



**COMILLAS**

UNIVERSIDAD PONTIFICIA

**ICAI**

GRADO EN INGENIERÍA MATEMÁTICA  
E INTELIGENCIA ARTIFICIAL

TRABAJO FIN DE GRADO

ECUACIONES  
DIFERENCIALES  
ESTOCÁSTICAS

**Autora: Jimena Monteagudo Ruiz**

**Director: Manuel Villanueva Pesqueira**

**Co-Directora: Estrella Alonso Pérez**

Madrid, 11 de Junio, 2025

Declaro, bajo mi responsabilidad, que el Proyecto presentado con el título **Ecuaciones Diferenciales Estocásticas** en la ETS de Ingeniería - ICAI de la Universidad Pontificia Comillas en el curso académico 2024/25 es de mi autoría, original e inédito y no ha sido presentado con anterioridad a otros efectos.

El Proyecto no es plagio de otro, ni total ni parcialmente y la información que ha sido tomada de otros documentos está debidamente referenciada.

Fdo.: **Jimena Monteagudo Ruiz**

Fecha: 11/06/2025

Autorizada la entrega del proyecto

**EL DIRECTOR DEL PROYECTO**

Fdo.: **Manuel Villanueva Pesqueira**

Fecha: 10/06/2025

## AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer a todas las personas que he tenido a mi lado durante la realización de este TFG y a lo largo de los cuatro años del grado.

En primer lugar, quería agradecer a mis padres su apoyo en todo momento. Por darme la oportunidad de estudiar en Madrid en ICAI y darme fuerzas para seguir cuando pensaba que no sería capaz.

Gracias también a mi abuela, por ser una segunda madre y acompañarme en todas las etapas de mi vida.

Por supuesto gracias también a mis amigos, que han estado ahí en el día a día y han sido un apoyo incondicional e imprescindible durante estos cuatro años.

Y finalmente mi más profundo agradecimiento a Estrella y Manuel por su paciencia y dedicación, además de guiarme y acompañarme en la realización de este TFG. Y a Manuel también por estar presente y cercano como tutor desde el primer año.

## STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS

**Author: Jimena Monteagudo Ruiz**

Supervisor: Manuel Villanueva Pesqueira

Co-Supervisor: Estrella Alonso Pérez

Collaborating Institution: Universidad Pontificia Comillas – ICAI

## Summary

Stochastic differential equations (SDEs) provide a solid foundation for modeling phenomena with uncertainty, such as the evolution of prices in financial markets. This project compares the numerical methods of Euler-Maruyama and Milstein, as well as the Black-Scholes and Heston models, applying each to simulations on the SPY ETF. The results show that Milstein improves accuracy over Euler-Maruyama, while Heston better captures real market dynamics compared to Black-Scholes, thanks to its stochastic volatility. Thus, the study demonstrates that choosing advanced models and methods, along with appropriate parameter selection, is key to realistically approximating SDE solutions and financial movements.

**Palabras clave:** stochastic differential equations, Euler-Maruyama, Milstein, Black-Scholes, Heston, Monte Carlo simulation.

## 1. Introduction

Stochastic Differential Equations (SDEs) are an extension of traditional Ordinary Differential Equations (ODEs), which allow the modeling of dynamic systems involving uncertainty or random noise, [1, 2]. They combine concepts from differential and integral calculus with probability theory, enabling them to describe natural phenomena that exhibit variability.

SDEs have been applied to numerous fields. Initially developed to model Brownian motion, their applications now span diverse domains including quantitative finance, systems biology, engineering, and artificial intelligence. In the field of AI, SDEs have been fundamental because they provide a solid foundation for analyzing algorithms and modeling uncertainty in some data and predictions.

## 2. Project Definition

This project focuses on the study and application of Stochastic Differential Equations (SDEs). The first objective of this project is to understand the theoretical foundations of SDEs, including their formulation, properties, the stochastic processes involved, and of course, the most common solution methods such as Itô calculus.

Furthermore, on a practical level, some of the resolution techniques,[4], such as the Euler-Maruyama and Milstein methods, will be automated using Python code in order to solve basic SDEs.

Finally, all the acquired knowledge will be applied to a practical case. Approximate solution models for SDEs will be applied to equations used in stock price valuation, and the results will be compared to the real values of companies listed in the S&P 500. Additionally, a comparison will be made between the different methods and models used.

### 3. Description of the Model/System/Tool

Several Python scripts have been implemented in this project. Initially, a program was developed to solve well-behaved SDEs with Lipschitz-continuous coefficients using the Euler-Maruyama method, and another to solve SDEs using the strong convergence Milstein method, [4].

A comparison was also made between two classical stochastic models for financial price evolution, [5]: the Black-Scholes and Heston models, both based on the use of SDEs. For the first one, the Black-Scholes model, a script was created to simulate stock price trajectories assuming constant volatility at all times. The exact solution obtained with this model is compared to the solution of the same SDE computed using the Euler-Maruyama method with a Monte Carlo approximation.

In addition, the Heston model was implemented, whose main difference from the Black-Scholes model lies in the introduction of stochastic volatility, [3]—more closely resembling the behavior of real-world stock prices. It is also compared to the solution obtained using the Black-Scholes model.

Finally, the predictions from the aforementioned methods were compared with the actual values of stock prices from companies in the S&P 500 index. For this purpose, another Python script was implemented.

### 4. Results

All the codes used to obtain the results can be found in the following GitHub repository [6].

The Euler-Maruyama method has proven to be effective in approximating solutions to SDEs in various scenarios, showing low errors especially when the noise is moderate and the deterministic component is small. However, its accuracy decreases in situations of high volatility or when the process is strongly decreasing.

The Milstein method offers greater accuracy than Euler-Maruyama, with significantly lower final errors for the same test cases. Thanks to its additional correction term, Milstein is able to more precisely reproduce the exact solution, especially in high-volatility environments.

The comparison between the Monte Carlo simulation based on Euler-Maruyama and the exact solution of the Black-Scholes model for European call options shows that both produce very similar results, with differences below 2%. This confirms the validity of Euler-Maruyama in real financial contexts and its usefulness for estimating option prices under uncertainty.

When comparing the Heston model to the Black-Scholes solution, it is observed that Heston yields slightly lower valuations due to stochastic volatility. In this way, it better reflects the risks associated with volatile markets. The differences range between 1.5% and 5.5%, demonstrating Heston's ability to achieve greater realism in the evolution of financial prices.

Finally, regarding the comparison of methods and models with the SPY. The results show that the Milstein method and the Heston model better approximate the actual evolution of the SPY ETF price compared to Euler-Maruyama and Black-Scholes, especially in capturing episodes of high volatility. However, although these advanced models reduce the error and improve visual fit, it remains impossible to predict market movements with complete accuracy, so all simulations provide only a limited approximation of reality.

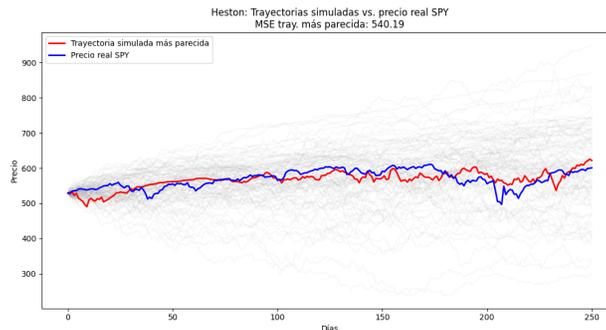


Figura 1: Comparison between the closest simulated trajectory generated with the Heston model and the actual price of the SPY ETF over one year.

## 5. Conclusions

Throughout this project, the usefulness of stochastic differential equations and their numerical methods has been clearly demonstrated, with particular emphasis on their performance in financial markets. It has been shown that the Milstein method provides greater accuracy than Euler-Maruyama, while models like Heston better capture the real dynamics of the markets compared to Black-Scholes. However, proper parameter calibration remains essential to

improve the reliability of the simulations and is proposed as an important avenue for future research.

## References

- [1] Arnold, L. (1974). Stochastic differential equations: Theory and applications. Wiley.
- [2] Evans, L. C. (2013). An introduction to stochastic differential equations (Vol. 82). American Mathematical Soc.
- [3] Fouque, J.-P., Papanicolaou, G., & Sircar, K. R. (2000). Derivatives in financial markets with stochastic volatility. Cambridge, United Kingdom: Cambridge University Press. ISBN 978-0-521-79163-3.
- [4] Kloeden, P.E., & Platen, E. (1992). Numerical Solution of Stochastic Differential Equations. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- [5] Shreve, S. E. (2010, 2014). Stochastic Calculus for Finance I: The Binomial Asset Pricing Model and Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models. Springer.
- [6] Monteagudo, J. (2025). *Ecuaciones diferenciales estocásticas*. GitHub repository. Available at: [https://github.com/jimenaamr/ecuaciones\\_diferenciales\\_estocasticas.git](https://github.com/jimenaamr/ecuaciones_diferenciales_estocasticas.git).

## ECUACIONES DIFERENCIALES ESTOCÁSTICAS

**Autor: Jimena Monteagudo Ruiz**

Director: Manuel Villanueva Pesqueira

Co-Directora: Estrella Alonso Pérez

Entidad Colaboradora: Universidad Pontificia Comillas – ICAI

## Resumen

Las ecuaciones diferenciales estocásticas (EDEs) ofrecen una base sólida para modelar fenómenos con incertidumbre, como la evolución de precios en los mercados financieros. Este trabajo compara los métodos numéricos de Euler-Maruyama y Milstein, así como los modelos de Black-Scholes y Heston, aplicando cada uno a simulaciones sobre el ETF SPY. Los resultados muestran que Milstein mejora la precisión frente a Euler-Maruyama, mientras que Heston captura mejor la dinámica real del mercado respecto a Black-Scholes, gracias a su volatilidad estocástica. Así, se demuestra que elegir modelos y métodos avanzados, además de sus parámetros, es clave para aproximar las soluciones de las EDEs y los movimientos financieros de forma más realista.

**Palabras clave:** ecuaciones diferenciales estocásticas, Euler-Maruyama, Milstein, Black-Scholes, Heston, simulación Monte Carlo.

## 1. Introducción

Las ecuaciones diferenciales estocásticas (EDEs) son una extensión de las EDOs tradicionales, que permiten modelar sistemas dinámicos en los que existe incertidumbre o ruido aleatorio, [1, 2]. Combinan conceptos del cálculo diferencial e integral con teoría de la probabilidad, lo que les permite describir fenómenos naturales que presentan variabilidad.

Las EDEs se han empleado en numerosas tareas como el movimiento browniano en física o la evolución de los mercados financieros. Son muy versátiles ya que se emplean en campos muy diferentes como la biología, la ingeniería y la IA. En el ámbito de la IA, las EDEs han sido fundamentales porque proporcionan una base sólida para analizar algoritmos y para modelar la incertidumbre en algunos datos y predicciones.

## 2. Definición del proyecto

Este proyecto se centra en el estudio y la aplicación de las ecuaciones diferenciales estocásticas (EDEs). El primer objetivo de este trabajo es entender las bases teóricas de las EDEs, entre las que se incluyen la formulación, las propiedades, los procesos estocásticos que intervienen y, por supuesto, los métodos de resolución más habituales como los métodos de

Itô.

A continuación, a nivel práctico, se automatizarán algunas de las técnicas de resolución mediante código de Python para poder obtener la solución de algunas de estas ecuaciones sencillas, como los métodos de Euler-Maruyama y de Milstein.

Finalmente, se aplicarán todos los conocimientos obtenidos a un caso práctico. Se aplicarán modelos de resolución aproximados de las EDEs a algunas empleadas en el cálculo del valor de las acciones de bolsa y se compararán con sus valores reales de las empresas del S&P500. Además, se realizará una comparación entre los distintos métodos y modelos empleados.

### 3. Descripción del modelo/sistema/herramienta

En este trabajo se han implementado varios códigos de Python. En un primer momento se ha desarrollado un programa que resuelve numéricamente EDEs mediante el método de Euler-Maruyama y otro que resuelve numéricamente EDEs mediante el método de convergencia fuerte de Milstein, [4].

También se ha realizado una comparación de dos modelos estocásticos clásicos para la evolución de precios financieros, [5]. Para el modelo de Black-Scholes, se ha creado un código que simula trayectorias de precios de opciones asumiendo que la volatilidad es constante. La solución exacta obtenida con este modelo se compara con la resolución de la misma EDE realizada con el método de Euler-Maruyama.

Por otro lado, también se ha implementado el modelo de Heston, en el que se introduce una volatilidad estocástica, [3], más similar a lo que ocurre con la bolsa en el mundo real. También se compara con la solución obtenida mediante el modelo de Black-Scholes.

Finalmente se ha realizado la comparación de las predicciones de los métodos mencionados anteriormente con los valores reales que han adquirido las acciones de las empresas del S&P500. Para ello se ha implementado otro código de Python.

### 4. Resultados

Todos los códigos con los que se obtienen los resultados se encuentran en el siguiente repositorio de GitHub[6].

El método de Euler-Maruyama ha demostrado ser eficaz para aproximar soluciones de EDEs en diferentes escenarios, mostrando errores bajos especialmente cuando el ruido es moderado y la componente determinista es reducida. Sin embargo, su precisión disminuye en situaciones de alta volatilidad o cuando el proceso es fuertemente decreciente.

El método de Milstein ofrece una precisión superior a la de Euler-Maruyama, con errores finales mucho más reducidos para los mismos casos de prueba. Gracias a su término de corrección adicional, Milstein logra reproducir de forma más precisa la solución exacta, especialmente en entornos de alta volatilidad.

La comparación entre la simulación Monte Carlo basada en Euler-Maruyama y la solución exacta de Black-Scholes para opciones call europeas muestra que ambos producen resultados muy similares, con diferencias inferiores al 2%. Esto confirma la validez de Euler-Maruyama en contextos financieros reales y su utilidad para estimar precios de opciones bajo incertidumbre.

Al comparar el modelo de Heston con la solución de Black-Scholes, se observa que Heston obtiene valoraciones ligeramente inferiores debido a la volatilidad estocástica. De esta forma, refleja mejor los riesgos asociados a mercados variables. Las diferencias oscilan entre el 1,5% y el 5,5%, lo que demuestra la capacidad de Heston para lograr un mayor realismo en la evolución de precios financieros.

Por último, en cuanto a la comparación de los métodos y modelos con el SPY. Los resultados muestran que los métodos de Milstein y el modelo de Heston consiguen una mejor aproximación en comparación con Euler-Maruyama y Black-Scholes, especialmente en episodios de alta volatilidad. Sin embargo, aunque estos modelos avanzados reducen el error, sigue siendo imposible predecir con exactitud los movimientos del mercado.

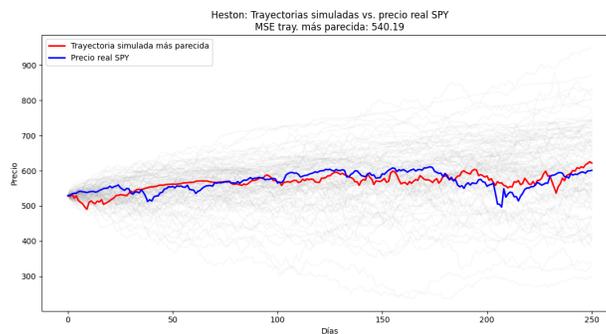


Figura 2: Comparación entre la trayectoria simulada más parecida generada con el modelo de Heston y el precio real del ETF SPY durante un año.

## 5. Conclusiones

A lo largo de todo el trabajo se ha puesto en evidencia la utilidad de las ecuaciones diferenciales estocásticas y sus métodos numéricos. Se ha destacado especialmente su desempeño en el ámbito de los mercados financieros. Se ha visto que el método de Milstein proporcio-

na una mayor precisión que Euler-Maruyama, mientras que modelos como Heston permiten captar mejor la dinámica real de los mercados frente a Black-Scholes. Sin embargo, la correcta calibración de los parámetros sigue siendo esencial para mejorar la fiabilidad de las simulaciones y se plantea como una vía importante de investigación futura.

## Referencias

- [1] Arnold, L. (1974). Stochastic differential equations: Theory and applications. Wiley.
- [2] Evans, L. C. (2013). An introduction to stochastic differential equations (Vol. 82). American Mathematical Soc.
- [3] Fouque, J.-P., Papanicolaou, G., & Sircar, K. R. (2000). Derivatives in financial markets with stochastic volatility. Cambridge, United Kingdom: Cambridge University Press. ISBN 978-0-521-79163-3.
- [4] Kloeden, P.E., & Platen, E. (1992). Numerical Solution of Stochastic Differential Equations. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- [5] Shreve, S. E. (2010, 2014). Stochastic Calculus for Finance I: The Binomial Asset Pricing Model and Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models. Springer.
- [6] Monteagudo, J. (2025). *Ecuaciones diferenciales estocásticas*. GitHub repository. Available at: [https://github.com/jimenaamr/ecuaciones\\_diferenciales\\_estocasticas.git](https://github.com/jimenaamr/ecuaciones_diferenciales_estocasticas.git).

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Contexto y Motivación . . . . .	1
1.2. Objetivos . . . . .	1
1.3. Planificación . . . . .	2
1.4. Estructura del Trabajo . . . . .	3
<b>2. Estado del Arte</b>	<b>3</b>
<b>3. Metodología</b>	<b>4</b>
3.1. Marco Teórico Matemático . . . . .	4
3.1.1. Ecuaciones Diferenciales Estocásticas (EDEs) . . . . .	4
3.1.2. Movimiento Browniano . . . . .	5
3.1.3. Integración Estocástica . . . . .	5
3.1.4. Método de Resolución de una EDE Lineal . . . . .	7
3.2. Métodos Numéricos . . . . .	10
3.2.1. Método de Euler-Maruyama . . . . .	10
3.2.2. Método de Milstein . . . . .	11
3.3. Marco Teórico Financiero . . . . .	12
3.3.1. Conceptos Financieros . . . . .	12
3.3.2. El modelo de Black-Scholes . . . . .	13
3.3.3. El modelo de Heston . . . . .	15
<b>4. Experimentos</b>	<b>16</b>
4.1. Objetivos . . . . .	16
4.2. Conjunto de Datos . . . . .	17
4.3. Aplicación de Euler-Maruyama y Milstein . . . . .	17
4.4. Comparación de Métodos y Modelos . . . . .	18
4.4.1. Comparación de Euler-Maruyama y Black-Scholes . . . . .	18
4.4.2. Comparación de Heston y Black-Scholes . . . . .	19
4.5. Comparación de Métodos y Modelos con el SPY . . . . .	19
<b>5. Resultados</b>	<b>20</b>
5.1. Implementación de Euler-Maruyama . . . . .	20
5.2. Implementación de Milstein . . . . .	23
5.3. Comparativa de Euler-Maruyama con la Solución Exacta . . . . .	26
5.4. Comparativa de Heston con la Solución Exacta . . . . .	26
5.5. Comparativa de Métodos y Modelos con el SPY . . . . .	28
<b>6. Conclusiones y Trabajos Futuros</b>	<b>30</b>
<b>7. Bibliografía</b>	<b>31</b>

# 1. Introducción

## 1.1. Contexto y Motivación

Las ecuaciones diferenciales estocásticas (EDEs) son una ampliación de las ecuaciones diferenciales tradicionales y se utilizan para modelar sistemas dinámicos en los que interviene incertidumbre o ruido aleatorio, [1, 2]. Estas ecuaciones combinan conceptos de cálculo diferencial e integral con teoría de la probabilidad, lo que permite describir fenómenos naturales donde la variabilidad es un factor relevante. Gracias a esta versatilidad, las EDEs se emplean en numerosos campos como la física (por ejemplo, para modelar el movimiento browniano), la evolución de los precios en los mercados financieros, [3], la biología, la ingeniería y la inteligencia artificial.

Su principal valor se encuentra en la capacidad de modelar sistemas donde el ruido y la incertidumbre son imprescindibles. A diferencia de los modelos deterministas, las EDEs permiten incorporar el factor aleatorio presente en la naturaleza y en fenómenos reales como la economía o la física, ampliando enormemente las posibilidades de análisis frente a los modelos clásicos. Por ello, centrarse sólo en modelos deterministas sería una visión muy limitada comparada con el potencial de los sistemas estocásticos.

En el campo de la inteligencia artificial, las ecuaciones diferenciales estocásticas han cobrado especial importancia, ya que proporcionan una base matemática para analizar algoritmos y modelar la incertidumbre en datos y predicciones. Ejemplos de su aplicación son el descenso de gradiente estocástico (stochastic gradient descent), que es fundamental en Deep Learning, o en modelos generativos avanzados como las redes de difusión, responsables de muchos de los avances recientes en generación de imágenes, texto y audio, ver por ejemplo [12].

Mi motivación para realizar este TFG es que supone una gran oportunidad para unir las dos grandes ramas que ha supuesto nuestro grado de Ingeniería Matemática e Inteligencia Artificial. Las EDEs nos permiten combinar algunos conceptos matemáticos complicados junto con sus aplicaciones prácticas que, como se ha mencionado antes, pueden estar muy relacionadas con la IA. Es por esto por lo que, entendiendo las EDEs, estaremos estudiando la base de algunas teorías de la probabilidad que pueden ser aplicadas en las nuevas tecnologías, combinando así la teoría matemática y la innovación, por lo que resulta un trabajo perfecto en el que combinar todo lo aprendido estos años.

## 1.2. Objetivos

A continuación, se explican los objetivos que se han seguido en este trabajo, en cuanto al estudio y la aplicación de las Ecuaciones Diferenciales Estocásticas (EDEs). En ellos se busca abarcar tanto los aspectos teóricos como los prácticos de este tipo de ecuaciones.

En primer lugar, el primer objetivo de este trabajo es estudiar en profundidad los fundamentos teóricos de las EDEs. Esto implica tanto analizar su formulación matemática como las propiedades que las distinguen de las ecuaciones diferenciales clásicas. Además, también se trata de entender los distintos procesos estocásticos que intervienen en ellas, como el movimiento browniano y otros procesos de ruido. Asimismo, se estudiarán algunas de las técnicas de resolución más utilizadas, como los métodos de Itô, que permiten analizar estas ecuaciones y encontrar la solución de algunos ejemplos. Este objetivo es fundamental para establecer una base sólida de conocimiento a partir de la cual realizar el trabajo.

El segundo objetivo consiste en modelar y resolver numéricamente una EDE, [10], para ello se realizará el desarrollo de un programa en Python que permita obtener soluciones aproximadas para estas ecuaciones. De esta forma, podremos realizar experimentos y pruebas con diferentes parámetros que nos permitan analizar e interpretar los resultados obtenidos.

En tercer lugar, se pretende aplicar estos conocimientos teóricos a un caso práctico, se investigará cómo las EDEs pueden representar aspectos de la vida real donde la incertidumbre juega un papel importante. Se modelará el movimiento del precio de acciones y su evolución en la bolsa. Para ello se emplearán diferentes modelos y métodos que nos permitan realizar una comparación sobre cuál de ellos es el más eficaz y puede predecir el precio en bolsa de una manera más precisa. Al analizar casos concretos podremos observar de manera más visual las ventajas y limitaciones de las EDEs en estas situaciones frente a otros métodos más deterministas.

Por último, se pretende realizar una comparación de los distintos métodos de predicción de la evolución de una empresa en la bolsa que se han implementado anteriormente con los precios reales que se han alcanzado en ese periodo de tiempo. Se realizará con las compañías del S&P500, de manera que veremos cómo se pueden emplear las EDEs en la predicción de precios de algunas de las mayores empresas del mercado actual. Se comparará el desempeño del método de Euler-Maruyama, el modelo de Black-Scholes y el de Heston, en el que la volatilidad tiene un factor estocástico.

### 1.3. Planificación

El desarrollo de este trabajo se ha dividido en cinco fases principales, que pueden verse resumidas en el cronograma de la Figura 3:

- **Fase 1: Introducción y Fundamentación Teórica.** Estudio de las bases matemáticas de las EDEs y de los procesos estocásticos involucrados.
- **Fase 2: Estudio de un Caso Práctico.** Selección y análisis teórico de un modelo concreto de aplicación.

- **Fase 3: Implementación Numérica.** Programación en Python de los métodos numéricos y simulación de resultados.
- **Fase 4: Comparación de Métodos Numéricos.** Evaluación de la precisión y eficiencia de varios esquemas de resolución.
- **Fase 5: Integración y Redacción Final.** Organización de resultados y elaboración de la memoria definitiva del TFG.

	Febrero					Marzo					Abril				Mayo			
	27-1	3-2	10-2	17-2	24-2	3-3	10-3	17-3	24-3	31-3	7-4	14-4	21-4	28-4	5-5	12-5	19-5	26-5
Fase 1																		
Fase 2																		
Fase 3																		
Fase 4																		
Fase 5																		

Figura 3: Cronograma del Trabajo Fin de Grado, mostrando la duración de cada fase.

## 1.4. Estructura del Trabajo

Este trabajo se organiza en cinco capítulos principales además de la introducción:

- **Capítulo 2: Estado del arte.** Revisión de los fundamentos matemáticos de las ecuaciones diferenciales estocásticas y sus aplicaciones más relevantes.
- **Capítulo 3: Metodología.** Descripción del enfoque seguido, la base teórica del trabajo y el desarrollo de los algoritmos numéricos.
- **Capítulo 4: Experimentos.** Presentación de los datos, diseño de los algoritmos e implementaciones en Python.
- **Capítulo 5: Resultados.** Exposición y análisis de los resultados obtenidos con los distintos métodos numéricos y su comparación con datos reales.
- **Capítulo 6: Conclusiones.** Resumen de los hallazgos principales y propuestas para trabajos futuros.

## 2. Estado del Arte

Las ecuaciones diferenciales estocásticas (EDEs) permiten modelar sistemas dinámicos con incertidumbre, y son fundamentales en diversos ámbitos científicos y tecnológicos. En finanzas, han transformado la modelización del precio de activos, tipos de interés o derivados.

El modelo de Black-Scholes [5] fue pionero en aplicar el cálculo estocástico, representando el precio de un activo mediante un movimiento browniano junto con una parte determinista.

Posteriormente, se han propuesto modelos que incluyen volatilidad estocástica [6] y saltos [7, 8], así como formulaciones más generales mediante procesos de Lévy y modelos afines [9], que reflejan con mayor fidelidad las características empíricas de los mercados.

Además de su importancia financiera, las EDEs han adquirido un nuevo protagonismo en el contexto de la inteligencia artificial. Modelos generativos como los de difusión, ampliamente usados en generación de imágenes y series temporales, se basan directamente en formulaciones estocásticas [12]. Esta conexión ha impulsado un renovado interés por el análisis y la simulación eficiente de estas ecuaciones, tanto desde el punto de vista teórico como computacional.

Actualmente, las EDEs se estudian mediante técnicas de análisis estocástico, esquemas numéricos como Euler-Maruyama o Monte Carlo [10], y métodos de aprendizaje automático para inferir dinámicas desde datos reales [11].

## 3. Metodología

### 3.1. Marco Teórico Matemático

#### 3.1.1. Ecuaciones Diferenciales Estocásticas (EDEs)

Una ecuación diferencial estocástica (EDE) es un elemento matemático que permite describir cómo cambia una variable a lo largo del tiempo. Se tiene que tener en cuenta un factor aleatorio, además de la evolución predecible que hemos podido observar en otros procesos deterministas. De esta forma, se pueden distinguir enormemente de las EDOs, que sólo consideran cómo evoluciona una variable según unas reglas fijas. Las EDEs añaden un componente aleatorio que simula la incertidumbre característica de muchos fenómenos reales.

El término “estocástico” hace referencia precisamente a esta parte aleatoria, que se suele modelar mediante procesos como el movimiento browniano.

Este tipo de ecuaciones es especialmente útil en contextos donde la incertidumbre y la aleatoriedad son claves. Un ejemplo de gran relevancia es el de los mercados financieros, donde el precio de un activo no solo responde a tendencias generales, sino también a factores impredecibles como noticias, cambios en la economía o el simple comportamiento de los inversores. Las EDEs permiten, por tanto, modelar de forma más realista la evolución de precios y otras variables económicas o físicas que dependen de un componente aleatorio importante.

### 3.1.2. Movimiento Browniano

El movimiento browniano estándar, también llamado proceso de Wiener, es un proceso aleatorio imprescindible para modelar la incertidumbre que se emplea en la resolución de EDEs. Formalmente, se trata de una función aleatoria  $W(t)$  definida en el intervalo de tiempo  $[0, T]$  que cumple tres condiciones.

- i) Comienza en cero:  $W(0) = 0$  con probabilidad 1.
- ii) Para cualquier par de instantes  $0 \leq s < t \leq T$ , el incremento  $W(t) - W(s)$  es una variable aleatoria normalmente distribuida con media cero y varianza igual a  $t - s$ ; es decir,  $W(t) - W(s) \sim N(0, t - s)$ . Esto implica que los cambios en el movimiento browniano son impredecibles, pero estadísticamente controlados.
- iii) Los incrementos tomados sobre intervalos que no se solapan son independientes; por ejemplo, el incremento entre  $s$  y  $t$  es independiente del incremento entre  $u$  y  $v$ , siempre que los intervalos no coincidan.

Para realizar simulaciones numéricas del movimiento browniano, se suele utilizar una versión discretizada. El intervalo de tiempo se divide en pasos pequeños de tamaño  $\delta t$ , y cada incremento se genera como una variable aleatoria independiente con distribución normal de media cero y varianza  $\delta t$ . Así, se va formando la trayectoria sumando estos incrementos paso a paso. De esta forma se consiguen representar caminos aleatorios y aproximar la evolución del proceso.

Teniendo todo esto en cuenta, vemos que el movimiento browniano se puede emplear como base en las EDEs, las cuales incluyen ruido y un componente aleatorio.

### 3.1.3. Integración Estocástica

La integración estocástica parte de la integral clásica de Riemann y la aplica en el caso en que se debe integrar un proceso aleatorio, como el movimiento browniano. Para entender la diferencia, recordemos que la integral de Riemann de una función  $h(t)$  sobre el intervalo  $[0, T]$  se aproxima mediante sumas del tipo:

$$\int_0^T h(t) dt \approx \sum_{j=0}^{N-1} h(t_j) (t_{j+1} - t_j)$$

donde se divide el intervalo en subintervalos  $[t_j, t_{j+1}]$  y se multiplica el valor de la función en un punto representativo por la anchura del subintervalo.

En el caso estocástico, la integral respecto al movimiento browniano se toma como:

$$\int_0^T h(t) dW(t)$$

Existen dos interpretaciones principales para aproximarlos de forma discreta, la de Itô y la de Stratonovich.

En primer lugar, se desarrollará la integral de Itô. Esta utiliza el valor de  $h$  en el extremo izquierdo del intervalo, y se aproxima por la suma

$$\sum_{j=0}^{N-1} h(t_j) [W(t_{j+1}) - W(t_j)]$$

Por ejemplo, si se toma  $h(t) = W(t)$ , el desarrollo matemático da lugar a la identidad:

$$\int_0^T W(t) dW(t) = \frac{1}{2} [W(T)^2 - T]$$

Esta fórmula muestra una diferencia notable respecto a la integral de Riemann, ya que el término  $-T/2$  aparece debido al movimiento browniano.

En el caso de la integral Stratonovich, se evalúa  $h$  en el punto medio de cada intervalo, lo que da la suma:

$$\sum_{j=0}^{N-1} h\left(\frac{t_j + t_{j+1}}{2}\right) [W(t_{j+1}) - W(t_j)]$$

Si de nuevo  $h(t) = W(t)$ , el resultado es distinto:

$$\int_0^T W(t) \circ dW(t) = \frac{1}{2} W(T)^2$$

donde el símbolo  $\circ dW(t)$  indica integración en el sentido de Stratonovich. Esta diferencia aparece porque, en integración estocástica, la elección del punto de evaluación afecta al valor de la integral, algo que no sucede en la integración determinista.

Las fórmulas desarrolladas muestran cómo se calculan estas sumas. Por ejemplo, la suma

$$\sum_{j=0}^{N-1} W(t_j) [W(t_{j+1}) - W(t_j)]$$

y su versión de Stratonovich,

$$\sum_{j=0}^{N-1} \frac{W(t_j) + W(t_{j+1})}{2} [W(t_{j+1}) - W(t_j)]$$

son aproximaciones a las integrales estocásticas correspondientes. Se observa también que para la integral de Itô el valor esperado es cero y la varianza crece linealmente con el tiempo, mientras que para Stratonovich se consigue el valor clásico de la integral en el caso de procesos suaves.

En el caso de las EDEs, es más empleado el método de Itô debido a que presenta propiedades matemáticas que facilitan el análisis de EDEs, como la fórmula de Itô, que es una versión estocástica de la regla de la cadena. Además, en la integral de Itô cada paso sólo depende del pasado, lo que encaja con modelos de predicción en finanzas y otras áreas en las que se emplea.

### 3.1.4. Método de Resolución de una EDE Lineal

En las ecuaciones diferenciales ordinarias, las reglas de derivación y cambio de variable son las propias del cálculo clásico. Si una variable  $x(t)$  satisface  $dx/dt = f(x)$ , la derivada de una función compuesta  $V(x(t))$  respecto al tiempo se obtiene aplicando la regla de la cadena:

$$\frac{dV(x(t))}{dt} = \frac{dV}{dx}(x(t)) \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dV}{dx}(x(t)) \cdot f(x(t))$$

Sin embargo, cuando  $x(t)$  sigue una ecuación diferencial estocástica de la forma

$$dx(t) = f(x(t)) dt + g(x(t)) dW(t)$$

no se puede aplicar la regla de la cadena clásica. Intuitivamente, podríamos pensar que

$$dV(x(t)) = \frac{dV}{dx}(x(t)) [f(x(t)) dt + g(x(t)) dW(t)]$$

pero en el contexto estocástico, debido a las propiedades del movimiento browniano, aparece un término adicional. La fórmula de Itô establece que:

$$dV(x(t)) = \frac{dV(x(t))}{dx} [f(x(t)) dt + g(x(t)) dW(t)] + \frac{1}{2}g(x(t))^2 \frac{d^2V(x(t))}{dx^2}$$

Este término extra es consecuencia de las reglas del cálculo de Itô, que dictan:

$$(dW)^2 = dt, \quad dt \cdot dW = 0, \quad (dt)^2 = 0$$

A continuación, se realizará el desarrollo del procedimiento para resolver una EDE de la forma:

$$dx = b(x)dt + dW$$

Comenzamos realizando el cambio de variable  $u(x)$

$$du(x) = u'(x)dx + \frac{1}{2}u''(x)dx^2 + \dots$$

$$= u'(x) [b(x)dt + dW] + \frac{1}{2}u''(x) [b(x)dt + dW]^2 + \dots$$

Empleando las reglas del cálculo de Itô mencionadas anteriormente:

$$= u'(x) [b(x)dt + dW] + \frac{1}{2}u''(x)(dW)^2 + \dots$$

$$= \left[ u'(x)b(x) + \frac{1}{2}u''(x) \right] dt + u'(x)dW + \dots$$

$$\boxed{du(x) = \left[ u'(x)b(x) + \frac{1}{2}u''(x) \right] dt + u'(x)dW}$$

También se realizará el desarrollo del procedimiento para EDEs de la forma:

$$dx = b(x)dt + a(x)dW$$

Con el mismo cambio de variable  $u(x)$

$$du(x) = u'(x)dx + \frac{1}{2}u''(x)dx^2 + \dots$$

$$= u'(x) [b(x)dt + a(x)dW] + \frac{1}{2}u''(x) [b(x)dt + a(x)dW]^2 + \dots$$

$$= u'(x) [b(x)dt + a(x)dW] + \frac{1}{2}u''(x)a^2(x)(dt + \dots)$$

$$= \left[ b(x)u'(x) + \frac{1}{2}a^2(x)u''(x) \right] dt + a(x)u'(x)dW$$

$$\boxed{du(x) = \left( b(x)u'(x) + \frac{1}{2}a^2(x)u''(x) \right) dt + a(x)u'(x)dW}$$

Finalmente se incluyen algunos ejemplos de resolución de EDEs.

### Ejemplo 1

Consideremos la ecuación diferencial estocástica:

$$dx = x dW$$

con condición inicial  $x(0) = x_0$ .

Aplicamos la fórmula de Itô utilizando el cambio de variable  $u(x) = \log x$ :

$$du = u'(x) dx + \frac{1}{2}u''(x) (dx)^2 + \dots$$

Calculamos las derivadas:

$$u'(x) = \frac{1}{x}, \quad u''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

Sustituimos en la fórmula de Itô:

$$du = \frac{1}{x}(x dW) + \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{x^2} \right) (x dW)^2$$

$$du = dW - \frac{1}{2}dt$$

Esto implica que:

$$d \log(x) = dW - \frac{1}{2}dt$$

Integrando ambos lados:

$$\log(x) = W - \frac{1}{2}t + C$$

Dado que  $\log x_0 = C$  cuando  $W(0) = 0$ :

$$\log x = W - \frac{1}{2}t + \log x_0$$

Despejando  $x$ , obtenemos la solución explícita:

$$\boxed{x(t) = x_0 e^{W(t) - t/2}}$$

## Ejemplo 2

Consideremos la ecuación diferencial estocástica:

$$dx = ax dt + bx dW$$

con condición inicial  $x(0) = x_0$ .

Aplicamos la fórmula de Itô con el cambio de variable  $u(x) = \log x$ :

$$du(x) = u'(x) dx + \frac{1}{2}u''(x) (dx)^2$$

Calculamos las derivadas:

$$u'(x) = \frac{1}{x}, \quad u''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

---

Sustituimos en la fórmula de Itô:

$$du(x) = \frac{1}{x}(ax dt + bx dW) - \frac{1}{2x^2}(ax dt + bx dW)^2$$

Desarrollando el cuadrado:

$$(ax dt + bx dW)^2 = a^2x^2(dt)^2 + 2abx^2dt dW + b^2x^2(dW)^2$$

Pero usando las reglas de Itô,  $(dt)^2 = 0$ ,  $dt dW = 0$ , y  $(dW)^2 = dt$ , solo queda el último término:

$$(ax dt + bx dW)^2 = b^2x^2 dt$$

Por tanto,

$$du(x) = a dt + b dW - \frac{1}{2}b^2 dt$$

$$d \log(x) = \left(a - \frac{b^2}{2}\right) dt + b dW$$

Integrando ambos lados:

$$\log(x) = \left(a - \frac{b^2}{2}\right) t + bW + \log x_0$$

Despejando  $x(t)$ , obtenemos la solución explícita:

$$x(t) = x_0 \exp\left(\left(a - \frac{b^2}{2}\right) t + bW(t)\right)$$

## 3.2. Métodos Numéricos

### 3.2.1. Método de Euler-Maruyama

El método de Euler-Maruyama es una de las técnicas más comunes de aproximación de EDEs.

En su formulación general, una EDE escalar puede escribirse como

$$dx(t) = f(x(t)) dt + g(x(t)) dW(t)$$

donde  $f(x)$  representa el término determinista o *drift*,  $g(x)$  es el coeficiente de difusión que mide la intensidad de la parte aleatoria, y  $W(t)$  es un proceso de movimiento browniano estándar. La solución exacta de estas ecuaciones solo es posible en casos muy particulares. En la mayor parte de los casos, empleamos métodos numéricos para aproximar sus trayectorias.

La idea principal de este método consiste en discretizar el tiempo en pequeños intervalos

---

de tamaño  $\Delta t$  y aproximar el proceso de manera incremental. Partimos de una condición inicial  $x_0$  y, para cada paso, actualizamos el valor según la regla:

$$X_j = X_{j-1} + f(X_{j-1}) \Delta t + g(X_{j-1}) \Delta W_j$$

donde  $\Delta W_j$  es el incremento del movimiento browniano en el intervalo, generado como una variable aleatoria normal de media cero y varianza  $\Delta t$ :  $\Delta W_j \sim N(0, \Delta t)$ .

A diferencia de los métodos clásicos de integración numérica para ecuaciones diferenciales ordinarias, el método de Euler-Maruyama tiene en cuenta el componente aleatorio, de manera que permite simular trayectorias que presentan un comportamiento estocástico. En cada paso, el proceso suma tanto la evolución media (determinista) como una perturbación aleatoria proporcional a la raíz cuadrada del intervalo temporal.

Es un método fácil de implementar y eficiente desde el punto de vista computacional. Esto resulta esencial cuando se quieren generar miles o millones de trayectorias. Sin embargo, hay que tener en cuenta que su precisión depende del tamaño del paso temporal: cuanto menor sea  $\Delta t$ , más precisa será la representación, pero también aumentará su coste computacional.

Este método tiene convergencia fuerte de orden  $1/2$ . Esto significa que, si reducimos el tamaño del paso, el error medio entre la trayectoria simulada y la solución exacta disminuye proporcionalmente a la raíz cuadrada del paso temporal. Para aplicaciones en las que se requiere mayor exactitud en las trayectorias individuales, existen métodos de orden superior, como el de Milstein, del que hablaremos posteriormente, aunque son de mayor complejidad.

Una de las aplicaciones más comunes de la simulación de trayectorias mediante el método de Euler-Maruyama es la valoración de productos financieros mediante el método de Monte Carlo. Este método consiste en simular un gran número de trayectorias posibles del precio de un activo hasta el vencimiento de la opción. A continuación, se calcula el beneficio que obtendría el poseedor de la opción en cada caso (payoff), y se promedian estos valores para llegar a una estimación del precio teórico. Finalmente, este valor esperado se descuenta al presente utilizando la tasa de interés libre de riesgo. El método de Monte Carlo es especialmente útil para valorar opciones y derivados financieros en situaciones donde la solución es muy costosa.

### 3.2.2. Método de Milstein

Milstein desarrolló un método para resolver ecuaciones diferenciales estocásticas, que mejorase el método clásico de Euler-Maruyama. Mientras que este presenta convergencia fuerte de orden  $1/2$ , el método de Milstein es capaz de alcanzar convergencia fuerte de orden  $1$  bajo ciertas condiciones.

La principal diferencia respecto a Euler-Maruyama es que Milstein incorpora un término

---

de corrección proveniente del desarrollo de Taylor estocástico (Itô-Taylor), el cual incluye la derivada de la función de difusión respecto a la variable de estado, junto con el cuadrado del incremento browniano. Esto permite capturar mejor los movimientos reales del sistema, especialmente cuando la función de difusión  $g(x)$  no es constante.

El método de Milstein, para una EDE de la forma

$$dx = f(x) dt + g(x) dW,$$

se expresa de manera discreta como:

$$X_j = X_{j-1} + \Delta t f(X_{j-1}) + g(X_{j-1})(W_j - W_{j-1}) + \frac{1}{2}g(X_{j-1})g'(X_{j-1}) [(W_j - W_{j-1})^2 - \Delta t],$$

donde  $W_j - W_{j-1}$  es el incremento browniano en cada intervalo y  $g'(X_{j-1})$  es la derivada de la función de difusión con respecto a la variable de estado.

Este término de corrección es imprescindible para obtener una mejor aproximación de la trayectoria real del sistema estocástico. Se vuelve especialmente importante a la hora de buscar precisión en trayectorias individuales, es decir, una convergencia fuerte. La convergencia fuerte mide la cercanía entre las trayectorias simuladas y la solución exacta, mientras que la convergencia débil evalúa la precisión en el promedio de muchas simulaciones respecto al valor medio real.

Por lo tanto, el método de Milstein es una mejora con respecto a Euler-Maruyama en la simulación de EDEs, ya que nos permite conseguir una mayor precisión.

### 3.3. Marco Teórico Financiero

#### 3.3.1. Conceptos Financieros

Para poder comprender los resultados y simulaciones que se han realizado a lo largo de este trabajo, es necesario estar familiarizado con algunos conceptos del mundo financiero que se explicarán a continuación.

El primero de ellos son las opciones financieras. Estas son un contrato que permite que quien las compra tenga el derecho de comprar o vender un activo a un precio acordado previamente, llamado precio de ejercicio o *strike*. Este derecho se puede ejercer en una fecha concreta en el caso de las opciones europeas, o en cualquier momento del periodo en el caso de las americanas. Hay dos tipos principales de opciones: las opciones de compra (*call*), que permiten comprar el activo, y las opciones de venta (*put*), que permiten venderlo. El valor de una opción depende, entre otros factores, del precio actual del activo, de cuánto varía ese precio (la volatilidad), del tiempo que queda hasta el vencimiento, del precio de ejercicio y de los tipos de interés.

También es importante conocer el S&P 500, que es uno de los índices bursátiles más importantes a nivel mundial. Está formado por las 500 empresas más grandes que cotizan en las bolsas de Estados Unidos y se considera un referente del rendimiento global del mercado de valores estadounidense. Se han empleado datos de las empresas de este índice a lo largo de este trabajo, de manera que las simulaciones que se han realizado son más representativas.

Otros dos conceptos con los que es importante estar familiarizado son el precio de ejercicio y el vencimiento. El precio de ejercicio (*strike*) es el valor pactado en la opción para la compra o la venta del activo acordado. El vencimiento por su parte, es el momento en el que finaliza la opción. Se debe decidir entonces si se desea vender o comprar la acción acordada dependiendo de si resulta rentable en función de la diferencia entre el precio de mercado y el precio de ejercicio.

Asimismo, hablaremos de volatilidad a la hora de implementar algunos modelos en este trabajo. La volatilidad indica cuánto varía el precio de un activo con el tiempo. Es un factor muy importante en la valoración de opciones, porque cuanto mayor es la volatilidad, más pueden cambiar los precios en el futuro y, por tanto, más valiosa puede llegar a ser una opción.

Finalmente, otro concepto clave es la tasa de interés libre de riesgo. Este es un parámetro que representa la rentabilidad que se podría obtener en un activo completamente seguro. Se utiliza para calcular cuánto valen hoy los beneficios que se obtendrían en un futuro y es un valor imprescindible que se ha empleado en una gran cantidad de simulaciones a lo largo de este trabajo.

Una vez familiarizados con todos estos conceptos, se procederán a desarrollar dos modelos financieros estrechamente relacionados con las EDEs. Estos son el modelo de Black-Scholes y el modelo de Heston.

### 3.3.2. El modelo de Black-Scholes

El modelo de Black-Scholes es uno de los modelos fundamentales de la matemática financiera moderna y una de las aplicaciones más conocidas de las ecuaciones diferenciales estocásticas. El objetivo principal del modelo de Black-Scholes es ayudar a calcular cuánto debería costar una opción europea. Este tipo de opción es un contrato que permite comprar o vender una acción a un precio fijo, pero solo en una fecha concreta del futuro, que es la fecha de vencimiento.

La base del modelo es la Ecuación de Black-Scholes, una ecuación diferencial parcial que supone que el movimiento del activo sigue un movimiento browniano geométrico. Matemáticamente, el precio  $S_t$  del activo evoluciona según la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

donde:

- $S_t$  es el precio del activo en el instante  $t$ ,
- $\mu$  es el rendimiento esperado del activo (drift),
- $\sigma$  es la volatilidad del activo (desviación estándar de los retornos logarítmicos),
- $dW_t$  representa un incremento de un proceso de Wiener o movimiento browniano estándar.

De esta forma se reconoce que el precio de los activos depende tanto de su tendencia promedio ( $\mu$ ) como de elementos aleatorios de movimiento ( $\sigma dW_t$ ).

Para llegar a la fórmula de Black-Scholes, se usan conceptos de matemáticas avanzadas y una idea clave de finanzas llamada "no arbitraje" (que significa que no debería haber oportunidades de ganar dinero sin riesgo). El truco está en crear una combinación de la opción y la acción que evolucione sin riesgo, es decir, que no dependa del azar. Al hacer esto, las partes aleatorias se cancelan y se obtiene una ecuación matemática que describe el valor de la opción. Así, se llega a una ecuación diferencial para el valor de la opción  $V(S, t)$ :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

donde  $r$  es la tasa libre de riesgo.

La solución a esta ecuación, junto con las condiciones de frontera adecuadas, llevan a la fórmula de Black-Scholes para el precio de una opción de compra (call):

$$C = S_0 N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2)$$

donde:

- $C$  es el precio de la opción call,
- $S_0$  es el precio inicial del activo,
- $K$  es el precio de ejercicio (strike),
- $T$  es el tiempo hasta el vencimiento,
- $N(\cdot)$  es la función de distribución acumulada de la normal estándar,
- $r$  es la tasa libre de riesgo,
- $d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r + 0,5\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}$

- $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$

El modelo de Black-Scholes se basa en una serie de hipótesis bastante ideales sobre cómo funcionan los mercados financieros. Por ejemplo, asume que los mercados son totalmente eficientes y que no hay oportunidades para hacer dinero fácil sin riesgo, es decir, sin arbitraje. También parte de la idea de que el precio de las acciones sigue un movimiento aleatorio específico (conocido como movimiento browniano geométrico), y que tanto la volatilidad como el tipo de interés se mantienen constantes a lo largo del tiempo.

Otra suposición importante es que las acciones no reparten dividendos durante la vida de la opción. Además, se considera que es posible comprar y vender activos y opciones en cualquier momento, sin ningún tipo de coste por las transacciones, y que siempre se puede pedir dinero prestado o prestarlo a una tasa de interés fija y libre de riesgo.

En la realidad, estos supuestos rara vez se cumplen exactamente. Sin embargo, el modelo de Black-Scholes ha demostrado ser una herramienta muy útil y ha servido de base para el desarrollo de modelos más avanzados que tratan de corregir o mejorar estos aspectos, como el modelo de Heston, que introduce volatilidad variable, o los modelos con saltos para capturar movimientos bruscos en los precios.

### 3.3.3. El modelo de Heston

El modelo de Heston es una herramienta matemática avanzada que permite analizar y simular la evolución de precios de activos financieros cuando la volatilidad no es constante, sino que cambia de forma aleatoria a lo largo del tiempo. Esta característica lo hace especialmente valioso para estudiar mercados donde se observan periodos de inestabilidad, episodios de “volatilidad agrupada” y comportamientos complejos que no pueden ser captados por modelos más simples. La flexibilidad del modelo de Heston lo ha convertido en una referencia dentro del ámbito de la valoración de derivados financieros y el análisis cuantitativo del riesgo.

En el modelo de Heston, tanto el precio del activo como la varianza instantánea evolucionan de manera conjunta y aleatoria según el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas:

$$dS_t = rS_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_t^{(1)}$$
$$dv_t = \kappa(\theta - v_t) dt + \xi\sqrt{v_t} dW_t^{(2)}$$

Donde cada término tiene un significado concreto dentro del contexto financiero:

- $S_t$ : Es el precio del activo financiero (por ejemplo, una acción) en el instante  $t$ .
- $v_t$ : Representa la varianza instantánea del activo, que es la volatilidad al cuadrado y también varía aleatoriamente en el tiempo.

- $r$ : Es la tasa de interés libre de riesgo, utilizada para descontar flujos futuros a valor presente.
- $\kappa$ : Es la velocidad de reversión a la media; este parámetro mide cuán rápido la varianza tiende a volver a su valor medio de largo plazo.
- $\theta$ : Es el valor medio de la varianza a largo plazo, el nivel al que la varianza se estabilizaría si no existieran perturbaciones.
- $\xi$ : Es la volatilidad de la varianza, que controla la magnitud de las fluctuaciones aleatorias en la varianza instantánea; valores altos de  $\xi$  permiten que la volatilidad pueda experimentar saltos bruscos.
- $dW_t^{(1)}$  y  $dW_t^{(2)}$ : Son incrementos de dos procesos de Wiener (movimientos brownianos) correlacionados, lo que significa que los movimientos aleatorios que afectan al precio y a la volatilidad pueden estar relacionados.
- $\rho$ : Es el coeficiente de correlación entre ambos movimientos brownianos. En mercados reales suele ser negativo, reflejando la tendencia a que la volatilidad aumente en periodos de caídas bruscas del precio.

Este modelo permite capturar trayectorias realistas, donde pueden observarse periodos prolongados de alta o baja volatilidad, así como cambios repentinos debidos a acontecimientos de mercado inesperados. Es precisamente la capacidad de reflejar estas dinámicas lo que dota al modelo de Heston de gran valor para el análisis de riesgo y la valoración precisa de opciones y otros derivados financieros.

El modelo de Heston es ampliamente utilizado tanto en la industria financiera como en la investigación académica porque permite analizar situaciones donde la volatilidad del mercado es incierta, cambia con el tiempo y puede estar relacionada con movimientos en el precio del activo. Su flexibilidad y fundamento matemático robusto lo convierten en una herramienta imprescindible para valorar productos complejos y para la gestión avanzada del riesgo en mercados financieros modernos.

## 4. Experimentos

### 4.1. Objetivos

Los experimentos realizados en este trabajo persiguen los siguientes objetivos principales.

El primero de ellos es visualizar y entender el comportamiento de las soluciones de las EDEs. Observar de manera gráfica y cuantitativa cómo evolucionan las trayectorias simuladas mediante los métodos numéricos (Euler-Maruyama y Milstein) respecto a la solución exacta o

de referencia.

El segundo es evaluar la precisión de los métodos numéricos. Se comparará el error cometido por cada método para diferentes parámetros y tamaños de paso, analizando en qué casos es preferible un método respecto a otro.

El tercero es contrastar los modelos teóricos con datos reales de mercado. Se determinará hasta qué punto los modelos estocásticos clásicos son capaces de reproducir la dinámica real de los precios de activos financieros, y evaluar sus limitaciones.

Finalmente, el último objetivo es ilustrar la aplicabilidad de las EDEs en problemas reales. Se pretende demostrar que las EDEs y los métodos de simulación asociados constituyen herramientas útiles para modelar sistemas complejos.

## 4.2. Conjunto de Datos

Para la simulación de opciones financieras en los diferentes modelos implementados, se ha utilizado un conjunto de datos basado en precios reales de mercado obtenidos de Yahoo Finance. En concreto, los datos corresponden a valores históricos y actuales de acciones pertenecientes a empresas del índice S&P 500.

El proceso de recopilación de datos se realiza de forma automática a través de la librería `yfinance` de Python, que permite descargar información financiera detallada para cualquier activo. De cada empresa seleccionada, se obtiene el precio de cierre actual, que se emplea como punto de partida para las simulaciones. Asimismo, se recopilan los precios de cierre diarios de los últimos seis meses, lo que ofrece una muestra representativa de la evolución del activo en el último tiempo.

A partir de estos precios históricos, se calculan los valores necesarios para aplicar los distintos métodos y modelos que se han estudiado y que se desarrollarán a continuación.

## 4.3. Aplicación de Euler-Maruyama y Milstein

Para obtener de una forma más visual la solución de ecuaciones diferenciales estocásticas, se han implementado dos de los métodos más conocidos: el método de Euler-Maruyama y el método de Milstein. Ambos algoritmos permiten aproximar trayectorias de soluciones de EDEs, así como analizar la precisión de las aproximaciones según el tamaño del paso temporal elegido.

A la hora de implementar el método de Euler-Maruyama, se ha elegido resolver una EDE de la forma  $dX = \lambda X dt + \mu X dW$ , donde  $\lambda$  es el coeficiente de crecimiento y  $\mu$  el coeficiente de difusión. El código desarrollado permite comparar la solución numérica obtenida con

Euler-Maruyama con la solución exacta (cuando esta se puede encontrar) y analizar el error cometido al final de la simulación.

Por otro lado, se ha empleado el método de Milstein para simular la convergencia fuerte en la EDE  $dX = \lambda X dt + \mu X dW$ , de esta forma podremos comprobar si realmente este método ofrece una mayor precisión. El código resuelve la misma EDE que en el caso de Euler-Maruyama de manera que se pueda realizar una comparación de los resultados para comprobar cuál de los dos métodos es más preciso.

Con estos dos métodos podemos hacer una primera aproximación a lo que es la resolución de EDEs para posteriormente poder aplicarlo a un caso práctico.

## 4.4. Comparación de Métodos y Modelos

### 4.4.1. Comparación de Euler-Maruyama y Black-Scholes

En esta parte del trabajo se ha implementado una comparación del método de Euler-Maruyama con la solución de la EDE obtenida con el modelo de Black-Scholes.

Por un lado, el método de Euler-Maruyama permite simular de manera numérica cómo podría evolucionar el precio de una acción en el futuro. Este método parte del precio actual y la volatilidad histórica del activo, la que mantiene constante. Genera numerosas trayectorias posibles al dividir el tiempo en pequeños pasos. En cada paso, el precio se ajusta sumando un componente determinista y otro aleatorio que refleja la incertidumbre y la variabilidad características de los mercados financieros. Al simular cientos o miles de caminos distintos, se obtiene una visión más realista de la posible evolución futura del activo y se puede analizar el impacto del azar sobre los precios.

Por el contrario, la fórmula de Black-Scholes ofrece una solución exacta para la EDE que modela el valor de una opción europea, tomando también la volatilidad como un factor constante. Esta fórmula calcula directamente el precio teórico de la opción usando los datos actuales del mercado, la volatilidad estimada y la tasa libre de riesgo, sin necesidad de simular trayectorias individuales.

En el código, se ha utilizado el método de Euler-Maruyama para generar miles de posibles trayectorias del precio de la acción y, con ellas, se estima el valor de la opción mediante el método de Monte Carlo. Por su parte, el valor obtenido con la fórmula de Black-Scholes se utiliza como referencia teórica para poder comparar la precisión obtenida mediante las simulaciones de Euler-Maruyama.

#### 4.4.2. Comparación de Heston y Black-Scholes

En este apartado, se ha implementado una comparación entre el modelo de Heston y la solución de la EDE obtenida con Black-Scholes. El principal objetivo es ver las diferencias en la estimación de precios de las opciones entre un modelo en el que se toma la volatilidad como un factor constante (Black-Scholes) y otro en el que se toma como un proceso estocástico (Heston).

En primer lugar, se aplica la fórmula de Black-Scholes para calcular el precio teórico de una opción de compra europea de la misma forma que se ha explicado en el apartado anterior.

A continuación, se lleva a cabo una simulación basada en el modelo de Heston, en la que tanto el precio de la acción como su volatilidad evolucionan a lo largo del tiempo siguiendo un proceso estocástico. Esto favorece que se asemeje más a los movimientos financieros de la bolsa de la vida real, que pueden contar con picos y caídas más abruptas. Una vez más, la solución exacta de Black-Scholes se emplea como referencia teórica para poder comparar la precisión obtenida con Heston.

#### 4.5. Comparación de Métodos y Modelos con el SPY

Finalmente, se han contrastado las trayectorias simuladas mediante distintos modelos y métodos con la evolución real observada en el mercado. El objetivo de este análisis es evaluar la capacidad de los modelos teóricos para reproducir con realismo el comportamiento de los precios financieros.

Para ello, se parte de los precios históricos diarios de un activo de referencia, en este caso el ETF SPY (un fondo cotizado en bolsa que replica el índice SP 500), que replica el comportamiento del índice S&P 500. A partir de estos datos, se estiman los parámetros de los modelos y métodos, necesarios para ajustar los procesos estocásticos a las características reales del activo.

Se han implementado los métodos de Euler-Maruyama y Milstein, y los modelos de Black-Scholes y de Heston. Para cada uno de ellos, se generan cien trayectorias independientes de evolución del precio a lo largo de un año, utilizando los parámetros extraídos de los datos históricos y los que se han ajustado para obtener el mejor rendimiento de los modelos y métodos. En el caso de Heston, se ha implementado un programa de optimización de parámetros para elegir los que dieran mejores resultados en este caso.

Posteriormente, con el fin de realizar una comparación cuantitativa y visual de los distintos métodos y modelos, se identifica la trayectoria simulada que más se asemeja a la real mediante el cálculo del error cuadrático medio ( $MSE$ ) entre cada simulación y la serie histórica observada.

Por todo esto, al aplicar los métodos y modelos desarrollados previamente a un caso real del ámbito financiero, podemos comparar de forma visual y cuantitativa el ajuste de cada método y modelo a la realidad. Además, se comprueba su desempeño y eficacia a la hora de resolver EDEs relacionadas con el mundo real.

## 5. Resultados

Todos los códigos con los que se han obtenido los resultados que se mostrarán a continuación están disponibles en el siguiente repositorio de GitHub [13]

### 5.1. Implementación de Euler-Maruyama

A continuación se realizarán una serie de pruebas con un programa de Python que implementa el método de Euler-Maruyama para la resolución de EDEs de la forma:

$$dX = \lambda X dt + \mu X dW$$

En la Tabla 1 se resumen los resultados obtenidos al aplicar el método de Euler-Maruyama a la EDE que estamos tratando de resolver. Para cada combinación de parámetros  $\lambda$  y  $\mu$ , se compara el valor final de la solución exacta con el de la aproximación numérica. Se calcula también el error absoluto cometido.

Caso	$\lambda$	$\mu$	Error final	Sol. exacta (último)	Aprox. (último)
1	0.0	0.5	0.00814	0.87043	0.86229
2	0.0	1.0	0.08199	0.51205	0.59405
3	0.5	1.0	0.04307	3.14937	3.19244
4	-0.5	1.0	0.06614	0.76191	0.82805

Tabla 1: Errores de la aproximación mediante Euler-Maruyama para diferentes valores de  $\lambda$  y  $\mu$ .

**Caso 1:**  $\lambda = 0$ ,  $\mu = 0,5$  En este caso no existe crecimiento determinista, y el ruido es de intensidad moderada. En la Figura 4, se observa que el método de Euler-Maruyama proporciona una muy buena aproximación, con un error final reducido.

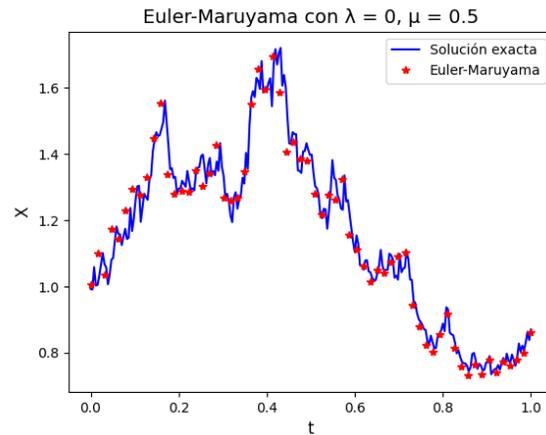


Figura 4: Simulación de la EDE con  $\lambda = 0$ ,  $\mu = 0,5$ .

**Caso 2:**  $\lambda = 0$ ,  $\mu = 1$  Al incrementar la intensidad del ruido, las oscilaciones son mucho más pronunciadas. En la Figura 5, se observa una mayor dispersión entre la solución exacta y la aproximación, lo que se refleja en un error significativamente mayor.

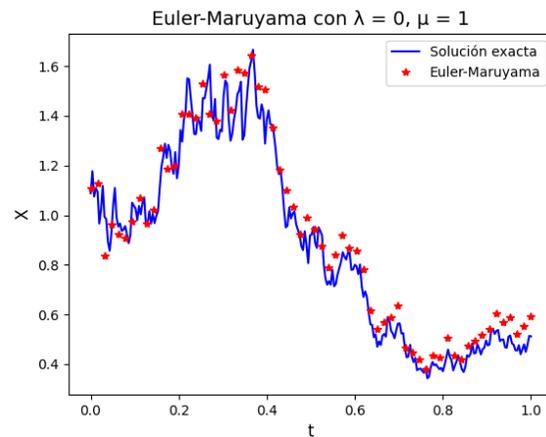


Figura 5: Simulación de la EDE con  $\lambda = 0$ ,  $\mu = 1$ .

**Caso 3:**  $\lambda = 0,5$ ,  $\mu = 1$  En este escenario, el proceso presenta una fuerte componente de crecimiento determinista. La Figura 6 muestra que, aunque la trayectoria crece rápidamente, el método sigue correctamente la evolución general. El error es aceptable, teniendo en cuenta la sensibilidad a las fluctuaciones en este régimen.

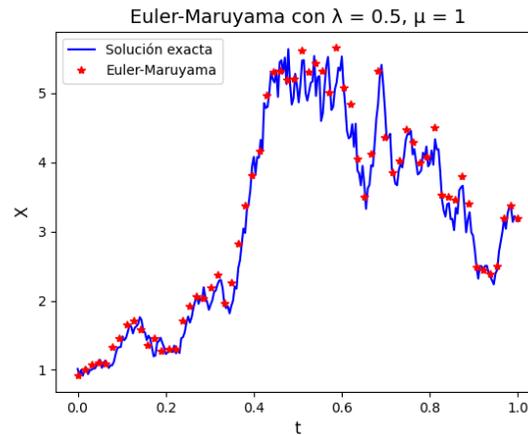


Figura 6: Simulación de la EDE con  $\lambda = 0,5$ ,  $\mu = 1$ .

**Caso 4:**  $\lambda = -0,5$ ,  $\mu = 1$  En el último caso, la trayectoria tiende a decrecer. Tal como se observa en la Figura 7, el método reproduce de forma razonable el comportamiento esperado, aunque el error final es algo más elevado debido a la mayor sensibilidad de la fase decreciente al componente estocástico.

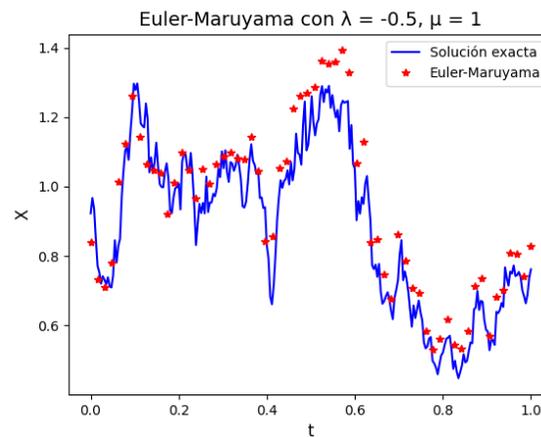


Figura 7: Simulación de la EDE con  $\lambda = -0,5$ ,  $\mu = 1$ .

Los resultados muestran que el método de Euler-Maruyama proporciona aproximaciones satisfactorias para la resolución de EDEs. La precisión es especialmente alta cuando la intensidad del ruido es moderada, mientras que el error tiende a aumentar en situaciones de alta volatilidad o en trayectorias con fuerte componente decreciente. En todos los casos analizados, la aproximación numérica sigue de manera razonable la evolución general del proceso, validando la utilidad y robustez del método para este tipo de problemas estocásticos.

## 5.2. Implementación de Milstein

En esta sección se repite el experimento utilizando el método de Milstein, aplicándolo a la misma EDE de la forma:

$$dX = \lambda X dt + \mu X dW$$

A continuación se presentan los resultados obtenidos con una nueva ejecución, recogidos en la Tabla 2. Se analizan las soluciones para distintas combinaciones de parámetros  $\lambda$  y  $\mu$ , comparando la aproximación numérica con la solución exacta y calculando el error absoluto al final del intervalo.

Caso	$\lambda$	$\mu$	Error final	Sol. exacta (último)	Milstein (último)
1	0.0	0.5	0.00039	0.87043	0.87082
2	0.0	1.0	0.00030	0.51205	0.51175
3	0.5	1.0	0.01555	3.14937	3.13382
4	-0.5	1.0	0.00530	0.76191	0.75662

Tabla 2: Errores de la aproximación mediante el método de Milstein para diferentes valores de  $\lambda$  y  $\mu$ .

**Caso 1:**  $\lambda = 0, \mu = 0,5$  La Figura 8 muestra que, en un entorno con ruido moderado y sin componente determinista, el método de Milstein reproduce con gran precisión la trayectoria de la solución exacta. El error final es casi despreciable.

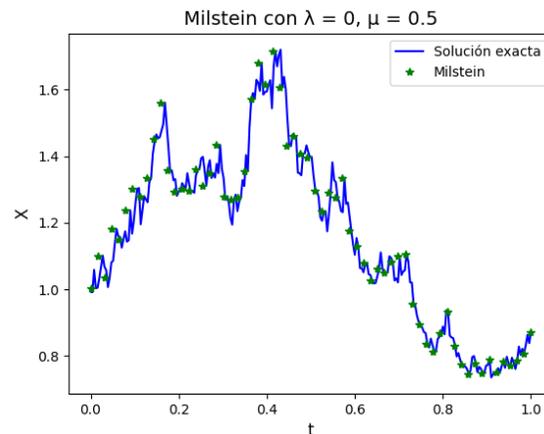


Figura 8: Simulación con  $\lambda = 0, \mu = 0,5$ .

**Caso 2:**  $\lambda = 0, \mu = 1$  En este escenario más volátil, el método sigue aproximando con gran exactitud la solución exacta. Tal como se muestra en la Figura 9, el error final se mantiene por debajo de 0.001, destacando la estabilidad del método frente a ruido intenso.

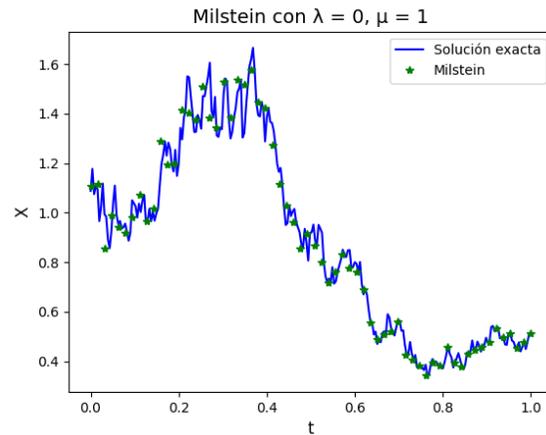


Figura 9: Simulación con  $\lambda = 0, \mu = 1$ .

**Caso 3:**  $\lambda = 0,5, \mu = 1$  En este caso con crecimiento determinista, la Figura 10 muestra que Milstein consigue seguir el ascenso del proceso, aunque con una ligera desviación al final del intervalo, lo que se refleja en un error mayor respecto a los casos anteriores.

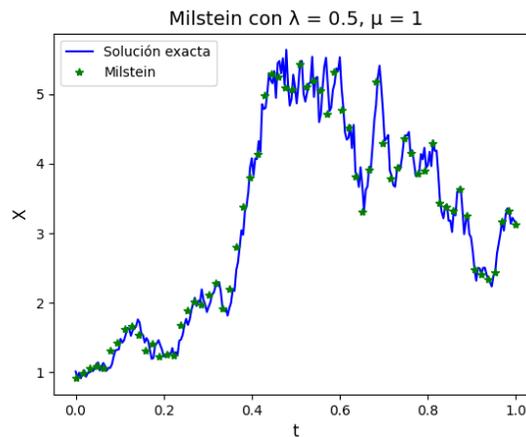


Figura 10: Simulación con  $\lambda = 0,5, \mu = 1$ .

**Caso 4:**  $\lambda = -0,5, \mu = 1$  Finalmente, en la Figura 11 se observa cómo el método logra adaptarse correctamente a la tendencia decreciente del proceso, generada por el término determinista negativo. El error final sigue siendo bajo, lo que confirma el buen rendimiento del método.

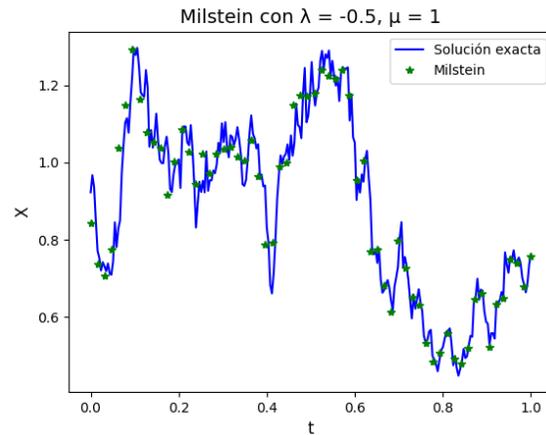


Figura 11: Simulación con  $\lambda = -0,5$ ,  $\mu = 1$ .

Como hemos podido ver en las gráficas de las soluciones halladas tanto con Euler-Maruyama como con Milstein, se observa que el método de Milstein proporciona una aproximación más precisa y ajustada a la solución real que la obtenida por Euler-Maruyama. Esta diferencia se refleja no solo en la trayectoria visual, sino también en los valores numéricos de los errores cometidos. El error final asociado a Milstein es considerablemente menor en comparación con el de Euler-Maruyama para un mismo tamaño de paso. Esto evidencia la ventaja de incluir el término de corrección propio de Milstein, el cual permite captar mejor el proceso estocástico.

Esta mejora se puede observar claramente en la ampliación de la gráfica que se muestra en la Figura 12), donde la trayectoria de Milstein sigue de cerca la solución exacta, mientras que la aproximación de Euler-Maruyama se desvía de manera más notable.



Figura 12: Ampliación de la comparación entre la solución exacta, el método de Euler-Maruyama y el método de Milstein.

### 5.3. Comparativa de Euler-Maruyama con la Solución Exacta

Ahora se procederá a estudiar la solución exacta obtenida con el modelo Black-Scholes y la obtenida con el método de Euler-Maruyama para valorar opciones *call* europeas sobre acciones reales del S&P 500. Se estimará el valor justo actual de una opción financiera que permite comprar una acción a un precio prefijado (*strike*) en una fecha futura determinada.

En particular, se ha considerado una opción con vencimiento a un año y precio de ejercicio igual al precio actual de la acción. El modelo de precios utilizado es el de Black-Scholes, que asume que el precio del activo sigue un movimiento browniano geométrico. En el caso de Euler-Maruyama, se emplea el método de Monte Carlo, se generan miles de trayectorias posibles del precio de la acción para estimar el valor esperado del *payoff* de la opción. Por otro lado, la fórmula de Black-Scholes proporciona un valor exacto para la solución de la EDE bajo hipótesis ideales.

En la Tabla 3 se muestran los resultados obtenidos para distintas empresas del índice S&P 500.

Ticker	Euler-Maruyama	Solución Exacta	Diferencia %
AAPL	37.61	36.99	1.67 %
MSFT	66.90	66.31	0.88 %
META	132.99	133.55	0.42 %
JPM	36.72	36.74	0.07 %
XOM	13.46	13.31	1.14 %
WMT	13.49	13.29	1.49 %

Tabla 3: Comparación entre el precio actual estimado de una opción *call* europea utilizando Euler-Maruyama y la fórmula de Black-Scholes para distintas acciones del S&P 500.

Los resultados muestran que el método de Euler-Maruyama, aplicado mediante simulación Monte Carlo, proporciona estimaciones del precio de opciones *call* europeas muy cercanas a las obtenidas con la solución exacta de Black-Scholes para distintas acciones del S&P 500. Las diferencias relativas en todos los casos analizados son inferiores al 2%, indica la eficacia y fiabilidad del método numérico incluso en contextos reales de mercado.

### 5.4. Comparativa de Heston con la Solución Exacta

En esta sección se comparará la solución obtenida con el modelo de Heston con la solución exacta que obtenemos una vez más con el modelo de Black-Scholes. A diferencia del supuesto de volatilidad constante de Black-Scholes, el modelo de Heston permite que la varianza del activo evolucione aleatoriamente, capturando mejor la dinámica real observada en los mercados financieros.

A continuación, se comparan los precios estimados por ambos modelos para una opción *call* europea, con un vencimiento de un año y un precio de ejercicio igual al valor actual del activo. Se muestra también la diferencia porcentual entre ambas valoraciones.

Para implementar el modelo de Heston, se ha elegido un conjunto de parámetros con el objetivo de mantener un equilibrio entre realismo y estabilidad numérica. En particular, se ha tomado como varianza inicial  $v_0 = \sigma^2$ , donde  $\sigma$  es la volatilidad histórica anualizada estimada a partir de datos reales. La media de la varianza a largo plazo se ha establecido en  $\theta = 1,2 \cdot v_0$ , lo que refleja una expectativa de que la volatilidad aumente ligeramente.

La velocidad de reversión  $\kappa = 2,0$  asegura que el proceso de varianza tienda de forma progresiva hacia su valor medio sin generar oscilaciones excesivas. Por otro lado, se ha elegido una volatilidad de la volatilidad moderada  $\xi = 0,15$ , que permite capturar variaciones realistas en la varianza sin introducir inestabilidades en la simulación. Finalmente, la correlación entre el movimiento del precio del activo y su varianza se ha fijado en  $\rho = -0,3$ , que es un valor coherente con el *efecto apalancamiento*, común en los mercados financieros.

En la Tabla 4 se muestran los resultados obtenidos para distintas empresas del índice S&P 500.

Ticker	Solución Real	Heston	Diferencia %
AAPL	36.87	36.12	2.04 %
MSFT	66.29	62.69	5.44 %
META	133.48	131.50	1.48 %
JPM	36.67	34.64	5.52 %
XOM	13.45	12.79	4.88 %
WMT	13.26	12.53	5.51 %

Tabla 4: Comparación del precio estimado de una opción *call* europea entre el modelo de Black-Scholes y el modelo de Heston para diferentes acciones del S&P 500.

Los resultados muestran que el modelo de Heston, al incorporar una volatilidad estocástica, proporciona valoraciones de opciones *call* europeas ligeramente inferiores a la solución de la ecuación obtenida con el modelo de Black-Scholes en todos los casos analizados. Las diferencias porcentuales varían entre el 1,5 % y el 5,5 %. Esto es coherente con la capacidad del modelo de Heston para capturar escenarios de volatilidad variable y reflejar de manera más realista los riesgos asociados a movimientos bruscos en el mercado, especialmente en activos con alta incertidumbre.

## 5.5. Comparativa de Métodos y Modelos con el SPY

Aunque los modelos estocásticos no están diseñados para replicar trayectorias individuales observadas en el mercado, se ha identificado, a título ilustrativo, la trayectoria simulada cuya evolución se aproxima más a la observada, en términos de error cuadrático medio (MSE). Esta comparación permite visualizar cómo los distintos modelos y métodos reproducen la dinámica del precio del activo en casos concretos.

Comenzamos analizando las trayectorias simuladas con Euler-Maruyama. En la Figura 13 se muestran los resultados utilizando este método. Aunque este método es una discretización sencilla y eficiente, las trayectorias generadas que se pueden observar en color gris muestran una dispersión mayor y, en general, una menor capacidad de ajuste fino a los datos reales. La trayectoria más similar a los datos reales que se ha obtenido presenta un MSE más elevado que el resto de métodos y modelos.

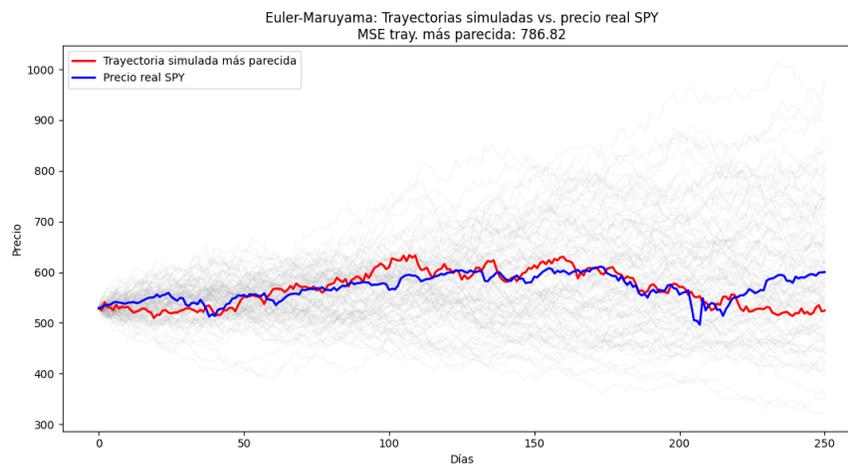


Figura 13: Comparación de trayectorias simuladas con el método de Euler-Maruyama y el precio real del ETF SPY.

Continuamos analizando las trayectorias simuladas con el método de Milstein. La Figura 14 muestra los resultados obtenidos mediante este método. Milstein ofrece una mayor precisión respecto a Euler-Maruyama y logra trayectorias simuladas que, en general, siguen de forma más fiel la evolución real del precio. La trayectoria obtenida más similar a los datos reales ha conseguido también un MSE menor que el obtenido con Euler-Maruyama y que el modelo de Black-Scholes.

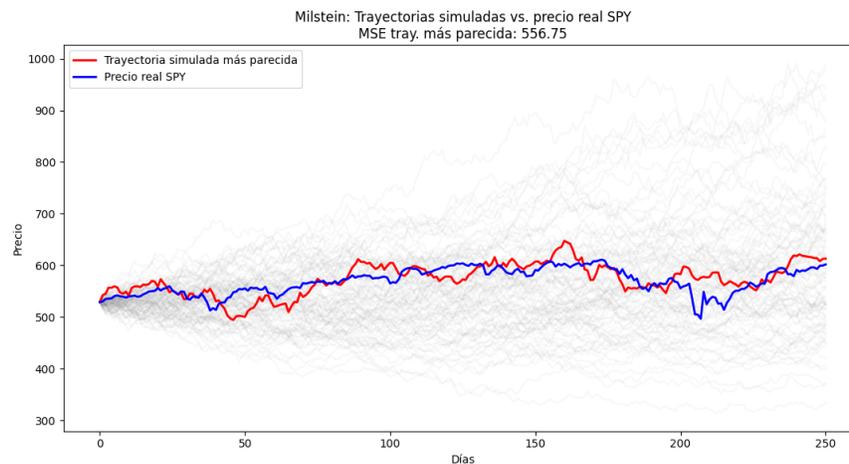


Figura 14: Comparación de trayectorias simuladas con el método de Milstein y el precio real del ETF SPY.

En la Figura 15, se observa que el modelo de Black-Scholes permite generar trayectorias razonablemente próximas a la realidad, aunque tiende a infraestimar o sobreestimar los movimientos extremos del precio real. La trayectoria simulada más parecida sigue de cerca la tendencia global, pero no captura completamente algunos episodios de alta volatilidad. Sigue teniendo un MSE mayor que Milstein y que Heston, aunque menor que Euler-Maruyama.

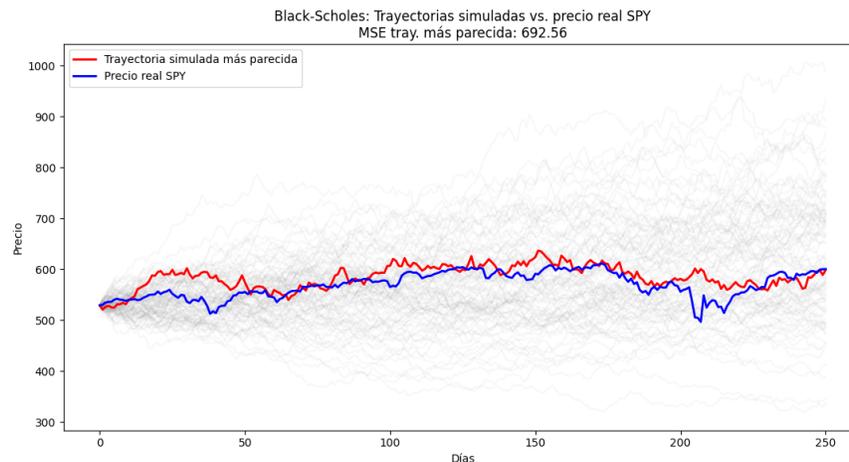


Figura 15: Comparación de trayectorias simuladas con el modelo de Black-Scholes y el precio real del ETF SPY.

Por último, en la Figura 16 se aprecia que el modelo de Heston, al incorporar una volatilidad estocástica, consigue replicar mejor los movimientos abruptos del mercado, lo que se traduce en una trayectoria simulada más ajustada a la realidad. Se puede apreciar especialmente en el hecho de que su trayectoria más similar a los datos reales es la que más se acerca

de todas. Se distingue tanto visualmente en la gráfica como en la obtención del menor MSE en comparación con los modelos y métodos anteriores.

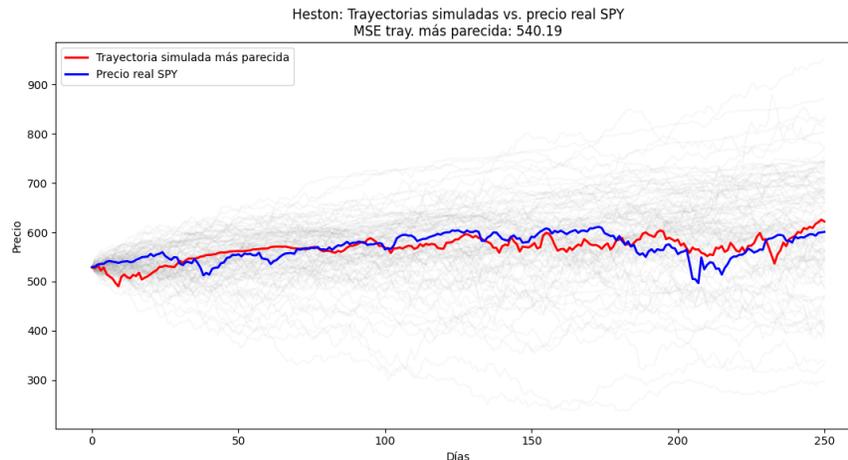


Figura 16: Comparación de trayectorias simuladas con el modelo de Heston y el precio real del ETF SPY.

Tras este análisis se llega a la conclusión de que los resultados obtenidos con Heston y Milstein tienden a ofrecer trayectorias simuladas que se ajustan mejor a los datos reales, especialmente en presencia de cambios bruscos de volatilidad. Tanto Heston como Milstein ofrecen una mayor riqueza que en la modelización, por lo que se obtienen resultados con menor MSE y de mayor similitud con la trayectoria real de los precios.

La comparación visual y numérica destaca la importancia de elegir modelos adecuados para obtener los mejores resultados de los precios financieros. No obstante, es importante remarcar que, debido a la naturaleza impredecible y caótica de los mercados financieros, ningún modelo es capaz de anticipar con precisión absoluta los movimientos reales del mercado. Por tanto, incluso los mejores modelos solo logran una aproximación limitada a la evolución observada.

## 6. Conclusiones y Trabajos Futuros

Este trabajo ha permitido comprobar la gran importancia de las ecuaciones diferenciales estocásticas como herramienta para modelar fenómenos donde la incertidumbre y el azar son componentes fundamentales. A través de la comparación entre distintos métodos numéricos (Euler-Maruyama y Milstein) y modelos clásicos (Black-Scholes y Heston), y su contraste con datos reales del mercado, se ha mostrado tanto la utilidad como las limitaciones de cada enfoque.

En particular, la aplicación de los métodos numéricos de Euler-Maruyama y Milstein ha

permitido comprobar la precisión de ambos en la simulación de trayectorias estocásticas. Mientras que Euler-Maruyama destaca por su sencillez y eficiencia computacional, Milstein aporta una mayor precisión gracias a la inclusión de términos de corrección adicionales. Los resultados obtenidos confirman que, aunque ambos métodos son válidos para simular EDEs, Milstein consigue aproximarse de forma más fiel a la solución exacta, especialmente en entornos donde la volatilidad y los efectos aleatorios son significativos.

En cuanto a los modelos empleados, cabe destacar que los métodos basados en volatilidad constante, como Black-Scholes, ofrecen aproximaciones razonables pero tienden a suavizar en exceso las trayectorias, perdiendo los movimientos bruscos que caracterizan a los mercados reales. Por su parte, el modelo de Heston, al incorporar una volatilidad aleatoria, es más realista a la hora de representar la dinámica observada en los precios. Sin embargo, sigue dependiendo enormemente de la calibración de los parámetros y no consigue capturar por completo toda la complejidad del mercado.

Por ello, como línea futura de investigación, se plantea el desarrollo de un sistema automatizado de optimización de parámetros, capaz de evaluar de manera sistemática un amplio rango de combinaciones para cada método o modelo, seleccionando aquellas que mejor reproduzcan la realidad. Esto permitiría construir modelos predictivos mucho más robustos y adaptados.

Por todo ello, llegamos a la conclusión de que este trabajo ha sido útil para entender cómo funcionan las ecuaciones diferenciales estocásticas y cómo emplearlas en el ámbito financiero. Además, se ha podido realizar una comparación sobre cuáles son los modelos y métodos más adecuados en cada momento. Finalmente, ha destacado la importancia de una buena elección de parámetros para obtener resultados más satisfactorios, un campo que en el futuro puede llevar a diversos caminos de investigación.

## 7. Bibliografía

### Referencias

- [1] Arnold, L. (1974). Stochastic differential equations: Theory and applications. Wiley.
- [2] Evans, L. C. (2013). An introduction to stochastic differential equations (Vol. 82). American Mathematical Soc.
- [3] Shreve, S. E. (2014). Stochastic Calculus for Finance I: The Binomial Asset Pricing Model y Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models. Springer.
- [4] Fouque, J.-P., Papanicolaou, G., & Sircar, K. R. (2000). Derivatives in financial markets with stochastic volatility. Cambridge University Press.

- [5] Black, F., & Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3), 637–654.
- [6] Heston, S. L. (1993). A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options. *Review of Financial Studies*, 6(2), 327–343.
- [7] Merton, R. C. (1976). Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. *Journal of Financial Economics*, 3(1–2), 125–144.
- [8] Bates, D. S. (1996). Jumps and stochastic volatility: Exchange rate processes implicit in Deutsche Mark options. *Review of Financial Studies*, 9(1), 69–107.
- [9] Duffie, D., Pan, J., & Singleton, K. J. (2000). Transform analysis and asset pricing for affine jump-diffusions. *Econometrica*, 68(6), 1343–1376.
- [10] Kloeden, P. E., & Platen, E. (1992). *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*. Springer.
- [11] Sirignano, J., & Cont, R. (2019). Universal features of price formation in financial markets: perspectives from deep learning. *Quantitative Finance*, 19(9), 1449–1459.
- [12] Song, Y., Sohl-Dickstein, J., Kingma, D. P., Kumar, A., Ermon, S., & Poole, B. (2021). Score-Based Generative Modeling through Stochastic Differential Equations. *International Conference on Learning Representations (ICLR)*.
- [13] Monteagudo, J. (2025). *Ecuaciones diferenciales estocásticas*. GitHub repository. Available at: [https://github.com/jimenaamr/ecuaciones\\_diferenciales\\_estocasticas.git](https://github.com/jimenaamr/ecuaciones_diferenciales_estocasticas.git).