

# Simulación Numérica de Transporte de Material Granular por Vibración

## Guillermo Rein Soto-Yarritu

Ingeniero del ICAI (1999). El último curso académico lo cursó en University of Texas at Austin (EE.UU.) como alumno de intercambio. Investigador en Formación del Instituto de Investigación Tecnológica y alumno de doctorado de la UPCO.



## Ángel de Andrés Martínez

Doctor Ingeniero del ICAI (1990). Premio Extraordinario Fin de Carrera. Profesor Propio del Departamento de Mecánica de la Escuela Técnica Superior de Ingeniería ICAI de la UPCO. Investigador a tiempo parcial, trabajando en métodos numéricos aplicados a la resolución de problemas en Ingeniería Mecánica y específicamente en problemas de Mecánica de la Fractura. Ha trabajado en varias empresas antes de incorporarse en dedicación exclusiva a la Universidad Pontificia Comillas (UPCO).



## Introducción

Se puede definir material granular como el formado por un conjunto de múltiples partículas sólidas de cualquier tamaño.

El material granular es una de las formas más comunes en las que se presentan los sólidos en la industria mundial actual. En peso, se calcula que aproximadamente el 75% de la materia prima y el 50% de los productos de la industria química se manipulan en esta forma [1].

Industrias como: química, farmacéutica, semiconductores, agro-alimentaria, minera, metalúrgica, construcción y vidrio hacen uso de material granular en sus procesos y aplicaciones. Las disciplinas científico-técnicas que estudian terremotos, desprendimientos y avalanchas emplean los conocimientos que tenemos de material granular. Azúcar, sal, harina, mineral de hierro, cemento, rocas y arena son ejemplos de productos que nos rodean habitualmente y que están formados por infinidad de partículas sólidas.

A pesar de su apariencia simple, el material granular presenta un amplio rango de comportamientos complejos que aún están lejos de ser explorados en totalidad. Considerado por algunos como el cuarto estado de la materia, se comporta a veces como un sólido (se deforma ante cargas), a veces como un líquido (se derrama y puede fluir), a veces

como un gas (se puede comprimir hasta cierto límite y está formado por partículas sin enlace) y a menudo de forma peculiarmente suya. A pesar de estas fascinantes propiedades, el material granular no ha recibido mucha atención hasta los últimos años.

En contraposición con la mecánica de fluidos, que obtuvo rápidamente la atención de investigadores e ingenieros, el material granular se relegó a un se-

quinaria como cintas transportadoras, cangilones, sistemas neumáticos, sistemas hidráulicos y transportes vibrantes, entre otros.

La tecnología vibrante es ampliamente utilizada en el transporte y tratamiento de sólidos granulares. En particular los transportes vibrantes, son maquinaria que transporta el material granular basándose en el movimiento que transmite una superficie vibrante en contacto

importante del funcionamiento recae en un transporte vibrante que arrastra las partículas densas hacia arriba por una superficie inclinada.

**Simulaciones Numéricas de Material Granular**

A principios de los años 80 hubo un resurgir de investigaciones sobre material granular. Parte de este nuevo interés se puede atribuir al desarrollo de herramientas computacionales que permiten simular el comportamiento granular. Antes de 1980, la velocidad de los procesadores y la capacidad de almacenamiento de los ordenadores eran muy limitados como para abordar el estudio de un sistema de miles de partículas interactuando. Tras el desarrollo de la tecnología infor-

**“El material granular presenta un amplio rango de comportamientos complejos que aún están lejos de ser explorados en totalidad”**

gundo plano donde permaneció olvidado hasta que los avances computacionales (de los años 80) permitieron abordarlo de nuevo con mayores probabilidades de éxito. Hasta hace tan sólo 20 años, los diseños industriales relacionados con material granular, como silos, tolvas, cangilones, etc., se basaban en estudios experimentales de bajo rendimiento y sin apenas soporte teórico. Los medios actuales permiten un acercamiento más eficaz hacia la optimización de estas obras de ingeniería, basándose en resultados más precisos, más rigurosos y contrastados con la realidad.

En las operaciones industriales, la materia en forma granular necesita ser recogida, transportada, descargada y transformada. Para estos cometidos se emplea diversa ma-

quina con las partículas. En una mesa de separación densimétrica, máquina que se emplea para la separación del material denso y menos denso (Fig. 1), una parte

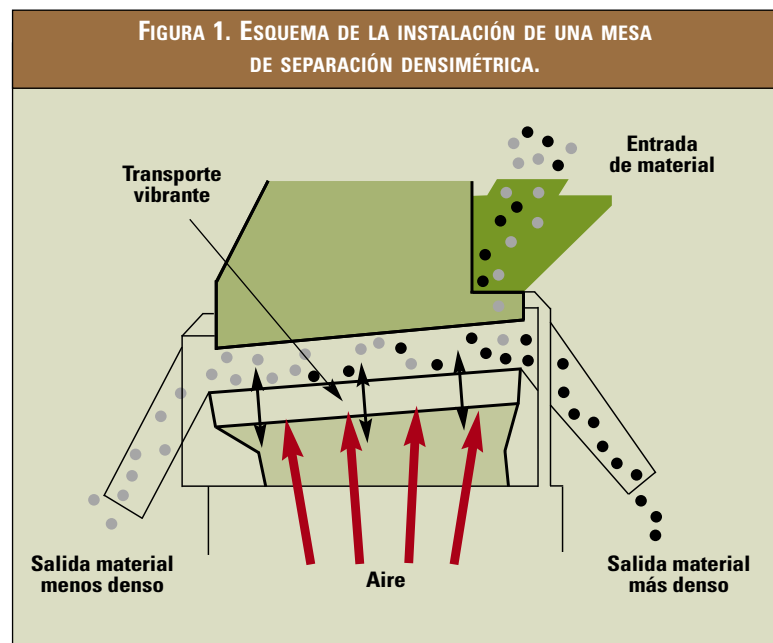
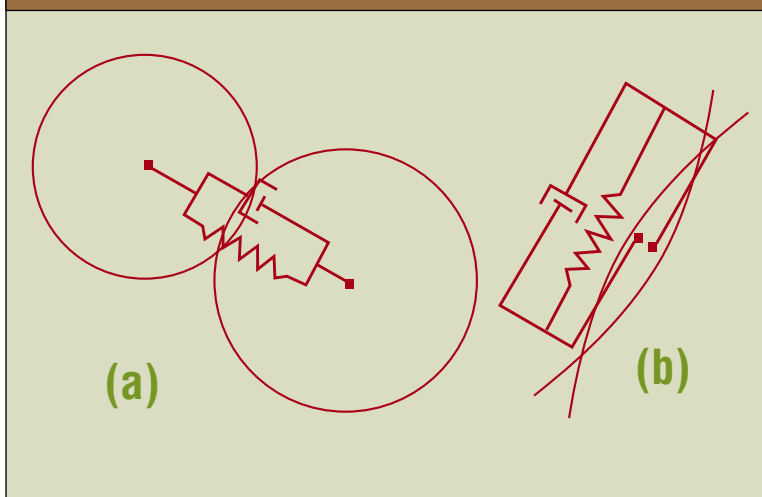


FIGURA 2. ELEMENTOS VISCO-ELÁSTICOS DE CONTACTO:  
EN DIRECCIÓN NORMAL (a) Y TANGENCIAL (b).



### El Método de las Deformaciones Discontinuas

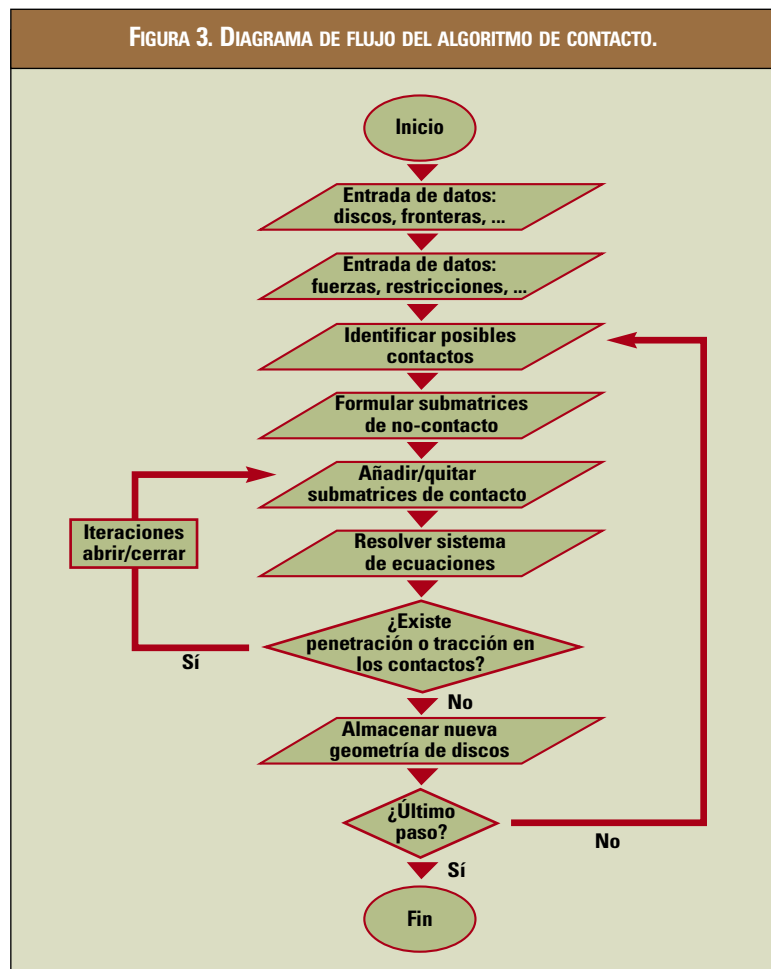
A mediados de los años 80 [3] se presentaron las bases del que sería una nueva herramienta numérica, parecida en algunos aspectos al MED y en otros al método de los elementos finitos (MEF): el método de las deformaciones discontinuas (MDD o en inglés DDA: Discontinuous Deformation Analysis). En un principio se desarrolló para aplicaciones de geotecnia en el estudio del

mática y la reducción de costes de equipos, las simulaciones computacionales se han convertido en una herramienta efectiva y accesible para el estudio de material granular.

Una simulación permite conocer el estado completo del sistema de partículas en todo instante y tomar mediciones imposibles de realizar experimentalmente. Quizá más importante aún sea el poder modelar situaciones no naturales o de altísimo coste en instalaciones experimentales, como la ausencia de gravedad o de fricción, estudios que aportan información valiosa sobre el fenómeno.

El método numérico más empleado en estas simulaciones es el método de los elementos discretos (MED), introducido a finales de los años 70 [2]. Se basa en un sistema de partículas individuales que interactúan alcanzando el equilibrio por medio de fuerzas ficticias.

FIGURA 3. DIAGRAMA DE FLUJO DEL ALGORITMO DE CONTACTO.

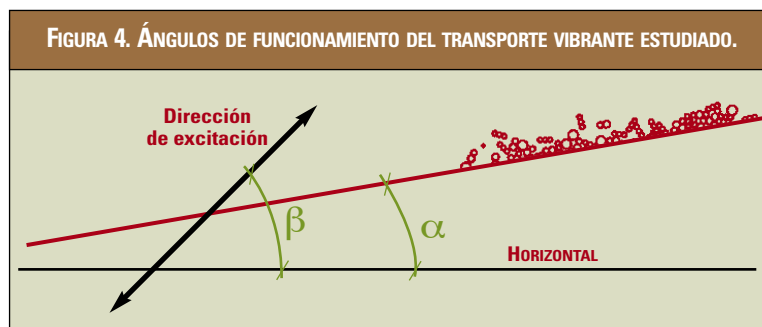


movimiento de bloques rocosos, pero hoy en día es usado ampliamente con éxito en otros muchos campos.

La variante del método ([4] y [5]) que se emplea en esta investigación, se basa en un sistema de discos rígidos de dos dimensiones, a modo de partículas, de forma que son el equivalente al mallado de los elementos del MEF. Los desplazamientos de cada bloque son incógnitas y se resuelven las ecuaciones de equilibrio, obtenidas minimizando la energía potencial total del sistema. Para cada partícula se permite el deslizamiento o la aparición y desaparición de contactos. Esta formulación no implica continuidad de las variables a través de las fronteras de los bloques y por ello el método es fundamentalmente discontinuo en el espacio.

Cada bloque tiene tres grados de libertad: dos de translación y uno de rotación, con los que se forma un sistema matricial de ecuaciones. Esta matriz se obtiene agrupando los términos de: inercia, fuerzas másicas, fuerzas volumétricas, cargas, restricciones, amortiguamiento, contacto, deslizamiento y cohesión.

El contacto en el momento del choque se modela con dos elementos visco-elásticos (cada elemento formado por muelle y amortiguador en paralelo) entre las superficies en contacto; un conjunto en la dirección normal y otro en la dirección tangencial



(Fig. 2). Estos elementos visco-elásticos introducen amortiguamiento e imponen el cumplimiento de las condiciones de no penetración y no tracción entre superficies.

La propiedad fundamental de que los discos puedan desplazarse por el espacio entrando en contacto entre ellos y modificar su trayectoria, se traduce en una gran no-linealidad del problema. Para controlar este aspecto, se incorpora un algoritmo de contacto que comprueba para cada instante de tiempo la no penetración entre superficie y el cumplimiento de las restricciones (Fig. 3).

Entre las desventajas de este método están los requerimientos de tiempo y memoria que impone. El método es unas

**“El MDD se muestra especialmente flexible y potente para aplicaciones de material granular”**

cinco veces más lento que el MEF con el mismo número de incógnitas y en el caso especial de manejar el mismo número de discos como elementos en el

MEF, la cantidad de memoria necesaria sería cuatro veces mayor.

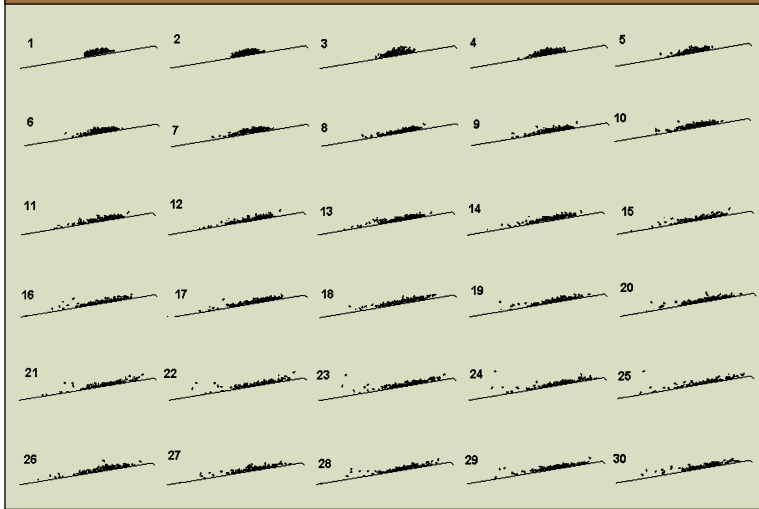
Con sus ventajas e inconvenientes, el método se muestra especialmente flexible y potente para aplicaciones de material granular, ganando poco a poco un sitio en la mecánica computacional.

### Aplicación al Transporte de Sólidos por Vibración

El modelo propuesto se aplicó al diseño mecánico de una máquina de separación densimétrica para compost. El compost es la materia resultante de la fermentación aerobia incompleta de los restos orgánicos que quedan al final del tratamiento de los residuos sólidos urbanos.

El modelo, a través de los resultados de las simulaciones, ayudó a tomar decisiones para optimizar el diseño en aspectos técnicos para esta aplicación específica. Algunos parámetros de la máquina ya estaban fijados y se introdujeron en el modelo directamente,

FIGURA 5. EVOLUCIÓN DE LA POSICIÓN DE LAS PARTÍCULAS DURANTE UNA SIMULACIÓN.



pero otros parámetros y propiedades del material se tuvieron que determinar para obtener resultados válidos.

El modelo simula una cámara de dos dimensiones que tiene en su interior una superficie plana a la que se le aplica un movimiento de vibración según una trayectoria recta inclinada con la horizontal un ángulo  $\beta$  (Fig. 4). Sobre la superficie se coloca un número suficiente de partículas de características similares al material que se transporta. La base comienza a vibrar para el instante  $t=0$  y las partículas reaccionan (Fig. 5). Se persigue la máxima velocidad de avance de las partículas en la dirección horizontal hacia la descarga.

La inclinación  $\alpha$  de la superficie de transporte debe ser pequeña pero no nula, pues la máquina necesita una ligera pendiente para permitir que sólo el material denso avance hacia la parte alta, excitado por

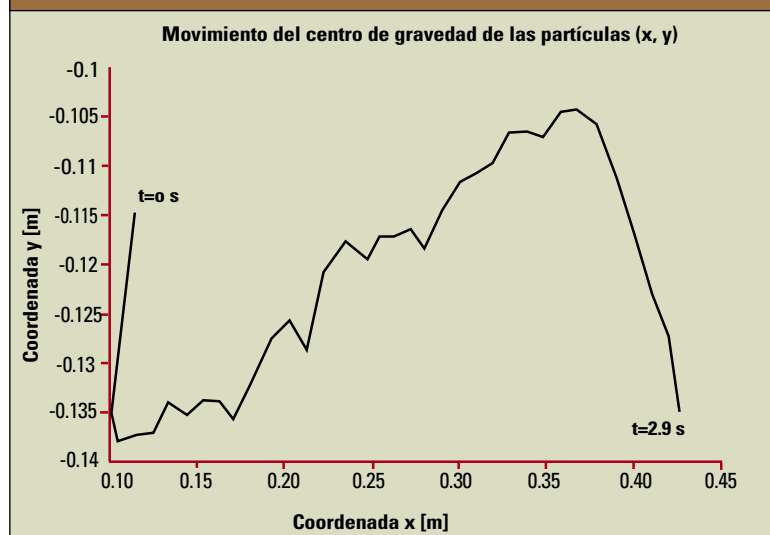
las vibraciones de la base. El material menos denso no avanza por la superficie y descarga por la parte baja.

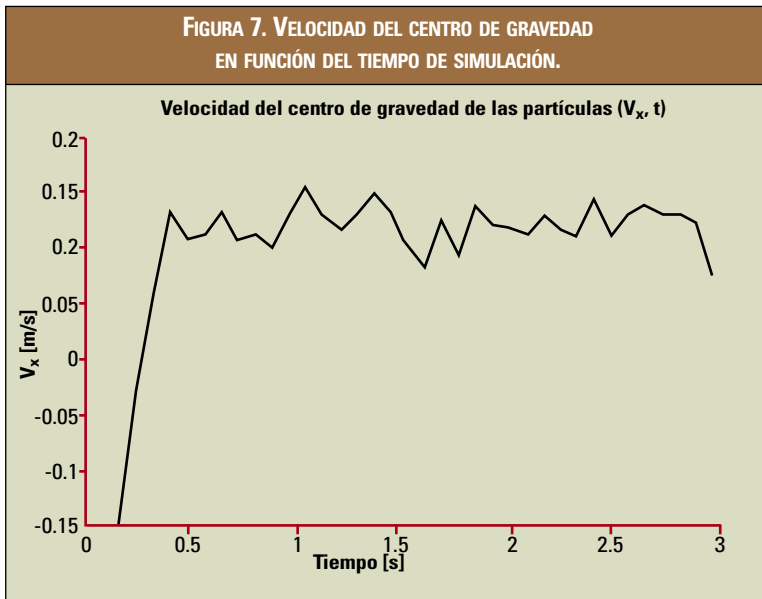
Para medir la velocidad de avance de un grupo tan heterogéneo de partículas (Fig. 6), se estudia el movimiento del centro de masas y a partir de éste se calcula la velocidad horizon-

tal de descarga. Observando la evolución de la velocidad instantánea del centro de masas (Fig. 7) se comprueba que el transitorio de arranque de las partículas es un periodo muy corto, inferior en los casos estudiados a 0.5 s. La simulación se prolonga durante unos 3 s, suficiente para obtener conclusiones sobre la descarga en régimen permanente.

El material empleado para las simulaciones se ha caracterizado por diferentes grupos de partículas de diámetros entre 5 y 10 mm imitando a las partículas densas del compost. Estas partículas o discos se han agrupado formando moléculas (Fig. 8) de mayor tamaño y de diferente distribución para imitar mejor al material real. El material se generó estocásticamente introduciendo previamente las probabilidades de encontrar cada tamaño en una muestra real y empleado propiedades físicas homogéneas para todas las partículas.

FIGURA 6. TRAYECTORIA DEL CENTRO DE GRAVEDAD DE LAS PARTÍCULAS EN UNA SIMULACIÓN COMPLETA.





El modelo admite en su formulación múltiples parámetros y propiedades que se corresponden con los diferentes fenómenos físicos modelados. Así se tiene:

**Propiedades físicas del material granular**

Tamaño y agrupación: partículas entre 5 y 10 mm de diámetro, agrupadas formando moléculas.

Densidad  $\rho$ : 2500 kg/m<sup>3</sup>, densidad media del vidrio, plástico y metales ligeros.

Fricción entre partículas  $\mu$ : coeficiente de rozamiento de 0.84 [8].

Cohesión entre partículas  $c$ : 700 N/m<sup>2</sup> [1].

Amortiguamiento en los choques de partículas  $\epsilon$ : coeficiente de restitución de 0.8.

**Parámetros característicos de la máquina**

Inclinación respecto la horizontal  $\alpha$ : 10° por motivos de diseño mecánico.

Amplitud  $A$  y frecuencia de vibración  $f$ : 6 mm y 16 Hz respectivamente, impuesto por el sistema vibrante que se instaló para el prototipo

Aceleración adimensional  $\Gamma$  (1): 6.18, es la comparación de la aceleración impuesta a las partículas con la aceleración de la gravedad.

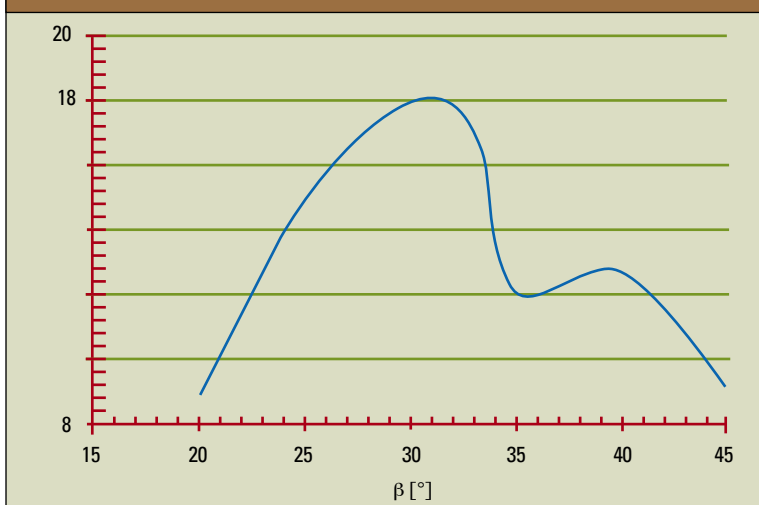
$$\Gamma = \frac{A \cdot \omega}{g} \quad (1)$$

- $A$  amplitud,  $\omega$  velocidad de vibración,  $g$  aceleración de la gravedad.

- Inclinación de la vibración  $\beta$ : parámetro variable durante el funcionamiento de la máquina. Cada inclinación aporta un tipo de movimiento diferente a las partículas.



FIGURA 9. LOS RESULTADOS MUESTRAN LA INCLINACIÓN ÓPTIMA DE LA VIBRACIÓN PARA MAXIMIZAR LA VELOCIDAD DE AVANCE.



- Fricción de la base con las partículas  $\mu_b$ : coeficiente de rozamiento de 0.65 [8].

- Adhesión de las partículas a la base  $c_b$ : 60 N/m<sup>2</sup>.

### Resultados de la Simulación Numérica

De la literatura técnica se han seleccionado dos modelos diferentes para la simulación de transporte vibrante y comparar los resultados. Uno es un modelo analítico y el otro un modelo computacional, ambos de gran simplicidad comparado con el de esta investigación.

El modelo analítico [6] se empleaba para el diseño de este tipo de maquinaria y calcula la trayectoria de una sola partícula impulsada por una superficie vibrante. Las velocidades resultantes se modifican multi-

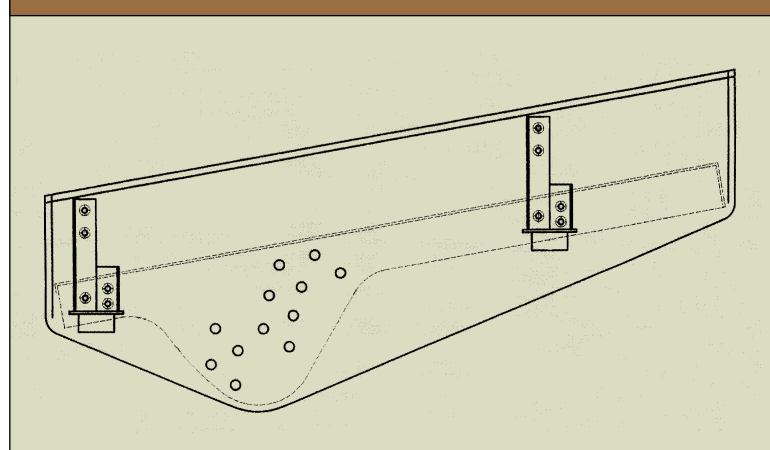
plicando por un coeficiente empírico, variable según cada empresa y aplicación.

El modelo computacional [7] añade respecto del modelo analítico el fenómeno de la fricción entre partículas. Estos dos modelos son cinemáticos y no admiten propiedades distintas de la amplitud, frecuencia y dirección de vibración (y fricción para el computacional). Ya que ambos modelos presentan una gran sim-

plicidad del fenómeno simulado y que no tienen en cuenta los efectos de movimiento de material granular propiamente dicho, no se pueden emplear para la validación cuantitativa de nuestro modelo. Pero sí se emplearon para comparar cualitativamente los resultados obtenidos, ya que ambos modelos son aceptados por los ingenieros y fabricantes de transportes vibrantes.

Se simuló una configuración contemplada en los dos modelos mencionados y se comparó la velocidad en régimen permanente del centro de masas. Respecto al modelo analítico, el comportamiento era completamente similar en los rasgos generales, pero los valores no se deben comparar al no tener acceso a los coeficientes empíricos que cada empresa emplea. Se observó respecto al modelo computacional que los resultados tenían el mismo comportamiento global y las diferencias máximas estaban en torno al 15%. En la Tabla 1 se muestra una comparación de resultados de los tres modelos.

FIGURA 10. BOCETO DE LOS PLANOS DEL PROTOTIPO DE MESA DENSIMÉTRICA CONSTRUIDO A RAÍZ DE ESTA INVESTIGACIÓN.



Actualmente se está preparando la realización de mediciones experimentales para validar correctamente el modelo en otras configuraciones y situaciones.

## Conclusiones

Se ha aplicado el método de las deformaciones discontinuas en la simulación de transporte de material granular por vibración. El modelo resultante se ha comparado con otros modelos publicados en la literatura.


Aplicado al transporte vibrante de una mesa densimétrica de compost, el modelo ha determinado el ángulo óptimo de inclinación de la fuerza de excitación (Fig. 9), alrededor de  $\beta_{op}=31^\circ$ . El modelo presentado ha puesto de manifiesto la existencia de dos óptimos locales, fenómeno que no mostraban los otros modelos. Los resultados obtenidos respecto al efecto del rozamiento  $\mu_b$  con la superficie de la base, sirven para imponer un valor mínimo de rozamiento del material del prototipo y evitar que las partículas resbalen y retrocedan (efecto contrario al buscado). Se ha comprobado que las especificaciones técnicas de la máquina, impuestas por criterios estructurales y mecánicos, permiten un funcionamiento muy bueno para la descarga de compost.

Así, con la ayuda del modelo se han determinado los parámetros de funcionamiento óptimo para la aplicación en par-

TABLA 1. COMPARACIÓN CUALITATIVA DE LOS RESULTADOS DE TRES MODELOS.

Comparación para: $\Gamma=6.18$ , $\alpha=10^\circ$ y $\mu=0.84$		
MODELOS	$\beta$ Óptimo	Velocidad para $\beta=45^\circ$
Modelo Propuesto	31.5°	9.1 cm/s
Modelo Rachner (Analítico)	24.2°	(Faltan coeficientes empíricos)
Modelo Gerstel (Computacional)	-	11 cm/s

ticular a compost (material granular). Este proyecto de investigación, que se lleva a cabo por el IIT y Urbar Ingenieros, S.A., ya ha dado como resulta-

do la construcción de un primer prototipo (Fig. 10) del que se espera dé paso a un modelo comercializable, muy competitivo, en los próximos años. 

## Referencias

- [1] Nedderman, R. M., *Statics and Kinematics of Granular Materials*, Cambridge University Press (1992).
- [2] Cundall, P. A. y Strack, O. D. L., "A discrete numerical model for granular assemblies", *Géotechnique*, Vol. 29 (1), pp. 47-65 (1979).
- [3] Shi, G. H. y Goodman, R. E., "Discontinuous Deformation Analysis", *Proceedings 25th U. S. Symposium on Rock Mechanics*, pp.269-277 (1984).
- [4] Ke, T. C. y Bray, J. D., "Modeling of particulate media using discontinuous deformation analysis", *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 121, No. 11, pp. 1234-1243 (1995).
- [5] Thomas, A. P., Bray, J. D. y Ke, T. C., "Discontinuous deformation analysis for soil mechanics", *Discontinuous Deformation Analysis and Simulation of Discontinuous Media*, M. R. Salami y D. Banks, TSI Press. pp. 454-461 (1996).
- [6] Rachner, H. G. y Jungk, L., "Schwinforderer in Giessereien", *Bericht Nr. 34 UHDE*, Dusseldorf (1964).
- [7] Gerstel, A. y Scheublin, J. R., "Computer simulation program for vibrating equipment", *Bulk Solids Handling*, Vol. 14, No. 3, pp. 573-577 (1994).
- [8] Brown, G. G., *Operaciones Básicas de la Ingeniería Química*, Editorial Marín (1965).
- [9] Shi, G. H., *Block System Modeling by Discontinuous Deformation Analysis*, Topics in Engineering, Computational Mechanics Publications, Vol. 11 (1993).
- [10] Wassgren, C. R., Brennen, C. E. y Hunt, M. L., "Vertical vibration of a deep bed of granular material in a container", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 63, pp. 712-719 (1996).
- [11] Walton, O., "Numerical simulation of inclined chute flows of monodisperse, inelastic, frictional spheres", *Mechanics of Materials*, Vol. 16, pp. 239-247 (1993).