte aleatoria, que es el término de difusión donde aplicamos el movimiento browniano estándar. Por lo que la ecuación diferencial estocástica que Itô formuló quedaría de la siguiente forma:
Siendo S_t un proceso de Itô, que es un proceso estocástico $[S_t, t \geq 0]$, que se expresa en forma de integrales definidas

$$S_t = S_0 + \int_0^t \alpha(S_s, s)ds + \int_0^t \sigma(S_s, s)dW_s.$$

La ecuación diferencial estocástica (EDE) resultante sería (S_0 desaparece en la EDE por ser una variable aleatoria independiente del movimiento browniano para toda $t \geq 0$):

$$dS(t) = \alpha(S_t, t)dt + \sigma(S_t, t)dW_t$$

donde la función α se conoce como el coeficiente de deriva (que descrie la tendencia promedio del proceso) y σ es la función de difusión que contiene el dW_t que representa el diferencial del movimiento browniano estándar (también llamado proceso de Wiener [4] 1.1, que aporta al proceso una aleatoriedad intrínsica.

Definición 1.6. El lema de Itô nos sirve para calcular la diferencial de una función $f(S_t, t)$ que depende de un proceso de Itô 1.5 y de la variable tiempo. La diferencial de dicha función sería pues:

$$df(S_t, t) = \frac{df}{dt}dt + \frac{df}{dS_t}dS_t + \frac{1}{2}\frac{d^2f}{dS_t^2}(dS_t)^2$$

por lo tanto, el lema de Itô es la diferencial de una función de dos variables, con la dificultad añadida de que una de esas variables es un proceso estocástico. Lo primero que debemos sacar es el cuadrado de la diferencial de Itô $dS(t)$, que resulta:

$$(dS(t))^2 = \alpha^2 dt^2 + \sigma^2 dW_t^2 + 2\alpha\sigma dt dW_t$$

$dt^2 \to 0$, así como el producto entre el diferencial de t y el del browniano. Por lo que nos queda que:

$$(dS(t))^2 = \sigma^2 dW_t^2 = \sigma^2 dt.$$

Así pues el lema de Itô[1] nos da la diferencial de una función que depende del proceso de Itô previamente definido, que queda de esta manera:

$$df(S_t, t) = \frac{df}{dt}dt + \frac{df}{dS_t}dS_t + \frac{1}{2}\frac{d^2f}{dS_t^2}\sigma^2 dt.$$

[1] Introducido por vez primera en [8] en 1944

Con todos estos elementos definidos, podemos ver cómo calcularon Black y Scholes su famosa ecuación en 1973 [10]. La idea principal era que, en función de unas condiciones ideales que enumeraremos más adelante, el precio de la opción dependía solo del precio del activo subyacente, del tiempo y de una serie de variables que se toman constantes. La idea es construir una cartera de cobertura Π que incluya solo un derivado V y una posición corta en el activo subyacente S_t. Tenemos entonces un derivado tal que $V(S_t, t)$ y una cartera tal que $\Pi = V - \Delta S$, siendo S el valor del activo subyacente. De este modo tenemos que $d\Pi = dV - \Delta dS$ y que:

$$dV_t = \frac{dV_t}{dt}dt + \frac{dV_t}{dS_t}dS_t + \frac{1}{2}\frac{d^2V_t}{dS_t^2}\sigma^2 dt.$$

Además, sabemos que $\Delta = \frac{dV}{dS}$ por lo que la diferencial de Π es la siguiente:

$$d\Pi = \frac{dV_t}{dt}dt + \frac{dV_t}{dS_t}dS_t + \frac{1}{2}\frac{d^2V_t}{dS_t^2}\sigma^2 dt - \frac{V_t}{dS_t}dS_t$$

$$d\Pi = \frac{dV_t}{dt}dt + \frac{1}{2}\frac{d^2V_t}{dS_t^2}\sigma^2 dt. \tag{1.1}$$

Ahora tenemos esa expresión para la diferencial de la cartera Π. En [10], *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, Black y Scholes señalan que fue Robert Merton quien les indico que si el precio del activo subyacente sigue un *random walk* continuo y si la varianza del retorno del subyacente es constante (es decir, que el riesgo del activo es siempre el mismo), entonces la covarianza entre el retorno del subyacente y de la opción es 0. La varianza indica cómo de dispersos son los retornos del activo en comparación con su promedio, y por tanto, sirve para designar el riesgo de un activo. La covarianza por su parte, mide cómo dos variables se mueven conjuntamente. Si cuando una aumenta la otra disminuye, la covarianza será negativa, y si no hay relación lineal entre ellas la covarianza es 0 (como en este caso). Además, si la covarianza entre el retorno del subyacente y el retorno del mercado r es constante, el retorno de nuestra cartera de cobertura Π deberá ser igual al retorno del mercado en la tasa libre de riesgo r. Es decir, hay una ausencia de arbitraje, y con esa condición podemos sacar la igualdad de que $d\Pi = r\Pi dt$, y con esa expresión introduciéndola en la ecuación (1.1) ya podemos despejar la ecuación de Black-Scholes.

$$\frac{dV_t}{dt}dt + \frac{1}{2}\frac{d^2V_t}{dS_t^2}\sigma^2 dt = r(V - \frac{dV}{dS}S_t)dt \tag{1.2}$$

$$\frac{dV}{dt} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{d^2V}{dS^2} + rS\frac{dV}{dS} - rV = 0 \tag{1.3}$$

la ecuación 1.3 se obtiene de 1.2 integrándola en t.

1.2. Descripción de los términos de la Ecuación de Black Scholes

La ecuación de Black-Scholes fue propuesta por primera vez en 1973 por los matemáticos Fisher Black y Myron Scholes en el artículo [10]. Antes de entrar en la situación previa a la llegada de BS y su impacto, vamos a explicar unos términos financieros:

1. Derivado: es un instrumento financiero cuyo valor de cotización en el mercado se basa en el precio de otro activo (subyacente).

2. Opción: es un contrato que otorga al comprador el derecho, pero no la obligación, de comprar o vender un activo subyacente (como acciones, bonos, divisas, etc.) a un precio predeterminado, llamado precio de ejercicio (o *strike price*) en o antes de una fecha específica (llamada fecha de vencimiento). En general, el comprador paga una prima al vendedor por este derecho de ejercicio de la opción. Las opciones se utilizan comúnmente como herramientas de cobertura, especulación o para gestionar riesgos en los mercados financieros. Hay dos tipos principales de opciones, las opciones de compra (*call options*), que otorgan el derecho a comprar el activo subyacente al *strike price*, y las opciones de venta (*put options*), que otorgan el derecho a vender el activo subyacente de nuevo al *strike price*. Con esta estructura una opción está *in the money* según lo que describiremos ahora.

3. *Strike price*: se establece en el momento de compra de la opción, y determina el precio al cual se puede ejercer la opción a vencimiento.

4. Tipos de opciones: en función de cuando se puede ejercer el derecho de compra o de venta, tenemos dos tipos de opciones:

   - Opción americana: con este tipo de opción, el titular tiene el derecho de ejercer la opción en cualquier momento entre la fecha de compra y la fecha de vencimiento. Es decir, puede ejercerla en cualquier momento antes o en la fecha de vencimiento.
   - Opción europea: en cambio, con una opción europea, el titular solo puede ejercer su derecho en la fecha de vencimiento, no antes. Es decir, el ejercicio solo puede ocurrir en una fecha específica, que es la fecha de vencimiento.

5. *Vencimiento*: fecha límite hasta la decisión del ejercicio de la opción.

6. *In the money*: describe la situación en que la opción tiene un valor intrínseco positivo para el titular, y su ejercicio resultaría en un beneficio para él.

   - Para una opción de compra europea, esto ocurrirá cuando el *strike price* sea menor que el precio del activo subyacente en el momento de vencimiento. Porque en ese momento el comprador puede ejercer su derecho de compra sobre el activo, a un precio menor que el precio actual de mercado.
   - En una opción de venta europea esto ocurrirá en el caso contrario, el poseedor de la opción ejercitará su derecho de venta cuando el *strike price* sea mayor que el precio del activo subyacente en el momento de vencimiento. Ya que en ese momento, el comprador puede vender el activo a un precio mayor que el precio de mercado.

7. *Payoff*: es el valor que obtiene el titular de la opción si decide ejercerla. Su fórmula varía si es para un *call* o para un *put*:

   - *Call*:
   $$Payoff = max(\text{Precio del subyacente} - \textit{Strike price}, 0)$$
   - *Put*:
   $$Payoff = max(\textit{Strike price} - \text{Precio del subyacente}, 0)$$

   La fórmula del *Payoff* se escribe así porque representa el valor que nos va a granjear nuestra opción en el momento T de vencimiento, que en el caso del *call* va ser el máximo entre el precio del subyacente S menos el *strike price* E, y 0. Esto se debe a que, como titular de la opción, en caso de que $S - E < 0$, no tendría sentido ejercer la opción de compra, y por tanto a vencimiento el *call* tendrá un valor de 0 para el titular.

Antes de la llegada de la EBS nadie sabía muy bien cómo valorar correctamente estos contratos de derivados, lo máximo que se aplicaba para conocer su precio era, cuánto más tiempo quede para el vencimiento del contrato, más probabilidad de que el subyacente acabe *in the money*, y por tanto más debe valer la opción. Luego, cuanto más volatil sea el subyacente, más debería valer la opción, pues más probabilidad hay de que el activo acabe *in the money*. Es decir, el precio de las opciones se podía intuir pero no se le podía dar un valor exacto. Black y Scholes propusieron en su artículo original una serie de condiciones para poder calcular el precio de la opción. La más notoria y limitativa de ellas era la condición de que la acción subyacente no pagaba dividendos, cuando en verdad sabemos que la mayoría de ellas sí lo hacen. Es aquí donde juega un papel verdaderamente importante el economista Robert C. Merton, que a partir del modelo original de BS, desarrolló una ecuación que permitía evaluar opciones cuando el activo subyacente pagaba dividendos. La EBS original publicada en 1973 es la siguiente

$$\frac{dW}{dt} = rW - rx\frac{dW}{dx} - \frac{1}{2}v^2x^2\frac{d^2W}{dx^2}$$

- x = precio de la acción
- v^2 = dispersión de la rentabilidad
- $W(x,t)$ = valor de la opción en función del precio del subyacente y del tiempo
- r = tasa de interés libre de riesgo

A raíz de esta ecuación y considerando los flujos de dividendos pagados por la acción subyacente, fue como Merton llegó a la ecuación de Black-Scholes-Merton sobre la cual vamos a trabajar. Esta es una ecuación diferencial en derivadas parciales, cuasilineal en V, ya que su término $\frac{d^2V}{dS^2}$ está multiplicado por el valor del activo subyacente al cuadrado S^2

$$\frac{dV}{dt} + \frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{d^2V}{dS^2} + rS\frac{dV}{dS} - rV = 0$$

- V = variable dependiente de S y t; valor de la opción

- $\frac{dV}{dt}$ = derivada parcial de V respecto de t
- $\frac{dV}{dS}$ = derivada parcial de V respecto de S
- S = variable independiente; precio del activo subyacente
- t = variable independiente; tiempo
- r = tasa libre de riesgo
- σ = dessviación estándar del precio del activo subyacente

La fórmula de Black-Scholes no solo se aplicó a las opciones estándar (*call* y *put*), sino que también proporcionó la base para el desarrollo de una amplia gama de productos derivados más complejos, como opciones exóticas, *warrants* y productos estructurados. Esto permitió a las instituciones financieras ofrecer soluciones de inversión y cobertura más sofisticadas, ayudando a mejorar la gestión del riesgo en los mercados. Además, sentó las bases para futuros desarrollos en la modelización de derivados. Tal fue su impacto que Myron Scholes y Robert Merton recibieron el Premio Nobel de Economía en 1997. Fischer Black, quien había fallecido en 1995, también fue reconocido póstumamente.

En este trabajo nos vamos a centrar en resolver la EBS para el caso de opciones europeas (más en concreto para *calls*) ya que son las que nos permiten alcanzar una solución analítica de la EBS. En el caso de las opciones americanas no existe una solución analítica aceptada, debido a la complejidad introducida por la posibilidad de ejercicio temprano. Una cosa que sí podemos mencionar desde un punto de vista económico es que una opción americana siempre va ser más cara que su análoga europea, pues en finanzas el valor de un instrumento (un derivado en este caso) que permite más flexibilidad en el tiempo de ejercicio es mayor que el de otro que solo permite ser ejercitado en un momento concreto.

Capítulo 2

Resolución analítica de la ecuación diferencial de Black Scholes

En este capítulo veremos cómo resolver la EBS de manera analítica, primero mediante el método de las transformadas de Fourier, y después mediante la descomposición en polinomios de Adomian. En ambos casos partiremos de la EBS anteriormente mencionada:

$$\frac{dV}{dt} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{d^2V}{dS^2} + rS\frac{dV}{dS} - rV = 0 \tag{2.1}$$

y en ambos casos resolveremos la ecuación para el caso particular de un *call* europeo, que como mencionábamos en la introducción, es una opción de compra que se puede ejercitar únicamente en el momento de vencimiento.

2.1. Transformación de la ecuación de Black Scholes a una ecuación diferencial parábolica

Ya que la EBS no tiene una resolución analítica en general, para poder llegar a la ecuación de una opción concreta debemos imponer unas condiciones iniciales y de frontera a la ecuación. En nuestro caso impondremos estas condiciones para adaptarnos al caso particular de un *call* europeo. Al tratarse de un *call*, el único cambio que vamos a hacer a la ecuación es cambiar $V(S,t)$ por $C(S,t)$. Esto se debe a que la EBS sirve para calcular tanto opciones de venta como opciones de compra y lo único que varía son las condiciones que imponemos. Quedándonos una ecuación:

$$\frac{dC}{dt} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{d^2C}{dS^2} + rS\frac{dC}{dS} - rC = 0. \tag{2.2}$$

Como en cualquier ecuación diferencial la condición inicial viene determinada por la variable tiempo, la cual es

- Cuando $t = T$ entonces $C(S,T) = max(S-E,0)$. Siendo E el *strike price*. Realmente aquí estamos viendo la fórmula del *payoff* que introducíamos en el anterior capítulo. El valor que nos va a granjear nuestro *call* en el momento T de vencimiento va ser el máximo entre, el precio del subyacente S menos el *strike price* E, y cero. Esto se debe a que, como titular de la opción, en caso de que $S - E < 0$, no tendría sentido ejercer la opción de compra, y por tanto a vencimiento el *call* no tendrá ningún valor para el titular.

La condición frontera viene determinada por la variable que no es el tiempo, en este caso S. Nosotros vamos a imponer la condición de frontera $S = 0$ y cuando a $S \to$ infinito.

- Si $S = 0$; $C(0, t) = 0$.
- Si $S \to \infty$; $\lim_{S\to\infty} C(S, t) \sim S$, Ya que si el precio de la acción tiende a infinito, el precio del call debe tender hacia el precio de la acción.

Ahora pasaremos a buscar la solución general al problema propuesto de la EBS definida. Primero, necesitamos transformar la ecuación a otra con la que podamos trabajar, y para ello introducimos una serie de cambios de variable. Los cambios de variable que vamos a definir son los siguientes:

$$S = Ee^x; \qquad t = T - \frac{2\tau}{\sigma^2}; \qquad C = Ev(x, \tau) \tag{2.3}$$

- T es el tiempo a vencimiento.
- E es el *strike price.*

Al haber considerado las nuevas variables x y τ en función de v, necesitamos las derivadas parciales $\frac{dv}{d\tau}$, $\frac{d^2v}{dx^2}$ y $\frac{dv^2}{dx2}$. Por lo que empezando por τ que sustituye a t calculamos la derivada parcial de v respecto de τ

$$v_\tau = \frac{dv}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}\frac{C}{E} = \frac{1}{E}\left(\frac{dC}{dS}\frac{dS}{d\tau} + \frac{dC}{dt}\frac{dt}{d\tau}\right) = \frac{1}{E}(C_t t_\tau).$$

Como C_S[1] está multiplacado por 0 (pues S no depende de τ y por lo tanto la derivada S_τ es 0) solo tenemos que sacar C_t y t_τ. Según los cambios de variable antes definidos tenemos

$$e^x = \frac{S}{E} \longrightarrow x = \ln S - \ln E; \quad \tau = \frac{-(t-T)\sigma^2}{2}$$

y la derivada parcial t_τ, sería entonces

$$t_\tau = T - \frac{2\tau}{\sigma^2} = 0 - \frac{2\sigma^2 - 0(2\tau)}{\sigma^4} = \frac{-2\sigma^2}{\sigma^4} = \frac{-2}{\sigma^2},$$

y v_τ quedaría como:

$$v_\tau = \frac{1}{E}\left(C_t\frac{-2}{\sigma^2}\right) = \frac{-2C_t}{E\sigma^2}. \tag{2.4}$$

Debemos sacar ahora la siguiente derivada parcial v_x, la nueva variable x sustituye a la variable S.

[1]Para la notación de las derivadas parciales vamos a hacer uso tanto de la notación $\frac{dC}{dS}$ como de la notación con subíndice C_S

$$v_x = \frac{d}{dx}\frac{C}{E} = \frac{1}{E}(\frac{dC}{dS}\frac{dS}{dx} + \frac{dC}{dt}\frac{dt}{dx}) = \frac{1}{E}(C_S S_x + C_t 0).$$

En este caso debemos sacar la derivada parcial S_x. Sabemos que $S = Ee^x$, por lo que su derivada respecto de x sería $S_x = Ee^x$. Esta derivada la introducimos en la ecuación de arriba para sacar v_x. Hay que tener en cuenta que según los cambios de variable introducidos en (2.3).

$$v_x = \frac{1}{E}C_S(e^x E) = C_S e^x = \frac{C_S S}{E}. \tag{2.5}$$

Finalmente, debemos sacar v_{xx}.

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{1}{E}\left(S\frac{dC_S}{dx} + \frac{dS}{dx}C_S\right) = \frac{1}{E}\left(S\left(\frac{d^2C}{dS^2}\frac{dS}{dx} + \frac{d^2C}{dt}\frac{dt}{dx}\right)\right) + SC_S).$$

Sabemos que t_x es 0, por lo tanto eliminamos un término del parentésis, y como hemos visto antes $S = S_x = Ee^x$. Por lo que si introducimos estas igualdades en la ecuación de arriba nos queda:

$$v_{xx} = \frac{1}{E}(S^2 C_{SS} + SC_S) = \frac{S}{E}(SC_{SS} + C_S). \tag{2.6}$$

Ahora que tenemos nuestras ecuaciones (2.4) (2.5) y (2.6), podemos despejar y sacar las derivadas parciales para nuestra función C. Que nos quedan:

$$C_{tt} = \frac{-E\sigma^2 v_\tau}{2}; \quad C_S = \frac{Ev_x}{S}; \quad C_{SS} = \frac{Ev_{xx}}{S^2} - \frac{C_S}{S} = \frac{Ev_{x_x}}{S^2} - \frac{Ev_x}{S^2} = \frac{E(v_{xx} - v_x)}{S^2}.$$

Introduciendo estas derivadaas parciales en la ecuación (2.2), sacamos la siguiente ecuación:

$$\frac{-E\sigma^2 v_\tau}{2} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\left(\frac{E(v_{xx} - v_x)}{S^2}\right) + rEv_x - rEv = 0.$$

Para simplificar la ecuación podemos multiplicarla por $\frac{-2}{E\sigma^2}$. Quedándonos la siguiente expresión:

$$v_\tau + v_x - v_{xx} - \frac{-2rv_x}{\sigma^2} + \frac{2rv}{\sigma^2} = 0,$$

$$\frac{dv}{d\tau} = \frac{d^2v}{dx^2} + \frac{dv}{dx}\left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1\right) - \frac{2rv}{\sigma^2}.$$

Si definimos una constante k como, $k = \frac{2r}{\sigma^2}$, y lo introducimos en la ecuación anterior, nos queda una ecuación que solo va a depender de la constante k, y que además va a igualar una derivada parcial con una segunda derivada parcial, por lo que podremos transformarla a una ecuación de calor para resolver el problema.

$$\frac{dv}{d\tau} = \frac{d^2v}{dx^2} + \frac{dv}{dx}(k-1) - kv. \tag{2.7}$$

Pero con los cambios de variable introducidos, no solo hemos realizado cambios en la ecuación (2.2), sino que también hemos alterado la condición frontera e inicial. La condición inicial que teníamos originalmente era $C(S,T) = max(S-E,0)$, pero al introducir el cambio de variable $S = Ee^x$, la condición inicial nos queda de la siguiente forma:

$$C(S,T) = max(Ee^x - E, 0)$$
$$C(S,T) = E \;\; max(e^x - 1, 0)$$
$$C(S,T) = E \;\; v(x,\tau) = E \;\; max(e^x - 1, 0)$$
$$v(x,0) = max(e^x - 1, 0).$$

De esta forma, hemos consguido transformar la (2.2) en (2.7), que es una ecuación parabólica en derivadas parciales de segundo orden. En la siguiente sección nos ocuparemos de resolver (2.7) mediante el método de la Transformada de Fourier.

A. Resolución de la ecuación de Black Scholes mediante el método de la Transformada de Fourier

Como mencionábamos antes, la idea ahora es transformar la ecuación (2.7) en una ecuación de calor para poder resolverla mediante el método de transformadas de Fourier. La forma más simple de la ecuación de calor (EC) es la siguiente $\frac{du}{d\tau} = \frac{d^2u}{dx^2}$, cómo vemos es bastante similar a la (2.7). La diferencia entre ambas ecuaciones estriba en el término convectivo $\frac{dv}{dx}(k-1)$. El término de convección generalmente representa la energía o cantidad de movimiento que transporta un fluido en movimiento, en la teoría de opciones financieras se puede interpretar como el efecto del cambio del precio del subyacente en el precio de la opción [11]. Pero para poder realizar la transformación a la EC necesitamos realizar otro cambio de variable definido como $v = e^{\alpha x+\beta\tau}u(x,\tau)$ siendo α y β constantes. Ahora tenemos que derivar parcialmente v respecto a τ y x, con el cambio de variable definido.

$$\frac{dv}{d\tau} = \beta e^{\alpha x+\beta\tau}u + e^{\alpha x+\beta\tau}\frac{du}{d\tau}$$

$$\frac{dv}{dx} = \alpha e^{\alpha x+\beta\tau}u + e^{\alpha x+\beta\tau}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{dv^2}{dx^2} = \alpha e^{\alpha x+\beta\tau}u + e^{\alpha x+\beta\tau}\frac{du}{dx} = \alpha(\alpha e^{\alpha x+\beta\tau}u + e^{\alpha x+\beta\tau}\frac{du}{dx}) + \alpha e^{\alpha x+\beta\tau}\frac{du}{dx} + e^{\alpha x+\beta\tau}\frac{d^2u}{dx^2} =$$
$$\alpha^2 e^{\alpha x+\beta\tau}u + 2\alpha e^{\alpha x+\beta\tau}\frac{du}{dx} + e^{\alpha x+\beta\tau}\frac{d^2u}{dx^2}.$$

Una vez se han realizado las derivadas parciales debemos introducirlas en (2.7) para después poder igualar la ecuación resultante a la EC.

$$\beta e^{\alpha x+\beta\tau}u + e^{\alpha x+\beta\tau}\frac{du}{d\tau} = \alpha^2 e^{\alpha x+\beta\tau}u + 2\alpha e^{\alpha x+\beta\tau}\frac{du}{dx} + e^{\alpha x+\beta\tau}\frac{d^2u}{dx^2} +$$

$$(k-1)\left(\alpha e^{\alpha x+\beta\tau}u + e^{\alpha x+\beta\tau}\frac{du}{dx}\right) - ke^{\alpha x+\beta\tau}u.$$

Para simplificar la ecuación se puede factorizar $e^{\alpha x+\beta\tau}$, ya que aparece en todos los términos de la ecuación:

$$\beta u + u_\tau = u(\alpha^2 + \alpha(k-1) - k) + u_x(2\alpha + (k-1)) + u_{xx}. \tag{2.8}$$

Ahora vemos que tenemos en un lado de la igualdad los términos βu y u_τ, y en el otro lado términos que están multiplicados por u, u_x y u_{xx}. Entonces, para que esta ecuación coincida con la de calor $u_\tau = u_{xx}$ debemos tener que:

$$\begin{cases} \beta u = (\alpha^2 + \alpha(k-1) - k)u \\ (2\alpha + (k-1))u_x = 0. \end{cases}$$

Si resolvemos el sistema de ecuaciones podemos sacar los valores de α y β.

$$\alpha = -\frac{k-1}{2}; \qquad \beta = -\frac{(k+1)^2}{4}$$

tenemos entonces que

$$v(x,\tau) = e^{-\frac{(k-1)}{2}x - \frac{(k+1)^2}{4}\tau}u(x,\tau) \tag{2.9}$$

y para la ecuación 2.9 tenemos

$$u(x,\tau) = e^{\frac{(k-1)}{2}x + \frac{(k+1)^2}{4}\tau}v(x,\tau).$$

Si recordamos la condición inicial para $\tau = 0$

$$u(x,0) = e^{\frac{(k-1)}{2}x}v(x,0) = e^{\frac{(k-1)}{2}x}max(e^x - 1, 0) = max(e^x e^{\frac{(k-1)}{2}x} - e^{\frac{(k-1)}{2}x}, 0)$$

$$u(x,0) = u_0(x) = max(e^{\frac{(k+1)}{2}x} - e^{\frac{(k-1)}{2}x}, 0).$$

Esta última ecuación se puede resolver mediante la transformada de Fourier (TF). Para poder realizar la solución de la ecuación de calor del modelo de BS, primero debemos considerar una serie de propiedades. En primer lugar tenemos la condición inicial en el tiempo que hemos definido antes, que es $u(x,0) = u_0(x) = max(e^{\frac{(k+1)x}{2}} - e^{\frac{(k-1)}{2}x}, 0)$. Después, debemos definir lo que es una TF.

Una transformada de Fourier es una herramienta que nos permite descomponer una función como combinación de funciones periódicas (una base de senos y cosenos), permitiéndonos analizar el comportamiento de la función en diferentes frecuencias. Esto nos va a servir para convertir la EC en una ecuación algebraica más manejable en el espacio de las frecuencias. La función de la TF se define de la siguiente manera: sea $f \in L(\mathbb{R})$, donde $L(\mathbb{R})$ es el espacio de funciones que podemos integrar sobre todo el conjunto de $\mathbb{R}$

y cuyo resultado nos da un número finito, se llama transformada de Fourier a la función $\tilde{f}\ \ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbf{C}$

$$\tilde{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} f(y)dy \qquad x \in \mathbb{R}$$

sabemos que f está bien definida porque para $x \in \mathbb{R} \quad |e^{ixy} f(y)| = |f(y)|$ lo que significa que el módulo no varía, es decir, es integrable. Si definimos así la TF, la inversa se puede definir de la siguiente forma:

$$F^{-1}|\tilde{f}(x)| = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(ixy)} f(x)dx.$$

Debemos establecer también las propiedades de la TF

Proposición 2.1. *Sean $f, g \in L(\mathbb{R})$*

- $(\widetilde{f + \alpha g}) = \tilde{f} + \alpha\tilde{g}$
- $|\tilde{f}(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} f(y)dy \qquad$ *para todo $x \in \mathbb{R}$*
- $\lim_{x\to\infty} \tilde{f}(x) = 0.$

Lo siguiente es definir la derivada de la TF.

Proposición 2.2. *Si definimos una función $g(x)$ tal que $g(x) = ixf(x)$ siendo f integrable, entonces tenemos que:*

$$\tilde{f}'(x) = \tilde{g}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} iyf(y)dy.$$

Por último, debemos definir es la transformada de la derivada

Proposición 2.3. *Siendo $f \in L(\mathbb{R})$ tal que $f' \in L(\mathbb{R})$ tenemos que la transformada de la derivada de f respecto de x es:*

$$\tilde{f}'(x) = iy\tilde{f}(x)$$

en caso de que fuera una segunda derivada la TF sería:

$$\tilde{f}''(x) = -y^2\tilde{f}(x).$$

Para resolver ahora nuestra EC original aplicamos las propiedades de la proposición 2.3 y aplicamos la TF a ambos lados de la ecuación, cambiando x por s:

- 1º Término: $\frac{du}{d\tau}$. En este caso, al realizar la transformada con respecto a x y al tener la derivada parcial con respecto a τ, este término se resuelve como la derivada parcial de τ con respecto a la TF de $u(x, \tau)$

$$\frac{d\tilde{u}}{d\tau}.$$

- 2º Término: $\frac{d^2u}{dx^2}$

$$-s^2\tilde{u}(x, \tau)$$

así nos queda que:

$$\frac{d\tilde{u}}{d\tau} + s^2\tilde{u}(x,\tau) = 0.$$

Ahora nos queda una ecuación lineal de primer orden que podemos resolver mediante el método de variables separadas

$$\int \frac{d\tilde{u}}{\tilde{u}} = \int -s^2 d\tau \rightarrow \ln \tilde{u} = -s^2\tau + k$$

$$e^{\ln \tilde{u}} = e^{-s^2\tau+k} \rightarrow \tilde{u} = e^{-x^2\tau}e^k = Ke^{-s^2\tau} \quad \text{(siendo } K \text{ una constante)}$$

con la condición inicial $u(x,0) = u_0(x)$ nos queda que

$$\tilde{u}(x,0) = K = \tilde{u}_0(x) = u_0(s)$$

$$\tilde{u}(x,\tau) = \tilde{u}_0(x)e^{-s^2\tau} = u_0(s)e^{-s^2\tau}.$$

Finalmente, podemos calcular nuestra solución $u(x,\tau)$ como la TF inversa de la ecuación que acabamos de sacar, que es $\tilde{u}(x,\tau)$ o también $u(s,\tau)$. Lo que nos deja:

$$u(x,\tau) = F^{-1}|u_0(s)e^{-s^2\tau}|$$

para resolver esto podemos usar la definición de la convolución, que se define de la siguiente forma.

Definición 2.4. Sean dos funciones f y g donde ambas dependen de x su convolución se expresa de la siguiente forma:

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy$$

y si aplicamos la TF a la convolucion de ambas funciones nos permite separar las funciones como producto en dos TF diferentes:

$$F(f * g) = F(f(x))F(g(x)) = f(s)g(s).$$

Aplicando esto a nuestro problema, consideramos la $f(s)$ como nuestra $u_0(s)$ evaluando x en y y la $g(s)$ como nuestra $u(s,\tau)$ evaluando x en $x-y$

$$u(x,\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} F^{-1}|u_0(s)|F^{-1}|u(s,\tau)|.$$

La TF inversa de nuestra $u_0(s)$ es igual a $u_0(y)$. Por lo que nos queda la ecuación de la siguiente forma:

$$u(x,\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} u_0(y)\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{isx}e^{-s^2\tau}ds.$$

Nos centramos en la integral que depende de diferencial de s. Podemos reescribir la multiplicación de ambas potencias como la suma de ambos exponentes $e^{isx-s^2\tau}$, el exponente

$isx - s^2\tau$ lo podemos reescribir completando el cuadrado como $-(\sqrt{\tau}s - \frac{ix}{2\sqrt{\tau}})^2 - \frac{x^2}{4\tau}$. Que al introducirlo de nuevo en nuestra integral queda como:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{(\sqrt{\tau}s - \frac{ix}{2\sqrt{\tau}})^2 - \frac{x^2}{4\tau}} ds$$

sacamos el término que no depende de s de la integral

$$\frac{1}{2\pi}e^{\frac{-x^2}{4\tau}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{(\sqrt{\tau}s - \frac{ix}{2\sqrt{\tau}})^2} ds$$

y ahora realizamos un cambio de variable que lo vamos a definir como $z = \sqrt{\tau}s - \frac{ix}{2\sqrt{\tau}}$ y $dz = ds\sqrt{\tau}s$. Permitiéndonos reescribir nuestra integral como:

$$\frac{1}{2\pi}\frac{e^{\frac{-x^2}{4\tau}}}{\sqrt{\tau}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz.$$

Dejando como resultado una integral gaussiana $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz$, que como sabemos tiene como resultado $\sqrt{\pi}$. Hallando así la TF inversa $F^{-1}|u(s,\tau)|$, que estabamos buscando

$$F^{-1}|u(s,\tau)| = \frac{1}{2\sqrt{\tau\pi}}e^{\frac{-x^2}{4\tau}},$$

y que podemos introducir en nuestra ecuación de $u(x,\tau)$:

$$u(x,\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\tau\pi}}e^{\frac{-x^2}{4\tau}} u_0(y)dy.$$

Ahora bien, cuando hemos definido la convolución, estabamos evaluando la x en $x - y$ para la TF inversa de $u(s,\tau)$, y por tanto debemos realizar esta sustitución en nuestra integral. Sacando además los términos que no dependen de y, nos queda nuestra solución de la siguiente manera:

$$u(x,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\tau\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-(x-y)^2}{4\tau}} u_0(y)dy. \tag{2.10}$$

Después de todo este proceso de TF, ahora debemos resolver la integral de 2.10 y después deshacer los cambios de variable 2.3, para obtener la solución del problema de BS 2.2. Para resolver esta ecuación vamos a realizar un cambio de variable que vamos a definir de la siguiente manera $p = \frac{y-x}{\sqrt{2\tau}}$ y $dy = dp\sqrt{2\tau}$

$$u(x,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\tau\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} u_0(p\sqrt{2\tau} + x)e^{\frac{-p^2}{2}}(\sqrt{2\tau})dp.$$

Al haber definido u_0 de la forma $max(e^{\frac{(k+1)}{2}x} - e^{\frac{(k-1)}{2}x}, 0)$, nos van a quedar dos integrales separadas, con el límite inferior cambiado debido al cambio de variable realizado, $p = \frac{y-x}{\sqrt{2\tau}}$ y $dy = dp\sqrt{2\tau}$:

$$\frac{1}{2\sqrt{\tau\pi}}\int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{(k+1)}{2}(p\sqrt{2\tau}+x)}e^{\frac{-p^2}{2}}(\sqrt{2\tau})dp - \frac{1}{2\sqrt{\tau\pi}}\int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{(k-1)}{2}(p\sqrt{2\tau}+x)}e^{\frac{-p^2}{2}}(\sqrt{2\tau})dp.$$

Vamos a centrarnos en la primera integral de todas, a la que podemos llamar I_1 ya que una vez tengamos su solución, la solución de la otra I_2 es igual cambiando $k+1$ por $k-1$. Si nos centramos en el exponente $-\frac{p^2}{2} + \frac{(k+1)}{2}(p\sqrt{2\tau} + x)$ podemos factorizar el $-\frac{1}{2}$ que nos deja:

$$-\frac{1}{2}[p^2 - (k+1)p\sqrt{2\tau} - (k+1)x]$$

separando el término que no es función de y, y sumando y restando términos para establecer un cuadrado perfecto se obtiene:

$$\frac{(k+1)x}{2} - \frac{1}{2}\left[(p^2 - [k+1]p\sqrt{2\tau} + \left(\frac{[k+1]\sqrt{2\tau}}{2}\right)^2 - \left(\frac{[k+1]\sqrt{2\tau}}{2}\right)\right]$$

esto lo podemos reescribir como:

$$\frac{(k+1)x}{2} - \frac{1}{2}\left(p - \frac{[k+1]\sqrt{2\tau}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{[k+1]\sqrt{2\tau}}{2}\right)^2$$

y simplificado a:

$$\frac{(k+1)x}{2} - \frac{1}{2}\left(p - \frac{[k+1]\sqrt{2\tau}}{2}\right)^2 + \frac{(k+1)^2\tau}{4}.$$

Así nuestro primer término de la integral es:

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}(k+1)x} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{4}(k+1)^2\tau} e^{-\frac{1}{2}\left(p-\frac{[k+1]\sqrt{2\tau}}{2}\right)^2} dp =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}(k+1)x} e^{\frac{1}{4}(k+1)^2\tau} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(p-\frac{[k+1]\sqrt{2\tau}}{2}\right)^2} dp.$$

Donde si introducimos otro cambio de variable definido como $z = p - \frac{[k+1]\sqrt{2\tau}}{2}$ y $dz = dp$, la integral nos queda como:

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}(k+1)x} e^{\frac{1}{4}(k+1)^2\tau} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}-\frac{1}{2}[k+1]\sqrt{2\tau}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = e^{\frac{1}{2}(k+1)x+\frac{1}{4}(k+1)^2\tau} N(d1)$$

donde

$$d_1 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}[k+1]\sqrt{2\tau}$$

y

$$N(d_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_1} e^{-\frac{1}{2}p^2} dp$$

es la función de distribución acumulativa para la distribución normal.
Como ya mencionábamos la solución de la segunda integral I_2 es idéntica a la de I_1, cambiando el $(k+1)$ por $(k-1)$. Por lo que, volviendo a nuestra ecuación (2.9), que recordemos era:

$$v = e^{-\frac{(k-1)}{2}x - \frac{(k+1)^2}{4}\tau} u(x,\tau),$$

y considerando nuestros cambios de variable (2.3) que hemos realizado al principio del todo. Así, nos queda finalmente, el resultado para una opción de compra europa o *call* europeo:

$$\boxed{C(S,t) = SN(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N(d_2)} \tag{2.11}$$

$$\boxed{d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{E}\right) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S}{E}\right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}}$$

Aplicación a caso real para un call del Banco Santander

Vamos a introducir valores a nuestras variables para calcular el valor de la opción $C(S,t)$, en función de la solución analítica que hemos conseguido gracias al método de la transformada de Fourier. Para este problema vamos a considerar los párametros de una opción de compra del Banco Santander que tiene como activo subyacente la propia acción del Banco. Los párametros los tenemos a fecha 19/03/2024, y han sido proporcionados por el banco. Lo que vamos a realizar es una tabla comparativa del precio real, con distintos vencimientos y *strike prices*, con el precio que nos da nuestra ecuación (2.11) si le metemos los mismos valores. Los únicos valores que van a permenecer constantes son $\sigma = 0{,}025$ que representa la volatilidad, $r = 0{,}03$ que es la tasa libre de riesgo[2], y el precio del activo subyacente (en este caso la acción del banco), que a 19 de marzo es de $S = 4{,}19$

Strike Price(€)	**Tiempo a Vencimiento**	**Precio Call(€)**	**Solución TF(€)**	**Error**
2.7	3 días	1.38	1.49	0.07
2.60	1 mes	1.50	1.59	0.056
1.70	3 meses	2.5	2.5	0.00
1.90	6 meses	2.2	2.3	0.043
1.60	1 año	2.4	2.63	0.095

Cuadro 2.1: Tabla de valores de opción Banco Santander. Comparativa TF

[2]Para esta tasa se usa como *benchmark* el rendimiento de un bono del Estado español a 10 años

2.2. Resolución mediante Polinomios de Adomian

En esta sección vamos a integrar analíticamente la misma ecuación 2.2, mediante otro procedimiento, que es el denominado método de polinomios de Adomian (MDA). De nuevo la ecuación de la que vamos a partir es una ecuación diferencial en derivadas parciales, cuasilineal en V, de primer orden en t y de segundo orden en S, pues involucra la primera derivada respecto de t y la segunda respecto de S. La ecuación, recordemos, es la siguiente:

$$\frac{dV}{dt} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{d^2V}{dS^2} + rS\frac{dV}{dS} - rV = 0.$$

La resolución de la EBS mediante el método de Adomian, consiste en la descomposición de la solución de una ecuación no lineal, en una serie de polinomios conocidos como polinomios de Adomian (PA).

Este método consiste en dividir la EBS en dos operadores, uno lineal y otro no lineal, para poder descomponer la parte no lineal de la ecuación en polinomios de Adomian. En este caso lo vamos a usar para resolver una ecuación diferencial parabólica (como es la EBS) con términos no lineales complejos que pueden representar fenómenos físicos como difusión, transporte, o dinámica de fluidos.

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \qquad \text{donde } A_n \text{ representa los polinomios de Adomian}$$

Los coeficientes de esta serie se determinan utilizando la técnica de Adomian, que implica calcular las llamadas funciones de Adomian. Vamos a empezar por definir unas variables:

- T: tiempo a vencimiento
- E: *strike price*
- S_t: precio de subyacente a vencimiento

La idea, al igual que mencionábamos en la introducción, es que el poseedor de una opción de compra o *call* debe ejercer su opción si S_t es mayor que E a vencimiento. De este modo podemos definir la retribución del poseedor de la función de compra de la siguiente manera

$$C(S_t, T) = max(S_t - E, 0) = \begin{cases} S_t - E & \text{si} \quad S_t > E \\ 0 & \text{si} \quad S_t < E. \end{cases}$$

En el caso del vendedor, la ecuación para la retibución de la opción a vencimiento, sería a la inversa. Porque al vendedor se le paga una prima en el momento de la transacción (dicha prima se suele considerar implícita en el *strike price*, y a él lo que le interesa para generar benficio es que a vencimiento, $S_t < E$, para que el comprador no ejerza la opción y el se lleve como beneficio la prima. En su caso, la ecuación quedaría de este modo para $t = T$, con una prima k:

$$C(S_t, T) = max(k, 0) = \begin{cases} k & \text{si} \quad S_t < E \\ 0 & \text{si} \quad S_t > E. \end{cases}$$

Las condiciones frontera que vamos a imponer en este caso para calcular el valor de la opción de compra son las mismas que veíamos antes en el caso de las TF:

- Cuando $S = 0$; $C(0,t) = 0$. Evidentemente, si el valor del subyacente es 0 el valor de nuestra opción es también 0.
- Cuando $S \to \infty$; $\lim_{S\to\infty} C(S,t) \sim S$. Decíamos en el anterior apartado que si el precio del subyacente tendía a infinito el precio de la opción debía tender al precio del subyacente. Esto se explica porque si S tiende a un valor muy grande en el momento del vencimiento, es lógico que se ejercitaría la opción y se obtendría una retribución igual $S_t - E$. Por lo que el valor de la opción hoy se podría aproximar como $S - Ee^{-r(T-t)}$, ya que el término $e^{-r(T-t)}$ es el factor de descuento que ajusta el valor futuro de la acción al valor presente, teniendo en cuenta la tasa libre de riesgo y el tiempo hasta el vencimiento. Pero como S toma valores muy grandes, podemos despreciar $Ee^{-r(T-t)}$ estableciendo que:

$$\lim_{S\to\infty} C(S,t) \sim S.$$

La estructura básica es la siguiente, si tenemos una ecuación diferencial:

$$Fu(x,t) = g(x,t) \tag{2.12}$$

donde g es una función independiente de u, y F es el operador diferencial que involucra términos lineales y no lineales. El siguiente paso es descomponer F en su parte lineal y no lineal, como $Fu(x,t) = Lu(x,t) + Ru(x,t) + Nu(t)$, que reescribiendo en (2.12) queda como:

$$Lu(x,t) + Ru(x,t) + Nu(t) = g(x,t),$$

siendo L la parte lineal del operador F, y R el resto no lineal. Además L representa la derivada parcial respecto de t y su inversa es $L^{-1}(L(x)) = x$ [12]. N finalmente sería el operador no lineal. Si despejamos en función de $Lu(t)$ y aplicamos el operador integral inverso L^{-1}, a ambos lados de la ecuación, nos quedaría

$$L^{-1}(L(u(x,t)) = L^{-1}g(x,t) - L^{-1}(R(u(x,t))) - L^{-1}(N(u(x,t)))$$

$$u(x,t) = \psi + L^{-1}g(x,t) - L^{-1}Ru(x,t) - L^{-1}Nu(x,t), \tag{2.13}$$

definiendo ψ como una constante de integración. Este MDA asume como solución del problema una serie que se puede expresar como:

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t). \tag{2.14}$$

Como mencionábamos al principio de la sección, la parte no lineal del operador F, es decir, N, supondremos que puede expresarse como una suma inifinita de polinomios de Adomian.

$$Nu(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(u_0, u_1, \ldots, u_n) \tag{2.15}$$

los PA se expresan de la siguiente forma:

$$A_n(u_0, u_1, \ldots, u_n) = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n}[N(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k u_k)]_{\lambda=0}. \tag{2.16}$$

λ es un parámetro de expansión, introducido para facilitar el desarrollo de los polinomios. según [13] vemos que el cálculo de cada A_n se realiza así:

$$\begin{aligned}
&A_0(u_0) = N(u_0)\\
&A_1(u_0, u1) = N'(u_0)u_1\\
&A_2(u_0, u1, u_2) = N'(u_0)u_2 + \frac{u_1^2}{2!}N''(u_0)\\
&A_3(u_0, u1, u_2, u_3) = N'(u_0)u_3 + N''(u_0)u_1u_2 + \frac{u_1^3}{3!}N'''(u_0).
\end{aligned}$$

Introduciendo entonces (2.14), (2.15) y (2.16) en la ecuacion (2.13) nos queda

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = \psi + L^{-1}g(x,t) - L^{-1}R\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) - L^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} A_n(u_0, u_1, u_2, \ldots, un)$$

esto nos da una serie, donde sus términos u_0 y u_{n+1} se definen de la siguiente forma:

$$\begin{cases} u_0(x,t) = \psi L^{-1}g(x,t) \\ u_{n+1}(x,t) = -L^{-1}Ru_n(x,t) - L^{-1}An(u_0, u_1, u_2, \ldots, un) \end{cases}$$

la solución, ya que no podemos determinar todos los términos de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$, viene dada por la k-ésima aproximación ω_k:

$$\omega_k(x,t) = \sum_{n=0}^{k-1} u_n(x,t).$$

Las condiciones de convergencia del MDA han sido estudidadas en los papers [14–16].
Con lo que hemos definido, si consideramos la ecuación que estamos usando de base en ambas resoluciones (2.1), podemos descomponerla en los operadores R, L y N que hemos definido antes. En este caso los operadores tomarían estos valores. Para este caso no hay g.

$$L = \frac{d.}{dt}; \qquad R = \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{d^2.}{dS^2} + rS\frac{d.}{ds} - r; \qquad N = 0.$$

L es un operador diferencial que representa la derivada parcial respecto de t, sabemos entonces que L^{-1} es un operador integral $\frac{d.}{dt}^{-1}$. Si reescribimos (2.1) y aplicamos L^{-1} nos queda

$$L^{-1}\frac{dV}{dt} = L^{-1}\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{d^2V}{dS^2} - rS\frac{dv}{ds} + rV\right)$$

$$V(S,t) = \psi - \frac{1}{2}\sigma^2 L^{-1}\left(S^2\frac{d^2V}{dS^2}\right) - rL^{-1}\left(S\frac{dV}{dS}\right) + rL^{-1}V \tag{2.17}$$

ψ vuelve a ser una constante de integración. Si asumimos como mostrábamos en la estructura general que la solución se puede expresar en forma de serie infinita dada como $V(S,t) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n(S,t)$, e introduciéndolo en (2.17), tienes una ecuación de la forma siguiente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} V_n(S,t) = \psi - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 L^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d^2V_n}{dS^2}\right) - rSL^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{dV_n}{dS}\right) + rL^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} V_n \tag{2.18}$$

cuyos términos V_0 y V_n se pueden definir como:

$$\begin{cases} V_0(S,t) = \psi \\ V_{n+1}(S,t) = -\dfrac{1}{2}\sigma^2 S^2 L^{-1}\left(\dfrac{d^2V_n}{dS^2}\right) - rSL^{-1}\left(\dfrac{dV_n}{dS}\right) + rL^{-1}(V_n). \end{cases} \tag{2.19}$$

Considerándose (2.19), (2.17) y (2.18), podemos plantear el problema de Cauchy de una opción de compra europea. El problema de Cauchy, se refiere al planteamiento de una ecuación diferencial parcial bajo ciertas condiciones iniciales y de contorno. De nuevo lo primero que vamos a hacer es sustituir nuestro $V(x,t)$ por un $C(x,t)$ para mostrar que estamos hablando de un *call*. Recordemos que las condiciones de frontera y el valor inicial eran los siguientes:

Condición inicial de tiempo:

- Retribución en el momento de vencimiento T:

$$C(S,T) = max(S-E,0) = \begin{cases} S-E & \text{si} \quad S > E \\ 0 & \text{si} \quad S < E \end{cases}$$

Condiciones de frontera:

- Si $S = 0$ entonces, $C(S,t) = 0$
- Si $S \to \infty$; $C(S,t) = S - Ee^{-r(T-t)}$

así nuestro problema de Cauchy sería el siguiente:

$$\begin{cases} \dfrac{dC}{dt} + \dfrac{1}{2}\sigma^2 S^2\dfrac{d^2C}{dS^2} + rS\dfrac{dC}{dS} - rC = 0 \\ C(S,T) = max(S-E,0) \\ C(S,t) = S - Ee^{-r(T-t)} \qquad S \to \infty \\ C(0,t) = 0. \end{cases}$$

Nosotros para esta resolución vamos a reducir el problema a una EC, que vamos a resolver descomponiéndola en una serie de integración sucesiva. Para ello vamos a introducir una serie de cambios de variable, que son los mismos que introducíamos para la sección de TF, (2.3):

$$\tau = \frac{1}{2}\sigma^2(T-t) \qquad x = \ln\left(\frac{S}{E}\right) \qquad C(S,t) = Ev(\tau, x)$$

Al partir del mismo sistema de ecuaciones e introducir los mismos cambios de variable (2.3) llegamos a la misma solución que alcanzábamos en las TF (2.9) que es:

$$v(x,\tau) = e^{-\frac{(k-1)}{2}x - \frac{(k+1)^2}{4}\tau}u(x,\tau)$$

con

$$k = \frac{2r}{\sigma^2}.$$

Lo único que varía ahora es la resolución de la ecuación de calor mediante el MDA. La condición inicial es $u(x,0) = u_0(x) = max(e^{\frac{(k+1)x}{2}} - e^{\frac{(k-1)}{2}x}, 0)$. Para usar el MDA, podemos definir los operadores diferenciales $L = \frac{d.}{d\tau}$, $R = \frac{d^2.}{dx^2}$, $N = 0$ y $g = 0$,

$$Lu = Ru. \tag{2.20}$$

Si aplicamos la inversa del operador $L^{-1} = \frac{d.}{d\tau}^{-1}$ en (2.20), nos queda:

$$L^{-1}Lu = L^{-1}Ru.$$

$$u(x,\tau) = u(x,0) + L^{-1}Ru. \tag{2.21}$$

Y si ahora aplicamos el inverso de R, R^{-1}, en (2.20) nos queda otra ecuación así:

$$R^{-1}Lu = R^{-1}Ru.$$

$$u(x,\tau) = u(0,t) + R^{-1}Lu. \tag{2.22}$$

Sumando 2.21 y 2.22 nos queda:

$$u = \frac{1}{2}[u(0,t) + u(x,0)] + \frac{1}{2}[L^{-1}Ru + R^{-1}Lu]$$

Como veíamos en (2.14), la solución de $u(x,\tau)$ se puede expresar como:

$$u(x,\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,\tau)$$

La solución de cada uno de estos términos se puede expresar de la siguiente forma [12]:

$$\begin{aligned}
u_0 &= \frac{1}{2}[u(0,t) + u(x,0)] = max(e^{\frac{(k+1)x}{2}} - e^{\frac{(k-1)}{2}x}, 0) \\
u_1 &= \frac{1}{2}[L^{-1}Ru + R^{-1}Lu] \;\; u_0 \\
u_2 &= \frac{1}{2}[L^{-1}Ru + R^{-1}Lu] \;\; u_1 \\
u_n &= \frac{1}{2}[L^{-1}Ru + R^{-1}Lu] \;\; u_{n-1}.
\end{aligned}$$

La solución viene dada entonces por la enésima aproximación

$$\phi(x,\tau) = \sum_{n=0}^{n-1} u_n(x,\tau) \sim u(x,\tau)$$

Así nos queda $v(x,\tau)$ igual a:

$$v(x,\tau) = e^{-\frac{(k-1)}{2}x - \frac{(k+1)^2}{4}\tau}\phi(x,\tau)$$

De este modo hemos conseguido resolver nuestro problema de Cauchy mediante su transformación a una EC. Lo único que hay que hacer para calcular entonces $C(S,t)$, es deshacer dichos cambios de variable (2.3), para dejar la ecuación en sus parámetros originales. La fórmula para el *call* europeo nos queda entonces cómo:

$$C(S,t) = E^{1-\frac{k-1}{2}} S^{\frac{k-1}{2}} e^{-\frac{(k+1)^2\sigma^2}{8}(T-t)}\phi(x,\tau)$$

y con $k = \frac{2r}{\sigma^2}$, la fórmula para el *call* europeo nos queda entonces cómo:

$$\boxed{C(S,t) = E^{1-\frac{2r-\sigma^2}{\sigma^2}} S^{\frac{2r-\sigma^2}{\sigma^2}} e^{\frac{2r+\sigma^2)^2}{8\sigma^2}(T-t)}\phi(x,\tau).} \tag{2.23}$$

Aplicación a un caso real para un call del Banco Santander

Al igual que en la sección anterior, vamos a introducir valores a nuestras variables para calcular el valor de la opción $C(S,t)$, en función de la solución analítica que hemos conseguido gracias al método de descomposicion de Adomian. Para este problema vamos a considerar los párametros de una opción de compra del Banco Santander que tiene como activo subyacente la propia acción del Banco. Los párametros los tenemos a fecha 19/03/2024, y han sido proporcionados por el banco. Lo que vamos a realizar es una tabla comparativa del precio real, con distintos vencimientos y *strike prices*, con el precio que nos da nuestra ecuación (2.23) si le metemos los mismos valores. Los únicos valores que van a permenecer constantes son $\sigma = 0{,}025$ que representa la volatilidad, $r = 0{,}03$ que la tasa libre de riesgo, y el precio del activo subyacente (en este caso la acción del banco), que a 19 de marzo estaba a $S = 4{,}19$. Para este caso del MDA, además tenemos que especificar que la convergencia que mencionábamos en [14–16], nos permite calcular solo los seis primeros términos de $\phi(x, \tau)$, ya que a partir de seis la serie converge y no importa que incrementemos el número de términos calculados.

Strike Price(€)	**Tiempo a Vencimiento**	**Precio Call(€)**	**Solución MDA(€)**	**Error**
2.7	3 días	1.38	1.45	0.048
2.60	1 mes	1.50	1.55	0.032
1.70	3 meses	2.5	2.38	0.050
1.90	6 meses	2.2	2.22	0.00
1.60	1 año	2.4	2.60	0.077

Cuadro 2.2: Tabla de valores de opción Banco Santander. Comparativa MDA

Conclusiones

En este trabajo se ha conseguido fundamentalmente tres cosas

1. Hacer un recorrido por la historia del cáclculo estocástico para llegar finalmente a la ecuación de Black-Scholes, una de las ecuaciones más importantes de a historia de las finanzas, y que permitió por primera vez valorar opciones de manera precisa, siendo además la piedra angular del desarrollo matemático de nuevos derivados financieros.

2. Realizar la integración analítica de la ecuación mediante dos métodos distintos. Primero, mediante el uso de la transformada de Fourier, que consiste en:

   - Mediante cambios de variable, llegar de la EBS original a una ecuación diferencial similar a la EC[3].
   - Luego se aplica la TF a dicha ecuación diferencial, para que nos quede una ecuación lineal de primer orden que podemos resolver(en nuestro caso mediante el método de variables separadas).
   - Posteriormente, se aplica la transformada inversa a nuestra ecuación resuelta $\tilde{u}(x, \tau)$, para conseguir $u(x, \tau)$. En este paso aplicamos también la condición inicial impuesta por nosotros, que nos sirve para calcular la solución analítica particular que habíamos definido en la sección 2.1A.
   - Por último, se deshacen los cambios de variable hechos a la EBS, y así conseguimos una solución analítica en función de los términos originales de la ecuación.

   El siguiente método que hemos aplicado ha sido el de descomposición en polinomios de Adomian:

   - Identificando primero los distintos operadores diferenciales en la ecuación de la opción financiera.
   - Luego hemos planteado el problema de Cauchy, donde hemos reducido el problema a uno de difusión. Para desarrollar la solución como una serie de integración sucesiva.
   - Una vez tienes la EC calculada como una serie, deshaces los cambios de variable para calcular el valor de la opción de compra.

3. En última instancia, lo que se ha buscado ha sido realizar el cálculo del precio de una opción de compra europea a través de dos formas distintas. Ambas con una integración analítica, donde se ha resuelto el problema de Cauchy mediante el uso de la TF primero, y mediante el MDA después. Las dos soluciones a las que hemos

[3]Para desarrollo de diferencia entre ambas ver sección 2.1A.

llegado, bajo los mismos parámetros, son las de las tablas 2.2 y 2.1. Por comparara un poco, la media de error para cada método ha sido de:

a) Solución analítica TF: 0,0284.

b) Solución analítica MDA: 0,0413.

En definitiva, este trabajo no solo refuerza mi conocimiento teórico sobre el cálculo estocástico y la valoración de opciones, sino que también ofrece una base sólida para mis futuras investigaciones y aplicaciones en el campo de las finanzas cuantitativas. Además hemos conseguido validar la robustez y utilidad de las metodologías empleadas, ya que, aunque presentan ligeras diferencias en los errores medios, muestran su proximidad a la realidad para un rango de precios y valores.

Declaración de Uso de Herramientas de Inteligencia Artificial Generativa en Trabajos Fin de Grado

ADVERTENCIA: Desde la Universidad consideramos que ChatGPT u otras herramientas similares son herramientas muy útiles en la vida académica, aunque su uso queda siempre bajo la responsabilidad del alumno, puesto que las respuestas que proporciona pueden no ser veraces. En este sentido, NO está permitido su uso en la elaboración del Trabajo fin de Grado para generar código porque estas herramientas no son fiables en esa tarea. Aunque el código funcione, no hay garantías de que metodológicamente sea correcto, y es altamente probable que no lo sea.

Por la presente, yo, Álvaro Pereña Rego, estudiante de ADE y Derecho de la Universidad Pontificia Comillas al presentar mi Trabajo Fin de Grado titulado *Resolución analítica de la ecuación diferencial de Black Scholes. Aplicación al estudio de activos financieros"*, declaro que he utilizado la herramienta de Inteligencia Artificial Generativa ChatGPT u otras similares de IAG de código sólo en el contexto de las actividades descritas a continuación:

1. Referencias: Usado conjuntamente con otras herramientas, como Science, para identificar referencias preliminares que luego he contrastado y validado.
2. Metodólogo: Para descubrir métodos aplicables a problemas específicos de investigación.
3. Estudios multidisciplinares: Para comprender perspectivas de otras comunidades sobre temas de naturaleza multidisciplinar.
4. Constructor de plantillas: Para diseñar formatos específicos para secciones del trabajo.
5. Generador de problemas de ejemplo: Para ilustrar conceptos y técnicas.
6. Revisor: Para recibir sugerencias sobre cómo mejorar y perfeccionar el trabajo con diferentes niveles de exigencia.

Afirmo que toda la información y contenido presentados en este trabajo son producto de mi investigación y esfuerzo individual, excepto donde se ha indicado lo contrario y se han dado los créditos correspondientes (he incluido las referencias adecuadas en el TFG y he explicitado para que se ha usado ChatGPT u otras herramientas similares). Soy consciente de las implicaciones académicas y éticas de presentar un trabajo no original y acepto las consecuencias de cualquier violación a esta declaración.

Fecha: 5/05/2024

Firma: Álvaro Pereña

Bibliografía

Introducción

[1] Bachelier L. *Theory of Speculation: The origins of Modern Finance.* Princeton University Press (2006)

[2] Lawler G.F. *Introduction to Stochastic processes.* 2^{nd} edition, Taylor and Francis Group (2006)

[3] Einstein. A. *Investigations on the Theory of the Brownian Movement.* Dover Publications (1956)

[4] Mazo R.M. *Brownian Motion, Fluctuations, Dynamics and Applications.* Oxford University Press (2002)

[5] Fraser D. *The Rate of Convergence of a Random Walk to Brownian Motion.* The Annals of Probability, Vol. 1, nº4, pp. 699-701 (1973)

http://www.jstor.org/stable/2959439?origin=JSTOR-pdf

[6] P. Griffin, T. McConnell *Gambler's Ruin and the First Exit Position of Random Walk from Large Spheres.* The Annals of Probability, Vol. 22, nº3, pp. 1429-1472 (1994)

10.1214/aop/1176988608

[7] Euler L. *Foundations of Differential Calculus.* Springer (2000)

[8] Itô K. *Stochastic Integral.* Proceedings of the Imperial Academy, Vol. 20, nº8, pp 519-524 (1944)

https://doi.org/10.3792/pia/1195572786

[9] Itô K. *Kiyoshi Itô Selected papers.* Springer-Verlag (1987)

[10] F. Black, M. Scholes *The pricing of options and corporate liabilities.* The journal of political economy, Vol.81, nº3, pp 637-654 (1973)

http://www.jstor.org/stable/1831029

[11] Hull J.C. *Options, Futures, and Other Derivatives.* 5^{th} edition, Pearson Education (2003)

Método de descomposición de Adomian

[12] Adomian G. *Nonlinear Stochastic Operator Equations.* Academic Press (1986)

[13] Abdul-Majid Wazwaz *A new algorithm for calculating adomian polynomials for nonlinear operators.* Applied Mathematics and Computation, Vol. 111, nº1, pp 33-51 (2000)

https://doi.org/10.1016/S0096-3003(99)00063-6

[14] K. Abbaoui, Y. Cherruault. *Convergence of of Adomian's method applied to differential equations.* Computers Math Applied, Vol.8, nº5, pp 103-109 (1994)

https://doi.org/10.1016/0898-1221(94)00144-8

[15] Y. Cherruault, G. Adomian *Decomposition methods: Anew proof of convergence.* Mathematical and Computer Modelling, Vol. 18, nº12, pp 103-106 (1993)

https://doi.org/10.1016/0895-7177(93)90233-O

[16] Cherruault Y. *Convergence of Adomian's method.* Mathematical and Computer Modelling, Vol. 14, pp 83-86 (1990)

https://doi.org/10.1016/0895-7177(90)90152-D