



**COMILLAS**

UNIVERSIDAD PONTIFICIA

**ICAI**

**MÁSTER UNIVERSITARIO EN INGENIERÍA  
INDUSTRIAL**

TRABAJO FIN DE MÁSTER

**ENRUTAMIENTO URBANO DE VEHÍCULOS  
COMPARTIDOS CON CONDUCTOR**

Autor: Pablo Mansilla Barrionuevo

Director: Pedro Sánchez Martín

Director: Mario Castro Ponce

Madrid, 13 de julio 2025

Declaro, bajo mi responsabilidad, que el Proyecto presentado con el título  
**ENRUTAMIENTO URBANO DE VEHÍCULOS COMPARTIDOS CON CONDUCTOR**  
en la ETS de Ingeniería - ICAI de la Universidad Pontificia Comillas en el  
curso académico 2024/25 es de mi autoría, original e inédito y  
no ha sido presentado con anterioridad a otros efectos.

El Proyecto no es plagio de otro, ni total ni parcialmente y la información que ha sido  
tomada de otros documentos está debidamente referenciada.

Fdo.: Pablo Mansilla Barrionuevo

Fecha: 13/07/2025

Autorizada la entrega del proyecto

DIRECTORES DEL PROYECTO



Pdo.: Pedro Sánchez Martín

Fdo.: Pedro Sánchez Martín

Fecha: 13/07/2025

Fdo.: Mario Castro Ponce

Fecha: 13/07/2025





**COMILLAS**  
UNIVERSIDAD PONTIFICIA

**ICAI**

**MÁSTER UNIVERSITARIO EN INGENIERÍA  
INDUSTRIAL**

TRABAJO FIN DE MÁSTER

**ENRUTAMIENTO URBANO DE VEHÍCULOS  
COMPARTIDOS CON CONDUCTOR**

Autor: Pablo Mansilla Barrionuevo

Director: Pedro Sánchez Martín

Director: Mario Castro Ponce

Madrid, 13 de julio 2025

# **ENRUTAMIENTO URBANO DE VEHÍCULOS COMPARTIDOS CON CONDUCTOR**

**Autor: Pablo Mansilla Barrionuevo**

Directores: Pedro Sánchez Martín, Mario Castro Ponce.

Entidad Colaboradora: ICAI – Universidad Pontificia Comillas.

## **RESUMEN DEL PROYECTO**

Este documento académico pretende resolver el caso de optimización del enrutamiento urbano de vehículos para servicios de movilidad compartida, un elemento clave en la transformación hacia una movilidad sostenible. Se ha desarrollado un modelo matemático de optimización basado en Programación Lineal Entera Mixta (MILP) para resolver una variante compleja del Problema de Ruteo de Vehículos (VRP) incluyendo restricciones reales como la capacidad de los vehículos (CVRP), flotas heterogéneas (HVRP) y ventanas temporales (VRPTW). Este enfoque integral refleja las condiciones operativas reales de movilidad operativa y pretende alcanzar el equilibrio entre una solución eficiente en costes con una alta calidad de servicio a proporcionar.

Se presentan diferentes casos de estudio para verificar la efectividad del modelo, incluyendo desde 8 a 30 pasajeros a recoger, además de múltiples vehículos con diferentes capacidades. Se analiza también cada solución sobre un caso guía (*baseline*) que contempla la recogida con un único vehículo de capacidad ilimitada para mostrar la efectividad de la solución obtenida en cada caso. Se analizan y se muestran métricas para analizar cada solución propuesta. El estudio muestra como a medida que se aumenta el número de pasajeros y vehículos, aprovechando las economías de escala, el coste por pasajero disminuye considerablemente y el coste para proporcionar la calidad del servicio deseada es mucho menor. Se destaca la importancia de considerar la calidad del servicio además de la disminución de costes en la función de costes a optimizar.

**Palabras clave:** VRP, MILP, movilidad, optimización, ventanas temporales, rutas, sostenibilidad, transporte compartido.

# **URBAN ROUTING OPTIMIZATION FOR DRIVER-BASED SHARED MOBILITY SERVICES**

**Author:** Pablo Mansilla Barrionuevo

Supervisors: Pedro Sánchez Martín, Mario Castro Ponce.

Collaborating Entity: ICAI – Universidad Pontificia Comillas.

## **ABSTRACT**

This academic document aims to address the optimization of urban vehicle routing for shared vehicles, a key element in the transition toward sustainable mobility. A mathematical optimization model based on Mixed-Integer Linear Programming (MILP) has been developed to solve a complex variant of the Vehicle Routing Problem (VRP), incorporating real-world constraints such as vehicle capacity (CVRP), heterogeneous fleets (HVRP) and time windows (VRPTW). This approach reflects the actual operational conditions of mobility services and aims to achieve a balance between cost-efficient solutions with high quality services.

Several case studies are presented to verify the effectiveness of the model, ranging scenarios with 8 to 30 passengers, as well as multiple vehicles with different capacities. Each solution is analysed against a baseline scenario, which considers the collection of all passengers with a single vehicle of unlimited capacity, to demonstrate the effectiveness of the proposed approach in each case. Metrics are analysed and presented for each proposed solution. The study shows that as the number of passengers and vehicles increases, leveraging economies of scale, the cost per passenger decreases significantly and the cost of providing the desired quality lowers as well. The study highlights the importance of considering service quality in addition to cost reduction as being part in the objective function to reduce.

**Keywords:** VRP, MILP, mobility, optimization, time windows, routing, sustainability, shared transportation.



## *Índice de la memoria*

<b>Capítulo 1. Introducción .....</b>	<b>6</b>
1.1 Celering: Reimagine Mobility .....	7
1.2 Aportación a los Objetivos de Desarrollo Sostenible .....	9
<b>Capítulo 2. Descripción de las Tecnologías.....</b>	<b>12</b>
2.1 Variantes del Vehicle Routing Problem.....	13
2.2 Técnicas de Resolución para el Vehicle Routing Problem (VRP) .....	16
2.3 Clasificación del Modelo y Técnicas de Optimización Implementadas.....	18
<b>Capítulo 3. Modelo Desarrollado.....</b>	<b>20</b>
3.1 Modelo de Optimización .....	21
3.1.1 Conjuntos .....	23
3.1.2 Parámetros .....	24
3.1.3 Variables .....	27
3.1.4 Función Objetivo .....	28
3.1.5 Condiciones .....	30
<b>Capítulo 4. Análisis de los Resultados.....</b>	<b>36</b>
4.1 Caso A – 8 Pasajeros con 3 Vehículos Disponibles .....	36
4.2 Caso B – 15 Pasajeros con 6 Vehículos Disponibles .....	45
4.3 Caso C – 30 Pasajeros con 6 Vehículos Disponibles de Mayor Capacidad .....	52
<b>Capítulo 5. Análisis Económico.....</b>	<b>62</b>
5.1 Caso A: 8 Pasajeros con 3 Vehículos Utilizados.....	62
5.2 Caso B: 15 Pasajeros con 4 Vehículos Utilizados.....	65
5.3 Caso C: 30 Pasajeros con 6 Vehículos Utilizados.....	66
5.4 Comparativa al Añadir un Vehículo Adicional .....	68
5.5 Comparativa de Casos por Pasajero .....	72
<b>Capítulo 6. Conclusiones.....</b>	<b>75</b>

<i>Capítulo 7. Bibliografía.....</i>	<b>78</b>
<i>Capítulo 8. Anexo: Código Desarrollado.....</i>	<b>81</b>

## *Índice de figuras*

Figura 1. Motivos de Desplazamiento en Día Laborable. (Dirección General de Tráfico & Instituto para la Diversificación y Ahorro de Energía, 2019) .....	6
Figura 2. Reparto Modal del Transporte de Viajeros en España. (Dirección General de Tráfico & Instituto para la Diversificación y Ahorro de Energía, 2019) .....	7
Figura 3. Celering. Reimagine Mobility. (Celering: La nueva plataforma de movilidad inteligente, s. f.) .....	8
Figura 4. Objetivos de Desarrollo Sostenible. (Naciones Unidas, 2015) .....	10
Figura 5. Caso A. Parámetros de entrada. ....	36
Figura 6. Caso A. Rutas y localización de los nodos. ....	37
Figura 7. Caso A. Línea Temporal de Recogida. ....	38
Figura 8. Caso A - baseline. Rutas y localización de los nodos. ....	42
Figura 9. Caso A - baseline. Línea Temporal de Recogida. ....	42
Figura 10. Caso A-bis. Rutas y localización de los nodos incluyendo coste fijo por vehículo. ....	44
Figura 11. Caso B. Parámetros de entrada. ....	45
Figura 12. Caso B. Rutas y localización de los nodos.....	46
Figura 13. Caso B. Detalle vehículo 2.....	47
Figura 14. Caso B. Línea Temporal de Recogida.....	48
Figura 15. Caso B - baseline. Rutas y localización de los nodos. ....	51
Figura 16. Caso C. Parámetros de entrada. ....	53
Figura 17. Diferenciación en Clusters. ....	54

Figura 18. Cálculo Previo con Clusters como Warm-Start. ....	55
Figura 19. Caso C. Rutas y localización de los nodos.....	56
Figura 20. Caso C. Línea Temporal de Recogida.....	57
Figura 21. Caso C - baseline. Rutas y localización de los nodos. ....	60
Figura 22. Comparativa de costes totales y reales entre A y su caso baseline. ....	64
Figura 23. Comparativa de costes totales y reales entre B y su caso baseline. ....	66
Figura 24. Comparativa de costes totales y reales entre C y su caso baseline. ....	68
Figura 25. Caso A. Comparativa visual de costes al variar el número de vehículos.....	70
Figura 26. Caso B. Comparativa visual de costes al variar el número de vehículos.....	71

## *Índice de tablas*

Tabla 1. Análisis Comparativo de las diferentes variantes de VRP .....	13
Tabla 2. Modelo matemático de optimización. ....	21
Tabla 3. Caso A. Variables x e y.....	39
Tabla 4. Caso A. Variable t_conductor. ....	39
Tabla 5. Caso A. Variable hi. ....	39
Tabla 6. Caso B. Variables x e y. ....	48
Tabla 7. Caso B. Variable t_conductor.....	49
Tabla 8. Caso B. Variable hi.....	49
Tabla 9. Comparativa de costes medios en los casos A, B y C.....	59
Tabla 10. Comparativa económica entre el Caso A y su caso baseline. ....	63
Tabla 11. Comparativa económica entre el Caso B y su caso baseline.....	65
Tabla 12. Comparativa económica entre el Caso C y su caso baseline.....	67
Tabla 13. Caso A. Comparativa de costes al variar el número de vehículos.....	69
Tabla 14. Caso B. Comparativa de costes al variar el número de vehículos.....	70
Tabla 15. Comparativa de Casos por Pasajero. Incremento en Costes y Mejora de la Calidad del Servicio .....	72
Tabla 16. Euros invertidos por minuto de mejora por pasajero.....	73

## Capítulo 1. INTRODUCCIÓN

El transporte urbano está experimentando una completa transformación debido a la necesidad de soluciones eficientes y sostenibles. El sector de la movilidad constituye un elemento fundamental en el día a día de la población. Tan solo en la Comunidad de Madrid, se realizan en un día laborable 4,8 millones de desplazamientos. (Consorcio Transportes Madrid, 2014). Dada la situación económica y política actual, tanto por el aumento del precio del combustible, como por la preocupación sobre la sostenibilidad en desplazamientos en vehículo propio, están surgiendo otras alternativas para cubrir parte de la necesidad.

En detalle, un estudio sobre las personas residentes en España realizado por el Ministerio de Fomento diferenciaba el motivo de desplazamiento realizado por la población en el año 2019. En la Figura 1 se destaca como un 43% de los desplazamientos que se realizan en un día laborable se dedican por motivo de trabajo u estudio. Además, considerando únicamente las personas ocupadas, observamos como el 60% de sus desplazamientos son dedicados a estos motivos. Es decir, si tenemos en cuenta que diariamente se realizan 4,8 millones de desplazamientos diariamente en la Comunidad de Madrid, podemos estimar que aproximadamente 2 millones de desplazamientos se realizan por motivo de trabajo u estudio.



*Figura 1. Motivos de Desplazamiento en Día Laborable. (Dirección General de Tráfico & Instituto para la Diversificación y Ahorro de Energía, 2019)*

Mas aún, en ese mismo estudio dedicado por la Dirección General de Tráfico, se detalla que gran parte de estos desplazamientos son realizados en carretera por vehículo privado, constituyendo un 76,42% de los trayectos, mientras que únicamente un 10,89% de los viajes

en carretera son realizados en autobús, como se detalla en la Figura 2. Con esto, se destaca la dependencia del vehículo privado frente a otras alternativas de desplazamiento. Además, sería interesante analizar las razones de esa dependencia, teniendo en cuenta si es por comodidad del usuario, por falta de alternativas al vehículo propio, por elevado coste de otros servicios alternativos u otras razones.



*Figura 2. Reparto Modal del Transporte de Viajeros en España. (Dirección General de Tráfico & Instituto para la Diversificación y Ahorro de Energía, 2019)*

De esta forma, podemos determinar que el uso del vehículo privado es el principal medio de desplazamiento diario, concretamente hacia zonas de trabajo o de estudios. Por esta razón, también gran parte de las emisiones asociadas a estos desplazamientos incrementarán si la tendencia se mantiene como en los últimos años. Concretamente en España el transporte emite el 30,3% del CO<sub>2</sub>eq total, por lo que se convierte en uno de los principales objetivos para tratar de reducir las emisiones. (Dirección General de Tráfico & Instituto para la Diversificación y Ahorro de Energía, 2019). En concreto se aprobaron 878 millones de euros para promover la movilidad sostenible en España en 2025, con foco en incentivar alternativas sostenibles y seguras. (European Commission, 2025).

## 1.1 CELERING: REIMAGINE MOBILITY

Bajo este contexto aparecen empresas como Celering como motores transformadores en esta industria. Fundada en 2018, esta startup tecnológica utiliza algoritmos predictivos e inteligencia artificial para optimizar rutas de transporte compartido logrando hasta una reducción de un 80% en emisiones de CO<sub>2</sub> y un 30% de ahorro en costes. (*Celering: el taxi*

*y bus compartido llegan a la España vaciada, s. f.). Ellos mismos, tal y como se añade en la Figura 3, indican en su página web que constituyen una alternativa para transformar el mundo y reducir la dependencia del vehículo privado. (José María Campos (Celering): «La movilidad del futuro será autónoma, asequible y de alta calidad», s. f.)*



### **SOÑAMOS CON UN MUNDO QUE NO DEPENDA DEL VEHÍCULO PRIVADO**

*Figura 3. Celering. Reimagine Mobility. (Celering: La nueva plataforma de movilidad inteligente, s. f.)*

En primer lugar, definiremos los principales servicios que ofrece la empresa actualmente. El modelo de operación consta de dos servicios principales: uno de ellos el principal y uno complementario:

- **Servicio de autobús lanzadera.** Este constituye el principal servicio ofrecido por la empresa. Este consta de un vehículo (en la mayoría de los casos un autobús) que, desde un punto de salida, transporta a los pasajeros hasta el lugar de destino. En este caso, el depósito está enfocado en empresas o zonas empresariales que contraten el servicio, además de otras alternativas como zonas educativas, sanitarias, polígonos y zonas de concurrencia. En este sentido, Celering proporciona un trayecto directo desde un punto de salida hasta el punto final de trabajo.
- **Servicio de recogida compartido.** Este constituye el segundo servicio ofrecido por la empresa, complementario al anterior. El usuario tiene la posibilidad antes de usar el servicio de autobús lanzadera principal de contratar un servicio adicional que le transporte hasta el punto de salida del autobús. En ese caso, existen varios vehículos disponibles que transportan, de manera compartida a varios pasajeros desde su vivienda hasta el nodo de salida. Este servicio es parecido a servicios VTC, pero compartidos con otros usuarios, para la minimización de costes. Se entiende que este

servicio adicional debe ser económicamente atractivo para que el consumidor decida contratarlo en lugar de desplazarse hasta el nodo de salida por sus propios medios. Cabe señalar que este servicio se ofrece como complementario al principal en este caso.

Una vez establecidos los diferentes servicios ofrecidos, se ha decidido analizar desde dos puntos de vista la operativa de la empresa:

En primer lugar, se ha simulado el plan de negocio de una empresa similar a Celering en otro documento académico ya presentado, centrando el foco en la escalabilidad de la empresa, el detalle de su modelo de negocio, la estimación de los costes e ingresos obtenidos y las principales dificultades que se podrían presentar. Sin embargo, este estudio es únicamente teórico, pero presenta una idea general sobre la empresa y se desarrolló en el documento académico “Plan de Negocio de un Servicio Privado de Transporte a Zonas Empresariales”. (Mansilla Barrionuevo, 2025)

En segundo lugar, se ha decidido analizar en profundidad la operativa del servicio complementario de recogida compartida, previo al servicio principal de autobús lanzadera, centrado en la optimización de tutas. Para ello, se ha decidido implementar un programa que permita determinar la operativa en la optimización de rutas para casos concretos y simulando el funcionamiento diario de la empresa. Este es el foco de este documento académico: **Analizar y explorar las alternativas en la optimización de rutas y proporcionar un modelo con el que la empresa pueda determinar la mejor alternativa disponible para la recogida de sus pasajeros.** Esta solución deberá estar enmarcada dentro de las condiciones del servicio: capacidad de los vehículos, número de vehículos disponibles, limitación de tiempo, enfoque en la reducción de costes.

## **1.2 APORTACIÓN A LOS OBJETIVOS DE DESARROLLO SOSTENIBLE**

El proyecto se enmarca dentro de los objetivos de desarrollo sostenible fijados por la Organización de las Naciones Unidas para la Agenda 2030, ilustrados en la Figura 4.



Figura 4. Objetivos de Desarrollo Sostenible. (Naciones Unidas, 2015)

En concreto, el proyecto contribuye especialmente a los siguientes puntos:

- **ODS 11: Ciudades y Comunidades Sostenibles.** El proyecto aborda la optimización del enrutamiento urbano de vehículos compartidos, proponiendo una alternativa al vehículo propio, disminuyendo la congestión y las emisiones contaminantes. Esto impacta positivamente en este aspecto, mejorando la movilidad urbana y reduciendo los desplazamientos individuales.
- **ODS 13: Acción por el Clima.** El transporte constituye gran parte del CO<sub>2</sub> equivalente emitido, por lo que disminuyendo el número de vehículos en movimiento mitiga globalmente el cambio climático.
- **ODS 3: Salud y Bienestar.** Con la reducción de emisiones contaminantes, la calidad del aire mejora considerablemente y con eso la salud pública. Esto reduce los riesgos de enfermedades respiratorias y mejora el bienestar general.
- **ODS 7: Energía Asequible y No Contaminante.** Se fomenta el uso eficiente de los recursos energéticos, optimizando el gasto energético en el desplazamiento.

- **ODS 9: Industria, Innovación e Infraestructura.** Se incluyen modelos matemáticos avanzados, algoritmos de optimización y técnicas de reducción de costes y emisiones, por lo que sitúa a la innovación tecnológico como pilar fundamental del desarrollo tecnológico.

## Capítulo 2. DESCRIPCIÓN DE LAS TECNOLOGÍAS

La optimización del servicio ofrecido por Celering para la recogida de los individuos se enmarca dentro del problema típico de VRP (Vehicle Routing Problem). Este constituye un caso base en la investigación operativa, logística y planificación. Este busca el conjunto de rutas más eficaz para satisfacer la demanda de clientes y el trayecto a diferentes localizaciones. El objetivo reside en la minimización de costes, lo que podría incluir tanto la distancia recorrida, el consumo de combustible, el tiempo de trayecto u otros costes operacionales. En cualquier caso, esta minimización está sujeta a diferentes condiciones establecidas por el problema como la capacidad de los vehículos, ventanas de tiempo de los pasajeros y requerimientos del sistema.

El problema original, formulado por Dantzig y Ramser en 1959 para la optimización de entregas de combustible generaliza el TSP (Travelling Salesperson Problem) para múltiples vehículos e introduciendo condiciones actuales. (Dantzig & Ramser, 1959). Este constituye un caso fundamental de estudio, con directa aplicabilidad en la industria del transporte.

Los principales componentes del VRP son:

- Flota de Vehículos: determinando la cantidad, el tipo y la capacidad de vehículos disponibles.
- Demanda de clientes: el número de clientes y tipo que deben ser transportados a cada localización.
- Optimización de rutas: determinando la secuencia de paradas a establecer por cada vehículo para minimizar costes y maximizar la eficiencia.
- Condiciones del modelo: límite en las capacidades de los vehículos, ventanas de tiempo en la entrega, tiempo de conducción y condiciones específicas.
- Función Objetivo: Centrado en la minimización de costes totales, aunque se puede incluir multiobjetividad para incluir otras condiciones como la calidad del servicio o el impacto ambiental.

## 2.1 VARIANTES DEL VEHICLE ROUTING PROBLEM

A continuación, en la Tabla 1, se desarrollan las diferentes variantes reconocidas partiendo del caso de VRP habitual, para hacer frente a condiciones concretas encontradas habitualmente. (Wenyi, 2023).

*Tabla 1. Análisis Comparativo de las diferentes variantes de VRP.*

Variante	Característica Principal	Complejidad	Aplicaciones Principales
CVRP	Capacidad de los vehículos	Media	Logística estándar
VRPTW	Ventanas de tiempo	Alta	Entregas con restricciones horarias
VRPPD	Recogida y Entrega Coordinada	Alta	E-commerce, logística inversa
HVRP	Flota de vehículos mixta	Media	Flotas con vehículos de diferentes tamaños
MDVRP	Múltiples depósitos	Alta	Redes de distribución regional
SDVRP	Entrega parcial a varios depósitos	Alta	Transporte de grandes volúmenes
SVRP	Incertidumbre en demanda	Muy Alta	Entornos dinámicos
PVRP	Rutas periódicas	Media	Servicios por suscripción

A continuación, se comenta cada una de las variantes, desarrollando sus características principales.

### VRP con restricción de capacidad (CVRP)

Cuyo objetivo es la minimización de la distancia total mientras satisface:

$$\sum_{i \in N} d_i \cdot x_{ijk} \leq Q_k \quad \forall k \in K$$

Donde  $d_i$  representa la demanda de clientes por nodo,  $x_{ijk}$  los arcos de conexión y  $Q_k$  la capacidad del vehículo. Esta es por tanto la característica base de los modelos de CVRP:

cada vehículo tendrá la limitación de recoger un máximo número de pasajeros en base a su capacidad.

### **VRP con ventanas temporales (VRPTW)**

La principal característica de esta variante es la limitación horaria de cada nodo. Es decir, establece un rango de recogida para cada pasajero, establecido como:

$$a_i \leq t_i \leq b_i \quad \forall i \in N$$

Donde  $a_i, b_i$  representan las horas de recogida límite para cada nodo. Esta establece por tanto una limitación para que cada pasajero sea recogido en una hora delimitada, manteniendo la necesidad del resto de condiciones que se añaden al modelo. (Kallehaug et al., 2007)

### **VRP con recogidas y entregas (VRPPD)**

Se introduce en esta variante la posibilidad de recogida y entrega hacia un mismo depósito final. Es decir, se añade la siguiente validación:

$$t_{pickup}^k \leq t_{delivery}^k \quad \forall k \in K$$

Donde se definen las variables de recogida y de entrega para cada elemento por vehículo. Como en este caso se permite la recogida de un elemento y entrega en un depósito particular para cada uno, se introduce la validación de que la recogida sea más temprana que la entrega, para mantener el flujo lógico de tiempos. (Liu et al., 2002) Este caso en concreto simula el comportamiento de la logística de empresas de paquetería, por ejemplo.

### **VRP con flota heterogénea (HVRP)**

Esta variable se distingue de las demás considerando que ahora la flota de vehículos no posee una capacidad homogénea, si no que cada vehículo posee una capacidad particular. En este caso, debe decidirse que vehículo se le asigna a cada ruta, considerando su capacidad y su costo. Se amplia por tanto la complejidad del modelo, al determinar que rutas pueden ser satisfechas con vehículos de mayor capacidad. (Baldacci et al., 2008)

### VRP con multidepósito (MDVRP)

En este caso se introduce la posibilidad de poseer un mayor número de depósitos de destino final. Por tanto, todas las rutas realizadas pueden acabar en distintos nodos finales.

$$\sum_{d \in D} z_{id} = 1 \quad \forall i \in N$$

Considerando que  $z_{id}$  constituye la entrega del pasajero hacia su nodo destino final, existiendo  $D$  depósitos finales establecidos. Este caso es comúnmente aplicado junto con el VRPPD, de recogida y entrega, para establecer conjuntamente el MDVRPPD, que constituye un VRPPD con multidepósito. (Nagy & Salhi, 2003).

### VRP con entrega dividida (SDVRP)

Esta variante permite atender la demanda de un mismo cliente con múltiples vehículos, por lo que invalida la restricción clásica del VRP de que cada cliente debe ser recogido únicamente por un vehículo. Esta se define entonces por:

$$x_{ij}^k \in \{0, 1\} \rightarrow x_{ij}^k \in \mathbf{Z}^+$$

Donde  $x_{ij}^k$  representa el número de veces que el vehículo  $k$  recorre el arco  $(i, j)$ . Esto, por tanto, permite múltiples visitas a un mismo cliente. Esta puede aplicarse en la logística urbana, que, aun aumentando la complejidad, podría usarse en zonas donde varios repartidores pueden servir un mismo punto. (Ozbaygin et al., 2018)

### VRP estocástico (SVRP)

Se añade esta variante del VRP para establecer rutas ante la incertidumbre de parámetros críticos como la demanda de clientes, tiempos de viaje o presencia de clientes. Se establecen soluciones iniciales que permitan la factibilidad y eficiencia y que sean la base de la optimización de esas variables cambiantes. (Oyola et al., 2018)

Esta, por tanto, se basa principalmente en reoptimizaciones parciales a partir de una primera propuesta calculada. Esta se aplica a entornos donde la demanda es realmente variable e incrementa la complejidad del modelo considerablemente.

### **VRP periódico (PVRP)**

Esta variante extiende el problema base VRP a un horizonte temporal de varios días, donde el cliente requiere de varias visitas recurrentes con una frecuencia específica. Se extiende por tanto el cálculo del modelo en el horizonte temporal. Esta es usada principalmente en productos de suscripción, donde para cada uno de los días requeridos, el problema se simplifica resolviendo indivisamente un VRP para cada uno de esos días. (Ahmadi Basir et al., 2024)

## **2.2 TÉCNICAS DE RESOLUCIÓN PARA EL VEHICLE ROUTING PROBLEM (VRP)**

Existen diferentes técnicas para la resolución del problema, que se presentan a continuación.

### **Métodos Exactos**

Garantizan soluciones óptimas mediante exploración sistemática del espacio de soluciones. Podemos distinguir entre:

- Branch and Bound (B&B): divide el problema en subproblemas mediante un árbol de decisiones, usando cotas para desechar ramas no óptimas.
- Branch and Cut (B&C): combina el B&B pero añade planos de corte para reforzar cotas inferiores y mejorar la resolución de modelos complejos.
- Column Generation: parte de la generación de un problema maestro y en la generación de nuevas rutas dentro de un conjunto restringido.

### **Heurísticas Constructivas**

Se tratan de métodos rápidos para soluciones factibles, aunque no óptimas, que son preferibles en modelos grandes. Distinguimos, por ejemplo:

- Algoritmo de ahorros: Calcula el ahorro al combinar dos rutas en una única, para después ordenarlo en cuanto a costes y seleccionando las alternativas respetando la restricción de capacidad.

- Algoritmo de Inserción: existiendo rutas seleccionadas, se incluyen rutas y se calcula el incremento en añadir el nodo a esa ruta existente, seleccionando la alternativa que minimice el incremento de costo de la solución.

### Metaheurísticas

Se tratan de técnicas avanzadas que optimizan soluciones iniciales mediante búsqueda estocástica, es decir, introduciendo aleatoriedad para explorar diferentes soluciones alternativas entre sí. No siguen un patrón como las heurísticas.

Algunas de las técnicas metaheurísticas son:

- Algoritmos Genéticos (GA): Simulan la evolución natural, combinando soluciones principales y generando soluciones alternativas a partir de ellas.
- Reconocido simulado (SA): Acepta soluciones temporalmente peores para escapar de óptimos locales. Es decir, acepta soluciones peores para evitar mantenerse en soluciones no óptimas.
- Colonias de hormigas (ACO). Prioriza las soluciones rápidas y eficientes, por lo que en condiciones cambiantes es muy eficaz.

### Métodos híbridos

Estos métodos combinan escalabilidad y calidad en procesos masivos, algunos ejemplos son:

- Cluster-First, Route-Second. Existe en un primer momento un agrupamiento de nodos en clusters (zonas) en base a un criterio inicial y una posterior resolución del VRP independiente por cluster. (Comert & Yazgan, 2021). Dos posibles agrupamientos son:
  - Algoritmo Sweep: El agrupamiento se produce en base al ángulo polar con respecto al depósito.
  - K-means: El agrupamiento se produce por proximidad geográfica.
- Route-First, Cluster-Second. Se construye en principio un VRP que visita todos los nodos y en un segundo paso se segmenta la ruta en tramos factibles por vehículos.

### **Enfoques basados en Inteligencia Artificial**

Estos manejan dinamismo e incertidumbre en tiempo real.

- Aprendizaje por Refuerzo (RL). Agentes aprenden políticas de ruteo mediante recompensas para entrenar redes que mapean estados acciones óptimas. (Nazari et al., 2018)
- Redes neuronales. Se basan en la predicción de demanda, analizando datos históricos, para predecir picos de demanda y capturar patrones complejos. (Song & Jiao, 2024).

## **2.3 CLASIFICACIÓN DEL MODELO Y TÉCNICAS DE OPTIMIZACIÓN IMPLEMENTADAS**

Una vez desarrollado las diferentes variantes de VRP y las técnicas existentes de resolución, se define a continuación el modelo y el caso de estudio implementado.

En primer lugar, en cuanto a la clasificación de VRP en base a las variantes definidas, el modelo consiste en una mezcla de:

- CVRP: Se controla la restricción de capacidad de los vehículos.
- HVRP: Se introduce una flota de vehículos heterogénea.
- VRPTW: Se añade una ventana temporal global del modelo con penalización por retraso o llegada temprana para cada vehículo.

Por tanto, el modelo consta de una mezcla de cada uno de esos elementos característicos de las variantes del VRP.

Por otro lado, en cuanto a las técnicas de optimización utilizadas podemos definir:

1. Modelado MILP (Mixed-Integer Linear Programming). Se incluye una formulación rigurosa en Pyomo con variables binarias (para la decisión de rutas y vehículos), como de variables continuas (como tiempos capacidades). Se garantiza optimalidad.

2. Branch and Cut. Se incluyen técnicas de B&C para dividir el espacio de soluciones fijando las variables binarias fraccionarias.
3. Warm-start con Clustering Geográfico mediante el algoritmo Sweep. Es decir, dividimos el modelo en zonas en base al ángulo radial de cada nodo para luego optimizar la solución dividida por clusters. Esta propone una primera solución heurística para trabajar.
4. Refinamientos específicos. Se incluyen, por ejemplo, variables MTZ para la eliminación de subciclos y rutas inviables. (Miller et al., 1960). Además, se añaden penalizaciones adaptativas concretas al caso de estudio, como penalizaciones por falta de puntualidad o penalizaciones por desviaciones de rutas directas para guiar a la resolución del modelo.

Por tanto, a continuación, en los siguientes puntos se desarrollará el modelo en base a estos elementos desarrollados.

## Capítulo 3. MODELO DESARROLLADO

En esta sección se presenta el modelo matemático de optimización desarrollado para hacer frente al problema presentado de recogida de pasajeros bajo vehículo compartido. El modelo pretende determinar la asignación óptima de vehículos y sus rutas para satisfacer las necesidades de desplazamiento de los pasajeros, disminuyendo los costes totales operacionales, manteniendo las necesidades operativas y las condiciones establecidas.

Tal y como se ha comentado previamente, el Vehicle Routing Problem (VRP) es un caso clásico de optimización en investigación operativa, donde el objetivo es diseñar rutas eficientes para una flota de vehículos que sirva a un grupo de pasajeros. Todo esto sujeto a condiciones tales como la capacidad de los vehículos, ventanas de tiempo y necesidades de servicio. Se incluyen también consideraciones tales como penalizaciones por retrasos, rutas demasiado largas y costes operacionales relacionados con el tiempo y con la distancia de las rutas.

El modelo se formula como un Mixed-Integer Linear Programming (MILP) incluyendo los siguientes componentes:

- Conjuntos: Definen los elementos fundamentales del sistema, tales como los grupos de nodos (pasajeros) y el número de vehículos disponibles.
- Parámetros: Recogen los valores fijos del problema, incluyendo distancias, tiempos de viaje, capacidad de los vehículos, coeficientes de costes a penalizar, etc.
- Variables de decisión: Representan las decisiones clave a realizar por el modelo, como la asignación de los vehículos, las rutas escogidas, variables de tiempo, etc.
- Función objetivo: Busca la minimización total del coste, lo que incluye variables de coste (distancia, tiempo de conducción), costes fijos y penalizaciones por retrasos u excesos de viajes.
- Condiciones: Asegura la factibilidad del modelo bajo condiciones necesarias para satisfacer las necesidades del problema en cuanto a la recogida de los pasajeros, el uso de los vehículos, características de las rutas y otras condiciones.

### 3.1 MODELO DE OPTIMIZACIÓN.

A continuación, cada uno de estos componentes se describirá en detalle para el modelo desarrollado, proporcionando el modelo matemático completo. Se presenta de forma compacta para asegurar la claridad y un entendimiento sobre el enfoque del modelo desarrollado. En concreto, el modelo de optimización se representa en la Tabla 2.

*Tabla 2. Modelo matemático de optimización.*

<u>CONJUNTOS</u>	
<i>n</i>	Nodos del sistema {i, j, ..., NUM_PASSENGERS}. [pasajeros generados aleatoriamente]
<i>k</i>	Vehículos. [1, 2, ..., MAX_VEHICULOS]
<u>PARÁMETROS</u>	
<i>DIST_KM<sub>ij</sub></i>	Distancia real entre nodos i y j (km).
<i>TIEMPO<sub>ij</sub></i>	Tiempo de viaje entre nodos i y j (min) .
<i>TM</i>	Tiempo medio de subida del pasajero (min).
<i>CAP<sub>k</sub></i>	Capacidad del vehículo k (personas).
<i>HORA_SALIDA</i>	Hora límite de llegada al destino (min).
<i>VELOCIDAD_KMH</i>	Velocidad media de los vehículos (km/h).
<i>COSTE_FIJO</i>	Coste fijo por vehículo utilizado (€).
<i>COSTE_KM</i>	Coste por kilómetro recorrido (€).
<i>COSTE TIEMPO</i>	Coste por minuto de conductor (€).
<i>COSTE_PUNTUALIDAD</i>	Penalización por retraso respecto a la hora de salida del autobús (€).
<i>COSTE_EXCESO</i>	Penalización por exceso de trayecto de los pasajeros (€).
<u>VARIABLES</u>	
<i>x<sub>ijk</sub></i>	1 si el vehículo k viaja de i a j, 0 en otro caso.
<i>y<sub>k</sub></i>	1 si el vehículo k es utilizado, 0 en otro caso.
<i>t<sub>ik</sub></i>	Tiempo acumulado en el nodo i por el vehículo k (min).
<i>t_tray<sub>i</sub></i>	Tiempo de trayecto acumulado hasta llegar a A para el pasajero i (min).
<i>t_end<sub>i</sub></i>	Variable auxiliar para <i>t_tray<sub>i</sub></i> (min).
<i>t_dif<sub>i</sub></i>	Diferencia entre <i>t_tray<sub>i</sub></i> y el trayecto directo <i>i → A</i> .
<i>h<sub>ik</sub></i>	Hora inicial de recogida del vehículo k (min).
<i>diff_llegada<sub>k</sub></i>	Diferencia entre llegada y hora de bus para el vehículo k.
<i>tiempo_conductor<sub>k</sub></i>	Tiempo total de trabajo del conductor k.
<i>u<sub>ik</sub></i>	Variable MTZ para eliminación de subciclos
<i>ocupacion<sub>ik</sub></i>	Ocupación del vehículo k al llegar al nodo i
<u>FUNCIÓN OBJETIVO</u>	
Coste variable por distancia recorrida	$\min \left( \sum_k \sum_{i,j} x_{ijk} \cdot DIST_{ij} \cdot COSTE\_KM \right)$
	$COSTE\_KM = 0.09\text{€}/\text{km}$

Coste fijo por vehículo utilizado	$+ \sum_k COSTE\_FIJO \cdot y_k$	$COSTE\_FIJO = 0\text{€}$
Coste por tiempo de conductor	$+ \sum_k COSTE\_TIEMPO \cdot tiempo\_conductor_k$	$COSTE\_TIEMPO = 0.30\text{€/min}$
Penalización por retraso respecto a la hora de salida del autobús por vehículo utilizado	$+ \sum_k COSTE\_PUNTUALIDAD \cdot diff\_llegada_k$	$COSTE\_PUNTUALIDAD = 5\text{€/min}$
Penalización por exceso de trayecto de los pasajeros	$+ \sum_{i \neq A} (t\_tray_i - TIEMPO_{Ai})^1 \cdot COSTE\_EXCESO$	$COSTE\_EXCESO = 1\text{€/min}$

### CONDICIONES

Todos los clientes deben ser recogidos:

$$\sum_{i,k} x_{ijk} = 1 \quad \forall j \neq i$$

Ocupación del vehículo

$$\begin{aligned} ocupacion_{Ak} &= 0 \quad \forall k \\ ocupacion_{jk} &= x_{Ajk} + \sum_{i \neq A} (ocupacion_{ik} + 1) \cdot x_{ijk} \quad \forall j \neq A, k \\ \sum_{i \neq A} ocupacion_{ik} \cdot x_{iAk} &\geq \sum_{i \neq A} x_{iAk} \quad \forall k \\ ocupacion_{ik} &\leq CAP_k - 1 \quad \forall i, k \end{aligned}$$

Solo se viaja si el vehículo es usado

$$x_{ijk} \leq y_k \quad \forall i, j, k$$

No se realizan viajes de ida y vuelta excepto desde A:

$$x_{ijk} + x_{jik} \leq 1 \quad \forall i \neq A \quad \forall j \neq i, k$$

Todos los coches deben empezar en A:

$$\sum_j x_{ijk} \geq y_k \quad \forall i = A \quad \forall k$$

Todos los coches deben acabar en A:

$$\sum_i x_{ijk} \geq y_k \quad \forall j = A \quad \forall k$$

Igualdad en el número de salidas y llegadas a A.

$$\sum_j x_{Ajk} = \sum_i x_{iAk} \quad \forall k$$

Asegurar la consecutividad de nodos:

$$\sum_l x_{jlk} = x_{ijk} \quad \forall i \neq j, j, k$$

Eliminación de subciclos.  
(Miller-Tucker-Zemlin)

$$u_{ik} - u_{jk} + |N| \cdot x_{ijk} \leq |N| - 1 \quad \forall i, j \neq A, i \neq j, k$$

$$u_{Ak} = 0 \quad \forall k$$

Control de salidas desde A

$$u_{jk} \geq u_{ik} + 1 - M \cdot (2 - x_{Aik} - x_{Ajk}) \quad \forall i, j \neq A, i \neq j, k$$

Contador de tiempo:

$$t_{jk} \geq h_{ik} + TM + TIEMPO_{ij} - M \cdot (1 - x_{ijk}) \quad \forall i = A \quad \forall j \neq i, k$$

\*TM = 2  
 $M = HORA\_SALIDA + 480$ .

$$t_{jk} \geq t_{ik} + TM + TIEMPO_{ij} - M \cdot (1 - x_{ijk}) \quad \forall i \neq A \quad \forall j \neq i, k$$

\*t=0 si no realizo ese viaje.

$$t_{ik} \geq 0 \quad \forall j, k$$

$$t_{ik} \leq M \cdot \sum_j x_{jik} \quad \forall i, k$$

Tiempo de trayecto de cada pasajero:

$$t_{tray_i} = t_{end_i} - \sum_k t_{ik} \quad \forall i \neq A$$

$$t_{end_i} \leq t_{Ak} + M \cdot (1 - \sum_j x_{jik}) \quad \forall i \neq A, k$$

$t_{end_i} \geq t_{Ak} - M \cdot (1 - \sum_j x_{jik}) \quad \forall i \neq A, k$	
Tiempo del conductor	$t_{tempo\_conductor_i} = t_{Ak} - h_{ik} \quad \forall k$
Diferencia de tiempos entre trayecto realizado y trayecto directo.	$t_{dif_i} = t_{tray_i} - TIEMPO_{Ai} \quad \forall i \neq A$

Una vez establecida una imagen completa del modelo matemático, se detalla cada uno de los elementos presentados anteriormente: conjuntos, parámetros, variables, función objetivo y condiciones en profundidad.

### 3.1.1 CONJUNTOS

En primer lugar, el conjunto fundamental para el diseño del modelo son los nodos del sistema, que representan cada uno de los pasajeros que debe ser recogido. En este caso, el usuario determina antes de ejecutar el programa el número de pasajeros que presenta ese caso en concreto. Estos nodos se representarán como A, B, ... hasta el número de pasajeros totales determinados por el usuario. Se define por defecto el nodo de salida y de llegada, asignado a A. Es decir, A no representa un pasajero, si no un nodo de partida y de llegada para los vehículos.

#### CONJUNTOS

$n$	Nodos del sistema {i, j, ..., NUM_PASSENGERS}. [pasajeros generados aleatoriamente]	NUM_PASSENGERS definida por usuario
-----	--	--

Por otro lado, el conjunto k representa el número de vehículos disponible en el sistema. El usuario también determina de partida el número de vehículos disponibles para resolver ese caso. Se definen como vehículo 1, vehículo 2 y así sucesivamente.

#### CONJUNTOS

$k$	Vehículos. [1, 2, ..., MAX_VEHICULOS]	MAX_VEHICULOS definida por usuario
-----	---------------------------------------	---------------------------------------

### 3.1.2 PARÁMETROS

El primer parámetro fundamental del sistema es la distancia en kilómetros entre cada uno de los nodos. Una vez establecidos el número de nodos en el modelo, el programa asigna aleatoriamente la distribución de estos nodos en el mapa. Existe entonces una función que calcula la distancia entre las coordenadas de cada uno de los nodos y rellena el parámetro DIST\_KM. La distancia entre los nodos es la base para la minimización de los costes del modelo. Aunque el modelo de base genere aleatoriamente los nodos, estos se podrían cargar manualmente en base a la demanda diaria, y en nuestro caso, se cargan casos específicos de nodos que se presentan en detalle en los resultados, para trabajar sobre los mismos nodos.

#### PARÁMETROS

$DIST_{KMij}$	Distancia real entre nodos i y j (km).	Calculada por coordenadas
---------------	--	------------------------------

Además, se introduce un parámetro de referencia de la velocidad media de los trayectos realizados en los vehículos. Esta se introduce manualmente en la pantalla de selección, aunque podría ser estimada o calculada en base al histórico. Esta velocidad media, determina el parámetro TIEMPO, que parte de la distancia entre cada uno de los nodos y con su velocidad media, determina el tiempo que existe entre cada nodo. Este tiempo se calcula en minutos.

#### PARÁMETROS

$VELOCIDAD\_KMH$	Velocidad media de los vehículos (km/h).	Definida por usuario
$TIEMPO_{ij}$	Tiempo de viaje entre nodos i y j (min) .	$DIST_{ij}$ y $VELOCIDAD\_KM$ H

Además, se establece un tiempo medio en la subida de los pasajeros a los vehículos en 2 minutos. Es decir, se estima que desde que el vehículo llega a un nodo, el vehículo espera de media 2 minutos hasta que puede volver a salir hasta el siguiente destino.

## PARÁMETROS

**TM** Tiempo medio de subida del pasajero (min). 2

Se introduce también la capacidad de cada uno de los coches que se proporcionan. Es decir, una vez introducido el conjunto de los vehículos disponibles, se debe proporcionar la capacidad de cada uno de ellos, para restringir la ocupación de cada uno. Esto se introduce también en la pantalla de selección.

## PARÁMETROS

$CAP_k$  Capacidad del vehículo k (personas). Definida por usuario

Como el servicio que se está optimizando pretende recoger a pasajeros para volver a depositarlos en A hasta que salga el autobús que los lleva al destino final, se debe determinar una hora en la que todos los vehículos y pasajeros deben estar. Esta se define en la pantalla de inicio.

## PARÁMETROS

**HORA SALIDA** Hora límite de llegada al destino (min). Definida por usuario

Se añaden también costes que serán utilizados en la función objetivo para su minimización y la resolución de la opción optima. El primer coste es un coste fijo por el uso de un vehículo adicional, COSTE\_FIJO. En este caso se incluye aunque se establece en 0, ya que no se estima que el proveedor de vehículos solicite remuneración adicional al sueldo y al combustible consumido en los viajes.

## PARÁMETROS

***Coste fijo*** Coste fijo por vehículo utilizado (€). 0

El COSTE\_KM determina el coste por kilómetro recorrido en cuanto a consumo de combustible. Se ha estimado en 0,09€/km. Es decir, estimando un consumo de 6L/100km y un precio medio del combustible de 1,5€/L, los costes por cada kilómetro recorrido serían 0,09€/km.

### **PARÁMETROS**

<i>COSTE_KM</i>	Coste por kilómetro recorrido (€).	0.09
-----------------	------------------------------------	------

Además, se incluye en *COSTE TIEMPO* el salario del conductor del vehículo por cada minuto que recorre. Se considera únicamente el beneficio bruto del conductor, ya que el consumo del vehículo se incluye separadamente. Se supone 0,30€/min, que supone un salario de 18€/hora.

### **PARÁMETROS**

<i>COSTE_TIEMPO</i>	Coste por minuto de conductor (€).	0.30
---------------------	------------------------------------	------

Por otro lado, como todos los vehículos deben llegar antes de la salida del autobús que le dirige al destino final, se penaliza en 5€ por cada minuto que hay de diferencia entre la hora de llegada del vehículo en comparación con la hora de salida del autobús.

### **PARÁMETROS**

<i>COSTE_PUNTUALIDAD</i>	Penalización por retraso respecto a la hora de salida del autobús (€).	5
--------------------------	--	---

Se añade también *COSTE\_EXCESO*, que representa de alguna forma una penalización en €/min por cada minuto adicional que tarda un viaje en el servicio proporcionado en comparación con realizar el viaje directamente. Es decir, con un caso práctico: si habitualmente esa ruta sin paradas la haría en 30 minutos, pero recogiendo a otros pasajeros, desde que el usuario es recogido hasta la hora de destino el tiempo es de 45 minutos, se entiende que existen 15 minutos de diferencia que se penalizarían. Se aclara que, esta diferencia siempre va a existir, ya que el trayecto directo no será realizado habitualmente. Se añade para penalizar si existen diferencias desmedidas en las rutas calculadas.

### **PARÁMETROS**

<i>COSTE_EXCESO</i>	Penalización por exceso de trayecto de los pasajeros (€).	1
---------------------	---	---

### 3.1.3 VARIABLES

A continuación, se desarrollan las variables utilizadas en el modelo.

La variable  $x$  es la base de la optimización del modelo. Determina que nodos son conectados por cada vehículo. Es decir, un valor de 1 en  $x(A, B, 1)$  quiere decir que el viaje de A a B será realizado por el vehículo 1. Además, la variable  $y$  determina si un vehículo es utilizado o no, siendo 1 si es utilizado.

#### VARIABLES

$x_{ijk}$                   1 si el vehículo  $k$  viaja de  $i$  a  $j$ , 0 en otro caso.

$y_k$                   1 si el vehículo  $k$  es utilizado, 0 en otro caso.

A continuación, se definen variables de tiempo. La variable  $t$  representa el tiempo acumulado al llegar a cada uno de los nodos, por cada vehículo. Es decir, permite determinar la hora de recogida de los clientes. Por otro lado,  $t\_tray$  constituye el tiempo que cada pasajero está en el vehículo desde que le recogen hasta que llegan al nodo final. Para el cálculo de  $t\_tray$  se usa  $t\_end$ , que se establece como la hora final de llegada al nodo A. También se incluye una variable auxiliar denominada  $t\_dif$  que determina la diferencia de tiempos en realizar el trayecto diario o el de la ruta propuesta para cada pasajero. En base a estos tiempos, podemos calcular el  $tiempo\_conductor$  con el que se establecerá un sueldo por minuto para el conductor.

Para finalizar, otras variables relacionadas con el tiempo son  $hi$ , que determina la hora de inicio de cada vehículo y  $diff\_llegada$ , que determina la diferencia en tiempos de la llegada de los vehículos hasta la hora de salida del autobús.

#### VARIABLES

$t_{ik}$                   Tiempo acumulado en el nodo  $i$  por el vehículo  $k$  (min).

$t\_tray_i$                   Tiempo de trayecto acumulado hasta llegar a A para el pasajero  $i$  (min).

$t\_end_i$	Variable auxiliar para $t\_tray_i$ (min).
$t\_dif_i$	Diferencia entre $t\_tray_i$ y el trayecto directo $i \rightarrow A$ .
$tiempo\_conductor_k$	Tiempo total de trabajo del conductor k.
$hi_k$	Hora inicial de recogida del vehículo k (min).
$diff\_llegada_k$	Diferencia entre llegada y hora de bus para el vehículo k.

Se añade también la variable  $u$  que se incluye para las restricciones de Miller-Tucker-Zemlin. Esta representa el orden de visita de cada uno de los nodos por vehículo utilizado. Además del orden, con la variable *ocupación* controlamos la ocupación en cada vehículo en el proceso de recogida.

### VARIABLES

$u_{ik}$	Variable MTZ para eliminación de subciclos
$ocupacion_{ik}$	Ocupación del vehículo k al llegar al nodo i

### 3.1.4 FUNCIÓN OBJETIVO

La función objetivo determinará el valor de las variables presentadas anteriormente. El modelo tratará de minimizar la expresión que se indica a continuación, por lo que irá iterando entre cada una de las soluciones para comparando el resultado de la función objetivo determinar si se encuentra ante una mejor solución que la anterior.

Para un mayor entendimiento, se va a explicar en detalle cada una de las partes que componen la función objetivo. Cabe señalar, que el primer punto de partida para poder incluir esta función multiobjetivo es fijar una unidad común con la que poder comparar toda la expresión. En este caso, cada una de las partes de la función objetivo se mide en €.

El primer punto a optimizar es el coste por kilómetro para cada uno de los vehículos utilizados. Para ello, en base a los valores que tomará la variable  $x$ , podremos determinar el número de kilómetros recorrido por cada coche y estableciendo un consumo medio de

6L/100km y un precio medio del combustible de 1,5€/L, se establece COSTE\_KM en 0,09€/km.

### FUNCIÓN OBJETIVO

Coste variable por distancia recorrida

$$\min(\sum_k \sum_{i,j} x_{ijk} \cdot DIST_{ij} \cdot COSTE\_KM) \quad \begin{matrix} COSTE\_KM \\ = \\ 0.09\text{€}/\text{km} \end{matrix}$$

Por otro lado, se añade otro elemento a la función objetivo, si el proveedor de vehículos estableciera un coste fijo por el uso de un vehículo adicional. Es decir, un coste base por el uso de cada vehículo. En este caso y los posteriores resultados, se asume este coste a 0, ya que únicamente se asumen costes variables del salario del conductor.

### FUNCIÓN OBJETIVO

Coste fijo por vehículo utilizado

$$+ \sum_k COSTE\_FIJO \cdot y_k \quad \begin{matrix} COSTE\_FIJO = 0\text{€} \end{matrix}$$

Se añade también, por tanto, el salario que cada conductor recibirá por el tiempo trabajado. Este se fija en 18€/hora, traduciéndose en 0,30€/min. Cabe decir, que este salario es únicamente el que recibe el conductor del vehículo, sin incluir el consumo de combustible, que se añade en la anterior condición.

### FUNCIÓN OBJETIVO

Coste por tiempo de conductor

$$+ \sum_k COSTE\_TIEMPO \cdot tiempo\_conductor_k \quad \begin{matrix} COSTE\_TIEMPO = \\ 0.30\text{€}/\text{min} \end{matrix}$$

Otra de las penalizaciones que se incluye en la función objetivo es el coste de puntualidad. Como la base del servicio es la recogida de pasajeros hasta el depósito en A, donde a partir de cierta hora existirá un autobús lanzadera, los pasajeros no deberán llegar nunca más tarde de esa hora (condición que se incluye). Aun así, se añade una penalización en el caso contrario, que la recogida planeada de los vehículos deposite a todos los pasajeros mucho antes de la salida del autobús, por lo que la insatisfacción en la espera se incluye en esta penalización. Esta penalización obligará a las rutas a fijar la hora de llegada a la hora de

salida del autobús lanzadera, para no incurrir en ninguna penalización. Aun así, esta se fija en 5€/min de adelanto con respecto a la hora de salida del autobús.

#### FUNCIÓN OBJETIVO

Penalización por retraso respecto a la hora de salida del autobús por vehículo utilizado

$$+ \sum_k COSTE\_PUNTUALIDAD \cdot diff\_llegada_k$$

*COSTE\_PUNTUALIDAD = 5€/min*

Por último, se incluye una penalización por el exceso de viaje para cada uno de los pasajeros. Es decir, se compara el tiempo que un pasajero normalmente tardaría en ir al punto del depósito, con el que se le asigna en el vehículo compartido. Incluirlo en la minimización asegurará, por ejemplo, que los nodos más cerca del depósito sean recogidos los últimos en las rutas para minimizar este aspecto. Se incluye como coste, aunque directamente no sea un coste si no una insatisfacción del cliente que se traduce como coste. El valor de COSTE\_EXCESO se define en base a la importancia que le establece la empresa a este punto de satisfacción de sus empleados. Se traduciría como: ¿cuánto está dispuesta la empresa a incurrir en costes adicionales porque la satisfacción del cliente sea la mayor? Si la satisfacción es primordial, incluir un valor de COSTE\_EXCESO muy alto determinará rutas de recogida de pocos pasajeros, muy conectados. En este caso, se fija en un coste leve de 1€/min. Cabe señalar, que siempre existirá diferencia de tiempos entre la ruta calculada y la directa, ya que la base del negocio es la recogida compartida, pero esta diferencia es la que con el parámetro COSTE\_EXCESO se establece el valor.

#### FUNCIÓN OBJETIVO

Penalización por exceso de trayecto de los pasajeros

$$+ \sum_{i \neq A} (t\_tray_i - TIEMPO_{Ai})^1 \cdot COSTE\_EXCESO$$

*COSTE\_EXCESO = 1€/min*

### 3.1.5 CONDICIONES

Se definen a continuación todas las condiciones que aplican al modelo. Para que el sistema encuentre una solución, sea óptima o no, deberá cumplir las siguientes restricciones.

La principal condición establecida es que todos los pasajeros, que se encuentran en los nodos establecidos, deberán ser recogidos 1 vez por todos los vehículos. Esto asegurará que no existen pasajeros que no sean recogidos.

#### CONDICIONES

Todos los clientes deben ser recogidos:

$$\sum_{i,k} x_{ijk} = 1 \quad \forall j \neq i$$

---

Se incluye también una condición sobre la capacidad máxima del vehículo. Es decir, se añade la variable *ocupacion*, que calcula el número de pasajeros que cada vehículo transporta en cada uno de los nodos y fija a que en todo momento, esa ocupación sea menor que la capacidad del coche eliminando al conductor.

#### CONDICIONES

Ocupación del vehículo

$$\begin{aligned} ocupacion_{Ak} &= 0 \quad \forall k \\ ocupacion_{jk} &= x_{Ajk} + \sum_{i \neq A} (ocupacion_{ik} + 1) \cdot x_{ijk} \quad \forall j \neq A, k \\ \sum_{i \neq A} ocupacion_{ik} \cdot x_{iAk} &\geq \sum_{i \neq A} x_{iAk} \quad \forall k \\ ocupacion_{ik} &\leq CAP_k - 1 \quad \forall i, k \end{aligned}$$

---

Además, se añade la siguiente restricción para fijar la relación entre la variable *x* e *y*, determinando que siempre que se realice una conexión con el coche *k*, la variable *y* deberá estar completa para ese vehículo.

#### CONDICIONES

Solo se viaja si el vehículo es usado

$$x_{ijk} \leq y_k \quad \forall i, j, k$$

A continuación, se añaden restricciones sobre el nodo de depósito A. La primera de ellas establece que solo se pueda realizar un viaje de ida y vuelta si se trata del nodo depósito, no permitiéndolo para los demás. Se parte también del planteamiento que todos los vehículos comienzan su ruta en A y de la misma forma, terminan ese viaje en A. Además, se controla que cada salida que se realiza desde el nodo depósito se iguale con su llegada, por vehículo. Estableciendo que, si un vehículo debe salir dos veces del nodo A, deberá llegar 2 veces a ese depósito. Por último, con la variable  $u$  se controlan los viajes desde A, estableciendo que si se realizan varios viajes desde A, estos no deben ser simultáneos.

#### CONDICIONES

---

No se realizan viajes de ida y vuelta excepto desde A:

$$x_{ijk} + x_{jik} \leq 1 \quad \forall i \neq A \quad \forall j \neq i, k$$

---

Todos los coches deben empezar en A:

$$\sum_j x_{ijk} \geq y_k \quad \forall i = A \quad \forall k$$

---

Todos los coches deben acabar en A:

$$\sum_i x_{ijk} \geq y_k \quad \forall j = A \quad \forall k$$

---

Igualdad en el número de salidas y llegadas a A.

$$\sum_j x_{Ajk} = \sum_i x_{iAk} \quad \forall k$$

---

Control de salidas desde A

$$u_{jk} \geq u_{ik} + 1 - M \cdot (2 - x_{Aik} - x_{Ajk}) \quad \forall i, j \neq A, i \neq j, k$$

Además, se incluye una restricción para asegurar la consecutividad de los nodos, estableciendo que, si se realiza una ruta hacia el nodo B, por ejemplo, existe una ruta posterior que parte de ese mismo nodo. Se añade también una restricción para la eliminación de subciclos de Miller-Tucker-Zemlin. Esta evita subciclos que no incluyan al nodo A, por lo que establece circuitos cerrados incluyendo el nodo depósito. Si un vehículo visita un nodo en un determinado orden de ruta, esta condición establece que el siguiente nodo visitado por ese vehículo tenga un orden de visita ( $u$ ) consecutivo al nodo visitado. De esta

forma se asegura el orden de visita de las rutas realizadas por cada vehículo. Si no se realiza ese viaje, la restricción se relaja y no se impone condición.

### CONDICIONES

Asegurar la consecutividad  
de nodos:

$$\sum_l x_{jlk} = x_{ijk} \quad \forall i \neq j, j, k$$

Eliminación de subciclos.

$$u_{ik} - u_{jk} + |N| \cdot x_{ijk} \leq |N| - 1 \quad \forall i, j \neq A, i \neq j, k$$

(Miller-Tucker-Zemlin)

$$u_{Ak} = 0 \quad \forall k$$

A continuación, se desarrollan las variables de tiempo del sistema. Como variable decisiva en el modelo, se añaden las siguientes condiciones para el cálculo de la variable  $t$  que determina el tiempo en que es visitado cada nodo. En función de si ese viaje se realiza por primera vez porque parte de A o si son recorridos consecutivos, se calcula de una forma u otra recogida en las siguientes condiciones, teniendo en cuenta la hora de inicio de los vehículos, el tiempo medio de subida de los pasajeros, el tiempo en el nodo anterior y el tiempo en realizar la ruta anterior. Esta variable es fundamental en el modelo y permite realizar un seguimiento del comportamiento del modelo.

### CONDICIONES

Contador de tiempo:

$$t_{jk} \geq h_{ik} + TM + TIEMPO_{ij} - M \cdot (1 - x_{ijk}) \quad \forall i = A \quad \forall j \neq i, k$$

$$*TM = 2,$$

$$M = HORA\_SALIDA + 480.$$

$$t_{jk} \geq t_{ik} + TM + TIEMPO_{ij} - M \cdot (1 - x_{ijk}) \quad \forall i \neq A \quad \forall j \neq i, k$$

$$t_{jk} \geq 0 \quad \forall j, k$$

$$*t=0 \text{ si no realizo ese viaje.}$$

$$t_{ik} \leq M \cdot \sum_j x_{jik} \quad \forall i, k$$

Partiendo del cálculo del tiempo en cada uno de los nodos, podemos calcular el tiempo que cada pasajero recorre en el vehículo compartido. Es decir, el tiempo de trayecto que percibe

cada individuo. Este se calculará como la hora de llegada final sustrayendo la hora de recogida de ese pasajero.

### CONDICIONES

Tiempo de trayecto de cada pasajero:

$$t_{tray_i} = t_{end_i} - \sum_k t_{ik} \quad \forall i \neq A$$

$$t_{end_i} \leq t_{Ak} + M \cdot (1 - \sum_j x_{jik}) \quad \forall i \neq A, k$$

$$t_{end_i} \geq t_{Ak} - M \cdot (1 - \sum_j x_{jik}) \quad \forall i \neq A, k$$

Además, se puede calcular la diferencia de tiempos entre el trayecto que realizaría el pasajero directamente bajo sus propios medios con el tiempo real que recibe con nuestro servicio, para comparar la calidad de este. Esto se puede percibir en la variable  $t_{dif}$ , que determina la diferencia entre el tiempo de trayecto realizado menos el tiempo que tardaría realizándolo directamente.

### CONDICIONES

Diferencia de tiempos entre trayecto realizado y trayecto directo.

$$t_{dif_i} = t_{tray_i} - TIEMPO_{Ai} \quad \forall i \neq A$$

Por último, podremos calcular el tiempo de servicio que percibe cada conductor, con la hora de llegada final al depósito y la hora de inicio determinada. Esta se utilizará para aportar económicamente al conductor en base al tiempo trabajado.

### CONDICIONES

Tiempo del conductor	$tiempo\_conductor_i = t_{Ak} - hi_k \quad \forall k$
----------------------	---

Cabe decir que todas las variables calculadas en base a tiempos son trabajadas en minutos, traduciéndolas en formato HH:MM:SS al usuario. Sin embargo, como se menciona, en los

cálculos para simplificar se trabaja en minutos, aunque se podría incluir un timestamp para replicar la realidad con precisión.

## Capítulo 4. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

Para el análisis de los resultados distinguiremos entre 3 casos para determinar distintas casuísticas del modelo. El primero de estos casos (caso A) constará de 8 pasajeros con 3 vehículos disponibles. El segundo caso (caso B) constará de 15 pasajeros con 6 vehículos disponibles. El último caso (caso C) constará de 30 pasajeros, con 6 vehículos de mayor capacidad, para estudiar cómo se comporta el modelo aprovechando las economías de escala. Además, para cada uno de esos casos, estableceremos un caso “*baseline*” con el que comparar, que se define como la recogida de todos los pasajeros definidos en cada caso con un vehículo con capacidad supuesta ilimitada.

### 4.1 CASO A – 8 PASAJEROS CON 3 VEHÍCULOS DISPONIBLES

En primer lugar, introducimos los parámetros de entrada en el programa en la Figura 5: 8 pasajeros, con 3 vehículos disponibles con capacidad para 5 personas (incluyendo al conductor) para cada uno de ellos. Se fija la hora de salida del autobús lanzadera a las 8:30, por lo que este servicio deberá finalizar idealmente a esa hora. Se fija también una velocidad media de 100km/h con la que se realizarán los cálculos de tiempo en base a la posición de los nodos generados.

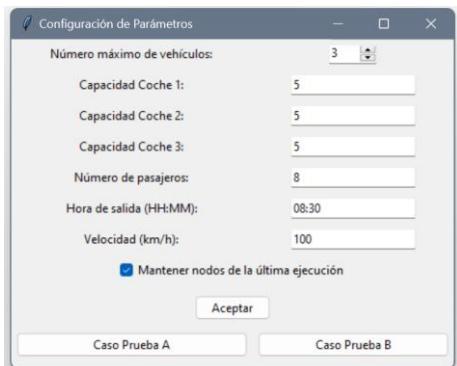


Figura 5. Caso A. Parámetros de entrada.

Una vez introducidos los datos, ejecutaremos el programa y el modelo determinará la mejor solución disponible en base a estos parámetros introducidos, recogido en la Figura 6.

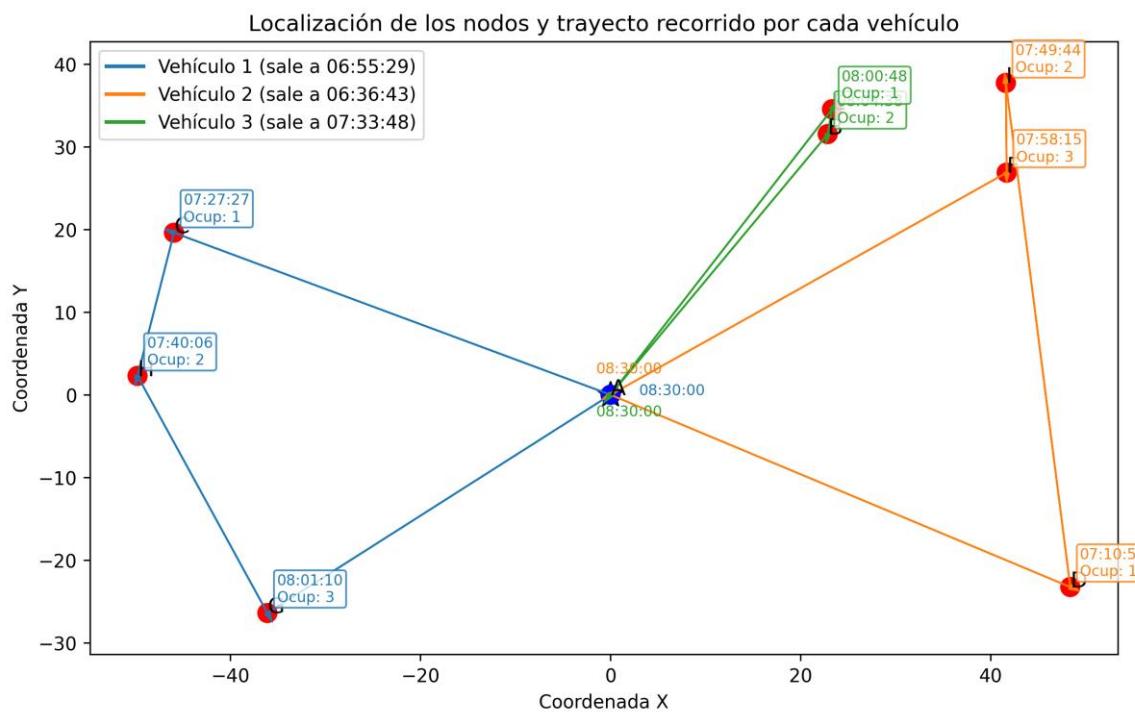


Figura 6. Caso A. Rutas y localización de los nodos.

En esta figura podemos observar que los 3 vehículos disponibles son utilizados, con una capacidad inferior a la máxima del vehículo (4 sin incluir al conductor). Se añade el orden de recogida de cada uno de los nodos, además de la hora de recogida. Finalmente, en el nodo A, se puede observar como el modelo ha optimizado la solución para que todos los vehículos lleguen al destino a la hora de salida del autobús lanzadera. Para ello, calcula la salida de cada vehículo (parte superior a la izquierda de la Figura 6). Observamos como la solución determina la recogida en 3 zonas distintas, por las que el vehículo recogerá a cada uno de los pasajeros.

Aportando otro punto de vista, en la Figura 7 se muestra la línea temporal de cada uno de los vehículos, teniendo una imagen más precisa de la longitud del viaje, el tiempo a escala de recogida entre ellos y el orden de recogida. Además, en cada uno de los nodos, excluyendo A, se añade (en rojo) el tiempo adicional que percibe cada pasajero por usar el servicio en

lugar de realizar el trayecto directo. Por ejemplo, para el nodo D, podemos observar que el trayecto que realiza este pasajero en la ruta compartida excede en 47 minutos a lo que él percibiría bajo su vehículo propio. De la misma forma, los últimos nodos recogidos por cada vehículo perciben una diferencia de tiempo mínima, al ser los últimos nodos incluidos en la ruta. Estos únicamente que experimentan una diferencia de tiempo de 2 minutos, que se establece como el tiempo medio de subida de los pasajeros. Este tiempo de excedido no supone un tiempo real que experimente el usuario al contratar el servicio, si no que aporta una visión de la calidad del servicio percibida para cada pasajero, con la que en la función objetivo priorizamos.

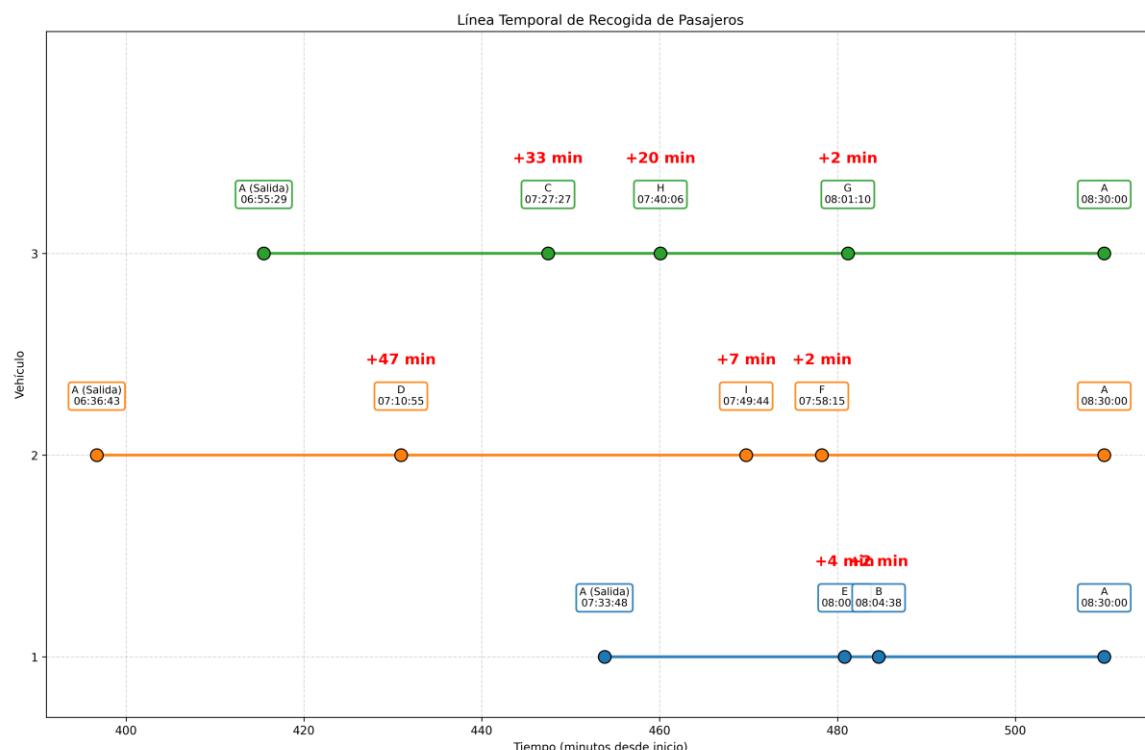


Figura 7. Caso A. Línea Temporal de Recogida.

De forma más analítica, para cada uno de los vehículos podremos identificar cómo se ha comportado la variable  $x$ , que determina las conexiones en los nodos por cada vehículo, además de la variable  $t$ , que determinará el orden de recogida de cada uno de los nodos. En la Tabla 3 se distinguen las rutas realizadas por cada vehículo, el orden de recogida y la hora de recogida de cada pasajero estimada, que se le informaría al usuario previo a la recogida.

i	j	2	t_var_completo.k2_Hora	i	j	1	t_var_completo.k1_Hora	i	j	3	t_var_completo.k3_Hora
A	D	1	7:10:55	A	C	1	7:27:27	A	E	1	8:00:49
D	I	1	7:49:44	C	H	1	7:40:06	E	B	1	8:04:38
I	F	1	7:58:15	H	G	1	8:01:10	B	A	1	8:30:00
F	A	1	8:30:00	G	A	1	8:30:00				

Tabla 3. Caso A. Variables x e y.

En la Tabla 4, se incluye el tiempo de trabajo de cada uno de los conductores por vehículo. Al tratarse de pasajeros dispersos del nodo depósito en un radio de aproximadamente 40km, el tiempo de conducción para cada uno de ellos varía entre 1 y 2 horas. Esto se debe principalmente a que estos se encuentran muy dispersos en el mapa, siendo este trayecto menos directo. En futuros casos, al incluir más pasajeros, estos trayectos serán más directos, por lo que el tiempo de conducción se reducirá considerablemente. Se incluye el tiempo de trabajo en minutos (como trabaja el modelo), como en formato HH:MM:SS.

Tabla 4. Caso A. Variable t\_conductor.

Vehículo	Minutos	Hora
1	9451	1:34:31
2	11329	1:53:17
3	562	0:56:12

En la Tabla 5, se incluye el valor de la hora de salida de cada uno de los vehículos para la variable *hi*. Estos valores estaban incluidos también en la Figura 6. Esta variable de hora de salida se calcula teniendo en cuenta la hora de recogida de cada uno de los nodos y fijando la hora de llegada lo más próxima del autobús lanzadera posterior.

Tabla 5. Caso A. Variable hi.

Vehículo	Minutos	Hora
1	41549	6:55:29
2	39671	6:36:43
3	4538	7:33:48

Una vez incluidos todos los valores asignados a las variables del modelo, procedemos a analizar el modelo de optimización en cuestión.

En este caso, se define un modelo de 9 nodos, incluyendo el nodo depósito y 3 vehículos, estableciéndose así un modelo con 363 variables. El modelo se resuelve en únicamente 19,22

segundos alcanzando una solución con un gap final de un 0%, lo que confirma que la solución es óptima y comprobada matemáticamente. El resultado obtenido coincide con la cota teórica, cumpliéndose con todas las restricciones del modelo y alcanzando una solución factible.

### **RESUMEN DE EJECUCIÓN DEL MODELO VRP – CASO A**

#### **CARACTERÍSTICAS DEL PROBLEMA:**

- Número de nodos: 9
- Número de vehículos: 3

#### **VARIABLES DEL MODELO:**

- Variables binarias/dicotómicas: 246
- Variables continuas: 117
- Variables enteras: 0
- TOTAL DE VARIABLES: 363

#### **RESULTADOS DE LA OPTIMIZACIÓN:**

- Tiempo de resolución: 19.22 segundos
- Estado del solver: ok
- Condición de terminación: optimal
- Gap final: 0.00%

Revisando también la solución final del modelo en cuanto a los costes optimizados, obtenemos unos costes totales de 231,75€, que se divide en el coste por los kilómetros recorridos, el salario del tiempo consumido del conductor y la traducción en costes por el exceso de trayecto en comparación con el trayecto directo. En este sentido, los costes son los mínimos para obtener en este caso en concreto. Se obtiene coste fijo de vehículos en 0 ya que no se incluye ningún coste por vehículo adicional.

### COSTES DE LA SOLUCIÓN:

- **Coste total: 231.75 €**

- Coste por kilómetros recorridos: 36.30 €
- Coste fijo de vehículos: 0.00 €
- Penalización por puntualidad: 0.00 €
- Penalización por tiempo de conductor: 79.20 €
- Penalización por exceso de trayecto: 116.26 €

**COSTE REAL PERCIBIDO: 115.49€**

**CALIDAD SERVICIO: 116.26 min**

Una vez calculados los costes totales, podremos determinar el coste por pasajero de este escenario. Únicamente excluyendo la penalización por exceso de trayecto, que no se considera como un coste real, obtendríamos 115,49€ en costes. Dividiendo estos costes entre el número total de pasajeros obtenemos un coste medio de 14,43€/pasajero, lo cual es un coste elevado, que con economías de escala se podría reducir considerablemente.

Para analizar la optimalidad de los resultados obtenidos, compararemos estos resultados con el caso *baseline*: se presupone que un único vehículo con capacidad “ilimitada” (en este caso de 9 plazas), se dedicaría a la recogida de cada uno de estos nodos. En la Figura 8 se describe el trayecto que recorrería ese único vehículo en el caso *baseline*. En este caso, vemos como la hora de salida de este vehículo (establecida a las 5:40) es mucho más temprana que los vehículos previamente calculados (en torno a las 07:00). Además, en la Figura 9 se describe también la línea temporal de recogida del caso *baseline*. Se señala cómo el tiempo de exceso de trayecto para los primeros nodos son realmente elevados, alcanzándose valores por encima de las 2 horas de trayecto. Estos resultados no son favorables a la utilización de nuestro servicio si se dispusiera de únicamente un vehículo, al existir varios nodos con tiempos de exceso de más de 2 horas en comparación con su trayecto directo. Es por esta razón por la que se incluye en la función objetivo la penalización de exceso de trayecto, para que esta falta de calidad de servicio se vea reflejada en el cálculo óptimo de la solución.

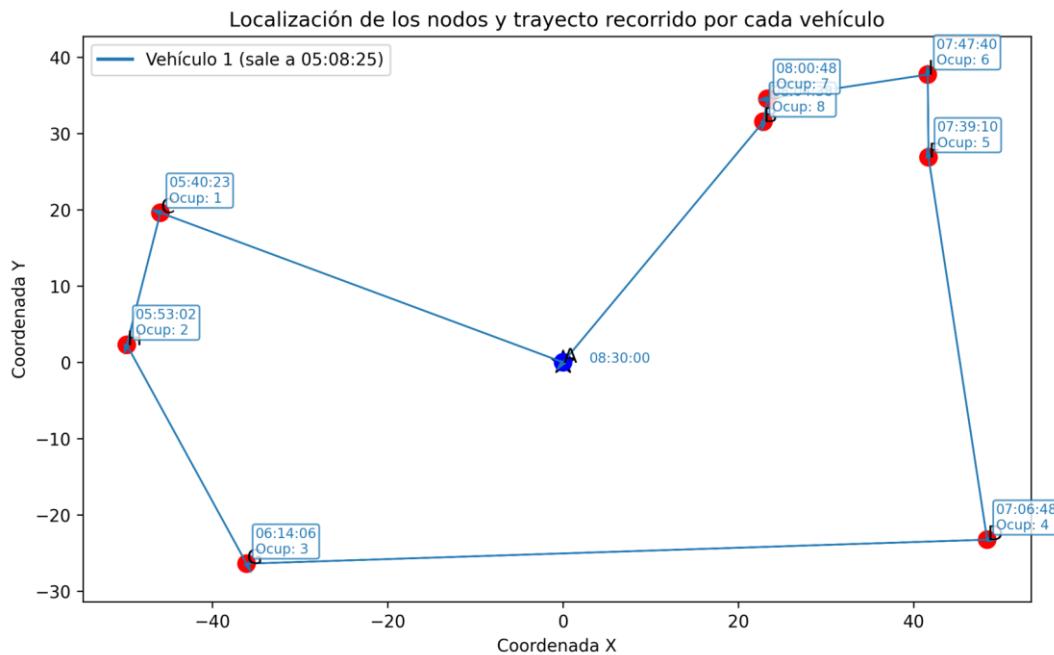


Figura 8. Caso A - baseline. Rutas y localización de los nodos.

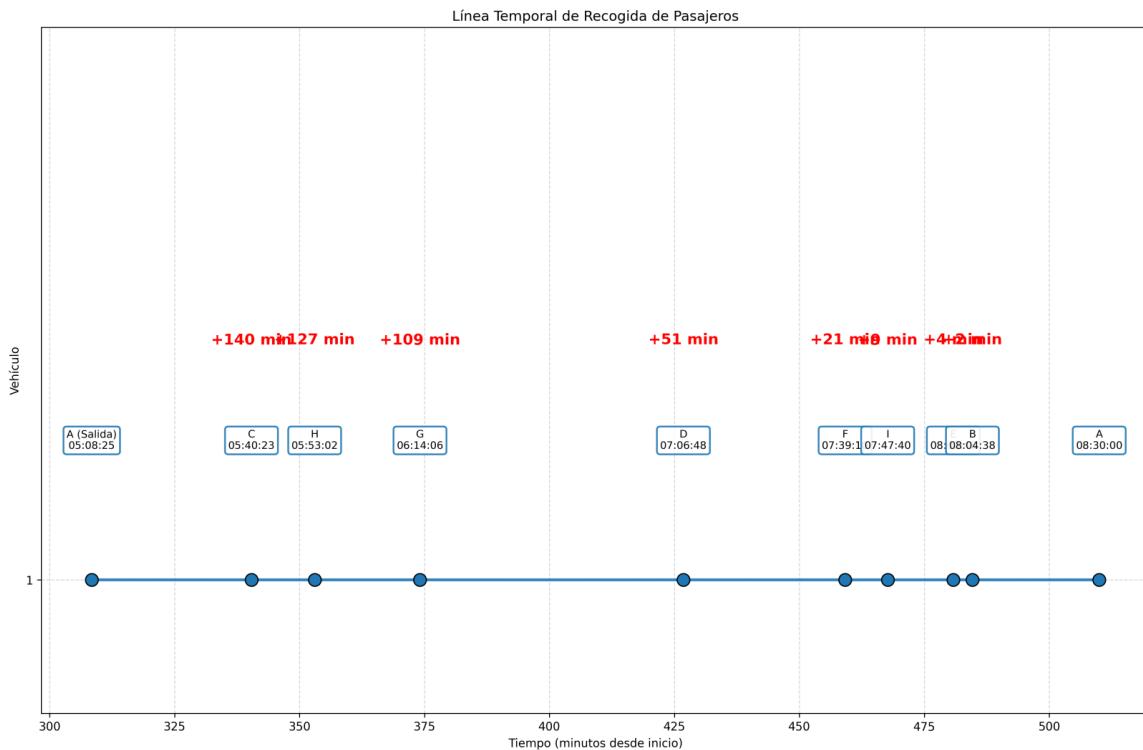


Figura 9. Caso A - baseline. Línea Temporal de Recogida.

Aun así, comparando los resultados económicos obtenidos en este caso en concreto, observamos que los costes reales percibidos en esta solución son menores a los del caso previo, obteniéndose únicamente 88,01€ en comparación con 115,49€. Es decir, comparando con el caso *baseline*, la solución propuesta en A excede un 31,22% de los costes obtenidos en el caso *baseline*. Sin embargo, comparando la penalización por exceso de trayecto, que se presupuso como 1€ de penalización por cada minuto de diferencia con respecto al trayecto directo, observamos como en este caso *baseline* se obtienen 462,72 minutos de exceso de trayecto que se traducen en un coste supuesto de 462,72€. En este caso, comparando con el valor obtenido en A (116,26 min), se observa como la propuesta del caso A implica una mejora considerable en la calidad del servicio, al obtenerse una reducción de un 74,9% con los minutos obtenidos en el caso *baseline*.

Es decir, el caso A comentado previamente experimenta costes reales algo más elevados que el caso *baseline* pero proporciona una calidad de servicio mucho mayor. De esta forma, y considerando la calidad como pieza clave del servicio, se prioriza la solución A frente a la *baseline*.

#### **COSTES DE LA SOLUCIÓN:**

- **Coste total: 550.73 €**
  - Coste por kilómetros recorridos: 27.54 €
  - Coste fijo de vehículos: 0.00 €
  - Penalización por puntualidad: 0.00 €
  - Penalización por tiempo de conductor: 60.47 €
  - Penalización por exceso de trayecto: 462.72 €

**COSTE REAL PERCIBIDO: 88.01€**

**CALIDAD SERVICIO: 462.72 min**

Además, partiendo de los resultados obtenidos en el caso A, que se resolvió con solución óptima de 3 vehículos, se analiza a continuación el efecto de modificar el coste fijo de vehículos en la solución final alcanzada. En este caso, como el coste fijo de vehículos se incluye en 0€, el sistema añade un vehículo adicional, ya que prioriza la minimización de

tiempo de conductor (además del resto de componentes de la función objetivo) sin obtener ninguna penalización adicional por incluir otro vehículo. Considerando el supuesto de añadir un coste fijo por vehículo (con 20€, por ejemplo), el modelo optimiza la solución únicamente con 2 vehículos. No se desarrolla este caso, pero se incluye brevemente en la Figura 10 la resolución de este caso complementario junto con su función de costes.

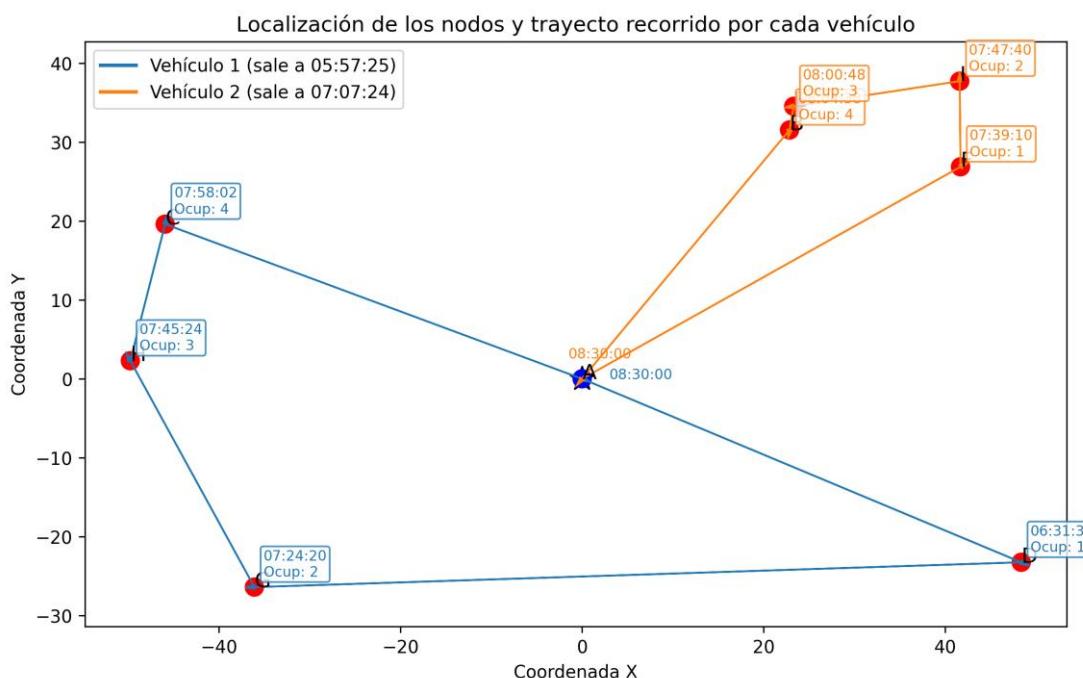


Figura 10. Caso A-bis. Rutas y localización de los nodos incluyendo coste fijo por vehículo.

Se obtiene entonces un coste total mayor a la solución anterior. Se incluyen 40€ por los vehículos incluidos en la solución. En este caso los costes por kilómetros y el salario de los conductores son menores al caso anterior, ya que se eliminan viajes de ida y vuelta del tercer vehículo en la solución anterior. Sin embargo, al ser rutas menos directas para los pasajeros, el incremento en la penalización por exceso de trayecto incrementa considerablemente. Aun así, con la definición del modelo, se sigue considerando esta solución como la óptima.

### COSTES DE LA SOLUCIÓN:

- **Coste total: 320.48 €**
  - Coste por kilómetros recorridos: 32.28 €
  - Coste fijo de vehículos: 40.00 €
  - Penalización por puntualidad: 0.00 €
  - Penalización por tiempo de conductor: 70.55 €
  - Penalización por exceso de trayecto: 177.65 €

**COSTE REAL PERCIBIDO: 142.83€**

**CALIDAD SERVICIO: 177.65 min**

## 4.2 CASO B – 15 PASAJEROS CON 6 VEHÍCULOS DISPONIBLES

Presentamos ahora el siguiente caso de prueba: el caso B. Este consta de 15 pasajeros distribuidos en el mapa aleatoriamente, con 6 vehículos disponibles para su recogida. Se ejecuta el caso de prueba B con los siguientes parámetros de entrada, definidos en la Figura 11.

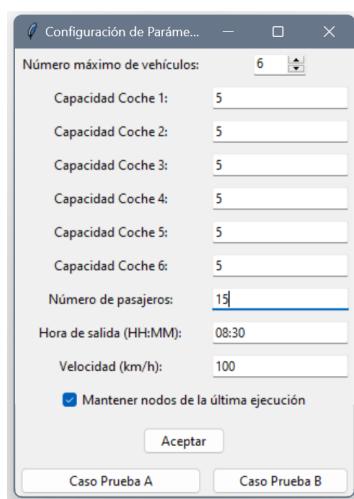


Figura 11. Caso B. Parámetros de entrada.

Una vez introducidos los parámetros de entrada, los resultados del caso de prueba B pueden observarse en la Figura 12.

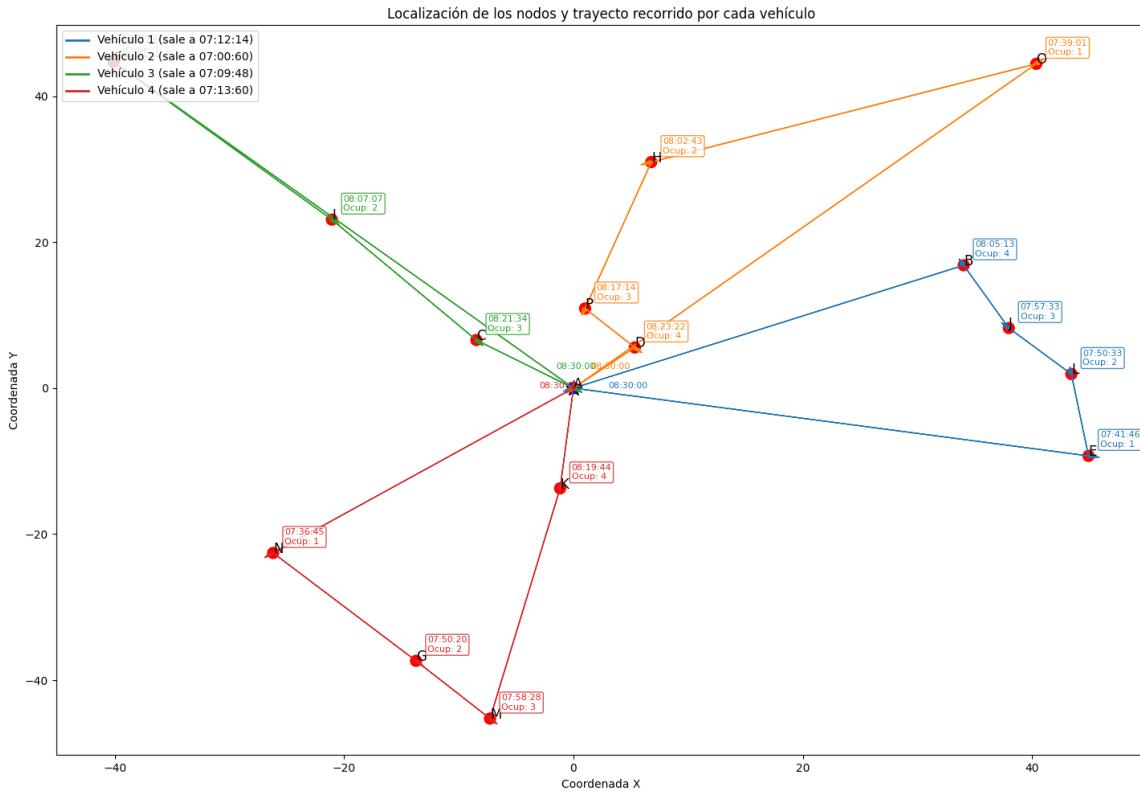


Figura 12. Caso B. Rutas y localización de los nodos.

En esta figura observamos que, de los 6 vehículos disponibles en este caso, el sistema decide utilizar únicamente 4 de ellos. La ocupación de cada vehículo se mantiene dentro de los márgenes de su capacidad. La hora de llegada de los vehículos se alcanza a las 8:30 para no incurrir en la penalización de llegada temprana.

Centrando más el detalle en el vehículo 2, destacado en naranja en la Figura 13 (aumento de la Figura 12). Observamos el recorrido que fija nuestro modelo después de asignar la mejor solución encontrada. Puede parecer que el modelo resuelve ese caso de recogida de forma ineficiente, ya que un trayecto más directo sería A → D → O → H → P → A, indicando que el primer pasajero a recoger sea D, ya que el trayecto A → O directo encuentra al nodo D sin desvío alguno. Sin embargo, el recorrido marcado (A → O → H → P → D → A) fija la recogida de D al finalizar la ruta del vehículo. Esto es un claro ejemplo de la necesidad de inclusión en la penalización por exceso de trayecto. Aunque la minimización de distancia propusiera

el primer nodo de recogida D, ya que este pasajero recorrería muchísima más distancia que si realizara el trayecto directo, el modelo, gracias a la penalización en la función objetivo, sugiere este nodo como último en la recogida, conllevando a un incremento de los kilómetros recorridos. Este incremento de kilómetros recorridos es menor en coste, que incurrir a la penalización por exceso de trayecto si el modelo se hubiese resuelto de la primera manera.

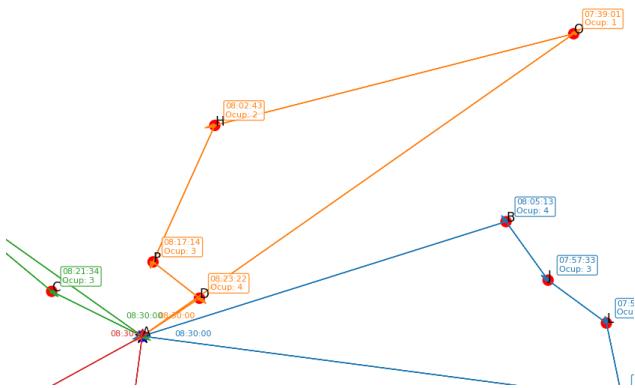


Figura 13. Caso B. Detalle vehículo 2.

De forma más clara, en la Figura 14, se puede diferenciar el flujo obtenido por cada uno de los vehículos para la recogida de los pasajeros. En esta se observa como todos los vehículos llegan al nodo A a las 8:30 como se ha comentado previamente. Además, se añade de una forma más visual la calidad del servicio prestado, reflejado en la diferencia de tiempos entre el propuesto y el trayecto directo, definido en rojo para cada uno de los nodos de la figura.

En este caso la recogida de los pasajeros se hace de una forma mucho más distribuida en el tiempo. Los tiempos de trayecto son considerablemente buenos, ya que no se obtienen diferencias de +40 minutos con respecto al trayecto directo.

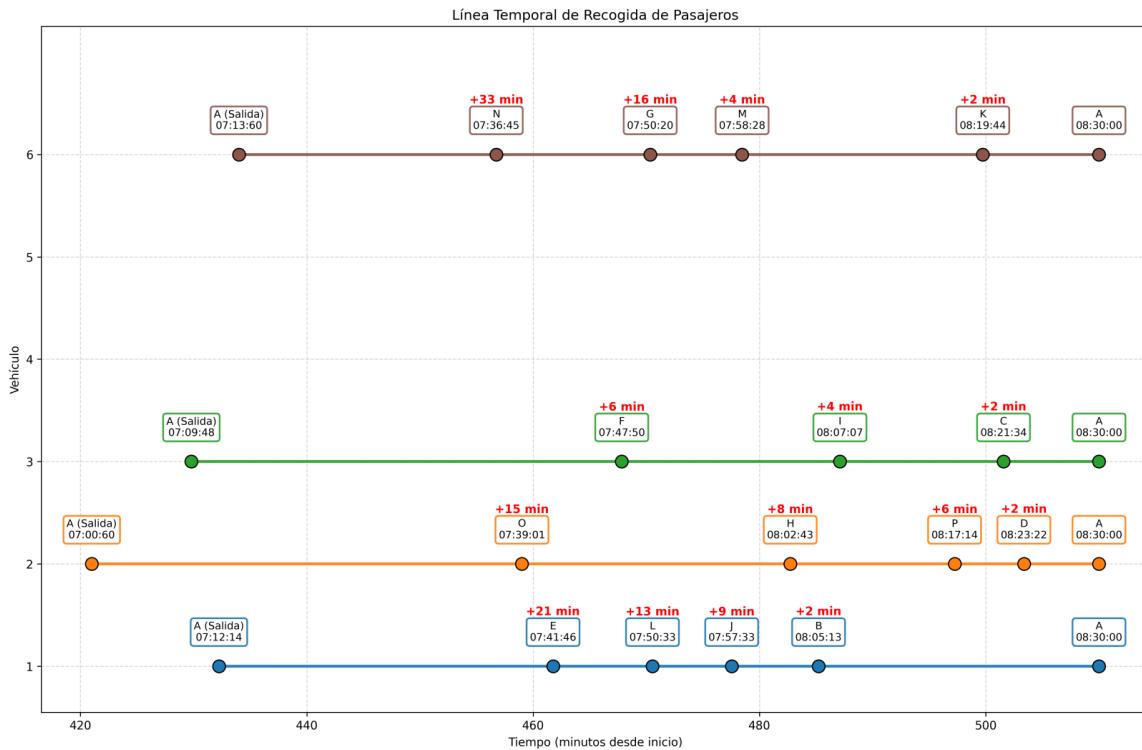


Figura 14. Caso B. Línea Temporal de Recogida.

Entrando en detalle para cada uno de estos vehículos podremos identificar los valores asignados en la resolución del modelo para las variables  $x$  y  $t$  en la Tabla 6. Estas determinan la conexión de cada uno de los nodos, sin dejar ningún nodo sin visitar y establece el orden de visita en base a la variable  $t$ , que indica la hora de recogida de cada pasajero.

A	E	1	7:41:46	A	O	1	7:39:01	A	F	1	7:47:50	A	N	1	7:36:44
E	L	1	7:50:32	O	H	1	8:02:43	F	I	1	8:07:07	N	G	1	7:50:20
L	J	1	7:57:32	H	P	1	8:17:14	I	C	1	8:21:34	G	M	1	7:58:28
J	B	1	8:05:13	P	D	1	8:23:22	C	A	1	8:30:00	M	K	1	8:19:44
B	A	1	8:30:00	D	A	1	8:30:00	K	A	1	8:30:00				8:30:00

Tabla 6. Caso B. Variables  $x$  e  $y$ .

En la Tabla 7 se indica el tiempo de trabajo de cada uno de los conductores, tanto en minutos como en formato HH:MM:SS. Al tener rutas más concentradas en la zona del mapa, el tiempo que dedica el conductor se reduce en comparación con el caso anterior, por lo que el coste asociado a este también.

Tabla 7. Caso B. Variable *t\_conductor*.

Vehículo	Minutos	Hora
1	7777	1:17:46
2	890	1:29:00
3	802	1:20:12
4	760	1:16:00

Además, en la Tabla 8 se indica la hora de salida de cada uno de estos vehículos para poder recoger a los pasajeros a tiempo. De la misma forma, como las rutas son más directas y el tiempo de trayecto es menor, la hora de salida de cada conductor es más tardía.

Tabla 8. Caso B. Variable *hi*.

Vehículo	Minutos	Hora
1	43223	7:12:14
2	4210	7:01:00
3	4298	7:09:48
4	4340	7:14:00

Una vez definidos los resultados de las variables del caso B, podremos analizar el modelo de optimización.

Este caso consta de 16 nodos incluyendo el nodo depósito y 6 vehículos disponibles, de los cuales solo hace uso de 4. Se establece un modelo de 1896 variables. El modelo se resuelve en 206 segundos, llegando al límite establecido, por lo que se indica el “maxTimeLimit”. En cualquier caso, aunque el modelo incluye muchas variables de decisión, se obtiene un gap final de 46,76%, que en modelos grandes es habitual. Aun así, se obtiene una solución factible y operativamente válida.

## **RESUMEN DE EJECUCIÓN DEL MODELO VRP – CASO B**

### **CARACTERÍSTICAS DEL PROBLEMA:**

- Número de nodos: 16
- Número de vehículos: 6

### **VARIABLES DEL MODELO:**

- Variables binarias/dicotómicas: 1542
- Variables continuas: 354
- Variables enteras: 0
- TOTAL DE VARIABLES: 1896

### **RESULTADOS DE LA OPTIMIZACIÓN:**

- Tiempo de resolución: 206.37 segundos
- Estado del solver: aborted
- Condición de terminación: maxTimeLimit
- Gap final: 46.76%

Revisando ahora la solución final del modelo en cuanto a los costes totales, obtenemos unos costes totales de 282,90€, que se distribuye de forma similar al caso A. Sin embargo, observamos que los trayectos son más directos, los nodos se encuentran, más agrupados y por tanto la penalización por exceso de trayecto es muy inferior. Se puede calcular el coste medio por pasajero, sustrayendo el coste ficticio de penalización por exceso de trayecto, siendo el coste real de 139,63€, que dividiendo entre el número de pasajeros recogidos resulta en un coste por pasajero de 9,30€/pasajero. Es decir, un 35% de reducción de costes al incrementar en 7 pasajeros la recogida (en el caso A recordemos que se obtuvo un coste por pasajero de 14,43€/pasajero).

### COSTES DE LA SOLUCIÓN:

- **Coste total: 282.90 €**

- Coste por kilómetros recorridos: 42.75 €
- Coste fijo de vehículos: 0.00 €
- Penalización por puntualidad: 0.00 €
- Penalización por tiempo de conductor: 96.89 €
- Penalización por exceso de trayecto: 143.27 €

**COSTE REAL PERCIBIDO: 139.63€**

**CALIDAD SERVICIO: 143.27 min**

Comparando este caso con el caso *baseline*, que recordemos se presenta como un único vehículo de recogida para todos los pasajeros, obtenemos la ruta presentada en la Figura 15. Se puede observar cómo esta ruta presenta grandes penalizaciones en base a los tiempos de trayecto de cada uno de los pasajeros. El vehículo debe salir 4 horas antes de las 8:30, por lo que el tiempo excedido de trayecto en comparación con el directo para los primeros pasajeros excede de las 3 horas, por lo que será claramente penalizado en la función de costes.

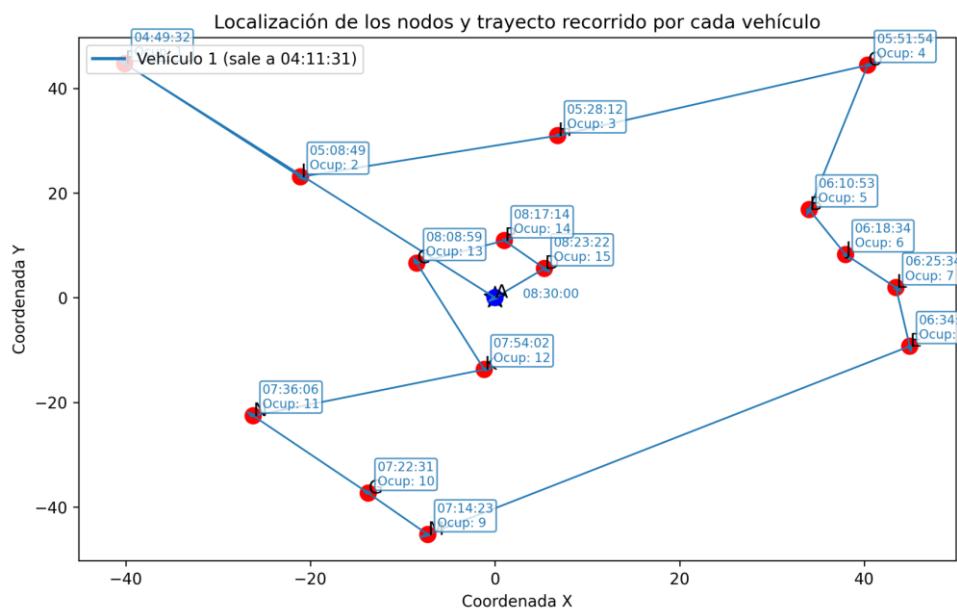


Figura 15. Caso B - baseline. Rutas y localización de los nodos.

En este caso, comparando los costes de la solución del caso *baseline*, observamos que seguimos obteniendo costes reducidos reales por el uso de un único vehículo, obteniéndose un 25.21% de incremento al establecer la solución del caso B con respecto al *baseline*. Sin embargo, este margen parece ir decrementando a medida que se va escalando el modelo, comparándolo con el 32% del caso A. Sin embargo, observamos como la diferencia de tiempos aumenta considerablemente, obteniéndose una diferencia de 1094,74 minutos de mejora entre el caso B calculado con el *baseline*, como se podía predecir. Esto constituye. Un 88,43% del tiempo de exceso de trayecto del caso con un único vehículo, por lo que penaliza completamente esa solución.

#### **COSTES DE LA SOLUCIÓN:**

- **Coste total: 1349.53 €**
  - Coste por kilómetros recorridos: 33.97 €
  - Coste fijo de vehículos: 0.00 €
  - Penalización por puntualidad: 0.00 €
  - Penalización por tiempo de conductor: 77.55 €
  - Penalización por exceso de trayecto: 1238.01 €

**COSTE REAL PERCIBIDO: 111.52€**

**CALIDAD SERVICIO: 1238.01 min**

### **4.3 CASO C – 30 PASAJEROS CON 6 VEHÍCULOS DISPONIBLES DE MAYOR CAPACIDAD**

Este caso pretende simular el posible funcionamiento real de este servicio. Se incluyen ahora 30 pasajeros a recoger. Se mantienen los 6 vehículos disponibles, pero se incrementa la capacidad para cada uno de ellos a 8 personas. Se decide ampliar la capacidad de los vehículos ya que, ante la economía de escala, será más eficiente incluir en la flota inicial vehículos con mayor capacidad para minimizar los costes totales. Los parámetros de entrada se incluyen en la Figura 16.

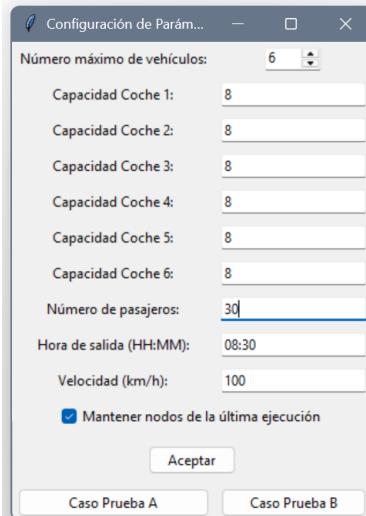


Figura 16. Caso C. Parámetros de entrada.

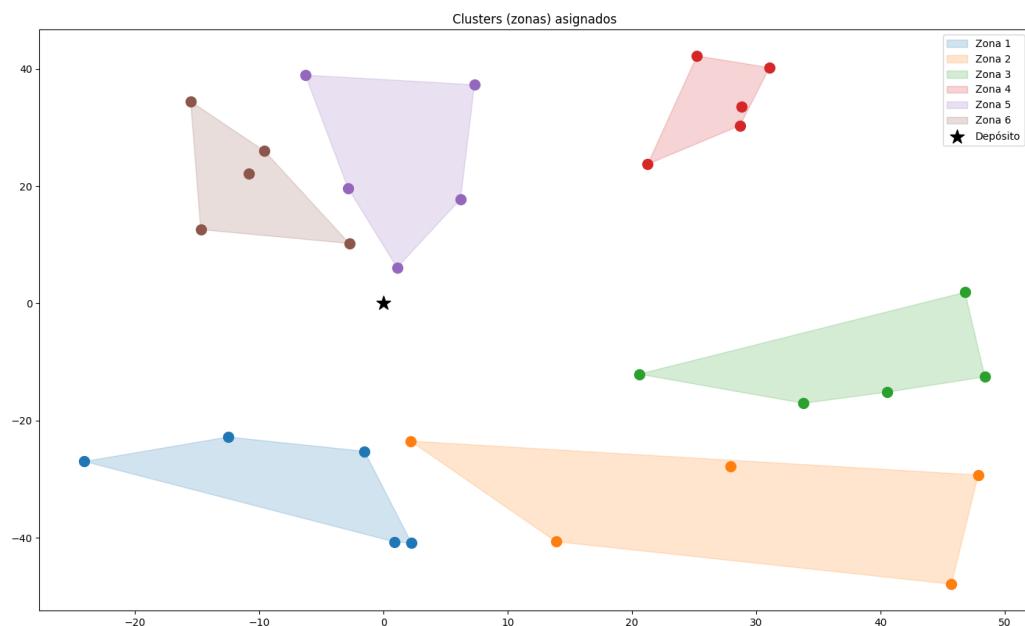
Ampliando el número de pasajeros a recoger a 30, se empieza a desarrollar una situación del modelo a gran escala, donde los nodos se agrupan por zonas geográficas con claridad. Ahora, comparando los tiempos de ejecución con los anteriores modelos, al desarrollar muchas más posibilidades, el tiempo total puede ser muy elevado. Por tanto, en esta situación deberemos incluir soluciones de cálculo previo para guiar al programa a encontrar la solución óptima de forma más directa.

Para ello, optaremos por una solución de Warm-Start con Clustering. Es decir, en primer lugar, definiremos los clusters: las zonas geográficas próximas en las que el modelo podrá recoger pasajeros cercanos. En este caso, dado a las características del VRP, tiene sentido la diferenciación en zonas usando el algoritmo Sweep. Este, delimitará las zonas en base al ángulo que conforme con respecto al nodo depósito. Es decir, nodos con un ángulo en el mapa similar estarán agrupados en el mismo cluster. Para diferenciar cada uno de los nodos en sus zonas, deberemos determinar el número de clusters que podrá haber en cada caso. Para ello, se podrían tomar 2 alternativas.

- La primera de ellas, considerando el número de pasajeros totales (30 en este caso) entre el número de vehículos disponibles (6 en este caso) considerando su capacidad. Es decir, en nuestro caso, podríamos asignar a cada vehículo 5 personas, estableciendo así 6 zonas geográficas de recogida. Esta opción tiene un gran

inconveniente, ya que, si en algún caso tuviésemos la posibilidad de disponer de muchos vehículos, aunque luego no se utilizaran, los números de zonas asignadas se calcularía en base al número de vehículos inicial. Es decir, si tuviésemos 10 vehículos disponibles, incluiría 10 zonas de clusters, aunque finalmente solo se utilizaran 6 vehículos.

Por la razón anterior, se ha decidido modificar la determinación de clusters para que simule mejor el funcionamiento teórico que debería tener nuestro modelo. Para ello, lo que se establece es la media de la capacidad de todos los vehículos disponibles. Es decir, suponemos que la capacidad media de los vehículos es 8 pasajeros. Se tiene en cuenta, además, que incluye al conductor y un hueco adicional, ya que se presupone que ningún vehículo va a usar su capacidad al 100%. Por tanto, en nuestro caso, la capacidad real media de los vehículos sería de 6 pasajeros. Por tanto, si consideramos los 30 pasajeros entre la capacidad media de 6 pasajeros por vehículos, obtendríamos una primera aproximación de 5 vehículos, más un vehículo adicional en la suposición, ya que se redondea por encima. Esta situación se refleja en la Figura 17.



*Figura 17. Diferenciación en Clusters.*

Aun así, esta diferenciación en zonas no establece que un mismo vehículo deba recoger a cada uno de estos pasajeros que se encuentran en la misma zona. Esta supone en realidad una solución heurística previa a la resolución del modelo. Es decir, una solución previa en base a una regla práctica sencilla, que en este caso se compone de la diferenciación en ángulos en base al Sweep Warm-Start. Esta reduce hasta un 73% el gap inicial en el problema.

Cabe señalar que este método únicamente establece una solución inicial factible para que el modelo comience a iterar y llegue antes a la solución óptima encontrada. Tanto es así que esta solución puede ser claramente mejorable, ya que únicamente se nutre de la definición de la agrupación en zonas. En la Figura 18 se establece como resolvería el modelo si únicamente tuviera en cuenta la diferenciación en nodos y la recogida consecutiva. Como se puede ver, la conexión de los nodos se establece consecutivamente únicamente haciendo un barrido contrario en sentido antihorario para su conexión. Es evidente que esta solución aun recogiendo a los nodos de un mismo cluster podría hacerse más eficiente. Aun así, se indica esta figura para recalcar que esta primera solución con la que el modelo comienza a calcular no debe ser perfecta, sino que debe ser favorable.

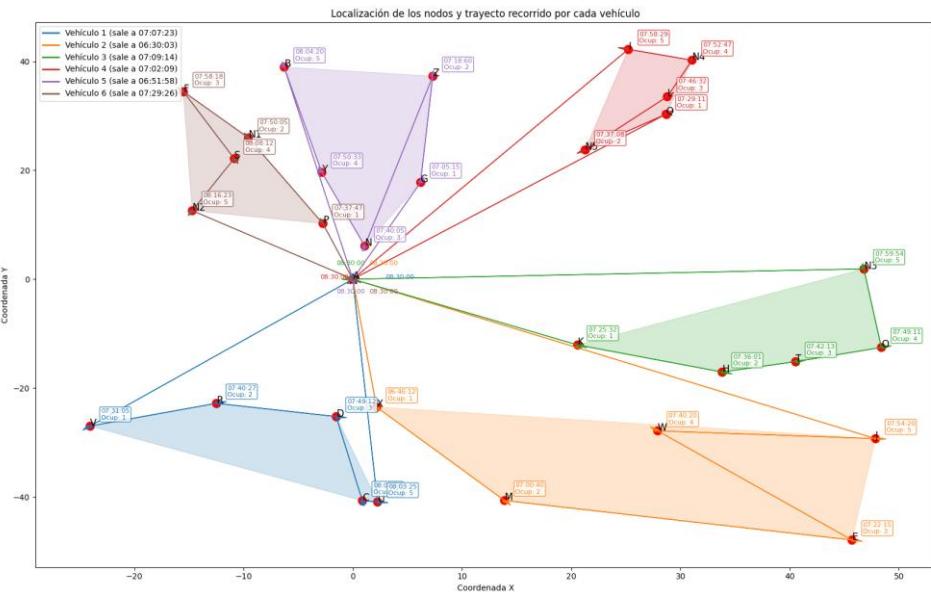


Figura 18. Cálculo Previo con Clusters como Warm-Start.

La solución una vez incluido el Warm-Start con los clusters se muestra en la Figura 19. En esta, se muestran los clusters calculados previamente y tal y como se puede distinguir, muchos de ellos se mantienen, pero se realizan rutas no incluidas en el cálculo heurístico previo. Es decir, se vuelve a identificar que no todos los nodos asignados a una zona deben ser recogidos por un mismo vehículo, aunque coincide que muchos de ellos sí.

El cálculo de estas rutas se vuelve a determinar en base a al modelo presentado en el punto anterior, junto con el mismo desarrollo de los dos casos anteriores.

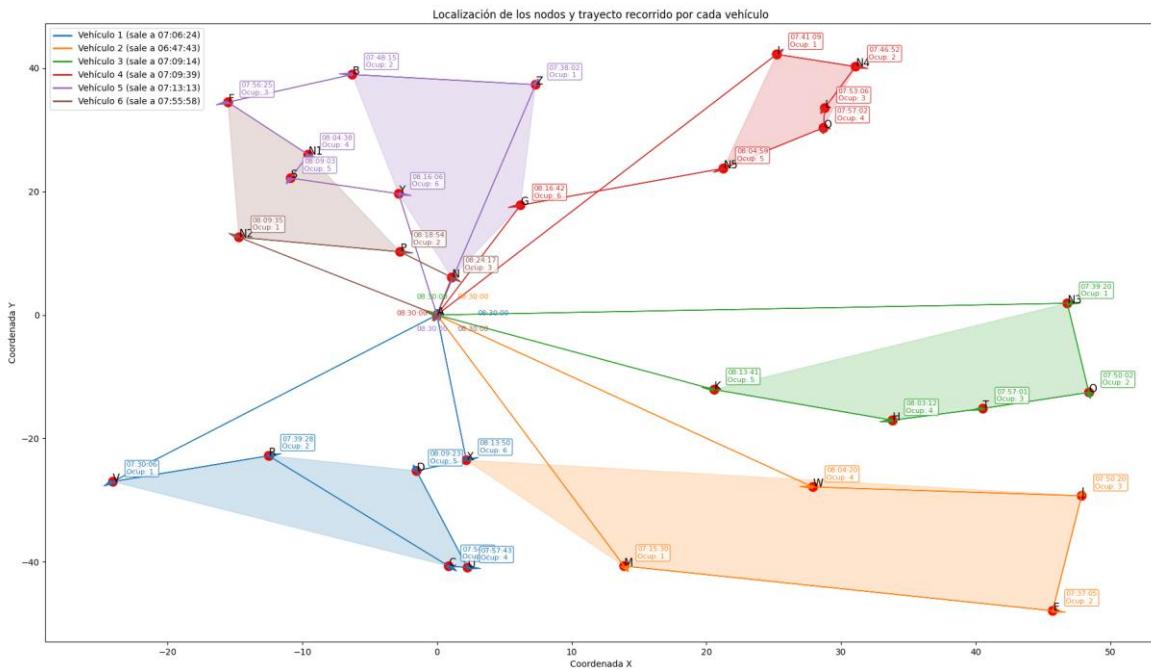


Figura 19. Caso C. Rutas y localización de los nodos.

En este caso, aunque se obtienen, no se incluyen los valores de las variables para no sobrecargar el caso al establecerse una situación a gran escala. En cualquier caso, en la Figura 20 se puede obtener mucha información sobre este caso de resolución. En primer lugar, todos los vehículos llegan al nodo depósito a la hora de salida del autobús lanzadera, por lo que no incurren en la penalización. En la parte izquierda de la figura se definen las horas de salida de cada uno de los vehículos. En este caso, de los 6 vehículos disponibles, todos son utilizados. Además, en cada uno de los nodos se incluye la hora de recogida de esos pasajeros, que será la que se le indicará al usuario como prevista para la recogida. En

este caso, las horas de trayecto de los pasajeros parece óptima, al no excederse considerablemente la calidad de los tiempos de trayecto en comparación con el directo. Aun así, los primeros pasajeros experimentan un exceso de trayecto mayor comparado con los pasajeros con recogida más cercana al nodo depósito.

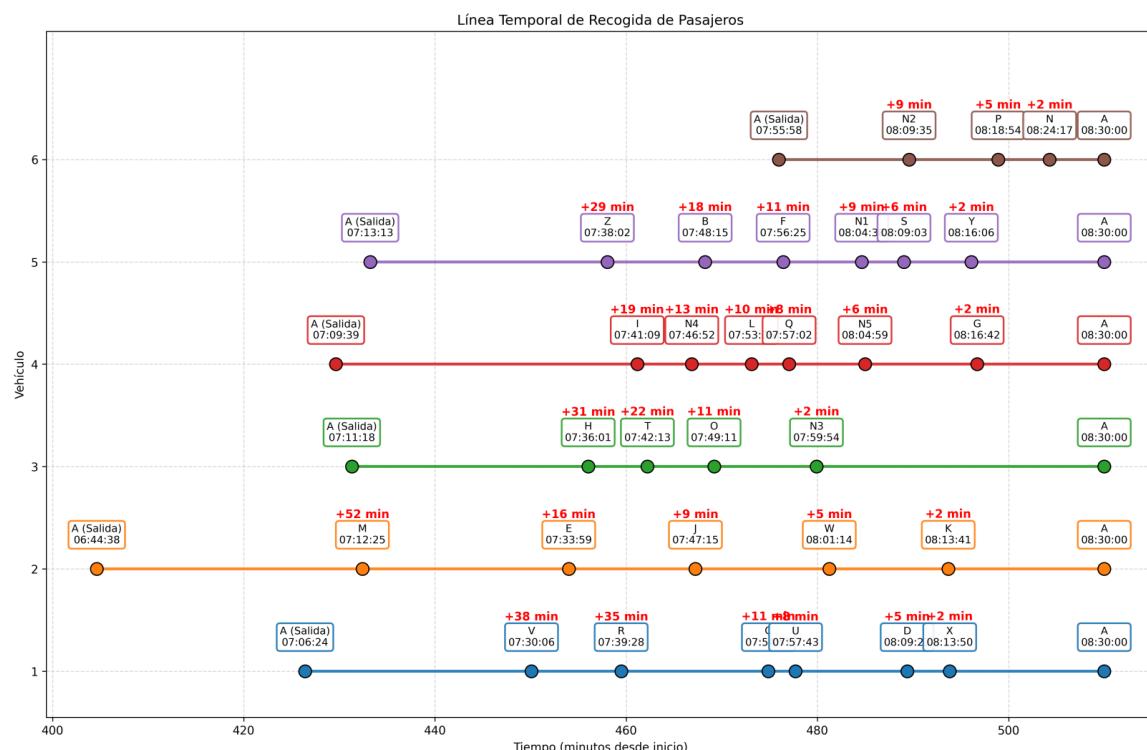


Figura 20. Caso C. Línea Temporal de Recogida.

Cabe señalar, que además de la solución con warm-start previa calculada con los clusters, en este caso se utilizan funcionalidades del solver *gurobi* en la resolución del modelo. Se enfoca en reducir el gap de optimalidad en el modelo, reduciendo el tiempo considerablemente. Se generan cortes agresivos, técnicas de paralelización para acelerar la exploración entre otras características.

Analizando el modelo, incluimos ahora las características de este. En este caso, al estar solucionando un modelo complejo se amplía el tiempo de resolución. Aun así, el modelo no llega a resolver completamente y acaba finalizando por máximo tiempo alcanzado. En este caso el Gap final alcanzado es de un 9,83%, que, al considerarse un modelo complejo y estar

ejecutándose durante prácticamente 24 horas, es aceptable. En este caso, disponemos de un total de 6441 variables, que en comparación con los casos anteriores es muy superior. Es por esta razón por la que se incluye una primera solución heurística para facilitarle al modelo su resolución.

### **RESUMEN DE EJECUCIÓN DEL MODELO VRP – CASO C**

#### **CARACTERÍSTICAS DEL PROBLEMA:**

- Número de nodos: 31
- Número de vehículos: 6

#### **VARIABLES DEL MODELO:**

- Variables binarias/dicotómicas: 5772
- Variables continuas: 669
- Variables enteras: 0
- TOTAL DE VARIABLES: 6441

#### **RESULTADOS DE LA OPTIMIZACIÓN:**

- Tiempo de resolución: 79201.23 segundos
- Estado del solver: aborted
- Condición de terminación: maxTimeLimit
- Gap final: 9.83%

Revisando ahora la solución final del modelo en cuanto a los costes totales, obtenemos unos costes totales de 555,46€. Sin embargo, observando la distinción en cada uno de los elementos de coste, vemos que la mayor parte de este es la penalización por exceso de trayecto. Es decir, no constituye un coste real en el modelo.

### COSTES DE LA SOLUCIÓN:

- **Coste total: 555.46 €**

- Coste por kilómetros recorridos: 58.25 €
- Coste fijo de vehículos: 0.00 €
- Penalización por puntualidad: 0.00 €
- Penalización por tiempo de conductor: 138.10 €
- Penalización por exceso de trayecto: 359.12 €

**COSTE REAL PERCIBIDO: 196.34€**

**CALIDAD SERVICIO: 359.12 min**

Considerando únicamente los costes percibidos, obtendríamos un coste total real de 196,34€, que dividiéndolo entre los 30 pasajeros recogidos obtenemos un coste medio por pasajero de 6,54€/pasajero. En la Tabla 9 se puede observar el avance en cada uno de los casos en cuanto al coste medio de cada una de las casuísticas.

El primero de los cambios incluye un aumento en el número de pasajeros sin verse modificada la capacidad media. Se puede destacar como los costes medios se reducen en 5€ por pasajero. Aunque se tratan de casos distintos, ya que los nodos del sistema no son los mismos, todos son generados aleatoriamente dentro del mismo rango de kilómetros desde el nodo depósito, por lo que resultan casos similares. Por otro lado, en el último de los casos, se observa cómo se aumenta considerablemente el número de pasajeros, además de la capacidad media de los vehículos. Se observa como el coste medio por pasajero sigue disminuyendo. Esta disminución es debida tanto a un aumento del número de clientes (efecto observado entre el caso A y caso B), como un aumento de la capacidad de los vehículos, que permite recoger a un mayor número de pasajeros, sin necesidad de usar tantos vehículos adicionales. Estas economías de escala permitirán disminuir el coste total del modelo.

*Tabla 9. Comparativa de costes medios en los casos A, B y C.*

	Caso A	Caso B	Caso C
Nº Pasajeros	8	15	30
Capacidad Media	5	5	8
<b>Coste Real Medio</b>	<b>14,43€</b>	<b>9,30€</b>	<b>6,54€</b>

Comparando este caso con el caso *baseline*, que considera únicamente un vehículo de recogida, observamos en la Figura 21 como la ruta de recogida de estos 30 pasajeros presenta horas de recogida muy tempranas. El vehículo tendrá una hora de salida de 5 horas de anterioridad a la hora de llegada establecida, por lo que los pasajeros presentarán mucha diferencia con su trayecto directo. Cabe resaltar que todos los nodos se encuentran en un radio aproximado de 50 km, por lo que un trayecto de 4 horas es desmesurado.

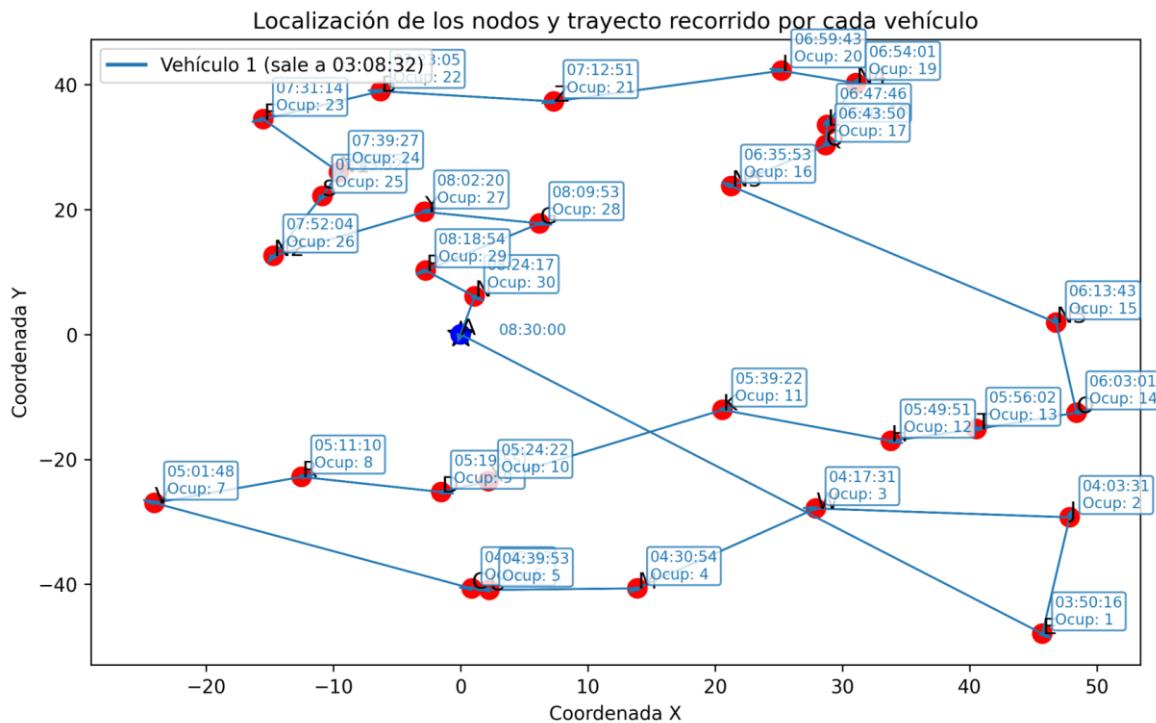


Figura 21. Caso C - baseline. Rutas y localización de los nodos.

Por esta razón, en la función de costes observamos la gran penalización en base a la calidad del servicio prestado reflejado en 3321,01 minutos adicionales al trayecto directo. En este caso la propuesta del caso C constituye un 89,19% de la propuesta de tiempos del caso *baseline*. En cambio, únicamente considerando los costes percibidos, la solución propuesta supone un incremento de un 45,05% respecto al caso con un único vehículo.

**COSTES DE LA SOLUCIÓN:**

• **Coste total: 3456.43 €**

- Coste por kilómetros recorridos: 38.92 €
- Coste fijo de vehículos: 0.00 €
- Penalización por puntualidad: 0.00 €
- Penalización por tiempo de conductor: 96.44 €
- Penalización por exceso de trayecto: 3321.07 €

**COSTE REAL PERCIBIDO: 135.36€**

**CALIDAD SERVICIO: 3321.07 min**

En definitiva, como se ha estado percibiendo en la comparativa con los casos *baseline* tanto en A, B y C, la calidad del servicio supone una característica clave para la resolución actual. Por esta razón, esta ese incluye directamente en la función objetivo y estas comparativas reflejan la necesidad de incluir multiobjetividad en estos casos presentados. Se presentan soluciones que sean planteables para los clientes en base a los tiempos propuestos y una vez mantenida una viabilidad en tiempos de viaje, se establece la mejor ruta posible. Es decir, se mantiene un equilibrio entre la mejor propuesta en costes, como la mejor propuesta en base a la calidad del servicio prestado.

## **Capítulo 5. ANÁLISIS ECONÓMICO**

Aunque en el análisis de los resultados se comentará en los resultados obtenidos para cada uno de los casos, en este apartado en concreto se resalta cada uno de ellos para poder tener una imagen comparativa clara para en cada uno de los casos. La comparativa se incluye para los casos a pequeña escala incluidos en el Capítulo 4. Análisis de los Resultados, que incluían:

- Caso A: 8 pasajeros, con 3 vehículos disponibles con capacidad para 5 personas. Comparativa con caso *baseline*, que incluye un único vehículo disponible con capacidad “ilimitada”.
- Caso B: 15 pasajeros con 6 vehículos disponibles con capacidad para 5 personas.
- Caso C: 30 pasajeros con 6 vehículos disponibles con capacidad para 8 personas.

En cada caso, se detalla comparando los resultados con su correspondiente caso *baseline*, que mantiene los mismos pasajeros, incluyendo un único vehículo disponible con capacidad “ilimitada”.

En este contexto, mediante estos casos planteados podemos plantear claramente el coste asociado al uso de este servicio a corta escala. El análisis económico a gran escala se ha desarrollado en un documento académico adicional donde se añaden expectativas de 1 a 3 años para una empresa con esta operativa en concreto: “Plan de negocio de un servicio privado de transporte a zonas empresariales”, (Mansilla Barriónuevo, 2025)

Se añade a continuación la comparativa para estos casos a corta escala.

### **5.1 CASO A: 8 PASAJEROS CON 3 VEHÍCULOS UTILIZADOS**

Tal y como se introdujo previamente, el caso A consta de la recogida de 8 pasajeros con 3 vehículos disponibles, de los cuales todos son utilizados. La capacidad de estos coches es de 5 personas, 4 pasajeros excluyendo al conductor. Aunque previamente se mostraron los

valores económicos de la solución, en la Tabla 10 se indican a la par la comparación en costes de la solución obtenida en A y la obtenida en el caso *baseline*.

*Tabla 10. Comparativa económica entre el Caso A y su caso baseline.*

CASO A	8 pasajeros
<b>COSTES DE LA SOLUCIÓN:</b>	
• <b>Coste total:</b>	
- Coste por kilómetros recorridos:	231.75 €
- Coste fijo de vehículos:	36.30 €
- Penalización por puntualidad:	- €
- Penalización por tiempo de conductor:	79.20 €
- Penalización por exceso de trayecto:	116.26 €
<b>COSTE REAL PERCIBIDO:</b>	<b>115.50 €</b>
<b>CALIDAD SERVICIO:</b> 116.26 min	
<b>COSTE TOTAL POR PASAJERO</b>	<b>28.97 €</b>
<b>COSTE TOTAL REAL POR PASAJERO</b>	<b>14.44 €</b>

CASO A - BASELINE	8 pasajeros
<b>COSTES DE LA SOLUCIÓN:</b>	
• <b>Coste total:</b>	
- Coste por kilómetros recorridos:	550.73 €
- Coste fijo de vehículos:	27.54 €
- Penalización por puntualidad:	- €
- Penalización por tiempo de conductor:	60.47 €
- Penalización por exceso de trayecto:	462.72 €
<b>COSTE REAL PERCIBIDO:</b>	<b>88.01 €</b>
<b>CALIDAD SERVICIO:</b> 462.72 min	
<b>COSTE TOTAL POR PASAJERO</b>	<b>68.84 €</b>
<b>COSTE TOTAL REAL POR PASAJERO</b>	<b>11.00 €</b>

Como se ha ido indicando a lo largo del documento, distinguimos realmente un coste real percibido por el servicio, que incluyen los kilómetros recorridos y el salario del conductor y un coste adicional que se incluye que no entra dentro de los costes reales, que se considera como la diferencia en tiempos que recorre cada pasajero con la ruta compartida y un trayecto supuesto directo que realizaría ese vehículo propio. Esta penalización, como se ha comentado previamente se presupone de 1€/min de diferencia contra el trayecto directo, aunque no se trate de un coste real percibido por la empresa.

Se puede observar cómo en costes reales, la solución *baseline* es más rentable que la solución calculada en A. Sin embargo, al incluir los costes totales, con la penalización de exceso de trayecto, el modelo considera mucho más económico la solución en A propuesta. Es por esa razón por la que se añade esta penalización, para incluir la calidad como variable en la función objetivo.

En la Figura 22 se puede visualizar el peso que incluye cada parte en cada uno de los casos incluidos. Se observa principalmente una diferencia considerable en la penalización por exceso de trayecto entre el caso A y su caso *baseline*, como era de esperar. En el caso *baseline*, se recorren todos los nodos con un único vehículo, por lo que el tiempo de trayecto de todos los pasajeros incrementa considerablemente, junto con una hora de recogida más temprana para estos. Por otro lado, descontando esta penalización de tiempos, el resto de costes reales se distribuye de forma parecida en ambos casos, con un 69% de los costes destinados al salario del conductor y un 31% a los kilómetros recorridos, sobre el coste real percibido en ambos casos.

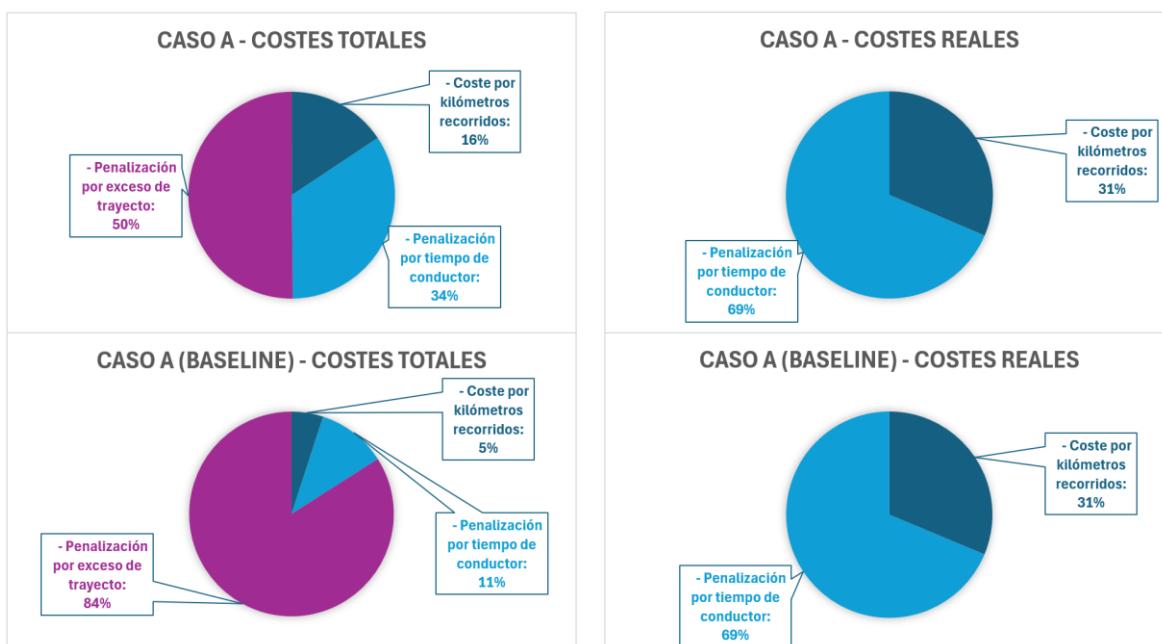


Figura 22. Comparativa de costes totales y reales entre A y su caso *baseline*.

## 5.2 CASO B: 15 PASAJEROS CON 4 VEHÍCULOS UTILIZADOS

De la misma forma, con el caso B podremos calcular los costes percibidos en cada una de las soluciones: la encontrada como óptima por el modelo junto con la supuesta *baseline*, con un único vehículo de recogida. Este caso consideraba la recogida de 15 pasajeros en 6 vehículos disponibles, finalmente utilizando únicamente 4 de ellos. En la Tabla 11 se definen los costes obtenidos para cada una de las soluciones. Se puede distinguir un exceso de costes importante con origen en la penalización del exceso de trayecto en el caso *baseline*. En cambio, los costes reales percibidos se mantienen menores en el caso *baseline*, al igual que ocurría en el caso anterior.

*Tabla 11. Comparativa económica entre el Caso B y su caso baseline.*

CASO B	15 pasajeros
<b>COSTES DE LA SOLUCIÓN:</b>	
• <b>Coste total: 282.90 €</b>	
- Coste por kilómetros recorridos:	42.75 €
- Coste fijo de vehículos:	- €
- Penalización por puntualidad:	- €
- Penalización por tiempo de conductor:	96.89 €
- Penalización por exceso de trayecto:	143.27 €
<b> COSTE REAL PERCIBIDO:</b>	<b>139.64 €</b>
<b>CALIDAD SERVICIO:</b> 143.27 min	
<b>COSTE TOTAL POR PASAJERO</b>	<b>18.86 €</b>
<b>COSTE TOTAL REAL POR PASAJERO</b>	<b>9.31 €</b>

CASO B - BASELINE	15 pasajeros
<b>COSTES DE LA SOLUCIÓN:</b>	
• <b>Coste total:</b>	
- Coste por kilómetros recorridos:	33.97 €
- Coste fijo de vehículos:	- €
- Penalización por puntualidad:	- €
- Penalización por tiempo de conductor:	77.55 €
- Penalización por exceso de trayecto:	1 238.01 €
<b> COSTE REAL PERCIBIDO:</b>	<b>111.52 €</b>
<b>CALIDAD SERVICIO:</b> 1238.01 min	
<b>COSTE TOTAL POR PASAJERO</b>	<b>89.97 €</b>
<b>COSTE TOTAL REAL POR PASAJERO</b>	<b>7.43 €</b>

De la misma forma, en la Figura 23 se muestra la distribución de costes reales y totales para este caso. Destacar, como en comparación con el caso *baseline* de A, la penalización por exceso de trayecto ha incrementado su representación. Este aumento de un 84% a un 92% tiene su explicación en que al aumentar el número de pasajeros de 8 a 15, el tiempo de trayecto excedido aumenta al existir un único vehículo para recoger un mayor número de pasajeros. Por otro lado, vemos como la representación de costes reales se mantiene parecida entre el caso calculado y el caso *baseline* y conjuntamente con el caso A.

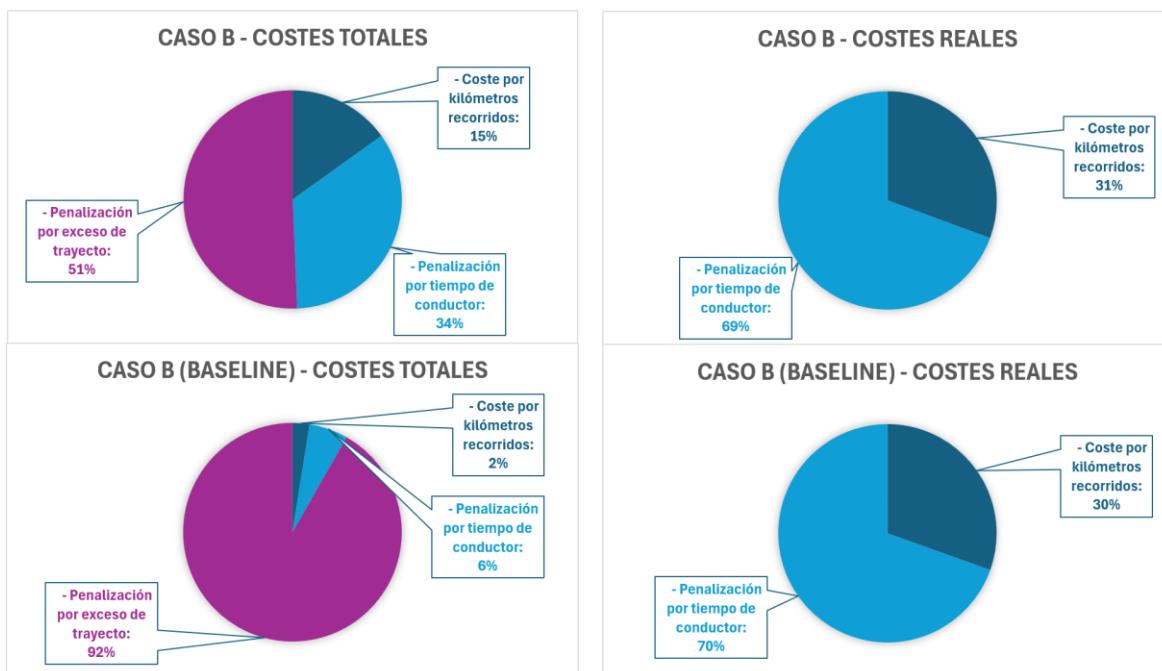


Figura 23. Comparativa de costes totales y reales entre B y su caso baseline.

### 5.3 CASO C: 30 PASAJEROS CON 6 VEHÍCULOS UTILIZADOS

Este caso consideraba la recogida de 30 pasajeros con 6 vehículos con una capacidad de 8 personas, siendo todos de ellos utilizados en la solución encontrada.

En la Tabla 12 se observan los resultados económicos del caso C y de su caso *baseline* correspondiente. Se mantiene la tendencia del resto de casos en que el coste real percibido en el caso *baseline* es menor que el resultado obtenido, pero se observa un incremento considerable en el coste real, al aumentar drásticamente los minutos de exceso de trayecto.

*Tabla 12. Comparativa económica entre el Caso C y su caso baseline.*

CASO C	30 pasajeros
<b>COSTES DE LA SOLUCIÓN:</b>	
• Coste total:	
- Coste por kilómetros recorridos:	555.46 €
- Coste fijo de vehículos:	58.25 €
- Penalización por puntualidad:	- €
- Penalización por tiempo de conductor:	- €
- Penalización por exceso de trayecto:	138.10 €
	359.12 €
<b>COSTE REAL PERCIBIDO:</b>	<b>196.35 €</b>
<b>CALIDAD SERVICIO:</b>	<b>359.12 min</b>
<b>COSTE TOTAL POR PASAJERO</b>	<b>18.52 €</b>
<b>COSTE TOTAL REAL POR PASAJERO</b>	<b>6.55 €</b>
CASO C - BASELINE	30 pasajeros
<b>COSTES DE LA SOLUCIÓN:</b>	
• Coste total:	
- Coste por kilómetros recorridos:	3 456.43 €
- Coste fijo de vehículos:	38.92 €
- Penalización por puntualidad:	- €
- Penalización por tiempo de conductor:	- €
- Penalización por exceso de trayecto:	96.44 €
	3 321.07 €
<b>COSTE REAL PERCIBIDO:</b>	<b>135.36 €</b>
<b>CALIDAD SERVICIO:</b>	<b>3321.07 min</b>
<b>COSTE TOTAL POR PASAJERO</b>	<b>115.21 €</b>
<b>COSTE TOTAL REAL POR PASAJERO</b>	<b>4.51 €</b>

En la Figura 24 se distingue la distribución de costes para este caso. Observamos como la penalización por exceso de trayecto en el caso *baseline* constituye ahora un 96% de los costes, valor muy por encima del resto de casos observados. Este valor tiene sentido, al recoger a muchos más pasajeros y estos percibir un trayecto mucho más largo que el que realizarían directo. Recordemos que este caso se trataría de un único vehículo recogiendo a 40-50km de radio del nodo depósito a 30 pasajeros, por lo que los primeros pasajeros recogidos, además de ser recogidos con horas no admisibles, recorren una distancia desmesurada.

Sin embargo, un factor a tener en cuenta es que en este tercer caso, observamos como la distribución en costes reales se sigue manteniendo como en los casos anteriores. Para los 3 casos (A, B y C) y sus casos *baselines*, la distribución de costes reales se ha mantenido aproximadamente en un 70% del coste para el tiempo de conducción del conductor y un 30% para el coste por los kilómetros obtenidos.

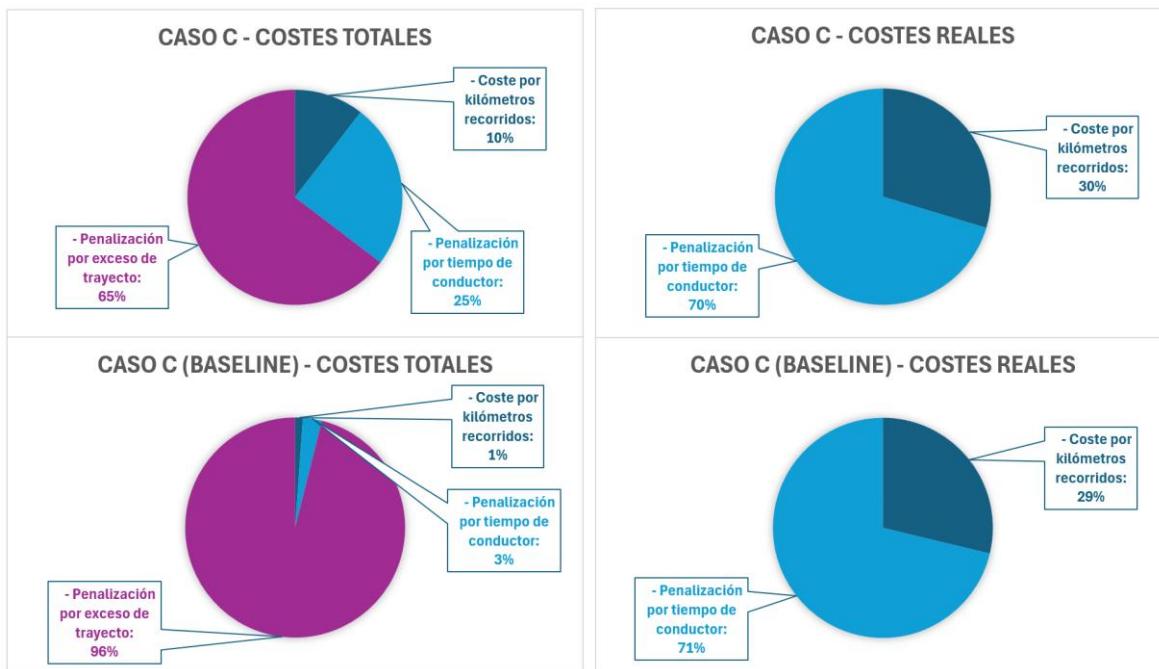


Figura 24. Comparativa de costes totales y reales entre C y su caso baseline.

## 5.4 COMPARATIVA AL AÑADIR UN VEHÍCULO ADICIONAL

Resulta interesante incluir además, un estudio de cómo se comporta el modelo en la búsqueda de la solución óptima en cada caso en base a los vehículos utilizados. En este caso se parte de los casos A y B para mostrar el impacto en costes y en calidad al ir introduciendo un vehículo adicional en uso para cada caso. Los valores a observar durante cada casuística son: el coste total obtenido en cada caso (coste que minimiza el modelo de optimización), el coste real percibido por la empresa (excluyendo la calidad del servicio) y el coste de calidad (son los minutos de exceso por cada ruta percibida en comparación con el trayecto directo).

En la Tabla 13 se añaden los costes obtenidos en cada caso. Para la obtención de estos valores, se ha ejecutado el modelo para cada uno de estos casos forzando a la utilización del número de vehículo que se indica, obteniendo los costes para los valores de 1 y 5 vehículos. Recordemos que en este caso, en la comparativa anterior, al modelo se le permitió el uso de 3 vehículos, que finalmente todos fueron utilizados, ya que el coste total vemos que disminuye en todas las situaciones al aumentar el número de vehículos.

*Tabla 13. Caso A. Comparativa de costes al variar el número de vehículos.*

Coche	Coste Total	Coste Real	Coste Calidad
1	550.73 €	88.01 €	462.72 €
2	233.87 €	92.36 €	141.51 €
3	231.75 €	115.49 €	116.26 €
4	225.05 €	142.38 €	82.67 €
5	207.05 €	175.62 €	31.43 €

En la Figura 25 se detalla de forma visual los valores incluidos en la tabla anterior. En este caso se observa como a medida que se aumenta el número de vehículos (eje horizontal de la gráfica), disminuye el coste total obtenido y el coste de calidad obtenido en cada caso, ambas con tendencia negativa en la gráfica. Esta disminución de calidad viene explicada según los puntos previos del documento: incluir un mayor número de coches proporcionará una mayor satisfacción a los clientes por los recorridos más cortos, pero tendrá asociado un mayor coste real por la necesidad de un conductor adicional y un mayor número de kilómetros recorridos.

Cabe señalar de este caso que los costes tienen un valor descendiente para todo aumento del número de vehículos (al menos hasta 5 vehículos). Esto indica que si en el caso A se le hubiese introducido la posibilidad de acceder a otro vehículo, el modelo hubiese tomado la decisión de usarlo, ya que disminuiría los costes totales y así la función objetivo. Sin embargo, para el caso A únicamente se incluyen 3 vehículos disponibles. Al disponer de únicamente 8 pasajeros, se plantea que añadir más de 3 vehículos era innecesario aunque la reducción de costes lo aconsejara. En ese caso, se podría incluir en la función objetivo un término adicional a la función objetivo que tomara este exceso de vehículos para la empresa en la toma de decisiones. Sin embargo, en este modelo no se incluye.

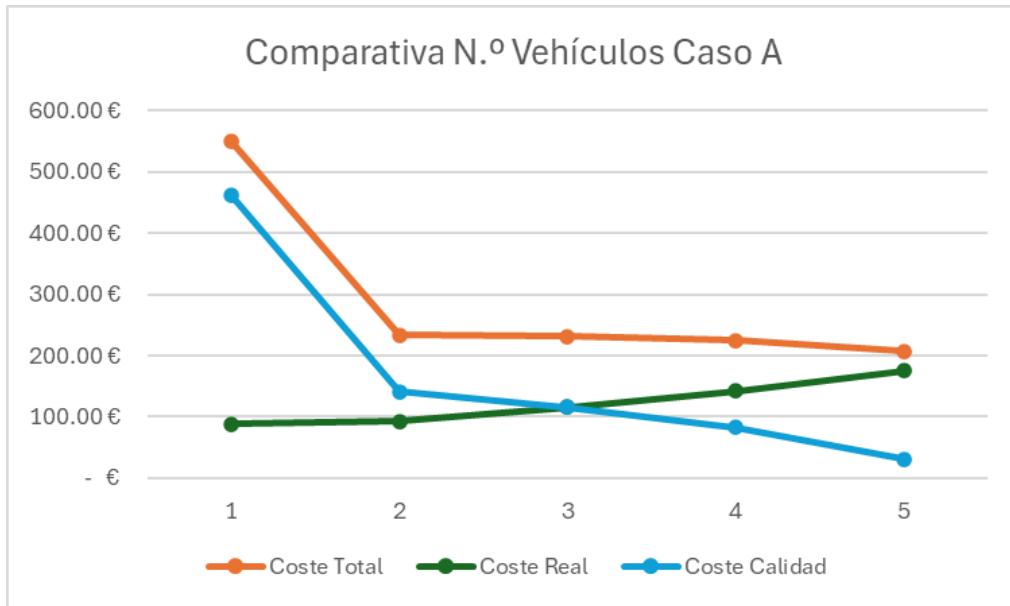


Figura 25. Caso A. Comparativa visual de costes al variar el número de vehículos.

Por otro lado, considerando el Caso B en la Tabla 14 obtenemos los costes asociados al incrementar el número de vehículos desde 1 a 6. Este caso, es de especial relevancia ya que para el caso B se introdujo la posibilidad de 6 vehículos. Sin embargo, el modelo decidió usar únicamente 4 vehículos. Observando los costes totales en este caso, vemos como los costes mínimos obtenidos son con 4 vehículos, como determinó el sistema. Sin embargo, como se observa en los valores, para el uso de 5 y 6 vehículos el coste total es muy similar, aunque superior.

Tabla 14. Caso B. Comparativa de costes al variar el número de vehículos.

Coche	Coste Total	Coste Real	Coste Calidad
1	1 349.53 €	111.52 €	1 238.01 €
2	669.69 €	126.21 €	543.48 €
3	419.80 €	135.53 €	284.27 €
4	282.90 €	139.63 €	143.27 €
5	283.84 €	157.65 €	126.19 €
6	287.76 €	169.08 €	118.68 €

En la Figura 26 se indica visualmente el contenido de la tabla anterior. Como se ha mostrado, el incluir un vehículo adicional hasta el escenario de 4 coches, disminuye los costes totales, que se interpreta en la gráfica como una pendiente negativa. Sin embargo, vemos como a

partir del vehículo 5 y 6 la pendiente de la gráfica se invierte y comienza a ser positiva, al obtenerse un mayor coste total en estas alternativas. Este cambio de pendiente no se observa con claridad en la gráfica, ya que observando los valores en la tabla, al existir una diferencia mínima, puede parecer que no exista pendiente en esos casos.

En cualquier caso, en este escenario contemplado B, observamos como los costes reales si tienen un valor creciente lineal por cada vehículo adicional. Los costes de calidad disminuyen al incrementar el número de vehículos, como se observó en el caso anterior.

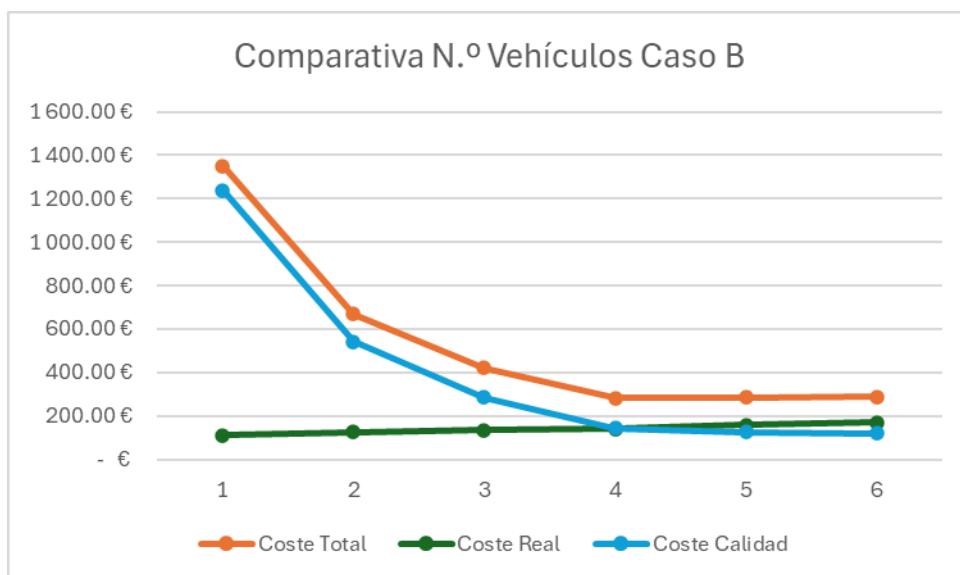


Figura 26. Caso B. Comparativa visual de costes al variar el número de vehículos.

Este último caso planteado permite observar las decisiones que toma el modelo y permite clarificar el número de vehículos que plantea en su decisión final y la razón existente detrás de ella. Se mantiene en cualquier caso dos conclusiones generalizadas y una tercera derivada de estas: 1) Un incremento de vehículos, aumenta la calidad del servicio prestado y por tanto disminuye el coste de penalización de exceso de trayecto (coste calidad); 2) Un aumento de vehículos aumenta el coste real percibido por la empresa, al aumentar el número de kilómetros recorridos; 3) Los costes totales del modelo aumentarán o disminuirán en cada caso en base a los estos dos elementos de costes observados para cada caso. Un impacto desmesurado en un coste o una reducción importante en otro coste, balancearán los valores obtenidos como costes totales con los que el modelo determinará la solución óptima.

## 5.5 COMPARATIVA DE CASOS POR PASAJERO

En este último punto, compararemos el coste percibido unitario por pasajero en todas las soluciones, incluyendo las *baseline*.

Considerando únicamente los costes reales para los casos A, B y C, en la Tabla 15, se observa cómo se parten de 14.44€ en el caso A, 9.31€ en el caso B y 6.55€ en el caso C. Esto indica como a medida que incrementamos el número de pasajeros en nuestro problema inicial, nuestra solución abastecerá esa demanda aprovechando las economías de escala. Es decir, cuanto mayor sea el número de pasajeros, más podre disminuir el coste promedio que cuesta abastecer a esa persona unitaria.

Comparando los costes totales, es decir, con la penalización de exceso de trayecto (sin incluir los casos *baseline* todavía), observamos como se obtiene un coste total en el caso A mayor que el coste obtenido en B y en C. Esto indica, que ante un menor número de pasajeros, más dispersos por el mapa, y disponiendo de un menor número de vehículos, los pasajeros experimentarán un tiempo mayor de trayecto. Sin embargo, en B y en C ese coste se mantiene.

Considerando los casos *baseline*, en la Tabla 15 se puede distinguir el mismo razonamiento que se ha ido haciendo en los puntos anteriores. El coste total por pasajero en comparación con el caso óptimo es mucho mayor, por la penalización de exceso de trayecto. Sin embargo, como se ha comentado previamente, el coste real por pasajero de estas soluciones si es menor que en la solución calculada, aunque propone soluciones del modelo que constituyen tiempos de trayecto y horas de salida inadmisibles para el usuario.

*Tabla 15. Comparativa de Casos por Pasajero. Incremento en Costes y Mejora de la Calidad del Servicio .*

	Caso A	Caso A (baseline)	Caso B	Caso B (baseline)	Caso C	Caso C (baseline)
<b>COSTE TOTAL POR PASAJERO</b>	28.97 €	68.84 €	18.86 €	89.97 €	18.52 €	115.21 €
<b>COSTE REAL POR PASAJERO</b>	14.44 €	11.00 €	9.31 €	7.43 €	6.55 €	4.51 €
<b>Incremento en costes</b>	+3.44€		+1.87€		+2.03€	
<b>Mejora calidad servicio (€ ~ min)</b>	-43.31 min		-72.98 min		-98.73 min	

Además, en la parte inferior de la tabla, podemos distinguir unas métricas para cada uno de los casos en base a la mejora con respecto a su caso *baseline*. En el caso A, por ejemplo, con el caso A calculado, se obtiene una solución que le cuesta a la empresa 3.44€ más por

pasajero que la solución *baseline*, ofreciendo una mejora en tiempos para cada pasajero de 43.31 minutos. Es decir, de alguna forma, la empresa ofreciendo la solución calculada en A está asumiendo un coste de 3.44€ adicional por usuario para que cada uno experimente una mejora de 43.31 minutos en el servicio proporcionado.

De la misma forma, vemos como esta diferencia de costes a medida que se amplía el número de pasajeros y vehículos disponibles se va reduciendo. Además, la mejora en tiempos en B y C incrementa considerablemente. El modelo prefiere en B, por ejemplo, asumir 1.87€ por pasajero para mejorar el tiempo de trayecto de cada uno de los pasajeros en 72.98. En C, de la misma forma, el modelo prefiere asumir 2.03€ adicionales para mejorar la calidad de cada pasajero en 98.73 minutos.

En la Tabla 16, observamos el esfuerzo monetario que debe asumir la empresa para mejorar en un minuto la experiencia del usuario. Con los valores previamente calculados de coste y minutos de mejora, observamos como en el caso A, la empresa asume 0.079€ por pasajero para mejorar cada minuto que proporciona la solución frente al caso *baseline*. Vemos, que aunque los minutos de mejora en la Tabla 15 iban incrementando para el número de pasajeros, esta diferencia en costes que asume la empresa por mejorar su servicio va disminuyendo cada vez más. Es decir, con un aumento de pasajeros, la solución proporcionada es mejor y además, económicamente los costes percibidos para mejorar cada minuto de experiencia de cada pasajero se van reduciendo considerablemente.

*Tabla 16. Euros invertidos por minuto de mejora por pasajero.*

	Caso A	Caso A (baseline)	Caso B	Caso B (baseline)	Caso C	Caso C (baseline)
Incremento en costes		3.44		1.87		2.03
Mejora calidad servicio (€ ~ min)		-43.31		-72.98		-98.73
€ invertidos por minuto de mejora		0.079		0.026		0.021

Estos resultados económicos obtenidos indican como la solución propuesta y el modelo desarrollado proporciona un impacto, tanto en la rentabilidad del modelo de negocio como en el modelo económico desarrollado. El caso *baseline*, además, ha permitido mostrar la necesidad de la implementación de una función multiobjetivo, priorizando la minimización de costes y la mejora de la calidad de estos servicios. Aumentando el número de pasajeros

observamos como los costes por pasajero van disminuyendo, además de disminuir el esfuerzo económico que debe asumir la empresa para proporcionar ese servicio de calidad que el cliente espera percibir.

## Capítulo 6. CONCLUSIONES

Este estudio académico pretendía atender y mostrar el detalle la resolución de un caso de optimización para el uso de vehículos compartidos en la movilidad urbana, un elemento fundamental para el desarrollo de movilidad sostenible a largo plazo. El trabajo contempla un modelo matemático de optimización basado en *Mixed-Integer Linear Programming* (MILP) para resolver una variante del VRP incluyendo condiciones tales como restricciones de capacidad en los vehículos, flotas heterogéneas y ventanas de tiempo temporales. Los casos de estudio pretenden mostrar una imagen clara sobre las diferentes situaciones que se muestran en un escenario real en el día a día, donde se pretende balancear la eficiencia en costes junto con un servicio de calidad.

Los principales hallazgos encontrados en este caso son:

El uso de diferentes técnicas de optimización para la resolución de los casos de estudio. Los casos de estudio contemplan variantes de CVRP, HVRP y VRPTW y se resuelven mediante técnicas avanzadas de optimización, como el *Branch & Cut*, métodos heurísticos de *warm-start* basados en la posición geográfica de los nodos como el *sweep algorithm*. En este caso se ha analizado como ante casos sencillos, estas técnicas de *warm-start* son efectivas pero no fundamentales. Sin embargo, al escalar el problema y aumentar el número de nodos, estas técnicas proporcionan al modelo una primera solución sobre la que trabajar y proporcionar más rápidamente la solución óptima. Para la escalabilidad del problema, este cálculo y división previa en clusters es imprescindible para mejorar el rendimiento del programa.

Por otro lado, en base a los diferentes casos de estudio contemplados, se ha podido analizar la necesidad de incluir la multiobjetividad en la función objetivo del modelo. Observamos, que sin restricción a la calidad del servicio, en base a los tiempos de trayecto, el sistema proporcionaría una solución que económicamente es más rentable, pero que al usuario no sería admisible. La multiobjetividad asegura una

solución que es rentable económicamente teniendo en cuenta la calidad del modelo resuelto presentado.

Además, se ha observado claramente como con el aumento del número de pasajeros, los costes por pasajero disminuyen considerablemente. Es decir, con economías de escala el programa consigue encontrar soluciones viables y con costes reducidos. Además, al aumentar el número de pasajeros, tal y como se ha presentado en el estudio económico, el esfuerzo económico que debe asumir la empresa para proporcionar un servicio de calidad es cada vez menor. Es decir, con mayor número de pasajeros la empresa es capaz de disminuir costes, además de rentabilizar más proporcionar una solución de calidad. El único requerimiento es incrementar la demanda del servicio y tener una flota de vehículos con unas características determinadas que puedan asumir ese incremento de demanda.

Según todos los casos analizados, aun manteniendo un número voluminoso de pasajeros o un caso sencillo, con varios o muchos vehículos, la distribución de costes reales del modelo se ha mantenido constante. Este resultado ocurre en parte por la suposición de costes inicial y se obtiene que el salario de los conductores suponen un 70% de los costes totales y un 30% de los costes asumen los kilómetros recorridos. Aun así, que estos números se mantengan en todas las soluciones determinan que en base a los diferentes casos, la ruta calculada se define de forma similar en cada uno de ellos.

En definitiva, el modelo y el estudio presentado pretende incluir un modelo de decisión óptimo para la operativa de la empresa. Esta resolución encuentra soluciones óptimas para cada caso, dependiendo de las diferentes características del problema inicial y proporciona un sistema de decisión muy útil en la operativa de la empresa. Además, para cada caso se incluyen métricas que permiten analizar la efectividad de la solución. Se proporciona una solución que más allá de ser lo más rentable económicamente, tiene en cuenta las restricciones de operación y en base a la multiobjetividad, incluye la calidad del servicio como uno de los puntos imprescindibles en su resolución.

Este modelo y los casos de estudio presentados pretenden ser de utilidad para el desarrollo de modelos más complejos, con más restricciones o características adicionales de las variantes del VRP reconocidas. Asientan las bases de trabajo de movilidad sostenible para futuros proyectos, que podrían incluir rutas dinámicas, predicción en tiempo real de demanda y cálculo en tiempo real de rutas e incluso la integración con nuevos vehículos autónomos.

## Capítulo 7. BIBLIOGRAFÍA

- Ahmadi Basir, S., Şahin, G., & Özbaygin, G. (2024). A comparative study of alternative formulations for the periodic vehicle routing problem. *Computers & Operations Research*, 165, 106583. <https://doi.org/10.1016/J.COR.2024.106583>
- Baldacci, R., Battarra, M., & Vigo, D. (2008). Routing a heterogeneous fleet of vehicles. *Operations Research/ Computer Science Interfaces Series*, 43, 3-27. [https://doi.org/10.1007/978-0-387-77778-8\\_1](https://doi.org/10.1007/978-0-387-77778-8_1)
- Celering: el taxi y bus compartido llegan a la España vaciada.* (s. f.). Recuperado 25 de junio de 2025, de [https://www.larazon.es/economia/celering-carsharing-que-llega-espana-vaciada\\_2024092266eac58cb3741e0001ea5e0b.html](https://www.larazon.es/economia/celering-carsharing-que-llega-espana-vaciada_2024092266eac58cb3741e0001ea5e0b.html)
- Celering: La nueva plataforma de movilidad inteligente.* (s. f.). Recuperado 25 de junio de 2025, de [https://celering.com/?utm\\_medium=paid-search&utm\\_source=google&utm\\_campaign=esp-search-brand-celering&utm\\_content=celering-em&utm\\_term=celering&hsa\\_acc=1766121798&hsa\\_cam=22203300422&hsa\\_grp=176124813762&hsa\\_ad=731952876475&hsa\\_src=g&hsa\\_tgt=kwd-1464627779426&hsa\\_kw=celering&hsa\\_mt=e&hsa\\_net=adwords&hsa\\_ver=3&gad\\_source=1&gad\\_campaignid=22203300422&gbraid=0AAAAACzXRJS-hArMpBymZYMcu5I1QenpH&gclid=CjwKCAjwmencBhA4EiwAtVjzmpdM5OKjGa-GZOfLsdKsRsVmIWfVLII8-odn0ewlzCDM4z4joGfLmRoCjMwQAvD\\_BwE](https://celering.com/?utm_medium=paid-search&utm_source=google&utm_campaign=esp-search-brand-celering&utm_content=celering-em&utm_term=celering&hsa_acc=1766121798&hsa_cam=22203300422&hsa_grp=176124813762&hsa_ad=731952876475&hsa_src=g&hsa_tgt=kwd-1464627779426&hsa_kw=celering&hsa_mt=e&hsa_net=adwords&hsa_ver=3&gad_source=1&gad_campaignid=22203300422&gbraid=0AAAAACzXRJS-hArMpBymZYMcu5I1QenpH&gclid=CjwKCAjwmencBhA4EiwAtVjzmpdM5OKjGa-GZOfLsdKsRsVmIWfVLII8-odn0ewlzCDM4z4joGfLmRoCjMwQAvD_BwE)
- Comert, S. E., & Yazgan, H. R. (2021). Effective Cluster-First Route-Second approach using Metaheuristic algorithms for the Capacitated Vehicle Routing Problem. *International Journal of Industrial Engineering: Theory, Applications and Practice*, 28(1). <https://doi.org/10.23055/ijietap.2021.28.1.7223>
- Consorcio Transportes Madrid. (2014). *Encuesta Sintética de Movilidad en la Comunidad de Madrid.*

- Dantzig, G. B., & Ramser, J. H. (1959). The Truck Dispatching Problem. *Management Science*, 6(1), 80-91. <https://doi.org/10.1287/MNSC.6.1.80>
- Dirección General de Tráfico, & Instituto para la Diversificación y Ahorro de Energía. (2019). *La movilidad al trabajo: un reto pendiente*.
- European Commission. (2025, abril 24). *Spain mobilises €878 million to promote sustainable mobility in 2025*. [https://urban-mobility-observatory.transport.ec.europa.eu/news-events/news/spain-mobilises-eu878-million-promote-sustainable-mobility-2025-2025-04-24\\_en](https://urban-mobility-observatory.transport.ec.europa.eu/news-events/news/spain-mobilises-eu878-million-promote-sustainable-mobility-2025-2025-04-24_en)
- José María Campos (Celering): «*La movilidad del futuro será autónoma, asequible y de alta calidad*». (s. f.). Recuperado 25 de junio de 2025, de [https://www.lideractual.es/empresas/jose-maria-campos-celering-la-movilidad-del-futuro-sera-autonoma-asequible-y-de-alta-calidad\\_11124](https://www.lideractual.es/empresas/jose-maria-campos-celering-la-movilidad-del-futuro-sera-autonoma-asequible-y-de-alta-calidad_11124)
- Kallehauge, B., Boland, N., & Madsen, O. B. G. (2007). Path inequalities for the vehicle routing problem with time windows. *Networks*, 49(4), 273-293. <https://doi.org/10.1002/NET.20178>
- Liu, J., Yuan, B., Hu, Y., & Smith, A. E. (2002). *The finished vehicle routing problem with a heterogeneous transport fleet*. <https://ssrn.com/abstract=4239703>
- Mansilla Barrionuevo, P. (2025). *Plan de negocio de un servicio privado de transporte a zonas empresariales*. <https://repositorio.comillas.edu/xmlui/handle/11531/88377>
- Miller, C. E., Zemlin, R. A., & Tucker, A. W. (1960). Integer Programming Formulation of Traveling Salesman Problems. *Journal of the ACM (JACM)*, 7(4), 326-329. <https://doi.org/10.1145/321043.321046>
- Naciones Unidas. (2015). *Objetivos de Desarrollo Sostenible*. <https://www.un.org/sustainabledevelopment/es/>
- Nagy, G., & Salhi, S. (2003). *Heuristic Algorithms for Single and Multiple Depot Vehicle Routing Problems with Pickups and Deliveries*.

- Nazari, M., Oroojlooy, A., Takáč, M., & Snyder, L. V. (2018). Reinforcement Learning for Solving the Vehicle Routing Problem. *Advances in Neural Information Processing Systems, 2018-December*, 9839-9849. <https://arxiv.org/pdf/1802.04240>
- Oyola, J., Arntzen, H., & Woodruff, D. L. (2018). The stochastic vehicle routing problem, a literature review, part I: models. *EURO Journal on Transportation and Logistics*, 7(3), 193-221. <https://doi.org/10.1007/S13676-016-0100-5>
- Ozbaygin, G., Karasan, O., & Yaman, H. (2018). *New Exact Solution Approaches for the Split Delivery Vehicle Routing Problem*.
- Song, B., & Jiao, Z. (2024). Power Material Demand Forecasting Based on LSTM and Random Forecast. *Advances in Transdisciplinary Engineering*, 55, 316-324. <https://doi.org/10.3233/ATDE240401>
- Wenyi, L. (2023). Research on vehicle routing problem and application scenarios. *Handbook of Mobility Data Mining: Volume 3: Mobility Data-Driven Applications*, 3, 63-88. <https://doi.org/10.1016/B978-0-323-95892-9.00006-1>

## **Capítulo 8. ANEXO: CÓDIGO DESARROLLADO**

Se añade a continuación el código fuente desarrollado para la resolución del modelo:

<https://github.com/MansillaPablo/VehicleRouting.git>