

**UNIVERSIDAD PONTIFICIA COMILLAS DE MADRID**

**ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA (ICAI)**

**INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN TECNOLÓGICA**

**MODOS DE PROPAGACIÓN  
DE LAS ONDAS ELÁSTICAS  
EN LOS CABLES ELÉCTRICOS**

Tesis para la obtención del grado de Doctor  
Director: Dr. D. Juan Antonio Talavera Martín  
Autor: Ing. D. Carlos Mateo Domingo



Madrid 2007

# **CONSTANCIA REGISTRAL DEL TRIBUNAL DEL ACTO DE LA DEFENSA DE TESIS DOCTORAL**

**TÍTULO: Modos de propagación de las ondas elásticas en los cables eléctricos**

**AUTOR: Ing. D. Carlos Mateo Domingo**

**DIRECTOR: Dr. D. Juan Antonio Talavera Martín**

**TUTOR-PONENTE: Dr. D. Julián Barquín Gil**

**DEPARTAMENTO: Instituto de Investigación Tecnológica**

**FACULTAD O ESCUELA: Escuela Técnica Superior de Ingeniería (ICAI)**

**Miembros del Tribunal Calificador:**

**PRESIDENTE:**

**Firma:**

**VOCAL:**

**Firma:**

**VOCAL:**

**Firma:**

**VOCAL:**

**Firma:**

**SECRETARIO:**

**Firma:**

**Fecha de lectura:**

**Calificación:**

*A quienes se han hecho un lugar en mi corazón,*

# Agradecimientos

A través de estas líneas quería expresar mi agradecimiento a todas aquellas personas e instituciones, las cuales de un modo u otro han contribuido a que este trabajo saliera adelante.

Al Instituto de Investigación Tecnológica, y por extensión a la Universidad Pontificia Comillas quería agradecerles el haberme brindado la oportunidad de realizar aquí esta tesis. A todas las personas que forman el Instituto gracias por crear un ambiente tan estupendo en el IIT.

Querría agradecer a Sadot Alexandres el que contactara conmigo para proponerme iniciar esta etapa de investigación en el instituto. Gracias también a la dirección del IIT y a Jesús Peco por haber dado continuidad a mi estancia aquí durante estos últimos años.

Quiero agradecer a Fernando Seco, sus aclaraciones para la integración de sus ecuaciones para realizar las simulaciones del modelo completo. A Ramón Rodríguez, Juan Luis Zamora y Ángela Jiménez gracias por haber atendido algunas de las dudas que me surgieron. También querría agradecer a Michael J. S. Lowe sus valiosos comentarios.

No podría olvidarme de José María Bautista y Antonio Martín, a quienes quiero agradecer su inestimable ayuda para la preparación de los montajes experimentales.

Querría agradecer a José Luis Rodríguez, la revisión del documento y sus valiosos comentarios. A Julián Barquín por su labor como tutor ponente. Gracias también a Antonio Muñoz por su apoyo a la investigación que hemos llevado a cabo en este campo.

Al Instituto de Acústica del CSIC, y en particular a Francisco Montero de Espinosa, María Isabel García y Yago Gómez-Ullate quería agradecerles su colaboración en los ensayos de interferometría. A Pedro Cobo por haberme proporcionado las primeras referencias sobre este tema.

Al Ministerio de Educación y Ciencia por la financiación para el proyecto QELAS (número TEC2005-07311/TCM) del Programa Nacional de I+D+I de Tecnologías Electrónicas y de Comunicaciones.

A Raquel Olmedo, por haberme acompañado en el inicio de este viaje. A mi familia, en particular a mis padres y a mis hermanos, quiero agradecerles su apoyo incondicional, que me ha permitido superar los momentos más difíciles. Gracias a Raquel Fernández por darme la ilusión y las fuerzas necesarias.

Muy especialmente, quiero agradecerle a mi director de tesis, Juan Antonio Talavera, el trato humano excelente y la dirección de esta tesis doctoral; así como el haber propuesto este tema de investigación.

# ÍNDICE

<b>1 INTRODUCCIÓN .....</b>	<b>1</b>
1.1. Motivación.....	1
1.2. Aplicaciones de las ondas elásticas guiadas .....	2
1.2.1. Industria ferroviaria .....	3
1.2.2. Sistema de soporte de los techos de las vigas.....	4
1.2.3. Tuberías .....	4
1.2.4. Sensores de posición.....	6
1.2.5. Circuitos integrados .....	6
1.2.6. Cables y alambres .....	7
1.3. Introducción al marco teórico.....	9
1.4. Métodos de resolución de las ecuaciones .....	13
1.5. Resumen del trabajo desarrollado.....	16
<b>2 FORMULACIÓN TEÓRICA .....</b>	<b>18</b>
2.1. Leyes fundamentales .....	19
2.2. Ecuaciones en estructuras cilíndricas de múltiples capas.....	23
2.3. Ecuaciones en estructuras cilíndricas de múltiples capas con núcleo sólido .....	30
2.4. Perfil de los modos de propagación.....	33
2.5. Ecuaciones auxiliares .....	35
<b>3 ALGORITMOS DE RESOLUCIÓN .....</b>	<b>39</b>
3.1. Curvas de dispersión.....	39
3.2. Método de Lowe.....	39
3.3. Método de búsqueda directa .....	41
3.4. Método híbrido .....	45

<b>4 SIMULACIONES.....</b>	<b>47</b>
4.1. Introducción a las simulaciones.....	47
4.2. Propiedades elásticas usadas en las simulaciones .....	48
4.3. Cables eléctricos sin plástico aislante.....	48
4.4. Cables eléctricos con plástico aislante.....	51
4.4.1. Descripción.....	51
4.4.2. Resolución mediante el método de Lowe.....	51
4.4.3. Resolución mediante el método de búsqueda directa.....	52
4.4.4. Resolución mediante el método híbrido.....	54
4.5. Validación de los modos de propagación en el cable con plástico aislante .....	57
4.5.1. Criterio del signo de la atenuación .....	58
4.5.2. Criterio de frecuencia en rango .....	58
4.5.3. Criterio de velocidad de grupo no negativa.....	58
4.5.4. Criterio de velocidad de grupo no excesiva.....	60
4.5.5. Criterio de los perfiles de los modos de propagación. Verificación de las restricciones impuestas.....	61
<b>5 MONTAJE EXPERIMENTAL.....</b>	<b>67</b>
5.1. Montajes preliminares .....	67
5.1.1. Según tipo de transductores empleados.....	67
5.1.1.1. Clasificación .....	67
5.1.1.2. Piezocerámicos .....	68
a) Baja frecuencia .....	69
b) Alta frecuencia .....	70
b.1) Discos prefabricados .....	71
b.2) Discos fragmentados .....	72
5.1.1.3. Fluoruro de polivinilideno (PVDF).....	73
5.1.2. Según tipos de acoplamiento .....	74
5.1.2.1. Clasificación .....	74

5.1.2.2. A través de pieza de acoplamiento .....	75
5.1.2.3. Directos.....	79
a) Pegados.....	79
a.1) Cianoacrilato .....	79
a.2) Resina epoxy .....	79
b) Soldados .....	80
5.1.2.4. Combinados.....	80
5.1.3. Según medio de transmisión.....	82
5.1.3.1. Clasificación .....	82
5.1.3.2. Bobinas .....	83
5.1.3.3. Barras de cobre .....	84
5.1.3.4. Cable esmaltado.....	86
5.1.3.5. Plástico .....	86
5.1.3.6. Cable desnudo .....	87
5.1.3.7. Cable aislado .....	88
a) Cable recto estirado .....	88
b) Cable sin estirar.....	90
5.2. Montaje experimental definitivo .....	90
5.3. Procesamiento de la señal.....	92
<b>6 ENSAYOS.....</b>	<b>96</b>
6.1. Introducción a los ensayos.....	96
6.2. Medida de la conductancia de los piezoeléctricos.....	97
6.3. Ensayos de respuesta a escalón con barra de cobre.....	98
6.4. Ensayos de respuesta a escalón con cable estirado sin plástico aislante .....	104
6.5. Ensayos de respuesta a escalón con cable estirado con plástico aislante.....	111
6.6. Tren de ráfagas cortas senoidales con cable estirado con plástico aislante.....	116
6.7. Tren de ráfagas largas senoidales (asimilables a régimen permanente) con cable estirado con plástico aislante .....	120



6.8. Tren de ráfagas largas de funciones <i>chirp</i> con cable estirado con plástico aislante....	124
6.9. Tren de ráfagas largas de funciones <i>chirp</i> con cable no estirado con y sin plástico aislante.....	130
<b>7 VALIDACIÓN .....</b>	<b>136</b>
7.1. Validación de las herramientas de simulación .....	136
7.1.1. Cilindro fluido con la superficie libre.....	137
7.1.2. Cilindro elástico de dos capas con núcleo sólido. Solución longitudinal axisimétrica.....	140
7.1.3. Tuberías de acero recubiertas de plástico .....	146
7.1.4. Cilindro sólido homogéneo sin viscoelasticidad .....	149
7.2. Validación de las técnicas experimentales .....	152
7.3. Validación de las propiedades del PVC plastificado.....	155
7.4. Validación parcial del modelo: atenuación – frecuencia.....	159
7.5. Validación parcial del modelo: modos de propagación .....	161
7.6. Propuesta de modelo completo validado .....	165
<b>8 CONCLUSIONES .....</b>	<b>168</b>
<b>9 BIBLIOGRAFÍA .....</b>	<b>172</b>

# 1 INTRODUCCIÓN

## 1.1. Motivación

En estos últimos años, con el crecimiento tan espectacular de las comunicaciones, se está haciendo un gran esfuerzo en el aumento de la capacidad de transmisión en las redes. En general, se está siguiendo dos alternativas. Una de ellas que parece la más obvia consiste simplemente en la instalación de nuevas líneas, por ejemplo, de fibra óptica o enlaces inalámbricos. Otra, menos evidente pero que está dando unos resultados mucho más espectaculares de lo esperado, es la ampliación de la capacidad de las líneas actualmente existentes por medio de un cambio de tecnología de transmisión. Por ejemplo, ADSL en las líneas telefónicas o los sistemas PLC en las líneas eléctricas. Este último caso es especialmente revelador. Así, se están utilizando las infraestructuras diseñadas específicamente para transportar energía eléctrica como medios para transmitir también información.

Desde sus comienzos, tal como las conocemos en la actualidad, las telecomunicaciones se han basado en la propagación de ondas electromagnéticas. En las últimas décadas, las fibras ópticas están aportando un impulso renovado en el aumento de la capacidad de transmisión de las redes. Aunque también son ondas electromagnéticas su frecuencia tan elevada hace que tengan un comportamiento radicalmente diferente en los medios materiales y, por lo tanto, requieren unas infraestructuras completamente nuevas. Por otro lado, las ondas elásticas que tan íntimamente han estado ligadas al hombre (considérese la voz) han tenido un papel muy secundario como medio de transmisión. Esta tesis surgió con la idea de estudiar las ondas elásticas como medio de transmisión pero de una forma diferente a como hasta ahora se ha hecho: propagándose por los propios conductores eléctricos. Las ondas elásticas se propagan con mayor velocidad y menor atenuación en metales, como el cobre, que en el aire.

Esto podría posibilitar la utilización de infraestructuras ya construidas y que se extienden por ciudades y casas como medio de transmisión adicional de cualquier tipo de señal. Así, podríamos por los cables de las líneas eléctricas transmitir, además de energía, datos modulados sobre las ondas elásticas.

Además de añadir canales de comunicación sobre las infraestructuras existentes, o dotar a las nuevas de mayor capacidad de transmisión, la comunicación con ondas elásticas presentaría una importante ventaja adicional: no hay emisión de radiación electromagnética. A su vez, son básicamente inmunes a interferencias electromagnéticas.

## 1.2. Aplicaciones de las ondas elásticas guiadas

La mayor diferencia entre propagación de ondas elásticas en un medio libre (“bulk waves”) y ondas elásticas guiadas, consiste en la necesidad de un contorno para la propagación de estas últimas. Como resultado del contorno podemos imaginar un conjunto de diferentes ondas reflejándose y cambiando de modo, superponiéndose en áreas con interferencia constructiva o destructiva, para al final llegar a conformar los modos de propagación que pueden darse en la estructura.

El auge de las ondas elásticas guiadas viene impulsado por unas características ventajosas de cara a su uso para diagnóstico [1]. Así, permiten inspeccionar a grandes distancias desde cada posición del sensor; mediante el ajuste de modo y frecuencia es posible establecer resonancias con una excelente capacidad de detección de defectos, y proporcionan mayor sensibilidad que la inspección ultrasónica normal estándar. Además permiten inspeccionar con gran sensibilidad estructuras bajo el agua, con recubrimientos o aislantes o de varias capas. En definitiva son una solución de bajo coste, sencilla y rápida (a menudo menos de una veintava parte del coste de una inspección estándar). Una de las aplicaciones más típicas de los ultrasonidos es su uso para la realización de ensayos de evaluación no destructivos (NDT),

denominación con la que se conoce a cualquier prueba realizada a un material que no afecte de forma permanente sus propiedades.

### 1.2.1. Industria ferroviaria

La inspección de los raíles de tren es una de las aplicaciones típicas de las ondas elásticas. Wilcox y otros [2] utilizan las ondas guiadas para inspeccionar los raíles, lo que permite inspeccionar en un solo ensayo grandes distancias. Trabajan simultáneamente con muchos modos de propagación mediante mapas del coeficiente de reflexión, que indican como se produce la conversión de modos (tanto simétricos como asimétricos) según el tipo de defecto. Singh y Clark [3], emplean técnicas convencionales de ultrasonidos para inspeccionar los raíles. Edwards, Dixon y Jian [4] proponen configuraciones emisor-receptor con transductores acústicos electromagnéticos como una forma relativamente económica, más rápida y sin contacto, de ensayo no destructivo. Sanderson, Smith [5], Lu, Dike y Modjtahedzadeh [6] utilizan técnicas de elementos finitos para analizar los modos de propagación en un raíl. Los elementos finitos son una técnica potente pero computacionalmente costosa que permite analizar estructuras complejas como los raíles.

Futsuhara y otros [7] proponen usar las ondas elásticas en los raíles de tren a diferencia de los anteriores autores, no sólo como diagnóstico sino también para comunicaciones en el mismo sentido del presente trabajo. Podrían así, permitir intercambiar información de monitorización y control, tal como la posición y velocidad del tren en los raíles, así como información sobre posibles roturas en los raíles.

Finalmente, en la industria ferroviaria también es de interés la inspección de la catenaria, un cable eléctrico desnudo que sirve para proporcionar energía al tren, hecho de cobre de aproximadamente 15.8mm de diámetro. La locomotora utiliza un pantógrafo para acoplarse mecánicamente a la catenaria; este acoplamiento entre el pantógrafo y la catenaria produce desgaste de esta última. Los ultrasonidos es el método más apropiado de ensayo no destructivo para estudiar dicho desgaste [8].

### 1.2.2. Sistema de soporte de los techos de las vigas

Cawley también expone el problema de comprobar el estado del sistema de soporte de los techos de las minas [9]. Para analizarlo hay que tener en cuenta la pérdida de energía hacia la roca. Sin embargo observa que la mínima atenuación se produce a una frecuencia relativamente alta (unos 2MHz); esto se debe a que conforme aumenta la frecuencia, los modos con un mínimo de propagación tienen a concentrar su energía en el centro de la barra, por lo que el movimiento en la superficie es relativamente bajo, lo que limita la pérdida de energía hacia el medio exterior.

### 1.2.3. Tuberías

Las ondas guiadas también son apropiadas para inspeccionar un campo muy interesante: las tuberías [10, 11]. Permiten revisar grandes distancias desde cada posición, incluso de tuberías recubiertas requiriendo quitar en estos casos tan solo una pequeña parte de su recubrimiento. Sin embargo, su uso está limitado por la existencia de muchos modos de propagación posibles, la mayoría muy dispersivos, lo que produce mucho ruido coherente que no puede ser eliminado mediante el promediado [9]. En tuberías hay unos 50 modos presentes para frecuencias por debajo de 100kHz. Para analizar la reflexión debida a defectos se recurre también a modelos de elementos finitos [5]. Lai y Yang [12] siguen el modelo teórico de Barshinger y Rose [13] y emplean interferometría para validar las curvas de dispersión. Song y otros [14] utilizan ondas guiadas para inspeccionar las tuberías en busca de sedimentos, que son una de las mayores fuentes de contaminación del agua. Algunos modos de flexión son particularmente apropiados para detectarlos. También se ha analizado el efecto de las curvas en las tuberías [15, 16]. Nishino, Takemoto y Chubachi indican que es posible estimar la relación diámetro/espesor de un cilindro hueco mediante la medida de la velocidad de la onda

primaria [17]. Yang y otros analizan el efecto de los soportes longitudinales de las tuberías los cuales dificultan la detección de defectos en las mismas [18].

Los modos torsionales tienen una particularidad en el caso de las tuberías. Estos modos se caracterizan porque sólo tienen desplazamientos en la dirección angular. Sin embargo, en el caso de fluidos, éstos no transmiten esfuerzos transversales. Por esta razón, el hecho de que las tuberías estén llenas de agua no afecta a los modos torsionales. Para otros tipos de modos sí que afecta a las velocidades de fase y hay que tenerlo en cuenta, si bien la atenuación que produce es baja (inferior a 0.5dB/m). En tuberías inmersas en un fluido, la pérdida de energía es proporcional al desplazamiento radial. En tuberías recubiertas de un producto bituminoso la atenuación depende de [19]:

- Las propiedades del recubrimiento
- El espesor del recubrimiento
- El desplazamiento en la superficie de la tubería en todas las direcciones (radial, circunferencial y axial)
- La frecuencia

Las ondas guiadas de ultrasonidos también se utilizan en la industria aeroespacial, entre otros usos para comprobar el estado de estructuras cilíndricas huecas presentes en los rotores de helicópteros y en las turbinas de los aviones [20]. Los cilindros huecos tienen una solución intermedia entre el cilindro sólido y las placas planas. Ratssepp y Klauson han comparado la vibración en placas, con la vibración en cilindros huecos y macizos [21]. La diferencia entre los cilindros huecos y las placas es más significativa a bajas frecuencias; mientras que al incrementar la frecuencia los cilindros huecos empiezan a vibrar como una placa. El análisis de placas [9], a priori, parece más sencillo que el de tuberías porque, para dimensiones similares y a una misma frecuencia, hay muchos menos modos de propagación presentes en una placa que en un cilindro. Sin embargo el hecho de que la propagación puede darse en dos direcciones complica notablemente el problema. Estructuras tipo sándwich utilizadas en los aviones por sus altas prestaciones y bajo peso han sido analizadas, encontrando modos de propagación bastante diferentes de los habituales en las placas, debido a la falta de simetría de

este tipo de estructuras [22]. En la referencia [23] pueden consultarse también las curvas de dispersión en estructuras planas.

#### **1.2.4. Sensores de posición**

Otras aplicaciones en un campo diferente incluyen por ejemplo un sensor de posición [24]. En este caso un cursor, situado sobre una barra metálica, genera ondas mecánicas que se propagan a lo largo del tubo hasta alcanzar los receptores piezoeléctricos situados en los extremos del tubo; la posición del cursor se determina por los tiempos de propagación desde el cursor hasta los receptores piezoeléctricos. La excitación es un número pequeño de ciclos sinusoidales modulados por una ventana de Hanning. Para esa aplicación es necesario excitar solo uno de los modos de propagación existentes en el sólido; en caso contrario la señal recibida es demasiado compleja y difícil de interpretar. Si hay dos modos conviene elegir el más rápido para que no haya incertidumbre en el tiempo de llegada del pulso, y hay que tratar de que la dispersión sea mínima; ya que de otro modo se distorsiona la señal original al no propagarse todos los modos con la misma velocidad.

#### **1.2.5. Circuitos integrados**

Los ultrasonidos, aunque no como ondas guiadas, también se emplean para detectar defectos en los circuitos integrados [25], realizando varios tipos de exploraciones con un microscopio de escáner ultrasónico: A-scan, B-scan, C-scan y T-scan. Los cuatro tipos de exploración encuentran su base en el hecho de que cuando una onda de ultrasonidos llega a un interfaz entre dos medios con diferentes impedancias acústicas (producto de la densidad por la velocidad de propagación del sonido en el medio) parte de la onda es reflejada y parte es transmitida. En el caso de que el medio sobre el que incide sea el vacío (o también muy aproximadamente con el aire) toda la onda es reflejada y nada es transmitida. Los tres primeros tipos de exploraciones se basan en el modo pulso-eco, en el cual un mismo

piezoeléctrico actúa como emisor y receptor, recibiendo las señales reflejadas en cada interfase. Siendo  $z$  la dirección de propagación de la onda de ultrasonidos a través del circuito integrado, y estando la superficie del circuito integrado definida por las coordenadas  $x$ - $y$ , el A-scan, es la variación a lo largo del eje  $Z$ , para unas coordenadas  $x$ ,  $y$  fijas. El B-scan es un escáner en las direcciones  $x$ - $z$  o  $y$ - $z$ . El C-scan es un escáner a una profundidad  $z$  fija, en el plano  $x$ - $y$ . El T-scan no es en modo pulso-eco como los anteriores sino en modo de transmisión hasta el otro extremo del circuito integrado, por lo que no contiene información de profundidad.

### 1.2.6. Cables y alambres

El análisis no de ultrasonidos, sino de vibraciones de muy baja frecuencia de cables (no eléctricos) es común en estructuras como puentes, mediante modelos unidimensionales del cable. Yinghui y otros estudian la propagación de ondas a muy baja frecuencia (1 rad/s) de un cable (no eléctrico), compuesto por un único material y sometido a una tensión uniforme en toda su sección con un modelo unidimensional del cable [26]. Georgakis y Taylor [27] analizan las vibraciones de muy baja frecuencia en el cable sometido a una excitación en un extremo, aplicando el principio de Hamilton, según el cual la variación de la energía cinética más el trabajo realizado por la fuerza de la gravedad, es igual a la variación de energía debida a las deformaciones.

Algunos autores han examinado, no un cable eléctrico con núcleo metálico y recubrimiento de plástico, sino un alambre metálico inmerso en una resina epoxy [28-30]. El modo más indicado para dicha aplicación es el primer modo longitudinal porque es fácil de excitar con piezoeléctricos transductores y es no dispersivo a bajos valores del factor frecuencia-radio. El modo torsional tiene demasiada atenuación para esa aplicación. En el caso de un alambre en el vacío las tensiones son nulas en la superficie, de lo que se deduce que todas las ondas son reflejadas al interior de la guía de onda, formando una onda guiada que sólo se atenúa por pérdidas intrínsecas como la viscoelasticidad de los materiales, lo cual hace posible la transmisión a largas distancias en materiales con pocas pérdidas como los metales. Si la guía



de onda esta incrustada en otro material, las ondas se transmiten a lo largo del interfaz llevándose la energía del alambre y contribuyendo a la atenuación de onda. La cantidad de energía que se pierde depende de las impedancias acústicas del cable y del material libre en que está incrustado. Con ensayos del tipo pulso-eco, el tiempo entre ecos, conocida la longitud, proporciona una estimación de la velocidad; mientras que la relación entre la amplitud de los ecos proporciona la atenuación y el coeficiente de reflexión. También es posible realizar medidas en modo emisor-receptor, emitiendo continuamente la misma señal, y midiendo la variación de la salida debido al proceso de cura de la resina epoxy. Después del proceso de cura, la guía de ondas queda integrada, estando disponible para monitorizar el estado de la resina a lo largo de toda la vida del material.

Anastasi y Madaras [31-33] han utilizado ya la propagación de ondas elásticas en los cables eléctricos, no para comunicaciones, sino con el objetivo de evaluar el envejecimiento del aislamiento del cable, puesto que la evaluación del aislamiento es clave para detectar la aparición de grietas que con el tiempo pueden producir cortocircuitos y fuego. Dado que su aplicación es el diagnóstico, dichos autores realizan ensayos a frecuencias relativamente bajas (por debajo de los 300kHz) con distancias de 5cm y 25cm, sin considerar la viscoelasticidad y centrando su análisis en el primer modo longitudinal y de flexión. Trabajan con dos piezoeléctricos en configuración emisor-receptor, simulando el envejecimiento del aislamiento del cable mediante su calentamiento en un horno. Para aumentar la relación señal/ruido realizan ensayos promediados 1000 veces. La diferencia entre simulaciones y ensayos la asocian a la diferencia entre los valores reales de las propiedades de los materiales y los tabulados, así como a las condiciones de contorno reales frente al contorno perfecto que asume el modelo. Según sus observaciones el recubrimiento de plástico no sólo atenuaba la amplitud de la onda, sino que también disminuía su velocidad de fase.

En esta misma línea, Pai y otros [34] muestran el proceso de fabricación de un conjunto de pruebas con sensores piezoeléctricos unidos a cables eléctricos, para estudiar la propagación de ondas elásticas en los mismos; según ellos la atenuación del cable es mayor cuando el aislamiento está en buenas condiciones, y disminuye al deteriorarse este. Auckland y otros [35] también han usado los ultrasonidos para inspeccionar el aislamiento, en cables de media tensión (>10kV), pero no emitiendo ondas guiadas a lo largo del cable en configuración

emisor-receptor, sino en modo pulso-eco sobre una sección del cable. Lundgaard y Hansen [36] utilizan un método acústico para detectar las descargas parciales en las terminaciones de los cables, que suelen preceder a los fallos de dichas terminaciones. Una descarga parcial actúa como una pequeña explosión local que da lugar a una onda de presión propagándose en la superficie de la terminación. Proponen usar una guía de ondas de fibra de vidrio para poder medir a una cierta distancia, con un transductor receptor de 30kHz de frecuencia de resonancia; este método es aplicable tanto para asegurar la calidad de terminaciones nuevas, como para el mantenimiento y programa de renovación. Cornelissen y Schnettler [37] también emplean ultrasonidos en modo pulso-eco para inspeccionar las uniones y terminaciones de cables. Mehrez y otros estudian el estiramiento de nanocables metálicos [38]. Cuando el diámetro del cable es del orden del nanometro, su naturaleza discreta domina sobre la descripción continua y hay que tener en cuenta la configuración de los átomos. Resumiendo, de todos estos autores, los únicos que han analizado los modos de propagación de las ondas elásticas en los cables eléctricos son Anastasi y Madaras, pero enfocados a diagnóstico y por tanto en un rango de frecuencias más bajo que nosotros y sin considerar viscoelasticidad en el modelo teórico. Más recientemente Mateo, Talavera y Muñoz han estudiado los modos de propagación en los cables eléctricos orientando la aplicación hacia comunicaciones [39].

### 1.3. Introducción al marco teórico

A finales del siglo XIX Pochhammer [40] y Chree [41] formularon las ecuaciones que describen la propagación de ondas en un cilindro sólido elástico, isótropo, homogéneo e infinitamente largo; tal y como Benatar, Rittel y Yarin han destacado en su revisión del área [42]. Hay tres tipos de ondas en un cilindro: longitudinal, de torsión y de flexión; y para cada tipo de onda hay varios modos de propagación, cuya velocidad de fase depende del radio del cilindro y de la longitud de onda.

En 1941 Bancroft [43] estudió la forma de la rama inferior para variaciones en el coeficiente de Poisson y mostró como al reducir la longitud de onda, la velocidad de fase se aproxima a la velocidad de Rayleigh. Para todos los modos superiores las ramas, al incrementar la

frecuencia, se aproximan a la velocidad de ondas equivolúmetricas en un medio infinito. Hudson [44] en 1943 reafirmó los resultados de Bancroft y mostró que hay un punto en la rama inferior que es independiente del coeficiente de Poisson. Davis [45] en 1948 concluyó que los resultados de la ecuación de Pochhammer no son exactos para una barra de longitud finita, pero si suficientemente aproximados. Sternberg revisó la completitud de la solución a la ecuación de Lamé, esbozando la forma de la solución axisimétrica en coordenadas cilíndricas [46]. Gazis formuló las ecuaciones exactas que rigen la propagación de ondas en cilindros huecos homogéneos [47, 48]. Keck y Armenàkas extendieron el análisis a cilindros compuestos de dos y tres capas [49-51] e indicaron que en cilindros compuestos la velocidad de los dos primeros modos tiende bien a la velocidad de Rayleigh, bien a la velocidad de las ondas Stoneley en el interfaz; mientras que las velocidades de los modos superiores tienden a una de las velocidades transversales de los materiales. Onoe y otros [52] estudiaron en profundidad la ecuación de Pochhammer, obteniendo gráficamente los dieciocho primeros modos, como resultado de la intersección de unas familias de curvas, analizando las pendientes y las curvaturas de los modos de propagación en algunos puntos, para números de onda reales e imaginarios puros. Meeker y Meitzler analizaron los tres tipos de ondas en cilindros sólidos homogéneos de longitud infinita sin viscoelasticidad [53]. McNiven, Sackman y Shah estudiaron la propagación de ondas axisimétricas longitudinales en barras sólidas de dos capas [54]. Históricamente también se han empleado métodos aproximados para describir la propagación en estructuras con varias capas [55-57] Muchos de estos modelos aproximados se basan en el principio de Hamilton. Según Moore la teoría aproximada de capas finas proporciona resultados bastante buenos para longitudes de onda grandes y espesores de capas pequeños [58]. Sin embargo hoy en día tienden a usarse modelos exactos, dada la enorme capacidad de cálculo de los ordenadores actuales.

La estructura de dos capas es suficiente para modelar cables eléctricos con núcleo de cobre y recubrimiento de plástico. Sin embargo si queremos estudiar su comportamiento como guías de onda para comunicaciones hay dos aspectos adicionales que hay que tener en cuenta: la viscoelasticidad y el rango de frecuencia. Con relación al primero de ellos, a bajas frecuencias puede suponerse que la viscoelasticidad del cobre es despreciable, y modelar este como de tipo elástico. Sin embargo, al aumentar la frecuencia la viscoelasticidad tiende a ser más significativa y hay que tenerla en cuenta. La viscoelasticidad en estructuras multicapa ha sido

ya estudiada. Coquin analizó una barra viscoelástica homogénea [59] con el modelo de Voigt, mientras que Zhao y Gary hicieron la generalización a cualquier material viscoelástico lineal [60]. Barshinger y Rose obtuvieron los modos de propagación en tuberías con una capa externa viscoelástica [13]. El conjunto más completo de algoritmos para resolver problemas multicapa con viscoelasticidad empleando métodos matriciales ha sido propuesto por Lowe [61].

El otro factor a tener en cuenta es el rango de frecuencia. Cuando las ondas elásticas se utilizan para diagnóstico, la frecuencia se ajusta para mejorar las capacidades de detección de defectos de la onda. Sin embargo, cuando se trata de comunicaciones, la necesidad de un gran ancho de banda, lleva a intentar maximizar la frecuencia. Los modos de interés son aquellos de más alta frecuencia.

Dos alternativas matriciales se usan fundamentalmente para resolver problemas multicapa, el método de la matriz de transferencia [62, 63] y el método de la matriz global [64]. El primer método se basa en la idea de relacionar las condiciones de contorno en la primera capa con las de la última capa, lo cual se consigue expresando sucesivamente el vector de desplazamientos y las tensiones de un interfaz, en términos de los del siguiente. Esta alternativa, sin embargo, plantea un problema de inestabilidad para valores altos de frecuencia y espesor, ya que en este caso las ondas en un interfaz tienen poca influencia sobre el siguiente [65]. Por el contrario, el método de la matriz global integra todas las condiciones de contorno en una única matriz. Con este último método la matriz es mayor por lo que requiere de más tiempo de procesamiento, no obstante este método presenta la ventaja de ser más robusto.

Las estructuras multicapa también han sido analizadas por Ricks y Schmidt [66], Huang, Wang y Rokhlin [67-69], estos últimos empleando la matriz de rigidez y la función de Green. Otra variante es el método de las matrices de impedancia de superficie que describen Hosten y Castaings [70], con el que consiguen reducir en un factor cuatro el tamaño de la matriz respecto de los métodos de la matriz de transferencia, al tiempo que eliminan sus inestabilidades numéricas. Krutin [71], por su parte, propone un nuevo método híbrido entre el método de impedancia directa de Krasnushkin [72] y los métodos de la matriz de

transferecia. Tan describe un método de la matriz de reflexión para dispositivos de ondas acústicas superficiales (SAW), que es estable incluso a frecuencias de 2GHz y 10GHz [73].

Tanto si se usa el método de la matriz de transferencia (en cualquiera de sus variantes) como con el de la matriz global, la solución finalmente se obtiene encontrando los ceros de una función característica que se formula fijando a cero el determinante de una matriz. Las matrices originales se utilizaron sólo para resolver problemas elásticos puros, sin atenuación. Sin embargo al considerar las pérdidas térmicas, típicamente se aplica el modelo de Kelvin-Voigt, y los resultados son números de onda complejos, cuya parte imaginaria describe la atenuación; lo que complica el problema al tener que operar con números complejos. Además en vez de dos variables (frecuencia y velocidad de fase) ahora nos encontramos con tres (frecuencia, velocidad de fase y atenuación o alternativamente frecuencia, número de onda real y número de onda complejo)

El método más conocido para encontrar las raíces en problemas multidimensionales es el método de Newton-Raphson. Sin embargo es extremadamente arriesgado usar métodos de convergencia rápida basados en pendientes o extrapolaciones [74], por esta razón el problema se reformula como un problema de minimización. Los algoritmos fijan el valor de una variable (la frecuencia) y obtienen el mínimo para las otras dos variables. Los métodos generales de optimización a menudo aproximan la función objetivo usando la expansión de Taylor, lo que permite clasificar estos métodos de acuerdo con el número de términos empleados. Así, el método de Newton en minimización [75] requiere existencia de la primera y segunda derivada y es por tanto un método de segundo orden. Un ejemplo de método de primer orden es el de minimización de línea por gradiente [76]. Hay otros métodos que ni construyen aproximaciones de la función objetivo ni usan información sobre las derivadas; son métodos de búsqueda directa, también conocidos como métodos de orden cero.

Los métodos directos involucran el examen de soluciones de prueba, identificando la mejor encontrada hasta el momento, junto con una estrategia para determinar la mejor solución de prueba siguiente. Artículos recientes indican un renovado interés en la optimización de orden cero sin restricciones, en parte debido a los nuevos resultados sobre convergencia [77, 78] Son algoritmos típicamente menos eficientes que los basados en las derivadas, y estas

diferencias aumentan conforme se incrementa el número de dimensiones. Sin embargo, la mejora en capacidad de procesamiento de los ordenadores modernos esta haciendo más atractivo este enfoque, en especial para la aplicación bidimensional explicada. Los métodos de búsqueda directa han demostrado funcionar correctamente obteniendo la solución a problemas en los que alternativas más elaboradas fallaban [77]. Son sencillos de implementar y bien apropiados para los ordenadores digitales, y además, como en general estos algoritmos muestrean un punto, incluso cuando no es una dirección de decrecimiento de la función objetivo, pueden ser más robustos a mínimos locales que otros algoritmos de mayor orden,

En lo que concierne a algoritmos para propagación de ondas elásticas, Zhao y Gary [60] afirman haber tenido éxito con una formula iterativa del tipo de Newton generalizada a variables complejas. Dayal y Kinra [79] obtienen una estimación inicial de la parte real del número de onda usando la técnica de la bisección y a continuación usan el Método de Newton (secante) modificado para obtener los números de onda complejos. Clayton y Derrick [80] emplean una generalización de Regula Falsi para números complejos junto con el método de Monte Carlo. Wang [81] utiliza un programa Maple obteniendo una solución inicial de los modos de propagación y luego realiza el seguimiento de la curva. Lowe [61, 74] propuso un algoritmo orientado a la aplicación que es el método más completo que hemos encontrado para ondas elásticas; utiliza una búsqueda gruesa para obtener puntos iniciales de los modos de propagación, junto con una técnica de seguimiento de curvas y búsquedas finas que consisten básicamente en sucesivas minimizaciones en una única variable, mientras las demás se mantienen fijas.

## 1.4. Métodos de resolución de las ecuaciones

Existen varias técnicas para la obtención de los modos de propagación en estructuras con múltiples capas. Hay, como ya hemos señalado, métodos matriciales basados fundamentalmente en el método de la matriz de transferencia o en el método de la matriz global para geometrías sencillas en los que existe un sistema de coordenadas que representa de modo sencillo la geometría del sólido bajo estudio. DISPERSE [82, 83] es un ejemplo de

herramienta de resolución basado en este tipo de métodos, que permite trabajar con geometrías basadas en coordenadas cartesianas o cilíndricas, de una o varias capas, con o sin viscoelasticidad. Esta herramienta ha sido utilizada, entre otros, por Anastasi y Madaras [31], Siqueira y otros [84], Yang y otros [18]. Otro ejemplo de este tipo de herramientas es PCDISP [24], basado en la ecuación de Pochhammer-Chree, para cilindros y tubos de una capa, sin viscoelasticidad con materiales isotrópicos, basado en el método robusto de la bisección.

Para geometrías más complejas se usan técnicas como el método de elementos finitos (F.E.M.) [15, 18, 29, 85-87] y el modelado de los elementos del contorno (B.E.M.) [88]. Demma y otros utilizan técnicas de elementos finitos para modelar los tramos curvos en tuberías [15]. En F.E.M. los elementos se sitúan en la región o volumen bajo análisis. Trabajar en el dominio de la frecuencia permite reducir el número de puntos necesarios para definir la excitación, así como reducir el número de iteraciones [86]. Herramientas comerciales de elementos finitos como el FEMLAB requieren adaptar el problema a una formulación genérica dada por el programa. Para modelar elementos amortiguadores es necesario introducir la viscoelasticidad de forma gradual en cada material para evitar así cambios bruscos de las impedancias acústicas, a menos que se ajusten éstas mediante la selección de la densidad idónea de los amortiguadores. En el B.E.M. los elementos se sitúan en el contorno, por lo que la pre-etapa de mallado es más sencilla que en elementos finitos, especialmente para análisis tridimensional. Hayashi, Tmayama y Murase [89] y Lee [90] utilizan un método semi-analítico de elementos finitos para barras con secciones arbitrarias, discretizando por un lado en elementos la sección transversal, y por otro lado resolviendo analíticamente la propagación en la dirección axial. Bartoli y otros extienden el método semi-analítico de elementos finitos para incluir también la atenuación debida a la viscoelasticidad de los materiales [91]; sus ecuaciones se basan en el principio de Hamilton. Tadi utiliza métodos de diferencias finitas para resolver transitorios con condiciones de contorno algo más complejas en estructuras multicapa [92]. Tolstykh y Shirobokov proponen (para problemas en derivadas parciales) un método que construye aproximaciones de las derivadas en nubes de puntos, con una implementación similar al método de diferencias finitas y que aplican a problemas de elasticidad [93].

Para el procesado de los datos procedentes de los ensayos es muy común el uso de la transformada rápida de Fourier (FFT), que permite presentar la información en función de la frecuencia, formato que es más independiente del alineamiento de la señal. Alleyne y Cawley [94] proponen aplicar la transformada bidimensional de Fourier (2-D FFT) sobre ensayos realizados a distancias constantes a lo largo de la dirección de propagación. Esta técnica permite pasar de un formato de entrada en el dominio tiempo-espacio a una representación del número de onda frente a la frecuencia. Vollmann y Dual [95] aplican la FFT para el dominio temporal y un algoritmo de mínimos cuadrados total para el dominio espacial, extrayendo de los datos tanto la parte real como la imaginaria del número de onda. Kwun y Bartels [96] emplean una “short-time Fourier Transform” (STFT), con la que obtienen una representación de la frecuencia a lo largo del tiempo.

Auckland y otros [35], utilizan la FFT como entrada a redes neuronales para la detección de defectos. Cau y otros [97] también emplean simultáneamente la FFT, el análisis de las componentes principales y las redes neuronales como sistema de diagnóstico, basado en un proceso de reconocimiento de patrones, el cual consta de tres módulos: a) Transductor que adquiere datos, b) Extractor de características, para reducir las dimensiones del problema y filtrar ruido (en este caso FFT y componentes principales) y c) Clasificador (en este caso un perceptrón multicapa).

Las ondículas, pese a estar todavía en una etapa inicial, son una herramienta con un gran potencial que pueden aplicarse en este campo, por ejemplo para mejorar la relación señal ruido, en la señal de eco de las tuberías, así como para detectar directamente defectos en el caso de los raíles de tren [98]. Las ondículas permiten eliminar el ruido sin suavizar los picos y discontinuidades a diferencia de lo que sucede con los filtros pasa-banda basados en la transformada de Fourier; esto se debe a que en vez de senos y cosenos, se pueden utilizar señales más abruptas con picos que representan mejor estas discontinuidades. Según Siqueira y otros se consiguen mejoras en la relación señal-ruido de 12dB [84]. Las ondículas se basan en el uso de ventanas, con intervalos largos para representar la baja frecuencia y con intervalos más cortos para la alta frecuencia. Nishino y otros [99] utilizan ondículas para obtener una representación de frecuencia frente a tiempo de las señales elásticas medidas.



Finalmente, para procesar los datos y clasificarlos en estructuras no dañadas y estructuras dañadas se puede recurrir a procedimientos estadísticos de aprendizaje no supervisado, como la detección de datos atípicos o el análisis de las componentes principales [20].

## 1.5. Resumen del trabajo desarrollado

En esta tesis se realiza un análisis teórico y experimental de los modos de propagación en un cable eléctrico. Se propone un modelo teórico para analizar la propagación de ondas elásticas en los cables eléctricos, el cual está basado en la ecuación de Lamé y en el método de la matriz global para expresar las condiciones de contorno, al igual que otros ya extendidos como el de Lowe [61]. Se realiza una extensión del modelo de Barshinger y Rose [13] a cilindros macizos. Tanto el modelo teórico como los algoritmos numéricos se validan en la tesis, en dos grandes bloques: validación de las herramientas de simulación y validación experimental. En la primera de ellas se analizan problemas ya resueltos en la literatura y se obtienen los modos de propagación que son solución del problema. Se verifica que dichos modos coinciden con los presentados por otros autores, analizándose las discrepancias. Este tipo de análisis permite comprobar la validez del modelo teórico desde un punto de vista matemático. Esta validación no asegura que el modelo sirva para representar adecuadamente a los cables eléctricos, pero permite afirmar que el modelo obtiene correctamente las mismas soluciones teóricas que otros autores han encontrado en problemas que presentan ciertas similitudes con el nuestro. Así mismo comprueba también la eficacia de los algoritmos numéricos para resolver problemas de esta índole. Se llevan a cabo simulaciones con el modelo y los algoritmos numéricos, resolviendo el problema particular de un cable eléctrico. El resultado de estas simulaciones se valida también experimentalmente. Se realizan ensayos de laboratorio en los que se miden experimentalmente las señales elásticas propagadas a través del cable, y las medidas experimentales se contrastan con los resultados obtenidos con el modelo teórico y sus simulaciones, tanto para cables desnudos como para cables con su recubrimiento de plástico. Esta es la validación experimental. Además dentro de la validación experimental, se emplean también dos técnicas complementarias, medidas de ondas

electromagnéticas procedentes de piezoeléctricos situados en los extremos del cable y medidas por interferometría.

## 2 FORMULACIÓN TEÓRICA

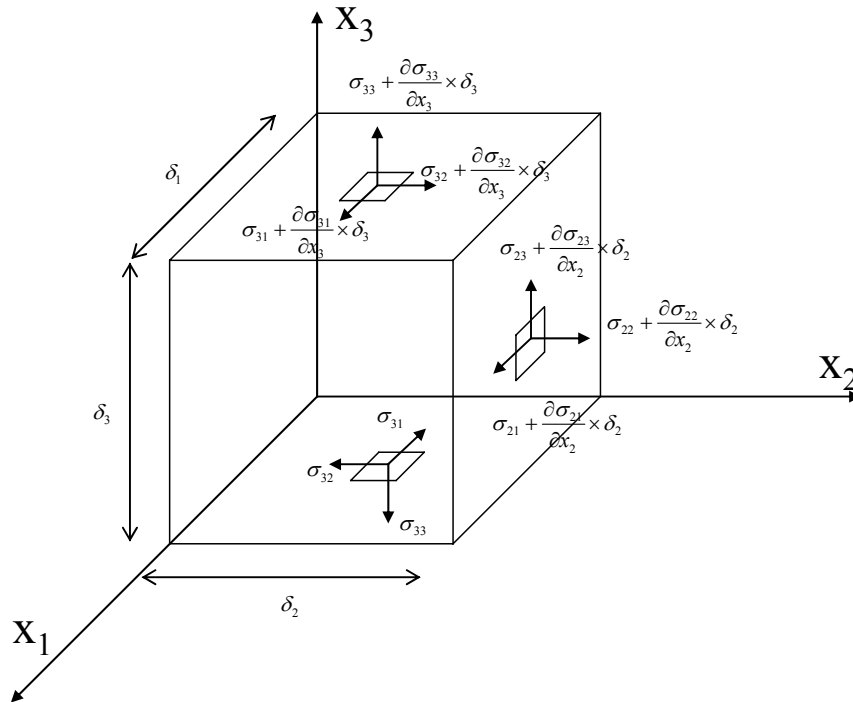
En este capítulo se analiza teóricamente la propagación de ondas elásticas en estructuras cilíndricas de longitud infinita, con una o múltiples capas y de núcleo sólido, considerando materiales homogéneos e isotropos con o sin viscoelasticidad. El análisis se centra en el estudio de los modos longitudinales axisimétricos, esto es, modos en los que sólo hay desplazamientos en las direcciones axial y radial, independientes del ángulo. Consideramos propagación en la dirección axial, y para el interfaz imponemos como condición de contorno la continuidad de desplazamientos y tensiones en las direcciones tangencial y normal. Para el análisis de la propagación en la dirección del ángulo y para una condición de contorno de deslizamiento libre consultar el trabajo de Valle, Qu y Jacobs [100].

En lo que concierne a otros modos de propagación, Haines y Lee [101] han analizado los modos torsionales axisimétricos en cilindros sólidos compuestos. En el caso de los modos torsionales, los desplazamientos en las direcciones axial y radial son nulos y sólo hay desplazamiento en la dirección angular, dependiente del radio según la ecuación de Bessel. Sin embargo, en una aplicación con alambres inmersos en una resina epoxy, Vogt, Lowe y Cawley desechan el modo torsional, por tener demasiada atenuación. Gazis [47, 48] realizó el análisis completo de todos los modos de propagación (longitudinal, flexión y de torsión) en cilindros huecos de una sola capa, sin viscoelasticidad.

En lo que concierne a la longitud del cilindro, Chernyshev y Shegai [102] realizaron un análisis teórico para cilindros de longitud finita de las vibraciones axisimétricas sin considerar torsión. Plantean la solución como una combinación lineal de las soluciones de Pochhammer-Chree, y buscan minimizar una función que se anula cuando se satisfacen las condiciones de contorno. La solución para cilindros infinitos no es exacta para un cilindro finito, pero si suficientemente aproximada.

## 2.1. Leyes fundamentales

Para deducir las ecuaciones de movimiento de un sólido elástico isótropo de densidad de volumen  $\rho$  se comienza aplicando la segunda ley de Newton en un elemento cúbico infinitesimal [103] en coordenadas cartesianas  $x_1, x_2, x_3$ .



Las tensiones normales las representamos por

$$\sigma_{ii} \quad (i=1,2,3) \quad (2.1)$$

Donde el índice  $i$  indica el eje al que son paralelas y les asignaremos signo positivo si se trata de tracción y negativo si son de compresión. Las tensiones tangenciales las denotamos por

$$\sigma_{ij} \quad (i,j=1,2,3) \quad (2.2)$$

Donde el primer índice  $i$  indica la dirección normal al plano en el que actúa y el segundo índice  $j$  la dirección del eje al que es paralelo. Los lados del cubo tienen longitud  $\delta_i$ , donde el subíndice  $i$  indica el eje al que el lado es paralelo. Despreciando fuerzas de volumen, como la

de la gravedad que actúan sobre todo el cuerpo, la fuerza resultante que se ejerce en la dirección del eje  $x_1$  es:

$$\begin{aligned} & \left( \left( \sigma_{11} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} \times \delta_1 \right) - \sigma_{11} \right) \times S_1 + \left( \left( \sigma_{21} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} \times \delta_2 \right) - \sigma_{21} \right) \times S_2 \\ & + \left( \left( \sigma_{31} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} \times \delta_3 \right) - \sigma_{31} \right) \times S_3 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Donde las superficies  $S_i$  tienen el área,

$$\begin{aligned} S_1 &= \delta_2 \times \delta_3 \\ S_2 &= \delta_1 \times \delta_3 \\ S_3 &= \delta_1 \times \delta_2 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Esta fuerza, por la segunda ley de Newton, tiene que ser igual a

$$\rho \times \delta_1 \times \delta_2 \times \delta_3 \times \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \quad (2.5)$$

Donde  $u_i$  son las componentes cartesianas del vector de desplazamientos,  $\rho$  es la densidad de volumen y  $t$  es el tiempo. Realizando la misma operación para las otras dos componentes, se obtienen las ecuaciones de equilibrio en coordenadas cartesianas

$$\begin{aligned} \rho \times \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} \\ \rho \times \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} \\ \rho \times \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Las ecuaciones que relacionan desplazamientos y deformaciones son:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ii} &= \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} \times \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (i \neq j) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Donde los términos  $\varepsilon_{ii}$  representan alargamientos unitarios en las direcciones de los correspondientes ejes y los términos  $\varepsilon_{ij}$  indican variaciones angulares de lados inicialmente perpendiculares, paralelos a los respectivos ejes coordenados. Pollard [104] define así la deformación  $\varepsilon_{ij}$  (con el factor  $1/2$ ), mientras que otros autores [74, 103] la definen sin el factor  $1/2$ , variando en un caso u otro la expresión de la ley de Hooke, de tal modo que al final se obtienen los mismos resultados. La ley de Hooke, generalizada para un cuerpo perfecto elástico, establece que las tensiones están relacionadas linealmente con las deformaciones. En general, para un cuerpo anisótropo sin ningún tipo de simetría, habrá seis ecuaciones y 36 coeficientes  $c_{iklm}$ :

$$\sigma_{ik} = \sum_{l,m} c_{iklm} \varepsilon_{lm} \quad (2.8)$$

Un sólido isótropo es aquel en el que sus propiedades físicas no dependen de su orientación. Para estos cuerpos la ley de Hooke se reduce a solo dos constantes. Su expresión es:

$$\begin{aligned} \sigma_{ii} &= 2G\varepsilon_{ii} + \lambda\Delta \\ \sigma_{ij} &= 2G\varepsilon_{ij} \quad (i \neq j) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Donde  $\lambda$  y  $G$  son las constantes de Lamé,  $\Delta$  es la dilatación o variación de volumen relativo:

$$\Delta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} \quad (2.10)$$

Combinando la segunda ley de Newton (2.6), con la ley de Hooke(2.9) para un cuerpo isótropo y teniendo en cuenta las relaciones entre desplazamientos y deformaciones (2.7) se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \rho \times \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} &= (\lambda + G) \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) + G \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} \right) \\ \rho \times \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} &= (\lambda + G) \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) + G \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} \right) \\ \rho \times \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} &= (\lambda + G) \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) + G \left( \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} \right) \end{aligned} \quad (2.11)$$

O en forma vectorial, la siguiente ecuación, conocida como ecuación de Lamé, que describe las ecuaciones del movimiento en un sólido elástico e isótropo.

$$\rho \times \frac{\partial^2 \mathbf{u}_i}{\partial t^2} = (\lambda + G) \text{grad div } \mathbf{u}_i + G \nabla^2 \mathbf{u}_i \quad (2.12)$$

Donde el operador  $\nabla^2$  es el Laplaciano escalar definido para una función escalar F cualquiera como:

$$\nabla^2 F = \text{div grad } F \quad (2.13)$$

Y que en coordenadas cartesianas es:

$$\nabla^2 = \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \quad (2.14)$$

La ecuación (2.12), conocida como ecuación de Lamé o ecuación de Navier, define el movimiento en un sólido elástico e isótropo. Para obtener su solución se utiliza la descomposición de Helmholtz. El vector de desplazamientos se expresa como combinación del gradiente de un potencial escalar,  $\Phi$ , y el rotacional de un potencial vectorial,  $\mathbf{H}$ , de divergencia nula.

$$\mathbf{u} = \text{grad } \Phi + \text{rot } \mathbf{H} \quad (2.15)$$

Sustituyendo la ecuación de Helmholtz (2.15) en la de Lamé (2.12), se obtiene que la ecuación de Lamé se satisface si los potenciales escalar y vectorial verifican las siguientes ecuaciones de onda:

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}, \quad c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2G}{\rho}} \quad (2.16)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (2.17)$$

Donde  $c_1$  y  $c_2$  son las velocidades en medio libre de ondas longitudinales y transversales respectivamente, y  $\nabla^2 \mathbf{H}$  representa el laplaciano vectorial de  $\mathbf{H}$ .

## 2.2. Ecuaciones en estructuras cilíndricas de múltiples capas

En vez de obtener el conjunto completo de soluciones, nos centraremos solo en obtener la solución axisimétrica que es la que tiene interés para propagaciones en estructuras cilíndricas de gran longitud comparadas con sus diámetros. Para resolver el modelo se emplearán consecuentemente coordenadas cilíndricas  $(r, \theta, z)$ . Por tanto  $\mathbf{H}$  se descompone en tres componentes escalares  $H_r, H_\theta$  y  $H_z$ . La solución axisimétrica se obtendrá poniendo a cero  $H_r$  y  $H_z$  [46]. Además  $H_\theta$  y  $\Phi$  serán solo función de las coordenadas  $r$  y  $z$  y del tiempo. La ecuación (2.17) está escrita usando el laplaciano vectorial. Usando su expresión en coordenadas cilíndricas y teniendo en cuenta que  $H_r$  y  $H_z$  son nulas, es posible describir esta ecuación como función de la componente  $H_\theta$  del potencial vectorial, usando el laplaciano escalar:

$$\nabla^2 H_\theta - \frac{H_\theta}{r} = \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 H_\theta}{\partial t^2} \quad (2.18)$$

Las ecuaciones (2.16) y (2.18) se resuelven empleando el método de separación de variables [105]. Se asume una solución de la siguiente forma para el potencial escalar y vectorial:

$$\Phi = R_\Phi(r) Z_\Phi(z) T_\Phi(t) \quad (2.19)$$

$$H_\theta = R_{H_\theta}(r) Z_{H_\theta}(z) T_{H_\theta}(t) \quad (2.20)$$

Donde  $R_\Phi(r)$ ,  $Z_\Phi(z)$ ,  $T_\Phi(t)$ ,  $R_{H_\theta}(r)$ ,  $Z_{H_\theta}(z)$ ,  $T_{H_\theta}(t)$  son funciones cada una de las cuales depende sólo de una variable. La expresión del laplaciano de  $\Phi$  en coordenadas cilíndricas es:

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \quad (2.21)$$

Sustituimos la ecuación (2.19) en la (2.16) y derivamos de acuerdo con la expresión (2.21). Al dividir finalmente todo por  $\Phi$  se obtiene:

$$\left( \frac{1}{r} \frac{dR_\Phi(r)}{dr} + \frac{d^2 R_\Phi(r)}{dr^2} \right) + \frac{d^2 Z_\Phi(z)}{dz^2} = \frac{1}{c_1^2} \frac{dT_\Phi(t)}{dt^2} \quad (2.22)$$



Ecuación con tres términos en forma sumatoria, cada uno de los cuales depende de una variable diferente. Por tanto, para que la ecuación pueda verificarse para cualquier valor de las variables, es necesario que cada término sea igual a una constante, esto es:

$$\frac{1}{r} \frac{dR_{\Phi}(r)}{dr} + \frac{d^2 R_{\Phi}(r)}{R_{\Phi}(r) dr^2} = -\alpha^2 \quad (2.23)$$

$$\frac{d^2 Z_{\Phi}(z)}{Z_{\Phi}(z) dz^2} = -k^2 \quad (2.24)$$

$$\frac{1}{c_1^2} \frac{dT_{\Phi}(t)}{T_{\Phi}(t) dt^2} = -\gamma_1^2 \quad (2.25)$$

Donde de acuerdo con la ecuación (2.22), las constantes  $\alpha$ ,  $k$ ,  $\gamma_1$  deben verificar que:

$$\alpha^2 + k^2 = \gamma_1^2 \quad (2.26)$$

La ecuación (2.23) puede reescribirse como:

$$r^2 \frac{d^2 R_{\Phi}(r)}{dr^2} + r \frac{dR_{\Phi}(r)}{dr} + r^2 \alpha^2 R_{\Phi}(r) = 0 \quad (2.27)$$

Esta es la ecuación de Bessel de orden cero. Su solución tiene la forma  $B_n(\alpha r)$ , donde  $n$  denota el orden (en este caso  $n=0$ ). Dicha solución podría expresarse mediante las funciones de Bessel de primer y segunda clase ( $J_n$ ,  $Y_n$ ). Debido a que proporcionan mayor estabilidad numérica [21, 106] utilizaremos aquí en su lugar las funciones de Bessel de tercera clase, también conocidas como funciones de Hankel ( $H_n^{(1),(2)}$ ), y que en realidad son una combinación lineal de las otras dos.

$$B_n(x) \sim J_n(x), Y_n(x), H_n^{(1)}(x), H_n^{(2)}(x) \quad (2.28)$$

Según Ricks y Schmidt [66] la estabilidad se puede incrementar combinando versiones normalizadas de la función de Hankel de primera clase ( $H_n^{(1)}$ ) y de la función de Bessel ( $J_n$ ). La solución a las ecuaciones (2.24) y (2.25) son funciones armónicas de la forma  $h(kz)$  y  $h(\omega t)$ :

$$h(x) \sim \sin x, \cos x, e^{\pm ix} \quad (2.29)$$

Donde  $\omega$  es la frecuencia angular la cual está relacionada con  $\gamma_1$  y  $c_1$  mediante la siguiente ecuación:

$$\gamma_1^2 = \frac{\omega^2}{c_1^2} \quad (2.30)$$

Esta relación permite describir la ecuación (2.26) como:

$$\alpha^2 = \frac{\omega^2}{c_1^2} - k^2 \quad (2.31)$$

Consideremos solo ondas propagándose en la dirección positiva del eje Z, y para la dependencia temporal, elegimos la representación  $e^{-i\omega t}$ . La solución a la ecuación diferencial (2.16) del potencial escalar resulta entonces:

$$\Phi = \left\{ A_{(L+)} H_0^{(1)}(\alpha r) + A_{(L-)} H_0^{(2)}(\alpha r) \right\} e^{i(kz - \omega t)} \quad (2.32)$$

Donde  $\omega$  es la frecuencia angular y  $k$  es el número de onda. La ley de Snell requiere que todas las ondas deben compartir la misma frecuencia y propiedades espaciales en la dirección axial, de donde se deduce que todas las ecuaciones de tensiones y desplazamientos deben tener la misma frecuencia angular  $\omega$  y el mismo número de onda  $k$  [61]. Los límites de las funciones de Hankel cuando el radio tiende a infinito son [103]:

$$H_0^{(1)}(kr) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \exp(ikr) \times \sqrt{\left(\frac{2}{\pi kr}\right)} \times i^{-1/2} \quad (2.33)$$

$$H_0^{(2)}(kr) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \exp(-ikr) \times \sqrt{\left(\frac{2}{\pi kr}\right)} \times i^{1/2} \quad (2.34)$$

Donde  $i$  es el número imaginario. Por tanto y teniendo en cuenta que hemos elegido el término  $e^{-i\omega t}$  para la dependencia temporal, la función de Hankel de primera clase es adecuada para representar ondas salientes, mientras que la de segunda clase es apropiada para ondas entrantes.

De modo análogo partiendo de (2.18) y (2.20) para el potencial vectorial, se obtiene:

$$\left( \frac{1}{r} \frac{dR_{H_0}(r)}{dr} + \frac{d^2 R_{H_0}(r)}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{d^2 Z_{H_0}(z)}{dz^2} = \frac{1}{c_2^2} \frac{d^2 T_{H_0}(t)}{dt^2} \quad (2.35)$$

Con el método de separación de variables obtenemos:

$$\frac{1}{r} \frac{dR_{H_0}(r)}{dr} + \frac{d^2 R_{H_0}(r)}{dr^2} - \frac{1}{r^2} = -\beta^2 \quad (2.36)$$

$$\frac{d^2 Z_{H_0}(z)}{dz^2} = -k^2 \quad (2.37)$$

$$\frac{1}{c_2^2} \frac{d^2 T_{H_0}(t)}{dt^2} = -\gamma^2 \quad (2.38)$$

La ecuación (2.36) puede reescribirse como:

$$r^2 \frac{d^2 R_{H_0}(r)}{dr^2} + r \frac{dR_{H_0}(r)}{dr} + (r^2 \beta^2 - 1) R_{H_0}(r) = 0 \quad (2.39)$$

Esta ecuación es la ecuación de Bessel de orden uno, cuya solución puede expresarse mediante las funciones de Hankel de orden uno. La solución, por tanto, para la componente  $H_0$  del potencial vectorial resulta:

$$H_{\theta} = \left\{ A_{(S+)} H_1^{(1)}(\beta r) + A_{(S-)} H_1^{(2)}(\beta r) \right\} e^{i(kz - \omega t)} \quad (2.40)$$

Donde debe verificarse:

$$\beta^2 = \frac{\omega^2}{c_2^2} - k^2 \quad (2.41)$$

Resumiendo la solución para los potenciales es:

$$\Phi = \left\{ A_{(L+)} H_0^{(1)}(\alpha r) + A_{(L-)} H_0^{(2)}(\alpha r) \right\} e^{i(kz - \omega t)} \quad (2.42)$$

$$\mathbf{H} = \left\{ A_{(S+)} H_1^{(1)}(\beta r) + A_{(S-)} H_1^{(2)}(\beta r) \right\} e^{i(kz - \omega t)} \mathbf{e}_{\theta} \quad (2.43)$$

Donde  $A_{(L+)}$ ,  $A_{(L-)}$ ,  $A_{(S+)}$  y  $A_{(S-)}$  son las amplitudes de ondas longitudinales y transversales,  $k$  es el número de onda,  $\omega$  es la frecuencia angular,  $\mathbf{e}_{\theta}$  es el vector unitario en la dirección del eje  $\theta$ ,  $H_n^{1,2}$  son las funciones de Hankel de orden  $n$  de primer y segunda clase, y  $\alpha$  y  $\beta$  vienen dados por las ecuaciones:

$$\alpha^2 = \frac{\omega^2}{c_1^2} - k^2 \quad (2.44)$$

$$\beta^2 = \frac{\omega^2}{c_2^2} - k^2 \quad (2.45)$$

Como ya se ha comentado, la elección de las funciones de Hankel, en vez de las de Bessel, incrementa la estabilidad numérica de la solución, pero en el caso de un cilindro sólido tiene el inconveniente de aumentar el tamaño de la matriz que define el problema. Las ecuaciones constitutivas deformación-desplazamiento (2.7) en coordenadas cilíndricas son:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r} \\
 \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \\
 \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} \\
 \varepsilon_{r\theta} &= \frac{1}{2} \times \left( -\frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) \\
 \varepsilon_{\theta z} &= \frac{1}{2} \times \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) \\
 \varepsilon_{rz} &= \frac{1}{2} \times \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right)
 \end{aligned} \tag{2.46}$$

Donde  $\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{\theta\theta}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{r\theta}, \varepsilon_{\theta z}, \varepsilon_{rz}$  son las deformaciones en cilíndricas,  $u_r, u_\theta, u_z$  es el vector de desplazamientos en coordenadas cilíndricas. Las ecuaciones constitutivas tensión-deformación (ley de Hooke (2.9)) en coordenadas cilíndricas son:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr} &= 2G\varepsilon_{rr} + \lambda(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz}) \\
 \sigma_{\theta\theta} &= 2G\varepsilon_{\theta\theta} + \lambda(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz}) \\
 \sigma_{zz} &= 2G\varepsilon_{zz} + \lambda(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz}) \\
 \sigma_{r\theta} &= 2G\varepsilon_{r\theta} \\
 \sigma_{rz} &= 2G\varepsilon_{rz} \\
 \sigma_{\theta z} &= 2G\varepsilon_{\theta z}
 \end{aligned} \tag{2.47}$$

Donde  $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{zz}, \sigma_{r\theta}, \sigma_{rz}, \sigma_{\theta z}$  son las tensiones en cilíndricas. Las tensiones normales y tangenciales al cilindro en su cara exterior ( $\sigma_{rr}$  y  $\sigma_{rz}$ ) pueden escribirse por tanto en función de las componentes del vector de desplazamientos como:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr} &= 2G \frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \\
 \sigma_{rz} &= G \times \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right)
 \end{aligned} \tag{2.48}$$

Las componentes del vector de desplazamiento se obtienen con la ecuación de Helmholtz (2.15) en coordenadas cilíndricas, junto con las ecuaciones (2.42) y (2.43). Las tensiones se

obtienen a partir del vector de desplazamientos mediante la ecuación (2.48). Operando se obtienen las siguientes ecuaciones en formato matricial:

$$\begin{Bmatrix} u_z \\ u_r \\ \sigma_{rr} \\ \sigma_{rz} \end{Bmatrix} = [\Lambda] \begin{Bmatrix} A_{(L+)} \\ A_{(L-)} \\ A_{(S+)} \\ A_{(S-)} \end{Bmatrix} e^{i(kz - \omega t)} \quad (2.49)$$

Donde los términos de la matriz de capa  $[\Lambda]$  según Barshinger y Rose [13] son:

$$\begin{aligned} \Lambda_{11} &= -kH_0^{(1)}(\alpha r) \\ \Lambda_{12} &= -kH_0^{(2)}(\alpha r) \\ \Lambda_{13} &= -\beta H_0^{(1)}(\beta r) \\ \Lambda_{14} &= -\beta H_0^{(2)}(\beta r) \\ \Lambda_{21} &= -\alpha H_1^{(1)}(\alpha r) \\ \Lambda_{22} &= -\alpha H_1^{(2)}(\alpha r) \\ \Lambda_{23} &= kH_1^{(1)}(\beta r) \\ \Lambda_{24} &= kH_1^{(2)}(\beta r) \\ \Lambda_{31} &= G \left( (k^2 - \beta^2) H_0^{(1)}(\alpha r) + 2 \frac{\alpha}{r} H_1^{(1)}(\alpha r) \right) \\ \Lambda_{32} &= G \left( (k^2 - \beta^2) H_0^{(2)}(\alpha r) + 2 \frac{\alpha}{r} H_1^{(2)}(\alpha r) \right) \\ \Lambda_{33} &= G \left( 2k\beta H_0^{(1)}(\beta r) - 2 \frac{k}{r} H_1^{(1)}(\beta r) \right) \\ \Lambda_{34} &= G \left( 2k\beta H_0^{(2)}(\beta r) - 2 \frac{k}{r} H_1^{(2)}(\beta r) \right) \\ \Lambda_{41} &= -2Gk\alpha H_1^{(1)}(\alpha r) \\ \Lambda_{42} &= -2Gk\alpha H_1^{(2)}(\alpha r) \\ \Lambda_{43} &= G(k^2 - \beta^2) H_1^{(1)}(\beta r) \\ \Lambda_{44} &= G(k^2 - \beta^2) H_1^{(2)}(\beta r) \end{aligned} \quad (2.50)$$

La condición de contorno entre capas adyacentes es la continuidad de las componentes normal y transversal del desplazamiento y de la tensión.

$$\left\{ \begin{array}{c} u_z \\ u_r \\ \sigma_{rr} \\ \sigma_{rz} \end{array} \right\}_{\substack{\text{capa}=i \\ \text{Interfaz}=i}} = \left\{ \begin{array}{c} u_z \\ u_r \\ \sigma_{rr} \\ \sigma_{rz} \end{array} \right\}_{\substack{\text{capa}=i+1 \\ \text{Interfaz}=i}} \quad (2.51)$$

Como no puede haber tensión resultante en el vacío, la condición de contorno en la superficie externa es que sean nulas las tensiones normales y tangenciales en dicha superficie.

$$\left\{ \begin{array}{c} \sigma_{rr} \\ \sigma_{rz} \end{array} \right\}_{\text{superficie libre}} = 0 \quad (2.52)$$

Para aplicar estas condiciones de contorno, usaremos la notación  $[A_{i,j}]$  para denotar la evaluación de la matriz  $[A]$  para la capa  $i$ , en el interfaz  $j$ , esto es, con las propiedades del material correspondientes a la capa  $i$ , y en el radio  $r_j$ . También para las superficies libres se define la matriz  $[\Gamma]$  como una matriz  $2 \times 4$  formada por las dos filas inferiores de  $[A]$  (aquellas que definen las tensiones). De modo similar  $[\Gamma_{i,j}]$  se define como la evaluación de la matriz  $[\Gamma]$  para la capa  $i$ , en el interfaz  $j$ .

$$[\Gamma] = \begin{bmatrix} \Lambda_{31} & \Lambda_{32} & \Lambda_{33} & \Lambda_{34} \\ \Lambda_{41} & \Lambda_{42} & \Lambda_{43} & \Lambda_{44} \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

### 2.3. Ecuaciones en estructuras cilíndricas de múltiples capas con núcleo sólido

El modelo para estructuras cilíndricas huecas descrito por Barshinger y Rose [13] se extiende en este apartado a estructuras cilíndricas de múltiples capas con núcleo sólido. Cuando el radio del cilindro hueco tiende a cero la solución tiende a la del cilindro macizo [49]. Sin embargo, consideramos que no pueden utilizarse directamente las mismas ecuaciones para evaluar el cilindro sólido ya que las funciones de Hankel tienden a infinito cuando el radio tiende a cero.

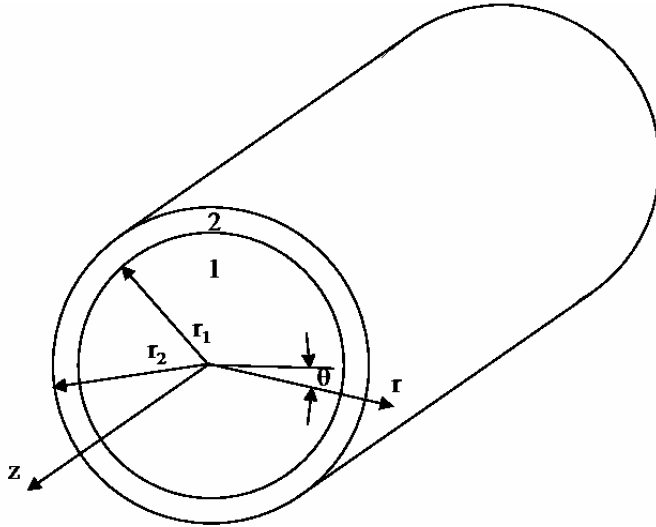


Figura 2.1. Cilindro sólido de dos capas.

Los cilindros huecos tienen dos superficies libres, y por tanto para ellos las anteriores condiciones son suficientes para formular el problema. Sin embargo en cilindros sólidos debe imponerse además que la solución sea finita para  $r=0$ . Si la solución a las ecuaciones de Bessel la hubiésemos expresado en términos de las funciones de Bessel y Neumann, esto implicaría usar solo funciones de Bessel ya que es la única de las dos que no es infinita para  $r=0$ . Sin embargo, estamos usando las funciones de Hankel. La relación entre las funciones de Hankel ( $H_n^{(1)}, H_n^{(2)}$ ) y las de Bessel ( $J_n$ ) y Neumann ( $Y_n$ ) es la siguiente:

$$H_n^{(1)}(z) = J_n(z) + iY_n(z) \quad (2.54)$$

$$H_n^{(2)}(z) = J_n(z) - iY_n(z) \quad (2.55)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.54) y (2.55) en (2.42) y (2.43) obtenemos:

$$\Phi = \left\{ \left( A_{(L+)} + A_{(L-)} \right) J_0(\alpha r) + i \left( A_{(L+)} - A_{(L-)} \right) Y_0(\alpha r) \right\} e^{i(kz - \omega t)} \quad (2.56)$$

$$\mathbf{H} = \left\{ \left( A_{(S+)} + A_{(S-)} \right) J_1(\beta r) + i \left( A_{(S+)} - A_{(S-)} \right) Y_1(\beta r) \right\} e^{i(kz - \omega t)} \mathbf{e}_\theta \quad (2.57)$$

Como acabamos de señalar en un cilindro macizo tiene que ser nulo el término en la función de Neumann en la capa interior para  $r = 0$ . Por tanto podemos escribir en forma matricial:



$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{(L+)} \\ A_{(L-)} \\ A_{(S+)} \\ A_{(S-)} \end{Bmatrix}_{\text{capa } i} = 0 \quad (2.58)$$

Denotaremos  $[\Pi]$  a esta nueva matriz,

$$[\Pi] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

La aplicación de las ecuaciones (2.51), (2.52), (2.58) junto con la ecuación (2.49) conduce a la siguiente ecuación:

$$[\Delta_m] \begin{Bmatrix} \{A_1\} \\ \{A_2\} \\ \vdots \\ \{A_m\} \end{Bmatrix} = 0 \quad (2.60)$$

Donde  $\{A_i\}$  son las amplitudes de ondas longitudinales y transversales en la capa  $i$ , y  $[\Delta_m]$  es una matriz cuadrada con la siguiente expresión:

$$[\Delta_m] = \begin{bmatrix} [\Pi] & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ [\Lambda_{1,1}] & [-\Lambda_{2,1}] & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & [\Lambda_{2,2}] & [-\Lambda_{3,2}] & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & [-\Lambda_{m-1,m-2}] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & [\Lambda_{m-1,m-1}] & [-\Lambda_{m,m-1}] \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & [\Gamma_{m,m}] \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

$$\{A_i\} = \begin{Bmatrix} A_{(L+)} \\ A_{(L-)} \\ A_{(S+)} \\ A_{(S-)} \end{Bmatrix}_{\text{capa } i} \quad (2.62)$$

Las primeras filas con  $[\Pi]$  son la restricción de tener magnitudes finitas en el eje de simetría. Las siguientes filas con  $[\Lambda_{i,j}]$  son la condición de continuidad de tensiones y desplazamientos

en las superficies intermedias. Las últimas filas con  $[\Gamma_{i,j}]$  son la restricción de tensiones nulas en la superficie libre. En este apartado hemos mostrado como usar el método de la matriz global para aplicar las condiciones de contorno a nuestro problema.  $[\Delta_m]$  es la matriz global para el caso de  $m$  capas. La solución no trivial se obtiene igualando su determinante a cero, lo cual puede reformularse como la minimización del valor absoluto de dicho determinante. Sin embargo según Lowe [61] esta es una condición necesaria pero no suficiente. La solución de la función característica no asegura la existencia de una solución modal.

En el caso particular de una capa tendríamos la siguiente matriz global:

$$[\Delta_1] = \begin{bmatrix} [\Pi] \\ [\Gamma_{1,1}] \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

En el caso particular de dos capas tendríamos la siguiente matriz global:

$$[\Delta_2] = \begin{bmatrix} [\Pi] & 0 \\ [\Lambda_{1,1}] & [-\Lambda_{2,1}] \\ 0 & [\Gamma_{2,2}] \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

## 2.4. Perfil de los modos de propagación

Para calcular el perfil de los modos de propagación, necesitamos conocer los valores de las amplitudes del potencial escalar y del potencial vectorial. La ecuación que rige dichos potenciales es la ecuación homogénea (2.60). En este apartado analizaremos el caso particular de dos capas, si bien, la metodología es general para el caso de  $m$  capas. En el caso particular de dos capas, la ecuación característica resulta tener la siguiente expresión:

$$\begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} & \Delta_{14} & \Delta_{15} & \Delta_{16} & \Delta_{17} & \Delta_{18} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \Delta_{23} & \Delta_{24} & \Delta_{25} & \Delta_{26} & \Delta_{27} & \Delta_{28} \\ \Delta_{31} & \Delta_{32} & \Delta_{33} & \Delta_{34} & \Delta_{35} & \Delta_{36} & \Delta_{37} & \Delta_{38} \\ \Delta_{41} & \Delta_{42} & \Delta_{43} & \Delta_{44} & \Delta_{45} & \Delta_{46} & \Delta_{47} & \Delta_{48} \\ \Delta_{51} & \Delta_{52} & \Delta_{53} & \Delta_{54} & \Delta_{55} & \Delta_{56} & \Delta_{57} & \Delta_{58} \\ \Delta_{61} & \Delta_{62} & \Delta_{63} & \Delta_{64} & \Delta_{65} & \Delta_{66} & \Delta_{67} & \Delta_{68} \\ \Delta_{71} & \Delta_{72} & \Delta_{73} & \Delta_{74} & \Delta_{75} & \Delta_{76} & \Delta_{77} & \Delta_{78} \\ \Delta_{81} & \Delta_{82} & \Delta_{83} & \Delta_{84} & \Delta_{85} & \Delta_{86} & \Delta_{87} & \Delta_{88} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{(L+),1} \\ A_{(L-),1} \\ A_{(S+),1} \\ A_{(S-),1} \\ A_{(L+),2} \\ A_{(L-),2} \\ A_{(S+),2} \\ A_{(S-),2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

Donde  $\Delta_{ij}$  es el elemento correspondiente a la fila  $i$  y la columna  $j$  de la matriz global. El subíndice de las amplitudes, indica la capa a la que hacen referencia. Si bien, la matriz global es cuadrada, no se puede invertir para obtener las amplitudes ya que su determinante es nulo en los modos de propagación. Como el determinante de la matriz es cero, esto indica que al menos una de las ecuaciones es redundante y puede ser eliminada. En la práctica, eliminaremos aquella fila tal que el determinante de la submatriz final que resulta sea máximo. De este modo, garantizamos que estamos eliminando una de las filas redundantes. Si por ejemplo la primera ecuación es la redundante, el sistema resulta:

$$\begin{bmatrix} \Delta_{21} & \Delta_{22} & \Delta_{23} & \Delta_{24} & \Delta_{25} & \Delta_{26} & \Delta_{27} & \Delta_{28} \\ \Delta_{31} & \Delta_{32} & \Delta_{33} & \Delta_{34} & \Delta_{35} & \Delta_{36} & \Delta_{37} & \Delta_{38} \\ \Delta_{41} & \Delta_{42} & \Delta_{43} & \Delta_{44} & \Delta_{45} & \Delta_{46} & \Delta_{47} & \Delta_{48} \\ \Delta_{51} & \Delta_{52} & \Delta_{53} & \Delta_{54} & \Delta_{55} & \Delta_{56} & \Delta_{57} & \Delta_{58} \\ \Delta_{61} & \Delta_{62} & \Delta_{63} & \Delta_{64} & \Delta_{65} & \Delta_{66} & \Delta_{67} & \Delta_{68} \\ \Delta_{71} & \Delta_{72} & \Delta_{73} & \Delta_{74} & \Delta_{75} & \Delta_{76} & \Delta_{77} & \Delta_{78} \\ \Delta_{81} & \Delta_{82} & \Delta_{83} & \Delta_{84} & \Delta_{85} & \Delta_{86} & \Delta_{87} & \Delta_{88} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{(L+),1} \\ A_{(L-),1} \\ A_{(S+),1} \\ A_{(S-),1} \\ A_{(L+),2} \\ A_{(L-),2} \\ A_{(S+),2} \\ A_{(S-),2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

Tenemos entonces más incógnitas que ecuaciones. Podemos pasar una incógnita al término derecho de la expresión (por ejemplo  $A_{(L+),1}$ ), y dejar expresadas el resto de incógnitas en función de ella.

$$\begin{bmatrix} \Delta_{22} & \Delta_{23} & \Delta_{24} & \Delta_{25} & \Delta_{26} & \Delta_{27} & \Delta_{28} \\ \Delta_{32} & \Delta_{33} & \Delta_{34} & \Delta_{35} & \Delta_{36} & \Delta_{37} & \Delta_{38} \\ \Delta_{42} & \Delta_{43} & \Delta_{44} & \Delta_{45} & \Delta_{46} & \Delta_{47} & \Delta_{48} \\ \Delta_{52} & \Delta_{53} & \Delta_{54} & \Delta_{55} & \Delta_{56} & \Delta_{57} & \Delta_{58} \\ \Delta_{62} & \Delta_{63} & \Delta_{64} & \Delta_{65} & \Delta_{66} & \Delta_{67} & \Delta_{68} \\ \Delta_{72} & \Delta_{73} & \Delta_{74} & \Delta_{75} & \Delta_{76} & \Delta_{77} & \Delta_{78} \\ \Delta_{82} & \Delta_{83} & \Delta_{84} & \Delta_{85} & \Delta_{86} & \Delta_{87} & \Delta_{88} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{(L-),1} \\ A_{(S+),1} \\ A_{(S-),1} \\ A_{(L+),2} \\ A_{(L-),2} \\ A_{(S+),2} \\ A_{(S-),2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_{21} \\ \Delta_{31} \\ \Delta_{41} \\ \Delta_{51} \\ \Delta_{61} \\ \Delta_{71} \\ \Delta_{81} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{(L+),1} \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

La submatriz nuevamente cuadrada que resulta sí que es en general invertible. En el caso de que la submatriz siguiera teniendo determinante nulo habría que eliminar otra fila y llevar otra de las incógnitas al término derecho de la expresión. Asignando un valor a  $A_{(L+),1}$  obtenemos inmediatamente los valores de las demás amplitudes. En la práctica, el valor de  $A_{(L+),1}$  dependerá de la excitación, esto es, del piezoeléctrico emisor que genere las ondas elásticas. Una vez que las amplitudes del potencial escalar y vectorial son conocidas en todas las capas, usaremos la matriz de capa  $[\Lambda]$  para obtener, mediante la ecuación (2.49), los valores de los desplazamientos y las tensiones a lo largo del radio para una coordenada  $z$  y tiempo  $t$  determinados. Para que el resultado sea independiente del valor asignado a  $A_{(L+),1}$  los resultados se presentarán en unitarias, imponiendo que la norma euclídea de los dos vectores de valores del desplazamiento a lo largo del radio sea uno. La fase se normaliza de tal modo que en el primer radio ( $r_1$ ) las magnitudes sean reales y positivas (véase [74])

## 2.5. Ecuaciones auxiliares

Para un material sin viscoelasticidad, partiendo de la velocidad de propagación de ondas longitudinales y transversales, a partir de las ecuaciones (2.16) y (2.17), pueden obtenerse las constantes de Lamé. Conocidas las constantes de Lamé, el módulo de elasticidad longitudinal ( $E$ ) puede obtenerse mediante la siguiente ecuación (ver ecuaciones de Pollard [104]):

$$E = \frac{G(3\lambda + 2G)}{\lambda + G} \quad (2.68)$$

Para un material viscoelástico, conocidas la parte real del módulo de elasticidad longitudinal y del transversal, o de forma aproximada con su módulo, pueden obtenerse los módulos de elasticidad complejos mediante las ecuaciones:

$$E = E_{real} (1 - i |\tan \delta|) \quad (2.69)$$

$$G = G_{real} (1 - i |\tan \delta|) \quad (2.70)$$

donde  $E_{real}$  y  $G_{real}$  denotan la parte real del módulo de elasticidad longitudinal y transversal respectivamente,  $E$  y  $G$  denotan los módulos de elasticidad longitudinal y transversal complejos respectivamente,  $\tan \delta$  es la tangente de pérdidas e  $i$  es el número imaginario. Siguiendo las indicaciones de Blanc [107] hemos supuesto que el coeficiente de Poisson es real, lo que es equivalente a suponer que la tangente de pérdidas de ambos módulos es igual. Conocidos los dos módulos de elasticidad puede obtenerse el coeficiente de Poisson ( $\mu$ ) como:

$$\mu = \frac{E}{2G} - 1 \quad (2.71)$$

y con el coeficiente de Poisson y el módulo de elasticidad longitudinal complejo puede obtenerse la constante de Lamé compleja como:

$$\lambda = E \frac{\mu}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)} \quad (2.72)$$

Con las dos constantes de Lamé complejas ( $\lambda$  y  $G$ ), pueden obtenerse mediante las ecuaciones (2.16) y (2.17) las velocidades de propagación complejas de ondas longitudinales y transversales. Para una propagación de ondas de la siguiente forma:

$$\frac{d^2 u}{dz^2} = \frac{1}{c} \frac{d^2 u}{dt^2} \quad (2.73)$$

Donde  $u$  es el desplazamiento,  $z$  es la dirección de propagación,  $t$  es el tiempo y  $c$  es la velocidad de propagación, la solución tiene la forma:

$$u(z,t) = De^{i(kz-\omega t)} \quad (2.74)$$

Donde  $k$  es el número de onda complejo y  $\omega$  es la frecuencia angular. El número de onda puede descomponerse en su parte real ( $k_{real}$ ) e imaginaria ( $k_{imag}$ ).

$$k = k_{real} + ik_{imag} \quad (2.75)$$

El desplazamiento resulta entonces:

$$u(z,t) = De^{-k_{imag}z} e^{i(k_{real}z-\omega t)} \quad (2.76)$$

Donde como vemos la parte imaginaria del número de onda determina la atenuación, mientras que la parte real indica la velocidad de propagación de la onda. La velocidad de fase ( $c_{ph}$ ) es la velocidad a la que un punto con fase constante se desplaza a lo largo del contorno. Hay que señalar que esta es una definición matemática, no una velocidad de propagación real, por lo que puede adoptar valores muy elevados. La velocidad de fase puede obtenerse a partir del número de onda real y de la frecuencia angular como:

$$c_{ph} = \frac{\omega}{k_{real}} \quad (2.77)$$

La velocidad de grupo ( $c_g$ ), que en el caso elástico es la velocidad real a la que viaja la energía, se obtiene como la derivada de la frecuencia angular respecto del número de onda. Para el caso viscoelástico, sin embargo, el número de onda es complejo. Realizamos entonces la derivada respecto de la parte real del número de onda [81], conforme a la expresión:

$$c_g = \frac{d\omega}{dk_{real}} \quad (2.78)$$

Sin embargo, al realizar la diferenciación respecto de la parte real exclusivamente, esto puede dar lugar a soluciones no físicas como velocidades infinitas. Sería más apropiado usar la

velocidad de la energía, en función del vector de Poynting [91, 108]. Conocida la parte imaginaria del número de onda, puede obtenerse la atenuación en decibelios por metro como:

$$atenuacion(dB/m) = 20 \log_{10} \left( e^{-k_{imag} \times 1m} \right) \quad (2.79)$$

Por lo que la parte imaginaria del número de onda puede obtenerse a partir de la atenuación como:

$$k_{imag} = \frac{-atenuacion(dB/m) \times \ln(10)}{20} \quad (2.80)$$

## 3 ALGORITMOS DE RESOLUCIÓN

### 3.1. Curvas de dispersión

A diferencia de en un medio libre, cuando las ondas se ven confinadas a la geometría de un sólido aparece el fenómeno de dispersión: la velocidad de propagación de las ondas depende de la frecuencia. La dispersión determina que modos son posibles a cada frecuencia e impone relaciones entre las magnitudes físicas de la señal.

En este apartado presentaremos los algoritmos numéricos utilizados para resolver el modelo teórico. El problema que hay que resolver es encontrar los valores de las variables para los cuales se anula el determinante de la matriz global, lo cual se reformula como la minimización del valor absoluto de dicho determinante. En primer lugar resumiremos el método propuesto por Lowe [61]. A continuación mostraremos una variante de un algoritmo de búsqueda directa propuesto por Coope y Price [78]. Finalmente realizaremos nuestra propuesta con un método híbrido.

### 3.2. Método de Lowe.

Lowe propuso un conjunto de algoritmos de resolución, orientados a la aplicación, que constituyen el método más completo que hemos encontrado para la obtención de los modos de propagación de las ondas elásticas en medios con múltiples capas y con viscoelasticidad [61].

El problema que hay que resolver tiene tres variables: frecuencia, velocidad de fase y atenuación, o alternativamente frecuencia, número de onda real, y número de onda imaginario. La solución al problema son los modos de propagación del sistema, que se representan como curvas en los planos frecuencia-velocidad de fase y frecuencia-atenuación.



Los modos de propagación se obtienen encontrando los valores de las variables para los cuales el determinante de la matriz global es nulo. Lowe sugiere reformular el problema como un problema de optimización, en el que se minimiza el valor absoluto del determinante de la matriz global, al que denominaremos función característica.

El método, comienza con una búsqueda gruesa en la que realiza barridos en una variable mientras fija el valor de las otras dos variables. Por ejemplo, en nuestro caso se pueden hacer barridos a la máxima velocidad de fase de interés: 10km/s y con 0dB/m de atenuación, mientras que la frecuencia se varia entre 1 y 10MHz por ejemplo a saltos de 900Hz para tener 10000 puntos. Por medio de este procedimiento, tenemos evaluada en una serie de puntos la función característica en el rango de frecuencias de estudio. Como se fijaron dos variables la función resultante es unidimensional por lo que la identificación de los mínimos de dicha función es inmediata. Este procedimiento que acabamos de describir para un barrido en frecuencia, podemos repetirlo variando esta vez la velocidad de fase, entre digamos 10m/s y 10km/s, a la mínima frecuencia de interés (1MHz) y con atenuación de 0dB/m. Identificando nuevamente los mínimos de la función objetivo a lo largo del nuevo barrido, tendremos identificados nuevos puntos que podemos tomar como primera aproximación de mínimos de la función característica. Estos barridos pueden repetirse para diferentes valores de atenuación.

A continuación se realiza el seguimiento de cada uno de los modos de propagación. Para ello es necesario tomar como punto de partida cada uno de los mínimos que acabamos de identificar. Estos puntos iniciales son solo primeras aproximaciones un poco burdas, pues dos de las variables estaban fijadas, y solo una se variaba. Para identificar con más precisión los mínimos lo que se hace es realizar una búsqueda fina. Esta búsqueda fina, fija una de las tres variables (la velocidad de fase) y realiza minimizaciones alternadas en las otras dos variables (frecuencia y atenuación). Cada una de estas minimizaciones se realiza en una única variable. Para llevarla a cabo, en primer lugar, identifica el signo del gradiente evaluando la función en un punto muy próximo al inicial. A continuación, se desplaza mediante pequeños saltos constantes en la dirección de minimización hasta que se pasa por un mínimo. Llegado ese punto el método dispone de tres puntos de la función, siendo el valor de la función en el

centro menor que en los extremos. Entonces el algoritmo cambia a un método similar al de la bisección, que recuerda a la “Golden Section Search” de Press [76]

Con lo descrito hasta ahora el algoritmo ha encontrado un punto que es un mínimo de la función. A continuación, lo que se hace es variar ligeramente el número de onda de la solución, y volver a realizar una búsqueda fina, de modo que obtiene otro punto solución muy próximo al inicial. A continuación, lo que lleva a cabo es un conjunto de extrapolaciones, inicialmente lineales y luego cuadráticas, después de cada una de las cuales hace una búsqueda fina. De este modo, con este proceso de una búsqueda gruesa inicial, extrapolaciones y búsquedas finas, el método consigue ir desplazándose a lo largo de un modo de propagación, obteniendo los valores de atenuación y velocidad de fase para el rango de frecuencias de interés. Desde cada punto de partida se obtiene un modo de propagación, siendo el conjunto de todos ellos la solución al problema planteado.

El problema que consideramos que presenta este algoritmo es que, al realizar seguimiento de curvas, es muy dependiente de la búsqueda gruesa inicial. En el caso de que dicha búsqueda inicial pierda un punto de alguno de los modos, dicho modo de propagación se perderá completamente, y no aparecerá en la solución.

### 3.3. Método de búsqueda directa.

Examinaremos ahora un algoritmo de búsqueda directa que emplearemos para resolver el problema elástico planteado: búsqueda en rejilla. Trabajamos con una versión simplificada respecto de la que proponen Coope y Price [78], en la que todas las rejillas están alineadas con los ejes coordenados, y son finitas. Permitimos la búsqueda de múltiples mínimos dentro del dominio de la función. El algoritmo trata de resolver el problema general de obtener el mínimo de una función  $w$  dependiente de  $n$  variables  $x_i$ .

$$w(x_i): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \tag{3.1}$$

La formulación la planteamos como genérica para  $n$  variables. Sin embargo, cuando lo apliquemos al caso elástico, tendremos dos dimensiones ( $n=2$ ), la variable  $x_1$  será la velocidad de fase, y la variable  $x_2$  la atenuación. Para especificar una retícula finita, definiremos las siguientes magnitudes:

$c_i$ , centro de la rejilla.

$\Delta_i$ , tamaño de la malla en la dirección  $i$

$p_i$ , número impar de puntos (mayor o igual que cinco) en cada dirección  $i$ .

Se define una rejilla  $L(c_i, \Delta_i, p_i)$  como:

$$L(c_i, \Delta_i, p_i) = \left\{ x_i \in \mathbb{R}^n / \exists \lambda_i \in \mathbb{Z}^n, x_i = c_i + \lambda_i \Delta_i, |\lambda_i| \leq \frac{p_i - 1}{2} \right\} \quad (3.2)$$

Los puntos externos de la rejilla se definen en la siguiente ecuación:

$$\left\{ \text{Puntos externos de la rejilla } L(c_i, \Delta_i, p_i) \right\} = \left\{ x_i \in L / \exists j \in \{1, \dots, n\} \exists \lambda \in \mathbb{Z}, x_j = c_j + \lambda \Delta_j, |\lambda| = \frac{p_j - 1}{2} \right\} \quad (3.3)$$

Podemos estar interesados en buscar un único mínimo en la rejilla o por el contrario, podemos querer buscar múltiples mínimos en la rejilla. Usamos una variable booleana llamada *búsqueda\_múltiple<sup>(h)</sup>*, donde  $h$  es el índice de la iteración. Cuando esta variable esté fijada a ‘verdadero’ el algoritmo continuará explorando todos los mínimos locales, mientras que cuando la variable esté fijada a ‘falso’ el algoritmo seguirá exclusivamente en el menor valor encontrado hasta el momento. Cuando *búsqueda\_múltiple<sup>(h)</sup>* es ‘verdadero’ se define un conjunto conteniendo los mínimos locales de la rejilla  $L$ :

$$\begin{aligned} \{ \text{Mínimos locales de } w \text{ en la rejilla } L(c_i, \Delta_i, p_i) \} &= \{ x_i \in L / \forall q_i \in L, \\ &|x_i - q_i| \leq \Delta_i \Rightarrow w(x_i) \leq w(q_i) \} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Cuando *búsqueda\_múltiple*<sup>(h)</sup> es 'falso' se define un conjunto que contiene tan solo los puntos con el mínimo valor de la función hasta el momento:

$$\{ \text{mínimos globales de } w \text{ en la rejilla } L \} = \left\{ x_i \in L / w(x_i) = \min_{q_i \in L} w(q_i) \right\} \quad (3.5)$$

El número de puntos en cada iteración se ha hecho variable y *búsqueda\_múltiple*<sup>(h)</sup> se ha definido para iniciar las iteraciones con un número opcionalmente elevado de puntos de la rejilla, en la cual se buscan múltiples mínimos. El rango de una rejilla (*rango<sub>i</sub>*) se puede obtener como:

$$\text{rango}_i(L(c_i, \Delta_i, p_i)) = \Delta_i \times (p_i - 1) \quad (3.6)$$

Para la siguiente iteración un nuevo mínimo será seleccionado como centro de la nueva rejilla. Si el centro de la nueva rejilla era un punto externo de la vieja rejilla L, entonces, la nueva rejilla tienen el mismo tamaño de malla que en la actual iteración, pero esta desplazada al nuevo centro. Si ese no es el caso se lleva a cabo una ampliación. Si  $\Delta_i$  denota el tamaño de la malla en la iteración *h*, entonces el tamaño de la malla después de la ampliación es  $\Delta'_i$ :

$$\Delta'_i = \frac{2\Delta_i}{p_i^{(h+1)} - 1} \quad (3.7)$$

De este modo, como el número de puntos es impar, los puntos contiguos al nuevo centro de la vieja rejilla, se convierten en puntos externos de la nueva rejilla. A continuación, se muestra la inicialización del algoritmo y la llamada inicial a la función de minimización.

*FIJAR*  $\varepsilon$   
*FIJAR*  $x_{max_i}^{(1)}, x_{min_i}^{(1)}$   
*FIJAR*  $p_i^{(h)}$   
*FIJAR* *busqueda\_multiple*<sup>(h)</sup>  
 $c_i \leftarrow \frac{x_{max_i}^{(1)} + x_{min_i}^{(1)}}{2}$   
 $\Delta_i \leftarrow \frac{x_{max_i}^{(1)} - x_{min_i}^{(1)}}{p_i^{(1)} - 1}$   
*minimizar*( $c_i, \Delta_i, 1$ )

Donde  $\varepsilon$  es el error relativo,  $x_{max_i}^{(1)}$  y  $x_{min_i}^{(1)}$  son respectivamente los valores máximo y mínimo de la variable  $x_i$  en la primera iteración y la función que calcula la minimización se define a continuación:

*FUNCION* *minimizar*( $c_i, \Delta_i, h$ )  
 $SI \sum_i \frac{\text{rango}_i(L(c_i, \Delta_i, p_i^{(h)}))}{x_{max_i}^{(1)} - x_{min_i}^{(1)}} < \varepsilon$   
*DEVOLVER*  $c_i$   
*EVALUAR*  $w$  en la rejilla  $L(c_i, \Delta_i, p_i^{(h)})$   
*SI* *busqueda\_multiple*<sup>(h)</sup> = 'verdadero'  
 $T \leftarrow \{\text{minimos locales de } w \text{ en la rejilla } L\}$   
*SI NO*  
 $T \leftarrow \{\text{el primer minimo global de } w \text{ en la rejilla } L\}$   
 $sol \leftarrow \emptyset$   
*PARA CADA*  $x_i$  *EN*  $T$   
*SI*  $x_i$  *no es un punto externo de la rejilla*  $L$   
 $sol \leftarrow sol \cup \text{minimizar}\left(x_i, \frac{2\Delta_i}{p_i^{(h+1)} - 1}, h + 1\right)$   
*SI NO*  
 $sol \leftarrow sol \cup \text{minimizar}(x_i, \Delta_i, h + 1)$   
*DEVOLVER*  $sol$

Donde  $T$  es el conjunto de nuevos centros y  $sol$  es el conjunto de soluciones. Como vemos se trata de una función recursiva con tres parámetros fundamentales: el centro de la rejilla, el ancho de la rejilla y la iteración  $h$ . La función en primer lugar verifica si el ancho de la rejilla

es suficientemente pequeño, en cuyo caso termina y devuelve el centro de dicha rejilla como solución. A continuación evalúa la función en todos los puntos de la rejilla. Tiene dos modos de funcionamiento: con búsqueda múltiple y sin ella. Si estamos en el caso de búsqueda múltiple inserta en el conjunto T todos los mínimos locales de la rejilla. En caso contrario, inserta solo el mínimo global de la rejilla. A continuación, para cada uno de dichos mínimos, comprueba si se trata de puntos externos o internos a la rejilla. En el caso de puntos externos realiza un desplazamiento de la rejilla, mientras que para puntos internos realiza un zoom. El algoritmo tiende, mediante una serie de zooms y desplazamientos, hacia el mínimo. Lewis, Torczon y Trosset [77] mostraron que la clave para la convergencia es que el tamaño de la malla no se reduzca hasta que se haya verificado que:

$$w(x_i) \leq w(x_i + \Delta_l e_l), \forall l = \{1..n\} \quad (3.8)$$

Donde  $e_l$  denota el  $l^{th}$  vector de coordenadas unitario. Hay que señalar que esta condición la cumple el algoritmo propuesto. Entonces, mientras que  $x_i$  no sea un punto estacionario, al menos una de las  $2n$  direcciones definidas por  $\pm e_l$  debe ser una dirección de descenso. Una vez que  $\Delta_l$  es suficientemente fino esto garantiza que  $w(x_i + \Delta_l e_l) \leq w(x_i)$  o  $w(x_i - \Delta_l e_l) \leq w(x_i)$  para al menos un  $l$ .

### 3.4. Método híbrido.

Con el objetivo de incrementar la robustez, es posible tomar como puntos iniciales de la búsqueda de Lowe, no solo aquellos que se obtienen con su barrido inicial, sino también puntos iniciales de aquellos modos que detecte nuestro algoritmo de búsqueda directa y que no detecten los barridos iniciales del algoritmo de Lowe. Volviendo a ejecutar el método de Lowe con estos puntos adicionales, podemos incrementar el número de modos detectados, evitando la pérdida de algunos modos. Resumiendo el método híbrido requiere:

1. Resolver el problema con el algoritmo de Lowe
2. Resolver el problema con el método de búsqueda directa

3. Identificar aquellos modos que detecta el método de búsqueda directa y que no se encuentran con el algoritmo de Lowe.
4. Volver a ejecutar el algoritmo de Lowe, con puntos iniciales de esos modos de propagación adicionales.

Por tanto este método requiere tres ejecuciones: dos del método de Lowe y una del método de búsqueda directa. Por esta razón el algoritmo es más lento que cualquiera de los dos anteriores. Sin embargo, este método híbrido ha resultado ser significativamente más robusto y ha sido sistemáticamente utilizado en las simulaciones fundamentales del presente trabajo.

## 4 SIMULACIONES

### 4.1. Introducción a las simulaciones

En este capítulo se realizan simulaciones del cable eléctrico con y sin plástico aislante. Las simulaciones del cable con plástico aislante se realizan con el método de Lowe, con el método de búsqueda directa y con el método híbrido. Estas últimas, se validan mediante los criterios de: signo de atenuación, frecuencia en rango, velocidad de grupo no negativa y no excesiva y con el perfil de los modos de propagación. El código fuente, empleado para realizar estas simulaciones, se quiere poner a disposición de quien lo requiera.

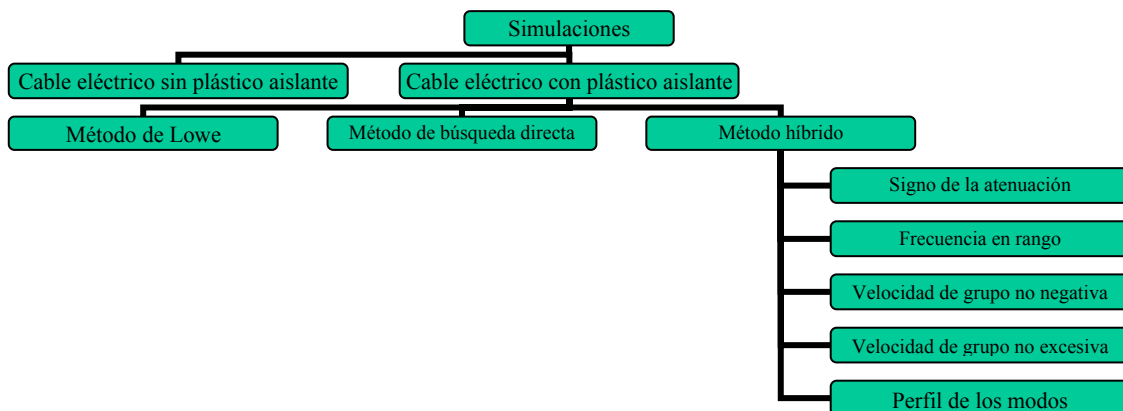


Figura 4.1. Organigrama de las simulaciones

En un cilindro son posibles tres tipos de modos: longitudinal, torsional y de flexión. Para designarlos utilizaremos la notación  $L(0,m)$ ,  $T(0,m)$  y  $F(n,m)$  [24]. Los modos  $L(0,m)$  son los longitudinales, los  $T(0,m)$  los de torsión y los  $F(n,m)$  los de flexión. El índice  $n$  indica la variación a lo largo de la circunferencia. Los modos con  $n=0$  son modos axisimétricos y si  $n>1$  se denominan antisimétricos. El índice  $m$  es un contador que ordena las frecuencias de forma creciente.



## 4.2. Propiedades elásticas usadas en las simulaciones

Las simulaciones para los cables eléctricos se han realizado con los siguientes valores de las propiedades de los materiales. Los datos del cobre se tomaron de parámetros dados por Bedford [109] y se complementaron con parámetros de viscoelasticidad de Chen y Lakes [110], suponiendo que el coeficiente de Poisson es real puro como sugiere Blanc [107].

Símbolo	Frontera	Radio (mm)
$r_1$	Cobre – Plástico	0.75
$r_2$	Plástico – Vacío	1.35

Componente	Re( $c_1$ ) (m/s)	Im( $c_1$ ) (m/s)	Re( $c_2$ ) (m/s)	Im( $c_2$ ) (m/s)	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )
1 Cobre	5010	-2.505	2270	-1.135	8930
2 Plástico	1860	-80	730	-130	1500

Tabla 4.1. Estructura y propiedades relevantes del cable.

Donde  $r_1$  y  $r_2$  son los radios del cobre y del plástico,  $c_1$  y  $c_2$  son las velocidades de ondas en medio libre longitudinales y transversales respectivamente,  $\rho$  es la densidad.

## 4.3. Cables eléctricos sin plástico aislante

En primer lugar analizamos una estructura simplificada, cilindro homogéneo de cobre.

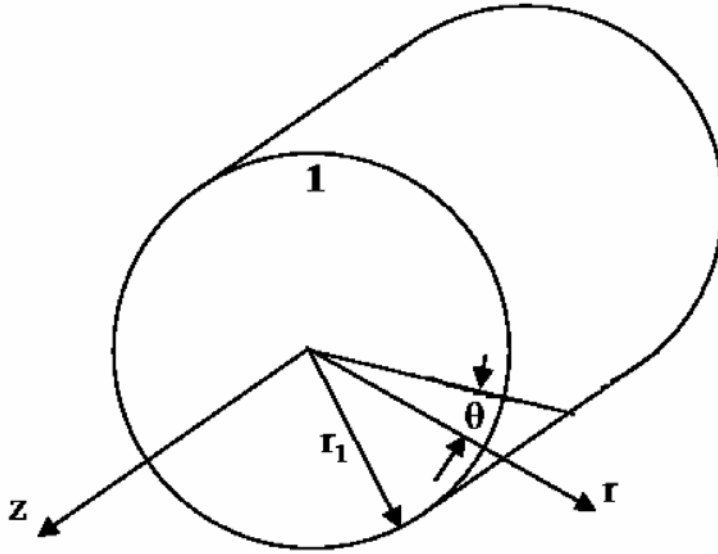


Figura 4.2. Cilindro sólido de una capa (cable de cobre sin plástico aislante)

Su formulación ya ha sido analizada por Zhao y Gary [60], que obtienen los modos de propagación mediante la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}
 f(k) &= \left( \frac{2\alpha}{r_1} \right) (\beta^2 + k^2) J_1(\alpha r_1) J_1(\beta r_1) \\
 &- (\beta^2 - k^2)^2 J_0(\alpha r_1) J_1(\beta r_1) \\
 &- 4k^2 \alpha \beta J_1(\alpha r_1) J_0(\beta r_1) = 0
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Donde  $f(k)$  es la función característica,  $r_1$  es el radio del cobre y  $k$  es el número de onda. La ecuación (4.1) es tan solo una expresión alternativa de la ecuación de la teoría clásica de elasticidad, pero como se considera la viscoelasticidad, el número de onda aquí es un número complejo. A continuación, se muestran simulaciones empleando a) la ecuación de Zhao y Gary con el algoritmo de búsqueda directa descrito en el capítulo 3 y b) el método de la matriz global con el algoritmo de Lowe [74].

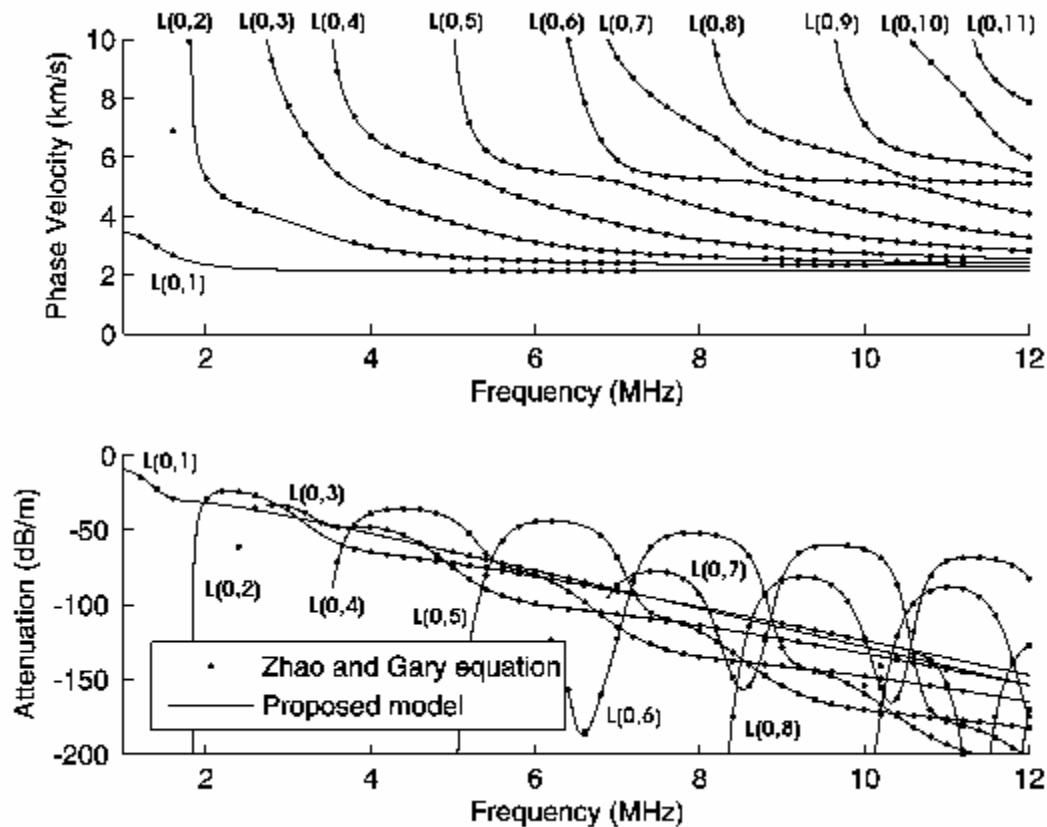


Figura 4.3. Velocidad de fase y atenuación en el rango 1-12MHz para cables de cobre desnudo. Puntos de acuerdo con la ecuación de Zhao y Gary con el método de búsqueda directa y líneas sólidas para el modelo propuesto aplicado a cable desnudo de cobre, usando el método de la matriz global con los algoritmos propuestos por Lowe.

Con los dos métodos obtenemos las mismas curvas de dispersión. En la parte superior de la Figura 4.3 tenemos representada la velocidad de fase frente a la frecuencia. Se observa que hay un primer modo de propagación, el  $L(0,1)$ , que no tiene frecuencia de corte y se prolonga hasta frecuencia cero. Los demás modos si que tienen frecuencia de corte. Al final, todos los modos tienden hacia la velocidad de ondas transversales del cobre (2270m/s). En la parte inferior se representa la atenuación. Se observa en las simulaciones que la atenuación aumenta de modo aproximadamente lineal con la frecuencia. Para cada rango de frecuencias aparecen distintos modos de propagación, cada uno de los cuales tiene un punto con la mínima atenuación del modo.

## 4.4. Cables eléctricos con plástico aislante

### 4.4.1. Descripción

En este apartado se muestran simulaciones empleando el método de Lowe y con el algoritmo de búsqueda directa descrito en el capítulo 3 . A continuación, se realizan las simulaciones con el algoritmo híbrido. Por último, se validan los modos de propagación obtenidos en los cables eléctricos mediante diferentes criterios.

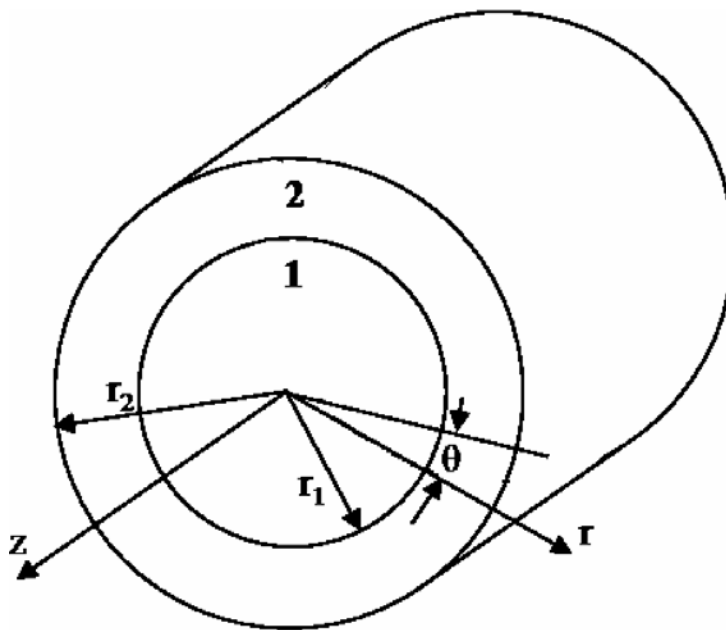


Figura 4.4. Cilindro sólido de dos capas (cable de cobre con plástico aislante)

### 4.4.2. Resolución mediante el método de Lowe

El algoritmo de Lowe se ejecutó con los siguientes parámetros. Se realizó una búsqueda gruesa con la velocidad de fase a 1MHz, 0dB/m, variando la velocidad de fase entre 10 y 10000m/s, con 10000 puntos. Se realizó otra búsqueda gruesa a 10000m/s y 0dB/m, variando la frecuencia entre 1 y 10MHz, con 10000 puntos. Se realizó un barrido en frecuencia entre 1 y 10MHz, realizando extrapolaciones con el número de onda con pasos de 51.88rad/m. Las optimizaciones en una única variable se realizaron con saltos de 5000rad/s y 0.5dB/m. La

siguiente figura muestra los modos de propagación en un cable eléctrico obtenidos con una implementación nuestra del método de Lowe.

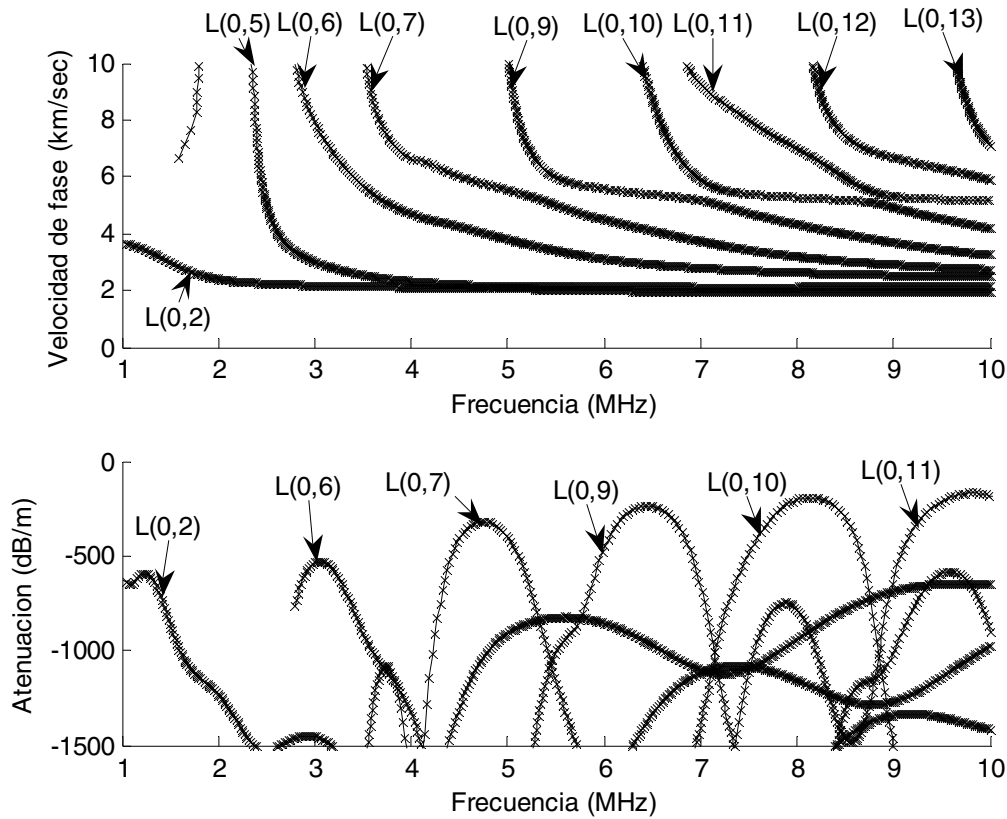


Figura 4.5. Curvas de dispersión: velocidad de fase y atenuación de los cables eléctricos con plástico aislante, obtenidos con nuestra implementación del método de Lowe.

#### 4.4.3. Resolución mediante el método de búsqueda directa

El algoritmo de búsqueda directa descrito previamente se diferencia claramente del algoritmo de Lowe que acabamos de aplicar. Básicamente, el algoritmo de Lowe utiliza puntos de partida de cada modo, a partir de los cuales realiza sucesivas extrapolaciones, para obtener todos los puntos de cada modo de propagación. Por tanto, este método no es propenso a perder segmentos de cada modo, pero sí tiene el peligro de perder modos completos en el caso de que alguno de los modos de propagación no se encuentre incluido en el conjunto de puntos

iniciales de partida. Opuesto a él, el método de búsqueda directa, explora para cada valor de frecuencia, el rango completo de velocidad de fase y atenuación. Por esta razón, este último método es mucho más lento y puede perder puntos sueltos, pero parece más difícil que pierda modos completos. El algoritmo de búsqueda directa se inició con los siguientes parámetros:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon &= 1e-10 \\
 x_{min_1} &= 10m/s \quad x_{max_1} = 10000m/s \\
 x_{min_2} &= -10000dB/m \quad x_{max_2} = 0dB/m \\
 p_1^{(1)} &= 75, \quad p_2^{(1)} = 25 \\
 p_1^{(2)} &= 25, \quad p_2^{(2)} = 25 \\
 p_1^{(3..)} &= 5, \quad p_2^{(3..)} = 5 \\
 búsqueda\_múltiple^{(1,2)} &= true \\
 búsqueda\_múltiple^{(3,..)} &= false
 \end{aligned}$$

Donde recordemos que la variable 1 es la velocidad de fase y la variable 2 la atenuación,  $\varepsilon$  es el error relativo máximo admitido,  $x_{min_i}$  y  $x_{max_i}$  son los valores máximos y mínimos de cada variable.  $p_i^{(h)}$  es el número de puntos para la variable  $i$  en la iteración  $h$ , y la variable  $búsqueda\_múltiple^{(h)}$  indica si se buscan múltiples puntos en la iteración  $h$ . En las dos primeras iteraciones se utilizan rejillas con muchos puntos para detectar la existencia de múltiples mínimos. El barrido en frecuencia se realizó entre 1 y 10MHz, con saltos de 25kHz.

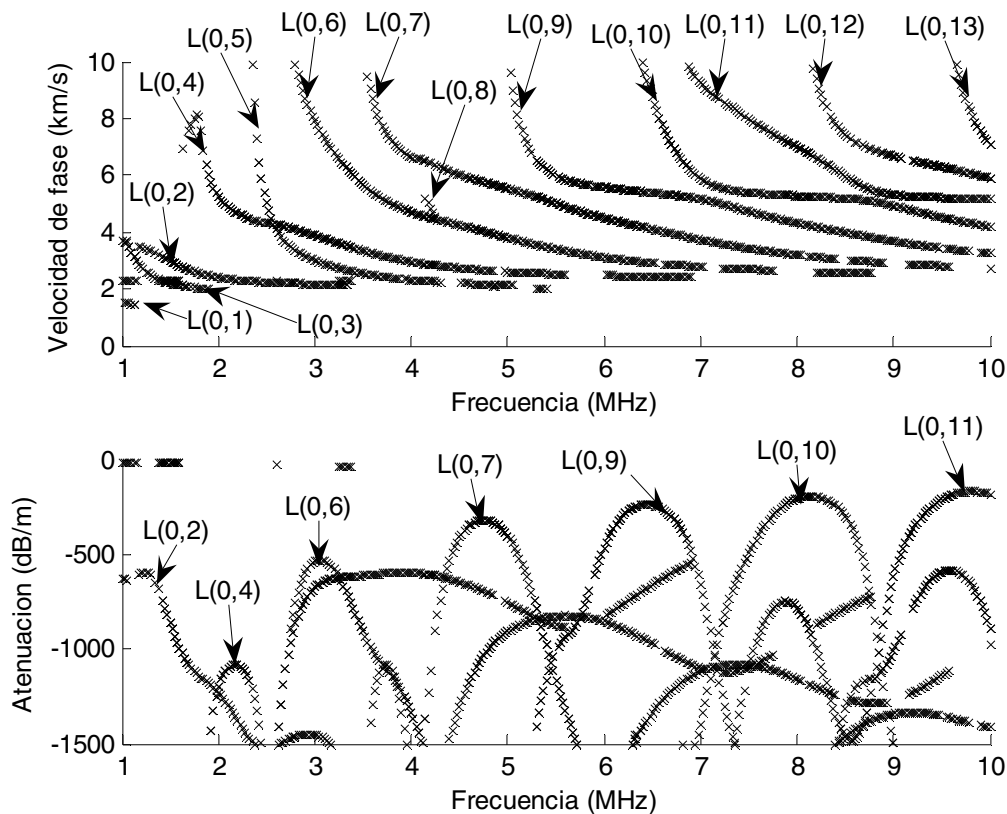


Figura 4.6. Curvas de dispersión: velocidad de fase y atenuación de los cables eléctricos con plástico aislante obtenidos con el método de búsqueda directa

Se observa que el algoritmo pierde segmentos sueltos de algunos de los modos de propagación, pero aparecen también algunos nuevos modos de propagación que no aparecían con nuestra implementación del método de Lowe. En particular se detectan algunos segmentos del L(0,1), L(0,3), L(0,4) y L(0,8) que no aparecían con nuestra implementación del método de Lowe.

#### 4.4.4. Resolución mediante el método híbrido.

Es posible tomar como puntos iniciales de la búsqueda de Lowe, no sólo aquellos que se obtienen con el barrido inicial, sino también puntos iniciales de aquellos modos que detecta nuestro algoritmo de búsqueda directa y que no detectan los barridos iniciales de nuestra

implementación del método de Lowe. Con este método híbrido, obtenemos la siguiente simulación, en la que se observa que se han identificado nuevos modos de propagación.

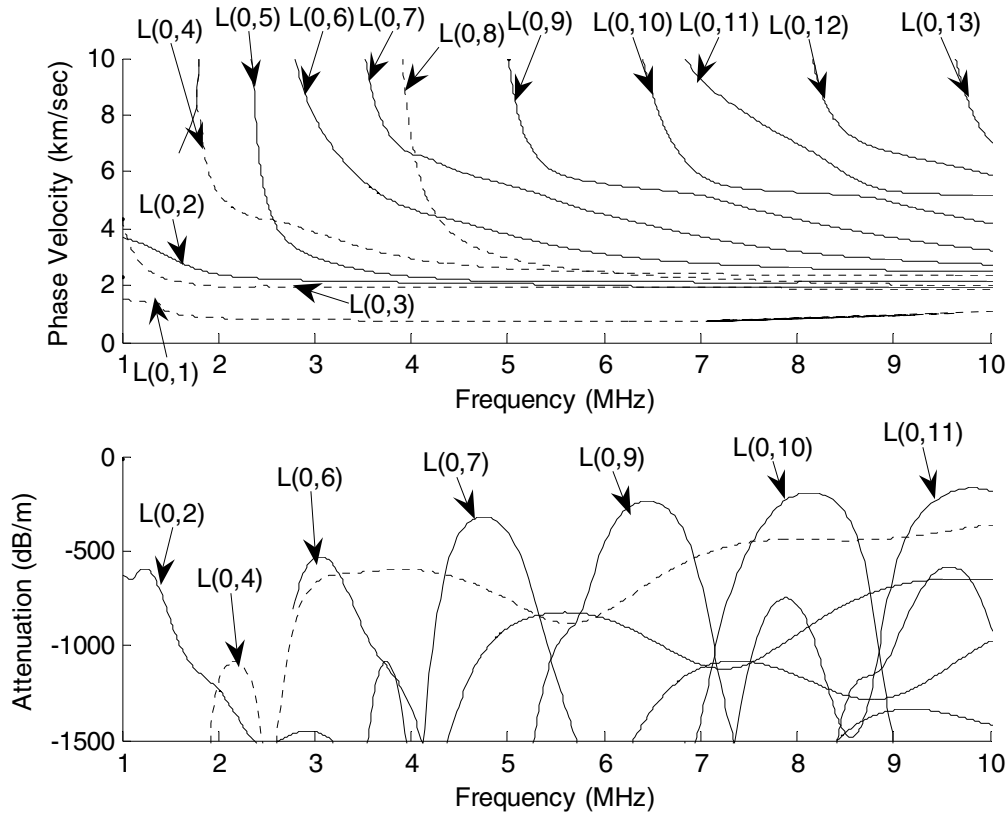


Figura 4.7. Velocidad de fase y atenuación de los cables estándar con cubierta de PVC, usando el método híbrido. Las líneas a trazos son modos recuperados con el método propuesto. Los círculos son puntos iniciales añadidos desde el método de búsqueda directa.

El modo  $L(0,1)$  es un modo de propagación fundamentalmente por el plástico con mucha atenuación. En los siguientes apartados se discute si es un modo de propagación real o un artefacto matemático. El modo  $L(0,2)$  no tiene frecuencia de corte y se corresponde con el primer modo de propagación del cobre. El modo  $L(0,3)$  tiene una frecuencia de corte a una frecuencia algo inferior, como su tendencia sugiere. En esta figura, se observa que las curvas de velocidad de fase son básicamente las mismas que para el cable sin plástico, con la excepción de que aparecen algunos modos de propagación nuevos en la estructura más compleja de cable con plástico (el  $L(0,1)$ ,  $L(0,3)$ ,  $L(0,5)$  y  $L(0,8)$ ).



Con la velocidad de fase observamos valores muy altos de velocidad. Esto se debe a que la velocidad de fase no tiene un significado físico real, sino que simplemente expresa la velocidad a la que un punto de fase constante parece desplazarse a lo largo de una interfase. A continuación, representamos también la velocidad de grupo, con un significado físico concreto, en un medio sin atenuación representa la velocidad a la que viaja la energía. Dicha velocidad se encuentra por debajo de la velocidad de propagación longitudinal del cobre en un medio libre (5010m/s).

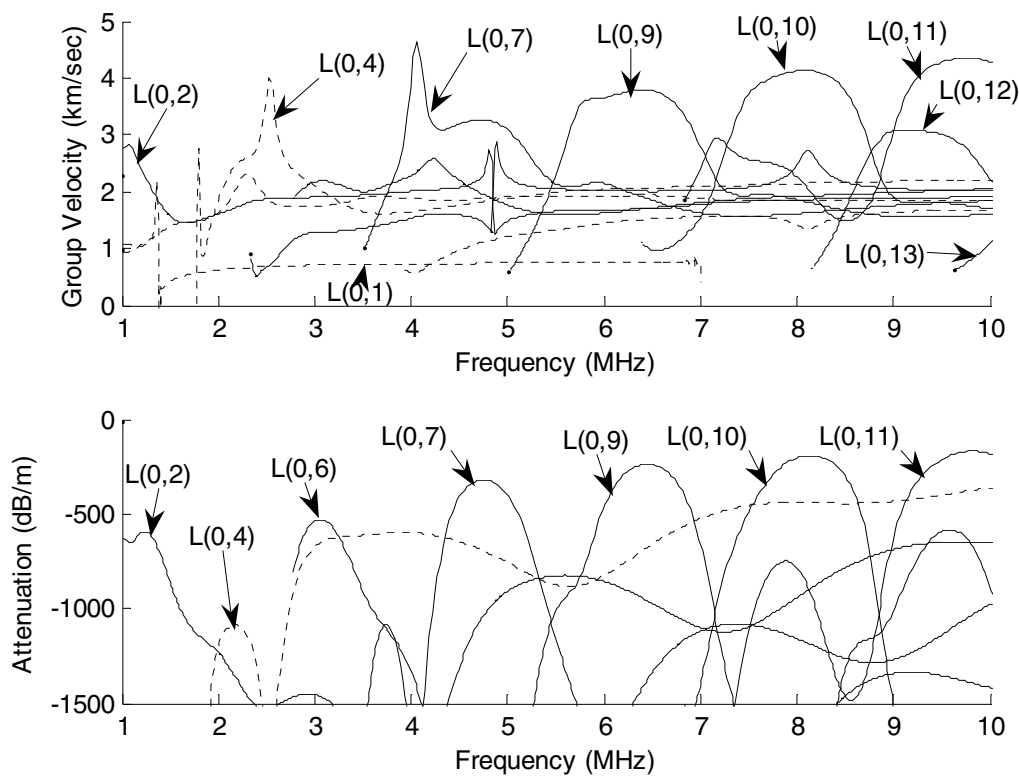


Figura 4.8. Velocidad de grupo y atenuación de los cables estándar con cubierta de PVC, usando el método híbrido. Las líneas a trazos son modos recuperados con el método propuesto.

## 4.5. Validación de los modos de propagación en el cable con plástico aislante

Es necesario validar los modos que nos aparecen como soluciones de la ecuación característica porque puede que alguna de estas soluciones no tenga una base física. Según Meeker y Meitzler [53], en el caso de una placa es condición necesaria y suficiente para que haya solución, que el determinante de la matriz correspondiente sea nulo. Sin embargo, según Lowe [61], en general la solución de la función característica no prueba estrictamente la existencia de una solución modal, sólo que la matriz es singular. Hay un caso de solución no trivial que se da en la práctica, en el que la matriz también es singular. En el caso particular en que la velocidad de fase es igual a la velocidad en medio libre de alguna de las capas, las ondas  $+$  y  $-$  son ambas paralelas a la capa y su efecto sobre tensiones y desplazamientos es indistinguible. Esto provoca que las dos columnas correspondientes de la matriz global sean iguales, por lo que el determinante de la matriz global es nulo, sin que por ello, se verifiquen todas las ecuaciones. Además de casos específicos como el que se acaba de señalar, también puede suceder que los algoritmos empleados nos lleven a mínimos locales (no globales), que no sean solución de la ecuación. Además, puede fallar la convergencia de los algoritmos empleados. En particular, con nuestra implementación del método de Lowe la condición final de exigir que haya un ángulo mayor de  $90^\circ$  entre el punto solución y sus dos adyacentes se ha sustituido por una condición de estabilización de la solución, lo que puede ocasionar la inclusión de puntos que en realidad no son solución al problema. Por tanto, en esta sección procedemos a realizar un análisis que estudie la coherencia de los modos de propagación obtenidos.

Para validar los modos, vamos a utilizar diferentes criterios, como analizar la velocidad de grupo de los modos y representar gráficamente el perfil de los modos de propagación, para ver si, efectivamente, se cumplen las ecuaciones que se impusieron previamente para que los considerásemos modos de propagación.

### **4.5.1. Criterio del signo de la atenuación**

En general, las ondas se atenúan debido básicamente a factores geométricos (la dispersión) y a pérdidas intrínsecas de los materiales (la absorción). Los factores geométricos, reflejan el hecho de que no toda la energía viaja a lo largo del medio de propagación (en nuestro caso un cable), sino que parte de la energía se pierde hacia el exterior, de modo que la energía total que viaja por el medio de propagación es cada vez menor por lo que la señal se va atenuando. Además, los materiales típicamente no son puramente elásticos, y las deformaciones no son totalmente reversibles. Por el contrario, lo que revelan los experimentos es que hay un proceso de disipación de la energía debido a la fricción interna en los sólidos y que lo que produce es una transformación de la energía en calor. También, debido a esta pérdida de energía, la señal se ve atenuada. Por lo tanto, lo que sucede es que a lo largo del cable cada vez viaja menos energía de modo que la señal se va atenuando. No tiene sentido físico que la señal en vez de atenuarse se vea amplificada. Esto, solo tendría sentido si hubiera nuevas aportaciones de energía desde el exterior.

### **4.5.2. Criterio de frecuencia en rango**

Se desea obtener los modos de propagación en un rango de frecuencias determinado. Cuando las extrapolaciones realizadas nos lleven a puntos situados fuera del rango de frecuencias prefijado, cesaremos la búsqueda de nuevos puntos del modo de propagación y los puntos fuera del rango considerado no se representaran.

### **4.5.3. Criterio de velocidad de grupo no negativa**

La velocidad de fase de las ondas en una guía de onda es la velocidad con la que un punto de fase constante se mueve a lo largo de la frontera. La velocidad de fase, depende de la

frecuencia (hay dispersión). Cuando una onda o pulso, con un contenido en frecuencia no monocromático, se desplaza por una guía de ondas, cada componente viaja a su propia velocidad de fase. El envolvente del pulso cambiará de forma a su paso por la guía de ondas. Sin embargo, la energía que transporta el pulso viaja a la velocidad de grupo, no a la velocidad de fase [104].

$$c_{ph} = \frac{\omega}{k_{real}} \quad (4.2)$$

$$c_g = \frac{d\omega}{dk_{real}} \quad (4.3)$$

Donde  $c_{ph}$  es la velocidad de fase y  $c_g$  la de grupo. Según Seco y otros [24], Pollard [104], en el caso en el que no hay dispersión, la derivada de la velocidad de fase respecto de la frecuencia es casi cero, de donde se deduce que en ese caso las velocidades de fase y de grupo son iguales. Rattassepp y Klauson, buscan el punto en el que la variación de la velocidad de grupo respecto de la frecuencia es mínima, para minimizar la dispersión [21].

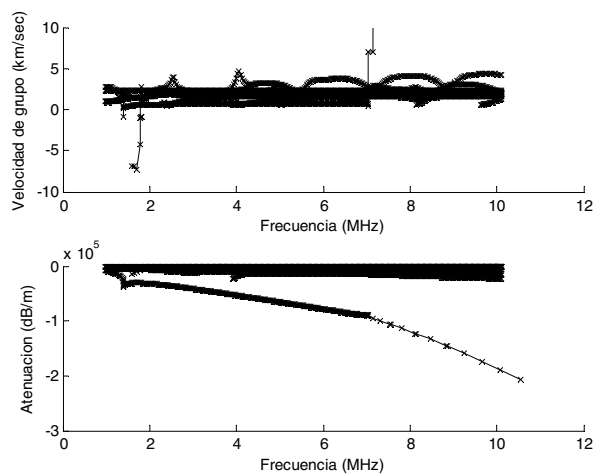


Figura 4.9. Velocidad de grupo y atenuación de los cables estándar con cubierta de PVC

Hay algunos segmentos que aparecen con velocidad de grupo negativa, lo cual podría deberse a un error. Sin embargo, hay autores como Rattanawangcharoen, Shah y Datta [57], Vollmann y Dual [95] Meeker y Meitzler [53], que informan de velocidades de grupo negativas,

interpretando este resultado como que la velocidad de fase y la de grupo tienen sentidos opuestos.

#### 4.5.4. Criterio de velocidad de grupo no excesiva

La máxima velocidad en medio libre de los materiales con los que estamos realizando las simulaciones, es la velocidad de propagación de ondas longitudinales en medio libre del cobre que es de 5010m/s. No tiene sentido que por el simple hecho de restringir la geometría a la de un cilindro la velocidad de grupo, que es la velocidad real a la que viaja la energía, sea superior a ese valor. No sucede lo mismo con la velocidad de fase, que por no tener ese significado físico sí puede ser superior a las velocidades de propagación de las ondas en el medio libre.

En la gráfica de la Figura 4.9 se observa que hay un modo de propagación que deja de converger correctamente a partir de los 7MHz. A partir de esa frecuencia, la velocidad de grupo se dispara muy por encima de los 5010m/s. Como se observa en este intervalo, los puntos están muy separados lo que indica que la convergencia no se produce adecuadamente aquí. Por tanto, creemos que este último segmento tampoco es un modo real de propagación del sistema.

Sin embargo, como indican Bartoli y otros [91] basándose en estudios previos de Bernard y otros [108], la definición de velocidad de grupo no es válida para guías de onda con viscoelasticidad. En este caso, el número de onda se vuelve complejo y la diferenciación respecto al número de onda ya no es posible. Si la derivación se hace con respecto a la parte real del número de onda (como se propuso previamente), el cálculo de la velocidad de grupo puede dar resultados no físicos como velocidades infinitas en algunos puntos de la curva de dispersión. Aún así, para casos con baja atenuación, la velocidad de grupo proporciona valores similares a la velocidad de la energía. Sin embargo para medios con mucha atenuación (como el nuestro) la velocidad de grupo y la de la energía pueden ser bastante diferentes. La

velocidad de la energía sería más apropiada para este tipo de medios. Esta puede obtenerse mediante el vector de Poynting.

#### 4.5.5. Criterio de los perfiles de los modos de propagación. Verificación de las restricciones impuestas.

Analizaremos los cuatro modos de propagación señalados en la siguiente figura.

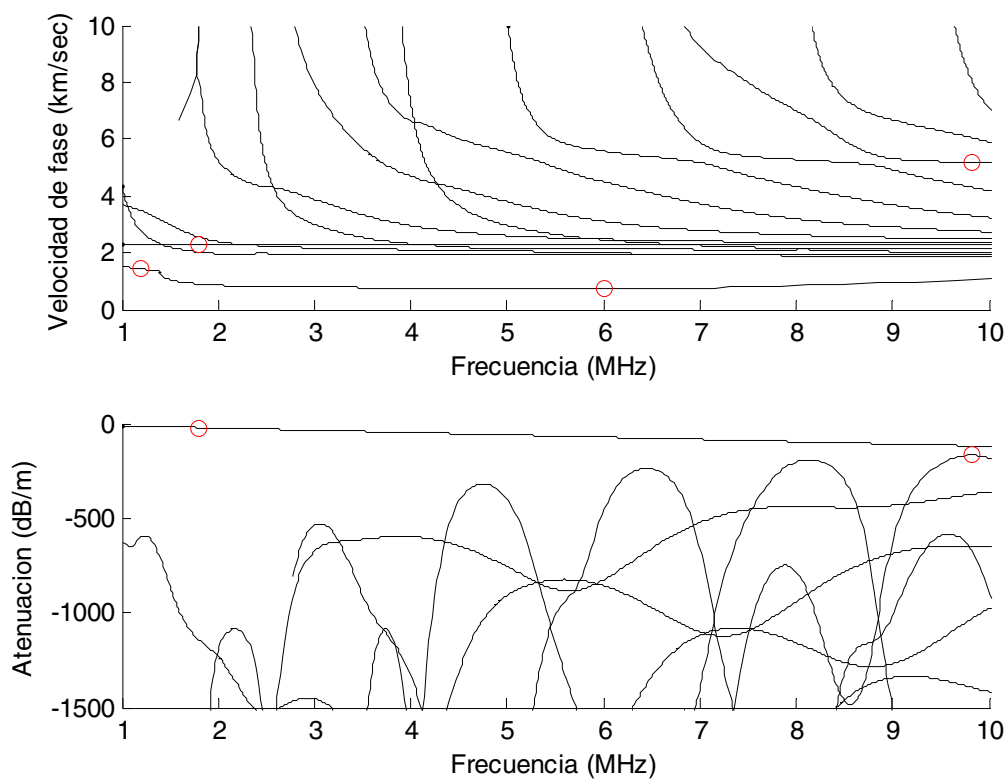


Figura 4.10. Modos de propagación con puntos a discutir.

El primer modo de propagación corresponde al siguiente punto:

$$f = 9.8190 \text{ MHz}$$

$$c_{ph} = 5176.7 \text{ m/s}$$

$$\text{atenuación} = -168.3438 \text{ dB/m}$$

Donde  $f$  es la frecuencia,  $c_{ph}$  es la velocidad de fase. Este es un modo de propagación normal. El vector de desplazamientos y las tensiones varían a lo largo del radio según muestra la siguiente figura:

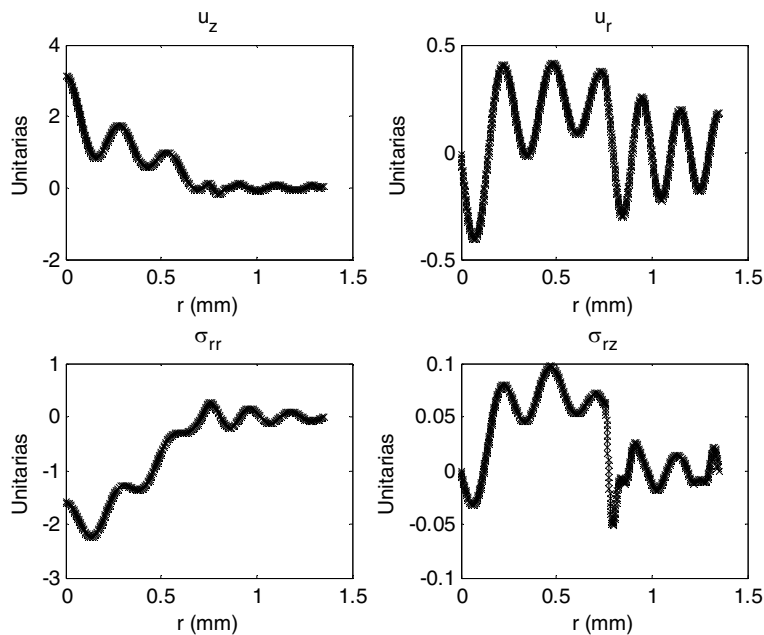


Figura 4.11. Perfil del modo de propagación  $f=9.8190$  MHz,  $c_{ph}=5176.7$ m/s, atenuación=-168.3438dB/m

Como comprobamos en esta figura, se verifican efectivamente las condiciones impuestas en la matriz global. Tenemos magnitudes finitas en  $r=0$ , hay continuidad de tensiones y desplazamientos en el radio intermedio y en el radio externo tenemos tensiones nulas. Por tanto, queda verificado que se trata de un modo de propagación real. A la vista del perfil del modo de propagación, cabe señalar también que es un modo que viaja fundamentalmente a través del cobre.

El siguiente modo de propagación lo analizamos en el punto:

$$f = 1.8060 \text{ MHz}$$

$$c_{ph} = 2270.0 \text{ m/s}$$

$$\text{atenuación} = -21.7090 \text{ dB/m}$$

Este, es el caso que describe Lowe, en el que la velocidad de fase coincide con la velocidad de propagación de las ondas transversales en el cobre. Se trata pues de un artefacto matemático, no de un modo de propagación real del sistema. Si obtenemos la forma del modo de propagación con la metodología descrita llegamos a:

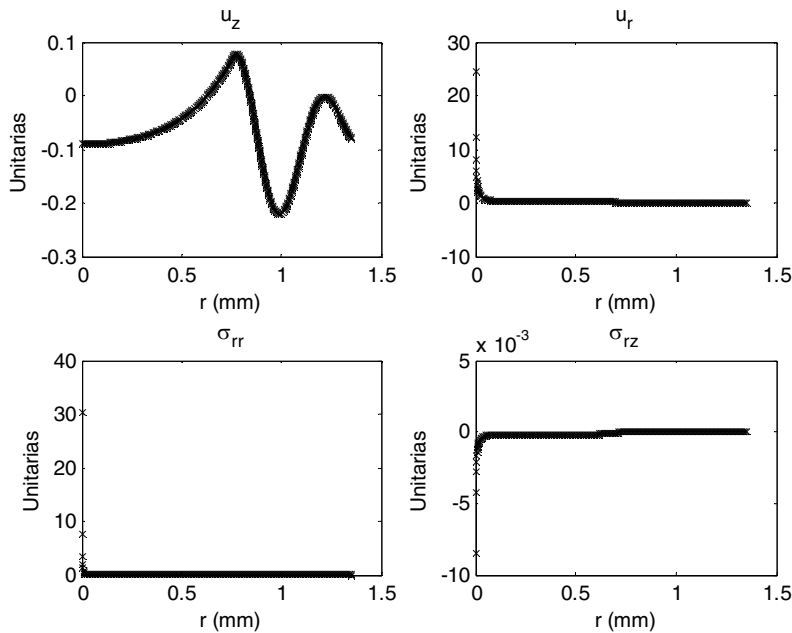


Figura 4.12. Perfil del supuesto modo de propagación  $f = 1.8060$  MHz,  $c_{ph} = 2270.0$  m/s, atenuación = -21.7090 dB/m con funciones de Hankel en las dos capas.

Observamos como cerca del eje de simetría ( $r=0$ ) las funciones tienden a infinito. Esto podría deberse a dos causas. En primer lugar, podría ser que este no fuera un modo de propagación real, y que por tanto no cumpliera las restricciones impuestas, en particular la de tener magnitudes finitas en la proximidad del eje de simetría. En segundo lugar, podría deberse a que, al estar utilizando las funciones de Hankel en la primera capa, en las proximidades del eje de simetría ( $r=0$ ) tenemos dos magnitudes, con valores que tienden a infinito, restándose. Esto, podría ocasionar el que las tensiones y/o los desplazamientos tiendan a infinito cerca del eje de simetría ( $r=0$ ). Obsérvese que este problema con las funciones de Hankel en la primera capa no aparece al obtener los modos de propagación, ya que en ese caso no se evalúan dichas funciones en  $r=0$ . Sin embargo, al tratar de representar el perfil de dichos modos, si que



podemos tener este problema. Entonces, lo que hacemos ahora es usar funciones de Bessel en la primera capa y funciones de Hankel en la segunda. Con esta variante del modelo, para el modo de propagación anterior de la Figura 4.11 se sigue obteniendo el mismo perfil del modo de propagación. Sin embargo, para el supuesto modo de propagación que estamos ahora analizando, obtenemos el siguiente perfil:

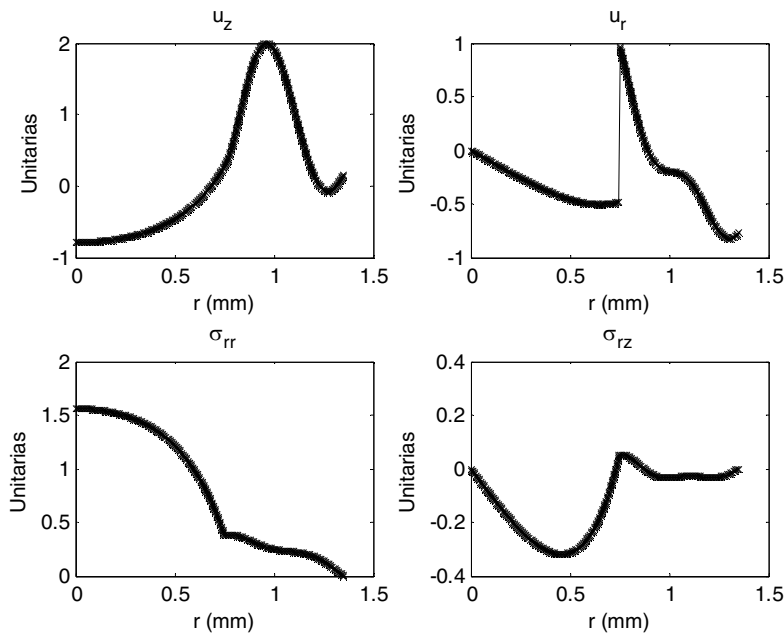


Figura 4.13. Forma del supuesto modo de propagación  $f = 1.8060$  MHz,  $c_{ph} = 2270.0$  m/s, atenuación = -21.7090 dB/m con funciones de Bessel en la primera capa.

En esta gráfica, observamos que se verifica que tenemos magnitudes finitas en  $r=0$  y que en el radio externo la tensión es nula pero, sin embargo, no hay continuidad de la componente  $u_r$  del desplazamiento. No tiene sentido físico que no haya continuidad del vector de desplazamientos. Verificamos, por tanto, como efectivamente éste no es un modo de propagación real sino un artefacto de nuestra metodología.

Finalmente analizamos el modo de propagación de velocidad inferior en los siguientes dos puntos, usando funciones de Bessel en la primera capa y de Hankel en la segunda capa:

$$f = 6.0062 \text{ MHz}$$

$$c_{ph} = 758.7065 \text{ m/s}$$

$$\text{atenuación} = -7.8236e+004 \text{ dB/m}$$

$$f = 1.1992 \text{ MHz}$$

$$c_{ph} = 1427.3 \text{ m/s}$$

$$\text{atenuación} = -1.2575e+004 \text{ dB/m}$$

Estos puntos como vemos se caracterizan por tener una atenuación extremadamente elevada.

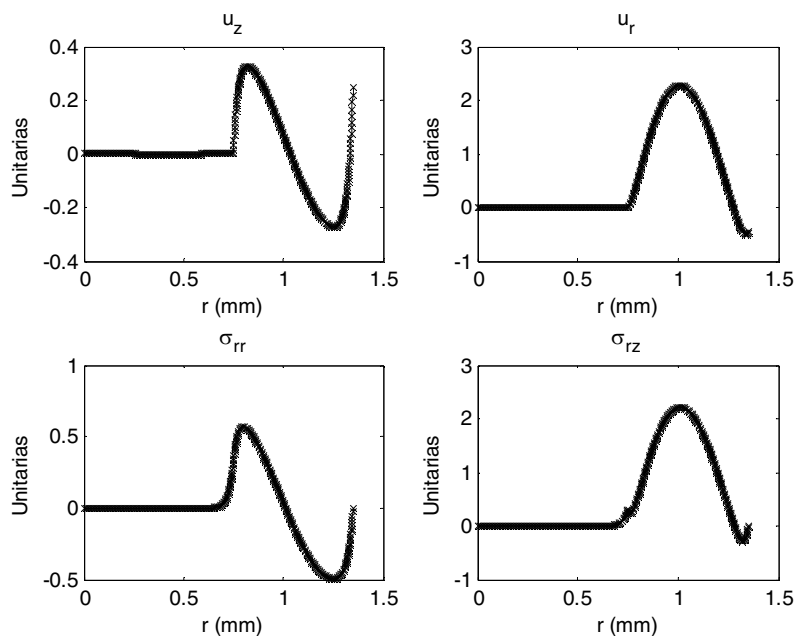


Figura 4.14. Perfil del supuesto modo de propagación  $f=6.0062\text{MHz}$   $c_{ph}=758.7065\text{m/s}$  atenuación= $-7.8236e+004\text{dB/m}$  con funciones de Bessel en la primera capa.

En la figura, se observa que se verifican las restricciones impuestas y que es un modo que se propaga fundamentalmente a través del plástico.

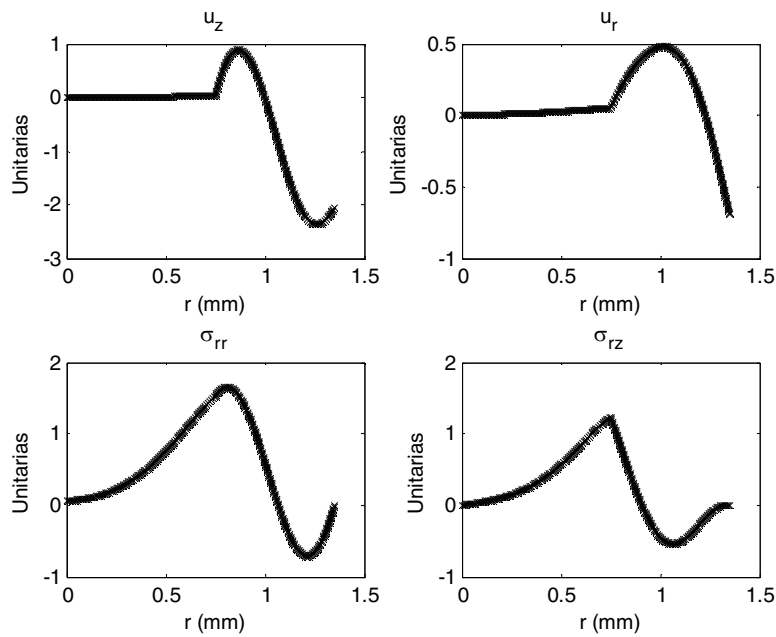


Figura 4.15. Forma del supuesto modo de propagación  $f=1.1992\text{MHz}$   $c_{ph}=1427.3\text{m/s}$  atenuación= $1.2575e+004\text{dB/m}$  con funciones de Bessel en la primera capa

Como se observa en estas gráficas, este es un modo que se propaga principalmente a través del plástico lo que explica su elevada atenuación. Resulta extraño el hecho de que no se aprecia correlación con la frecuencia con que se simula en estas dos últimas gráficas. Se verifican todas las condiciones impuestas, magnitudes finitas en  $r=0$ , continuidad en el radio intermedio y tensión nula en la superficie libre, creemos, por tanto, que es un modo de propagación real. Sin embargo, hay que señalar que el algoritmo dejaba de converger adecuadamente para este modo a partir de  $7\text{MHz}$ , posiblemente debido a los valores extremadamente altos de atenuación. Además, tiene una zona con velocidad de grupo negativa y la velocidad a la que tiende el modo para frecuencias altas no coincide con la velocidad transversal del cobre como sucede en los demás modos. Sin embargo, el hecho de que los primeros modos de propagación tienden a una velocidad límite diferente es algo que Armenàkas [49, 50] ya señalaba en cilindros compuestos. En cuanto a la velocidad de grupo negativa, como ya hemos señalado, no es un criterio excluyente según Rattanawangcharoen, Shah y Datta [57], Vollmann y Dual [95] Meeker y Meitzler [53]. Por tanto, hay ciertas dudas sobre la verdadera naturaleza de esta solución, si bien, dado que verifica las restricciones impuestas, creemos que se trata de un modo real del sistema.

## 5 MONTAJE EXPERIMENTAL

### 5.1. Montajes preliminares

Se estuvo durante un tiempo prolongado trabajando en sucesivas formas de montaje que mejorara fundamentalmente la relación señal-ruido. Estos montajes se pueden agrupar en las siguientes clases:

- Según el tipo de transductores empleados.
- Según el tipo de acoplamiento
- Según el medio de transmisión.

#### 5.1.1. Según tipo de transductores empleados

##### 5.1.1.1. Clasificación

El transductor, es un elemento capaz de transformar o convertir un determinado tipo de energía de entrada, en otra diferente de salida. En nuestro caso utilizamos transductores electroacústicos que realizan la conversión de señales electromagnéticas en elásticas y viceversa. Es un elemento clave del sistema, que hemos utilizado para emitir y recibir las señales elásticas. En particular, hemos empleado elementos piezoeléctricos, los cuales se caracterizan por adquirir una polarización eléctrica al ser sometidos a tensiones mecánicas, siendo dicho proceso reversible. El siguiente esquema resume la clasificación según el tipo de transductores empleados.

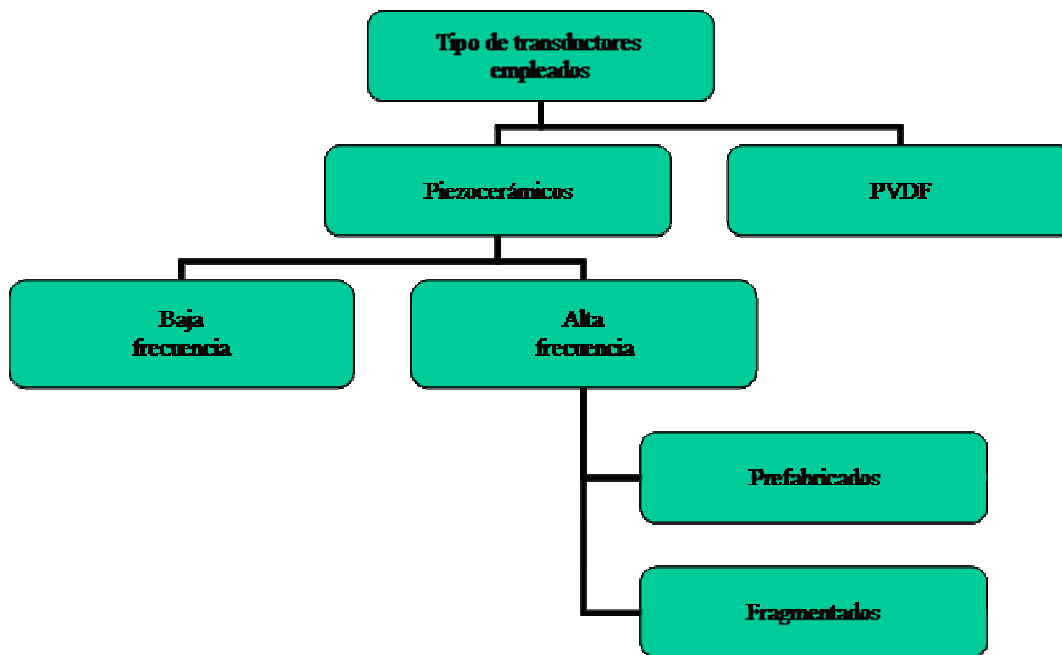


Figura 5.1. Clasificación según tipo de transductores

No se han probado transductores magnetostrictivos que si bien tienen la ventaja de no requerir un contacto directo, son menos eficientes en cuanto a conversión de energía elástica en eléctrica y viceversa, especialmente para altas frecuencias [96]. Zhang, Que y Lei [111] analizaron en cilindros huecos parámetros de diseño de transductores formados por varios elementos. Sin embargo dadas las dimensiones del cable y las limitaciones tecnológicas de nuestros montajes esta configuración no hemos podido probarla.

### 5.1.1.2. Piezocerámicos

La piezoelectricidad fue descubierta en 1880 por J. y P. Curie. En 1946, los científicos descubrieron que las cerámicas de  $\text{BaTiO}_3$  podían hacerse piezoeléctricas mediante la aplicación de un campo externo. Esto condujo al descubrimiento en 1956 del Circonato de Titanato de Plomo (PZT), con mayor sensibilidad y mayor rango de operación, que reemplazó al  $\text{BaTiO}_3$  y es todavía la piezocerámica más utilizada.

Las piezocerámicas tienen varias ventajas, incluidas la mayor sensibilidad, la facilidad de fabricación en múltiples formas y tamaños, así como la posibilidad de polarizar la cerámica en cualquier dirección [112]. Las cerámicas piezoeléctricas están compuestas por pequeños granos (cristales), cada uno de los cuales contiene dominios en los que los dipolos eléctricos están alineados. Los granos están orientados inicialmente de forma aleatoria de modo que la cerámica no tiene propiedades piezoeléctricas. La aplicación de un campo suficientemente fuerte de DC puede orientar los dominios, siendo posible crear una polarización remanente. Esta posibilidad de cambiar la orientación de los dominios es conocida como ferroelectricidad.

#### **a) Baja frecuencia**

Para los ensayos de baja frecuencia (kHz) se emplearon discos piezocerámicos convencionales de Ariston usados típicamente como zumbadores. Se emplearon los modelos:

- 19CH, diámetro 19mm, frecuencia  $3500\text{Hz} \pm 500\text{Hz}$ , capacidad  $24.000 \pm 30\%$  pF, sin electrodo de realimentación
- 27CH, diámetro 27mm, frecuencia  $4100\text{Hz} \pm 500\text{Hz}$ , capacidad  $28.000 \pm 30\%$  pF, sin electrodo de realimentación
- 20EE65, frecuencia  $6500\text{Hz} \pm 500\text{Hz}$ , diámetro exterior 20mm, diámetro del piezoeléctrico: 14mm, sin electrodo de realimentación

La siguiente figura muestra uno de dichos discos unido a un cable eléctrico mediante una resina epoxy. Como se observa en la figura el tamaño de los piezoeléctricos usados como zumbadores es bastante grande.

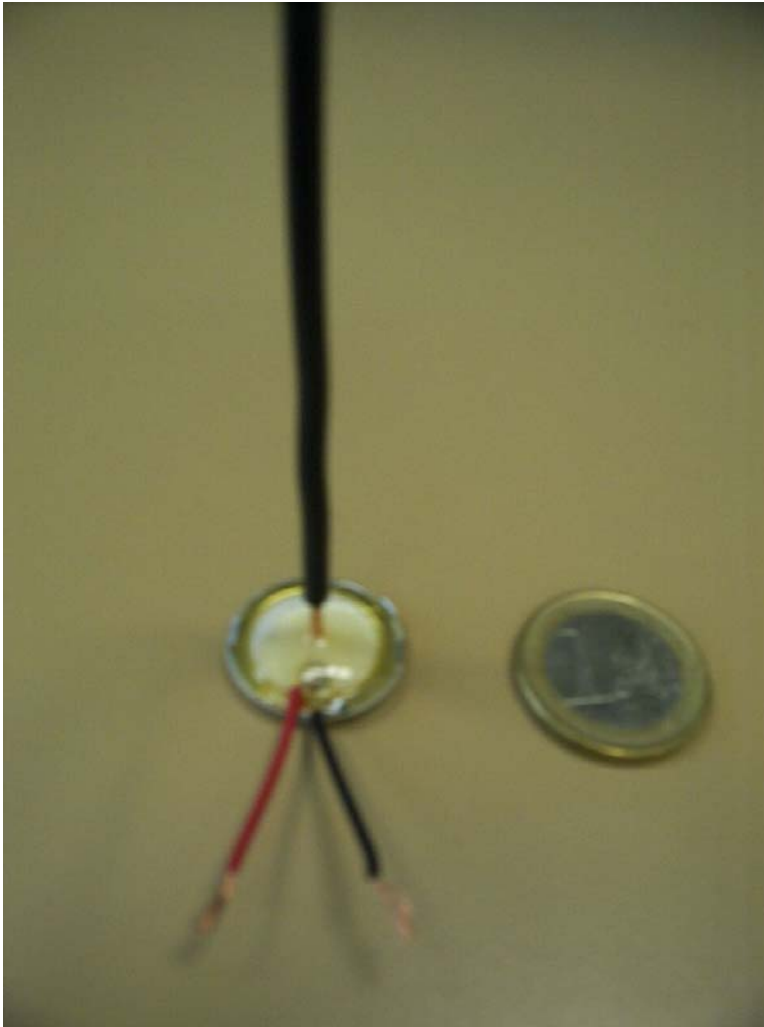


Figura 5.2. Piezocerámica de baja frecuencia

## b) Alta frecuencia

Para alta frecuencia (MHz) se utilizaron discos piezocerámicos Pz27 de Ferroperm. Inicialmente se trabajó con discos prefabricados de diferentes tamaños; pero al final se observó que para inyectar adecuadamente las señales en el cable, era más adecuado utilizar piezoeléctricos con el mismo diámetro que el cobre (sección  $1.5\text{mm}^2$ ), para lo que se procedió a fragmentar los discos dado que no se encontraron discos prefabricados con este diámetro.

## b.1) Discos prefabricados

Utilizamos discos prefabricados de diferentes espesores y diámetros. El espesor del piezoeléctrico condiciona su frecuencia de resonancia para los modos longitudinales. Se emplearon los siguientes piezoeléctricos:

Espesor = 0.2mm. Frecuencia de resonancia = 10MHz. Diámetros=3mm, 7mm, 10mm

Espesor = 0.15mm. Frecuencia de resonancia = 13.6MHz. Diámetro = 12.7mm

Espesor = 0.13mm. Frecuencia de resonancia = 15MHz. Diámetro = 3mm

En la siguiente figura se muestran algunos de los discos que se emplearon, todos con forma de disco, pero de diferentes diámetros y espesores.



Figura 5.3. Discos piezoeléctricos prefabricados de alta frecuencia



## b.2) Discos fragmentados

Para poder llegar a medir señales elásticas de alta frecuencia fue clave utilizar elementos piezocerámicos de igual diámetro que el cable. No encontramos piezoeléctricos prefabricados que reunieran esta condición, por lo que procedimos a soldar los piezoeléctricos al cable para a continuación romper el piezoeléctrico a las dimensiones del cable. Este método de fabricación produjo un salto sorprendente en el rango de frecuencias que a partir de entonces pudimos medir. En la siguiente figura se muestra un piezoeléctrico fragmentado y uno prefabricado unidos a un cable eléctrico. Como se observa en dicha figura el piezoeléctrico fragmentado apenas se distingue del cable eléctrico. El cable del electrodo izquierdo está soldado al piezoeléctrico, mientras que el derecho se soldaba directamente al cable.

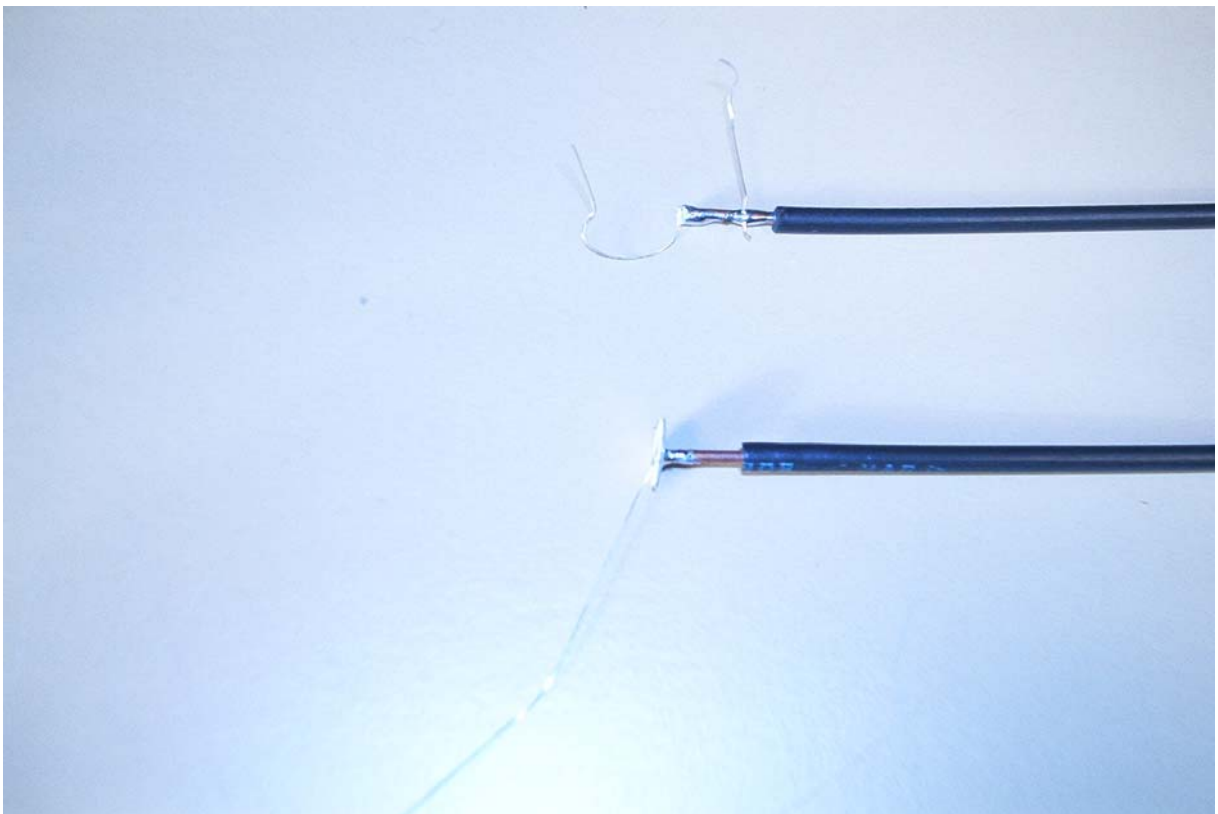


Figura 5.4. Cable con plástico, con piezoeléctrico fragmentado de las dimensiones del cable (superior) y con piezoeléctrico de 7mm de diámetro (inferior).

### 5.1.1.3. Fluoruro de polivinilideno (PVDF)

La existencia de piezoelectricidad en polímeros se conoce desde 1924. En 1969, Kawai descubrió la piezoelectricidad del PVDF [113]. El PVDF es un material menos rígido que las piezocerámicas, con una impedancia muy baja y más adecuado para su uso como receptor que como emisor. La unión de los electrodos no puede realizarse por soldadura. Recurrimos para ellos a una resina epoxy conductora. Hay que tener especial cuidado al cortar en trozos el PVDF para evitar cortocircuitos en la zona de corte, para ello se recomienda usar una cuchilla afilada. Hay y Rose [114] los recomiendan por la facilidad de los procesos de fabricación e instalación, así como por ser bastante económicos. Se utilizó PVDF de Piezotech S.A. de las siguientes características:  $9\mu\text{m}$  P(VDF-VF3) copolímero, metalizado con Pt+Au por las dos caras

Este material atrajo nuestro interés por tener un mayor ancho de banda que los piezoeléctricos, pero los desechamos porque la señal recibida era demasiado débil.



Figura 5.5. Fluoruro de polivinilideno (PVDF)

Como se aprecia en la Figura 5.5 hubo que ir recortándolo para poder utilizarlo en los ensayos. También en la figura viene especificada la polaridad del material. En la parte superior vemos el electrodo positivo.

## **5.1.2. Según tipos de acoplamiento**

### **5.1.2.1. Clasificación**

El tipo de acoplamiento entre el transductor y el medio de transmisión fue un elemento clave en los ensayos previos de muy baja frecuencia. En estos ensayos fue clave usar un acoplamiento dieléctrico que separara el potencial eléctrico del transductor del potencial del medio de transmisión. En los ensayos de alta frecuencia, se recurrió finalmente sin embargo, a un acoplamiento conductor que no separaba potenciales. El cable se ponía a tierra en estos casos. Para poder realizar medidas con este tipo de acoplamiento, se recurrió a utilizar señales del tipo del escalón, cuya respuesta eléctrica es casi instantánea mientras que la elástica aparece desfasada. Más adelante, se usaron señales en las que la tensión se fijaba a cero a partir de un instante, de modo que era posible medir la respuesta elástica en un instante en el que la respuesta electromagnética era nula. A continuación se muestra la clasificación según el tipo de acoplamiento.

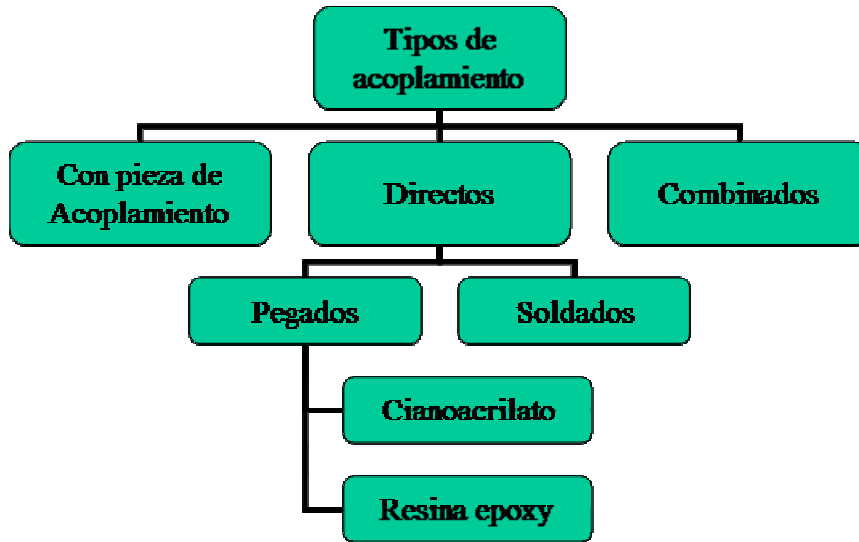


Figura 5.6. Clasificación según tipo de acoplamiento.

### 5.1.2.2. A través de pieza de acoplamiento

Se fabricaron piezas cónicas de cobre, de diámetro de la base 9mm y longitud 20mm. El elemento piezoeléctrico se situaba en la base y en el vértice del cono se fijaba el cable eléctrico. La unión al cable se realizaba mediante soldadura. Se hicieron dos variantes: una tenía un orificio en el vértice para facilitar la soldadura y la otro no. La variante con orificio resultó ser mucho más útil, pues facilitaba enormemente la soldadura. Fueron al final desechados porque no aportaban mejor respuesta que una unión directa.



Figura 5.7. Acoplamiento cónico entre el piezoeléctrico y el cable.

A continuación se muestran los planos de las piezas de acoplamiento.

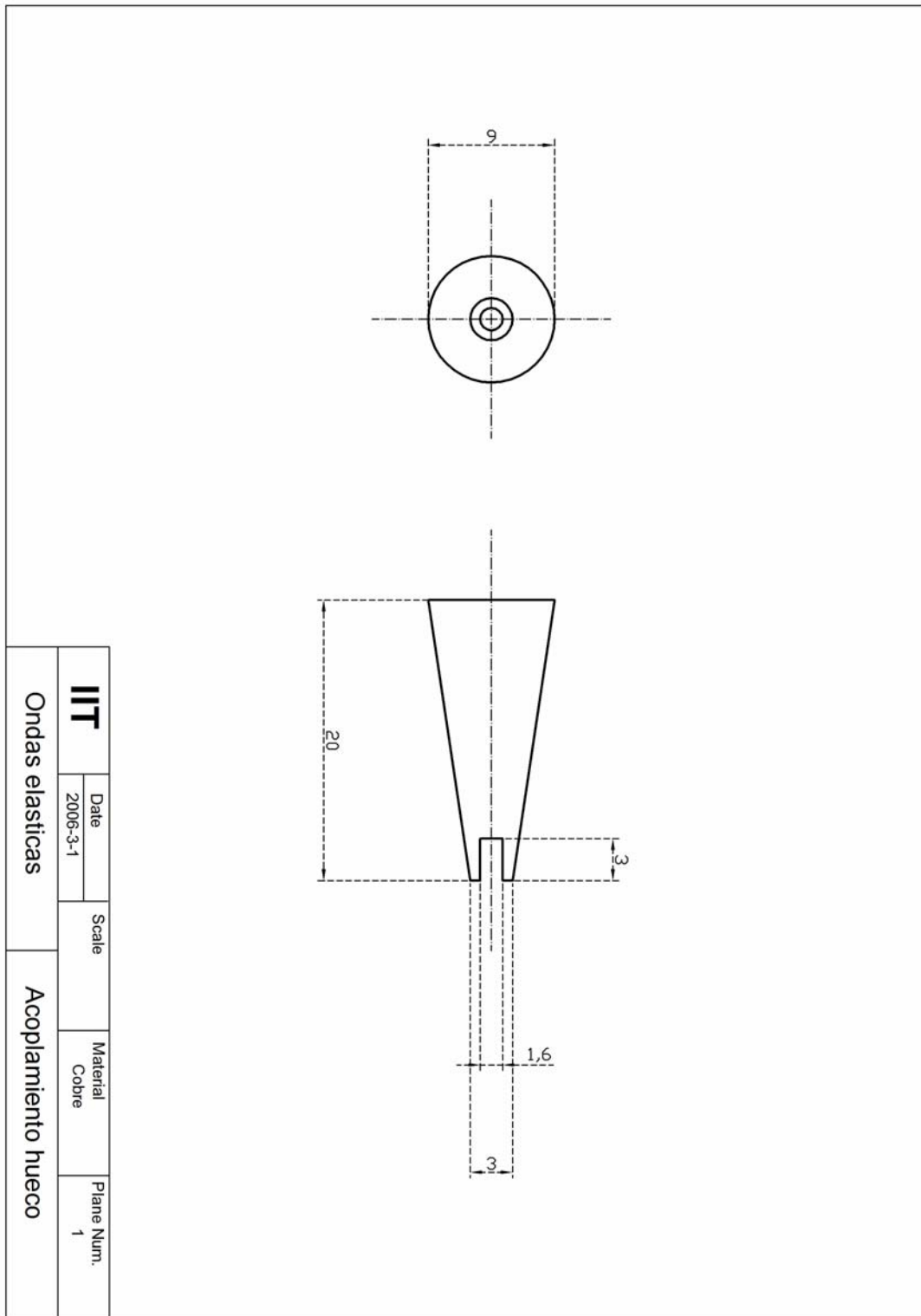


Figura 5.8. Plano del acoplamiento hueco. Unidades (mm).

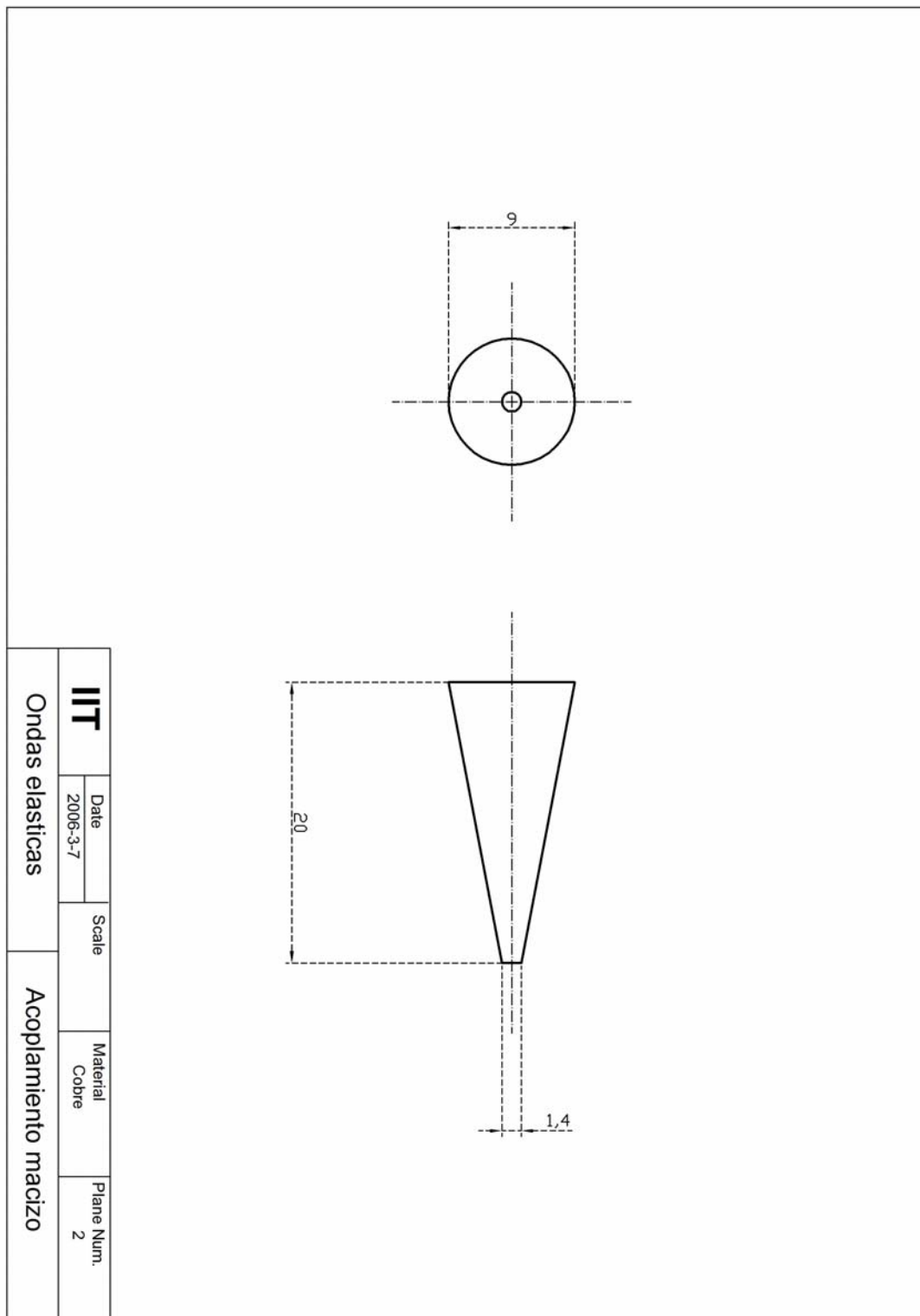


Figura 5.9. Plano del acoplamiento macizo. Unidades (mm).

### 5.1.2.3. Directos

En la configuración directa, el elemento piezoeléctrico se sitúa en un extremo del medio de transmisión, emitiendo ondas longitudinales en la dirección del eje de simetría. Dentro de esta categoría encontramos uniones mediante pegado y mediante soldadura.

#### a) Pegados

Este tipo de acoplamiento, permite aislar eléctricamente el potencial del transductor del potencial del medio de transmisión, en el caso de que este último sea metálico. Para ello, es necesario dar una primera capa al transductor y dejarla secar para que dicha capa actúe como aislante. Por último, se da una nueva capa para unir el transductor al medio de transmisión.

##### a.1) Cianoacrilato

Este tipo de unión se utilizó por ejemplo en los ensayos con barra de cobre, así como en los ensayos con plástico.

##### a.2) Resina epoxy

En los montajes con piezoeléctricos de baja frecuencia (ver Figura 5.2), el acoplamiento se realizaba mediante resina epoxy aislante con dos capas para conseguir aislamiento galvánico.



## b) Soldados

Este tipo de unión tiene el inconveniente de que no consigue aislamiento galvánico entre el medio de transmisión y los piezoeléctricos emisores y receptores. Sin embargo, esto no fue crítico, ya que, el tipo de ensayos realizados separaba de forma natural la respuesta elástica de la electromagnética en el dominio del tiempo. La siguiente figura muestra el piezoeléctrico emisor acoplado al cable eléctrico, así como los cables de los electrodos. El cable del electrodo izquierdo está soldado directamente al cable.

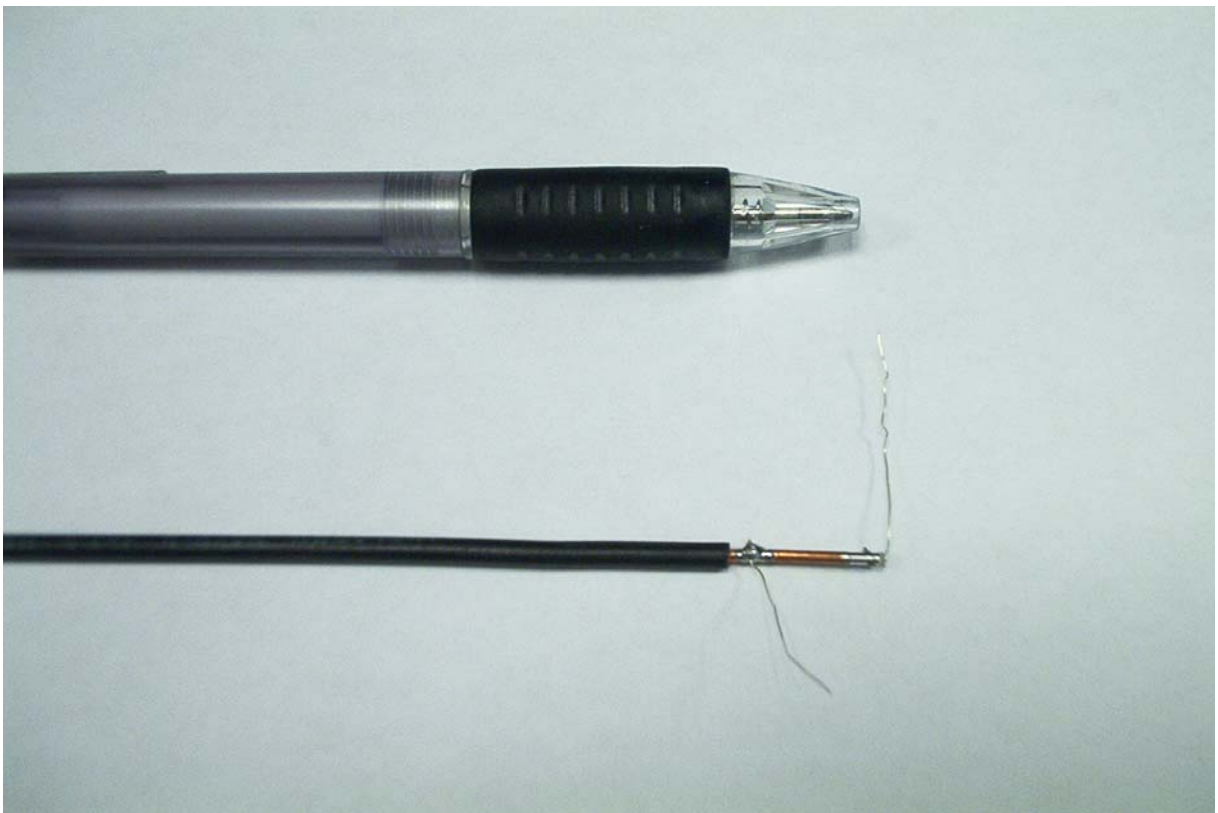


Figura 5.10. Terminación del cable con piezoeléctrico emisor y cables de los electrodos.

### 5.1.2.4. Combinados

Una de las variantes que utilizamos tratando de maximizar la señal elástica transmitida fue usar configuraciones tipo “sándwich” como la que muestra la siguiente fotografía. Se

probaron diferentes configuraciones recibiendo en “sándwich” y emitiendo en longitudinal o viceversa. No se apreciaron ventajas en cuanto a magnitud de la señal elástica transmitida, por lo que, finalmente, optamos por la configuración más sencilla, con el piezoeléctrico unido directamente a un extremo del cable. En la figura se muestra la configuración empleada. En dicha figura, los piezoeléctricos empleados son de mayor espesor que en otras figuras, ya que son piezoeléctricos con una menor frecuencia de resonancia (1MHz).



Figura 5.11. Piezoeléctricos de frecuencia de resonancia 1MHz en modo longitudinal y modo “sándwich”.

### 5.1.3. Según medio de transmisión

#### 5.1.3.1. Clasificación

Aunque el objetivo final era analizar la respuesta de los cables eléctricos con su aislamiento de plástico (H07V-U), en las etapas previas utilizamos también otros medios de transmisión en los cuales las señales elásticas se propagaban más fácilmente, como por ejemplo, barras de cobre y cable esmaltado. Además de estos medios de transmisión metálicos, también se realizaron ensayos sólo con plástico PVC, para determinar las propiedades del mismo. A continuación se resume la clasificación según el medio de transmisión.

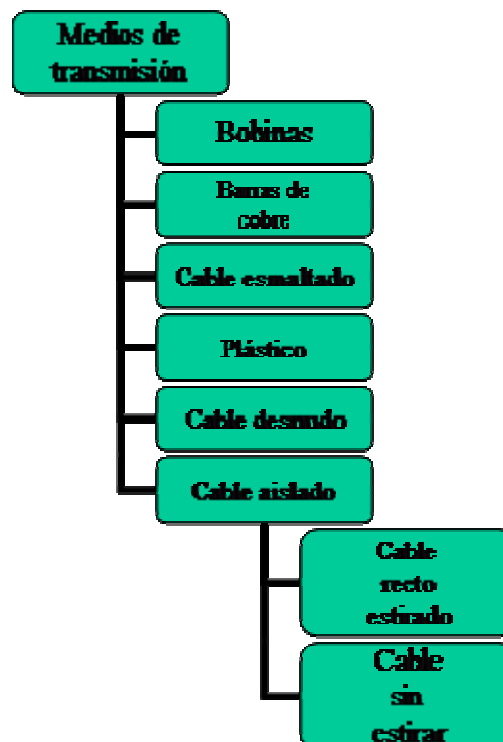


Figura 5.12. Clasificación según medio de transmisión.

### 5.1.3.2. Bobinas

En los ensayos de baja frecuencia se trabajó con cable bobinado. Este tipo de montaje se desechó ya que se observó que a través de segmentos de cable en contacto se propagaba también la señal elástica. Además, con las cortas distancias necesarias en los ensayos de alta frecuencia no era necesario bobinar el cable.

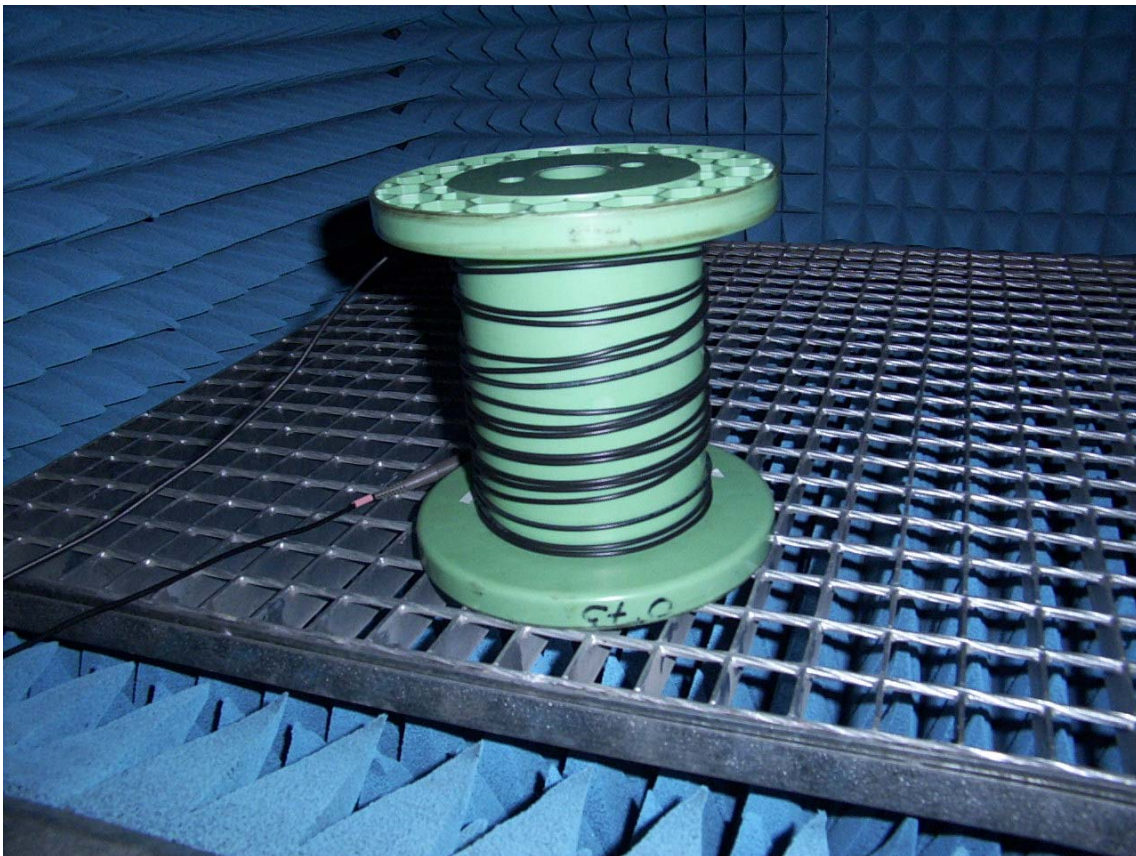


Figura 5.13. Cable bobinado dentro de la cámara anecoica.

En la figura se muestra el cable bobinado en el interior de la cámara anecoica. Los segmentos del cable en la bobina están lo más separados posible para intentar evitar en la medida propagaciones entre un segmento y el siguiente.

### 5.1.3.3. Barras de cobre

Tras bastantes meses tratando infructuosamente de medir señales elásticas de alta frecuencia (10MHz) en los cables eléctricos, iniciamos una serie de ensayos con una barra rígida de cobre electrolítico de 1cm de diámetro, una estructura más simple que el cable. La solución general a este tipo de estructuras se encuentra en la literatura, incluso con viscoelasticidad [59, 60]. La siguiente figura muestra un detalle de la barra, con un elemento piezoeléctrico en uno de los extremos, que puede servir tanto como emisor como receptor. En la fotografía se observa también uno de los cables de los electrodos. El punto eléctrico correspondiente a la otra cara del piezoeléctrico se tomaba directamente de la barra de cobre, siendo este un punto eléctrico común a los dos piezoeléctricos y que se fijaba a tierra.

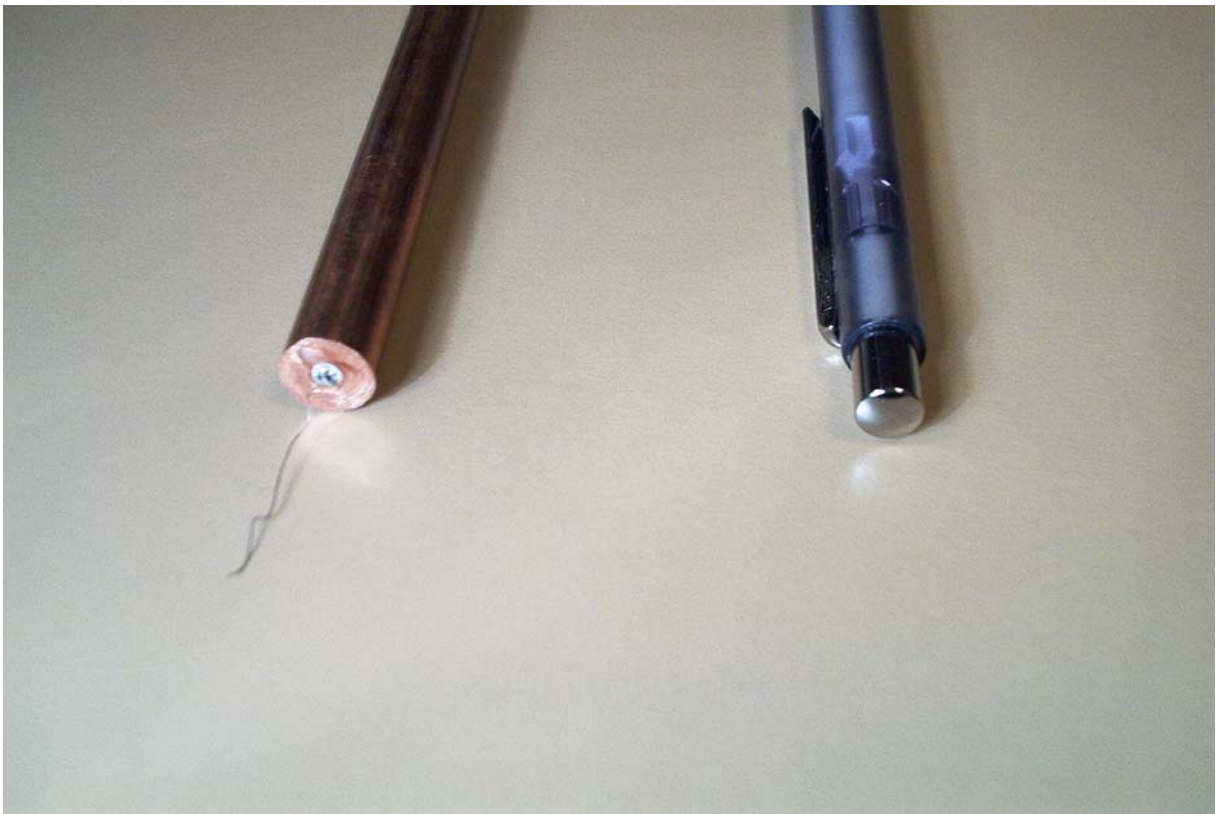


Figura 5.14. Detalle de barra de cobre de diámetro 1cm, con piezoeléctrico de diámetro 3mm y frecuencia de resonancia 10MHz. Cable de uno de los electrodos soldado directamente al piezoeléctrico. Piezoeléctrico unido a la barra con cianoacrilato.

Tratando de encontrar señales elásticas de alta frecuencia en esta estructura más simplificada, una de las variantes de topología, que resultó ser clave, fue realizar ensayos con barras de cobre de distintos diámetros a las que se conectaron piezoeléctricos emisores/receptores también de diferentes diámetros. Los ensayos realizados con este tipo de barras demostraron que la componente de alta frecuencia (10MHz) solo aparecía cuando las dimensiones de los piezoeléctricos eran iguales o inferiores a los de la barra. Este hecho, nos sirvió para intuir que con el cable eléctrico, no se podía soldar directamente el piezoeléctrico (de diámetro mayor o igual de 3mm) al cable y dejarlo tal cual, sino que, el piezoeléctrico debe reducirse a las dimensiones del cable, para poder transmitir adecuadamente las componentes de alta frecuencia por el cable.

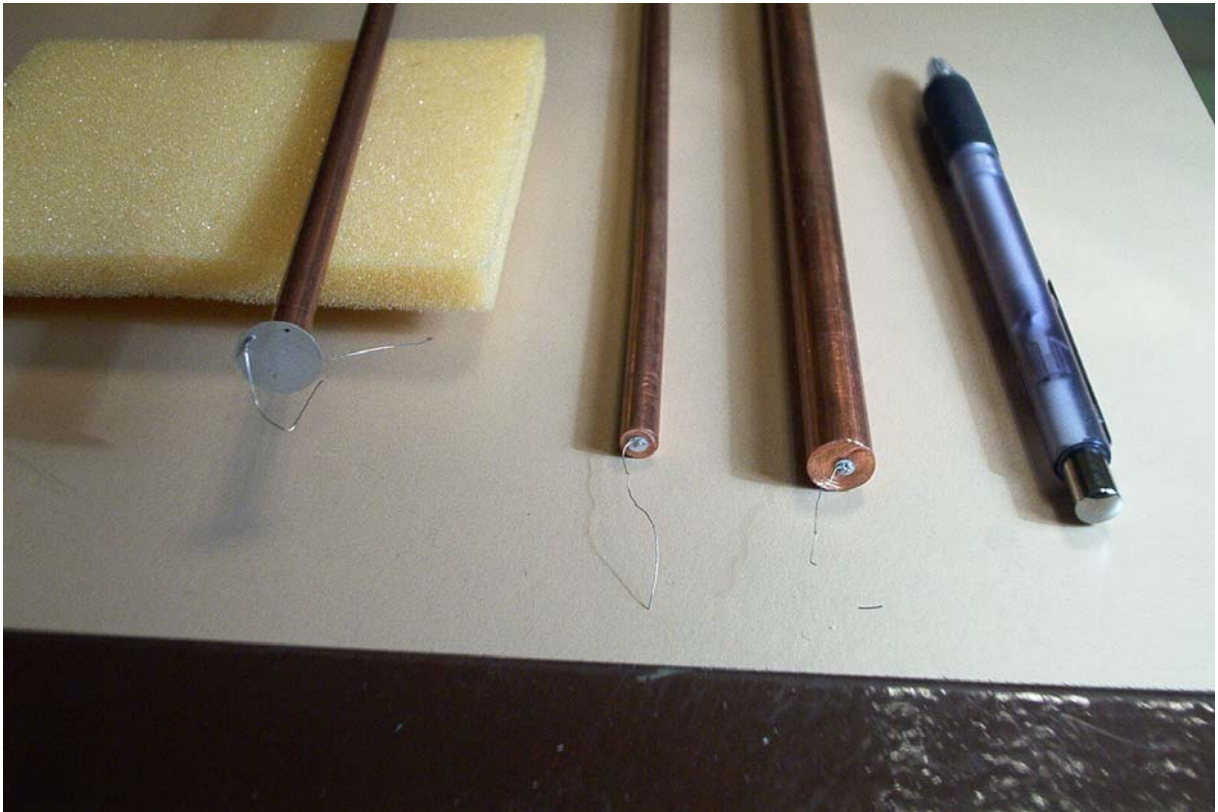


Figura 5.15. Detalle de barra de cobre con piezoeléctricos de frecuencia de resonancia 10MHz, ambos (barra y piezoeléctricos) de diferentes diámetros. Piezoeléctrico unido a la barra con cianoacrilato.

Como muestra la figura utilizamos barras con diferentes diámetros: 6 mm y 10mm y longitudes de 0.5m y 1m.

#### 5.1.3.4. Cable esmaltado

Como paso intermedio entre el cable desnudo y el cable con plástico se realizaron ensayos con cable esmaltado, pero dejamos de analizar este tipo de cable en cuanto empezaron a aparecer resultados en el cable con plástico que era el objeto de nuestro estudio.



Figura 5.16. Cable esmaltado

#### 5.1.3.5. Plástico

Se realizaron algunos ensayos con piezoeléctricos de baja frecuencia utilizando solo el plástico de los cables (sin el cobre) para estudiar los parámetros de velocidad y atenuación del plástico.



Figura 5.17. Plástico sin cobre con piezoeléctricos de baja frecuencia.

### 5.1.3.6. Cable desnudo

También para evaluar la influencia de la cubierta de plástico, así como el cobre de forma aislada, un grupo de tests consistió en ensayar los cables completos. Después, quitar con cuidado sus cubiertas y volverlos a ensayar “desnudos”. Por un lado, los resultados se contrastaron con el modelo de una sola capa para cable desnudo. Por otro lado, se compararon las diferencias entre cable completo y el cable desnudo, lo cual produjo resultados muy interesantes. Se utilizaron las siguientes distancias: 10cm, 25cm, 50cm, 100cm





Figura 5.18. Detalle de cable de cobre con y sin cubierta de plástico, con piezoeléctrico soldado al cable y fragmentado a las dimensiones del mismo, y con cables de los electrodos, uno de ellos (el superior) soldado directamente al cable.

### 5.1.3.7. Cable aislado

#### a) Cable recto estirado

Inicialmente, se trabajó pre-estirando los cables, para que estuvieran totalmente rectos. Tras una serie de ensayos con este tipo de cables, se observó que las medidas eran muy sensibles al estiramiento del cable. En función de si el cable se estiraba mucho o poco, se recibía más o menos señal. Esto, podría deberse al hecho de que al estirar el cable la cubierta de plástico se separa del núcleo de cobre, apareciendo aire en la interfase, por lo que el cable tiende a adoptar un comportamiento más parecido al del cable sin aislante, atenuando así menos la señal. Este hecho, nos llevó a utilizar cable sin estirar y por tanto con cierta curvatura. El modelo teórico que empleamos, sin embargo, sigue siendo por simplicidad el de cable recto.

Sin embargo, dado que la velocidad de ondas longitudinales en el cobre es de unos 5000m/s, y como estamos analizando señales de 10MHz, la longitud de onda de estas señales es de unos 0.5mm. Dado que el radio de curvatura de los cables es notablemente superior, podemos suponer como aceptable la simplificación de cable recto. Estudios para estructuras con curvas pueden consultarse en [15], empleando coordenadas toroidales. Pero dado que las ecuaciones de Helmholtz no son separables en coordenadas toroidales, no es posible resolverlas con un modelo analítico como el que se analiza en esta tesis, sino que es necesario recurrir a modelos de elementos finitos. Rose y Zhao [16] han analizado experimentalmente tuberías con curvas, constatando la dificultad de la detección de defectos en estructuras con curvas, debido a la complejidad de la geometría y a la conversión de modos. Ellos, proponen el empleo de los modos de flexión, generados mediante un conjunto de piezoeléctricos a lo largo de la circunferencia, con señales de excitación desfasadas. Nishino, Yoshida, Cho y Takemoto [99] también analizan tuberías con curvas, constatando la conversión entre los modos  $L(0,1)$  y el  $F(1,1)$ , y siendo mayor la conversión hacia el modo  $F(1,1)$  conforme aumenta el ángulo de la curva. Otra alternativa que utilizan autores como Anastasi y Madaras [31], es realizar los ensayos fijando un extremo del cable y poniendo un pequeño peso en el otro extremo del cable.

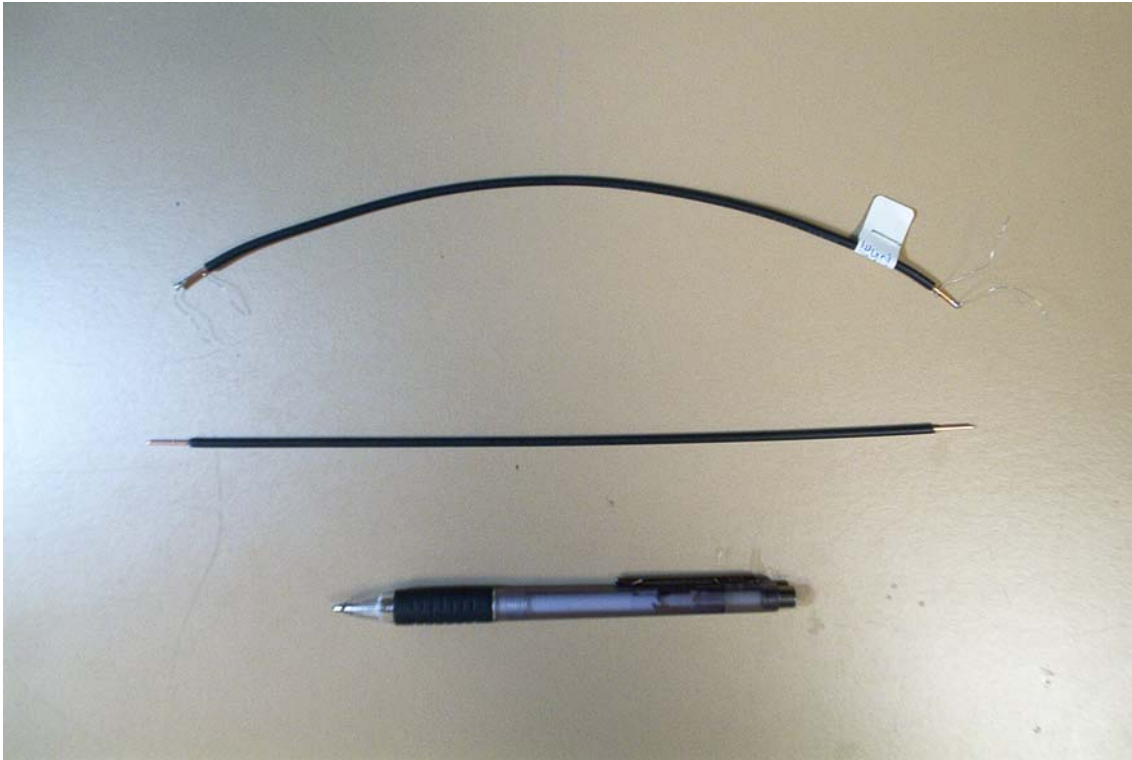


Figura 5.19. Cable con plástico estirado y sin estirar.

## b) Cable sin estirar

Se utilizaron cables con las siguientes distancias: 10cm, 25cm, 40cm, 50cm, 100cm

## 5.2. Montaje experimental definitivo

Para preparar los ensayos, en primer lugar se corta el cable a la longitud necesaria. A continuación se procede a dejar perfectamente planos los dos extremos del cable mediante una esmeriladora. El alambre del electrodo en contacto con el cable, se suelda directamente sobre el cable. Se aplica entonces estaño sobre uno de los extremos del cable. A continuación, se coloca el extremo perfectamente plano del cable (ahora recubierto de estaño) sobre un piezoeléctrico de mayores dimensiones que el cable. Se aplica calor con un soldador sobre el

extremo del cable y entonces se presiona ligeramente sobre el piezoeléctrico. El estaño del cable pasa al piezoeléctrico, poniéndose en contacto el extremo plano del cable con una de las caras planas del piezoeléctrico y realizándose la soldadura. Los extremos del piezoeléctrico se rompen entonces para dejarlo con las mismas dimensiones que el diámetro del cable. Se toma entonces un alambre metálico para el otro electrodo del piezoeléctrico que acabamos de soldar al cable. Se aplica una pizca de estaño sobre el alambre y se suelda el alambre con el electrodo exterior del cable. Se comprueba con un polímetro que no hay cortocircuito entre los dos electrodos del piezoeléctrico. El mismo proceso se repite con otro piezoeléctrico en el otro extremo del cable.

Un generador de funciones arbitrarias (G1) se conectó al emisor (B1) y un osciloscopio digital (P1) al receptor (B2). Las señales eléctricas del generador de señales se transforman en señales elásticas por el emisor y se propagan a lo largo del cable (W1) hasta que alcanzan al receptor, donde vuelven a convertirse en señales eléctricas y se capturan por el osciloscopio. Los cables se colocaron en una cámara anecoica (A1) para reducir el ruido electromagnético.

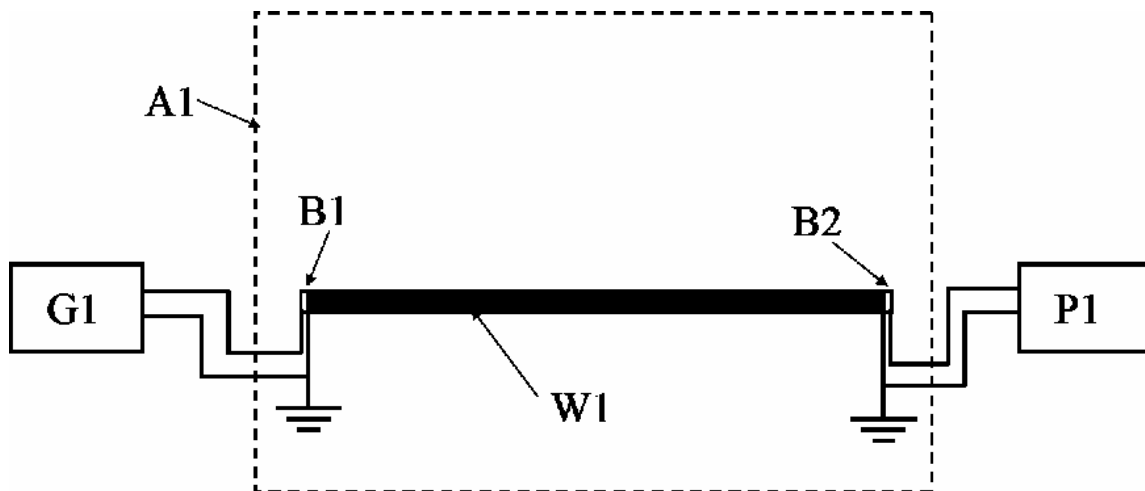


Figura 5.20. Montaje experimental

REFERENCIA	EQUIPO	DESCRIPCIÓN
A1	Cámara anecoica	Cámara anecoica electromagnética
B1,B2	Piezoeléctricos.	Material PZ27 Sección 1.5mm <sup>2</sup> Frecuencia: 10MHz
G1	Generador arbitrario de señales	AFG3252 Tektronix. 240MHz. 2GS/s.
P1	Osciloscopio	TDS 5104. Tektronix. 1GHz. 5GS/s
W1	Cable	H07V-U Con y sin aislante. Sección del cobre: 1.5mm <sup>2</sup> .

Tabla 5.1. Resumen de elementos experimentales.

### 5.3. Procesamiento de la señal

En la estructura de cable con plástico conseguimos, finalmente, encontrar señal elástica de alta frecuencia, pero para llegar a este punto fueron necesarios una serie de pasos previos. Por un lado, como se ha comentado, fue clave el utilizar un piezoeléctrico con las mismas dimensiones que el cable. Por otro lado, también es crucial utilizar técnicas de promediado, técnica también usada por ejemplo por Anastasi y Madaras [31]. Cada uno de los experimentos consiste en realidad en el promedio de 10.000 ensayos. Para identificar la componente de alta frecuencia, además, había que localizarla en el instante de tiempo concreto en que se producía la respuesta. Con este fin, se registró inicialmente la respuesta temporal promediada a un escalón en el osciloscopio y se dividió por intervalos de tiempo. En cada uno de ellos, se realizó la transformada rápida de Fourier (FFT) de la señal. Lo que se buscaba y finalmente se encontró, era una componente elástica de alta frecuencia a la frecuencia de resonancia de los piezoeléctricos (10MHz).

El hecho de usar inicialmente la respuesta a escalón y luego señales con apagado de las mismas, fue especialmente interesante para separar en el tiempo la respuesta electromagnética (muy rápida) de la elástica (más lenta). Además del promedio temporal, se realizó también un promedio en el dominio de la frecuencia, realizando 50 desplazamientos de una muestra sobre la ventana temporal sobre la que se aplicaba la FFT. Sin embargo, el promedio de múltiples

ensayos en el dominio del tiempo tiene una característica muy importante que lo hace especialmente indicado para filtrar el ruido. Esta característica, es el hecho de que la señal elástica está sincronizada con el osciloscopio mediante el escalón de entrada, mientras que el ruido electromagnético debido a otras fuentes de ruido no tiene por que ir sincronizado con dicho escalón de entrada. Por lo tanto, ese ruido electromagnético procedente de otras fuentes se filtra al promediar en el tiempo. Esto no lo consigue el filtrado en el dominio de la frecuencia, el cual deja pasar igualmente señales sincronizadas o no con la señal de entrada.

A continuación, se muestra el impacto de la técnica de promediado. El caso que se analiza es un cable sin plástico de 50cm, con piezoeléctricos emisores y receptores de 10MHz en cada extremo. El generador de señales envía una señal de tipo escalón de 10V. El emisor la transforma en señal elástica. Al cabo de  $132.5\mu\text{s}$ , se recibe en el otro extremo la señal elástica de alta frecuencia que ha viajado a lo largo del cable, y que se corresponde con la resonancia de 10MHz del piezoeléctrico.

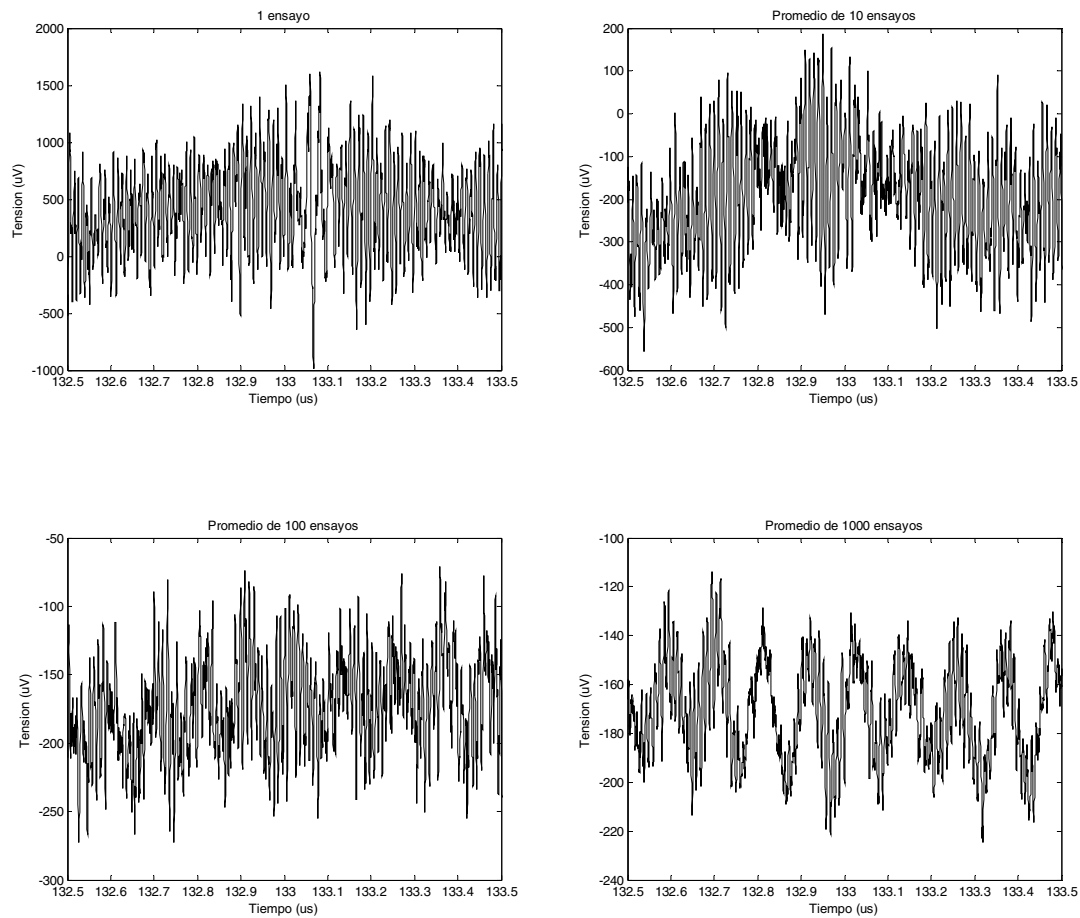


Figura 5.21. Cable sin plástico. Respuesta a escalón. Intervalo (132.5 $\mu$ s, 133.5 $\mu$ s). Realizando el promediado de 1,10,100 ó 1000 ensayos.

En la parte superior izquierda de la Figura 5.21 se observa el caso sin promediado con solamente un ensayo. En este caso, se observa únicamente mucho ruido de entorno a 1mV. En la parte superior derecha, tenemos el caso de promediado de 10 ensayos. En esta medida seguimos teniendo básicamente ruido, pero observando el eje Y, se aprecia que la magnitud del ruido ya se ha reducido significativamente. En la parte inferior de la Figura 5.21, tenemos los promedios con 100 y 1000 ensayos, en los que ya se observa la componente de 10MHz, especialmente en el de 1000 ensayos. Recordemos que una ventaja de este tipo de promediado es que la señal elástica va sincronizada con el osciloscopio, por lo que al promediar no se pierde señal elástica. Sin embargo, la señal electromagnética procedente de otras fuentes no sincronizadas con el osciloscopio, se elimina al realizar el promediado.

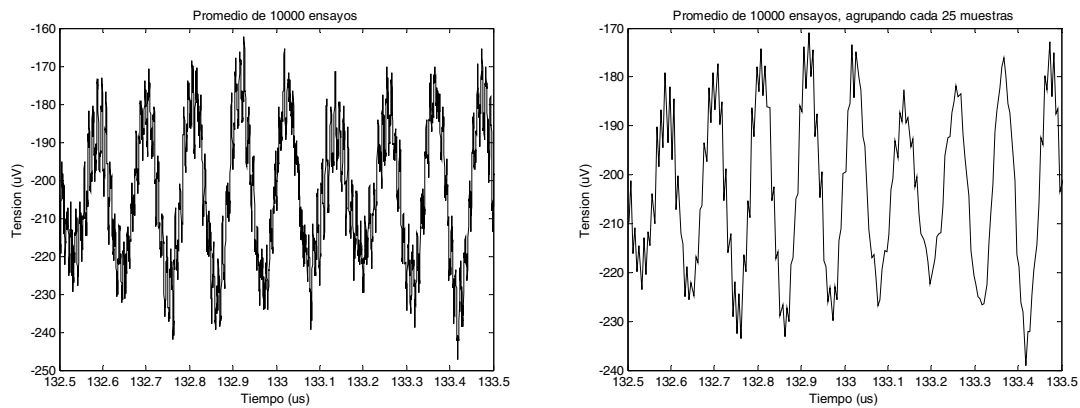


Figura 5.22. Cable sin plástico. Respuesta a escalón. Intervalo (132.5 $\mu$ s, 133.5 $\mu$ s). Realizando el promediado de 10.000 ensayos. Gráfica izquierda: sin agrupar muestras. Gráfica derecha: agrupando cada 25 muestras contiguas.

En la parte izquierda de la Figura 5.22 tenemos finalmente la señal resultante tras promediar 10.000 ensayos. El promedio de 10.000 ensayos requiere tener al osciloscopio capturando señales unas nueve horas, ya que capturamos 2.000.000 de muestras en cada ensayo, correspondientes a un intervalo total de 400 $\mu$ s. Es necesario realizar la captura de un intervalo de tiempo mayor al representado, porque al principio no sabemos exactamente dónde está la componente de alta frecuencia de la respuesta. De modo que se capturan 400 $\mu$ s, se separa por intervalos de tiempo la señal recibida, y se representa gráficamente (para cada intervalo) la señal temporal y su FFT, identificándose el punto exacto en el que aparece la componente de alta frecuencia. En este caso, observamos componente de 10MHz, al cabo de 132.5 $\mu$ s, justo antes del inicio de la respuesta de baja frecuencia al escalón.

Además, en la parte derecha de la Figura 5.22, se muestra como conseguimos reducir aún más el ruido de alta frecuencia si promediamos, en el eje temporal, con grupos de 25 muestras consecutivas. Comparando la parte superior izquierda de la Figura 5.21 con la parte derecha de la Figura 5.22, se concluye que partimos de señales muy débiles, con mucha componente de ruido, y vemos, como aplicando estas técnicas de promediado, conseguimos finalmente extraer la componente de la señal, eliminando el ruido.



## 6 ENSAYOS

### 6.1. Introducción a los ensayos

En este capítulo se exponen los ensayos experimentales. En primer lugar se obtiene la conductancia de los piezoeléctricos, donde se comprueba su frecuencia de resonancia. A continuación se inician una serie de ensayos para intentar detectar señal elástica de alta frecuencia. En primer lugar, se trabaja con una barra de cobre de 1cm de diámetro. Se realiza la respuesta a escalón. Dicho ensayo tiene dos ventajas. La primera de ellas es que (a diferencia por ejemplo de lo que sucede con la respuesta a régimen permanente sinusoidal) con la respuesta a escalón se separa la respuesta electromagnética (muy rápida) de la elástica (más lenta). La segunda ventaja, es que contiene armónicos de muchas frecuencias, lo que nos permite explorar, mediante un solo ensayo, una gran banda de frecuencia. La desventaja es que la amplitud de dichos armónicos disminuye con la frecuencia, lo que lo hace menos adecuado para la alta frecuencia. En este sentido podría haber sido también adecuada la respuesta a un pulso.

Los ensayos se repiten con cable sin plástico, y por último con cable con plástico. La respuesta temporal se divide en sucesivos intervalos de tiempo y se obtiene la transformada rápida de Fourier (FFT) promediada de cada uno de ellos. En todos estos experimentos se observa un pico a 10MHz, la frecuencia de resonancia del piezoeléctrico usualmente utilizado, lo que confirma que estamos midiendo señal elástica.

A continuación se obtiene la respuesta a un tren de ráfagas cortas sinusoidales. La ventaja de un tren de ráfagas es que se realiza el apagado, lo que permite (al igual que sucedía con el escalón) separar la respuesta electromagnética de la elástica. Al ser la señal básica una senoidal, esto permite obtener la respuesta a una frecuencia concreta. Sin embargo en este ensayo, al ser el un tren de ráfagas cortas, el transitorio de conexión del tren se mezcla con la respuesta a la senoidal, por lo que no se obtiene un único punto a la frecuencia de la senoidal de entrada. Por esto a continuación se ensaya con un tren de ráfagas largas senoidales, de tal

modo que el transitorio, debido a la conexión, se haya extinguido en el punto en que realizamos la medida. Comprobamos que, ahora sí, obtenemos solo salida a la misma frecuencia que la senoidal de entrada. El problema es que, al ser un tren de ráfagas largo, se superponen las respuestas de los diferentes modos de propagación y perdemos la información de la velocidad a la que viaja la energía. Sin embargo, dado los altos niveles de atenuación del sistema y los resultados de las simulaciones, la superposición de varios modos conduce a una atenuación que es prácticamente la del modo con menor atenuación. Esto permitirá la posterior comparación de los resultados experimentales con las simulaciones.

Dados los altos niveles de atenuación del sistema, todos los ensayos están promediados 10000 veces, lo que hace que se necesiten unas diez horas para cada uno de ellos. Por tanto, el obtener la respuesta en frecuencia punto a punto (con senoidales) habría sido una labor demasiado lenta. Por esta razón se emplea por último un tren de ráfagas largas de funciones *chirp*. Las funciones *chirp* se caracterizan porque su frecuencia varía entre un valor mínimo y uno máximo. Al ser un tren de ráfagas seguimos aislando la respuesta electromagnética de la elástica. Al mismo tiempo, con las funciones *chirp* exploramos simultáneamente varias frecuencias en el rango que nos interesa, sin que la baja frecuencia enmascare la respuesta a alta frecuencia. Repitiendo dicho ensayo a dos distancias diferentes y obteniendo las diferencias, tenemos finalmente la atenuación del cable en un rango de frecuencias.

## 6.2. Medida de la conductancia de los piezoeléctricos

La siguiente figura muestra la conductancia de varios piezoeléctricos, con frecuencia de resonancia de 10MHz, soldados directamente al cable:

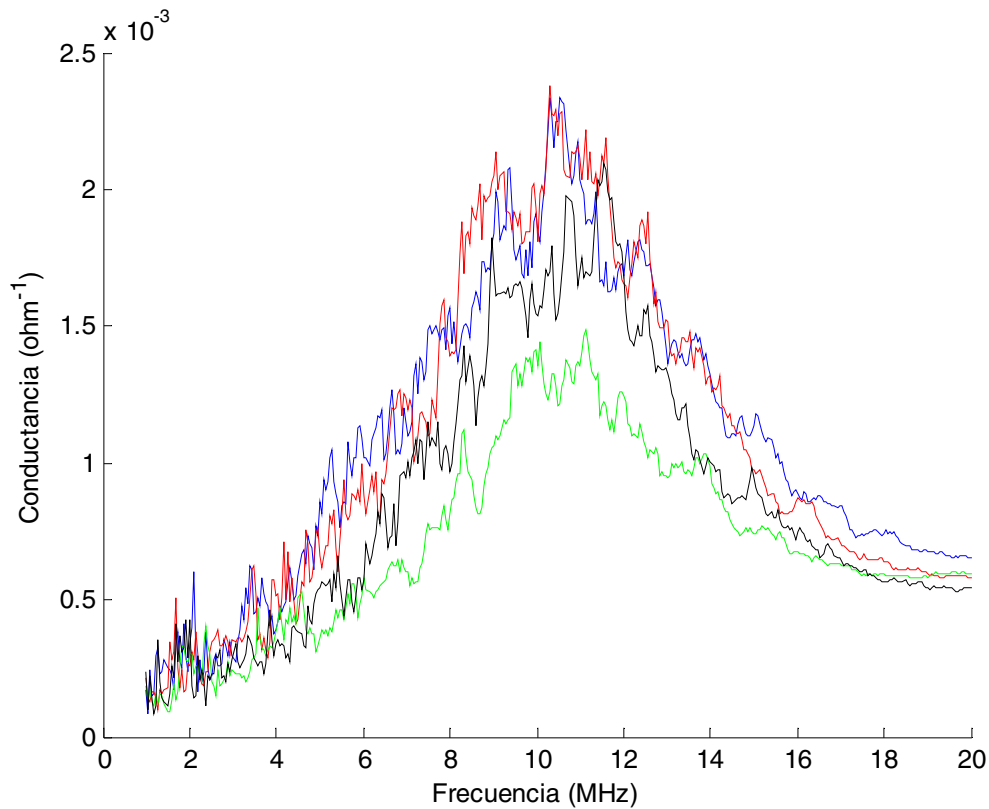


Figura 6.1. Conductancia de varios piezoeléctricos unidos al cable.

La resonancia de 10MHz se aprecia en todos los cables pero con un factor de calidad muy bajo, lo que lo hace apropiado para inyectar señal de gran ancho de banda, pero con el inconveniente de que inyecta poca energía.

### 6.3. Ensayos de respuesta a escalón con barra de cobre

Los siguientes ensayos fueron realizados con barra de cobre electrolítico de 0.5m de longitud y 1cm de diámetro y piezoeléctricos de 3mm de diámetro y 10MHz. Se hizo un ensayo de respuesta a escalón promediado.

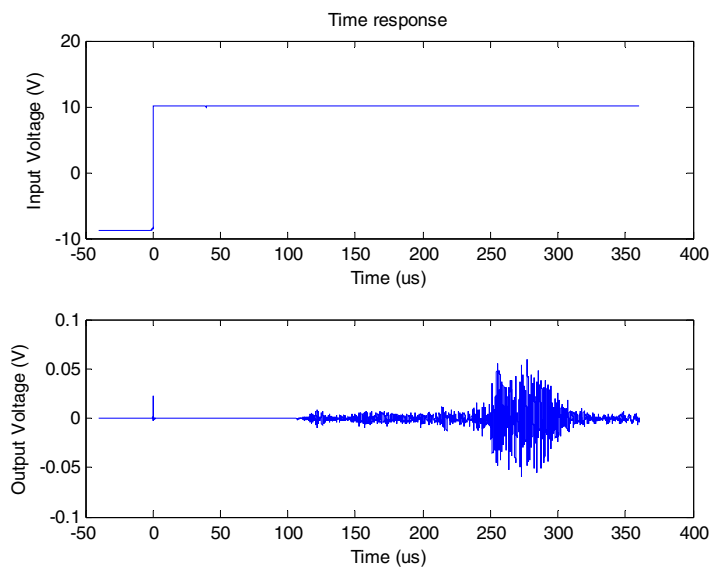


Figura 6.2. Respuesta temporal. Ensayo completo. Barra de cobre de longitud 0.5m y sección 1cm.

La respuesta a escalón tiene la ventaja de que separa la respuesta electromagnética (en  $0\mu\text{s}$ ) de la respuesta elástica al escalón (a partir de unos  $100\mu\text{s}$ ). Esto se debe a que la velocidad de propagación de las ondas elásticas es bastante menor que la de las ondas electromagnéticas. En este apartado se verá como en la FFT del intervalo ( $110.5\mu\text{s}, 120.7\mu\text{s}$ ) aparece un pico a la frecuencia de resonancia del piezoeléctrico (10MHz); ésta fue la primera medida que conseguimos realizar midiendo propagación de ondas elásticas entorno a los 10MHz. A continuación se detalla la respuesta temporal en los sucesivos intervalos de tiempo y sus correspondientes transformadas discretas de Fourier.

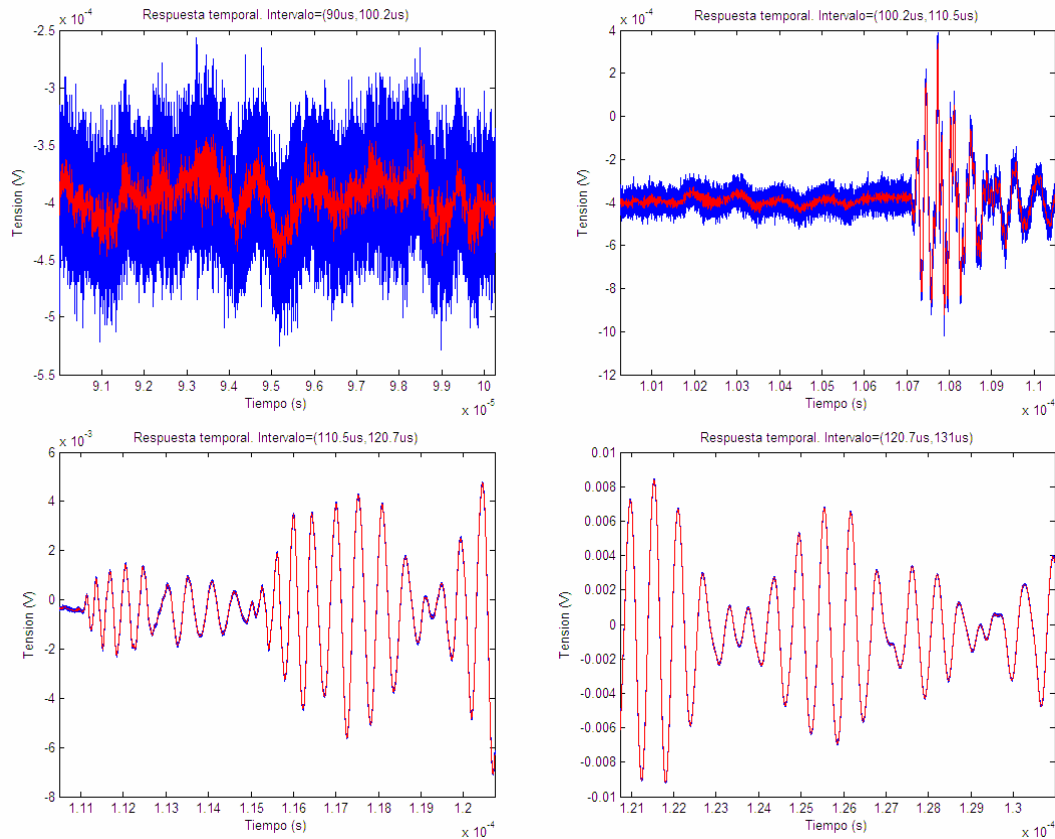


Figura 6.3. Respuesta temporal. Intervalo (90 $\mu$ s,131 $\mu$ s). Barra de cobre de longitud 0.5m y sección 1cm.

En la parte superior izquierda de la Figura 6.3, la respuesta temporal del intervalo de tiempo (90 $\mu$ s,100.2 $\mu$ s). En este intervalo de tiempo hay una señal totalmente ruidosa, debido a que la señal elástica todavía no ha alcanzado al receptor. En la parte superior derecha, el siguiente intervalo de tiempo (100.2 $\mu$ s,110.5 $\mu$ s) en el que empieza a aparecer señal elástica. La respuesta continúa en la parte inferior izquierda de la figura, donde se observa ya claramente la señal elástica de respuesta al escalón. El escalón inicial parece descomponerse en una serie de pulsos separados, debido a las diferentes velocidades de los modos de propagación. La señal elástica continúa en el siguiente intervalo de tiempo (120.7 $\mu$ s,131 $\mu$ s) en la parte inferior derecha de la figura. Las señales que se midieron son a simple vista de unos 1.25MHz (periodo 0.8 $\mu$ s).

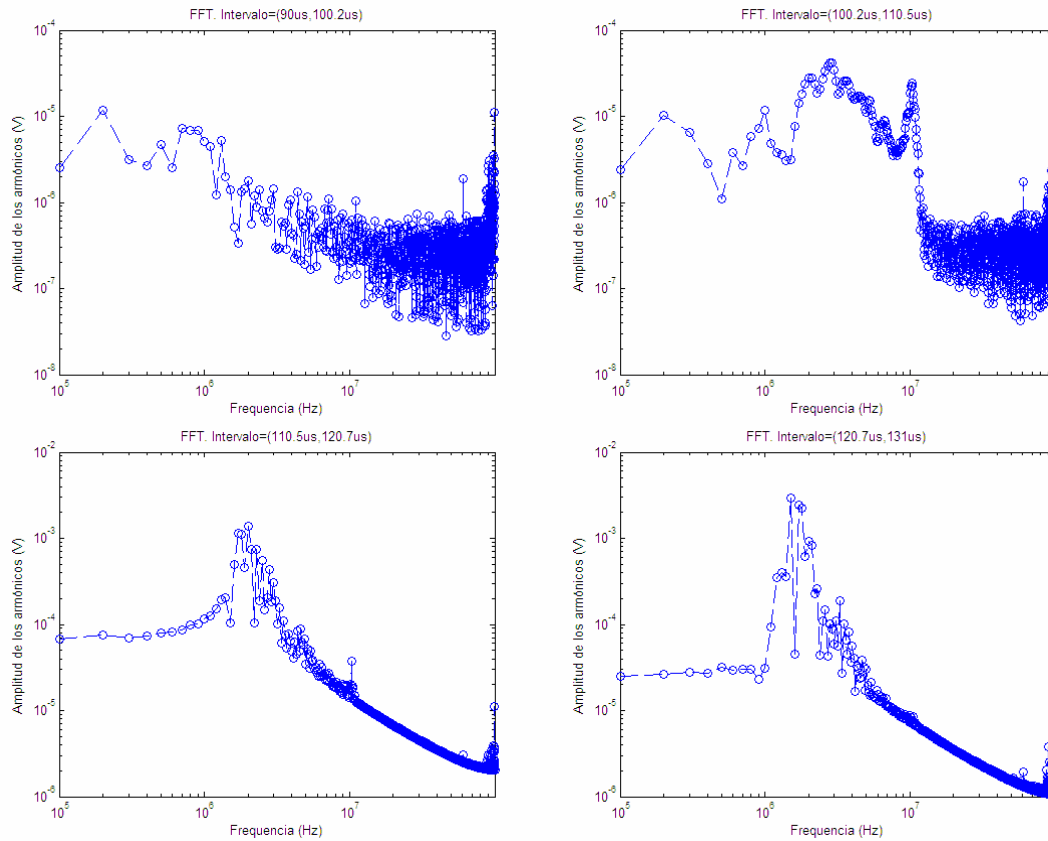


Figura 6.4. Transformada discreta de Fourier. Intervalo (90µs,131µs). Barra de cobre de longitud 0.5m y sección 1cm.

En la Figura 6.4 las transformadas discretas de Fourier correspondiente a las señales temporales de la Figura 6.3. Se confirma que, efectivamente, el primer intervalo correspondiente al intervalo (90µs,100.2µs) es básicamente ruido sin señal elástica alguna. Especialmente llamativa es la gran cantidad de ruido a muy alta frecuencia (100MHz) que también estará presente en los ensayos posteriores. En el siguiente intervalo de (100.2µs,110.5µs) efectivamente comienza a aparecer señal elástica, especialmente entorno a 3MHz. Pero además se aprecia también un pico cercano a 10MHz, la frecuencia de resonancia del piezoeléctrico. En el intervalo (110.5µs,120.7µs) se observa la señal elástica de media frecuencia (2MHz), pero también aparece claramente un pico a la frecuencia de resonancia del piezoeléctrico (10MHz). Está fue la primera medida que conseguimos realizar midiendo propagación de ondas elásticas entorno a los 10MHz. En el último intervalo de tiempo (120.7µs,131µs) la señal de media frecuencia continua estando presente pero ya no se observa la componente de 10MHz.

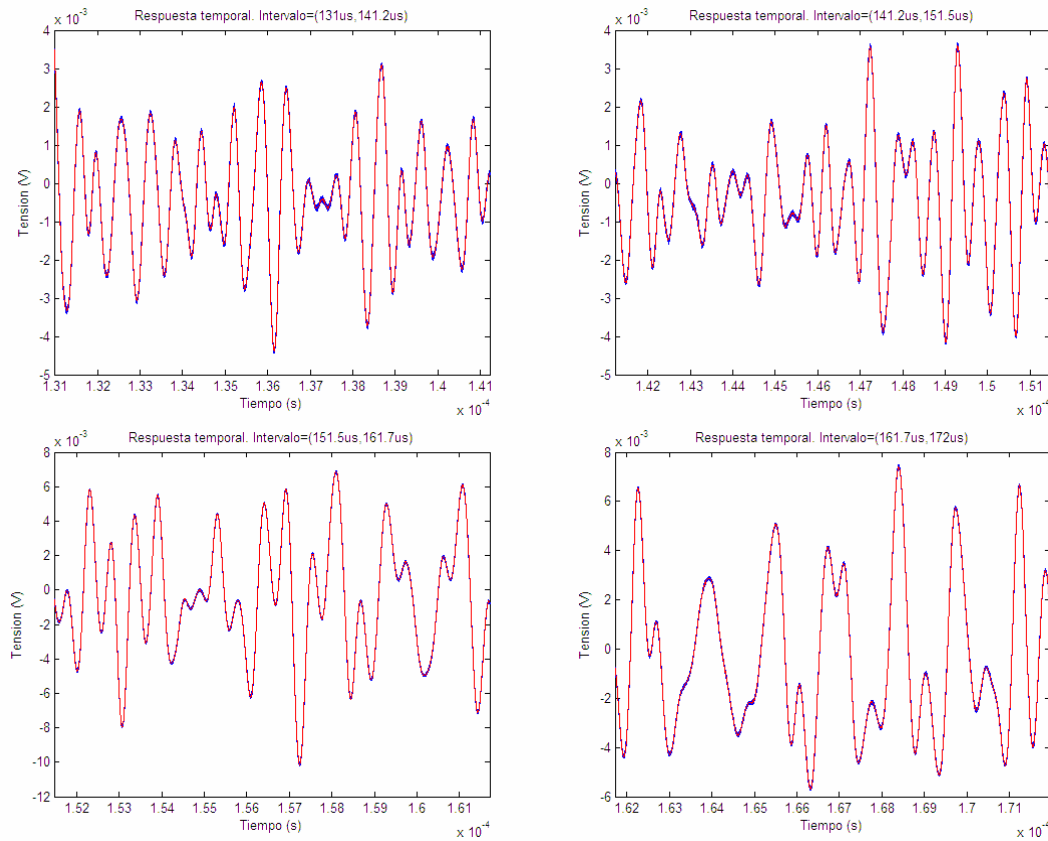


Figura 6.5. Respuesta temporal. Intervalo (131 $\mu$ s,172 $\mu$ s). Barra de cobre de longitud 0.5m y sección 1cm.

La respuesta temporal del intervalo (131 $\mu$ s,172 $\mu$ s) se representa en la Figura 6.5. La señal elástica no se ha extinguido todavía. La respuesta temporal en los últimos intervalos presenta bastantes irregularidades, posiblemente debido a que no estamos analizando la respuesta a un régimen permanente sino a un régimen transitorio. A continuación se muestra la transformada discreta de Fourier correspondiente a cada uno de los intervalos que acabamos de mostrar.

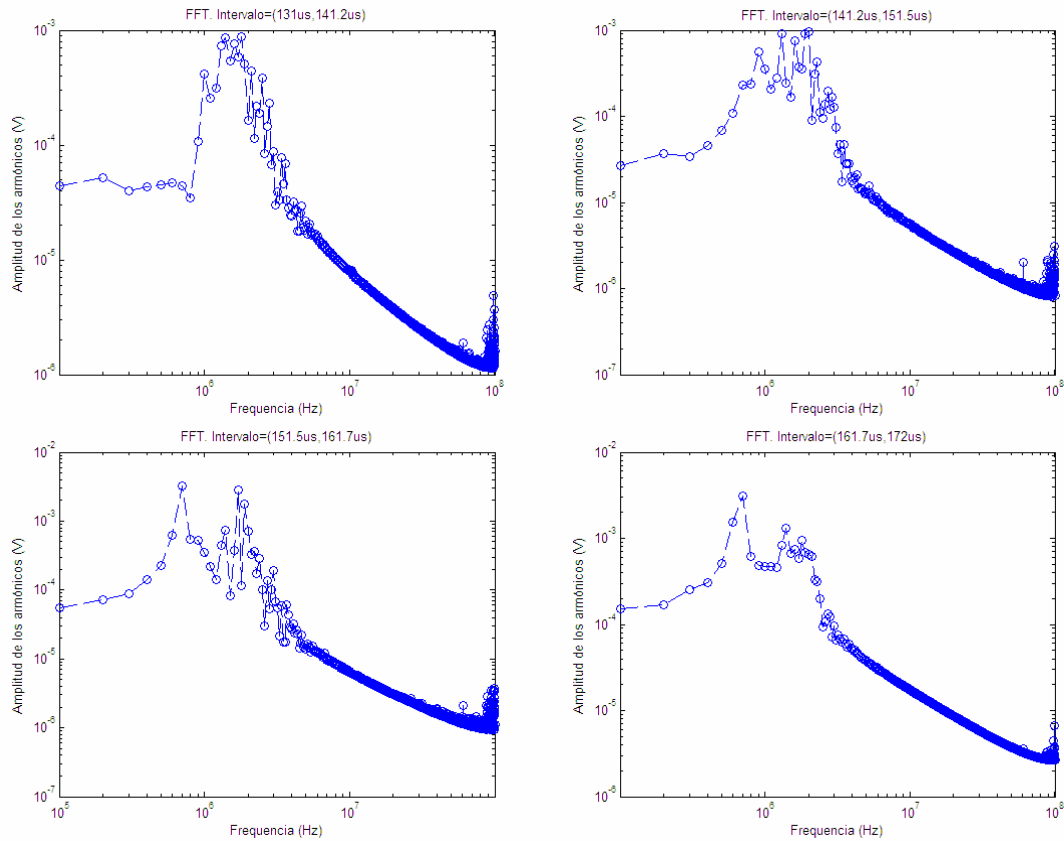


Figura 6.6. Transformada discreta de Fourier. Intervalo (131 $\mu$ s,172 $\mu$ s). Barra de cobre de longitud 0.5m y sección 1cm.

En este intervalo de tiempo (131 $\mu$ s,172 $\mu$ s) la señal elástica todavía no se ha extinguido pero es básicamente de frecuencias medias (1MHz). La componente de 10MHz ya no aparece en las gráficas. Esto puede deberse bien a que ya se ha extinguido, o bien a que es enmascarada por la señal de baja frecuencia. Recordemos además que estamos excitando con un escalón, por lo que el contenido en armónicos de la entrada (y con él el de la salida) no es homogéneo, sino que disminuye con la frecuencia, como se ilustra en la Figura 6.6.



## 6.4. Ensayos de respuesta a escalón con cable estirado sin plástico aislante

Los siguientes ensayos fueron realizados con cable de cobre estirado, sin plástico, de 0.5m de longitud y  $1.5\text{mm}^2$  de sección. Al referirnos a cable estirado queremos indicar que antes de la ejecución del ensayo se aplicó un estiramiento del cable, para dejarlo perfectamente recto, lo que sin embargo tiene el efecto secundario de disminuir ligeramente la sección del cobre. Este efecto secundario, como se comentará más adelante, puede tener bastantes consecuencias en el cable con plástico, pero no así en el cable sin plástico. Los piezoeléctricos, de frecuencia de resonancia 10MHz, se cortaron a las dimensiones del cable ( $1.5\text{mm}^2$  de sección). Se volvió a hacer un ensayo de respuesta a escalón promediando 10,000 ensayos.

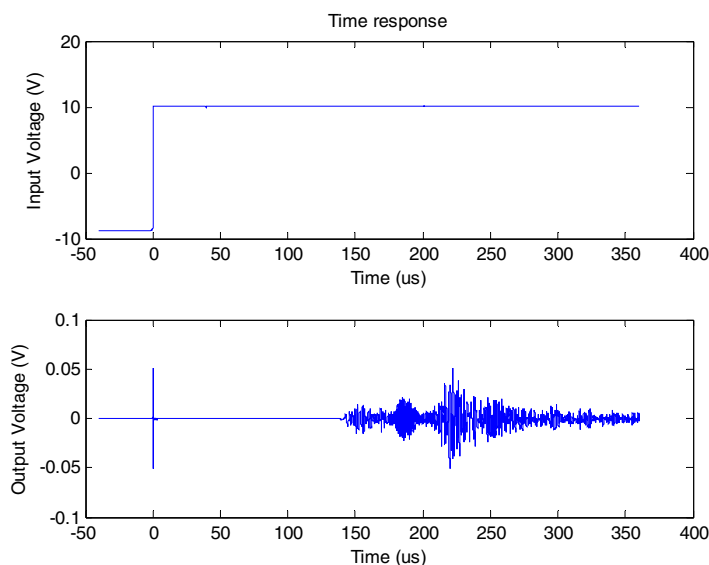


Figura 6.7. Respuesta temporal. Ensayo completo. Cable de cobre estirado sin aislante, de longitud 0.5m y sección  $1.5\text{mm}^2$ .

En este apartado veremos como, también en el cable sin plástico, aparece componente elástica de 10MHz en la zona de respuesta inicial al escalón, en particular, en el intervalo ( $131\mu\text{s}, 141.2\mu\text{s}$ ) (ver parte superior izquierda de Figura 6.12). A continuación vuelven a detallarse los sucesivos intervalos.

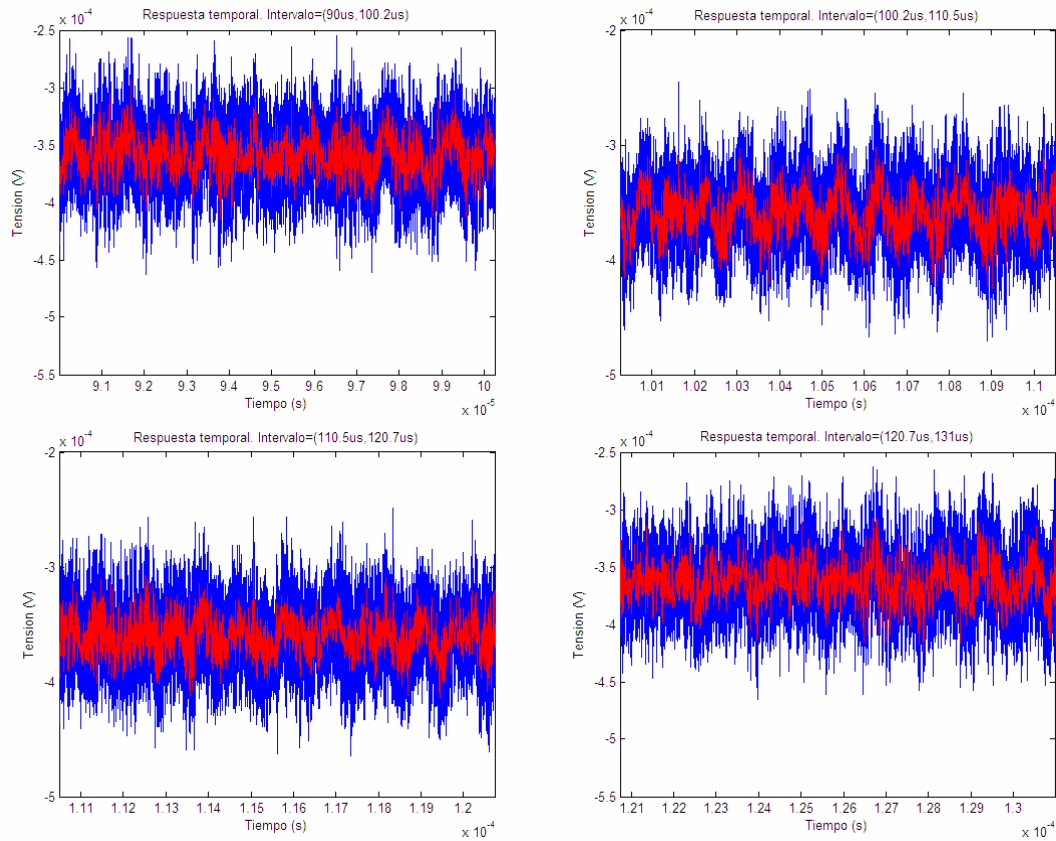


Figura 6.8. Respuesta temporal. Intervalo (90 $\mu$ s,131 $\mu$ s). Cable de cobre estirado sin aislante, de longitud 0.5m y sección 1.5mm<sup>2</sup>.

En el intervalo (90 $\mu$ s,131 $\mu$ s) tenemos básicamente ruido en el cable sin plástico. Dicho ruido parece estar formado por una componente de baja frecuencia (1MHz) y por otra de muy alta frecuencia.

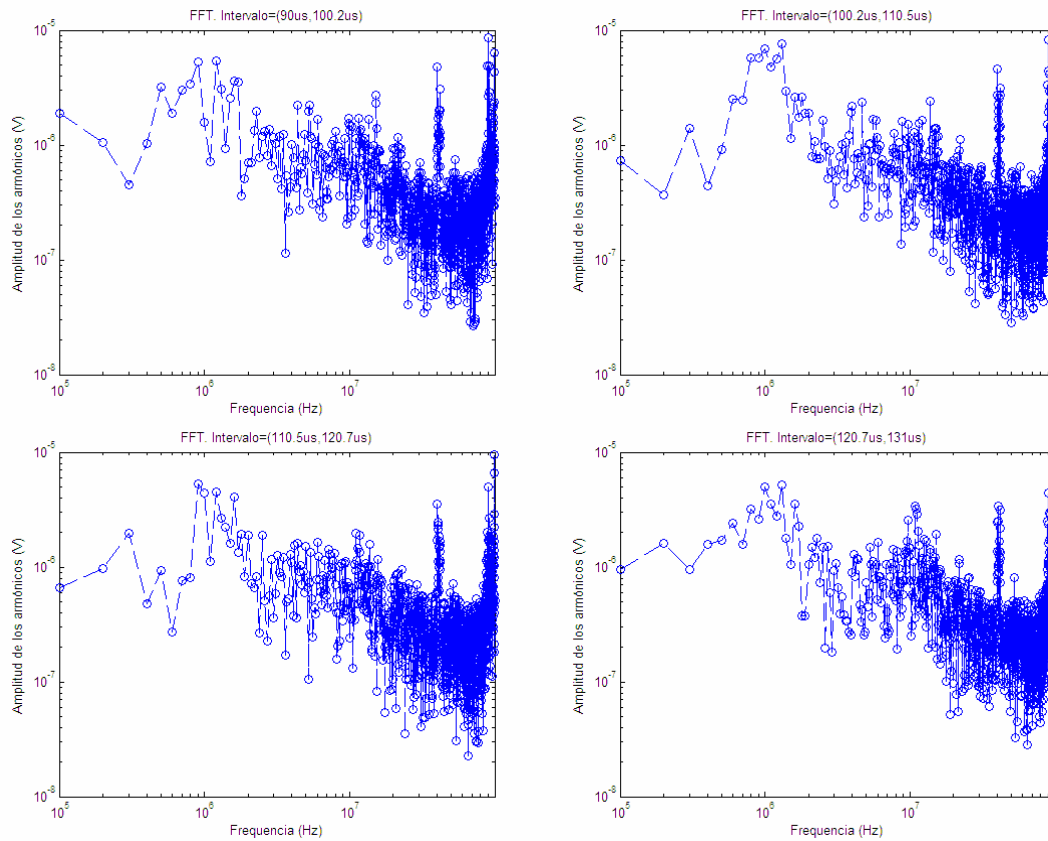


Figura 6.9. Transformada discreta de Fourier. Intervalo (90 $\mu$ s,131 $\mu$ s). Cable de cobre estirado sin aislante, de longitud 0.5m y sección 1.5mm<sup>2</sup>.

La transformada discreta de Fourier vuelve a confirmar que efectivamente no se mide señal elástica significativa, ni en el rango de frecuencias medias ni a la frecuencia de resonancia del piezoeléctrico (10MHz). El ruido tiene, a muy altas frecuencias, dos componentes muy significativas: a unos 40MHz y a 100MHz. Estas componentes son efectivamente ruido independiente de la señal de entrada, pues aparecen incluso en las señales previas al escalón y se observan también en los ensayos posteriores. Se piensa que podría ser ruido procedente de otros equipos o sistemas, como Ethernet.

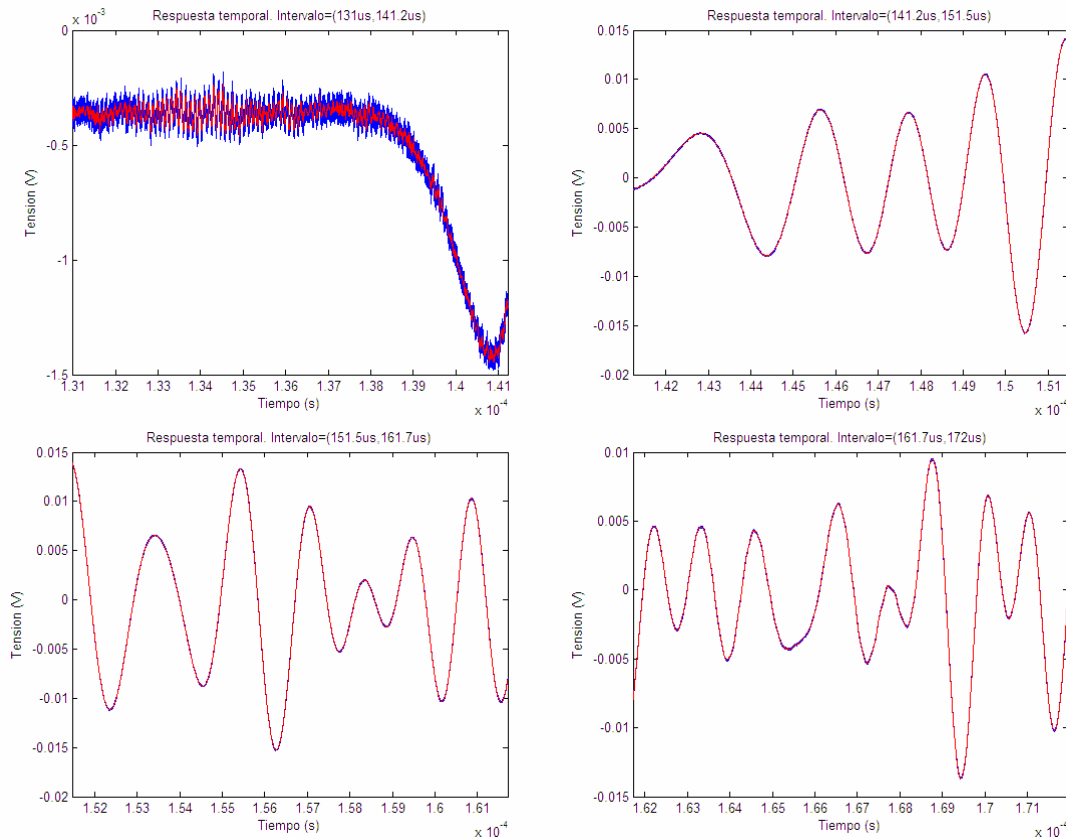


Figura 6.10. Respuesta temporal. Intervalo (131µs,172µs). Cable de cobre estirado sin aislante, de longitud 0.5m y sección 1.5mm<sup>2</sup>.

En la parte superior izquierda de la Figura 6.10 se muestra el primer intervalo de tiempo (131µs,141.2µs), en el cual comienza a aparecer señal elástica. Alrededor de 133µs da la impresión de que aparecen componentes de más alta frecuencia. En los siguientes intervalos de tiempo se observa la señal elástica de media frecuencia (periodo de unos 1.3µs, 770KHz) de respuesta al escalón. El instante en el que llega la señal al otro extremo del medio de transmisión es parecido, pero no idéntico, que en la barra. La diferencia podría deberse o bien a longitudes ligeramente distintas de los dos elementos, o bien a diferencias de la velocidad de propagación en las dos guías de ondas, debido a la diferente sección del cobre. A continuación se muestra una ampliación de la respuesta temporal alrededor de 133µs.

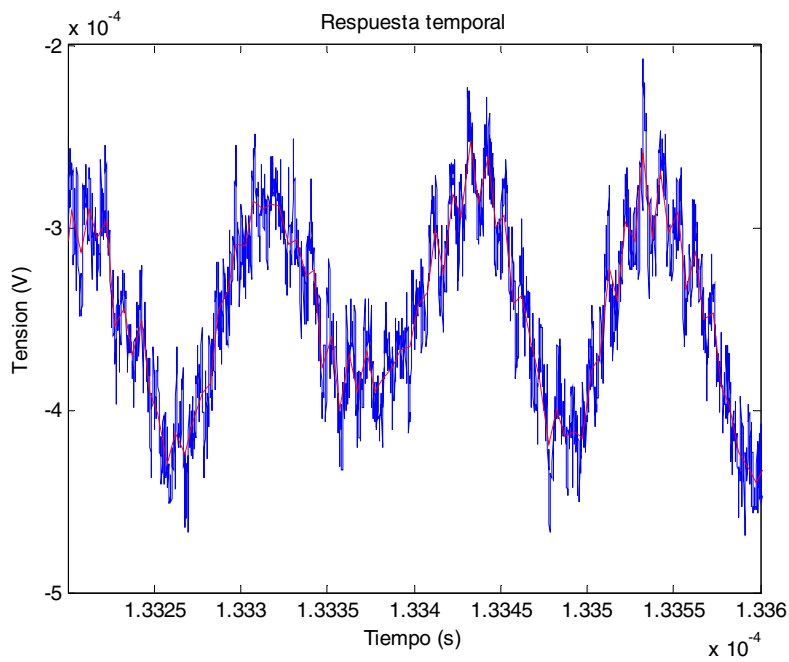


Figura 6.11. Respuesta temporal de 10MHz en la zona de los 133us.. Cable de cobre estirado sin aislante, de longitud 0.5m y sección 1.5mm<sup>2</sup>. Superpuesta la señal filtrada.

Directamente en la respuesta temporal ampliada se aprecia una componente armónica de unos 10MHz, la frecuencia de resonancia del piezoeléctrico.

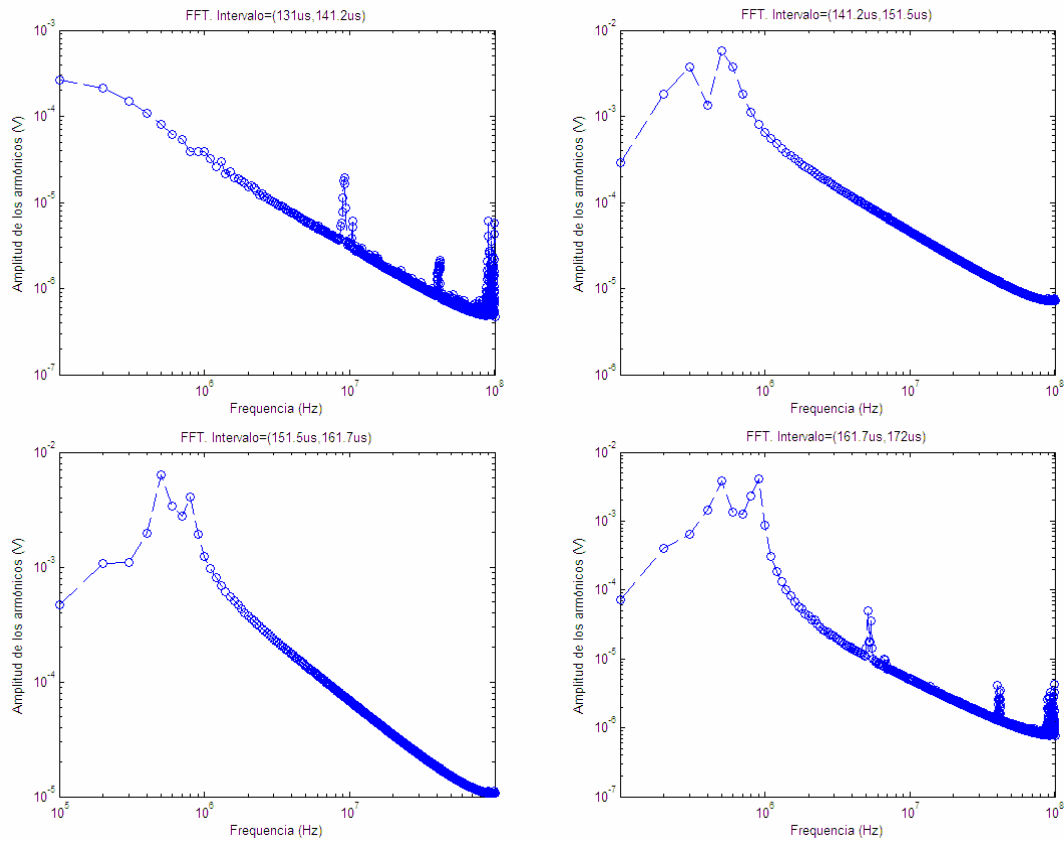


Figura 6.12. Transformada discreta de Fourier. Intervalo (90 $\mu$ s,131 $\mu$ s). Cable de cobre estirado sin aislante, de longitud 0.5m y sección 1.5mm<sup>2</sup>.

La transformada discreta de Fourier vuelve a confirmar la presencia de señal de 10MHz, en la señal de respuesta al escalón. Dicha componente se mide en el intervalo (131 $\mu$ s,141.2 $\mu$ s). Nuevamente sigue observándose que la componente de 10MHz sigue apareciendo al comienzo de la respuesta al escalón, mientras que a continuación se extingue. Esto podría ser debido a una mayor velocidad de grupo de las componentes de alta frecuencia. En el último intervalo de (161.7 $\mu$ s,172  $\mu$ s) se aprecia también una componente nueva a unos 5 ó 6MHz.

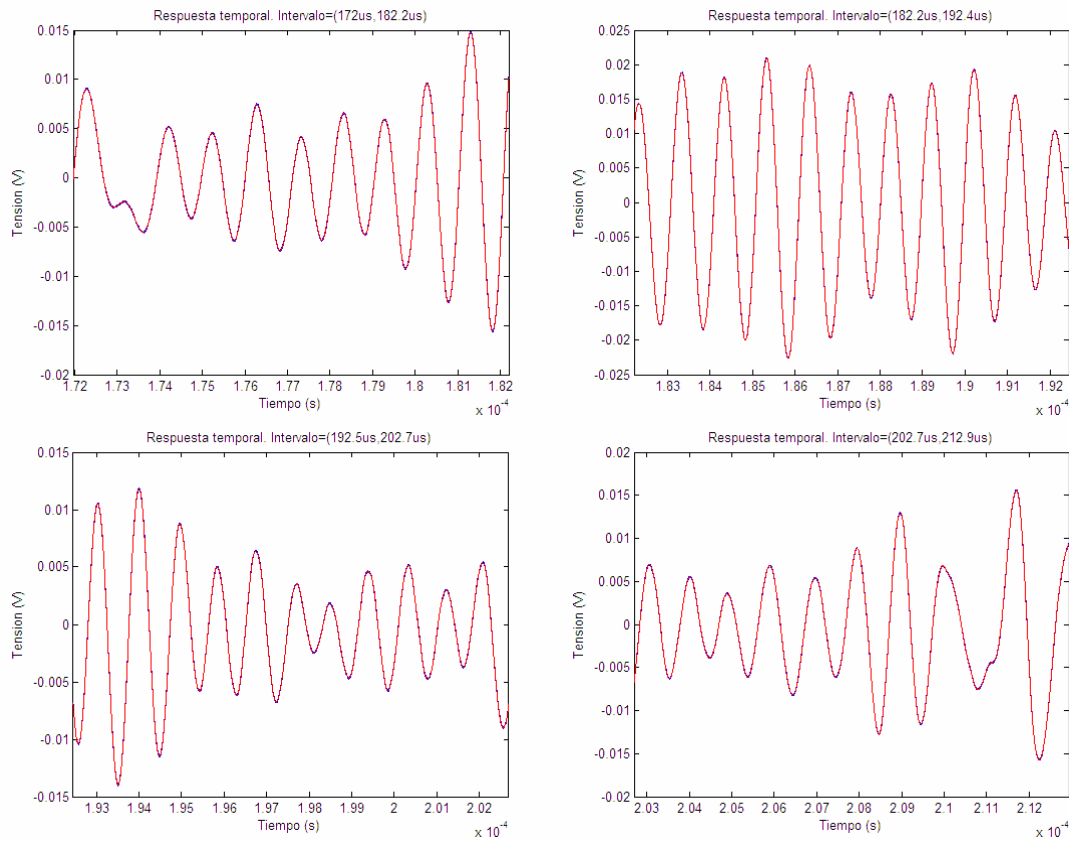


Figura 6.13. Respuesta temporal. Intervalo ( $172\mu\text{s}, 212.9\mu\text{s}$ ). Cable de cobre estirado sin aislante, de longitud 0.5m y sección  $1.5\text{mm}^2$ .

En el intervalo de tiempo de la Figura 6.13 continúa apareciendo la componente de baja frecuencia con la que continúa la respuesta al escalón. Su transformada discreta de Fourier se representa a continuación.

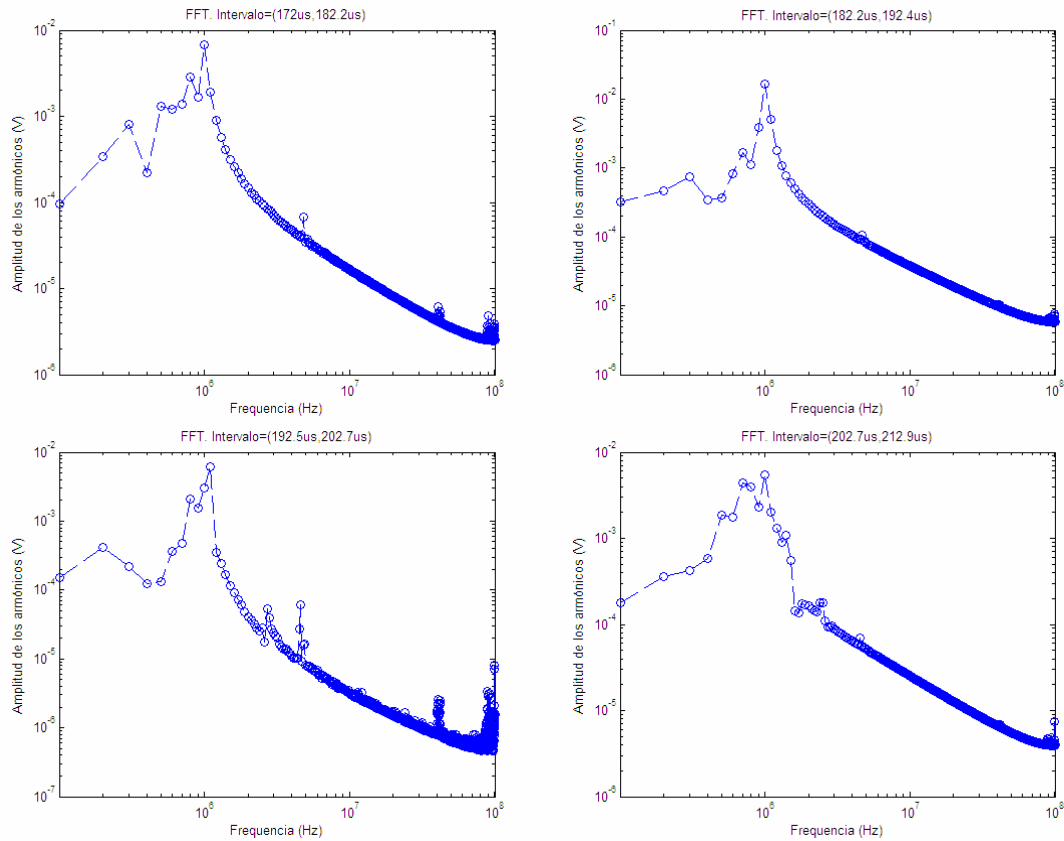


Figura 6.14. Transformada discreta de Fourier. Intervalo (172 $\mu$ s,212.9 $\mu$ s). Cable de cobre estirado sin aislante, de longitud 0.5m y sección 1.5mm<sup>2</sup>.

La FFT (Fast Fourier Transform) confirma que el contenido armónico en este intervalo está fundamentalmente comprendido entorno a 1MHz. Sigue observándose la disminución de la amplitud con la frecuencia y el ruido a 40MHz y a 100MHz. Teniendo en cuenta que la escala varía al aumentar el nivel de la señal, el nivel de ruido es comparativamente menos significativo que al comienzo de la respuesta al escalón.

## 6.5. Ensayos de respuesta a escalón con cable estirado con plástico aislante

Los siguientes ensayos fueron realizados con cable de cobre estirado con plástico aislante, de 0.5m de longitud y 1.5mm<sup>2</sup> de sección. Los piezoeléctricos, de frecuencia de resonancia



10MHz, se cortaron a las dimensiones del cable ( $1.5\text{mm}^2$  de sección). Se volvió a hacer un ensayo de respuesta a escalón promediando 10,000 ensayos.

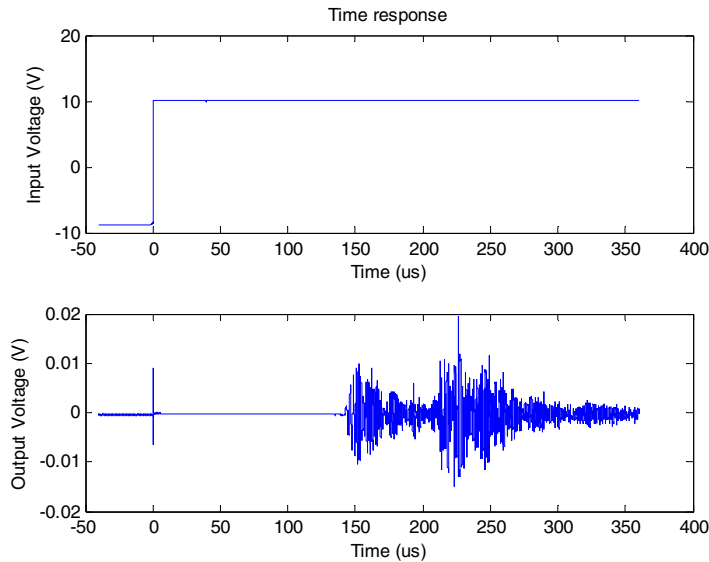


Figura 6.15. Respuesta temporal. Ensayo completo. Cable de cobre estirado con aislante, de longitud 0.5m y sección  $1.5\text{mm}^2$ .

Esta vez nos centramos directamente en el análisis de la zona inicial de respuesta al escalón.

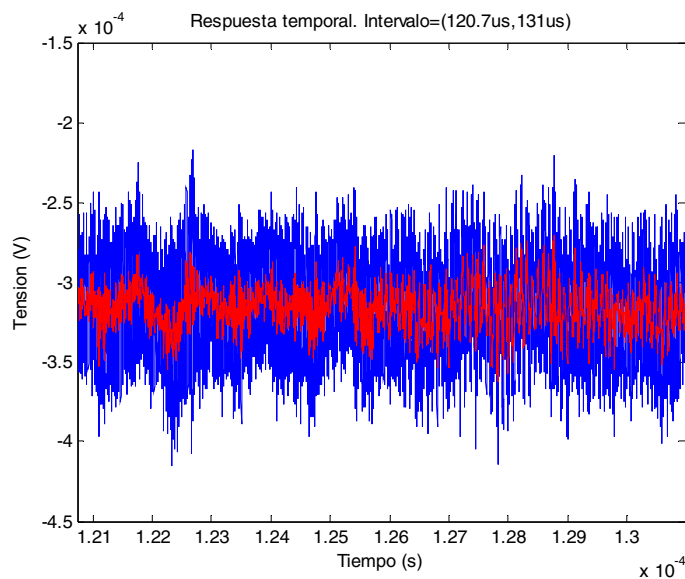


Figura 6.16. Respuesta temporal. Intervalo ( $120.7\mu\text{s}$ , $131\mu\text{s}$ ). Cable de cobre estirado con plástico, de longitud 0.5m y sección  $1.5\text{mm}^2$ .

A simple vista no se observa respuesta elástica en el intervalo (120.7 $\mu$ s,131 $\mu$ s). Sin embargo, al realizar la transformada discreta de Fourier comprobamos lo contrario.

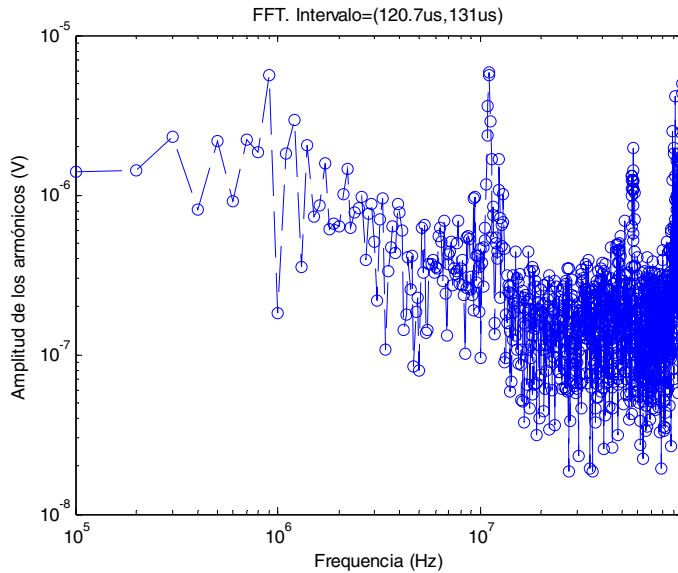


Figura 6.17. Respuesta en frecuencia correspondiente al intervalo (120.7 $\mu$ s,131 $\mu$ s). Cable de cobre estirado con plástico, de longitud 0.5m y sección 1.5mm<sup>2</sup>.

En la Figura 6.17 tenemos la transformada discreta de Fourier del intervalo (120.7 $\mu$ s,131 $\mu$ s). Se comprueba como, en este intervalo, aparece claramente la respuesta elástica a los 10MHz. Siguen también observándose las fuentes de ruido externo que antes señalábamos a 50MHz y 100MHz. Si realizamos una ampliación de la zona de los 127 $\mu$ s vemos en el temporal la componente de 10MHz.

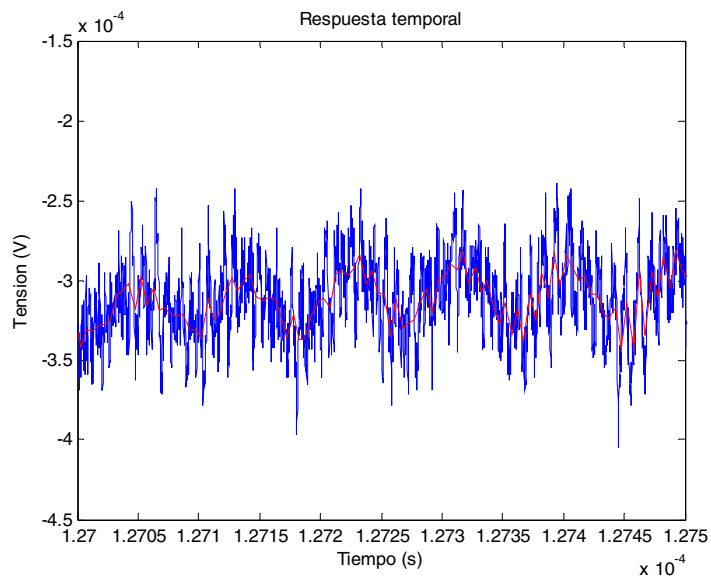


Figura 6.18. Respuesta temporal de 10MHz al cabo de unos 127 $\mu$ s. Cable de cobre estirado con plástico aislante, de longitud 0.5m y sección 1.5mm<sup>2</sup>. Superpuesta la señal filtrada.

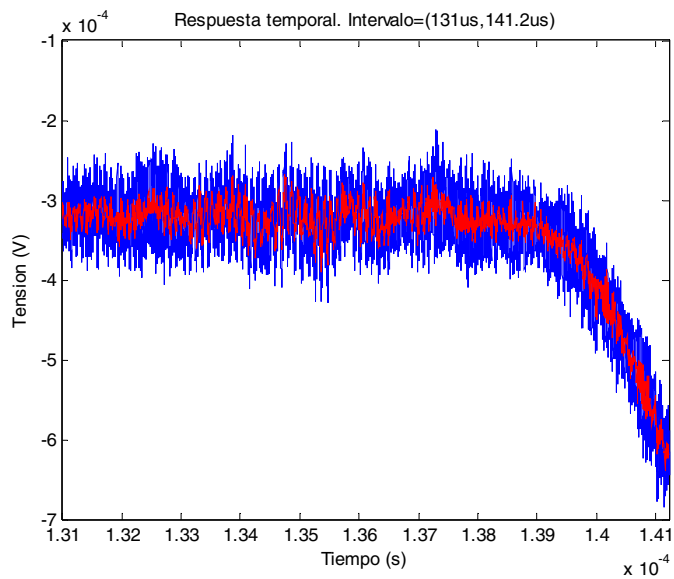


Figura 6.19. Respuesta temporal. Intervalo (131 $\mu$ s,141.2 $\mu$ s). Cable de cobre estirado con plástico, de longitud 0.5m y sección 1.5mm<sup>2</sup>.

En la Figura 6.19 vemos que comienza la respuesta elástica pasados unos 138 $\mu$ s del inicio del escalón. A continuación, la FFT correspondiente a este intervalo. Hay que señalar que además del promediado temporal también se está promediando la respuesta en frecuencia con

ventanas temporales, en las que se varía una muestra de una ventana respecto de la ventana anterior.

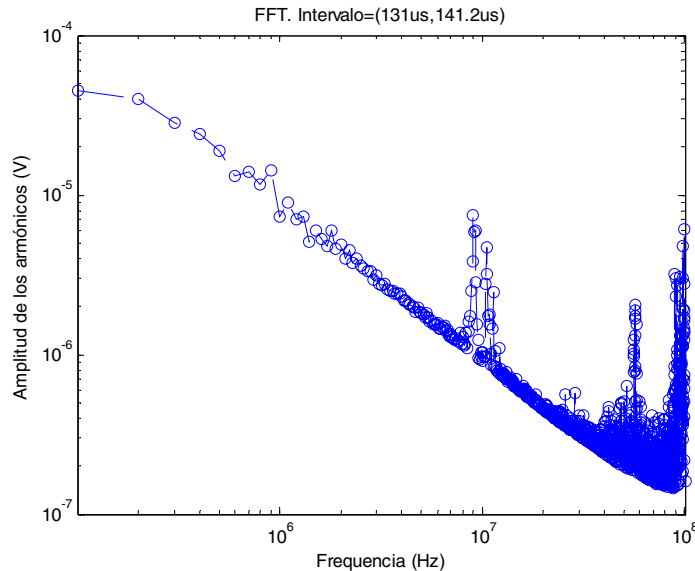


Figura 6.20. Respuesta en frecuencia correspondiente al intervalo (131µs,141.2µs). Cable de cobre estirado con plástico, de longitud 0.5m y sección 1.5mm<sup>2</sup>.

En la respuesta en frecuencia del intervalo (131µs,141.2µs) vuelve a apreciarse un pico de la respuesta en las proximidades de la resonancia del piezoeléctrico (10MHz). Además, como volvemos a tener señal elástica de baja frecuencia correspondiente al escalón, vuelve a darse el fenómeno de disminución de la amplitud de la respuesta con la frecuencia, debido a la forma de la respuesta en frecuencia de un escalón. Esta es la primera medida que realizamos entorno a los 10MHz con la configuración completa de cable con plástico aislante, pero con el cable estirado. Al utilizar un escalón, no excitamos una única frecuencia, por lo que la respuesta no está concentrada en una única frecuencia sino en todo un intervalo alrededor de los 10MHz.

## 6.6. Tren de ráfagas cortas senoidales con cable estirado con plástico aislante

En el siguiente ensayo se envió un tren de ráfagas senoidales de frecuencia 10MHz y longitud 10us, promediando 10,000 ensayos. El envío de ráfagas senoidales tiene el objetivo de excitar únicamente la frecuencia de 10MHz. Para generar este tipo de señales utilizamos el generador arbitrario de funciones AFG3252.

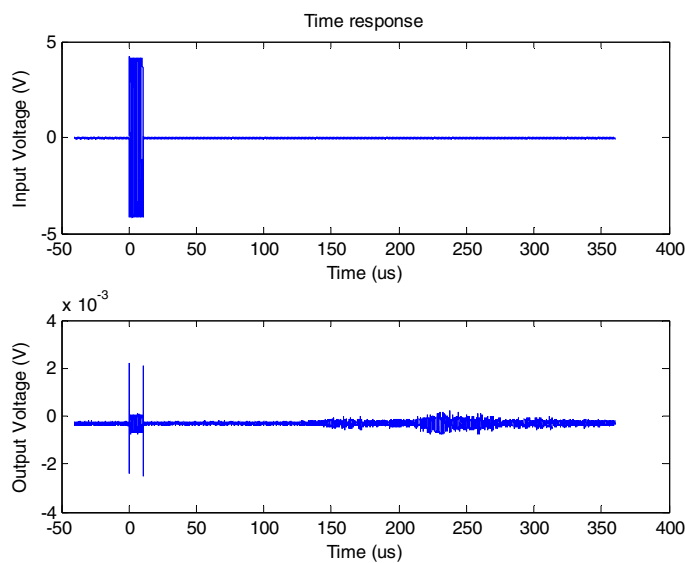


Figura 6.21. Respuesta temporal. Ensayo completo. Tren de ráfagas senoidales de 10us. Cable de cobre estirado con aislante, de longitud 0.5m y sección 1.5mm<sup>2</sup>.

Iniciamos el análisis con la FFT en el intervalo (-35 $\mu$ s,-24.8 $\mu$ s) antes de que aparezca la señal de entrada. En este intervalo por tanto la señal medida es nula y todo es ruido.

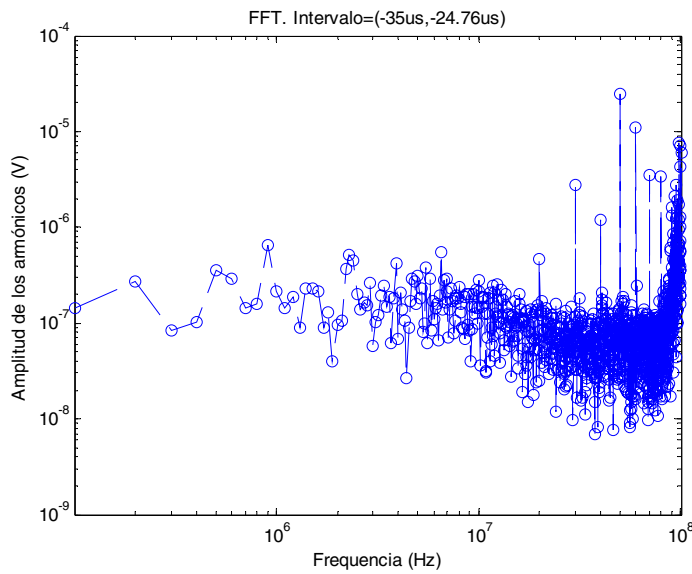


Figura 6.22. Respuesta en frecuencia para tren de ráfagas de ancho 10 $\mu$ s, zona (-35 $\mu$ s,-24.8 $\mu$ s). Cable de cobre estirado con plástico, de longitud 0.5m y sección 1.5mm<sup>2</sup>.

Como ya hemos señalado, los armónicos de esta gráfica son ruido. Vemos como, al utilizar el nuevo generador de señales (AFG3252), nos aparecen nuevas componentes de ruido de alta frecuencia, que en lo sucesivo ignoraremos. Volvemos a analizar directamente la zona de la respuesta inicial al escalón.

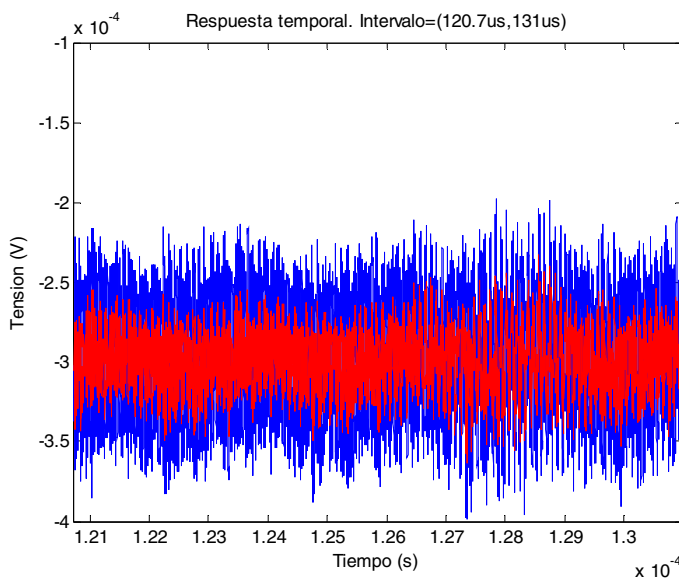


Figura 6.23. Respuesta temporal para tren de ráfagas de ancho 10 $\mu$ s, zona (120.7 $\mu$ s,131 $\mu$ s). Cable de cobre estirado con plástico, de longitud 0.5m y sección 1.5mm<sup>2</sup>.

En el intervalo de (121 $\mu$ s,131 $\mu$ s) tenemos la zona previa a la respuesta, sin contenido alguno de baja frecuencia. Al realizar la FFT volvemos a ver la respuesta en la zona de los 10MHz.

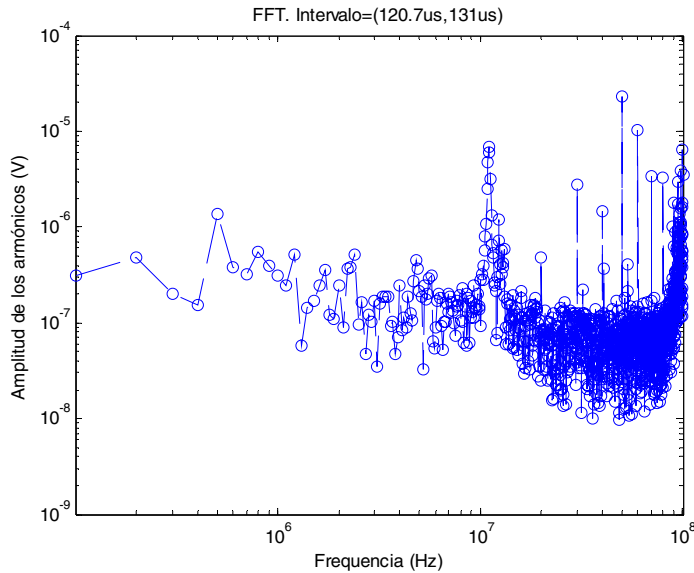


Figura 6.24. Respuesta en frecuencia para tren de ráfagas de ancho 10 $\mu$ s, zona (120.7 $\mu$ s,131 $\mu$ s). Cable de cobre estirado con plástico, de longitud 0.5m y sección 1.5mm<sup>2</sup>.

Seguimos teniendo el ruido de 100MHz, y ahora, en vez del ruido de 50MHz, nos aparecen una serie de picos a muy alta frecuencia, con un factor de calidad muy alto. Como el nuevo contenido del ruido ha aparecido al utilizar un nuevo generador de señales (el AFG3252), y estas componentes aparecen incluso antes de que se emita la señal (Figura 6.22), esto indica que las nuevas componentes de ruido se deben al nuevo generador de señales.

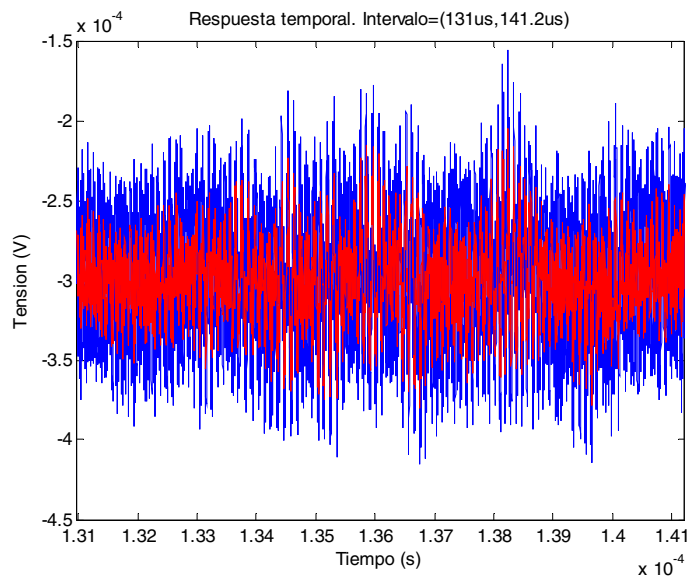


Figura 6.25. Respuesta temporal para tren de ráfagas de ancho 10us, zona (131 $\mu$ s,141 $\mu$ s). Cable de cobre estirado con plástico, de longitud 0.5m y sección 1.5mm<sup>2</sup>.

En el intervalo (131 $\mu$ s,141 $\mu$ s) vuelve a aparecer una respuesta temporal sin contenido de baja frecuencia. Una vez más, al realizar la FFT, volvemos a medir la resonancia a los 10MHz.

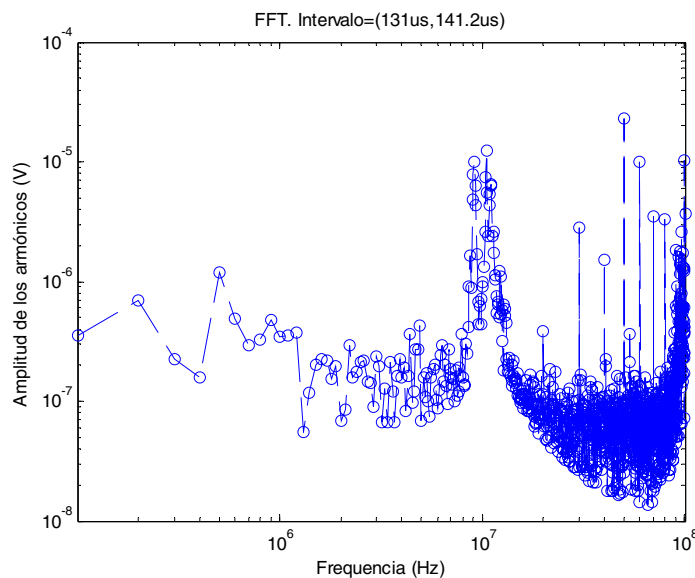


Figura 6.26. Respuesta en frecuencia para tren de ráfagas de ancho 10us, zona (121 $\mu$ s,131 $\mu$ s). Cable de cobre estirado con plástico, de longitud 0.5m y sección 1.5mm<sup>2</sup>.



En el análisis en frecuencia de la zona temporal correspondiente al inicio de la respuesta se observa la resonancia a los 10MHz. Pero sigue sin aparecer como nosotros esperábamos (como una frecuencia única). Esto se debe a que si bien el tren de senoidales excita solo la frecuencia de 10MHz, su respuesta elástica está mezclada con la respuesta al transitorio de arranque de las ráfagas. Para evitar esto en el siguiente ensayo lo que haremos será excitar con régimen permanente de senoidales (ráfagas de un ancho mucho mayor) a 10MHz y entonces interrumpiremos la emisión y observaremos lo que sucede en el intervalo que hay entre la interrupción de las ráfagas y la respuesta al transitorio de desconexión.

## **6.7. Tren de ráfagas largas senoidales (asimilables a régimen permanente) con cable estirado con plástico aislante**

En el siguiente ensayo se envió un tren de ráfagas senoidales de frecuencia 10MHz y longitud 10ms, promediando 10,000 ráfagas. Este tren es asimilable a un apagado repetitivo del régimen permanente de senoidales de 10MHz. Realizar el apagado o desconexión de la señal de entrada es útil para separar la respuesta elástica de la electromagnética.

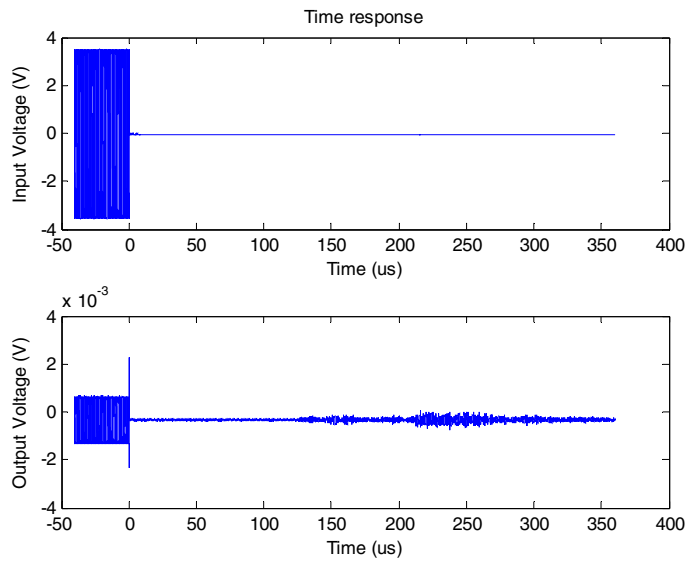


Figura 6.27. Respuesta temporal. Ensayo completo. Tren de ráfagas senoidales de 10MHz y ancho 10ms. Cable de cobre estirado con aislante, de longitud 0.5m y sección  $1.5\text{mm}^2$ .

Al cabo de 40us se obtiene la siguiente respuesta temporal:

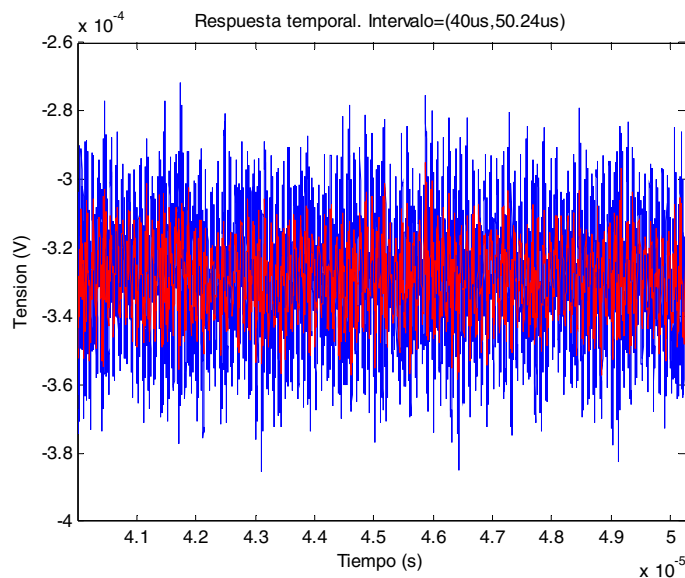


Figura 6.28. Respuesta temporal para tren de ráfagas de 10MHz y ancho 10ms. Intervalo  $(40\mu\text{s}, 50.2\mu\text{s})$ . Cable de cobre estirado con plástico, de longitud 0.5m y sección  $1.5\text{mm}^2$ .

En la respuesta temporal sigue sin aparecer señal elástica de baja frecuencia. Medimos en el intervalo  $(40\mu\text{s}, 50\mu\text{s})$ , ya que en esta zona tenemos la respuesta a la senoidal de entrada, sin que haya llegado todavía la respuesta correspondiente al transitorio de desconexión.

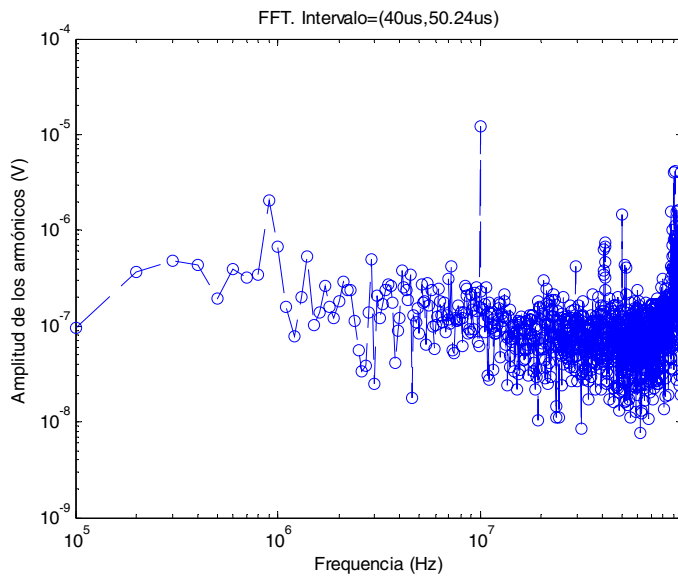


Figura 6.29. Respuesta en frecuencia para tren de ráfagas de 10MHz y ancho 10ms. Intervalo (40 $\mu$ s,50.2 $\mu$ s). Cable de cobre estirado con plástico, de longitud 0.5m y sección 1.5mm<sup>2</sup>.

En este caso si que hemos conseguido obtener aisladamente la respuesta concreta a una frecuencia dada de 10MHz. Esto se debe a que, dado que el ancho del tren es muy grande (10ms), el transitorio de respuesta a la conexión de las ráfagas ya se ha extinguido, por lo que solo queda la respuesta a la frecuencia concreta con que estamos excitando (10MHz). Repitiendo el ensayo, pero con ráfagas de 9.5MHz, obtenemos la siguiente respuesta en frecuencia en el intervalo (40,50us).

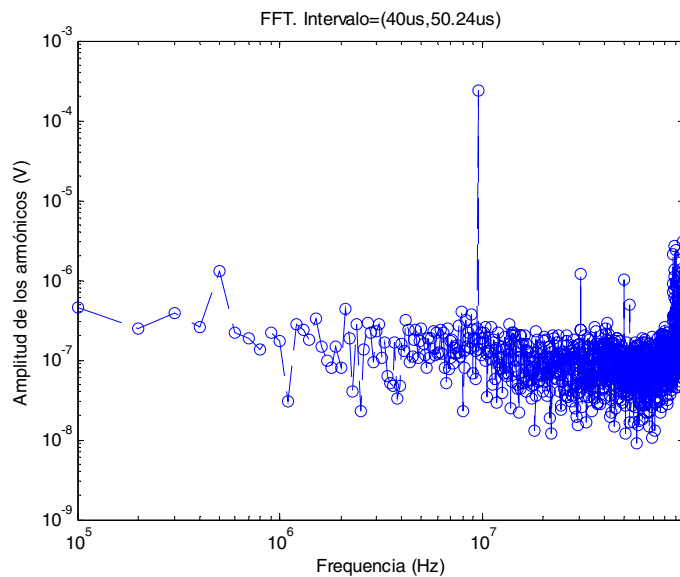


Figura 6.30. Respuesta en frecuencia para tren de ráfagas de 9.5MHz y ancho 10ms. Intervalo (40 $\mu$ s,50.2 $\mu$ s). Cable de cobre estirado con plástico, de longitud 0.5m y sección 1.5mm<sup>2</sup>.

Volvemos a tener un pico de respuesta esta vez a los 9.5MHz, que es la frecuencia con que estamos excitando. La respuesta es mayor a 9.5MHz que a 10MHz. Este hecho apunta a que o bien la frecuencia de resonancia de los piezoeléctricos no es exactamente 10MHz, o bien, que el cable transmite mejor a 9.5MHz que a 10MHz. A la vista de la Figura 6.1 parece que este efecto no se debe al piezoeléctrico, por lo que parece deberse al cable.

Con este método, por lo tanto, podemos obtener la respuesta en frecuencia del conjunto cable-piezoeléctricos, simplemente variando la frecuencia de las senoidales de entrada y repitiendo los ensayos a diferentes frecuencias. Sin embargo, este método sería muy lento dado que cada punto de la respuesta en frecuencia requiere el promediado de 10,000 ensayos, que se llevan a cabo a lo largo de unas diez horas. Por esta razón, en las siguientes secciones, en vez de trabajar con trenes de ráfagas de senoidales trabajaremos con trenes de ráfagas de funciones *chirp*. Las funciones *chirp* se caracterizan porque su frecuencia se incrementa o se disminuye con el tiempo. De este modo analizaremos directamente la respuesta correspondiente a un conjunto de frecuencias de entrada.

## 6.8. Tren de ráfagas largas de funciones *chirp* con cable estirado con plástico aislante

En el siguiente ensayo se envió un tren de ráfagas de funciones *chirp* de longitud 10ms y rango de frecuencia 8-12MHz. En realidad se trata de dos funciones *chirp* una a continuación de otra, la primera incrementa la frecuencia en  $0.5\mu\text{s}$  y la segunda la disminuye en  $0.5\mu\text{s}$ . Se promediaron 10,000 ráfagas.

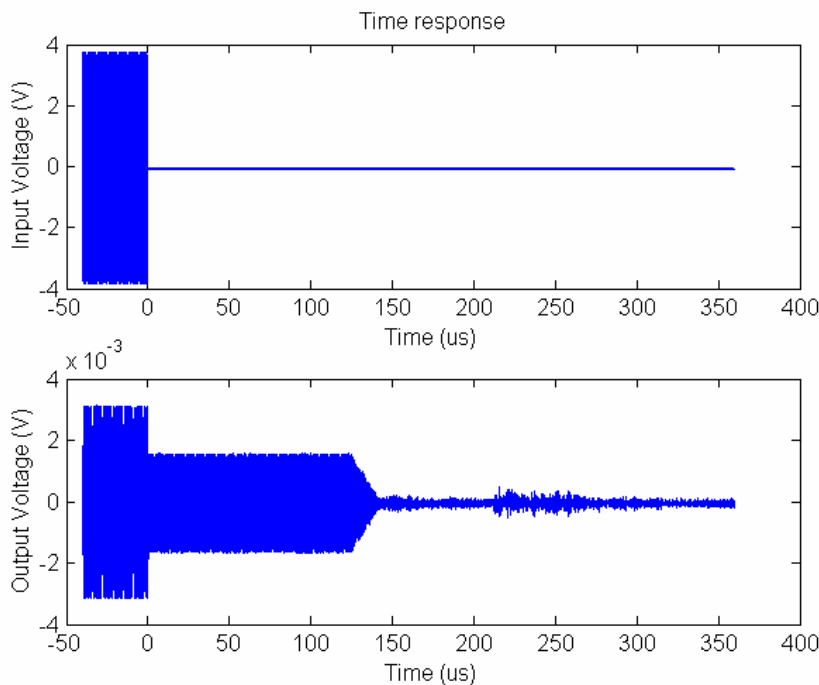


Figura 6.31. Respuesta temporal. Ensayo completo. Tren de ráfagas *chirp* de 8-12MHz y ancho 10ms. Cable de cobre estirado con aislante, de longitud 0.5m y sección  $1.5\text{mm}^2$ .

En la respuesta se observan tres intervalos diferentes. Un primer intervalo, hasta la desconexión del *chirp*, con señal elástica y electromagnética superpuestas. Un segundo intervalo, con solo señal elástica, hasta que la desconexión del *chirp* llega mediante ondas elásticas al otro extremo del cable. Y un tercer intervalo con la respuesta residual elástica a la desconexión. La señal temporal de entrada es una función *chirp* en el rango 8-12MHz que en el dominio del tiempo tiene el aspecto que se muestra en la siguiente figura. La frecuencia se

incrementa en  $0.5\mu\text{s}$  y se vuelve a disminuir en otros  $0.5\mu\text{s}$ . Como se observa en la figura el periodo de la señal es de  $1\mu\text{s}$ .

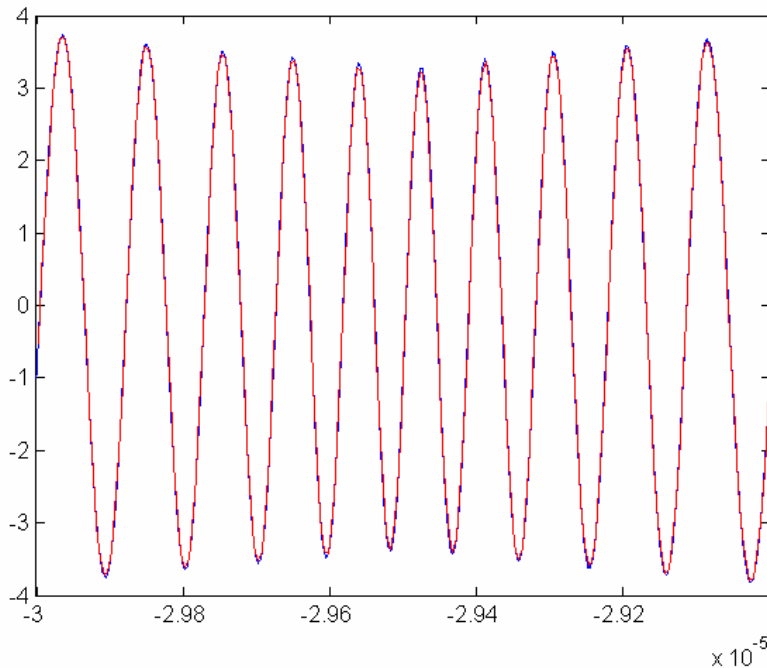


Figura 6.32. Temporal de la señal de entrada para ráfagas de *chirp* de 8-12MHz.

Puesto que el periodo de esta señal es  $1\mu\text{s}$ , lo correcto sería realizar la transformada discreta de la onda de salida con el mismo periodo ( $1\mu\text{s}$ ). Sin embargo, en las próximas gráficas mostraremos la transformada de Fourier discreta de la salida con periodo  $10\mu\text{s}$ , diez veces el periodo de la señal real. En este caso lo que cabe esperar es que solo veamos armónicos múltiplos de 10, y que el resto de armónicos sean cero. Por errores de redondeo y por ruido superpuesto a la señal elástica, estos armónicos no serán exactamente cero y servirán para indicarnos el nivel aproximado de ruido o error con la frecuencia. Efectivamente, si hacemos la transformada de Fourier discreta directamente sobre la señal de entrada obtenemos:

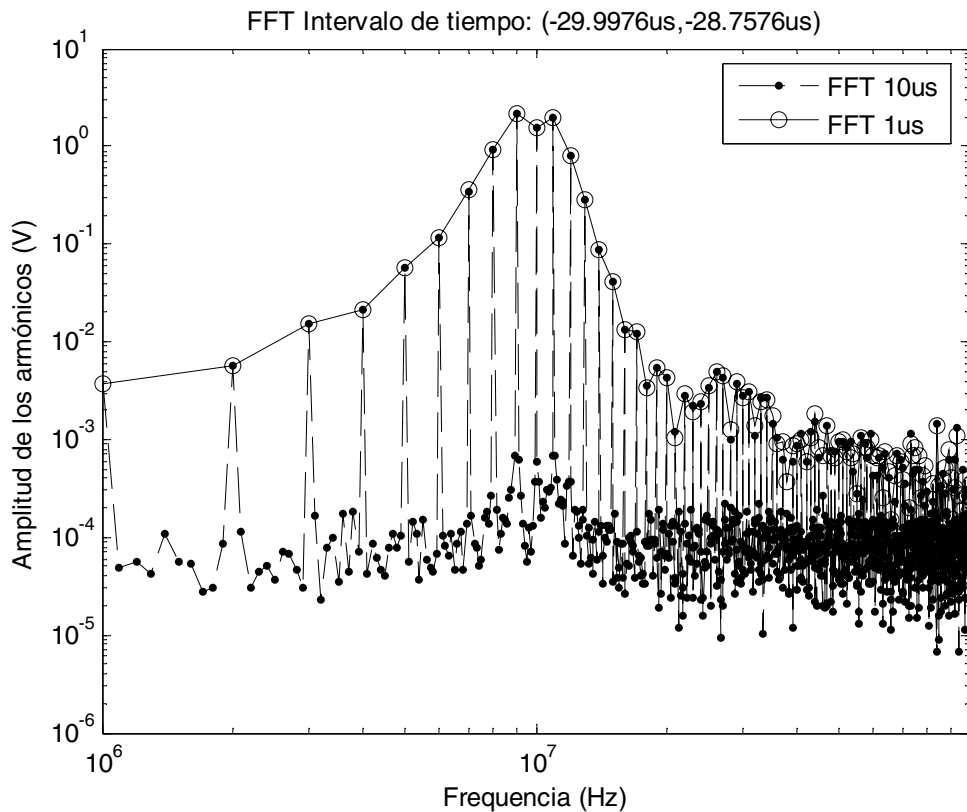


Figura 6.33. Transformada de Fourier discreta de la señal de entrada para ráfagas de *chirp* de 8-12MHz.

Con círculos la transformada discreta de Fourier, aplicándola sobre un intervalo de  $1\mu\text{s}$  (el mismo periodo que la señal de entrada) y con puntos, aplicada sobre un intervalo de  $10\mu\text{s}$ . El aspecto aparentemente abrupto de la señal de entrada correspondiente a la línea con puntos de la FFT  $10\mu\text{s}$  es, como ya hemos comentado, un efecto ilusorio causado por realizar la transformada discreta sobre un intervalo que es diez veces el periodo de la señal. Uniendo los picos de esta gráfica obtenemos (al igual que con la FFT de  $1\mu\text{s}$ ) la respuesta en frecuencia del conjunto cables-piezoeléctricos. La única utilidad de hacer la FFT sobre un periodo de  $10\mu\text{s}$  es que de este modo los valores mínimos cuantifican aproximadamente el ruido que tenemos.

A la vista de esta gráfica, el análisis en frecuencia confirma que la energía de la señal de entrada está particularmente concentrada en el intervalo 8-12MHz. La señal de salida tiene la siguiente respuesta temporal en el caso de 0.5m de cable.

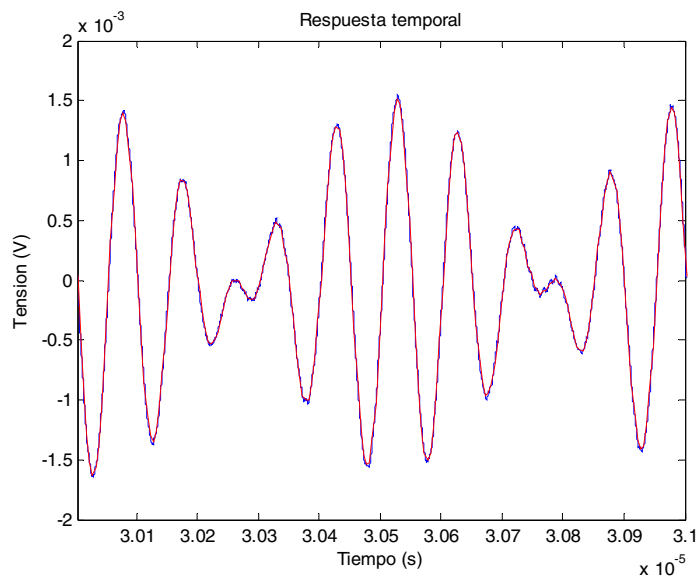


Figura 6.34. Temporal de la señal de salida para tren de ráfagas de *chirp* de 8-12MHz, al cabo de 30us de la desconexión de la ráfaga. Se muestra un periodo del *chirp*.

En esta gráfica se observa, que conforme varía la frecuencia de la señal, varía también la amplitud de dicha señal. Por tanto la respuesta en frecuencia correspondiente a esta señal no es plana. Las respuestas en frecuencias para trenes de ráfagas de *chirp* en el rango de frecuencias 8-12MHz para cables de dos longitudes (0.5m y 1m) se representan a continuación.



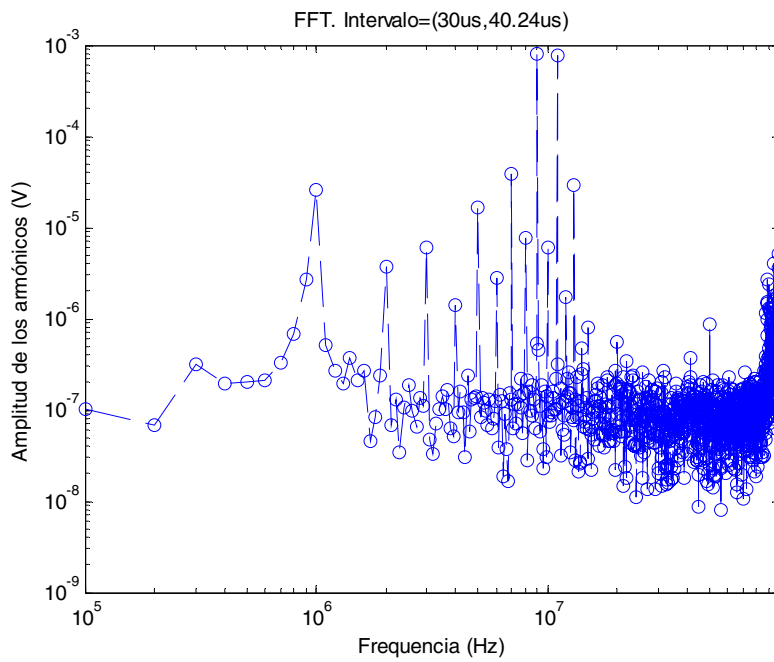


Figura 6.35. Transformada discreta de Fourier para tren de ráfagas de *chirp* de 8-12MHz, 1us, en un intervalo de análisis de 10us. Cable estirado con plástico de 0.5m de longitud y  $1.5\text{mm}^2$  de sección del cobre.

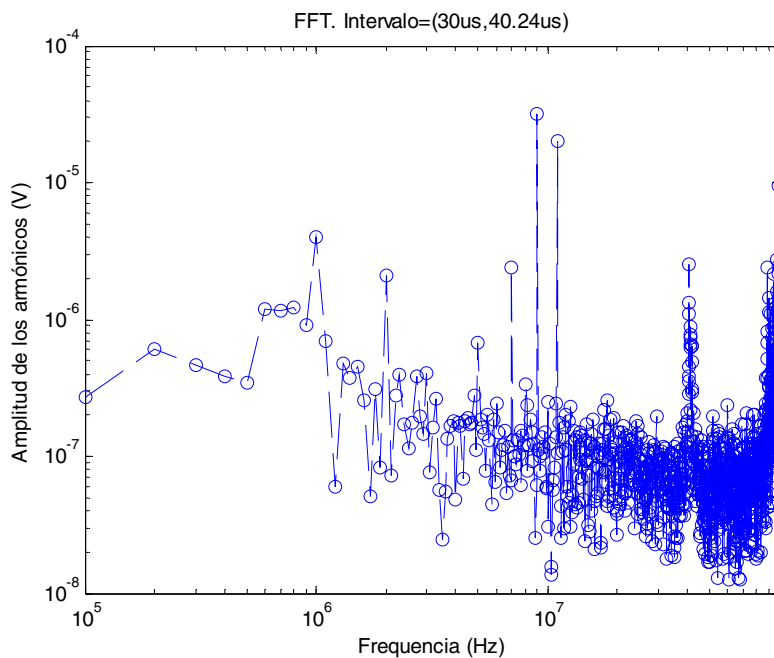


Figura 6.36. Transformada discreta de Fourier para tren de ráfagas de *chirp* de 8-12MHz, 1us, en un intervalo de análisis de 10us. Cable estirado con plástico de 1m de longitud y  $1.5\text{mm}^2$  de sección del cobre.

En la Figura 6.35 la respuesta en frecuencia para 0.5m y en la Figura 6.36 la respuesta para 1m. Se observa que en 1m muchos de los armónicos existentes en 0.5m se han extinguido y ya no pueden diferenciarse del ruido, mientras que otros aún existentes (fundamentalmente en la zona 8-12MHz) tienen una amplitud menor. Esto simplemente constata el hecho de que la señal elástica se atenúa apreciablemente a su paso por el cable.

La zona y picos superiores a 20MHz no son representativos de señal elástica. Se ha visto que este ruido se repetía constantemente en los ensayos (picos de 40 y 100MHz) incluso en aquellas zonas en las que no podía haber señal elástica alguna. Las señales a estas frecuencias son por tanto ocasionadas por otras fuentes de ruido.

Hasta este momento los ensayos se realizaron con cable estirado. Sin embargo, al observar las respuestas en frecuencias del cable estirado y sin estirar, se observaba que el comportamiento del cable estirado con plástico tendía a parecerse más al del cable sin plástico. Pensamos que esto se debe a que en el cable estirado la sección del cobre se reduce de modo que la frontera cobre-plástico se llena de aire. Esto hace que el cable estirado se comporte más parecido al cable sin plástico y que sus simulaciones no sean representativas para modelar los cables estándar, que normalmente no son sometidos a este proceso previo de estiramiento del cable.

La idea inicial de estirar el cable tenía el objetivo de eliminar las curvas del cobre, no obstante lo que acabamos de comentar nos lleva a interrumpir los ensayos con el cable estirado, y pasar a ensayar cables con algo de curvatura. Cabe sin embargo observar que si la frecuencia de la señal está entorno a los 10MHz y la velocidad de propagación de ondas longitudinales en el cobre es de alrededor de 5000m/s, la longitud de estas ondas es de 0.5mm. Por tanto y notando que el radio de las curvas del cable con el que trabajamos suele ser bastante superior a 1cm, puede afirmarse que en esas condiciones el cable puede suponerse como básicamente recto, por lo que no es imprescindible este proceso adicional de estiramiento.

## 6.9. Tren de ráfagas largas de funciones *chirp* con cable no estirado con y sin plástico aislante

En esta sección se detallan los ensayos realizados con trenes de ráfagas *chirp* con longitud de las ráfagas 10ms, y funciones *chirp* que varían la frecuencia entre 2 y 16MHz, incrementando la frecuencia en  $2.5\mu\text{s}$  y decrementándola en  $2.5\mu\text{s}$  (periodo por tanto  $5\mu\text{s}$ ). Los cables se colocaron dentro de una cámara anecoica para reducir el ruido electromagnético. Los datos se capturaron con una ventana temporal de  $400\mu\text{s}$  y un tiempo de muestreo equivalente de 5GHz. Por tanto se almacenaron 2 millones de muestras en cada ensayo. El ensayo se repitió 10000 veces, promediando la salida. Los ficheros de datos se procesaron con Matlab. En primer lugar, los dos millones de muestras volvieron a promediarse en grupos de 25 muestras contiguas. Entonces se seleccionaron y analizaron las muestras  $5\mu\text{s}$  después del final del tren de entrada. En este intervalo se podía medir la señal elástica retrasada sin la interferencia electromagnética. La transformada discreta de Fourier se realizó con un periodo de  $10\mu\text{s}$ , de modo que la señal sólo debería contener armónicos pares.

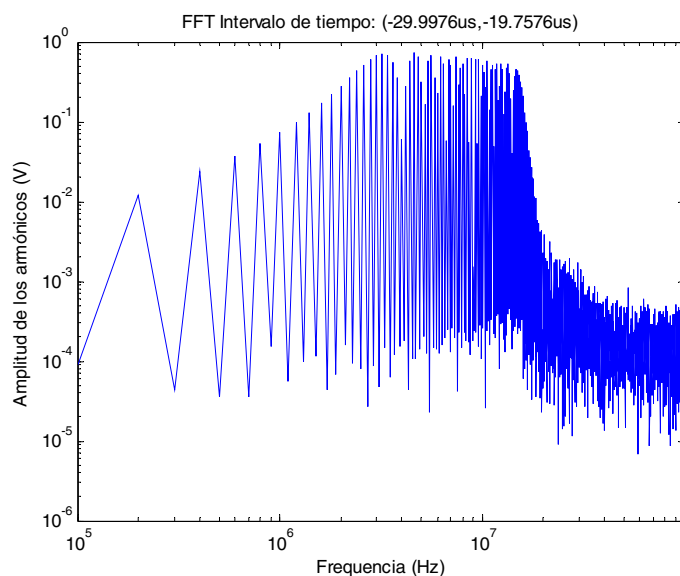


Figura 6.37. FFT de la señal de entrada. Función *chirp* 2-16MHz y periodo 5us.

En la FFT de la entrada se observa como la señal tiene fundamentalmente un contenido en frecuencias en la zona especificada (2MHz-16MHz), pero también tiene componentes de menor frecuencia, aunque con menor amplitud. A continuación se representarán solo los armónicos pares, y de estos solo aquellos que estén suficientemente por encima del nivel de ruido como para poder ser considerados señal. En particular se considera que un armónico par es significativo si tiene más de 10dB que cualquiera de los dos armónicos impares contiguos.

En la siguiente figura se representa la señal de salida con cables de dos longitudes (10cm y 25cm) sin estirar y con su plástico aislante. Se muestra el rango de interés 1-12MHz. Obsérvese que la señal de salida se ve reducida tanto por la atenuación del cable como por las perdidas de conversión del emisor y el receptor. Claramente la señal recibida disminuye al aumentar la longitud del cable.

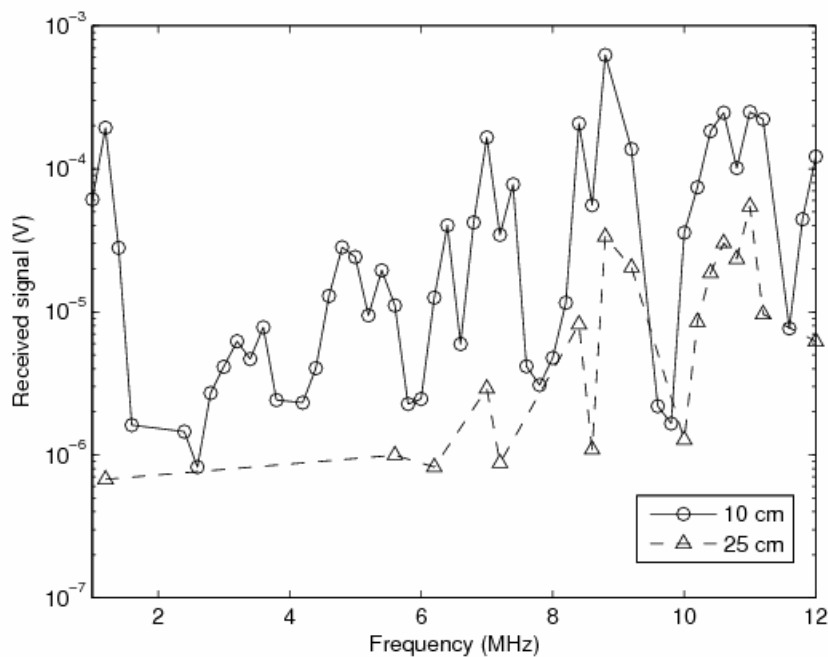


Figura 6.38. Señal recibida en cables estándar con plástico aislante a dos longitudes (10cm y 25cm).

El recubrimiento de PVC del cable se eliminó dejando un cable desnudo de 1.5mm<sup>2</sup> de sección. Los ensayos se repitieron en el mismo rango de frecuencias y a dos longitudes (10cm

y 50cm): Las nuevas señales recibidas se muestran en la siguiente figura. Como era de esperar, el cable desnudo tiene menos atenuación que el cable con plástico.

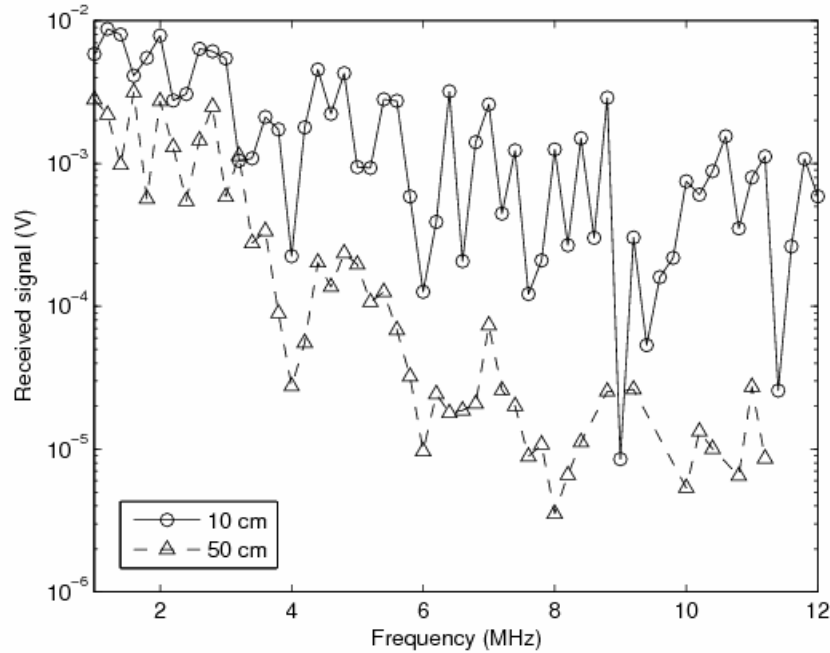


Figura 6.39. Señal recibida en cables sin plástico aislante a dos longitudes (10cm y 50cm).

En la siguiente figura vuelven a resumirse todas las medidas, representando tanto los armónicos pares como los impares.

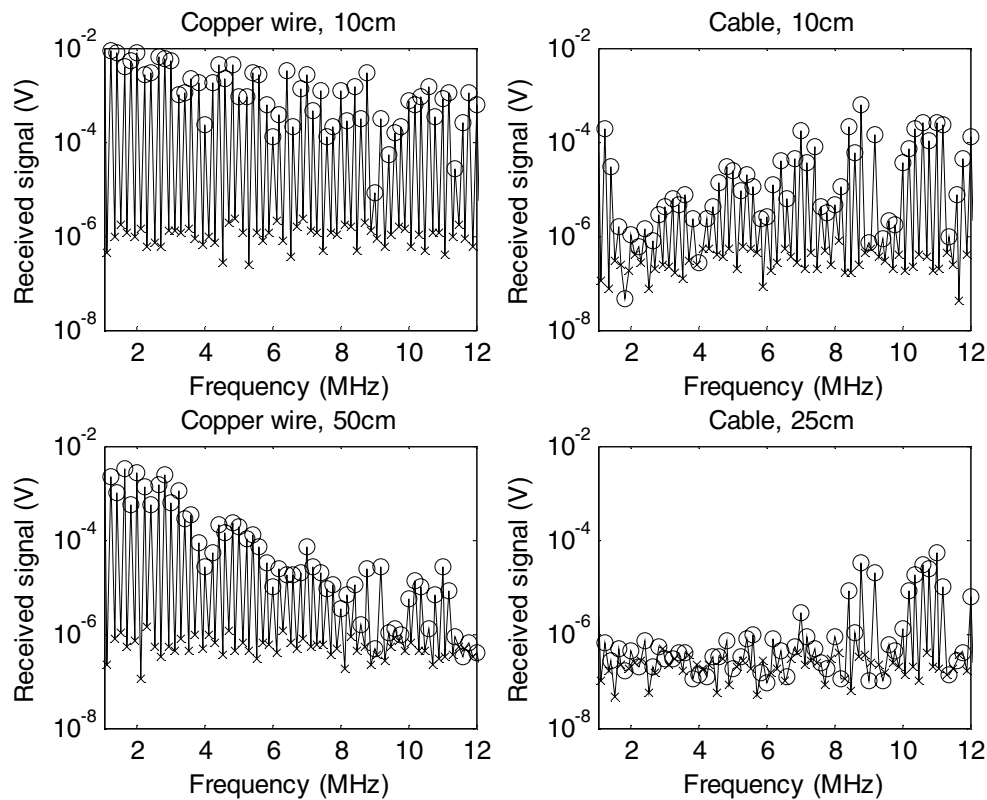


Figura 6.40. Señal recibida para cable de dos longitudes (10cm y 25cm) y cable sin plástico (10cm y 50cm). Los armónicos pares correspondientes a la señal se representan con círculos y los impares correspondientes al ruido con “x”.

En la Figura 6.40 se representan con círculos los armónicos pares correspondientes a la señal, mientras que los armónicos impares correspondientes al ruido o errores de cálculo se representan con “x”. Esto se debe a que el periodo de la señal de entrada es  $5\mu\text{s}$ , mientras que la FFT se está realizando sobre un periodo de  $10\mu\text{s}$ . En las gráficas de la izquierda de la Figura 6.40, correspondientes al cable sin plástico, hay bastante nivel de señal, salvo para altas frecuencias a la longitud mayor (50cm). Sin embargo, en el cable con plástico (parte derecha de la figura) la relación señal ruido es bastante peor, hasta el punto de que para la mayor distancia (25cm) solo es significativa la respuesta a alta frecuencia. En la figura se observa claramente como el mayor nivel de respuesta la tenemos en el cable sin plástico a la menor distancia (10cm). Tanto al aumentar la distancia, como al estudiar el cable con plástico, las atenuaciones aumentan, y la señal recibida disminuye. Con el cable con plástico de 25cm se obtienen los menores niveles de señal. A la mayor distancia también se observa como la

señal recibida disminuye con la frecuencia en el cable sin plástico, mientras que aumenta con la frecuencia en el cable con plástico.

Todas las anteriores medidas incluyen las pérdidas debidas a los procesos de conversión de elástico a eléctrico y viceversa, así como al proceso de transmisión de la señal elásticas desde el cable a los piezoeléctricos y viceversa. Para eliminar estas pérdidas calculamos las diferencias en decibelios entre las medidas a dos longitudes y ponderamos con la diferencia entre las dos longitudes. Los resultados se muestran en la siguiente figura.

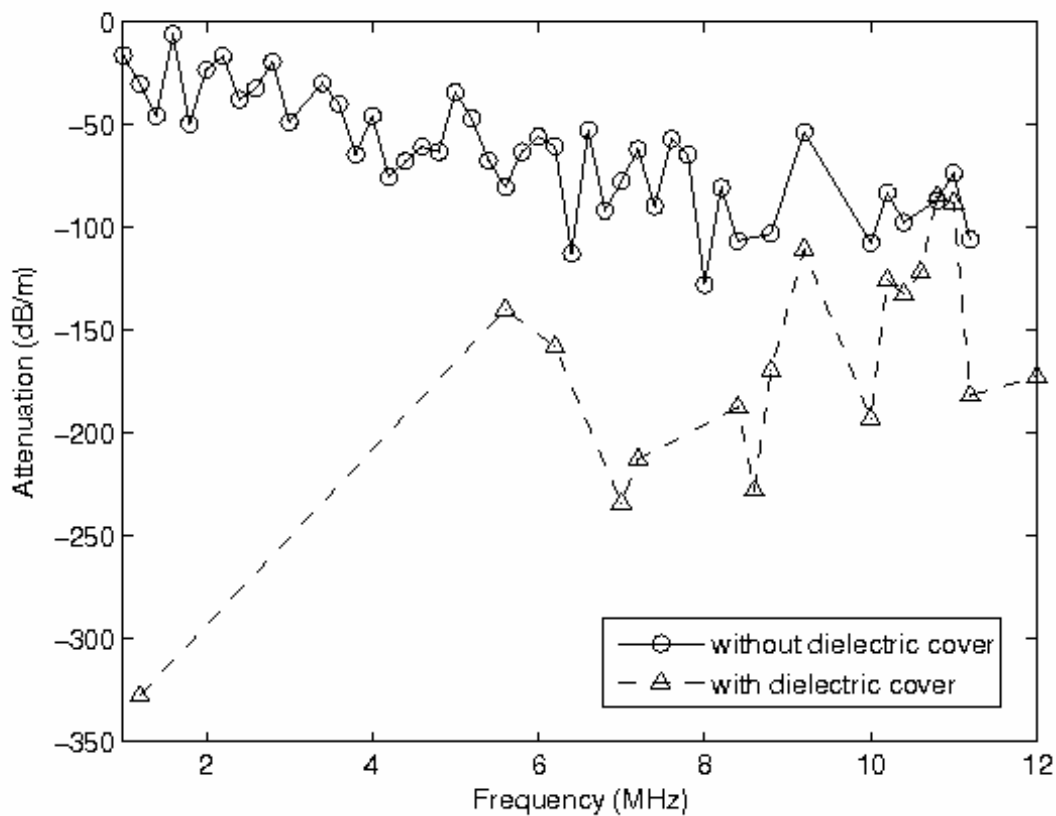


Figura 6.41. Atenuación de las ondas elásticas en cables desnudos y con plástico en el intervalo 1-12MHz.

En estas gráficas aparece un hecho curioso. Con el cable desnudo, la atenuación aumenta al incrementarse la frecuencia. Esta tendencia que es la esperable contrasta con la del cable estándar con plástico aislante. En este segundo caso la atenuación disminuye al incrementarse

la frecuencia. El modelo propuesto y sus simulaciones confirman también este comportamiento. Este fenómeno podría tener su explicación en el hecho de que los modos de propagación superiores, teniendo menor longitud de onda, tiendan a propagarse principalmente por el cobre, por lo que la atenuación ocasionada por el plástico disminuye.



## 7 VALIDACIÓN

En este apartado realizamos la validación del modelo. En primer lugar validamos las herramientas de simulación, reproduciendo los resultados de problemas ya resueltos en la literatura. A continuación validamos las técnicas experimentales, realizando nuevas mediciones, no con señales electromagnéticas, sino observando directamente las deformaciones y desplazamientos mediante interferometría. Se complementan estas validaciones de las técnicas experimentales, con la medición de las características acústicas de un material no claramente definido en los manuales. Se trata de las propiedades del PVC plastificado que se utiliza como cubierta aislante de los cables eléctricos. En el siguiente apartado se realiza una validación parcial del modelo, comparando los valores de atenuación frente a frecuencia en las simulaciones y en los experimentos. A continuación se validan los modos de propagación y por último se propone un nuevo modelo más completo, no limitado a ondas axisimétricas longitudinales, sino que incorporando también modos torsionales y de flexión.

### 7.1. Validación de las herramientas de simulación

En esta primera validación, se analizan problemas ya resueltos en la literatura, y se obtienen sus modos de propagación. Se verifica que dichos modos coinciden con los presentados por otros autores, analizándose las discrepancias. En particular se analizan los siguientes casos:

- Un cilindro fluido con la superficie libre
- La solución longitudinal axisimétrica de un cilindro elástico de dos capas con núcleo sólido
- Tuberías de acero recubiertas de plástico
- Cilindro sólido homogéneo sin viscoelasticidad.

Con esta validación no podemos garantizar que el modelo represente adecuadamente la propagación de las ondas elásticas en los cables eléctricos. Tan solo se verifica que reproducimos adecuadamente los resultados de otros autores para problemas que presentan ciertas semejanzas con nuestro caso. Así mismo se comprueba la eficacia de los algoritmos numéricos para obtener la solución.

### 7.1.1. Cilindro fluido con la superficie libre

Inicialmente probamos nuestro algoritmo en el caso de un cilindro fluido con una superficie libre. Estudiamos el problema sin atenuación, por lo que el algoritmo es aplicado sobre un problema de optimización unidimensional. Si bien este problema nos sirve para probar el método, hay que señalar que para problemas unidimensionales existen métodos específicos más apropiados como el de la ‘golden section search’ [76]. La solución a dicho problema puede encontrarse por ejemplo en el libro de Redwood [103].

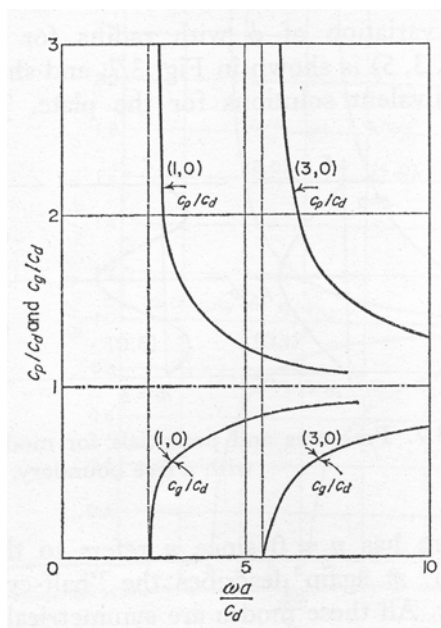


Figura 7.1. Velocidad de fase y velocidad de grupo en un cilindro fluido con una superficie libre según Redwood.

Sus resultados se muestran en la Figura 7.1, donde  $c_p$  es la velocidad de fase,  $c_d$  es la velocidad de barra,  $c_g$  es la velocidad de grupo,  $\omega$  es la frecuencia angular,  $a$  es el radio del

cilindro. En un fluido perfecto solo son posibles ondas longitudinales, por tanto el vector de desplazamientos resulta:

$$\mathbf{u} = \text{grad } \Phi \quad (7.1)$$

Donde  $\mathbf{u}$  es el vector de desplazamientos y  $\Phi$  es el potencial escalar. Para el potencial escalar resulta la siguiente ecuación de ondas

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}, \quad c_1 = \sqrt{\frac{\lambda}{\rho}} \quad (7.2)$$

Donde  $c_1$  es la velocidad de ondas longitudinales,  $\lambda$  es la constante de Lamé y  $\rho$  es la densidad de volumen. Según demuestra Redwood [103] el potencial escalar tiene la forma:

$$\Phi = A J_0(\alpha r) e^{i(\omega t - kz)} \quad (7.3)$$

Donde:

$$\alpha^2 = \frac{\omega^2}{c_1^2} - k^2 \quad (7.4)$$

Y la solución, para presión nula en el contorno, se obtiene mediante la siguiente función característica:

$$J_0(\alpha r_1) = 0 \quad (7.5)$$

Las soluciones las obtenemos para los siguientes parámetros de entrada (las magnitudes adimensionales de la figura no dependen del radio).

$$\begin{aligned} c_1 &= 1400 \text{ m/s} \\ E &= 2.1 \text{ GPa} \\ \rho &= 1.1 \text{ Mg/m}^3 \end{aligned}$$

Donde  $c_1$  es la velocidad de ondas longitudinales libres en el fluido (en un fluido no hay fuerzas transversales),  $E$  es el módulo de elasticidad longitudinal,  $\rho$  es la densidad. En la siguiente gráfica se muestra la solución a este problema resuelto por dos métodos: el propuesto por Lowe y el de búsqueda directa. Se obtiene la misma solución que aparece en el libro de Redwood. La única diferencia es que nos aparece también un pequeño segmento correspondiente a un tercer modo de propagación adicional, que no aparecía representado en la solución de Redwood. Se muestra también la velocidad de grupo que vuelve a reproducir las simulaciones del libro de Redwood.

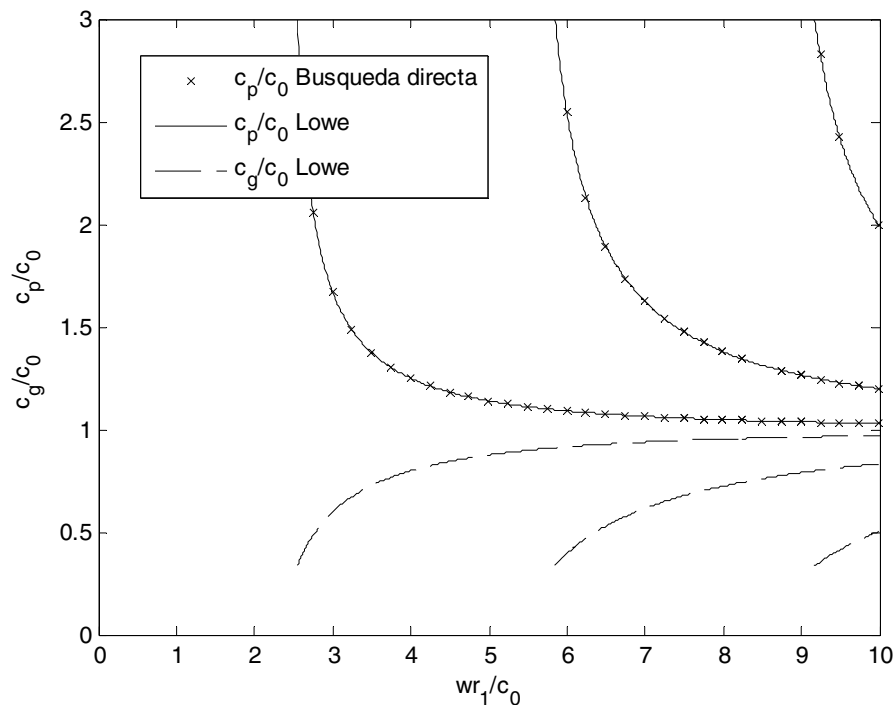


Figura 7.2. Velocidad de fase y de grupo en un cilindro fluido con la superficie libre

## 7.1.2. Cilindro elástico de dos capas con núcleo sólido. Solución longitudinal axisimétrica

En este apartado tratamos de reproducir los resultados de Lai, Dowell y Tauchert [115]. Analizamos ondas axisimétricas longitudinales en un cilindro compuesto, caracterizado por los siguientes parámetros:

$$\frac{G_2}{G_1} = 100 \quad (7.6)$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = 8 \quad (7.7)$$

$$\mu_1 = 0.29, \quad \mu_2 = 0.33 \quad (7.8)$$

$$\frac{r_2}{r_1} = 1.1 \quad (7.9)$$

Donde  $G_i$  es el módulo de elasticidad transversal,  $\rho_i$  es la densidad del material  $i$ ,  $\mu_i$  es el coeficiente de Poisson en el material  $i$ ,  $r_i$  son los radios.

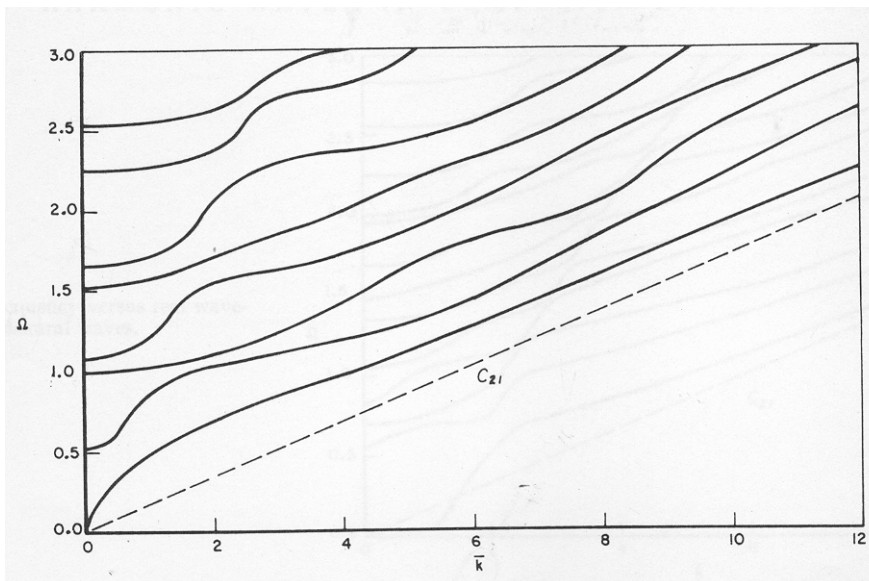


Figura 7.3. Frecuencia normalizada frente a número de onda adimensional para ondas longitudinales axisimétricas en un cilindro elástico sólido compuesto según Lai, Dowell y Tauchert [115].

Sus resultados se muestran en la Figura 7.3, donde  $\Omega$  es la frecuencia angular normalizada,  $\bar{k}$  es el número de onda adimensional. Para obtener los modos de propagación minimizamos el determinante de la matriz global para el caso cilíndrico con núcleo sólido de dos capas.

$$[\Delta_2] = \begin{bmatrix} [\Pi] & 0 \\ [\Lambda_{1,1}] & [-\Lambda_{2,1}] \\ 0 & [\Gamma_{2,2}] \end{bmatrix} \quad (7.10)$$

Obtenemos la siguiente solución empleando el algoritmo de búsqueda directa.

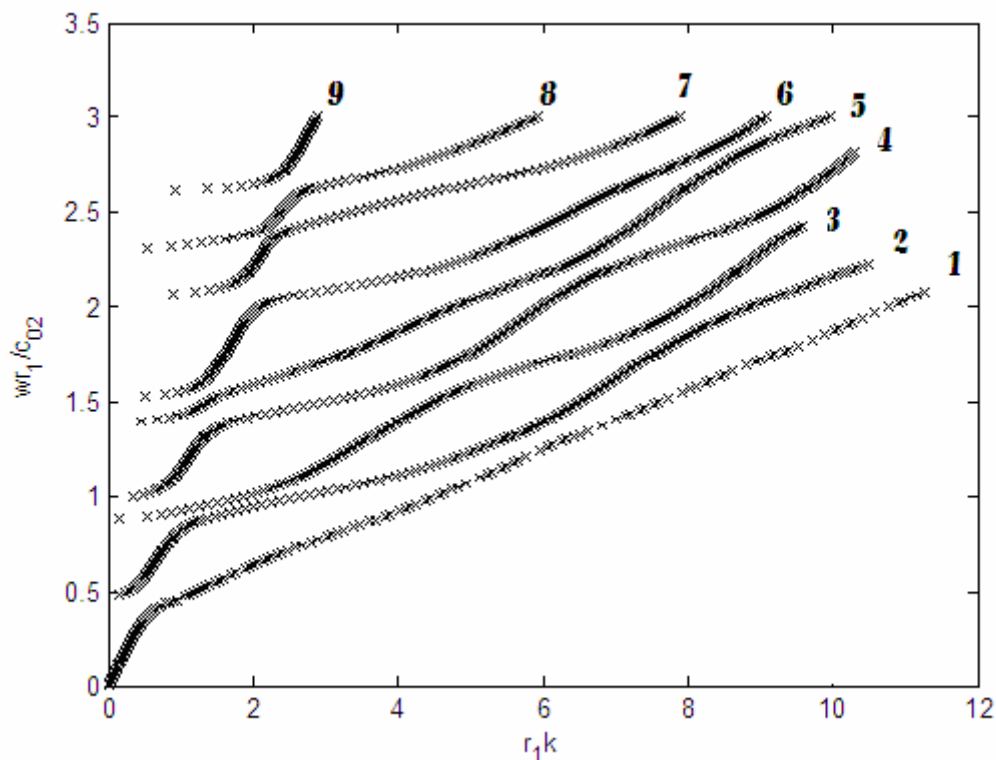


Figura 7.4. Frecuencia normalizada frente a número de onda adimensional para ondas longitudinales axisimétricas en un cilindro elástico sólido compuesto, empleando el método de búsqueda directa.

Donde  $w$  es la frecuencia angular,  $r_1$  es el radio interior del cilindro,  $c_{02}$  es la velocidad de barra del material exterior,  $k$  es el número de onda. En la gráfica los modos parecen en general coincidir con los que muestran Lai, Dowell y Tauchert. Sin embargo, hay un modo (el séptimo) que no aparece en su trabajo y sí en nuestra resolución. Vamos a tratar de determinar si este modo es un modo real del sistema o un artefacto de nuestra metodología. Para ello, en primer lugar volvemos a obtener la solución al problema empleando esta vez el método de

Lowe. En una primera aproximación, empleando nuestra implementación del método de Lowe, obtenemos el siguiente resultado:

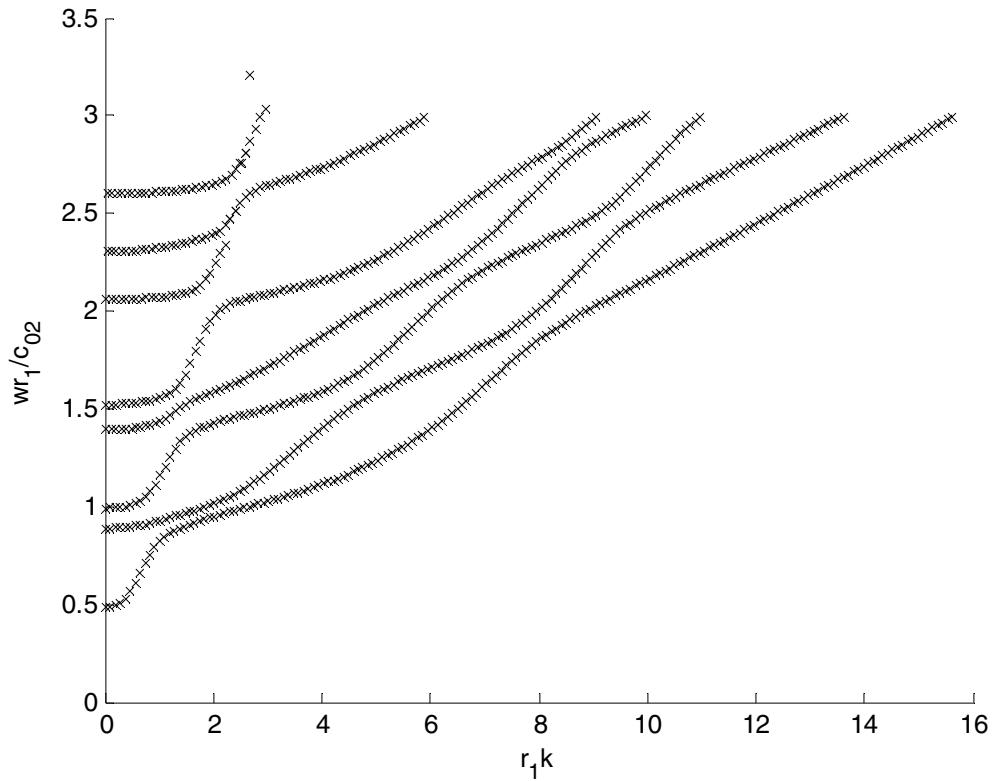


Figura 7.5. Frecuencia normalizada frente a número de onda para ondas longitudinales axisimétricas en un cilindro elástico sólido compuesto, primera aproximación empleando el método de Lowe.

En esta primera aproximación observamos un segmento de ese modo adicional, pero no lo vemos completo y además nos falta otro modo. Refinando un poco más la solución con el método de Lowe:

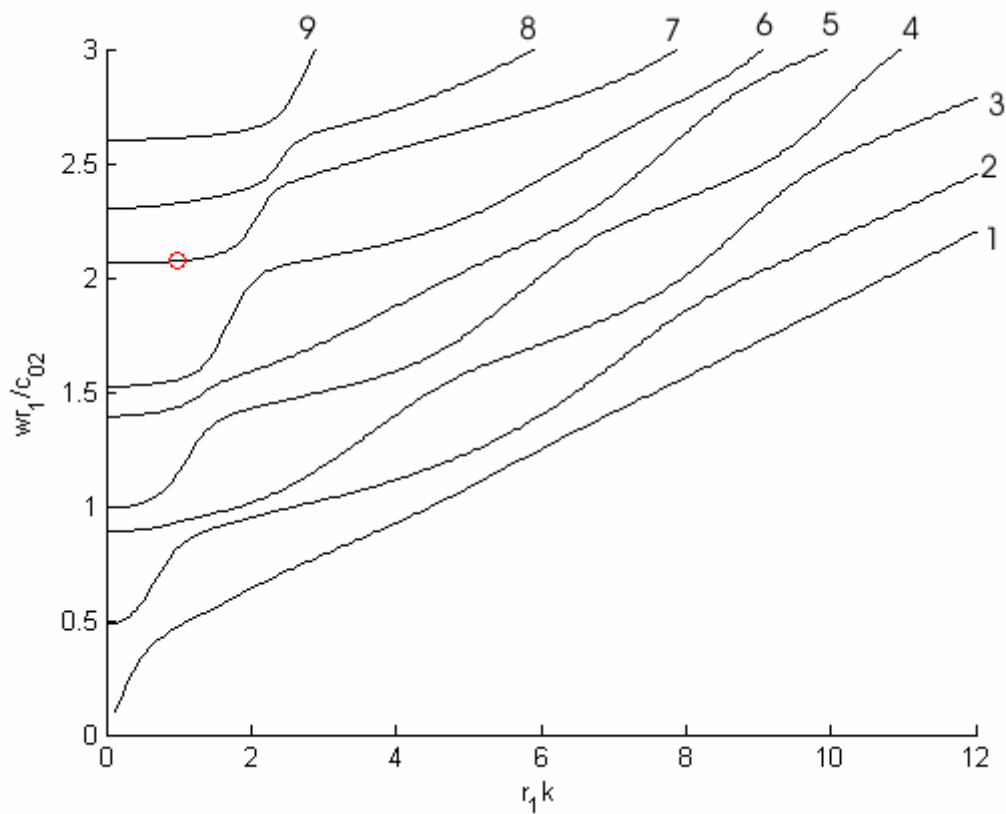


Figura 7.6. Frecuencia normalizada frente a número de onda para ondas longitudinales axisimétricas en un cilindro elástico sólido compuesto, segunda aproximación empleando el método de Lowe.

Donde ahora sí vemos los mismos modos que con el método de búsqueda directa, y se confirma que volvemos a obtener ese modo adicional que no aparece en el artículo de Lai, Dowell y Tauchert. Continuando con el análisis sobre la naturaleza de ese modo adicional, representamos la función en la región en la que aparece ese modo adicional.



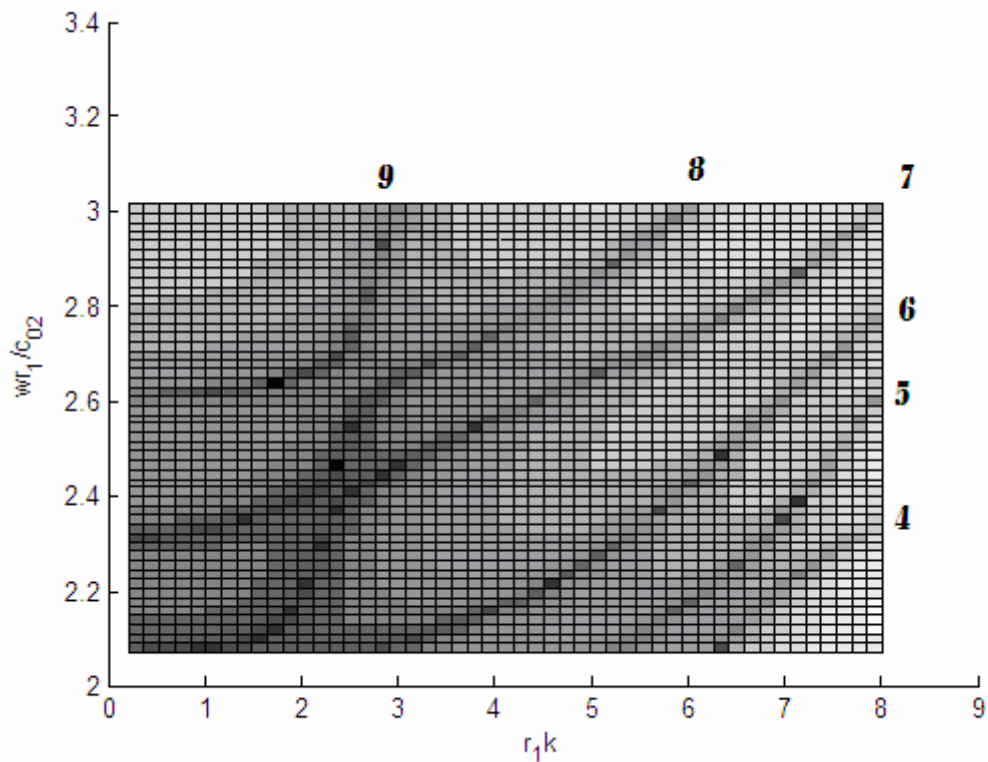


Figura 7.7. Función característica en una gráfica de frecuencia normalizada frente a número de onda no dimensional para ondas longitudinales axisimétricas en un cilindro elástico sólido compuesto. La representación es tal que cuanto más oscuro es un punto menor es el valor de la función característica en dicho punto.

En la representación gráfica de la función, vemos que efectivamente la función alcanza un mínimo en ese modo de propagación. Por último, obtenemos el perfil del modo de propagación en un punto de dicho modo, en particular en el punto señalado con un círculo en la Figura 7.6.

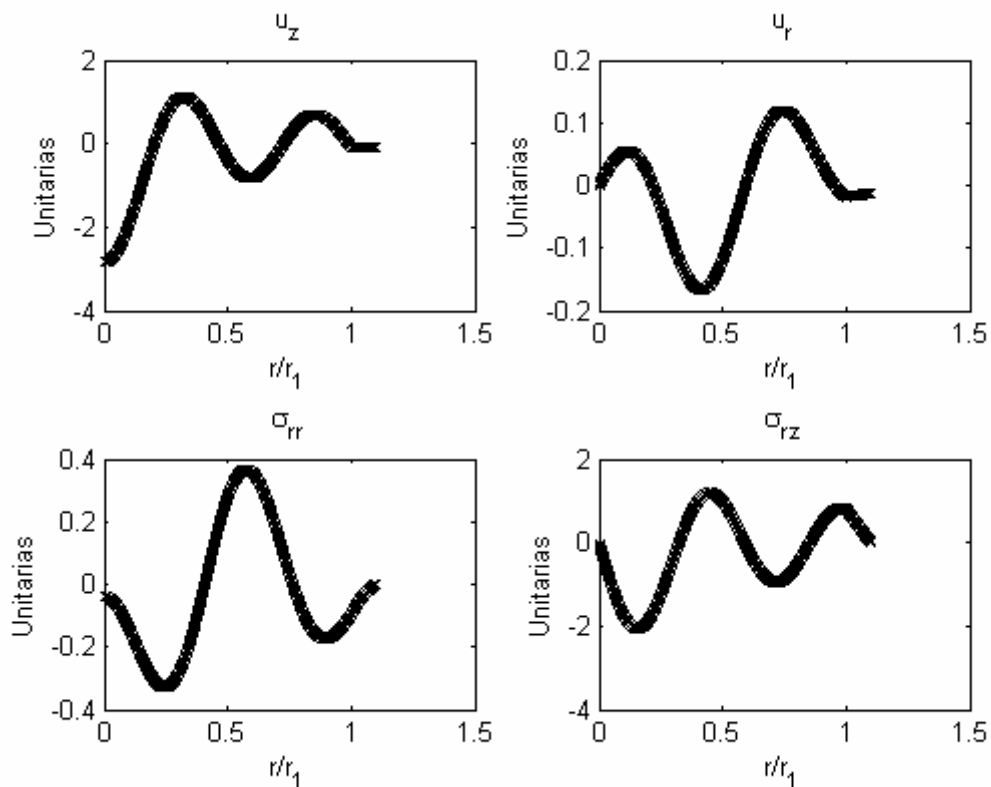


Figura 7.8. Perfil del modo de propagación adicional. Ondas longitudinales axisimétricas en un cilindro elástico sólido compuesto.

Donde  $u_z$  es el desplazamiento en la dirección axial,  $u_r$  es el desplazamiento en la dirección radial,  $\sigma_{rr}$  y  $\sigma_{rz}$  son las tensiones normal y tangencial a un cilindro. La representación del perfil del modo de propagación, nos permite comprobar que se verifican las condiciones que se impusieron en la matriz global. En particular se verifica que hay magnitudes finitas para  $r=0$ , que hay continuidad de tensiones y deformaciones en el radio intermedio ( $r/r_1=1$ ) y que en la superficie exterior la tensión es nula. Por tanto creemos que se trata de un modo de propagación real del sistema, si bien no aparece en la solución que muestran Lai, Dowell y Tauchert [115].

### 7.1.3. Tuberías de acero recubiertas de plástico

En el caso de tuberías huecas, rodeadas de una capa viscoelástica, la matriz global se reduce a:

$$[\Delta_{hollow}] = \begin{bmatrix} [\Gamma_{1,1}] & 0 \\ [\Lambda_{1,2}] & [-\Lambda_{2,2}] \\ 0 & [\Gamma_{2,3}] \end{bmatrix} \quad (7.11)$$

Donde las primeras y últimas filas de la matriz global  $[\Delta_{hollow}]$  con  $[\Gamma_{1,1}]$  y  $[\Gamma_{2,3}]$  son la condición de contorno de anulación de tensiones en las superficies libres. Mientras que las filas con  $[\Lambda_{i,j}]$  son la continuidad de desplazamientos y tensiones en la superficie intermedia. Barshinger y Rose [106] plantean y resuelven este problema, con las siguientes propiedades geométricas y de los materiales:

Símbolo	Frontera	Radio (pulgadas)
$r_1$	Vacío – Acero	2.013
$r_2$	Acero – Plástico	2.25
$r_3$	Plástico – Vacío	2.256

Componente	Re( $c_1$ ) (m/s)	Im( $c_1$ ) (m/s)	Re( $c_2$ ) (m/s)	Im( $c_2$ ) (m/s)	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )
1 Acero	5090	0	3190	0	7800
2 Plástico	1860	-80	730	-130	1500

Tabla 7.1. Propiedades geométricas y de los materiales en tuberías recubiertas de plástico.

Donde  $r_i$  son los radios,  $c_1$ ,  $c_2$  son las velocidades longitudinales y transversales respectivamente,  $\rho$  es la densidad. A continuación se muestra la solución que obtienen Barshinger y Rose [106].

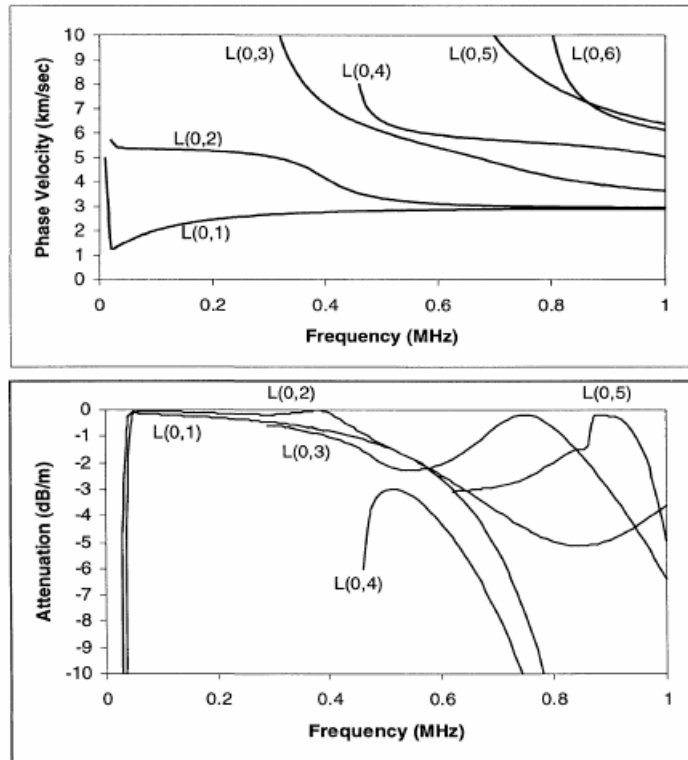


Figura 7.9. Velocidad de fase y atenuación en una tubería de acero con recubrimiento de plástico, según Barshinger y Rose [106].

Aplicando la metodología propuesta por Lowe llegamos a la misma solución que ellos muestran en su artículo:

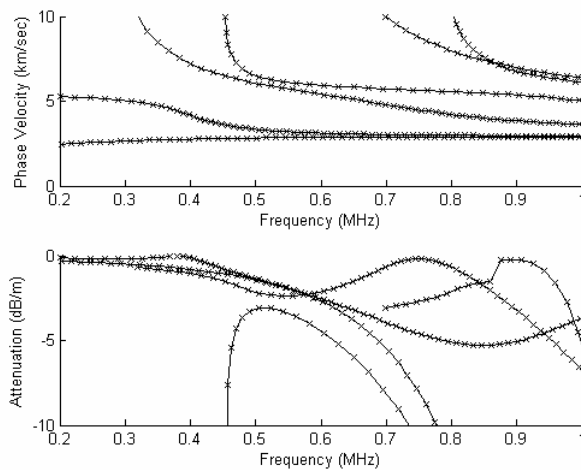


Figura 7.10. Velocidad de fase y atenuación en una tubería de acero con recubrimiento de plástico, con nuestra implementación del método de Lowe.

Con el método de búsqueda directa descrito en esta tesis llegamos a la misma solución:

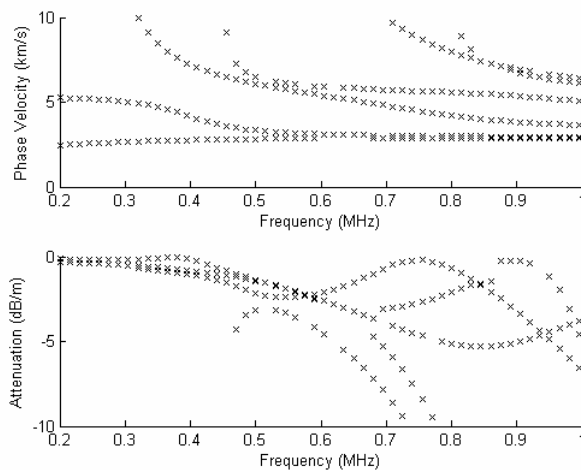


Figura 7.11. Velocidad de fase y atenuación en una tubería de acero con recubrimiento de plástico, empleando el método de búsqueda directa.

Con nuestra implementación del método de Lowe se obtiene la solución en 6min 6s, mientras que el método de búsqueda directa necesita 1h 27min 42s. Estos números son indicativos del número de evaluaciones de la función característica que requiere cada método: 33,231 con el método de Lowe y 439,550 con el método de búsqueda directa. Por tanto en este caso se observa una menor eficiencia del método de búsqueda directa, sin que se aprecien ventajas en cuanto a detección de modos adicionales.

### 7.1.4. Cilindro sólido homogéneo sin viscoelasticidad

Los modos de propagación del cilindro sólido pueden obtenerse con la siguiente ecuación característica (ver [104] o [103]):

$$f(k) = k^2 \frac{\beta J_0(\beta r_1)}{J_1(\beta r_1)} - \frac{1}{2} \left( \frac{\omega}{c_2} \right)^2 \frac{1}{r_1} + \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\omega}{c_2} \right)^2 - k^2 \right)^2 \frac{J_0(\alpha r_1)}{\alpha J_1(\alpha r_1)} = 0 \quad (7.12)$$

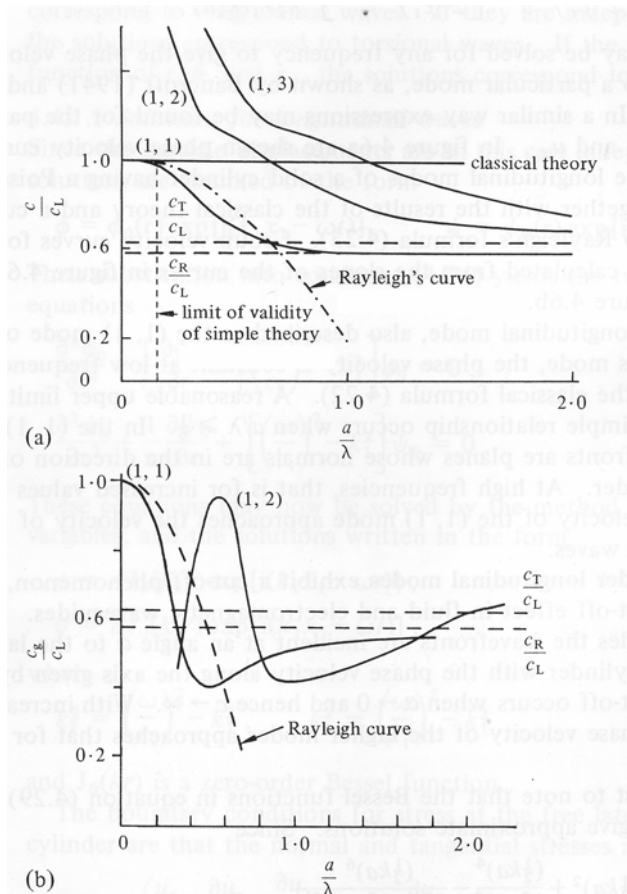


Figura 7.12. Velocidad de fase y de grupo en cilindro sólido con coeficiente de Poisson 0.29, según Pollard [104].

Donde  $c$  es la velocidad de fase,  $c_L$  es la velocidad de barra a bajas frecuencias,  $c_g$  es la velocidad de grupo,  $a$  es el radio del cilindro,  $\lambda$  es la longitud de onda. Alternativamente, con el método de la matriz global, también pueden obtenerse mediante la siguiente matriz global:

$$[\Delta_1] = \begin{bmatrix} [\Pi] \\ [\Gamma_{1,1}] \end{bmatrix} \quad (7.13)$$

Como se demuestra en [104], tomando solo los primeros términos de la expansión de Taylor de las funciones de Bessel, la solución puede aproximarse para grandes longitudes de onda:

$$\frac{\omega}{k} = c_b = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (7.14)$$

Que es justamente la velocidad de propagación en una barra sólida cuando la longitud de onda es mucho mayor las dimensiones transversales de dicha barra. Con los términos de segundo orden se llega a la ecuación de Rayleigh:

$$\frac{\omega}{k} = c_b \left( 1 - \mu^2 \pi^2 \left( \frac{a}{\lambda} \right)^2 \right) \quad (7.15)$$

A continuación se muestra la aproximación de Rayleigh, así como los modos de propagación obtenidos empleando el enfoque de la matriz global, tanto con nuestra implementación del método propuesto por Lowe, como con el método de búsqueda directa. En el caso  $c_{ph}=c_2$  se obtiene una solución de la ecuación que en realidad no se corresponde con una solución de la ecuación diferencial. Es el caso explicado por Lowe [61] en el que la velocidad de fase de las ondas es igual a una de las velocidades de propagación en un medio libre, en cuyo caso, la matriz global tiene dos columnas idénticas y es singular, debido a que tanto las ondas + como las - viajan paralelas a la capa, por lo que su efecto es indistinguible en cuanto a su influencia sobre las tensiones y los desplazamientos.

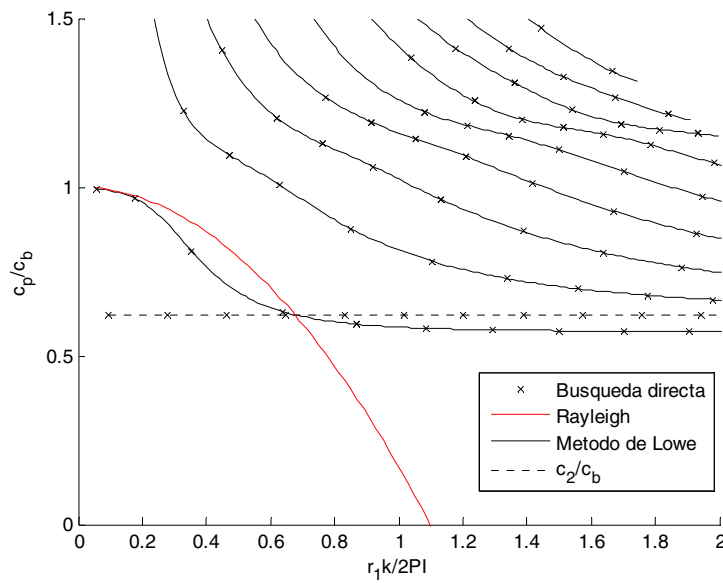


Figura 7.13. Velocidad de fase en cilindro sólido con coeficiente de Poisson 0.29, empleando el método de Lowe y el método de búsqueda directa.

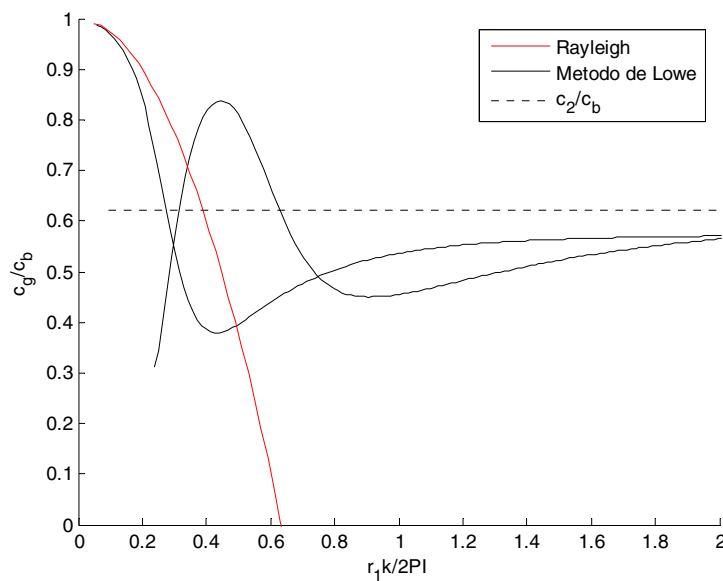


Figura 7.14. Velocidad de grupo en cilindro sólido con coeficiente de Poisson 0.29, empleando el método de Lowe.

Donde  $c_p$  es la velocidad de fase,  $c_b$  es la velocidad de barra a bajas frecuencias,  $c_g$  es la velocidad de grupo,  $c_2$  es la velocidad en medio libre de las ondas transversales. Se confirma que los resultados obtenidos coinciden con los de Pollard [104].



## 7.2. Validación de las técnicas experimentales

Dado la imposibilidad de aislar las respuestas de los modos con las señales de los piezoeléctricos, en colaboración con el Instituto de Acústica se empleó, como hemos comentado, la técnica de interferometría. En primer lugar, se realizaron las simulaciones numéricas de los modos longitudinales axisimétricos que podrían ser medidos. Después, se llevaron a cabo las medidas experimentales y se contrastaron con las simulaciones. Resultó claro que uno de los modos medidos se correspondía con el primer modo longitudinal, pero se observaba también otro modo adicional que no aparecía representado en la solución axisimétrica.

Observando simulaciones realizadas con DISPERSE [83] en medios sin viscoelasticidad, se pensó que dicho modo podía ser uno de flexión, por lo que se completó el modelo con los modos de flexión. Se realizaron nuevas simulaciones y se comprobó como efectivamente el otro modo se correspondía con el primero de flexión. Las curvas del número de onda real eran muy semejantes para simulaciones y experimentos; sin embargo seguían observándose diferencias cualitativas en cuanto a las atenuaciones de uno y otro modo. Para obtener resultados más próximos a la realidad se procedió a estimar empíricamente las propiedades del PVC plastificado que recubre al cobre en el cable eléctrico. Se volvieron a realizar simulaciones y finalmente se verificó la coherencia entre simulaciones y resultados experimentales.

La metodología experimental realizada hasta el momento, fue basada en medidas indirectas de las ondas elásticas a través de las señales eléctricas generadas por los piezoeléctricos. Tuvimos la oportunidad de contrastar estas medidas con una metodología más “física”, gracias a la colaboración de Francisco Montero de Espinosa, Maria Isabel García y Yago Gómez-Ullate, dentro del Instituto de Acústica del CSIC. Se utilizó como excitación un pulso de gran ancho de banda con un 5052 PARAMETRICS Pulser-Receiver. Un interferómetro láser, POLYTEC OFV-5000, controlado por un sistema mecánico de 3D, medía señales

temporales perpendiculares a la dirección de propagación de la onda [87, 99]. Un osciloscopio de Agilent, el DSO6014A, capturaba las señales temporales que se almacenaban en un ordenador portátil. Se realizaron 51 ensayos con una separación de 2mm entre cada ensayo a lo largo del cable. En cada ensayo se tomó una ventana temporal de 1000 muestras, con un ancho de ventana de 100 $\mu$ s. Para obtener las siguientes gráficas de número de onda real frente a frecuencia se realizó la transformada discreta de Fourier en 2-dimensiones (2-D FFT) sobre los datos según proponen Alleyne y Cawley [94]. A partir del eje temporal se obtiene la frecuencia temporal y a partir del eje espacial la frecuencia espacial o número de onda.

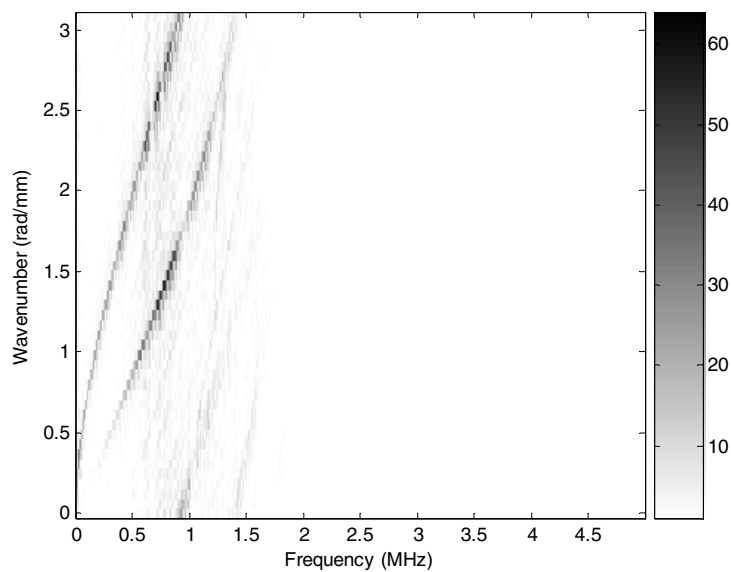


Figura 7.15. Parte real del número de onda frente a frecuencia para cable sin plástico no estirado.

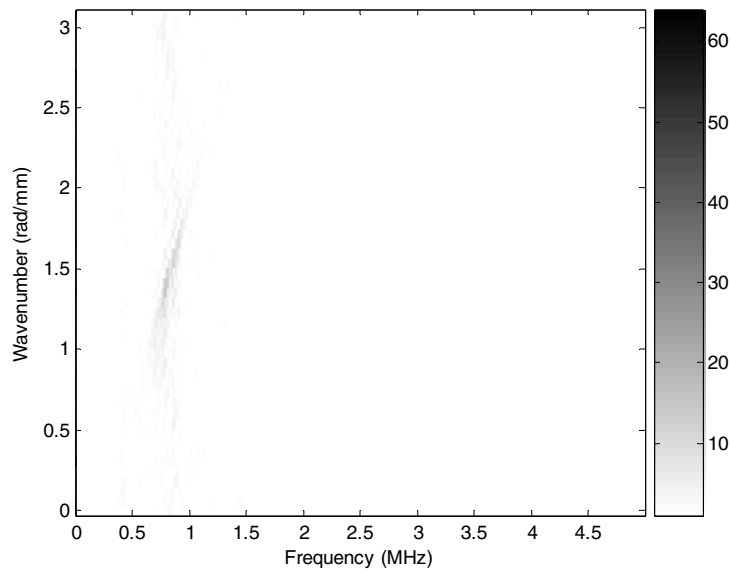


Figura 7.16. Parte real del número de onda frente a frecuencia para cable con plástico no estirado.

Conforme veremos más adelante que predice la teoría, el cable con plástico tiene mucha más atenuación que el cable sin plástico. Además se observa que en particular el primer modo de flexión prácticamente ha desaparecido, debido a que está mucho más atenuado que el primer modo longitudinal.

Los ensayos se repitieron para el cable con una ventana de  $500\mu\text{s}$ , haciendo una ampliación de la zona de baja frecuencia, por debajo de 1MHz. De nuevo las medidas experimentales confirman que el primer modo de flexión ha desaparecido casi completamente y solo se observa un pequeño segmento del primer modo longitudinal.

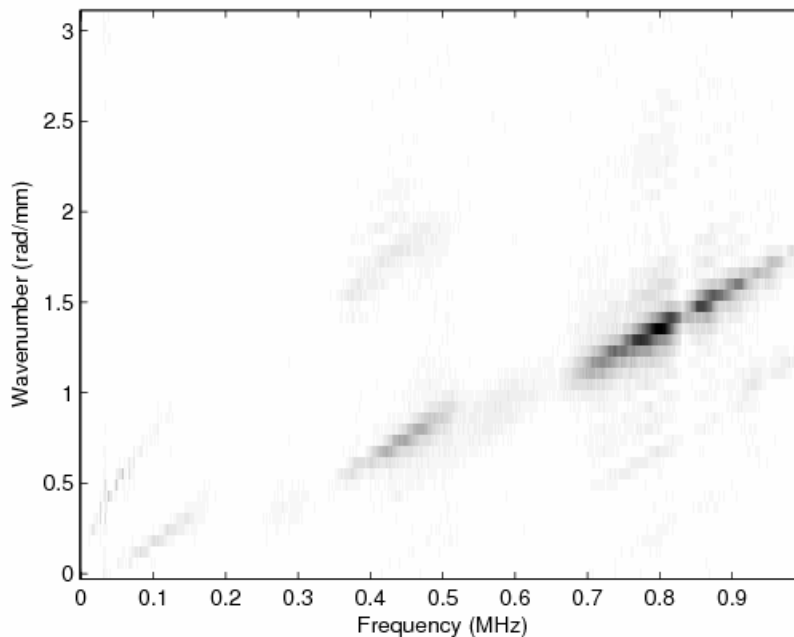


Figura 7.17. Parte real del número de onda frente a frecuencia para cable con plástico no estirado. Ventana de 500 $\mu$ s.

### 7.3. Validación de las propiedades del PVC plastificado

Simonetti y Cawley sugieren medir las propiedades transversales de los materiales, a través de la respuesta en frecuencia de los coeficientes de reflexión y transmisión, obteniendo la velocidad y la atenuación del medio [116]. Hillier y Kolsky [117] proponen medir las propiedades elásticas de un material mediante ensayos de régimen permanente sinusoidal en barras (filamentos). Cuando la longitud de onda es grande comparada con las dimensiones transversales de la barra, la onda es esencialmente plana, por lo que la onda puede considerarse unidimensional y es posible aplicar la relación entre el módulo de Young y la velocidad de propagación en la barra. En el caso de que la atenuación sea suficientemente alta (bien por viscoelasticidad alta o por longitudes grandes) el efecto de la onda reflejada puede despreciarse. Las expresiones para obtener atenuación y frecuencia se simplifican mucho en este caso. Blanc y Champomier [118] propusieron un método alternativo basado en el ensayo de pulsos en barras, concluyendo que el máximo del pulso se propaga a la velocidad de la barra, y obteniendo una expresión para la atenuación.

Más tarde el mismo Blanc [107] también propuso un método alternativo basado en el análisis espectral de transitorios. Algunas de las ecuaciones y de las hipótesis simplificadoras que emplea Blanc son aplicables al siguiente caso, pese a que la evaluación de las propiedades se realiza en régimen permanente sinusoidal, y despreciando el efecto de la señal reflejada, dadas las grandes atenuaciones presentes en el sistema. Según Blanc las propiedades medidas son válidas hasta una o dos décadas por encima de la frecuencia de los ensayos. Nosotros sin embargo los utilizaremos para más alta frecuencia, lo que puede ocasionar diferencias entre el modelo y los ensayos.

El cobre se eliminó del cable y se realizaron ensayos de respuesta en frecuencia con cilindros huecos de PVC plastificado en el rango 5-10kHz, con longitudes de 25cm y 50cm. Los ensayos se repitieron con tres cables diferentes para cada longitud y los resultados se promediaron. En esta zona de baja frecuencia el modo longitudinal es no dispersivo y la velocidad de fase y grupo coincide con la velocidad de barra. La velocidad finita del sonido retrasa la señal de salida. El retardo se observa en la respuesta en frecuencia como una variación lineal de la fase. Usamos la pendiente de la fase de la respuesta en frecuencia, para evaluar la velocidad del sonido en el PVC plastificado, mediante la formula:

$$c_b = \frac{-360^\circ \times L}{m} \quad (7.16)$$

Donde  $c_b$  es la velocidad de barra del PVC plastificado,  $L$  es la longitud del cable y  $m$  es la pendiente de la fase de la respuesta en frecuencia en [°/Hz]. Conforme proponen Blanc y Champomier [118] utilizamos un valor único para la velocidad (promedio de su valor en todo el rango de frecuencias), mientras que para la atenuación asumiremos una atenuación lineal con la frecuencia.

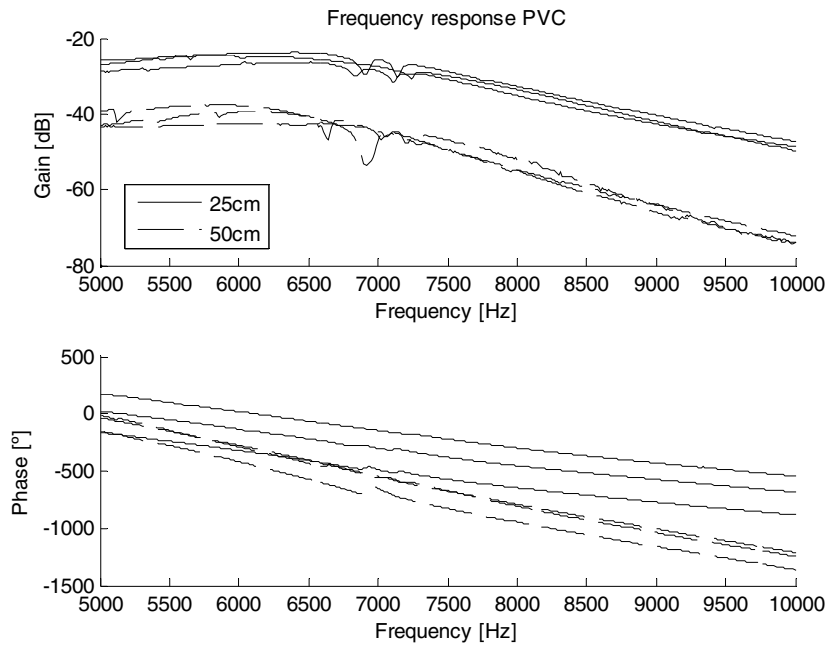


Figura 7.18. Respuesta en frecuencia de cilindros huecos de PVC. Rango: 5-10kHz.

Evaluamos la atenuación con el cociente de la magnitud de la respuesta en frecuencia a dos longitudes diferentes y con la diferencia de las longitudes de los cables (ver [107])

$$A(\omega) = -\frac{1}{L_2 - L_1} \ln \frac{\rho(L_2, \omega)}{\rho(L_1, \omega)} \quad (7.17)$$

Donde  $\omega$  es la frecuencia angular,  $A(\omega)$  es la atenuación,  $L_1$  y  $L_2$  son las dos longitudes de los cables y  $\rho(L_i, \omega)$  es la magnitud de la respuesta en frecuencia. El módulo de elasticidad longitudinal complejo puede evaluarse mediante las relaciones clásicas:

$$\tan\left(\frac{\varphi(\omega)}{2}\right) = \frac{A(\omega)c_b}{\omega} \quad (7.18)$$

$$|E(\omega)| = \rho c_b^2 \cos^2 \frac{\varphi(\omega)}{2} \quad (7.19)$$

$$E'(\omega) = |E(\omega)| \cos \varphi(\omega) \quad (7.20)$$

$$E''(\omega) = |E(\omega)| \sin \varphi(\omega) \quad (7.21)$$

Donde  $\tan\phi(\omega)$  es la tangente de pérdidas,  $E'(\omega)$  y  $E''(\omega)$  son la parte real e imaginaria del módulo de elasticidad longitudinal complejo respectivamente y  $\rho$  es la densidad. La densidad del PVC se estimo como  $\rho_{PVC} = 1.52 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$  midiendo la masa y el volumen de un cilindro hueco de PVC plastificado de tres metros. El coeficiente de Poisson ( $\mu$ ) se estimó como la media de cuatro plásticos comunes, suponiendo que es puramente real, como sugiere Blanc [107].

$$\mu = 0.37 \quad (7.22)$$

Con el módulo de elasticidad complejo y el coeficiente de Poisson, las constantes de Lamé ( $\lambda$  y  $G$ ) y las velocidades de ondas longitudinales ( $c_1$ ) y transversales ( $c_2$ ) del medio pueden ser evaluadas [104].

$$G(\omega) = \frac{E(\omega)}{2(1 + \mu)} \quad (7.23)$$

$$\lambda(\omega) = G(\omega) \frac{2\mu}{1 - 2\mu} \quad (7.24)$$

$$c_1(\omega) = \sqrt{\frac{\lambda(\omega) + 2G(\omega)}{\rho}} \quad (7.25)$$

$$c_2(\omega) = \sqrt{\frac{G(\omega)}{\rho}} \quad (7.26)$$

De acuerdo con Barshinger y Rose [13] se pueden definir dos cantidades  $\bar{c}_i(\omega)$ ,  $\alpha_i(\omega)$  para cada velocidad compleja como:

$$\bar{c}_i(\omega) = \left( \text{Re} \left( \frac{1}{c_i(\omega)} \right) \right)^{-1} \quad (7.27)$$

$$\alpha_i(\omega) = \omega \text{Im} \left( \frac{1}{c_i(\omega)} \right) \quad (7.28)$$

Siendo  $\alpha(\omega)$  la constante de atenuación. La velocidad compleja puede expresarse en términos de estas constantes como:

$$c_i(\omega) = \left[ \frac{1}{\bar{c}_i(\omega)} + i \frac{\alpha_i(\omega)}{\omega} \right]^{-1} \quad (7.29)$$

Obtuvimos valores promediados a lo largo de la frecuencia, de  $\bar{c}_i(\omega)$  y  $\frac{\alpha_i(\omega)}{\omega}$  y evaluamos con ellos las velocidades de ondas longitudinales ( $c_{1,PVC}$ ) y transversales ( $c_{2,PVC}$ ) en el PVC plastificado.

$$c_{1,PVC} = 886 - 111.8j \quad (7.30)$$

$$c_{2,PVC} = 400.8 - 50.6j \quad (7.31)$$

Obsérvense los bajos valores de estas velocidades. Sin embargo parecen valores razonables, si tenemos en cuenta que no es PVC rígido sino PVC plastificado, más similar al caucho. Como resumen de los resultados de los ensayos, proponemos los siguientes valores como propiedades geométricas y de los materiales del cable eléctrico utilizado (H07V-U):

Símbolo	Frontera	Radio (mm)
$r_1$	Cobre – Plástico	0.691
$r_2$	Plástico – Vacío	1.391

Componente	Re( $c_1$ ) (m/s)	Im( $c_1$ ) (m/s)	Re( $c_2$ ) (m/s)	Im( $c_2$ ) (m/s)	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )
1 Cobre	5010	-2.505	2270	-1.135	8930
2 Plástico	886	-111.8	400.8	-50.6	1523

Tabla 7.2. Estructura y propiedades relevantes del cable eléctrico (H07V-U).

## 7.4. Validación parcial del modelo: atenuación – frecuencia

La siguiente figura muestra la comparación entre los resultados teóricos y experimentales de atenuación en el rango 1-12MHz. La Figura 7.19 muestra una gran similitud entre teoría y



ensayos en el cable desnudo, mientras que se aprecian mayores diferencias en el cable compuesto.

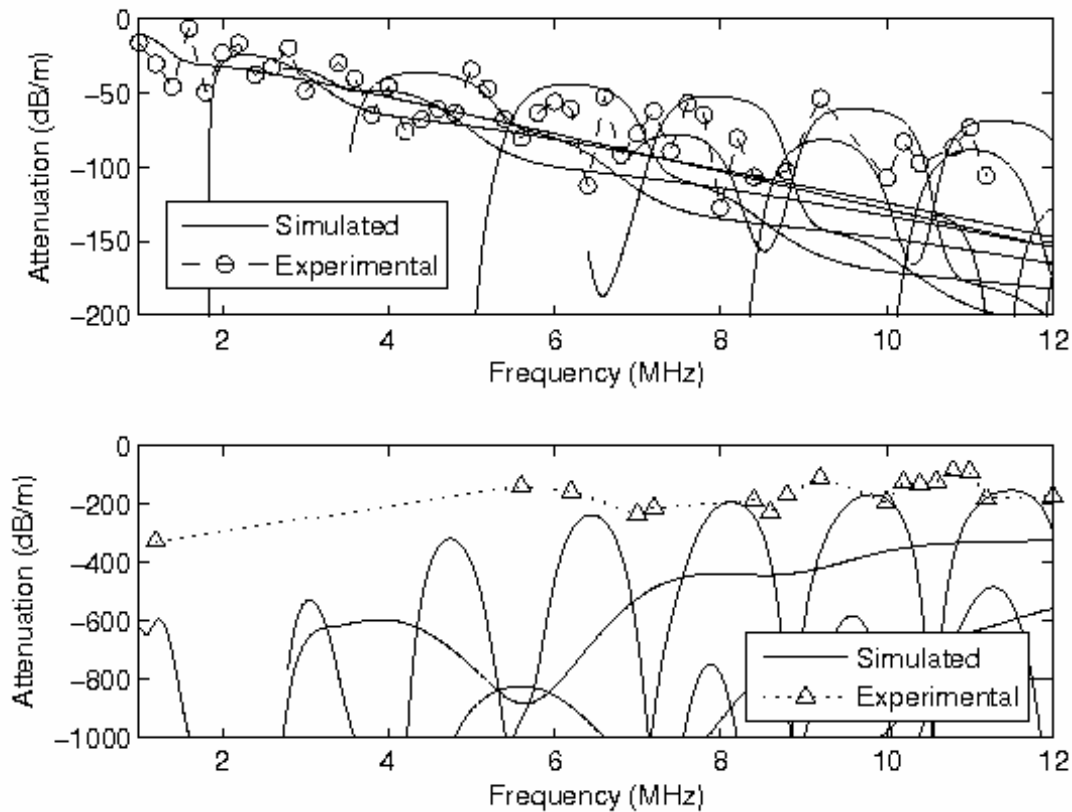


Figura 7.19. Comparación de atenuación experimental y simulada de cables de cobre desnudos (partes superior) y con recubrimiento exterior de plástico aislante (parte inferior).

Para el cable desnudo la similitud entre los resultados experimentales y teóricos es bastante alta. Para los cables completos hay mayores diferencias, pero la tendencia general de simulaciones y experimentos es concordante. Como indican Anastasi y Madaras [31], entre otros autores en esta área, la diferencia entre las curvas experimentales y teóricas puede deberse a diferencias entre las propiedades reales de los materiales y las tabuladas, así como a las diferencias entre las condiciones de contorno impuestas y las reales. Las diferencias son especialmente significativas a 1MHz, posiblemente debido a que la atenuación a esta frecuencia es demasiado alta, lo que hace imprecisa dicha medida. Por otro lado, a frecuencias superiores los resultados son más próximos.

## 7.5. Validación parcial del modelo: modos de propagación

Como se ha visto en la Figura 7.19, la atenuación de los modos de propagación parece ser bastante semejante en los resultados teóricos y experimentales. En el cable desnudo se observa que la tendencia es la de aumentar la atenuación conforme se incrementa el número del modo; este resultado contrasta con el comportamiento del cable con plástico en el que al aumentar el número del modo de propagación disminuye la atenuación. Este hecho apunta hacia que los mayores modos de propagación (aquellos con menor longitud de onda) tienden a propagarse solo por el cobre, un medio con menor viscoelasticidad que el plástico, por lo que las pérdidas del cable causadas por el aislamiento de plástico disminuyen. Para comprobar esto, procedemos a dibujar el perfil de los modos de propagación, seleccionando para los sucesivos modos la frecuencia tal que la atenuación del modo es mínima. A continuación, en la Figura 7.20, se representan con un círculo aquellos puntos que tienen la menor atenuación de cada modo, en el rango 1-10MHz.

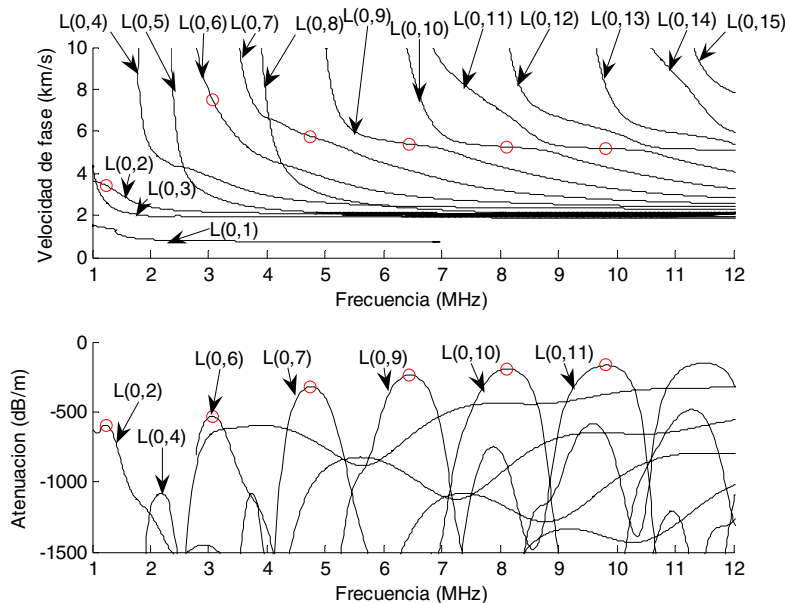


Figura 7.20. Modos de propagación. Cable eléctrico con plástico aislante. Rango 1-12MHz. Con círculo los puntos con mínima atenuación de algunos modos.

En la Figura 7.21 se representa el perfil de los modos de propagación para frecuencias crecientes. En el eje X se representa el valor de los desplazamientos ( $u_z$  y  $u_r$ ) en magnitudes unitarias, mientras que en el eje Y se representa el radio, desde el eje de simetría ( $r=0$ ), pasando por la frontera entre el cobre y el plástico ( $r=0.75\text{mm}$ ) y hasta llegar al límite entre el plástico y el aire ( $r=1.35\text{mm}$ ).

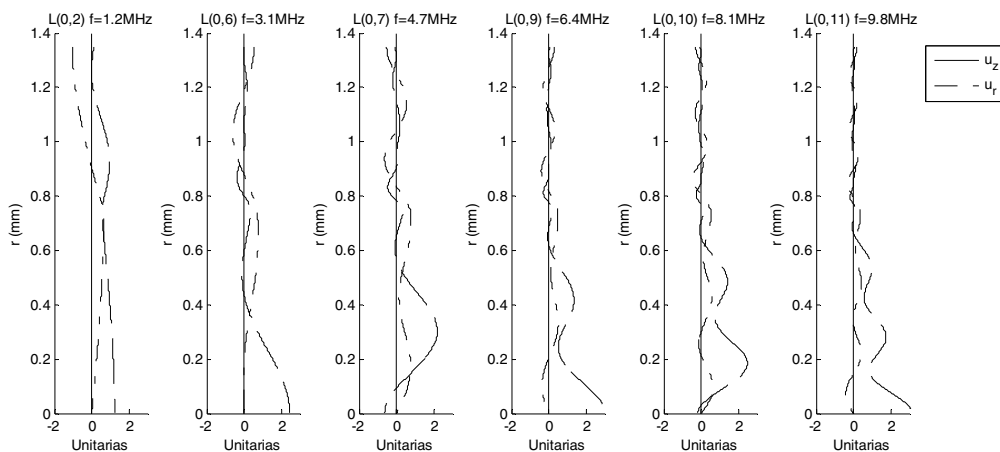


Figura 7.21. Perfil de los modos de propagación para frecuencia y número de modo crecientes. Las frecuencias seleccionadas tienen la mínima atenuación del modo.

El desplazamiento en el plástico se concentra en la zona de  $r=0.75\text{mm}$  a  $r=1.35\text{mm}$ , apreciándose claramente que conforme aumenta el número del modo, los desplazamientos en el plástico disminuyen; lo que parece confirmar la hipótesis de que los modos con mayor frecuencia (por tanto con menor longitud de onda) tienden a propagarse principalmente por el cobre.

Siqueira y otros señalan que para los modos guiados y con poco desplazamiento lateral, el espesor del material debe ser del mismo orden que la longitud de onda [84]. Cawley [9] obtuvo un resultado relativamente similar al que estamos obteniendo aquí en la estructura de soporte de las rocas, en las que también hay una atenuación bastante fuerte debido a que mucha energía se pierde propagándose hacia la roca. En su caso hay diferentes familias de modos en los que la atenuación oscila con la frecuencia. El mínimo de atenuación lo obtiene a una frecuencia relativamente alta (2MHz) en vez de a bajas frecuencias (como podría

intuirse); esto se debe a que conforme la frecuencia aumenta, la energía de los puntos de menor atenuación se concentra cada vez más en el centro de la barra, de modo que el movimiento en la superficie (que es el que controla la filtración de energía hacia el exterior) disminuye. Hosten y Castaings [70] analizaron un caso de dos placas de aluminio con una capa intermedia de agua, y también obtuvieron un modo, que denominan “modo del fluido”, en el que la energía se concentra en la capa intermedia para frecuencias crecientes, disminuyendo los desplazamientos y tensiones en las capas exteriores.

Las siguientes figuras muestran la comparación de las simulaciones con los ensayos de interferometría. Se muestra la atenuación y la parte real del número de onda frente a la frecuencia que se obtiene en las simulaciones; y la parte real del número de onda se compara con el resultado de los ensayos de interferometría. La validación de los valores de atenuación ya se realizó previamente. El color de los datos experimentales esta escalado para facilitar la distinción de los mismos.

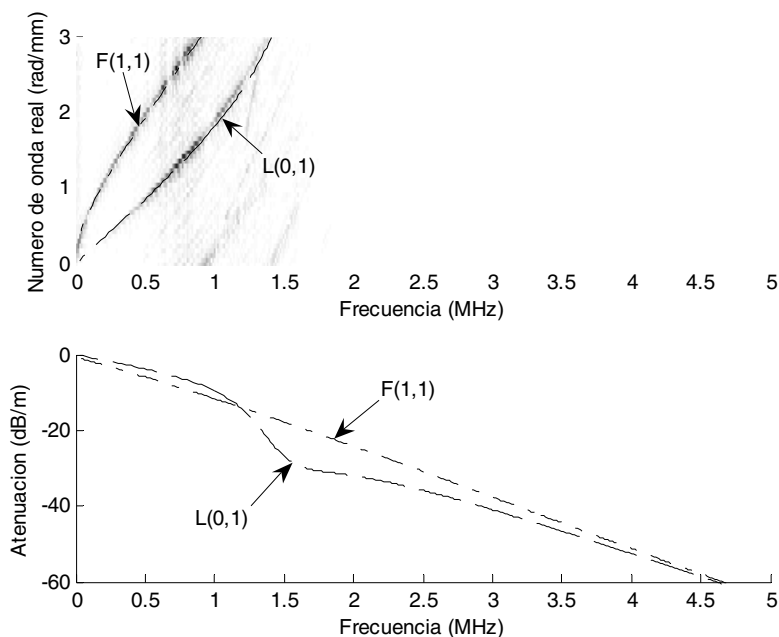


Figura 7.22. Comparación de número de onda experimental y simulada de cables de cobre desnudos.

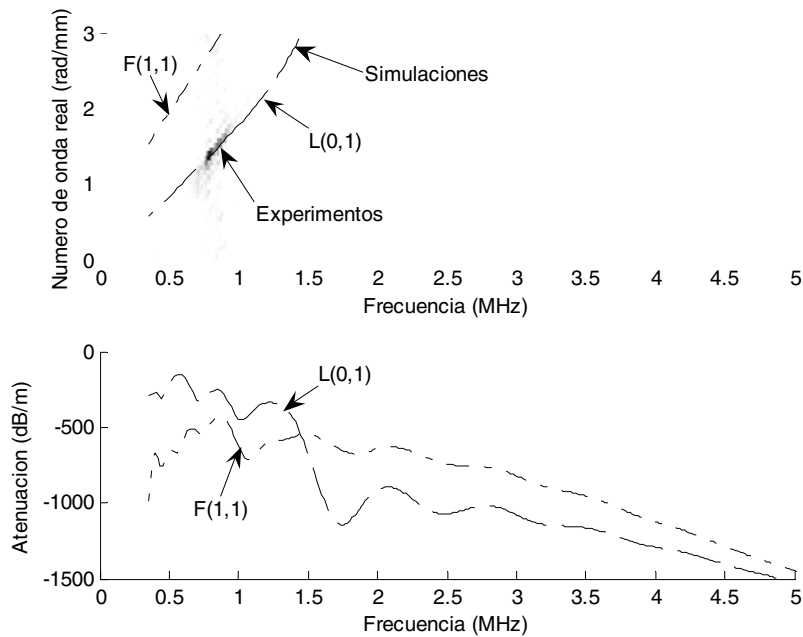


Figura 7.23. Comparación de número de onda experimental y simulada de cables con capa exterior de plástico aislante.

La simulación se centra en dos modos de propagación: el primer modo longitudinal y el primer modo de flexión. Las simulaciones se mostraron en el rango de frecuencias de 0-5MHz porque por interferometría solo medimos señales significativas en el rango de baja frecuencia. El modelo indica que el cobre desnudo tiene mucha menos atenuación que el cable, lo que sugiere que el plástico en este rango atenúa fuertemente las señales que se propagan por el cable. Las medidas en el cable están muy atenuadas. Además, en el cable, el primer modo de flexión tiene mayor atenuación que el primer modo longitudinal para frecuencias de hasta 1.5MHz, por lo que se espera que sea el primer modo en desaparecer en estas frecuencias.

En el ensayo de cable sin plástico se observan muy bien dos modos de propagación, que coinciden perfectamente con el primer modo longitudinal y de flexión que se obtienen con el modelo. Conforme predice la teoría y se confirma en la práctica, los modos de propagación están mucho más atenuados en el cable con plástico. Además, experimentalmente se comprueba que el primer modo de flexión desaparece en el cable con plástico, lo que es explicado por su mayor atenuación.

## 7.6. Propuesta de modelo completo validado

En los apartados anteriores de este capítulo hemos validado el modelo, primero de modo numérico, y luego mediante dos técnicas experimentales. Para conseguir reproducir todos los resultados experimentales que obteníamos, el modelo ha tenido que ser completado con los modos de flexión y torsión. A continuación se resume el modelo teórico completo validado.

Al resolver la ecuación de Lamé para el modelo completo (no restringido a las soluciones axisimétricas), las soluciones de los potenciales escalar y vectorial tienen, de acuerdo con las ecuaciones de Gazis [47], la siguiente expresión:

$$\Phi = f(r) \cos(n\theta) e^{i(kz + \omega t)} \quad (7.32)$$

$$\mathbf{H}_r = g_r(r) \sin(n\theta) e^{i(kz + \omega t)} \quad (7.33)$$

$$\mathbf{H}_\theta = g_\theta(r) \cos(n\theta) e^{i(kz + \omega t)} \quad (7.34)$$

$$\mathbf{H}_z = g_3(r) \sin(n\theta) e^{i(kz + \omega t)} \quad (7.35)$$

Donde  $k$  es el número de onda,  $\omega$  es la frecuencia angular y  $z$  es la coordenada en la dirección axial,  $f(r), g_r(r), g_\theta(r), g_3(r)$  son funciones dependientes del radio. Uno de los potenciales vectoriales es posible obtenerlo a partir de los otros. Es posible seleccionar:

$$g_r = -g_\theta = g_3 \quad (7.36)$$

La solución a las funciones dependientes del radio puede expresarse como una combinación de las funciones de Hankel:

$$f(r) = A_{(L+)} H_n^{(1)}(\alpha r) + A_{(L-)} H_n^{(2)}(\alpha r) \quad (7.37)$$

$$g_1(r) = A_{(SV+)} H_{n+1}^{(1)}(\beta r) + A_{(SV-)} H_{n+1}^{(2)}(\beta r) \quad (7.38)$$

$$g_3(r) = A_{(SH+)} H_n^{(1)}(\beta r) + A_{(SH-)} H_n^{(2)}(\beta r) \quad (7.39)$$

Donde  $A_{(L+)}$ ,  $A_{(L-)}$ ,  $A_{(SH+)}$ ,  $A_{(SH-)}$ ,  $A_{(SV+)}$  y  $A_{(SV-)}$  son las amplitudes de ondas longitudinales, transversales horizontales y transversales verticales, en las direcciones salientes y entrantes,  $H_n^{(1),(2)}$  son las funciones de Hankel de orden  $n$  de la primera y segunda clase,  $r$  es la coordenada en la dirección radial,  $\alpha$  y  $\beta$  vienen dados por las siguientes expresiones:

$$\alpha^2 = \frac{\omega^2}{c_1^2} - k^2 \quad (7.40)$$

$$\beta^2 = \frac{\omega^2}{c_2^2} - k^2 \quad (7.41)$$

Las ecuaciones que permiten obtener desplazamientos y tensiones en una capa pueden expresarse matricialmente mediante la ecuación:

$$\begin{Bmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_z \\ \sigma_{rr} \\ \sigma_{rz} \\ \sigma_{r\theta} \end{Bmatrix} = [\Lambda_C] \begin{Bmatrix} A_{(L+)} \\ A_{(L-)} \\ A_{(SV+)} \\ A_{(SV-)} \\ A_{(SH+)} \\ A_{(SH-)} \end{Bmatrix} e^{i(kz - \omega t)} \quad (7.42)$$

Donde  $[\Lambda_C]$  es la matriz de capa del caso completo (el subíndice “c” denota caso completo). Hemos usado la matriz de capa del programa PCDISP de Seco y otros [24] basada en las ecuaciones de Gazis, pero empleando las funciones de Hankel. La condición de magnitudes finitas para  $r=0$  se impone mediante la matriz  $[\Pi_C]$  para las amplitudes de la primera capa:

$$[\Pi_C] \begin{Bmatrix} A_{(L+)} \\ A_{(L-)} \\ A_{(SV+)} \\ A_{(SV-)} \\ A_{(SH+)} \\ A_{(SH-)} \end{Bmatrix}_{layer\ 1} = 0 \quad (7.43)$$

Donde la nueva matriz  $[\Pi_C]$  es:

$$[\Pi_C] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (7.44)$$

Finalmente, resulta la siguiente matriz global para estructuras de dos capas:

$$[\Delta_{C2}] = \begin{bmatrix} [\Pi_C] & 0 \\ [\Lambda_{C1,1}] & [-\Lambda_{C2,1}] \\ 0 & [\Gamma_{C2,2}] \end{bmatrix} \quad (7.45)$$

Las anteriores ecuaciones representan el modelo para estructuras cilíndricas de dos capas que parece predecir, con suficiente validez, el comportamiento de los modos de propagación de las señales elásticas en los cables eléctricos que hemos simulado y ensayado experimentalmente.



## 8 CONCLUSIONES

En esta tesis se ha realizado un análisis teórico y experimental de los modos de propagación de las ondas elásticas en los cables eléctricos. El modelo descrito por Barshinger y Rose [13] para estructuras cilíndricas huecas de múltiples capas, se ha extendido a estructuras cilíndricas de múltiples capas con núcleo sólido. En el desarrollo teórico del modelo se han utilizado las funciones de Hankel para la descripción de las soluciones. Dicha descripción tiene el inconveniente de que aumenta el tamaño de la matriz global y con él los tiempos de procesamiento. Además, no es adecuada para obtener el perfil de los modos de propagación en puntos muy próximos al eje de simetría. Sin embargo, esta alternativa es más estable que otras basadas en las funciones de Bessel de primer y segunda clase, las cuales además requieren normalmente ser sustituidas por las funciones modificadas de Bessel, para ciertos valores de los argumentos. Además, se simplifica la formulación y la codificación, ya que las matrices de todas las capas son iguales. En futuras investigaciones sería interesante analizar la variante que proponen Ricks y Schmidt [66], combinando versiones normalizadas de la función de Hankel de primera clase y de la función de Bessel, para comprobar si consigue mantener o incrementar la robustez y/o mejorar los tiempos de procesamiento.

Para la resolución mediante algoritmos se ha utilizado tanto el método propuesto por Lowe [74] como un algoritmo de búsqueda directa descrito en esta memoria. Como combinación de estos dos métodos se propone un algoritmo híbrido, con el objetivo de incrementar la robustez. A pesar de que este último es más lento, se ha comprobado que es más robusto, ya que permite detectar modos adicionales que de otra forma podrían ser ignorados. Esto hace que dicho método híbrido se muestre como la alternativa más robusta que conocemos, disponible en este momento, para abordar problemas de propagación de ondas elásticas formulados mediante métodos matriciales.

Se han realizados dos grandes clases de validaciones, una de tipo numérico a los algoritmos empleados en las simulaciones y otra empírica mediante dos técnicas de medición

cuantitativamente distintas. Así, el modelo propuesto y su resolución mediante algoritmos se han validado numéricamente contrastando los resultados de simulaciones con las de autores como Redwood [103], Lai, Dowell y Tauchert [115], Barshinger y Rose [106] y Pollard [104], para problemas ya resueltos en la literatura.

Por otro lado, en la validación empírica, se han llevado a cabo ensayos experimentales en los que se ha medido la atenuación de señales elásticas en los cables eléctricos, tanto en cables desnudos como en cables con plástico. Tanto en los ensayos realizados, como en las predicciones del modelo se ha observado un hecho curioso. En el caso de cables desnudos la atenuación aumenta con la frecuencia. Esta característica, típica en ondas elásticas con viscoelasticidad, contrasta con el comportamiento en los cables eléctricos con cubierta de plástico. En estos últimos se observa que al incrementar la frecuencia disminuye la atenuación; este hecho parece indicar que los modos de propagación superiores (aquellos de mayor frecuencia y por tanto con menor longitud de onda), tienden a propagarse principalmente por el cobre, un medio con menor viscoelasticidad que el plástico, por lo que su atenuación disminuye. Se ha dibujado el perfil de los modos de propagación para frecuencias crecientes y se ha verificado efectivamente que al incrementar la frecuencia, los desplazamientos en el plástico son cada vez menores, lo que parece confirmar la hipótesis.

La validación empírica se ha completado con un análisis por interferometría de los modos de propagación, tanto en el cable con plástico como en el cable desnudo. Para poder validar estos ensayos, ha sido necesario completar el modelo con los modos no simétricos para modelar alguna de las señales que se estaban obteniendo. Además, se ha realizado una estimación experimental de los parámetros del plástico para obtener resultados más próximos a la realidad. Se observa que los ensayos presentan un grado muy alto de similitud con las simulaciones, sobre todo en el cable desnudo. En este caso se aprecian claramente dos modos de propagación: el primer modo de flexión y el primer modo longitudinal, los cuales prácticamente se superponen en simulaciones y experimentos. En el cable con plástico las señales son atenuadas fuertemente y apenas se mide señal. El modo de flexión desaparece casi totalmente y tan solo se mide un pequeño segmento del primer modo longitudinal. En general, el alto grado de concordancia entre simulaciones y experimentos en estos ensayos, refuerza la validez del modelo teórico desarrollado en la tesis.

Por otro lado hay dos temas que se han quedado por abordar en el presente trabajo. Uno de ellos es relativo al efecto de las curvas. Todo nuestro modelo teórico se basa en la presunción de cables rectilíneos. La realidad es que, en las aplicaciones convencionales, los cables eléctricos suelen tener curvas, las cuales, según los modelos teóricos sobre tuberías, provocan la conversión de modos. Por tanto, se debería analizar en profundidad, en futuras investigaciones, el efecto de las curvas sobre los modos de propagación en los cables eléctricos. El segundo tema que en nuestra investigación hemos detectado que debería ser estudiado en más profundidad por sus implicaciones teóricas y prácticas, es la obtención numérica de la velocidad de propagación de la energía en los cables eléctricos. En este trabajo hemos estudiado extensivamente las velocidades de fase y de grupo, tal y como es usual en este campo. Sin embargo, consideramos que sería más representativa la velocidad de propagación de la energía, especialmente cuando la atenuación es alta.

Finalmente, quisiéramos no dejar de comentar, además, algunos puntos interesantes ocurridos en el desarrollo de este trabajo. Por ejemplo, hemos constatado en los experimentos el impacto tan grande que tiene el tamaño de los piezoeléctricos. Cuando hemos manejado piezoeléctricos muy pequeños, fabricados por nosotros mismos dado que no los hemos podido encontrar en el mercado, es cuando se pudo llegar a medir señales transmitidas por los cables eléctricos de frecuencias altas. Esto nos enseña uno de los caminos potenciales del desarrollo futuro de esta tesis. Si disminuimos la dimensión de los piezoeléctricos y manejamos, por ejemplo, “nano-arrays” de piezoeléctricos con capacidad de enfoque en un punto pequeño, se podrían generar y estudiar el comportamiento de las ondas elásticas en el rango de frecuencias muy altas del GHz y superiores.

En general, los niveles de atenuación que se han encontrado, tanto en las simulaciones como en los experimentos, son muy altos y limitan la aplicación de las ondas elásticas como canal de comunicación, en frecuencias de MHz, a distancias cortas. Puesto que se ha observado que los modos de propagación altos tienen menor atenuación en los cables eléctricos con cubierta de plástico, en el futuro se querría analizar los modos en un rango de frecuencias superior. Hay que señalar, sin embargo, que este efecto sorprendente de disminución de atenuación con la frecuencia, en los cables eléctricos, se debe a que las ondas se propagan de tal modo que su

energía se concentra cada vez más por el núcleo de cobre, el cual tiene menos viscoelasticidad que la cubierta de plástico. Conforme se siga aumentando la frecuencia, es esperable que llegue un punto en el que la atenuación debida a la viscoelasticidad del cobre sea suficientemente significativa frente a la debida al plástico, de tal modo que la atenuación podría empezar a crecer a partir de dicho punto.

Así, podemos afirmar que una de las conclusiones más claras obtenidas a partir de este trabajo, es la constatación que la relación entre atenuación y frecuencia es una función no lineal bastante compleja y alejada de las funciones inversas o logarítmicas. Esta no linealidad con crecimientos y decrecimientos la hemos podido predecir sorprendentemente bien con nuestro modelo en el rango de frecuencias estudiado. Sin embargo, somos conscientes que según la frecuencia suba empezaran a tener importancia fenómenos ahora despreciados y el modelo tendrá que ser reformulado. La necesidad de cambio de modelo será incuestionable cuando las longitudes de las ondas sean del orden de las dimensiones de los átomos. En caso de metales como el cobre, las dimensiones de ondas elásticas de Angstroms serían alcanzables en frecuencias del orden de los THz. Indudablemente estamos muy alejados todavía de poder generar ondas elásticas de tales frecuencias. No sabemos el modelo teórico que podría simular su comportamiento. Tampoco nada de como serán sus modos de propagación. Pero lo que para nosotros se hace indudable al término de este trabajo es su carácter apasionante.

\* \* \*

## 9 BIBLIOGRAFÍA

- [1] J. L. Rose, "A baseline and vision of ultrasonic guided wave inspection potential," *Transactions of the ASME. Journal of Pressure Vessel Technology*, vol. 124, pp. 273-82, 2002.
- [2] P. Wilcox, B. Pavlakovic, M. Evans, K. Vine, P. Cawley, M. Lowe, and D. Alleyne, "Long Range Inspection of Rail Using Guided Waves," *AIP Conference Proceedings*, vol. 657, pp. 236, 8p, 2003.
- [3] S. Singh and R. Clark, "Ultrasonic characterization of transverse defects in rail heads," *AIP Conference Proceedings*, vol. 615, pp. 1798-1805, 2002.
- [4] R. S. Edwards, S. Dixon, and X. Jian, "Non-Contact Ultrasonic Characterization of Defects Using EMATs," *AIP Conference Proceedings*, vol. 760, pp. 1568-1575, 2005.
- [5] R. M. Sanderson and S. D. Smith, "The Application of Finite Element Modelling to Guided Wave Testing Systems," *AIP Conference Proceedings*, vol. 657, pp. 256-263, 2003.
- [6] W.-Y. Lu, J. Dike, and A. Modjtahedzadeh, "Finite element modeling of waves in a rail," *AIP Conference Proceedings*, vol. 615, pp. 1835-1842, 2002.
- [7] K. Futsuhara, M. MSakai, T. Shirai, A. Morisada, H. Nozawa, and K. Inose, "Information generating apparatus using elastic waves." Japon: US2002/0027831 A1, 2002, pp. 37.
- [8] G. Light, S. Kokkins, S. MacPherson, and A. Hellman, "Development of Ultrasonic Inspection Technology for Catenary Wire," presented at ASME 6th Nondestructive Evaluation Topical Conference, San Antonio, Texas, 1999.
- [9] P. Cawley, "Practical long range guided wave inspection - managing complexity," *AIP Conference Proceedings*, vol. 657, pp. 22-37, 2003.
- [10] J. Y. Kim, D. H. Lee, K. S. Park, Y. D. Jo, S. C. Choi, C. H. Lee, S. J. Song, and Y. M. Cheong, "Long Range Inspection of City Gas Pipeline Using Ultrasonic Guided Waves," presented at 12th Asia-Pacific Conference on Non-Destructive Testing, Auckland, New Zealand, 2006.
- [11] B. J. Gavigan, L. Zhang, Z. Sun, and J. L. Rose, "Experimental Phased Array Focusing in Pipe Using Ultrasonic Guided Waves," *AIP Conference Proceedings*, vol. 760, pp. 1773-9, 2005.
- [12] Y. A. Lai and C. H. Yang, "Characterization of material properties in multilayered tubes," presented at 12th Asia-Pacific Conference on Non-Destructive Testing, Auckland, New Zealand, 2006.
- [13] J. N. Barshinger and J. L. Rose, "Guided Wave Propagation in an Elastic Hollow Cylinder Coated with a Viscoelastic Material," *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, vol. 51, pp. 1547-1556, 2004.
- [14] S. J. Song, Y. H. Kim, D. H. Lee, J. S. Park, H. D. Lee, and C. H. Bae, "Detection of Scale Inside of Water Supply Pipes Using Guided Waves," *AIP Conference Proceedings*, vol. 657, pp. 229, 2003.

- [15] A. Demma, P. Cawley, and M. J. S. Lowe, "Guided Waves in Curved Pipes," *AIP Conference Proceedings*, vol. 615, pp. 157-164, 2002.
- [16] J. L. Rose and X. Zhao, "Pipe Elbow Inspection with Guided Waves," presented at 15th World Conference on Non-Destructive Testing, Roma, 2000.
- [17] H. Nishino, M. Takemoto, and N. Chubachi, "Estimating the diameter/thickness of a pipe using the primary wave velocity of a hollow cylindrical guided wave," *Applied Physics letters*, vol. 85, pp. 1077-9, 2004.
- [18] S. K. Yang, J. H. Lee, P. H. Lee, and J. W. Cheng, "The Effect of the Longitudinal Welded Support on the Pipe for Guided Wave Propagation," presented at 12th Asia-Pacific Conference on NDT, Auckland, New Zealand, 2006.
- [19] D. Alleyne, B. Pavlakovic, M. J. S. Lowe, and P. Cawley, "Rapid, long range inspection of chemical plant pipework using guided waves," *AIP Conference Proceedings*, vol. 557, pp. 180,8p, 2001.
- [20] F. Mustapha, G. Manson, S. G. Pierce, and K. Worden, "Structural Health Monitoring of an Annular Component using a Statistical Approach," *Strain*, vol. 41, pp. 117-127, 2005.
- [21] M. Ratassepp and A. Klauson, "Curvature Effects on Wave Propagation in an Infinite Pipe," *Ultragarsas Journal*, pp. 19-25, 2006.
- [22] M. Castaings and B. Hosten, "The Propagation of Guided Waves in Composite Sandwich-like Structures and their use for NDT," *AIP Conference Proceedings*, vol. 557, pp. 999,8p, 2001.
- [23] A. Demcenko and L. Mazeika, "Calculation of Lamb waves dispersion curves in multi-layered planar structures," *Ultragarsas Journal*, vol. 44, pp. 15-17, 2002.
- [24] F. Seco, J. M. Martín, A. Duarte, and R. Ceres, "PCDISP: una herramienta para el cálculo de curvas de dispersión en guías de onda cilíndricas," presented at XXI Jornadas de Automática, Sevilla, 2000.
- [25] S. H. Ong, S. H. Tan, and K. T. Tan, "Acoustic microscopy reveals IC packaging hidden defects," presented at Proceedings of the 1st Electronic Packaging Technology Conference, New York, USA, 1997.
- [26] L. Yinghui, J. Kailin, G. Qing, and Y. Xuegang, "Forced wave propagation in viscoelastic cable with small sag," *Acta Mechanica Solida Sinica*, vol. 14, pp. 147-154, 2001.
- [27] C. T. Georgakis and C. A. Taylor, "Nonlinear dynamics of cable stays. Part 1: sinusoidal cable support excitation," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 281, pp. 537-64, 2005.
- [28] E. P. Papadakis, "Monitoring the moduli of polymers with ultrasound," *Journal of Applied Physics*, vol. 45, pp. 1218-1222, 1974.
- [29] T. Vogt, M. J. S. Lowe, and P. Cawley, "Cure Monitoring Using Ultrasonic Guided Waves in Wires," presented at AIP Conference Proceedings, 2001.
- [30] R. T. Harrold and Z. N. Sanjana, "Acoustic Waveguide Monitoring of the Cure and Structural Integrity of Composite Materials," *Polymer Engineering and Science*, vol. 26, pp. 367-372, 1986.

- [31] R. F. Anastasi and E. I. Madaras, "Application of Ultrasonic Guided Waves for Evaluating Aging Wire Insulation," NASA, Hampton ARL-TR-3384; L-19068; NASA TM-2005-213520, January 2005.
- [32] R. F. Anastasi and E. I. Madaras, "Investigating the Use of Ultrasonic Guided Waves for Aging Wire Insulation Assessment," *SPIE's 7th Annual International Symposium on NDE for Health Monitoring and Diagnostics*, vol. 4702, pp. 76-82, 2002.
- [33] E. I. Madaras and R. F. Anastasi, "Non-destructive evaluation of wire insulation and coatings," in *United States Patent 6810743*. USA, 2004.
- [34] D. M. Pai, P. Tatum, R. Pace, and M. J. Sundaresan, "An Apparatus for Monitoring the Health of Electrical Cables," NASA 20040201433, September 2004.
- [35] D. W. Auckland, A. J. McGrail, C. D. Smith, B. R. Varlow, J. Zhao, and D. Zhu, "Application of ultrasound to the inspection of insulation," *IEE Proc. Sci. Meas. Technol.*, vol. 143, pp. 177-181, 1996.
- [36] L. E. Lundgaard and W. Hansen, "Acoustic Method for Quality Control and in-Service Periodic Monitoring of Medium Voltage Cable Terminations," presented at IEEE International Symposium on Electrical Insulation, Arlington, Virginia, USA, 1998.
- [37] C. Cornelissen and A. Schnettler, "Non-destructive diagnostic facilities for cable systems," presented at IEEE International Symposium on Electrical Insulation, Piscataway, NJ, USA, 2002.
- [38] H. Mehrez, S. Ciraci, C. Y. Fong, and S. Erko, "An atomistic study on the stretching of nanowires," *J. Phys.: Condens. Matter*, vol. 9, pp. 10843-54, 1997.
- [39] C. Mateo, J. A. Talavera, and A. Muñoz, "Elastic Guided Wave Propagation in Electrical Cables," *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, vol. 54, 2007. Digital Object Identifier 10.1109/TUFFFC.2007.402.
- [40] L. Pochhammer, "Über die fortpflanzungsgeschwindigkeiten kleiner schwingungen in einem unbegrenzten isotropen kreiscylinder," *J. fur Math.*, vol. 81, pp. 324-336, 1876.
- [41] C. Chree, "The Equations of an Isotropic Elastic Solid in Polar and Cylindrical Coordinates, Their Solutions and Applications," *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 14, pp. 250-369, 1889.
- [42] A. Benatar, D. Rittel, and A. L. Yarin, "Theoretical and Experimental Analysis of Longitudinal Wave Propagation in Cylindrical Viscoelastic Rods," *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 51, pp. 1413-1431, 2003.
- [43] D. Bancroft, "The velocity of longitudinal waves in cylindrical bars," *Phys. Rev.*, vol. 59, pp. 588-593, 1941.
- [44] G. E. Hudson, "Dispersion of elastic waves in solid circular cylinders," *Phys. Rev.*, vol. 63, pp. 46-51, 1943.
- [45] R. M. Davies, "A critical study of the Hopkinson pressure bar," *Philos. Trans. R. Soc. London Ser.*, vol. A240, pp. 375-457, 1948.

- [46] E. Sternberg, "On the integration of the equations of motion in the classical theory of elasticity," *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, vol. 6, pp. 34-50, 1960.
- [47] D. C. Gazis, "Three-Dimensional Investigation of the Propagation of Waves in Hollow Circular Cylinders. I. Analytical Foundation," *Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 31, pp. 568-573, 1959.
- [48] D. C. Gazis, "Three-Dimensional Investigation of the Propagation of Waves in Hollow Circular Cylinders. II. Numerical Results," *Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 31, pp. 573-578, 1959.
- [49] A. E. Armenàkas, "Propagation of Harmonic Waves in Composite Circular Cylindrical Shells. I: Theoretical Investigation," *AIAA Journal*, vol. 5, pp. 740-744, 1966.
- [50] A. E. Armenàkas, "Propagation of Harmonic Waves in Composite Circular Cylindrical Shells. Part II: Numerical Analysis," *AIAA Journal*, vol. 9, pp. 599-605, 1971.
- [51] H. E. Keck and A. E. Armenàkas, "Dispersion of axially symmetric waves in three-layered elastic shells," *Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 49, pp. 1511-20, 1971.
- [52] M. Onoe, H. D. McNiven, and R. D. Mindlin, "Dispersion of Axially Symmetric Waves in Elastic Rods," *Journal of Applied Mechanics*, vol. 29, pp. 729-734, 1962.
- [53] T. R. Meeker and A. H. Meitzler, "Guided wave propagation in elongated cylinders and plates," in *Physical Acoustics: Principles and Methods*, vol. 1A, W. P. Mason, Ed. New York: Academic Press, 1964, pp. 111-167.
- [54] H. D. McNiven, J. L. Sackman, and A. H. Shah, "Dispersion of Axially Symmetric Waves in Composite, Elastic Rods," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 35, pp. 1602-1609, 1963.
- [55] C.-T. Sun and J. M. Whitney, "Axisymmetric vibrations of laminated composite cylindrical shells," *J. Acoustic Society of America*, vol. 55, pp. 1238-1246, 1973.
- [56] E. J. Barbero and J. N. Reddy, "General two-dimensional theory of laminated cylindrical shells," *AIAA Journal*, vol. 28, pp. 544-53, 1990.
- [57] N. Rattanawangcharoen, A. H. Shah, and S. K. Datta, "Wave propagation in laminated composite circular cylinders," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 29, pp. 767-81, 1992.
- [58] I. D. Moore, "Vibration of thick elastic and viscoelastic tubes. I - Harmonic response.," *Journal of Engineering Mechanics, American Society of Civil Engineers*, vol. 116, pp. 928-942, 1990.
- [59] G. A. Coquin, "Attenuation of Guided Waves in Isotropic Viscoelastic Materials," *Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 36, pp. 1074-80, 1964.
- [60] H. Zhao and G. Gary, "A Three-Dimensional Analytical Solution of the Longitudinal Wave Propagation in an Infinite Linear Viscoelastic Cylindrical Bar. Application to Experimental Techniques," *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 43, pp. 1335-1348, 1995.



- [61] M. J. S. Lowe, "Matrix Techniques for Modeling Ultrasonic Waves in Multilayered Media," *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, vol. 42, pp. 525-542, 1995.
- [62] N. A. Haskell, "Dispersion of Surface Waves on Multilayered Media," *Bulletin of the Seismological Society of America*, vol. 43, pp. 17-34, 1953.
- [63] W. T. Thomson, "Transmission of Elastic Waves through a Stratified Solid Medium," *Journal of Applied Physics*, vol. 21, pp. 89-93, 1950.
- [64] L. Knopoff, "A Matrix Method for Elastic Wave Problems," *Bulletin of the Seismological Society of America*, vol. 54, pp. 431-438, 1964.
- [65] J. W. Dunkin, "Computation of Modal Solutions in Layered Elastic Media At High Frequencies," *Bulletin of the Seismological Society of America*, vol. 55, pp. 335-358, 1965.
- [66] D. C. Ricks and H. Schmidt, "A numerically stable global matrix method for cylindrically layered shells excited by ring forces," *Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 95, pp. 3339-3349, 1994.
- [67] W. Huang, Y. J. Wang, and S. I. Rokhlin, "Oblique scattering of an elastic wave from a multilayered cylinder in a solid. Transfer matrix approach," *J. Acoustic Society of America*, vol. 99, pp. 2742-2754, 1996.
- [68] L. Wang and S. I. Rokhlin, "A Compliance/Stiffness Matrix Formulation of General Green's Function and Effective Permittivity for Piezoelectric Multilayers," *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, vol. 51, pp. 453-463, 2004.
- [69] L. Wang and S. I. Rokhlin, "Recursive Stiffness Matrix Method for Wave Propagation in Stratified Media," *Bulletin of the Seismological Society of America*, vol. 92, pp. 1129-35, 2002.
- [70] B. Hosten and M. Castaings, "Surface impedance matrices to model the propagation in multilayered media," *Ultrasonics*, vol. 41, pp. 501-7, 2003.
- [71] V. N. Krutin, "A Direct Impedance Method for Calculation of Wave Fields in Stratified-Homogenous Media," *Doklady Physics*, vol. 46, pp. 124-127, 2001.
- [72] P. E. Krasnushkin, "Method of calculation of impedance in problems of waves in elastic media," *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 252, pp. 332-335, 1980.
- [73] E. L. Tan, "A Robust Formulation of SAW Green's Functions for Arbitrary Thick Multilayers at High Frequencies," *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, vol. 49, pp. 929-936, 2002.
- [74] M. J. S. Lowe, "Plate waves for the NDT of diffusion bonded titanium," in *Department of Mechanical Engineering*. London: Imperial College of Science, Technology and Medicine, 1993.
- [75] J. E. Dennis and R. B. Schnabel, *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*. New Jersey: Prentice-Hall, 1983.
- [76] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery, *Numerical Recipes in C++*, Second ed: Cambridge University Press, 2002.

- [77] R. M. Lewis, V. Torczon, and M. W. Trosset, "Direct search methods: then and now," *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 124, pp. 191-207, 2000.
- [78] I. D. Coope and C. J. Price, "On the convergence of grid-based methods for unconstrained optimization," *SIAM Journal on Optimization*, vol. 11, pp. 859-69, 2001.
- [79] V. Dayal and V. K. Kinra, "Leaky Lamb waves in an anisotropic plate. I: An exact solution and experiments," *J. Acoustical Society of America*, vol. 85, pp. 2268-2276, 1989.
- [80] E. Clayton and G. H. Derrick, "A Numerical Solution of Wave Equations for Real or Complex Eigenvalues," *Aust. J. Phys.*, vol. 30, pp. 15-21, 1977.
- [81] H. Wang, "Theoretical Evaluation of Embedded Plate-like and Solid Cylindrical Concrete Structures with Guided Waves." Evanston, Illinois: Northwestern University, 2004, pp. 295.
- [82] B. Pavlakovic and M. Lowe, "DISPERSE: A system for Generating Dispersion Curves.," Manual, 2003.
- [83] B. Pavlakovic, M. Lowe, D. Alleyne, and P. Cawley, "DISPERSE: a general purpose program for creating dispersion curves," *Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation*, vol. 16, pp. 185-92, 1997.
- [84] M. H. S. Siqueira, C. E. N. Gatts, R. R. da Silva, and J. M. A. Rebello, "The use of ultrasonic guided waves and wavelets analysis in pipe inspection," *Ultrasonics*, vol. 41, pp. 785-797, 2005.
- [85] B. Hosten and M. Castaings, "Fe Modeling of Lamb Waves Propagation and Diffraction in Viscoelastic Composite Material Plate," *AIP Conference Proceedings*, vol. 700, pp. 230-237, 2004.
- [86] M. Castaings and C. Bacon, "Finite element modeling of torsional wave modes along pipes with absorbing materials," *J. Acoustic Society of America*, vol. 119, pp. 3741-3751, 2006.
- [87] Y. Gómez-Ullate, M. d. Espinosa, J. Mould, and P. Reynolds, "Selective Excitation of Lamb Wave Modes in Thin Aluminium Plates using Bonded Piezoceramics: Fem Modelling and Measurements," *ECNDT*, 2006.
- [88] J. L. Rose, *Ultrasonic Waves in Solid Media*. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.
- [89] T. Hayashi, C. Tamayama, and M. Murase, "Wave structure analysis of guided waves in a bar with an arbitrary cross-section," *Ultrasonics*, vol. 44, pp. 17-24, 2006.
- [90] C. M. Lee, "Guided Elastic Waves in Structures with an Arbitrary Cross-Section," in *Department of Engineering Science and Mechanics*. Pennsylvania: The Pennsylvania State University, 2006, pp. 162.
- [91] I. Bartoli, A. Marzani, F. L. di Scalea, and E. Viola, "Modeling wave propagation in damped waveguides of arbitrary cross-section," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 295, pp. 685-707, 2006.
- [92] M. Tadi, "Finite Difference Methods for Elastic Wave Propagation in Layered Media," *Journal of Computational Acoustics*, vol. 12, pp. 257-276, 2004.
- [93] A. I. Tolstykh and D. A. Shirobokov, "On using radial basis functions in a "finite difference mode" with applications to elasticity problems," *Computational Mechanics*, vol. 33, pp. 68-79, 2003.

- [94] D. Alleyne and P. Cawley, "A two-dimensional Fourier transform method for the measurement of propagating multimode signals," *Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 89, pp. 1159-68, 1991.
- [95] J. Vollmann and J. Dual, "High resolution analysis of axisymmetric wave modes in cylindrical structures," *Ultrasonics*, vol. 34, pp. 297-306, 1996.
- [96] H. Kwun and K. A. Bartels, "Magnetostrictive sensor technology and its applications," *Ultrasonics*, vol. 36, pp. 171-8, 1998.
- [97] F. Cau, A. Fanni, A. Montisci, P. Testoni, and M. Usai, "A signal-processing tool for non-destructive testing of inaccessible pipes," *Artificial Intelligence*, vol. 19, pp. 753-60, 2006.
- [98] F. He, Y. Gao, Z. Zhou, and J. Bai, "An Overview of Testing Applications of Wavelet in Guided Waves," presented at 12th Asia-Pacific Conference on NDT, Auckland, New Zealand, 2006.
- [99] H. Nishino, K. Yoshida, H. Cho, and M. Takemoto, "Propagation phenomena of wideband guided waves in a bended pipe," *Ultrasonics*, vol. 44, pp. 1139-1143, 2006.
- [100] C. Valle, J. Qu, and L. J. Jacobs, "Guided circumferential waves in layered cylinders," *International Journal of Engineering Science*, vol. 37, pp. 1369-1387, 1999.
- [101] D. W. Haines and P. C. Y. Lee, "Axially Symmetric Torsional Waves in Circular Composite Cylinders," *Transactions of the ASME*, vol. 38, pp. 1042-4, 1971.
- [102] K. V. Chernyshev and V. V. Shegai, "Natural Vibrations of solid cylinders of finite length," *Sov. Phys. Acoust.*, vol. 23, pp. 358-360, 1978.
- [103] M. Redwood, *Mechanical waveguides*: Pergamon Press, 1960.
- [104] H. F. Pollard, *Sound Waves in Solids*: Pion, 1977.
- [105] R. V. Churchill, *Fourier Series and Boundary Value Problems*. USA: McGraw-Hill Book Company, Inc, 1941.
- [106] J. N. Barshinger and J. L. Rose, "Ultrasonic guided wave propagation in pipes with viscoelastic coatings," *AIP Conference Proceedings*, vol. 615, pp. p239, 8p, 2002.
- [107] R. H. Blanc, "Transient Wave Propagation Methods for Determining the Viscoelastic Properties of Solids," *Journal of Applied Mechanics*, vol. 60, pp. 763-768, 1993.
- [108] A. Bernard, M. J. S. Lowe, and M. Deschamps, "Guided waves energy velocity in absorbing and non-absorbing plates," *J. Acoustic Society of America*, vol. 110, pp. 186-96, 2001.
- [109] A. Bedford and D. S. Drumheller, *Introduction to Elastic Wave Propagation*: Wiley, 1996.
- [110] C. P. Chen and R. S. Lakes, "Analysis of high loss viscoelastic composites," *Journal of Materials Science*, vol. 28, pp. 4299-4304, 1993.
- [111] Z. Zhang, P. Que, and H. Lei, "Theoretical and experimental studies of longitudinal guided wave generation in hollow cylinders by multielement transducers," *Russian Journal of Nondestructive Testing*, vol. 41, pp. 674-81, 2005.
- [112] "FERROPERM catalogue."

- [113] Y. Bar-Cohen, T. Xue, and S.-S. Lih, "Polymer Piezoelectric Transducers for Ultrasonic NDE," *NDTnet*, vol. 1, 1996.
- [114] T. Hay and J. L. Rose, "Flexible PVDF comb transducers for excitation of axisymmetric guided waves in pipe," *Sensor and Actuators A*, vol. 100, pp. 18-23, 2002.
- [115] J. L. Lai, E. H. Dowell, and T. R. Tauchert, "Propagation of harmonic waves in a composite elastic cylinder," *Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 49, pp. 220-8, 1971.
- [116] F. Simonetti and P. Cawley, "Rapid Low Frequency Measurement of the Acoustic Properties of Solid Viscoelastic Materials," *AIP Conference Proceedings*, vol. 700, pp. 1107-1114, 2004.
- [117] K. W. Hillier and H. Kolsky, "An Investigation of the Dynamic Elastic Properties of Some High Polymers," *Proceedings of the Physical Society*, vol. 62, pp. 111-121, 1949.
- [118] R. H. Blanc and F. P. Champomier, "A wave-front method for determining the dynamic properties of high damping materials," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 49, pp. 37-44, 1976.