



ICADE

# **APORTACIONES DE VEGA Y RHO A LA DELTA-COBERTURA**

Autor: Gonzalo Estévez Garrido  
Tutora: Susana Carabias López

## Resumen

La volatilidad y los tipos de interés son dos parámetros que han tomado importancia por el contexto económico y político internacional actual. En este texto vemos como las coberturas, estrategias financieras que permiten mitigar o eliminar un riesgo concreto, mitigan las exposiciones a estos dos factores de riesgo.

Este texto, tomando las opciones financieras como marco de referencia, muestra los tipos de cobertura, en un primer lugar, desde un punto de vista teórico-matemático y, posteriormente, desde un punto de vista práctico. Dentro de estas estrategias se encuentra la delta-cobertura, estrategia de cobertura dinámica empleada fundamentalmente para eliminar la exposición de una posición en opciones al activo subyacente.

El objetivo de este trabajo es ver cómo complementando la delta-cobertura con sensibilidades al tipo de interés y a la volatilidad se obtienen carteras de opciones cubiertas más estables. Estas carteras cubiertas serán por tanto vega neutral y rho neutral. Para estudiar las aportaciones de estas sensibilidades, se toma la cotización de opciones en contextos económicos de alta volatilidad y cambio de tipos de interés. A estos contratos de opciones se les aplicará tanto la delta-cobertura, como ésta con vega neutral y ésta con rho neutral. Se puede concluir que vega y rho aportan mayor estabilidad a la delta-cobertura.

## Palabras Clave

Opciones financieras, coberturas, Griegas, vega, rho, Black Scholes, delta-cobertura.

## Abstract

Volatility and interest rates are two parameters that have become important in the current international economic and political context. In this text we are going to see how hedging, financial strategies that allow to mitigate or eliminate a specific risk, do so with exposures to these risk factors.

This text, taking financial options as a frame of reference, shows the types of hedging, first from a theoretical-mathematical point of view and then from a practical point of view. Among these strategies is the delta-hedge, a dynamic hedging strategy used primarily to eliminate the exposure of an option position to the underlying asset.

The objective of this paper is to see how complementing delta-hedging with interest rate and volatility sensitivities can lead to more stable hedged option portfolios. These hedged portfolios will therefore be vega neutral and rho neutral. To study the contributions of these sensitivities, option prices are taken in economic contexts of high volatility and interest rate changes. Both delta-hedging and delta-hedging with neutral vega and delta-hedging with neutral rho will be applied to these option contracts. It can be concluded that vega and rho provide greater stability to the delta-hedge.

## Key Words

Financial options, hedging, Greeks, vega, rho, Black Scholes, delta-hedging.

# Índice

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>8</b>
1.1	Objetivo	8
1.2	Justificación del Tema	8
1.3	Estructura y Metodología	11
<b>2</b>	<b>Concepto de Cobertura</b>	<b>12</b>
2.1	Riesgos Financieros	12
2.1.1	Riesgos de mercado	13
2.1.2	Riesgo de crédito	15
2.2	Los Instrumentos Derivados y su Mercado	16
2.2.1	Contratos Derivados más Comunes	17
2.3	Tipos de Cobertura	18
2.3.1	Coberturas estáticas	18
2.3.2	Coberturas dinámicas	19
<b>3</b>	<b>Concepto de Opción y Valoración</b>	<b>22</b>
3.1	Concepto de Opción	22
3.1.1	Ejemplo de Opción	23
3.2	Valoración de Opciones en Tiempo Discreto	24
3.2.1	El Modelo Binomial	24
3.2.2	Valoración Neutral al Riesgo	27
3.2.3	Valoración con Múltiples Nodos Temporales	28
3.2.4	Aproximación a $u$ y $d$	29
3.2.5	Conclusiones de la Valoración en Tiempo Discreto	30
3.3	Valoración de Opciones en Tiempo Continuo	32
3.3.1	El Modelo de Black-Scholes	33
<b>4</b>	<b>Las Griegas</b>	<b>42</b>
4.1	Sensibilidad al Precio del Subyacente y al Tiempo	42
4.1.1	Sensibilidad al Precio del Subyacente (Delta $\Delta$ )	42
4.1.2	Sensibilidad a los Cambios de Precio del Subyacente (Gamma $\Gamma$ )	48
4.1.3	Sensibilidad al Tiempo (Theta $\theta$ )	52
4.2	Sensibilidad a la Volatilidad (Vega $\nu$ )	56
4.2.1	Concepto de Vega	57
4.2.2	Valores de Vega	57
4.3	Sensibilidad al Tipo de Interés Sin Riesgo (Rho $\rho$ )	60
4.3.1	Concepto de Rho	60
4.3.2	Valores de Rho	61
4.4	Pérdidas y Ganancias por Series de Taylor	63
4.4.1	Ejemplo con una Posición de Opciones	65
4.4.2	Ejemplo con una Cartera de Opciones	66
<b>5</b>	<b>Cobertura basada en Griegas</b>	<b>68</b>
5.1	Las Matemáticas de las Coberturas	68
5.1.1	La Delta-Cobertura	68
5.1.2	Aportaciones de Vega a la Delta-Cobertura	69
5.1.3	Aportaciones de Rho a la Delta-Cobertura	70

<b>5.2</b>	<b>Aplicación Práctica de Vega y Rho en la Delta-Cobertura .....</b>	<b>71</b>
5.2.1	Opciones Seleccionadas .....	72
5.2.2	Información de las Opciones .....	73
<b>5.3</b>	<b>Cálculos y Conclusiones de la Aplicación Práctica.....</b>	<b>75</b>
<b>6</b>	<b>Conclusiones.....</b>	<b>77</b>
	<b>Bibliografía.....</b>	<b>78</b>
	<b>Anexos .....</b>	<b>80</b>
	<b>Anexo I: Gráficos de Coberturas Estáticas con Opciones.....</b>	<b>80</b>
	<b>Anexo II: Desarrollos del Modelo Binomial .....</b>	<b>82</b>
	Anexo II.a: Desarrollo de la Cartera Replicante de la Call en el Modelo Binomial .....	82
	Anexo II.b: Desarrollo de la Condición Necesaria para que se Ejercite el Derecho de la Opción Call en el Modelo Binomial.....	83
	Anexo II.c: Desarrollo de la Formula de la Valoración de la Call en el Modelo Binomial ..	84
	<b>Anexo III: Desarrollo del Modelo Binomial en Opciones Put .....</b>	<b>86</b>
	<b>Anexo IV: Desarrollos de la Aproximación al Modelo de Black-Scholes con Opciones Call .....</b>	<b>90</b>
	Anexo IV.a: Límite de la Distribución $X \sim B_{2n, p}$ .....	90
	Anexo IV.b: Límite de la Distribución $X \sim B_{1n, p'}$ .....	94
	<b>Anexo V: Desarrollo de la Aproximación al Modelo de Black-Scholes con Opciones Put.....</b>	<b>99</b>
	<b>Anexo VI: Derivadas parciales del Modelo de Black-Scholes .....</b>	<b>103</b>
	Fórmula de Black-Scholes.....	103
	Derivada de $Nx$ y relaciones entre $d1$ y $d2$ .....	103
	Anexo VI.a: Delta ( $\Delta$ ) .....	108
	Anexo VI.b: Gamma ( $\Gamma$ ) .....	108
	Anexo VI.c: Theta ( $\theta$ ) .....	110
	Anexo VI.d: Vega ( $v$ ) .....	112
	Anexo VI.e: Rho ( $\rho$ ) .....	113
	<b>Anexo VII: Listado de Opciones Utilizadas en la Aplicación Práctica.....</b>	<b>114</b>
	<b>Anexo VIII: Función Volatilidad Implícita VBA.....</b>	<b>119</b>

## Índice de Gráficas

Índice VIX.....	9
Subidas de Tipos de Interés.....	10
Volatilidad de la Deuda Soberana a 10 Años.....	10
Beneficio/Pérdida de una Posición en Opciones a Vencimiento .....	24
Distribución Logarítmica.....	33
Distribución Normal.....	34
Prima de la Call a lo Largo del Tiempo .....	40
Prima de la Call en Relación con la Volatilidad .....	40
La Prima en Relación con el Tipo de Interés sin Riesgo .....	41
Delta como la Pendiente de la Prima de la Opción .....	43
Delta en Función del Precio del Subyacente.....	45
Delta de la Call a lo Largo del Tiempo .....	46
Delta de la Call en Relación con la Volatilidad .....	47
Delta en Relación con el Tipo de Interés sin Riesgo .....	47
Gamma como la Pendiente de Delta.....	48
Gamma en Función del Precio del Subyacente .....	50
Gamma a lo Largo del Tiempo .....	51
Gamma en Relación con la Volatilidad.....	52
Gamma en Relación con el Tipo de Interés sin Riesgo.....	52
Theta en Función del Precio del Subyacente .....	55
Theta de la Call a lo Largo del Tiempo.....	55
Theta de la Call en Relación con la Volatilidad .....	56
Theta en Relación con el Tipo de Interés sin Riesgo .....	56
Vega en Función del Precio del Subyacente.....	58
Vega a lo Largo del Tiempo .....	59
Vega en Relación con la Volatilidad .....	59
Vega en Relación con el Tipo de Interés sin Riesgo .....	60
Rho en Función del Precio del Subyacente .....	62
Rho de la Call a lo Largo del Tiempo .....	62
Rho de la Call en Relación con la Volatilidad.....	63
Rho en Relación con el Tipo de Interés sin Riesgo.....	63
Distribución de Contratos por Subyacente .....	72
Distribución de Contratos por Grado de Monetización .....	72
Desglose del Contrato DAX.XEX#CRX82 .....	74
Resultados Vega-Neutral .....	76
Resultados Rho-Neutral .....	76

## Índice de Tablas

Componentes de la Prima .....	39
Delta en Relación con el Grado de Monetización.....	45
Gamma en Relación con el Grado de Monetización .....	50
Theta en Relación con el Grado de Monetización.....	54
Vega en Relación con el Grado de Monetización.....	58
Rho en Relación con el Grado de Monetización .....	61
Información de una Posición en Opciones .....	65
Resultado en Series de Taylor sobre una Posición en Opciones.....	66
Información Inicial de una Cartera de Opciones.....	66
Información Final de una Cartera de Opciones .....	67
Resultado en Series de Taylor sobre una Cartera de Opciones .....	67
Resultado de la Aplicación Práctica .....	75

## Índice de Esquemas

Riesgos Financieros .....	13
Nodos Temporales .....	29

# 1 Introducción

## 1.1 Objetivo

Dentro de la gestión financiera una gran parte dicha actividad está formada por la gestión del riesgo. La transmisión de riesgos financieros es la razón de ser de los mercados de derivados. Estos instrumentos permiten mitigar estos riesgos mediante la realización de coberturas, es decir, permiten crear carteras que mitiguen o eliminen un riesgo determinado. De los distintos derivados que cotizan en el mercado, en este trabajo gestionaremos el riesgo centrándonos en las opciones financieras.

La llamada delta-cobertura es la cobertura más empleada en el mercado de opciones por parte de las entidades financieras. Como explicaremos posteriormente cuando presentemos las coberturas, ciertas entidades financieras, por el curso normal de sus actividades, se ven expuestas a ciertos riesgos que emanan de sus posiciones en derivados. Los bancos de inversión, los creadores de mercado ("*market makers*") únicamente interesados en prestar un servicio a sus clientes, se ven obligados a mitigar dichas exposiciones.

Aun así, la delta-cobertura no logra eliminar todas las exposiciones que presenta una cartera de opciones. Es por ello que existen situaciones de mercado ante las cuales esta cobertura pierde efectividad. Este trabajo ilustrará como la sensibilidad al tipo de interés sin riesgo y a la volatilidad pueden complementar la delta cobertura en situaciones de mercados en la que estos parámetros toman importancia.

## 1.2 Justificación del Tema

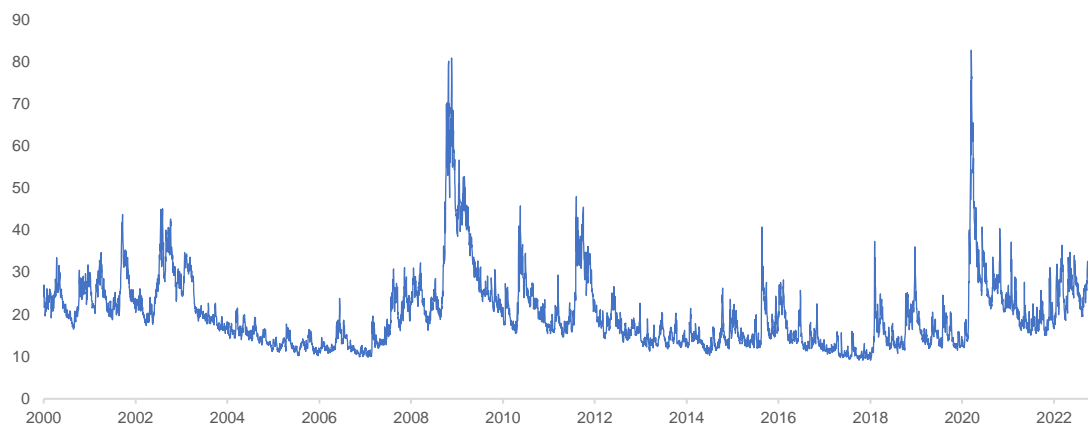
El estudio de estas coberturas ha aumentado su interés debido al contexto económico de estos últimos años, caracterizado por una alta volatilidad y una subida de los tipos de interés. De este contexto caben destacar los siguientes tres acontecimientos.

En primer lugar, debido a la pandemia del COVID-19 hemos vivido desde 2020 unos episodios históricos de alta volatilidad en los mercados financieros. El índice VIX es una media de las volatilidades implícitas de todas las opciones



negociadas en el CBOE<sup>1</sup>. Como se puede apreciar en el siguiente gráfico, la volatilidad media de estos últimos tres años, desde marzo de 2020, es mayor a años anteriores, habiendo estado en muchas ocasiones a niveles de la crisis de 2008.

Gráfica 1-1: Índice VIX



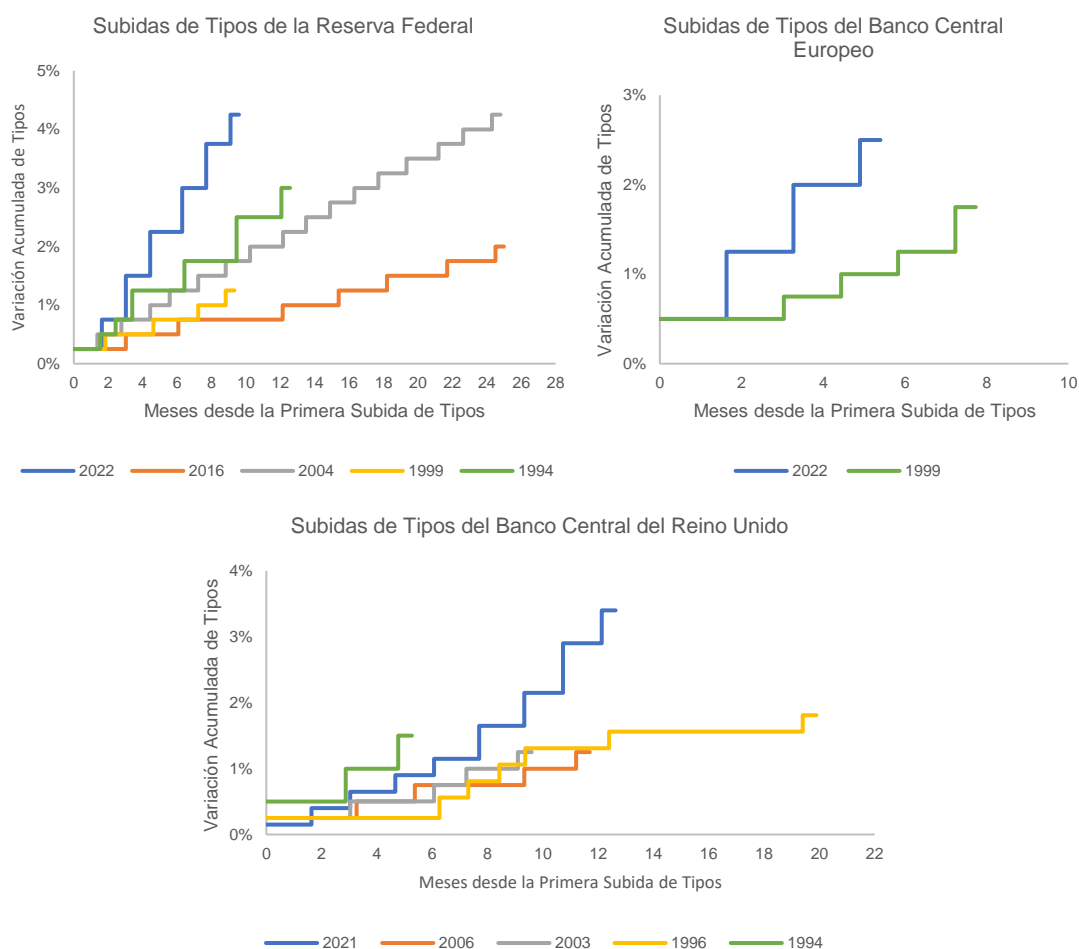
Fuente: Refinitiv y elaboración propia

En segundo lugar, la pandemia provocó un shock tanto de oferta como de demanda en los mercados de consumo y, cuando se volvió a la normalidad, la demanda fue mucho más elástica que la oferta. Sumado esto con acontecimientos de carácter geopolítico (tensiones en el norte de África y la guerra entre Rusia y Ucrania) que afectaron al precio de la energía, se ha generado un periodo inflacionario en el que todavía estamos inmersos. Para frenarlo, las autoridades de política monetaria están llevando a cabo subidas de tipos de interés a una velocidad sin precedentes, tal y como se puede ver en los siguientes gráficos.

---

1 Chicago Board Options Exchange

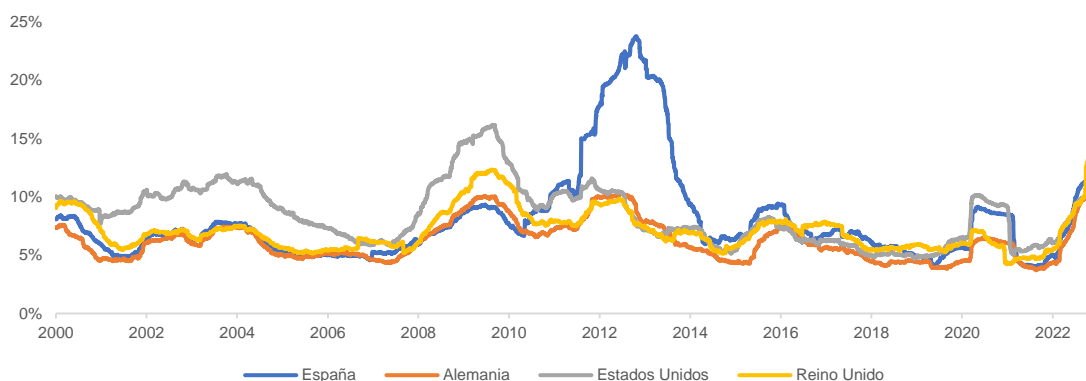
## Gráfica 1-2: Subidas de Tipos de Interés



Fuente: Datos Macro y elaboración propia

En tercer y último lugar, relacionado con lo anterior, la deuda soberana ha mostrado un gran incremento de la volatilidad debido a estas rápidas subidas de tipos por parte de las autoridades monetarias. Este incremento afecta a la valoración de opciones ya que la rentabilidad de la deuda soberana suele considerarse como el tipo de interés sin riesgo.

## Gráfica 1-3: Volatilidad de la Deuda Soberana a 10 Años



Fuente: Investing y elaboración propia

### 1.3 Estructura y Metodología

Este trabajo comenzará presentando el concepto de cobertura y su implementación a través del mercado de derivados. A través de una revisión de la literatura, se mostrarán los riesgos financieros más comunes que afrontan las entidades financieras y los instrumentos derivados con los que se suelen mitigar dichas exposiciones.

Para poder hablar de delta-cobertura sobre opciones, teniendo en cuenta que esta es una cobertura dinámica (como presentaremos posteriormente), es necesario comenzar definiendo la función de valoración de opciones. Por ello este trabajo realizará una revisión de la literatura sobre la valoración de opciones, primero en tiempo discreto presentando el modelo binomial, debido a su simplicidad; y después, en tiempo continuo presentando el modelo de Black-Scholes. Aunque se describirán ambos modelos, el diseño de las coberturas se centrará únicamente en el de Black-Scholes, ya que es el más aplicado para las opciones europeas.

A partir de dicho modelo, se obtendrán las derivadas parciales respecto a los diferentes parámetros de valoración, facilitando las sensibilidades de dichos parámetros. De este modo, llegaremos a lo que se conoce como las griegas, que posteriormente se emplearán para realizar las coberturas. Se hará un estudio de estas sensibilidades ante diferentes escenarios y en relación con otros parámetros de valoración. Mostrando así como dichas sensibilidades miden la exposición a una variable de valoración determinada, permitiendo localizar de donde provienen los beneficios o pérdidas de una cartera de opciones.

La delta es una griega que mide la sensibilidad frente al precio del subyacente. La delta-cobertura se basa en esta sensibilidad y ésta complementada con otras griegas se presentará en un primer momento de forma teórico-matemática. Posteriormente se extraerán datos de FacSet de opciones que cotizaron en un contexto de mercado de alta volatilidad y cambios de tipos de interés. Sobre estas opciones se realizarán tanto la delta-cobertura como dicha cobertura complementada con otras griegas. Posteriormente se analizará la volatilidad de dichas carteras, permitiendo analizar lo que vega y rho aportan a la delta-cobertura.

## 2 Concepto de Cobertura

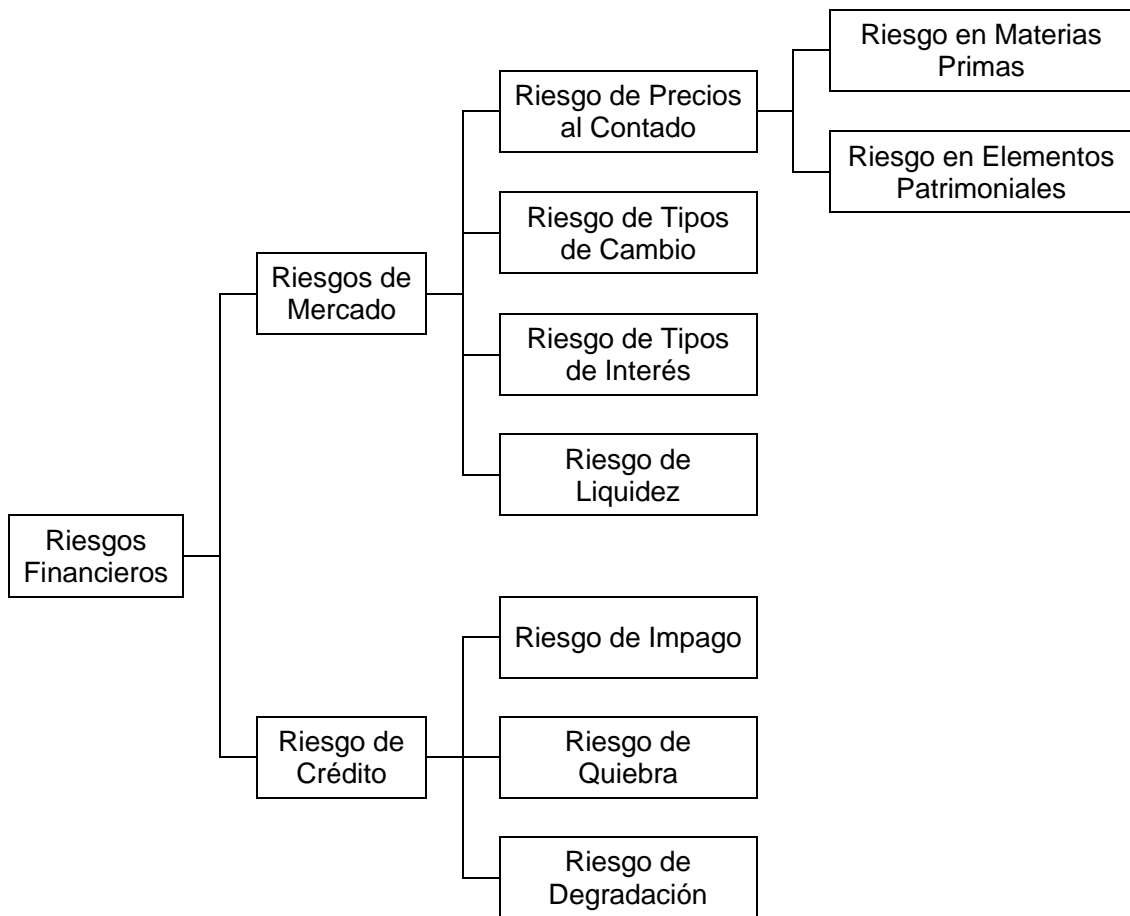
Se denomina cobertura a toda operación financiera que tiene la finalidad de transmitir todo o parte de un riesgo determinado al que está expuesto un agente del mercado. Estas operaciones se realizan mediante instrumentos financieros que repliquen los beneficios o pérdidas generadas por dicho riesgo; es decir, que sea capaz de netear los flujos de caja que genera o puede generar una exposición concreta.

A lo largo del siguiente punto se van a tratar diferentes conceptos que ayudarán a entender mejor el concepto de cobertura. Comenzaremos explicando los tipos de riesgos más comunes a los que hace frente un negocio, centrándonos especialmente en los riesgos de carácter financiero. Posteriormente presentaremos los instrumentos derivados, las herramientas principales para la realización de las coberturas. Y, por último, introduciremos los tipos de coberturas y presentaremos sus características principales.

### 2.1 Riesgos Financieros

En la dirección de un negocio se hace frente a un gran número de riesgos que, a grosso modo, se pueden agrupar en riesgos: de mercado, operacionales, de crédito, legales, estratégicos, reputacionales y específicos al negocio (Crouthy, Galai, & Mark, 2014). Debido a la naturaleza de este trabajo, únicamente nos vamos a centrar en los riesgos de naturaleza financiera, es decir, los riesgos de mercado y los riesgos de crédito. La siguiente ilustración muestra cómo se subdividen estos riesgos financieros más comunes en la industria:

Esquema 2-1: Riesgos Financieros



### 2.1.1 Riesgos de mercado

Los riesgos de mercado son los que un agente asume por el hecho de operar en él y, dependiendo de las características de dicho mercado y de la actividad que realice dentro de él, se encontrará más o menos expuesto a dichos riesgos. En los siguientes párrafos desarrollaremos los riesgos financieros de mercado más comunes, que como mostramos en el esquema son riesgos: de precios al contado, de tipo de cambio, de tipo de interés y de liquidez.

El riesgo de precios al contado se deriva de la volatilidad del precio del activo al que se está expuesto, de su capacidad para generar variaciones de precio. Dentro de este riesgo se pueden distinguir dos grandes grupos dependiendo de la naturaleza de dicho activo, ya que los motivos de sus variaciones de precios son muy diferentes.

En primer lugar, se encuentran las materias primas, o instrumentos cuyo precio está vinculado a ellas. Este activo suele conformar un mercado cuya oferta

está controlada por unos pocos agentes en comparación con su demanda (Crouthy, Galai, & Mark, 2014). Esto puede llevar a que decisiones de unos pocos ofertantes deriven en una gran volatilidad de los precios. Además, este activo suele tener mayores costes de transacción y costes de almacenamiento.

En segundo lugar, los instrumentos de patrimonio, en el que se incluyen tanto acciones como deuda, o instrumentos cuyo precio está vinculado a ellos. La volatilidad de estos activos está directamente relacionada con las características específicas del negocio, el proceso productivo o el equipo de gestión.

Por otro lado, en este riesgo de precios se identifican dos partes: el riesgo idiosincrático y el riesgo sistemático. El riesgo idiosincrático o específico es el riesgo inherente a un activo derivado de sus características específicas. Es por tanto un riesgo que se puede mitigar, diversificando. El riesgo sistemático hace referencia a los cisnes negros del mercado, a que ocurran escenarios que, a la hora de valorar los activos, se suponen que no van a ocurrir (ejemplos: 11S, Covid-19, impago de CDOs en 2008...). Es por tanto un riesgo que no se puede diversificar.

El riesgo de tipos de cambio surge cuando el precio de un activo al que se tiene exposición está denominado en otra divisa distinta de la que se emplea para reconocer las pérdidas o ganancias de dicha operación. En este tipo de situaciones, el agente está también expuesto a las fluctuaciones en el tipo de cambio y a la política monetaria de dicha economía.

El riesgo de tipo de interés surge con activos sensibles a los tipos de interés, como son los títulos de deuda o, como veremos posteriormente las opciones u otros contratos derivados. Esto se debe a que los tipos de interés son un parámetro muy presente a la hora de valorar activos financieros. Se considera el precio del dinero en el tiempo.

El riesgo de liquidez en el mercado emerge cuando no hay posibilidad de comprar o vender un activo determinado en la cantidad deseada al precio de mercado, es decir, no hay oferta y/o demanda para un activo financiero determinado. En los modelos que presentaremos posteriormente siempre asumimos que existe liquidez perfecta de todos los activos del mercado, es decir,

no existe el riesgo de liquidez, puesto que puedes comprar o vender cualquier activo en la cantidad que se desee al precio de mercado.

Relacionado con la liquidez, existe un riesgo más concreto denominado riesgo de intervalo. La mayoría de los instrumentos financieros cotizados lo hacen en bolsas de valores, con un horario de apertura y cierre y únicamente abierto en los días laborables. Esto lleva a situaciones en las que una cotización puede cerrar a un precio determinado y al día siguiente abrir a otro completamente diferente, sin posibilidad a que los agentes del mercado tomen decisiones de compra o venta en ese intervalo de tiempo.

### 2.1.2 Riesgo de crédito

El riesgo de crédito o de contrapartida hace referencia a la posible incapacidad de la contraparte de un contrato de hacer frente al pago de sus obligaciones, sean tanto pago de intereses, principal o pagos de liquidaciones. Aumenta el riesgo de crédito cuando la liquidez o solvencia de la contraparte se ven perjudicadas (Gregory, 2010). A su vez, este riesgo puede dividirse en riesgo de: impago, quiebra o degradación.

El riesgo de impago refleja la imposibilidad de la contraparte de hacer frente a las obligaciones contractuales en el momento estipulado (Crouthy, Galai, & Mark, 2014). En la industria bancaria, este riesgo se hace efectivo cuando pasan 60 días desde que se produce el impago. Se puede concluir que esta parte del riesgo de crédito se relaciona directamente con la falta de liquidez de la contraparte.

El riesgo de quiebra refleja la posibilidad de la quiebra de la contraparte y de que se tome el control sobre el colateral o la garantía del contrato. Este riesgo hace referencia a la solvencia que muestra la contraparte.

El riesgo de degradación refleja la posibilidad de que, durante la relación contractual, la calificación crediticia de la contraparte, otorgada por las agencias de rating, se vea deteriorada. Esto aumenta la prima de riesgo, poniendo en evidencia la necesidad de un tipo de interés mayor para dicha deuda, reduciendo, por tanto, el valor actual del crédito en cuestión.

## 2.2 Los Instrumentos Derivados y su Mercado

Los contratos derivados, o simplemente derivados, son “Instrumentos financieros cuyo rendimiento depende del valor de otra variable financiera (precio de una acción, precio de un bono, tipo de cambio, etc.), denominada subyacente” (Civitanic & Zapatero, 2003). En este tipo de relaciones contractuales lo que signifique una ganancia para una parte, implica una pérdida para la otra, lo que se conoce como un juego de suma cero.

Este tipo de instrumentos nacen ante la necesidad de cubrir o traspasar ciertos riesgos a los que los agentes se ven expuestos en el transcurso corriente de sus negocios habituales. Las posiciones en derivados son exposiciones sintéticas al activo subyacente, se podría decir que son posiciones indirectas sobre el subyacente. Esto permite cubrir o mitigar el riesgo que se deriva de dicha variable financiera.

Excluyendo los agentes que acuden al mercado de derivados para la especulación, se reconocen dos tipos principales de agentes en el mercado de derivados. En primer lugar, las compañías que en el curso habitual de sus negocios se ven con la necesidad de cobertura. Esta es la realidad de la mayoría de los interesados que acuden al mercado de derivados (Hull, Options, Futures, and other Derivatives, 2012). Y, en segundo lugar, las instituciones financieras que, actuando como intermediarias, toman posición en estos derivados para satisfacer las necesidades de sus clientes, a cambio de una comisión (Civitanic & Zapatero, 2003). En este segundo agente nos vamos a centrar para el trabajo.

Las entidades financieras que operan como creadoras de mercado dan liquidez al mercado de derivados y cobran por ello una comisión y/o se benefician de los spreads entre sus precios para clientes y los del mercado (Hull, Risk Management and Financial Institutions, 2015). De este modo, las entidades creadoras de mercado son las mayores usuarias de las delta-coberturas, ya que se ven expuestas por el curso habitual de su negocio a posiciones en instrumentos derivados.



## 2.2.1 Contratos Derivados más Comunes

La mayor parte de los derivados se negocian directamente entre las partes interesadas, conformando así lo que se denomina el mercado OTC<sup>2</sup> o extrabursátiles. Este tipo de contratos se caracterizan porque están hechos a medida, tienen condiciones específicas acordadas entre las partes.

Además de los instrumentos en el mercado OTC, hay derivados que se negocian de manera estandarizada, en mercados regulados y supervisados. Entre estos, los contratos derivados más utilizados son los futuros y las opciones. Estos permiten eliminar o mitigar el riesgo de precios al contado, tanto para instrumentos de patrimonio como para materias primas.

Los contratos futuros acuerdan la compra/venta de un activo subyacente a un precio determinado en una fecha determinada. Los contratos de opciones ofrecen al comprador el derecho de comprar o vender el activo subyacente a un precio determinado en un tiempo determinado. La diferencia principal entre ambos contratos es que: el primero fija el precio futuro al que los agentes van a tener la obligación de vender/comprar el subyacente a vencimiento; mientras que el segundo funciona como un seguro, fijando el precio de compra/venta, pero permitiendo al comprador de la opción beneficiarse de movimientos a favor del subyacente (Hull, Options, Futures, and other Derivatives, 2012). Es por esto que el comprador de las opciones paga una prima. A lo largo de este trabajo nos centraremos únicamente en los contratos de opciones.

Existen también contratos derivados más complejos que los presentados en el párrafo anterior. En función de los riesgos presentados anteriormente hablaremos de los Swaps. El swap es un contrato derivado entre dos partes por las que se acuerda el intercambio de capitales en unas fechas determinadas y una forma concreta de calcular dichos capitales en función de unas variables financieras (subyacente) acordadas. Los swaps mas comunes son:

- Swaps sobre tipos de interés: intercambio de capitales generado sobre los cambios en los tipos de interés del mercado, permiten cubrir el riesgo de tipos de interés.

---

<sup>2</sup> Over The Counter

- Swaps sobre tipos de cambio: intercambio de capitales determinados por los tipos de cambio del mercado, permiten cubrir el riesgo de cambio.
- Credit Default Swaps (CDS): intercambio de capitales a consecuencia de un evento de crédito determinado, permiten cubrir los riesgos de crédito.

## 2.3 Tipos de Cobertura

Entre las estrategias de cobertura, podemos encontrarnos con que no siempre existe un instrumento financiero que genere los flujos de caja inversos de una exposición concreta. Es por ello que existen diversas estrategias de cobertura que, mediante la combinación de activos financieros permite reducir o mitigar ciertas exposiciones.

En este trabajo vamos a dividir los tipos de coberturas en dos grandes grupos en función del número de veces que tengan que acudir al mercado a lo largo de la vida de la cobertura. Se distinguirá entre coberturas estáticas, se conforma una posición en el momento inicial y se mantiene hasta vencimiento, y coberturas dinámicas, coberturas que necesitan lo que denominaremos rebalanceo.

### 2.3.1 Coberturas estáticas

Las coberturas estáticas son estrategias que se conforman en el momento inicial y no necesitan volver a acudir al mercado hasta vencimiento (Civitanic & Zapatero, 2003). Únicamente con una o varias transacciones de activos financieros se permite conformar una cartera que mitigue el riesgo concreto que se desee.

Estas coberturas no serán objeto de este trabajo, tal y como se mostrará posteriormente. Aun así, a continuación, se presentan brevemente las coberturas estáticas más comunes con opciones<sup>3</sup>, instrumento derivado protagonista de este texto:

- Call cubierta (“covered call”): vender una opción call y comprar el activo subyacente.

---

<sup>3</sup> En el Anexo I: Gráficos de Coberturas Estáticas con Opciones se ilustran las coberturas presentadas en este punto.

- Put protegida (“protective put”): comprar una opción put y comprar también el activo subyacente.
- Bull spread
- Bear spread
- Straddle
- Strangle
- Butterfly spread

### 2.3.2 Coberturas dinámicas

Las coberturas dinámicas son estrategias de cobertura que se conforman con parámetros que varían a lo largo del tiempo. La creación de una cartera de cobertura dinámica se basa en una variable financiera que cambiará, por diferentes razones, a lo largo de la vida de la cobertura. Esto implica que, para que la cobertura mantenga su efectividad es necesario acudir al mercado para reequilibrarla. Estas coberturas son las que estudiaremos y emplearemos en la aplicación práctica.

Como dijimos anteriormente, la mayoría de las transacciones con derivados se hacen en el mercado OTC. La principal característica de dichas transacciones es que conforman instrumentos derivados a medida, según los riesgos que se quieran mitigar/asumir las partes del contrato. Esto sucede porque en el mercado no se encuentran instrumentos estandarizados que permitan tratar un determinado riesgo.

Por otra parte, las entidades financieras conforman la mayoría de las contrapartes de dichos contratos OTC, únicamente interesados en cobrar una comisión, y en ocasiones se ven con el apuro de mitigar ciertas exposiciones que generan dichos contratos. Al estar hechos a medida en muchos de estos contratos no pueden acudir al mercado para tomar la posición opuesta, por lo que realizarán coberturas en base a los inputs de valoración del contrato derivado.

Pongamos que el valor de un contrato derivado depende de una variable financiera, por lo que matemáticamente se puede expresar como:  $f(x) = P$ . De esta forma, ante variaciones en la variable financiera se producen variaciones

en el valor del contrato. Por aproximaciones lineales, dicha variación del precio se puede estimar como (Sydsaeter & Hammond, 2012):

$$\Delta P \approx f'(x_1)(x_2 - x_1)$$

La aproximación lineal expuesta es la base matemática simple de las coberturas dinámicas. Estas coberturas tomarán exposición a la variable financiera identificada como driver del valor del contrato, en una cantidad igual a la que marque su primera derivada. Es por ello que las coberturas dinámicas son estrategias que necesitarán acudir al mercado para ser reequilibradas, ya que la derivada cambiará su valor conforme cambie la variable financiera. Se mantendrá la cobertura siempre y cuando se mantenga la neutralidad de dicha derivada.

Una mejor aproximación que la expuesta en el ejemplo anterior sería empleando una aproximación cuadrática (empleando hasta la derivada de segundo orden) o incluso una aproximación de orden mayor. Esto es lo que en matemáticas se conoce como las series de Taylor (Sydsaeter & Hammond, 2012):

$$\Delta P \approx \frac{1}{1!} f'(x_1)(x_2 - x_1) + \frac{1}{2!} f''(x_1)(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{3!} f'''(x_1)(x_2 - x_1)^3 + \dots$$

La realidad de estos contratos no suele ser tan simple y su valoración tampoco. Es por ello que el precio suele estar conformado por la interacción de diferentes variables financieras. Pongamos que el contrato financiero depende de dos variables, matemáticamente esto se podría expresar como:  $f(x, y) = P$ . Una aproximación cuadrática teniendo en cuenta variaciones de las tres variables sería:

$$\Delta P \approx \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_2 - x_1) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_2 - x_1)^2 + \frac{\partial f}{\partial y_1}(y_2 - y_1) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y_1^2}(y_2 - y_1)^2$$

Un ejemplo de estas estrategias es la delta-cobertura, cobertura sobre la que pivotará este trabajo. Delta, como expondremos posteriormente, es la primera derivada parcial de la fórmula de valoración de opciones respecto al precio del subyacente. De tal forma que la delta permite realizar coberturas dinámicas que neutralizan las exposiciones que da una posición en opciones al activo subyacente. Así se consigue lo que se conoce como porfolio delta neutral.

También en opciones, encontramos gamma como la derivada de segundo orden de la fórmula de valoración de opciones. La exposición que representa esta sensibilidad también se puede cubrir, obteniendo lo que se conoce como una cartera gamma neutral.

Este tipo de coberturas no solo se aplican a opciones. Su uso es también habitual en renta fija. La primera derivada respecto al tipo de interés es lo que se conoce como duración. Ésta mide la sensibilidad del precio de un bono ante cambios en el tipo de interés. Además, lo que sería gamma en opciones, se conoce en renta fija como convexidad. La segunda derivada respecto al tipo de interés.

## 3 Concepto de Opción y Valoración

### 3.1 Concepto de Opción

Una opción financiera es un instrumento derivado por el que el comprador (o tenedor), a cambio del pago de una prima, adquiere el derecho a comprar/vender un activo subyacente<sup>4</sup> a un precio determinado, o precio de ejercicio, en una fecha (o fechas) determinada, vencimiento. El precio que asume el comprador por ese derecho se denomina prima y se paga en el momento en el que se contrata la opción. Por la otra parte, el vendedor, o emisor, recibe la prima y tiene la obligación de vender/comprar el activo subyacente frente al tenedor de dicha opción.

Una opción call es aquella en la que el tenedor adquiere el derecho a comprar y el emisor asume la obligación de vender. Una opción put es aquella en la que el tenedor adquiere el derecho a vender y el emisor asume la obligación de comprar. A su vez, las opciones pueden ser europeas o americanas<sup>5</sup>, sin tener esto relación con su ubicación geográfica. Las opciones europeas tienen una única fecha en la que se puede ejercer el derecho, denominada fecha de vencimiento. Las opciones americanas pueden ejercer el derecho en cualquier momento previo al vencimiento.

Debido a que este trabajo se centra en el modelo de Black-Scholes y puesto que dicho modelo pivota originalmente sobre opciones europeas, únicamente trabajaremos con estas opciones. Por ello, todas las gráficas, comentarios y conclusiones de aquí en adelante serán aplicables solo a opciones europeas.

Teniendo lo anterior en cuenta, las variables o símbolos matemáticos de una posición en opciones se definen como:

- $t$ : momento en el tiempo
- $T$ : momento en el tiempo en el que vence la opción
- $S_t$ : precio al contado del subyacente en  $t$

---

4 Este activo puede ser de cualquier naturaleza (acciones, materias primas, instrumentos de deuda, divisas, futuros, ...). Para mayor simplicidad, en este texto siempre trabajaremos con opciones contratadas sobre acciones.

5 También existen otro tipo de opciones denominadas exóticas. Estas difieren en alguno de los aspectos mencionados anteriormente sobre las europeas o americanas a la hora de ejercer el derecho. Un ejemplo de ello son las opciones bermudas, que, a diferencia de las anteriores, presentan varios periodos de tiempo determinados en los que se puede ejercer el derecho.

- $K$ : precio de ejercicio
- $C_t$ : valor de una opción call en  $t$
- $P_t$ : valor de una opción put en  $t$

Por tanto, los pagos que se generan de una posición en opciones son los siguientes:

Tipo de Posición		$t = 0$	$t = T$
Call	Compra	$-C_0$	$\max\{S_T - K; 0\}$
	Venta	$C_0$	$-\max\{S_T - K; 0\}$
Put	Compra	$-P_0$	$\max\{K - S_T; 0\}$
	Venta	$P_0$	$-\max\{K - S_T; 0\}$

Según la relación que haya entre el precio de ejercicio ( $K$ ) y el precio al contado ( $S_t$  o  $S$ ) del subyacente, es decir según su grado monetización, una opción puede estar:

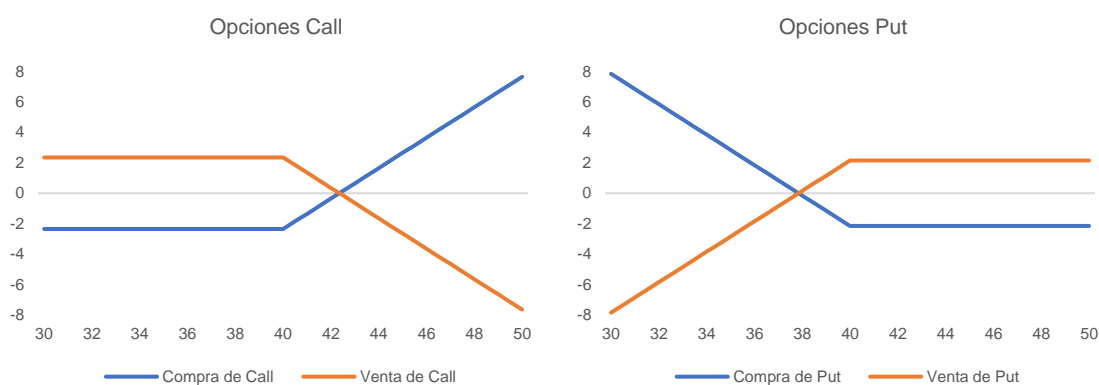
- In-the-money: cuando  $S > K$  en opciones call y  $K > S$  en put, es decir cuando el derecho se encuentra en condiciones de ser ejercido.
- Out-of-the-money: cuando  $S < K$  en opciones call y  $K < S$  en put, es decir cuando el derecho no se encuentra en condiciones de ser ejercido.
- At-the-money: cuando  $S = K$ . En la realidad es muy difícil que se dé una opción at-the-money pura. Por ello, a lo largo de este trabajo, consideraremos que una opción estará at-the-money cuando el precio del subyacente se encuentre cerca del precio de ejercicio (at-the-money = near-the-money).

### 3.1.1 Ejemplo de Opción

A lo largo de este trabajo vamos a presentar una gran variedad de gráficas y tablas que permitirán reflejar de una manera más clara los conceptos que se traten. Para todos los elementos gráficos de este trabajo, salvo que en ellos se exprese lo contrario, hemos tomado como datos base:  $S_0 = 40$ ,  $K = 40$ ,  $(T - t) = 0,5$ ,  $\sigma = 20\%$  y  $r = 1\%$ . Teniendo en cuenta que, según el modelo de Black-Scholes, esta opción tendría una prima de 2,35 en el caso de la call y 2,15 en el

caso de la put, el beneficio o pérdida de una posición a vencimiento vendría representado como:

Gráfica 3-1: Beneficio/Pérdida de una Posición en Opciones a Vencimiento



Fuente: Elaboración propia

## 3.2 Valoración de Opciones en Tiempo Discreto

Para introducirnos en la valoración de opciones primero trabajaremos en tiempo discreto, debido a que permite simplificar mucho más la realidad. En tiempo discreto se puede apreciar de manera más clara los factores que determinan la prima de una opción. Como se expondrá en el siguiente punto, el modelo por antonomasia en tiempo discreto es el Modelo Binomial.

Cuando hablamos de un modelo en tiempo discreto indicamos que se trata de un modelo dinámico, ya que asume que las variables evolucionan a lo largo del tiempo. Pero, lo que realmente diferencia un modelo discreto, es que toma “ $t$ ” como un conjunto de números reales enteros, es decir, el tiempo se considera una variable discreta. Entre dos puntos seguidos en el tiempo se asume que las variables del modelo no cambian. De esta forma, entre  $S_t$  y  $S_{t+1}$  no existe ningún valor intermedio de  $S$ .

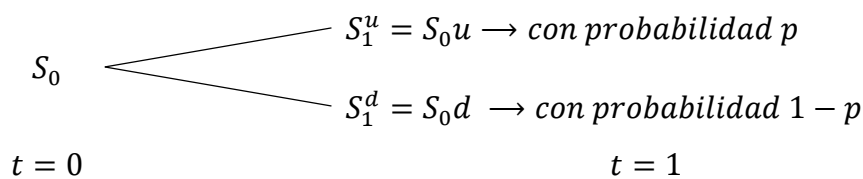
### 3.2.1 El Modelo Binomial

Con posterioridad al Modelo de Black-Scholes, John C. Cox, Stephen A. Ross y Mark Rubinstein (1979) presentaron el Modelo Binomial, también para valoración de opciones europeas. Este modelo se basa en la construcción de un “árbol” de precios como los posibles caminos que puede seguir el precio del subyacente de la opción.

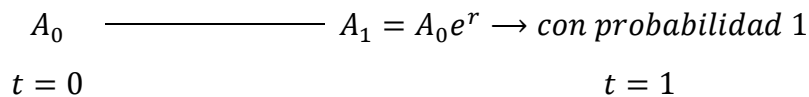


### 3.2.1.1 Suposiciones del Modelo Binomial

En la valoración según el modelo binomial comenzamos asumiendo que el precio del subyacente, activo con riesgo, sigue un proceso discreto binomial. Esto quiere decir que en el momento  $t + 1$  el subyacente únicamente puede tomar dos valores  $S_{t+1}^u = S_t u$  o  $S_{t+1}^d = S_t d$  con probabilidades complementarias ( $p$  y  $1 - p$  respectivamente). Las letras  $u$  y  $d$  (del inglés “up” y “down”) son parámetros de la valoración cuyo valor pertenece a los números reales y su relación, por definición, ha de ser:  $u > d$ . De esta forma, los caminos que puede seguir el activo con riesgo se pueden representar:



A la par que un activo con riesgo, en este modelo también se contempla la existencia de un activo sin riesgo. Éste presenta rendimientos al tipo de interés sin riesgo ( $r$ ), siendo éste constante e igual para todos los vencimientos. El activo sin riesgo queda definido como:



Para este modelo también asumiremos que:

- No hay impuestos ni costes de transacción.
- Tanto el subyacente como el activo sin riesgo no pagan dividendos ni cupones.
- Se permiten posiciones tanto largas como cortas en cualquier activo financiero.
- Existe divisibilidad perfecta en todos los activos del mercado, es decir, la cantidad de activos que se desee comprar no tiene por qué ser un número entero.
- Existe liquidez perfecta para todos los activos del mercado, es decir, se puede comprar la cantidad de activos que se desee al precio del mercado del momento.

En este modelo, para que se cumpla el supuesto de Ausencia de Oportunidades de Arbitraje (en adelante supuesto AOA), la relación entre la

rentabilidad del subyacente y el tipo de interés sin riesgo ha de ser:  $AOA \Rightarrow d < e^r < u$ . Con otras palabras, entre las dos rentabilidades posibles que puede generar el activo con riesgo, se encontrará la rentabilidad del activo sin riesgo. En caso de que esto no ocurra así existirían oportunidades de arbitraje tomando posición larga en el activo que tenga mayor rentabilidad y corta en el activo que tenga menos.

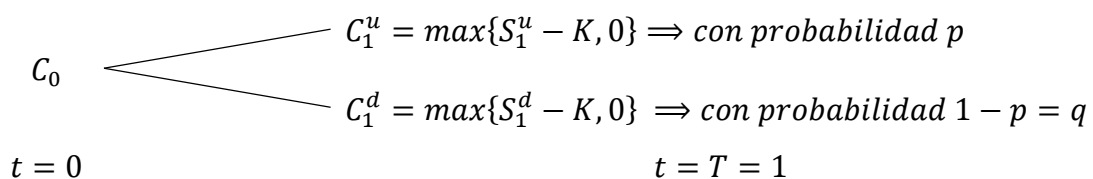
### 3.2.1.2 Cartera Replicante de la Opción

Con el modelo binomial, sería posible crear una cartera que replique a vencimiento los pagos a los que da derecho una opción. La denominaremos cartera replicante. De esta forma, como la cartera y la opción darán derecho a los mismos capitales con el mismo vencimiento, el valor de la prima de la opción será igual a la inversión inicial necesaria para conformar dicha cartera. Esta cartera replicante estará formada por:

- $x_R$ : número de participaciones en el subyacente
- $y_R$ : número de participaciones en el activo sin riesgo

El supuesto de AOA teniendo en cuenta esta cartera replicante de una opción call será:  $AOA \Rightarrow C_0 = x_R S_0 + y_R A_0$ . Es decir, dos activos que dan derecho a los mismos capitales con igual vencimiento deberán tener el mismo precio. En caso contrario existirían oportunidades de arbitraje.

Debido a que el subyacente únicamente contempla dos supuestos, uno de mercado al alza y otro a la baja, una opción call con vencimiento en  $t = 1$  también presentará dos posibilidades de pago a vencimiento.



Teniendo esto en cuenta, la cartera replicante de esta opción call tendrá que cumplir:

$$\begin{cases} x_R S_1^u + y_R A_1 = C_1^u \\ x_R S_1^d + y_R A_1 = C_1^d \end{cases}$$

Desarrollando<sup>6</sup> los criterios anteriores, obtenemos que:

$$x_R = \frac{C_1^u - C_1^d}{S_0(u - d)}$$

$$y_R = \frac{uC_1^d - dC_1^u}{(u - d)A_0e^r}$$

Como comentamos anteriormente, el valor de la prima de la opción call deberá ser igual al valor inicial de la cartera replicante. De esta forma<sup>7</sup>:

$$C_0 = x_R S_0 + y_R A_0 = \frac{C_1^u - C_1^d}{S_0(u - d)} S_0 + \frac{uC_1^d - dC_1^u}{(u - d)A_0e^r} A_0 =$$

$$= \left( \frac{e^r - d}{u - d} C_1^u + \frac{u - e^r}{u - d} C_1^d \right) e^{-r}$$

Así se hallaría el valor de la prima de una opción call únicamente con vencimiento en  $T = 1$ .

### 3.2.2 Valoración Neutral al Riesgo

La valoración neutral al riesgo es un concepto que se desarrolla de los trabajos de Harrison y Kreps (1979) y Harrison y Pliska (1981), y se deriva de los trabajos de Black y Scholes (1973) y Cox, Ross y Rubinstein (1979). La base de la valoración neutral al riesgo se conoce como teorema fundamental de valoración de activos (Carabias, 2016).

El teorema fundamental de valoración de activos se da siempre en un mundo teórico neutral al riesgo, es decir, en un contexto en el que no hay recompensa por invertir en el activo con riesgo. En él, la rentabilidad de todos los activos es la rentabilidad del activo sin riesgo (Civitanic & Zapatero, 2003). Por tanto:

$$S_0 = e^{-rt} \hat{E}[S_t]$$

Este teorema fundamental indica que en Ausencia de Oportunidades de Arbitraje existe la equivalente medida de martingala o la probabilidad neutral al riesgo (Bingham & Kiesel, 2004). Estas medidas de probabilidad son teóricas, es

---

6 En el Anexo II.a: Desarrollo de la Cartera Replicante de la Call en el Modelo Binomial se encuentra el desarrollo paso a paso.

7 En el Anexo II.a: Desarrollo de la Cartera Replicante de la Call en el Modelo Binomial se encuentra el desarrollo paso a paso.

decir, parten de un modelo bajo suposiciones y no representan la probabilidad de que el suceso ocurra en la práctica real.

### 3.2.2.1 Valoración Neutral al Riesgo de la Opción

Según este teorema fundamental de la valoración de activos, el valor en  $t = 0$  del activo con riesgo definido en el punto anterior del modelo binomial sería:

$$S_0 = \hat{E}[S_1]e^{-r} = [S_1^u \hat{p} + S_1^d (1 - \hat{p})]e^{-r}$$

Del mismo modo, se puede hallar el valor esperado de la opción call presentada en el punto anterior y obtener su valor actual:

$$C_0 = \hat{E}[C_1]e^{-r} = [C_1^u \hat{p} + C_1^d (1 - \hat{p})]e^{-r}$$

También en el punto anterior terminamos concluyendo que el valor de la prima de la opción call en el modelo binomial es:

$$C_0 = \left( \frac{e^r - d}{u - d} C_1^u + \frac{u - e^r}{u - d} C_1^d \right) e^{-r}$$

Así, para el caso pertinente, el modelo binomial y la valoración neutral al riesgo se puede concluir que las medidas de martingala serán:

$$C_0 = \left( \frac{e^r - d}{u - d} C_1^u + \frac{u - e^r}{u - d} C_1^d \right) e^{-r} \xrightarrow{\hat{p} = \frac{e^r - d}{u - d}; 1 - \hat{p} = \frac{u - e^r}{u - d}} C_0 = [\hat{p} C_1^u + (1 - \hat{p}) C_1^d] e^{-r}$$

### 3.2.3 Valoración con Múltiples Nodos Temporales

Hasta ahora veníamos valorando una opción a la que únicamente le quedaba un periodo de tiempo hasta su vencimiento, o, lo que es lo mismo, que desde el momento inicial hasta vencimiento el activo con riesgo únicamente podía tomar dos valores diferentes. Debido a esto se introduce una nueva variable:

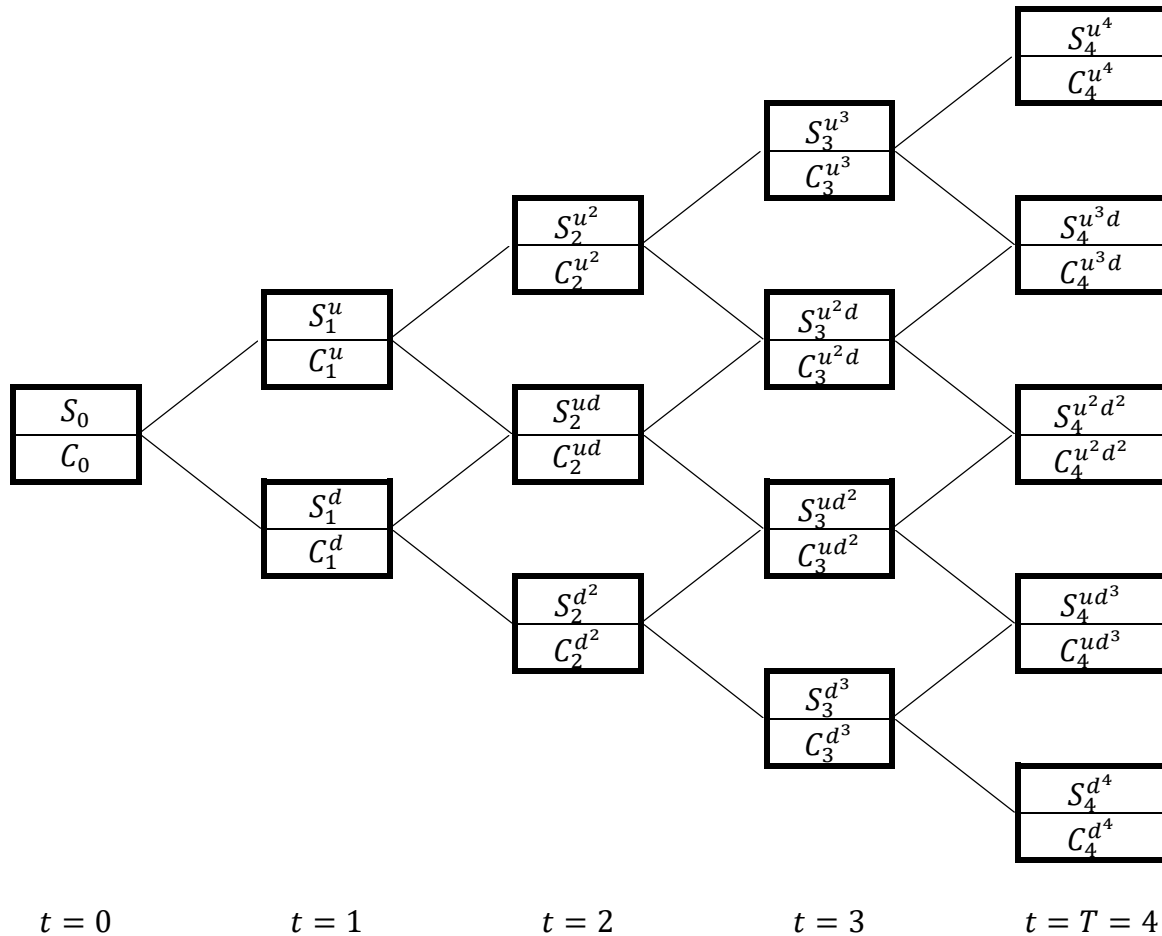
- $n$ : número de nodos temporales hasta el vencimiento ( $T$ ).

Y, por tanto:

$$\Delta t = \frac{(T - t)}{n}$$

Teniendo en cuenta lo dicho en el modelo binomial, los posibles valores que puede tomar tanto el subyacente como la opción con  $T = n = 4$  serían:

Esquema 3-1: Nodos Temporales



Por tanto, las probabilidades neutrales al riesgo de cada uno de estos posibles valores a vencimiento de la opción call serán:

Posibles valores a vencimiento	Pago a vencimiento	Probabilidad neutral al riesgo
$C_4^{u^4}$	$\max\{S_4^{u^4} - K; 0\}$	$P[C_4^{u^4}] = \hat{p}^4$
$C_4^{u^3d}$	$\max\{S_4^{u^3d} - K; 0\}$	$P[C_4^{u^3d}] = \hat{p}^3(1 - \hat{p})$
$C_4^{u^2d^2}$	$\max\{S_4^{u^2d^2} - K; 0\}$	$P[C_4^{u^2d^2}] = \hat{p}^2(1 - \hat{p})^2$
$C_4^{ud^3}$	$\max\{S_4^{ud^3} - K; 0\}$	$P[C_4^{ud^3}] = \hat{p}(1 - \hat{p})^3$
$C_4^{d^4}$	$\max\{S_4^{d^4} - K; 0\}$	$P[C_4^{d^4}] = (1 - \hat{p})^4$

Con  $T = 4$ , el valor de la prima de la opción call es:

$$C_0 = (C_4^{u^4} \hat{p}^4 + C_4^{u^3d} \hat{p}^3(1 - \hat{p}) + C_4^{u^2d^2} \hat{p}^2(1 - \hat{p})^2 + C_4^{ud^3} \hat{p}(1 - \hat{p})^3 + C_4^{d^4} (1 - \hat{p})^4) e^{-r(4-0)}$$

### 3.2.4 Aproximación a $u$ y $d$ .

Para aproximar las medidas de  $u$  y  $d$  del modelo binomial a los mercados reales se proponen, en el artículo de Cox, Ross y Rubinstein (1979), las siguientes medidas:

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

Siendo  $\sigma\sqrt{\Delta t}$  la desviación típica de los retornos del activo subyacente ante  $\Delta t$ . De esta forma se consigue reflejar en el modelo la volatilidad del activo con riesgo (Cox, Ross, & Rubinstein, 1979). Las probabilidades neutrales al riesgo quedarían definidas como:

$$\hat{p} = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} = \frac{e^{r\Delta t} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}$$

$$(1 - \hat{p}) = \frac{u - e^{r\Delta t}}{u - d} = \frac{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{r\Delta t}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}$$

### 3.2.5 Conclusiones de la Valoración en Tiempo Discreto

Para las fórmulas genéricas de valoración del modelo binomial consideraremos las siguientes variables adicionales:

- $j$ : número de movimientos alcistas del activo con riesgo.
- $a$ : número mínimo de movimientos alcistas para que  $S_T > K$ .

El valor del activo con riesgo en un punto en tiempo discreto y su medida de martingala (probabilidad neutral al riesgo), siendo  $n$  el número de nodos temporales hasta el momento  $t$ , serán:

$$S_t^{u^j \cdot d^{n-j}} = S_0 u^j d^{n-j}, \forall j \{0 \leq j \leq n\}$$

$$P \left[ S_t^{u^j \cdot d^{n-j}} = S_0 u^j d^{n-j} \right] = \binom{n}{j} \hat{p}^j (1 - \hat{p})^{n-j}, \forall j \{0 \leq j \leq n\}$$

Y, por tanto, su valor en un momento concreto en el tiempo se podría expresar como:

$$S_t = e^{-r(T-t)} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \hat{p}^j (1 - \hat{p})^{n-j} S_t^{u^j \cdot d^{n-j}}, \forall j \{0 \leq j \leq n\}$$

Del mismo modo, el pago a vencimiento de una call y su probabilidad neutral al riesgo serán:

$$C_T^{u^j \cdot d^{n-j}} = \max\{S_0 u^j d^{n-j} - K; 0\}, \forall j \{0 \leq j \leq n\}$$

$$P \left[ C_T^{u^j \cdot d^{n-j}} = \max\{S_0 u^j d^{n-j} - K; 0\} \right] = \binom{n}{j} \hat{p}^j (1 - \hat{p})^{n-j}, \forall j \{0 \leq Z \leq n\}$$

Para que la opción se encuentre in-the-money, es decir, para que se ejecute el derecho de compra y el intercambio de capitales a vencimiento sea superior a cero, el precio del activo subyacente ha de ser superior al precio de ejercicio ( $S_T > K$ ). Esto implica que<sup>8</sup>:

$$S_T^{u^j d^{n-j}} > K \Rightarrow j > \frac{n}{2} - \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)}{2\sigma\sqrt{\frac{(T-t)}{n}}}, \forall j \{0 \leq Z \leq n\}$$

Por lo que:

$$a = \frac{n}{2} - \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)}{2\sigma\sqrt{\frac{(T-t)}{n}}}$$

Teniendo esto en cuenta, el valor de la call en un momento concreto en el tiempo, la prima de la call se puede expresar como:

$$C_t = e^{-r(T-t)} \sum_{j>a}^n \binom{n}{j} \hat{p}^j (1 - \hat{p})^{n-j} (S_0 u^j d^{n-j} - K)$$

Aun así, para aproximar esta expresión al modelo de Black-Scholes (Civitanic & Zapatero, 2003) que expondremos posteriormente, también se puede definir como<sup>9</sup>:

$$C_t = S_t B_1(a) - K e^{-r(T-t)} B_2(a)$$

Donde:

$$B_1(a) = P[X > a] \rightarrow X \sim B(n, \hat{p}')$$

$$\hat{p}' = \frac{\hat{p}u}{\hat{p}u + (1 - \hat{p})d} = \frac{e^{r\Delta t} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}} e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} e^{-r\Delta t}$$

$$(1 - \hat{p}') = \frac{(1 - \hat{p})d}{\hat{p}u + (1 - \hat{p})d} = \frac{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{r\Delta t}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}} e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} e^{-r\Delta t}$$

8 En el Anexo II.b: Desarrollo de la Condición Necesaria para que se Ejercite el Derecho de la Opción Call en el Modelo Binomial se encuentra el desarrollo paso a paso.

9 En el Anexo II.c: Desarrollo de la Formula de la Valoración de la Call en el Modelo Binomial se encuentra el desarrollo paso a paso.

$$B_2(a) = P[X > a] \rightarrow X \sim B(n, p)$$

$$\hat{p} = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} = \frac{e^{r\Delta t} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}$$

$$(1 - \hat{p}) = \frac{u - e^{r\Delta t}}{u - d} = \frac{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{r\Delta t}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}$$

En el caso de la opción put, su valoración en tiempo discreto quedaría definida como<sup>10</sup>:

$$P_t = Ke^{-r(T-t)}B_2(a) - S_tB_1(a)$$

Donde:

$$B_1(a) = P[X < a] \rightarrow X \sim B(n, \hat{p}')$$

$$\hat{p}' = \frac{\hat{p}u}{\hat{p}u + (1 - \hat{p})d} = \frac{e^{r\Delta t} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}} e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} e^{-r\Delta t}$$

$$(1 - \hat{p}') = \frac{(1 - \hat{p})d}{\hat{p}u + (1 - \hat{p})d} = \frac{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{r\Delta t}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}} e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} e^{-r\Delta t}$$

$$B_2(a) = P[X < a] \rightarrow X \sim B(n, \hat{p})$$

$$\hat{p} = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} = \frac{e^{r\Delta t} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}$$

$$(1 - \hat{p}) = \frac{u - e^{r\Delta t}}{u - d} = \frac{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{r\Delta t}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}$$

### 3.3 Valoración de Opciones en Tiempo Continuo

Ya presentado el modelo binomial en tiempo discreto, pasamos a tiempo continuo. En éste se presentará el modelo de Black-Scholes, modelo sobre el que pivotará este trabajo.

Un modelo en tiempo continuo se trata también de un modelo dinámico que, como dijimos anteriormente, asume que las variables evolucionan a lo largo del tiempo. Por otro lado, estos modelos toman la variable “t” como un conjunto de números reales, es decir, el tiempo se considera una variable continua. Entre

---

10 En el Anexo III: Desarrollo del Modelo Binomial en Opciones Put se encuentra la valoración de la opción put en el modelo binomial.



dos puntos del tiempo tomados al azar existe una cantidad infinita de otros puntos en el tiempo. Entre dos puntos siempre hay otro.

### 3.3.1 El Modelo de Black-Scholes

En 1973 Fisher Black, Myron Scholes y Robert Merton desarrollaron el Modelo Black-Scholes-Merton (o Black-Scholes), el cual se considera uno de los mayores avances en la valoración de opciones europeas (Hull, Options, Futures, and other Derivatives, 2012). Trabajos anteriores a este modelo, como Sprenkle (1961), Samuelson (1965) o Chen (1970), habían realizado avances en esta materia, pero todos basaban su valoración en parámetros arbitrarios (Black & Scholes, 1973). Por ello, en 1997 Robert Merton y Myron Scholes recibieron el Premio Nobel de Economía.

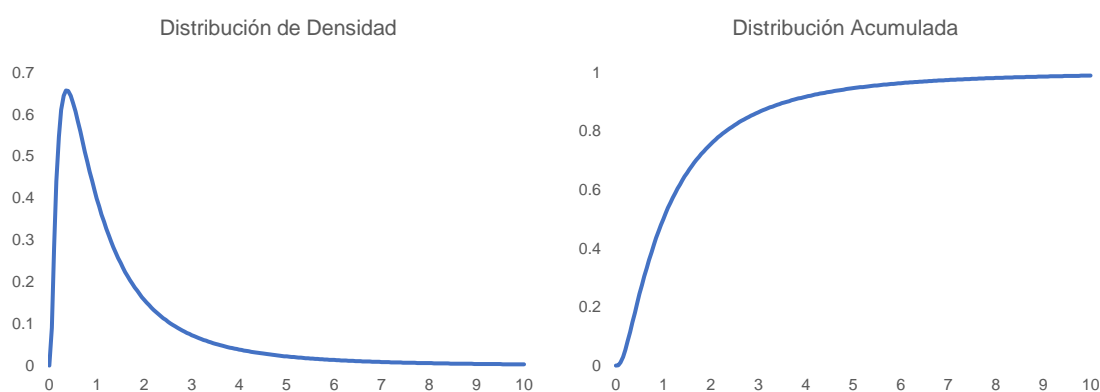
#### 3.3.1.1 Suposiciones del Modelo de Black-Scholes

Para este modelo de valoración asumiremos “condiciones ideales” en el mercado para la acción y para la opción (Black & Scholes, 1973). Comenzando por el movimiento del subyacente que sigue una distribución log-normal:

$$\ln S_t \sim N \left[ \ln S_0 + \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t, \sigma^2 t \right] = \ln \frac{S_t}{S_0} \sim N \left[ \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t, \sigma^2 t \right]$$

- $\mu$ : retorno esperado del activo con riesgo
- $\sigma^2$ : varianza de los retornos del activo con riesgo

Gráfica 3-2: Distribución Logarítmica

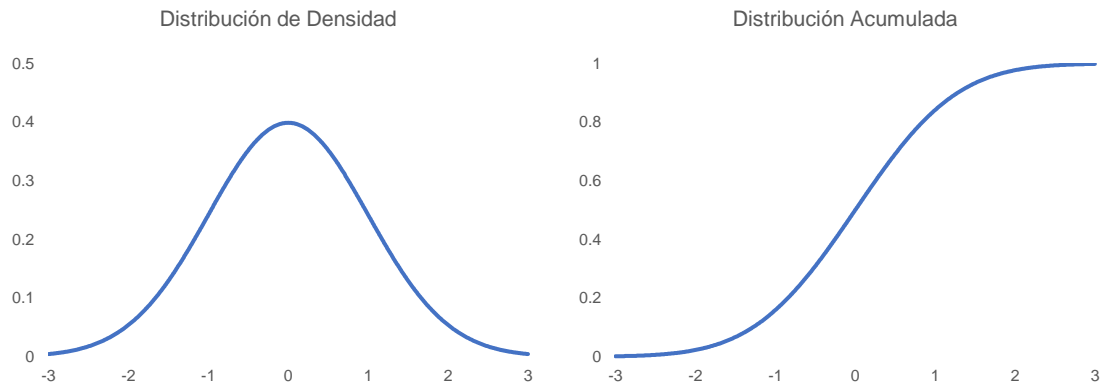


Fuente: Elaboración propia

Los retornos del subyacente seguirán, por tanto, una distribución normal, concluyendo en que, a lo largo del tiempo el subyacente siga, lo que en matemáticas se domina un movimiento browniano (Hull, Options, Futures, and other Derivatives, 2012):

$$\frac{\Delta S_{0,t}}{S_0} \sim N(\mu\Delta t, \sigma^2\Delta t)$$

Gráfica 3-3: Distribución Normal



Fuente: Elaboración propia

Además, tal y como quedaron definidas en el modelo binomial, en el modelo de Black-Scholes también se cumplen los siguientes supuestos:

- No hay impuestos ni costes de transacción.
- Tanto el subyacente como el activo sin riesgo no pagan dividendos ni cupones.
- Se permiten posiciones tanto largas como cortas en cualquier activo financiero.
- Existe divisibilidad y liquidez perfecta en todos los activos del mercado.

### 3.3.1.2 Origen de la Fórmula de Black-Scholes

Para la valoración de opciones europeas en tiempo continuo, Fisher Black, Myron Scholes y Robert Merton partieron de la creación de una posición cubierta. Dicha posición estaría formada por la venta de opciones y la compra del subyacente. Definieron el número de opciones que deberían emitir por cada opción comprada como:  $1/C_0$ . Dicha situación de cobertura es mantenida a lo largo del tiempo y de manera constante (Black & Scholes, 1973).

Asumieron que el precio del activo subyacente seguía un camino aleatorio que se podía definir como (Hull, Options, Futures, and other Derivatives, 2012):

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz$$

Donde:

$$z \sim N(0, \Delta t)$$

Teniendo esto en cuenta y en ausencia de oportunidades de arbitraje, la posición cubierta tendrá una rentabilidad cierta, que debe coincidir con el tipo de interés sin riesgo (Black & Scholes, 1973). Desarrollando los supuestos anteriores, llegaron a la siguiente ecuación diferencial (Hull, Options, Futures, and other Derivatives, 2012) para la valoración de la call europea:

$$dc = \left( \frac{\partial c}{\partial S} \mu S + \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial c}{\partial S} \sigma^2 S^2 dz$$

Con todo lo anterior, concluyeron en las famosas fórmulas de valoración:

$$C_t = S_t N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2)$$

$$P_t = K e^{-r(T-t)} N(-d_2) - S_t N(-d_1)$$

Donde:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} = d_1 - \sigma\sqrt{(T-t)}$$

$$N(x) = P[Z \leq x] \rightarrow Z \sim N(0,1)$$

$$P[Z \leq x] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

### 3.3.1.3 Aproximación a la Fórmula de Black-Scholes

Hoy en día ya se han demostrado múltiples vías a través de las cuales se puede llegar a la fórmula de valoración del modelo de Black-Scholes. Debido a que en puntos anteriores hemos desarrollado el modelo binomial, a lo largo de este punto vamos a explicar cómo, tomando el límite del modelo binomial podemos llevarlo a tiempo continuo, llegando a la fórmula de Black-Scholes.

Recordando las conclusiones a las que llegamos presentando el modelo binomial para la valoración de la call:

$$C_t = S_t B_1(a) - K e^{-r(T-t)} B_2(a)$$

Donde:

$$B_1(a) = P[X > a] \rightarrow X \sim B(n, \hat{p}')$$

$$\hat{p}' = \frac{\hat{p}u}{\hat{p}u + (1 - \hat{p})d} = \frac{e^{r\Delta t} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}} e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} e^{-r\Delta t}$$

$$(1 - \hat{p}') = \frac{(1 - \hat{p})d}{\hat{p}u + (1 - \hat{p})d} = \frac{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{r\Delta t}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}} e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} e^{-r\Delta t}$$

$$B_2(a) = P[X > \alpha] \rightarrow X \sim B(n, \hat{p})$$

$$\hat{p} = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} = \frac{e^{r\Delta t} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}$$

$$(1 - \hat{p}) = \frac{u - e^{r\Delta t}}{u - d} = \frac{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{r\Delta t}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}$$

Tomar el límite del modelo binomial significa que el valor de  $n$ , el número de nodos de los que está compuesta la valoración en el modelo binomial, tiende a infinito. De este modo, las distribuciones binomiales que conforman la fórmula de valoración se aproximarán a distribuciones normales en tiempo continuo. Para comenzar, se tomará la segunda distribución binomial, ya que tiene las probabilidades neutrales al riesgo más sencillas:

$$X \sim B_2(n, \hat{p}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X \sim N_2[\mu = n\hat{p}; \sigma = n\hat{p}(1 - \hat{p})]$$

Teniendo en cuenta que la distribución normal estandarizada se define como:  $Z \sim N(0,1)$ . La probabilidad del modelo asociada a esta distribución quedaría, normalizándola:

$$\begin{aligned} P[X > \alpha] &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} P\left[Z > \frac{\alpha - n\hat{p}}{\sqrt{n\hat{p}(1 - \hat{p})}}\right] = 1 - P\left[Z < \frac{\alpha - n\hat{p}}{\sqrt{n\hat{p}(1 - \hat{p})}}\right] = \\ &= 1 - N\left(\frac{\alpha - n\hat{p}}{\sqrt{n\hat{p}(1 - \hat{p})}}\right) = N\left(\frac{n\hat{p} - \alpha}{\sqrt{n\hat{p}(1 - \hat{p})}}\right) \end{aligned}$$

Sustituyendo en la probabilidad anterior el valor de  $\alpha$  y calculando el límite<sup>11</sup> cuando  $n$  tiende a infinito de la expresión resultante; obtenemos la distribución de probabilidad que en el modelo de Black- Scholes denominamos  $N(d_2)$ :

---

11 En el Anexo IV.a: Límite de la Distribución  $X \sim B_2(n, \hat{p})$  se puede ver más detalladamente la resolución de dicho límite.

$$\begin{aligned}
N\left(\frac{n\hat{p} - \alpha}{\sqrt{n\hat{p}(1-\hat{p})}}\right) &\stackrel{\alpha = \frac{n}{2} - \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)}{2\sigma\sqrt{\frac{(T-t)}{n}}}}{\longrightarrow} N\left(\frac{n\hat{p} - \frac{n}{2} - \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)}{2\sigma\sqrt{\frac{(T-t)}{n}}}}{\sqrt{n\hat{p}(1-\hat{p})}}\right) = \\
&= N\left(\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)}{2\sigma\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})(T-t)}} + \frac{\sqrt{n}\left(\hat{p} - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}\right) \\
&\stackrel{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)}{2\sigma\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})(T-t)}} + \frac{\sqrt{n}\left(\hat{p} - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}} = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}}{\longrightarrow} N\left(\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right)
\end{aligned}$$

Ahora, tomando la primera distribución binomial de la fórmula:

$$X \sim B_1(n, \hat{p}') \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X \sim N_1[\mu = n\hat{p}' ; \sigma = n\hat{p}'(1-\hat{p}')]$$

Teniendo en cuenta que la distribución normal estandarizada se define como:  $Z \sim N(0,1)$ . La probabilidad del modelo asociada a esta distribución quedaría, normalizándola:

$$\begin{aligned}
P[X > \alpha] &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} P\left[Z > \frac{\alpha - n\hat{p}'}{\sqrt{n\hat{p}'(1-\hat{p}')}}\right] = 1 - P\left[Z < \frac{\alpha - n\hat{p}'}{\sqrt{n\hat{p}'(1-\hat{p}')}}\right] = \\
&= 1 - N\left(\frac{\alpha - n\hat{p}'}{\sqrt{n\hat{p}'(1-\hat{p}')}}\right) = N\left(\frac{n\hat{p}' - \alpha}{\sqrt{n\hat{p}'(1-\hat{p}')}}\right)
\end{aligned}$$

Sustituyendo en la probabilidad anterior el valor de  $\alpha$  y calculando el límite<sup>12</sup> cuando  $n$  tiende a infinito de la expresión resultante; obtenemos la distribución de probabilidad que en el modelo de Black- Scholes denominamos  $N(d_1)$ :

---

12 En el Anexo IV.b: Límite de la Distribución  $X \sim B_1(n, \hat{p}')$  se puede ver más detalladamente la resolución de dicho límite.

$$\begin{aligned}
& N\left(\frac{n\hat{p}' - \alpha}{\sqrt{n\hat{p}'(1-\hat{p}')}}\right) \xrightarrow{\alpha = \frac{n}{2} - \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)}{2\sigma\sqrt{\frac{(T-t)}{n}}}} N\left(\frac{n\hat{p}' - \frac{n}{2} - \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)}{2\sigma\sqrt{\frac{(T-t)}{n}}}}{\sqrt{n\hat{p}'(1-\hat{p}')}}\right) = \\
& = N\left(\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)}{2\sigma\sqrt{\hat{p}'(1-\hat{p}')(T-t)}} + \frac{\sqrt{n}\left(\hat{p}' - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\hat{p}'(1-\hat{p}')}}\right) \\
& \xrightarrow{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)}{2\sigma\sqrt{\hat{p}'(1-\hat{p}')(T-t)}} + \frac{\sqrt{n}\left(\hat{p}' - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\hat{p}'(1-\hat{p}')}} = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}} N\left(\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right)
\end{aligned}$$

De esta forma, se concluye en la fórmula de valoración de Black-Scholes para la opción call:

$$\begin{aligned}
C_t &= S_t N\left(\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right) - Ke^{-r(T-t)} N\left(\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right) = \\
& = S_t N(d_1) - Ke^{-r(T-t)} N(d_2)
\end{aligned}$$

Para la valoración de opciones put el desarrollo es muy parecido<sup>13</sup> y concluye en la fórmula de valoración:

$$\begin{aligned}
P_t &= Ke^{-r(T-t)} N\left(-\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right) - S_t N\left(-\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right) = \\
& = Ke^{-r(T-t)} N(-d_2) - S_t N(-d_1)
\end{aligned}$$

### 3.3.1.4 Valores de la Prima

El valor de la prima de una opción puede descomponerse en dos grandes factores:

- Valor intrínseco: es la parte del valor de la prima que se puede atribuir a la diferencia entre el precio al que se tiene el derecho (el precio de ejercicio) y el precio del subyacente.

<sup>13</sup> En el Anexo V: Desarrollo de la Aproximación al Modelo de Black-Scholes con Opciones Put se puede encontrar el desarrollo de dicha aproximación.

- Valor temporal: es la parte del valor de la prima que se atribuye al tiempo durante el que se dispone del derecho de compra/venta.

La relación matemática entre estos dos factores se puede expresar como:

$$\text{Valor Temporal} = \text{Prima} - \text{Valor Intrínseco}$$

$$\text{Valor Temporal}_{\text{call}} = C_t - \max\{S_t - K; 0\}$$

$$\text{Valor Temporal}_{\text{put}} = P_t - \max\{K - S_t; 0\}$$

Teniendo esto en cuenta, se puede apreciar como la prima de opciones out-of-the-money conforman todo su valor en temporal. En la siguiente tabla se pueden apreciar estas diferencias, así como el desglose del valor de la prima.

Tabla 3-1: Componentes de la Prima

Prima	Call		Precio de Ejercicio	Put		
	Valor Temporal	Valor Intrínseco		Prima	Valor Temporal	Valor Intrínseco
10,18	0,18	10,00	30	0,03	0,03	0,00
8,27	0,27	8,00	32	0,11	0,11	0,00
6,47	0,47	6,00	34	0,30	0,30	0,00
4,84	0,84	4,00	36	0,67	0,67	0,00
3,46	1,46	2,00	38	1,27	1,27	0,00
2,35	2,35	0,00	40	2,15	2,15	0,00
1,52	1,52	0,00	42	3,31	1,31	2,00
0,94	0,94	0,00	44	4,72	0,72	4,00
0,55	0,55	0,00	46	6,32	0,32	6,00
0,31	0,31	0,00	48	8,07	0,07	8,00
0,17	0,17	0,00	50	9,92	-0,08	10,00

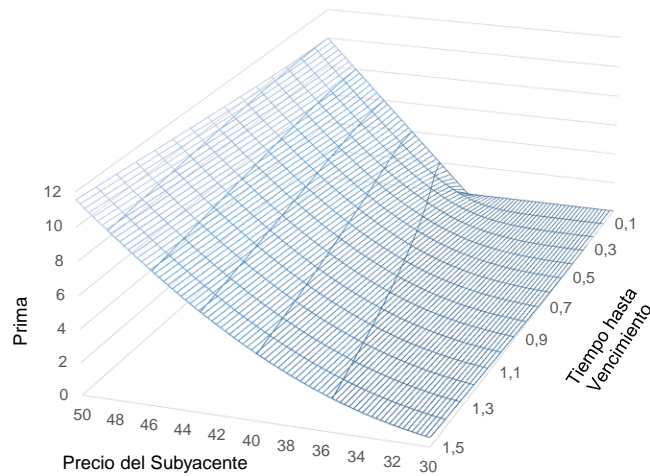
Fuente: Elaboración propia

El valor temporal viene determinado por factores como el tipo de interés sin riesgo, la volatilidad del subyacente y, como no podía ser de otra manera, el tiempo hasta vencimiento de la opción. En los siguientes puntos se muestra como varía el valor de la prima ante cambios en dichos componentes.

#### i. La Prima a lo Largo del Tiempo

Cuanto mayor es el tiempo hasta vencimiento mayor es el valor temporal de la prima de la opción y, por tanto, mayor es el valor de la prima. Esto se debe a que cuanto más tiempo exista hasta vencimiento, más posibilidad hay de que la opción se encuentre más in-the-money a vencimiento, es decir, de que el derecho se pueda ejercer con mayores beneficios.

Gráfica 3-4: Prima de la Call a lo Largo del Tiempo



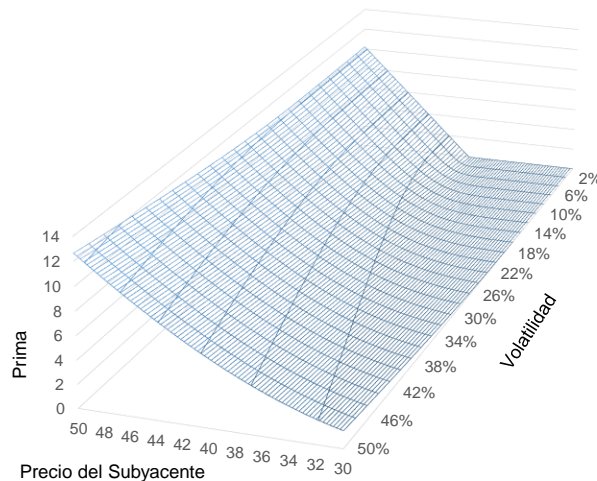
Fuente: Elaboración propia

## ii. La Prima en Relación con la Volatilidad

La volatilidad tiene una relación directamente proporcional con el valor temporal de la opción. A mayor volatilidad, mayor valor temporal de la opción y, por tanto, mayor valor de la prima.

Una mayor volatilidad implica que el precio del subyacente puede dar lugar a movimientos mayores. Por ello, en el mismo espacio de tiempo, la opción puede llegar a dar mayores beneficios, entrar más in-the-money.

Gráfica 3-5: Prima de la Call en Relación con la Volatilidad



Fuente: Elaboración propia

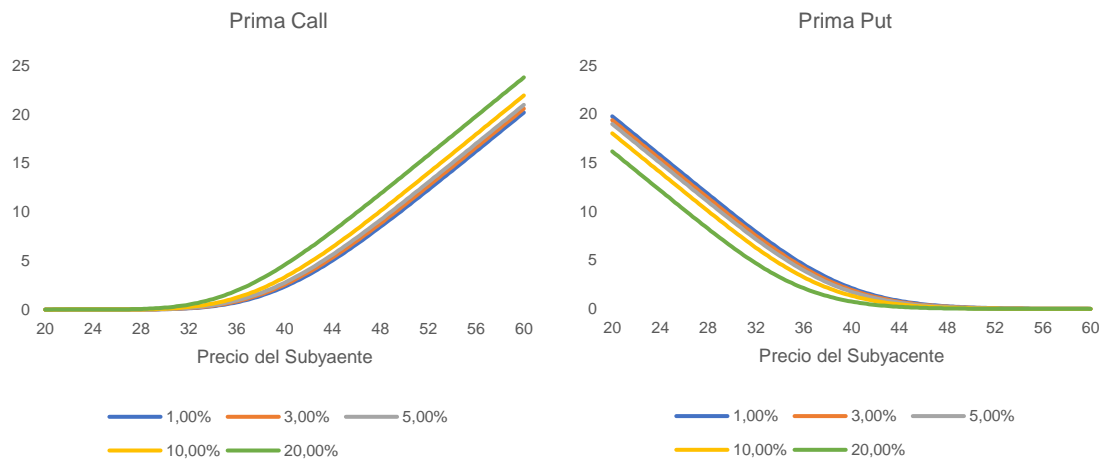
## iii. La Prima en Relación con el Tipo de Interés sin Riesgo

Como vimos anteriormente en la valoración neutral al riesgo, un mayor tipo de interés daba lugar a un mayor precio futuro esperado para el subyacente. Debido a que el precio futuro esperado es mayor, existe más posibilidad de que la opción call se encuentre in-the-money en el futuro. Por ello, el valor temporal



de la opción call es mayor a medida que el tipo de interés sin riesgo aumenta. Esto ocurre de manera inversa con las opciones put, en éstas, a mayor tipo de interés, menor es su valor temporal y, por tanto, su prima.

Gráfica 3-6: La Prima en Relación con el Tipo de Interés sin Riesgo



Fuente: Elaboración propia

## 4 Las Griegas

El valor de una posición en opciones, como vimos en el punto anterior, depende de la volatilidad del activo subyacente, del tipo de interés sin riesgo y del tiempo hasta vencimiento, además del precio al contado del propio activo y del precio de ejercicio de la opción. De esta forma, tomando una posición en opciones, estamos exponiéndonos, en mayor o menor grado, en todos los factores que determinan su valor (Hull, Options, Futures, and other Derivatives, 2012).

Las denominadas “Griegas” son las letras con las que identifican las exposiciones a los diferentes factores de riesgo de una posición en opciones. Se denominan así porque cada una viene representada por una letra del alfabeto griego. Estas miden la sensibilidad del precio de la opción a cambios en los parámetros utilizados para su valoración (Yu & Xie, 2013). Además de medir el riesgo, como comentaremos en el punto siguiente, ayudan a gestionar dichas exposiciones.

### 4.1 Sensibilidad al Precio del Subyacente y al Tiempo

En este punto se van a presentar las griegas: delta ( $\Delta$ ), sensibilidad al precio al contado del subyacente; gamma ( $\Gamma$ ), sensibilidad de delta al precio al contado del subyacente; y theta ( $\Theta$ ), sensibilidad al paso del tiempo. Posteriormente se presentarán las otras dos griegas, relacionadas más directamente con el objetivo principal de este texto: vega ( $\nu$ ), sensibilidad a la volatilidad; y rho ( $\rho$ ), sensibilidad al tipo de interés sin riesgo.

#### 4.1.1 Sensibilidad al Precio del Subyacente (Delta $\Delta$ )

##### 4.1.1.1 Concepto de Delta

Delta es la sensibilidad del valor de una opción ante cambios de precio del activo subyacente. Desde el punto de vista matemático, delta es para las opciones lo que la duración es para la renta fija. El valor de delta, además, puede ser analizado desde diferentes puntos de vista (Passarelli, 2012).

En primer lugar, refleja la tasa de variación de la prima de la opción en relación con la variación del precio del activo subyacente. Cuando el precio del activo subyacente varía de precio en una unidad, el valor la prima de la opción

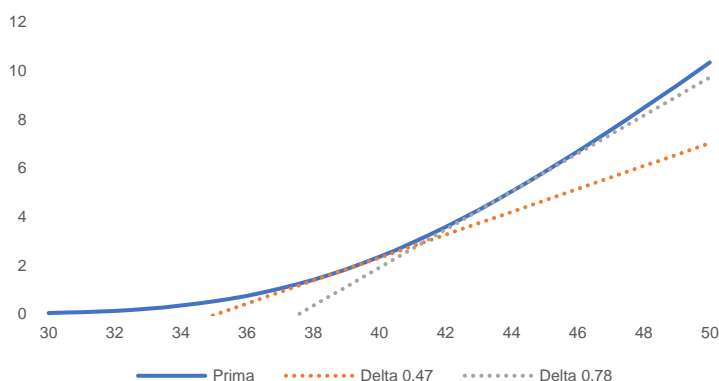
varía en delta unidades. Por tanto, las opciones call tendrán siempre delta positivo, ya que la relación entre su prima y el valor del subyacente es directa. Cuando sube el precio del subyacente, sube el valor intrínseco de la opción. Por el contrario, las opciones put cuentan con deltas negativos.

$$(S_{t+1} - S_t)\Delta \approx (C_{t+1} - C_t)$$

$$(S_{t+1} - S_t)\Delta \approx (P_{t+1} - P_t)$$

En segundo lugar, matemáticamente es la primera derivada de la fórmula de valoración en función del precio del subyacente, como se mostrará posteriormente en su cálculo. Por tanto, muestra la pendiente en un punto determinado del gráfico que relaciona la prima con el precio del subyacente, como se muestra a continuación.

Gráfica 4-1: Delta como la Pendiente de la Prima de la Opción



Fuente: Elaboración propia

En tercer lugar, representa la exposición equivalente al activo subyacente que tiene la prima de la opción, es decir, una posición en opciones equivale a delta posiciones en el subyacente de dichas opciones. Esta propiedad será la clave principal de la delta-cobertura que abordaremos más adelante.

Por último, en la práctica se considera el valor absoluto de delta como la probabilidad de que la opción se encuentre in-the-money cuando llegue el vencimiento, es decir, delta es la probabilidad de que dicha opción vaya a ser ejercida. Teniendo esto en cuenta, se puede afirmar que:

- El valor  $|\Delta|$  siempre se encontrará entre 0 y 1:  $0 < |\Delta| < 1$ .
- El valor absoluto de la delta de una opción call será complementario al valor absoluto de la delta de una opción put sobre el mismo

subyacente, con el mismo precio de ejercicio y con el mismo vencimiento:  $1 - |\Delta_{call}| = |\Delta_{put}|$ .

Delta es la derivada primera de la fórmula de Black-Scholes respecto al precio del activo subyacente, de tal modo que matemáticamente<sup>14</sup>:

$$\Delta_{call} = \Delta_c = \frac{\partial C}{\partial S_t} = N(d_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$\Delta_{put} = \Delta_p = \frac{\partial P}{\partial S_t} = -N(-d_1) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

#### 4.1.1.2 Valores de Delta

Delta no es un parámetro fijo en la valoración de opciones, sino que, a medida que cambian los inputs de la valoración, cambia la delta. En los puntos posteriores se estudiará como se relaciona este parámetro con los distintos factores que determinan el valor de la prima.

##### i. Delta en Función del Grado de Monetización

Por regla general, las opciones in-the-money tienen una delta en valor absoluto superior a 0,5 y las out-of-the-money inferior a 0,5. Esta regla no siempre se cumple debido al efecto del tipo de interés sin riesgo a lo largo del tiempo hasta vencimiento. Porque, recordemos que el valor futuro esperado del subyacente es su precio al contado capitalizado al tipo de interés sin riesgo, tal y como quedó expuesto en el punto de valoración de opciones. Por ello, una opción call at-the-money tendrá una delta mayor que su correspondiente put, teniendo en cuenta un tipo de interés sin riesgo positivo.

---

14 En el Anexo VI.a: Delta ( $\Delta$ ) se encuentra el desarrollo de la derivada que concluye en la fórmula de delta.

Tabla 4-1: Delta en Relación con el Grado de Monetización

Call		Precio de Ejercicio	Put	
Prima	Delta		Prima	Delta
10,18	0,9838	30	0,03	-0,0162
8,27	0,9539	32	0,11	-0,0461
6,47	0,8953	34	0,30	-0,1047
4,84	0,8026	36	0,67	-0,1974
3,46	0,6804	38	1,27	-0,3196
2,35	0,5422	40	2,15	-0,4578
1,52	0,4056	42	3,31	-0,5944
0,94	0,2851	44	4,72	-0,7149
0,55	0,1888	46	6,32	-0,8112
0,31	0,1184	48	8,07	-0,8816
0,17	0,0705	50	9,92	-0,9295

Fuente: Elaboración propia

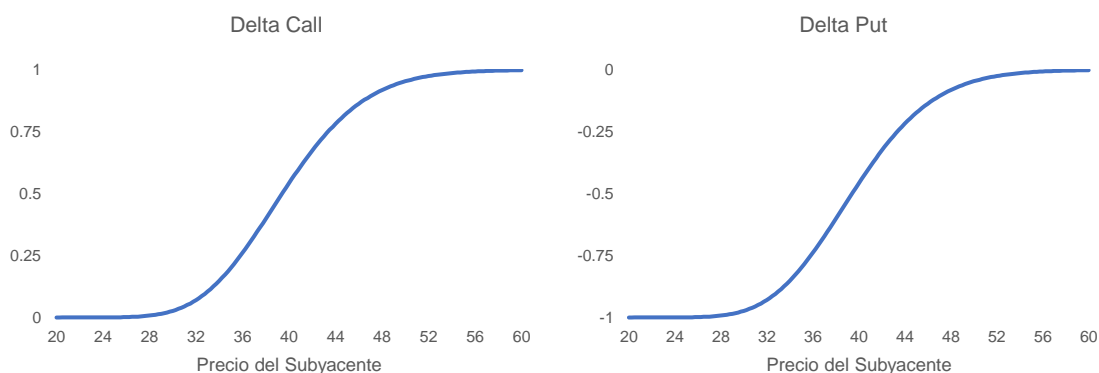
Según lo explicado anteriormente en las probabilidades neutrales al riesgo, podemos concluir que un valor delta igual a 0,5 lo tendrán opciones que cumplan la condición:

$$K = S_0 e^{\left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}$$

En este punto la opción tiene las mismas probabilidades de acabar in-the-money o out-of-the-money.

Además, cuanto más in-the-money esté la opción, más cercano a 1 estará su delta, ya que más probable será que se ejerza el derecho de compra/venta. Por el contrario, cuanto más out-of-the-money esté la opción, más cercano a cero será su delta.

Gráfica 4-2: Delta en Función del Precio del Subyacente

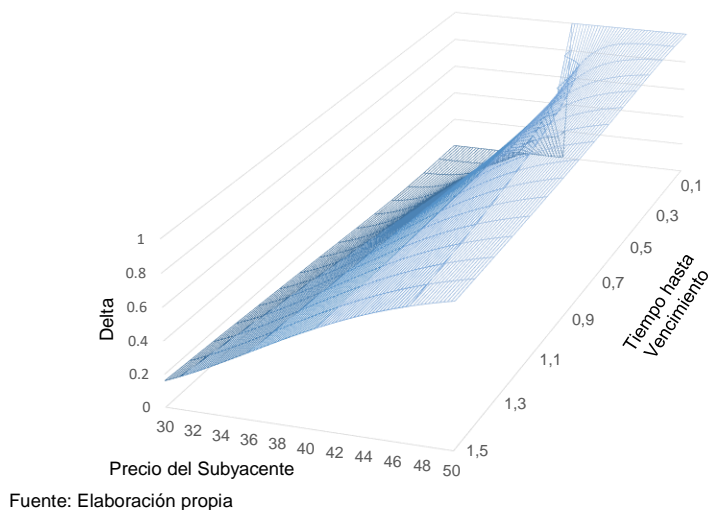


Fuente: Elaboración propia

## ii. Delta a lo Largo del Tiempo

Conforme se acerca el vencimiento, aumenta la probabilidad de que las opciones sean ejercidas si están in-the-money y se reduce la probabilidad de las out-of-the-money. Como expusimos en las suposiciones del modelo de Black-Scholes, el subyacente sigue un movimiento browniano. Por tanto, la relación entre el tiempo y la variabilidad del precio futuro es directamente proporcional. Además, el tipo sin riesgo dispondrá de menos tiempo para su efecto (Cottle, 2005).

Gráfica 4-3: Delta de la Call a lo Largo del Tiempo

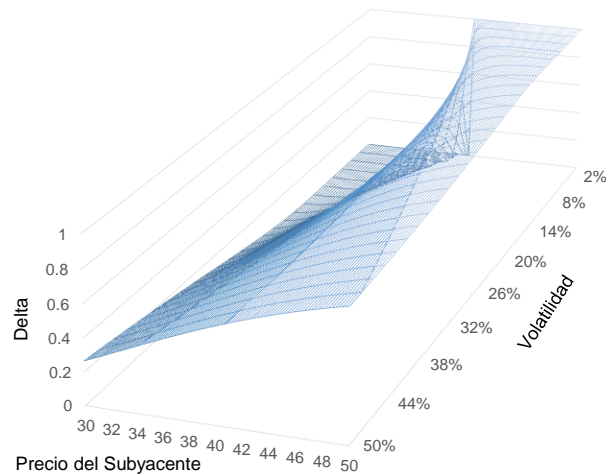


Como se verá posteriormente, la pendiente de delta aumenta en las opciones at-the-money con el paso del tiempo. El precio de una opción at-the-money se vuelve más volátil conforme se acerca el vencimiento.

## iii. Delta en Relación con la Volatilidad

Una mayor volatilidad implica mayores movimientos del precio del subyacente en cortos periodos de tiempo. Por tanto, opciones in-the-money tienen deltas menores con alta volatilidad, ya que es menor la probabilidad de que se ejercite el derecho a vencimiento cuando los movimientos del subyacente pueden ser mayores (Passarelli, 2012). De modo contrario sucede con opciones out-of-the-money, estas tienen mayores deltas con volatilidades altas.

Gráfica 4-4: Delta de la Call en Relación con la Volatilidad



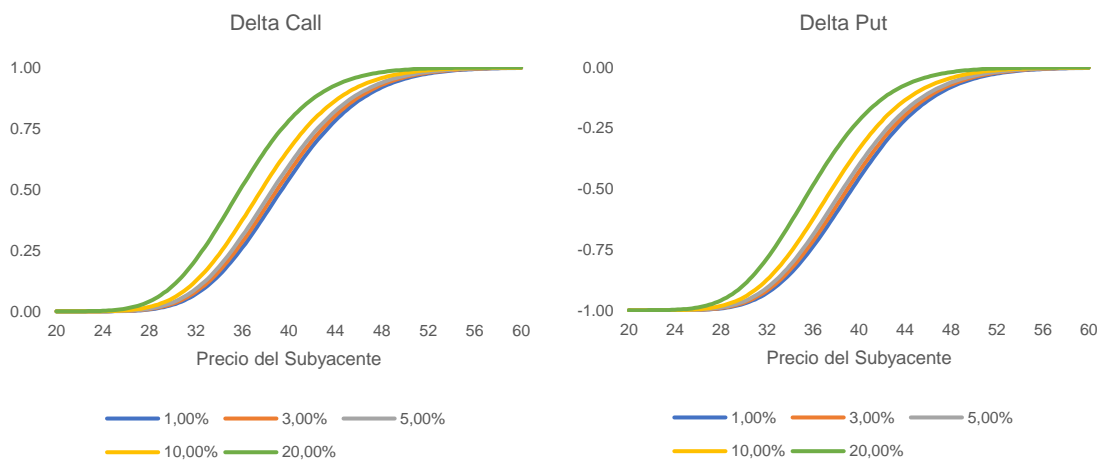
Fuente: Elaboración propia

Existe una mayor incertidumbre cuando hay más volatilidad. Esto hace que con mayor volatilidad las opciones se consoliden menos in-the-money o out-of-the-money.

iv. Delta en Relación con el Tipo de Interés sin Riesgo

Un mayor tipo de interés sin riesgo implicará un mayor valor del activo subyacente a vencimiento. Por tanto, una opción call ante incrementos del tipo de interés tiene más probabilidades de ser ejercitada, lo que implica una delta mayor. De forma inversa ocurre con las opciones put.

Gráfica 4-5: Delta en Relación con el Tipo de Interés sin Riesgo



Fuente: Elaboración propia

Se puede concluir que ante variaciones del tipo de interés sin riesgo se produce un desplazamiento de la curva de delta. Con tipos de interés mayores se produce un desplazamiento de la curva que permite que delta con valor de 0,5 se alcance con un precio del subyacente más bajo.

## 4.1.2 Sensibilidad a los Cambios de Precio del Subyacente (Gamma $\Gamma$ )

### 4.1.2.1 Concepto de Gamma

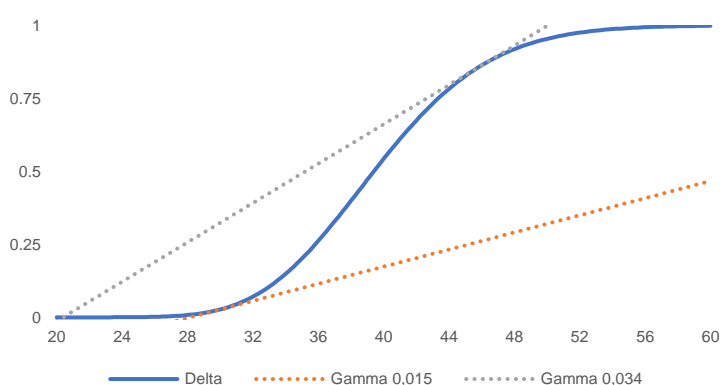
Gamma representa la sensibilidad de delta ante cambios en el precio del subyacente. Cuando el precio del activo subyacente varía en una unidad, la delta de la opción varía en gamma unidades. A su vez gamma también cambia. No solo delta cambia a una tasa determinada, sino que conforme delta varía, su tasa, gamma, también lo hace (Passarelli, 2012).

$$(S_{t+1} - S_t)\Gamma \approx (\Delta_{t+1} - \Delta_t)$$

Enlazando con lo anterior, anteriormente explicamos como una posición en opciones equivalía a delta posiciones en el activo subyacente. Por ello, gamma puede ser interpretado como la variación de esa posición en el activo ante variaciones del precio de ese activo.

Matemáticamente es la segunda derivada de la fórmula de valoración de opciones en función del precio del activo. Es, por tanto, la primera derivada de delta. Muestra la pendiente de la función que relaciona delta de una opción y el precio del activo subyacente. Debido a ello, se puede concluir que gamma va a ser un número siempre positivo, puesto que delta siempre tiene una pendiente positiva.

Gráfica 4-6: Gamma como la Pendiente de Delta



Fuente: Elaboración propia

Cuando hablamos de delta dijimos que ésta era para las opciones lo que la duración es para los bonos; de manera similar gamma es para las opciones lo que la convexidad es para la renta fija. De hecho, “convexidad” o “curvatura” es otro de los nombres que puede recibir esta griega (Passarelli, 2012). Por lo que,



igual que en renta fija, una mejor aproximación que la presentada en el punto de delta, sobre la variación de la prima es:

$$(C_{t+1} - C_t) \approx (S_{t+1} - S_t)\Delta + \frac{1}{2}(S_{t+1} - S_t)^2\Gamma$$

$$(P_{t+1} - P_t) \approx (S_{t+1} - S_t)\Delta + \frac{1}{2}(S_{t+1} - S_t)^2\Gamma$$

Como se puede comprobar en la fórmula anterior, siendo las variaciones del subyacente al alza o a la baja, a la hora de interactuar con gamma siempre están elevadas al cuadrado. Es decir, sean variaciones al alza o a la baja, una gamma positiva siempre va a recoger el impacto positivo que generan esas variaciones.

Gamma es la derivada segunda de la fórmula de Black-Scholes respecto al precio del subyacente, o la derivada primera de delta respecto al precio del subyacente. Tal y como se expone a continuación, la gamma es la misma tanto para la call como para la put<sup>15</sup>:

$$\Gamma = \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} = \frac{\partial^2 P}{\partial S_t^2} = \frac{\partial \Delta}{\partial S_t} = n(-d_1) \frac{1}{S_t \sigma}$$

Siendo:

$$n(x) = \frac{\partial N(x)}{\partial x} = \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

#### 4.1.2.2 Valores de Gamma

##### i. Gamma en Función del Grado de Monetización

Opciones que están muy in-the-money o muy out-of-the-money, es decir, que tienen  $|\Delta|$  cercanos a uno o a cero, tienen gammas muy bajas. No hay variación del precio de la opción que no se pueda atribuir a delta. Gamma toma importancia en opciones at-the-money.

---

<sup>15</sup> En el Anexo VI.b: Gamma ( $\Gamma$ ) se encuentra el desarrollo de la derivada que concluye en la fórmula de gamma.

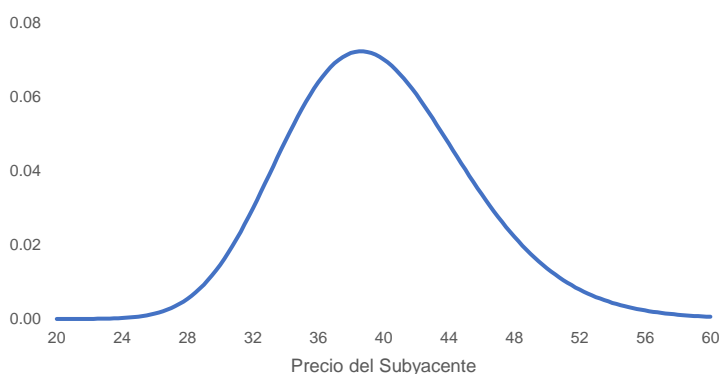
Tabla 4-2: Gamma en Relación con el Grado de Monetización

Call		Precio de Ejercicio	Put		Gamma
Prima	Delta		Prima	Delta	
10,18	0,9838	30	0,03	-0,0162	0,0071
8,27	0,9539	32	0,11	-0,0461	0,0171
6,47	0,8953	34	0,30	-0,1047	0,0321
4,84	0,8026	36	0,67	-0,1974	0,0491
3,46	0,6804	38	1,27	-0,3196	0,0632
2,35	0,5422	40	2,15	-0,4578	0,0701
1,52	0,4056	42	3,31	-0,5944	0,0685
0,94	0,2851	44	4,72	-0,7149	0,0600
0,55	0,1888	46	6,32	-0,8112	0,0478
0,31	0,1184	48	8,07	-0,8816	0,0350
0,17	0,0705	50	9,92	-0,9295	0,0239

Fuente: Elaboración propia

Teniendo esto en cuenta, gamma puede ser interpretada como exposición a las variaciones de precio del activo subyacente. De las opciones muy in-the-money o muy out-of-the-money se podría decir vulgarmente que “ya tienen todo el pescado vendido”, por lo que las variaciones del precio del activo subyacente tendrían que ser muy amplias para que se ejecutasen o dejarasen de ejecutar las correspondientes opciones. Dicho de otra manera, las variaciones del valor de la prima, debidas a variaciones del precio del subyacente, ya están cubiertas por su delta. Mientras que, el hecho de que se ejecute el derecho o no en opciones at-the-money depende mucho más de las variaciones del precio del subyacente, está más expuesto a ellas.

Gráfica 4-7: Gamma en Función del Precio del Subyacente

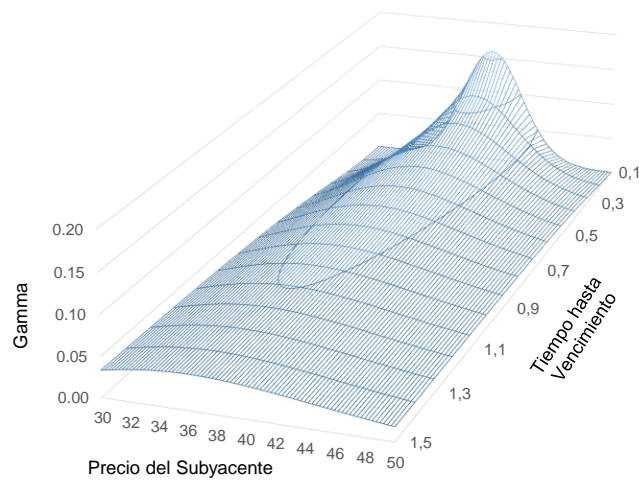


Fuente: Elaboración propia

## ii. Gamma a lo Largo del Tiempo

El paso del tiempo, como dijimos anteriormente, hace que la volatilidad de las opciones at-the-money sea mucho mayor, ya que pequeñas variaciones de precio pueden dejar a la opción sin derecho a ser ejercida. Su valor es más sensible a las variaciones del subyacente. Opciones at-the-money están más expuestas a los cambios en el precio del subyacente. Estas opciones tienen, por tanto, una gamma más alta con el paso del tiempo.

Gráfica 4-8: Gamma a lo Largo del Tiempo



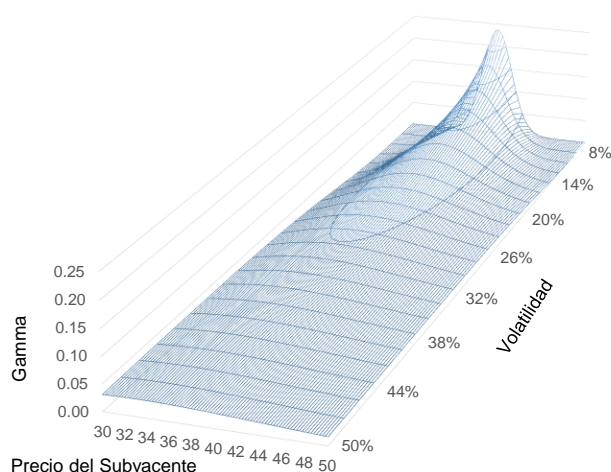
Fuente: Elaboración propia

En cambio, las opciones in-the-money y out-of-the-money, con el paso del tiempo, van obteniendo una gamma menor, ya que se van asentando en esa posición. Es decir, con el paso del tiempo su delta se vuelve más cercana a uno o a cero y el valor de su prima es menos sensible a variaciones en el precio del subyacente que no estén ya cubiertas por la delta.

## iii. Gamma en Relación con la Volatilidad

Esta relación es muy similar a lo que sucede con el tiempo. Al final, mayores volatilidades implican mayores movimientos de precios en menores periodos de tiempo. Por tanto, en opciones out-of-the-money e in-the-money, incrementa la gamma a medida que aumenta la volatilidad. En opciones at-the-money aumenta la gamma conforme se reduce la volatilidad.

Gráfica 4-9: Gamma en Relación con la Volatilidad

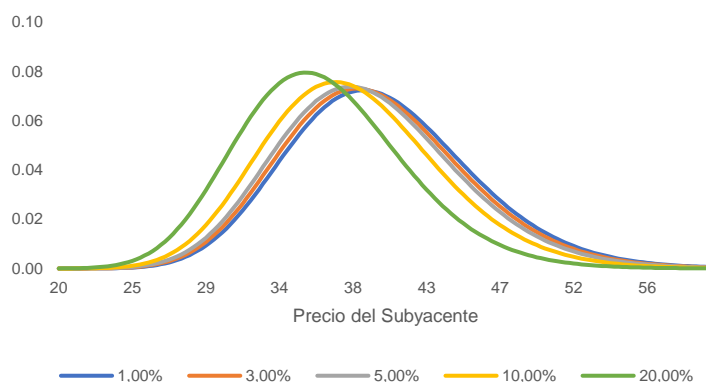


Fuente: Elaboración propia

#### iv. Gamma en Relación con el Tipo de Interés sin Riesgo

Ante subidas de tipo de interés, las opciones cuyo precio de ejercicio es inferior al precio del subyacente se vuelven menos sensibles a movimientos de éste. Es decir, dichas opciones tienen una gamma inferior. Además, las opciones se vuelven más sensibles a movimientos del subyacente ante precios más bajos que el precio de ejercicio. Se puede concluir que se produce un ligero desplazamiento de la curva que representa gamma.

Gráfica 4-10: Gamma en Relación con el Tipo de Interés sin Riesgo



Fuente: Elaboración propia

### 4.1.3 Sensibilidad al Tiempo (Theta $\theta$ )

Como regla general, a la hora de valorar una opción, cuanto mayor sea su vencimiento mayor será su prima, ya que ésta cuenta con más tiempo para que el precio del subyacente se mueva (Passarelli, 2012). Por suerte o por desgracia, el tiempo pasa para todos igual, y con él se va parte de esta característica de las

opciones. Podríamos decir que las opciones se erosionan con el tiempo, y esa erosión es lo que mide theta.

#### 4.1.3.1 Concepto de Theta

Theta es la derivada primera de la fórmula de Black-Scholes respecto al tiempo hasta vencimiento<sup>16</sup>:

$$\Theta_{call} = \Theta_c = -\frac{\partial C}{\partial(T-t)} = -rKe^{-r(T-t)}N(d_2) - \frac{\sigma}{2\sqrt{(T-t)}}S_t n(d_1)$$

$$\Theta_{put} = \Theta_p = -\frac{\partial P}{\partial(T-t)} = rKe^{-r(T-t)}N(-d_2) - \frac{\sigma}{2\sqrt{(T-t)}}S_t n(d_1)$$

Esta griega representa la sensibilidad de la prima de una opción al paso del tiempo. Es la tasa de variación a la que cambia el precio de una opción ante variaciones en el tiempo. Considerando ceteris paribus, con el paso de un año, la prima se reduce en theta unidades. En ocasiones, para trabajar con esta griega, se suele dividir entre 252<sup>17</sup>, así se obtendría la pérdida de valor de la opción ante el paso de un día. Esto se debe a que en pocas ocasiones se adquieren opciones con vencimientos a muy largo plazo. Para este trabajo utilizaremos siempre una theta diaria, por lo que su cálculo quedaría como:

$$\Theta_{call\ diaria} = \frac{-\frac{\partial C}{\partial(T-t)}}{252} = \frac{-rKe^{-r(T-t)}N(d_2) - \frac{\sigma}{2\sqrt{(T-t)}}S_t n(d_1)}{252}$$

$$\Theta_{put\ diaria} = \frac{-\frac{\partial P}{\partial(T-t)}}{252} = \frac{rKe^{-r(T-t)}N(-d_2) - \frac{\sigma}{2\sqrt{(T-t)}}S_t n(d_1)}{252}$$

Theta, por regla general, es un valor negativo para las posiciones compradas, el derecho siempre pierde valor con el tiempo. En cambio, es un valor positivo para las posiciones vendidas.

#### 4.1.3.2 Valores de Theta

Recordando las ventajas que da una gamma positiva, se suele decir que “el precio de una gamma positiva es una theta negativa y viceversa” (Cottle, 2005).

<sup>16</sup> En el Anexo VI.c: Theta ( $\theta$ ) se encuentra el desarrollo de la derivada que concluye en la fórmula de theta.

<sup>17</sup> Se considera 252 el número de días laborables al año, ergo el número de días que en los que la opción cotiza en el mercado.

Las relaciones con el resto de las características de la opción son muy parecidas a gamma, pero a la inversa. Por ello, se presentarán brevemente y de manera gráfica.

i. Theta en Relación con el Grado de Monetización

De manera inversa a como ocurría en gamma, los valores más negativos de theta se encuentran en opciones at-the-money. Las opciones in-the-money y out-of-the-money tienen valores de theta más cercanos a cero, ya que el paso del tiempo tiene menos peso en la valoración de la opción.

Las opciones out-of-the-money, como ya expusimos anteriormente, tienen un valor intrínseco igual a cero y un valor temporal muy bajo, cercano a cero. Por tanto, tienen también una theta muy baja.

Tabla 4-3: Theta en Relación con el Grado de Monetización

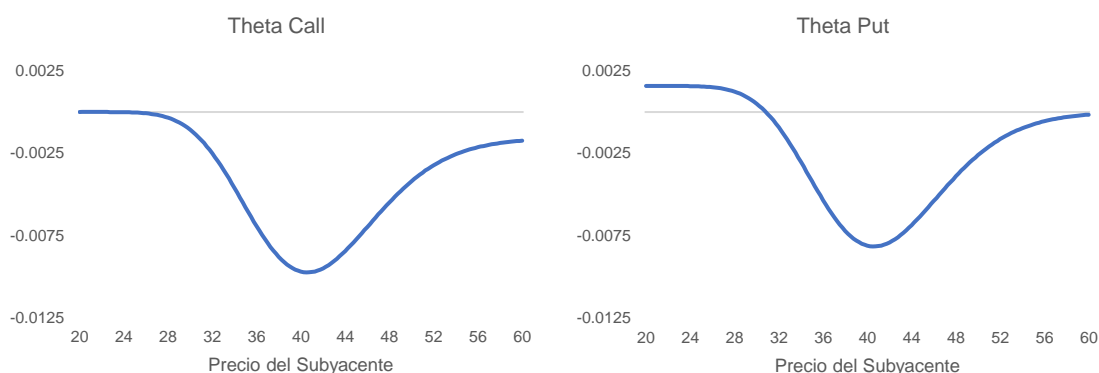
Call			Precio de Ejercicio	Put		
Prima	Delta	Theta		Prima	Delta	Theta
10,18	0,9838	-0,00206	30	0,03	-0,0162	-0,00088
8,27	0,9539	-0,00336	32	0,11	-0,0461	-0,00209
6,47	0,8953	-0,00524	34	0,30	-0,1047	-0,00390
4,84	0,8026	-0,00732	36	0,67	-0,1974	-0,00589
3,46	0,6804	-0,00897	38	1,27	-0,3196	-0,00747
2,35	0,5422	-0,00967	40	2,15	-0,4578	-0,00809
1,52	0,4056	-0,00929	42	3,31	-0,5944	-0,00763
0,94	0,2851	-0,00804	44	4,72	-0,7149	-0,00630
0,55	0,1888	-0,00635	46	6,32	-0,8112	-0,00453
0,31	0,1184	-0,00462	48	8,07	-0,8816	-0,00273
0,17	0,0705	-0,00314	50	9,92	-0,9295	-0,00116

Fuente: Elaboración propia

En el caso de las opciones call, las in-the-money tienen un valor de theta más negativo que las out-of-the-money, esto se debe a que tienen mayores valores descontados en el momento de la valoración. Su valor temporal es mayor. Con el paso del tiempo, estos valores serían descontados en menor medida y la parte negativa de la fórmula de valoración  $[-Ke^{-r(T-t)}N(d_2)]$ , parte más sensible al tiempo, aumentaría.

En el caso de las opciones put, las in-the-money pueden llegar a tener valores positivos de theta. Esto se debe a que la parte más sensible al tiempo en la fórmula de Black-Scholes cuenta con signo positivo  $[Ke^{-r(T-t)}N(-d_2)]$ .

Gráfica 4-11: Theta en Función del Precio del Subyacente

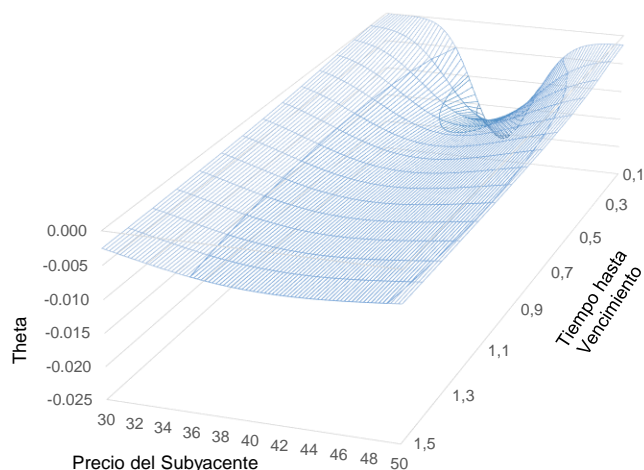


Fuente: Elaboración propia

### ii. Theta a lo Largo del Tiempo

A la inversa de lo que ocurría con gamma, opciones at-the-money tienen thetas mucho más negativas con el paso del tiempo. Las opciones presentan una mayor sensibilidad al tiempo conforme va quedando menos para su vencimiento.

Gráfica 4-12: Theta de la Call a lo Largo del Tiempo

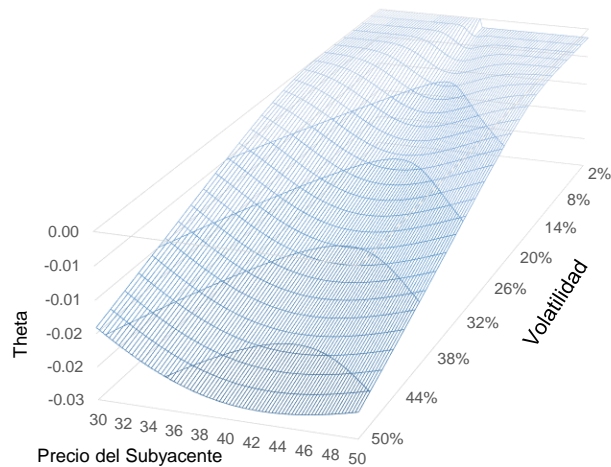


Fuente: Elaboración propia

### iii. Theta en Relación con la Volatilidad

Como se comentó anteriormente, una mayor volatilidad implica mayores movimientos de precios. Al contrario de como ocurría con gamma, ante la posibilidad de mayores movimientos de precios, la prima de la opción se vuelve más sensible al tiempo. Con mayores volatilidades la theta se vuelve más negativa independientemente del grado de monetización de la opción.

Gráfica 4-13: Theta de la Call en Relación con la Volatilidad

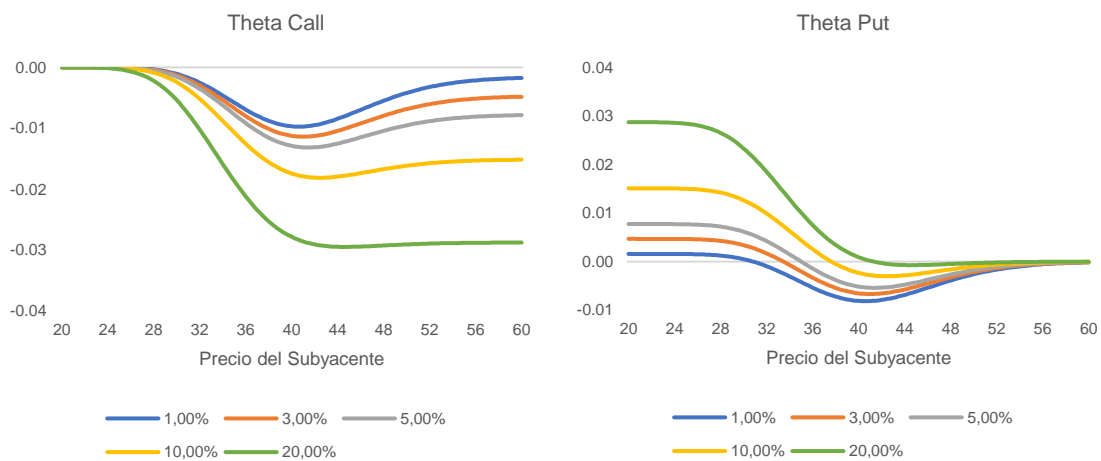


Fuente: Elaboración propia

iv. Theta en Relación con el Tipo de Interés sin Riesgo

Mayores tipos de interés implican mayores thetas en valor absoluto, el tiempo toma más relevancia con tipos de interés mayores. Retomando la comparación que hicimos en la introducción de esta griega, un alto tipo de interés deja un mayor valor temporal de una prima in-the-money que se erosionará con el tiempo.

Gráfica 4-14: Theta en Relación con el Tipo de Interés sin Riesgo



Fuente: Elaboración propia

## 4.2 Sensibilidad a la Volatilidad (Vega $v$ )

Vega es la primera griega en la cual nos centraremos posteriormente para realizar las coberturas. Esta mide la sensibilidad de la prima respecto a la volatilidad del subyacente. Representa la exposición que se tiene a la volatilidad asumiendo una posición en opciones.



Como expusimos anteriormente, la volatilidad es uno de los parámetros que se ha disparado en el contexto económico actual, alcanzando valores históricos en el índice VIX. De este modo, y como ilustraremos posteriormente, esta griega cobra importancia en contextos económicos como los que hemos vivido.

#### 4.2.1 Concepto de Vega

Esta griega representa la sensibilidad del valor de la prima de la opción respecto a la volatilidad del activo subyacente. Ante cambios de una unidad de volatilidad, la prima de la opción variará en vega unidades. Matemáticamente, vega es la derivada primera de la fórmula de Black-Scholes respecto a la volatilidad del subyacente<sup>18</sup>:

$$v = \frac{\partial C}{\partial \sigma} = \frac{\partial P}{\partial \sigma} = S_t n(d_1) \sqrt{(T - t)}$$

Lo más común para trabajar con esta griega es dividirla entre 100, de esta forma vega medirá las variaciones de la prima por cada 1% que varía la volatilidad del subyacente. Por comodidad, en este trabajo emplearemos vega con base 1%. De esta forma, la fórmula para el cálculo de vega queda definida como:

$$v_{en\ base\ 1\%} = \frac{\frac{\partial C}{\partial \sigma}}{100} = \frac{\frac{\partial P}{\partial \sigma}}{100} = \frac{S_t n(d_1) \sqrt{(T - t)}}{100}$$

Como se muestra en la fórmula anterior, el valor de vega es igual tanto para la opción call como para su correspondiente put. Además, su valor siempre es positivo ya que tiene una relación directa con el valor de la prima.

#### 4.2.2 Valores de Vega

##### 4.2.2.1 Vega en Relación con el Grado de Monetización

Las opciones que están muy in-the-money o muy out-of-the-money tienen vegas muy cercanas a cero. Su prima es poco sensible a cambios en la volatilidad del subyacente. Por el contrario, las opciones at-the-money tienen una gran sensibilidad a dichos cambios.

---

18 En el Anexo VI.d: Vega ( $v$ ) se encuentra el desarrollo de la derivada que concluye en la fórmula de vega.

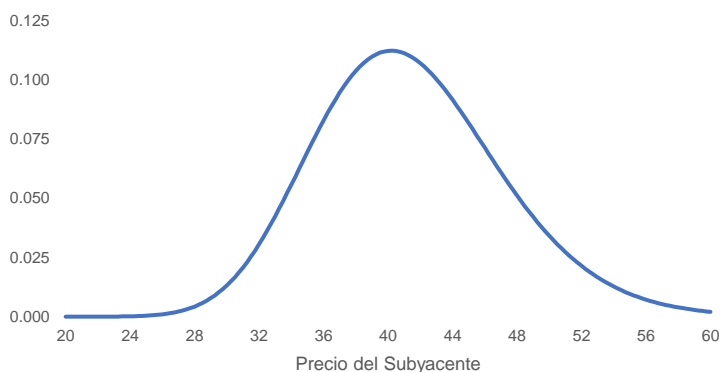
Tabla 4-4: Vega en Relación con el Grado de Monetización

Call		Precio de Ejercicio	Put		Vega
Prima	Delta		Prima	Delta	
10,18	0,9838	30	0,03	-0,0162	0,0114
8,27	0,9539	32	0,11	-0,0461	0,0273
6,47	0,8953	34	0,30	-0,1047	0,0513
4,84	0,8026	36	0,67	-0,1974	0,0786
3,46	0,6804	38	1,27	-0,3196	0,1011
2,35	0,5422	40	2,15	-0,4578	0,1122
1,52	0,4056	42	3,31	-0,5944	0,1097
0,94	0,2851	44	4,72	-0,7149	0,0960
0,55	0,1888	46	6,32	-0,8112	0,0765
0,31	0,1184	48	8,07	-0,8816	0,0560
0,17	0,0705	50	9,92	-0,9295	0,0382

Fuente: Elaboración propia

Aun así, como se puede apreciar en el siguiente gráfico, por regla general las opciones cuyo precio del subyacente es superior al precio de ejercicio suelen tener mayor exposición a la volatilidad que opciones cuyo precio del subyacente es inferior al precio de ejercicio.

Gráfica 4-15: Vega en Función del Precio del Subyacente

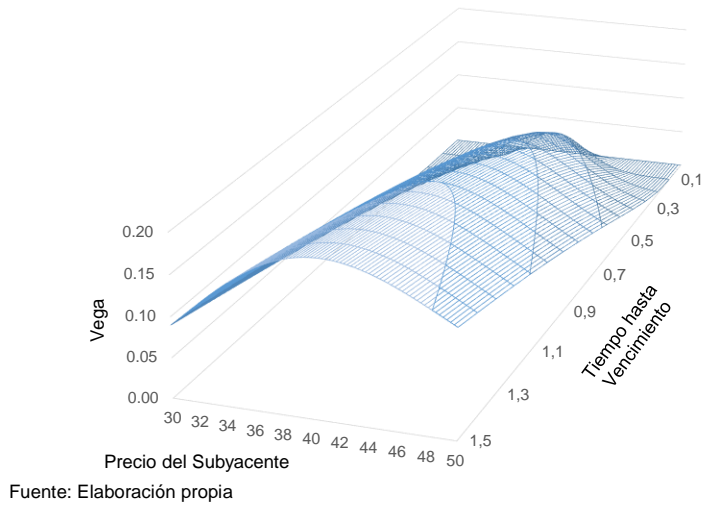


Fuente: Elaboración propia

#### 4.2.2.2 Vega a lo Largo del Tiempo

Cuanto mayor es el tiempo para vencimiento, mayor son los valores de vega, independientemente del grado de monetización de la opción. Esto se debe a que el valor temporal es mucho mayor con largos vencimientos, por lo que se tiene mucha mayor exposición a la volatilidad del activo subyacente. Se podría decir que se le está dejando más tiempo a la volatilidad para actuar.

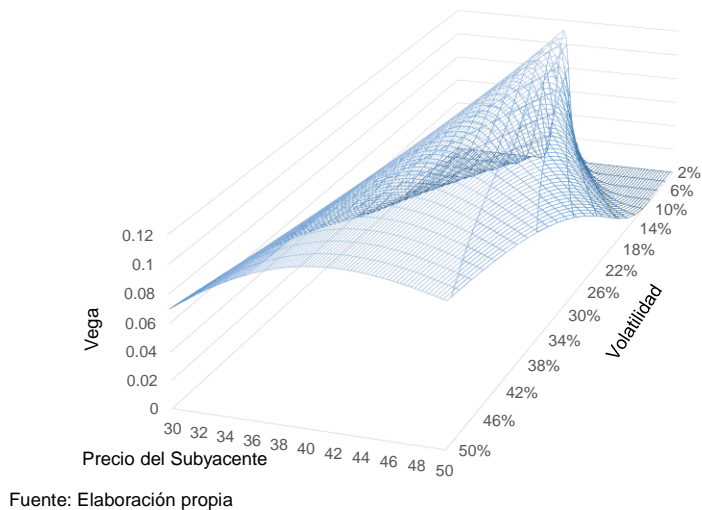
Gráfica 4-16: Vega a lo Largo del Tiempo



#### 4.2.2.3 Vega en Relación con la Volatilidad

Ante cambios en la volatilidad, la vega de opciones at-the-money no varía, el valor máximo de vega no cambia. Por otro lado, aumentan las vegas de opciones in-the-money y out-of-the-money. Estas opciones tienen la posibilidad de reportar mayores beneficios ante una mayor volatilidad.

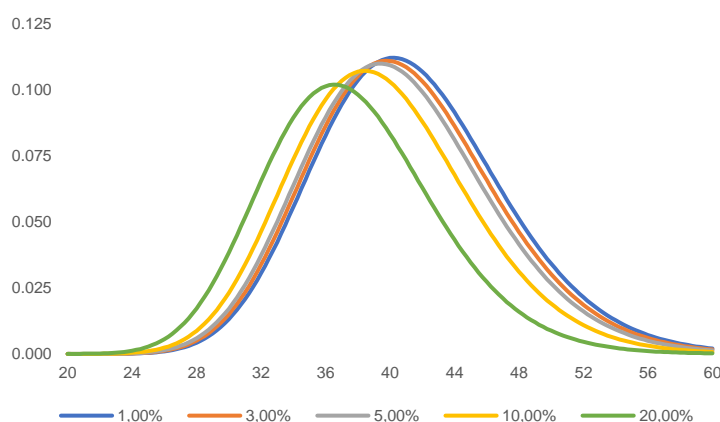
Gráfica 4-17: Vega en Relación con la Volatilidad



#### 4.2.2.4 Vega en Relación con el Tipo de Interés sin Riesgo

Similar a lo que ocurría con gamma, subidas de tipo de interés hacen menos sensible a la volatilidad a opciones cuyo precio de ejercicio es inferior al precio del subyacente. Como concluimos anteriormente, ante estos cambios en gamma y vega se produce un desplazamiento de su curva.

Gráfica 4-18: Vega en Relación con el Tipo de Interés sin Riesgo



Fuente: Elaboración propia

### 4.3 Sensibilidad al Tipo de Interés Sin Riesgo (Rho $\rho$ )

Rho es la segunda griega en la que nos centraremos para realizar posteriormente las coberturas. Esta mide la exposición del valor de la opción al tipo de interés sin riesgo.

Tal y como comentamos en la introducción, estamos viviendo una subida de tipos de interés caracterizada por la rapidez. Nunca en la historia de la Reserva Federal y del BCE se habían dado tantas subidas de tipos en periodos tan cortos de tiempo. Esto también ha llevado a grandes movimientos de precios en la deuda soberana tanto de Estados Unidos como de los principales países de la Unión Europea. Por ello, esta griega puede tomar relevancia en contextos económicos como el actual.

#### 4.3.1 Concepto de Rho

Esta griega mide la sensibilidad del valor de la prima ante cambios en el tipo de interés sin riesgo. Cambios en una unidad del tipo de interés implican cambios de rho unidades en el valor de la prima. Matemáticamente, Rho es la derivada primera de la fórmula de Black-Scholes respecto al tipo de interés sin riesgo<sup>19</sup>:

$$\rho_{call} = \rho_c = \frac{\partial C}{\partial r} = (T - t)Ke^{-r(T-t)}N(d_2)$$

$$\rho_{put} = \rho_p = \frac{\partial P}{\partial r} = -(T - t)Ke^{-r(T-t)}N(-d_2)$$

<sup>19</sup> En el Anexo VI.e: Rho ( $\rho$ ) se encuentra el desarrollo de la derivada que concluye en la fórmula de rho.

Teniendo en cuenta que casi bajo ningún concepto se dan cambios de una unidad del tipo de interés, es muy común dividir esta griega entre 100. Así su valor pasará a representar la sensibilidad de la prima ante cambios de 100 puntos básicos en el tipo de interés. En este trabajo emplearemos esta rho con base 1%. De tal forma, que la fórmula para el cálculo de rho queda definida como:

$$\rho_{call \text{ en base } 1\%} = \frac{\frac{\partial C}{\partial r}}{100} = \frac{(T-t)Ke^{-r(T-t)}N(d_2)}{100}$$

$$\rho_{put \text{ en base } 1\%} = \frac{\frac{\partial P}{\partial r}}{100} = \frac{-(T-t)Ke^{-r(T-t)}N(-d_2)}{100}$$

Como se puede apreciar, el valor de esta griega es siempre positivo para las opciones call y siempre negativo para las opciones put.

### 4.3.2 Valores de Rho

#### 4.3.2.1 Rho en Relación con el Grado de Monetización

En valor absoluto rho es inferior en opciones out-of-the-money y superior en opciones in-the-money. A continuación, se puede ver la diferencia de dichos valores.

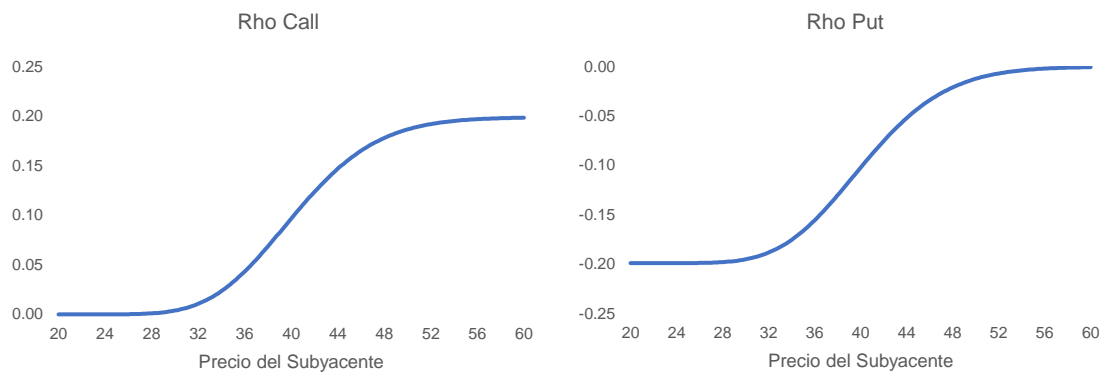
Tabla 4-5: Rho en Relación con el Grado de Monetización

Call			Precio de Ejercicio	Put		
Prima	Delta	Rho		Prima	Delta	Rho
10,18	0,9838	0,1458	30	0,03	-0,0162	-0,0034
8,27	0,9539	0,1494	32	0,11	-0,0461	-0,0098
6,47	0,8953	0,1467	34	0,30	-0,1047	-0,0224
4,84	0,8026	0,1363	36	0,67	-0,1974	-0,0428
3,46	0,6804	0,1188	38	1,27	-0,3196	-0,0703
2,35	0,5422	0,0967	40	2,15	-0,4578	-0,1023
1,52	0,4056	0,0735	42	3,31	-0,5944	-0,1354
0,94	0,2851	0,0523	44	4,72	-0,7149	-0,1666
0,55	0,1888	0,0350	46	6,32	-0,8112	-0,1938
0,31	0,1184	0,0221	48	8,07	-0,8816	-0,2167
0,17	0,0705	0,0133	50	9,92	-0,9295	-0,2355

Fuente: Elaboración propia

Esto se debe a que las opciones in-the-money tienen mayores valores descontados, por tanto, están más expuestas a cambios en los tipos de interés.

Gráfica 4-19: Rho en Función del Precio del Subyacente

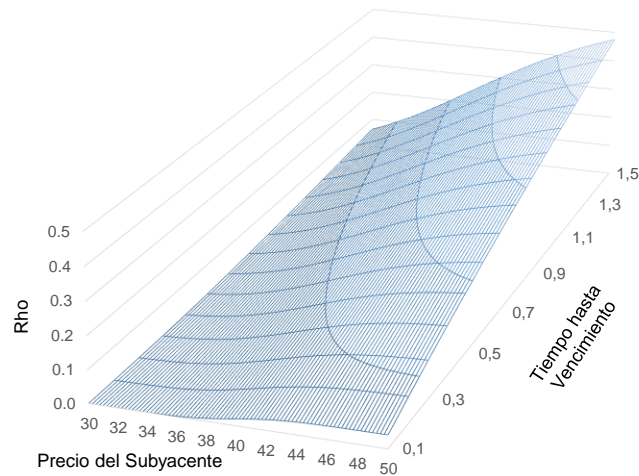


Fuente: Elaboración propia

#### 4.3.2.2 Rho a lo Largo del Tiempo

Un mayor vencimiento implica más tiempo para que actúe el tipo de interés sin riesgo. Los valores que conforman el precio de la opción se encontrarán más influidos por el tipo de interés. Por tanto, a mayor vencimiento, mayor es la exposición al tipo de interés.

Gráfica 4-20: Rho de la Call a lo Largo del Tiempo

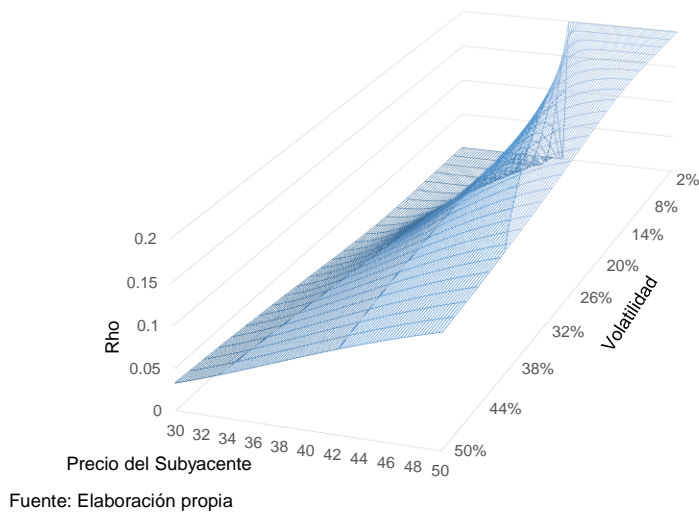


Fuente: Elaboración propia

#### 4.3.2.3 Rho en Relación con la Volatilidad

Recordando los dos componentes que conforman el valor de la prima, el valor temporal de las opciones out-of-the-money se ve mejorado por incrementos de la volatilidad. Es por ello que, con incrementos en la volatilidad del subyacente, opciones out-of-the-money tengan una rho mayor en valor absoluto. Por el contrario, las opciones in-the-money reducen su exposición a los tipos de interés ante aumentos de la volatilidad.

Gráfica 4-21: Rho de la Call en Relación con la Volatilidad

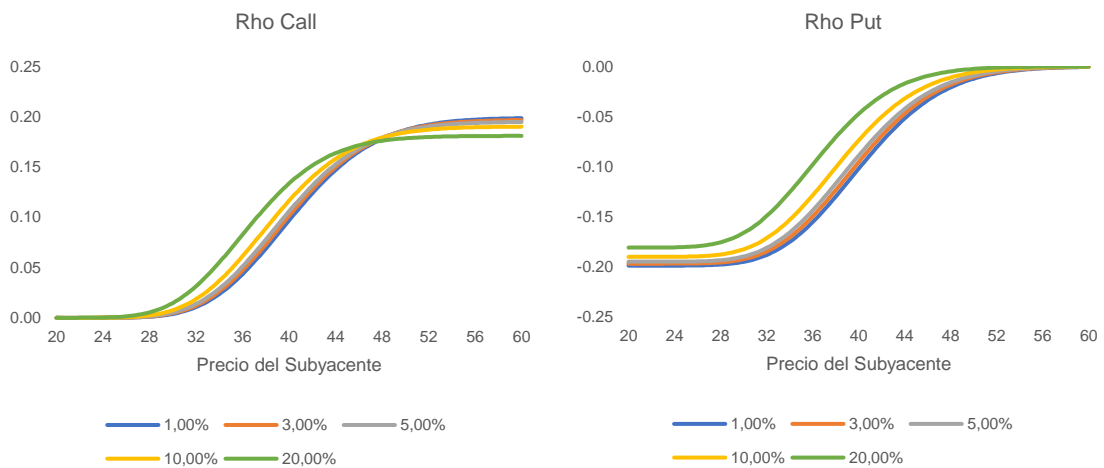


#### 4.3.2.4 Rho en Relación con el Tipo de Interés sin Riesgo

En el caso de las opciones call out-of-the-money y at-the-money, un mayor tipo de interés incrementa el valor de su rho. En cambio, para opciones call in-the-money un mayor tipo de interés reduce su rho.

Por otro lado, para las opciones put un mayor tipo de interés implica que los valores de rho son mayores.

Gráfica 4-22: Rho en Relación con el Tipo de Interés sin Riesgo



### 4.4 Pérdidas y Ganancias por Series de Taylor

Las griegas que acabamos de presentar miden la exposición que se asume a los diferentes parámetros de valoración de la opción. De esta forma, cuando tomamos una posición en opciones, estamos tomando delta posiciones en el

subyacente, vega posiciones en la volatilidad del subyacente o rho posiciones en el tipo de interés sin riesgo.

Teniendo en cuenta lo anterior, con las griegas se puede generar una cuenta de pérdidas y ganancias aproximada, que nos indique de donde provienen los beneficios y/o pérdidas de una posición en opciones. Matemáticamente esto vendría representado por las series de Taylor (Hull, Risk Management and Financial Institutions, 2015), de tal manera que:

$$dC \approx \frac{\partial C}{\partial S_t} dS_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} (dS_t)^2 + \frac{\partial C}{\partial (T-t)} d(T-t) + \frac{\partial C}{\partial \sigma} d\sigma + \frac{\partial C}{\partial r} dr$$

$$dP \approx \frac{\partial P}{\partial S_t} dS_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial S_t^2} (dS_t)^2 + \frac{\partial P}{\partial (T-t)} d(T-t) + \frac{\partial P}{\partial \sigma} d\sigma + \frac{\partial P}{\partial r} dr$$

Esto también puede expresarse como:

$$(C_{t+1} - C_t) \approx \Delta_c(S_{t+1} - S_t) + \frac{1}{2} \Gamma(S_{t+1} - S_t)^2 + \Theta_c + v(\sigma_{t+1} - \sigma_t) + \rho_c(r_{t+1} - r_t)$$

$$(P_{t+1} - P_t) \approx \Delta_p(S_{t+1} - S_t) + \frac{1}{2} \Gamma(S_{t+1} - S_t)^2 + \Theta_p + v(\sigma_{t+1} - \sigma_t) + \rho_p(r_{t+1} - r_t)$$

Estas series de Taylor para una posición en una opción también se puede expresar para una cartera de opciones contratadas sobre un mismo subyacente. Ante de esto, se han de contabilizar todas las exposiciones a griegas de todas las posiciones en opciones que conforman la cartera. De este modo, definiremos  $w_n$  como el número de opciones contratadas en la posición número  $n$ . El número de opciones contratadas tendrá valor negativo si se trata de una posición de opciones vendidas. Por tanto, para calcular las griegas del portfolio multiplicaremos el número de opciones contratadas por el valor de la griega y sumaremos los valores de todas las posiciones.

$$\Delta_{Portfolio} = w_1 \Delta_1 + w_2 \Delta_2 + \dots + w_n \Delta_n$$

$$\Gamma_{Portfolio} = w_1 \Gamma_1 + w_2 \Gamma_2 + \dots + w_n \Gamma_n$$

$$\Theta_{Portfolio} = w_1 \Theta_1 + w_2 \Theta_2 + \dots + w_n \Theta_n$$

$$v_{Portfolio} = w_1 v_1 + w_2 v_2 + \dots + w_n v_n$$

$$\rho_{Portfolio} = w_1 \rho_1 + w_2 \rho_2 + \dots + w_n \rho_n$$



Teniendo ya todas las griegas del portfolio se pueden aplicar las series de Taylor resultando en la variación aproximada del valor de la cartera (Hull, Risk Management and Financial Institutions, 2015):

$$\begin{aligned}
 (\text{Portfolio}_{t+1} - \text{Portfolio}_t) &\approx \\
 &\approx \Delta(S_{t+1} - S_t) + \frac{1}{2}\Gamma(S_{t+1} - S_t)^2 + \Theta + \nu(\sigma_{t+1} - \sigma_t) + \rho(r_{t+1} - r_t)
 \end{aligned}$$

#### 4.4.1 Ejemplo con una Posición de Opciones

Para el ejemplo se presenta la información de una posición en una opción call en dos momentos temporales distintos. En primer lugar, tenemos la opción cuando quedan 6 meses exactamente para su vencimiento  $[(T - t) = 126/252 = 0,5]$  y, en segundo lugar, tenemos la misma opción 6 días después  $[(T - t) = 120/252 = 0,476]$ . La información sobre esta posición se puede resumir:

Tabla 4-6: Información de una Posición en Opciones

$(T - t)$	0,500	0,476
$S$	42,00	42,50
$K$	40,00	40,00
$\sigma$	20,00%	20,50%
$r$	1,00%	1,02%
Prima	3,570	3,911
$\Delta$	0,674	0,703
$\Gamma$	0,061	0,058
$\Theta$	-0,009	-0,010
$\nu$	0,107	0,101
$\rho$	0,124	0,124

Fuente: Elaboración propia

Como se puede observar en la tabla anterior las griegas han variado a lo largo de los 6 días. Es por esto, por lo que a cada griega se le asignará una horquilla de valores, que representan parte de la variación de la prima que se atribuye a su factor de riesgo. En la siguiente tabla se muestran estas horquillas, así como el total de la variación aproximada de la prima, junto con su variación real.

Tabla 4-7: Resultado en Series de Taylor sobre una Posición en Opciones

P&G		
$\Delta$	0,3370	0,3516
$\Gamma$	0,0076	0,0072
$\theta$	-0,0569	-0,0583
$\nu$	0,0535	0,0507
$\rho$	0,0025	0,0025
Total	0,3437	0,3537
Real	0,3414	

Fuente: Elaboración propia

#### 4.4.2 Ejemplo con una Cartera de Opciones

Para este ejemplo se va a tomar una cartera de opciones sobre el mismo subyacente. Estas tienen todas el mismo vencimiento, pero difieren en el precio de ejercicio y en el número de contratos a los que están expuestas.

Tabla 4-8: Información Inicial de una Cartera de Opciones

Tipo	Call	Put	Call	Put	Cartera
Nº Contratos	-1.000,00	1.200,00	-2.500,00	-800,00	
$S$	42,00	42,00	42,00	42,00	
$K$	40,00	38,00	43,00	41,00	
$\sigma$	20,00%	20,00%	20,00%	20,00%	
$r$	1,00%	1,00%	1,00%	1,00%	
$(T - t)$	0,500	0,500	0,500	0,500	
Prima	-3.569,85	896,46	-5.043,62	-1.424,45	-9.141,46
$\Delta$	-674,03	-249,47	-1.189,88	312,88	-1.800,50
$\Gamma$	-60,67	57,88	-167,61	-51,72	-222,11
$\theta$	9,48	-7,65	25,25	6,66	33,73
$\nu$	-107,02	102,10	-295,66	-91,23	-391,81
$\rho$	-123,70	-56,87	-224,66	72,83	-332,40

Fuente: Elaboración propia

Igual que en el ejemplo anterior, pasados 6 días, los parámetros de valoración de la opción habrán cambiado. Por tanto, también habrán cambiado las exposiciones a las que hará frente la cartera, tal y como se muestra en la siguiente tabla.

Tabla 4-9: Información Final de una Cartera de Opciones

Tipo	Call	Put	Call	Put	Cartera
Nº Contratos	-1.000,00	1.200,00	-2.500,00	-800,00	
$S$	42,50	42,50	42,50	42,50	
$K$	40,00	38,00	43,00	41,00	
$\sigma$	20,50%	20,50%	20,50%	20,50%	
$r$	1,02%	1,02%	1,02%	1,02%	
$(T - t)$	0,476	0,476	0,476	0,476	
Prima	-3.911,23	780,80	-5.654,31	-1.276,86	-10.061,60
$\Delta$	-703,20	-222,08	-1.272,33	287,82	-1.909,79
$\Gamma$	-57,55	53,29	-165,85	-49,77	-219,88
$\theta$	9,72	-7,61	26,94	6,95	35,99
$\nu$	-101,47	93,96	-292,43	-87,76	-387,70
$\rho$	-123,69	-48,66	-230,57	64,33	-338,59

Fuente: Elaboración propia

La variación de esta cartera de opciones según las series de Taylor, se puede resumir en:

Tabla 4-10: Resultado en Series de Taylor sobre una Cartera de Opciones

P&G	
$\Delta$	-900,25 -954,90
$\Gamma$	-27,76 -27,48
$\theta$	202,40 215,96
$\nu$	-195,91 -193,85
$\rho$	-6,65 -6,77
Total	-928,16 -967,04
Real	-920,14

Fuente: Elaboración propia

## 5 Cobertura basada en Griegas

Como comentamos en la introducción, a la hora de hablar de llevar a cabo estrategias de cobertura se distinguen dos tipos principales: las estáticas y las dinámicas. Las coberturas basadas en griegas permiten reducir ciertos riesgos a los que expone una posición de opciones; y, como vimos en el punto de griegas, estas varían conforme cambian el resto de parámetros de valoración. De esta forma, estas coberturas deberán ser reequilibradas y, por tanto, serán siempre coberturas dinámicas.

Dichas coberturas, a lo largo de este punto, se expondrán en un primer momento de forma teórico-matemática. Posteriormente se realizará una aplicación práctica de lo expuesto. Esto se realizará tanto para la delta-cobertura como para ésta complementada con otras griegas.

### 5.1 Las Matemáticas de las Coberturas

Comenzaremos exponiendo la cobertura más habitual en el mercado de opciones, la delta-cobertura. Pero, debido a la importancia que han tomado la volatilidad y los tipos de interés en el contexto económico actual, podremos el foco en dichos factores de riesgo, tal y como expusimos en la introducción. Es por ello que estudiaremos en el siguiente punto como se conforman posiciones en opciones con vega y rho neutrales.

#### 5.1.1 La Delta-Cobertura

La delta-cobertura es la cobertura más común del mercado ya que, como expusimos en el punto de concepto de coberturas, es la más utilizada por las instituciones financieras. Esto se debe a que, además de ser la más simple, neutraliza el principal factor de riesgo al que hace frente una exposición de opciones, el precio del subyacente. Como comentamos en el punto de delta, esta griega permite aproximar la variación del valor de la call en relación con la variación del precio del subyacente:

$$\frac{(C_{t+1} - C_t)}{(S_{t+1} - S_t)} \approx \frac{\partial C}{\partial S_t} \Rightarrow (C_{t+1} - C_t) \approx \frac{\partial C}{\partial S_t} (S_{t+1} - S_t) \Rightarrow (C_{t+1} - C_t) \approx \Delta(S_{t+1} - S_t)$$

Para conformar esta cobertura se tomará exposición de  $-\Delta$  en el activo subyacente de la posición o posiciones que se deseen cubrir. Se acudirá al

mercado a comprar/vender  $-\Delta$  acciones del activo subyacente. De este modo, las variaciones del precio del subyacente desfavorables para el valor de la prima serán favorables para la posición de acciones del subyacente (Hull, Risk Management and Financial Institutions, 2015):

$$0 = \Delta(S_{t+1} - S_t) - \Delta(S_{t+1} - S_t)$$

Esta cobertura es delta neutral ya que elimina la sensibilidad que representa delta en la posición:

$$\begin{aligned} (Portfolio_{t+1} - Portfolio_t) &\approx \\ &\approx \Delta(S_{t+1} - S_t) - \Delta(S_{t+1} - S_t) + \frac{1}{2}\Gamma(S_{t+1} - S_t)^2 + \Theta + \nu(\sigma_{t+1} - \sigma_t) \\ &+ \rho(r_{t+1} - r_t) \approx \\ &\approx \frac{1}{2}\Gamma(S_{t+1} - S_t)^2 + \Theta + \nu(\sigma_{t+1} - \sigma_t) + \rho(r_{t+1} - r_t) \end{aligned}$$

### 5.1.2 Aportaciones de Vega a la Delta-Cobertura

Como presentamos en la introducción, existen situaciones de mercado en las que la exposición a la volatilidad cobra una mayor importancia. Situaciones que pueden conducir a mayores variaciones en el valor de la prima debido a incrementos de la volatilidad del subyacente (Hull, Risk Management and Financial Institutions, 2015). A continuación, vamos a presentar como se puede neutralizar dicha exposición, como se obtiene una cartera de opciones con vega neutral.

Para ello, se añadirá otra posición de opciones sobre el mismo subyacente a la cartera. Definiremos como  $h_v$  el número de opciones se deben contratar para alcanzar el porfolio de vega neutral. La relación de esta nueva opción con el resto de la cartera deberá cumplir la siguiente condición:

$$0 = \nu_{Portfolio} + h_v \cdot \nu_{opción\ añadida}$$

Por tanto, el número de opciones que se deberán contratar será:

$$h_v = -\frac{\nu_{Portfolio}}{\nu_{opción\ añadida}}$$

La variación aproximada del portfolio<sup>20</sup> vega neutral quedaría como:

$$\begin{aligned} (Portfolio_{t+1} - Portfolio_t) &\approx \\ &\approx \Delta(S_{t+1} - S_t) + \frac{1}{2}\Gamma(S_{t+1} - S_t)^2 + \Theta + 0(\sigma_{t+1} - \sigma_t) + \rho(r_{t+1} - r_t) \approx \\ &\approx \Delta(S_{t+1} - S_t) + \frac{1}{2}\Gamma(S_{t+1} - S_t)^2 + \Theta + \rho(r_{t+1} - r_t) \end{aligned}$$

A su vez, este portfolio se podría hacer delta neutral comprando o vendiendo el activo subyacente en  $-\Delta$  unidades. Terminando con un portfolio que solo se vea afectado por gamma, theta y rho.

$$(Portfolio_{t+1} - Portfolio_t) \approx \frac{1}{2}\Gamma(S_{t+1} - S_t)^2 + \Theta + \rho(r_{t+1} - r_t)$$

### 5.1.3 Aportaciones de Rho a la Delta-Cobertura

Actualmente, como presentamos en la introducción, estamos viviendo una situación de mercado en la que las autoridades de política monetaria están llevando a cabo unas subidas de tipos sin precedentes históricos. Esto está provocando un incremento en la volatilidad de la deuda soberana, activo que en la práctica fija el tipo de interés sin riesgo del mercado. Es en situaciones de mercado como estas en las que sería crucial reducir las variaciones que pueden provocar cambios en dicho parámetro de valoración.

Pretendemos conseguir una cartera rho neutral, una cartera a la que cambios en el tipo de interés sin riesgo no afecten a su valor (Hull, Risk Management and Financial Institutions, 2015). Del mismo modo que ocurría a la hora de obtener una cartera vega neutral, para ésta se añadirá otra opción sobre el mismo subyacente. Definiremos  $h_\rho$  como el número de opciones que se han de contratar para obtener una cartera rho neutral y su relación respecto a la cartera deberá corroborar:

$$0 = \rho_{Portfolio} + h_\rho \cdot \rho_{opción\ añadida} \Rightarrow h_\rho = -\frac{\rho_{Portfolio}}{\rho_{opción\ añadida}}$$

La variación aproximada del portfolio<sup>21</sup> rho neutral quedaría como:

---

20 Recordamos que, al haber añadido otra opción para conseguir la neutralidad de vega, el resto de las griegas de la cartera también se verán afectadas.

21 Recordemos que, al haber añadido otra opción para conseguir la neutralidad de rho, el resto de las griegas de la cartera también se verán afectadas.

$$\begin{aligned}
(Portfolio_{t+1} - Portfolio_t) &\approx \\
&\approx \Delta(S_{t+1} - S_t) + \frac{1}{2}\Gamma(S_{t+1} - S_t)^2 + \Theta + v(\sigma_{t+1} - \sigma_t) + 0(r_{t+1} - r_t) \approx \\
&\approx \Delta(S_{t+1} - S_t) + \frac{1}{2}\Gamma(S_{t+1} - S_t)^2 + \Theta + v(\sigma_{t+1} - \sigma_t)
\end{aligned}$$

Igual que con el portfollio vega neutral, este también se puede hacer delta neutral tomando exposición en acciones del activo subyacente en  $-\Delta$  unidades. Obteniendo un portfollio únicamente expuesto a gamma, theta y vega.

$$(Portfolio_{t+1} - Portfolio_t) \approx \frac{1}{2}\Gamma(S_{t+1} - S_t)^2 + \Theta + v(\sigma_{t+1} - \sigma_t)$$

## 5.2 Aplicación Práctica de Vega y Rho en la Delta-Cobertura

A lo largo de este punto expondremos como, aplicando las coberturas explicadas en el punto anterior, se pueden obtener carteras de opciones que reportan menos variaciones en situaciones económicas adversas. Para ello utilizaremos la cotización de contratos vencidos entre 2020 y 2022, concretamente con vencimiento el tercer viernes de los meses marzo, junio, septiembre y diciembre. Esta muestra permite comprobar como reaccionan dichas coberturas ante un aumento histórico de la volatilidad por el Covid-19; un periodo de estabilidad a finales de 2020 y principios de 2021; y en 2022 una subida de tipos de interés ante las presiones inflacionarias.

El modelo de valoración de opciones, modelo de Black Scholes, expuesto en los puntos anteriores, asume que la opción no reparte dividendos. Para asegurarnos de que esto ocurra así utilizaremos opciones que tengan índices como subyacente. Además, dichas opciones suelen ser más líquidas (tienen un mayor volumen de transacciones, tiene un “*open interest*” mayor), por lo que se acercan más a cumplir el supuesto de liquidez perfecta<sup>22</sup> del modelo de Black Scholes. Para simplificar esta aplicación y acercarnos más a las asunciones del modelo, en esta práctica suponemos que existe divisibilidad perfecta<sup>23</sup> en todos los activos financieros del mercado.

---

<sup>22</sup> Recordatorio: liquidez perfecta significa que cualquier agente del mercado puede comprar o vender cualquier activo en la cantidad que desee al precio de mercado en el momento de la transacción.

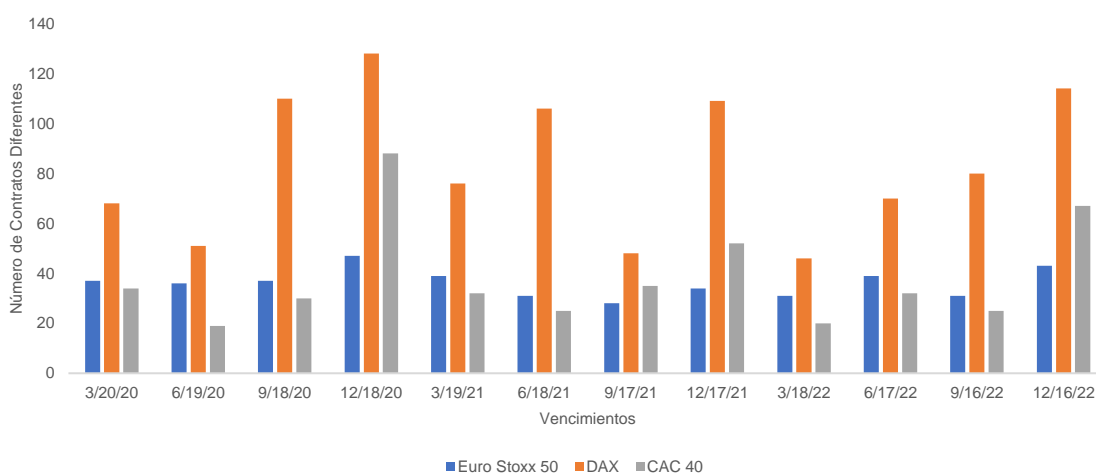
<sup>23</sup> Recordatorio: divisibilidad perfecta significa que puedes comprar o vender cualquier cantidad de activos representada en los números reales, la cantidad de activos no tiene por qué venir representada por un número entero.

## 5.2.1 Opciones Seleccionadas

Las opciones elegidas para la aplicación práctica tienen como subyacente los índices: Euro Stoxx 50, DAX y CAC 40. Se toma la rentabilidad de la deuda soberana alemana a 10 años como tipo de interés sin riesgo para los contratos sobre el Euro Stoxx 50 y el DAX; y la rentabilidad de la deuda soberana francesa a 10 años como el tipo de interés sin riesgo para los contratos sobre el CAC 40.

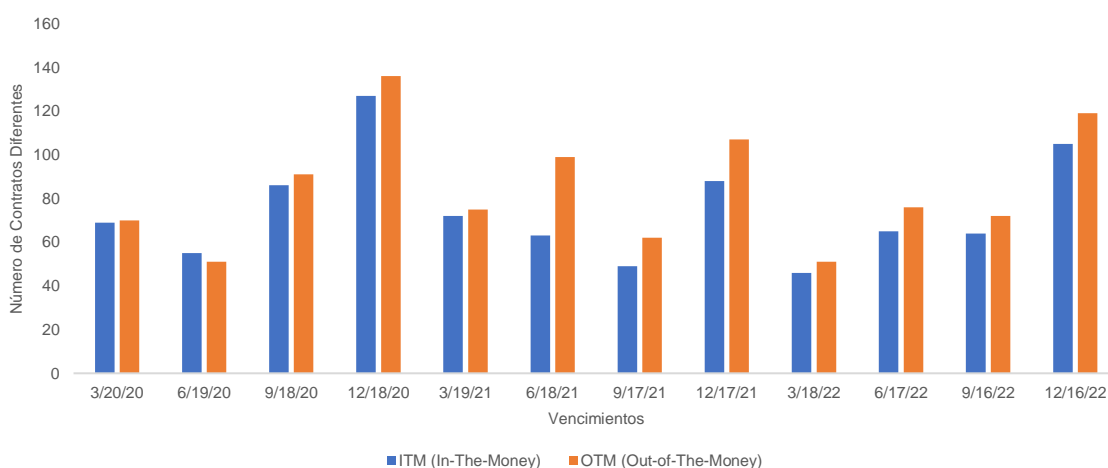
Para esta aplicación práctica tomamos el precio de 1.898 contratos de opciones de FacSet<sup>24</sup>, con distinto subyacente, precio de ejercicio y vencimiento. En las siguientes gráficas se puede ver la distribución de dichos contratos en función de su subyacente y de su grado de monetización a vencimiento.

Gráfica 5-1: Distribución de Contratos por Subyacente



Fuente: Elaboración propia

Gráfica 5-2: Distribución de Contratos por Grado de Monetización



<sup>24</sup> En el Anexo VII: Listado de Opciones Utilizadas en la Aplicación Práctica se pueden ver los identificadores y las características principales de cada uno de los contratos derivados utilizados en esta aplicación práctica.



## 5.2.2 Información de las Opciones

La variable con la que se trabajará de cada contrato de opciones es la prima a la que se cerró la última transacción del día, lo que se conoce como el “*sattlement price*”. Dicha variable se extraerá de FacSet, junto con el precio de cotización del subyacente, el precio de ejercicio, el vencimiento y el tipo de interés sin riesgo.

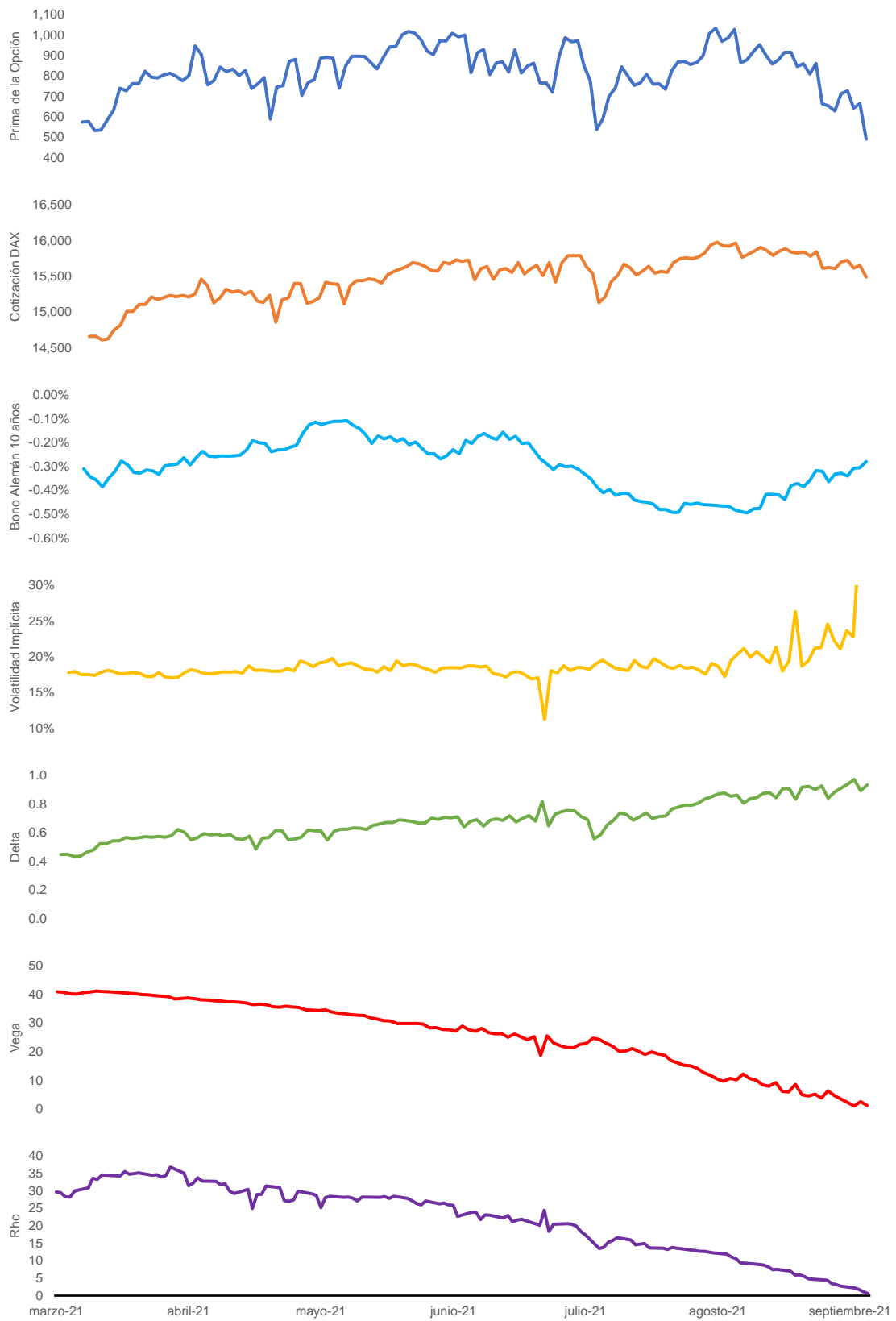
A partir de estos datos se obtendrá el input de valoración que falta, la volatilidad. Esta volatilidad se obtendrá sustituyendo los parámetros presentados en el párrafo anterior en la fórmula de Black Scholes y despejando la volatilidad. De esta manera se obtiene lo que se conoce como volatilidad implícita. La volatilidad implícita<sup>25</sup> es, por tanto, la volatilidad que se introduce en el modelo de valoración para obtener la prima a la que cotiza la opción en cuestión. La media de todas las volatilidades implícitas de las opciones que cotizan en el CBOE es lo que conforma el Índice VIX.

Teniendo todas las variables de valoración de la opción, se procederá a calcular los valores de las griegas delta, vega y rho. Sensibilidades que posteriormente se emplearán para realizar las coberturas. A continuación, se muestra de manera gráfica el desglose de los parámetro de valoración y las griegas sobre un contrato de opciones como ejemplo. Este ejemplo es un contrato de opciones call sobre el DAX con vencimiento el viernes 17 de septiembre de 2021 y con precio de ejercicio en 15.000.

---

<sup>25</sup> En la práctica real la volatilidad implícita se obtiene mediante tanteo (Solver en Excel es la herramienta de tanteo por antonomasia). Para facilitar el cálculo de las volatilidades implícitas en Excel se han diseñado unas fórmulas específicas en VBA, que permiten automatizar ese tanteo. El código se puede ver en el Anexo VIII: Función Volatilidad Implícita VBA.

Gráfica 5-3: Desglose del Contrato DAX.XEX#CRX82



Fuente: FacSet y elaboración propia

### 5.3 Cálculos y Conclusiones de la Aplicación Práctica

Asumimos que sobre los 1.898 contratos se toma una posición corta. En esta aplicación práctica, para cada uno de los contratos, se realizan los tres tipos de coberturas presentadas en el punto anterior<sup>26</sup>: la delta-cobertura, la delta-cobertura con vega neutral y la delta cobertura con rho neutral.

Una vez realizadas dichas coberturas se mide la desviación típica<sup>27</sup> de dichas posiciones, la volatilidad de la cartera cubierta. Tomando esas volatilidades y calculando la media de las volatilidades en función de sus vencimientos se obtienen los siguientes resultados:

Tabla 5-1: Resultado de la Aplicación Práctica

Vencimientos	Variación Delta-Cobertura	Variación Vega Neutral	Variación Rho Neutral
20/3/20	7,841%	6,535%	7,083%
19/6/20	21,467%	20,640%	20,183%
18/9/20	15,323%	13,093%	14,082%
18/12/20	10,234%	7,822%	9,506%
19/3/21	6,728%	5,863%	6,383%
18/6/21	6,520%	5,839%	6,010%
17/9/21	5,183%	4,904%	5,005%
17/12/21	6,150%	5,257%	5,524%
18/3/22	6,604%	5,883%	6,218%
17/6/22	9,217%	7,924%	8,425%
16/9/22	6,626%	5,553%	5,909%
16/12/22	6,513%	4,445%	5,168%

Fuente: Elaboración propia

Como se puede apreciar en la tabla anterior, complementar la delta-cobertura de una cartera de opciones con coberturas vega neutral o rho neutral puede aportar una mayor estabilidad a una posición en opciones. Esta mayor estabilidad se agudiza en períodos con alta volatilidad y subida de tipos de interés.

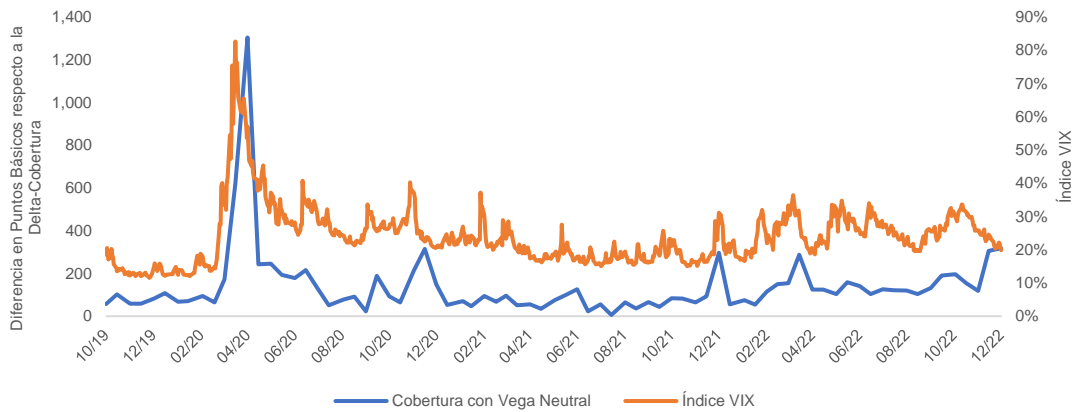
En siguiente gráfico se muestra la diferencia en puntos básicos entre la volatilidad anual de la delta-cobertura y la volatilidad de ésta complementada con vega neutral en distintos puntos temporales. Esta diferencia está a su vez comparada con los valores del Índice VIX. Como podemos apreciar, en marzo de 2019 se dio el pico de volatilidad más destacado debido a la pandemia del COVID-19. En este periodo, la delta-cobertura simple reportó una mayor

<sup>26</sup> Tanto para conseguir vega neutral como rho neutral, como expusimos en el punto anterior es necesario apoyarse en otro contrato de opciones. Utilizaremos para ello siempre contratos at-the-money.

<sup>27</sup> Se mide la desviación típica de los retornos diarios que da la cartera cubierta. Se obtiene una desviación típica diaria que posteriormente se anualiza ( $\sigma_{diaria} \sqrt{252}$ ). De esta forma, los resultados que se muestran en la tabla representan volatilidades anuales. Así es como se refleja también en el Índice VIX.

volatilidad que la cartera de ésta complementada con vega neutral. Esto se puede ver como ocurre también en otros picos de volatilidad a lo largo de toda la gráfica (a finales de 2020 y a principios de 2021 sobretodo).

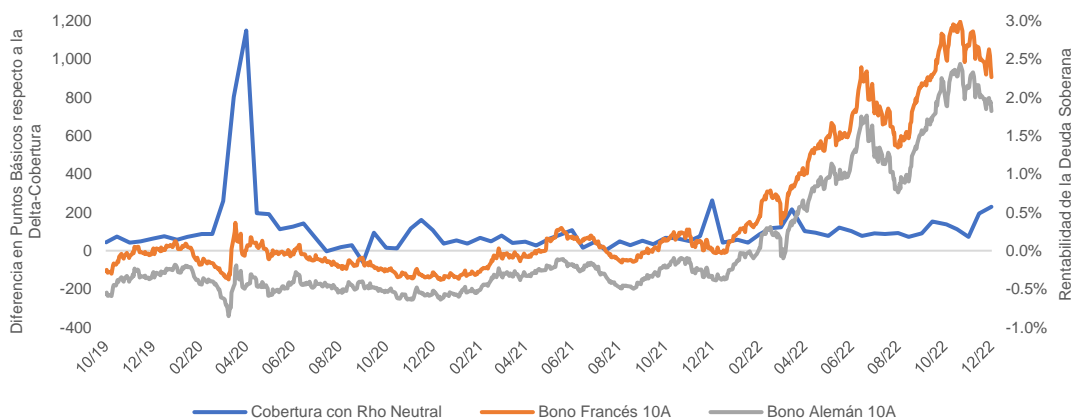
Gráfica 5-4: Resultados Vega-Neutral



Fuente: Elaboración propia

En este segundo gráfico se puede apreciar la diferencia en puntos básicos entre la volatilidad anual de la delta-cobertura y la volatilidad de ésta complementada con rho neutral. Además, a esta gráfica se le han añadido las rentabilidades de la deuda soberana tanto de Alemania como de Francia. Se observa que ante grandes movimientos de los tipos de interés se producen mayores diferencias entre la volatilidad de las coberturas.

Gráfica 5-5: Resultados Rho-Neutral



Fuente: Elaboración propia

Podemos concluir, por tanto, que aplicar una cobertura utilizando vega es efectivo en tiempos de alta volatilidad, como ocurre sobre todo a principios de 2020. Además, aplicar una cobertura basada en rho es efectivo en situaciones de subidas de tipos de interés, como ha ocurrido a finales de 2022.

## 6 Conclusiones

Este trabajo muestra la importancia de las coberturas en situaciones económicas de alta volatilidad y subidas de tipos de interés. Estos dos tipos de exposiciones han tomado importancia debido a la situación económico política internacional de los últimos años.

Desde el punto de vista teórico, para cubrirte ante estos riesgos se ha mostrado el papel que ejercen las coberturas dinámicas. Coberturas que podemos afirmar que muestran grandes ventajas a la hora de realizar coberturas sobre riesgos concretos derivados de contratos financieros.

El Modelo de Black Scholes es, aparentemente, un modelo teórico de valoración muy complejo. Aun así, con la minuciosa explicación que se le ha dado en este texto, permite que se pueda intuir su origen y sus rasgos más característicos. Gracias a esto, se puede pasar a cálculos más complejos todavía, estudiando las griegas de sobre dicho modelo y como se interrelacionan las variables dentro de él.

Este trabajo termina con una aplicación práctica utilizando una gran variedad de opciones distintas. Esto ha permitido mostrar más claramente como las griegas vega y rho pueden complementar a la delta-cobertura. Con esta práctica se puede concluir que una cartera vega neutral muestra una menor desviación típica ante picos de volatilidad; y una cartera rho neutral lo hace ante grandes variaciones de los tipos de interés.

Como apunte personal, en el texto no solo se ha incluido una explicación muy detallada de los modelos de valoración de valoración de opciones, sino que también se han añadido a modo de anexo todos los desarrollos que concluyen en las fórmulas tanto del modelo binomial, como del modelo de Black Scholes, así como de las griegas. También se ha añadido a modo de anexo todos los contratos utilizados en la aplicación práctica y las herramientas utilizadas en el proceso. La decisión meditada de incluir tanto detalle se ha tomado con el objetivo de acercar este texto al lector común y que sea más sencillo ver cómo, de algo tan simple como es la valoración en el modelo binomial, se llega a algo tan complejo como son las griegas.

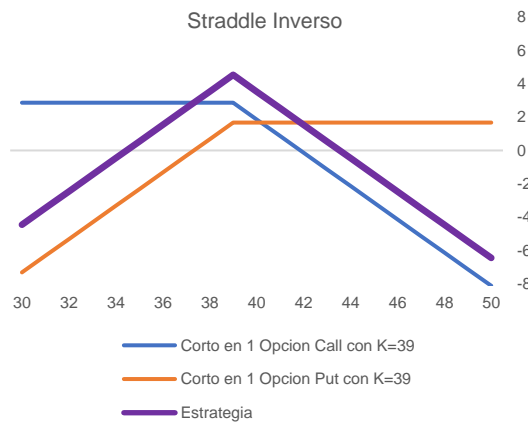
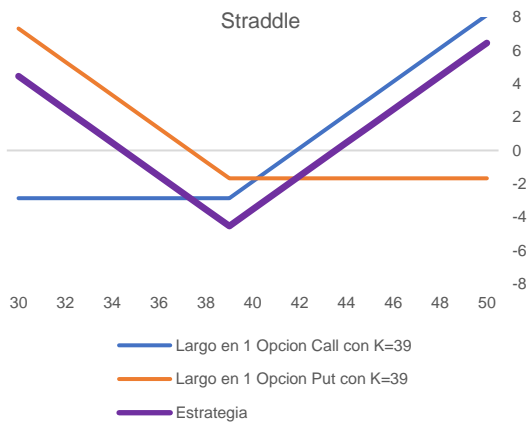
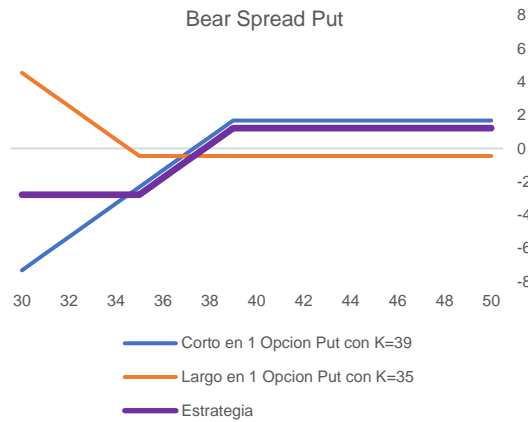
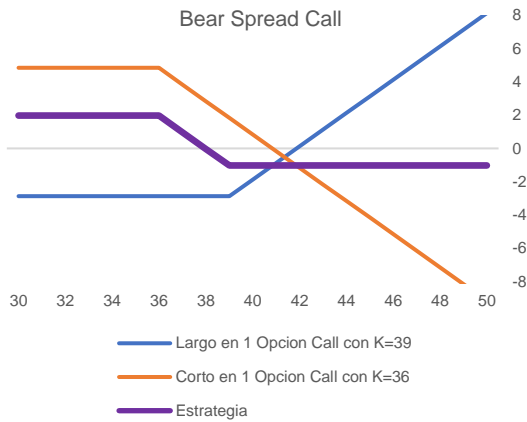
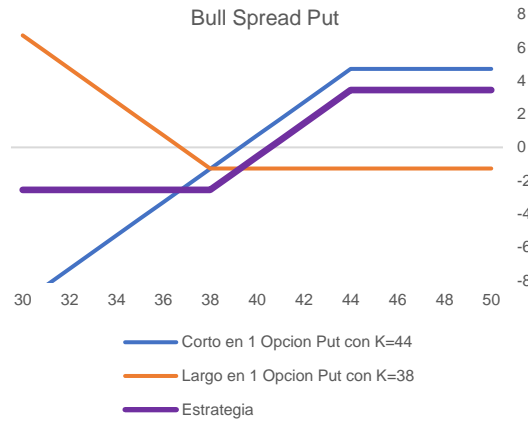
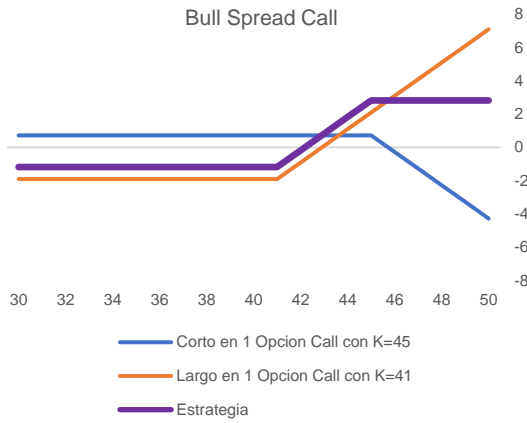
## Bibliografía

- Bhowmik, S. K., & Khan, J. A. (2022). High-Accurate Numerical Schemes for Black–Scholes Models with Sensitivity Analysis. *Journal of Mathematics*, 2022. <https://doi.org/10.1155/2022/4488082>
- Bingham, N. H., & Kiesel, R. (2004). *Risk-Neutral Valuation Pricing and Hedging of Financial Derivatives*. Springer.
- Black, F., & Scholes, M. (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *The Journal of Political Economy*, 637-654. <http://www.jstor.org/stable/1831029>
- Carabias, S. (2016). *Introducción a la Modelización de Mercados Financieros*. Madrid: Universidad Pontificia de Comillas.
- Chance, D. M. (2022). Basics of Derivative Pricing and Valuation. En *CFA Program Curriculum Level I* (Vol. 5, págs. 221-284). CFA Institute.
- Civitancic, J., & Zapatero, F. (2003). *Introduction to the Economics and Mathematics of Financial Markets*. Cambridge: The MIT Press.
- Cottle, C. M. (2005). *Options Trading: The Hidden Reality*. Chicago: RiskDoctor.
- Cox, J., Ross, S., & Rubinstein, M. (1979). Option pricing: A simplified approach. *Journal of financial Economics*, 7(3), 229-263. [http://dx.doi.org/10.1016/0304-405X\(79\)90015-1](http://dx.doi.org/10.1016/0304-405X(79)90015-1)
- Crouthy, M., Galai, D., & Mark, R. (2014). *The Essentials of Risk Management*. Mc Graw Hill Education.
- Gregory, J. (2010). *Counterparty Credit Risk*. Wiley Finance.
- Harrison, J., & Kreps, D. M. (1979). Martingales and Arbitraje in Multiperiod Securities Markets. *Journal of Economic Theory*(20), 381-401. [https://doi.org/10.1016/0022-0531\(79\)90043-7](https://doi.org/10.1016/0022-0531(79)90043-7)
- Harrison, J., & Pliska, S. (1981). Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading. *Stochastic Processes and their Applications*(11), 215-260. [https://doi.org/10.1016/0304-4149\(81\)90026-0](https://doi.org/10.1016/0304-4149(81)90026-0)

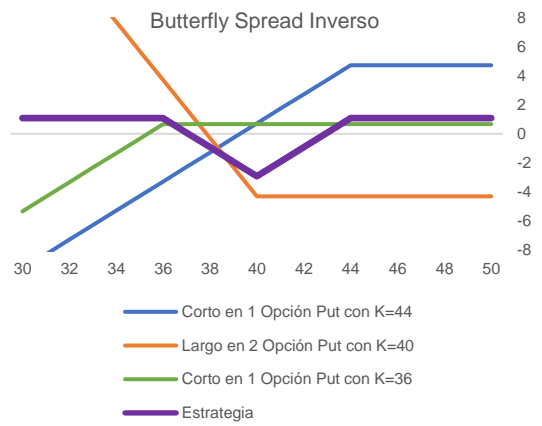
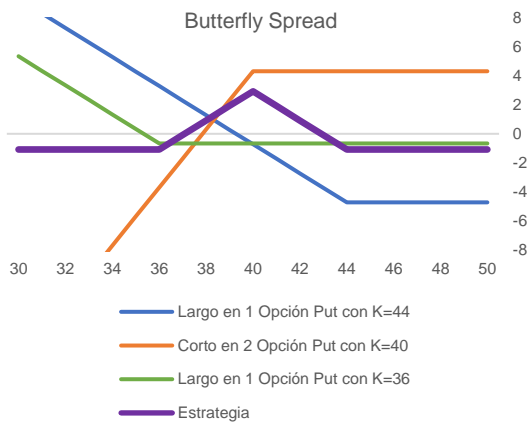
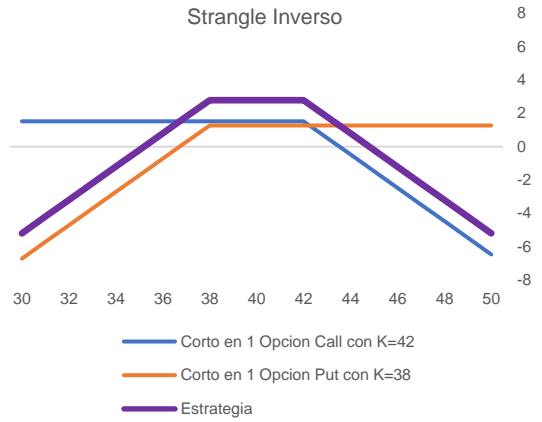
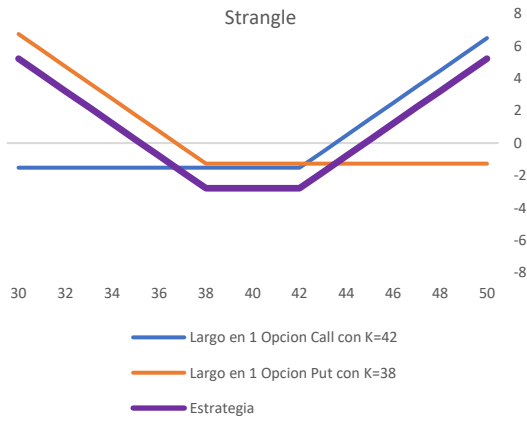
- Hull, J. C. (2012). *Options, Futures, and other Derivatives*. Pearson.
- Hull, J. C. (2015). *Risk Management and Financial Institutions*. Wiley.
- K. A., A., & Manjunatha, T. (2019). Analysis of Nifty Option Price Using Black-Scholes and Greeks. <http://www.aims-international.org/aims16/16ACD/PDF/A-226-Final.pdf>
- Khan, M. U., Gupta, A., & Siraj, S. (2014). Empirical Testing of Modified Black-Scholes Option Pricing Model Formula on NSE Derivative Market in India. *International Journal of Economics and Financial Issues*, III(1), 87-98. <https://www.econjournals.com/index.php/ijefi/article/view/348>
- Kumar, A. (2018). A Study on Risk Hedging Strategy: Efficacy of Option Greeks. *Abhinav National Monthly Refereed Journal of Research in Commerce & Management*, VII(4), 77-85.
- Luenberger, D. G. (1998). *Investment Science*. Oxford University Press.
- Nagendran, R., & Venkateswar, S. (2014). Validating Black-Scholes model in pricing Indian stock call options. *Journal of Applied Finance and Banking*, IV(3), 89.
- Passarelli, D. (2012). *Trading Option Greeks: How Time, Volatility, and Other Pricing Factors Drive Profits*. John Wiley & Sons.
- Paunović, J. (2014). Options, Greeks, and risk management. *Singidunum Journal of Applied Sciences*, XI(7), 74-83.
- Sydsaeter, K., & Hammond, P. (2012). *Essential Mathematics for Economic Analysis*. Pearson.
- Yu, X., & Xie, X. (2013). On Derivations of Black-Scholes Greek Letters. *Research Journal of Finance and Accounting*, IV(6), 80-85.

# Anexos

## Anexo I: Gráficos de Coberturas Estáticas con Opciones







## Anexo II: Desarrollos del Modelo Binomial

### Anexo II.a: Desarrollo de la Cartera Replicante de la Call en el Modelo Binomial

Partimos de que para la formación de la cartera replicante se deben cumplir el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x_R S_1^u + y_R A_1 = C_1^u \\ x_R S_1^d + y_R A_1 = C_1^d \end{cases}$$

Obtenemos que  $x_R$ :

$$\begin{aligned} \begin{cases} x_R S_1^u + y_R A_1 = C_1^u \Rightarrow y_R A_1 = C_1^u - x_R S_0 u \\ x_R S_1^d + y_R A_1 = C_1^d \Rightarrow y_R A_1 = C_1^d - x_R S_0 d \end{cases} &\Rightarrow C_1^u - x_R S_0 u = C_1^d - x_R S_0 d \Rightarrow \\ &\Rightarrow C_1^u - C_1^d = x_R S_0 u - x_R S_0 d \Rightarrow C_1^u - C_1^d = x_R S_0 (u - d) \Rightarrow \\ &\Rightarrow x_R = \frac{C_1^u - C_1^d}{S_0 (u - d)} \end{aligned}$$

Y obtenemos que  $y_R$ :

$$\begin{aligned} \begin{cases} x_R S_1^u + y_R A_1 = C_1^u \Rightarrow x_R S_0 u = C_1^u - y_R A_1 \Rightarrow x_R S_0 = \frac{C_1^u - y_R A_0 e^r}{u} \\ x_R S_1^d + y_R A_1 = C_1^d \Rightarrow x_R S_0 d = C_1^d - y_R A_1 \Rightarrow x_R S_0 = \frac{C_1^d - y_R A_0 e^r}{d} \end{cases} &\Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{C_1^u - y_R A_0 e^r}{u} = \frac{C_1^d - y_R A_0 e^r}{d} \Rightarrow \\ &\Rightarrow d(C_1^u - y_R A_0 e^r) = u(C_1^d - y_R A_0 e^r) \Rightarrow \\ &\Rightarrow dC_1^u - dy_R A_0 e^r = uC_1^d - uy_R A_0 e^r \Rightarrow \\ &\Rightarrow uy_R A_0 e^r - dy_R A_0 e^r = uC_1^d - dC_1^u \Rightarrow \\ &\Rightarrow y_R A_0 e^r (u - d) = uC_1^d - dC_1^u \Rightarrow y_R = \frac{uC_1^d - dC_1^u}{(u - d)A_0 e^r} \end{aligned}$$

El valor de la call será igual al valor inicial de la cartera replicante:

$$\begin{aligned} C_0 = x_R S_0 + y_R A_0 &\Rightarrow C_0 = \frac{C_1^u - C_1^d}{S_0 (u - d)} S_0 + \frac{uC_1^d - dC_1^u}{(u - d)A_0 e^r} A_0 = \\ &= \frac{C_1^u - C_1^d}{(u - d)} + \frac{uC_1^d - dC_1^u}{(u - d)e^r} = \frac{C_1^u e^r - C_1^d e^r + uC_1^d - dC_1^u}{(u - d)e^r} = \\ &= \frac{C_1^u e^r - dC_1^u}{(u - d)e^r} + \frac{uC_1^d - C_1^d e^r}{(u - d)e^r} = \frac{(e^r - d)C_1^u}{(u - d)e^r} + \frac{(u - e^r)C_1^d}{(u - d)e^r} = \\ &= \frac{e^r - d}{u - d} C_1^u e^{-r} + \frac{u - e^r}{u - d} C_1^d e^{-r} \Rightarrow C_0 = \left( \frac{e^r - d}{u - d} C_1^u + \frac{u - e^r}{u - d} C_1^d \right) e^{-r} \end{aligned}$$

## Anexo II.b: Desarrollo de la Condición Necesaria para que se Ejercite el Derecho de la Opción Call en el Modelo Binomial

Para que se ejercite el derecho de compra de la opción call, la relación entre el subyacente y el precio de ejercicio ha de ser:

$$S_T^{u^j d^{n-j}} > K$$

Teniendo esto en cuenta se puede saber para qué valores de  $j$  se cumple esta expresión, es decir, cuantos movimientos alcistas ha de tener el subyacente como mínimo para que se ejercite la opción. De esta forma:

$$\begin{aligned} S_T^{u^j d^{n-j}} > K &\Rightarrow S_0 u^j d^{n-j} > K \Rightarrow \frac{S_t}{K} > \frac{1}{u^j d^{n-j}} \Rightarrow \frac{S_t}{K} > u^{-j} d^{-(n-j)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \ln\left(\frac{S_t}{K}\right) > \ln(u^{-j} d^{-(n-j)}) \Rightarrow \ln\left(\frac{S_t}{K}\right) > \ln(u^{-j}) + \ln(d^{-(n-j)}) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \ln\left(\frac{S_t}{K}\right) > -j \ln(u) - (n-j) \ln(d) \xrightarrow{u=e^{\sigma\sqrt{\frac{T-t}{n}}}; d=e^{-\sigma\sqrt{\frac{T-t}{n}}}} \\ &\Rightarrow \ln\left(\frac{S_t}{K}\right) > -j \ln\left(e^{\sigma\sqrt{\frac{T-t}{n}}}\right) - (n-j) \ln\left(e^{-\sigma\sqrt{\frac{T-t}{n}}}\right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \ln\left(\frac{S_t}{K}\right) > -j\sigma\sqrt{\frac{T-t}{n}} + (n-j)\sigma\sqrt{\frac{T-t}{n}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \ln\left(\frac{S_t}{K}\right) > -2j\sigma\sqrt{\frac{T-t}{n}} + n\sigma\sqrt{\frac{T-t}{n}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2j\sigma\sqrt{\frac{T-t}{n}} > n\sigma\sqrt{\frac{T-t}{n}} - \ln\left(\frac{S_t}{K}\right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow j > \frac{n\sigma\sqrt{\frac{T-t}{n}}}{2\sigma\sqrt{\frac{T-t}{n}}} - \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)}{2\sigma\sqrt{\frac{T-t}{n}}} \Rightarrow j > \frac{n}{2} - \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)}{2\sigma\sqrt{\frac{T-t}{n}}} \end{aligned}$$

### Anexo II.c: Desarrollo de la Formula de la Valoración de la Call en el Modelo Binomial

$$\begin{aligned}
 C_t &= e^{-r(T-t)} \sum_{j>a}^n \binom{n}{j} \hat{p}^j (1 - \hat{p})^{n-j} (S_t u^j d^{n-j} - K) = e^{-r(T-t)} \sum_{j>a}^n \binom{n}{j} \hat{p}^j (1 - \hat{p})^{n-j} S_t u^j d^{n-j} - \binom{n}{j} \hat{p}^j (1 - \hat{p})^{n-j} K = \\
 &= e^{-r(T-t)} \left[ \sum_{j>a}^n \binom{n}{j} \hat{p}^j (1 - \hat{p})^{n-j} S_t u^j d^{n-j} - \sum_{j>a}^n \binom{n}{j} \hat{p}^j (1 - \hat{p})^{n-j} K \right] = \\
 &= e^{-r(T-t)} \left[ S_0 \sum_{j>a}^n \binom{n}{j} \hat{p}^j (1 - \hat{p})^{n-j} u^j d^{n-j} - K \sum_{j>a}^n \binom{n}{j} \hat{p}^j (1 - \hat{p})^{n-j} \right] = \\
 &= S_t e^{-r(T-t)} \sum_{j>a}^n \binom{n}{j} \hat{p}^j (1 - \hat{p})^{n-j} u^j d^{n-j} - K e^{-r(T-t)} \sum_{j>a}^n \binom{n}{j} \hat{p}^j (1 - \hat{p})^{n-j} = \\
 &= S_t e^{-r(T-t)} \sum_{j>a}^n \binom{n}{j} (\hat{p}u)^j [(1 - \hat{p})d]^{n-j} - K e^{-r(T-t)} \sum_{j>a}^n \binom{n}{j} \hat{p}^j (1 - \hat{p})^{n-j} = \\
 &\xrightarrow{\hat{p}' = \frac{\hat{p}u}{\hat{p}u + (1 - \hat{p})d}; (1 - \hat{p}') = \frac{(1 - \hat{p})d}{\hat{p}u + (1 - \hat{p})d}} S_t e^{-r(T-t)} [\hat{p}u + (1 - \hat{p})d]^n \sum_{j>a}^n \binom{n}{j} (\hat{p}')^j (1 - \hat{p}')^{n-j} - K e^{-r(T-t)} \sum_{j>a}^n \binom{n}{j} \hat{p}^j (1 - \hat{p})^{n-j} = \\
 &\xrightarrow{\hat{p}u + (1 - \hat{p})d = e^{r \frac{(T-t)}{n}}} S_t \sum_{j>a}^n \binom{n}{j} (\hat{p}')^j (1 - \hat{p}')^{n-j} - K e^{-r(T-t)} \sum_{j>a}^n \binom{n}{j} \hat{p}^j (1 - \hat{p})^{n-j}
 \end{aligned}$$

Esta fórmula de valoración de la prima de la call se puede expresar como:

$$C_t = S_t B_1(a) - K e^{-rn} B_2(a)$$

Donde:

$$B_1(a) = P[X > a] \rightarrow X \sim B(n, \hat{p}')$$

$$\hat{p}' = \frac{\hat{p}u}{\hat{p}u + (1 - \hat{p})d} = \frac{e^{r\Delta t} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}} e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} e^{-r\Delta t}$$

$$(1 - \hat{p}') = \frac{(1 - \hat{p})d}{\hat{p}u + (1 - \hat{p})d} = \frac{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{r\Delta t}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}} e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} e^{-r\Delta t}$$

$$B_2(a) = P[X > a] \rightarrow X \sim B(n, \hat{p})$$

$$\hat{p} = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} = \frac{e^{r\Delta t} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}$$

$$(1 - \hat{p}) = \frac{u - e^{r\Delta t}}{u - d} = \frac{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{r\Delta t}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}$$

### Anexo III: Desarrollo del Modelo Binomial en Opciones Put

Para las fórmulas genéricas de la valoración de una opción put seguiremos considerando a  $j$  como el número de movimientos alcistas que toma el subyacente en el periodo de valoración. En cambio, la variable  $a$  quedará definida como:

- $a$ : número máximo de movimientos alcistas para que  $S_T < K$ .

El pago a vencimiento de una put y su probabilidad neutral al riesgo, teniendo en cuenta  $n$  nodos temporales hasta vencimiento, quedarán definidos como:

$$P_T^{u^j \cdot d^{n-j}} = \max\{K - S_t u^j d^{n-j}; 0\}, \forall j \{0 \leq Z \leq n\}$$

$$P \left[ P_T^{u^j \cdot d^{n-j}} = \max\{K - S_0 u^j d^{n-j}; 0\} \right] = \binom{n}{j} p^j q^{n-j}, \forall j \{0 \leq Z \leq n\}$$

Para que la opción se encuentre in-the-money, es decir, para que se ejecute el derecho de compra y el intercambio de capitales a vencimiento sea superior a 0, el precio del activo subyacente ha de ser inferior al precio de ejercicio ( $S_T < K$ ). Esto implica que:

$$\begin{aligned}
S_T^{u^j d^{n-j}} < K &\Rightarrow S_0 u^j d^{n-j} < K \Rightarrow \frac{S_t}{K} < \frac{1}{u^j d^{n-j}} \Rightarrow \frac{S_t}{K} < u^{-j} d^{-(n-j)} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \ln\left(\frac{S_t}{K}\right) < \ln(u^{-j} d^{-(n-j)}) \Rightarrow \ln\left(\frac{S_t}{K}\right) < \ln(u^{-j}) + \ln(d^{-(n-j)}) \Rightarrow \\
&\Rightarrow \ln\left(\frac{S_t}{K}\right) < -j \ln(u) - (n-j) \ln(d) \xrightarrow{u=e^{\sigma\sqrt{\frac{T-t}{n}}}; d=e^{-\sigma\sqrt{\frac{T-t}{n}}}} \\
&\Rightarrow \ln\left(\frac{S_t}{K}\right) < -j \ln\left(e^{\sigma\sqrt{\frac{T-t}{n}}}\right) - (n-j) \ln\left(e^{-\sigma\sqrt{\frac{T-t}{n}}}\right) \Rightarrow \\
&\Rightarrow \ln\left(\frac{S_t}{K}\right) < -j\sigma\sqrt{\frac{T-t}{n}} + (n-j)\sigma\sqrt{\frac{T-t}{n}} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \ln\left(\frac{S_t}{K}\right) < -2j\sigma\sqrt{\frac{T-t}{n}} + n\sigma\sqrt{\frac{T-t}{n}} \Rightarrow \\
&\Rightarrow 2j\sigma\sqrt{\frac{T-t}{n}} < n\sigma\sqrt{\frac{T-t}{n}} - \ln\left(\frac{S_t}{K}\right) \Rightarrow \\
&\Rightarrow j < \frac{n\sigma\sqrt{\frac{T-t}{n}}}{2\sigma\sqrt{\frac{T-t}{n}}} - \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)}{2\sigma\sqrt{\frac{T-t}{n}}} \Rightarrow j < \frac{n}{2} - \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)}{2\sigma\sqrt{\frac{T-t}{n}}}
\end{aligned}$$

Por lo que, numéricamente a queda definida igual para la call que para la put:

$$a = \frac{n}{2} - \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)}{2\sigma\sqrt{\frac{T-t}{n}}}$$

Teniendo esto en cuenta y según el teorema fundamental de valoración de activos, el valor de la prima de la put se puede expresar como:

$$\begin{aligned}
P_t &= e^{-r(T-t)} \sum_{j < a}^n \binom{n}{j} \hat{p}^j (1 - \hat{p})^{n-j} (K - S_t u^j d^{n-j}) = e^{-r(T-t)} \sum_{j < a}^n \binom{n}{j} \hat{p}^j (1 - \hat{p})^{n-j} K - \binom{n}{j} \hat{p}^j (1 - \hat{p})^{n-j} S_t u^j d^{n-j} = \\
&= e^{-r(T-t)} \left[ \sum_{j < a}^n \binom{n}{j} \hat{p}^j (1 - \hat{p})^{n-j} K - \sum_{j < a}^n \binom{n}{j} \hat{p}^j (1 - \hat{p})^{n-j} S_t u^j d^{n-j} \right] = \\
&= e^{-r(T-t)} \left[ K \sum_{j < a}^n \binom{n}{j} \hat{p}^j (1 - \hat{p})^{n-j} - S_t \sum_{j < a}^n \binom{n}{j} \hat{p}^j (1 - \hat{p})^{n-j} u^j d^{n-j} \right] = \\
&= K e^{-r(T-t)} \sum_{j < a}^n \binom{n}{j} \hat{p}^j (1 - \hat{p})^{n-j} - S_t e^{-r(T-t)} \sum_{j < a}^n \binom{n}{j} \hat{p}^j (1 - \hat{p})^{n-j} u^j d^{n-j} = \\
&= K e^{-r(T-t)} \sum_{j < a}^n \binom{n}{j} \hat{p}^j (1 - \hat{p})^{n-j} - S_t e^{-r(T-t)} \sum_{j < a}^n \binom{n}{j} (\hat{p}u)^j [(1 - \hat{p})d]^{n-j} = \\
&\xrightarrow{\hat{p}' = \frac{\hat{p}u}{\hat{p}u + (1 - \hat{p})d}; (1 - \hat{p}') = \frac{(1 - \hat{p})d}{\hat{p}u + (1 - \hat{p})d}} K e^{-r(T-t)} \sum_{j < a}^n \binom{n}{j} \hat{p}^j (1 - \hat{p})^{n-j} - S_t e^{-r(T-t)} [\hat{p}u + (1 - \hat{p})d]^n \sum_{j < a}^n \binom{n}{j} (\hat{p}')^j (1 - \hat{p}')^{n-j} = \\
&\xrightarrow{\hat{p}u + (1 - \hat{p})d = e^{r \frac{(T-t)}{n}}} K e^{-r(T-t)} \sum_{j < a}^n \binom{n}{j} \hat{p}^j (1 - \hat{p})^{n-j} - S_t \sum_{j < a}^n \binom{n}{j} (\hat{p}')^j (1 - \hat{p}')^{n-j} = K e^{-r(T-t)} B_2(a) - S_t B_1(a)
\end{aligned}$$



Donde:

$$B_1(a) = P[X < a] \rightarrow X \sim B(n, \hat{p}')$$

$$\hat{p}' = \frac{\hat{p}u}{\hat{p}u + (1 - \hat{p})d} = \frac{e^{r\Delta t} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}} e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} e^{-r\Delta t}$$

$$(1 - \hat{p}') = \frac{(1 - \hat{p})d}{\hat{p}u + (1 - \hat{p})d} = \frac{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{r\Delta t}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}} e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} e^{-r\Delta t}$$

$$B_2(a) = P[X < a] \rightarrow X \sim B(n, \hat{p})$$

$$\hat{p} = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} = \frac{e^{r\Delta t} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}$$

$$(1 - \hat{p}) = \frac{u - e^{r\Delta t}}{u - d} = \frac{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{r\Delta t}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}$$

## Anexo IV: Desarrollos de la Aproximación al Modelo de Black-Scholes con Opciones Call

### Anexo IV.a: Límite de la Distribución $X \sim B_2(n, \hat{p})$

La segunda distribución binomial de la fórmula de valoración de las opciones call, cuando  $n$  tiende a infinito, queda una distribución normal tal que:

$$X \sim B_2(n, \hat{p}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X \sim N_2[\mu = n\hat{p}; \sigma = n\hat{p}(1 - \hat{p})]$$

Teniendo en cuenta que la distribución normal estandarizada se define como:  $Z \sim N(0,1)$ :

$$\begin{aligned} P[X > \alpha] &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} P\left[Z > \frac{\alpha - n\hat{p}}{\sqrt{n\hat{p}(1 - \hat{p})}}\right] = 1 - P\left[Z < \frac{\alpha - n\hat{p}}{\sqrt{n\hat{p}(1 - \hat{p})}}\right] = \\ &= 1 - N\left(\frac{\alpha - n\hat{p}}{\sqrt{n\hat{p}(1 - \hat{p})}}\right) = \\ &= N\left(\frac{n\hat{p} - \alpha}{\sqrt{n\hat{p}(1 - \hat{p})}}\right) \xrightarrow{\alpha = \frac{n}{2} - \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)}{2\sigma\sqrt{\frac{(T-t)}{n}}}} N\left(\frac{n\hat{p} - \frac{n}{2} - \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)}{2\sigma\sqrt{\frac{(T-t)}{n}}}}{\sqrt{n\hat{p}(1 - \hat{p})}}\right) = \\ &= N\left(\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)}{2\sigma\sqrt{n\hat{p}(1 - \hat{p})}\frac{(T-t)}{n}} + \frac{n\left(\hat{p} - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{n}\sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p})}}\right) = \\ &= N\left(\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)}{2\sigma\sqrt{n\hat{p}(1 - \hat{p})}\frac{(T-t)}{n}} + \frac{n\left(\hat{p} - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{n}\sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p})}}\right) = \\ &= N\left(\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)}{2\sigma\sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p})}(T-t)} + \frac{\sqrt{n}\left(\hat{p} - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p})}}\right) \end{aligned}$$

El valor de la probabilidad normalizada sigue dependiendo de  $n$ , cuando para el modelo  $n = \infty$ , de tal manera que resolveremos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)}{2\sigma\sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p})}(T-t)} + \frac{\sqrt{n}\left(\hat{p} - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p})}}$$

Empezaremos resolviendo el límite de  $\hat{p}$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{p} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{r\frac{(T-t)}{n}} - e^{-\sigma\sqrt{\frac{(T-t)}{n}}}}{e^{\sigma\sqrt{\frac{(T-t)}{n}}} - e^{-\sigma\sqrt{\frac{(T-t)}{n}}}}$$

Para ello tomaremos las series de Taylor<sup>28</sup> hasta el término cuadrático de la función exponencial  $e^x$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} e^{r\frac{(T-t)}{n}} \approx 1 + r\frac{(T-t)}{n} + \frac{\left(r\frac{(T-t)}{n}\right)^2}{2} \\ e^{\sigma\sqrt{\frac{(T-t)}{n}}} \approx 1 + \sigma\sqrt{\frac{(T-t)}{n}} + \frac{\left(\sigma\sqrt{\frac{(T-t)}{n}}\right)^2}{2} \\ e^{-\sigma\sqrt{\frac{(T-t)}{n}}} \approx 1 - \sigma\sqrt{\frac{(T-t)}{n}} + \frac{\left(-\sigma\sqrt{\frac{(T-t)}{n}}\right)^2}{2} \end{array} \right.$$

Teniendo esto en cuenta:

---

<sup>28</sup> Las series de Taylor de una función se definen como:  $f^n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(x)}{n!}$ .

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{r\frac{(T-t)}{n}} - e^{-\sigma\sqrt{\frac{(T-t)}{n}}}}{e^{\sigma\sqrt{\frac{(T-t)}{n}}} - e^{-\sigma\sqrt{\frac{(T-t)}{n}}}} \approx \\
& \approx \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + r\frac{(T-t)}{n} + \frac{\left(r\frac{(T-t)}{n}\right)^2}{2} - 1 + \sigma\sqrt{\frac{(T-t)}{n}} - \frac{\left(-\sigma\sqrt{\frac{(T-t)}{n}}\right)^2}{2}}{1 + \sigma\sqrt{\frac{(T-t)}{n}} + \frac{\left(\sigma\sqrt{\frac{(T-t)}{n}}\right)^2}{2} - 1 + \sigma\sqrt{\frac{(T-t)}{n}} - \frac{\left(-\sigma\sqrt{\frac{(T-t)}{n}}\right)^2}{2}} = \\
& = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r\frac{(T-t)}{n} + \frac{1}{2}r^2\left(\frac{(T-t)}{n}\right)^2 + \sigma\sqrt{\frac{(T-t)}{n}} - \frac{1}{2}\sigma^2\frac{(T-t)}{n}}{\sigma\sqrt{\frac{(T-t)}{n}} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{(T-t)}{n} + \sigma\sqrt{\frac{(T-t)}{n}} - \frac{\sigma^2}{2}\frac{(T-t)}{n}} = \\
& = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{(T-t)}{n} + \frac{1}{2}r^2\left(\frac{(T-t)}{n}\right)^2 + \sigma\sqrt{\frac{(T-t)}{n}}}{2\sigma\sqrt{\frac{(T-t)}{n}}} = \\
& = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{(T-t)}{n}} \left[ \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\sqrt{\frac{(T-t)}{n}} + \frac{1}{2}r^2\left(\frac{(T-t)}{n}\right)^{1,5} + \sigma \right]}{2\sigma\sqrt{\frac{(T-t)}{n}}} = \\
& = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\sqrt{\frac{(T-t)}{n}} + \frac{1}{2}r^2\left(\frac{(T-t)}{n}\right)^{1,5} + \sigma}{2\sigma} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Por tanto:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p})} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2}$$

Del mismo modo:

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \left( \hat{p} - \frac{1}{2} \right) &\approx \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \left( \frac{\left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{(T-t)}{n} + \frac{1}{2} r^2 \left( \frac{(T-t)}{n} \right)^2 + \sigma \sqrt{\frac{(T-t)}{n}}}{2\sigma \sqrt{\frac{(T-t)}{n}}} - \frac{1}{2} \right) = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{(T-t)}{\sqrt{n}} + \frac{\sqrt{n}}{2} r^2 \frac{(T-t)^2}{n^2} + \sigma \sqrt{(T-t)}}{2\sigma \sqrt{\frac{(T-t)}{n}}} - \frac{\sqrt{n}}{2} = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}} \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t) + \frac{\sqrt{n}}{2} r^2 \frac{(T-t)^2}{n^2} + \sigma \sqrt{(T-t)} - \sigma \sqrt{\frac{(T-t)}{n}} \sqrt{n}}{2\sigma \sqrt{\frac{(T-t)}{n}}} = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}} \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t) + \frac{1}{2\sqrt{n}} r^2 \frac{(T-t)^2}{n} + \sigma \sqrt{(T-t)} - \sigma \sqrt{(T-t)}}{2\sigma \sqrt{\frac{(T-t)}{n}}} = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}} \left[ \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t) + \frac{1}{2} r^2 \frac{(T-t)^2}{n} \right]}{\frac{1}{\sqrt{n}} 2\sigma \sqrt{(T-t)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t) + \frac{1}{2} r^2 \frac{(T-t)^2}{n}}{2\sigma \sqrt{(T-t)}} = \\
&= \frac{\left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t)}{2\sigma \sqrt{(T-t)}} = \frac{\left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \sqrt{(T-t)}}{2\sigma}
\end{aligned}$$

Tomando los límites anteriores y el límite original que pretendíamos resolver:

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \left( \frac{S_t}{K} \right)}{2\sigma \sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})(T-t)}} + \frac{\sqrt{n} \left( \hat{p} - \frac{1}{2} \right)}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}} &= \\
&= \frac{\ln \left( \frac{S_t}{K} \right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} 2\sigma \sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})(T-t)}} + \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \left( \hat{p} - \frac{1}{2} \right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}} \\
&\xrightarrow{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})} = \frac{1}{2}} \frac{\ln \left( \frac{S_t}{K} \right)}{2\sigma \frac{1}{2} \sqrt{(T-t)}} + \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \left( \hat{p} - \frac{1}{2} \right)}{\frac{1}{2}} \\
&\xrightarrow{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \left( \hat{p} - \frac{1}{2} \right) = \frac{\left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \sqrt{(T-t)}}{2\sigma}} \frac{\ln \left( \frac{S_t}{K} \right)}{\sigma \sqrt{(T-t)}} + 2 \frac{\left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \sqrt{(T-t)}}{2\sigma} \\
&= \frac{\ln \left( \frac{S_t}{K} \right) + \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t)}{\sigma \sqrt{(T-t)}} = d_2
\end{aligned}$$

Podemos concluir que:

$$N\left(\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)}{2\sigma\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})(T-t)}} + \frac{\sqrt{n}\left(\hat{p} - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}\right)$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)}{2\sigma\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})(T-t)}} + \frac{\sqrt{n}\left(\hat{p} - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}} = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} N\left(\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right)$$

#### Anexo IV.b: Límite de la Distribución $X \sim B_1(n, \hat{p}')$

La segunda distribución binomial de la fórmula de valoración de las opciones call, cuando  $n$  tiende a infinito, queda una distribución normal tal que:

$$X \sim B_1(n, \hat{p}') \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X \sim N_1[\mu = n\hat{p}' ; \sigma = n\hat{p}'(1 - \hat{p}')] ]$$

Teniendo en cuenta que la distribución normal estandarizada se define como:  $Z \sim N(0,1)$ :

$$P[X > \alpha] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P\left[Z > \frac{\alpha - n\hat{p}'}{\sqrt{n\hat{p}'(1 - \hat{p}')}}\right] = 1 - P\left[Z < \frac{\alpha - n\hat{p}'}{\sqrt{n\hat{p}'(1 - \hat{p}')}}\right] =$$

$$= 1 - N\left(\frac{\alpha - n\hat{p}'}{\sqrt{n\hat{p}'(1 - \hat{p}')}}\right) =$$

$$= N\left(\frac{n\hat{p}' - \alpha}{\sqrt{n\hat{p}'(1 - \hat{p}')}}\right) \xrightarrow{\alpha = \frac{n}{2} - \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)}{2\sigma\sqrt{\frac{(T-t)}{n}}}} N\left(\frac{n\hat{p}' - \frac{n}{2} - \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)}{2\sigma\sqrt{\frac{(T-t)}{n}}}}{\sqrt{n\hat{p}'(1 - \hat{p}')}}\right) =$$

$$= N\left(\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)}{2\sigma\sqrt{n\hat{p}'(1 - \hat{p}')}\frac{(T-t)}{n}} + \frac{n\left(\hat{p}' - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{n}\sqrt{\hat{p}'(1 - \hat{p}')}}\right) =$$

$$= N\left(\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)}{2\sigma\sqrt{n\hat{p}'(1 - \hat{p}')}\frac{(T-t)}{n}} + \frac{\sqrt{n}\left(\hat{p}' - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\hat{p}'(1 - \hat{p}')}}\right) =$$

$$= N\left(\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)}{2\sigma\sqrt{\hat{p}'(1 - \hat{p}')}(T-t)} + \frac{\sqrt{n}\left(\hat{p}' - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\hat{p}'(1 - \hat{p}')}}\right)$$

El valor de la probabilidad normalizada sigue dependiendo de  $n$ , cuando para el modelo  $n = \infty$ , de tal manera que resolveremos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)}{2\sigma\sqrt{\hat{p}'(1-\hat{p}')(T-t)}} + \frac{\sqrt{n}\left(\hat{p}' - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\hat{p}'(1-\hat{p}')}} =$$

Empezaremos resolviendo el límite de  $\hat{p}'$ :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{p}' &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{r\frac{(T-t)}{n}} - e^{-\sigma\sqrt{\frac{(T-t)}{n}}}}{e^{\sigma\sqrt{\frac{(T-t)}{n}}} - e^{-\sigma\sqrt{\frac{(T-t)}{n}}}} e^{\sigma\sqrt{\frac{(T-t)}{n}}} e^{-r\frac{(T-t)}{n}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{r\frac{(T-t)}{n}} e^{\sigma\sqrt{\frac{(T-t)}{n}}} e^{-r\frac{(T-t)}{n}} - e^{-\sigma\sqrt{\frac{(T-t)}{n}}} e^{\sigma\sqrt{\frac{(T-t)}{n}}} e^{-r\frac{(T-t)}{n}}}{e^{\sigma\sqrt{\frac{(T-t)}{n}}} - e^{-\sigma\sqrt{\frac{(T-t)}{n}}}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\sigma\sqrt{\frac{(T-t)}{n}}} - e^{-r\frac{(T-t)}{n}}}{e^{\sigma\sqrt{\frac{(T-t)}{n}}} - e^{-\sigma\sqrt{\frac{(T-t)}{n}}}} \end{aligned}$$

Para ello tomaremos las series de Taylor hasta el término cuadrático de la función exponencial  $e^x$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} e^{-r\frac{(T-t)}{n}} \approx 1 - r\frac{(T-t)}{n} + \frac{\left(-r\frac{(T-t)}{n}\right)^2}{2} \\ e^{\sigma\sqrt{\frac{(T-t)}{n}}} \approx 1 + \sigma\sqrt{\frac{(T-t)}{n}} + \frac{\left(\sigma\sqrt{\frac{(T-t)}{n}}\right)^2}{2} \\ e^{-\sigma\sqrt{\frac{(T-t)}{n}}} \approx 1 - \sigma\sqrt{\frac{(T-t)}{n}} + \frac{\left(-\sigma\sqrt{\frac{(T-t)}{n}}\right)^2}{2} \end{array} \right.$$

Teniendo esto en cuenta:

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\sigma \sqrt{\frac{(T-t)}{n}}} - e^{-r \frac{(T-t)}{n}}}{e^{\sigma \sqrt{\frac{(T-t)}{n}}} - e^{-\sigma \sqrt{\frac{(T-t)}{n}}}} \approx \\
& \approx \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sigma \sqrt{\frac{(T-t)}{n}} + \frac{\left(\sigma \sqrt{\frac{(T-t)}{n}}\right)^2}{2} - 1 + r \frac{(T-t)}{n} - \frac{\left(-r \frac{(T-t)}{n}\right)^2}{2}}{1 + \sigma \sqrt{\frac{(T-t)}{n}} + \frac{\left(\sigma \sqrt{\frac{(T-t)}{n}}\right)^2}{2} - 1 + \sigma \sqrt{\frac{(T-t)}{n}} - \frac{\left(-\sigma \sqrt{\frac{(T-t)}{n}}\right)^2}{2}} = \\
& = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma \sqrt{\frac{(T-t)}{n}} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{(T-t)}{n} + r \frac{(T-t)}{n} - \frac{1}{2} r^2 \left(\frac{(T-t)}{n}\right)^2}{2\sigma \sqrt{\frac{(T-t)}{n}} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{(T-t)}{n} - \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{(T-t)}{n}} = \\
& = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{(T-t)}{n}} \left[ \sigma + \frac{1}{2} \sigma^2 \sqrt{\frac{(T-t)}{n}} + r \sqrt{\frac{(T-t)}{n}} - \frac{1}{2} r^2 \left(\frac{(T-t)}{n}\right)^{1,5} \right]}{2\sigma \sqrt{\frac{(T-t)}{n}}} = \\
& = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma + \frac{1}{2} \sigma^2 \sqrt{\frac{(T-t)}{n}} + r \sqrt{\frac{(T-t)}{n}} - \frac{1}{2} r^2 \left(\frac{(T-t)}{n}\right)^{1,5}}{2\sigma} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Por tanto:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\hat{p}'(1 - \hat{p}')} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2}$$

Del mismo modo:



$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \left( \hat{p}' - \frac{1}{2} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \left( \frac{\sigma \sqrt{\frac{(T-t)}{n}} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{(T-t)}{n} + r \frac{(T-t)}{n} - \frac{1}{2} r^2 \left( \frac{(T-t)}{n} \right)^2}{2\sigma \sqrt{\frac{(T-t)}{n}}} - \frac{1}{2} \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma \sqrt{(T-t)} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{(T-t)}{n} + r \frac{(T-t)}{n} - \frac{1}{2} r^2 \left( \frac{(T-t)}{n} \right)^2}{2\sigma \sqrt{\frac{(T-t)}{n}}} - \frac{\sqrt{n}}{2} = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma \sqrt{(T-t)} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{(T-t)}{\sqrt{n}} + r \frac{(T-t)}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2} r^2 \frac{(T-t)^2}{n\sqrt{n}}}{2\sigma \sqrt{\frac{(T-t)}{n}}} - \frac{\sigma \sqrt{(T-t)}}{2\sigma \sqrt{\frac{(T-t)}{n}}} = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{n}} \sigma^2 (T-t) + \frac{1}{\sqrt{n}} r (T-t) - \frac{1}{2\sqrt{n}} r^2 \frac{(T-t)^2}{n}}{\frac{1}{\sqrt{n}} 2\sigma \sqrt{(T-t)}} = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}} \left[ \frac{1}{2} \sigma^2 (T-t) + r (T-t) - \frac{1}{2} r^2 \frac{(T-t)^2}{n} \right]}{\frac{1}{\sqrt{n}} 2\sigma \sqrt{(T-t)}} = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left( r + \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t) - \frac{1}{2} r^2 \frac{(T-t)^2}{n}}{2\sigma \sqrt{(T-t)}} = \frac{\left( r + \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t)}{2\sigma \sqrt{(T-t)}} = \\
&= \frac{\left( r + \frac{\sigma^2}{2} \right) \sqrt{(T-t)}}{2\sigma}
\end{aligned}$$

Tomando los límites anteriores y el límite original que pretendíamos resolver:

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)}{2\sigma\sqrt{\hat{p}'(1-\hat{p}')(T-t)}} + \frac{\sqrt{n}\left(\hat{p}' - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\hat{p}'(1-\hat{p}')}} = \\
&= \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} 2\sigma\sqrt{\hat{p}'(1-\hat{p}')(T-t)}} + \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}\left(\hat{p}' - \frac{1}{2}\right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\hat{p}'(1-\hat{p}')}} \\
&\xrightarrow{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\hat{p}'(1-\hat{p}')} = \frac{1}{2}} \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)}{2\sigma \frac{1}{2} \sqrt{(T-t)}} + \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}\left(\hat{p}' - \frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}} \\
&\xrightarrow{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}\left(\hat{p}' - \frac{1}{2}\right) = \frac{\left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\sqrt{(T-t)}}{2\sigma}} \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} + 2 \frac{\left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\sqrt{(T-t)}}{2\sigma} \\
&= \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} = d_1
\end{aligned}$$

Podemos concluir que:

$$\begin{aligned}
& N\left(\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)}{2\sigma\sqrt{\hat{p}'(1-\hat{p}')(T-t)}} + \frac{\sqrt{n}\left(\hat{p}' - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\hat{p}'(1-\hat{p}')}}\right) \\
&\xrightarrow{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)}{2\sigma\sqrt{\hat{p}'(1-\hat{p}')(T-t)}} + \frac{\sqrt{n}\left(\hat{p}' - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\hat{p}'(1-\hat{p}')}} = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}} N\left(\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right)
\end{aligned}$$

## Anexo V: Desarrollo de la Aproximación al Modelo de Black-Scholes con Opciones Put

Recordando las conclusiones a las que llegamos presentando el modelo binomial para la valoración de la put:

$$P_t = Ke^{-r(T-t)}B_2(a) - S_tB_1(a)$$

Donde:

$$B_1(a) = P[X < a] \rightarrow X \sim B(n, \hat{p}')$$

$$\hat{p}' = \frac{\hat{p}u}{\hat{p}u + (1 - \hat{p})d} = \frac{e^{r\Delta t} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}} e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} e^{-r\Delta t}$$

$$(1 - \hat{p}') = \frac{(1 - \hat{p})d}{\hat{p}u + (1 - \hat{p})d} = \frac{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{r\Delta t}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}} e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} e^{-r\Delta t}$$

$$B_2(a) = P[X < a] \rightarrow X \sim B(n, \hat{p})$$

$$\hat{p} = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} = \frac{e^{r\Delta t} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}$$

$$(1 - \hat{p}) = \frac{u - e^{r\Delta t}}{u - d} = \frac{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{r\Delta t}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}$$

Tomando la segunda distribución binomial, esta se puede aproximar a la normal de tal forma que:

$$X \sim B_2(n, \hat{p}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} X \sim N_2[\mu = n\hat{p}; \sigma = n\hat{p}(1 - \hat{p})]$$

Teniendo en cuenta que la distribución normal estandarizada se define como:  $Z \sim N(0,1)$ :

$$\begin{aligned}
P[X < \alpha] &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} P\left[Z < \frac{\alpha - n\hat{p}}{\sqrt{n\hat{p}(1-\hat{p})}}\right] = 1 - P\left[Z > \frac{\alpha - n\hat{p}}{\sqrt{n\hat{p}(1-\hat{p})}}\right] = \\
&= P\left[Z > \frac{n\hat{p} - \alpha}{\sqrt{n\hat{p}(1-\hat{p})}}\right] \xrightarrow{\alpha = \frac{n}{2} - \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)}{2\sigma\sqrt{\frac{T-t}{n}}}} P\left[Z > \frac{n\hat{p} - \frac{n}{2} - \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)}{2\sigma\sqrt{\frac{T-t}{n}}}}{\sqrt{n\hat{p}(1-\hat{p})}}\right] = \\
&= P\left[Z > \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)}{2\sigma\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})(T-t)}} + \frac{\sqrt{n}\left(\hat{p} - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}\right] \\
&\xrightarrow{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \frac{\sqrt{n}\left(\hat{p} - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}}{2\sigma\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})(T-t)}} = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}} P\left[Z > \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right] = \\
&= 1 - P\left[Z < \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right] = \\
&= P\left[Z < -\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right] = N\left(-\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right) = \\
&= N(-d_2)
\end{aligned}$$

Ahora, tomando la primera distribución binomial, se puede aproximar a la distribución normal como:

$$X \sim B_1(n, \hat{p}') \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X \sim N_1[\mu = n\hat{p}' ; \sigma = n\hat{p}'(1 - \hat{p}')]$$

Teniendo en cuenta que la distribución normal estandarizada se define como:  $Z \sim N(0,1)$ :

$$\begin{aligned}
P[X < \alpha] &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} P\left[Z < \frac{\alpha - n\hat{p}'}{\sqrt{n\hat{p}'(1-\hat{p}')}}\right] = 1 - P\left[Z > \frac{\alpha - n\hat{p}'}{\sqrt{n\hat{p}'(1-\hat{p}')}}\right] = P\left[Z > \frac{n\hat{p}' - \alpha}{\sqrt{n\hat{p}'(1-\hat{p}')}}\right] \xrightarrow{\alpha = \frac{n}{2} - \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)}{2\sigma\sqrt{\frac{(T-t)}{n}}}} P\left[Z > \frac{n\hat{p}' - \frac{n}{2} - \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)}{2\sigma\sqrt{\frac{(T-t)}{n}}}}{\sqrt{n\hat{p}'(1-\hat{p}')}}\right] = \\
&= P\left[Z > \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)}{2\sigma\sqrt{\hat{p}'(1-\hat{p}')}(T-t)} + \frac{\sqrt{n}\left(\hat{p}' - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\hat{p}'(1-\hat{p}')}}\right] \xrightarrow{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \frac{\sqrt{n}\left(\hat{p}' - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\hat{p}'(1-\hat{p}')}} \ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{2\sigma\sqrt{\hat{p}'(1-\hat{p}')}(T-t)} = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}} \\
&\Rightarrow P\left[Z > \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right] = 1 - P\left[Z < \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right] = P\left[Z < -\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right] = \\
&= N\left(-\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right) = N(-d_1)
\end{aligned}$$

De esta forma, se concluye en la fórmula de valoración de Black-Scholes para la opción put:

$$P_t = Ke^{-r(T-t)}N\left(-\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right) - S_tN\left(-\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right) =$$
$$= Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - S_tN(-d_1)$$

## Anexo VI: Derivadas parciales del Modelo de Black-Scholes

### Fórmula de Black-Scholes

La Fórmula de Black-Scholes quedó definida en el texto como:

$$C_t = S_t N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2)$$

$$P_t = K e^{-r(T-t)} N(-d_2) - S_t N(-d_1)$$

Donde:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} = d_1 - \sigma\sqrt{(T-t)}$$

$$N(x) = P[Z \leq x] \rightarrow Z \sim N(0,1)$$

$$P[Z \leq x] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

De tal manera que, toda la formula condensada, se puede escribir como:

$$C_t = S_t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx - K e^{-r(T-t)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$P_t = K e^{-r(T-t)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{-\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx - S_t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{-\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

### Derivada de $N(x)$ y relaciones entre $d_1$ y $d_2$

Derivada de  $N(x)$ .

Como establecimos anteriormente:

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Su derivada será:

$$n(x) = \frac{\partial N(x)}{\partial x} = \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{\partial x}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Relaciones entre  $d_1$  y  $d_2$

i. Demostración  $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{(T-t)}$

$$\begin{aligned}
 d_2 &= \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} = d_1 - \sigma\sqrt{(T-t)} = \\
 &= \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} - \sigma\sqrt{(T-t)} = \\
 &= \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + r(T-t) + \frac{\sigma^2}{2}(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} - \frac{\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} = \\
 &= \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + r(T-t) + \frac{\sigma^2}{2}(T-t) - \frac{2\sigma^2}{2}(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} = \\
 &= \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + r(T-t) - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} = d_2
 \end{aligned}$$



ii. Demostración  $S_t n(d_1) = K e^{-r(T-t)} n(d_2)$

$$\begin{aligned}
 S_t n(d_1) &= K e^{-r(T-t)} n(d_2) \xrightarrow{n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}} S_t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_1^2}{2}} = K e^{-r(T-t)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_2^2}{2}} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow S_t e^{-\frac{d_1^2}{2}} = K e^{-r(T-t)} e^{-\frac{d_2^2}{2}} \Rightarrow \frac{S_t}{K} = e^{-r(T-t)} e^{\frac{d_1^2}{2} - \frac{d_2^2}{2}} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \ln\left(\frac{S_t}{K}\right) = -r(T-t) + \frac{d_1^2 - d_2^2}{2} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \ln\left(\frac{S_t}{K}\right) = -r(T-t) + \frac{(d_1 - d_2)(d_1 + d_2)}{2} \xrightarrow{d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{(T-t)}} \\
 &\Rightarrow \ln\left(\frac{S_t}{K}\right) = -r(T-t) + \frac{(\sigma\sqrt{(T-t)})(2d_1 - \sigma\sqrt{(T-t)})}{2} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \ln\left(\frac{S_t}{K}\right) = -r(T-t) + \frac{2\left(\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right) - \sigma^2(T-t)}{2} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \ln\left(\frac{S_t}{K}\right) = -r(T-t) + \frac{2\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + 2r(T-t) + \sigma^2(T-t) - \sigma^2(T-t)}{2} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \ln\left(\frac{S_t}{K}\right) = -r(T-t) + \frac{2\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + 2r(T-t)}{2} \\
 &\Rightarrow \ln\left(\frac{S_t}{K}\right) = -r(T-t) + \ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + r(T-t) \Rightarrow \ln\left(\frac{S_t}{K}\right) = \ln\left(\frac{S_t}{K}\right)
 \end{aligned}$$

iii. Derivada Parcial en Función del Precio del Subyacente

La derivada parcial en función del precio es idéntica:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial d_1}{\partial S_t} &= \frac{d}{dS_t} \left[ \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \right] = \frac{1}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \frac{d}{dS_t} \left[ \ln\left(\frac{S_t}{K}\right) \right] = \frac{1}{S_t \sigma \sqrt{(T-t)}} \\
 \frac{\partial d_2}{\partial S_t} &= \frac{d}{dS_t} \left[ d_1 - \sigma\sqrt{(T-t)} \right] = \frac{1}{S_t \sigma \sqrt{(T-t)}} - \frac{d}{dS_t} \left[ \sigma\sqrt{(T-t)} \right] = \frac{1}{S_t \sigma \sqrt{(T-t)}}
 \end{aligned}$$

La relación entre las derivadas parciales en función del precio del subyacente:

$$\frac{\partial d_1}{\partial S_t} = \frac{\partial d_2}{\partial S_t} = \frac{1}{S_t \sigma \sqrt{(T-t)}}$$

iv. Derivada Parcial en Función del Vencimiento

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial d_1}{\partial(T-t)} &= \frac{d}{d(T-t)} \left[ \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \right] = \\
 &= \frac{1}{\sigma} \frac{d}{d(T-t)} \left[ \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sqrt{(T-t)}} \right] = \\
 &= \frac{1}{\sigma} \left[ \frac{d}{d(T-t)} \left[ \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)}{\sqrt{(T-t)}} \right] + \frac{d}{d(T-t)} \left[ \frac{\left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sqrt{(T-t)}} \right] \right] = \\
 &= \frac{1}{\sigma} \left[ -\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)}{2(T-t)\sqrt{(T-t)}} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) \frac{d}{d(T-t)} \left[ \frac{(T-t)}{\sqrt{(T-t)}} \right] \right] = \\
 &= \frac{1}{\sigma} \left[ -\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)}{2(T-t)\sqrt{(T-t)}} + \frac{\left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)}{2\sqrt{(T-t)}} \right] = \\
 &= \frac{-\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{2\sigma(T-t)\sqrt{(T-t)}}
 \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que  $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{(T-t)}$ :

$$\begin{aligned}
 d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{(T-t)} &\Rightarrow \frac{\partial d_2}{\partial(T-t)} = \frac{\partial d_1}{\partial(T-t)} - \frac{d}{d(T-t)} \left[ \sigma\sqrt{(T-t)} \right] \\
 &= \frac{-\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{2\sigma(T-t)\sqrt{(T-t)}} - \frac{\sigma}{2\sqrt{(T-t)}} \\
 &= \frac{-\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{2\sigma(T-t)\sqrt{(T-t)}} = \frac{\partial d_2}{\partial(T-t)}
 \end{aligned}$$

La relación entre las derivadas parciales en función del vencimiento:

$$\frac{\partial d_2}{\partial(T-t)} = \frac{\partial d_1}{\partial(T-t)} - \frac{\sigma}{2\sqrt{(T-t)}}$$

v. Derivada en Función de la Volatilidad

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial d_1}{\partial \sigma} &= \frac{d}{d\sigma} \left[ \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \right] = \\
 &= \frac{d}{d\sigma} \left[ \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \right] + \frac{d}{d\sigma} \left[ \frac{r(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \right] + \frac{d}{d\sigma} \left[ \frac{\frac{\sigma^2}{2}(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \right] = \\
 &= -\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + r(T-t)}{\sigma^2\sqrt{(T-t)}} + \frac{(T-t)}{\sqrt{(T-t)}} \frac{d}{d\sigma} \left[ \frac{\sigma^2}{2} \right] = \\
 &= -\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + r(T-t)}{\sigma^2\sqrt{(T-t)}} + \frac{(T-t)}{2\sqrt{(T-t)}} = \\
 &= -\frac{2\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + (2r - \sigma^2)(T-t)}{2\sigma^2\sqrt{(T-t)}}
 \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que  $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{(T-t)}$ :

$$\begin{aligned}
 d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{(T-t)} &\Rightarrow \frac{\partial d_2}{\partial \sigma} = \frac{\partial d_1}{\partial \sigma} - \frac{d}{d\sigma} [\sigma\sqrt{(T-t)}] = \\
 &= -\frac{2\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + (2r - \sigma^2)(T-t)}{2\sigma^2\sqrt{(T-t)}} - \sqrt{(T-t)} \\
 &= -\frac{2\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + (2r - \sigma^2)(T-t)}{2\sigma^2\sqrt{(T-t)}} + \frac{2\sigma^2(T-t)}{2\sigma^2\sqrt{(T-t)}} \\
 &= -\frac{2\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + (2r + \sigma^2)(T-t)}{2\sigma^2\sqrt{(T-t)}}
 \end{aligned}$$

La relación entre las derivadas parciales en función de la volatilidad

$$\frac{\partial d_2}{\partial \sigma} = \frac{\partial d_1}{\partial \sigma} - \sqrt{(T-t)}$$

vi. Derivada en Función del Tipo de Interés sin Riesgo

$$\frac{\partial d_1}{\partial r} = \frac{d}{dr} \left[ \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \right] = \frac{d}{dr} \left[ \frac{r(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \right] = \frac{(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} = \frac{\sqrt{(T-t)}}{\sigma}$$

Teniendo en cuenta que  $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{(T-t)}$ :

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{(T-t)} \Rightarrow \frac{\partial d_2}{\partial r} = \frac{\partial d_1}{\partial r} - \frac{d}{dr} [\sigma\sqrt{(T-t)}] = \frac{\sqrt{(T-t)}}{\sigma}$$

La relación entre las derivadas parciales en función de tipo de interés sin riesgo

$$\frac{\partial d_2}{\partial r} = \frac{\partial d_1}{\partial r}$$

### Anexo VI.a: Delta ( $\Delta$ )

La delta de la call queda definida como:

$$\begin{aligned} \Delta_{call} &= \frac{\partial C}{\partial S_t} = \frac{d}{dS_t} (S_t N(d_1) - Ke^{-r(T-t)} N(d_2)) = N(d_1) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\ln(\frac{S_t}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \end{aligned}$$

La delta de la put queda definida como:

$$\begin{aligned} \Delta_{put} &= \frac{\partial P}{\partial S_t} = \frac{d}{dS_t} (Ke^{-r(T-t)} N(-d_2) - S_t N(-d_1)) = -N(-d_1) = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{-\ln(\frac{S_t}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \end{aligned}$$

### Anexo VI.b: Gamma ( $\Gamma$ )

La gamma partiendo de la call:

$$\begin{aligned} \Gamma_{call} &= \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} = \frac{\partial \Delta}{\partial S_t} = \frac{d}{dS_t} [N(d_1)] = n(d_1) \frac{d}{dS_t} (d_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_1^2}{2}} \frac{1}{S_t \sigma \sqrt{(T-t)}} = \\ &= \frac{1}{S_t \sigma \sqrt{2\pi(T-t)}} e^{-\frac{\left(\frac{-\ln(\frac{S_t}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right)^2}{2}} \end{aligned}$$

La gamma partiendo de la put:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{put} &= \frac{\partial^2 P}{\partial S_t^2} = \frac{\partial \Delta}{\partial S_t} = \frac{d}{dS_t} [-N(-d_1)] = -n(-d_1) \frac{d}{dS_t} (-d_1) = n(-d_1) \frac{d}{dS_t} (d_1) = \\
&= n(-d_1) \frac{d}{dS_t} \left[ \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \right] = n(-d_1) \frac{1}{S_t\sigma} = \\
&= \frac{1}{S_t\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}} e^{-\frac{\left(\frac{-\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right)^2}{2}} = \Gamma_{call}
\end{aligned}$$

La gamma, por tanto:

$$\Gamma = \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} = \frac{\partial^2 P}{\partial S_t^2} = \frac{1}{S_t\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}} e^{-\frac{\left(\frac{-\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right)^2}{2}}$$

## Anexo VI.c: Theta ( $\Theta$ )

La theta de la call:

$$\begin{aligned}
 \Theta_{call} &= -\frac{\partial C}{\partial(T-t)} = \frac{d}{d(T-t)} \left( S_t N(d_1) - Ke^{-r(T-t)} N(d_2) \right) = -S_t \frac{\partial N(d_1)}{\partial(T-t)} + Ke^{-r(T-t)} \frac{\partial N(d_2)}{\partial(T-t)} - rKe^{-r(T-t)} N(d_2) = \\
 &= -S_t n(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial(T-t)} + Ke^{-r(T-t)} n(d_2) \frac{\partial d_2}{\partial(T-t)} - rKe^{-r(T-t)} N(d_2) \xrightarrow{\frac{\partial d_2}{\partial(T-t)} = \frac{\partial d_1}{\partial(T-t)} - \frac{\sigma}{2\sqrt{(T-t)}}} \\
 &\Rightarrow -S_t n(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial(T-t)} + Ke^{-r(T-t)} n(d_2) \left( \frac{\partial d_1}{\partial(T-t)} - \frac{\sigma}{2\sqrt{(T-t)}} \right) - rKe^{-r(T-t)} N(d_2) = \\
 &= -S_t n(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial(T-t)} + Ke^{-r(T-t)} n(d_2) \frac{\partial d_1}{\partial(T-t)} - Ke^{-r(T-t)} n(d_2) \frac{\sigma}{2\sqrt{(T-t)}} - rKe^{-r(T-t)} N(d_2) = \\
 &= \frac{\partial d_1}{\partial(T-t)} \left( -S_t n(d_1) + Ke^{-r(T-t)} n(d_2) \right) - Ke^{-r(T-t)} \left( n(d_2) \frac{\sigma}{2\sqrt{(T-t)}} + rN(d_2) \right) \xrightarrow{S_t n(d_1) = Ke^{-r(T-t)} n(d_2)} \\
 &\Rightarrow -Ke^{-r(T-t)} \left( n(d_2) \frac{\sigma}{2\sqrt{(T-t)}} + rN(d_2) \right) = -rKe^{-r(T-t)} N(d_2) - \frac{\sigma}{2\sqrt{(T-t)}} S_t n(d_1) = \\
 &= -rKe^{-r(T-t)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx - \frac{\sigma}{2\sqrt{(T-t)}} S_t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right)^2}{2}}
 \end{aligned}$$

La theta de la put:

$$\begin{aligned}
\Theta_{put} &= -\frac{\partial P}{\partial(T-t)} = \frac{d}{d(T-t)} \left( Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - S_tN(-d_1) \right) = -Ke^{-r(T-t)}\frac{\partial N(-d_2)}{\partial(T-t)} + S_t\frac{\partial N(-d_1)}{\partial(T-t)} + rKe^{-r(T-t)}N(-d_2) = \\
&= -Ke^{-r(T-t)}\frac{\partial[1-N(d_2)]}{\partial(T-t)} + S_t\frac{\partial[1-N(d_1)]}{\partial(T-t)} + rKe^{-r(T-t)}N(-d_2) = \\
&= Ke^{-r(T-t)}n(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial(T-t)} - S_tn(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial(T-t)} + rKe^{-r(T-t)}N(-d_2) \xrightarrow{\frac{\partial d_2}{\partial(T-t)} = \frac{\partial d_1}{\partial(T-t)} - \frac{\sigma}{2\sqrt{(T-t)}}} \\
&\Rightarrow Ke^{-r(T-t)}n(d_2)\left(\frac{\partial d_1}{\partial(T-t)} - \frac{\sigma}{2\sqrt{(T-t)}}\right) - S_tn(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial(T-t)} + rKe^{-r(T-t)}N(-d_2) = \\
&= Ke^{-r(T-t)}n(d_2)\frac{\partial d_1}{\partial(T-t)} - Ke^{-r(T-t)}n(d_2)\frac{\sigma}{2\sqrt{(T-t)}} - S_tn(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial(T-t)} + rKe^{-r(T-t)}N(-d_2) = \\
&= \frac{\partial d_1}{\partial(T-t)} \left( Ke^{-r(T-t)}n(d_2) - S_tn(d_1) \right) + Ke^{-r(T-t)} \left( -n(d_2)\frac{\sigma}{2\sqrt{(T-t)}} + rN(-d_2) \right) \xrightarrow{S_tn(d_1) = Ke^{-r(T-t)}n(d_2)} \\
&\Rightarrow Ke^{-r(T-t)} \left( -n(d_2)\frac{\sigma}{2\sqrt{(T-t)}} + rN(d_2) \right) = rKe^{-r(T-t)}N(-d_2) - \frac{\sigma}{2\sqrt{(T-t)}}S_tn(d_1) = \\
&= rKe^{-r(T-t)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx - \frac{\sigma}{2\sqrt{(T-t)}}S_t\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right)^2}{2\sigma^2(T-t)}}
\end{aligned}$$

## Anexo VI.d: Vega ( $v$ )

La vega de la call:

$$\begin{aligned}
 v_{call} &= \frac{\partial C}{\partial \sigma} = \frac{d}{d\sigma} \left( S_t N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2) \right) = S_t \frac{\partial N(d_1)}{\partial \sigma} - K e^{-r(T-t)} \frac{\partial N(d_2)}{\partial \sigma} \\
 &= S_t n(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial \sigma} - K e^{-r(T-t)} n(d_2) \frac{\partial d_2}{\partial \sigma} \xrightarrow{\frac{\partial d_2}{\partial \sigma} = \frac{\partial d_1}{\partial \sigma} - \sqrt{T-t}} \\
 &\Rightarrow S_t n(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial \sigma} - K e^{-r(T-t)} n(d_2) \left( \frac{\partial d_1}{\partial \sigma} - \sqrt{T-t} \right) = \\
 &= \frac{\partial d_1}{\partial \sigma} \left( S_t n(d_1) - K e^{-r(T-t)} n(d_2) \right) + K e^{-r(T-t)} n(d_2) \sqrt{T-t} = \\
 &= \xrightarrow{S_t n(d_1) = K e^{-r(T-t)} n(d_2)} K e^{-r(T-t)} n(d_2) \sqrt{T-t} = S_t n(d_1) \sqrt{T-t} = \\
 &= S_t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left( \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) \right)^2}{2\sigma^2(T-t)}} \sqrt{T-t}
 \end{aligned}$$

La vega de la put:

$$\begin{aligned}
 v_{put} &= \frac{\partial P}{\partial \sigma} = \frac{d}{d\sigma} \left( K e^{-r(T-t)} N(-d_2) - S_t N(-d_1) \right) = \\
 &= K e^{-r(T-t)} \frac{\partial [1 - N(d_2)]}{\partial \sigma} - S_t \frac{\partial [1 - N(d_1)]}{\partial \sigma} = \\
 &= -K e^{-r(T-t)} n(d_2) \frac{\partial d_2}{\partial \sigma} + S_t n(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial \sigma} \xrightarrow{\frac{\partial d_2}{\partial \sigma} = \frac{\partial d_1}{\partial \sigma} - \sqrt{T-t}} \\
 &\Rightarrow S_t n(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial \sigma} - K e^{-r(T-t)} n(d_2) \left( \frac{\partial d_1}{\partial \sigma} - \sqrt{T-t} \right) = \\
 &= \frac{\partial d_1}{\partial \sigma} \left( S_t n(d_1) - K e^{-r(T-t)} n(d_2) \right) + K e^{-r(T-t)} n(d_2) \sqrt{T-t} = \\
 &= \xrightarrow{S_t n(d_1) = K e^{-r(T-t)} n(d_2)} K e^{-r(T-t)} n(d_2) \sqrt{T-t} = S_t n(d_1) \sqrt{T-t} = \\
 &= S_t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left( \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) \right)^2}{2\sigma^2(T-t)}} \sqrt{T-t}
 \end{aligned}$$

La vega, por tanto:

$$v = \frac{\partial C}{\partial \sigma} = \frac{\partial P}{\partial \sigma} = S_t n(d_1) \sqrt{T-t} = S_t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left( \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) \right)^2}{2\sigma^2(T-t)}} \sqrt{T-t}$$



## Anexo VI.e: Rho ( $\rho$ )

La rho de la call:

$$\begin{aligned}
 \rho_{call} &= \frac{\partial C}{\partial r} = \frac{d}{dr} \left( S_t N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2) \right) = S_t \frac{\partial N(d_1)}{\partial r} - K e^{-r(T-t)} \frac{\partial N(d_2)}{\partial r} + (T-t) K e^{-r(T-t)} N(d_2) = \\
 &= S_t n(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial r} - K e^{-r(T-t)} n(d_2) \frac{\partial d_2}{\partial r} + (T-t) K e^{-r(T-t)} N(d_2) \frac{\partial d_2 = \partial d_1}{\partial r \partial r} \\
 &\Rightarrow S_t n(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial r} - K e^{-r(T-t)} n(d_2) \frac{\partial d_1}{\partial r} + (T-t) K e^{-r(T-t)} N(d_2) = \\
 &= \frac{\partial d_1}{\partial r} \left( S_t n(d_1) - K e^{-r(T-t)} n(d_2) \right) + (T-t) K e^{-r(T-t)} N(d_2) \xrightarrow{S_t n(d_1) = K e^{-r(T-t)} n(d_2)} (T-t) K e^{-r(T-t)} N(d_2) = \\
 &= (T-t) K e^{-r(T-t)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx
 \end{aligned}$$

La rho de la put:

$$\begin{aligned}
 \rho_{put} &= \frac{\partial P}{\partial r} = \frac{d}{dr} \left( K e^{-r(T-t)} N(-d_2) - S_t N(-d_1) \right) = K e^{-r(T-t)} \frac{\partial [1 - N(d_2)]}{\partial r} - S_t \frac{\partial [1 - N(d_1)]}{\partial r} - (T-t) K e^{-r(T-t)} N(-d_2) = \\
 &= -K e^{-r(T-t)} n(d_2) \frac{\partial d_2}{\partial r} + S_t n(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial r} - (T-t) K e^{-r(T-t)} N(-d_2) \frac{\partial d_1 = \partial d_2}{\partial r \partial r} \\
 &\Rightarrow -K e^{-r(T-t)} n(d_2) \frac{\partial d_1}{\partial r} + S_t n(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial r} - (T-t) K e^{-r(T-t)} N(-d_2) = \\
 &= \frac{\partial d_1}{\partial r} \left( S_t n(d_1) - K e^{-r(T-t)} n(d_2) \right) - (T-t) K e^{-r(T-t)} N(-d_2) \xrightarrow{S_t n(d_1) = K e^{-r(T-t)} n(d_2)} - (T-t) K e^{-r(T-t)} N(-d_2) = \\
 &= -(T-t) K e^{-r(T-t)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx
 \end{aligned}$$

# Anexo VII: Listado de Opciones Utilizadas en la Aplicación Práctica

Número	Ticker FacSet	Opción	Número	Ticker FacSet	Opción	Número	Ticker FacSet	Opción
1	ESX.STX#PJRJH	EURO STOXX 50 (EUR) Put MAR20 2000.00	634	DAX.XEX#PK262	Germany DAX (TR) Put SEP20 10900.00	1267	DAX.XEX#CBVJ0	Germany DAX (TR) Call SEP22 14900.00
2	ESX.STX#PFRSQ	EURO STOXX 50 (EUR) Put MAR20 2100.00	635	DAX.XEX#PC800	Germany DAX (TR) Put SEP20 11000.00	1268	DAX.XEX#CDCH3N	Germany DAX (TR) Call SEP22 14900.00
3	ESX.STX#PF69G	EURO STOXX 50 (EUR) Put MAR20 2200.00	636	DAX.XEX#PSL13	Germany DAX (TR) Put SEP20 11100.00	1269	DAX.XEX#CA4657	Germany DAX (TR) Call SEP22 15000.00
4	ESX.STX#PXXMY	EURO STOXX 50 (EUR) Put MAR20 2300.00	637	DAX.XEX#P99H4	Germany DAX (TR) Put SEP20 11200.00	1270	DAX.XEX#CAWUJ	Germany DAX (TR) Call SEP22 15100.00
5	ESX.STX#PTV9Q	EURO STOXX 50 (EUR) Put MAR20 2400.00	638	DAX.XEX#PXX21	Germany DAX (TR) Put SEP20 11300.00	1271	DAX.XEX#ACT3K5	Germany DAX (TR) Call SEP22 15200.00
6	ESX.STX#PM4MN	EURO STOXX 50 (EUR) Put MAR20 2500.00	639	DAX.XEX#P3822	Germany DAX (TR) Put SEP20 11400.00	1272	DAX.XEX#ACTB2V	Germany DAX (TR) Call SEP22 15300.00
7	ESX.STX#PG8PR	EURO STOXX 50 (EUR) Put MAR20 2600.00	640	DAX.XEX#PSZ5M	Germany DAX (TR) Put SEP20 11500.00	1273	DAX.XEX#CF7PR	Germany DAX (TR) Call SEP22 15400.00
8	ESX.STX#PRN77	EURO STOXX 50 (EUR) Put MAR20 2700.00	641	DAX.XEX#PSY4M	Germany DAX (TR) Put SEP20 11600.00	1274	DAX.XEX#CBZ9F	Germany DAX (TR) Call SEP22 15500.00
9	ESX.STX#PB88F	EURO STOXX 50 (EUR) Put MAR20 2800.00	642	DAX.XEX#P9ZJK	Germany DAX (TR) Put SEP20 11700.00	1275	DAX.XEX#CFZ87	Germany DAX (TR) Call SEP22 15600.00
10	ESX.STX#PLTW8	EURO STOXX 50 (EUR) Put MAR20 2900.00	643	DAX.XEX#PH25T	Germany DAX (TR) Put SEP20 11800.00	1276	DAX.XEX#CBZ53	Germany DAX (TR) Call SEP22 15700.00
11	ESX.STX#PBTK8	EURO STOXX 50 (EUR) Put MAR20 3000.00	644	DAX.XEX#PW7HC	Germany DAX (TR) Put SEP20 11900.00	1277	DAX.XEX#CBGM34	Germany DAX (TR) Call SEP22 15800.00
12	ESX.STX#P26HR	EURO STOXX 50 (EUR) Put MAR20 3100.00	645	DAX.XEX#P9S7C	Germany DAX (TR) Put SEP20 12000.00	1278	DAX.XEX#CBGW1M	Germany DAX (TR) Call SEP22 15900.00
13	ESX.STX#CN2V6	EURO STOXX 50 (EUR) Call MAR20 3000.00	646	DAX.XEX#PJF55	Germany DAX (TR) Put SEP20 12100.00	1279	DAX.XEX#CB00G	Germany DAX (TR) Call SEP22 16000.00
14	ESX.STX#CJCDL	EURO STOXX 50 (EUR) Call MAR20 3400.00	647	DAX.XEX#PG20W	Germany DAX (TR) Put SEP20 12200.00	1280	DAX.XEX#CMS9K	Germany DAX (TR) Call SEP22 16100.00
15	ESX.STX#CWD1P	EURO STOXX 50 (EUR) Call MAR20 3500.00	648	DAX.XEX#P2T2M	Germany DAX (TR) Put SEP20 12300.00	1281	DAX.XEX#CY4CJ	Germany DAX (TR) Call SEP22 16200.00
16	ESX.STX#CKRWL	EURO STOXX 50 (EUR) Call MAR20 3600.00	649	DAX.XEX#P1J04	Germany DAX (TR) Put SEP20 12400.00	1282	DAX.XEX#CY5YK	Germany DAX (TR) Call SEP22 16300.00
17	ESX.STX#CJYCK	EURO STOXX 50 (EUR) Call MAR20 3700.00	650	DAX.XEX#PRTVC	Germany DAX (TR) Put SEP20 12500.00	1283	DAX.XEX#CFDRK	Germany DAX (TR) Call SEP22 16400.00
18	ESX.STX#CS292	EURO STOXX 50 (EUR) Call MAR20 3800.00	651	DAX.XEX#P4138	Germany DAX (TR) Put SEP20 12600.00	1284	DAX.XEX#C23WK	Germany DAX (TR) Call SEP22 16500.00
19	ESX.STX#CBBLB	EURO STOXX 50 (EUR) Call MAR20 3900.00	652	DAX.XEX#PZLMO	Germany DAX (TR) Put SEP20 12700.00	1285	DAX.XEX#PYV6Z	Germany DAX (TR) Put SEP22 16600.00
20	ESX.STX#CV4V9	EURO STOXX 50 (EUR) Call MAR20 4000.00	653	DAX.XEX#P8CNO	Germany DAX (TR) Put SEP20 12800.00	1286	DAX.XEX#PYM3D	Germany DAX (TR) Put SEP22 16700.00
21	ESX.STX#P8K8N	EURO STOXX 50 (EUR) Put MAR20 3600.00	654	DAX.XEX#P9M1T	Germany DAX (TR) Put SEP20 13300.00	1287	DAX.XEX#P9S82	Germany DAX (TR) Put SEP22 13100.00
22	ESX.STX#PH8WZ	EURO STOXX 50 (EUR) Put MAR20 3300.00	655	DAX.XEX#P4S4H	Germany DAX (TR) Put SEP20 13000.00	1288	DAX.XEX#P9M3C	Germany DAX (TR) Put SEP22 12000.00
23	ESX.STX#P49DK	EURO STOXX 50 (EUR) Put MAR20 3500.00	656	DAX.XEX#P0X2T	Germany DAX (TR) Put SEP20 13100.00	1289	DAX.XEX#P9T0F	Germany DAX (TR) Put SEP22 12500.00
24	ESX.STX#P0VWV	EURO STOXX 50 (EUR) Put MAR20 3500.00	657	DAX.XEX#P81F9	Germany DAX (TR) Put SEP20 13200.00	1290	DAX.XEX#P9WVJ	Germany DAX (TR) Put SEP22 13200.00
25	ESX.STX#P8K8N	EURO STOXX 50 (EUR) Put MAR20 3600.00	658	DAX.XEX#P9S82	Germany DAX (TR) Put SEP20 13300.00	1291	DAX.XEX#P9S82	Germany DAX (TR) Put SEP22 13100.00
26	ESX.STX#PLX7B	EURO STOXX 50 (EUR) Put MAR20 3700.00	659	DAX.XEX#P1Y1T	Germany DAX (TR) Put SEP20 13400.00	1292	DAX.XEX#P2D52	Germany DAX (TR) Put SEP22 13000.00
27	ESX.STX#PKV0P	EURO STOXX 50 (EUR) Put MAR20 3800.00	660	DAX.XEX#PNSV5	Germany DAX (TR) Put SEP20 13500.00	1293	DAX.XEX#PRVJY	Germany DAX (TR) Put SEP22 13300.00
28	ESX.STX#PT1RJ	EURO STOXX 50 (EUR) Put MAR20 3900.00	661	DAX.XEX#P2H0Y	Germany DAX (TR) Put SEP20 14000.00	1294	DAX.XEX#PYKJ8	Germany DAX (TR) Put SEP22 13400.00
29	ESX.STX#M8N	EURO STOXX 50 (EUR) Put MAR20 4000.00	662	DAX.XEX#P7G5G	Germany DAX (TR) Put SEP20 12900.00	1295	DAX.XEX#P7XWJ	Germany DAX (TR) Put SEP22 13500.00
30	ESX.STX#C06R6	EURO STOXX 50 (EUR) Call MAR20 4100.00	663	DAX.XEX#C12JK	Germany DAX (TR) Call DEC20 8100.00	1296	DAX.XEX#P9W3N	Germany DAX (TR) Put SEP22 13600.00
31	ESX.STX#C0YTP	EURO STOXX 50 (EUR) Call MAR20 4200.00	664	DAX.XEX#CSVWC	Germany DAX (TR) Call DEC20 8000.00	1297	DAX.XEX#PBZL4	Germany DAX (TR) Put SEP22 13700.00
32	ESX.STX#CS5GK	EURO STOXX 50 (EUR) Call MAR20 4300.00	665	DAX.XEX#CS6S5	Germany DAX (TR) Call DEC20 8200.00	1298	DAX.XEX#PNTV4	Germany DAX (TR) Put SEP22 13800.00
33	ESX.STX#C0GVF	EURO STOXX 50 (EUR) Call MAR20 4400.00	666	DAX.XEX#CKNWT	Germany DAX (TR) Call DEC20 8400.00	1300	DAX.XEX#PD9VX	Germany DAX (TR) Put SEP22 14000.00
34	ESX.STX#P9RZF	EURO STOXX 50 (EUR) Call MAR20 4100.00	667	DAX.XEX#CHWMM	Germany DAX (TR) Call DEC20 8500.00	1301	DAX.XEX#P26LD	Germany DAX (TR) Put SEP22 14100.00
35	ESX.STX#P58XQ	EURO STOXX 50 (EUR) Put MAR20 4200.00	668	DAX.XEX#CQZJM	Germany DAX (TR) Call DEC20 8600.00	1302	DAX.XEX#P1W1G	Germany DAX (TR) Put SEP22 14200.00
36	ESX.STX#PXPJM	EURO STOXX 50 (EUR) Put MAR20 4300.00	669	DAX.XEX#CM74W	Germany DAX (TR) Call DEC20 8700.00	1303	DAX.XEX#P9H9B	Germany DAX (TR) Put SEP22 14300.00
37	ESX.STX#PZ5S	EURO STOXX 50 (EUR) Put JUN20 4500.00	670	DAX.XEX#CKRPJ	Germany DAX (TR) Call DEC20 8700.00	1304	DAX.XEX#P1J8J	Germany DAX (TR) Put SEP22 14400.00
38	ESX.STX#C7C70	EURO STOXX 50 (EUR) Call JUN20 3600.00	671	DAX.XEX#P9L7Q	Germany DAX (TR) Call DEC20 8800.00	1305	DAX.XEX#PR1H7	Germany DAX (TR) Put SEP22 14500.00
39	ESX.STX#CHDOY	EURO STOXX 50 (EUR) Call JUN20 3700.00	672	DAX.XEX#CQD0Q	Germany DAX (TR) Call DEC20 8900.00	1306	DAX.XEX#PFZ0T	Germany DAX (TR) Put SEP22 14600.00
40	ESX.STX#CJHD6	EURO STOXX 50 (EUR) Call JUN20 3800.00	673	DAX.XEX#CGRMO	Germany DAX (TR) Call DEC20 9000.00	1307	DAX.XEX#P9X24	Germany DAX (TR) Put SEP22 14700.00
41	ESX.STX#CJ20D	EURO STOXX 50 (EUR) Call JUN20 3900.00	674	DAX.XEX#CMNHG	Germany DAX (TR) Call DEC20 9100.00	1308	DAX.XEX#P9K20	Germany DAX (TR) Put SEP22 14800.00
42	ESX.STX#P1GH1	EURO STOXX 50 (EUR) Put JUN20 3500.00	675	DAX.XEX#C3B2K	Germany DAX (TR) Call DEC20 9200.00	1309	DAX.XEX#P66T5	Germany DAX (TR) Put SEP22 14900.00
43	ESX.STX#C2HXZ	EURO STOXX 50 (EUR) Call JUN20 4100.00	676	DAX.XEX#CKL6D	Germany DAX (TR) Call DEC20 9300.00	1310	DAX.XEX#PR6S3	Germany DAX (TR) Put SEP22 15000.00
44	ESX.STX#C8R1T	EURO STOXX 50 (EUR) Call JUN20 4200.00	677	DAX.XEX#C8P76	Germany DAX (TR) Call DEC20 9400.00	1311	DAX.XEX#P9WZ1	Germany DAX (TR) Put SEP22 15100.00
45	ESX.STX#C2175	EURO STOXX 50 (EUR) Call JUN20 4300.00	678	DAX.XEX#C6S62	Germany DAX (TR) Call DEC20 9500.00	1312	DAX.XEX#P9S82	Germany DAX (TR) Put SEP22 15200.00
46	ESX.STX#C2MBN	EURO STOXX 50 (EUR) Call JUN20 4400.00	679	DAX.XEX#C7N0T	Germany DAX (TR) Call DEC20 9700.00	1313	DAX.XEX#PB83H	Germany DAX (TR) Put SEP22 15300.00
47	ESX.STX#C8W5F	EURO STOXX 50 (EUR) Call JUN20 4500.00	680	DAX.XEX#C16C7	Germany DAX (TR) Call DEC20 9700.00	1314	DAX.XEX#P9C0K	Germany DAX (TR) Put SEP22 15400.00
48	ESX.STX#P544W	EURO STOXX 50 (EUR) Put JUN20 2000.00	681	DAX.XEX#C4T4J	Germany DAX (TR) Call DEC20 9800.00	1315	DAX.XEX#P9H2Y	Germany DAX (TR) Put SEP22 15500.00
49	ESX.STX#PXCJH	EURO STOXX 50 (EUR) Put JUN20 2100.00	682	DAX.XEX#C7F1B	Germany DAX (TR) Call DEC20 9900.00	1316	DAX.XEX#P9H9B	Germany DAX (TR) Put SEP22 15600.00
50	ESX.STX#P768J	EURO STOXX 50 (EUR) Put JUN20 2200.00	683	DAX.XEX#C2T40	Germany DAX (TR) Call DEC20 10000.00	1317	DAX.XEX#P9PQ2	Germany DAX (TR) Put SEP22 15700.00
51	ESX.STX#PKN6J	EURO STOXX 50 (EUR) Put JUN20 2300.00	684	DAX.XEX#C8R8G	Germany DAX (TR) Call DEC20 10100.00	1318	DAX.XEX#P43J0	Germany DAX (TR) Put SEP22 15800.00
52	ESX.STX#P6VCH	EURO STOXX 50 (EUR) Put JUN20 2400.00	685	DAX.XEX#C9KJ9	Germany DAX (TR) Call DEC20 10200.00	1319	DAX.XEX#PK4K1	Germany DAX (TR) Put SEP22 15900.00
53	ESX.STX#P9KVC	EURO STOXX 50 (EUR) Put JUN20 2500.00	686	DAX.XEX#C755R	Germany DAX (TR) Call DEC20 10300.00	1320	DAX.XEX#P98N1	Germany DAX (TR) Put SEP22 16000.00
54	ESX.STX#P1R73	EURO STOXX 50 (EUR) Put JUN20 2600.00	687	DAX.XEX#C8N1E	Germany DAX (TR) Call DEC20 10400.00	1321	DAX.XEX#P9S82	Germany DAX (TR) Put SEP22 16100.00
55	ESX.STX#P9S1T	EURO STOXX 50 (EUR) Put JUN20 2700.00	688	DAX.XEX#C8K5F	Germany DAX (TR) Call DEC20 10500.00	1322	DAX.XEX#P9M3C	Germany DAX (TR) Put SEP22 16200.00
56	ESX.STX#P9HSG	EURO STOXX 50 (EUR) Put JUN20 2800.00	689	DAX.XEX#C9V29	Germany DAX (TR) Call DEC20 10600.00	1323	DAX.XEX#P9M3C	Germany DAX (TR) Put SEP22 16300.00
57	ESX.STX#P46S	EURO STOXX 50 (EUR) Put JUN20 2900.00	690	DAX.XEX#C7S57	Germany DAX (TR) Call DEC20 10700.00	1324	DAX.XEX#P9M3C	Germany DAX (TR) Put SEP22 16400.00
58	ESX.STX#P40L2	EURO STOXX 50 (EUR) Put JUN20 3000.00	691	DAX.XEX#C8BFL	Germany DAX (TR) Call DEC20 10800.00	1325	DAX.XEX#P9M3C	Germany DAX (TR) Put SEP22 16500.00
59	ESX.STX#P9C80	EURO STOXX 50 (EUR) Put JUN20 3100.00	692	DAX.XEX#Y1F1J	Germany DAX (TR) Call DEC20 10900.00	1326	DAX.XEX#P77P7	Germany DAX (TR) Call DEC22 9000.00
60	ESX.STX#P53J1	EURO STOXX 50 (EUR) Put JUN20 3200.00	693	DAX.XEX#C2H5G	Germany DAX (TR) Call DEC20 11000.00	1327	DAX.XEX#CYR1T	Germany DAX (TR) Call DEC22 10000.00
61	ESX.STX#PK2MR	EURO STOXX 50 (EUR) Put JUN20 3300.00	694	DAX.XEX#C0Y0T	Germany DAX (TR) Call DEC20 11200.00	1328	DAX.XEX#CBKGN	Germany DAX (TR) Call DEC22 11000.00
62	ESX.STX#P54J8	EURO STOXX 50 (EUR) Put JUN20 3400.00	695	DAX.XEX#C9N9W	Germany DAX (TR) Call DEC20 11400.00	1329	DAX.XEX#CBKGN	Germany DAX (TR) Call DEC22 12000.00
63	ESX.STX#P1ZMK	EURO STOXX 50 (EUR) Put JUN20 3500.00	696	DAX.XEX#C9N9W	Germany DAX (TR) Call DEC20 11400.00	1330	DAX.XEX#CBK2J	Germany DAX (TR) Call DEC22 12100.00
64	ESX.STX#P8H55	EURO STOXX 50 (EUR) Put JUN20 3600.00	697	DAX.XEX#C9N9W	Germany DAX (TR) Call DEC20 11400.00	1331	DAX.XEX#CBK2J	Germany DAX (TR) Call DEC22 12200.00
65	ESX.STX#P9VRF	EURO STOXX 50 (EUR) Put JUN20 3700.00	698	DAX.XEX#C9N9W	Germany DAX (TR) Call DEC20 11400.00	1332	DAX.XEX#CFIOM	Germany DAX (TR) Call DEC22 12300.00
66	ESX.STX#P4J6V	EURO STOXX 50 (EUR) Put JUN20 3800.00	699	DAX.XEX#C9N9W	Germany DAX (TR) Call DEC20 11400.00	1333	DAX.XEX#CFIOM	Germany DAX (TR) Call DEC22 12400.00
67	ESX.STX#P9VRF	EURO STOXX 50 (EUR) Put JUN20 3900.00	700	DAX.XEX#C9N9W	Germany DAX (TR) Call DEC20 11400.00	1334	DAX.XEX#CFIOM	Germany DAX (TR) Call DEC22 12500.00
68	ESX.STX#P79PX	EURO STOXX 50 (EUR) Put JUN20 4000.00	701	DAX.XEX#C9N9W	Germany DAX (TR) Call DEC20 11400.00	1335	DAX.XEX#CFIOM	Germany DAX (TR) Call DEC22 12600.00
69	ESX.STX#P8S1B	EURO STOXX 50 (EUR) Put JUN20 4100.00	702	DAX.XEX#C9N9W	Germany DAX (TR) Call DEC20 11400.00	1336	DAX.XEX#CFIOM	Germany DAX (TR) Call DEC22 12700.00
70	ESX.STX#P9B89	EURO STOXX 50 (EUR) Put JUN20 4200.00	703	DAX.XEX#C9N9W	Germany DAX (TR) Call DEC20 11400.00	1337	DAX.XEX#CFIOM	Germany DAX (TR) Call DEC22 12800.00
71	ESX.STX#P9VDF	EURO STOXX 50 (EUR) Put JUN20 4300.00	704	DAX.XEX#C9N9W	Germany DAX (TR) Call DEC20 11400.00	1338	DAX.XEX#CFIOM	Germany DAX (TR) Call DEC22 12900.00
72	ESX.STX#P9VDF	EURO STOXX 50 (EUR) Put JUN20 4400.00	705	DAX.XEX#C9N9W	Germany DAX (TR) Call DEC20 11400.00	1339	DAX.XEX#CFIOM	Germany DAX (TR) Call DEC22 13000.00
73	ESX.STX#P9VDF	EURO STOXX 50 (EUR) Put JUN20 4500.00	706	DAX.XEX#C9N9W	Germany DAX (TR) Call DEC20 11400.00	1340	DAX.XEX#CFIOM	Germany DAX (TR) Call DEC22 13100.00
74	ESX.STX#CKSRK	EURO STOXX 50 (EUR) Call SEP20 2500.00	707	DAX.XEX#C9N9W	Germany DAX (TR) Call DEC20 11400.00	1341	DAX.XEX#CFIOM	Germany DAX (TR) Call DEC22 13200.00
75	ESX.STX#CXY8C	EURO STOXX 50 (EUR) Call SEP20 2600.00	708	DAX.XEX#C9N9W	Germany DAX (TR) Call DEC20 11400.00	1342	DAX.XEX#CFIOM	Germany DAX (TR) Call DEC22 13300.00
76	ESX.STX#C9V61	EURO STOXX 50 (EUR) Call SEP20 2700.00	709	DAX.XEX#C9N9W	Germany DAX (TR) Call DEC20 11400.00	1343	DAX.XEX#CFIOM	Germany DAX (TR) Call DEC22 13400.00
77	ESX.STX#C10TW	EURO STOXX 50 (EUR) Call SEP20 2800.00	710	DAX.XEX#C9N9W	Germany DAX (TR) Call DEC20 11400.00	1344	DAX.XEX#CFIOM	Germany DAX (TR) Call DEC22 13500.00
78	ESX.STX#C2TZP	EURO STOXX 50 (EUR) Call SEP20 2900.00	711	DAX.XEX#C9N9W	Germany DAX (TR) Call DEC20 11400.00	1345	DAX.XEX#CFIOM	Germany DAX (TR) Call DEC22 13600.00
79	ESX.STX#C0F4H	EURO STOXX 50 (EUR) Call SEP20 3000.00	712	DAX.XEX#C9N9W	Germany DAX (TR) Call DEC20 11400.00	1346	DAX.XEX#CFIOM	Germany DAX (TR) Call DEC22 13700.00
80	ESX.STX#C536F	EURO STOXX 50 (EUR) Call SEP20 3100.00	713	DAX.XEX#C9N9W	Germany DAX (TR) Call DEC20 11400.00	1347	DAX.XEX#CFIOM	Germany DAX (TR) Call DEC22 13800.00
81	ESX.STX#C4V7J	EURO STOXX 50 (EUR) Call SEP20 3200.00	714	DAX.XEX#C9N9W	Germany DAX (TR) Call DEC20 11400.00	1348	DAX.XEX#CFIOM	Germany DAX (TR) Call DEC22 13900.00
82	ESX.STX#C4S4C	EURO STOXX 50 (EUR) Call SEP20 3300.00	715	DAX.XEX#C9N9W	Germany DAX (TR) Call DEC20 11400.00	1349	DAX.XEX#CFIOM	Germany DAX (TR) Call DEC22 14000.00
83	ESX.STX#C4R03	EURO STOXX 50 (EUR) Call SEP20 3400.00	716	DAX.XEX#C9N9W	Germany DAX (TR) Call DEC20 11400.00	1350	DAX.XEX#CFIOM	Germany DAX (TR) Call DEC22 14100.00
84	ESX.STX#C4S4C	EURO STOXX 50 (EUR) Call SEP20 3500.00	717	DAX.XEX#C9N9W	Germany DAX (TR) Call DEC20 11400.00	1351	DAX.XEX#CFIOM	Germany DAX (TR) Call DEC22 14200.00
85	ESX.STX#C5XPX	EURO STOXX 50 (EUR) Call SEP20 3600.00	718	DAX.XEX#C9N9W				

Número	Ticker	FacSet	Opción	Número	Ticker	FacSet	Opción	Número	Ticker	FacSet	Opción
144	ESX.STX#PSSM	EURO	STOXX 50 (EUR) Put DEC20 3100.00	776	DAI.XEX#PCPC	Germany DAX (TR)	Put DEC20 12900.00	1410	LUX.XEX#LQ10	Germany DAX (TR)	Put DEC22 14300.00
145	ESX.STX#PSSN	EURO	STOXX 50 (EUR) Put DEC20 3200.00	778	DAI.XEX#PKBN	Germany DAX (TR)	Put DEC20 13000.00	1411	DAI.XEX#PB3Q	Germany DAX (TR)	Put DEC22 14400.00
146	ESX.STX#PSSW	EURO	STOXX 50 (EUR) Put DEC20 3300.00	779	DAI.XEX#PGM1	Germany DAX (TR)	Put DEC20 13100.00	1412	DAI.XEX#PBHQ	Germany DAX (TR)	Put DEC22 14500.00
147	ESX.STX#PSSP	EURO	STOXX 50 (EUR) Put DEC20 3400.00	780	DAI.XEX#PFJ2	Germany DAX (TR)	Put DEC20 13200.00	1413	DAI.XEX#PTNK	Germany DAX (TR)	Put DEC22 14600.00
148	ESX.STX#PZNF1	EURO	STOXX 50 (EUR) Put DEC20 3500.00	781	DAI.XEX#PF53	Germany DAX (TR)	Put DEC20 13300.00	1414	DAI.XEX#PBV2	Germany DAX (TR)	Put DEC22 14700.00
149	ESX.STX#PZNF3	EURO	STOXX 50 (EUR) Put DEC20 3600.00	782	DAI.XEX#PKP7	Germany DAX (TR)	Put DEC20 13400.00	1415	DAI.XEX#PZYX	Germany DAX (TR)	Put DEC22 14800.00
150	ESX.STX#PZNF4	EURO	STOXX 50 (EUR) Put DEC20 3700.00	783	DAI.XEX#PC1W8	Germany DAX (TR)	Put DEC20 13500.00	1416	DAI.XEX#PFC19	Germany DAX (TR)	Put DEC22 14900.00
151	ESX.STX#PZNF5	EURO	STOXX 50 (EUR) Put DEC20 3800.00	784	DAI.XEX#PMFNR	Germany DAX (TR)	Put DEC20 13600.00	1417	DAI.XEX#P140	Germany DAX (TR)	Put DEC22 15000.00
152	ESX.STX#PZNF6	EURO	STOXX 50 (EUR) Put DEC20 3900.00	785	DAI.XEX#PS8Y6	Germany DAX (TR)	Put DEC20 13700.00	1418	DAI.XEX#P9P2	Germany DAX (TR)	Put DEC22 15100.00
153	ESX.STX#PZNF7	EURO	STOXX 50 (EUR) Put DEC20 4000.00	786	DAI.XEX#PKR6	Germany DAX (TR)	Put DEC20 13800.00	1419	DAI.XEX#P7P69	Germany DAX (TR)	Put DEC22 15200.00
154	ESX.STX#PDSY3	EURO	STOXX 50 (EUR) Put DEC20 4100.00	787	DAI.XEX#PNKRE	Germany DAX (TR)	Put DEC20 13900.00	1420	DAI.XEX#P1Q5T	Germany DAX (TR)	Put DEC22 15300.00
155	ESX.STX#P7DJF	EURO	STOXX 50 (EUR) Put DEC20 4200.00	788	DAI.XEX#P9SDY	Germany DAX (TR)	Put DEC20 14000.00	1421	DAI.XEX#P9S6S	Germany DAX (TR)	Put DEC22 15400.00
156	ESX.STX#PWWFD	EURO	STOXX 50 (EUR) Put DEC20 4300.00	789	DAI.XEX#P62DL	Germany DAX (TR)	Put DEC20 14100.00	1422	DAI.XEX#PFL4S	Germany DAX (TR)	Put DEC22 15500.00
157	ESX.STX#P3UCR	EURO	STOXX 50 (EUR) Put DEC20 4500.00	790	DAI.XEX#PRNDS	Germany DAX (TR)	Put DEC20 15000.00	1423	DAI.XEX#PQ3QT	Germany DAX (TR)	Put DEC22 15600.00
158	ESX.STX#C4C7Z	EURO	STOXX 50 (EUR) Call MAR21 2800.00	791	DAI.XEX#CF4SR	Germany DAX (TR)	Call MAR21 9000.00	1424	DAI.XEX#PFF2B	Germany DAX (TR)	Put DEC22 15700.00
159	ESX.STX#CCTYH	EURO	STOXX 50 (EUR) Call MAR21 2900.00	792	DAI.XEX#CQWDB	Germany DAX (TR)	Call MAR21 10000.00	1425	DAI.XEX#P2BK5	Germany DAX (TR)	Put DEC22 15800.00
160	ESX.STX#CQZNV	EURO	STOXX 50 (EUR) Call MAR21 3000.00	793	DAI.XEX#CK390	Germany DAX (TR)	Call MAR21 10100.00	1426	DAI.XEX#PFP2P	Germany DAX (TR)	Put DEC22 15900.00
161	ESX.STX#C7LGG	EURO	STOXX 50 (EUR) Call MAR21 3100.00	794	DAI.XEX#CPHZT	Germany DAX (TR)	Call MAR21 10200.00	1427	DAI.XEX#PB1Z3	Germany DAX (TR)	Put DEC22 16000.00
162	ESX.STX#C07BV	EURO	STOXX 50 (EUR) Call MAR21 3200.00	795	DAI.XEX#CK951	Germany DAX (TR)	Call MAR21 10300.00	1428	DAI.XEX#P2C6B	Germany DAX (TR)	Put DEC22 16100.00
163	ESX.STX#CRV8L	EURO	STOXX 50 (EUR) Call MAR21 3300.00	796	DAI.XEX#C10W0	Germany DAX (TR)	Call MAR21 10400.00	1429	DAI.XEX#PFC06	Germany DAX (TR)	Put DEC22 16200.00
164	ESX.STX#C3Q66	EURO	STOXX 50 (EUR) Call MAR21 3400.00	797	DAI.XEX#CBM8Z	Germany DAX (TR)	Call MAR21 10500.00	1430	DAI.XEX#PWPJ8	Germany DAX (TR)	Put DEC22 16300.00
165	ESX.STX#CK75Z	EURO	STOXX 50 (EUR) Call MAR21 3500.00	798	DAI.XEX#CK71Y	Germany DAX (TR)	Call MAR21 10700.00	1431	DAI.XEX#P9V6B	Germany DAX (TR)	Put DEC22 16400.00
166	ESX.STX#CH9Z8	EURO	STOXX 50 (EUR) Call MAR21 3700.00	800	DAI.XEX#CZ75L	Germany DAX (TR)	Call MAR21 10800.00	1432	DAI.XEX#P9H1H	Germany DAX (TR)	Put DEC22 16500.00
167	ESX.STX#CVL94	EURO	STOXX 50 (EUR) Call MAR21 3800.00	801	DAI.XEX#C8B1M	Germany DAX (TR)	Call MAR21 10900.00	1433	DAI.XEX#P2WVQ	Germany DAX (TR)	Put DEC22 16600.00
168	ESX.STX#C332N	EURO	STOXX 50 (EUR) Call MAR21 3900.00	802	DAI.XEX#C93DW	Germany DAX (TR)	Call MAR21 11000.00	1434	DAI.XEX#P2WVQ	Germany DAX (TR)	Put DEC22 16700.00
169	ESX.STX#CJXGJ	EURO	STOXX 50 (EUR) Call MAR21 4000.00	803	DAI.XEX#C1F5H	Germany DAX (TR)	Call MAR21 11100.00	1435	DAI.XEX#P2WVQ	Germany DAX (TR)	Put DEC22 16800.00
170	ESX.STX#C4F0S	EURO	STOXX 50 (EUR) Call MAR21 4100.00	804	DAI.XEX#C7S9T	Germany DAX (TR)	Call MAR21 11200.00	1436	DAI.XEX#P2WVQ	Germany DAX (TR)	Put DEC22 16900.00
171	ESX.STX#C56L8	EURO	STOXX 50 (EUR) Call MAR21 4200.00	805	DAI.XEX#C05N3	Germany DAX (TR)	Call MAR21 11300.00	1437	DAI.XEX#P21KX	Germany DAX (TR)	Put DEC22 17000.00
172	ESX.STX#CBH4H	EURO	STOXX 50 (EUR) Call MAR21 4300.00	806	DAI.XEX#C05N3	Germany DAX (TR)	Call MAR21 11300.00	1438	DAI.XEX#PKCWD	Germany DAX (TR)	Put DEC22 17500.00
173	ESX.STX#CBH4H	EURO	STOXX 50 (EUR) Call MAR21 4300.00	806	DAI.XEX#C8B84	Germany DAX (TR)	Call MAR21 11400.00	1439	DAI.XEX#P9H5A	Germany DAX (TR)	Put DEC22 18000.00
174	ESX.STX#C7P2Z	EURO	STOXX 50 (EUR) Call MAR21 4400.00	807	DAI.XEX#C7P2Z	Germany DAX (TR)	Call MAR21 11500.00	1440	PXL.NX#CQJLP	France CAC 40 Call MAR20 5100.00	
175	ESX.STX#C7F2V	EURO	STOXX 50 (EUR) Call MAR21 4500.00	808	DAI.XEX#CCPVG	Germany DAX (TR)	Call MAR21 11600.00	1441	PXL.NX#CQJLP	France CAC 40 Call MAR20 5100.00	
176	ESX.STX#P6TCX	EURO	STOXX 50 (EUR) Put MAR21 2500.00	809	DAI.XEX#CJHNM	Germany DAX (TR)	Call MAR21 11700.00	1442	PXL.NX#CQJLP	France CAC 40 Call MAR20 5100.00	
177	ESX.STX#P6F9K	EURO	STOXX 50 (EUR) Put MAR21 2600.00	810	DAI.XEX#C0MV3	Germany DAX (TR)	Call MAR21 11800.00	1443	PXL.NX#C1CNX	France CAC 40 Call MAR20 5200.00	
178	ESX.STX#P6Q01	EURO	STOXX 50 (EUR) Put MAR21 2700.00	811	DAI.XEX#C0NVD	Germany DAX (TR)	Call MAR21 11900.00	1444	PXL.NX#C0JHP	France CAC 40 Call MAR20 5300.00	
179	ESX.STX#P6M70	EURO	STOXX 50 (EUR) Put MAR21 2800.00	812	DAI.XEX#CG9Z5	Germany DAX (TR)	Call MAR21 12000.00	1445	PXL.NX#C0JHP	France CAC 40 Call MAR20 5300.00	
180	ESX.STX#P6M70	EURO	STOXX 50 (EUR) Put MAR21 2900.00	813	DAI.XEX#C4K46	Germany DAX (TR)	Call MAR21 12100.00	1446	PXL.NX#C0JHP	France CAC 40 Call MAR20 5300.00	
181	ESX.STX#P2L62	EURO	STOXX 50 (EUR) Put MAR21 3000.00	814	DAI.XEX#C0RTY	Germany DAX (TR)	Call MAR21 12200.00	1447	PXL.NX#C0JHP	France CAC 40 Call MAR20 5400.00	
182	ESX.STX#P2Q1V	EURO	STOXX 50 (EUR) Put MAR21 3100.00	815	DAI.XEX#C0L7X	Germany DAX (TR)	Call MAR21 12300.00	1448	PXL.NX#C0JHP	France CAC 40 Call MAR20 5500.00	
183	ESX.STX#P2V16	EURO	STOXX 50 (EUR) Put MAR21 3200.00	816	DAI.XEX#C0L76	Germany DAX (TR)	Call MAR21 12400.00	1449	PXL.NX#C0JHP	France CAC 40 Call MAR20 5500.00	
184	ESX.STX#P6MFK	EURO	STOXX 50 (EUR) Put MAR21 3300.00	817	DAI.XEX#C1L85	Germany DAX (TR)	Call MAR21 12500.00	1450	PXL.NX#C0JHP	France CAC 40 Call MAR20 5500.00	
185	ESX.STX#P6WTF	EURO	STOXX 50 (EUR) Put MAR21 3400.00	818	DAI.XEX#C0FM9	Germany DAX (TR)	Call MAR21 12600.00	1451	PXL.NX#C0JHP	France CAC 40 Call MAR20 5600.00	
186	ESX.STX#P6V5M	EURO	STOXX 50 (EUR) Put MAR21 3500.00	819	DAI.XEX#C0TMY	Germany DAX (TR)	Call MAR21 12700.00	1452	PXL.NX#C0JHP	France CAC 40 Call MAR20 5650.00	
187	ESX.STX#P6P0F	EURO	STOXX 50 (EUR) Put MAR21 3600.00	820	DAI.XEX#C0P74	Germany DAX (TR)	Call MAR21 12800.00	1453	PXL.NX#C0M85	France CAC 40 Call MAR20 5700.00	
188	ESX.STX#P6NRM	EURO	STOXX 50 (EUR) Put MAR21 3700.00	821	DAI.XEX#C2C1F	Germany DAX (TR)	Call MAR21 12900.00	1454	PXL.NX#C0PTM	France CAC 40 Call MAR20 5750.00	
189	ESX.STX#P6HNF	EURO	STOXX 50 (EUR) Put MAR21 3800.00	822	DAI.XEX#C47JG	Germany DAX (TR)	Call MAR21 13000.00	1455	PXL.NX#C0GCM	France CAC 40 Call MAR20 5800.00	
190	ESX.STX#P6X8B	EURO	STOXX 50 (EUR) Put MAR21 3900.00	823	DAI.XEX#C0HQP	Germany DAX (TR)	Call MAR21 13100.00	1456	PXL.NX#P2X01	France CAC 40 Put MAR20 4000.00	
191	ESX.STX#P6H9A	EURO	STOXX 50 (EUR) Put MAR21 4000.00	824	DAI.XEX#C0FSJ	Germany DAX (TR)	Call MAR21 13200.00	1457	PXL.NX#P2X01	France CAC 40 Put MAR20 4000.00	
192	ESX.STX#P6Z0C	EURO	STOXX 50 (EUR) Put MAR21 4100.00	825	DAI.XEX#C0BZH	Germany DAX (TR)	Call MAR21 13300.00	1458	PXL.NX#P6G7N	France CAC 40 Put MAR20 5050.00	
193	ESX.STX#P6WFX	EURO	STOXX 50 (EUR) Put MAR21 4200.00	826	DAI.XEX#C0N5Z	Germany DAX (TR)	Call MAR21 13400.00	1459	PXL.NX#P6G7N	France CAC 40 Put MAR20 5100.00	
194	ESX.STX#P6YTL	EURO	STOXX 50 (EUR) Put MAR21 4300.00	827	DAI.XEX#C0M51	Germany DAX (TR)	Call MAR21 13500.00	1460	PXL.NX#P6G7N	France CAC 40 Put MAR20 5100.00	
195	ESX.STX#P6R67	EURO	STOXX 50 (EUR) Put MAR21 4400.00	828	DAI.XEX#C0LGH	Germany DAX (TR)	Call MAR21 13600.00	1461	PXL.NX#P6G7N	France CAC 40 Put MAR20 5150.00	
196	ESX.STX#P6XSL	EURO	STOXX 50 (EUR) Put MAR21 4500.00	829	DAI.XEX#P295S	Germany DAX (TR)	Put MAR21 9000.00	1462	PXL.NX#P6G7N	France CAC 40 Put MAR20 5250.00	
197	ESX.STX#C2HG6	EURO	STOXX 50 (EUR) Call JUN21 3600.00	830	DAI.XEX#P295S	Germany DAX (TR)	Put MAR21 9000.00	1463	PXL.NX#P6G7N	France CAC 40 Put MAR20 5300.00	
198	ESX.STX#C0L25	EURO	STOXX 50 (EUR) Call JUN21 3700.00	831	DAI.XEX#P295S	Germany DAX (TR)	Put MAR21 10100.00	1464	PXL.NX#P6G7N	France CAC 40 Put MAR20 5350.00	
199	ESX.STX#C0YMS	EURO	STOXX 50 (EUR) Call JUN21 3800.00	832	DAI.XEX#P295S	Germany DAX (TR)	Put MAR21 11000.00	1465	PXL.NX#P6G7N	France CAC 40 Put MAR20 5400.00	
200	ESX.STX#C0YOH	EURO	STOXX 50 (EUR) Call JUN21 3900.00	833	DAI.XEX#P211H	Germany DAX (TR)	Put MAR21 10300.00	1466	PXL.NX#P6G7N	France CAC 40 Put MAR20 5450.00	
201	ESX.STX#C74Z8	EURO	STOXX 50 (EUR) Call JUN21 4000.00	834	DAI.XEX#P0569	Germany DAX (TR)	Put MAR21 10400.00	1467	PXL.NX#P7XB8	France CAC 40 Put MAR20 5500.00	
202	ESX.STX#C9Q1W	EURO	STOXX 50 (EUR) Call JUN21 4100.00	835	DAI.XEX#P2M1V	Germany DAX (TR)	Put MAR21 10500.00	1468	PXL.NX#P7XB8	France CAC 40 Put MAR20 5500.00	
203	ESX.STX#C75ZD	EURO	STOXX 50 (EUR) Call JUN21 4200.00	836	DAI.XEX#P55H9	Germany DAX (TR)	Put MAR21 10600.00	1469	PXL.NX#P7LBC	France CAC 40 Put MAR20 5600.00	
204	ESX.STX#C0L25	EURO	STOXX 50 (EUR) Call JUN21 4300.00	837	DAI.XEX#P0LZZ	Germany DAX (TR)	Put MAR21 10800.00	1470	PXL.NX#P7LBC	France CAC 40 Put MAR20 5600.00	
205	ESX.STX#C0HPT	EURO	STOXX 50 (EUR) Call JUN21 4400.00	838	DAI.XEX#PVR4L	Germany DAX (TR)	Put MAR21 10900.00	1471	PXL.NX#P7LBC	France CAC 40 Put MAR20 5700.00	
206	ESX.STX#C0XCN	EURO	STOXX 50 (EUR) Call JUN21 4500.00	839	DAI.XEX#P0LZZ	Germany DAX (TR)	Put MAR21 11000.00	1472	PXL.NX#P7LBC	France CAC 40 Put MAR20 5750.00	
207	ESX.STX#P6B14	EURO	STOXX 50 (EUR) Put JUN21 2500.00	840	DAI.XEX#P0LZZ	Germany DAX (TR)	Put MAR21 11000.00	1473	PXL.NX#P7LBC	France CAC 40 Put MAR20 5800.00	
208	ESX.STX#P6Y93	EURO	STOXX 50 (EUR) Put JUN21 2600.00	841	DAI.XEX#P0LZZ	Germany DAX (TR)	Put MAR21 11100.00	1474	PXL.NX#P7LBC	France CAC 40 Put MAR20 5850.00	
209	ESX.STX#P6JMG	EURO	STOXX 50 (EUR) Put JUN21 2700.00	842	DAI.XEX#P0LZZ	Germany DAX (TR)	Put MAR21 11200.00	1475	PXL.NX#P0DYN	France CAC 40 Call JUN20 5700.00	
210	ESX.STX#P6M82	EURO	STOXX 50 (EUR) Put JUN21 2800.00	843	DAI.XEX#P0LZZ	Germany DAX (TR)	Put MAR21 11300.00	1476	PXL.NX#P7JRP	France CAC 40 Call JUN20 4000.00	
211	ESX.STX#P6MCP	EURO	STOXX 50 (EUR) Put JUN21 2900.00	844	DAI.XEX#P0H0F	Germany DAX (TR)	Put MAR21 11400.00	1477	PXL.NX#P6M29	France CAC 40 Call JUN20 5000.00	
212	ESX.STX#P6NKM	EURO	STOXX 50 (EUR) Put JUN21 3000.00	845	DAI.XEX#P0H0F	Germany DAX (TR)	Put MAR21 11500.00	1478	PXL.NX#P6M29	France CAC 40 Call JUN20 5000.00	
213	ESX.STX#P6SPF	EURO	STOXX 50 (EUR) Put JUN21 3100.00	846	DAI.XEX#P0XZS	Germany DAX (TR)	Put MAR21 11600.00	1479	PXL.NX#P7FBW	France CAC 40 Put JUN20 5150.00	
214	ESX.STX#P6206	EURO	STOXX 50 (EUR) Put JUN21 3200.00	847	DAI.XEX#P9P8R	Germany DAX (TR)	Put MAR21 11700.00	1480	PXL.NX#P7XWF	France CAC 40 Put JUN20 5200.00	
215	ESX.STX#P6T5J	EURO	STOXX 50 (EUR) Put JUN21 3300.00	848	DAI.XEX#P6KH4	Germany DAX (TR)	Put MAR21 11800.00	1481	PXL.NX#P7XWF	France CAC 40 Put JUN20 5250.00	
216	ESX.STX#P6P5F	EURO	STOXX 50 (EUR) Put JUN21 3400.00	849	DAI.XEX#P6KH4	Germany DAX (TR)	Put MAR21 11900.00	1482	PXL.NX#P7XWF	France CAC 40 Put JUN20 5300.00	
217	ESX.STX#P6Y42	EURO	STOXX 50 (EUR) Put JUN21 3500.00	850	DAI.XEX#P2C1L	Germany DAX (TR)	Put MAR21 12000.00	1483	PXL.NX#P7XWF	France CAC 40 Put JUN20 5350.00	
218	ESX.STX#P654X	EURO	STOXX 50 (EUR) Put JUN21 3600.00	851	DAI.XEX#P6H9A	Germany DAX (TR)	Put MAR21 12100.00	1484	PXL.NX#P7XWF	France CAC 40 Put JUN20 5400.00	
219	ESX.STX#P6B15	EURO	STOXX 50 (EUR) Put JUN21 3700.00	852	DAI.XEX#P3J5G	Germany DAX (TR)	Put MAR21 12200.00	1485	PXL.NX#P7XWF	France CAC 40 Put JUN20 5450.00	
220	ESX.STX#P6FRN	EURO	STOXX 50 (EUR) Put JUN21 3800.00	853	DAI.XEX#P247H	Germany DAX (TR)	Put MAR21 12300.00	1486	PXL.NX#P7XWF	France CAC 40 Put JUN20 5500.00	
221	ESX.STX#P6LRT	EURO	STOXX 50 (EUR) Put JUN21 3900.00	854							

Número	Ticker	FacSet	Opción	Número	Ticker	FacSet	Opción	Número	Ticker	FacSet	Opción
295	ESX.STX#CZLZ6		EURO STOXX 50 (EUR) Call MAR22 3800.00	928	DAX.XEX#PWKL5		Germany DAX (TR) Put JUN21 9700.00	1561	PXLEN#XCMJSLC		France CAC 40 Call DEC20 5850.00
296	ESX.STX#CWVPM		EURO STOXX 50 (EUR) Call MAR22 3900.00	929	DAX.XEX#P047Q		Germany DAX (TR) Put JUN21 9800.00	1562	PXLEN#XCM6MTT		France CAC 40 Call DEC20 5900.00
297	ESX.STX#CMRBT		EURO STOXX 50 (EUR) Call MAR22 4100.00	930	DAX.XEX#PG80Y		Germany DAX (TR) Put JUN21 9900.00	1563	PXLEN#XCM3BWX		France CAC 40 Call DEC20 5950.00
298	ESX.STX#C1Q2C		EURO STOXX 50 (EUR) Call MAR22 4100.00	931	DAX.XEX#PZWH8		Germany DAX (TR) Put JUN21 10000.00	1564	PXLEN#XCM4VFT		France CAC 40 Call DEC20 6000.00
299	ESX.STX#Y8C		EURO STOXX 50 (EUR) Call MAR22 3900.00	932	DAX.XEX#P45AY		Germany DAX (TR) Put JUN21 10200.00	1565	PXLEN#XCM2FVJ		France CAC 40 Call DEC20 6050.00
300	ESX.STX#CTK26		EURO STOXX 50 (EUR) Call MAR22 4300.00	933	DAX.XEX#PF59F		Germany DAX (TR) Put JUN21 10200.00	1566	PXLEN#XCM5HSW		France CAC 40 Put DEC20 3200.00
301	ESX.STX#CPGGW		EURO STOXX 50 (EUR) Call MAR22 4400.00	934	DAX.XEX#PH550		Germany DAX (TR) Put JUN21 10300.00	1567	PXLEN#XCM2PVZ		France CAC 40 Put DEC20 3400.00
302	ESX.STX#C1D57		EURO STOXX 50 (EUR) Call MAR22 4500.00	935	DAX.XEX#PDZ7C		Germany DAX (TR) Put JUN21 10400.00	1568	PXLEN#XCM3QBM		France CAC 40 Put DEC20 3600.00
303	ESX.STX#PCX46		EURO STOXX 50 (EUR) Call MAR22 2800.00	936	DAX.XEX#PBJWX		Germany DAX (TR) Put JUN21 10500.00	1569	PXLEN#XCM3TBU		France CAC 40 Put DEC20 3800.00
304	ESX.STX#PP193		EURO STOXX 50 (EUR) Call MAR22 3000.00	937	DAX.XEX#P8VTM		Germany DAX (TR) Put JUN21 10600.00	1570	PXLEN#XCM3DD0		France CAC 40 Put DEC20 4000.00
305	ESX.STX#PBH0X		EURO STOXX 50 (EUR) Put MAR22 3000.00	938	DAX.XEX#PH572		Germany DAX (TR) Put JUN21 10700.00	1571	PXLEN#XCM4PRD2		France CAC 40 Put DEC20 4050.00
306	ESX.STX#P6TP2		EURO STOXX 50 (EUR) Put MAR22 3100.00	939	DAX.XEX#PLJW9		Germany DAX (TR) Put JUN21 10800.00	1572	PXLEN#XCM3PQR2		France CAC 40 Put DEC20 4100.00
307	ESX.STX#PFH9K		EURO STOXX 50 (EUR) Put MAR22 3200.00	940	DAX.XEX#P85D9		Germany DAX (TR) Put JUN21 10900.00	1573	PXLEN#XCM3RSP		France CAC 40 Put DEC20 4150.00
308	ESX.STX#PP0Y4		EURO STOXX 50 (EUR) Put MAR22 3300.00	941	DAX.XEX#PRKJ9		Germany DAX (TR) Put JUN21 11000.00	1574	PXLEN#XCM3PZF		France CAC 40 Put DEC20 4200.00
309	ESX.STX#P2CC2F		EURO STOXX 50 (EUR) Put MAR22 3400.00	942	DAX.XEX#PMC0H		Germany DAX (TR) Put JUN21 11100.00	1575	PXLEN#XCM3QCC		France CAC 40 Put DEC20 4250.00
310	ESX.STX#P3S1J		EURO STOXX 50 (EUR) Put MAR22 3500.00	943	DAX.XEX#PL3VJ		Germany DAX (TR) Put JUN21 11200.00	1576	PXLEN#XCM3P68		France CAC 40 Put DEC20 4300.00
311	ESX.STX#P2YT6		EURO STOXX 50 (EUR) Put MAR22 3600.00	944	DAX.XEX#P2TMP		Germany DAX (TR) Put JUN21 11300.00	1577	PXLEN#XCM3PCH4		France CAC 40 Put DEC20 4350.00
312	ESX.STX#PRD08		EURO STOXX 50 (EUR) Put MAR22 3700.00	945	DAX.XEX#PBPB9		Germany DAX (TR) Put JUN21 11400.00	1578	PXLEN#XCM3P85		France CAC 40 Put DEC20 4400.00
313	ESX.STX#P8N2Z		EURO STOXX 50 (EUR) Put MAR22 3800.00	946	DAX.XEX#PYT82		Germany DAX (TR) Put JUN21 11500.00	1579	PXLEN#XCM3PSTL		France CAC 40 Put DEC20 4450.00
314	ESX.STX#P5SNLQ		EURO STOXX 50 (EUR) Put MAR22 3900.00	947	DAX.XEX#P4RT5		Germany DAX (TR) Put JUN21 11600.00	1580	PXLEN#XCM3M0T		France CAC 40 Put DEC20 4500.00
315	ESX.STX#P29BH		EURO STOXX 50 (EUR) Put MAR22 4000.00	948	DAX.XEX#P583F		Germany DAX (TR) Put JUN21 11700.00	1581	PXLEN#XCM3P0PB		France CAC 40 Put DEC20 4550.00
316	ESX.STX#P4JZC		EURO STOXX 50 (EUR) Put MAR22 4100.00	949	DAX.XEX#PCQ3H		Germany DAX (TR) Put JUN21 11800.00	1582	PXLEN#XCM3PNMZ		France CAC 40 Put DEC20 4600.00
317	ESX.STX#PNDPH		EURO STOXX 50 (EUR) Put MAR22 4200.00	950	DAX.XEX#P4X3P		Germany DAX (TR) Put JUN21 11900.00	1583	PXLEN#XCM3PNHY		France CAC 40 Put DEC20 4650.00
318	ESX.STX#PDR38		EURO STOXX 50 (EUR) Put MAR22 4300.00	951	DAX.XEX#P558L		Germany DAX (TR) Put JUN21 12000.00	1584	PXLEN#XCM3PJV2		France CAC 40 Put DEC20 4700.00
319	ESX.STX#P7579		EURO STOXX 50 (EUR) Put MAR22 4400.00	952	DAX.XEX#PWH7X		Germany DAX (TR) Put JUN21 12100.00	1585	PXLEN#XCM3P3M7		France CAC 40 Put DEC20 4750.00
320	ESX.STX#P1YH1		EURO STOXX 50 (EUR) Put MAR22 4500.00	953	DAX.XEX#P780Y		Germany DAX (TR) Put JUN21 12200.00	1586	PXLEN#XCM3P3JH		France CAC 40 Put DEC20 4800.00
321	ESX.STX#C9FD7		EURO STOXX 50 (EUR) Call JUN22 3600.00	954	DAX.XEX#P83PK		Germany DAX (TR) Put JUN21 12300.00	1587	PXLEN#XCM3PTT2Z		France CAC 40 Put DEC20 4850.00
322	ESX.STX#C25B1		EURO STOXX 50 (EUR) Call JUN22 3700.00	955	DAX.XEX#P3M31		Germany DAX (TR) Put JUN21 12400.00	1588	PXLEN#XCM3PD2TP		France CAC 40 Put DEC20 4900.00
323	ESX.STX#CVCJT		EURO STOXX 50 (EUR) Call JUN22 3800.00	956	DAX.XEX#P0B2W		Germany DAX (TR) Put JUN21 12500.00	1589	PXLEN#XCM3PMLZ		France CAC 40 Put DEC20 4950.00
324	ESX.STX#C2BFM		EURO STOXX 50 (EUR) Call JUN22 3900.00	957	DAX.XEX#P6K85		Germany DAX (TR) Put JUN21 12600.00	1590	PXLEN#XCM3PFFR7		France CAC 40 Put DEC20 5000.00
325	ESX.STX#C52R1		EURO STOXX 50 (EUR) Call JUN22 4000.00	958	DAX.XEX#P1K63		Germany DAX (TR) Put JUN21 12700.00	1591	PXLEN#XCM3P2C3		France CAC 40 Put DEC20 5050.00
326	ESX.STX#C8T8R		EURO STOXX 50 (EUR) Call JUN22 4100.00	959	DAX.XEX#PY0NN		Germany DAX (TR) Put JUN21 12800.00	1592	PXLEN#XCM3PCY3T		France CAC 40 Put DEC20 5100.00
327	ESX.STX#C93N8		EURO STOXX 50 (EUR) Call JUN22 4200.00	960	DAX.XEX#PM670		Germany DAX (TR) Put JUN21 12900.00	1593	PXLEN#XCM3PQCTH		France CAC 40 Put DEC20 5150.00
328	ESX.STX#C8DCS		EURO STOXX 50 (EUR) Call JUN22 4300.00	961	DAX.XEX#P84PT		Germany DAX (TR) Put JUN21 13000.00	1594	PXLEN#XCM3P86G		France CAC 40 Put DEC20 5200.00
329	ESX.STX#C0LL9		EURO STOXX 50 (EUR) Call JUN22 4400.00	962	DAX.XEX#P8CQ1		Germany DAX (TR) Put JUN21 13100.00	1595	PXLEN#XCM3P8JW		France CAC 40 Put DEC20 5250.00
330	ESX.STX#C0TGO		EURO STOXX 50 (EUR) Call JUN22 4500.00	963	DAX.XEX#PRB3J		Germany DAX (TR) Put JUN21 13200.00	1596	PXLEN#XCM3PXC9K		France CAC 40 Put DEC20 5300.00
331	ESX.STX#C2XJQ		EURO STOXX 50 (EUR) Call JUN22 4600.00	964	DAX.XEX#PP4N7		Germany DAX (TR) Put JUN21 13300.00	1597	PXLEN#XCM3PTTKT		France CAC 40 Put DEC20 5350.00
332	ESX.STX#C2LYJ		EURO STOXX 50 (EUR) Call JUN22 4700.00	965	DAX.XEX#P3YGT		Germany DAX (TR) Put JUN21 13400.00	1598	PXLEN#XCM3PFF1Y		France CAC 40 Put DEC20 5400.00
333	ESX.STX#A7638		EURO STOXX 50 (EUR) Call JUN22 4800.00	966	DAX.XEX#P063X		Germany DAX (TR) Put JUN21 13500.00	1599	PXLEN#XCM3P3JH		France CAC 40 Put DEC20 5450.00
334	ESX.STX#CFGAT		EURO STOXX 50 (EUR) Call JUN22 5000.00	967	DAX.XEX#PD10P		Germany DAX (TR) Put JUN21 13600.00	1600	PXLEN#XCM3PJM5Y		France CAC 40 Put DEC20 5500.00
335	ESX.STX#P9Y4X		EURO STOXX 50 (EUR) Put JUN22 2500.00	968	DAX.XEX#P5SKL4		Germany DAX (TR) Put JUN21 13700.00	1601	PXLEN#XCM3P550L		France CAC 40 Put DEC20 5550.00
336	ESX.STX#P3K85		EURO STOXX 50 (EUR) Put JUN22 2600.00	969	DAX.XEX#PXTJ3		Germany DAX (TR) Put JUN21 13800.00	1602	PXLEN#XCM3PVVHW		France CAC 40 Put DEC20 5600.00
337	ESX.STX#P0G04		EURO STOXX 50 (EUR) Put JUN22 2700.00	970	DAX.XEX#P0N9X		Germany DAX (TR) Put JUN21 13900.00	1603	PXLEN#XCM3P3JH		France CAC 40 Put DEC20 5650.00
338	ESX.STX#P0D2G		EURO STOXX 50 (EUR) Put JUN22 2800.00	971	DAX.XEX#P8K12		Germany DAX (TR) Put JUN21 14000.00	1604	PXLEN#XCM3P57VM		France CAC 40 Put DEC20 5700.00
339	ESX.STX#P98Z2		EURO STOXX 50 (EUR) Put JUN22 2900.00	972	DAX.XEX#P7K63		Germany DAX (TR) Put JUN21 14500.00	1605	PXLEN#XCM3P1N1J		France CAC 40 Put DEC20 5750.00
340	ESX.STX#P17Y6		EURO STOXX 50 (EUR) Put JUN22 3000.00	973	DAX.XEX#CB3WP		Germany DAX (TR) Call SEP21 10000.00	1606	PXLEN#XCM3PWR3		France CAC 40 Put DEC20 5800.00
341	ESX.STX#P3328		EURO STOXX 50 (EUR) Put JUN22 3100.00	974	DAX.XEX#CWPVZ		Germany DAX (TR) Call SEP21 11000.00	1607	PXLEN#XCM3PVM7L		France CAC 40 Put DEC20 5850.00
342	ESX.STX#P7723		EURO STOXX 50 (EUR) Put JUN22 3200.00	975	DAX.XEX#CR1QP		Germany DAX (TR) Call SEP21 11500.00	1608	PXLEN#XCM3P3JH		France CAC 40 Put DEC20 5900.00
343	ESX.STX#P9CQ7		EURO STOXX 50 (EUR) Put JUN22 3300.00	976	DAX.XEX#CG3PS		Germany DAX (TR) Call SEP21 12500.00	1609	PXLEN#XCM3P94L1		France CAC 40 Put DEC20 5950.00
344	ESX.STX#P6GMX		EURO STOXX 50 (EUR) Put JUN22 3400.00	977	DAX.XEX#CQV9P		Germany DAX (TR) Call SEP21 13000.00	1610	PXLEN#XCM3P8BY		France CAC 40 Put DEC20 6000.00
345	ESX.STX#P6V6V		EURO STOXX 50 (EUR) Put JUN22 3500.00	978	DAX.XEX#C2N1R		Germany DAX (TR) Call SEP21 13100.00	1611	PXLEN#XCM3P9K9Q		France CAC 40 Call MAR21 4000.00
346	ESX.STX#P81J1		EURO STOXX 50 (EUR) Put JUN22 3600.00	979	DAX.XEX#C2W8X		Germany DAX (TR) Call SEP21 13200.00	1612	PXLEN#XCM3P4VZ4		France CAC 40 Call MAR21 4050.00
347	ESX.STX#P2K5D		EURO STOXX 50 (EUR) Put JUN22 3700.00	980	DAX.XEX#C6Y4B		Germany DAX (TR) Call SEP21 13300.00	1613	PXLEN#XCM3C7R1		France CAC 40 Call MAR21 4100.00
348	ESX.STX#P6G9R		EURO STOXX 50 (EUR) Put JUN22 3800.00	981	DAX.XEX#C3JRY		Germany DAX (TR) Call SEP21 13400.00	1614	PXLEN#XCM3C5VW		France CAC 40 Call MAR21 4150.00
349	ESX.STX#P0P91		EURO STOXX 50 (EUR) Put JUN22 3900.00	982	DAX.XEX#C9PHQ		Germany DAX (TR) Call SEP21 13500.00	1615	PXLEN#XCM3C3JY		France CAC 40 Call MAR21 4200.00
350	ESX.STX#P8591		EURO STOXX 50 (EUR) Put JUN22 4000.00	983	DAX.XEX#C8D8B		Germany DAX (TR) Call SEP21 13600.00	1616	PXLEN#XCM3C4NF		France CAC 40 Call MAR21 4250.00
351	ESX.STX#P2D03		EURO STOXX 50 (EUR) Put JUN22 4100.00	984	DAX.XEX#C10X8		Germany DAX (TR) Call SEP21 13700.00	1617	PXLEN#XCM3C4NHR		France CAC 40 Call MAR21 4300.00
352	ESX.STX#PXXLL		EURO STOXX 50 (EUR) Put JUN22 4200.00	985	DAX.XEX#CLRQJ		Germany DAX (TR) Call SEP21 13800.00	1618	PXLEN#XCM3C54G		France CAC 40 Call MAR21 4350.00
353	ESX.STX#PMMZ3		EURO STOXX 50 (EUR) Put JUN22 4300.00	986	DAX.XEX#CHG21		Germany DAX (TR) Call SEP21 13900.00	1619	PXLEN#XCM3C6N8P		France CAC 40 Call MAR21 4400.00
354	ESX.STX#P12VF		EURO STOXX 50 (EUR) Put JUN22 4400.00	987	DAX.XEX#CPR9Y		Germany DAX (TR) Call SEP21 14000.00	1620	PXLEN#XCM3C4YH6		France CAC 40 Call MAR21 4450.00
355	ESX.STX#P7723		EURO STOXX 50 (EUR) Put JUN22 4500.00	988	DAX.XEX#P8F8M		Germany DAX (TR) Call SEP21 14100.00	1621	PXLEN#XCM3C9VJ		France CAC 40 Call MAR21 4500.00
356	ESX.STX#P1V4P		EURO STOXX 50 (EUR) Put JUN22 4600.00	989	DAX.XEX#C3HGW		Germany DAX (TR) Call SEP21 14200.00	1622	PXLEN#XCM3C0S2G		France CAC 40 Call MAR21 4550.00
357	ESX.STX#P92LD		EURO STOXX 50 (EUR) Put JUN22 4700.00	990	DAX.XEX#CB2F8		Germany DAX (TR) Call SEP21 14300.00	1623	PXLEN#XCM3C5TTY		France CAC 40 Call MAR21 4550.00
358	ESX.STX#P1VX1		EURO STOXX 50 (EUR) Put JUN22 4800.00	991	DAX.XEX#C4G2Z		Germany DAX (TR) Call SEP21 14400.00	1624	PXLEN#XCM3C0BXR		France CAC 40 Call MAR21 4600.00
359	ESX.STX#P9N14		EURO STOXX 50 (EUR) Put JUN22 4900.00	992	DAX.XEX#C265R		Germany DAX (TR) Call SEP21 14500.00	1625	PXLEN#XCM3P6P1V		France CAC 40 Call MAR21 4650.00
360	ESX.STX#C91FS		EURO STOXX 50 (EUR) Call SEP22 3300.00	993	DAX.XEX#CQK12		Germany DAX (TR) Call SEP21 14600.00	1626	PXLEN#XCM3C6L8J		France CAC 40 Call MAR21 6000.00
361	ESX.STX#C81Q0		EURO STOXX 50 (EUR) Call SEP22 3400.00	994	DAX.XEX#C295L		Germany DAX (TR) Call SEP21 14700.00	1627	PXLEN#XCM3PVM28		France CAC 40 Put MAR21 4000.00
362	ESX.STX#C85Y0		EURO STOXX 50 (EUR) Call SEP22 3500.00	995	DAX.XEX#CXG1X		Germany DAX (TR) Call SEP21 14800.00	1628	PXLEN#XCM3PL3L3		France CAC 40 Put MAR21 4200.00
363	ESX.STX#C7R73		EURO STOXX 50 (EUR) Call SEP22 3600.00	996	DAX.XEX#CXK1Y		Germany DAX (TR) Call SEP21 14900.00	1629	PXLEN#XCM3P9B9Y		France CAC 40 Put MAR21 4300.00
364	ESX.STX#C6D76		EURO STOXX 50 (EUR) Call SEP22 3700.00	997	DAX.XEX#P7TKX		Germany DAX (TR) Put SEP21 10000.00	1630	PXLEN#XCM3PYPVP		France CAC 40 Put MAR21 4400.00
365	ESX.STX#C1FH5		EURO STOXX 50 (EUR) Call SEP22 3800.00	998	DAX.XEX#P3V3L		Germany DAX (TR) Put SEP21 11000.00	1631	PXLEN#XCM3PCCF		France CAC 40 Put MAR21 4600.00
366	ESX.STX#C0										

Numero	Ticker FacSet	Opcion	Numero	Ticker FacSet	Opcion	Numero	Ticker FacSet	Opcion
446	DAX.XE#C70P	Germany DAX (TR) Call MAR20 11200.00	1078	DAX.XE#T1FB	Germany DAX (TR) Put DEC21 10500.00	1712	DAX.XE#ANV5	France CAC 40 Call DEC21 8000.00
447	DAX.XE#C5QB	Germany DAX (TR) Call MAR20 11300.00	1080	DAX.XE#PV2MV	Germany DAX (TR) Put DEC21 11000.00	1713	PXLXN#CY6G9	France CAC 40 Call DEC21 6050.00
448	DAX.XE#C6TR5	Germany DAX (TR) Call MAR20 11400.00	1081	DAX.XE#PRXJ7	Germany DAX (TR) Put DEC21 11100.00	1714	PXLXN#C4NTH	France CAC 40 Call DEC21 6100.00
449	DAX.XE#CNVH72	Germany DAX (TR) Call MAR20 11500.00	1082	DAX.XE#PYDKX	Germany DAX (TR) Put DEC21 11200.00	1715	PXLXN#CNQV7	France CAC 40 Call DEC21 6150.00
450	DAX.XE#C3DW	Germany DAX (TR) Call MAR20 12100.00	1083	DAX.XE#P2G2	Germany DAX (TR) Put DEC21 11300.00	1716	PXLXN#C05B8	France CAC 40 Call DEC21 6200.00
451	DAX.XE#C6XBN	Germany DAX (TR) Call MAR20 11700.00	1084	DAX.XE#102B	Germany DAX (TR) Put DEC21 11400.00	1717	PXLXN#CCK1H	France CAC 40 Call DEC21 6250.00
452	DAX.XE#C2WY1	Germany DAX (TR) Call MAR20 11800.00	1085	DAX.XE#P5QK9	Germany DAX (TR) Put DEC21 11500.00	1718	PXLXN#C2SDJ	France CAC 40 Call DEC21 6300.00
453	DAX.XE#C3XLG	Germany DAX (TR) Call MAR20 11900.00	1086	DAX.XE#P20W6	Germany DAX (TR) Put DEC21 11600.00	1719	PXLXN#CCK5F	France CAC 40 Call DEC21 6350.00
454	DAX.XE#CNCZHG	Germany DAX (TR) Call MAR20 12000.00	1087	DAX.XE#PFWJWZ	Germany DAX (TR) Put DEC21 11700.00	1720	PXLXN#CYR5R	France CAC 40 Call DEC21 6400.00
455	DAX.XE#C7C37	Germany DAX (TR) Call MAR20 12100.00	1088	DAX.XE#42PC	Germany DAX (TR) Put DEC21 11800.00	1721	PXLXN#CMM6M	France CAC 40 Call DEC21 6450.00
456	DAX.XE#CHDMJ	Germany DAX (TR) Call MAR20 12200.00	1089	DAX.XE#PGT7K	Germany DAX (TR) Put DEC21 11900.00	1722	PXLXN#C4JMV	France CAC 40 Call DEC21 6500.00
457	DAX.XE#CZ10M	Germany DAX (TR) Call MAR20 12300.00	1090	DAX.XE#PXFZV	Germany DAX (TR) Put DEC21 12000.00	1723	PXLXN#PFDR7	France CAC 40 Call DEC21 4000.00
458	DAX.XE#C3VJQ	Germany DAX (TR) Call MAR20 12400.00	1091	DAX.XE#P4HTV	Germany DAX (TR) Put DEC21 12100.00	1724	PXLXN#FPW3K	France CAC 40 Put DEC21 4200.00
459	DAX.XE#C0V57Y	Germany DAX (TR) Call MAR20 12500.00	1092	DAX.XE#PJZ04	Germany DAX (TR) Put DEC21 12200.00	1725	PXLXN#PFTT7	France CAC 40 Put DEC21 4400.00
460	DAX.XE#C173D	Germany DAX (TR) Call MAR20 12600.00	1093	DAX.XE#P8317	Germany DAX (TR) Put DEC21 12300.00	1726	PXLXN#FPM6BG	France CAC 40 Put DEC21 4600.00
461	DAX.XE#C0T9H2	Germany DAX (TR) Call MAR20 12700.00	1094	DAX.XE#P952R	Germany DAX (TR) Put DEC21 12400.00	1727	PXLXN#FPHCMN	France CAC 40 Put DEC21 4800.00
462	DAX.XE#C0MDNH	Germany DAX (TR) Call MAR20 12800.00	1095	DAX.XE#PWC7H	Germany DAX (TR) Put DEC21 12500.00	1728	PXLXN#FP1YK5	France CAC 40 Put DEC21 4900.00
463	DAX.XE#C1310	Germany DAX (TR) Call MAR20 12900.00	1096	DAX.XE#PBFZP	Germany DAX (TR) Put DEC21 12600.00	1729	PXLXN#FPMQ3M	France CAC 40 Put DEC21 5000.00
464	DAX.XE#C0PJVQ	Germany DAX (TR) Call MAR20 13000.00	1097	DAX.XE#PFBMT	Germany DAX (TR) Put DEC21 12700.00	1730	PXLXN#C0PV07	France CAC 40 Put DEC21 5100.00
465	DAX.XE#CJM25	Germany DAX (TR) Call MAR20 13500.00	1098	DAX.XE#PMPV6	Germany DAX (TR) Put DEC21 12800.00	1731	PXLXN#FP3E2T	France CAC 40 Put DEC21 5200.00
466	DAX.XE#CCL5M	Germany DAX (TR) Call MAR20 14000.00	1099	DAX.XE#P4PVC	Germany DAX (TR) Put DEC21 12900.00	1732	PXLXN#FP8B50	France CAC 40 Put DEC21 5300.00
467	DAX.XE#PFFW5	Germany DAX (TR) Put MAR20 6000.00	1100	DAX.XE#PBFZP	Germany DAX (TR) Put DEC21 13000.00	1733	PXLXN#FP8B98	France CAC 40 Put DEC21 5400.00
468	DAX.XE#P805N	Germany DAX (TR) Put MAR20 7000.00	1101	DAX.XE#PXX9C	Germany DAX (TR) Put DEC21 13100.00	1734	PXLXN#C0PC1B4	France CAC 40 Put DEC21 5500.00
469	DAX.XE#PBLT0B	Germany DAX (TR) Put MAR20 8000.00	1102	DAX.XE#P6LJ7	Germany DAX (TR) Put DEC21 13200.00	1735	PXLXN#FP7P7C	France CAC 40 Put DEC21 5550.00
470	DAX.XE#P8BCL	Germany DAX (TR) Put MAR20 9000.00	1103	DAX.XE#PFWJ7	Germany DAX (TR) Put DEC21 13300.00	1736	PXLXN#FP5Y0K	France CAC 40 Put DEC21 5600.00
471	DAX.XE#P2QF	Germany DAX (TR) Put MAR20 9500.00	1104	DAX.XE#PRHLM	Germany DAX (TR) Put DEC21 13400.00	1737	PXLXN#FP8Y1J	France CAC 40 Put DEC21 5650.00
472	DAX.XE#P2ZVQ	Germany DAX (TR) Put MAR20 10000.00	1105	DAX.XE#P6W5N	Germany DAX (TR) Put DEC21 13500.00	1738	PXLXN#C0P8L58	France CAC 40 Put DEC21 5700.00
473	DAX.XE#PFTG4	Germany DAX (TR) Put MAR20 10400.00	1106	DAX.XE#P4ND8	Germany DAX (TR) Put DEC21 13600.00	1739	PXLXN#C2P1F1	France CAC 40 Put DEC21 5750.00
474	DAX.XE#PR1V5	Germany DAX (TR) Put MAR20 10500.00	1107	DAX.XE#P5Y9H	Germany DAX (TR) Put DEC21 13700.00	1740	PXLXN#C0P6T60	France CAC 40 Put DEC21 5800.00
475	DAX.XE#P5MT0	Germany DAX (TR) Put MAR20 10600.00	1108	DAX.XE#P5RYM7	Germany DAX (TR) Put DEC21 13800.00	1741	PXLXN#FP1K86	France CAC 40 Put DEC21 5850.00
476	DAX.XE#P2986	Germany DAX (TR) Put MAR20 10700.00	1109	DAX.XE#P3W1Z	Germany DAX (TR) Put DEC21 13900.00	1742	PXLXN#C0PY2	France CAC 40 Put DEC21 5900.00
477	DAX.XE#P5Y1B	Germany DAX (TR) Put MAR20 10800.00	1110	DAX.XE#P5SH5	Germany DAX (TR) Put DEC21 14000.00	1743	PXLXN#FP34C	France CAC 40 Put DEC21 5950.00
478	DAX.XE#P3SR8	Germany DAX (TR) Put MAR20 10900.00	1111	DAX.XE#P2XCY	Germany DAX (TR) Put DEC21 14100.00	1744	PXLXN#FPJ4C3	France CAC 40 Put DEC21 6000.00
479	DAX.XE#PXM4	Germany DAX (TR) Put MAR20 11000.00	1112	DAX.XE#P5VNF	Germany DAX (TR) Put DEC21 14200.00	1745	PXLXN#FP2ZV5	France CAC 40 Put DEC21 6050.00
480	DAX.XE#P7S2W	Germany DAX (TR) Put MAR20 11100.00	1113	DAX.XE#P4F1Z	Germany DAX (TR) Put DEC21 14300.00	1746	PXLXN#C0G3P7	France CAC 40 Put DEC21 6100.00
481	DAX.XE#P5ZF7	Germany DAX (TR) Put MAR20 11200.00	1114	DAX.XE#PQ04K	Germany DAX (TR) Put DEC21 14400.00	1747	PXLXN#FP9ZLH	France CAC 40 Put DEC21 6150.00
482	DAX.XE#P3G89	Germany DAX (TR) Put MAR20 11300.00	1115	DAX.XE#PNDLV	Germany DAX (TR) Put DEC21 14500.00	1748	PXLXN#FP74X5	France CAC 40 Put DEC21 6200.00
483	DAX.XE#PDLJ5	Germany DAX (TR) Put MAR20 11400.00	1116	DAX.XE#PYD3V	Germany DAX (TR) Put DEC21 14600.00	1749	PXLXN#FP7VGN	France CAC 40 Put DEC21 6250.00
484	DAX.XE#P7X3N	Germany DAX (TR) Put MAR20 11500.00	1117	DAX.XE#P6SL45	Germany DAX (TR) Put DEC21 14700.00	1750	PXLXN#C0P87	France CAC 40 Put DEC21 6300.00
485	DAX.XE#P5Z76	Germany DAX (TR) Put MAR20 11600.00	1118	DAX.XE#PXP84	Germany DAX (TR) Put DEC21 14800.00	1751	PXLXN#FP643G	France CAC 40 Put DEC21 6350.00
486	DAX.XE#P3PHH	Germany DAX (TR) Put MAR20 11700.00	1119	DAX.XE#PFT4P	Germany DAX (TR) Put DEC21 14900.00	1752	PXLXN#FP5F5B	France CAC 40 Put DEC21 6400.00
487	DAX.XE#PZD4	Germany DAX (TR) Put MAR20 11800.00	1120	DAX.XE#P8VD9	Germany DAX (TR) Put DEC21 15000.00	1753	PXLXN#FP90BJ	France CAC 40 Put DEC21 6450.00
488	DAX.XE#PMT5Z	Germany DAX (TR) Put MAR20 11900.00	1121	DAX.XE#PMT8M	Germany DAX (TR) Put DEC21 15100.00	1754	PXLXN#FP9G30	France CAC 40 Put DEC21 6500.00
489	DAX.XE#P0STK	Germany DAX (TR) Put MAR20 12000.00	1122	DAX.XE#PTZ76	Germany DAX (TR) Put DEC21 15200.00	1755	PXLXN#C0K233	France CAC 40 Call MAR22 6000.00
490	DAX.XE#P5YGD	Germany DAX (TR) Put MAR20 12100.00	1123	DAX.XE#P8J5N	Germany DAX (TR) Put DEC21 15300.00	1756	PXLXN#C0CJH7	France CAC 40 Call MAR22 6100.00
491	DAX.XE#PZ1D4	Germany DAX (TR) Put MAR20 12200.00	1124	DAX.XE#P3N2YM	Germany DAX (TR) Put DEC21 15400.00	1757	PXLXN#C4PB5	France CAC 40 Call MAR22 6100.00
492	DAX.XE#P4MZV	Germany DAX (TR) Put MAR20 12300.00	1125	DAX.XE#P5P6G	Germany DAX (TR) Put DEC21 15500.00	1758	PXLXN#C0S7TN	France CAC 40 Call MAR22 6200.00
493	DAX.XE#P2ZT1	Germany DAX (TR) Put MAR20 12400.00	1126	DAX.XE#P8RHL	Germany DAX (TR) Put DEC21 15600.00	1759	PXLXN#C0K9YK	France CAC 40 Call MAR22 6200.00
494	DAX.XE#P7VZ2	Germany DAX (TR) Put MAR20 12500.00	1127	DAX.XE#PQ09A	Germany DAX (TR) Put DEC21 15700.00	1760	PXLXN#C0K9YK	France CAC 40 Call MAR22 6200.00
495	DAX.XE#P5SG8	Germany DAX (TR) Put MAR20 12600.00	1128	DAX.XE#P7X2Y	Germany DAX (TR) Put DEC21 15800.00	1761	PXLXN#C0K6YG	France CAC 40 Call MAR22 6500.00
496	DAX.XE#P6W7Z	Germany DAX (TR) Put MAR20 12700.00	1129	DAX.XE#P4K63	Germany DAX (TR) Put DEC21 16000.00	1762	PXLXN#C0J355	France CAC 40 Call MAR22 6600.00
497	DAX.XE#P0Y3B	Germany DAX (TR) Put MAR20 12800.00	1130	DAX.XE#P2T2P	Germany DAX (TR) Put DEC21 16100.00	1763	PXLXN#C0B5G	France CAC 40 Call MAR22 6800.00
498	DAX.XE#P951R	Germany DAX (TR) Put MAR20 12900.00	1131	DAX.XE#C8N8Y	Germany DAX (TR) Call MAR22 11000.00	1764	PXLXN#C0B5G	France CAC 40 Call MAR22 6800.00
499	DAX.XE#P3MKG0	Germany DAX (TR) Put MAR20 13000.00	1132	DAX.XE#C8M97	Germany DAX (TR) Call MAR22 12000.00	1765	PXLXN#P6G7Y9	France CAC 40 Put MAR22 5800.00
500	DAX.XE#P877Z	Germany DAX (TR) Put MAR20 13500.00	1133	DAX.XE#C8S7J	Germany DAX (TR) Call MAR22 13000.00	1766	PXLXN#P5Z0B	France CAC 40 Put MAR22 6000.00
501	DAX.XE#P5958	Germany DAX (TR) Put MAR20 14000.00	1134	DAX.XE#C8D98	Germany DAX (TR) Call MAR22 15000.00	1767	PXLXN#P5959	France CAC 40 Put MAR22 6100.00
502	DAX.XE#C8S85	Germany DAX (TR) Call JUN20 6000.00	1135	DAX.XE#C8D50	Germany DAX (TR) Call MAR22 14500.00	1768	PXLXN#P1XP9	France CAC 40 Put MAR22 6200.00
503	DAX.XE#C8L70	Germany DAX (TR) Call JUN20 7200.00	1136	DAX.XE#C8W9V	Germany DAX (TR) Call MAR22 15000.00	1769	PXLXN#P1TWN	France CAC 40 Put MAR22 6300.00
504	DAX.XE#C8HTJ	Germany DAX (TR) Call JUN20 7400.00	1137	DAX.XE#C8D10	Germany DAX (TR) Call MAR22 15100.00	1770	PXLXN#P0N8J	France CAC 40 Put MAR22 6400.00
505	DAX.XE#C8K45	Germany DAX (TR) Call JUN20 8000.00	1138	DAX.XE#C8D50	Germany DAX (TR) Call MAR22 15200.00	1771	PXLXN#P8F79	France CAC 40 Put MAR22 6500.00
506	DAX.XE#C8V93	Germany DAX (TR) Call JUN20 9000.00	1139	DAX.XE#C8F26	Germany DAX (TR) Call MAR22 15300.00	1772	PXLXN#P2MXM	France CAC 40 Put MAR22 6700.00
507	DAX.XE#C8PSSL	Germany DAX (TR) Call JUN20 10000.00	1140	DAX.XE#C8J9W	Germany DAX (TR) Call MAR22 15400.00	1773	PXLXN#P8JXT	France CAC 40 Put MAR22 6800.00
508	DAX.XE#C8L9Y	Germany DAX (TR) Call JUN20 10500.00	1141	DAX.XE#C8TK7	Germany DAX (TR) Call MAR22 15500.00	1774	PXLXN#P8K34	France CAC 40 Put MAR22 6200.00
509	DAX.XE#C8X0T6	Germany DAX (TR) Call JUN20 11000.00	1142	DAX.XE#C8X0T6	Germany DAX (TR) Call MAR22 15600.00	1775	PXLXN#P8K34	France CAC 40 Put MAR22 6200.00
510	DAX.XE#C8V85	Germany DAX (TR) Call JUN20 11500.00	1143	DAX.XE#C8X0T6	Germany DAX (TR) Call MAR22 15700.00	1776	PXLXN#C8C1F	France CAC 40 Call JUN22 6450.00
511	DAX.XE#C8N43	Germany DAX (TR) Call JUN20 12000.00	1144	DAX.XE#C8Y20	Germany DAX (TR) Call MAR22 15800.00	1777	PXLXN#C8C1F	France CAC 40 Call JUN22 6450.00
512	DAX.XE#C8N7D	Germany DAX (TR) Call JUN20 12100.00	1145	DAX.XE#C8D51	Germany DAX (TR) Call MAR22 15900.00	1778	PXLXN#C8DTP4	France CAC 40 Call JUN22 6500.00
513	DAX.XE#C8R3D8	Germany DAX (TR) Call JUN20 12200.00	1146	DAX.XE#C8PYN0	Germany DAX (TR) Call MAR22 16000.00	1779	PXLXN#C8MBJ	France CAC 40 Call JUN22 6550.00
514	DAX.XE#P7J6	Germany DAX (TR) Call JUN20 12300.00	1147	DAX.XE#C8S2G	Germany DAX (TR) Call MAR22 16100.00	1780	PXLXN#C8M5W	France CAC 40 Call JUN22 6600.00
515	DAX.XE#C8O5S	Germany DAX (TR) Call JUN20 12400.00	1148	DAX.XE#C8G6P	Germany DAX (TR) Call MAR22 16200.00	1781	PXLXN#C8C0L	France CAC 40 Call JUN22 6700.00
516	DAX.XE#C8S0V6	Germany DAX (TR) Call JUN20 12500.00	1149	DAX.XE#C8R9G	Germany DAX (TR) Call MAR22 16300.00	1782	PXLXN#C8Z2T	France CAC 40 Call JUN22 6750.00
517	DAX.XE#C8Z53D	Germany DAX (TR) Call JUN20 12600.00	1150	DAX.XE#C8F1J	Germany DAX (TR) Call MAR22 16400.00	1783	PXLXN#C8K53	France CAC 40 Call JUN22 6800.00
518	DAX.XE#C840S	Germany DAX (TR) Call JUN20 12700.00	1151	DAX.XE#C8X5B	Germany DAX (TR) Call MAR22 17000.00	1784	PXLXN#C8OZJ	France CAC 40 Call JUN22 6850.00
519	DAX.XE#C818C3	Germany DAX (TR) Call JUN20 12800.00	1152	DAX.XE#C8P7J	Germany DAX (TR) Put MAR22 10000.00	1785	PXLXN#C8C7K	France CAC 40 Call JUN22 6900.00
520	DAX.XE#C84VKJ	Germany DAX (TR) Call JUN20 12900.00	1153	DAX.XE#P7J0R	Germany DAX (TR) Put MAR22 11000.00	1786	PXLXN#C8C2V2	France CAC 40 Call JUN22 7000.00
521	DAX.XE#C8RRV	Germany DAX (TR) Call JUN20 13000.00	1154	DAX.XE#P20Y4	Germany DAX (TR) Put MAR22 12000.00	1787	PXLXN#C84N4	France CAC 40 Call JUN22 7200.00
522	DAX.XE#C8P9D	Germany DAX (TR) Call JUN20 13100.00	1155	DAX.XE#C8Q8V	Germany DAX (TR) Put MAR22 13000.00	1788	PXLXN#C8P2MD	France CAC 40 Put JUN22 5600.00
523	DAX.XE#C8R9V	Germany DAX (TR) Call JUN20 13200.00	1156	DAX.XE#P9DPN	Germany DAX (TR) Put MAR22 14000.00	1789	PXLXN#FP4T10	France CAC 40 Put JUN22 5600.00
524	DAX.XE#C8HSD8	Germany DAX (TR) Call JUN20 13300.00	1157	DAX.XE#P3NYT	Germany DAX (TR) Put MAR22 14500.00	1790	PXLXN#FP7D0	France CAC 40 Put JUN22 5800.00
525	DAX.XE#C8S73M	Germany DAX (TR) Call JUN20 13400.00	1158	DAX.XE#P3DXN	Germany DAX (TR) Put MAR22 15000.00	1791	PXLXN#FP5F7	France CAC 40 Put JUN22 6000.00
526	DAX.XE#C8NMM	Germany DAX (TR) Call JUN20 13500.00	1159	DAX.XE#P3XCO	Germany DAX (TR) Put MAR22 15500.00	1792	PXLXN#FP8L8	France CAC 40 Put JUN22 6400.00
527	DAX.XE#C8K0H	Germany DAX (TR) Call JUN20 14000.00	1160	DAX.XE#P3H2T	Germany DAX (TR) Put MAR22 15300.00	1793	PXLXN#FP8R8	France CAC 40 Put JUN22 6450.00
528	DAX.XE#P8S2V	Germany DAX (TR) Put JUN20 7200.00	1161	DAX.XE#P0FT5	Germany DAX (TR) Put MAR22 15400.00	1794	PXLXN#FPJ5K4	France CAC 40 Put JUN22 6500.00
529	DAX.XE#P9H84	Germany DAX (TR) Put JUN20 7400.00	1162	DAX.XE#P2Y26	Germany DAX (TR) Put MAR22 15600.00	1795	PXLXN#FP8R1	France CAC 40 Put JUN22 6600.00
530	DAX.XE#P8N8D	Germany DAX (TR) Put JUN20 8000.00	1163	DAX.XE#P5Y99	Germany DAX (TR) Put MAR22 15700.00	1796	PXLXN#FP2B8	France CAC 40 Put JUN22 6650.00
531	DAX.XE#P28	Germany DAX (TR) Put JUN20 10500.00	1164	DAX.XE#P5F56	Germany DAX (TR) Put MAR22 15800.00	1797	PXLXN#FPF7Z	France CAC 40 Put

Número	Ticker FacSet	Opción	Número	Ticker FacSet	Opción	Número	Ticker FacSet	Opción
587	DAX.XEX#CF8BB	Germany DAX (TR) Call SEP20 12700.00	1230	DAX.XEX#P1TOR	Germany DAX (TR) Put JUN22 15100.00	1863	PXLENX#PNVHT	France CAC 40 Put DEC22 4000.00
598	DAX.XEX#CMD03	Germany DAX (TR) Call SEP20 12800.00	1231	DAX.XEX#PW14Z	Germany DAX (TR) Put JUN22 15200.00	1864	PXLENX#P7GD7	France CAC 40 Put DEC22 4400.00
599	DAX.XEX#CLL53	Germany DAX (TR) Call SEP20 12900.00	1232	DAX.XEX#P6QPM	Germany DAX (TR) Put JUN22 15300.00	1865	PXLENX#P4YJY	France CAC 40 Put DEC22 4800.00
600	DAX.XEX#C7014	Germany DAX (TR) Call SEP20 13000.00	1233	DAX.XEX#P6QJKP	Germany DAX (TR) Put JUN22 15400.00	1866	PXLENX#P4VVD	France CAC 40 Put DEC22 4900.00
601	DAX.XEX#C0F7S	Germany DAX (TR) Call SEP20 13100.00	1234	DAX.XEX#P8JSC	Germany DAX (TR) Put JUN22 15500.00	1867	PXLENX#P6Y13	France CAC 40 Put DEC22 5000.00
602	DAX.XEX#CNF6N	Germany DAX (TR) Call SEP20 13200.00	1235	DAX.XEX#PKK4M	Germany DAX (TR) Put JUN22 15600.00	1868	PXLENX#PXYKB	France CAC 40 Put DEC22 5200.00
603	DAX.XEX#C64WS	Germany DAX (TR) Call SEP20 13300.00	1236	DAX.XEX#PMSBT	Germany DAX (TR) Put JUN22 15700.00	1869	PXLENX#PQS49	France CAC 40 Put DEC22 5400.00
604	DAX.XEX#CHC8B	Germany DAX (TR) Call SEP20 13400.00	1237	DAX.XEX#PNX5R	Germany DAX (TR) Put JUN22 15800.00	1870	PXLENX#PSL8N	France CAC 40 Put DEC22 5500.00
605	DAX.XEX#CTJ2D	Germany DAX (TR) Call SEP20 13500.00	1238	DAX.XEX#PV3SG	Germany DAX (TR) Put JUN22 15900.00	1871	PXLENX#PRLT	France CAC 40 Put DEC22 5600.00
606	DAX.XEX#CQDIX	Germany DAX (TR) Call SEP20 14000.00	1239	DAX.XEX#P1MWB	Germany DAX (TR) Put JUN22 16000.00	1872	PXLENX#PXM3G	France CAC 40 Put DEC22 5700.00
607	DAX.XEX#C33WR	Germany DAX (TR) Call SEP20 14500.00	1240	DAX.XEX#P3TMM	Germany DAX (TR) Put JUN22 16100.00	1873	PXLENX#PNR6V	France CAC 40 Put DEC22 5800.00
608	DAX.XEX#P8GP2	Germany DAX (TR) Put SEP20 7000.00	1241	DAX.XEX#P8KDT	Germany DAX (TR) Put JUN22 16200.00	1874	PXLENX#PMDZP	France CAC 40 Put DEC22 5900.00
609	DAX.XEX#PQJ10	Germany DAX (TR) Put SEP20 8000.00	1242	DAX.XEX#PVWJS	Germany DAX (TR) Put JUN22 16300.00	1875	PXLENX#PKNPF	France CAC 40 Put DEC22 6000.00
610	DAX.XEX#PHS2F	Germany DAX (TR) Put SEP20 8200.00	1243	DAX.XEX#P77NB	Germany DAX (TR) Put JUN22 16400.00	1876	PXLENX#P6941	France CAC 40 Put DEC22 6100.00
611	DAX.XEX#P7WNL	Germany DAX (TR) Put SEP20 8400.00	1244	DAX.XEX#P5VT5	Germany DAX (TR) Put JUN22 16500.00	1877	PXLENX#P8JRN	France CAC 40 Put DEC22 6200.00
612	DAX.XEX#PPJTX	Germany DAX (TR) Put SEP20 8500.00	1245	DAX.XEX#P27WS	Germany DAX (TR) Put JUN22 17000.00	1878	PXLENX#P2GZQ	France CAC 40 Put DEC22 6300.00
613	DAX.XEX#P3KZZ	Germany DAX (TR) Put SEP20 8600.00	1246	DAX.XEX#CD2X7	Germany DAX (TR) Call SEP22 11000.00	1879	PXLENX#PT25J	France CAC 40 Put DEC22 6350.00
614	DAX.XEX#PCL3T	Germany DAX (TR) Put SEP20 8800.00	1247	DAX.XEX#C9KJ1	Germany DAX (TR) Call SEP22 12000.00	1880	PXLENX#PM89X	France CAC 40 Put DEC22 6400.00
615	DAX.XEX#P2H69	Germany DAX (TR) Put SEP20 9000.00	1248	DAX.XEX#CL5Y6	Germany DAX (TR) Call SEP22 12500.00	1881	PXLENX#PBLP3	France CAC 40 Put DEC22 6450.00
616	DAX.XEX#PORFN	Germany DAX (TR) Put SEP20 9100.00	1249	DAX.XEX#C42VH	Germany DAX (TR) Call SEP22 13000.00	1882	PXLENX#PL9YX	France CAC 40 Put DEC22 6500.00
617	DAX.XEX#PK90Z	Germany DAX (TR) Put SEP20 9200.00	1250	DAX.XEX#CSP05	Germany DAX (TR) Call SEP22 13100.00	1883	PXLENX#PCFNV	France CAC 40 Put DEC22 6550.00
618	DAX.XEX#P1BTF	Germany DAX (TR) Put SEP20 9300.00	1251	DAX.XEX#CDNHO	Germany DAX (TR) Call SEP22 13200.00	1884	PXLENX#PM2H5	France CAC 40 Put DEC22 6600.00
619	DAX.XEX#PX558	Germany DAX (TR) Put SEP20 9400.00	1252	DAX.XEX#CHNJ3	Germany DAX (TR) Call SEP22 13300.00	1885	PXLENX#PR8CS	France CAC 40 Put DEC22 6650.00
620	DAX.XEX#PFC66	Germany DAX (TR) Put SEP20 9500.00	1253	DAX.XEX#CYJ49	Germany DAX (TR) Call SEP22 13400.00	1886	PXLENX#P4QVU	France CAC 40 Put DEC22 6700.00
621	DAX.XEX#PW99F	Germany DAX (TR) Put SEP20 9600.00	1254	DAX.XEX#CZDS3	Germany DAX (TR) Call SEP22 13500.00	1887	PXLENX#P2WWH	France CAC 40 Put DEC22 6750.00
622	DAX.XEX#PFTJ1	Germany DAX (TR) Put SEP20 9700.00	1255	DAX.XEX#CQNVV	Germany DAX (TR) Call SEP22 13600.00	1888	PXLENX#PDM0M	France CAC 40 Put DEC22 6800.00
623	DAX.XEX#Q0M91	Germany DAX (TR) Put SEP20 9800.00	1256	DAX.XEX#C98SS	Germany DAX (TR) Call SEP22 13700.00	1889	PXLENX#PFSPR	France CAC 40 Put DEC22 6850.00
624	DAX.XEX#PFRWG	Germany DAX (TR) Put SEP20 9900.00	1257	DAX.XEX#C7WH7	Germany DAX (TR) Call SEP22 13800.00	1890	PXLENX#PL3R8	France CAC 40 Put DEC22 6900.00
625	DAX.XEX#PQ0DJ	Germany DAX (TR) Put SEP20 10000.00	1258	DAX.XEX#CPGTM	Germany DAX (TR) Call SEP22 13900.00	1891	PXLENX#PS17H	France CAC 40 Put DEC22 6950.00
626	DAX.XEX#P4SB0	Germany DAX (TR) Put SEP20 10100.00	1259	DAX.XEX#CNT05	Germany DAX (TR) Call SEP22 14000.00	1892	PXLENX#PVFJF	France CAC 40 Put DEC22 7000.00
627	DAX.XEX#PL3BT	Germany DAX (TR) Put SEP20 10200.00	1260	DAX.XEX#C5BX5	Germany DAX (TR) Call SEP22 14100.00	1893	PXLENX#PR0RZ	France CAC 40 Put DEC22 7050.00
628	DAX.XEX#P3Z3Q	Germany DAX (TR) Put SEP20 10300.00	1261	DAX.XEX#C8TKK	Germany DAX (TR) Call SEP22 14200.00	1894	PXLENX#PD170	France CAC 40 Put DEC22 7100.00
629	DAX.XEX#PJ14Q	Germany DAX (TR) Put SEP20 10400.00	1262	DAX.XEX#C8O4B	Germany DAX (TR) Call SEP22 14300.00	1895	PXLENX#PGBDZ	France CAC 40 Put DEC22 7200.00
630	DAX.XEX#P9ZW2	Germany DAX (TR) Put SEP20 10500.00	1263	DAX.XEX#CLQLG	Germany DAX (TR) Call SEP22 14400.00	1896	PXLENX#PK0C6	France CAC 40 Put DEC22 7400.00
631	DAX.XEX#P08L9	Germany DAX (TR) Put SEP20 10600.00	1264	DAX.XEX#C55YX	Germany DAX (TR) Call SEP22 14500.00	1897	PXLENX#PY089	France CAC 40 Put DEC22 7600.00
632	DAX.XEX#PC904	Germany DAX (TR) Put SEP20 10700.00	1265	DAX.XEX#CN2KS	Germany DAX (TR) Call SEP22 14600.00	1898	PXLENX#PDKFT	France CAC 40 Put DEC22 8000.00
633	DAX.XEX#PNRJR	Germany DAX (TR) Put SEP20 10800.00	1266	DAX.XEX#CPYL8	Germany DAX (TR) Call SEP22 14700.00			

## Anexo VIII: Función Volatilidad Implícita VBA

Para el cálculo de las volatilidades implícitas se ha utilizado:

```
Function OpcionesEuropeas(CallOrPut, S, K, v, r, T)
    Dim d1 As Double, d2 As Double, nd1 As Double, nd2 As Double
    Dim nnd1 As Double, nnd2 As Double
    d1 = (Log(S / K) + (r + 0.5 * v ^ 2) * T) / (v * Sqr(T))
    d2 = (Log(S / K) + (r - 0.5 * v ^ 2) * T) / (v * Sqr(T))
    nd1 = Application.NormSDist(d1)
    nd2 = Application.NormSDist(d2)
    nnd1 = Application.NormSDist(-d1)
    nnd2 = Application.NormSDist(-d2)
    If CallOrPut = "C" Then
        OpcionesEuropeas = S * nd1 - K * Exp(-r * T) * nd2
    Else
        OpcionesEuropeas = -S * nnd1 + K * Exp(-r * T) * nnd2
    End If
End Function

Function VolatilidadImplicita(CallOrPut, S, K, r, T, OptionValue, guess)
    Dim epsilon As Double, dVol As Double, vol_1 As Double
    Dim i As Integer, maxIter As Integer, Value_1 As Double, vol_2 As Double
    Dim Value_2 As Double, dx As Double
    dVol = 1E-05
    epsilon = 1E-05
    maxIter = 100
    vol_1 = guess
    i = 1
    Do
        Value_1 = OpcionesEuropeas(CallOrPut, S, K, vol_1, r, T)
        vol_2 = vol_1 - dVol
        Value_2 = OpcionesEuropeas(CallOrPut, S, K, vol_2, r, T)
        dx = (Value_2 - Value_1) / dVol
        If Abs(dx) < epsilon Or i = maxIter Then Exit Do
        vol_1 = vol_1 - (OptionValue - Value_1) / dx
        i = i + 1
    Loop
    VolatilidadImplicita = vol_1
End Function
```